Е.Ә. Қасымов

МАТЕМАТИКАНЫҢ АРНАЙЫ КУРСТАРЫ

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z)$$
$$x, y, z \in X$$

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И.СӘТБАЕВ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Е.Ә. Қасымов

МАТЕМАТИКАНЫҢ АРНАЙЫ КУРСТАРЫ

Қазақстан Республикасы Білім және
ғылым министрлігі оқулық ретінде ұсынған

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z)$$
$$x, y, z \in X$$

Алматы 2005

ЖОК 517(075)
ББК 22№ 1я 73
Қ 45

Қ 45 Е.Ә. Қасымов. Математиканың арнайы курстары: Оқулық – Алматы: ҚазҰТУ, 2005, 333 б.

ISBN 9965–758–03–4

Бұл оқулықта нақты және комплекс айнымалы функциялар теориясы, Фурье мен Лаплас түрлендірулері және функционалдық анализдің арнайы курстары қамтылған.

Оқулық техникалық жоғары оқу орындарының студенттеріне арналған.

Сурет – 29. Әдебиеттер тізімі – 29 атау.

ББК 22№ 1я 73

Пікір жазғандар: *А. Сақабеков,* ҚБТУ-дің оқу-ісі жөніндегі проректоры, физ.-мат. ғыл. докторы, профессор;
Қ.Көксалов, ҚБТУ-дің ғылыми-жаратылыстану пәндер кафедрасының меңгерушісі, физ.-мат. ғыл. докторы, профессор;

Қ $\frac{1602000000}{00(05)05}$

ISBN 9965–758–03–4
© ҚазҰТУ 2005

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз 8

I ТАРАУ

НАҚТЫ АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

1.1. Жиындардың эквиваленттілігі..... 9
1.2. Саналымды жиындар..... 13
1.3. Континуум қуаттылығы..... 16
1.4. Тұйық жиындар..... 18
1.5. Ішкі нүктелер және ашық жиындар..... 20
1.6. Шектелген ашық және тұйық жиындардың құрылысы 22
1.7. Шектелген ашық жиынның өлшемі..... 24
1.8. Шектелген тұйық жиынның өлшемі..... 25
1.9. Шектелген жиынның ішкі және сыртқы өлшемдері..... 27
1.10. Өлшемді жиындар..... 28
1.11. Өлшемді функциялар..... 29
1.12. Өлшемді функциялар тізбегінің өлшем бойынша жинақтылығы 33
1.13. Лебег интегралының анықтамасы..... 35
1.14. Лебег интегралының қасиеттері..... 39
1.15. Лебег интегралы астынан шекке көшу..... 41
1.16. Қосындылы функция..... 42
1.17. Квадратымен қосындылы функция..... 44
1.18. Орташа және әлсіз жинақтылықтар..... 48
1.19. Өзгерісі шектеулі функция..... 50
1.20. Стильтес интегралы..... 52
1.21. Абсолютті үзіліссіз функция..... 53

II ТАРАУ

КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

2.1.	Комплекс сандар.....	56
2.2.	Комплекс сандарға орындалатын амалдар.....	61
2.3.	Комплекс сандар тізбегі.....	66
2.4.	Комплекс сандар қатары.....	71
2.5.	Комплекс айнымалы функция туралы түсінік.....	74
2.6.	Комплекс айнымалы функцияның шегі және үзіліссіздігі	77
2.7.	Комплекс айнымалы тізбек және қатар.....	79
2.8	Комплекс айнымалы функцияның туындысы және дифференциалы	85
2.9.	Қарапайым трансценденттік функциялар.....	88
2.10.	Комплекс айнымалы функцияның интегралының анықтамасы	90
2.11.	Коши теоремасы.....	94
2.12.	Контур бойынша алынған интегралдың интегралдау жолына тәуелсіздігі	96
2.13.	Анықталған және анықталмаған интегралдар	98
2.14.	Коши формуласы (интегралы).....	99
2.15.	Тейлор қатары.....	103
2.16.	Лоран қатары.....	105
2.17.	Аналитикалық функцияның нөлдері.....	114
2.18.	Ерекше нүктелер.....	116
2.19.	Оқшауланған нүкте үшін функция қалындысының анықтамасы	119
2.20.	Функция қалындысының негізгі теоремасы.....	121
2.21.	Функцияның қалындысын полюстер үшін есептеу.....	122
2.22.	Логорифмдік қалынды.....	127
2.23.	Шексіз қашық нүкте үшін функцияның қалындысы.....	129

III ТАРАУ
ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУІ

3.1.	Функцияның нүктедегі біржақты шектері және негізгі ұғымдар	132
3.2.	Тригонометриялық қатардың бірқалыпты жинақтылығы	138
3.3.	Фурье қатарының комплекс түрі	139
3.4	Фурье қатарының жинақтылығы	141
3.5.	Фурье қатарының бірқалыпты жинақтылығы	143
3.6.	Фурье түрлендіруі	146
3.7.	Фурье түрлендіруінің үзіліссіздігі	148
3.8.	Фурье түрлендіруінің формуласы	149
3.9.	Дифференциалдау амалы	152
3.10.	Фурье түрлендіруі және үйірткі	153
3.11.	Жылу өткізгіштіктің теңдеуін Фурье түрлендіруімен шешу	154

IV ТАРАУ

ЛАПЛАС ТҮРЛЕНДІРУІ

4.1.	Лаплас түрлендіруінің анықтамасы	157
4.2.	Түпнұсқаның қасиеттері	160
4.3.	Лаплас түрлендіруінің негізгі қасиеттері	164
4.4.	Кескіннің бар болуы туралы теорема	168
4.5.	Лаплас түрлендірудің сызықты қасиеті	170
4.6.	Лаплас түрлендірудің ұқсастық және кешігу қасиеттері	172
4.7.	Лаплас түрлендірудің озу қасиеті	175
4.8.	Лаплас түрлендіруінің ығысу қасиеті	178
4.9.	Түпнұсқа дифференциалының кескіні	179
4.10.	Кескінді дифференциалдау қасиеті	182
4.11.	Түпнұсқаны интегралдау	184
4.12.	Кескінді интегралдау қасиеті	185
4.13.	Кескіндер көбейтіндісінің қасиеті	187
4.14.	Дюамель формуласы	191
4.15.	Түпнұсқалардың көбейтіндісі туралы теорема	191
4.16.	Парсеваль формуласы және кескіннің ұқсастық қасиеті	192
4.17.	Параметр бойынша шекке көшу, дифференциалдау және интегралдау	194
4.18.	Түпнұсқа мен кескіннің кестелері	196

4.19. Дәрежелі функцияның кескіні..... 197

4.20. Кескіннің рационал функция болуының қажетті әрі жеткілікті шарты..... 203
4.21. Ықтималдық интегралмен байланысты функциялардың кескіні..... 205
4.22. Интегралдық синус пен косинустың кескіні 208
4.23. Френель интегралының кескіні..... 209
4.24. Көрсеткіштік функция интегралының кескіні..... 210
4.25. Кейбір цилиндрлік функциялардың кескіні..... 211
4.26. Тұрақты коэффициентті сызықты дифференциал теңдеуді шешу 213
4.27. Сызықты дифференциал теңдеуді Дюамель интегралы әдісімен шешу..... 216
4.28. Айнымалы коэффициентті екінші дәрежелі сызықты дифференциал теңдеуді шешу..... 219
4.29. Тұрақты коэффициентті сызықты дифференциалды теңдеулер жүйесі 221
4.30. Үйірткі түрдегі Вольтердің интегралдық теңдеуін шешу..... 223
4.31. Тұрақты коэффициентті дербес туындылы сызықты дифференциал теңдеуді шешу..... 226
4.32. Шектік теоремаларды және Парсеваль формуласын пайдаланып, меншіксіз интегралдарды есептеу..... 230
4.33. Фурье мен Лаплас түрлендірулерінің арасындағы байланыс..... 232

V ТАРАУ

ФУНКЦИОНАЛДЫҚ АНАЛИЗ

5.1. Метрикалық кеңістіктер және негізгі ұғымдар..... 235
5.2. Шектік нүктелер. Ашық және тұйық жиындар..... 239
5.3. Метрикалық кеңістіктерге мысалдар..... 244
5.4. Толық метрикалық кеңістіктер..... 253
5.5. Енгізілген шарлар теоремасы..... 258
5.6. Метрикалық кеңістіктерді толықтыру..... 261
5.7. Қысылған бейнелер принципі..... 265
5.8. Итерация әдісімен сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешу..... 267

5.9.	Интегралдық теңдеу шешімінің бар және оның тек біреу ғана болуы	269
5.10.	Сепарабельді кеңістіктер	271
5.11.	Метрикалық кеңістіктердегі компактілі жиындар	272
5.12.	Метрикалық кеңістіктердің компактілігі	274
5.13.	Нормаланған кеңістіктер	276
5.14.	$L_p[a,b]$ нормаланған кеңістік	279
5.15.	Гильберт кеңістігі	282
5.16.	Гильберт кеңістігіндегі элементтердің ортогоналдылығы	285
5.17.	$L_2[a,b]$ кеңістігі	287
5.18.	Аддитивті операторлар	288
5.19.	Сызықты операторлар	290
5.20.	Сызықты операторлардың шектелуі	292
5.21.	Сызықты операторлардың нормасы және нормалардың эквиваленттілігі	295
5.22.	Операторлардың қосындысы және көбейтіндісі	297
5.23.	Шектелген сызықты операторлар кеңістігі	299
5.24.	Операторлардың бірқалыпты және нүктелі жинақтылығы	301
5.25.	Кері операторлар	303
5.26.	Үзіліссіздік бойынша операторды кеңейту	306
5.27.	Сызықты функционал	308
5.28.	Нормаланған кеңістіктердегі функционалдардың жалпы түрі	310
5.29.	Гильберт кеңістіктегі сызықты функционалдың жалпы түрі	315
5.30.	Түйіндес және рефлексифті кеңістіктер	317
5.31.	Функционалдардың әлсіз жинақтылығы	319
5.32.	Түйіндес операторлар	320
5.33.	Гильберт кеңістіктегі түйіндес операторлар	322
5.34.	Өзіне түйіндес және унитар операторлар	324
5.35.	Тұйық оператор	326
5.36.	Түйіндес операторлардың жалпы анықтамасы	329
5.37.	Симметриялы операторлар	330
Әдебиеттер тізімі		332

Ерде отырып, ерге қарап сөйлегеннен без.
Әбдіхалық

Алғы сөз

Бұл кітапта техникалық жоғары оқу орындарында оқылатын «Нақты айнымалы функциялар теориясы», «Комплекс айнымалы функциялар теориясы», «Интегралдық түрлендірулер», «Операциалық есептеу» және «Функционалдық анализ» атты арнайы курстар қамтылған.

1–тарауда нақты айнымалы функциялар, ал 2–тарауда комплекс айнымалы функциялар теориясы қысқа баяндалады. 3–тарауда Фурье түрлендіруі, ал 4–тарауда Лаплас түрлендірулері қарастырылған. 5–тарау функционалдық анализ курсына арналған. Тараулардың әр тақырыбы соңында теорияны толық меңгеру үшін мысалдар қарастырылып, олардың шығару жолдары толық келтірілген.

«Санат» баспасынан 1997 жылы жарық көрген ағайынды Қасымовтардың «Жоғары математика курсы» (Сызықты алгебра, 2-том) кітабы қазақ тіліндегі сызықты алгебраның толық курсына арналған тұңғыш оқулық.

С.Аяпбергеновтың 1971 жылы шыққан «Аналитикалық геометриясы» қазақ тілінде аналитикалық геометриядан жазылған алғашқы кітап. 1994 жылы аналитикалық геометрияның толық курсына арналған Қасымовтардың «Жоғары математика курсы» (Аналитикалық геометрия, 1-том) жарық көрді.

1958 жылы О.А.Жәутіковтың «Математикалық анализ курсы», 1963–1970 жылдар арасында, Х.И. Ибрашев пен Ш.Т. Еркеғұловтың «Математикалық анализ курсы», 1969-1973 жылдары Б.Т. Төлегеновтың «Математикалық анализден лекциялар курсы», 1985 жылы Қ.Қабдықайыров пен Р.Еселбаеваның «Дифференциалдық және интегралдық есептеулер» атты қысқаша курсы, 1987–1998 жылдары Н.Темірғалиевтың «Математикалық анализ» кітаптары жарық көрген.

Техникалық университеттерде жоспар бойынша оқылатын жоғарыдағы арнайы курстар ағайынды Қасымовтардың да және жоғарыда аталған авторлардың да оқулықтарында қарастырылмаған. Сондықтан ұсынылып отырған «Математиканың арнайы курстары» кітабы осы олқылықтардың орнын толтырар деп ойлаймын.

Автор

I ТАРАУ

НАҚТЫ АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

1.1. Жиындардың эквиваленттілігі

Математикада және жиындар теориясында жиын ұғымы негізгі ұғымдардың бірі болып табылады. *Жиын* деп әртүрлі заттардан құралған жаңа затты айтамыз. **Мысалы**, мектептегі оқушылар жиыны, алфавиттегі әріптер жиыны, натурал сандар жиыны, түзудің бойындағы нүктелер жиыны, дөңгелектің ішкі нүктелер жиыны т.с.с.. Жиынның құрамындағы заттар *жиынның элементтері* деп аталады. **Мысалы,** алфавиттегі әріптер жиынындағы әрбір әріп осы жиынның элементі болып табылады. Жиын үлкен латын әріптерімен белгіленеді, мысалы $A, B, C, D, \ldots$, ал осы жиындардың элементтері кіші латын немесе грек әріптерімен белгіленеді: $a, b, c, d, \alpha, \gamma, \beta, \ldots$ Кез келген *жиын берілді* дейміз, егер жиын қандай элементтерден тұратынын түгендеп шыға алатын болсақ немесе жиын элементтерінің қасиеттерін пайдаланып, элементтің осы жиында жататынын немесе жатпайтынын анықтай алсақ. **Мысалы**, жұп сандар жиынын қарастырғанда, осы жиынның кез келген элементі екі санына қалдықсыз бөлінеді. Сонымен, жиын берілгенде осы жиынға тән заң немесе ереже белгіленеді. Осы заң мен ереже арқылы жиынның элементтері анықталады.

Бірдей элементтерден анықталған A мен B *жиындары тең* деп аталады және олардың теңдігі $A = B$ таңбамен білгіленеді. **Мысалы**, $A = \{3, -5\}$ жиын мен $B = \{x : x^2 + 2x - 15 = 0\}$ (B жиын, $x^2 + 2x - 15 = 0$ теңдеуінің түбірлерінен анықталған) жиындары тең жиындар. Егер A жиынының кез келген элементі B жиынының элементі болса, онда A жиын B жиынның *жиыншасы* (ішкі жиыны) деп аталады. Бұл жағдайда A жиыны B жиынында жатады дейді және былай белгіленеді: $A \subset B$ немесе $B \supset A$. **Мысалы,** $A = \{-1, 2, 0, 5\}$, $B = \{-7, -3, -1, 5, 0, 7, 2\}$ жиындарын қарастырайық. Мұнда A жиынының кез келген элементі B жиынның да элементі, ал B жиынында A жиынының элементі болмайтын элементтер де бар, сонда $A \subset B$.

Егер қарастырып отырған жиында бірде-бір элемент болмаса, онда бұл жиын *бос жиын* деп аталады және ол $\varnothing$ таңбамен

белгіленеді. Демек, бос жиын кез келген жиынның жиыншасы бола алады. **Мысалы**, A жиыны $-8,\ 2{,}7,\ 9{,}3$ элементтерден анықталса, онда мына жиындар: $\{7{,}2\}, \{2{,}7{,}9\}, \{9{,}2\}, \{7{,}9\}, \varnothing$ берілген $A = \{-8{,}2{,}7{,}9{,}3\}$ жиынның жиыншасы болып табылады.

Кез келген жиындарды зерттеп тану үшін оларды түрлерге бөлмей зерттеу мүмкін емес. Сондықтан жиындарды екі жиынға бөлуге келісейік, яғни *шексіз* және *шектелген* жиындар. Егер жиынның элементтерін сан арқылы көрсете алсақ, онда ол жиын *шектелген жиын* деп аталады. Бұл жағдайда анықтамадағы санды білу не білмеу міндет емес, сол санның бар болуы ғана маңызды. **Мысалы**, бүкіл әлемдегі кітапханалардағы кітаптардың парақтарынан анықталған жиын шектелген жиын болады. Егер жиын тек бір ғана элементтен анықталса, онда ол *бір элементті жиын* деп аталады. **Мысалы,** $3x = 18$ теңдеуінің түбірінен анықталған жиын бірэлементті жиын болады. Егер жиын шектелмеген болса, онда ол *шексіз жиын* деп аталады. **Мысалы**, рационал сандар жиыны шексіз жиын болады.

Бізге шектелген A мен B жиындары берілсін және A жиыны n элементтен, B жиыны m элементтен анықталсын. Онда m мен n сандарының арасында мына үш шарттың бірі ғана орындалады:

$$n = m, \quad m > n, \quad m < n. \tag{1.1}$$

Осы үш шарттың қайсысы орындалатынын A мен B жиындарының элементтерін санап көз жеткізуге болады.

Егер берілген A мен B жиындары шексіз жиындар болса, онда жиындардың элементтерін санаудың реті жоқ, яғни жиындардың элементтерінің саны туралы сөз қозғаудың қажеті жоқ.

Сондықтан, бұл жағдайда *өзара бір мәнді сәйкестік* деп аталатын әдісті пайдаланған тиімді.

Анықтама. Егер A жиынының кез келген бір a элементіне, яғни $a \in A$ белгілі бір ереже немесе заңдылық арқылы B жиынынан тек бір ғана b элементі сәйкес қойылса және керісінше, әрбір $b \in B$ элементке заңдылық немесе ереже бойынша тек бір ғана $a \in A$ элемент сәйкес қойылса, онда A мен B жиындар арасында *өзара бір мәнді сәйкестік* бар дейміз.

Анықтама. Егер A мен B жиындары арасында өзара бірмәнді сәйкестік қойылса, онда олар *эквивалентті* немесе *қуаттылығы бірдей жиындар* деп аталады және ол былай белгіленеді: $A \sim B$.

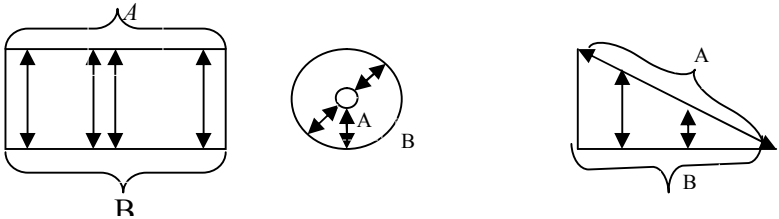
Осы анықтамалардан : *шектелген A мен B жиындары эквивалентті болу үшін олардың элементтерінің саны тең болуы қажетті әрі жеткілікті.*

Сонымен, эквивалентті жиындарға мына қасиеттер орындалады:

а) $A \sim A$;

в) егер $A \sim B$ болса, онда $B \sim A$;

с) егер $A \sim B$, $B \sim C$ болса, онда $A \sim C$



1- сурет

Мысалы, A мен B жиындары тік төртбұрыштың параллель қабырғаларының нүктелері болсын (1-сурет). A мен B жиындары эквивалентті болатынын суреттен байқауға болады. Егер осы жиындар концентрлік шеңберлердің бойындағы нүктелер болса (1-сурет), онда $A \sim B$ болады. Ал егер осы шеңберлердің әрқайсысын бір жерден үзіп түзесек, онда B шеңберге сәйкес келетін l_B түзуі A шеңбердің l_A түзуінен ұзын болады, яғни l_B түзуінің бойындағы нүктелер саны l_A түзуінің бойындағы нүктелер санынан көп деген тұжырым ойға келеді, ал негізінде олай емес. Енді 1-суреттегі тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасын (A жиынды) табанындағы катетке (B жиынға) беттестірейік, онда B жиын A жиынның жиыншасы: $B \subset A$. Егер $B \subset A$ болса, онда B жиын A жиынның *дұрыс бөлігі* деп аталады. Жоғарыдағы суретте бейнеленген жиындар эквивалентті жиындар, яғни $A \sim B$.

Мысалы, натурал сандар N жиынымен жұп сандар M жиыны эквивалентті жиындар. Шынында да, M мен N жиындары арасында бірмәнді сәйкестікті қоюға болады, яғни әрбір $n \in N$ натурал санына M жиынынан жұп $m = 2n \in M$ саны сәйкес келеді және керісінше әрбір $m = 2n \in M$ жұп санына N жиынынан натурал $n \subset N$ саны сәйкес келеді.

Демек, екі жиынның эквиваленттігін анықтау үшін төмендегі екі әдістің бірімен анықтаймыз:

1) жиындардың элементтерін санап, оларды салыстыру;

2) жиындар элементтерінің арасындағы өзара бір мәнді сәйкестікті анықтау.

Біз (1.1) формуладағы шарттардың бірі орындалатын A мен B шектелген жиындарды қарастырайық. Егер *A* мен *B* жиындары арасында өзара бір мәнділік сәйкестік орындалса ғана, яғни олар эквивалентті болса, 1.1–формуладағы $n = m$ теңдігі орындалады. Ал екінші шарт: егер олардың арасында өзара бір мәнділік сәйкестік қойылмаса, $m > n$ орындалады. Бірақ мұндай сәйкестікті *A* жиынының A_1 жиыншасы $(A_1 \subset A)$ мен *B* жиыны арасында қоюға болады; Егер *A* мен *B* жиындары эквивалентті болмаса, үшінші $m < n$ шарт орындалады. Бірақ мұндай сәйкестікті *B* жиынының B_1 жиыншасы мен *A* жиын арасында қоюға болады.

Енді шектелген *A* мен *B* жиындары эквивалентті болсын, яғни олар саны санаулы элементтерден анықталған және олардың элементтерінің саны өзара тең. Сондықтан шектелген жиын элементтерінің саны бір-бірімен эквивалентті барлық шектелген жиындарға ортақ.

Бізге кез келген *A* жиын (шектелген, шексіз) берілсін. Берілген *A* жиыны мен осы жиынға эквивалентті барлық жиындарды қарастырайық. Онда эквивалентті жиындардың қасиеті бойынша , *A* жиынға эквивалентті жиындар өзара эквивалентті болады. Осы эквивалентті жиындардың бәрі *өзара эквивалентті жиындар класын* құрайды дейміз. Демек, әртүрлі шексіз өзара эквивалентті жиындар кластарын құрастыруға болады және әртүрлі кластағы екі жиын эквивалентті бола алмайды. Өзара эквивалентті әрбір кластағы жиындарға лайықты α символын белгілейік.

Анықтама. Кез келген *A жиынның қуаты* деп *A* жиынға эквивалентті барлық жиындарда бар ортақ α символын айтамыз және *A* жиынның қуаты $\alpha = \overline{\overline{A}}$ таңбамен белгіленеді.

Егер *A* шектелген жиын болса, онда оның қуаты жиын элементтерінің санына тең. Егер шектелген *A* және *B* жиындары эквивалентті болса, онда олардың қуаттары тең болады, яғни $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, ал егер A_1 мен A_2 жиындары эквивалентті болмаса, онда біз оларға әртүрлі α_1 мен α_2 символдарын белгілейміз. Сонымен, бізге өзара эквивалентті класс $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ жиындары берілсе, онда бұл класқа α символын белгілейміз, яғни $\alpha = \overline{\overline{A_1}}, \alpha = \overline{\overline{A_2}}, \ldots, \alpha = \overline{\overline{A_n}}, \ldots$

A мен *B* жиындарына мына үш жағдайдың бірі орындалады:

а) $A \sim B_1$, мұндағы $B_1 \subset B$, ал B жиыны A жиынының кез келген жиыншасына эквивалентті емес;

ә) $B \sim A_1$, мұндағы $A_1 \subset A$, ал A жиыны B жиынының кез келген жиыншасына эквивалентті емес;

б) $A \sim B_1$ және $A_1 \sim B$, мұндағы $B_1 \subset B$, $A_1 \subset A$.

Егер A мен B жиындарына а) жағдай орындалса, онда $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$;

б) жағдай орындалса, онда $\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}}$;

в) жағдай орындалса, онда $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ болады деп атайтын боламыз.

Осы айтылған, егер A мен B шектелген жиын болса, онда жоғарыдағы а) – б) жағдайларға сәйкес мына қатынастар орындалады: $m < n$, $m > n$, $m = n$, мұндағы m мен n сандары сәйкес A мен B жиындарының элементтерінің саны.

1.1–теорема. Егер $A \supset A_1 \supset A_2$ және $A \sim A_2$, болса, онда $A \sim A_1$.

1.2. Саналымды жиындар

Анықтама. Егер кез келген A жиын натуралды сандар $N = \{1,2,3,\ldots\}$ жиынына эквивалентті болса, онда A жиыны *саналымды жиын* деп аталады немесе жиынның *«қуаты* a*»* деп аталады және былай белгіленеді $\overline{\overline{N}} = a$.

Осы анықтамадан: *барлық саналымды жиындар өзара эквивалентті болады.*

Осы анықтамаға эквивалентті мына анықтаманы келтірейік: *A жиыны саналымды жиын* деп аталады, егер натурал сандар жиынының элементтері A жиыны элементтерінің индексі болатындай етіп, A жиынының элементтерін нөмірлей алсақ, бұл жағдайда, A жиынының элементтерін шексіз тізбек ретінде нөмірлейміз, яғни

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Демек, натурал N жиынының бір n элементіне A жиынының тек бір ғана a_n элементі сәйкес келеді.

Саналымды жиындарға төмендегі мысалдар бола алады:

$$A=\{1,3,5,\ldots,2n-1,\ldots\},\ B=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\},$$
$$C=\{2,4,6,\ldots,2n,\ldots\},\ D=\{3,6,9,\ldots,3n,\ldots\}.$$

«Ең кіші қуатты шексіз жиын бар ма?», – деген сұраққа жауап іздестірейік. Ол үшін $N=\{1,2,\ldots\}$ натурал сандар жиынын қарастырайық және оның қуаты $\overline{\overline{N_0}}$ болсын. Енді кез келген шексіз M жиынын алайық. M жиынынан бір элементін алып, оны m_1 таңбамен белгілейік, содан соң m_1-ден өзге m_2 элементін алайық, осылайша жалғастырайық. Қарастырып отырған M шексіз жиын болғандықтан элементтерді алу процесін шексіз жалғастыруға болады. Нәтижесінде M жиынынан оның жиыншасы болатын M_1 жиынды бөліп аламыз және оның элементтерін N жиынның барлық элементтері арқылы нөмірледік. Онда жиындардың эквиваленттілігінің анықтамасынан $M_1 \sim N$ болады. M жиынның қуатын $\overline{\overline{M}}$ таңбамен белгілейік, онда $\overline{\overline{N_0}} \leqslant \overline{\overline{M}}$. Осыдан, *кез келген шексіз жиынның қуаты үлкен немесе тең*:

1) натурал сандар жиынның қуатынан;

2) N натурал сандар жиынына эквивалентті кез келген жиынның қуатынан. Сонымен, натурал сандар жиынның қуаты шексіз жиындардың ең кіші қуаты болады.

1.2-теорема. Кез келген шексіз A жиыннан саналымды A_1 жиынша бөліп алуға болады.

Дәлелдеуі. Шексіз A жиыннан кез келген a_1 элементті бөліп алайық. Қалған $A \setminus \{a_1\}$ немесе $A-\{a_1\}$ жиыннан a_2 элементті алайық. Енді $A \setminus \{a_1; a_2\}$ жиыннан a_3 элементті бөліп алайық. A жиыны шексіз жиын болғандықтан, элементті бөліп алу процесін шексіз жалғастырып, A жиынның $A_1=\{a_1, a_2,\ldots a_n,\ldots\}$ жиыншасын аламыз және саналымды жиынның анықтамасы бойынша, ол саналымды жиын болады.

1.3-теорема. Саналымды жиынның кез келген жиыншасы саналымды жиын болады.

Осы теоремадан мына салдарды аламыз:

Салдар. Егер саналымды A жиыннан шектелген M жиынды бөліп алсақ, онда $A \setminus M$ саналымды жиын болады.

1.4-теорема. Ортақ элементтері жоқ шектелген жиын мен саналымды жиындардың қосындысы саналымды жиын болады.

Дәлелдеуі. Шектелген A мен саналымды B жиындарды қарастырайық:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}\ ,\ B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\},$$

мұндағы $AB = \varnothing$.

Егер $A + B = S$ болса, онда олардың қосындысын мына түрде жазуға болады:

$$S = \{a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n, ...\}.$$

Енді S жиынның элементтерін нөмірлесек дәлелдеу керек саналымды жиынды аламыз.

1.5-теорема. Қос-қостан қиылыспайтын саны санаулы саналымды жиындардың қосындысы саналымды жиын болады.

Дәлелдеуі. Теореманың дәлелдеуін қос-қостан қиылыспайтын үш саналымды жиындар үшін келтірейік:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}\ ,\ B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\},$$

$$C = \{c_1, c_2, ..., c_n, ...\}, \qquad AB = \varnothing,\ AC = \varnothing,\ BC = \varnothing.$$

Онда олардың $A + B + C = S$ қосындысын мына түрде жазуға болады:

$$S = \{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, ..., a_n, b_n, c_n, ...\}.$$

Енді соңғы жиынның элементтерін нөмірлеп саналымды S жиынды аламыз.

1.6-теорема. Қос-қостан қиылыспайтын шектеулі саналамды жиындардың қосындысы саналымды жиын болады.

1.7-теорема. Қос-қостан қиылыспайтын саналымды жиындардың қосындысы саналымды жиын болады.

1.8-теорема. Барлық рационал сандар R жиыны саналымды жиын.

Салдар. Кез келген $[a,b]$ сегменттегі рационал сандар жиыны саналымды жиын.

1.9-теорема. Кез келген шексіз M жиынына шектеулі немесе саналымды жаңа элементті A жиынды қосқаннан M жиынның қуаты өзгермейді, яғни $M + A \sim M$.

Дәлелдеуі. Жоғарыдағы 1.2-теореманы пайдаланайық, яғни шексіз M жиыннан M_1 саналымды жиынша бөліп алуға болады, онда $M - M_1 = B$ болсын. Осыдан

$$M = B + M_1, M + A = B + (M_1 + A)\cdot$$

Мұнда 1.4 пен 1.5-теоремалардан және жиындар эквивалент-тілігінің анықтамасынан:

$$B \sim B,\ M_1 + A \sim M_1,$$

онда

$$M + A \sim M\ .$$

1.10-теорема. Егер S шексіз саналымсыз жиын, ал A оның шектеулі немесе саналымды бөлігі болса, онда $S \setminus A \sim S$ болады.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша, $S \setminus A = M$ жиыны шектеулі жиын, себебі егер *S*-*A* шектеулі жиын болса, онда *S* жиын шектеулі немесе саналымды жиын болған болар еді. Сондықтан, 1.9-теорема бойынша, $M + A \sim M$, яғни $S \sim S \setminus A$.

1.3. Континуум қуаттылығы

1.11-теорема. $[0,1] = U$ сегментке тиісті нақты сандар жиыны санаулы жиын емес.

Дәлелдеуі. Қарсы жориық, яғни *U* жиыны санаулы жиын болсын, онда *U* жиынның барлық элементтерін тізбек түрінде жазуға болады:

$$\{u_n\} = u_1, u_2, ..., u_n, ...$$

U жиынды (сегментті) тең үш бөлікке бөлейік: $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Онда u_1 нүкте не осы үш кесіндінің біреуіне, не екеуіне тиісті болады. Егер осы кесіндінің екеуіне де тиісті болса, онда ол осы екі кесіндінің ортақ (шеткі) нүктесі болады. Сонымен, u_1 нүкте тиісті болмайтын осы үш кесіндіде кем дегенде бір кесінді бар, ол кесіндіні Δ_1 деп белгілейік. Енді u_1 нүкте тиісті болмайтын Δ_1 кесіндіні тағы да тең үш бөлікке бөлейік. Енді u_2 нүкте осы үш бөліктің біреуіне тиісті болмайтын кесіндіні Δ_2 деп белгілейік. Осы процесті осылайша жалғастырып, енгізілген сегменттер тізбегін аламыз ([14,16]):

$$U \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset ... \supset \Delta_n \supset ...,$$

мұндағы кез келген n үшін u_n элемент Δ_n сегментке тиісті емес. Δ_n сегменттің ұзындығы $\frac{1}{3^n}$ -ге тең және n шексіз өскенде Δ_n сегменттің ұзындығы нөлге ұмтылады. Олай болса, математикалық анализ курстағы енгізілген сегменттер тізбегі бойынша ([14,16]) $\{\Delta_n\}$ сегменттер тізбегінің әрқайсысына тиісті ξ нүкте табылып, ол *U* сегментке тиісті болады, ал ξ нүкте *U* сегментінің элементі емес, яғни $G_2\{\Delta_n\}$. Егер ξ нүкте $\{\Delta_n\}$ тізбегінің элементі болса, онда біздің $\{\Delta_n\}$ сегменттер тізбегін тұрғызуымыз бойынша, ξ нүкте $\{\Delta_n\}$ тізбектерінің кем дегенде біреуіне тиісті болмаған болар еді. Осы қайшылық теореманы дәлелдейді.

Анықтама. Егер A жиын $U=[0,1]$ сегментіне эквивалентті болса, яғни $A \sim U$, онда *A жиынның континуум қуаты бар* дейміз немесе *A* жиынның *қуаты* c -ға тең дейміз, яғни $\overline{\overline{U}} = c$.

1.12-теорема. Кез келген $[a,b]$ сегменттің (a,b) интервалдың , $(a,b]$ мен $[a,b)$ жарты интервалдардың бірдей c қуаты бар.

Дәлелдеуі. $[a,b]=A,\ U=[0,1]$, болсын, онда $y=a+(b-x)$ формула $A=\{y\},\ y\in[a,b]$ мен $U=\{x\},\ x\in[0,1]$ жиындары арасында өзара бірмәнділік сәйкестікті орнатады. Демек, *A* жиынның континуум қуаты бар. Кез келген шексіз жиыннан саны санаулы элементті алып тастағаннан алынған жиын сол жиынның өзіне эквивалентті. Олай болса, $(a,b),(a,b],[a,b)$ интервалдардың қуаты $[a,b]$ сегменттің қуатына тең, яғни бұл интервалдардың қуаты c болады. Дәлелденді.

1.13-теорема. Қуаты c болатын, қос-қостан қиылыспайтын шектелген (саналымды) жиындардың қуаты да c болады.

Дәлелдеуі. Теореманы шектелген жиындар үшін дәлелдейік. Қуаты c болатын, шектелген $A_1, A_2, \ldots, A_n$ жиындарды қарастырайық:

$$S=\sum_{k=1}^{n} A_k,\ A_k A_{k'}=\varnothing,\ k\neq k',$$

мұндағы A_i жиындардың қуаты c . Енді $[0,1)$ жарты интервалды $c_0=0<c_1<c_2<\ldots<c_{n-1}<c_n=1$ нүктелермен саны n -ге тең жарты интервалдарға бөлейік:

$$[c_{k-1}, c_k),\ k = 1,2,,...,n\ .$$

Соңғы жарты интервалдардың әрқайсысының қуаты c болады, онда A_k жиын мен $\left[\ c_{\text{k-1}}, c_{\text{k}}\ \right)$ жарты интервалды өзара бірмәнді сәйкестікпен байланыстыра аламыз. Онда осы өзара бірмәнді сәйкестік S қосындымен $[0,1)= \sum_{k=1}^{n}\left[c_{k+1}, c_k\right)$ жарты интервал арасындағы бірмәнді сәйкестік болып табылады. Дәлелденді.

1.14-теорема. Барлық нақты және иррационал сандар жиындарының қуаты c болады.

Осы теоремадан мына *салдарды* аламыз:

1. Жазықтықтағы нүктелер жиынының қуаты c болады;

2. Үш өлшемді кеңістік жазықтығындағы нүктелер жиынының қуаты c болады.

1.4. Тұйық жиындар

Біз осы тақырыпта сандар осіндегі жиындарды, яғни нүктелер жиындарын қарастыратын боламыз.

Анықтама. x_0 нүкте E жиынының *шектік нүктесі* деп аталады, егер x_0 нүкте тиісті кез келген интервалда x_0 нүктеден өзге E жиынының кем дегенде бір нүктесі бар болса.

Осы анықтамадан: x_0 шектік нүктенің өзі E жиынында жатуы да жатпауы да мүмкін; егер x_0 нүкте E жиынына тиісті болса, яғни $x_0 \in E_0$, бірақ x_0 шектік нүкте болмаса, онда ол E жиынның *оңаша нүктесі* деп аталады; егер x_0 нүкте E жиынының шектік нүктесі болса, онда осы нүкте тиісті кез келген (α, β) интервал E жиынның шексіз көп нүктелерінен анықталады, яғни $x_0 \in (\alpha, \beta),\ x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n,\ n = 1,2,...$.

1–анықтама E жиынның шектік нүктелерінен анықталған жиын E жиынның *туынды жиыны* деп аталады және ол E' таңбамен белгіленеді.

2. Егер $E' \subset E$ болса, онда E *тұйық жиын* деп аталады.

3. Егер $E \subset E'$ болса, онда E жиын *өзіне тығыз жиын* деп аталады.

4. Егер $E = E'$ болса, онда E жиын *кемелденген жиын* деп аталады.

5. $E + E'$ жиыны E *жиынның тұйықтамасы* деп аталады.

Осы анықтамалардан:

а) егер E жиынның барлық шектік нүктелері өзіне тиісті болса, онда ол *тұйық жиын* деп аталады;

ә) өзіне тығыз жиында оңаша нүкте жоқ;

б) кез келген кемелденген жиын тұйық әрі өзіне тығыз жиын болады.

Мысал. $E = \{\frac{1}{n}\}$ $(n = 1, 2, ...)$ рационал сандар жиынының шектік нүктесі 0 нүкте болады, яғни $E' = \{0\}$ бір элементті туынды жиын және шектік нүкте E жиынына тиісті емес, E тұйық жиын емес және өзіне тығыз жиын емес;

$N = \{n\}$ натурал сандар жиынының шектік нүктесі жоқ, яғни $N' = \varnothing$. Онда, $\varnothing = N' \subset N$ болғандықтан, N -тұйық жиын.

1.15-теорема. Кез келген E жиынның E' туынды жиыны тұйық жиын.

Дәлелдеуі. Берілген E' жиын бос жиын болмасын және x_0 нүкте E' туынды жиынның шектік нүктесі болсын. Енді x_0 нүкте тиісті болатын кез келген (α, β) интервалды қарастырайық. Шектік нүктенің анықтамасы бойынша, осы интервалдан z нүкте табылады және ол $z \in E'$. Демек, (α, β) интервалы x_0 нүктені екі жақтан қамтып жатыр (x_0 нүкте (α, β) интервалға тиісті) және онда E жиынының шексіз көп элементтері бар. Олай болса x_0 нүкте E жиынның шектік нүктесі болады, яғни $x_0 \in E'$. Сондықтан, E' туынды жиынның барлық шектік нүктелері E' жиынға тиісті. Олай болса E' тұйық жиын.

1.16-теорема. Егер $A \subset B$ болса, онда $A' \subset B'$.

1.17-теорема. Мына теңдік орындалады: $(A + B)' = A' + B'$.

Дәлелдеуі. Мына енгізуді: $A' + B' \subset (A + B)'$ 1.16-теоремадан аламыз. Теореманы дәлелдеу үшін, соңғы енгізуге кері енгізуді, яғни $A' + B' \supset (A + B)'$ енгізуін орындасақ жеткілікті. Ол үшін $x_0 \in (A + B)'$ болсын. Онда $A + B$ жиыннан $\{x_n\}$ тізбек бөліп алуға болады және

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ болады. Егер $\{x_n\}$ тізбектен A жиынға тиісті шексіз нүктелер табылса, онда x_0 нүкте A жиынның шектік нүктесі болады және $x_0 \in A' \subset A' + B'$. Егер $\{x_n\}$ тізбектен A жиынына тиісті саны санаулы нүктелер табылса, онда $x_0 \in B' \subset A' + B'$. Сонымен, $x_0 \in A' + B'$.Осыдан $A' + B' \supset (A + B)'$. Дәлелденді.

1-салдар. Кез келген E жиынның E' жиыны тұйық жиын. Шынында да,

$$(\overline{E})' = (E + E')' = E' + (E')' \subset E' + E' = E' \subset \overline{E}.$$

2-салдар. Кез келген E жиын тұйық жиын болу үшін, ол өзінің тұйықтамына тең болуы қажетті әрі жеткілікті.

1.18-теорема. Саны санаулы тұйық жиындардың қосындысы тұйық жиын болады.

Ескерту. Шексіз тұйық жиындардың қосындысы тұйық жиын болмауы мүмкін.

1.19-теорема. Кез келген тұйық жиындардың қиылысуы да тұйық жиын болады.

1.5. Ішкі нүктелер және ашық жиындар

Анықтама. x_0 нүкте *E жиынның ішкі нүктесі* деп аталады, егер x_0 нүктені қамтыған (қоршаған) (α, β) интервалы толық *E* жиынға тиісті болса, яғни

$$x_0 \in (\alpha, \beta) \subset E.$$

Осы анықтамадан, *E* жиынының ішкі нүктесі осы жиынның өзіне тиісті болады.

Анықтама. *E жиыны ашық жиын* деп аталады, егер *E* жиынның барлық нүктелері ішкі нүктелер болса.

Мысалы, кез келген (a,b) интервалы, нақты сандар жиыны, бос жиындар ашық жиындар болады, ал кез келген сегмент, жарты интервалдар ашық жиындар емес.

Егер бізге (a,b) интервалы берілсе, онда кез келген $c \in (a,b)$ нүкте ол (a,b) интервалдың ішкі нүктесі болады. Егер $[a,b]$ сегменттің a мен b

нүктелері *шекара нүктелер* деп аталады, a мен b нүктелерінен өзге нүктелердің бәрі осы сегменттің ішкі нүктелері болады.

1.20-теорема. 1) Кез келген ашық жиындардың қосындысы да ашық жиын болады;

2) Саны санаулы ашық жиындардың қиылысуы да ашық жиын болады.

Дәлелдеуі. 1) $S=\sum_{\xi} G_{\xi}$, мұндағы G_{ξ} жиындары ашық жиындар болсын. Енді $x_0 \in S$ болсын, онда $x_0 \in G_{\xi_0}$ мұндағы G_{ξ_0} ашық жиын болғандықтан, (α,β) интервалы табылып, $x_0 \in (\alpha,\beta) \subset G_{\xi_0}$ болады. Олай болса, $x_0 \in (\alpha,\beta) \subset S$, себебі x_0 нүкте S жиынының ішкі нүктесі. x_0 нүкте кез келген S жиынының нүктесі. Теорема дәлелденді.

Анықтама. Егер E жиыны S жиынның жиыншасы болса, яғни $E \subset S$, онда E *жиынды* S *жиынға дейін толықтырушы жиын* деп $S \setminus E$ жиынды айтамыз және $C_S E = S \setminus E$ таңбамен белгіленеді.

Егер $Z=(-\infty,\infty)$ болса, онда E жиынды Z жиынға дейін толықтырушы жиын былай белгіленеді: CE.

1.21-теорема 1. Егер G ашық жиын болса, онда оның толықтырушы CG жиыны тұйық жиын болады;

2. Егер F тұйық жиын болса, онда оның толықтырушы CF жиыны ашық жиын болады.

Дәлелдеуі. 1. $x_0 \in G$ болсын, онда x_0 нүкте тиісті болатын G жиыннан (α,β) интервалы табылады және $x_0 \in (\alpha,\beta) \subset G$. Ал бұл интервалда CG жиынның нүктелері жоқ, онда x_0 нүкте CG жиынның шектік нүктесі емес. CG жиынның шектік нүктесі болатын нүкте G жиынына тиісті болмайды. Осыдан, CG жиынының барлық шектік нүктелері өзіне тиісті болады.

2. $x_0 \in CF$ болсын, онда x_0 нүкте F жиынның шектік нүктесі емес. Сондықтан, x_0 нүктені қамтитын және осы x_0 нүктеден өзге F жиынының нүктесі жоқ (α,β) интервалы табылады. $x_0 \notin F$ болғандықтан (α,β) интервалда F жиынның нүктесі жоқ. Олай

болса, $(\alpha,\beta)\subset CF$ және x_0 нүкте CF ішкі нүктесі болады. Дәлелденді.

1.6. Шектелген ашық және тұйық жиындардың құрылысы

Анықтама. Егер (a,b) интервалы G ашық жиында жатса, ал оның шеткі нүктелері G жиынға тиісті болмаса , яғни

$$(a,b)\subset G,\ a\notin G,\ b\notin G,$$

онда (a,b) интервалы G *жиынның құрама интервалы* деп аталады.

1.22-теорема. Егер G шектелген ашық бос емес жиын болса, онда G жиынның әрбір нүктесі оның құрама интервалына тиісті болады.

Дәлелдеуі. x_0 нүкте бос емес шектелген ашық G жиынына тиісті болсын, яғни $x_0\in G$ және $F=[x_0,+\infty)\cdot CG$. Әрбір $[x_0,+\infty)$ және CG жиындары тұйық болғандықтан F жиыны да тұйық болады. Теореманың шарты бойынша G шектелген және бос жиын емес. F жиынның бір де бір нүктесі x_0 нүктенің сол жағына тиісті емес, олай болса F жиыны төменнен шектелген. Бұл жағдайда, F жиынында ең сол жақта орналасқан μ нүкте бар және $\mu\geq x_0$ болады. Біздің ұйғаруымыз бойынша $x_0\in G$, яғни $x_0\notin F$ болады, онда $x_0\neq\mu$. Сонымен $\mu>x_0$.

Енді $\mu\neq G$ (немесе $\mu\in F\subset CG$). Енді $[x_0,\ \mu)\subset G$ енгізуі орындалатынын көрсетейік, ол үшін кері жориық. Онда y нүкте табылады және $y\in[x_0,\mu),y\notin G$. Осылардан $y\in F, y<\mu$, ал бұл теңсіздіктер y санын анықтау шартына қайшы келеді. Сонымен, төмендегі үш шартты қанағаттандыратын μ саны табылады:

$$\mu>x_0,\ \mu\in G,\ [x_0,\mu)\subset G.$$

Осы сияқты λ саны табылады:

$$\lambda<x_0,\ \lambda\notin G,\ (\lambda,x_0]\subset G.$$

Осылардан (λ,μ) интервалы G жиынының құрама интервалы және $x\in(\lambda,\mu)$. Дәлелденді.

1.23-теорема. G бос емес шектелген ашық жиын, ал (a,b) интервалы G жиынға тиісті, онда G жиынның құрама интервалдарының біреуіне (a,b) интервалы тиісті болатын құрама интервал табылады.

Дәлелдеуі. Егер $x_0 \in (a,b)$ болса, онда $x_0 \in G$ және G жиынның құрама интервалдарының біреуіне тиісті болатын (λ, μ) интервалы табылып, $x_0 \in (\lambda, \mu)$ болады. Шынында да, егер $\mu < b$ болса, онда $\mu \in (a,b)$ болар еді, ал бұл мүмкін емес, себебі $\mu \notin G$. Сондықтан, $b \le \mu$.

Осылайша, $\lambda \le a$ болатынын дәлелдеуге болады, олай болса

$$(a,b) \subset (\lambda, \mu).$$

Енді шектелген тұйық жиындарды қарастырайық.

Берілген F жиынға тиісті ең кіші сегментті S деп белгілейік, онда $C_S F$ ашық жиын. $C_S F$ жиынның құрама интервалдары F *жиынының қосымша интервалдары* деп аталады.

1.24-теорема. F бос емес шектелген тұйық жиын және $S = [a,b]$ сегменті F жиында жататын ең кіші сегмент болсын. Онда:

1. F жиынның екі қосымша интервалының ортақ шеткі нүктесі болатын x_0 нүкте F жиынның оңаша нүктесі болады.

2. Егер a нүкте (немесе b) F жиынның қосымша интервалдарының біреуінің шеткі нүктесі болса, онда ол осы жиынның оңаша нүктесі болады.

3. Жоғарыдағы 1 мен 2-пункттерде айтылған F жиынның басқа оңаша нүктелері жоқ.

Дәлелдеуі. Теореманың 3-тұжырымын дәлелдейік. x_0 нүкте F жиынның оңаша нүктесі және $a < x_0 < b$ болсын. Онда оңаша нүктенің анықтамасы бойынша, оңаша нүкте тиісті болатын (α, β) интервалы табылады және бұл интервалда x_0 нүктеден өзге F жиынның нүктелері жоқ. Олай болса $(\alpha, \beta) \subset [a,b]$. Онда, (x_0, b) интервалында F жиынның элементтері жоқ. Енді 1.23-теорема бойынша, F жиынның (λ, μ) қосымша интервалы табылады және $(x_0, \beta) \subset (\lambda, \mu)$ болады. Егер $\lambda < x_0$ болса, онда x_0 нүкте F жиынға тиісті болмаған болар еді, сондықтан $\lambda \ge x_0$ теңсіздігінің орындалуы қажеті. Ал

$\lambda > x_0$ теңсіздігі $(x_0, \beta) \subset (\lambda, \mu)$ енгізуінің орындалуына қайшы келеді. Демек, $\lambda = x_0$, яғни x_0 нүкте F жиынның қосымша интервалдарының біреуінің сол жақтағы шеткі нүктесі.

Осылайша, x_0 нүкте F жиынның қосымша интервалдарының біреуінің оң жақтағы шеткі нүктесі болатынын дәлелдеуге болады. Дәлелденді.

1.7. Шектелген ашық жиынның өлшемі

Нақты айнымалы функциялар теориясында негізгі ұғымдардың бірі нүктелі жиындар өлшемі. Сондықтан, біз тағайындалған (a,b) интервалда шектелген жиындарды қарастыратын боламыз.

Анықтама. (a,b) *интервалдың өлшемі* деп оның ұзындығын айтамыз, яғни $b-a$ санын, ол былай белгіленеді:

$$m(a,b) = b - a > 0 .$$

Лемма. Егер саны санаулы енгізілмеген $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ интервалдар Δ интервалда жатса, онда

$$\sum_{k=1}^{n} m\delta_k \le m\Delta \cdot$$

Дәлелдеуі. $\Delta = (A, B)$, $\delta_k = (a_k, b_k)$ болсын $(k = 1,2,\ldots,n)$ және δ_k интервалдарының сол жақтағы нүктесінің индекстерін өсу ретімен нөмірлейік, яғни $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Онда δ_k мен δ_{k+1} интервалдары енгізілмеген интервалдар болғандықтан $b_k \le a_{k+1}$ теңсіздік орындалады $(k = 1,2,\ldots,n-1)$. Сондықтан мына қосынды:

$$S = (a_1 - A) + (a_2 - b_1) + (a_3 - b_2) + \ldots + (a_n - b_{n-1}) + (B - b_n)$$

оң сан. Демек,

$$m\Delta = \sum_{k=1}^{n} m\delta_k + S \cdot$$

Осы леммадан: егер енгізілмеген δ_k $(k = 1,2,\ldots,n-1)$ саналымды интервалдар үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\delta_k \le m\Delta \cdot$$

Ескерту. Егер оң сандар $\sum_{k=1}^{n} m\delta_k$ қатары жинақсыз болса, онда бұл қатар $+\infty$-ке тең, сондықтан кез келген оң сандар қатарының қосындысы бар дейтін боламыз.

Анықтама. Ашық *шектелген* G *жиынның өлшемі* деп осы жиынды құраушы δ_k интервалдар ұзындығының қосындысын айтамыз және ол былай белгіленеді:

$$mG = \sum_k m\delta_k \geq 0,$$

мұндағы $\sum_k$ қосынды $\sum_{k=1}^{n}$ немесе $\sum_{k=1}^{\infty}$ қосындылардың бірі.

Егер G бос жиын болса, онда $mG = 0;$

Егер $G \subset \Delta$ болса, онда $mG \leq m\Delta$.

1.25-теорема. G_1 мен G_2 ашық шектелген жиындар және $G_1 \subset G_2$ болса, онда

$$mG_1 \leq mG_2.$$

Дәлелдеуі. δ_i мен Δ_k интервалдары сәйкес G_1 мен G_2 жиындардың құраушы интервалдары болсын $(i,k = 1,2,...)$. Онда 1.6-тақырыптағы тұжырым бойынша, δ_i интервалдардың әрқайсысы тек бір Δ_k - интервалдардың бірінде жатады. Олай болса,

$$\delta_i \subset \Delta_k$$

болсын деп ұйғарайық. Онда лемма бойынша $mG_1 \leq \sum_k m\Delta_k = mG_2$. Дәлелденді.

1.26-теорема. Егер саны санаулы немесе саналымды G_k ашық жиындардың қосындысы ашық шектелген $G = \sum_k G_k$ жиын болса, онда:

$$mG \leq \sum_k mG_k.$$

1.8. Шектелген тұйық жиынның өлшемі

Біз бос емес шектелген тұйық F жиынды және осы жиын тиісті болатын, яғни $F \subset S$, ең кіші $S = (a,b)$ сегментті қарастырайық. Онда F

жиынның S жиынға дейінгі қосымша $C_S F = S - F$ жиыны ашық жиын, сондықтан $m[C_S F]$ өлшем туралы сөз қозғауға болады.

Анықтама. Бос емес *тұйық шектелген* F *жиынның өлшемі* төмендегідей:

$$mF = B - A - m[C_S F] = mS - m[C_S F],$$

мұндағы $F \subset S = [a,b]$- ең кіші сегмент.

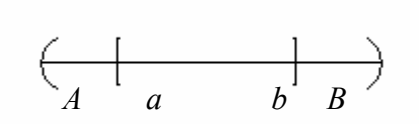
1.27-теорема. Шектелген тұйық F жиындардың өлшемі оң.

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша $C_S F \subset (A,B)$. Онда, 1.25-теоремадан $m[C_S F] \le m(A,B) = B - A$. Осыдан $mF \ge 0$.

Лемма. Егер F шектелген тұйық жиын Δ интервалда жатса, онда

$$mF = m\Delta - m[C_\Delta F].$$

Дәлелдеуі. $C_\Delta F$ ашық жиын. $\Delta = (A,B)$, ал ең кіші сегмент $S = [a,b]$ және $F \subset S$ болсын (2-сурет). Онда мына теңдік орындалады $C_\Delta F = C_\Delta S + C_S F$. Осыдан:



2- сурет

$$m[C_\Delta F] = m[C_\Delta S] + m[C_S F],$$
$$C_\Delta S = (A,a) + (b,B).$$

Онда

$$m[C_\Delta S] = (a - A) + (B - b).$$

Сонымен,

$$m[C_\Delta F] = (B - A) - (b - a) + m[C_S F].$$

1.28-теорема. Егер F_1 мен F_2 ашық тұйық жиындар және $F_1 \subset F_2$ болса, онда

$$mF_1 \le mF_2$$

1.29-теорема. Егер F тұйық жиын, ал G шектелген ашық жиын және $F \subset G$ болса, онда

$$mF \le mG.$$

1.9. Шектелген жиынның ішкі және сыртқы өлшемдері

Анықтама. Шектелген E *жиынның сыртқы өлшемі* деп $E \subset G$ енгізілуі орындалатын барлық ашық шектелген G жиындар өлшемдерінің дәл төменгі шекарасын айтамыз және ол былай белгіленеді:

$$m^* E = \inf_{E \subset G} \{mG\}.$$

Егер E шектелген жиын болса, онда оның өлшемі бар және $0 \le m^* E < +\infty$.

Анықтама. Шектелген E *жиынның ішкі өлшемі* деп $F \subset E$ енгізілуі орындалатын барлық тұйық F жиындар өлшемдерінің дәл жоғарғы шекарасын айтамыз және ол былай белгіленеді:

$$m_* E = \sup_{F \subset E} \{mF\}.$$

Кез келген шектелген E жиынның өлшемі бар және $0 \le m_* E < +\infty$

1.30-теорема. 1. Егер G шектелген ашық жиын болса, онда:

$$m^* G = m_* G = mG.$$

2. Егер F шектелген тұйық жиын болса, онда

$$m^* F = m_* F = mF.$$

1.31-теорема. Кез келген шектелген E жиын үшін мына теңдік орындалады:

$$m_* E \le m^* E.$$

Дәлелдеуі. Берілген E жиын жиыншасы болатын G шектелген ашық жиынды қарастырайық, яғни $E \subset G$. Берілген E жиыннан шектелген F жиынды қалай етіп алсақта $F \subset G$ енгізу орындалады, онда 1.29-теорема бойынша, $mF \le mG$. Осыдан $m_* E \le mG$. Соңғы теңсіздік E жиында жататын кез келген шектелген ашық G жиын үшін орындалатын болғандықтан, $m_* E \le m^* E$ теңсіздік орындалады.

1.32-теорема. Егер A мен B шектелген жиындар және $A \subset B$ болса, онда:

$$m_* A \le m_* B, \quad m^* A \le m^* B.$$

1.33-теорема. Егер шектелген E жиын саны санаулы немесе саналымды E_k жиындардың қосындысы болса, яғни $E = \sum_k E_k$, онда:

$$m^* E \le \sum_k m^* E_k \cdot$$

1.34-теорема. Егер шектелген E жиын өзара енгізілмеген саны санаулы немесе саналымды өзара енгізілмеген E_k жиындардың қосындысы болса, яғни $E = \sum_k E_k \ \left(E_k E_{k'} = \varnothing, k \ne k'\right)$, онда

$$m_* E \ge \sum_k m_* E_k \cdot$$

1.35-теорема. E шектелген жиын және $E \subset \Delta$ болсын, онда

$$m^* E + m_*\left[C_\Delta E\right] = m\Delta, \qquad m^*\left[C_\Delta E\right] - m_*\left[C_\Delta E\right] = m^* E - m_* E \cdot$$

1.10. Өлшемді жиындар

Анықтама. Шектелген *E* жиын *өлшемді жиын* деп аталады, егер оның сыртқы және ішкі өлшемдері тең болса, яғни

$$m\ E = m^* E = mE.$$

Егер E жиын өлшемсіз болса, онда E жиынның mE өлшемі туралы сөз қозғауға болмайды, мысалы барлық шектелмеген жиындар өлшемсіз жиынға мысал бола алады.

Өлшемді жиындарға мына жиындар жатады:

шектелген ашық жиындар;

шектелген тұйық жиындар;

егер шектелген E жиын Δ интервалда жатса, онда E және $C_\Delta E$ жиындарының екеуі де не өлшемді, не өлшемсіз жиындар болады.

1.36-теорема. Егер шектелген E жиын саны санаулы немесе саналымды қос-қостан ортақ нүктесі жоқ өлшемді жиындардың қосындысы болса, яғни $E = \sum_k E_k \ \left(E_k E_{k'} = \varnothing, k \ne k'\right)$, онда E өлшемді жиын және

$$mE = \sum_k mE_k \cdot$$

1.37-теорема. 1. Саны санаулы өлшемді жиындардың қосындысы өлшемді жиын;

2. Саны санаулы өлшемді жиындардың қиылысуы (көбейтіндісі) өлшемді жиын.

1.38-теорема. Екі өлшемді жиынның айырымы (толықтауышы) өлшемді жиын.

Дәлелдеуі. E_1 мен E_2 жиындары өлшемді және $E_1 - E_2 = E$ болсын. E_1 мен E_2 жиындары жататын жиынды Δ таңбамен белгілейік. Онда $E = E_1 \cdot C_\Delta E_2$. 1.36-теоремадан дәлелдеу керек тұжырымды аламыз.

1.39-теорема. Егер E_1 мен E_2 өлшемді жиындар және $E_1 \supset E_2$ болса, онда

$$mE_1 - mE_2 = mE.$$

1.40-теорема. Өлшемді саналымды жиындардың қиылысуы өлшемді жиын.

1.41-теорема. 1. Егер $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ және $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ - шектелген жиын, E_k -өлшемді жиындар, онда $mE = \lim_{n\to\infty} mE_n$.

2. Егер $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ және $E = \prod_{k=1}^{\infty} E_k$, E_k -өлшемді жиындар, онда $mE = \lim_{n\to\infty} mE_n$.

1.11. Өлшемді функциялар

Егер E жиындағы кез келген x-ке $f(x)$ мәні анықталса, онда біз E *жиынында* $f(x)$ *функция берілді* дейміз. Егер E жиынындағы кез келген x үшін $f(x) > a$ теңсіздігі орындалса, онда бұл жағдайды $E(f > a)$ таңбамен белгілейтін боламыз. Осы сияқты, $E(f \geq a)$, $E(f = a)$, $E(f \leq a)$, $E(a < f \leq b)$ таңбаларын пайдаланамыз.

Анықтама. E жиынында берілген $f(x)$ функция *өлшемді функция* деп аталады, егер E өлшемді және $a < \infty$ саны үшін $E(f > a)$ жиыны өлшемді болса.

Осы анықтамадан: өлшемді нөл жиында берілген кез келген функция өлшемді функция болады.

1.42-теорема. E жиында берілген $f(x)$ өлшемді функция, ал E жиынның B жиыншасы өлшемді жиын болса, онда $f(x)$ функция барлық $x \in B$ үшін өлшемді функция.

Шынында да, $A(f > a) = AE(f > a)$.

1.43-теорема. Өлшемді E жиында $f(x)$ функция берілсін, E жиын өлшемді саны санаулы немесе саналымды E_k жиындардың қосындысы $E = \sum_k E_k$, ал $f(x)$ функция E_k жиындардың әрқайсысында өлшемді болса, онда $f(x)$ функция E жиында өлшемді болады.

Шынында да, $E(f > a) = \sum_k E_k(f > a)$.

Анықтама. E жиынында берілген $f(x)$ пен $g(x)$ *функциялары эквивалентті* деп аталады, егер $mE(f \neq g) = 0$ және олар $f(x) \sim g(x)$ таңбамен белгіленеді.

Анықтама. Егер белгілі бір S тұжырым E жиынның E_0 жиыншасының нүктелерінен өзге E жиынның барлық нүктелерінде орындалсын және $mE_0 = 0$ болса, онда S *тұжырым* E *жиында барлық жерде дерлік орындалады* дейміз.

1.44- теорема. E жиында берілген $f(x)$ функция өлшемді функция және $g(x) \sim f(x)$ болса, онда $g(x)$ функцияда өлшемді функция болады.

Дәлелдеуі. $A = E(f \neq g)$, $B = E - A$ болсын. Онда $mA = 0$, яғни B өлшемді жиын. Демек, $f(x)$ функция B жиында өлшемді функция, ал B жиында $f(x)$ пен $g(x)$ функциялары бірдей және $g(x)$ функция B жиында өлшемді функция. Берілген $g(x)$ функция A жиында да өлшемді $(mA = 0)$, онда ол $E = A + B$ жиында өлшемді.

1.45-теорема. Егер өлшемді E жиынның барлық нүктелерінде $f(x) = c$ болса, онда $f(x)$ өлшемді функция.

Осы теоремадан: *кез келген сатылы функция өлшемді функция болады.*

1.46-теорема. Егер E жиында берілген $f(x)$ өлшемді функция болса, онда кез келген a үшін

$$E(f \geq a),\ E(f = a),\ E(f \leq a),\ E(f < a)$$

жиындары да өлшемді болады.

Дәлелдеуі. Теореманың шартынан мына теңдікті аламыз:

$$E(f \geq a) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{n}\right).$$

Осыдан $E(f \geq a)$ жиыны өлшемді болады. Ал теоремадағы қалған жиындардың өлшемділігін мына теңдіктерден аламыз:

$$E(f = a) = E(f \geq a) - E(f > a),\quad E(f \leq a) = E - E(f > a),$$
$$E(f < a) = E - E(f \geq a).$$

Салдар. Егер $E(f \geq a), E(f \leq a), E(f < a)$ жиындарының кем дегенде біреуі өлшемді болса, онда $f(x)$ функция E жиында өлшемді болады.

1.47-теорема. E жиында берілген $f(x)$ өлшемді функция болса, онда **1.** $f(x)+k$; **2.** $k \cdot f(x)$; **3.** $|f(x)|$; **4.** $f^2(x)$; **5.** $\frac{1}{f(x)}$, мұндағы $f(x) \neq 0$, функцияларыда E жиында өлшемді болады, k - тұрақты сан.

Дәлелдеуі. 1. Егер $f(x)+k$ функцияның өлшемді функция болатындығын мына теңдіктен аламыз: $E(f + k > a) = E(f > a - k)$.

2. Егер $k = 0$ болса, онда $k \cdot f(x)$ функциясының өлшемді болатынын 1.45-теоремадан аламыз, ал қалған k үшін:

$$E(kf > a) = \begin{cases} E\left(f > \frac{a}{k}\right), k > 0, \\ E\left(f < \frac{a}{k}\right), k < 0. \end{cases}$$

5. Егер $f(x) \neq 0$ болса, онда:

$$E\left(\frac{1}{f} > a\right) = \begin{cases} E(f>0),\ a=0, \\ E(f>0)\cdot E\left(f<\frac{1}{a}\right),\ a>0, \\ E(f>0)+E(f<0)\cdot E\left(f<\frac{1}{a}\right),\ a<0. \end{cases}$$

1.48-теорема. $E=[A,B]$ сегментте берілген $f(x)$ функция өлшемді функция болады.

Анықтама. $E=[A,B]$, $M\subset E$ болсын. Функция

$$\varphi_M(x)=\begin{cases} 1,\ x\in M, \\ 0,\ x\in E-M \end{cases}$$

M жиынының сипаттамалық функциясы деп аталады.

Өлшемді функцияның анықтамасынан мына *тұжырымды* аламыз: өлшемсіз жиында берілген функция өлшемсіз болады, ал өлшемді жиында функция өлшемсіз болуы мүмкін, мысалы сипаттамалық функция өлшемді жиында өлшемсіз болуы да, болмауы да мүмкін.

1.49-теорема. *M* жиын және оның *сипаттамалық* функциясы да не өлшемді не өлшемсіз болады.

1.50-теорема. 1. Егер *E* жиында берілген $f(x)$, $g(x)$ өлшемді функциялар болса, онда $E(f>g)$ жиыны өлшемді болады.

2. Егер шектеулі $f(x)$ және $g(x)$ функциялары E жиында өлшемді болса, онда $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ функциялары да осы жиында өлшемді болады, мұндағы $g(x)\neq 0$.

Дәлелдеуі. $f(x)\cdot g(x)$ функцияның өлшемді функция болатынын дәлелдейік:

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\left\{[f(x)+g(x)]^2-[f(x)-g(x)]^2\right\}$$

1.51-теорема. Егер $f_1(x), f_2(x),\ldots$ өлшемді функциялық тізбек E жиында берілсе және әрбір $x\in E$ нүкте үшін мына шек:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

бар (шектелген, шектелмеген) болса, онда $f(x)$ өлшемді функция.

1.52-теорема. Егер E жиында $f_1(x), f_2(x),...$ өлшемді функциялық тізбек және $F(x)$ функция берілсе, ал мына шек

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x).$$

E жиында барлық жерде дерлік орындалса, онда $F(x)$ өлшемді функция.

1.12. Өлшемді функциялар тізбегінің өлшем бойынша жинақтылығы

Біз осы тақырыпта $E(|f-g| \geq \sigma), E(|f-g| < \sigma)$ жиындарды қарастыратын боламыз, мұндағы $f(x)$, $g(x)$ функциялары E жиында берілген, $\sigma > 0$ сан және $f(x)$ пен $g(x)$ функциялардың бір таңбалы шексіз мәндері осы жиындардың біреуінде де жатпайды.

Анықтама. Өлшемді E жиында өлшемді әрі шектеулі функциялар тізбегі

$$f_1(x), f_2(x),... \tag{1.2}$$

және өлшемді әрі барлық жерде дерлік шектеулі $f(x)$ функция берілсін. Егер кез келген δ оң сан үшін

$$\lim\left[mE(|f_n - f| \geq \delta)\right] = 0$$

болса, онда (1.2) *тізбек* $f(x)$ *функцияға өлшем бойынша жинақты* деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$f_n(x) \Rightarrow f(x).$$

1.53-теорема. Егер (1.2) функциялық тізбек барлық жерде дерлік жинақты болса, онда ол жинақты болады және сол шектік функцияға өлшем бойынша жинақты.

1.54-теорема Егер (1.2) функциялық тізбек $f(x)$ функцияға өлшем бойынша жинақты болса, онда осы тізбек $f(x)$ функцияға эквивалентті басқа $g(x)$ функцияға өлшем бойынша жинақты болады.

Дәлелдеуі. Егер $\sigma > 0$ болса, онда

$$E(|f-g| \geq \sigma) \subset E(f \neq g) + E(|f_n - f| \geq \sigma).$$

Осыдан және $mE(f \neq g) = 0$ болғандықтан

$$mE(|f_n - g| \geq \sigma) \leq mE(|f_n - f| \geq \sigma).$$

Рисс теоремасы. Егер $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $f(x)$ функцияға өлшем бойынша жинақты болса, онда $\{f_n(x)\}$ тізбектен $f(x)$ функцияға барлық жерде дерлік өлшем бойынша жинақты болатын $\{f_{n_k}(x)\}$ тізбекше бөліп алуға болады.

Дәлелдеуі. $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = 0$ болатын $\sigma_1 > \sigma_2 > ... > \sigma_k > ...$ оң сандар тізбекті және жинақты $\sum\limits_k \eta_k$ оң сандар қатарын алайық. Онда біз индекстері

$$n_1 < n_2 < ... < n_k < ... \tag{1.3}$$

теңсіздікті қанағаттандыратын тізбекті құрамыз. Тізбектің n_1 натурал саны үшін $mE(|f_{n_1} - f| \geq \sigma_1) < \eta_1$ теңсіздігі орындалсын, ал n_2 үшін $mE(|f_{n_2} \quad f| \geqslant \sigma_2) < \eta_2$, $n_2 \leq n_1$ болсын. Осылайша жалғастырып, (1.3) тізбекті құрамыз. Енді E жиында барлық жерде дерлік

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \tag{1.4}$$

шектің орындалатынын дәлелдейік. Ол үшін $R_i = \sum\limits_{k=i}^{\infty} E(|f_{n_k} - f| \geq \sigma_k)$, $Q = \prod\limits_{i=1}^{\infty} R_i$ болсын. Онда $R_1 \supset R_2 \supset ... \supset R_k \supset ...$ болғандықтан, 1.41-теоремадан мына шекті аламыз: $\lim\limits_{i\to\infty} mR_i = mQ$. Екіншіден $mR_i < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k$, онда $\lim\limits_{i=\infty} mR_i = 0$, яғни $mQ = 0$. Енді (1.4) шекті *E-Q* жиынындағы барлық x үшін дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін $x_0 \in E - Q$ болсын, онда $x_0 \notin R_{i_0}$. Демек, $k \geq i_0$ болғанда $x_0 \notin E(|f_{n_k} - f| \geq \sigma_k)$. Сонымен

$$|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| \geqslant \sigma_k, \quad k \geqslant i_0$$

теңсіздік орындалады, мұндағы $\lim_{k\to\infty}\sigma_k = 0$ болғандықтан $f_{n_k}(x_0) \to f(x_0)$. Дәлелденді.

Егоров теоремасы. Өлшемді E жиында өлшемді әрі барлық жерде дерлік шектеулі $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ функциялық тізбек берілсін және осы тізбек барлық жерде дерлік шектеулі әрі өлшемді $f(x)$ функцияға барлық жерде дерлік жинақты болсын:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x). \qquad (1.5)$$

Онда, кез келген $\delta > 0$ сан үшін өлшемді $E_\delta \subset E$ жиыны табылып, мына шарттар орындалады:

1. $mE_\delta > mE - \delta$ **;**

2. (1.5) шек E_δ жиында бір қалыпты орындалады.

Анықтама. Бізге E жиында $f(x)$ функция берілсін және $x_0 \in E$, $f(x_0) \neq \mp\infty$ болсын. $f(x)$ функция x_0 нүктеде екі жағдайда үзіліссіз болады:

1. Егер x_0 нүкте E жиынның оңаша нүктесі болса.

2. Егер $x_0 \in E'$ және $x_n \in E$ үшін $x_n \to x_0$ шектен $f(x_n) \to f(x_0)$ шек орындалатын болса.

Фреше теоремасы. $[a,b]$ сегментте анықталған кез келген өлшемді әрі барлық жерде дерлік шектеулі $f(x)$ функциясы үшін осы функцияға барлық жерде дерлік жинақты болатын үзіліссіз функциялар тізбегі табылады.

Лузин теоремасы. $[a,b]$ сегментте анықталған $f(x)$ функция өлшемді әрі барлық жерде дерлік шектеулі болсын, онда кез келген $\delta > 0$ үшін үзіліссіз $\varphi(x)$ функция табылады және мына теңсіздік орындалады: $mE(f \neq \varphi) < \delta$ (Егер $|f(x)| \leq K$ болса, онда $|\varphi(x)| \leq K$).

1.13. Лебег интегралының анықтамасы

Бізге $[a,b]$ сегментте анықталған шектеулі $y = f(x)$ функция берілсін. Алдымен Риман интегралына қысқаша тоқталайық. Сегментті

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_n = b$$

нүктелермен n бөлікке бөлейік. Әрбір $[x_k, x_{k+1}]$ дербес сегменттен c_k нүкте алып, $f(x)$ функцияның $[a,b]$ сегменттегі *интеграл қосындысы* деп аталатын мына қосындыны қарастырайық:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_K)(x_{k+1} - x_k). \qquad (1.6)$$

Егер σ қосындының $\lambda = max\{x_{k+1} - x_k\} = max\{\Delta x_k\}$ нөлге ұмтылғандағы шектеулі J шегі бар болса және ол $[a,b]$ сегментті бөліктеуге әрі c_k нүктені алу әдісіне тәуелсіз болса, онда J шек $f(x)$ функциясының $[a,b]$ сегменттегі *Риман интегралы* деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$(R)\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \,. \qquad (1.7)$$

Егер (1.7) Риман интегралы бар болса, онда $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментте *интегралданады* (Риман интегралы мағынада) деп аталады. Функция Риман интегралы бойынша интегралдануы үшін функцияның шектелген болуы қажетті. Барлық шектеулі функция Риман интегралы бойынша интегралданбауы мүмкін. **Мысалы,** $[0,1]$ сегменттегі Дирихле функциясы

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x - рационал, \\ 0, & x - иррационал \end{cases}$$

интегралданбайды. Шынында да, $c_i \in [0,1]$ нүкте рационал сандарды қабылдағанда σ интеграл қосынды 1-ге тең, ал c_i нүкте иррационал сандарды қабылдағанда σ интеграл қосынды 0-ге тең. Сондықтан, Риман интегралының анықтамасы бойынша қарапайым функция интегралданбайды, яғни бұл анықтамада елеулі жетіспеушілік бар. Анықтаманың осы кемшілігін іздестірейік. Риман интегралын құрғанда, $[a,b]$ сегментті ұсақ $[x_0, x_1] = e_1, [x_1, x_2] = e_2, ..., [x_{n-1}, x_n] = e_n$ сегменттерге бөлдік, әрбір e_k дербес сегменттен c_k нүкте алып, мына интеграл қосындыны қарастырдық:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n} f(c_k)me_k$$

және осы қосындының c_k нүктелер алу әдісіне тәуелсіз және шектеулі шегі бар болсын деп талап еттік. Басқаша айтқанда, e_k жиындағы x нүктенің әрқайсысы c_k нүктені қабылдауы мүмкін, ал c_k нүктеден өзге нүктені қабылдағандағы мәні σ интеграл қосындысының мәнінен соншалықты айырмашылығы болмауы керек. Ал бұл айырмашылықтың аз болуы c_k нүктелердегі $f(c_k)$ мәндердің айырмашылығы аз болуына байланысты, сонымен e_k жиындағы нүктелердің бір-біріне өте жақын орналасуы немесе $[x_k, x_{k+1}]$ өте кіші сегмент болуы c_k өзгергенде $f(c_k)$ мәндер аз өзгереді. Онда әрбір e_k жиында c_k нүктенің өзгеруі σ интеграл қосындыға аз әсерін тигізеді, ал үзілісті функция үшін мүлдем олай болмайды. Демек, (1.6) қосынды, яғни Риман интегралының анықтамасы үзіліссіз функция үшін келтірілген.

Интеграл ұғымын кең функция класы үшін беру үшін Лебег басқа интегралдау процесін ұсынады. Лебег $[a,b]$ сегменттегі бөліктеу емес, $y = f(x)$ функцияның қабылдай алатын мәндері тиісті OY өсіндегі $[A,B]$ сегментті бөліктеуді ұсынады:

$$A = y_0 < y_1 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < y_n = B .$$

Егер e_k жиындарын $e_k = E(y_k \le f \le y_{k+1})$ түрінде қарастырсақ, онда әртүрлі $x_k \in e_k$ үшін жақын орналасқан функция мәндері сәйкес келеді, ал Риман интегралында x нүктелер бір-бірінен қашық аралықта орналасуы мүмкін. Лебег интегралдық қосындысы ретінде мына қосындыны қарастырады:

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot me_k .$$

Енді Лебег интегралын қарастырайық. Бізге E өлшемді жиында шектелген өлшемді $f(x)$ функция берілсін және $A < f(x) < B$ болсын. $[A,B]$ сегментті $y_0 = A < y_1 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < y_n = B$ нүктелермен n бөлікке бөлейік. Әрбір $[y_k, y_{k+1})$ жарты интервалға $e_k = E(y_k \le f \le y_{k+1})$ жиынды сәйкес қояйық, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Төмендегі қасиеттердің e_k жиынға орындалатынын оңай дәлелдеуге болады:

1) e_k жиындары қос-қостан қиылыспайды: $e_k e_{k'} = \varnothing, k \neq k'$;

2) e_k жиындары өлшемді жиындар;

3) $E = \sum_{k=0}^{n-1} e_k$;

4) $mE = \sum_{k=0}^{n-1} me_k$.

Мына төмендегі қосындылар *сәйкес Лебегтің төменгі және жоғарғы қосындылары* деп аталады:

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k me_k, \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} me_k.$$

Егер $\lambda = max(y_{k-1} - y_k)$ болса, онда $0 \leq S - s \leq \lambda mE$ болады.

Лемма. 1. $[A,B]$ сегментті бөлікке бөліктеудегі бір бөліктеуге сәйкес келетін Лебегтің s_0 төменгі мен S_0 жоғарғы қосындысына жаңа $\overline{y}$ нүктені қосқанда пайда болған Лебегтің s, S қосындылары мен s_0, S_0 қосындылары арасында мына теңсіздіктер орындалады: $s_0 \leq s, S_0 \leq S$.

Осыдан Лебегтің кез келген төменгі s қосындысы кез келген жоғарғы S қосындысынан үлкен болмайды.

Енді Лебегтің кез келген жоғарғы S_0 қосындысын алайық, онда кез келген s төменгі қосындысы арасында $s \leq S_0$ теңсіздігі орындалады. Олай болса, Лебегтің төменгі қосындыларынан анықталған $\{s\}$ жиын жоғарыдан шектелген. $\{s\}$ жиынның *дәл жоғарғы қосындысын* $sup\{s\} = U$ таңбамен белгілейік. Онда $U \leq S_0$. S_0-Лебегтің кез келген жоғарғы қосындысы болғандықтан, ең соңғы теңсіздік Лебегтің жоғарғы қосындыларынан анықталған $\{S\}$ қосынды төменнен шектелген. $\{S\}$ жиынның дәл төменгі қосындысын $inf\{S\} = V$ таңбамен белгілейік. Онда кез келген бөліктеу үшін $s \leq U \leq V \leq S$ орындалады, осыдан

$S - s \le \lambda \cdot mE$. Демек, $0 \le V - U \le \lambda \cdot mE$, мұндағы λ -кез келген аз шама болғандықтан $U = V$ теңдік орындалады.

Анықтама. U мен V сандарының ортақ мәні $f(x)$ функцияның E жиынындағы *Лебег интегралы* деп аталады және былай белгіленеді:

$$(L)\int_E f(x)dx \text{ немесе } \int_E f(x)dx$$

Анықтамадан, әрбір шектелген өлшемді функция Лебег интегралы мағынасында интегралданады.

1.55-теорема. Егер $\lambda \to 0$, онда s пен S Лебег қосындылары $\int_E f(x)dx$ Лебег интегралына ұмтылады.

1.14. Лебег интегралының қасиеттері

Бізге өлшемді E жиында шектелген өлшемді $f(x)$ функция берілсін.

1.56-теорема (орта мән туралы теорема). 1. Егер өлшемді E жиында өлшемді $f(x)$ функция үшін $a \le f(x) \le b$ теңсіздік орындалса, онда:

$$a \cdot mE \le \int_E f(x)dx \le b \cdot mE \cdot$$

2. Егер өлшемді E жиында $f(x) = c - const$ болса, онда:

$$\int_E f(x)dx = c \cdot mE .$$

3. Егер өлшемді E жиында $f(x) \ge 0, (f(x) \le 0)$ болса, онда:

$$\int_E f(x)dx \ge 0 \quad \left(\int_E f(x)dx \le 0\right).$$

4. Егер $mE = 0$ болса, онда E жиынындағы кез келген шектелген $f(x)$ функция үшін:

$$\int_E f(x)dx = 0 .$$

1.57-теорема. Егер өлшемді E жиын қос-қостан қиылыспайтын өлшемді саны санаулы немесе саналымды жиындардың қосындысы болса, яғни

$$E = \sum_k E_k , E_k E_{k'} = \varnothing, k \ne k' ,$$

онда

$$\int_E f(x)dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)dx .$$

1.58-теорема. Егер өлшемді Q жиында $f(x)$ пен $F(x)$ өлшемді функциялар болса, онда :

$$\int_Q [f(x)+F(x)]dx = \int_Q f(x)dx + \int_Q F(x)dx .$$

1.59-теорема. Егер өлшемді E жиында $f(x)$ функция шектелген болса, онда :

$$\int_E c \cdot f(x)dx = c\int_E f(x)dx .$$

Дәлелдеуі. E жиында $A \le f(x) \le B$ орындалсын. $c = 0$ болғанда тепе-теңдік орындалады. Енді $c > 0$ болсын. $[A,B]$ сегментті y_k нүктелермен бөліктейік, сонда e_k сегменттерін аламыз және

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{e_k} cf(x)dx .$$

e_k сегменттерде $c\ y_k \le cf(x) \le cy_{k+1}$ теңсіздігі орындалады, онда орта мән туралы теорема ([14], 1.52-теорема) бойынша:

$$c \cdot y_k \cdot me_k \le \int_{e_k} c \cdot f(x)dx \le c \cdot y_{k+1} \cdot me_k .$$

Соңғы теңсіздіктен k бойынша 0-ден $n-1$-ге дейін қосынды алайық:

$$cs \le \int_E cf(x)dx \le cS ,$$

мұндағы $s,\ S$ Лебег қосындылары. Енді $\lambda \to 0$-да шекке көшіп, дәлелдеу керек теңдікті аламыз.

Осылайша, $c < 0$ болған жағдайда қарастыруға болады, яғни

$$0 = \int_E [cf(x)+(-c)f(x)]dx = \int_E cf(x)dx + (-c)\int_E f(x)dx.$$

1.60-теорема. Егер $f(x)$ және $F(x)$ функциялары E жиында шектелген өлшемді функциялар болса, онда:

1. $\int_E [F(x)-f(x)]dx = \int_E F(x)dx - \int_E f(x)dx$.

2. Егер $f(x) \le F(x)$ болса, онда: $\int_E f(x)dx \le \int_E F(x)dx$.

3. $\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f(x)|dx.$

1.15. Лебег интегралы астынан шекке көшу

Бізге $[0,1]$ сегментте анықталған $f_n(x)$ функциясы берілсін:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in (0, \frac{1}{n}), \\ 0, & x \notin (0, \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Онда кез келген $x \in [0,1]$ үшін $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ шек орындалады, бірақ мына интеграл:

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1$$

нөлге ұмытылмайды. Сондықтан, өлшемді E жиында берілген шектелген өлшемді $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x),...$ функциялар шектелген өлшемді $F(x)$ функцияға ұмытылғанда мына теңдік:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E F(x)dx \qquad (1.8)$$

орындалама деген сұраққа жауап іздестірейік.

Лебег теоремасы. Өлшемді E жиынында анықталған $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x),...$ өлшемді шектелген функциялық тізбек өлшемді $F(x)$ шектелген функцияға өлшем бойынша жинақты болса және барлық n, x үшін K тұрақты саны табылып, $|f_n(x)| < K$ теңсіздігі орындалса, онда (1.8) теңдік орндалады.

Дәлелдеуі. Барлық жерде дерлік x үшін $|F(x)| \le K$ теңсіздік орындалады. Шынында да, Рисс теоремасы бойынша $\{f_n(x)\}$ тізбектен барлық жерде дерлік $F(x)$ функцияға жинақты $\{f_{n_k}(x)\}$ тізбекше бөліп алуға болады. Сонда, барлық жерде дерлік $f_{n_k}(x) \to F(x)$ шек орындалатын нүктелерде $|f_n(x)| < K$ теңсіздіктен шекке көшіп, $|F(x)| \le K$ теңсіздікті аламыз.

Енді $\sigma > 0$ сан және

$$A_n(\sigma)=E\big([f_n-F]\ge\sigma\big),\quad B_n(\sigma)=E\big([f_n-F]<\sigma\big)$$

болсын, онда :

$$\left|\int_E f_n dx-\int_E F dx\right|\le\int_E|f_n-F|dx=\int_{A_n(\sigma)}|f_n-F|dx+\int_{B_n(\sigma)}|f_n-F|dx\cdot$$

Мына теңсіздіктен $|f_n(x)-F(x)|\le|f_n(x)|+|F(x)|$ және $A_n(\sigma)$ жиынындағы барлық жерде дерлік x үшін $|f_n(x)-F(x)|<2K$. Онда орта мән туралы теорема бойынша :

$$\int_{A_n(\sigma)}|f_n-F|dx\le 2K\cdot\int_{A_n(\sigma)}dx=2K\cdot mA_n(\sigma).\qquad(1.9)$$

Енді орта мән туралы теоремадан:

$$\int_{B_n(\sigma)}|f_n-F|dx\le\sigma\cdot mB_n(\sigma)\le\sigma\cdot mE\cdot$$

Осы теңдікті (1.9) теңсіздікпен салыстырып, мына теңсіздікті аламыз:

$$\left|\int_E f_n dx-\int_E F dx\right|\le 2K\cdot mA_n(\sigma)+\sigma\cdot mE.\qquad(1.10)$$

Кез келген $\varepsilon>0$ санын және (1.10) теңсіздікті ескеріп, $\sigma\cdot mE<\dfrac{\varepsilon}{2}$ теңсіздік орындалатындай $\sigma>0$ санды тауып аламыз және оны тағайындаймыз. Онда $n\to\infty$ –да өлшем бойынша жинақтылықтың анықтамасы бойынша $mA_n(\sigma)\to 0$ болады. Демек, $n>N$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n үшін $2K\cdot mA_n(\sigma)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ теңсіздік орындалады. Соңғы теңсіздік орындалатын барлық n -дер үшін (1.10) теңсіздіктен дәлелдеу керек тұжырымды аламыз, яғни :

$$\left|\int_E f_n dx-\int_E F dx\right|<\varepsilon\cdot$$

1.16. Қосындылы функция

Бізге өлшемді E жиында өлшемді әрі оң $f(x)$ функция берілсін, N натурал сан болсын және $[f(x)]_N$ функция мына түрде анықталсын:

$$[f(x)]_N=\begin{cases}f(x), & f(x)\le N,\\ N, & f(x)>N.\end{cases}$$

Онда $[f(x)]_N$ функцияның өлшемді функция болатынын мына теңдіктен көруге болады:

$$E([f(x)]_N > a) = \begin{cases} E(f > a), & a < N, \\ 0, & a \geq N. \end{cases}$$

Бұл жағдайда $[f(x)]_N$ функция шектелген және Лебег интегралы бойынша интегралданды. Егер мына теңсіздіктер орындалса: $[f(x)]_1 \leq [f(x)]_2 \leq \ldots$, онда

$$\int_E [f]_1 dx \leq \int_E [f]_2 dx \leq \ldots$$

теңсіздіктерде орындалады және

$$\lim_{N\to\infty} \int_E [f(x)]_N dx \tag{1.11}$$

шек туралы сөз қозғауға болады.

Анықтама. (1.11)-шек E жиыны бойынша алынған $f(x)$ функцияның *Лебег интегралы* деп аталады және ол $\int_E f(x)dx$ таңбамен белгіленеді. Егер осы Лебег интегралы шектеулі болса, онда $f(x)$ *функция* E *жиында Лебег интегралы бойынша интегралданады* немесе E *жиында қосындылы функция* деп аталады.

1.61-теорема. Егер $f(x)$ функция E жиында қосындылы функция болса, онда ол осы жиында барлық жерде дерлік шектеулі болады.

Дәлелдеуі. $A = E(f = +\infty)$ болсын, онда A жиында $[f(x)]_N = N$ теңсіздігі орындалады. Олай болса

$$\int_E [f]_N dx \geq \int_A [f]_N dx = N \cdot mA \cdot$$

Егер $mA > 0$ болса, онда $\int_E [f]_N dx$ интегралы N натурал санымен бірге шексіз өскен болар еді, ал бұл қосындылы функцияның анықтамасына қайшы келеді. Дәлелденді.

1.62-теорема. Егер $f(x)$ функция E өлшемді жиында өлшемді функция болса, онда кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, $me < \delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын E жиындағы кез келген өлшемді e жиында $(e \subset E)$ мына теңсіздік орындалады:

$$\left|\int_e f(x)dx\right| < \varepsilon .$$

1.63-теорема. 1. Егер $f(x) > 0$ E жиында өлшемді функция, ал $E_0 \subset E$ өлшемді жиын болса, онда:

$$\int_{E_0} f(x)dx \le \int_E f(x)dx;$$

2. Егер $f(x), F(x)$ функциялары E жиында оң әрі өлшемді функциялар болса және $f(x) \le F(x)$ теңсіздігі орындалса, онда :

$$\int_E f(x)dx \le \int_E F(x)dx ;$$

3. Егер $f_1(x), f_2(x)$ - функциялары E жиында оң әрі өлшемді функциалар болса және $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, онда:

$$\int_E f(x)dx = \int_E f_1(x)dx + \int_E f_2(x)dx .$$

Фату теоремасы. Егер $f_1(x), f_2(x)...$ өлшемді әрі оң функциялар тізбегі E жиында $F(x)$ функцияға барлық жерде дерлік жинақты болса, онда :

$$\int_E F(x)dx \le Sup\left\{\int_E f_n(x)dx\right\}.$$

1.17. Квадратымен қосындылы функция

Бізге $[a,в]$ сегментте өлшемді $f(x)$ функция берілсін.

Анықтама. $f(x)$ функция $E = [a,b]$ жиында *қосындылы функция* деп аталады, егер

$$\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$$

интеграл бар болса. Қосындылы функциялар жиыны $L[a,b] = L$ таңбамен белгіленеді.

Анықтама. Өлшемді $f(x)$ функция *квадратымен қосындылы функция* деп аталады егер,

$$\int f^2(x)dx < +\infty \cdot$$

Барлық квадратымен қосындылы функциялардың жиыны $L_2[a,b] = L_2$ таңбамен белгіленеді. $L_2[a,b]$ жиын *гильберт кеңістігі* деп аталады.

1.64-теорема. **1.** Кез келген квадратымен қосындылы функция қосындылы функция болады, яғни: $L_2[a,b] \subset L[a,b]$.

2. Егер $f(x), g(x) \in L_2$ болса, онда: $f(x)+g(x) \in L_2$, $f(x)-g(x) \in L_2$, $k \cdot f(x) \in L_2$, $k-const$.

3. Егер $f(x), g(x) \in L_2$ болса, онда : $f(x) \cdot g(x) \in L$.

1.65-теорема (Буняковский теңсіздігі). Егер $f(x) \in L_2$, $g(x) \in L_2$ болса, онда Буняковский теңсіздігі орындалады, яғни

$$\left(\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right). \quad (1.12)$$

Дәлелдеуі. Кез келген $f(x), g(x) \in L_2$ функциялармен λ нақты сан үшін

$$\int_a^b \left\{|f(x)| + \lambda|g(x)|\right\}^2 dx \ge 0$$

теңсіздігі орындалады. 1.64-теорема бойынша және $|f(x) \cdot g(x)| \le \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$ теңсіздіктен, соңғы теңсіздікті мына түрге түрлендіруге болады:

$$\int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda\int_a^b |f(x) \cdot g(x)|dx + \lambda^2\int_a^b g^2(x)dx \ge 0 \cdot$$

Енді мына белгілеулерді енгізейік :

$$A = \int_a^b g^2(x)dx,\ B = \int_a^b |f(x) \cdot g(x)|dx,\ C = \int_a^b f^2(x)dx, \quad (1.13)$$

онда :

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C \ge 0.$$

Бұл λ -ға тәуелді квадрат үш мүшелік кез келген λ нақты сан үшін өзінің таңбасын сақтайды, егер $B^2 - AC \le 0$ болса, яғни $B \le \sqrt{AC}$, мұндағы A, B, C мәндерге 1.13 формуладағы интегралды қояйық :

$$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)|dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \quad .$$

Салдар. Егер $f(x)\in L_2$ болса, онда :

$$\int_a^b |f(x)|dx \le \sqrt{b-a}\cdot\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\,.$$

1.66-теорема (Коши-Минковский теңсіздігі).
Егер $f(x)\in L_2, g(x)\in L_2,$ онда:

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx} \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \qquad (1.14)$$

Дәлелдеуі . Буняковский теңсіздігінің екі жағынан түбір алайық:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\,.$$

(1.14) теңсіздікті 2-ге көбейтіп, оның екі жағына

$$\int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx$$

қосылғышты қосайық, сонда дәлелдеу керек теңсіздікті аламыз :

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx \le \left(\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\right)^2.$$

$L[a,b]$ кеңістікте мына метриканы енгізейік $(f\in L, g\in L)$:

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

және $\rho(f,g)$ сан $L[a,b]$ кеңістіктегі f пен g элементтердің арақашықтығы, ал $\int_a^b |f(x)|dx$ арақашықтық $f\in L[a,b]$ элементтен $o\in L[a,b]$ элементке дейінгі арақашықтық f *элементінің нормасы* деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$\|f\|_L = \|f\| = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Лебега интегралының қасиеттерінен норманың мына қасиеттері орындалады :

1. $\|f\|_L = 0,$ егер, $f = 0$;
2. $\|\lambda f\|_L = |\lambda|\cdot\|f\|_L$;
3. $\|f+g\|_L \le \|f\|_L + \|g\|_L$.

Норманың анықтамасы мен қасиеттерін пайдаланып, $f \in L$ және $g \in L$ элементтерінің арақашықтығын мына түрде жазуға болады :

$$\rho(f,g) = \|f - g\|_L .$$

$L_2[a,b]$ кеңістікте мына метриканы енгізейік $(f \in L_2, g \in L_2)$:

$$\rho(f,g) = \sqrt{\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx}$$

және скаляр көбейтінді мына түрде анықталады :

$$(f,g) = \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

ал норма :

$$\|f\|_{L_2} = \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} .$$

Онда L_2 кеңістіктегі норма мен скаляр көбейтіндіге мына қасиеттер орындалады :

1. Егер $\|f\|_{L_2} = 0$ болса , онда $f = 0$;

2. $\|\lambda f\|_{L_2} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L_2}$;

3. $(f,g) = (g,f)$;

4. $(\lambda f, g) = \lambda (f,g); (f, \mu g) = \mu (f,g)$;

5. $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g), (f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$.

Сонда $f(x) \in L_2$ элементінің нормасы мына түрде анықталады:

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{(f,f)} ,$$

ал $f \in L_2$ пен $g \in L_2$ элементтердің арақашықтығын олардың айырымының нормасы түрінде анықтауға болады, яғни:

$$\rho(f,g) = \|f - g\|_{L_2} .$$

L_2 кеңістікте Буняковскийдің теңсіздігі норма түрде былай жазылады:

$$|(f,g)| \le \|f\|_{L_2} \cdot \|g\|_{L_2} ,$$

ал Коши Минковскийдің теңсіздігі мына түрде :

$$\|f + g\|_{L_2} \le \|f\|_{L_2} + \|g\|_{L_2} .$$

1.18. Орташа және әлсіз жинақтылықтар

Анықтама. L_2 кеңістігі f элемент $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ *тізбектің шегі* деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына N саны табылып, $n > N$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n үшін $\|f_n - f\| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, мұндағы $f_k \in L_2$, $k = 1, 2, ...$

Сонымен, егер $\{f_n\}$ тізбектің шегі f болса, онда ол былай белгіленеді :

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ немесе } f_n \to f .$$

Соңғы жазу мен математикалық анализдегі $f_n(x) \to f(x)$ жазу араларында айырмашылық бар. $f_n(x) \to f(x)$ жазу, тағайындалған x үшін $\{f_n(x)\}$ санды тізбектің жинақтылығын білдіреді, ал $f_n \to f$ жазу, L_2 кеңістіктегі $\{f_n\}$ тізбектің элементтері $f \in L_2$ элементке жоғарыда берілген анықтама мағынада жинақтылығын білдіреді. Функция теориясында $f_n \to f$ жазу, мына шекті білдіреді :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]dx \to 0.$$

Функциялық тізбектің, осы жаңа жинақтылығы *орташа жинақтылық* деп аталады, яғни, егер $\{f_n(x)\} \in L_2$ функциялық тізбек осы кеңістіктегі $f(x)$ функцияға орташа жинақты болса ,онда:

$$\|f_n - f\|_{L_2} = \rho(f_n, f) = \sqrt{\int_a^b [f_n(x) - f(x)]dx} \to 0 .$$

1.67-теорема. Егер $\{f_n(x)\}$ тізбегі $f(x)$ функцияға орташа жинақты болса, онда тізбек $f(x)$ функцияға өлшемді жинақты болады .

Дәлелдеуі. $\sigma > 0$ және $A_n(\sigma) = E(|f_n - f| \ge \sigma)$ болсын. Онда

$$\int_a^b (f_n - f)^2 dx \ge \int_{A_n(\delta)} (f_n - f)^2 dx \ge \sigma^2 m A_n(\sigma),$$

мұндағы σ тағайындалған болғандықтан $mA_n(\sigma) \to 0$, яғни $f_n \Rightarrow f$. Дәлелденді .

Осы теоремадан мына *салдарды* аламыз: егер $\{f_n(x)\}$ тізбек $f(x)$ функцияға орташа жинақты болса, онда $\{f_n(x)\}$ тізбектен, $f(x)$ функцияға барлық жерде дерлік жинақты болатын $\{f_{n_k}(x)\}$ тізбекше бөліп алуға болады.

Ескерту. Егер $\{f_n(x)\}$ тізбек $f(x)$ функцияға орташа жинақты болса, онда ол $f(x)$ фунцияға барлық жерде дерлік жинақты болуы міндетті емес .

Осы сияқты, егер $[a,b]$ сегменттің әрбір x нүктесі үшін

$$f_n(x) \to f(x)$$

болса, онда $\{f_n(x)\}$ тізбектің $f(x)$ функцияға орташа жинақты болуы міндетті емес .

Анықтама. L_2 кеңістіктегі $\{f_n\}$ *тізбек өзіне жинақты* деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін N нөмірі табылып, $n > N$ және $m > N$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын барлық $n,\ m$ сандар үшін

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса .

1.68-теорема. Егер $\{f_n\}$ тізбектің шегі бар болса, онда ол өзіне жинақты болады .

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \cdot$$

Кез келген $\varepsilon > 0$ үшін, $n > N$ теңсіздігі орындалатын N санды табайық, онда:

$$\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

Егер $n > N, m > N$ болса, онда

$$\|f_n - f_m\| = \|f_n - f + f - f_m\| \le \|f_n - f\| + \|f_m - f\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \cdot$$

Фишер теоремасы. Егер $\{f_n\}$ тізбек өзіне жинақты болса, онда оның шегі бар .

Анықтама L_2 кеңістігі $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ функциялық тізбек $(f_n \in L_2)$ L_2 кеңістіктегі $f(x)$ $(f(x) \in L)$ функцияға *әлсіз жинақты* деп аталады, егер мына шек

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x) f_n(x) dx = \int_a^b g(x) f(x) dx$$

L_2 кеңістігіндегі кез келген $g(x)$ функция $(g(x) \in L_2)$ үшін орындалса.

1.69-теорема. Егер $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $f(x)$ функцияға орташа жинақты болса, онда ол $f(x)$ функцияға әлсіз жинақты болады .

Дәлелдеуі. $g(x) \in L_2$ болсын, онда Буняковский теңсіздігінен мына теңсіздікті аламыз:

$$\left\{\int_a^b g(x)[f_n(x) - f(x)]dx\right\}^2 \le \left[\int_a^b g^2(x)dx\right] \cdot \left[\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx\right]$$

Осыдан:

$$\left|\int_a^b g \cdot f_n dx - \int_a^b g \cdot f dx\right| \le \|g\|_{L_2} \cdot \|f_n - f\|_{L_2} \to 0 .$$

1.19. Өзгерісі шектеулі функция

Бізге $[a,b]$ сегментте шектеулі $f(x)$ функция берілсін. Осы сегметті

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

нүктелермен n бөлікке бөлейік және мына қосындыны қарастырайық:

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| .$$

Анықтама. V қосындының ең жоғарғы шекарасы $f(x)$ *функцияның* $[a,b]$ *сегменттегі толық өзгерісі (толық вариациясы)* деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$V(f)_a^b = Sup \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| .$$

Егер

$$V(f)_a^b < +\infty$$

болса, онда $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментте *өзгерісі шектелген* (немесе *вариациясы шектелген*) *функция* деп аталады .

1.70-теорема. Монотонды функция өзгерісі шектелген функция .

Дәлелдеуі. $[a,b]$ сегметте өспелі $f(x)$ функция үшін дәлелдейік. Онда $f(x_{k+1})-f(x_k)$ өрнектің таңбасы оң болады, сондықтан дәлелдеу керегімізді мына қосындыдан аламыз :

$$V=\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{k+1})-f(x_k)\right)=f(b)-f(a).$$

Анықтама. $[a,b]$ сегментте шектеулі $f(x)$ *функция Липшиц шартын қанағаттандырады* деп аталады, егер K оң саны табылып, сегменттің кез келген $x,\ y$ нүктелері үшін мына теңсіздік орындалса:

$$|f(x)-f(y)|\le K|x-y|.$$

Егер $f(x)$ функцияның $[a,b]$ сегменттің әрбір нүктесінде $f'(x)$ туындысы бар және туынды шектелген болса, онда Лагранж теоремасы ([14,16]) бойынша

$$f(x)-f(y)=f'(z)(x-y),\quad z\in(x,y)$$

теңдік орындалады. Осыдан $f(x)$ функция Липшиц шартын қанағаттандыратынын көреміз.

Егер $f(x)$ Липшиц шартын қанағаттандырса, онда :

$$|f(x_{k+1})-f(x_k)|\le K(x_{k+1}-x_k).$$

Осыдан $V\le K(b-a)$, яғни Липшиц шартын қанағаттандыратын функция өзгерісі шектеулі функция болады.

1.71-теорема. Кез келген өзгерісі шектеулі функция шектелген.

Дәлелдеуі. Егер $x\in[a,b]$ болса, онда

$$V=|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Осыдан $|f(x)|\le|f(a)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$

1.72-теорема. **1**. Өзгерісі шектелген екі функцияның қосындысы, айырымы және көбейтіндісі өзгерісі шектелген функция болады.

2. Егер $f(x),g(x)$ өзгерісі шектелген функция және $g(x)\ge\sigma>0$ болса, онда $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ өзгерісі шектелген функция болады .

1.73-теорема .Егер $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментте шектелген болса, онда:

$$\overset{a}{\underset{b}{V}}(f)=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f),$$

мұндағы $c\in(a,b)$.

1.20. Стильтес интегралы

Біз осы тақырыпта Риман интегралының жалпы интегралы болатын Стильтес интегралын қарастырайық.

Бізге $[a,b]$ сегментте шектеулі $f(x)$ пен $g(x)$ функцияларын қарастырайық. Сегментті $a=x_0<x_1<...x_k<x_{k+1}<...<x_n=b$ нүктелермен n бөлікке бөлейік, әрбір $[x_k,x_{k-1}]$ дербес сегменттен c_k нүкте алып ,

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(c_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)]$$

қосындыны құрайық және $\lambda=max(x_{k+1}-x_k)$ болсын.

Анықтама. Егер $\lambda\to 0$ - да σ қосындының I шектелген шегі бар және бұл шек $[a,b]$ сегментті бөліктеуге әрі c_k нүктені алу әдісіне тәуелсіз болса, онда I шек $f(x)$ функцияның $g(x)$ функция бойынша *Стильтес интегралы* деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}f(c_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)]=I=\int_a^b f(x)dg(x)=(S)\int_a^b f(x)dg(x).$$

Егер $g(x)=x$ болса, онда біз Риман интегралын аламыз.

Стильтес интегралының негізгі қасиеттерін қарастырайық .

1-қасиет. $\int_a^b[f_1(x)\pm f_2(x)]dg(x)=\int_a^b f_1dg(x)\pm\int_a^b f_2(x)dg(x).$

2-қасиет. $\int_a^b f(x)d[g_1(x)\pm g_2(x)]=\int_a^b f(x)dg_1(x)\pm\int_a^b f(x)dg_2(x).$

3-қасиет. Егер m, n - тұрақты сандар болса, онда :

$$\int_a^b mf(x)d(ng(x))=m\cdot n\int_a^b f(x)dg(x).$$

4-қасиет. Егер $c\in(a,b)$ болса, онда :

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x)\cdot$$

5-қасиет. Егер мына интегралдарың $\int_a^b f(x)dg(x), \int_a^b g(x)df(x)$ біреуі бар болса, онда екіншісі де бар болады және *бөліктеп интегралдау формуласы* деп аталатын мына мына теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)\cdot g(x)\,|_a^b - \int_a^b g(x)df(x).$$

1.74-теорема. Егер $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментте үзіліссіз, ал $g(x)$ осы сегментте өзгерісі шектеулі функция болса , онда :

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

интегралы бар.

1.75-теорема. Егер $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментте үзіліссіз, ал $g(x)$ функция Риман интегралы бойынша интегралданса әрі осы сегменттің әрбір нүктесінде $g'(x)$ туындысы бар болса, онда:

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx\cdot$$

1.21. Абсолютті үзілісіз функция

Анықтама. $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментте шектелген болсын. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, өзара қиылспайтын кез келген саны санаулы $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_n,b_n)$ интервалдарға

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \tag{1.15}$$

теңсіздігі және

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(f(b_k) - f(a_k))\right| < \varepsilon \tag{1.16}$$

теңсіздік орындалса, онда $f(x)$*функция абсолютті үзіліссіз* деп аталады.

Осы анықтамадан, егер функция абсолютті үзіліссіз болса, онда ол үзіліссіз болады, ал кері тұжырым орындалмайды.

Анықтамадағы (1.16) шартты мына шартпен алмастыруға болады :

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \left(f(b_k) - f(a_k) \right) \right| < \varepsilon .$$

Егер $f(x)$ функция Липщиц шартын қанағаттандырса, яғни

$$\left| f(x'') - f(x') \right| \le K \left| x'' - x' \right|,$$

онда ол абсолютті үзіліссіз болады.

1.76-теорема. Егер $f(x), g(x)$ функциялары абсолютті үзіліссіз болса, онда $f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$ және $\frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$ функциялары да абсолютті үзіліссіз болады.

1.77-теорема. Егер $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментте абсолютті үзіліссіз және функцияның қабылдай алатын мәндері $[A,B]$ сегментке тиісті болса, ал $[A,B]$ сегментте анықталған $F(y)$ функцияға Липшиц шарты орындалса, онда $F[f(x)]$ күрделі функция абсолютті үзіліссіз болады.

Дәлелдеуі. Егер $F(y)$ функцияға Лившиц шарты орындалса, яғни $\left| F(y'') - F(y') \right| \le K \left| y'' - y' \right|$, онда өзара енгізілмеген кез келген (a_k, b_k) интервалдарды алсақ та

$$\sum_{k=1}^{n} \left| F[(b_k)] - F[(a_k)] \right| \le K \sum_{k=1}^{n} \left| f[(b_k)] - f[(a_k)] \right|$$

теңсіздік орындалады. Осы теңсіздіктің оң жағындағы қосынды $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$ қосындымен бірге жеткілігінше аз шама. Дәлелденді.

Біз $[a,b]$ сегментте қосындылы $f(x)$ функцияны қарастырайық. Мына функция

$$\Phi(x) = C + \int_a^x f(t)dt$$

$f(t)$ *функцияның анықталмаған Лебег интегралы* немесе *анықталмаған интеграл* деп аталады, C - тұрақты сан.

1.78-теорема . $\Phi(x)$ анықталмаған интеграл абсолютті үзіліссіз болады.

Дәлелдеуі. Кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $\delta > 0$ саны табылып, $me > \delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын кез келген өлшемді e жиын

үшін (1.62-теорема) $\left| \int_e f(t)dt \right| < \varepsilon$ теңсіздік орындалады. Егер өзара енгізілмеген (a_k, b_k) интервалдардың ұзындықтарының қосындысы δ санының кіші болса, онда :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(t)dt \right| < \varepsilon .$$

және $\int_{a_k}^{b_k} f(t)dt = \Phi(b_k) - \Phi(a_k)$. Онда :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \{\Phi(b_k) - \phi(a_k)\} \right| < \varepsilon .$$

1.79-теорема. $\Phi(x)$ анықталмаған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең, яғни:

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Анықтама. Егер *x* нүктеде $f(x) \neq \pm\infty$ және

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 0$$

болса, онда *x* нүкте $f(t)$ функцияның *Лебег нүктесі* деп аталады.

1.80-теорема. Егер x нүкте $f(t)$ функцияның Лебег нүктесі болса, онда $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ анықталмаған интегралдың осы нүктедегі туындысы $f(x)$ санына тең.

Дәлелдеуі. $\Phi(x)$ анықталмаған интеграл үшін мына теңдік орындалады:

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt.$$

Онда:

$$\left| \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt.$$

Ескерту. Осы теореманың кері тұжырымы жалпы жағдайда орындалмайды.

II ТАРАУ

КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

2.1. Комплекс сандар

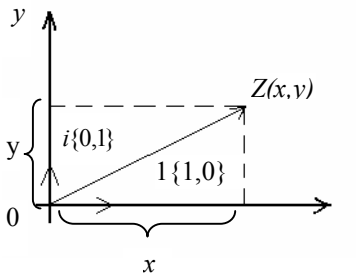
Анықтама. *Комплекс сандар* деп $z = x + iy$ түріндегі сандарды айтамыз, мұндағы x, y–нақты сандар, $i = \sqrt{-1}$ *жорамал бірлік* деп аталады және x пен y сандары z комплекс санының сәйкес *нақты* және *жорамал бөлігі* деп аталады әрі олар $x = Re\, z,\ y = Im\, z$ таңбаларымен белгіленеді.

Сонымен, егер бізге z комплекс саны берілсе, онда нақты x пен y сандары берілді деп түсінуіміз керек.

Егер $y = 0$ болса, онда z комплекс саны x нақты бөлігіне тең, яғни $z = x + i \cdot 0 = x,$ осы сияқты, егер $x = 0$ болса, онда $z = 0 + iy = iy$.

Жазықтықта XOY тікбұрышты декарт координат жүйені қарастырайық және $z = x + iy$ комплекс сандағы x пен y нақты сандар осы жазықтықтағы нүктенің координаттары болсын. Онда әрбір $z = x + iy$ комплекс санына осы жазықтықта $z = z(x, y)$ нүкте сәйкес келеді және керісінше, яғни жазықтықтағы әрбір $z(x, y)$ нүктеге осы жазықтықта анықталған $z = x + iy$ комплекс саны сәйкес келеді.

Сонымен комплекс сандар жиыны мен XOY жазықтықтағы нүктелер жиыны арасында өзара бір мәнділік сәйкестік бар (1- сурет).



1-сурет

XOY жазықтығындағы әрбір $z(x,y)$ нүкте, жазықтықтағы координат жүйенің бас нүктесі векторлардың бас нүктесі, ал $z(x,y)$ нүкте соңғы нүктесі болатын векторды анықтайды. Осылайша анықталған векторлардың OX осіндегі проекциясы x-ке, ал OY осіндегі проекциясы y-ке тең. Сонымен, кез келген $z = x + iy$ комплекс сандардың геометриялық кескінін XOY жазықтығында $z(x,y)$ нүктелер немесе $z = z\{x,y\}$ векторлар арқылы бейнелеуге болады. Осылайша анықталған XOY жазықтығын *комплекс сандар жазықтығы* немесе z *комплекс жазықтығы* дейміз.

$z = x$ нақты $(y = 0)$ сандар z жазықтығында OX осіндегі $(x,0)$ нүктелерді немесе немесе OX осіндегі $\{x,o\}$ векторларды бейнелейді.

OX осі *нақты* деп аталады. $z = 1$ нақты саны OX осіндегі $(1,0)$ нүктені немесе осы остегі $\{1,0\}$ бірлік векторды анықтайды (1- сурет).

Ал $z = iy$ жорымал саны OY өсіндегі (o,y) нүктені немесе осы остегі $\{o,y\}$ векторды анықтайды. OY осі *жорамал ос* деп аталады. $z = i$ жорамал саны OY осіндегі $(0,1)$ нүктені немесе осы остегі бірлік $\{0,1\}$ векторын анықтайды және бұл вектор OY осіндегі бірлік вектор болады (1- сурет).

Анықтама. $z_1 = x_1 + iy_1$ және $z_2 = x_2 + iy_2$ *комплекс сандары тең* деп аталады, егер комплекс сандардың нақты бөліктері нақты бөліктеріне, ал жорамал бөліктері жорамал бөліктеріне тең болса, яғни $Re\, z_1 = Re\, z_2 = x_1 = x_2$, $Im\, z_1 = Im\, z_2 = y_1 = y_2$. z_1 мен z_2 комплекс сандардың теңдігі $z_1 = z_2$ таңбамен белгіленеді. $z = x + iy$ пен $\bar{z} = x - iy$ комплекс сандары *өзара түйіндес комплекс сандар* деп аталады. Бұл жағдайда $z(x,y)$ пен $\bar{z}(x,y)$ нүктелері нақты OX осі арқылы симметриялы болады.

z комплекс жазықтығындағы $z = z(x,y)$ векторының r ұзындығына және осы вектордың OX нақты осімен оң бағытта түзейтін φ бұрышын қарастырайық (1- сурет).

Вектордың r ұзындығы мен φ бұрышы z комплекс санның сәйкес *модулі* және *аргументі* деп аталады, олар былай белгіленеді:

$$|r| = |z|,\ \varphi = Argz\ . \qquad (2.1)$$

Бізге аналитикалық геометриядан, декарт координат пен поляр координат жүйелерінің арасындағы байланыс мына формула арқылы өрнектелінетіні белгілі

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\ .$$

Онда:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ . \tag{2.2}$$

Бұл формула $z = x + iy$ комплекс санның *тригонометриялық түрі* деп аталады. Осыдан

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.3}$$

және $z \neq 0$ болғанда φ аргументтің барлық мәндері мына қатынасты қанағаттандырады:

$$tg\varphi = \frac{y}{x},\ \varphi = arctg\frac{y}{x}\cdot \tag{2.4}$$

Егер $z = 0$ болса, онда $Argz$ анықталмаған, сондықтан $z \neq 0$ болғанда $Argz$ мәндерінің жиынынан $(-\pi, \pi)$ интервалға тиісті тек бір ғана мәнді бөліп аламыз және оны $arg\ z$ деп белгілейік және ол *аргументтің негізгі мәні* деп аталады:

$$-\pi < arg\ z < \pi\ . \tag{2.5}$$

Сонда 2.4 мен 2.5– формулалардан мына теңдікті аламыз:

$$\varphi = arg\ z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x > 0, \forall y \neq 0, \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y \geq 0, \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Онда мына теңдік орындалады: $Argz = arg\ z + 2k\pi$.

Мына нақты сандар $r = |z|, \varphi = arg\ z$ комплекс жазықтығындағы z нүктенің *координаттары* деп аталады, яғни $z(r, \varphi)$. Берілген z_1 мен z_2

комплекс сандардың теңдігін поляр координатында мына теңдіктермен анықтаймыз:

$$|z_1| = |z_2|, \quad arg\, z_1 = arg\, z_2$$

ал түйіндестік белгіні төмендегідей:

$$|z| = |\bar{z}|, \quad arg\, \bar{z} = -arg\, z,$$

мұнда $arg\, z \neq \pi$.

Бізге тригонометриялық түрде екі $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + i\, sin\varphi_2)$, $z_2 = r_2(cos\,\varphi_2 + i\, sin\,\varphi_2)$ комплекс сандары берілсін. Егер $z_1 = z_2$ болса, онда :

$$r_1\, cos\,\varphi_1 = r_2\, cos\,\varphi_2\,,\ r_1\, sin\,\varphi_1 = r_2\, sin\,\varphi_2$$

теңдіктері орындалады. Осыдан:

$$|z_1| = r_1 = \sqrt{(r_2\, cos\,\varphi_2)^2 + (r_2\, sin\,\varphi_2)^2} = r_2 = |z_2|.$$

Онда жоғарыдағы теңдіктерден:

$$cos\,\varphi_1 = cos\,\varphi_2, \quad sin\,\varphi_1 = sin\,\varphi_2.$$

Онда :

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi.$$

Егер $r_1 = r_2, \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi$ болса, онда $z_1 = z_2$ теңдігі орындалады.

Мысалдар. 1. Берілген комплекс сандарды тригонометриялық түрге келтірейік: а) $z_1 = -1;$ ә) $z_2 = -i;$ б) $z_3 = 1 - i\sqrt{3};$ в) $z_4 = 2.$

а) $z_1 = -1$ комплекс саны үшін $x_1 = -1 < 0, y_1 = 0$ және (2.3) формуладан $r = |z_1| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+0} = 1.$

Енді (2.6) теңдіктен z_1 комплекс санының аргументі $\varphi = arg\, z_1 = \pi$ – ге тең.

Онда (2.2) формула бойынша

$$z_1 = -1 = 1(cos\,\pi + i\, sin\,\pi) = cos\,\pi + i\, sin\,\pi.$$

ә) $z_2 = -i$ комплекс саны үшін $x_2 = 0, y_2 = -1 < 0$ және (2.3) формуладан $r = |z_2| = \sqrt{0+1} = 1.$ Енді 2.6 теңдіктен z_2 комплекс санның аргументін анықтаймыз :

$$arg\,\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}.$$

Сонда 2.2 – формула бойынша:

$$z = -i = cos\frac{\pi}{2} - i\, sin\frac{\pi}{2}.$$

б) $z_3 = 1 - i\sqrt{3}, x_3 = 1 > 0, y_3 = -\sqrt{3} < 0.$ (2.3) формуладан $|r| = \sqrt{1+3} = 2,$ ал 2.6 формуладан $\varphi = arctg(-\sqrt{3}) = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{6}.$ Сонда :

$$z_3 = 1 - i\sqrt{3} = 2(cos\frac{\pi}{6} - i\,sin\frac{\pi}{6}).$$

в) $z_4 = -2, x_3 = -2 < 0, y_3 = 0.$ 2.3–формуладан $|r| = \sqrt{4+0} = 2,$ ал 2.6 формуладан $\varphi = \pi + arctg(\frac{0}{2}) = \pi + arctg0 = \pi.$ Сонда :

$$z_4 = -2 = 2(cos\pi + i\,sin\pi).$$

2. Төмендегі шарттар жазықтықтағы қандай нүктелер жиындарын анықтайды: а) $Re\,z = 4;$ ә) $2 < Re\,z \le 5;$ б) $Im\,z = 5;$ в) $2 < Im \le 5.$

а) $Re\,z = 4$ теңдігі мына теңдеумен эквивалентті:

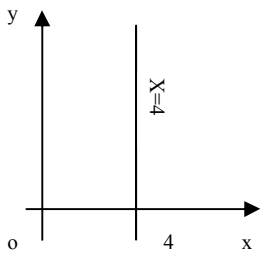
$$Re\,z = Re(x + iy) = x, \quad x = 4.$$

Онда $Re\,z = 4$ шарты OY осіне параллель болатын $x = 4$ түзуінің бойындағы нүктелер жиыны болады (2а-сурет).

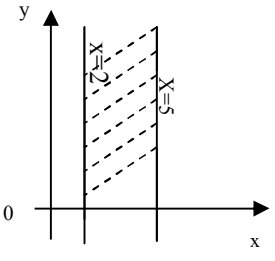
ә) $2 < Re\,z \le 5$ теңсіздігінен мына теңсіздікті аламыз: $2 < x \le 5$.

Сонымен берілген шарт $2 < x \le 5$ теңсіздігін қанағаттандыратын нүктелер жиыны болады (2 ә-сурет).

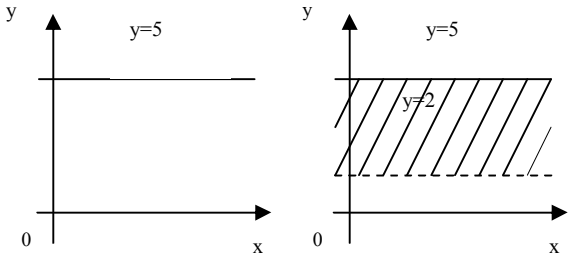
в) $Im\,z = 5$ шарт $y = 5$ теңдеуімен эквивалентті, яғни берілген шарт OX осіне параллель болатын $y = 5$ түзуді анықтайды (2 б-сурет).



а)



ә)



б) в)

2- сурет

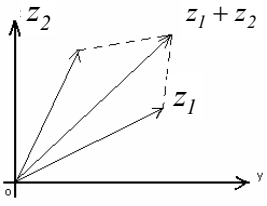
в) $2 \le Im \le 5$ шарт $2 < y \le 5$ теңсіздіктен эквивалентті, сондықтан берілген шарт $2 < y \le 5$ теңсіздікті қанағаттандыратын нүктелер жиыны болады (2в-сурет).

2.2. Комплекс сандарға орындалатын амалдар

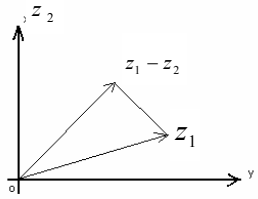
1. Комплекс сандарды қосу және азайту. **Анықтама.**. $z_1 = x_1 + iy_1$ мен $z_2 = x_2 + iy_2$ *комплекс сандардың* $z_1 + z_2$ *қосындысы* деп z комплекс санын айтамыз:

$$z = z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2).$$

Осы анықтамадан, $z_1 + z_2$ вектордың координат остеріндегі проекциясы, z_1 мен z_2 векторларының координат остеріндегі проекцияларының қосындысына тең. Сондықтан, $z_1 + z_2$ векторы z_1 мен z_2 векторының қосындысына тең, яғни z_1 мен z_2 вектордан анықталған параллелограмның диагоналіне тең (3-сурет).



3- сурет



4- сурет

Комплекс сандарға мына қасиеттер орындалады:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,\ z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3.$$

Комплекс сандарды қосу амалына кері амал орындалады.

Анықтама. z_1 мен z_2 комплекс сандарының $z = z_1 - z_2$ айырымы деп z комплекс санын айтамыз:

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \qquad (2.7)$$

Осы анықтамадан, $z_1 - z_2$ векторының бастапқы нүктесі z_2 векторының соңғы нүктесімен, ал соңғы нүктесі z_1 вектордың соңғы нүктесімен беттеседі (4-сурет).

Жоғарыда айтылғандарды пайдаланып, $|z|$ саны z векторының модулі болғандықтан және үшбұрыштың кез келген екі қабырғасының ұзындығының қосындысы үшінші қабырғасының ұзындығынан үлкен, ал айырымы үшінші қабырғасының ұзындығынан кіші болатынын ескеріп, мына теңсіздіктерді аламыз:

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|,\ |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|. \qquad (2.8)$$

Бұл теңсіздіктердегі теңдік орындалады, егер $arg\, z_1 = arg\, z_2$ теңдігі орындалса, яғни z_1 мен z_2 нүктелер координат жүйенің бас нүктесінен шығатын сәуленің бойына тиісті болса.

2. Комплекс сандарды көбейту және бөлу. Анықтама. z_1 мен z_2 *комплекс сандардың көбейтіндісі* деп $z = z_1 \cdot z_2$ комплекс санын айтамыз:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \qquad (2.9)$$

Комплекс сандарды көбейту амалына мына қасиеттер орындалады:

$$z_1z_2 = z_2z_1,\ z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3,\ (z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3.$$

Егер $z_1 = z = x + iy,\ z_2 = \bar{z} = x - iy$ болса, онда

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = r^2.$$

Анықтамадағы $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$ көбейту амалы алгебрадағы көбейту ережесімен бірдей және $i^2 = -1$.

Декарт координат жүйеден поляр координат жүйеге көшу формуласын пайдаланып, яғни

$$x_1 = r_1 cos\varphi_1,\ y_1 = r_1 sin\varphi_1,\ x_2 = r_2 cos\varphi_2,\ y_2 = r_2 sin\varphi_2,$$

мына теңдікті аламыз:

$$z_1 z_2 = (r_1 \cos\varphi_1 + ir_1 \sin\varphi_1)(r_2 \cos\varphi_2 + ir_2 \sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2 \left[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)\right] =$$
$$= r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right].$$

Демек, z_1 мен z_2 комплекс сандарды көбейткенде комплекс сандардың r_1 мен r_2 модульдері көбейтіледі, ал олардың аргументтері қосылады, яғни:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,\ Arg(z_1 z_2) = Argz_1 + Argz_2.$$

Осы сияқты екі комплекс санды көбейту ережесін $n > 2$ комплекс сандар үшін қолдануға болады:

$$z_1 z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 r_2 \ldots r_n \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)\right], \quad (2.10)$$
$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1||z_2| \ldots |z_n|,\ Arg(z_1 z_2 \ldots z_n) = Argz_1 + Argz_2 + \ldots + Argz_n.$$

Комплекс сандарды көбейту амалына кері амал орындалады, яғни:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\,2} + y^2{}_2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}.$$

Енді соңғы теңдіктен поляр координат жүйеге көшейік, сонда:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i \sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i \sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Демек, z_1 мен z_2 комплекс сандарды бөлгенде комплекс сандардың r_1 мен r_2 модульдері бөлінеді, ал бөлшектің алымындағы комплекс санның аргументінен бөліміндегі комплекс санның аргументі алынады, яғни:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ Arg\frac{z_1}{z_2} = Argz_1 - Argz_2.$$

3. Комплекс сандарды дәрежелеу және түбір табу. Берілген комплекс санының натурал дәрежесі мына теңдіктен анықталады:

$$z^n = z \cdot z \ldots z.$$

(2.10) теңдіктегі $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ болса, онда :

$$z^n = \left[r(\cos\varphi + i \sin\varphi\right]^n = r^n \left[\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right] \quad (2.11)$$

теңдігі орындалады. 2.11–формула *Муавр формуласы* деп аталады.

Егер $|z| = 1$ болса, онда 2.11–формуладан

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

теңдікті аламыз. 2.11–формуладан:

$$|z^n| = |z|^n,\ Argz^n = nArgz.$$

Енді комплекс сандар жиынында $z \neq 0$ комплекс саннан әрқашанда түбір табуға болады.

Бізге $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\quad z \neq 0$ комплекс саны берілсін. Енді $\varpi^n = z$ теңдігін қанағаттандыратын $\varpi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ комплекс санын қарастырайық. Онда комплекс санды дәрежелеу ережені пайдаланып мына теңдікті аламыз:

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

мұндағы n – натурал сан. Осыдан:

$$\rho^n = r,\ n\theta = \varphi + 2k\pi,\quad k \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ..\}\quad .$$

Қарастырып отырған $\rho,\ r$ оң сандар болғандықтан $\rho^n = r$ теңдігінен

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

теңдікті аламыз, мұндағы түбір–арифметикалық түбір, ал екінші теңдіктен, k – ның мәндеріне байланысты θ -ның шексіз көп шешімдерін табамыз және ол шешімдерді θ_k таңбамен белгілейік, яғни:

$$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{2.12}$$

Онда :

$$\varpi_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}). \tag{2.13}$$

Егер 2.12–формуладағы $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ үшін θ_k – ның әртүрлі мәндерін табамыз: $\theta_0, \theta_1, ..., \theta_{n-1}$, ал егер $k = -1, -2, ...$ үшін осы θ_k мәндерді табамыз және олар $\theta_0, \theta_1, ..., \theta_{n-1}$ мәндерінің біреуінен айырмашылығы 2π -ге еселі. Сондықтан 2.13–формуладан $\sqrt[n]{z}$ – нің әртүрлі *n* мәндерін мына формуладан табамыз:

$$\varpi_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \qquad (2.14)$$

мұндағы $k = 0, 1, ..., n-1.$

3. $(1-\sqrt{3}i)^{30}$ есепте.

Шешімі. Алдымен $1-\sqrt{3}i$ коплекс санын тригонометриялық түрге түрлендірейік $x = 1 > 0,\ y = -\sqrt{3} < 0$. Онда: $\varphi = -arctg\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = -\frac{\pi}{3},\ r = \sqrt{1+3} = 2.$

Сонда: $1-\sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}).$ Муавр формуласы бойынша:

$$(1-\sqrt{3}i)^{30} = 2^{30}(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})^{30} = 2^{30}\cdot(\cos 10\pi - i\sin 10\pi) = 2^{30}.$$

4. $\sqrt[3]{-1}$ түбірдің барлық мәндерін есепте.

Шешімі. Куб түбір астында 1-ді коплекс түрге түрлендірейік:

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi.$$

Онда 2.14–формула бойынша:

$$w_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}\left[\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + \sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right], \quad k = 0,1,2.$$

Соңғы теңдіктен $\sqrt[3]{-1}$ саның барлық түбірін табамыз:

$$k = 0: w_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$k = 1: w_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$k = 2: w_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

5. $\sqrt{-1-i}$ түбірдің барлық мәндерін есептейік:

Шешімі. Комплекс санды тригонометриялық түрге түрлендірейік:

$$x = -1 < 0,\ y = -1 < 0,\ \varphi = -\pi + arctg(1) = -\frac{3\pi}{4},\ r = \sqrt{2}.$$

Сонда:

$$-1 - i = \sqrt{2}\left[\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right].$$

Осыдан және 2.14–формуладан:

$$w_k = \sqrt[4]{-1-i} = \sqrt[8]{2}[\cos\frac{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{4}], \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$k=0: w_k = \sqrt[8]{2}\left[\ cos(-\frac{3\pi}{16}) + i\,sin(-\frac{3\pi}{16})\ \right] = \sqrt[8]{2}\left(\ cos\frac{3\pi}{16} - i\,sin\frac{3\pi}{16}\ \right),$$

$$k=1: w_1 = \sqrt[8]{2}(cos\frac{5\pi}{16} + i\,sin\frac{5\pi}{16}),$$

$$k=2: w_2 = \sqrt[8]{2}(cos\frac{13\pi}{4} + i\,sin\frac{13\pi}{4}),$$

$$k=3: w_3 = \sqrt[8]{2}(cos\frac{21\pi}{4} + i\,sin\frac{21\pi}{4}).$$

2.3. Комплекс сандар тізбегі

Элементтері комплекс сандар болатын тізбек қарастырайық:

$$z_1, z_2, ...z_n, ...$$

мұндағы $z_n = x_n + iy_n$. Комплекс сандар тізбегі қысқаша $\{z_n\}$ таңбамен белгіленеді, z_i-комплекс тізбектің мүшелері немесе нүктелері, ал x_n *жалпы мүшесі* деп аталады $(n = 1, 2,...)$. $\{z_n\}$ комплекс тізбегіне екі $\{x_n\}$ мен $\{y_n\}$ нақты тізбектері сәйкес келеді.

Анықтама. $\{z_n\}$ *тізбегі шектелген* деп аталады, егер $M \geq 0 (M > 0)$ саны табылып, барлық $n(n = 1,2,...)$ үшін $|z_n| \leq M (|z_n| > M)$ тізбегіндегі орындалса.

Шектелген тізбектің геометриялық мағынасы: берілген тізбектің барлық элементтері центрі координат жүйесінің бас нүктксі болатын, ал радиусы *M*-ге тең дөңгелектің нүктелері болады.

2.1-теорема. $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегі шектелуі үшін $\{x_n\}$ мен $\{y_n\}$ нақты тізбектерінің шектелуі қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. $\{z_n\}$ тізбек шектелген болсын деп ұйғарайық, оған $|x_n| \leq M$, $|y_n| \leq M$ теңсіздіктерінің орындалатынын дәлелдейік. Онда $|x_n| \leq |z_n|$, $|y_n| \leq |z_n|$ теңсіздіктерінен және $|z_n| \leq M$ теңдіктерінен дәлелдеу керек $|x_n| \leq M, |y_n| \leq M$ теңсіздіктерін аламыз.

Жеткіліктігі. Енді $\{x_n\}$ мен $\{y_n\}$ нақты тізбектері шектелсін, яғни $|x_n| \le M, |y_n| \le M$ теңсіздіктері орындалады. Онда: $|z_n| \le |x_n| + |z_n| \le 2M$. Дәлелденді.

Анықтама. z_0 комплекс сан $\{z_n\}$ комплекс *сандар тізбегінің шегі* деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $N = N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n > N$ теңсіздігін қанағатандыратын барлық n үшін $|z - z_0| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

Егер z_0 комплекс саны $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегінің шегі болса,онда ол былай белгіленеді:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 < \infty.$$

Шегі бар комплекс сандар *жинақты тізбектер* деп аталады.

2.2-теорема. Комплекс сандар тізбегі жинақты болса, онда ол шектелген.

Дәлелдеуі. Математикалық анализ курсындағы теореманың дәлелдеуіндей [14,15].

2.3-теорема. $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегі $x_0 = x_0 + iy_0$ нүктеде жинақты болу үшін $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$, теңдіктерінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі: $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ шегі бар болсын деп ұйғарайық. Онда комплекс сандар тізбегінің анықтамасы бойынша кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $N = N(\varepsilon)$ нөмірі үшін $n > N$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n үшін

$$|z - z_0| < \varepsilon \tag{2.15}$$

теңсіздігі орындалады. Демек, (2.15) теңсіздіктен және

$$|x_n - x_0| \le |z_n - z_0|, |y_n - y_0| \le |z_n - z_0|$$

теңсіздіктерден мына теңдіктер орындалады барлық $n > N$ үшін:

$$|x_n - x_0| < \varepsilon, |y_n - y_0| < \varepsilon.$$

Олай болса, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Жеткіліктігі. Енді мына теңдіктер орындалсын деп ұйғарайық:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0,$$

яғни $\{x_n\}$мен $\{y_n\}$ нақты сандар жинақты болғандықтан кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $N = N(\varepsilon)$ нөмірі табылып $n \geq N$ тізбегін қанағатандыратын барлық n үшін

$$|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.16}$$

теңсіздіктері орындалады. Онда брлық $n \geq N$ үшін:

$$|z_n - z_0| = |x_n + iy_n - x_0 - iy_0| = |(x_n - x_0) - i(y_n - y_0)| \leq$$

$$\leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Олай болса, $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Дәлелденді.

Математикалық анализ курсындағы теоремалар жинақты $\{z_n\}, \{z'_n\}$ комплекс тізбектеріне мына қасиеттер орындалады ([14, 15]):

$$\lim_{n\to\infty} cz_n = c \lim_{n\to\infty} z_n, \ c - const,$$

$$\lim_{n\to\infty} (z_n \pm z'_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} z'_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n z'_n = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} z'_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{z'_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\leftarrow\infty} z'_n},$$

мұндағы $z_n = x_n + iy_n, z'_n = x'_n + iy'_n$.

Математикалық анализ курсында қарастырылған тізбектің тізбекшесі ұғымын комплекс сандар тізбегінде де келтіруге болады және осы аталған курстағы анықтамалар мен теоремалар орындалады. Біз оларды дәлелдеусіз қабыл алйық.

2.3-теорема. $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегі жинақты және оның шегі z_0 болса, онда осы тізбектің тізбекшесі жинақты болады және оның шегі z_0 -ге тең.

Анықтама. z_0 нүкте $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегінің *шектік нүктесі* деп аталады, егер z_0 нүктесінің кез келген маңайында осы комплекс сандар тізбегінің шексіз көп элементтері тиісті болса.

2.4-теорема. Егер z_0 нүкте $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегінің шектік нүктесі болса, онда $\{z_n\}$ тізбегінен z_0 нүктеге жинақты болатын $\{z_{n_k}\}$ тізбекше бөліп алуға болады.

Болцано-Вейерштрасс теоремасы. Кез келген $\{z_n\}$ шектелген комплекс сандар тізбегінің кем дегенде бір шектік нүктесі бар.

2.5-теорема. Кез келген $\{z_n\}$ жинақты комплекс сандр тізбегінің шектік нүктеге тең болатын тек бір ғана шегі бар.

Дәлелдеуі. $lim\, z_n = z_0$ болсын деп ұйғарайық. Онда z_0 нүктенің кез келген маңайында $\{z_n\}$ тізбектің шексіз көп мүшелері жатыр. Енді z_0 нүктенің тек бір ғана шектік нүкте болатынын дәлелдейік. Қарсы жорыйық, яғни $\{z_n\}$ тізбектің z_0 нүктеге тең емес тағы бір z_0' шектік нүктесі бар деп ұйғарайық. Онда, 2.4-теорема бойынша жинақты $\{z_n\}$ тізбектен z_0' нүктеге жинақты $\{z'_{n_k}\}$ тізбекше бөліп алуға болады, мұндағы $z_0' \neq z_0$. Ал бұл соңғы тұжырым 2.3-теореманың тұжырымына қайшы келеді. Осы қайшылық теореманы дәлелдейді.

Коши критерийі. $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегі жинақты болу үшін кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n > N$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n және $m = 1,2,3,...$ үшін

$$|z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті әрі жеткіліктті.

Мысалдар. 1. Комплекс сандар тізбегі шегінің анықтамасын пайдаланып, $\{z_n\} = \left\{\dfrac{2n-i}{2n+2}\right\}$ тізбектің шегі 1-ге тең болатынын дәлелдейік.

Шешімі: Кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n > N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n үшін

$$|z_n - 1| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалатынын дәлелдесек жеткіліктті. Ол үшін $|z_n - 1|$ модулді қарастырайық:

$$|z_n - 1| = \left|\frac{2n-i}{2n+2} - 1\right| = \left|\frac{2n-i-2n-2}{2n+2}\right| = \left|\frac{-2-i}{2n+2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2n+2}.$$

Онда $|z_n - 1| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады, егер $\frac{\sqrt{5}}{2n+2} < \varepsilon$ теңсіздік орындалса. Соңғы теңсіздіктен *n*-ді табайық:

$$2n+2 > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}, \quad 2n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} - 2, \quad n > \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} - 2\right).$$

Онда $N[\varepsilon]$ нөмірі ретінде $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} - 2\right)\right] + 2$ санын алсақ жеткілікті, мұндағы $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} - 2\right)\right]$ сан $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} - 2\right)$ санның бүтін бөлігі.

2. $\{z_n\} = \left\{\frac{5n-7i}{2n+3i}\right\}$ комплекс тізбектің шегін табайық.

Шешімі. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim \frac{5n-7i}{2n+3i} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{5n-7i}{n}}{\frac{2n+3i}{n}} = \lim\limits_{\substack{n\to\infty}} \frac{5-\frac{7}{n}i}{2+\frac{3}{n}i} = \frac{5}{2}$.

3. $\{z_n\} = \left\{\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{i\left(\frac{\pi(2n-1)}{4} - \frac{1}{n}\right)}\right\}$ тізбектің шегін табайық.

Шешімі.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{i\left(\frac{\pi(2n-1)}{4}-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2}{2n-1}\cdot i\left(\frac{\pi(2n-1)}{4}-\frac{1}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{2n-1}i\left(\frac{\pi(2n-1)}{4}-\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{n(2n-1)}\right)} = e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

2.4. Комплекс сандар қатары

Анықтама. Мүшелері комплекс сандар болатын мына қатар:

$$w_1 + w_2 + \ldots w_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} w_n, w_n = u_n + iv_n \qquad (2.17)$$

комплекс мүшелі сандар қатары деп аталады, ал $w_1 + w_2 + \ldots w_n = s_n$ қосынды комплекс мүшелі сандар қатардың *дербес қосындысы* деп аталады, ал $\{s_n\}$ (2.17) қатардың *дербес қосындылар тізбегі* деп аталады.

Анықтама. Комплекс мүшелі сандар қатары *жинақты* деп аталады, егер $\{s_n\}$ дербес қосындының тізбегі жинақты болса . Егер $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s < \infty$ болса , онда s шек (2.17) *қатардың қосындысы* деп аталады,яғни $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$.

Егер $s = \infty$ немесе $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ шегі жоқ болса, онда (2.17) *қатар жинақсыз* деп аталады.

Анықтама. (2.17) қатар S *санына жинақты* деп аталады, егер $\varepsilon > 0$ кез келген сан үшін $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, барлық $n > N(\varepsilon)$ үшін $|S_n - S| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

Мына қосынды $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} w_k$ берілген *қатардың қалдығы* деп аталады

2.6-теорема. (2.17) комплекс мүшесі сандар қатары жинақты болу үшін

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

қатарларының жинақты болуы қажетті әрі жеткілікті және егер (2.17) қатар $S = \alpha + i\beta$ санға жинақты болса, онда:

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ \beta = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ .$$

Комплекс мүшелі сандар қатарына нақты оң сандар қатарындағы қатарларды қосу, алу амалдары, Коши критериі, жинақтылықтың

қажетті шарты, салыстыру белгісі, Даламбер мен Коши белгілері орындалады ([15]).

Анықтама. (2.17) қатар *абсолютті жинақты* деп аталады, егер

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|w_n\right|$$

қатары жинақты болса.

2.7-теорема. Егер (2.17) қатар абсолютті жинақты болса, онда ол жинақты болады.

Осы теореманың кері тұжырымы орындалмайды, яғни егер қатар жжинақты болса, оның абсолютті жинақты болуы міндетті емес.

Мысалдар. 1. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ қатарын зерттейік.

Шешімі. Берілген қатардан дербес қосындысын қарастырайық.

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k .$$

Егер $z \neq 1$ болса, онда S_n қосындыны геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің формуласы бойынша мына түрде жазуға болады:

$$S_n = \frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^n}{1 - z}.$$

Осыдан:

$$\left| S_n - \frac{1}{1-z} \right| = \left| \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right| = \frac{|z|^n}{|1-z|}.$$

Егер $|z| < 1$ болса, онда :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^n}{|1-z|} = 0$$

Демек, $\left| S_n - \frac{1}{1-S} \right| \to 0$, яғни, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-S}, |z| < 1.$

Енді $|z| \geq 1$ болсын, онда:

$$\lim_{n\leftrightarrow\infty} |z|^n = \begin{cases} 1, & |z| = 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Сонымен, егер $|z| \geq 1$ болса, онда берілген қатарға жинақтылықтың қажетті шарты (егер қатар жинақты болса, онда оның жалпы мүшесі нольге ұмтылады) орындалмайды. Демек, берілген қатар жинақсыз, егер $|z| \geq 1$ болса, ал егер $|z| < 1$ болса, онда ол жинақты және $S = \frac{1}{1-z}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3+i)^n}{5^n}$ қатарды зерттейік.

Шешімі. Берілген комплекс қатардың абсолют шамасынан құралған қатарды қарастырайық:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n(3+i)^n}{5^n} \right|' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|3+i|^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{10^n}}{5^n}.$$

Абсолют шамамен алынған соңғы қатарға Даламбер белгісін пайдаланайық:

$$(a_n = \frac{n\sqrt{10^n}}{5^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)\sqrt{10^{n+1}}}{5^{n+1}}):$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sqrt{10^{n+1}}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n\sqrt{10^n}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} = \frac{\sqrt{10}}{5} < 1.$$

Демек, берілген қатар абсолютті жинақты.

3. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{n+1}$ қатарды зерттейік.

Шешімі. Берілген қатардың абсолют шамасынан құралған қатарды қарастырайық:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|i|^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Абсолют шамамен алынған $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ қатар жинақсыз. Енді берілген қатардың нақты және жорамал бөліктерінің коэффициенттерінен анықталған нақты сандар қатарын қарастырайық:

$$1 + \frac{i}{2} + \frac{i^2}{3} + \frac{i^3}{4} + \frac{i^4}{5} + \frac{i^5}{6} + \frac{i^6}{7} + \frac{i^7}{8} + \frac{i^8}{9} + \cdots + =$$

$$=1+\frac{i}{2}-\frac{1}{3}-\frac{i}{4}+\frac{1}{5}+\frac{i}{6}-\frac{1}{7}-\frac{i}{8}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+2}.$$

Сонда біз екі нақты сандар қатарын аламыз:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1},\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+2}.$$

Соңғы қатарлар Лейбниц белгісі бойынша жинақты. Олай болса, берілген қатар жинақты, бірақ абсолютті жинақты емес.

2.5. Комплекс айнымалы функция туралы түсінік.

z комплекс жазықтығын $z=\infty$ (шексіз қашық) нүктемен толықтырылған жазықтықты *кеңейтілген комплекс жазықтығы* дейміз.

Біз z ұлғайтылған комплекс жазықтығынан E комплекс жиынын қарастырайық.

Анықтама. Егер E жиынының әрбір z элементіне белгілі бір f заңдылық немесе ереже бойынша бір немесе бірнеше w комплекс саны сәйкес келсе, онда бізге E жиынында анықталған (берілген) *комплекс айнымалы функция* берілді дейміз және ол $w=f(z)$ таңбамен белгіленеді, бұл жағдайда E жиыны функцияның *анықталу жиыны* деп аталады, ал ал функцияның қабылдай алатын w мәндер жиынын K таңбамен белгілейік.

Анықтамадағы z – тәуелсіз *айнымалы* немесе *аргумент*, ал функцияның мәні w *–тәуелді айнымалы* немесе *функция* деп аталады. Егер E жиынындағы әрбір z элементке функцияның тек бір ғана w мәні сәйкес келсе, онда функция $w=f(z)$ *бір мәнді*, ал функцияның бірнеше мәні сәйкес келсе, онда ол *көп мәнді функция* деп аталады. z нүктеге сәйкес келетін w нүктелер z *нүктенің бейнесі*, ал K жиыны E жиының бейнесі, E жиыны K жиынының *түпбейнесі* деп аталады. Қарастырып отырған E мен K жиындарының арасында кері сәйкестікті орындауға болады, яғни K жиынының кез келген w нүктесіне бір немесе бірнеше E жиынынан z нүкте сәйкес келеді, яғни K жиынында комплекс айнымалы $z=\varphi(w)$ функция анықталған және бұл функция $w=f(z)$ функцияның *кері функциясы* деп аталады әрі ол бір мәнді немесе көпмәнді кері функция болады.

Енді $f(z)$ комплекс функцияның құрылысына тоқталайық. Тәуелсіз $z = x + iy$ комплекс айнымалы шамаға функцияның $f(z)$ комплекс мән нақты және жорамал бөліктен тұрады, олардың u және v әріптерімен белгілейік: $f(z) = u + iv$, мұндағы u мен v нақты сандар. Комплекс жазықтығы z нүктеден z_1 нүктеге көшкенде функцияның $f(z_1)$ мәні де өзгереді, яғни нақты u мен v сандары да өзгереді. Демек u мен v шамалар x пен y айнымаларына тәуелді екі айнымалы нақты функциялар:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Сонымен, z комплекс айнымалыға тәуелді функция екі u мен v функциялары арқылы анықталады және олардың әрқайсысы x пен y айнымаларына тәуелді нақты функциялар.

Егер $z = x + iy,\ w = u + iv$ болса, онда:

$$w = u + iv = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

$$Re\, f(z) = Re\, w = u(x, y),\quad J_m f(z) = J_m w(x, y)$$

Мысалы. $w = z^2, z = x + iy$ болса, онда :

$$w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

Осыдан :

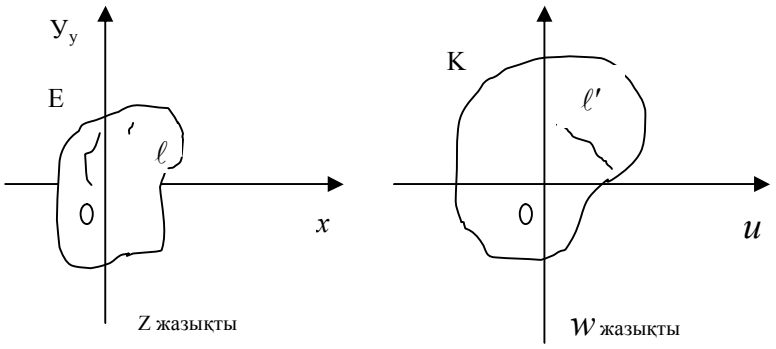
$$u(x, y) = Re\, w = x^2 - y^2,\ v(x, y) = J_m w = 2xy.$$

z комплекс санын XOY декарт координат жүйеде бейнелейміз, ал w санды басқа UOV декарт координат жүйеде бейнелейміз. Сонда біз екі XOY пен UOV координат жүйелерін қарастырамыз, олардың біреуінде яғни XOY жүйеде функцияның z аргументін бейнелесек, ал екіншісінде $w = f(z)$ комплекс мәнді бейнелейміз. Мысалы, z комплекс (XOY) жазықтығы E жиынындағы l қисық сызықтың кез келген нүктесінде UOV жазықтықтағы K– функция мәндер жиынынан нүкте сәйкес келеді. Осы нүктелер жиынын l қисық сызықтың бейнесі дейміз, бұл жағдайда $w = f(z)$ функция l қисық сызықты l' нүктелер жиынына бейнелейді. Е жиынындағы l қисық сызықтың бейнесі қисық сызық болмауы да мүмкін (6-сурет).

Берілген $w = f(z)$ функция арқылы бейнеленген z комплекс жазықтығындағы l қисық сызықтың l' бейнесін анықтау үшін

$w = f(z)$ функцияның нақты және жорамал бөліктерін бөлу керек $u = \varphi(x, y), v = (x, y)$ және l қисық сызықтың теңдеуін параметр теңдеу түріне келтіру керек $x = g(t),\ y = h(t).$ Онда l' бейненің теңдеуін мына түрде анықтаймыз:

$$u = \varphi(g(t), h(t)),\ \upsilon = (g(t), h(t)).$$



6-сурет

Мысалы, $w = z^2$ функцияны қарастырайық. Осы функцияның нақты және жорамал бөліктерін бөлейік: $w = f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$ Осыдан, $u(x, y) = x^2 + y^2, v(x, y) = 2xy.$ Егер $x = a \neq 0$ болса, онда:

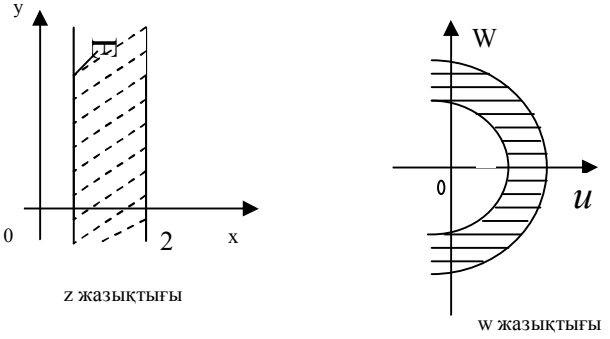
$$u = a^2 - y^2,\ v = 2ay.$$

Соңғы теңдіктер, $x = a$ түзудің бейнеленген параметрлік теңдеуі болады және ол қисық сызық болады, мұндағы *y*–параметр. Екінші теңдеуден y-ті тауып, бірінші теңдеуге қояйық, сонда :

$$u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}.$$

Сонымен, $x = a$ түзуі $v^2 = -4a^2(u - a^2)$ параболаға бейнеленді. Енді OY осіне параллель $x = 1$ мен $x = 2$ түзулер арасындағы жазықтықты (жолақты) қарасатырайық (7-сурет). Бұл жағдайда a нақты саны 1-ден 2-ге дейін өзгергенде $x = 1$ мен $x = 2$ түзулер

арасындағы жазықтық $v^2 = -4(u-1)$ мен $v^2 = 16(u-4)$ параболалар арасындағы жазықтыққа бейнеленеді (7-сурет).



z жазықтығы w жазықтығы

7-сурет

2.6. Комплекс айнымалы функцияның шегі және үзіліссіздігі

1. Біз бір мәнді $w = f(z)$ комплекс айнымалы функцияны қарастырайық және ол $z_0 = z_0 + iy_0$ нүктенің маңайында анықталсын (z_0 нүктенің өзінде анықталмауы да мүмкін).

Анықтама. w_0 комплекс саны $f(z)$ комплекс функцияның $z \to z_0$ –дағы (z z_0 ұмтылғандағы) *шегі* деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $\delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $|z - z_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелер үшін

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, бұл жағдайда $w = f(z)$ функцияның $z_0 = z_0 + iy_0$ нүктедегі шегі

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

таңбамен белгіленеді.

Осы анықтамаға эквивалентті математикалық анализдегі Гейне анықтамасын да келтіруге болады. Осы сияқты, комплекс айнымалы функция шегінің бар болуы Коши критерийін, z_0 (шексіз қашықтық) нүктедегі шексіз аз бен шексіз үлкен тізбектердің анықтамаларын және

шегі бар функциялардың қасиеттерін комплекс айнымалы функция үшін де қарастыруға болады.

Біз кейбір тұжырымдарды дәлелдеусіз қабыл алайық. Олардың дәлелденуі математикалық анализ курсында дәлелденген([14, 15, 16]).

Егер $f_1(z),\ f_2(z)$ функциялардың $z_0 = z_0 + iy_0$ нүктеде шектері бар болса, онда:

$$\lim_{z\to z_0}[f_1(z) \pm f_2(z)] = \lim_{z\to z_0} f_1(z) \pm \lim_{z\to z_0} f_2(z),$$

$$\lim_{z\to z_0} f_1(z)\cdot f_2(z) = \lim_{z\to z_0} f_1(z)\cdot \lim_{z\to z_0} f_2(z),$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)},\ \lim_{z\to z_0} f_2(z) \neq 0.$$

Егер $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ функциясы $z_0 = z_0 + iy_0$ нүктенің маңайында анықталса және $w_0 = u_0 + iv_0$ болса, онда шегі бар болу үшін

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0$$

теңдіктерінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Нақты сандар теориядағы сияқты төмендегі қатынастар:

$$\infty \pm z = \infty,\ z \pm \infty = \infty,\ \frac{z}{0} = \infty,\ \frac{z}{\infty} = 0, (z \neq 0)$$

комплекс сандар үшін де орындалады, ал

$$0\cdot\infty,\ \infty \pm \infty,\ \frac{\infty}{\infty}\cdot\frac{0}{0}$$

қатынастардың мағынасы жоқ.

2. Біз бір мәнді $w = f(z)$ комплекс айнымалы функцияны қарастырайық және ол $z_0 = z_0 + iy_0$ нүктенің маңайында әрі өзінде анықталсын.

Анықтама. Бір мәнді комплекс айнымалы $w = f(z)$ функция $z_0 = z_0 + iy_0$ нүктеде *үзіліссіз* деп аталады, егер мына шек бар болса

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)\cdot$$

Осы анықтамадан: егер $z - z_0 = \Delta z$ және Δz функция аргументінің өсімшесі, ал $f(z) - f(z_0) = \Delta f(z)$ функция өсімшесі болса, онда $f(z)$ функцияның z_0 нүктедегі үзіліссіздігін мына теңдік арқылы беруге болады:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta f(z) = 0 \cdot$$

Демек, комплекс айнымалы $f(z)$ функцияның z_0 нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамасын математикалық анализдегі функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамасы сияқты беруге болады, яғни $f(z)$ функция z_0 нүктеде *үзіліссіз* деп аталады, *егер шексіз аз аргумент өсімшеге функцияның шексіз аз өсімшесі сәйкес келсе*.

Математикалық анализ курсындағы функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің «$\varepsilon - \delta$» тіліндегі анықтамасын келтірейік: $f(z)$ функция z_0 *нүктеде үзіліссіз* деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z үшін $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

Осы анықтамадан: егер барлық $z \in E$ үшін $f(z)$ функция үзіліссіз болса, онда $f(z)$ функция E жиынында үзіліссіз болады.

Осы сияқты, күрделі функцияның үзіліссіздігі, функцияның E облыстағы бірқалыпты үзіліссіздігі және басқа да тұжырымдар комплкс айнымалы функция үшін де орындалады.

Делелдеусіз төмендегі теоремаларды келтірейік.

2.8-теорема. Кез келген тұйық шектелген облыста анықталған үзіліссіз $w = f(z)$ функция осы облыста бірқалыпты жинақты болады.

2.9-теорема. $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, функция $z_0 = x_0 + iy_0$ нүктеде үзіліссіз болу үшін, $u(x, y)$ пен $v(x, y)$ функциялары (x_0, y_0) нүктеде үзіліссіз болуы қажетті әрі жеткілікті.

2.7. Комплекс айнымалы тізбек және қатар

Комплекс айнымалы функциялық тізбек қарастырайық:

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots \text{ немесе } \{f_n(z)\}, \tag{2.19}$$

мұндағы $f_n(z)$ комплекс айнымалы функция, $n = 1,2,...$ және E облысында анықталған.

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z\ )$ шегі бар болса және $f(z)$ функция E облысында анықталса, онда $f(z)$ функция (2.19) тізбектің *шектік функциясы* деп аталады және (2.19) тізбек E жиынында $f(z)$ функцияға *жинақты* деп аталады.

Комплекс айнымалы функциялық қатарды қарастырайық:

$$f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \qquad (2.20)$$

Егер (2.20) функциялық қатардың

$S_n(x) = f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$ дербес қосындысы E облыста жинақты болса, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(z\ )$, мұндағы $f(z)$ функция (2.20) *функциялық қатардың қосындысы* деп аталады, яғни:

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,.$$

Анықтама. E облыста анықталған (2.19) функциялық тізбек $f(z)$ функцияға *жинақты* деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны және кез келген $z \in D$ үшін ε мен z-ке тәуелді $N(\varepsilon, z)$ нөмір табылып, $n > N$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n үшін

$$\left|f_n(z) - f(z)\right| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса.

Анықтама. E облыста анықталған (2.19) функциялық тізбек осы облыста $f(z)$ функцияға *бірқалыпты жинақты* деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін ε санғана тәуелді $N(\varepsilon)$ нөмір табылып, $n > N$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n және $z \in E$ үшін

$$\left|f_n(z) - f(z)\right| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса.

Осы анықтамалардан мына *тұжырымға* келеміз: егер (2.19) функциялық тізбек E облыста $f(z)$ функцияға бірқалыпты

жинақты болса, онда ол $f(z)$ функцияға жинақты. Осы тұжырымның кері тұжырымы орындалмайды.

2.10-теорема. Егер E облыста $f(z)$ функцияға бірқалыпты жинақты (2.19) функциялық тізбектің барлық мүшелерін модулі бойынша шектелген $\psi(z)$ функцияға көбейтсек, онда $\{f_n(z)\cdot\psi(z)\}$ функциялық тізбек E облыста бірқалыпты жинақты болады және ол $f(z)\cdot\psi(z)$ функцияға жинақты болады.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша, $\{f_n(z)\}$ тізбегі E облыста $f(z)$ функцияға бірқалыпты жинақты, онда анықтама бойынша, $\varepsilon>0$ саны үшін $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, барлық $n>N$ үшін $|f_n(z)-f(z)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$ теңсіздігі орындалады, мұндағы $M>0$ және барлық $z\in E$ үшін $|\psi(z)|\le M$. Онда $\{f_n(z)\cdot\psi(z)\}$ функциялық тізбек үшін барлық $n>N$ және барлық $z\in E$ үшін мына теңсіздікті аламыз:

$$|f_n(z)\cdot\psi(z)-f(z)\cdot f(z)|=|\psi(z)|\cdot|f_n(z)-f(z)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}<\varepsilon.$$

2.11-теорема. Егер (2.19) функциялық тізбектің барлық мүшелері E облыста үзіліссіз және ол осы облыста $f(z)$ функцияға бірқалыпты жинақты болса, $f(z)$ функция E облыста үзіліссіз болады.

Анықтама. (2.20) функциялық қатар E облыста $f(z)$ функцияға *бірқалыпты жинақты* деп аталады, егер кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n>N$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n үшін

$$|\ S_n(z)-f(z)\ |<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалса.

Анықтама. Жинақты (2.20) функциялық қатар E облыста *бірқалыпты жинақты* деп аталады, егер кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n>N$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n және $z\in D$ үшін мына теңсіздік орындалса:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k(z)\right|<\varepsilon.$$

Жоғардағы функциялық тізбек үшін келтірілген 2.10-теорема $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\cdot\psi(x)$ функциялық қатар үшін және 2.11-теоремада орындалады. Математикалық анализ курсындағы Вейерштрасс белгісі, Коши критерийіде орындалады ([14,16]).

Вейерштрасс белгісі. Егер E облысының барлық z нүктелерінде (2.20) функциялық қатардың мүшелерінің модулі, сәйкес жинақты оң сандар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

қатарының мүшелерінен үлкен болмаса, яғни $|f_n(z)| \le a_n$, онда (2.20) функциялық қатар E облыста бірқалыпты жинақты болады.

Дәлелдеуі. Жинақты оң сандар қатарының қалдығы r_n болсын. Бұл қатар жинақты болғандықтан, кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n > N$ теңсіздігі үшін

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_n + ... < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады. Онда (2.20) функциялық қатардың қалдығына

$$|R_n(z)| = |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + ...| \le |f_{n+1}(z)| +$$
$$+ |f_{n+2}(z)| + ... \le a_{n+1} + a_{n+2} + ... < \varepsilon$$

теңсіздік $n > N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n және барлық $z \in E$ үшін орындалады. Олай болса, (2.20) функциялық қатар E облыста бірқалыпты жинақты болады. Дәлелденді.

Анықтама. Мына қатар

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + ... + c_n(z - z_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \qquad (2.21)$$

дәрежелі қатар деп аталды, мұндағы c_n - комплекс тұрақты сандар, z_0 – тағайындалған сан. Дәрежелі *қатардың жинақты облысы* деп осы дәрежелі қатар жинақты болатын z нүктелер жиынын айтамыз.

Абель теоремасы. а) Егер (2.21) дәрежелі қатар z_1 нүктеде жинақты болса, онда қатар

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|$$

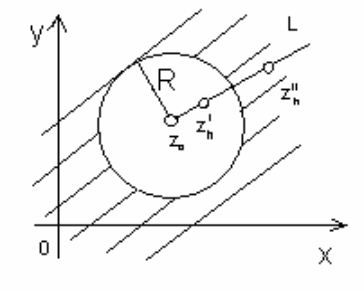
дөңгелекті қанағаттандыратын барлық z нүктелер үшін абсолютті жинақты болады;

ә) Егер (2.21) дәрежелі қатар z_1 нүктеде жинақсыз болса, онда

$$\left| z - z_0 \right| > \left| z_1 - z_0 \right|$$

тенсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелер үшін осы қатар жинақсыз болады.

Енді (2.21) дәрежелі қатар z_0 нүктеден өзге z нүктелердің біреулерінде



8-сурет

жинақты, ал қалғандарында жинақсыз болсын. Берілген z_0 нүктеден кез келген ℓ сәуле жүргізейік, осы сәуленің бойынан z_0 нүктеден өзге әрі (2.21) қатар жинақты болатын A нүктені, осы сияқты қатар жинақсыз болатын B нүктені алайық. AB кесіндіні I_1 таңбамен белгілейік. I_1 кесіндіні тең екі бөлікке бөлейік және бөліктердің сол жағындағы шеткі нүктеде (2.21) қатар жинақыты,ал оң жағындағы шеткі нүкте (2.21) қатардың жинақсыз нүктесі болатын бөлігін I_2 деп белгілейік, мұнда I_2 кесіндінің сол жағындағы шеткі нүктесі деп Z_0 нүктеге жақын жатқан нүктені айтамыз. Енді I_2 кесіндіні тағы да тең екі бөлікке бөлейік, сол жағындаңы шеткі нүктеде жинақты, ал оң жағындағы шеткі нүктеде жинақсыз болатын бөлігін I_3 деп белгілейік. Осылайша жалғастырып, математикалық анализ курсындағы ([14,16]) енгізілген сегменттер $\{I_n\}$ тізбегін аламыз және $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$, онда барлық I_n кесіндіге тиісті тек бірғана z^* нүкте табылады. Табылған z^* нүктеден z_0 нүктеге дейінгі арақашықтықтың

R болсын, яғни $R = |z^* - z_0|$. Енді $|z - z_0| = R$ шеңберді қаратырайық. Енді (2.21) дәрежелі қатар осы шеңбердің ішкі z нүктелерінде абсолютті жинақты болатынын, ал сыртқы нүктелерінде жинақсыз болатынын дәлелдейік. z' нүктеде $|z - z_0| = R$ шеңбердің ішкі нүктесі болсын. l сәуленің бойынан, I_n кесіндінің сол жағындағы шекті нүктесін z_n' әріпімен белгілейік, мұндағы n натурал саны жеткілігінше үлкен сан және $|z' - z_0| < |z_n' - z_0|$ болсын. $\{z_n\}$ тізбекті алуымыз бойынша (2.21) қатар Z_n' нүктеде жинақты, онда Абель теоремасы бойынша, онда (2.21) қатар Z' нүкте абсолютті жинақты болады. z' нүкте $|z - z_0| < R$ дөнгелектің кез келген нүктесі болғандықтан (2.21) қатар осы дөңгелекте абсолютті жинақты болады. z'' нүкте $|z - z_0| = R$ шеңбердің сыртқы нүктесі болатын және l сәуленің бойынан I_n кесіндінің оң жағындағы шекті нүктені z_n'' деп белгілеп, дәлелдеу керек тұжырымды (жинақсыздық) жоғардағыдай дәлелдеуге болады.

Сонымен, (2.21) дәрежелі қатар, $|z - z_0| < R$ тенсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелер үшін жинақты, ал $|z - z_0| > R$ үшін жинақсыз болады.

Осылайша анықталған R саны (2.21) дәрежелі қатардың *жинақты радиусі* деп аталады.

Егер (2.21) қатар тек $z = z_0$ нүктеде ғана жинақты болса, онда $R = 0$ болады, ал егер қатар барлық комплекс жазықтықта жинақты болса, онда $R = \infty$ деп жазатын боламыз.

Дәрежелі қатардың жинақты радиусін табу үшін, математикалық анализ курсындағы ([15])

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad R = \frac{1}{L}$$

формуланы пайдаланамыз, мұнда егер $L = \infty$ болса, онда $R = 0$; егер $L = 0$ болса, онда $R = \infty$.

2.8. Комплекс айнымалы функцияның туындысы және дифференциялы

Бізге $z = x + yi$ нүктенің маңайында анықталған комплекс айнымалы бір мәнді $w = f(z)$ функция берілсін және осы z нүктенің маңайынан $z + \Delta z$ нүктені алайық.

Анықтама. Егер мына шек бар болса:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \qquad (2.22)$$

онда: 1) функция $z = x + iy$ нүктеде *дифференциалданады* деп аталады;

2) осы шек $f(z)$ функцияның $z = x + iy$ нүктедегі *туындысы* деп аталады және туынды былай белгіленеді.

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}, \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y. \qquad (2.23)$$

Егер $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ болса,

онда :

$$\Delta w = \Delta f(z) = \left[u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y)\right] - [u(x,y) + iv(x,y)] =$$
$$= [u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i[v(x+\Delta x, y+\Delta y - v(x,y)] = \Delta u + i\Delta v,$$

мұндағы $\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y), \Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - \vartheta(x,y).$

Онда және 2.22, 2.23 теңдіктерден

$$f'(x) = w' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Осыдан және анықтамадан : егер $\Delta z \to 0$, онда $\Delta f(z) \to 0$, яғни $f(z)$ функция $z = x + iy$ нүкте үзіліссіз болады. Демек, егер $f(z)$ функция z нүктеде дифференциалданса, онда ол осы нүктеде үзіліссіз болады (кері тұжырым орындалмайды).

Анықтамадағы (2.23)–теңдікке эквивалентті мына теңдікті қарастыруға болады:

$$\Delta f(z) = f'(z) \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z, \qquad (2.24)$$

мұндағы, $\lim_{\Delta z \to 0} \alpha(\Delta z) = 0$.

Анықтама. 2.23–теңдіктегі $f'(z)\cdot\Delta z$ шама $w=f(z)$ функцияның *дифференциалы* деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$dw=df(z)=f'(z)dz\cdot$$

2.12-теорема. $f(z)$ функция z нүктеде дифференциалдану үшін $f(z)$ функцияның z нүктедегі $\Delta f(z)$ өсімшесі мына түрде

$$\Delta f(z)=a\cdot\Delta z+\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z$$

өрнектелуі қажетті әрі жеткілікті, мұндағы a тұрақты сан, $\lim_{\Delta z\to 0}\alpha(\Delta z)=0\cdot$

2.13-теорема. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ функция $z=x+iy$ нүктеде дифференциалдану үшін $u(x,y)$, $v(x,y)$ функциялары (x,y) нүктеде дифференциалдануы және

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.25}$$

теңдіктерінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті. (2.25) теңдік *Коши-Риман белгісі* деп аталады.

Бізге z нүктеде дифференциалданатын $f_1(z)$, $f_2(z)$ функциялары берілсін, онда мына тендіктер орындалады:

1) $[f_1(z)\pm f_2(z)]'=f_1'(z)\pm f_2'(z);$
2) $(c\cdot f_1(z))'=c\cdot f_1'(z),\quad c-const$;
3) $f_1(z)\cdot f_2(z)]'=f_1'(z)\cdot f_2(z)+f_1(z)\cdot f_2'(z);$
4) $\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)'=\frac{f_1'(z)\cdot f_2(z)-f_1(z)\cdot f_2'(z)}{f_2^2(z)},\quad f_2(z)\neq 0$,

5) Егер $\omega=\varphi(z)$ функция z нүктеде, ал $w=f(\omega)$ функция $\omega=\varphi(z)$ нүктеде дифференциалданса, онда $w=f[\varphi(z)]$ функцияда z нүкте де дифференциалданады және

$$[f(\varphi(z))]_z'=f_{\varphi(z)}'[\varphi(z)]\cdot\varphi_z'.$$

Анықтама. Егер $f(z)$ функция E облыстың әрбір нүктесінде дифференциалданса, онда $f(z)$ функциясы осы облыста *аналитикалық функция* деп аталады.

Бұл анықтамада, функция E облыста бір мәнді функция деп қарастырамыз.Біз төмендегі тақырыптарда, «$f(z)$ функциясын z

нүктеде аналитикалық функция» деп айтатын боламыз. Бұл сөзді $f(z)$ функциясы z нүктенің маңайында аналитикалық функция деп ұғынуымыз керек. Негізінде, облыстағы функцияның дифференцалдануы мен аналитикалық ұғмдары бірдей, ал нүктедегі ұғымдары бірдей емес. Функцияның нүктедегі аналитикалықтығы ұғымы функцияның осы нүктедегі дифференциалдану ұғымына қарағанда «кең» ұғым.

Мысалы, $f(z) = z\,Re\,z$ функциясы $z = 0$ нүктеде дифференциалданады, ал осы нүктеде ол аналитикалық функция емес.

Бізге E облыста $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналатикалық функция берілсін. Онда 2.13-теорема бойынша мына теңдіктер орындалады:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.26}$$

2.26 теңдіктің бірінші теңдеуін x , ал екіншісін y бойынша дифференциалдайық:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Соңғы теңдіктерді қосайық, сонда:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in E. \tag{2.27}$$

27–теңдік *Лаплас теңдеуі* деп аталады.

Осылайша $v(x, y)$ функция үшін мына теңдік орындалатынын дәлелдеуге болады :

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in E.$$

Анықтама. E облыста анықталған $F(x, y)$ функцияның өзі және оның бірінші мен екінші дербес туындылары осы облыста үзіліссіз болса әрі Лаплас теңдеуін қанағаттандырса, яғни:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in E,$$

онда ол E облыста *гормоникалық функция* деп аталады.

Егер екі $u(x, y), v(x, y)$ гормонкалық функциялар Коши-Риман белгісін қанағаттандырса, онда олар *өз-ара түйіндес* деп аталады.

Анықтама. Егер бір мәнді $f(z)$ функция комплекс жазықтықтың z нүктесінде аналитикалық функция болса, онда мұндай нүктелер функцияның *дұрыс нүкелері* деп аталады, ал егер $f(z)$ аналитикалық фунция болса, онда мұндай нүктелер функцияның *ерекше нүктелері* деп аталады.

2.9. Қарапайым трансценденттік функциялар

1. Кез келген $z = x + iy$ комплекс сан үшін e^z *көрсеткіштік функция* мына теңдіктен анықталады:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \qquad (2.28)$$

Кез келген $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сан үшін көрсеткіштік e^{z1} мен e^{z2} функциялар үшін мына тендіктер орындалады

$$e^{z1} e^{z2} = e^{z1+z2}, \quad \frac{e^{z1}}{e^{z2}} = e^{z1-z2}.$$

Шынында да,

$$e^{z1} e^{z2} = e^{x1+iy1} e^{x2+iy2} = e^{x1} e^{iy} e^{x2} e^{iy2} = e^{x1+x2} [(\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2)] =$$
$$= e^{x1+x2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{x1+x2+i(y1+y2)} = e^{z1+z2}.$$

Көрсеткіштік e^z функция периоды 2π-ге тең периодты функция, яғни $e^{z+2ik\pi} = e^z$. Шынында да, $e^{z+2ik\pi} = e^z e^{2ik\pi} =$
$= e^z (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z$.

(2.28) тендіктен, егер $x = 0,\ y = \varphi$ болса онда :

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

және бұл формула *Эйлер формуласы* деп аталады.

Эйлер формуласы арқылы комплекс санды поляр координатта көрсеткіштік функция түрінде жазуға болады ($x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$) :

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

Мысал. $z = 1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

2. *Логарифмдік функция* көрсеткіштік функцияға кері функция ретінде анықталады. w саны $z \neq 0$ санының логарифмі деп аталады, егер $e^w = z$.

Егер $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$ болса және $w = Lnz$ белгілейік, онда $e^u e^{iv} = re^{i\varphi}$. Осыдан :

$$e^u = r, \quad v = \varphi + 2k\pi .$$

Соңғы теңдіктердің біріншісінен $u = ln\, z$. Онда :

$$w = Ln\, z = ln\, z + i(\varphi + 2k\pi) = ln|z| + i(arg\, z + 2k\pi) =$$

$$= ln|z| + iArg\, z$$

Егер $k = 0$ болса, онда $ln\, z = ln|z| + i\, arg\, z$ логарифмнің *негізгі бөлігі* деп аталады.

Логарифмдік функцияға мына тендіктер орындалады:

$$Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2,\ \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Lnz_1 - Lnz_2,\ Ln(z^n) = nLnz\cdot$$

3. Комплекс аргументті *тригонметриялық функциялар* мына тендіктер арқылы анықталады:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i},$$

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1\cdot$$

$sin\, z$ пен $cos\, z$ функциялардың периоды 2π-ге тең , ал $tg\, z$ пен $ctg\, z$ функцияларының периоды π-ге тең. Нақты аргументті тригонометриялық функциядан $sin\, z,\ cos\, z$ функцияларының айырмашылығы, олардың модулі 1-ден үлкен.

Осы сияқты кері тригонометриялық функциялар мына түрде анықталады:

$$w = Arc\sin z = -iLn\,(iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad Arg\cos z = -iLn\,(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$Arctg\, z = -\frac{i}{2} Ln\frac{1 + iz}{1 - iz}, \qquad Arcctg\, z = \frac{i}{2} Ln\frac{z - i}{z + i}.$$

Гиперболалық функциялар:

$$sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z},\ cth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z}\cdot$$

Кері гиперболалық функциялар:

$$Arsh\, z = Ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \qquad Arch\, z = Ln(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

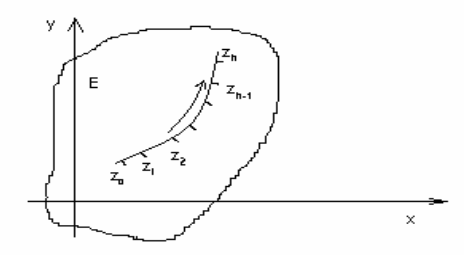
$$Arth\, z = \frac{1}{2} Ln \frac{1+z}{1-z}, \qquad Arcth\, z = \frac{1}{2} Ln \frac{z+1}{z-1}.$$

2.10. Комплекс айнымалы функция интегралының анықтамасы

Біз E комплекс облысы анықталған үзіліссіз бір мәнді $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ функцияны және бас нүктесі z_0, ал соңғы нүктесі z нүкте болатын ℓ тегіс-қисықты қарастырайық, мұндағы $\ell \in E$. Тегіс-қисық сызықтың бойындағы бағыт оң бағыт болсын. ℓ қисық сызықты n бөлікке бөлейік (9-сурет):

$$z = z_0, z_1, z_2, ..., z_n = Z, \quad z_k = x_k + iy_k.$$

Сонда ℓ қисық сызық n доғаларға бөлінеді. Енді $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ болсын, мұндағы $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $k = 1.n$. Кез келген z_{k-1} z_k доғаның бойынан $c_k = \overline{c}_k + i\overline{\overline{c}}_k$ нүкте алып, мына қосындыны құрайық:



9-сурет

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \left[u(\overline{c}_k, \overline{\overline{c}}_k)\Delta x_k - v(\overline{c}_k, \overline{\overline{c}}_k)\Delta y_k \right] +$$

$$+ i \sum_{k=1}^{n} \left[v(\overline{c}_k, \overline{c}_k)\Delta x_k + u(\overline{c}_k, \overline{c}_k)\Delta y_k \right], \qquad (2.30)$$

мұндағы Δz_k шама z_{k-1} нүктеден z_k нүктеге бағытталған вектор, ал $|\Delta z_k|$ шама осы вектордың модулі және $\lambda = max\{|\Delta z_1|, |\Delta z_2|, ..., |\Delta z_n|\}$ болсын. Математикалық анализ курсында, $\lambda = |\Delta z_k| \to 0$-да (немесе

$n \to \infty$) үзіліссіз $u(x,y),\ v(x,y)$ функциялардан анықталған 2.30–теңдіктің оң жағындағы екі қосындының да шектелген шегі бар.

Анықтама. I` комплекс саны $\lambda = |\Delta z_k| \to 0$-да (2.30) *интеграл қосындының шегі* деп аталады, егер ℓ қисық сызықты $z_{k-1}\ z_k$ доғаларға бөлгенде және және осы доғалардың әрқайсысының бойынан $c_k = \bar{c}_k + i\bar{\bar{c}}_k$ нүктелерді еркімізше алғанда мына теңдік орындалса:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n} f(c_k)\Delta z_k = I$$

және ол $f(z)$ функцияның ℓ қисық сызық (контур) бойындағы интегралы қысқаша, *контурлық интеграл* деп аталады әрі былай белгіленеді:

$$I = \int_{\ell} f(z)dz = \int_{\ell} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{\ell} v(x,y)dx + u(x,y)dy. \quad (2.31)$$

Егер $f(z) = 1$ болса, онда (30) интеграл қосынды мына түрде түрленеді:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta z_k = \Delta z_1 + \Delta z_2 + ... + \Delta z_k = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + ... + (Z - z_{n-1}) = Z - z_0`$$

Бұл жағдайда :

$$\int dz = Z - z_0 \ . \quad (2.31')$$

Егер ℓ қисық сызық $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ параметр теңдеумен берілсе, онда:

$$\int_{\ell} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} \{u(x(t), y(t)) + i\, v(x(t), y(t))\}(x'(t) + iy'(t))dt.$$

Комплекс айнымалы $f(z)$ функцияның контурлық интегралына мына қасиеттер орындалады:

1. $\int_{\ell} [f_1(z) \pm f_2(z)]dz = \int_{\ell} f_1(z)\,dz \pm \int_{\ell} f_2(z)\,dz$;`

2. $\int_{\ell} c\ f(z)dz = c \int_{\ell} f(z)dz$, c – `комплекс сан;

3. $\int_{\ell^+} f(z)\,dz = -\int_{\ell^-} f(z)\,dz$,

мұндағы ℓ^+ , ℓ^- контурлары ℓ контур, ал бағыттары қарама – қарсы, ℓ^+ таңба ℓ контурдың оң бағыты, ал ℓ^- таңба ℓ контурдың сол бағыты;

4. $$\int\limits_{\ell_1+\ell_2} f(z)\,dz = \int\limits_{\ell_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\ell_2} f(z)\,dz\ ,$$

мұндағы $\ell_1+\ell_2$ контур ℓ_1 мен ℓ_2 контурынан анықталған контур;

5. $$\left|\int\limits_{\ell} f(z)\,dz\right| \le \int\limits_{\ell} |f(z)|\,dz \le M\,|\ell|\ ,$$

мұндағы M берілген $f(z)$ функцияның модулінің ең үлкені, $|\ell|$ – берілген ℓ контурдың ұзындығы.

Соңғы теңсіздікті дәлелдейік, ол үшін (2.30) интеграл қосындыны бағалайық,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(c_k)||\Delta z_k| \le M \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|\ ,$$

мұндағы $\sum\limits_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$ өрнек $z_0 z_1$, $z_1 z_2$,... , $z_{n-1} z_n$ сынық түзу сызықтардың қосындысы және $\lambda \to 0$ бұл қосынды ℓ қисық сызықтың ұзындығын аламыз. Дәлелденді.

Мысалдар. **1**. $\int\limits_{l} \dfrac{dz}{z}$ интегралды $\ell : |z| = R$ ` шеңбердің ℓ контуры бойынша есептейік.

Шешімі. $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ шеңбердің параметрлік теңдеуі, мұндағы t параметр 0 – ден 2π – ге дейін өзгереді және $z = R\cos t + iR\sin t$, $dz = (-R\sin t + iR\cos t)\,dt$. Сонда:

$$\int\limits_{\ell} \frac{dz}{z} = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{-R\sin t + iR\cos t}{R\cos t + iR\sin t}\,dt = \frac{R}{R}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{i(\cos t + i\sin t)}{\cos t + i\sin t}\,dt = i\int\limits_{0}^{2\pi} dt = 2\pi i\ .$$

Осы интегралды Эйлер формуласын пайдаланып есептейік:

$z = R(\cos t + i\sin t) = Re^{it}$, $dz = Rie^{it}\,dt$, сонда

$$\int\limits_{\ell} \frac{dz}{z} = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{Rie^{it}dt}{Re^{it}} = i\int\limits_{0}^{2\pi} dt = 2i\pi.$$

2. $\int\limits_{l} \dfrac{dz}{(z-a)^m}$, $\ell : |z-a| = R$ – шеңбер, m – бүтін сан.

Шешімі. $z-a=R\,e^{i\,t}$ шеңбердің теңдеуі және $dz=R\,i\,e^{i\,t}\,dt$. Онда:

$$\int\limits_{\ell}\frac{dz}{(x-a)^m}=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{R\,i\,e^{i\,t}\,dt}{R^m\,e^{i\,m\,t}}=\frac{i}{R^{m-1}}\int\limits_{0}^{2\pi}e^{i\,(1-m)\,t}\,dt.$$

Сонғы теңдіктің оң жағындағы интегралды интегралдау үшін екі жағдайды қарастырайық: $m\neq 1, m=1$. Егер $m\neq 1$ болса, онда :

$$\int\limits_{0}^{2\pi}e^{i\,(1-m)\,t}dt=\frac{1}{i(1-m)}\int\limits_{0}^{2\pi}e^{i(1-m)\,t}d(i(1-m)t)=\frac{1}{i(1-m)}e^{i\,(1-m)\,t}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{i(1-m)}\left(e^{i\,(1-m)\,2\pi}-1\right)=\frac{1}{i(1-m)}\left(cos(1-m)2\pi+i\,sin(1-m)2\pi-1\right)=0.$$

Егер $m=1$ болса, онда :

$$\int\limits_{\ell}\frac{dz}{z-a}=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{R\,i\,e^{i\,t}}{R\,e^{i\,t}}dt=i\int\limits_{0}^{2\pi}dt=2\pi\,i\cdot$$

Сонымен:

$$\int\limits_{\ell}\frac{dz}{(z-a)}=\begin{cases}0, & егер \quad m\neq 1,\\ 2\pi i, & егер \quad m=1.\end{cases}$$

3. $\int\limits_{\ell}z^2dz$, мұндағы ℓ : төбелері $0(0,0)$, $A(1,1)$, $B(2,1)$ нүкте болатын сынық кесінділер контуры.

Шешімі. $0A$ түзудің параметрлік теңдеуі $(x=x_0+x_1t$, $y=y_0+y_1t)$: $x=t$, $y=t$. Осыдан $z=x+iy=t+it=$ $=(1+i)t,\ dz=(1+i)dt$. Онда t параметр 0-ден 1-ге дейін өзгереді

$$\int\limits_{0A}z^2dz=\int\limits_{0}^{1}(1+i)^2t^2(1+i)dt=(1+i)^3\int\limits_{0}^{1}t^2dt=\frac{2}{3}(-1+i).$$

AB түзудің параметрлік теңдеуі: $x=t,\ y=1,\ z=t+i, dz=dt,$ ал t параметр 1 ден 2-ге дейін өзгереді:

$$\int\limits_{AB}z^2dz=\int\limits_{1}^{2}(t+i)^2\,dt=\frac{(t+i)^3}{3}\Big|_1^2=\frac{4}{3}+3i.$$

Сонымен

$$\int_l z^2 dz = \int_{0A} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i + \frac{4}{3} + 3i = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i .$$

4. $\int_\ell Re\, z\, dz$, мұндағы ℓ контур 3-мысалда қарастырған сынық контур.

Шешімі. $Re\, z = R(x + iy) = x$, $dz = dx + idy$:

$$\int_\ell Re\, z\, dz = \int_\ell x(dx + idy) = \begin{vmatrix} x = t, & y = t \\ dx = dt, & dy = dt \\ AB: x = t, & y = 1 \\ dx = dt, & dy = 0 \end{vmatrix} =$$

$$\int_0^1 t(1+i)dt + \int_1^2 tdt = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$

2.11. Коши теоремасы

Комплекс айнымалы функция теориясындағы негізгі теоремамен танысайық.

Коши теоремасы. Егер $f(z)$ функция тұйық бір байланысты E аналитикалық функция болса, онда $f(z)$ функцияның E облыстың тұйық ℓ контуры бойынша алынған интегралы нөлге тең:

$$\oint_\ell f(z)dz = 0.$$

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін $f'(z)$ функцияны үзіліссіз болсын деп ұйғарайық (мұндай ұйғарым жасамай да теореманы дәлелдеуге болады) және $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Онда (2.31) формуладан:

$$\oint_\ell f(z)dz = \oint_\ell u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\oint_\ell v(x,y)dx + u(x,y)dy \qquad (2.32)$$

Енді Коши-Риман белгісі бойынша E облыста мына тендіктер орындалады:

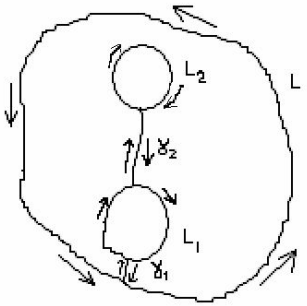
$$\frac{\partial[-v(x,y)]}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}. \qquad (2.33)$$

Үйғаруымыз бойынша, яғни $f'(z)$ функция E облыста үзіліс болғандықтан $u(x,y)$ және $v(x,y)$ функцияларының x пен y бойынша алынған дербес туындылары үзіліссіз болады. E облыста $u(x,y)$, $v(x,y)$ функциялары үзіліссіз дифференциялданатын болғандықтан, (2.33)–теңдіктен және E бір байлыныcты облыс болғандықтан

$$\oint_{\ell} u(x,y)dx - v(x,y)dy = 0,$$

$$\oint_{\ell} v(x,y)dx + v(x,y)dy = 0$$

теңдіктері орындалады. Онда 2.32–теңдіктен дәлелдеу керек теңдікті аламыз. Коши теоремасы көп байлыныcты E облысы үшін де орындалады. Анықтық



9-сурет

үшін үшбайлыныcты E облысты қарастырайық (9-сурет). E облыстың шекарасы сыртқы ℓ және екі ішкі ℓ_1 мен ℓ_2 контурлардан анықталсын және $f(z)$ функция E тұйық облыста аналитикалық функция болсын. Енді γ_1 және γ_2 тіліктерді жүргізейік және ℓ, ℓ_1, ℓ_2 контурлардан және γ_1 мен γ_2 тіліктерден анықталған күрделі тұйық контурды Γ таңбамен белгілейік. Сонда тұйық контурмен шектелген E облыс бір байланысты облыс болады, онда Коши теоремасы бойынша $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$ теңдігі орындалады, мұнда

контурдың бойымен оң бағытта, γ_1 мен γ_2 тіліктерде қарама-қарсы екі бағытта қозғаламыз. Сондықтан тіліктерде алынған интегралдар жойылады, сонда:

$$\int_{\ell} f(z)dz + \int_{\ell_1} f(z)dz + \int_{\ell_2} f(z)dz = 0,$$

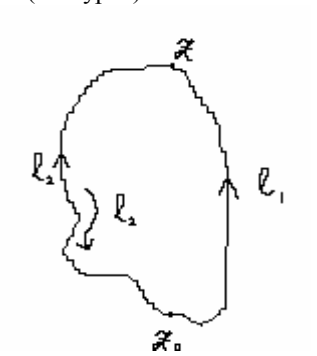
мұнда сыртқы ℓ контур оң бағытта, ал ішкі ℓ_1, ℓ_2 контурларда сол бағыт. Енді ℓ_1 мен ℓ_2 контурлардың бағытын өзгертіп,

$$\int_{\ell} f(z)dz = \int_{\ell_1} f(z)dz + \int_{\ell_2} f(z)dz$$

теңдікті аламыз.

2.12. Контур бойынша алынған интегралдың интегралдау жолына тәуелсіздігі

Бізге бір байланысты E облыста аналитикалық $f(z)$ функциясы берілсін. Осы облыстан кез келген тұйық ℓ контур алайық және оны бастапқы мен соңғы нүктелері ортақ ℓ_1 мен ℓ_2 контурларға бөлейік(11-сурет).



11-сурет

Коши теоремасы және контурлық интегралдың қасиеттері бойынша мына теңдікті аламыз:

$$\int_{\ell} f(z)dz = \int_{\ell_1} f(z)dz + \int_{\ell_2} f(z)dz = \int_{\ell_1} f(z)dz - \int_{\ell_2} f(z)dz = 0.$$

Сонда:

$$\int_{\ell_1} f(z)dz = \int_{\ell_2} f(z)dz.$$

Осыдан және Коши теоремасынан мына тұжырымды аламыз: егер бір байланысты E облыста $f(z)$ аналитикалық функция болса, онда E облысқа тиісті кез келген ℓ доға (тұйық емес) бойынша алынған $f(z)$ функцияның интегралы доғаның тек бастапқы z_0 мен соңғы z нүктелеріне тәуелді. Сондықтан мұндай интегралды мынадай таңбамен белгілейміз.

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \tag{2.34}$$

Егер z_0 нүктені тағайындасақ, ал z нүктені E облыс бойынша өзгертсек, онда соңғы интеграл z-ке тәуелді функция болады.

2.14-теорема. Егер $f(z)$ бір байланысты E облыста аналитикалық функция болса, онда (2.34) функция E облыста аналитикалық функция және

$$F'(z)=f(z).$$

Дәлелдеуі. $F(z)$ - бір мәнді функция. Шынында да, қарастырылған интеграл интегралдау жолына тәуелсіз және z_0 нүктені тағайындасақ берілген z үшін оның мәндері бірдей. Енді $F'(z)=f(z)$ теңдігін және $F'(z)$ туындының бар болуын дәлелдейік. Туындының анықтамасы және контурлық интегралдың қасиеттері бойынша:

$$F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left\{\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi-\right.$$

$$\left.-\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi\right\}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi.$$

Берілген $f(z)$ аналитикалық функция болғандықтан ол үзіліссіз. Онда $f(\xi)=f(z)+\alpha(\xi),$ мұнда $\lim\limits_{\xi\to z}\alpha(\xi)=0.$ Сондықтан,

$$F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\xi+\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\alpha(\xi)d\xi, \tag{2.35}$$

мұнда, (2.31') формуладан:

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)do=f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} do=f(z)\Delta z\,.$$

Қарастырып отырған интеграл интегралдау жолына тәуелсіз болғандықтан, z нүктеден $z+\Delta z$ нүктеге дейінгі интегралдау

жолды түзу сызық деп қарастырайық. Онда бұл түзудің ұзындығы $|\Delta z|$ – ке тең. Енді контурлық интегралдың 5- қасиетін пайдаланайық:

$$\left|\int_{z}^{z+\Delta z}\alpha(\zeta)d\zeta\right| \le \max|\alpha(\zeta)|\cdot|\Delta z|$$

Осыдан, (2.35)–формуладағы бірінші интегралдың шегі $f(z)$-ке, ал екінші интегралдың шегі нөлге тең, яғни $F'(z)=f(z)$. Дәлелденді.

2.13. Анықталған және анықталмаған интегралдар

Анықтама. $F(z)$ функция $f(z)$ функцияның *алғашқы функциясы бейнесі* деп аталады, егер $F'(z)=f(z)$ теңдігі орындалса.

Осы анықтамадан: егер $F(z)$ функция $f(z)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда $F(z)+C$ функциясы да осы функцияның алғашқы функциясы болады, мұндағы $C-const$.

Сонымен, $f(z)$ функциясының интегралы, нақты функциядағы анықталмаған интеграл түрінде белгіленеді:

$$\int f(z)dz = F(z)+C,$$

мұндағы $F'(z)=f(z)$.

Функцияның алғашқы функциясын табу әдістері және интеграл кестелері бірдей, мысалы,

$$\int e^z dz = e^z + C; \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1; \int \frac{dz}{z} = Inz + C; \int Sinzdz = -Cosz + C$$

т.с.с.

Алғашқы функция аналитикалық функция. Егер бірінші мен төртінші интегралдар және екінші интеграл $n \ge 0$ үшін, барлық комплекс жазықтық үшін орындалса, онда екінші интеграл $n<0$ үшін $z=0$ нүктеден өзге барлық комплекс жазықтық үшін орындалады, ал үшінші интеграл $z=0$ нүктеден өтетін сәуле тиісті емес кез келген жазықтықта орындалады.

Енді $F(z)$ функциясы бір байланысты $f(z)$ аналитикалық функцияның алғашқы функциясы болсын. Онда 2.14-теорема

бойынша $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ функциясы да $f(z)$ функциясының алғашқы функциясы болады. Демек, мына теңдік орындалады:

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) + C.$$

Егер $z = z_0$ болса, онда контурдың бастапқы мен соңғы нүктелері беттеседі, онда Коши теоремасы бойынша соңғы интеграл нөлге тең, яғни $0 = F(z_0) + C, C = -F(z_0)$. Онда:

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) - F(z_0).$$

Соңғы теңдік *Ньютон-Лейбниц формуласы* деп аталады.

Мысал $\int_{0}^{1} z \cdot Sinzdz$ интегралын есептейік.

Шешімі. Ол үшін математикалық анализ курсындағы бөліктеп интегралдау әдісін пайдаланамыз:

$$\int_0^{1+i} z\sin z dz = \left| \begin{array}{c} u = z, du = dz \\ dv = \sin z dz, v = -\cos z \end{array} \right| = -z \cdot \cos z \Big|_0^{1+i} + \int_0^{1+i} \cos dz =$$

$$-(1+i)\cos(1+i) + \sin z\Big|_0^{1+i} = -(1+i)\cos(1+i) + \sin(1+i).$$

2.14. Коши формуласы (интегралы)

2.15- теорема. Егер тұйық көп байланысты E облыста $f(z)$ аналитикалық функция және l контур E облыстың шекарасы болса, онда E облыстың кез келген z нүктесіндегі $f(z)$ функциясының мәні мына формуладан анықталады.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \text{ немесе } 2\pi i f(z) = \oint_l \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \qquad (2.36)$$

мұндағы интеграл l контурының оң бағыты бойынша алынған.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін E облыстан радиусы r-ге тең, ал центрі z нүкте болатын C шеңберді E облыстан алып тастайық және C

шеңбер мен l контур қиылыспау үшін шеңбердің r радиусын жеткіліктілігінше өте аз етіп аламыз. Сонда біз E облыстың байланысынан байланысы бірге кем $Д^*$ облысты аламыз. (2.36) – интегралдың алымы мен бөліміндегі функциялар ζ айнымалы бойынша $Д^*$ облыста аналитикалық функциялар және $Д^*$ облыстың барлық нүктелерінде бөліміндегі функция нөлге тең болмайды. Олай болса (2.36) –интеграл астындағы функция тұйық $Д^*$ облыста аналитикалық функция. Онда Коши теоремасы бойынша, көп байланысты облыста

$$\int_l \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \qquad (2.37)$$

теңдік орындалады, l-оң бағыт, ал C-сағат бағытына қарама-қарсы бағыт бойынша, яғни сол бағыт. 2.10-тақырыптағы 2-мысалдан (m=1):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{f(z)}{2\pi i}\int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{f(z)}{2\pi i}\cdot 2\pi i = f(z)\cdot \qquad (2.38)$$

Енді мына айырымды бағалайық:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta\cdot$$

C шеңбер үшін $|\zeta - z| = r$ теңдікті және мұндағы r радиусты $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай етіп таңдап алуға болады, себебі $f(z)$ функция z нүктеде үзіліссіз, мұндағы $\varepsilon > 0$. Енді 2.10-тақырыптағы 5-қасиеттен

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - f(z)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r}\int_C d\zeta \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r}\cdot 2\pi r = \varepsilon.$$

2.36-формула *Коши формуласы* немесе *Коши интегралы* деп аталады және практикада мына формуланы пайдаланған тиімді:

$$\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 2\pi i\cdot f(z)$$

2.16-теорема. Егер $f(z)$ функция тұйық $\overline{E}$ облыста аналитикалық болса, онда *f (z)* функция *E* облыстың барлық нүктелерінде жеткілікті рет дифференциалданады және n – туындысы үшін мына теңдік орындалады:

$$f^{(n}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}} \quad \text{немесе}$$

$$\frac{2\pi i}{n!}\cdot f^{(n)}(z)=\int_l\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}\ , \tag{2.39}$$

мұндағы l контур E облыстың оң бағыт контуры.

Сонымен, егер $f(z)$ функция z нүктеде аналитикалық болса, яғни z нүктенің маңайында $f(z)$ дифференциалданатын функция болса, онда z нүктеде $f(z)$ функция жеткілікті рет дифференциалданады, яғни $f'(z), f''(z),...$ функциялары z нүктеде аналитикалық функциялар болады.

Берілген $f(z)$ функция радиусы R-ге, ал центрі $z=a$ нүкте болатын шеңберде және осы шеңбермен шектелген дөңгелекте аналитикалық функция болсын. *C* шеңбердің комплекс түріндегі $z-a=R\cdot e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ теңдеуіне (2.36) Коши формуласын пайдаланайық:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)dz}{z-a}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+R\cdot e^{it})R\cdot i\cdot e^{it}}{R\cdot e^{it}}dt= \tag{2.40}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+R\cdot e^{it})dt.$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы формула, $f(z)$ функциясының *C* шеңбердегі арифметикалық орта мәні, *яғни аналитикалық функцияның шеңбердің центріндегі мәні осы функцияның шеңбер бойындағы мәндерінің арифметикалық ортасына тең.*

Лиувилль теоремасы. Егер $f(z)$ функция комплекс жазықтықта аналитикалық және шектелген болса, онда ол тұрақты.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша барлық комплекс жазықтықта $|f(z)|<M$ теңсіздігі орындалады және контурлық интегралдың 5-қасиеті мен 2.39–теңдіктен:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}\right| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R \le \frac{n!\cdot M}{R^n}.$$

Егер $n = 1$ болса, онда $\left|f'(z)\right| \le \frac{M}{R}$. Осыдан, егер $R \to \infty$ – са, онда оң жағы нөлге ұмтылады, ал сол жағы R – ге тәуелсіз. Олай болса $\left|f'(z)\right| = 0$ немесе $f'(z) = 0$. Осыдан, $f(z) = C - const$. Дәлелденді.

Мысалдар. Төмендегі интегралды берілген контурдың оң бағыты бойынша есептеңдер.

1. $\int_l \frac{e^{2z}}{(z-i)^3}$, мұндағы l кез келген тұйық контур i нүктені бір рет оң бағытта айналғанда.

Шешімі. Интеграл астындағы $f(z) = e^{2z}$ функция l контурмен шектелген облыста аналитикалық функция. Енді (2.39)–формуланы пайдаланайық;

$$\int \frac{e^{2z}dz}{l(z-i)^3} = \frac{2\pi i}{2!}f''(i) = \frac{2\pi i}{2!}4e^{2i} = \frac{8\pi i}{2}e^{2i} = \frac{8i\pi}{2}\left(Cos2 + iSin2\right) =$$

$$= -4Sin2 + 4iCos2.$$

2. $\int_l \frac{z^2 dz}{(z-i)^4}$, мұндағы l кез келген тұйық контур, i нүктеден өтпейтін.

Шешімі. Егер i нүкте l контурмен шектелген облыстан тыс жатса, онда интеграл астындағы функция осы облыста аналитикалық функция. Демек, Коши теоремасы бойынша, берілген интеграл нөлге тең. Енді i нүкте l контурмен шектелген тұйық облысқа тиісті болсын, онда 2.39–формуладан $(f(z) = z^2)$:

$$\frac{2\pi i}{3!}f'''(i) = \int_l \frac{z^2 dz}{(z-i)^4},$$

мұндағы $f(z) = z^2$, $f'''(z) = 0$. Олай болса, берілген интеграл нөлге тең.

3. $\int\limits_{|z-1|=1}\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^3 dz$.

Шешімі. Берілген интегралды мына түрге түрлендірейік:

$$\int\limits_{|z-1|=1}\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^3 dz = \int\limits_{|z-1|=1}\frac{\left(\frac{z^2+1}{z-1}\right)^3 dz}{(z-1)^3}.$$

(2.39)–формуладан $\left(f(z)=\left(\frac{z^2+1}{z-1}\right)^3\right)$:

$$\int\limits_{|z-1|=1}\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^3 dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(1) = \pi i\cdot f''(1) = 3\pi i,$$

мұндағы , $f''(1)=3$.

4. $\int\limits_l \frac{e^z dz}{z(z-3)}$, мұндағы l центрі 2-ге, ал радиусы $\frac{3}{2}$ – ге тең шеңбер.

Шешімі. (2.36) Коши формуласынан $\left(f(z)=\frac{e^z}{z}\right)$:

$$\int\limits_l \frac{e^z dz}{z(z-3)} = \int\limits_l \frac{f(z)dz}{z-3} = 2\pi i f(3) = \frac{2}{3}\pi e^3 i.$$

2.15. Тейлор қатары

Кез келген тұйық $|z-a|\le R' < R$ дөңгелекте дәрежелі қатар (2.7-тақырып):

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n = C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \ldots + C_n(z-a)^n + \ldots \qquad (2.41)$$

Абель теоремасы (2.7–тақырып) бойынша бір қалыпты жинақты және (2.41) қатардың қосындысы $f(z)$ функцияға тең.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n \qquad (2.42)$$

Онда $f(z)$ функция Вейерштрасс теоремасы бойынша, функциялық қатардың жинақты $|z-a|\le R$ облысында (дөңгелекте) аналитикалық функция болады. Берілген (2.41) қатардың барлық мүшелері бүкіл комплекс жазықтығында аналитикалық функция болғандықтан 2.41–қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады және қатар

$$f'(z)=C_1+2C_2(z-a)+3C_3(z-a)^2+...+nC_n(z-a)^{n-1}+... \qquad (2.43)$$

$|z-\alpha|\le R'<R$ дөңгелекте бірқалыпты жинақты.

Соңғы теңдікті (2.41)–қатардың жинақты облысында дифференциалдайық:

$$f''(z)=2C_2+6C_3(z-a)+...+n(n-1)C_n(z-a)^{n-2}+...$$

.....

$$f^{(n)}(z)=n!C_n+(n+1)!C_{n+1}(z-a)+...$$

Енді $z=a$ болсын, онда

$$C_0=f(a),C_1=f'(a),C_2=\frac{f''(a)}{2!},...,C_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},...$$

Табылған C_n коэффициенттерді 2.42–функциялық қатарға қояйық:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+... \qquad (2.44)$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+...$$

Сонымен, (2.44) –дәрежелі қатар $f(z)$ функцияның $z=a$ нүктенің маңайындағы *Тейлор қатары* деп аталады.

2.17-теорема. $|z-a|<r$ дөңгелекте аналитикалық функция болатын кез келген $f(z)$ функция осы дөңгелекте Тейлор қатарына тек бірақ рет жіктеледі, ал қатардың коэффициенттері мына формуладан анықталады:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ немесе } a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, n = 0,1,...,$$

мұндағы $f^{(n)}(a) = f(a), 0! = 1,$ l кез келген $|z - a| < r$ дөңгелектің ішінде орналасқан тұйық контур.

Тейлор қатарына элементар функцияларды оңай жіктеуге болады:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ...,$$

$$ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ...,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ...,$$

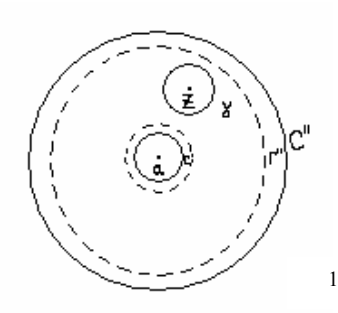
$$arctgz = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - ...,$$

$$tgz = z + \frac{2}{3!}z^3 + \frac{16}{5!}z^5 + ...,$$

$$(1 + z)^m = 1 + \frac{m}{1!}z + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}z^n + ...$$

2.16. Лоран қатары

Біз центрі $z = a$ нүкте болатын концентірлік l' мен l'' шеңберлерде бір мәнді аналитикалық функция болатын $f(z)$ функцияны қарастырайық, ал кез келген z нүкте l' мен l'' шеңберлерден анықталған сақинаның ішкі нүктесі болсын. Енді центрі $z = a$ нүкте болатын, осы сақинаның ішінде жататын Γ' пен Γ'' шеңберлерді тұрғызайық, ал z нүкте осы Γ' пен Γ'' шеңберлердің арасында жатсын (12-сурет).



12-сурет

z нүктеден центрі осы нүктенің өзі болатын, Γ' пен Γ'' шеңберлерден анықталған сақинаның ішінде жататын γ шеңбер жүргізейік. Коши теоремасы бойынша:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},$$

ал Коши формуласы бойынша:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = f(z).$$

Онда:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}. \qquad (2.45)$$

Егер ζ нүкте Γ' контурға тиісті болса, онда $|\zeta - a| > |z - a|$ және

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)(1 - \frac{z - a}{\zeta - a})} = \frac{1}{\zeta - a} -$$

$$- [1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \frac{(z - a)^2}{(\zeta - a)^2} + ... + \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^n} + ...],$$

мұндағы $\dfrac{1}{1 - \dfrac{z - a}{\zeta - a}}$ өрнек квадрат, жақша ішіндегі геометриялық прогрессияның қосындысы. Теңдіктің оң жағындағы қатар Γ'' шеңберде жинақты. Соңғы теңдікті мүшелеп, $f(\zeta)d\zeta$ өрнекке

көбейтейік және Γ'' шеңбер бойымен интегралдайық. Сонда (2.45) оң жағындағы бірінші интегралдың жіктелуін аламыз:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a}+\frac{z-a}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^3}+$$

$$+\ldots+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}+\ldots=$$

$$=C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+\ldots C_n(z-a)^n+\ldots,$$

мұндағы,

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}},n=0,1,2,... \tag{2.46}$$

Егер ζ нүкте Γ' контур бойында жатса, онда $|z-a|>|\zeta-a|$ және $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|<1$. Сондықтан қатар Γ' контурда жинақты болу үшін $\frac{1}{\zeta-z}$ өрнекті түрлендірейік:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a-(z-a)}=-\frac{1}{(\zeta-a)(1-\frac{\zeta-a}{z-a})}=-\frac{1}{z-a}[1+\frac{\zeta-a}{z-a}+$$

$$+\frac{(\zeta-a)^2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^n}+\ldots].$$

Осылайша өрнектелген соңғы теңдікті $-f(\zeta)d\zeta$ өрнекке көбейтіп, Γ' контур бойынша интегралдайық, сонда біз (2.45)– формуладағы екінші интегралдық жіктелу формуласын аламыз:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}f(\zeta)d\zeta+\frac{1}{(z-a)^2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\zeta-a)f(\zeta)d\zeta+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{(z-a)^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\zeta-a)^{n-1}f(\zeta)d\zeta+\ldots=$$

$$=\frac{C_{-1}}{z-a}+\frac{C_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{C_{-3}}{(z-a)^3}+\ldots+\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots,$$

мұндағы

$$C_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta,\ n=1,2,\ldots \tag{2.47}$$

Егер n-ді $-n$-ге алмастырсақ (2.46)–формуладағы интеграл астындағы функция (2.47)–формуладағы интеграл астындағы функцияға түрленеді және керісінше. Сондықтан, $f(z)$ функцияның, l' пен l'' контурлардан анықталған сақинаға тиісті кез келген z нүктедегі жіктелуін аламыз:

$$\begin{aligned}&f(z)=C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+\ldots+C_n(z-a)^n+\ldots\\&=\frac{C_{-1}}{z-a}+\frac{C_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{C_{-3}}{(z-a)^3}+\ldots+=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-a)^n,\end{aligned} \tag{2.49}$$

мұндағы C_n коэффициенттері $n=0,1,2,\ldots$ және $n=-1,-2,\ldots$ болғанда мына формуламен анықталады:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}, \tag{2.50}$$

мұндағы Γ центрі $z=a$ нүкте болатын шеңбермен анықталған сақинадағы контур.

Сонымен коэффициенттері (2.49)–формуладан анықталатын (2.48)– дәрежелі қатар a нүктенің маңайындағы $f(z)$ функцияның *Лоран қатары* деп аталады және $f(z)$ функция осы сақинада аналитикалық функция.

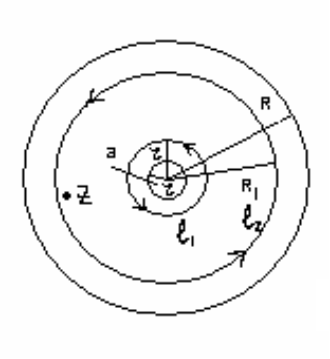
2.18-теорема. Дөңгелек $r<|z-a|<R$ сақинадағы кез келген аналитикалық $f(z)$ функция осы сақинада тек бірақ рет Лоран қатарына жіктеледі.

Дәлелдеуі. Теоремадағы $r < |z-a| < R$ сақинаға тиісті кез келген z нүктені алайық және $r < r_1 < R_1 < R$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын, әрі z нүкте тиісті болатын $r < |z-a| < R_1$ сақинаны тұрғызайық (13-сурет). Берілген $f(z)$ функция $r_1 \le |z-a| \le R_1$ тұйық сақинада аналитикалық функция болғандықтан Коши формуласынан

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \qquad (2.51)$$

мұндағы $l_2 : |z-a| = R_1, l_1 : |z-a| = r_1$ шеңберлердің теріс бағыты бойынша. Енді 2.16-тақырыптағыдай жалғастырып 2.51–формуладағы бірінші интегралды дәрежелі қатарға жіктейміз:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n, \qquad (2.52)$$



13-сурет

мұндағы

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, n = 0,1,2,... \qquad (2.53)$$

Екінші интегралдың интергал астындағы функцияны түрлендірейік:

$$f_2(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(z-a)-(\zeta-a)}= \tag{2.54}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z-a}\int_{l_1}f(\zeta)\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}d\zeta.$$

Бұл теңдіктегі ζ нүкте l_1 контурға тиісті болғандықтан

$$\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|=\frac{r_1}{|z-a|}<1.$$

Олай болса l_1 контурда мына прогрессия

$$\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n$$

бірқалыпты жинақты болады. Соңғы теңдікті (2.54)–формулаға қойып және оны мүшелеп интегралдап, мына теңдікті аламыз:

$$f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z-a}\int_{l_1}f(\zeta)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n\right\}d\zeta= \tag{2.55}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{l_1}f(\zeta)\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^n}\int_{l_1}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-a)^n},$$

мұндағы

$$C_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta,\ n=1,2,... \tag{2.56}$$

Жіктелген (2.52), (2.55)–формулаларды (2.51)–формулаға қойып, $f(z)$ функцияның дәрежелі қатарға жіктелуін аламыз:

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{2.57}$$

мұндағы

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\ ,\quad n=0,\pm1,\pm2,\pm\cdots \tag{2.58}$$

мұндағы ℓ қарастырып отырған сақинаға тиісті контур, c_n- *Лоран қатарының коэффициенттері* деп аталады.

Лоран қатарындағы (2.52)–қатар Лоран қатарының дұрыс бөлігі, ал 2.55–қатар *Лоран қатарының негізгі бөлігі* деп аталады.

Енді $f(z)$ функция $0<|z-a|<R$ сақинада және $z=a$ нүктеде де аналитикалық функция болсын. Онда барлық n үшін (2.56)–интегралдағы интеграл астындағы функцияның ℓ_1 -дің ішінде ерекше нүктесі жоқ. Сондықтан Коши теоремасы бойынша барлық $c_{-n}=0$ болады. Онда (2.53)–формуладан:

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ .$$

Демек, бұл жағдайда Лоран қатары Тейлор қатарына айналады.

Ескерту. Лоран қатарының коэффициенттерін табу үшін, көп жағдайда $r<|z-a|<R$ сақинада аналитикалық $f(z)$ функцияны екі функцияның қосындысы немесе көбейтіндісі ретінде өрнектейді:

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z),\ f(z)=f_1(z)\cdot f_2(z)\ ,$$

олардың біреуі, мысалы $f_1(z)$ функция үлкен дөңгелектің шішнде аналитикалық функция, яғни $|z-a|<R$, ал $f_2(z)$ функция кіші дөңгелектің сыртында, яғни $|z-a|>r$. Бірінші функцияны, $z-a$ айырымның оң дәрежесі, ал екіншіні теріс дәрежесі арқылы жіктеу керек, содан соң жіктелген қатарларды қосып немесе көбейтіп Лоран қатарын аламыз.

Мысалдар. 1. $f(z)=\dfrac{z}{z^2-3z+2}$ функцияны Лоран қатарына жіктейік.

Шешімі. Берілген функцияның екі үзілісті нүктесі бар: $z^2-3+2=0$, $z_1=1$, $z_2=2$. Демек $f(z)$ функция $1<|z|<2$ сақинада аналитикалық функция. Осы сақинада функцияны Лоран қатарына жіктеу үшін, функцияны екі функцияның қосындысына жіктейік (жай бөлшектерге). Ол үшін белгісіз коэффициенттер әдісін пайдаланамыз, сонда

$$f(z)=\frac{z}{z^2-3z+2}=-\frac{1}{z-1}+\frac{2}{z-2}\ ,$$

мұндағы $f_1(z)=-\dfrac{1}{z-1}$ функция $|z|>1$ дөңгелектің сыртында, $f_2(z)=\dfrac{2}{z-2}$ функция $|z|<2$ дөңгелектің ішінде аналитикалық функциялар.

Алдымен $f_1(z)=-\dfrac{1}{z-1}$ функцияны $|z|>1$ дөңгелектің сыртында z-тің теріс дәрежесі бойынша Лоран қатарына жіктейік:

$$-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{z\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots+\frac{1}{z^n}+\cdots\right).$$

Енді $f_2(z)=\dfrac{2}{z-2}$ функцияны $|z|<2$ дөңгелектің ішінде z-тің оң дәрежесі бойынша Лоран қатарына жіктейік:

$$\frac{2}{z-2}=\frac{2}{-2\left(1-\dfrac{z}{2}\right)}=-\left[1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z}{2}\right)^n+\cdots\right].$$

Осы қатарларды қосып, $f(z)=\dfrac{z}{z^2-3z+2}$ қатардың $1<|z|<2$ сақинадағы Лоран қатарын аламыз:

$$\frac{z}{z^2-3z+2}=-1-\frac{z}{2}-\left(\frac{z}{2}\right)^2-\cdots-\left(\frac{z}{2}\right)^n-\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots-\frac{1}{z^n}-\cdots$$

2. $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ функцияны z-тің оң және теріс дәрежелері бойынша жіктейік.

Шешімі. $f(z)$ функцияны

$$f_1(z)\cdot f_2(z)=e^z\cdot e^{\frac{1}{z}},\quad z\neq 0$$

түріне келтіріп жіктейік:

$$e^{z+\frac{1}{z}}=e^z\,e^{\frac{1}{z}}=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\cdots\right).$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы жақшаларды ашып, z^n-нің a_n коэффициенттері мен $\frac{1}{z^n}$-нің a_{-n} коэффициенттері тең екенін көруге болады:

$$a_n = a_{-n} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{1}{(n+3)!}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots,\ n = 0,1,...$$

3. $f(z) = \cos\frac{1}{z-3}$ функцияны $z = 3$ нүктенің маңайында Лоран қатарына жіктейік.

Шешімі. Жіктеу үшін $\cos z$ функцияның жіктелуін пайдаланайық:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad ,n = 0,1,2,...$$

Енді жіктелінудегі $z = \frac{1}{z-3}$ болсын, онда :

$$\cos\frac{1}{z-3} = 1 - \frac{1}{2!(z-3)^2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z-3)^{2n}} + \cdots$$

4. $f(z) = \cos\frac{z}{z-1}$ функцияны $z = 1$ нүктенің маңайында жіктейік.

Шешімі. Берілген функция аргументінің бүтін бөлігін бөліп алып, тригонометрияның формуласын пайдаланайық:

$$\cos\frac{z}{z-1} = \cos\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \cos 1\cos\frac{1}{z-1} - \sin 1\sin\frac{1}{z-1},$$

мұндағы

$$\cos\frac{1}{z-1} = 1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z-1)^{2n}} + \cdots,$$

$$\sin\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!(z-1)^{2n-1}} + \cdots$$

Онда :

$$f(z) = \cos\frac{z}{z-1} = \cos 1 - \frac{\sin 1}{z-1} - \frac{\cos 1}{2!(z-1)^2} + \frac{\sin 1}{3!(z-1)^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\cos\left[1 + \frac{(n-1)\pi}{2}\right]}{(n-1)!(z-1)^{n-1}} + \cdots$$

2.17. Аналитикалық функцияның нөлдері

Анықтама. $z=a$ нүктесі $f(z)$ *функцияның нөл нүктесі* деп аталады, егер $f(a)=0$.

Егер $f(z)$ функция $z=a$ нүктеде аналитикалық функция болса, осы нүктенің маңайында нөлге тең болмаса және $z=a$ нүкте $f(z)$ функцияның нөл нүктесі болса, онда $f(z)$ функцияның $z=a$ нөл нүктесінен өзге нөл нүктесі жоқ $z=a$ нүктенің маңайы табылады. Бұл жағдайда $f(z)$ функцияны a нүктенің маңайынада Тейлор қатарына жіктеуге болады:

$$f(z)=C_m(z-a)^m+C_{m+1}(z-a)^{m+1}+\ldots, \qquad (2.59)$$

мұндағы $C_m\neq 0,\quad m\geq 1$.

(2.58) жіктелуіндегі нөлге тең емес коэффициенттің ең кіші m нөмірі $z=a$ *нөл нүктенің дәрежесі* деп аталады. Егер $m=1$ болса, онда a нөл *жай нөл* деп аталады.

Мына формуладан $C_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!},\ n=1,2,\ldots$ мынадай тұжырым аламыз: егер a нүкте $f(z)$ функцияның m дәрежесі нөлі болса, онда $f(a)=)f'(a)=\ldots=f^{(m-1)}(a)=0$, ал $f^{(m)}(a)\neq 0$.

2.19-теорема. $z=a$ нүкте $f(z)$ аналитикалық функцияның m дәрежелі нөлі болу үшін, осы нүктенің маңайында мына теңдік орындалуы

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z) \qquad (2.60)$$

қажетті әрі жеткілікті, мұндағы $\varphi(z)$ функция $z=a$ нүктеде аналитикалық функция және $\varphi(a)\neq 0$.

Қажеттілігі. $z=a$ нүкте $f(z)$ функцияның m дәрежелі нөлі болсын. Онда $f(z)$ функцияның a нүктесінің маңайындағы Тейлор қатары (2.59) түрде болады. Осы қатарды түрлендірейік:

$$f(z)=(z-a)^m\left[C_m+C_{m+1}(z-a)+\ldots\right],$$

мұндағы $\varphi(z)=C_m+C_{m+1}(z-a)+\ldots$ дәрежелі қатар және ол a нүктеде аналитикалық $\varphi(a)=C_m\neq 0$.

Жеткіліктілігі. $f(z)$ функция (2.60) түрде берілсін, мұнда m - натурал сан, a нүктеде $\varphi(z)$ аналитикалық функция $\varphi(z) \neq 0$. Енді $\varphi(z)$ функцияны a нүктенің маңайында Тейлор қатарына жіктейік:

$$\varphi(z) = b_0 + b_1(z-a) + ...,$$

мұндағы $b_0 = \varphi(a) \neq 0$. Осы теңдікті 2.60–формулаға қояйық:

$$\varphi(z) = b_0(z-a)^m + b_1(z-a)^{m+1} + ...$$

Осыдан, $z = a$ нүкте $f(z)$ функцияның m дәрежелі нөлі болады. Дәлелденді.

Мысалдар . Төмдегі функциялардың нөл нүктесін табыңдар.

1. $z = 0$ нүкте $f(z) = 1 - \cos z$ функцияның екінші ретті дәрежелі нүктесі болатынын дәлелдейік.

Шешімі. $f(z)$ функцияны жіктейік:

$$f(z) = 1 - \cos z = 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ...\right) = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + ...$$

Осыдан: $\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + ... = 0, \quad z^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + ...\right) = 0, z^2 = 0$. Сонымен $z = 0$ берілген функцияның екінші ретті дәрежелі нүктесі болады.

2. Төмендегі функциялардың нөл нүктесін табыңдар.

а) $1 - \cos z;$ **б)** $1 - e^z$.

Шешімі. 2а) $f(z) = 1 - \cos z$ функцияны нөлге теңестіріп $\cos z = 1$ тендікті шешейік.Сонда $z_n = 2n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ нүктелер функцияның нөлдері болады. Енді $f'(z_n) = \sin z_n, \quad f''(z_n) = \cos z_n,$

$f'(2n\pi) = \sin 2n\pi = 0, \quad f''(2n\pi) = \cos 2n\pi = 1 \neq 0.$

Сонымен, $z_n = 2n\pi \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ нүктелер $f(z) = 1 - \cos z$ функцияның екінші дәрежелі нөлдері болады.

2ә) $f(z) = 1 - e^z$. Осыдан $e^z = 1$,онда $z_n = 2n\pi (n = 0, \pm 1, ...)$. Енді $f'(z) = -e^z : f'(2n\pi i) = -e^{2n\pi i} = -1 \neq 0$. Сонымен $z_n = 2n\pi i$ жай нөл нүкте.

3. $f(z)=\dfrac{z^6}{1-\cos z}$ функцияның нөл $z=0$ нүктесінің дәрежесін анықтайық.

Шешімі. Берілген функцияны $z=0$ нүктенің маңайында Тейлор қатарына жіктейік, бұл жағдайда $\cos z$ функцияның жіктелуін пайдаланайық:

$$f(z)=\frac{z^6}{1-\cos z}=\frac{z^6}{1-\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+\ldots\right)}=$$

$$=\frac{z^6}{\dfrac{z^2}{2!}-\dfrac{z^4}{4!}+\dfrac{z^6}{6!}+\ldots}=\frac{z^4}{\dfrac{1}{2!}-\dfrac{z^2}{4!}+\dfrac{z^4}{6!}+\ldots}=z^4\,\frac{1}{\dfrac{1}{2!}-\dfrac{z^2}{4!}+\dfrac{z^4}{6!}+\ldots},$$

мұндағы

$$\frac{1}{\dfrac{1}{2!}-\dfrac{z^2}{4!}+\dfrac{z^4}{6!}+\ldots}=\varphi(z)$$

болсын, онда $f(z)=\dfrac{z^6}{1-\cos z}=x^4\varphi(z)$, мұндағы $\varphi(z)$ функция $z=0$ нүктеде аналитикалық функция және $\varphi(0)=2\neq 0$. Олай болса $z=0$ нүкте берілген

функцияның төртінші дәрежелі нөлдік нүктесі.

2.18. Ерекше нүктелер

Берілген $f(z)$ функцияның аналитикалықтығы оның ерекше нүктелерінде бұзылады. Сондықтан біз аналитикалық функцияның өзгеруін оның ерекше нүктесінің маңайында тексереміз, яғни *оқшауланған еркше нүктелерде.*

Анықтама. $z=a$ нүкте $f(z)$ функцияның *оқшауланған ерекше нүктесі* деп аталады, егер $z=a$ нүктенің маңайы табылып, осы маңайда ол тек бір ғана ерекше нүкте болса.

Егер $z=a$ нүкте $f(z)$ функцяның оқшауланған ерекше нүктесі болса, онда осы нүктенің жеткілікті аз $r<|z-a|<R$

сақина табылып, осы сақинада $f(z)$ функция аналитикалық функция болады және онда ол Лоран қатарына жіктеледі:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}. \qquad (2.60)$$

Бұл жіктелуде үш жағдай болуы мүмкін:

1-жағдай. (2.60) жіктелуде негізгі бөлгі жоқ болуы, яғни

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n=C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+... \qquad (2.61$$

Бұл қатар дәрежелі қатар және оның косындысы $|z-a|<R$ дөңгелекте аналитикалық функция (әрі оның центрінде де). (2.61)-қатар $z=a$ нүктеден өзге $|z-a|<R$ дөңгелектің барлық нүктелерінде $f(z)$ функцияға жинақты, ал $f(z)$ функция $z=a$ нүктеде C_0 санға жинақты болады.

Анықтама. $z=a$ нүкте $f(z)$ функцияның *жөнделетін ерекше нүктесі* деп аталады, егер мына шек бар болса $\lim\limits_{Z\to a} f(z)$.

Мысалы, $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ функцияның жөнделетін ерекше нүктесі $a=0$ нүкте болады: $\lim\limits_{Z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1<\infty$.

2-жағдай: (2.60) *жіктелуіндегі негізгі бөлік саны санаулы мүшелерден анықталады, яғни*:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n+\frac{C_{-1}}{z-a}+\frac{C_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}, \qquad (2.62)$$

мұндағы $C_{-m}\neq 0$.

Анықтама. $z=a$ нүкте $f(z)$ функцияның *полюсі* деп аталады, егер $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

z_0 нүкте $f(z)$ функцияның m *дәрежелі полюсі* деп аталады, егер a нүкте

$F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ функцияның m дәрежелі нөлі болса.

Егер $m=1$ болса, онда полюс z_0 *жай полюс* деп аталады.

2.20-теорема (нөл мен полюс арасындағы байланыс). $z=a$ нүкте $f(z)$ функцияның нөлі болуы үшін, ол $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ функцияның полюсі болуы қажетті әрі жеткілікті (егер полюс дәрежелі болса, онда нөлде m дәрежелі болады).

2.21-теорема. $z=a$ нүкте $f(z)$ функцияның m дәрежелі полюсі болу үшін $f(z)$ функцияның мына түрге $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$ түрленуі қажетті әрі жеткілікті, мұндағы $\varphi(z)$ функция a нүктеде аналитикалық функция және $\varphi(a)\neq 0$.

Мысалы, $f(z)=\dfrac{\cos z}{z}$ функцияның $a=0$ нүктесі бірінші дәрежелі полюс, яғни $z=0$ жәй полюс болады. Шынында да, $\dfrac{\cos z}{z}=\dfrac{1}{z}\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}+\ldots\right)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{z}{2!}+\dfrac{z^3}{4!}+\ldots$. Бұл қатардың негізгі бөлігі бір мүшеден тұрады $\dfrac{1}{z}$, яғни $m=1$. Сондықтан, $z_0=0$ нүкте жай полюс және $\lim\limits_{Z\to 0}\dfrac{\cos z}{z}=\infty$, ал бұл соңғы шек $a=0$ нүктенің полюс болуына тән қасиет.

Мысалы, $f(z)=\dfrac{z+1}{\left(z^2+4\right)(z-3)^4}$ функцияның үш полюсі бар: $z_{1/2}=\pm 2i$ бірінші дәрежелі полюс, ал $z_3=3$ төртінші дәрежелі полюс.

3-жағдай. (2.60) *жіктелуіндегі негізгі бөлік шексіз мүшелерден анықталады.*

Анықтама. $z=a$ нүкте $f(z)$ *функцияның елеулі нүктесі* деп аталады, егер осы нүктеде $f(z)$ функцияның не шектелген, не шексіз шегі жоқ болса.

Мысалы, $f(z)=e^{\frac{1}{Z}}$ функцияның $z=0$ нүктесі оның елеулі нүктесі болады. Шынында да, нақты осьте $z=x$: $\lim\limits_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}}=0,\ \lim\limits_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}}=\infty$; ал жорамал осьте $z=iy$: $\lim\limits_{y\to-0} e^{\frac{1}{iy}}=0,\ \lim\limits_{y\to+0} e^{\frac{1}{iy}}=\infty$. Демек, $f(z)$ функцияның $z=0$ нүктеде не шектелген, не шексіз шегі жоқ. Олай болса, $z=0$ елеулі ерекше нүкте.

Мысалы, $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)^3(z-2)^4}$ нүктенің барлық ерекше нүктелерін табайық.

Берілген функция $z=-i, z=2$ нүктелерден өзге нүктелерде аналитикалық функция. 2.21-теорема бойынша, бұл нүктелер $f(z)$ функцияның сәйкес 3 және 4 дәрежелі полюсі, ал 2.20-теорема бойынша, бұл нүктелер $\dfrac{1}{f(z)}=F(z)$ функцияның сәйкес 3 және 4 дәрежелі нөлдері.

2.19. Оқшауланған нүкте үшін функция қалындысының анықтамасы

Бізге D облыстың оқшауланған ерекше нүктелерінен өзге нүктелерде аналитикалық *f (z)* функция және осы нүктелерден өтпейтін әрі осы облысқа тиісті бөлікті-тегіс тұйық l контур берілсін.

Егер D облыстағы тұйық l контурда *f (z)* функцияның ерекше нүктелері жоқ болса, онда Коши теоремасы бойынша:

$$\oint_l f(\zeta)d\zeta=0, \tag{2.63}$$

ал егер тұйық l контурда *f (z)* функцияның ерекше нүктелері бар болса, онда (2.63)–интегралдың мәні нөлге тең болмауыда мүмкін. Егер бір байланысты D облысқа тиісті бөлікті тегіс тұйық l контурға

z_0 нүкте тиісті болса және осы облыстың φ*(z)* функция аналитикалық функция болса, онда 2.36–формуладан: $\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \varphi(z_0)$.

Енді z=z$_0$ нүкте $f(z)$ функцияның оқшауланған ерекше нүктесі болсын және $0 < |z - z_0| < R$ сақинада функция аналитикалық функция болсын. Берілген *f(z)* функцияны осы сақинада Лоран қатарына жіктейік:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_n)^n . \qquad (2.64)$$

Лоран қатарының әрбір мүшесі 0<|z-z$_0$|<R сақинада аналитикалық функция және қатардың өзі тұйық $0 < \rho_1 \le |z - z_0| \le \rho_2 < R$ сақинада бірқалыпты жинақты болғандықтан, қатарды, |z-z$_0$|=ρ теңдеуімен берілген C_ρ шеңбер контуры бойымен интегралдауға болады, мұндағы $\rho_1 \le \rho \le \rho_2$. Мына теңдіктерді $\oint_{C_\rho} (\zeta - z_0)^n d\zeta = 0$,

егер n бүтін, $n \neq -1$; $\oint_{c_c^+} \frac{dж}{ж - z_0} = 2pi$ пайдаланып, (2.64)–теңдікті C_ρ шеңбердің оң бағыты бойынша интегралдайық: $\oint_{c_c^+} \frac{dж}{ж - z_0} = 2piC_{-1}$, $C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho^+} f(\zeta) d\zeta$. Соңғы интегралдың мәні *контур бойынша интегралдауға тәуелсіз* (2.12-тақырып), сондықтан $0 < |Z - Z_0| < R$ сақинаға тиісті және z_0 нүктені қоршаған кез келген бөлікті-тегіс l контур бойынша мына теңдік орындалады:

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{l^+} f(\xi) d\xi ,$$

мұндағы l^+ контур l контурдың оң бағыты бойынша.

Анықтама. $f(z)$ функция облыста аналитикалық функция, l осы облысқа тиісті кез келген бөлікті–тегіс тұйық контур (l^+ контурдың оң бағыты) және $f(z)$ функцияның тек бір ғана оқшауланған ерекше z_0 нүктесі тұйық l контурдың ішкі нүктесі болсын. Аналитикалық $f(z)$ *функцияның оқшауланған ерекше* z_0 *нүктедегі қалындысы* деп комплекс санды айтамыз және ол сан мына интегралдың мәніне тең:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{l^+} f(\xi)d\xi .$$

Функцияның қалындысы былай белгіленеді:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{l^+} f(\xi)d\xi = C_{-1}. \tag{2.66}$$

Демек, ерекше z_0 нүкте үшін $f(z)$ аналитикалық функцияның қалындысы осы функцияның Лоран қатарындағы теріс дәрежелі жіктелуінің бірінші мүшесінің коэффициентіне тең.

Жоғардағы анықтамадан: $f(z)$ функцияның қалыңдысы ерекше z_0 нүкте үшін қалындысы нөлге тең болмауы мүмкін, егер z_0 нүкте $f(z)$ функцияның полюсі немесе елеулі ерекше нүктесі болса.

2.20. Функция қалыңдысының негізгі теоремасы

Бізге D облысының саны снаулы z_k $(k=\overline{1,n})$ ерекше нүктелерінен өзге барлық нүктелерінде аналитикалық функция болатын $f(z)$ функция берілсін. Осы D облысқа тиісті бөлікті–тегіс тұйық контурды l таңбамен белгілейік және z_k ерекше нүктелер l контурдың ішкі нүктесі болсын.

2.22-теорема. z_k – ерекше нүктелері үшін, $f(z)$ функцияның қалындысы осы ерекше нүктелер қосындыларының қалындысына тең, яғни:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{l^+} f(\xi)d\xi = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \tag{2.67}$$

мұндағы l^+ контур l контурдың оң бағыты бойынша .

1–дәлелдеу. $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ерекше нүктелерді, центрлері осы нүктелер болатын, ал радустары сәйкес $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ -ге (ρ_i – жеткілігінше аз сан) тең $c_{\rho_1}, c_{\rho_2}, \ldots, c_{\rho_n}$ шеңберлермен қоршаймыз және шеңберлер қос-қостан қиылыспасын әрі D облыста толық жатсын. Енді l контурдан және $c_{\rho_1}, c_{\rho_2}, \ldots, c_{\rho_n}$ шеңберлердің контуры бойымен сол бағыт бойынша алынған контурлар жүйесін Γ таңбамен белгілейік:

$$\Gamma = l^+ + c^-_{\rho_1} + c^-_{\rho_2} + \ldots + c^-_{\rho_n}.$$

Коши теоремасы бойынша:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} f(\xi) d\xi = 0 .$$

Осыдан :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{l^+} f(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint_{c^-_{\rho_1}} f(\xi) d\xi + \ldots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{c^-_{\rho_n}} f(\xi) d\xi = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{l^+} f(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c^+_{\rho_1}} f(\xi) d\xi + \ldots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{c^+_{\rho_n}} f(\xi) d\xi.$$

2.21. Функцияның қалындысын полюстер үшін есептеу

Берілген z_0 нүкте $f(z)$ функцияның оқшауланған ерекше нүктесі болсын. Онда $\underset{z=z_0}{Res}\ f(z)$ қалындыны

не $\underset{z=z_0}{Res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l^+} f(\xi) d\xi$, не $\underset{z=z_0}{Res}\ f(z) = c_{-1}$

формулалардың бірі арқылы есептейміз. Егер бірінші формула арқылы есептесек, онда $\int_{l^+} f(\xi) d\xi$ интегралды есептеуге, ал екінші формула

үшін $f(z)$ функцияны z_0 нүктеде Лоран қатарына жіктеуге тура келеді.

1. Жай полюс үшін. z_0 нүкте $f(z)$ функцияның жай нүктесі болсын. Онда z_0 нүктенің жеткілікті аз маңайында мына жіктелу орындалады:

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z+z_0)^n.$$

Теңдіктің екі жағында $z-z_0$ өрнекке көбейтейік:

$$(z-z_0)f(z)=c_{-1}+(z-z_0)\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы өрнек дәрежелі қатар, сондықтан оның қосындысы z_0 нүктеде үзіліссіз функция. $z\to z_0$ –да шекті табайық

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=c_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f(z). \qquad (2.68)$$

Сонымен, егер $z=z_0$ нүкте $f(z)$ функцияның жай полюсі болса, онда жай полюс үшін $f(z)$ функцияның қалындысын (2.68)–формуладан есептейміз.

Егер $z=z_0$ нүктенің маңайында $f(z)$ функция екі $\varphi(z)$, $\psi(z)$ аналитикалық функциялар арқылы бөлшек түрінде анықталса, яғни

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

мұндағы $\varphi(z_0)\neq 0$, ал $z=z_0$ нүкте $\psi(z)$ функцияның жай полюсі. Бұл жағдайда, $z=z_0$ нүкте функцияныңда жай полюсі болады. Онда, (2.68) формуладан:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}},$$

мұндағы $\psi(z_0) \neq 0$ және $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$,

$\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} = \psi'(z_0) \neq 0$ болғандықтан

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{2.69}$$

2. Еселі полюс үшін. z_0 нүкте $f(z)$ функцияның еселі полюсі болсын. Онда $f(z)$ функцияның z_0 нүкте маңайындағы жіктелуі мына түрде болады:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Соңғы теңдіктің екі жағын да $(z - z_0)^m$ өрнекке көбейтейік:

$$\begin{aligned} &(z - z_0)^m f(z) = C_{-m} + C_{-m+1}(z - z_0) + \ldots + C_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \\ &+ (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n. \end{aligned} \tag{2.70}$$

(2.70) –теңдіктің оң жағындағы өрнек дәрежелік қатар және оның жинақты дөңгелегіне тиісті кез келген дөңгелекте бірқалыпты жинақты болады. Сондықтан, бұл дәрежелі қатарды жеткілікті рет мүшелеп дифференциалдауға болады. Енді оны $(m-1)$-рет дифференциалдайық:

$$\begin{aligned} &\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right) = (m-1)!\, C_{-1} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+m)(n+m-1)\ldots(n+2)(z - z_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Осыдан: $z \to z_0$-да шекке көшейік:

$$(m-1)!\, C_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right)$$

Осыдан:

$$C_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m \cdot f(z) \right). \quad (2.71)$$

Сонымен, егер $z = z_0$ нүкте $f(z)$ функцияның m еселі полюсі болса, онда $f(z)$ функцияның осы нүкте үшін қалындысын (2.71)–формуладан табамыз. Егер $m = 1$ болса, онда (2.71)–формуладан (2.69)–формуланы аламыз.

Мысалдар. 1. $z = 0$ нүкте үшін $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)}$ функцияның қалындысын есептейік.

Шешімі. Z=0 нүкте *f (z)* функцияның екінші дәрежелі полюсі . Онда (2.71)–формула бойынша $m = 2$:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{z^2(z+1)} \right) =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z+1} \right) = - \lim_{z \to 0} \frac{1}{(z+1)^2} = -1.$$

2. $z = 0$ нүкте үшін $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ функцияның қалындысын есептейік.

Шешімі. $z = 0$ нүкте $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ функцияның елеулі полюсі. Берілген функцияны $z = 0$ нүктенің маңайында Лоран қатарына жіктейік:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \ldots + \frac{1}{n! z^n} + \ldots$$

Осыдан: $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=0} e^{\frac{1}{z}} = 1.$

3. $\int\limits_{\ell} \frac{z^2 dz}{z^2+1(z-3)}$, мұндағы l - шеңбер $|z|=2$.

Шешімі. Интегралды есептеу үшін, итеграл астындағы функцияның ерекше нүктелерін табу керек және олардың қайсысы l шеңбердің ішкі нүктесі болатынын анықтауымыз керек. Ол үшін, бөлшектің бөлімін нөлге теңестіріп, теңдеуді шешеміз: $(z^2+1)(z-3)=0, \quad z_{1,2}=\pm i,\ z_3=3$. Сонда

$$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}$$

функцияның үш полюсі бар: $z=i,\ z_2=-i,\ z_3=3$. Бұл полюстердің $z_1=I,\ z_2=-i$ екеуі ғана $|z|=2$ шеңбердің ішінде жатады және олар жай полюстер. Онда (2.67)–формуладан (n=2) :

$$\int\limits_{l} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z-3)} = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)\right).$$

(2.68)–формуланы пайдаланып, осы қалындыларды жеке-жеке есепейік:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-3)}(z-i) = \lim_{z\to i} \frac{z^2(z-i)}{(z+1)(z-i)(z-3)} =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{z^2}{(z+i)(z-3)} = \frac{i^2}{2i(i-3)} = \frac{1}{20} - \frac{3}{20}i,$$

$$\operatorname*{Res}_{z\to -i} f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-3)}(z-i) = \frac{1}{20} + \frac{3}{20}i.$$

Сонымен:

$$\int \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z-3)} = 2\pi i\left(\frac{1}{20} - \frac{3}{20}i + \frac{1}{20} + \frac{3}{20}i\right) = \frac{\pi i}{5}.$$

4. $\int\limits_{l} \frac{\cos z dz}{z^2(z+2)}$, мұндағы l - шеңбер $|Z|=1$.

Шешімі. Интеграл астындағы $f(z)=\frac{\cos z}{z^2(z+1)}$ функцияның екінші дәрежелі $z=0$ полюсі және жай z = –2 полюсі бар. Берілген l

шеңбердің ішінде $z=0$ полюсі жатады. Сондықтан, (2.67)– формуладан $(n=1)$:

$$\int_l \frac{\cos z dz}{z^2(z+2)} = 2i\pi \operatorname*{Re}_{z=0} s\, f(Z)\cdot$$

Енді (2.71)–формуладан $(m=2)$:

$$\operatorname*{Re}_{z=0} s\, f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{\cos z}{z^2(z+2)}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos z}{z+2}\right) = -\lim_{z\to 0}\frac{-\sin z(z+2)-\cos z}{(z+1)^2} = -\frac{1}{4}.$$

Сонда

$$\int_l \frac{\cos z dz}{Z^2(Z+2)} = 2\pi i(-\frac{1}{4}) = -\frac{\pi i}{2}\cdot$$

2.22. Логарифмдік қалынды

Бізге D облыстың саны санаулы елеулі нүктелерден өзге нүктелерде бір мәнді, ал D облыстың барлық жерінде аналитикалық $f(z)$ функция берілсін. Көмекші $\phi(z)$ функцияны қарастырайық:

$$\phi(z) = [\ln f(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

мұндағы $\phi(z)$ функция, *f (z) функция логарифмінің* туындысы деп аталады.

Анықтама. $z=z_0$ нүкте үшін $f(z)$ *функцияның логарифмдік қалындысы* деп осы нүкте үшін $f(z)$ функция логарифмі туындысының қалындысын айтамыз.

1. $z=z_0$ нүкте $f(z)$ функцияның m дәрежелі нөлі болсын. Онда осы нүктенің маңайында:

$$\begin{aligned} f(z) &= C_m(z-z_0)^m + C_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots = \\ &= (z-z_0)[C_m + C_{m+1}(z-z_0) + \ldots], C_m \neq 0 \end{aligned} \quad . \qquad (2.72)$$

Осы теңдіктен бір рет z бойынша туынды алайық:

$$f'(z) = mC_m(z-z_0)^{m-1} + C_{m+1}(z-z_0)^m + \ldots = \\ = (z-z_0)^m [\, mC_m + C_{m+1}(z-z_0) + \ldots], \tag{2.73}$$

Енді 2.73–теңдікті 2.72–теңдікке бөлейік

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{mc_m + (m+1)c_{m+1}(z-z_0) + \ldots}{c_m + c_{m+1}(z-z_0) + \ldots}$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы екінші көбейткіш $z = z_0$ нүктеде аналитикалық функция, себебі $c_m \neq 0$. Олай болса, ол центрі z_0 нүкте болатын дөңгелекте Тейлор қатарына жіктеледі. Бұл Тейлор қатарының бас мүшесі $m-$ге тең, ал қалған мүшелерінің коэфициенттерін $d_k (k = 0,1,2,\ldots)$ таңбамен белгілейік, сонда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_0}(m + d_0(z-z_0) + d_1(z-z_0)^2 + \ldots) = \\ \frac{m}{z-z_0} + d_0 + d_1(z-z_0) + \ldots$$

Осыдан, $z = z_0$ нүкте $\frac{f'(z)}{f(z)} = (\ln f(z))'$ функцияның бірінші дәрежелі полюсі болады. Онда :

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} [\ln f(z)]' = m. \tag{2.74}$$

2. $z = z_0$ нүкте $f(z)$ функцияның n дәрежелі полюсі болсын. Онда, $z = z_0$ нүкте $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ функцияның n дәрежелі полюсі болады және

$$\left[\ln f(z)\right]' = -\left[\ln \varphi(z)\right]'$$

теңдік орындалады. Сонымен $z = z_0$ нүкте $[\ln \varphi(z)]'$ – логарифмдік туындының бірінші дәрежелі полюсі болады және оның қолындысы $-n-$ге тең, яғни

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left[\ln\varphi(z)\right]' = -n \ . \tag{2.75}$$

2.23. Шексіз қашық нүкте үшін функция қалыңдысы

Көп жағдайда функцияның қалындысын кеңейтілген комплекс жазықтықта қарастыруға тура келеді. Бізге $z=\infty$ нүктенің маңайында аналитикалық $f(z)$ функция берілсін.

Анықтама. *Шексіз қашық* $z=\infty$ *нүкте үшін* $f(z)$ *функцияның қалындысы* деп $f(z)$ функцияның $z=\infty$ нүктеде Лоран қатарына жіктелуіндегі $\frac{1}{z}$ мүшенің теріс таңбамен алынған коэффициентін айтамыз және ол $Resf(\infty)$ таңбамен белгіленеді

$$Resf(\infty) = -c_1 .$$

$z=\infty$ нүктенің маңайындағы $f(z)$ функцияның Лоран қатарын қарастырайық.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n \ .$$

Осы қатарды $z=\infty$ нүктенің маңайына тиісті және координаттың бас нүктесін қоршаған кез келген l контурдың оң бағыты бойынша мүшелеп интегралдайық, сонда :

$$\int_{l^+} f(z)dz = c_1(-2\pi i) \ .$$

Осыдан :

$$Resf(\infty) = -c_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{l^+} f(z)dz \ . \tag{2.76}$$

2.23-теорема. Егер кеңейтілген комплекс кеңістікте $f(z)$ функция саны санаулы ерекше нүктелерден өзге нүктелерде аналитикалық функция болса, онда оның барлық қалындыларының қосындысы нөлге тең ($z=\infty$ нүктедегі қалындысын қоса есептегенде):

$$Resf(\infty) + \sum_{k=1}^{n} Resf(z) = 0, \tag{2.77}$$

мұндағы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ саны санаулы ерекше нүктелер .

Осы теоремадан мына *салдарды* аламыз: егер кеңейтілген комплекс кеңістікте $f(z)$ саны санаулы оқшауланған ерекше нүктелерден өзге нүктелерде аналитикалық болса және ерекше нүктелер l контурдың ішкі нүктесі болса, онда:

$$\int_l f(z)dz = -2\pi i \, Re\, f(\infty).$$

Мысалдар. Берілген функциялардың ұлғайтылған комплекс кеңістіктегі ерекше нүктелері үшін қалындыларын есептейік.

1. $f(z) = \dfrac{3}{z+i}$.

Шешімі. Берілген функция, $z = -i$ нүктеден өзге кеңейтілген комплекс кеңістікте аналитикалық функция және $z = -i$ жай полюс, $z = \infty$ дұрыс нүкте. Сонда (2.72)–формуладан:

$$Res f(\infty) + \underset{z=i}{Res} f(z) = 0 ,$$

мұндағы $Res f(-i)$ қалындыны (2.69)–формуладан анықтаймыз $\left(f(z) = \dfrac{3}{z+i} = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right)$:

$$\underset{z=-i}{Res}\, f(z) = \underset{z=-i}{Res} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(-i)}{\psi'(-i)} = \frac{3}{1} = 3.$$

Онда: $Res f(\infty) = -\underset{z=-i}{Res}\, f(z) = -3$.

2. $f(z) = \dfrac{z^5}{z^2 - 1}$.

Шешімі. Берілген функция ерекше нүктелерден өзге нүктелерде аналитикалық функция. Функцияның кеңейтілген комплекс кеңістікте үш ерекше нүктелері бар, олар $z_1 = 1, z_2 = -1$ жай полюстер және $z_3 = \infty$ үшінші дәрежелі полюс. Сонда :

$$Res(\infty) + \underset{z=1}{Res}\, f(z) + \underset{z=-1}{Res}\, f(z) = 0.$$

Әрбір қосылғыштарды жеке-жеке есептейік. (2.69)–формуладан $(\varphi(z) = z^5, \quad \psi'(z) = (z^2 - 1)' = 2z)$:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z^5}{z^2-1}=\frac{1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2};$$

ал екінші қосылғыш үшін:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z^5}{x^2-1}=\frac{(-1)^5}{2\cdot(-1)}=\frac{1}{2}.$$

Онда : $Res(\infty)=-1.$

3. $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

Шешімі. Берілген функция $z_1=0, z_2=\infty$ нүктелерден өзге нүктелерде аналитикалық функция. $z_1=0-$ елеулі ерекше, ал $z=\infty$ дұрыс нүкте.

Функцияны $|z|>0$ үшін жіктейік:

$$e^z=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots$$

және бұл қатар $z=0$ мен $z=\infty$ нүктелердің маңайында Лоран қатары болады. Сондықтан:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)+Res(\infty)=0,$$

мұндағы $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=c_{-1}=1.$ Онда: $Res(\infty)=-1.$

III ТАРАУ

ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУІ

3.1. Функцияның нүктедегі біржақты шектері және негізгі ұғымдар

Осы тақырыпта математикалық анализ курсында ([14,16]) қарастырылған үзілісті нүктелерге және алдағы тақырыптарға қажетті негізгі ұғымдарға қысқаша тоқталып өтейік.

Мына шектер бар болсын:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \varphi = \varphi(x_0-0), \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \varphi = \varphi(x_0+0)$$

әрі олар сәйкес $\varphi(x)$ функцияның x_0 нүктедегі *сол жақты* және *оң жақты шектері* деп аталады. Егер $\varphi(x_0)=\varphi(x_0-0)=\varphi(x_0+0)$ теңдігі орындалса, онда $\varphi(x)$ *функция* x_0 *нүктеде үзіліссіз* деп аталады.

Егер x_0 нүктеде $\varphi(x)$ функцияның оң жақты, сол жақты шектерінің бірі немесе екеуі де жоқ болса, онда x_0 нүкте *екінші түрдегі үзілісті нүкте* деп аталады. Егер $\varphi(x_0-0)\neq\varphi(x_0+0)$ болса, онда x_0 нүкте *бірінші түрдегі үзілісті нүкте* деп аталады. Егер x_0 нүктеде функцияның оң жақты және сол жақты шектер бар болса, онда $\delta=\left|\varphi(x_0+0)-\varphi(x_0-0)\right|$ саны $\varphi(x)$ функцияның x_0 нүктедегі *күрт үзілісті арақашықтығы* деп аталады.

Енді $[a,b]$ сегментте анықталған $y=\varphi(x)$ функцияны қарастырайық. Егер $\varphi(x)$ функцияның $[a,b]$ сегментте үзіліссіз туындысы бар болса, онда ол осы сегментте *тегіс* деп аталады. Егер $\varphi(x)$ функцияның өзі және оның туындысы $[a,b]$ сегментте не үзіліссіз, не саны санаулы нүктеде бірінші түрдегі үзілісті болса, онда $\varphi(x)$ функция $[a,b]$ сегментте *бөлікті – тегіс функция* деп аталады.

Егер сегментті саны санаулы дербес сегменттерге бөлгенде осы дербес сегменттердің әрқайсысының ішінде функция монотонды әрі

шектеулі болса, функция сегментте *Дирихле шартын қанағаттандырады* дейміз.

Математикалық анализ курсында ([14,16]) $y = \varphi(x)$ функцияның $[a,b]$ сегментте интегралдану анықтамасы мына түрде берілген:, егер $\int_a^b \varphi(x)dx$ интегралы (меншікті не меншіксіз) бар болса, $\varphi(x)$ функция $[a,b]$ сегментте *интегралданады* деп аталады. Онда $\varphi(x)$ функция сегментте не үзіліссіз, не осы сегментте саны санаулы үзілісті нүктелердің маңайында функция шектелген немесе шектелмеген болуы мүмкін. Осы курста, саны санаулы нүктеде үзілісті функция үшін $\int_a^b |\varphi(x)|dx$ интегралы бар болса, онда $\varphi(x)$ функцияның осы сегментте интегралданатыны дәлелденген. Сонымен, егер $\int_a^b |\varphi(x)|dx$ интегралы бар болса, онда $\varphi(x)$ функция $[a,b]$ сегментте *абсолютті интегралданады* деп аталады.

Бізге берілген $[a,b]$ сегментті $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ нүктелермен бөліктерге бөлейік. Егер әр бөліктегі функцияның мәні тұрақты болса, онда ол функция *сатылы функция* деп аталады.

Функция (a,b) интервалда *сипаттамалы функция* деп аталады, егер

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b). \end{cases}$$

Егер $\dfrac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$ функция $t \in [-\delta,\delta]$ сегментте қосындылы функция болса, яғни

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}dt < \infty,$$

онда бұл шарт *Дини шарты* деп аталады. Мысалы, α дәрежелі *Лившиц шарты* деп аталатын мына шарт орындалса ($\alpha = 1$):

$$|\varphi(x+t)-\varphi(x)| \le c|t|^{\alpha},$$

мұндағы $\alpha \in (0,1]$, онда $\varphi(x)$ функция үшін Дини шарты орындалады. Осы сияқты, егер $\varphi(x)$ функцияның x нүктеде шектеулі туындысы бар

болса, онда $\varphi(x)$ функцияға бірінші дәрежелі Лившиц шарты орындалады.

Анықтама. Кез келген M жиын *метрикалық кеңістік* деп аталады, егер:

1) M жиынның кез келген $x,\ y$ элементтеріне осы элементтердің арақашықтығы деп аталатын $\rho(x,y)>0$ саны табылса;

2) $\rho(x,\ y)$ арақашықтыққа мына аксиомалар орындалса;

2 а) $\rho(x,\ y)=0$, егер $x=y$ (*тепе-теңдік аксиомасы*),

2 б) $\rho(x,\ y)=\rho(y,\ x)$ (*симметриялы аксиомасы*),

2 в) $\rho(x,\ y)\le\rho(x,\ z)+\rho(y,\ z)$ (*үшбұрыш аксиомасы*).

Анықтамада келтірілген аксиомалар M кеңістіктегі *метриканың аксиомалары* деп аталады.

Мысалы, барлық $t\in[a,\ b]$ үшін үзіліссіз функциялар жиынындағы $x(t),\ y(t)$ функциялардың арақашықтығын немесе үзіліссіз функциялар жиынындағы метриканы мына формула арқылы анықтасақ: $\rho(x,\ y)=\max\limits_{t\in[a,b]}|\ x(t)-y(t)\ |$, онда бұл метрика метриканың аксиомаларын қанағаттандырады, яғни бұл жиын метрикалық кеңістік болады. Сонымен, $[a,b]$ сегментте анықталған үзіліссіз функциялар жиынында $\rho(x,\ y)=\max\limits_{t\in[a,b]}|\ x(t)-y(t)\ |$ метрикамен анықталған жиын метрикалық кеңістік болады және ол $C[a,b]$ таңбамен белгіленеді.

Осы сияқты, $[a,b]$ сегментте анықталған үзіліссіз функциялар жиынында метрика

$$\rho^P(x,y)=\int_a^b|\ x(t)-y(t)\ |dt$$

түрінде анықталса, онда $\rho^P(x,y)$ метрика метриканың барлық аксиомаларын қанағаттандырады және ол жиын немесе кеңістік $C_P[a,b]$ таңбамен белгіленеді.

Анықтама. Кез келген E жиын *сызықты нормаланған кеңістік* деп аталады, егер:

1) E сызықты кеңістік;

2) E метрикалық кеңістік;

3) $x \in E, \quad y \in E$ элементтерді z нүктеге ығыстырғанда x, y нүктелердің арақашықтығы өзгермесе, яғни $\rho(x+z, \quad y+z) = \rho(x, y)$, мұндағы $z \in E$;

4) $\rho(\lambda x, 0) = |\ \lambda\ |\rho(x, 0)$.

Осы анықтамадағы 3–шарттан мына теңдік орындалады:

$$\rho(x, y) = \rho(x - y, \quad y - y) = \rho(x - y, \quad 0)$$

Мына арақашықтық $\rho(x, 0)$ (x элементтен нөл элементке дейінгі арақашықтық) E кеңістіктегі x *элементтің нормасы* деп аталады және ол норма $\| x \|$ немесе $\|x\|_E$ таңбамен белгіленеді әрі нормаға мына шарттар орындалады:

а) $\|x\| > 0, \quad x \neq 0$; егер $x = 0$ болса, онда $\|x\| = \|0\| = 0$;

б) $\| \lambda x \| = |\ \lambda\ | \cdot \| x \|$;

в) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Жоғарыда қарастырылған $C[a,b]$ метрикалық кеңістіктің $x(t)$ элементінің нормасы: $\| x \|_{C[a,b]} = \| x \| = \max\limits_{t \in [a,b]} |\ x(t)\ |$, ал $C_P[a,b]$ кеңістіктегі $x(t)$ элементтің нормасы: $\| x \|^P_{C_P[a,b]} = \| x \|^P = \int\limits_a^b |\ x(t)\ |^P dt$ болады.

$[a,b]$ сегментте анықталған әрі P *дәрежелі өлшемді функциялар* жиыны $L_P[a,b] = L_P$ таңбамен белгіленеді және оның элементтерінің нормасы

$$\| x(t) \|^P_{L_P[a,b]} = \| x(t) \|^P = \int\limits_a^b |\ x(t)\ |^P dt < \infty$$

формуладан анықталады, мұндағы интеграл Лебег интегралы, P - оң сан. Егер $x(t) \in L_P, \quad y(t) \in L_p$ болса, онда $x(t) + y(t) \in L_P$, $\alpha x(t) \in L_P$, α - кез келген сан. Егер $p = 1$ болғандағы кеңістік $L_1[a,b] = L[a,b]$ таңбамен белгіленеді және

$$\| x(t) \|_{L_1[a,b]} = \int\limits_a^b |\ x(t)\ | dt < \infty$$

Егер $p = 2$ болса, онда $L_2[a,b]$ - *квадратымен қосындылы кеңістік* деп аталады және

$$\| x(t) \|^2_{L_2[a,b]} = \int_a^b | x(t) |^2 dt < \infty.$$

Фубини теоремасы. Егер $\varphi(x,y)$ функция $D = \{(x,y): \ a \le x \le b, \ c \le y \le d\}$ тікбұрышты облыста қосындылы функция болса, онда:

1) кез келген тағайындалған y үшін x аргументті $\varphi(x,y)$ функция қосындылы функция;

2) жоғарыдағы 1) шарт орындалғанда мына интеграл $\int_a^b \varphi(x,y)dx$ y-ке тәуелді функция барлық $y \in [c,d]$ үшін қосындылы функция;

3) мына теңдік орындалады:

$$J_y\{J_x\varphi(x,y)\} \equiv \int_c^d dy \int_a^b \varphi(x,y)dx = \iint_D \varphi(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d \varphi(x,y)dy \equiv$$
$$\equiv J_x\{J_y\varphi(x,y)\}.$$

Ескерту. Мына интегралдын бар болуынан $J_y\{J_x\varphi(x,y)\}$, $J_x\{J_y\varphi(x,y)\}$ өлшемді E жиынында олардың теңдігі мен $\varphi(x,y)$ функцияның қосындылы функция болуы шықпайды. Бірақта, егер өлшемді E жиында $\varphi(x,y)$ өлшемді әрі оң функция болса және екі еселі интегралдардың біреуі бар болса, онда екіншісіде бар болады және мына теңдік орындалады:

$$J_y\{J_x\varphi(x,y)\} = J_x\{J_y\varphi(x,y)\}.$$

Анықтама. Егер M кеңістікке тиісті кез келген шексіз A жиыншада фундаменталды тізбек бар болса. M метрикалық кеңістік *компактьді* деп аталады.

Мысалы, математикалық анализ курсындағы Больцано-Вейерштрасс теоремасы бойынша ([14,16] (a,b) интервалдағы кез келген A шексіз жиыншада шектік нүкте бар, олай болса A жиында фундаментальді тізбек бар, яғни $M = (a,b)$ интервалы компакты метрикалық кеңістік болады.

Алдағы тақырыпта бізге қажет болатын мына меншіксіз интегралды есептейік:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Ол үшін, $e^{-xy}\sin x$ функцияны $D=\{0\le x\le a,\quad 0\le y\le a\}$ облыста x және y айнымалар бойынша интегралдайық:

$$\int_0^a \sin x dx \int_0^a e^{-xy} dy = \int_0^a dy \int_0^a e^{-xy}\sin x dx \qquad (3.1)$$

Теңдіктің оң жағындағы ішкі интегралды екі рет бөліктеп интегралдайық, ал сол жағындағы ішкі интегралды есептейік, сонда

$$\int_0^a e^{-xy}\sin x dx = \frac{1-e^{-ay}(\cos a + y\sin a)}{1+y^2},$$

$$\int_0^a e^{-xy} dy = -\frac{1}{x}e^{-xy}\Big|_0^a = \frac{1-e^{-ax}}{x}.$$

Осыдан 3.1–теңдіктің оң жағындағы интеграл мына түрге:

$$\int_0^a \sin x dx \int_0^a e^{-xy} dy = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^a \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx,$$

ал оң жағындағы интеграл мына түрге түрленеді:

$$\int_0^a dy \int_0^a e^{-xy}\sin x dx = \int_0^a \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^a \frac{e^{-ay}(\cos a + y\sin a)}{1+y^2} dy.$$

Соңғы екі теңдіктің оң жақтарын теңестірейік:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^a \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx = \int_0^a \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^a \frac{e^{-ay}(\cos a + y\sin a)}{1+y^2} dy. \qquad (3.2)$$

Енді (3.2) теңдіктің сол жағындағы екінші интегралды бағалайық:

$$\left|\int_0^a \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx\right| \le \int_0^\infty \left| e^{-ax} \right| dx = \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}.$$

Осы сияқты, 3.2–теңдіктің оң жағындағы екінші интегралды бағаласақ, онда ол $\frac{2}{a}$ санынан кіші болады. Сондықтан $a \to +\infty$ -да шекке көшсек, онда :

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{dy}{1+y^2} = \lim_{a\to\infty} arctga = \frac{\pi}{2}.$$

Осыдан:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \qquad (3.3)$$

3.2. Тригонометриялық қатардың бірқалыпты жинақтылығы

Математикалық анализ курсының практикалық есептерінде $[-\pi,\ \pi]$ сегментте $\varphi(x)$ функцияны тригонометриялық Фурье қатарына жіктеуге тура келеді:

$$\varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{3.4}$$

мұндағы 3.4–теңдіктің оң жағындағы қатар *тригонометриялық қатар* деп аталады, ал a_0, a_n, b_n - *Фурье коэффициенттері* деп аталатын коэффициенттер мына формулалардан анықталады:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nxdx,\quad n=0,1,2,... \tag{3.5}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nxdx,\quad n=1,2,... \tag{3.6}$$

3.1-теорема. Егер периоды 2π-ге тең $\varphi(x)$ функция 3.4–теңдіктің оң жағындағы қатарға жіктелсе және ол қатар барлық сандар өсінде $\varphi(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты болса, онда бұл тригонометриялық қатар $\varphi(x)$ функцияның Фурье қатары болады.

Дәлелдеуі. Берілген $\varphi(x)$ функция үшін (3.4) теңдік орындалсын және 3.4–теңдіктің оң жағындағы тригонометриялық қатар бірқалыпты жинақты болсын. Онда:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{3.7}$$

функциялық қатардың қосындысы үзіліссіз функция болады және бұл қатарды мүшелеп интегралдауға болады. Енді 3.4–теңдіктің екі жағын $\cos nx$ – ке көбейтейік:

$$\varphi(x)\cos nx=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_n\cos kx\cdot\cos nx+b_n\cos kx\cdot\cos nx). \tag{3.8}$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы қатардың бірқалыпты жинақты болатынын дәлелдейік. Ол үшін осы қатардың дербес қосындысын қарастырайық:

$$S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Кез келген $\varepsilon > 0$ санын алайық. Тригонометриялық 3.7–қатар бірқалыпты жинақты болғандықтан, N саны табылады және $m \geq N$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық m сандар үшін

$$\left|S_m(x) - \varphi(x)\right| \leq \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады. Мұнда $S_m(x)$ қосынды (3.7) тригонометриялық қатардың дербес қосындысы болғандықтан, $S_m(x) \cdot \cos nx$ көбейтінді де 3.8–тригонометриялық қатардың дербес қосындысы болады. Онда:

$$\left|S_m(x)\cos nx - \varphi(x)\cos nx\right| = \left|S_m(x) - \varphi(x)\right| \cdot \left|\cos nx\right| \leq \varepsilon$$

теңсіздігі $m \geq N$ теңсіздікті қанағаттандырытын барлық m сандар үшін орындалады. Демек, 3.8–қатар бірқалыпты жинақты болады, онда 3.8–қатарды мүшелеп интегралдауға болады. Енді 3.8–қатарды мүшелеп интегралдап, 3.5–теңдікті аламыз. Осы сияқты, 3.8–теңдікті $\sin nx$ -ке көбейтіп, 3.6–теңдікті аламыз. Олай болса, 3.4–қатар Фурье қатары болады. Дәлелденді.

3.2-теорема. Егер периоды 2π -ге тең абсолютті интегралданатын $\varphi(x)$ функция 3.4–теңдіктің оң жағындағы қатарға жіктелсе және ол қатар периоды бірдей саны санаулы үзілісті нүктелерден өзге нүктелердің бәрінде $\varphi(x)$ функцияға жинақты болса, онда бұл қатар Фурье қатары болады.

3.3. Фурье қатарының комплекс түрі

Бізге периоды 2π -ге тең, $[-\pi,\ \pi]$ сегментте саны санаулы үзілісті нүктесі бар әрі осы сегментте абсолютті интегралданатын $\varphi(x)$ функция берілсін және тригонометриялық қатар Фурье қатары болсын, яғни 3.4–теңдік орындалсын. Қатардың жалпы мүшесін (2.9-тақырып) Эйлер формуласы бойынша түрлендірейік:

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} =$$

$$= a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} = \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} =$$

$$= c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx},$$

мұндағы $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$.

Енді $c_0 = \frac{a_0}{2}$ болсын, онда 3.7–қатардың дербес қосындысы мына түрге түрленеді:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = c_0 + \sum_{n=1}^{k}(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{inx}. \quad (3.9)$$

Осы 3.7–қатардың (3.5) және (3.6) коэффициенттерін жаңа c_n коэффициент арқылы түрлендірейік:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)[\cos nx - i\sin nx]dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)e^{-inx}dx, \quad n \geq 0.$$

Енді 3.4–теңдікті ескеріп, 3.9–теңдіктен $k \to +\infty$ – да шекке көшейік:

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=-k}^{k} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Сонымен, егер $\varphi(x)$ функция (3.7) тригонометриялық қатардың қосындысы болса, онда $\varphi(x)$ функцияның Фурье қатарының комплекс түрі мына түрде жазылады:

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad (3.10)$$

мұндағы

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)e^{-inx}dx, \qquad n = 0,\pm1,\pm2\ldots \quad (3.11)$$

Егер $\varphi(x)$ функцияның периоды $2l$ болса, онда Фурье қатарының комплекс түрі мына түрде жазылады:

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \quad (3.12)$$

мұндағы

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\varphi(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx, \qquad n = 0,\pm1,\pm2\ldots \quad (3.13)$$

Жоғарыдағы 3.10 және 3.11–формулалар *Фурье қатарының комплекс түрі* деп аталады.

3.4. Фурье қатарының жинақтылығы

Біз $[a,b]$ сегментте қосындылы $\varphi(x)$ функцияны қарастырайық.

3.3-теорема. Егер $\varphi(x)$ функция $[a,b]$ сегментте қосындылы функция болса, онда мына интегралдар:

$$\int_a^b \varphi(x)\sin\lambda x dx, \quad \int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x dx$$

$\lambda \to +\infty$ – да нөлге ұмтылады.

Дәлелдеуі. Берілген $\varphi(x)$ функция $(c,d) \subset [a,b]$ интервалда сипаттамалық функция болсын. Онда $\lambda \to 0-$ да

$$\int_a^b \varphi(x)\sin\lambda x dx = \int_c^d \sin\lambda x dx = -\frac{1}{\lambda}\cos\lambda x\Big|_c^d = \frac{\cos\lambda c - \cos\lambda d}{\lambda} \to 0\cdot$$

Кез келген сатылы $h(x)$ функция (c,d) интервалдағы сипаттамалы функциялардың сызықты комбинациясы болады. Сондықтан, сатылы функция үшін теорема дәлелденді.

Егер $\varphi(x)$ кез келген қосындылы функция болса, онда берілген $\varepsilon > 0$ саны үшін

$$\int_0^b |\varphi(x) - h(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

теңсіздігі орындалатын $h(x)$ сатылы функцияны таба аламыз және

$$\left|\int_0^b h(x)\sin\lambda x dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

теңсіздік орындалатындай $|\lambda| > \lambda_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын λ_0 оң санды табамыз. Онда жоғарыда анықталған λ мәндер үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\sin\lambda x dx\right| = \left|\int_a^b (\varphi(x) - h(x))dx + \int_a^b h(x)\sin\lambda x dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b |\varphi(x) - h(x)|dx + \left|\int_a^b h(x)\sin\lambda x dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\cdot$$

Теореманың екінші тұжырымы осы сияқты дәлелденеді. Дәлелденді.

Осы теоремадан мына салдарды аламыз.

Салдар. Кез келген интегралданатын $\varphi(x)$ функцияның Фурье қатарының коэффициенттері $n \to \infty -$ да нөлге ұмтылады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

3.4-теорема. Егер қосындылы $\varphi(x)$ үшін мына интеграл

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)|}{|h|} dh$$

жинақты болса, онда $\varphi(x)$ функцияның Фурье қатарының дербес қосындысы $x = x_0$ нүктеде $\varphi(x_0)$ мәнге жинақты болады.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін (3.10) Фурье қатарының $S_n(x)$ дербес қосындысын түрлендірейік:

$$S_n(x) = \sum_{-n}^{n} c_k e^{kx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-n}^{n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) e^{k(x-\xi)} d\xi .$$

Соңғы теңдікке $x - \xi = -t$ алмастыруын қолданайық және $\varphi(\xi)$ функцияны $[-\pi, \pi]$ сегменттен бастап периоды $2\pi -$ ге тең болатындай етіп, бүкіл сандар өсінде жалғастырайық. Онда t айнымалы бойынша алынған интегралдың жаңа $t_{ж} = \pi - x$, $t_T = -\pi - x$ интегралдау шектерін сәйкес $+\pi$ мен $-\pi$ ге алмастыруға болады, сонда:

$$S_n(x) = \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x + t) \sum_{-n}^{n} e^{ikx} dt . \qquad (3.14)$$

Интеграл астындағы қосындыны табайық (геометриялық прогрессия)

$$\sum_{-n}^{n} e^{ikt} = \frac{e^{int} - e^{-i(n+1)t}}{1 - e^{-it}} = \frac{\left(e^{int} - e^{-i(n+1)t}\right) e^{i\frac{t}{2}}}{\left(1 - e^{-it}\right) e^{t\frac{t}{2}}} =$$

$$= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{sin(n + \frac{1}{2})t}{sin\frac{t}{2}} .$$

Сонда 3.14–дербес қосынды мына түрге түрленеді:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt. \qquad (3.15)$$

Интеграл астындағы

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{sin(n+\frac{1}{2})t}{sin\frac{t}{2}}$$

функция *Дирихле ядросы* деп аталады. Егер $\varphi(x)=1$ болса, онда кез келген n үшін $S_n(x)=1$ болады. Енді $J_n = S_n(x)-\varphi(x)$ айырымды бағалайық:

$$J_n = S_n(x)-\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{sin(n+\frac{1}{2})t}{sin\frac{t}{2}}dt. \qquad (3.16)$$

Егер $n\to\infty-$ да $S_n(x)\to\varphi(x)$ болса, онда 3.16–айырым нөлге ұмтылады. Демек, теореманы дәлелдеу үшін соңғы тұжырымды дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін *Дини шарты* орындалсын және тағайындалған x үшін қосындылы $\varphi(x)$ функция анықталсын әрі шектеулі болсын, яғни

$$\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$$

функция $|t|\le\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық t бойынша яғни барлық $t\in[-\pi,\pi]$ үшін интегралдансын. Онда

$$\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{sin\frac{t}{2}} = \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}\cdot\frac{t}{sin\frac{t}{2}}$$

функцияда $t\in(-\pi,\pi)$ интервалда интегралданады және (3.16) интегралға 3.3- теореманы пайдалануға болады. Онда, 3.3- теорема бойынша, $n\to\infty-$да J_n интеграл нөлге ұмтылады. Дәлелденді.

3.5. Фурье қатарының бірқалыпты жинақтылығы

3.5-теорема. Егер қосындылы $\varphi(x)$ функция $E \subset [-\pi, \pi]$ жиында шектелсе және Дини шарты бірқалыпты орындалса, яғни кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $\delta > 0$ саны табылып,

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\varphi(x+t) - \varphi(x)|}{|t|} dt < \varepsilon$$

теңсіздік барлық $x \in E$ үшін орындалса, онда $\varphi(x)$ функцияның Фурье қатары E жиынында $\varphi(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты болады.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін дәлелдеусіз мына тұжырымды қабыл алайық: $L_1(a,b)$ кеңістігіндегі метрика бойынша компактілі болатын кез келген $f(t)$, $t \in [a,b]$ қосындылы функциялар B жиынында мына шек

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt$$

нөлге бірқалыпты жинақты болады.

Енді теореманы дәлелдейік. Алдын ала тағайындалған $\varepsilon > 0$ санына барлық $x \in E$ үшін

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\varphi(x+t) - \varphi(x)|}{|t|} dt < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.16}$$

теңсіздігі орындалатындай $\delta > 0$ санын тауып алуға болады. Онда Фурье қатарының $S_n(x)$ дербес қосындысы мен $\varphi(x)$ функцияның айырымын түрлендірейік, мұндағы

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \cdot \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} dt. \tag{3.17}$$

Сонда :

$$S_n(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x+t) - \varphi(x)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t} \cdot \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \cdot \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} + \int_{-\pi}^{-\delta} = J_1 + J_2 + J_3 \text{,}$$

мұндағы $J_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}$, $J_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}$, $J_3 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}$.

Енді осы айырымды бағалайық. Интеграл астындағы $\frac{t}{2\pi \sin\frac{t}{2}}$ функцияға $\frac{t}{2\pi \sin\frac{t}{2}} < 1$ теңсіздік орындалады. Онда, 3.16 –теңсіздіктен J_1 қосылғыш үшін мына теңсіздік орындалады, барлық $x \in E$ үшін:

$$\left|J_1\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Енді J_2, J_3 қосындыларды бағалау үшін, $t \in [\delta, \pi]$ айнымалыға тәуелді және $x \in E$ параметрлі мына функциялар

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\sin\frac{t}{2}}$$

$L_1(\delta, \pi)$ кеңістігінде компактілі B жиынды құрайтынын дәлелдейік. Ол үшін $x_n \in E$ кез келген тізбек болсын, мұнда $\{x_n\}$ тізбекті x_0 нүктеге жинақты болсын деп алуға да болады, онда $\varphi(x_n)$ функция мәндері a санға жинақталады. Онда $L_1(\delta, \pi)$ кеңістіктің метрикасынан $n \to \infty$ – да

$$\varphi(x_n + t) \to \varphi(x_0 + t).$$

Олай болса,

$$\left\|f_{x_n}(t) - f_{x_0}(t)\right\| = \frac{1}{2\pi}\left\|\frac{\varphi(x_n+t)-\varphi(x_n)}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{\varphi(x_0+t)-\varphi(x_0)}{\sin\frac{t}{2}}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\| \frac{\varphi(x_n + t) - \varphi(x_0 + t)}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{\varphi(x_n) - \varphi(x_0)}{\sin\frac{t}{2}} \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\left\| \frac{\varphi(x_n + t) - \varphi(x_0 + t)}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|} \right\| + \frac{1}{2\pi}\left\| \frac{\varphi(x_n) - a}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|} \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} \left[\left\|\varphi(x_n + t) - \varphi(x_0 + t)\right\| + \left\|\varphi(x_n) - a\right\| \right].$$

Онда, $n \to \infty$ – да

$$\left\| f_{x_n}(t) - f_{x_0}(t) \right\| \to 0,$$

яғни $\left\{ f_{x_n}(t) \right\}$ тізбек $L_1(\delta, \pi)$ кеңістігінде фундаментальді (іргелі) тізбек болады. Олай болса, *B* жиын компактілі жиын болады.

Енді дәлелдеусіз қабыл алған *тұжырым* бойынша, барлық $x \in E$ және $n > \lambda_0$ теңсіздігін қанағаттандыратын n үшін мына теңсіздік

$$\left|J_2\right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\varphi(x + t) - \varphi(x)}{\sin\frac{t}{2}} \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

орындалатындай λ_0 санын тауып алуға болады. Осы сияқты, 3.17–формуладағы j_3 қосынды үшін соңғы теңсіздікті дәлелдеуге болады.

Сонымен, жеткілігінше үлкен n үшін $\left|S_n(x) - \varphi(x)\right|$ шама $\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ – нан кіші болады, барлық $x \in E$ үшін. Дәлелденді.

3.6. Фурье түрлендіруі

Периоды 2π – ге тең $\varphi(x)$ функцияны гармоникалық тербеліс арқылы өрнектеу керек болса, біз Фурье қатарын пайдаланамыз:

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}. \qquad (3.18)$$

Егер периоды $2\pi l$ – ге тең функция үшін Фурье қатары мына түрде жазылады:

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{x}{l}} . \qquad (3.19)$$

Соңғы 3.19–теңдікті $e^{-in\frac{x}{l}}$ функцияға көбейтіп, $-\pi l$ – ден πl – ге дейін x бойынша интегралдайық. Сонда c_n Фурье коэффициенттері мына формуладан анықталады:

$$c_n = \frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l}\varphi(\xi)e^{-in\frac{\xi}{l}}d\xi . \qquad (3.20)$$

Енді (3.19) және (3.20) теңдіктерден мына теңдікті аламыз:

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l}\varphi(\xi)e^{\frac{in}{l}(x-\xi)}d\xi . \qquad (3.21)$$

Егер 3.21–интегралдан $l \to +\infty$ – да *шекке көшуге болатын болса*, онда:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{i\sigma(x-\xi)}d\xi\right\}d\sigma , \qquad (3.22)$$

мұндағы σ аргумент $\sigma_n = \frac{n}{l}$ дискретті аргументтен алынған үзіліссіз аргумент. Сонымен, егер 3.21–формуладан $l \to \infty$ – да шек бар болған жағдайда $\varphi(x)$ функция гармоникалық тербеліс арқылы мына формуладан анықталады:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma , \qquad (3.23)$$

мұндағы

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\sigma\xi}d\xi . \qquad (3.24)$$

3.24–формуладан анықталған $\psi(\sigma)$ функция $\varphi(x)$ функцияның *Фурье түрлендіруі* немесе *Фурье интегралы* деп аталады, ал 3.23–формула *кері Фурье түрлендіруі* деп аталады. Кері Фурье түрлендіруі Фурье түрлендіруінен айырмашылығы көрсеткіштік функцияның дәрежесіндегі таңбада және $\frac{1}{2\pi}$ коэффициентте. Кейбір жағдайларда *Фурье түрлендіруін* мына түрде жазады:

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\sigma\xi} d\xi, \tag{3.25}$$

онда кері Фурье түрлендіруі мына түрде анықталады:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \cdot \tag{3.26}$$

Фурье түрлендіруі мен оның кері түрлендіруі симметриялы болуы үшін көп жағдайда Фурье түрлендіруі мен оның кері Фурье түрлендіруін мына түрде анықтайды:

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\sigma\xi} d\xi, \tag{3.27}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \cdot \tag{3.28}$$

Фурье түрлендіруі қай түрде жазылсада олар сызықты түрлендіру, яғни Фурье түрлендіруі $\varphi_1(x)$ пен $\varphi_2(x)$ функциялардың қосындысын $\psi_1(\sigma)$ мен $\psi_2(\sigma)$ функциялар қосындысына ауыстырады және λ сан мен $\varphi(x)$ функцияның көбейтіндісін λ мен $\psi(\sigma)$ көбейтінділеріне ауыстырады.

Біз төменде (3.25) пен (3.26) түрлендіруді қарастыратын боламыз.

3.7. Фурье түрлендіруінің үзіліссіздігі

Жоғарыдағы 3.6-тақырыпта, $l \to +\infty$ – да 3.21–формуланың *шегі бар болсын* деп үйғардық. Осы шектің *бар болуын дәлелдеу* үшін, $\varphi(x)$ функция белгілі бір шарттарды қанағаттандырғанда 3.25–теңдіктен 3.26–теңдіктің орындалатынын дәлелдеуіміз керек.

Егер $\varphi(x)$ функция барлық $x \in (-\infty, \infty)$ үшін интегралданса, онда σ – ның барлық мәндері үшін

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-i\sigma\xi} d\xi, \quad \sigma \in (-\infty, \infty)$$

интегралы бар. Онда $\psi(\sigma)$ функция *шектелген* әрі барлық $\sigma \in (-\infty, \infty)$ үшін *үзіліссіз* және $|\sigma| \to \infty$ – да $\psi(\sigma)$ нөлге ұмтылады, яғни $\lim\limits_{|\sigma| \to \infty} \psi(\sigma) = 0$.

$\psi(\sigma)$ функцияның шектелгендігін мына теңсіздіктен аламыз:

$$|\psi(\sigma)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-i\sigma\xi} d\xi \right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi)| d\xi \cdot$$

Осы теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз: $L_1(-\infty,\infty)$ кеңістіктің метрикасы бойынша жинақты $\{\varphi_n(x)\}$ функциялық тізбекті Фурье түрлендіруі бірқалыпты жинақты $\{\psi_n(\sigma)\}$ функциялық тізбекке ауыстырады.

Енді $\psi(\sigma)$ функцияның *үзіліссіздігі* мен оның *нөлге ұмтылуын* (c,d) интервалдағы сипаттамалық функция үшін тексерейік. Онда:

$$\psi(\sigma) = \int_c^d e^{-i\sigma x} dx = -\frac{1}{i\sigma} e^{-i\sigma x}\Big|_c^d = \frac{1}{i\sigma e^{i\sigma c}} - \frac{1}{i\sigma e^{i\sigma d}} \cdot$$

Соңғы теңдіктен $\psi(\sigma)$ функцияның үзіліссіз функция болатынын және

$$\lim_{|\sigma|\to\infty} \psi(\sigma) = \lim_{|\sigma|\to\infty} \left(\frac{1}{i\sigma e^{i\sigma c}} - \frac{1}{i\sigma e^{i\sigma d}} \right) = 0$$

теңдік орындалатынын көреміз. Кез келген сатылы $h(x)$ функция интервалдардағы сипаттамалық функциялардың сызықты комбинациясы болады, олай болса, $\psi(\sigma)$ функцияның үзіліссіздігі мен нөлге ұмтылуы барлық сатылы функцияларға да орындалады. Сонымен, кез келген қосындылы $\varphi(x)$ функция, $L_1(-\infty,\infty)$ кеңістіктің метрикасы бойынша сатылы функциялардың шегі болады. Дәлелденген $\varphi(x)$ функцияның Фурье түрлендіруі σ өсіндегі бірқалыпты жинақты үзіліссіз функциялардың шегі болады. Онда $\psi(\sigma)$ функцияның өзі де σ өсінде үзіліссіз және $\lim\limits_{|\sigma|\to\infty} \psi(\sigma) = 0$ болады.

3.8. Фурье түрлендіруінің формуласы

Осы тақырыпта, Фурье түрлендіруінің 3.25–формуласынан 3.26–формуланы қорытып шығарайық. Ол үшін 3.26–формуланы шектеулі аралықта қарастырайық:

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} \psi(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \cdot$$

Осыдан және 3.25–формуладан:

$$\varphi_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-N}^{N}\psi(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-N}^{N}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\sigma\xi}d\xi\right\}e^{i\sigma x}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-N}^{N}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{i\sigma(x-\xi)}d\xi\right\}d\sigma\cdot \qquad (3.29)$$

Соңғы теңдіктегі ішкі интеграл, яғни

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{i\sigma(x-\xi)}d\xi$$

σ параметр бойынша бірқалыпты жинақты, сондықтан 3.29–формуладағы σ мен ξ бойынша интегралдау реттерін өзгертуге болады ([15]):

$$\varphi_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left\{\int\limits_{-N}^{N}e^{i\sigma(x-\xi)}d\sigma\right\}d\xi\cdot$$

Соңғы теңдіктегі ішкі интегралды есептейік:

$$\varphi_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left\{\frac{1}{i(x-\xi)}\int\limits_{-N}^{N}e^{i\sigma(x-\xi)}d\left[i\sigma(x-\xi)\right]\right\}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left\{\frac{1}{i(x-\xi)}e^{i\sigma(x-\xi)}\Big|_{-N}^{N}\right\}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{i(x-\xi)}\left(e^{iN(x-\xi)}-e^{-iN(x-\xi)}\right)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{2\left(e^{iN(x-\xi)}-e^{-iN(x-\xi)}\right)}{2i}\cdot\frac{1}{x-\xi}d\xi=$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{\sin N(x-\xi)}{x-\xi}d\xi\cdot$$

Соңғы интегралға $x-\xi=-t$ алмастыруын қолданайық, $d\xi=dt$:

Енді
$$\varphi_N(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t)\frac{\sin Nt}{t}dt\cdot \qquad (3.30)$$

$\varphi(x)$ функцияға Дини шарты орындалса, яғни $\delta>0$ саны үшін

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\varphi(x+t)-\varphi(x)|}{|t|}\,dt < \infty$$

болса, онда $N \to \infty$ – да $\varphi_N(x)$ функцияның шегі $\varphi(x)$ функцияға тең болатынын дәлелдейік. Ол үшін 3.3–теңдікті пайдаланайық, яғни

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} = 1 \cdot$$

Енді $\varphi_N(x) - \varphi(x)$ айырымды мына түрде жазайық:

$$\varphi_N(x) - \varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{\sin Nt}{t}\,dt \cdot$$

Осы интегралды екі интегралға бөлейік:

$$\varphi_N(x) - \varphi(x) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{|t|\le T} + \int_{|t|\ge T}\right) \cdot$$

Жақша ішіндегі екінші интегралды мына түрде жазуға болады:

$$\int_{|t|\ge T} \varphi(x+t)\frac{\sin Nt}{t}\,dt - \varphi(x)\int_{|t|\ge T}\frac{\sin Nt}{t}\,dt \cdot \qquad (3.31)$$

Жеткілікті үлкен T үшін 3.31–өрнек N – ге байланыссыз (тәуелсіз) аз шама болады, егер $N > 1$ болса. Ал бірінші қосылғышты мына түрде жазайық:

$$\int_{-T}^{T} \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t} \sin Nt\,dt \cdot$$

Мұндағы интеграл астындағы $\dfrac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$ көбейткіш көрсетілген аралықта Дини шарты бойынша қосындылы функция. Соңдықтан, 3.4-теоремадағы тұжырым бойынша, бұл интеграл N өскенде нөлге ұмтылады. Демек, мына шек орындалады:

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(x) = \varphi(x) \cdot$$

Сонымен, *егер* $\varphi(x)$ *функция қосындылы және Дини шартын қанағаттандырса, онда оны өзінің* $\psi(\sigma)$ *Фурье түрлендіруі арқылы 3.26–формуламен тұрғызуға болады.*

Ескерту. 3.26–интеграл абсолютті жинақты болмауы мүмкін және мына формула арқылы анықталмайды:

$$\lim_{N_1,N_2\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{N_1}^{N_2}\psi(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma,$$

мұндағы N_1 мен N_2 бір-біріне тәуелсіз шексіздікке ұмтылады.

Мысал. $\varphi(x)=e^{-ax^2}$, $a>0$ функцияның Фурье түрлендіруін табайық.

Шешімі. Мына функция

$$\psi(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\cdot e^{-i\sigma x}dx$$

нақты өстегі $e^{-az^2}\cdot e^{-i\sigma z}$ аналитикалық функцияның интегралы, мұндағы $z=x+iy$ және

$$\left|e^{-a(x+iy)^2-i\sigma(x+iy)}\right|=\left|e^{-a(x^2+2ixy-y^2)-i\sigma x+\sigma y}\right|=$$

$$\left|e^{-ax^2+ay^2+\sigma y+i(-2axy-\sigma x)}\right|=e^{-ax^2+ay^2+\sigma y}.$$

Онда кез келген горизонталь $|y|\le y_0$ жолақта интеграл астындағы функция $x\to\pm\infty-$да y бойынша бірқалыпты нөлге ұмтылады. Сондықтан, Коши теоремасын пайдаланып интегралдағанда z комплекс жазықтықтағы кез келген параллель түзуге ауысуға болады:

$$\psi(\sigma)=\int_{\infty}^{-\infty}e^{-a(x+iy)^2}\cdot e^{-i\sigma(x+iy)}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2+ay^2+\sigma y-2aixy-i\sigma x}dx=$$

$$=e^{ay^2+\sigma y}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2-ix(2ay+\sigma)}dx.$$

Енді $y=-\dfrac{\sigma}{2a}$ болсын, онда $ay^2+\sigma y=-\dfrac{\sigma^2}{4a}$. Сонымен,

$$\psi(\sigma)=e^{-\frac{\sigma^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=-e^{-\frac{\sigma^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\quad \psi(\sigma)=-e^{-\frac{\sigma^2}{4a}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Егер $\varphi(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ болса $\left(a=\dfrac{1}{2}\right)$, онда

$$\psi(\sigma) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}.$$

3.9. Дифференциалдау амалы

Фурье операторы F таңбамен белгіленеді, яғни

$$F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx$$

және F -сызықты оператор әрі оның кері операторы бар:

$$F^{-1}[\psi(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \cdot$$

Абсолютті интегралданатын $\varphi(x)$ функция абсолютті үзіліссіз болсын және оның туындысы барлық $x \in (-\infty, \infty)$ үшін интегралдансын. Берілген $\varphi(x)$ функцияның *Фурье түрлендіруі* мен *оның туындысы арасындағы байланысты* қарастырайық. Қарастырып отырған $\varphi(x)$ функцияның $\varphi'(x)$ туындысы интегралданатын функция болғандықтан

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(\xi) d\xi$$

функцияның $x \to \infty$ – да шегі бар және бұл шек нөлге тең, егер нөлге тең болмаса, онда ол интегралданатын функция болмаған болар еді (осы сияқты $x \to -\infty$). $F[\varphi']$ операторды бөліктеп интегралдайық:

$$F[\varphi'] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) e^{-i\sigma x} dx = \left| \begin{array}{ll} U = e^{-i\sigma x}, & dU = -i\sigma e^{-i\sigma x} dx \\ dV = \varphi'(x) dx, & V = \varphi(x) \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\substack{A \to +\infty \\ B \to -\infty}} \varphi(x) e^{-i\sigma x} \Big|_B^A + i\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx = i\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx,$$

мұндағы

$$\lim_{\substack{A \to +\infty \\ B \to -\infty}} \varphi(x) \left(e^{-i\sigma A} - e^{-i\sigma B} \right) = 0 \cdot$$

Сонда:

$$F[\varphi'] = i\sigma F[\varphi].$$

Сонымен, $\varphi(x)$ функцияны дифференциалдау үшін $F[\varphi] = \psi(\sigma)$ функцияны $i\sigma$ көбейткішке көбейтсек жеткілікті. Егер

$\varphi(x)$ фукцияның m ретті туындылары интегралданса, онда жоғарыдағы процесті жалғастырып, мына теңдікті аламыз:

$$F\left[\varphi^{(k)}(x)\right] = (i\sigma)^k F[\varphi], \qquad k = 0,1,2,\ldots,m.$$

3.10. Фурье түрлендіруі және үйірткі

Бізге абсолютті интегралданатын $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ функциялардың сәйкес $\psi_1(\sigma)$, $\psi_2(\sigma)$ Фурье түрлендірулері берілсін. Енді $\psi_1(\sigma)\cdot\psi_2(\sigma)$ *көбейтінді қандай функцияның Фурье түрлендіруі болатынын тексерейік.* Сонда :

$$\psi_1(\sigma)\cdot\psi_2(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)e^{-i\sigma\xi}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(\eta)e^{-i\sigma\eta}d\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\varphi_2(\eta)e^{-i\sigma(\xi+\eta)}d\xi d\eta,$$

мұндағы екі еселі интеграл, Фубини теоремасына жасалған ескерту бойынша, ол абсолютті жинақты. Осы интегралға $\eta = x-\xi$ алмастыруын қолданайық, $d\eta = dx$:

$$\psi_1(\sigma)\cdot\psi_2(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(x-\xi)e^{-i\sigma x}dx\right\}d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\sigma x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\varphi_2(x-\xi)d\xi\right\}d\eta. \qquad (3.32)$$

Мына функция

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\varphi_2(x-\xi)d\xi \qquad (3.33)$$

Фубини теоремасындағы ескерту бойынша, әрбір x үшін бар әрі x бойынша абсолютті интегралданады және ол $\varphi_1(x)$ пен $\varphi_2(x)$ функциялардың *үйірткісі* деп аталады. 3.32*–формуладағы* $\psi_1(\sigma)$ *мен* $\psi_2(\sigma)$ *функциялардың көбейтіндісі* $\varphi_1(x)$ *пен* $\varphi_2(x)$ *функциялар үйірткісінің Фурье түрлендіруі болады.* Берілген $\varphi_1(x)$ пен $\varphi_2(x)$ функциялардың үйірткісі $\varphi_1 * \varphi_2$ таңбамен белгіленеді, яғни

$$\varphi_1 * \varphi_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\varphi_2(x-\xi)d\xi.$$

Анықтамадан, үйірткі үшін коммутативтік және ассоциативтік заңдар орындалады:

$$\varphi_1 * \varphi_2 = \varphi_2 * \varphi_1,$$
$$\varphi_1 * (\varphi_2 * \varphi_3) = (\varphi_1 * \varphi_2) * \varphi_3,$$
$$(\varphi_1 + \varphi_2) * \varphi_3 = \varphi_1 * \varphi_3 + \varphi_2 * \varphi_3.$$

3.11. Жылу өткізгіштіктің теңдеуін Фурье түрлендіруімен шешу

Бізге жылу өткізгіштіктің теңдеуі $(x \in (-\infty, \infty), t \geq 0)$:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.34}$$

әрі бастапқы шарт

$$U(x,t)\big|_{t=0} = U_0(x) \tag{3.34}$$

берілсін және мына шарттар орындалсын:

а) $U(x,t)$, $U'_x(x,t)$, $U''_{xx}(x,t)$ функциялары кез келген тағайындалған $t \geq 0$ үшін $x \in (-\infty, \infty)$ бойынша интегралдансын және $t \geq 0$;

ә) $U'_t(x,t)$ функцияға кез келген $0 \leq t \leq T$ аралықта мына теңсіздіктер орандалсын:

$$\left|U'_t(x,t)\right| \leq \Phi(x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)dx < \infty.$$

Енді 3.34–теңдеуді шешейік. Ол үшін 3.34–теңдіктің бірінші теңдеуінің екі жағын да $e^{-i\sigma x}$ функцияға көбейтейік және оны x бойынша 0- ден $\infty -$ке дейін интегралдайық және ә) шартты пайдаланайық:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U'_t(x,t)e^{-i\sigma x}dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} U(x,t)e^{-i\sigma x}dx = V'_t(\sigma,t),$$

мұндағы

$$V(\sigma,t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x,t)e^{-i\sigma x}dx$$

іздестіріп отырған $U(x,t)$ шешімнің Фурье түрлендіруі.

Жоғарыдағы а) шарттан және 3.10-тақырыптан:

$$F\left[U''_{xx}(x,t)\right] = -\sigma^2 F[U] = -\sigma^2 V(\sigma,t).$$

Сонымен біз $V(\sigma,t)$ функцияға тәуелді жай дифференциал теңдеу аламыз және ол айнымалылары ажыратылатын дифференциал теңдеу:

$$V_t(\sigma,t) = -\sigma^2 V(\sigma,t).$$

Бұл теңдеудің $t=0$ болғандағы дербес шешімін табу керек (бастапқы шарт), яғни

$$V(\sigma,t)\big|_{t=0} = V_0(\sigma) = F\left[U_0(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x)e^{-i\sigma x}dx.$$

Жай дифференциал теңдеуді шешейік:

$$\frac{dV}{V} = -\sigma^2 dt, \quad lnV = -\sigma^2 t + ln\,c, \quad lnV - ln\,c = -\sigma^2 t,$$

$$ln\frac{V}{c} = -\sigma^2 t, \quad \frac{V}{c} = e^{-\sigma^2 t}, \quad V = c\cdot e^{-\sigma^2 t},$$

мұндағы $c - const$. Егер $t=0$ болса, онда $V(\sigma,0) = c$, $c = V_0(\sigma)$. Онда жай дифференциал теңдеудің дербес шешімі: $V(\sigma,t) = e^{-\sigma^2 t}\cdot V_0(\sigma)$.

Егер 3.8-тақырыптағы мысалда $a = \frac{1}{4t}$ болса, онда

$$e^{-\sigma^2 t} = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right].$$

Енді 3.10- тақырыптағы үйірткі бойынша:

$$V(\sigma,t) = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]\cdot F\left[U_0\right] = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} * U_0(x)\right].$$

Мұндағы $V(\sigma,t) = F\left[U(x,t)\right]$ болғандықтан:

$$U(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} * U_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\cdot U_0(x-\xi)d\xi.$$

Соңғы формула *Пуассон формуласы (интегралы)* деп аталады.

IV ТАРАУ

ЛАПЛАС ТҮРЛЕНДІРУІ

4.1. Лаплас түрлендіруінің анықтамасы

Бізге нақты t аргументті $f(t)$ комплекс функция берілсін, әрі ол барлық $t \in (-\infty;+\infty)$ үшін анықталсын және $p = s + i\sigma$ комплекс саны p комплекс жазықтығының D облысында берілсін.

Анықтама. $f(t)$ функция *түпнұсқа* деп аталады, егер төмендегі үш шарт орындалатын болса:

а) $f(t)$ функцияның өзі және оның $f'(t)$ туындысы t өсінің кез келген шектеулі интервалында саны санаулы бірінші түрдегі үзілісті нүктелері бар болса, мұндағы $t \geq 0$;

ә) $f(t) = 0$, егер $t < 0$;

б) $t \to \infty$-да $f(t)$ функцияның шектелген, өсу дәрежесі бар болса, яғни $M > 0$ саны және $s > 0$ табылып, барлық $t \geq 0$ үшін мына теңсіздік орындалса:

$$|f(t)| \leq Me^{st}. \tag{4.1}$$

Анықтамадағы а) шарт, $f(t)$ түпнұсқаның t уақыт бойынша бөлікті-тегіс функция болатынын білдіреді, яғни t өсінің кез келген шектеулі интервалын саны санаулы интервалға бөлуге болатынын және әрбір бөлікте $f(t), f'(t)$ функциялар үзіліссіз, ал оның шеткі нүктелерінде олардың сол жақты мен оң жақты шектерінің болатынын білдіреді. Ал ә) шарт, физика мен механика салаларында белгілі бір t уақыт аралығында $f(t)$ функцияның қалай өзгеретіні мүлдем қажет емес. Енді б) шарт, $t \to +\infty$-да $f(t)$ функцияның өсу дәрежесіне шектеу қойылған, яғни $t \to +\infty$-да $f(t)$ функция көрсеткіштік функциядан жылдам өспеуі керек. Осы шарттағы, $s > 0$ сандардың ең жоғарғы шекарасына (4.1) теңсіздік орындалатын s_0 сан $f(t)$ *функцияның өсу көрсеткіші* деп аталады.

Практиканың көп жағдайында, $f(t)$ түпнұсқа $t = 0$ нүктеде бірінші түрдегі үзілісті нүкте болады. Сондықтан, алдағы тақырыптарда $f(0)$ мәнді $f(t)$ функцияның $t = 0$ нүктедегі оң жақты шегі деп түсінетін боламыз, яғни

$$\lim_{\substack{t\to+0\\ t>0}} f(t)=f(0).$$

Осы сияқты егер $t=0$ нүкте $f^{(n)}(t)$ туындының бірінші түрдегі үзілісті нүтесі болса, онда

$$\lim_{\substack{t\to+0\\ t>0}} f^{(n)}(t)=f^{(n)}(0),\ n=1,2,\dots\ .$$

Жоғарыдағы (4.1)–теңсіздікті төмендегі функциялар қанағаттандырады:

1) *барлық шектелген функциялар,* бұл функциялар үшін $s_0=0$ болады, сондықтан $|f(t)|\le M$ теңсіздігі орындалады;

2) *барлық дәрежелі функциялар:* $f(t)=t^z$, мұндағы $Re\,z=\alpha>0$. Бұл функциялар үшін де $s_0=0$ болады. Себебі кез келген, дәрежелі функция көрсеткіштік $e^{\varepsilon t}$ функциядан баяу өседі, мұндағы $\varepsilon>0$. Шынында да,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|t^z|}{e^{\varepsilon t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^{\alpha}}{e^{\varepsilon t}}=0$$

болғандықтан, $\dfrac{|t^z|}{e^{\varepsilon t}}$ функцияның $t\in[0,+\infty)$ интервалда шектелгендігін көреміз, яғни барлық $t\ge 0$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\frac{|t^z|}{e^{\varepsilon t}}<A,\quad |t^z|\le Ae^{\varepsilon t},$$

мұндағы A кез келген оң сан, ε -жеткілігінше аз оң сан, сондықтан t^z функцияның дәрежесі нөлге тең.

Жоғарыдағы (4.1)–теңсіздік орындалмайтын функцияға $f(t)=e^{t^2}$ функция мысал бола алады.

Алдағы тақырыптарда, t нақты аргуметті комплекс айнымалы $f(t)=f_1(t)+if_2(t)$ функцияны да қарастыратын боламыз. Бұл жағдайда комплекс айнымалы $f(t)$ функция түпнұсқа болады, егер оның нақты $f_1(t)$ мен жорамал $f_2(t)$ функциялары да түпнұсқа болса.

Әрбір $f(t)$ түпнұсқаға (нақты немесе комплекс) комплекс $p = s + i\sigma$ айнымалы $F(p)$ функцияны сәйкес қояйық және бұл функция меншіксіз мына интеграл арқылы анықталсын:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \,. \qquad (4.2)$$

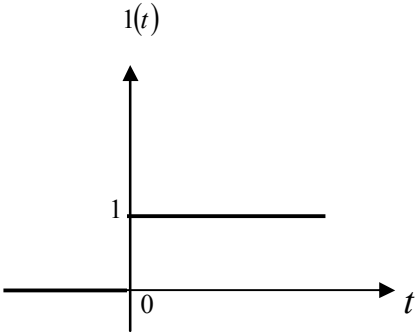
Теңдіктің оң жағындағы интеграл, $f(t)$ *функцияның Лаплас интегралы* деп аталады, ал p комплекс айнымалыға тәуелді $F(p)$ комплекс *функцияны Лаплас кескіні* немесе $f(t)$ *түпнұсқаның кескіні* деп атаймыз.

Сонымен, Лаплас интегралы, p комплекс параметрлі меншіксіз интеграл және ол барлық $f(t)$ функция әрі барлық p параметр үшін жинақты болмайды. Мысалы, егер $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = c \neq 0$ және $Re\, p < 0$ болса, онда (4.2) меншіксіз интеграл жинақсыз болады. Сондықтан алдымен (4.2) меншіксіз интегралдары жинақты болатын $f(t)$ функциялар класын және p параметр мәндерінің облысын құру керек.

Егер $F(p)$ функция $f(t)$ түпнұсқаның кескіні болса, онда бұл ақиқат былай белгіленеді:

$$f(t) \dot{\leftarrow} F(p) \text{ немесе } F(p) \dot{\rightarrow} f(t)\, 1(t).$$

Мысал. Кескіннің анықтамасын пайдаланып, *Хевисайда функциясы деп аталатын* $1(t)$ түпнұсқаның кескінін табайық (1-сурет):



1-сурет

$$1(t)=\begin{cases}0,\ t<0,\\ 1,\ t\geq 0.\end{cases}$$

Шешімі. Егер $Re\,p=s>0$ болса, онда:

$$f(t)=1(t)\leftarrow\!\cdot\!\cdot\int_0^{\infty}1(t)e^{-pt}dt=\int_0^{\infty}e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\lim_{A\to\infty}\int_0^{A}e^{-pt}d(-pt)=$$

$$=-\frac{1}{p}\lim_{A\to\infty}e^{-pt}\Big|_0^{A}=-\frac{1}{p}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-pA}-1\right)=-\frac{1}{p}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{e^{pA}}-1\right)=\frac{1}{p}.$$

Сонымен, Хевисайда функциясының кескіні $\frac{1}{p}$-ге тең, яғни

$$f(t)=1(t)\leftarrow\!\cdot\!\cdot F(p)=\frac{1}{p}\quad\text{немесе}\quad 1(t)\leftarrow\!\cdot\!\cdot\frac{1}{p},\ Re\,p>0.$$

4.2. Түпнұсқаның қасиеттері

1-қасиет. Егер $f(t)$ түпнұсқа болса, онда $|f(t)|$ функция түпнұсқа болады және $|f(t)|$ түпнұсқаның өсу көрсеткіші $f(t)$ түпнұсқаның өсу көрсеткішіне тең.

2-қасиет. Егер $f_1(t),f_2(t),\ldots,f_n(t)$ функциялар сәйкес $s_0^1,\ s_0^2,\ldots,\ s_0^n$ өсу көрсеткіші түпнұсқа болса, онда функцияда

$$f(t)=c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+\ldots+c_nf_n(t).$$

$\bar{s}$ өсу көрсеткішті түпнұсқа болады, мұндағы $c_1,c_2,\ldots,c_n$-нақты немесе комплекс тұрақты сандар, ал $\bar{s}=max\left\{s_0^{(1)},s_0^{(2)},\ldots,s_0^{(n)}\right\}$.

3-қасиет. Егер $f(t)$ функция s_0 өсу көрсеткіші түпнұсқа болса, онда мына функцияларда түпнұсқа болады:

1) $f_1(t)=f(\alpha t),\ \alpha>0$, ал бұл функцияның өсу көрсеткіші αs_0-ге тең;

2) $f_2(t)=e^{\lambda t}f(t),\ \lambda$-нақты немесе комплекс сан, өсу көрсеткіші: $s_0+Re\,\lambda$-ға тең, егер $s_0+Re\,\lambda>0$ болса; нөлге тең, егер $s_0+Re\,\lambda<0$;

1) $f_3(t)=\begin{cases} 0, & t<\tau>0, \\ f(t-\tau), & t\geq\tau, \end{cases}$ өсу көрсеткіші s_0 -ге тең;

2) $f_4(t)=t^z f(t)$, өсу көрсеткіші s_0 -ге тең, z -нақты немесе комплекс сан.

Дәлелдеуі. Қасиетті $f_4(t)=t^z f(t)$ функция үшін дәлелдейік. Берілген $f(t)$ түпнұсқа болғандықтан, кез келген s_1 нақты сан үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\left|\frac{t^z f(t)}{e^{s_1 t}}\right| = \left|t^z f(t) e^{-s_1 t} e^{s_0 t} e^{-s_0 t}\right| = \left|t^z f(t) e^{-(s_1-s_0)t} e^{-s_0 t}\right| \leq$$

$$\leq t^{Re z} e^{-(s_1-s_2)t} M \cdot e^{s_0 t} e^{-s_0 t} = M \cdot t^{Re z} e^{-(s_1-s_2)t}.$$

Осыдан:

$$\left|\frac{t^z f(t)}{e^{s_1 t}}\right| \leq M \frac{t^{\mathrm{Re}\, z}}{e^{(s_1-s_2)t}}.$$

Осы теңсіздіктің оң жағындағы өрнек, $s_1 > s_0$ болғанда

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{rez}}{e^{(s_1-s_0)t}} = 0$$

болады, онда :

$$\lim_{t\to\infty} \left|\frac{t^z f(t)}{e^{s_1 t}}\right| = 0 \cdot$$

Соңғы теңдік, $\left|\frac{t^z f(t)}{e^{s_1 t}}\right|$ функцияның $s_1 > s_0$ болғанда барлық $t \in [0,\infty)$ үшін шектелген функция болатынын білдіреді, яғни

$$\left|\frac{t^z f(t)}{e^{s_1 t}}\right| \leq M_0,$$

мұндағы M_0 нақты оң сан. Соңғы теңсіздіктен, барлық $t \in [0,\infty)$ үшін

$$|f_4(t)| = \left|t^z f(t)\right| \leq M_0 e^{s_1 t}, s_1 > s_0$$

теңсіздігі орындалатынын көреміз, мұндағы s_1 кез келген оң сан және $s_1 > s_0$ болғандықтан $f_4(t) = t^z f(t)$ функцияның өсу көрсеткіші s_0-ге тең.

Түпнұсқаға қойылатын а) мен ә) шарттарының орындалытынын оңай дәледеуге болады. Олай болса, $t^z f(t)$ функцияда түпнұсқа болады. Дәлелденді.

4-қасиет. Егер $f(t)$ функция s_0 өсу көрсеткішті түпнұсқа болса, онда $\varphi(t) = \int_0^t f(u)du$ функцияда барлық $t \in [0,\infty)$ үшін s_0 өсу көрсеткішті түпнұсқа болады.

Дәлелдеуі. Түпнұсқаның анықтамасы бойынша, t өсінің бойындағы кез келген шектеулі интегралында барлық $t \in [0,\infty)$ үшін $f(t)$ функцияның саны санаулы бірінші түрдегі үзілісті нүктелері бар, олай болса, барлық $t > 0$ үшін

$$\int_0^t f(u)du$$

интегралы бар.

Жоғарыдағы 1-қасиет бойынша, $|f(t)|$ функцияда түпнұсқа болады, онда $\int_0^t |f(t)|dt$ интегралыда бар, яғни $f(t)$ түпнұсқа $[0,T]$ сегменттердің әр қайсысында абсолютті интегралданады, мұндағы $T > 0$. Олай болса, $\int_0^t |f(u)|dt$ функция барлық t үшін үзілісіз болады ([14, 16]), демек кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ саны табылып, $|\Delta t| < \delta$ теңсіздік үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\left| \int_0^{t+\Delta t} |f(u)|du - \int_0^t |f(u)|du \right| = \left| \int_0^{t+\Delta t} |f(u)|du + \int_t^0 |f(u)|du \right| = \left| \int_t^{t+\Delta t} |f(u)|du \right| < \varepsilon.$$

Онда $|\Delta t| < \delta$ болғанда:

$$\left| \int_0^{t+\Delta t} f(u)du - \int_0^t f(u)du \right| = \left| \int_t^{t+\Delta t} f(u)du \right| \le \left| \int_t^{t+\Delta t} |f(u)|du \right| < \varepsilon.$$

Сонымен, барлық $t \ge 0$ үшін $\varphi(t) = \int_0^t f(u)du$ үзіліссіз функция болады.

Енді $\varphi(t)$ функцияның өсу көрсеткіші шектелген болатынын көрсетейік.

Ол үшін $f(t) \geq 0$ болсын, яғни $f(t)$ функция теріс емес нақты мәндерді қабылдасын және $s \geq s_1 \geq s_0$ болсын. Онда

$$\varphi(t)e^{-st} = e^{-st}\int_0^t f(u)du = e^{-(s-s_1)t}\int_0^t f(u)e^{-s_1 t}du < e^{-(s_1-s_0)t}\int_0^t f(u)e^{-s_1 t}du. \quad (4.3)$$

Ұйғаруымыз бойынша $f(t) \geq 0$ және s_0 оның өсу көрсеткіші болғандықтан мына теңсіздік орындалады:

$$f(u) \leq M \cdot e^{s_0 u},\ M > 0.$$

Осы теңіздіктің екі жағын $e^{-s_1 t}$ функцияға көбейтейік:

$$f(u)e^{-s_1 u} \leq M \cdot e^{-(s_1-s_0)u},\ s_1 > s_0. \quad (4.4)$$

Соңғы теңсіздіктің екі жағынан u бойынша 0-ден ∞-ке дейін интегралдайық:

$$\int_0^\infty f(u)e^{-s_1 u}du \leq M\int_0^\infty e^{-(s_1-s_0)u}du.$$

Теңсіздіктің сол жағындағы интегралды есептейік:

$$M\int_0^\infty e^{-(s_1-s_0)u}du = -\frac{M}{s_1-s_0}\int_0^\infty e^{-(s_1-s_0)u}d\left(-(s_1-s_0)\right) = \frac{M}{s_1-s_0}.$$

Онда (4.4)- теңсіздіктен

$$\int_0^\infty f(u)e^{-s_1 u}du$$

меншіксіз интегралдың жинақты болатынын көреміз $s_1 > s_0$. Енді

$$\int_0^\infty f(u)e^{-s_1 u}du = M_1$$

болсын, мұндағы $M_1 > 0$. Онда 4.3–теңсіздіктен

$$\varphi(t) < M \cdot e^{s_1 t},$$

яғни $\varphi(t)$ функцияның өсу көрсеткіші шектелген.

Енді $f(t)$ комплекс мәнді функция болсын. Мына теңсіздік орындалады:

$$|\varphi(t)| \leq \int_0^t |f(u)|du$$

Бұл теңсіздіктің оң жағындағы функцияның өсу көрсеткіші шектелгендігін біз жоғарыда дәлелдедік, онда $\varphi(t)$ функцияның да өсу көрсеткіші шектелген болады:

$$|\varphi(t)| \le M_1 e^{s_1 t}, \quad M_1 > 0,$$

мұндағы s_1 кез келген s_0 санынан үлкен сан, сондықтан функцияның өсу көрсеткіші $f(t)$ функцияның өсу көрсеткішіне тең. Дәлелденді.

4.3. Лаплас түрлендіруінің негізгі қасиеттері

Берілген $f(t)$ түпнұсқа мен D облысындағы $p = s + i\sigma$ комплекс саны үшін (4.2) Лаплас интегралы бар болсын. Онда Лаплас интегралы, D облысында p комплекс айнымалы $F(p)$ функцияны анықтайды:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \cdot \tag{4.5}$$

Анықтама. (4.5)–формуладағы $F(p)$ функция $f(t)$ *функцияның кескіні* немесе *Лаплас бойынша кескіні* деп аталады. Берілген $f(t)$ түпнұсқаға қатысты оның $F(p)$ кескінін *Лаплас түрлендіруі* дейміз және ол $f(t) \xleftarrow{\cdot} F(p)$ немесе $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$ таңбамен белгіленеді.

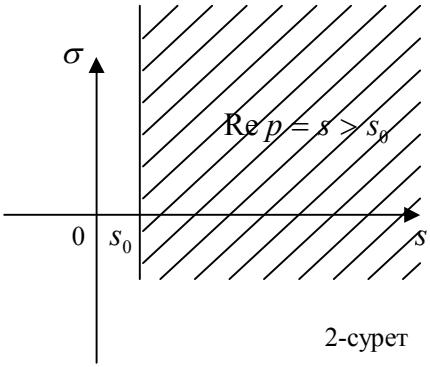
Практикада Лаплас түрлендіруінен өзге *Хевисайд* немесе *Карсон түрлендіруі* деп аталатын түрлендіру жиі қолданылады:

$$F_k(p) = p\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \quad F_k(p) = pF(p).$$

Осыдан Лаплас пен Карсон түрлендіруіндегі айырмашылық p көбейткіште.

Енді Лаплас түрлендіруінің қасиеттерімен танысайық. Бізге $f(t)$ түпнұсқа берілсін, s_0 оның өсу көрсеткіші болсын.

1-қасиет. $f(t)$ түпнұсқаның (4.2) Лаплас интегралы, $Re\, p = s > s_0$ жарты жазықтықта абсолютті жинақты болады, ал $Re\, p = s > s_1 > s_0$ жарты жазықтықта Лаплас интегралы абсолютті және бірқалыпты жинақты болады.



2-сурет

Дәлелдеуі. $p = s + i\sigma$ және $Re\, p = s > s_0$ болсын (2-сурет). (4.2) Лаплас түрлендіруін бағалайық, ол үшін 4.1–теңсіздікті пайдаланайық:

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right| \le \int_0^\infty |f(t)|\cdot\left|e^{-(s+i\sigma)t}\right|dt \le M\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}dt = \frac{M}{s-s_0}.$$

Соңғы теңсіздікке, меншіксіз интегралдағы салыстыру белгіні ([14,16]) пайдаланып, Лаплас интегралының $Re\, p = s > s_0$ жарты жазықтықта абсолютті жинақты болатынын көреміз. Егер $Re\, p = s \ge s_1 > s_0$ болса, онда барлық $t \in [0,\infty)$ үшін

$$\left|f(t)e^{-pt}\right| \le M\cdot e^{-(s_1-s_0)t}$$

теңсіздігі орындалады және мына теңдік орындалатын болғандықтан:

$$\int_0^\infty M\cdot e^{-(s_1-s_0)t}dt = \frac{M}{s_1-s_0},$$

онда меншіксіз интегралдың салыстыру белгісінен ([14.16]) Лаплас интегралының p параметр бойынша, $Re\, p = s \ge s_1 > s_0$ жарты жазықтықта бірқалыпты жинақты болатынын аламыз. Дәлелденді.

2-қасиет. $F(p)$ функция $Re\, p > s_0$ жарты жазықтықта аналитикалық функция болады, мұндағы s_0 сан $f(t)$ түпнұсқаның өсу көрсеткіші.

3-қасиет. Егер комплекс жазықтығы p нүкте шексіздікке ұмтылғанда $Re\, p = s$ шексіз өссе, онда:

$$\lim_{Re\, p \to \infty} F(p) = 0 \cdot$$

Осы қасиеттерден, егер $F(p)$ кескін шексіз қашық нүктеде аналитикалық болса, онда ол осы нүктеде нөл болады.

Ескерту. $f(t)$ функция барлық $t \in (-\infty, \infty)$ үшін анықталсын және түпнұсқаның а), в) шарттарын қанағаттандырсын, ал $f(t) \neq 0,\ t < 0$ болсын. Енді $f(t) \cdot 1(t)$ функцияны қарастырайық:

$$f(t) \cdot 1(t) = \begin{cases} f(t),\ t < 0, \\ 0,\ t > 0. \end{cases}$$

Онда $f(t) \cdot 1(t)$ түпнұсқа болады. Алдағы тақырыптарда $f(t)$ функцияның Лаплас түрлендіруін табарда $f(t) \cdot 1(t)$ функция берілді деп ұйғарамыз, ал жазғанда $f(t) \cdot 1(t)$ жазудың орнына $f(t)$-ны жазамыз. Мысалы t^n, e^{at}, $\cos \omega t$ т.б. функциялар берілгенде $t^n \cdot 1(t),\ e^{at} \cdot 1(t),\ \cos \omega t \cdot 1(t)$ функциялары берілді деп жобалаймыз.

1-мысал. $f(t) = c$ функцияның кескінін табайық, мұндағы c - нақты немесе комплекс сан.

Шешімі. 4.5–формуладан және $Re\, p = s > 0$:

$$f(t) = c \xleftarrow{\cdot} \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty c \cdot e^{-pt} dt = c \int_0^\infty e^{-pt} dt = -\frac{c}{p} \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-pt} d(-pt) =$$

$$= -\frac{c}{p} \lim_{A \to \infty} e^{-pt} \Big|_0^A = -\frac{c}{p}(-1) = \frac{c}{p}.$$

Сонымен, $c \xleftarrow{\cdot} \frac{c}{p}$. Егер $c = 1$ болса, онда $1 \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{p},\ Re\, p = s > 0$ ·

2-мысал. $f(t)$ функцияның түпнұсқасын табайық:

$$f(t) = \begin{cases} 0,\ t < 0, \\ e^{\lambda t},\ t > 0, \end{cases}$$

мұндағы λ -комплекс немесе нақты сан.

Шешімі. Егер $Re\lambda > 0$ болса, онда $f(t) = e^{\lambda t}$ функцияның $t > 0$ болғандағы өсу көрсеткіші $s_0 = Re\lambda > 0$; егер $\mathrm{Re}\lambda < 0$ болса, онда $\left|e^{at}\right|$ функция шектелген, сондықтан $s_0 = 0$. Сонда:

$$e^{\lambda t} \leftarrow \int_0^{\infty} e^{-(p-\lambda)t} dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-(p-\lambda)t} dt = -\frac{1}{p-\lambda} \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-(p-\lambda)t} d\left(-(p-\lambda)t\right) =$$

$$= -\frac{1}{p-\lambda} \lim_{A\to\infty} e^{-(p-\lambda)t}\Big|_0^{A} == -\frac{1}{p-\lambda}\left(\lim_{A\to\infty} \frac{1}{e^{(p-\lambda)A}} - 1\right).$$

Енді $p = s + i\sigma,\ \lambda = \alpha + i\rho$ болсын. Онда $\left|e^{-(p-\lambda)A}\right| = e^{-(S-\lambda)A}$.

Демек, $Re(p-\lambda) = s - \alpha > 0$ болғанда $\lim\limits_{A\to\infty} \frac{1}{e^{(p-\lambda)A}} = 0$ болады. Сонымен,

$$e^{\lambda t} \leftarrow \frac{1}{p-\lambda},\ t > 0,\ Re\, p > Re\,\lambda \ . \tag{4.6}$$

Осы мысалдан, егер $f(t) = e^{\lambda t}$ болса, онда $\lambda = i\omega$ болғанда мына қатынастарды аламыз:

$$e^{i\omega t} \leftarrow \frac{1}{p - i\omega}, \qquad Re\, p > Re(i\omega) = -Jm\omega,$$

$$e^{-i\omega t} \leftarrow \frac{1}{p + i\omega}, \qquad Re\, p > Re(-i\omega) = Jm\omega,$$

мұндағы ω кез келген комплекс сан.

3 - мысал $f(t) = sint$ түпнұсқаның кескінін табайық.

Шешімі. Берілген функция шектелген, яғни $|sin\, t| <1$, онда $sin\, t$ функцияның өсу көрсеткіші $s_0 = 0$.

$$sint \leftarrow \int_0^{\infty} sint \cdot e^{-pt} dt = -\lim_{A\to\infty} \frac{-p\,sint + cost}{p^2 + 1} e^{-pt}\Big|_0^{A} =$$

$$= \frac{1}{p^2+1}\left[1 - \lim_{A\to\infty} e^{-pA}(cos\, A - p\, sin\, A)\right] = \frac{1}{p^2+1}, Re\, p > 0.$$

Сонымен:

$$\sin t \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{p^2+1}, \qquad Re\, p > 0.$$

4 – мысал. $f(t) = \cos t$ түпнұсқасының кескінін табайық.

Шешімі. 3 – мысалдағыдай:

$$\cos t \xleftarrow{\cdot} \int_0^\infty \cos t e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2+1}\left[p - \lim_{A\to\infty} e^{-pA}(\cos A - p \sin A) \right] = \frac{p}{p^2+1};$$

Сонымен:

$$\cos t \xleftarrow{\cdot} \frac{p}{p^2+1}, \qquad Re\, p > 0.$$

4.4. Кескіннің бар болуы туралы теорема

4.1–теорема. Егер $f(t) \xleftarrow{\cdot} F(p)$ болса, онда $F(p)$ кескін $Re\, p = s > s_0$ жарты жазықтықта анықталған және аналитикалық функция, мұндағы s_0 берілген $f(t)$ түпнұсқаның өсу көрсеткіші (2-сурет).

Дәлелдеуі. Теореманың бірінші тұжырымын ғана дәлелдейік, яғни $f(t)$ түпнұсқаның бар болуын. Мына нүкте $p = s + i\sigma$, $Re\, p = s > s_0$ жарты жазықтықтың кез келген нүктесі болсын, онда түпнұсқа анықтамасындағы в) шартты пайдаланайық:

$$\left| \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right| \le \int_0^\infty \left| f(t) e^{-pt} \right| dt \le M \int_0^\infty e^{s_0 t} \left| e^{-pt} \right| dt = M \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0},$$

Мұндағы $s - s_0 > 0$ болғандықтан және меншіксіз интегралдағы салыстыру белгі [14,15] бойынша (4.5) Лаплас интегралы жинақты болады, яғни $Re\, p = s > s_0$ жарты жазықтықта $F(P)$ кескін бар және ол біреу ғана. Бірінші тұжырым дәлелденді.

Біріншіден, осы теоремадан және кескіннің 3-қасиетінен мына *тұжырымға* келеміз: кез келген комплекс айнымалы $F(p)$ функция кейбір $f(t)$ түпнұсқаның кескіні бола алмайды. Ал $Re\, p = s > s_0$

жарты жазықтықтағы $F(p)$ кескіннің аналитикалықтығынан мына *қорытындыға* келеміз: $F(p)$ функцияның барлық ерекше нүктелері $s = s_0$ түзуінің сол жағында немесе осы түзудің бойында жатады. Сондықтан tgp функция кескін бола алмайды, бұл функцияның s өсінің бойында шексіз полюстері бар: $P_{Ik} = \frac{2k-1}{2}\pi$, $k = 1,2,...,$ осы сияқты p^2 функция да кескін бола алмайды, себебі $\lim\limits_{S\to\infty} p^2 \neq 0$.

Екіншіден, мысалы $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ ($a = -\frac{1}{2}$, 4.19-тақырып) функцияның Лаплас интегралы жинақты, демек $\frac{1}{\sqrt{t}}$ функцияның кескіні бар, бірақта $\frac{1}{\sqrt{t}}$ функция түпнұсқа бола алмайды (4.19-тақырып). Себебі $\lim\limits_{t\to+0} \frac{1}{\sqrt{t}} = \infty$. Сонымен, түпнұсқа қанағаттандыратын а), ә), б) шарттар, түпнұсқа бар болуы үшін тек жеткілікті ғана шарттар, қажетті емес.

Кескіннің теңдігі туралы теорема. Егер $F(p)$ кескін $f_1(t)$ мен $f_2(t)$ түпнұсқалардың кескіні болса, онда бұл түпнұсқалар үзіліссіз болатын барлық нүктелерде бір-біріне тең болады.

Демек, бір $F(p)$ кескінге шексіз түпнұсқа сәйкес келеді, әрі оладың бір-бірінен айырмашылығы үзілісті нүктелердегі мәндерінде.

Кескіннің периодты болмауы туралы теорема. Егер $F(p) \neq 0$ болса, онда ол периодты функция емес.

Дәлелдеуі. $f(t) \leftarrow F(p)$ болсын. Қарсы жориық, яғни $F(p)$ кескін периодты функция және P_0 оның периоды болсын:

$$F(p + p_0) = F(p).$$

Онда, $F(p) - F(p + p_0) = 0$ немесе

$$\int_0^\infty f(t)(1 - e^{-p_0 t})e^{-p_0 t}dt = 0.$$

Осыдан, функция $f_1(t) = f(t)(1 - e^{-p_0 t})$ түпнұсқа болады және оның кескіні бар әрі ол кескін нөлге тең. Ал нөлге тең басқа $f_2(t)$

функцияның да $(f_2(t) = 0 \neq f_1(t))$ кескіні нөлге тең. Олай болса, кескіннің теңдігі туралы 4.2-теоремадан, $f_1(t) = f_2(t)$ теңдік, $f_1(t)$ мен $f_2(t)$ функциялардың барлық үзіліссіз нүктелерінде орындалады, яғни $f(t)$ функцияның барлық үзіліссіз болатын нүктелерінде

$$f(t)(1 - e^{-p_0 t}) = 0 \tag{4.7}$$

теңдік орындалады. $1 - e^{-p_0 t} = 0$ теңдік тек $P_0 = \dfrac{2k\pi i}{t}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ нүктелерде ғана орындалады, ал бұлай болуы мүмкін емес, себебі p_0 шарт бойынша $0 \neq p_0 -$ тұрақты сан. Онда, (4.7)–теңдіктен $f(t) = 0$. Демек $F(p) = 0$, ал бұл ұйғаруымызға қайшы келеді. Дәлелденді.

Осы теоремадан, мына функциялар кескін бола алмайды: $e - const$,

$e^{\lambda p}$, $\sin p$, $\cos p$, shp, chp, мұндағы $\lambda -$ кез келген комплекс сан.

4.5. Лаплас түрлендірудің сызықты қасиеті

Осы және алдағы тақырыптарда тек Лаплас түрлендірудің қасиеттрін қарастыратын болымаз.

Сызықты қасиет. Егер $f_k(t) \leftarrow F_k(p), Re\, p > s_0^k$,,онда

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \leftarrow \cdot\!\!-\!\!\cdot \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p), Re\, p > max\{s_0^k\}, \quad k = \overline{1.n}, \tag{4.8}$$

мұндағы s_0^k саны $f_k(t)$ түпнұсқаның өсу көрсеткіші, c_k -комплекс немесе нақты сандар (1-қасиет, 4.2).

Дәлелдеуі. (4.5)–формуладан

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) = \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \right) e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_0^{\infty} f_k(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p).$$

Егер $\int_0^{\infty} f_k(t) e^{-pt} dt$ меншіксіз интеграл $Re\, p > s_0^k$ жарты жазықтықта жинақты болса, онда $\int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \right) e^{-pt} dt$ интегралы да

осы жазықтықта жинақты болады. Ал соңғы меншіксіз интеграл теореманың шарты бойынша жинақты. Сондықтан, 4.8–формула орындалады. Дәлелденді.

1-мысал: Мына функциялардың:

$$\sin\omega t, \cos\omega t, sh\omega t, ch\omega t$$

кескіндерін табайық, мұндағы ω-нақты немесе комплекс сандар.

Шешімі. $\sin\omega t$ функцияны көрсеткіштік функция түрінде жазайық:

$$\sin\omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = \frac{1}{2i}e^{i\omega t} - \frac{1}{2i}e^{-i\omega t}.$$

Кескіннің сызықты қасиетін пайдаланып, $\frac{1}{2i}e^{i\omega t}$, $-\frac{1}{2i}e^{i\omega t}$, қосылғыштардың кескіндерін табайық. Ол үшін

$$e^{\lambda t} \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{1}{p-\lambda}, \ Re\, p > Re\,\lambda \tag{4.9}$$

формуланы пайдаланайық, мұндағы λ орнына $i\omega t$ және $-i\omega t$ өрнектерді қойып, $\sin\omega t$ түпнұсқаның кескінін табамыз:

$$\sin\omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \tag{4.10}$$

$$\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}(\pm\omega) = |Jm\omega|.$$

Осы сияқты,

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}, \ sh\omega t = \frac{1}{2}e^{\omega t} - \frac{1}{2}e^{-\omega t},$$

$$ch\omega t = \frac{1}{2}e^{\varpi t} + \frac{1}{2}e^{-\omega t}$$

формулаларға (4.9)–формуланы пайдаланып, сәйкес $\cos\omega t$, $sh\omega t$, $ch\omega t$ түпнұсқалардың кескіндерін анықтаймыз:

$$\cos\omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \tag{4.11}$$

$$\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}(\pm i\omega) = |Jm\omega|;$$

$$sh\omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2-\omega^2}, \ \mathrm{Re}\, p > |\mathrm{Re}\,\omega|; \tag{4.12}$$

$$ch\omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{p}{p^2-\omega^2},\ \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re}\omega|\ . \quad (4.13)$$

2-мысал. Төмендегі түпнұсқалардың сәйкес кескіндерін табайық:

$$sin(\omega t \pm \varphi),\ cos(\omega t \pm \varphi),$$

мұндағы ω, φ – кез келген нақты және комплекс сандар.

Шешімі. Тригонометрияның формулаларын пайдаланайық:

$$sin(\omega t \pm \varphi) = sin\,\omega t \cdot cos\,\varphi \pm sin\,\varphi \cdot cos\,\omega t,$$
$$cos(\omega t \pm \varphi) = cos\,\omega t \cdot cos\,\varphi \mp sin\,\omega t \cdot sin\,\varphi.$$

Кескіннің сызықты қасиетін және 4.10, 4.11–формулаларды пайдаланайық, сонда ($cos\varphi$, $sin\varphi$ -тұрақты сан):

$$sin(\omega t \pm \varphi) \xleftarrow{\cdot}{\cdot} cos\,\varphi \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \pm sin\,\varphi \frac{p}{p^2+\omega^2} =$$
$$= \frac{\omega cos\,\varphi \pm p\,sin\,\varphi}{p^2+\omega^2},\ Re\ p > |Jm\omega|. \quad (4.13)$$

Осы сияқты,

$$cos(\omega t \pm \varphi) \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{p\,cos\,\varphi \mp \omega\,sin\,\varphi}{p^2+\omega^2},\ Re\ p > |Jm\,\omega|. \quad (4.14)$$

3-мысал. $f(t)$ функцияның кескінін табайық:

$$f(t) = 3 + \frac{1}{5} sin\,4t.$$

Шешімі. Кескіннің сызықты қасиетін және 4.10, мен 4.11–формулаларды қолданайық:

$$3 + \frac{1}{5} sin\,4t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{3}{p} + \frac{1}{5}\frac{4}{p^2+4^2} = \frac{3}{p} + \frac{4}{5(p^2+16)}.$$

4.6. Лаплас түрлендірудің ұқсастық және кешігу қасиеттері

4.2-теорема (Ұқсастық қасиеті). Егер $f(t) \xleftarrow{\cdot}{\cdot} F(p)$, $Re\ p > s_0$ болса, онда мына теңдік орындалады:

$$f(\alpha t) \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad Re\, p = s > s_0, \tag{4.15}$$

мұндағы α – кез келген оң сан .

Дәлелдеу. (4.5)–формуладан:

$$f(\alpha t) \xleftarrow{\cdot} \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt} dt.$$

2.2-тақырыптағы 3-қасиет бойынша, $f(\alpha t)$ функцияның өсу көрсеткіші αs_0 болады. Осы теңдікке $u = \alpha t$ алмастыруын қолданайық, $t = \frac{u}{\alpha}$, $dt = \frac{1}{\alpha} du$:

$$f(\alpha t) \xleftarrow{\cdot} \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(u) e^{-\frac{p}{\alpha} u} du = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

4.3-теорема (Кешігу қасиеті). Егер $f(t) \xleftarrow{\cdot} F(p), \ Re\, p > s_0$ болса, онда:

$$f(t-\tau) \leftarrow e^{-p\tau} F(p), \ Re\, p > S_0, \tag{4.16}$$

мұндағы τ -кез келген оң сан.

Дәлелдеуі (4.5)–формуладағы $f(t-\tau)$ түпнұсқа мына түрде жазылады:

$$f(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ f(t), & t \geq \tau. \end{cases}$$

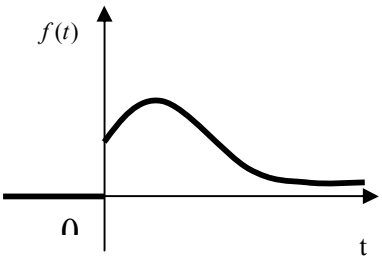
Онда (4.5)–формуладан

$$f(t-\tau) \xleftarrow{\cdot} \int_0^\infty f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau) e^{-pt} dt.$$

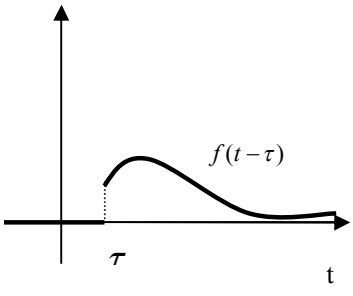
Соңғы теңдікке $t - \tau = u$ алмастыруын қолданайық, $t = u + \tau$, $dt = du$:

$$\int_0^\infty f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(u) e^{-p(u+\tau)} du = e^{-p\tau} \int_0^\infty f(u) e^{-pu} du = e^{-p\tau} F(p).$$

Енді Лаплас түрлендіруінің кешігу қасиетінің геометриялық мағынасын қарастырайық. Берілген $f(t)$ функцияның графигі 3-суретте бейнеленген.



3 - сурет



4 - сурет

Онда, $f(t-\tau)$ функцияның графигі $f(t)$ функцияның графигіне қарағанда τ өлшемге оңға қарай қозғалған t өсі бойында, яғни f(t) функция қандай процесті анықтаса , $f(t-\tau)$ функция да сол процесті анықтайды, бірақ $f(t-\tau)$ функция сол процесті τ уақытқа кешігіп анықтайды.

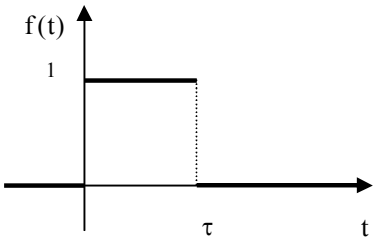
1-мысал. $f(t)$ бірлік импульстің τ уақыт аралығында кескінін анықтайық (5-сурет):

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & 0\le t\le\tau,\\ 0, & t>\tau.\end{cases}$$

Шешімі. Берілген f(t) бірлік импульсті $1(t),\ 1(t-\tau)$ Хевисайда функцияларының айырымы арқылы жазуға болады, яғни

$$f(t)=1(t)-1(t-\tau).$$

Кескіннің сызықты және кешігу қасиеттерін пайдаланайық:



5-сурет

$$f(t)=1(t)-1(t-\tau)\xleftarrow{\cdot}\frac{1}{p}-\int_{\tau}^{\infty}e^{-pt}dt=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\int_{\tau}^{\infty}e^{-pt}d(-pt)=$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\lim_{A\to\infty}e^{-pt}\Big|_{\tau}^{A}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(\lim_{A\to\infty}\frac{1}{p^{pA}}-e^{-p\tau}\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-p\tau}.$$

4.7. Лаплас түрлендіруінің озу қасиеті

4.4–теорема (Озу қасиеті). Егер $f(t)\xleftarrow{\cdot}F(p),\quad Re\,p>s_0$ болса, онда мына теңдік орындалады:

$$f(t+\tau)\xleftarrow{\cdot}e^{p\tau}\left[F(p)-\int_{0}^{\tau}f(t)e^{-pt}dt\right],\ Re\,p>s_0,$$

мұндағы τ кез келген оң сан, $f(t),\ f(t+\tau)$ функциялардың графиктері сәйкес 6 мен 7 – суретте бейнеленген.

Дәлелдеуі. 4.5–формуладан:

$$f(t+\tau)\xleftarrow{\cdot}\int_{0}^{\infty}f(t+\tau)e^{-pt}dt\cdot$$

Соңғы теңдікке $t+\tau=u$ алмастыруын қолданайық, $t=u-\tau$, $dt=du$:

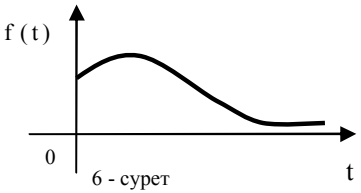
$$f(t-\tau) \leftarrow \int_0^{\infty} f(u)e^{-p(u-\tau)}du = e^{p\tau}\int_{\tau}^{\infty} f(u)e^{-pu}du =$$

$$= e^{p\tau}\left[\int_{\tau}^{\infty} f(u)e^{-pu}du + \int_0^{\tau} f(u)e^{-pu}du - \int_0^{\tau} f(u)e^{-pu}du\right] =$$

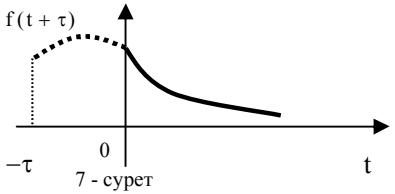
$$= e^{p\tau}\left[\int_0^{\infty} f(u)e^{-pu}du - \int_0^{\tau} f(u)e^{-pu}du\right] = e^{p\tau}\left[F(p) - \int_0^{\tau} f(u)e^{-pu}du\right] =$$

$$= e^{p\tau}\left[F(p) - \int_0^{\tau} f(t)e^{-pt}dt\right],$$

$Re\, p = s > s_0$. Дәлелденді.



6 - сурет



7 - сурет

$f(t+\tau)=0,\ t+\tau<0$ болғандықтан, 7–суретте үзілісті сызықпен бейнеленген $f(t+\tau)$ функция графигінің бөлігінде функцияның ординатасы нөлге тең.

1–мысал. Берілген $f(t)$ периодты түпнұсқа**,** ал Т оның периоды болсын. Осы түпнұсқаның $F(p)$ кескінін табайық.

Шешімі. Кескіннің анықтамасынан:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-pt}dt.$$

Енді $t = u + nT$ алмастыруын қолданайық:

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{T} f(u+nT)e^{-p(u+nT)}du.$$

Берілген $f(t)$ функция периодты болғандықтан $f(u+nT) = f(u)$ теңдігі орындалады.

Онда:

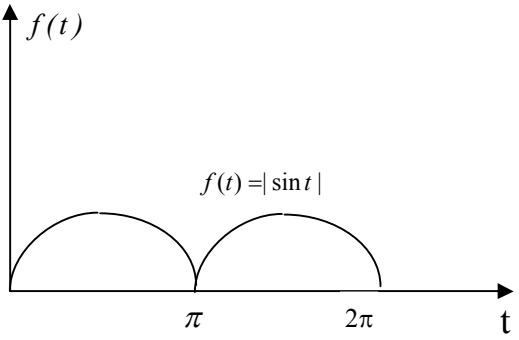
$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^T f(u)e^{-p(u+nT)}du=$$

$$=\int_0^T f(u)p^{-pu}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-pnT}=\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T f(u)e^{-pu}du.$$

Сонымен:

$$f(t)\doteq F(p)=\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T f(t)e^{-pT}dt,\quad t\in[0,T]. \qquad (4.17)$$

2-мысал. Графигі 8-суретте берілген $f(t)$ функцияның кескінін табайық.



8-сурет

Шешімі. (4.17)–формуладан

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\int_0^{\pi} sin\ te^{-pt}dt=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\frac{e^{-pt}(p\sin t-\cos t)}{p^2+1}\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1+e^{-\pi p}}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}.$$

4.8. Лаплас түрлендіруінің ығысу қасиеті.

4.5-теорема (Ығысу қасиеті). Егер $f(t) \xleftarrow{\cdot} F(p), Re\, p = s > s_0$ болса, онда:

$$e^{\lambda t} f(t) \xleftarrow{\cdot} F(p-\lambda),\ Re(p-\lambda) > s_0, \qquad (4.18)$$

мұндағы λ кез келген комплекс сан.

Дәлелдеуі. (4.5)–формуладан

$$e^{\lambda t} f(t) \xleftarrow{\cdot} \int_0^\infty e^{\lambda t} f(t) e^{-pt\alpha}\, dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-\lambda)t}\, dt = F(p-\lambda).$$

1-мысал . Төмендегі функциялардың кескінін табайық:

$$e^{\lambda t}\, cos(\omega t \pm \varphi),\ e^{\lambda t}\, sin(\omega t \pm \varphi),$$

мұндағы λ, ω, φ - кез-келген нақты немесе комплекс сандар.

Шешімі. (4.13), (4.14)–формулалар және ығысу қасиеті бойынша:

$$e^{\lambda t}\, cos(\omega t \pm \varphi) \xleftarrow{\cdot} \frac{(p-\lambda)cos\varphi \mp \omega\, sin\varphi}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}, \qquad (4.19)$$

$$Re\, p > Re\, \lambda + |Jm\omega|.$$

Осы сияқты

$$e^{\lambda t}\, sin(\omega t \pm \varphi) \xleftarrow{\cdot} \frac{\omega\, cos\varphi \pm (p-\lambda)\, sin\varphi}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}, \qquad (4.20)$$

$$Re\, p > Re\, \lambda + |Jm\omega|.$$

2-мысал . f(t) функцияның кескінін табайық:

$$f(t) = e^{-3t}\, sin\ 4t \cdot cos\ 2t.$$

Шешімі: Тригонометрия формуласын пайдаланайық:

$$sin\, 4t \cdot cos\, 2t = \frac{1}{2}[sin\, 6t + sin\, 2t].$$

Енді (4.20)–формуланы және кескіннің сызықты және ығысу қасиеттерін пайдаланайық. Сонда:

$$e^{-3t}\, \frac{1}{2}[sin\, 6t + sin\, 2t] \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{2}\left[\frac{6}{(p+3)^2 + 36} + \frac{1}{(p+3)^2 + 4}\right] =$$

$$= \frac{3}{(p+3)^2 + 36} + \frac{1}{(p+3)^2 + 4}.$$

4.9. Түпнұсқа дифференциалының кескіні

4.6-теорема (Түпнұсқаны дифференциалдау қасиеті). Егер $f'(t)$ функция S_0 өсу көрсеткішті түпнұсқа және $f(t) \xleftarrow{\cdot} F(p)$ болса, онда :

$$f'(t) \xleftarrow{\cdot} pF(p) - f(0),\ Re\, p = s > s_0. \qquad (4.21)$$

Егер $f(t) = 0$ болса , онда 4.21–формуладан:

$$f'(t) \xleftarrow{\cdot} pF(p) \qquad (4.21`)$$

Дәлелдеуі. Теореманың шартынан және 4-қасиеттен $f(t)$ функция да S_0 өсу көрсеткішті түпнұсқа болады және барлық $t \in [0,8)$ үшін үзіліссіз. Енді

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt}dt$$

интегралды бөліктеп интегралдайық :

$$e^{-pt} = u, f'(t)dt = dv, du = -pe^{-pt}dt, v = f(t).$$

Сонда:

$$f'(t) \xleftarrow{\cdot} \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \lim_{A\to\infty} f(t)e^{-pt}\Big|_0^A + p\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = \qquad (4.22)$$

$$= \lim_{A\to\infty} f(A)e^{-pA} - f(0) + pF(p).$$

Мұндағы $|f(x)| \le Me^{s_0 t}$ болғандықтан:

$$\left|f(t)e^{-pt}\right| \le Me^{-(s-s_0)t}, Re\, p = s > s_0.$$

Онда,

$$\lim_{A\to\infty} f(a)e^{-pA} = 0, Re\, p = s > s_0.$$

Сонымен, 4.22–теңдіктен дәлелдеу керек 4.21–теңдікті аламыз, яғни

$$f'(t) \xleftarrow{\cdot} pF(p) - f(0).$$

4.6-теореманың жалпы жағдайы. Егер $f^{(n)}(t)$ функция s_0 өсу көрсеткішті түпнұсқа және $f(t) \xleftarrow{\cdot} F(p)$ болса, онда:

$$f^{(n)}(t) \leftarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - p^{n-3} f^{(2)}(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), \quad (4.23)$$
$$Re\, p = s > s_0.$$

Егер $f(0) = f'(0) = f^{(2)}(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$ болса , онда 4.23–теңдік мына түрге түрленеді:

$$f^{(n)}(t) \xleftarrow{\cdot} p^n F(p),\ Re\, p = s > s_0. \quad (4.23`)$$

Дәлелдеуі. Теоремадағы $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ функциялар s_0 өсу көрсеткішті түпнұсқалар және барлық $t \in [0, \infty)$ үзіліссіз. Теореманы дәлелдеу үшін математикалық индукция әдісін пайдаланамыз. (4.23)–теңдік n=1 үшін орындалсын (4.6-теорема) және n-1 үшін орындалсын деп ұйғарып , n үшін дәлелдесек жеткілікті:

$$f^{(n-1)}(t) \xleftarrow{\cdot} p^{n-1} F(p) - p^{n-2} f(0) - \ldots - f^{(n-2)}(0), \operatorname{Re} s = s > s_0,$$

Енді $f^{(n-1)}(t)$ функцияға 4.21–формуланы тағы да қолданайық , сонда:

$$\left(f^{(n-1)}(t)\right)' = f^{(n)}(t) \xleftarrow{\cdot} p\left[p^{n-1} F(p) - p^{n-2} f(0) - \ldots - f^{(n-2)}(0)\right] - f^{(n-1)}(0) =$$
$$= p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

1-салдар. Егер $f'(t)$ функция түпнұсқа болса, ал $F(p)$ функция шексіздікте аналитикалық функция болса, яғни $f(t) \xleftarrow{\cdot} F(p),$ онда мына теңдік орындалады:

$$\lim_{p \to \infty} pF(p) = f(0). \quad (4.24)$$

Дәлелдеуі. Егер $F(p)$ шексіздікте аналитикалық функция болса, онда 3-қасиет бойынша $\lim_{p \to \infty} F(p) = 0$. Онда $F(p)$ функция шексіз қашық нүкте маңайында Лоран қатарына жіктеледі:

$$F(p) = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \ldots + \frac{c_n}{p^n} + \ldots \quad (4.25)$$

(4.25)–теңдіктің оң жағындағы қатар шексіз нүктенің маңайында бірқалыпты жинақты және оның мүшелері осы нүктенің маңайында аналитикалық функция болғандықтан мына теңдік орындалады:

$$F'(p) = -\frac{c_1}{p^2} - \frac{2c_2}{p^3} - \ldots - \frac{nc_n}{p^{n+1}} - \ldots$$

Осыдан, $p \to \infty$ -да шекке көшейік:

$$\lim_{p\to\infty} F'(p) = 0 \cdot$$

(4.21)–формула бойынша $F'(p) = pF(p) - f(0)$, онда:

$$\lim_{p\to\infty}[pF(p) - f(0)] = 0 \quad \textit{немесе} \quad \lim_{t\to\infty} pF(p) = f(0).$$

2-салдар. Егер $f'(t)$ түпнұсқа, $f(t) \xleftarrow{\cdot} F(p)$ және $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$ болса , онда :

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) \cdot \tag{4.26}$$

Дәлелдеуі. $f(t)$ функция барлық $t \in [0,\infty)$ үшін үзіліссіз болғандықтан және $\lim_{t\to\infty} f(t)$ шек бар, онда функция барлық $t \in [0,\infty)$ үшін шектелген. Сондықтан 4.1-тақырыптан, $f(t)$ функцияның өсу көрсеткіші нөлге тең, яғни $s_0 = 0$ және $F(p)$ функция Rep =s>0 жарты жазықтықта анықталған. Онда 4.21–формуладан:

$$f'(t) \xleftarrow{\cdot} \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(0), \quad Re\, p = s > 0 \cdot \tag{4.27}$$

Соңғы теңдіктің сол жағындағы интеграл Rep=s>0 жарты жазықтықта бірқалыпты жинақты болғандықтан және $p \to 0$-да $f'(t)e^{-pt}$ функция t өсінің кез келген шектеулі интервалында t айнымалы бойынша бірқалыпты жинақты болғандықтан, онда интеграл астынан $p \to 0$-да шекке көшуге болады. Сондықтан, (4.27)–теңдіктен шекке көшейік:

$$\lim_{p\to 0}[pF(p) - f(0)] = \lim_{p\to 0}\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty \lim_{p\to 0}\left[f'(t)e^{-pt}\right]dt =$$

$$= \int_0^\infty f'(t)dt = \lim_{A\to\infty} f(t)\Big|_0^A = f(\infty) - f(0).$$

Сонымен,

$$\lim_{p\to\infty}\left[pF(p)-f(0)\right]=f(\infty)-f(0)\cdot$$

Осыдан, дәлелдеу керек (4.26)–теңдікті аламыз. Егер $p=0$ нүкте $F(p)$ функцияның шектік нүктесі болса , онда:

$$\lim_{p\to 0} pF(p)=0\cdot$$

4.10. Кескінді дифференциалдау қасиеті

4.7-теорема (кескіндіні дифференциалдау қасиеті). Егер $f(t)\xleftarrow{\cdot}F(p),\ Re\, p=s>s_0$ болса, онда:

$$F^{(n)}(p)\xrightarrow{\cdot}(-1)^n t^n f(t),\quad Re\, p=s>s_0,\quad n=1,2,... \tag{4.28}$$

Дәлелдеуі. 3-қасиет бойынша , $(-1)^n t^n f(t)$ функция s_0 өсу көрсеткішті түпнұсқа болады. Сондықтан:

$$\left|(-1)^n t^n f(t)\right|\le me^{s_1\cdot t},s_1>s_0.$$

Онда:

$$\left|(-1)^n t^n f(t)e^{-pt}\right|\le Me^{-(s-s_1)t}<Me^{-(s_2-s_1)t}, \tag{4.29}$$

мұндағы $s_2>s_1>s_0, Re\, p=s>s_2$.

Сонымен, $\int_0^\infty Me^{-(s_2-s_1)t}dt$ интегралы бар және 4.29–теңсіздік орындалатындықтан мына меншіксіз интеграл:

$$\int_0^\infty (-1)^n t^n f(t)e^{-pt}dt, n=1,2... \tag{4.30}$$

$Re\, p=s\ge s_2>s_0$ жарты жазықтықта p параметр бойынша бірқалыпты жинақты болады. 4.30–интегралды біртіндеп интеграл астын дифференциалдауға болады:

$$F'(p)=\int_0^{\infty}-tf(t)e^{-pt}dt,\quad F^{(2)}(p)=\int_0^{\infty}(-1)^2t^2f(t)e^{-pt}dt,...$$

$$...,F^{(n)}(p)=\int_0^{\infty}(-1)^nt^nf(t)e^{-pt}dt.$$

Осыдан дәлелдеу керек (4.28)–формуланы аламыз.

Егер $f(t)=1(t)$ болса, онда (4.28)–формуладан және 4.1-тақырыптағы мысалдан дәрежелі функцияның кескінін табамыз:

$$t^n \xleftarrow{\cdot}{\cdot} (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Егер $f(t)=e^{\lambda t}$ болса, онда (4.2) және (4.28)–формулалардан:

$$t^n e^{\lambda t} \xleftarrow{\cdot}{\cdot} (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p-\lambda}\right)=\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}.$$

1-мысал. Төмендегі түпнұсқаның кескінін табайық:

$$f_1(t)=t\cos\omega t, f_2(t)=t\sin\omega t,$$

мұндағы ω - кез келген нақты немесе комплекс сан.

Шешімі. (4.11)–формуладан:

$$\frac{p}{p^2+\omega^2} \xrightarrow{\cdot}{\cdot} \cos\omega t,\ Re\, p=s>|Jm\omega|.$$

Енді (4.28)–формуланы пайдаланайық:

$$F'(p)=\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)_p'=-\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2} \xrightarrow{\cdot}{\cdot} -t\cdot f(t)=-t\cos\omega t.$$

осыдан $t\cos\omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2},\ Re\, p>|Jm\omega|$

немесе

$$f_1(t)=t\cos\omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}=\frac{Re(p+i\omega)^2}{(p^2+\omega^2)^2},\ Re\, p=s>|Jm\omega|.$$

Осы сияқты:

$$f_2(t)=t\sin\omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}=\frac{Jm(p+i\omega)^2}{(p^2+\omega^2)^2},\ Re\, p=s>|Jm\omega|.$$

2-мысал. Төмендегі түпнұсқаның кескінін табыңыз:

$$f_1(t) = t^n \cos \omega t, f_2(t) = t^n \sin \omega t,$$

мұндағы ω - кез келген нақты немесе комплекс сан.

Шешімі. (4.28)–формуладан

$$t^n \cos \omega t \leftarrow\!\!\!\cdot\!\!\!\cdot\!\!\!\cdot

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{p\to 0} F(p)\cdot \tag{4.32}$$

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша $\int_0^{\infty} f(t)dt$ меншіксіз интеграл жинақты және $f(t)$ функция барлық $t \in [0;+\infty]$ үшін үзіліссіз, онда $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$ Сондықтан $f(t)$ функция барлық $t \in [0,\infty)$ үшін шектелген және функцияның өсу дәрежесі нөлге тең , яғни $s_0 = 0$. Олай болса , $F(p)$ функция $Re\, p = s > 0$ жарты жазықтықта анықталған.

4.8-теорема бойынша :

$$\int_0^t f(u)du \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{F(p)}{p}, \quad Re\, p = s > 0.$$

Мына шек $\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(u)du$ бар болғандықтан, 4.25–теңдіктен:

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(u)du = \lim_{p\to 0} p\frac{F(p)}{p},$$

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{p\to 0} F(p).$$

Егер $F(p)$ функция $p = 0$ нүктеде аналитикалық болса, онда (4.32)–теңдік мына түрге түрленеді:

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{p\to 0} F(0).$$

4.12. Кескінді интегралдау қасиеті

4.10-теорема (Кескінді интегралдау). Егер $\frac{f(t)}{t}$ функция s_0 өсу көрсеткішті түпнұсқа болса, онда:

$$\frac{f(t)}{t} \xleftarrow{\cdot\ \cdot} \int_{s}^{\infty} F(q)dq,\ Re\, p = s > s_0, \tag{4.33}$$

мұндағы

$$\int_{p}^{\infty} F(q)dq = \lim_{Re\, P\to\infty} \int_{p}^{P} F(q)dq$$

және интегралдау (p,∞) жолы $Re\, p = s > s_0$ жарты жазықтықта жатыр.

Дәлелдеуі. $\frac{f(t)}{t} \xleftarrow{\cdot\ \cdot} \Phi(p)$ болсын. Онда, 2-қасиет бойынша, $\Phi(p)$ $Re\, p > S_0$ функция жарты жазықтықта аналитикалық функция болады. Мына теңсіздіктен

$$|\Phi(p)| \le \int_{0}^{\infty} \left|\frac{f(t)}{t} e^{-pt}\right| dt < M \int_{0}^{\infty} e^{-(S-S_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}$$

$\Phi(p)$ функция үшін

$$\lim_{Re\, p=S\to\infty} |\Phi(p)| = 0 \tag{4.34}$$

теңдікті аламыз.Теореманың шартындағы $\frac{f(t)}{t} \xleftarrow{\cdot\ \cdot} \Phi(p)$ қатынаста және (4.28)–формуладан:

$$-f(t) \xleftarrow{\cdot\ \cdot} \Phi'(p). \tag{4.35}$$

$f(t) \xleftarrow{\cdot\ \cdot} F(p)$ болғандықтан (4.35)–формуланы мына түрде жазуға болады:

$$F(p) = -\Phi'(p).$$

Соңғы теңдіктің екі жағында p-дан P-ге дейін интегралдайық:

$$\int_{p}^{P} F(q)dq = -\int_{p}^{P} \Phi'(q)dq,\ \ \Phi(q) - \Phi(p) = \int_{p}^{P} F(q)dq, \tag{4.36}$$

мұндағы $Re\, P > Re\, p > s_0$. (4.36)–теңдіктің екі жағынан да $\mathrm{Re}\, p \to \infty$-да шекке көшейік және (4.34)–теңдікті ескерейік, сонда:

$$\Phi(p) = \int_{p}^{\infty} F(q)dq.$$

4.11-теорема (Екінші шектік теорема). Егер $\frac{f(t)}{t}$ барлық $t \in [0,\infty)$ үшін үзіліссіз түпнұсқа және $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}$ меншіксіз интеграл жинақты болса, онда:

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(q)dq. \qquad (4.37)$$

4.11-теорема *екінші шектік теорема* деп аталады және бұл теорема арқылы меншіксіз интегралдарды есептеуге болады.

1-мысал. $f(t) = \frac{Sin\omega t}{t}$ функцияның кескінін табайық.

Шешімі. (4.10)–формуладан:

$$Sin\omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad Re\, p > |Jm\omega|.$$

Онда (4.37) формуладан

$$\frac{Sin\,\omega t}{t} \leftarrow \int_p^\infty \frac{\omega dq}{q^2+\omega^2} = \frac{\pi}{2} - arctg\,\frac{p}{\omega} = arctg\,\frac{\omega}{p}, \quad Rep > |Im\,\omega|.$$

2-мысал. $f(t) = \frac{Sin^2 t}{t}$ түпнұсқаның кескінін табайық.

Шешімі. Тригонометриялық формуладан

$$Sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - Cos2t)$$

және

$$\frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{2p}, \quad Cos2t \leftarrow \frac{p}{p^2+4}, \quad \text{Re}\, p = S > 0.$$

Кескіннің сызықты қасиетінен:

$$Sin^2 t \leftarrow \frac{1}{2p} - \frac{p}{2(p^2+4)}.$$

Онда :

$$\frac{Sin^2 t}{t} \leftarrow \int_p^\infty \left(\frac{1}{2q} - \frac{q}{2(q^2+4)}\right)dq = \frac{1}{4} ln\frac{p^2+4}{p^2}, \quad Re\, p > 0.$$

4.13. Кескіндер көбейтіндісінің қасиеті

4.12-теорема. Егер $f_1(t) \leftarrow\!\!\cdot\!\!\cdot\!\!- F_1(p),\quad Re\ p > s_0'$ және $f_2(t) \leftarrow F_2(p),\ Re\ p > s_0''$ болса, онда :

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \leftarrow\!\!\cdot\!\!\cdot\!\!- F_1(p) F_2(p), \tag{4.38}$$

мұндағы $Re\ p > s_0 = max\{s_0, s_0''\}$.

Дәлелдеуі. Алдымен $\varphi(t)$ функция түпнұсқа болатын көрсетейік. Түпнұсқаға қойылатын а), ә) шарттар $\varphi(t)$ функцияға орындалады, сондықтан в) шартты дәлелдейік. Ол үшін $s_0 = max\{s_0', s_0''\}$ және $M = max\{M_1, M_2\}$ болсын. Онда:

$$|f_1(t)| \le M_1 e^{S_0 t} \le M e^{S_0 t}, \quad |f_2(t)| \le M_2 e^{S_0 t} \le M e^{S_0 t}.$$

Сондықтан:

$$|\varphi(t)| = \left| \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right| \le \int_0^t |f_1(\tau)| |f_2(t-\tau)| d\tau <$$

$$< M^2 \int_0^t e^{S_0 \tau} e^{S_0 (t-\tau)} d\tau = M^2 t e^{S_0 t}. \tag{4.39}$$

Жеткілігінше аз кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{t}{\varepsilon^t} = 0$ теңдік орындалады, онда $\dfrac{t}{e^{\varepsilon t}}$ функция барлық $t \in [0, \infty)$ үшін шектелген, яғни $\dfrac{t}{e^{\varepsilon t}} \le A$. Осыдан

$$t \le A e^{\varepsilon t},$$

мұндағы A-оң сан. Онда :

$$|\varphi(t)| < M^2 t e^{s_0 t} \le M^2 A e^{(S_0 + \varepsilon) t}.$$

Соңғы теңсіздік жеткілігенше аз кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін орындалады. Сондықтан, $\varphi(t)$ функцияның өсуі шектелген, ал оның өсу көрсеткіші s_0-ге тең.

Енді $\varphi(t)$ түпнұсқаны қарастырайық:

$$\varphi(t) \xleftarrow{\cdot} \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau . \qquad (4.40)$$

Жоғарыда $\varphi(t)$ функция s_0 өсу көрсеткішті түпнұсқа болатынын көрдік, олай болса (4.40)–теңдіктегі екі еселі интеграл $Re\, p > s_0$ жарты жазықтықта абсолютті жинақты. Сондықтан, (4.40)–теңдіктің оң жағындағы екі еселі интегралдың интегралдау ретін өзгертуге болады, яғни:

$$\varphi(t) \xleftarrow{\cdot} \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_t^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-pt} dt .$$

Соңғы өрнекке $t - \tau = u$ алмастыруын пайдаланайық, сонда :

$$\varphi(t) \xleftarrow{\cdot} \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} f_2(u) e^{-p(\tau+u)} du,$$

$$\varphi(t) \xleftarrow{\cdot} \int_0^{\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{\infty} f_2(u) e^{-pu} du$$

Теореманың шарты бойынша:

$$\int_0^{\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau = F_1(p),$$

$$\int_0^{\infty} f_2(u) e^{-pu} du = F_2(p),$$

осыдан дәлелдеу керек теңдікті аламыз:

$$\varphi(t) \xleftarrow{\cdot} F_1(p) F_2(p).$$

Анықтама. Мына функция

$$\int_0^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$f_1(t)$ мен $f_2(t)$ *функциялардың үйірткісі* деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau .$$

Функциялардың үйірткісіне мына теңдік орындалады:

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t).$$

Үйірткінің анықтамасын пайдаланып, *4.12-теореманы мына түрде беруге болады:* егер $f_1(t) \xleftarrow{\cdot} F_1(p), \quad Re\, p > s_0'$ және $f_2(t) \xleftarrow{\cdot} F_2(p), \quad Re\, p > s_0''$, онда:

$$f_1(t) * f_2(t) \xleftarrow{\cdot} F_1(p) F_2(p),$$

$\mathrm{Re}\ p > \max\{s_0', s_0''\}$.

1-мысал. $F(p) = \dfrac{1}{4(p-3)(p-5)}$ функцияның түпнұсқасын табайық.

Шешімі. $F_1(p) = \dfrac{1}{4(p-3)}$, $F_2(p) = \dfrac{1}{p-5}$ болсын, онда (4.9)–формуладан:

$$F_1(p) = \frac{1}{4(p-3)} \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{4} e^{3t} = f_1(t), \qquad F_2(p) = \frac{1}{p-5} \xrightarrow{\cdot} e^{5t} = f_2(t).$$

Енді (4.38)–формуланы пайдаланып, $F(p)$ кескіннің түпнұсқасын табамыз:

$$F(p) \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{4}\int_0^t e^{3\tau} \cdot e^{5(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{4} e^{5t} \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = -\frac{1}{4} e^{5t} \left(\frac{e^{-2t}}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{8} e^{5t} (e^{-2t} - 1) = \frac{1}{8} e^{5t} - \frac{1}{8} e^{3t}.$$

2-мысал. $F(p) = \dfrac{2p\omega}{3(p^2+\omega^2)^2}$ функцияның түпнұсқасын табайық.

Шешімі. $F_1(p) = \dfrac{2p}{3(p^2+\omega^2)}$, $F_2(p) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ болсын. Онда 4.10, 4.11– формулалардан

$$f_1(t) = \frac{2}{3} Cos\omega t \xleftarrow{\cdot} \frac{2p}{3(p^2+\omega^2)} = F_1(p),$$

$$f_2(t) = Sin\omega t \xleftarrow{\cdot} \frac{\omega}{p^2+\omega^2} = F_2(p).$$

Осыдан және (4.38)–формуладан $F(p)$ кескіннің түпнұсқасын табамыз:

$$F(p) \dot{\longrightarrow} \frac{2}{3}\int_0^t Cos\omega\tau \cdot Sin\omega(t-\tau)d\tau = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\int_0^t \left[Sin\omega(t-2\tau)+Sin\omega t\right]d\tau =$$

$$= -\frac{1}{6\omega}Cos\,\omega(t-2\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{3}Sin\,\omega t\cdot\tau\Big|_0^t = \frac{1}{3}tSin\,\omega t.$$

Сонымен, $F(p) \dot{\longrightarrow} \frac{t}{3}Sin\omega t.$

4.14. Дюамель формуласы

4.13-теорема. Егер $f_1(t),\ f_2(t)$ функциялары түпнұсқа, яғни:

$$f_1(t) \dot{\longleftarrow} F_1(p),\quad f_2(t) \dot{\longleftarrow} F_2(p)$$

және $f_2'(t)$ түпнұсқа болса, онда мына қатынас орындалады:

$$f_1(t)\cdot f_2(0)+\int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)d\tau \dot{\longleftarrow} pF_1(p)\cdot F_2(p),$$

$$Re\,p > max\{s_0', s_0\}. \qquad (4.41)$$

Бұл формула *Дюамель формуласы* деп аталады.

Дәлелдеуі. (4.41)–формуладағы $pF_1(p)F_2(p)$ көбейтіндіні мына түрде жазайық:

$$pF_1(p)F_2(p) = F_1(p)\cdot f_2(0)+F_1(p)\left[pF_2(p)-f_2(0)\right]. \qquad (4.42)$$

Теңдіктің оң жағындағы екінші қосылғыш, сәйкес $f_1(t)$ мен $f_2'(t)$ түпнұсқалар көбейтіндісінің кескіні. (4.42)–теңдікке 4.12-теореманы және кескіннің сызықты қасиетін пайдаланайық:

$$pF_1(p)F_2(p) \dot{\longrightarrow} f_1(t)\cdot f_2(0)+f_1(t)*f_2'(t).$$

Осыдан дәлелдеу керек (4.41)–формуланы аламыз.

4.15. Түпнұсқалардың көбейтіндісі туралы теорема

4.14-теорема. Егер $f_1(t) \xleftarrow{\bullet\ \bullet} F_1(p), \quad Re\, p > s_0'$ және $f_2(t) \xleftarrow{\bullet\ \bullet} F_2(p), \quad Re\, p > s_0''$, онда $f_1(t) f_2(t)$ көбйтіндіде түпнұсқа болады және

$$f_1(t) f_2(t) \xleftarrow{\bullet\ \bullet} F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F_1(q) \cdot F_2(p-q)dq, \tag{4.43}$$

мұндағы $Re\, q = s > s_0', \quad Re\, p > s_0' + s_0''$.

Дәлелдеуі. Мына теңсіздіктер орындалсын:

$$\left| f_1(t) \le M_1 e^{s_0' \cdot t} \right|, \quad \left| f_2(t) \right| \le M_2 e^{s_0'' \cdot t}.$$

Онда осы теңсіздіктерден

$$\left| f_1(t) \cdot f_2(t) \right| \le M_1 M_2 e^{(s_0' + s_0'')t}.$$

Сонымен, $f_1(t) f_2(t)$ функция өсу көрсеткіші $s_0' + s_0''$-ке тең шектелген функция, яғни түпнұсқаға қойылатын а), ә), б) шарттар орындалады. Демек, $f_1(t) f_2(t)$ функция өсу көрсеткіші $s_0' + s_0''$-ке тең түпнұсқа болады. Сондықтан, 1-қасиет бойынша меншіксіз интеграл

$$F(p) = \int_0^{\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-pt} dt \tag{4.44}$$

p параметр бойынша $Re\, p \ge s_1 > s_0' + s_0''$ жарты жазықтықта абсолютті және бірқалыпты жинақты болады. Енді *Меллин формуласы* деп аталатын

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

формуланы $f_1(t)$ функцияға алмастырайық:

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left[\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F_1(q) e^{qt} dq \right] f_2(t) e^{-pt} dt, \quad Re p = s > s_0'.$$

Соңғы теңдіктің интегралдау ретін өзгертейік, сонда:

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \left[\int_0^{\infty} f_2(t) e^{-(p-q)t} dt \right] F_1(q) dq = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F_1(q) F_2(p-q) dq,$$

мұндағы $Re\, p = s - s_0$, $Re(p-q) > s_0''$. Дәлелденді.

Егер (4.44)–формуладағы $f_2(t)$ функцияға Меллин формуланы пайдалансақ, онда (4.43)–формула мына түрде жазылады:

$$f_1(t)\cdot f_2(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F_1(p-q)F_2(q)dq.$$

4.16. Парсеваль формуласы және кескіннің ұқсастық қасиеті

4.15-теорема. Егер $f_1(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}F_1(p),\quad Re\,p>0$ және $f_2(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}F_2(p),\ Re\,p>0$ және меншіксіз интегралдар

$$\int_0^\infty f_1(u)F_2(u)du,\ \int_0^\infty f_2(u)F_1(u)du$$

абсолютті жинақты болса (u -нақты айнымалы), онда *Парсеваль формуласы* деп аталатын мына теңдік орындалады:

$$\int_t^\infty f_1(u)F_2(u)du=\int_0^\infty f_2(u)F_1(u)du. \tag{4.45}$$

4.16-теорема. Егер $f(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}F(p),\ \mathrm{Re}\,p=s>0$ болса, онда:

$$\int_t^\infty\frac{f(u)}{u}du\xleftarrow[\bullet]{\bullet}\frac{1}{p}\int_0^p F(q)dq,\quad \mathrm{Re}\,p>0, \tag{4.46}$$

$$\int_0^\infty\frac{f(u)}{u}du\xleftarrow[\bullet]{\bullet}\int_0^\infty F(q)dq,\quad \mathrm{Re}\,p>0. \tag{4.47}$$

Дәлелдеуі. 4.2-теореманы $f(\frac{t}{\alpha})$ функцияға қолданайық:

$$\frac{1}{\alpha}f(\frac{t}{\alpha})\xleftarrow[\bullet]{\bullet}F(\alpha p)=\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}f(\frac{t}{\alpha})e^{-pt}dt,\ Re\,p>0,\alpha>0. \tag{4.48}$$

Соңғы теңдіктің екі жағын α бойынша 0-ден 1-ге дейін интегралдайық

$$\int_0^1 F(\alpha p)d\alpha=\int_0^\infty e^{-pt}\alpha t\int_0^1 f(\frac{t}{\alpha})\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Осыдан:

$$\int_0^1 f(\frac{t}{\alpha})\frac{d\alpha}{\alpha} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\longleftarrow}} \int_0^1 F(\alpha p)d\alpha, \quad Re\, p > 0.$$

Соңғы теңдіктің сол жағына $u = \frac{t}{\alpha}$ алмастыру, ал оң жағына $q = \alpha p$ алмастыруларын қолданайық, онда дәлелдеу керек (4.46)–формуланы аламыз.

Енді (4.47) формуланы дәлелдеу үшін (4.48) формуладағы теңдіктің екі жағын да α бойынша 1-ден $+\infty$-ке дейін интегралдайық:

$$\int_1^\infty F(\alpha p)d\alpha = \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_1^\infty f(\frac{t}{\alpha})\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Осыдан: $$\int_1^\infty f(\frac{t}{\alpha})\frac{d\alpha}{\alpha} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\longleftarrow}} \int_1^\infty F(\alpha p)d\alpha, \quad \mathrm{Re}\, p = s > 0.$$

Жоғарыдағыдай $u = \frac{t}{\alpha}$ мен $q = \alpha p$ алмастыруларын қолданайық, сонда:

$$\int_0^t \frac{f(u)}{u}du \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\longleftarrow}} \frac{1}{p}\int_p^\infty F(q)dq. \tag{4.49}$$

(4.46) мен (4.49)–формулаларды мүшелеп қосайық:

$$\int_0^t \frac{f(u)}{du} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\longleftarrow}} \frac{1}{p}\int_0^\infty F(q)dq. \tag{4.50}$$

Енді мына белгілеулерді енгізейік:

$$\int_0^\infty \frac{f(u)}{u}du = A, \qquad \int_0^\infty F(q)dq = B.$$

Онда, (4.49)–формула мына түрге түрленеді: $A \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\longleftarrow}} \frac{1}{p}B,$ $\mathrm{Re}\, p = s > 0.$ Сонымен,

$$1 \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\longleftarrow}} \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Re}\, p = s > 0$$

болғандықтан, онда кескіннің тек біреу ғана болуынан $A \longleftarrow B$ қатынас орындалады.

4.17. Параметр бойынша шекке көшу, дифференциалдау

және интегралдау

4.17-теорема. Егер $f(t,\lambda) \xleftarrow{\cdot} F(p,\lambda)$ және $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f(t,\lambda)$ шек бар болса, онда:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(t,\lambda) \xleftarrow{\cdot} \lim_{\lambda\to\lambda_0} F(p,\lambda),$$

мұдағы λ -параметр.

Дәлелдеуі. Теореманың шартынан $F(p,\lambda)=\int\limits_0^\infty f(t,\lambda)e^{-pt}dt$.

Онда:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} F(p,\lambda) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \int\limits_0^\infty f(t,\lambda)e^{-pt}dt.$$

Теңдіктің оң жағындағы меншіксіз интеграл p мен λ бойынша бірқалыпты жинақты, демек шек таңбасы мен интеграл таңбасына ауыстырымдылық қасиет орындалады. Сондықтан

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} F(p,\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} \lim_{\lambda\to\lambda_0} f(t,\lambda)dt.$$

Осыдан $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f(t,\lambda) \xleftarrow{\cdot} \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} F(p,\lambda)$. Дәлелденді.

4.18-теорема. Егер $f(t,\lambda) \xleftarrow{\cdot} F(p,\lambda)$ және $\frac{\partial}{\partial\lambda} f(p,\lambda)$- дербес туынды бар болса, онда :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} f(t,\lambda) \leftarrow \frac{\partial}{\partial\lambda} F(p,\lambda),$$

мұдағы λ -параметр.

Дәлелдеуі. λ параметрдің $\Delta\lambda$ өсімшесіне $F(p,\lambda)$- кескіннің $\Delta F(p,\lambda)$ өсімшесі сәйкес келеді. Өсімшелердің $\frac{\Delta F(p,\lambda)}{\Delta\lambda}$ қатынасын қарастырайық:

$$\frac{F(p,\lambda+\Delta\lambda)-F(p,\lambda)}{\Delta\lambda}=\int_0^\infty e^{-pt}\,\frac{f(t,\lambda+\Delta\lambda)-f(t,\lambda)}{\Delta\lambda}dt.$$

Мына теңдік орындалатын болғандықтан

$$\frac{f(t,\lambda+\Delta\lambda)-f(t,\lambda)}{\Delta\lambda}=\frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda)+\varepsilon$$

және $\Delta\lambda\to 0-$да $\varepsilon=\varepsilon(t,\lambda,\Delta\lambda)$ бірқалыпты нөлге ұмтылады, онда:

$$\frac{\Delta F(p,\lambda)}{\Delta\lambda}=\int_0^\infty\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda)+\varepsilon\right)e^{-pt}dt\cdot$$

Осы теңдіктен шекке көшейік $\Delta\lambda\to 0-$да:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}F(p,\lambda)=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta F(p,\lambda)}{\Delta\lambda}=\int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda)dt+\lim_{\Delta\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-pt}\cdot\varepsilon\,dt\cdot$$

Математикалық анализдегі параметр бойынша шекке көшу теорема бойынша ([15]):

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-pt}\varepsilon\,dt=\int_0^\infty e^{-pt}\lim_{\Delta\lambda\to 0}\varepsilon\,dt=0,\quad Re\,p=s=s_0.$$

Онда,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}F(p,\lambda)=\int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda)dt\ \overset{\cdot}{\longrightarrow}\ \frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda)$$

4.19-теорема. Егер $f(t,\lambda)\overset{\cdot}{\longleftarrow}F(p,\lambda)$ және мына интегралдар бар болса,

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda}f(t,\lambda)d\lambda,\ \int_{\lambda_0}^{\lambda}F(p,\lambda)d\lambda,$$

онда:

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda}f(t,\lambda)d\lambda\ \overset{\cdot}{\longleftarrow}\ \int_{\lambda_0}^{\lambda}F(p,\lambda)d\lambda.$$

4.18. Түпнұсқа мен кескіннің кестелері

1. $C \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{C}{P},\ Rep > 0.$	2. $e^{at} \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{1}{(p-a)},\ Rep > Rea.$
3. $\sin \omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{\omega^2}{p^2+\omega^2},\ Rep > \lvert Im \rvert.$	4. $\cos \omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{p}{p^2+\omega^2},\ Rep > Rea.$
5. $sht \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{\omega}{p^2-\omega^2},\ Rep > \lvert Re\omega \rvert.$	6. $cht \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{p}{p^2-\omega^2},\ Rep > \lvert Re\omega \rvert.$
7. $e^{at} \sin \omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}.$	8. $t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{1}{p^2}.$
9. $e^{at} \sin(\omega t \pm \varphi) \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{\omega \cos\varphi \pm (p-a)\sin\varphi}{(p-a)^2+\omega^2}.$	10. $e^{at} \cos \omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}.$
11. $e^{at} \cos(\omega t \pm \varphi) \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{(p-a)\cos\varphi \mp \omega \sin\varphi}{(p-a)^2+\omega^2}.$	12. $t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{n!}{p^{n+1}}.$
13. $t^n e^{at} \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$	$t^k \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}, Rek > -1, Rep >$
15. $t \sin \omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{2p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}.$	16. $t \cos \omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}.$
17. $tsh\omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{2p\omega}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}.$	18. $tch\omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{p^2+\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}.$
19. $\frac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}.$	21. $\sin(\omega t + \varphi).$ $\frac{\omega \cos\varphi \pm p \sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
20. $\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}.$	22. $\cos(\omega t + \varphi).$ $\frac{p \cos\varphi \pm \omega \sin\varphi}{p^2+\omega^2}$

4.19. Дәрежелі функцияның кескіні

Бізге математикалық анализ курсында, мына меншіксіз интегралды қарастырғанбыз:

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt \cdot \tag{4.51}$$

Бұл интеграл екінші түрдегі Эйлер интегралы деп аталады және $\alpha > -1$ мәндерде (4.51)–интеграл жинақты болады.

Мына функция

$$F(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt \tag{4.52}$$

гамма функция деп аталады.

(4.52)–формула дәрежелі $f(z) = t^z$ функция үшін орындалады, мұндағы z -комплекс айнымалы, $\operatorname{Re} z > -1$ және мына *тұжырымдар* орындалады:

а) $\int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt$ меншіксіз интеграл z айнымалы бойынша бір қалыпты жинақты болады, $\operatorname{Re} z > -1$ жарты жазықтықта;

ә) $\int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt$ меншіксіз интеграл z бойынша аналитикалық функцияны өрнектейді $\operatorname{Re} z > -1$ жарты жазықтықта.

Осы айтылған тұжырымдарды $\Gamma(z+1)$ гамма функция үшін дәлелдейік:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt, \quad Re\, z > -1 \cdot \tag{4.53}$$

(4.53)–формуланың оң жағындағы меншіксіз интегралдың екі ерекше нүктесі бар, нөлде және шексіздікте. Сондықтан меншіксіз интегралды бір ерекше нүктесі бар екі меншіксіз интегралға жіктейік:

$$\int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = \int_0^{1} t^z e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^z e^{-t} dt \tag{4.54}$$

және оларды жеке-жеке жинақтылыққа зерттейік. Алдымен

$$\int_1^{\infty} t^z e^{-t} dt \tag{4.55}$$

меншіксіз интегралды зерттейік. Дәрежелі $f(z) = t^z$ функцияны түрлендірейік:

$$\left| t^z \right| = \left| e^{z \ln t} \right| = e^{Re\, z \ln t},\ t > 1.\cdot$$

Осыдан

$$\left| t^z e^{-t} \right| = \left| e^{z \ln t} e^{-t} \right| = e^{Re\, z \ln t} \cdot e^{-t}. \tag{4.56}$$

Енді $Re\, z \le c > 0$ болсын және $t > 1$ болғанда $\ln t > 0$ болғандықтан (4.56) теңдіктен мына теңсіздікті аламыз:

$$\left| e^{Re\, z \ln t} e^{-t} \right| \le e^{c \ln t} e^{-t} = t^c e^{-t}.$$

Онда $\int_0^{\infty} t^c e^{-t} dt$ меншіксіз интеграл кез келген $c > 0$ үшін жинақты болады. Онда (4.55)–меншіксіз интеграл $Re\, z \le c > 0$ жарты жазықтықта z бойынша бірқалыпты жинақты болады. Сондықтан (4.55) интеграл z бойынша барлық комплекс жазықтықта аналитикалық функцияны өрнектейді. Енді

$$\int_0^1 t^z e^{-t} dt \tag{4.57}$$

интегралды қарастырайық. Онда $t \in (0,1]$ үшін $\ln t < 0$ болады, сондықтан $Re\, z \ge \delta > -1$ болғанда

$$\left| t^z e^{-t} \right| \le t^{\delta} e^{-t} < t^{\delta},\ \int_0^1 t^{\delta} dt = \frac{1}{\delta + 1}.$$

Онда, (4.57)–интеграл, $Re\, z \ge \delta > -1$ жарты жазықтықта z бойынша бірқалыпты жинақты болады және осы жарты жазықтықта z бойынша аналитикалық функция болады. Сонымен, (4.55) пен (4.57) интегралдар $Re\, z > -1$ жарты жазықтықта z -ке тәуелді аналитикалық функцияны өрнектегендіктен (4.54)–формуладағы меншіксіз интеграл $Re\, z > -1$ жарты жазықтықта z -ке тәуелді аналитикалық функция. Дәлелденді.

Енді $f(t)=t^z$ функцияның $Re\, z>-1$ жарты жазықтықтағы кескінін табайық. Бізге, $f(t)=t^z$ функция $Re\, z>0$ болғанда өсу дәрежесі $s_0=0$- ге тең түпнұсқа болатыны белгілі. Сондықтан, $f(t)=t^z$ функцияның $Re\, p>0$ болғанда $F(p)$ кескіні бар.

$-1<Re\, z<0$ *интервалда* $f(t)=t^z$ *функция* $t\to 0$*-да шексіз өседі, сондықтан* $f(t)=t^z$ *функция түпнұсқаның ә) шартын (*$t=0$ *нүкте* t^z *функцияның екінші түрдегі үзілісті нүктесі) қанағаттандырмайды. Бірақ,* $-1<Re\, z<0$ *интервалда*

$$F(p)=\int_0^\infty t^z e^{-pt}dt$$

меншіксіз интеграл $Re\, p>0$ *жарты жазықта бар.* Сонымен, $Re\, z>-1, Re\, p>0$ болғанда $f(t)=t^z$ функцияның Лаплас кескіні бар және ол кескін мына формуладан анықталады:

$$t^z \overset{\cdot}{\leftarrow} F(p)=\int_0^\infty t^z e^{-pt}dt,\ Re\, z>-1,\quad Re\, p>0. \tag{4.58}$$

(4.58)–теңдіктің оң жағындағы меншіксіз интегралды есептейік. Ол үшін $p=x>0$ болсын, яғни p оң мәндерді қабылдайды. Теңдіктің оң жағына $xt=u$ алмастыруын орындайық:

$$\int_0^\infty t^z e^{-pt}dt=\int_0^\infty t^z e^{-xt}dt=\frac{1}{x^{z+1}}\int_0^\infty u^z e^x dx=\frac{\Gamma(z+1)}{x^{z+1}}.$$

Демек, $p=x>0$ болғанда

$$\int_0^\infty t^z e^{-xt}dt=\frac{\Gamma(z+1)}{x^{z+1}},\quad Re\, z>-1,\quad x>0. \tag{4.59}$$

Түпнұсқа (4.58)–формуладан анықталатын және ол $\mathrm{Re}\, p>0$ облыста аналитикалық функция болғандықтан $Re\, p>0, Re\, z>-1$ облыста $F(p)$ функция гамма функция арқылы анықталады:

$$t^z \overset{\cdot}{\leftarrow} \int_0^\infty t^z e^{-pt}dt=\frac{\Gamma(z+1)}{p^{z+1}}. \tag{4.60}$$

Сонымен, $F(p)=\int_0^{\infty} t^a e^{-pt}dt$ меншіксіз интеграл тек $a\geq 0$ болғанда ғана жинақты болып қоймай сонымен қатар $-1<a<0$ болғанда да жинақты болады, себебі (4.52)-гамма функция барлық $t>0$ үшін анықталған. Ал $-1<a<0$ болғанда t^a функция түпнұсқа бола алмайды, себебі $t\to 0$-да $t^a\to\infty$. Бірақ, $-1<a<0$ болғанда t^a функцияны «*ерекше*» түпнұсқа, ал оның $\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$-кескінін *ерекше кескін* дейміз.

Егер $z=-\frac{1}{2}$ болғанда, (4.60)–формуладан:

$$t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{t}}\leftarrow\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

Сондықтан

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\leftarrow\frac{1}{\sqrt{p}}. \qquad (4.61)$$

Егер $z=n\quad(n=0,1,2,...)$ болса, онда (4.60)–формуладан:

$$t^n\leftarrow\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}=\frac{n!}{p^{n+1}},\ Re\,p>0. \qquad (4.62)$$

Кескіннің ығысу теоремасы бойынша, кез келген бүтін оң n және кез келген λ комплекс сан үшін, (4.60)–формуладан

$$t^n e^{\lambda t}\leftarrow\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}},\ Re\,p>Re\,\lambda. \qquad (4.63)$$

Осыдан $n=0$ болғанда:

$$e^{\lambda t}\leftarrow\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}},\quad Re\,p>Re\,\lambda.$$

Анықтама. Комплекс айнымалы бүтін трансценденттік $F(z)$ функция *бүтін экспоненттік түрдегі функция* деп аталады, егер M және σ сандары табылып, барлық z комплекс мәндер үшін

$$|f(z)| < Me^{\sigma|z|}$$

теңсіздік орындалса.

4.20-теорема. Дәрежелі қатар $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ бүтін экспоненттік түрде кескінделуі үшін M, S оң сандары үшін

$$|c_n| \le M\frac{s^n}{n!}, \quad n = 0,1,2,... \tag{4.64}$$

теңсіздіктің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

4.21-теорема. $F(p)$ кескін шексіз қашық нүктеде аналитикалық функция болу үшін, яғни $F(p)$ функция шексіз қашық нүктенің маңайында Лоран қатарына жіктелуі үшін :

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{p^{n+1}},$$

$F(p)$ кескіннің $f(t)$ түпнұсқасы дәрежелі функция арқылы анықталуы қажетті әрі жеткілікті, яғни:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n, \quad t > 0.$$

Бұл теорема *жіктелудің бірінші теоремасы* деп аталады.

Мысалдар. Төмендегі функциялардың кескінін табайық:

$$1. f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin\omega t; \quad 2. f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\omega;$$

$$3. f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}sh\omega t; \quad 4. f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}ch\omega t,$$

мұндағы ω - нақты немесе комплекс сандар.

Шешімдері. 1. $\frac{1}{\sqrt{t}} \leftarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$ болғандықтан және кескіннің ығысу теоремасы бойынша :

$$\frac{\sin\omega t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \leftarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{p - i\omega}} - \frac{1}{\sqrt{p + i\omega}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}i}{2} \cdot \frac{\sqrt{p+i\omega} - \sqrt{p-i\omega}}{\sqrt{p^2+\omega^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{p^2+w^2} - p}{p^2+\omega^2}}, \ Re\, p > |Im\, w|.$$

Сонымен,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin wt \leftarrow \sqrt{\frac{\sqrt{p^2+w^2} - p}{p^2+w^2}}, Re\, p > |Im\, w|.$$

2. Осы сияқты:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos wt \leftarrow \sqrt{\frac{\sqrt{p^2+w^2} + p}{p^2+w^2}}, \mathrm{Re}\, p > |\mathrm{Im}\, w|.$$

3. $\frac{1}{\sqrt{t}} \leftarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$ болғандықтан және кескіннің ығысу теоремасы бойынша:

$$\frac{sh\omega t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \leftarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{p-\omega}} - \frac{1}{\sqrt{p+\omega}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \frac{\sqrt{p+\omega} - \sqrt{p-\omega}}{\sqrt{p^2-\omega^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p - \sqrt{p^2-\omega^2}}{p^2-\omega^2}}, \ Rep > Re\omega.$$

Сонымен,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} sh\omega t \leftarrow \sqrt{\frac{p - \sqrt{p^2-\omega^2}}{p^2-\omega^2}}, \ Rep > Re\omega.$$

4. Осы сияқты:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} ch\omega t \leftarrow \sqrt{\frac{p + \sqrt{p^2-\omega^2}}{p^2-\omega^2}}, Rep > Re\omega.$$

4.20. Кескіннің рационал функция болуының қажетті әрі жеткілікті шарты

4.22-теорема. Кескін рационал функция болу үшін түпнұсқаның $t^n e^{\lambda t}$ функция түрдегі сызықты комбинация болуы қажетті әрі жеткілікті,

мұндағы n - бүтін оң сан, λ - кез келген комплекс сан.

Жеткіліктілігі. Түпнұсқа $t^n e^{\lambda t}$ функция түрдегі сызықты комбинация болсын. Онда:

$$t^n e^{\lambda t} \xleftarrow{\cdot} \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}, \quad n = 0,1,2..$$

болғандықтан және кескіннің сызықты қасиеті бойынша, әрі $f(t)$ функция $t^n e^{\lambda t}$ түрдегі сызықты комбинация болғандықтан $f(t)$ түпнұсқасының кескіні $\frac{n!}{(p-\lambda^{n+1})}$ түрдегі функциялардың сызықты комбинациясы болады, ал $\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$ кескін рационал функция.

Қажеттілігі. $F(p)$ кескін рационал функция болсын . $F(p)$ рационал функцияны жай бөлшектерге жіктеп, мына түрге келтіреміз:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{m_k} \frac{A_{kl}}{(p-p_k)^l},$$

мұндағы A_{kl} - комплекс сандар, $m_k - p_k$ түбірдің еселігінің дәрежесі, S. $F(p)$ функцияның әртүрлі түбірлерінің саны (4.63)–формуладан

$$\frac{t^{l-1}}{(l-1)!} e^{p_k t} \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{(p-p_k)^l}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_k .$$

Кескіннің сызықты қасиеті бойынша:

$$\sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{m_k} \frac{A_{kl} t^{l-1}}{(l-1)!} e^{p_k t} \xleftarrow{\cdot} F(p), Re\, p > max\{Re\, p_k\}.$$

Сонымен, $f(t)$ түпнұсқа $t^n e^{\lambda t}$ түрдегі сызықты комбинация болады. Дәлелденді.

Дәлелденген осы теоремадан мына *ережені* аламыз (*бұл ереже жіктелудің екінші теоремасы* деп аталады): егер $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ дұрыс рационал бөлшек, $p_1, p_2, p_3, ..., p_s$ - сандар $F_2(p)$ - көпмүшеліктің

нөлдері, ал $m_1, m_2, .., m_s$ осы нөлдердің еселі түбірлерінің дәрежесі, $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n -$ $F[p]$ көпмүшеліктің дәрежесі және $F(p)$ мына жай бөлшектерге жіктелсін:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{m_k} \frac{A_{kl}}{(p - p_k)^l},$$

онда $F(p)$ кескіннің $f(t)$ түпнұсқасы мына түрде жіктеледі:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{m_k} \frac{A_{kl}}{(l-1)!} e^{p_k t}.$$

1-мысал. Берілген кескіннің түпнұсқасын табайық .

$$F(p) = \frac{p-1}{p^2 + 3p}.$$

Шешімі $F(p)$ кескінді жай бөлшектерге жіктейік:

$$\frac{p-1}{p^2+3p} = \frac{p-1}{p(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3}, \; p - 1 = (p+3)A + Bp,$$

мұндағы $\mathrm{A} = -\frac{1}{3}, \mathrm{B} = \frac{4}{3}$ сонда,

$$\frac{p-1}{p^2+3p} = -\frac{1}{3p} + \frac{4}{3(p+3)}.$$

Онда:

$$f(t) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} e^{-3t} = \frac{1}{3}\left(4e^{-3t} - 1\right), \quad t > 0.$$

2-мысал. $F(p)$ кескіннің түпнұсқасын табайық:

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}.$$

Шешімі. $F(p)$ кескінді белгісіз коэффициенттер әдісімен жай бөлшектерге жіктейік, сонда,

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)} = -\frac{1}{2p^2} - \frac{3}{4p} - \frac{1}{6(p-1)} + \frac{11}{12(p+2)}.$$

Онда:

$$f(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4} - \frac{1}{6}e^{t} + \frac{11}{12}e^{-2t}, \quad t > 0.$$

3-мысал. $F(p)$ кескіннің түпнұсқасын табайық: $F(p)=\frac{1}{p}cos\frac{1}{p}$.

Шешімі. $\cos\frac{1}{p}$ функцияны $\frac{1}{p}$-ның дәрежесі бойынша қатарға жіктейік:

$$cos\frac{1}{p}=1-\frac{1}{2!\,p^2}+\frac{1}{4!\,p^4}-...+(-1)^n\frac{1}{(2n-2)!\,p^{2n-1}}+...$$

Онда:

$$\frac{1}{p}cos\frac{1}{p}=\frac{1}{p}-\frac{1}{2!\,p^3}+\frac{1}{4!\,p^5}-...+(-1)^n\frac{1}{(2n-2)!\,p^{2n-1}}+...$$

Осыдан және жіктелудің бірінші теоремасынан түпнұсқаны табамыз:

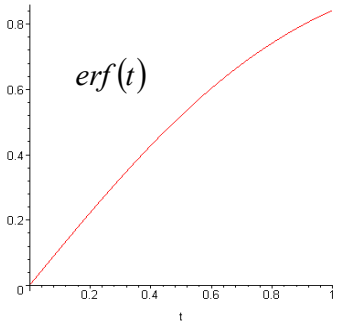
$$f(t)=1-\frac{t^2}{(1!)^2}+\frac{t^4}{(2!)^2}-...+(-1)^{n-1}\frac{t^{2n}}{[(2n-2)!]^2}+...\ ,\ t>0.$$

4.21. Ықтималдық интерграмен байланысты функциялардың кескіні

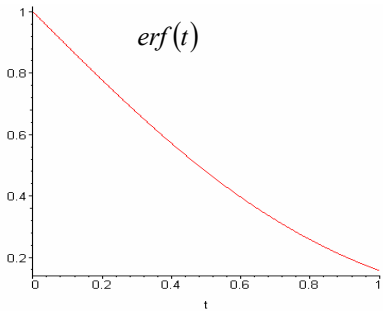
Анықтама. *Ықтималдық интеграл* деп мына интегралды айтаймыз:

$$\Phi(t)=erf(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du.$$

Анықтамадағы $erf(t)$ функция $t\in[0,+\infty)$ үшін өспелі үзіліссіз функция болатынын дәлелдеуге болады және $ertf(0)=0,\ \lim\limits_{t\to\infty}erf(t)=1$ (1-сурет):



1-сурет



2-сурет

Осы $erf(t)$ функциямен қатар $Erf(t)$ немесе $erfc(t)$ функциялары практикада жиі кездеседі (2-сурет):

$$Erf(t) = erfc(t) = 1 - erf(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^t e^{-u^2} du \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\infty e^{-u^2} du - \int_0^t e^{u^2} du \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-u^2} du.$$

Осыдан:

$$Erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-u^2} du. \qquad (4.65)$$

Онда, $Erf(t)$ функцияның $t \in [0, \infty)$ интервалда кемімелі үзіліссіз болатынын және $Erf(0) = 1, Erf(\infty) = 0$ болатынын дәлелдеуге болады (2-сурет).

Енді ықтималдық интегралмен байланысты қолданбалы есептерде жиі кездесетін төмендегі функциялардың кескіндерін табайық:

$$f_1(t) = e^t erf(\sqrt{t}), f_2(t) = erf(\sqrt{t}),$$

$$f_3(t) = e^t Erf(\sqrt{t}), f_4(t) = Erf(\sqrt{t}).$$

Бұл функциялардың бәрі де түпнұсқа болады және $f_1(t)$ мен $f_3(t)$ функциялардың өсу дәрежесі 1-ге тең, ал $f_2(t)$ мен $f_4(t)$ функциялардың өсу дәрежесі 0-ге тең. Сонда,

$$erf(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-u^2} du, \; \left[erf(\sqrt{t})\right]'_t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Осыдан:

$$f_1'(t) = e^t erf(\sqrt{t}) + e^t \left[erf(\sqrt{t})\right]'_t = f_1(t) + e^t \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} = f_1(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

Егер $f_1(t) \dot{\leftarrow} F_1(p), \quad Re\, p > 1$ болса, онда:

$$f_1'(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = f_1(t) \dot{\leftarrow} F_1(p). \tag{4.66}$$

Мына қатынастар орындалатын болғандықтан:

$$f_1'(t) \dot{\leftarrow} pF_1(p) - f_1(0) = pF_1(p), \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \dot{\leftarrow} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{p}},$$

онда 4.66–формуладан мына теңдікті аламыз:

$$pF_1(p) - \frac{1}{\sqrt{\pi p}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = F_1(p),$$

$$pF_1(p) = F_1(p) + \frac{1}{\sqrt{p}},$$

мұндағы $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Осыдан:

$$F_1(p) = \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}.$$

Сонымен,

$$e^t erf(\sqrt{t}) \dot{\leftarrow} \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}, \; Re\, p > 1. \tag{4.67}$$

Кескіннің ығысу теоремасынан:

$$erf(\sqrt{t}) \dot{\leftarrow} \frac{1}{p\sqrt{p+1}}, \; Re\, p > 0. \tag{4.68}$$

Кескіннің сызықты қасиеті бойынша:

$$e^t Erf(\sqrt{t}) = e^t - e^t erf(\sqrt{t}) \dot{\leftarrow} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}} = \frac{1}{p+\sqrt{p}}.$$

Сонымен,

$$e^t Erf(\sqrt{t}) \leftarrow \frac{1}{p+\sqrt{p}}, Re\, p > 1. \tag{4.69}$$

Кескіннің ығысу теоремасынан:

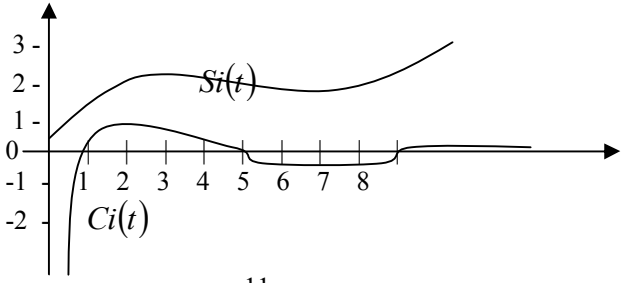
$$Erf(\sqrt{t}) \leftarrow \frac{1}{p+1+\sqrt{p+1}}, Re\, p > 0, \tag{4.70}$$

4.22. Интегралдық синус пен косинустың кескіні

Анықтама. Мына функциялар

$$si(t) = -\int_t^\infty \frac{\sin x}{x} dx, \quad ci(t) = -\int_t^\infty \frac{\cos x}{x} dx \tag{4.71}$$

сәйкес *интегралдық синус және косинус* деп аталады (3-сурет).



11-сурет

Алдымен $si(t)$ функцияның кескінін табайық, ол үшін $\sin t$ функцияның кескінін еске түсірейік:

$$\sin t \leftarrow \frac{1}{p^2+1}, Re\, p > 0.$$

Ұқсастық теореманың (4.6-тақырып) формуласы бойынша:

$$\int_t^\infty \frac{\sin u}{u} du \leftarrow \frac{1}{p}\int_0^p \frac{dq}{q^2+1} = \frac{1}{p} arctgp, \; Rep > 0.$$

Осыдан:

$$si(t) \leftarrow -\frac{1}{p} arctgp, Re\, p > 0. \tag{4.72}$$

Ұқсастық теоремадан:

$$si(\alpha t) \underset{\cdot}{\overset{\cdot}{\leftarrow}} -\frac{1}{p} arctg \frac{p}{\alpha}, \alpha > 0, Re\, p > 0. \tag{4.73}$$

Енді $ci(t)$ функцияның кескінін табайық, ол үшін

$$\cos t \underset{\cdot}{\overset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{p}{p^2+1}, Re\, p > 0.$$

Онда ұқсастықтың формуласы бойынша:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos u}{u} du \underset{\cdot}{\overset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{1}{p} \int_0^p \frac{qdq}{q^2+1} = \frac{ln(p^2+1)}{2p}, Re\, p > 0.$$

Осыдан:

$$ci(t) \underset{\cdot}{\overset{\cdot}{\leftarrow}} -\frac{ln(p^2+1)}{2p} = \frac{1}{p} ln \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}, Re\, p > 0. \tag{4.74}$$

Ұқсастық теоремадан:

$$si(\alpha t) \underset{\cdot}{\overset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{1}{p} ln \frac{\alpha}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}, \alpha > 0, Re\, p > 0.$$

4.23. Френель интегралының кескіні

Анықтама. Мына функциялар

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du, C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du \tag{4.75}$$

сәйкес *Френель синусы* және *косинусы* деп аталады.

Алдымен S(t) функцияның кескінін табайық, ол үшін

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \underset{\cdot}{\overset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{p^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}, Re\, p > 0.$$

Енді кескіннің ығысу теоремасынан:

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{e^{it} - e^{it}}{2i} \underset{\cdot}{\overset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} - \frac{1}{\sqrt{p+i}} \right), Re\, p > 0.$$

Онда түпнұсқаны *интегралдау* туралы теорема бойынша (4.11-тақырып):

$$\int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}}du \leftarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2ip}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}}-\frac{1}{\sqrt{p+i}}\right)=i\frac{\sqrt{\pi}}{2p}\frac{\sqrt{p-i}-\sqrt{p+i}}{\sqrt{p^2+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{2p}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{\sqrt{p^2+1}},\operatorname{Re}p>0.$$

Сонымен,

$$S(t)\leftarrow\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{2p\sqrt{p^2+1}},\quad Re\,p>0.$$

Енді C(t) функцияның кескінін табайық:

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\leftarrow\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}},\operatorname{Re}p>0.$$

Кескіннің ығысу теоремасынан:

$$\frac{cost}{\sqrt{t}}=\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\leftarrow\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}}+\frac{1}{\sqrt{p+i}}\right),\quad Re\,p>0.$$

Онда тұрнұсқаны *интегралдау* туралы теорема бойынша (4.11-тақырып):

$$\int_0^t \frac{cosu}{\sqrt{u}}du\leftarrow\frac{\sqrt{\pi}}{2ip}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}}-\frac{1}{\sqrt{p+i}}\right)=i\frac{\sqrt{\pi}}{2p}\frac{\sqrt{p-i}-\sqrt{p+i}}{\sqrt{p^2+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{2p}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{\sqrt{p^2+1}},\quad Re\,p>0$$

Сонымен,

$$C(t)\leftarrow\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{2p\sqrt{p^2+1}},Rep>0$$

4.24. Көрсеткіштік функция интегралының кескіні

Анықтама. Мына функция

$$-Ei(-t)=\int_t^\infty\frac{e^{-u}}{u}du$$

көрсеткіштік функция интегралы деп аталады.

Осы функцияның кескінін табайық:

$$e^{-u} \leftarrow \frac{1}{p+1}, Re\, p > 0.$$

Онда ұқсастық теорема бойынша (4.4-тақырып):

$$-Ei(-t) \leftarrow \frac{1}{p}\int_0^p \frac{dq}{q+1} = \frac{1}{p} ln(p+1),\ Re\ p > 0.$$

4.25. Кейбір цилиндрлік функциялардың кескіні

Мына диференциалдық теңдеу

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + (z^2 - \nu^2) y(z) = 0 \qquad (4.76)$$

цилиндірлік дифференциал теңдеу деп аталады, мұндағы ν -тұрақты сан, $\mathrm{Re}\,\nu > -1$, $y(z)$- дифференциал теңдеудің шешімі, z -белгісіз $y(z)$ шешімнің комплекс айнымалы аргументі. Бұл дифференциал теңдеу ν - *дәрежелі Бессель теңдеуі* депте аталады. Осы теңдеудің нөлге тең емес шешімдері *цилиндрлік функциялар* деп аталады.

Цилиндрлік функциялардың бірін *бірініші түрдегі* ν - *дәрежелі Бессель функциясы* деп атайды және ол $J_\nu(z)$ таңбамен белгіленеді және ол мына формуладан анықталады:

$$J_\nu(z) = \sum_{k-0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}, Re\nu > -1, \qquad (4.77)$$

мұндағы $\Gamma(\nu+k+1)$- гамма функция, теңдіктің оң жағындағы қатар $z=0$ нүктеден өзге шектеулі кез келген z мәндер үшін жинақты.

Егер $\nu = n$ $(n = 0,1,2,...)$ болса, онда 4.77–формула мына түрге түрленеді:

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \qquad (4.78)$$

және ол шектеулі барлық z үшін жинақты болады. Осы теңдіктегі $n=0$ болса, онда:

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} z^{2k}. \qquad (4.79)$$

Мына белгілі теңсіздікті $2^{2k}(k!)^2 \geq (2k)$ пайдаланып, (4.79) дәрежелі қатардың коэффициенттерін бағалайық:

$$|c_{2k}| = \left|\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\right| = \frac{1}{2^{2k}(k!)^2} \leq \frac{1}{(2k)!}. \tag{4.80}$$

Осы теңсіздіктен және 4.20-*теоремадан* (4.19-тақырып) $(M = S = 1)$ $J_0(t)$ функция экспоненциалды түрдегі бүтін функция. Онда 4.21-*теоремадан* $J_0(t)$ функцияның кескінін табамыз:

$$J_0(t) \xleftarrow{\cdot} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)p^{2k+1}}. \tag{4.81}$$

Енді $1 < |z| < \infty$ аралықта мына жіктелуді пайдаланайық:

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2 z^{2k}}. \tag{4.82}$$

Егер $z = p$ болса, онда (4.82)–формуладан:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2 p^{2k}} = \frac{p}{\sqrt{p^2=1}}, |p| > 1. \tag{4.83}$$

Онда (4.81)–формула мына түрге түрленеді:

$$J_0(t) \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{p} \cdot \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}, \quad |p| > 1.$$

Кескіннің ұқсастық қасиетін пайдаланып, мына қатынастарды аламыз:

$$J_0(\alpha t) \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}, \quad \alpha > 0, \quad Re\, p > 0,$$

$$J_n(t) \xleftarrow{\cdot} \frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}, \quad Re\, p > 0, \quad n = 0,1,2,...$$

$$J_n(\alpha t) \xleftarrow{\cdot} \frac{\left(\sqrt{p^2+\alpha^2}-p\right)^n}{\alpha^n\sqrt{p^2+\alpha^2}}, \quad \alpha > 0, \quad Re\, p > 0, \quad n = 0,1,2,...$$

$$J_n(t) = J_{n-2}(t) - 2J'_{n-1}(t).$$

4.26. Тұрақты коэффициентті сызықты дифференциал теңдеуді шешу

Бізге тұрақты коэффициентті сызықты дифференциал теңдеудің дербес шешімін табу керек болсын:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t), \qquad (4.84)$$

ал ол шешім Кошидің бастапқы шарттарын қанағаттандырсын:

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \qquad (4.85)$$

мұндағы $a_0, a_1, \ldots, a_n$- тұрақты коэффициенттер, $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$- белгілі тұрақты мәндер (бастапқы шарттар), $f(t)$-нақты t аргументті үзіліссіз функция және ол түпнұсқа.

Іздестіріп отырған (4.84)–дифференциал теңдеудің $y(t)$ шешімі мен оның n-ретті туындылары үзіліссіз түпнұсқа болсын деп ұйғарайық. Дифференциал теңдеуді шешу үшін (4.84) теңдеудің екі жағын e^{-pt} функцияға көбейтейік және оны t айнымалы бойыша 0-ден $+\infty$-ке дейін интегралдайық:

$$a_0 y^{(n)}(t)e^{-pt} + a_1 y^{(n-1)}(t)e^{-pt} + \ldots + a_{n-1} y'(t)e^{-pt} + a_n y(t)e^{-pt} = f(t)e^{-pt},$$

$$a_0 \int_0^\infty y^{(n)}(t)e^{-pt}dt + a_1 \int y^{(n-1)}e^{-pt}dt + \ldots$$

$$+ a_{n-1} \int_0^\infty y'(t)e^{-pt}dt + a_n \int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \qquad (4.86)$$

Ұйғаруымыз бойынша, яғни $y(t) \xleftarrow{\cdot} Y(p)$, $f(t) \xleftarrow{\cdot} F(P)$ және туындының кескіні туралы теорема бойынша (4.9-тақырып), яғни:

$$\begin{aligned}
&y'(t) \leftarrow pY(p) - y_0, \\
&y''(t) \leftarrow p^2 Y(p) - y_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y^{(n-1)}(t) \leftarrow p^{n-1} Y(p) - p^{n-2} y_0 - \ldots - y_{n-2}, \\
&y^{(n)}(t) \leftarrow p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - \ldots - y_{n-1},
\end{aligned} \qquad (4.87)$$

(4.84) теңдікті мына түрге түрлендірейік:

$$\begin{aligned} &a_0\left[p^nY(p)-y_0p^{n-1}-y_1p^{n-2}-\ldots-y_{n-1}\right]+\\ &a_1\left[p^{n-1}Y(p)-y_0p^{n-2}-\ldots-y_{n-2}\right]+\ldots+\\ &a_{n+1}\left[pY(p)-y_0\right]+a_nY(p)=F(p). \end{aligned} \tag{4.88}$$

(4.88)–теңдік (4.84)–дифференциал теңдеудің *кескіндік* немесе *операторлық теңдеуі* деп аталады.

Берілген дифференциал теңдеудің (4.88) операторлық теңдеуін $Y(p)$ кескін және $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$- бастапқы шарттар арқылы топтастырайық, сонда:

$$\begin{aligned} &\left(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}+a_n\right)Y(p)=\\ &=y_0\left(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\ldots+a_{n-2}p+a_{n-1}\right)+\\ &+y_1\left(a_0p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\ldots+a_{n-3}p+a_{n-2}\right)+\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ &+a_0y_{n-1}=F(p). \end{aligned} \tag{4.89}$$

Осыдан:

$$Y(p)=\frac{B(p)+F(p)}{A(p)}, \tag{4.90}$$

мұндағы

$$A(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n,$$

$$B(p)=y_0\left(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\ldots+a_{n-2}p+a_{n-1}\right)+$$

$$+y_1\left(a_0p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\ldots+a_{n-3}p+a_{n-2}\right)+\ldots+a_0y_{n-1}.$$

Сонымен, (4.90)–формуладағы $Y(p)$ кескін іздестіріп отырған (4.84)–дифференциал теңдеудің дербес шешімінің кескіні.

Егер (4.84)–дифференциал теңдеудегі Кошидің бастапқы шарттары: $y_0=y_1=\ldots=y_{n-1}=0$ болса, онда (4.90)–формуладан, (4.84)–теңдеудің шешімі $y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0$ Коши шарттарын қанағаттындыратын дербес шешімді аламыз, яғни:

$$Y(p)=\frac{F(p)}{A(p)}.$$

Сонымен, $y(t)$ дербес шешімді табу үшін, $Y(p)$ кескінге сәйкес келетін түпұсқаны тапсақ жеткілікті.

Мысал. 1. $y''(t)-4y'(t)+5y(t)=0$ біртекті дифференциал теңдеудің $y(t)|_{t=0}=0,\ y'(t)|_{t=0}=1$ Коши шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табайық.

Шешімі. (4.85)–формуладағы $y_0=0, y_1=1,$ онда (4.87)–формуладан

$$y(t)\leftarrow Y(p),\ y'(t)\leftarrow pY(p)-y_0=pY(p),$$
$$y''(t)\leftarrow p^2Y(p)-y_1=p^2Y(p)-1.$$

Тұрақты C санның кескіні $\frac{C}{p}$ (бізде $C=0$) болатынын ескеріп, берілген дифференциал теңдеудің кескіндік немесе операторлық теңдеуін аламыз: $P^2Y(p)-1-4pY(p)+5Y(p)=0$ немесе $\left(p^2-4p+5\right)Y(p)=1$.

Осыдан:

$$Y(p)=\frac{1}{p^2-4p+5}=\frac{1}{(p-2)^2+1}\rightarrow e^{2t}\sin t.$$

Сонымен, берілген дифференциал теңдеудің Коши шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімі $y(t)=e^{2t}\sin t$ болады.

2. $y''(t)+4y'(t)=1$ біртекті емес дифференциал теңдеудің $y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0$ Коши шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табайық.

Шешімі. (4.85)–формуладағы $y_0=y_1=y_2=0$, онда (4.87)–формуладан:

$$y(t)\leftarrow\cdot\cdot Y(p),\ y'(p)\leftarrow\cdot\cdot pY(p),$$
$$Y'''(t)\leftarrow\cdot\cdot p^3Y(p),\ 1\leftarrow\cdot\cdot\frac{1}{p}.$$

Онда операторлық теңдеуді мына түрде табамыз:

$$p^3Y(p)+4pY(p)=\frac{1}{p}.$$

Осыдан:

$$Y(p)\left(p^3+4p\right)=\frac{1}{p},\ Y(p)=\frac{1}{p\left(p^3+4p\right)}.$$

Соңғы теңдіктің оң жағын белгісіз коэффициенттер әдісін пайдаланып, жай бөлшектерге жіктейік:

$$Y(p)=\frac{1}{p^2\left(p^2+4\right)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2+4}\to\frac{t}{4}-\frac{1}{8}sin\,2t.$$

Сонда, іздестіріп отырған дербес шешімді табамыз: $y(t)=\frac{t}{4}-\frac{1}{8}sin\,2t.$

3. $y''(t)+2y'(t)+10y(t)=2e^{-t}\,cos\,3t$ теңдеудің жалпы шешімін табайық.

Шешімі. Берілген дифференциал теңдеудің жалпы шешімін табу үшін кез келген Коши шарттарын пайдаланайық: $y(t)|_{t=0}=C_1,\ y'(t)|_{t=0}=C_2$, мұндағы C_1, C_2 – тұрақты сандар.

Енді берілген дифференциал теңдеудің операторлық теңдеуін табайық:

$$p^2Y(p)-C_1p-C_2+2pY(p)-2C_1+10Y(p)=2\frac{p+1}{(p+1)^2+9}.$$

Осыдан:

$$Y(p)\left(p^2+2p+10\right)=\frac{2(p+1)}{(p+1)^2+9}+C_1p+C_2+2C_1,$$

$$Y(p)=\frac{2(p+1)}{\left[(p+1)^2+9\right]^2}+C_1\frac{p}{(p+1)^2+9}+C_2\frac{1}{(p+1)^2+9}+2C_1\frac{1}{(p+1)^2+9}=$$

$$=\frac{2(p+1)}{\left[(p+1)^2+9\right]^2}+C_1\frac{p}{(p+1)^2+9}+C_2\frac{1}{(p+1)^2+9}+C_1\frac{p}{(p+1)^2+9}+C_1\frac{1}{(p+1)^2+9}=2\frac{p+1}{\left[(p+1)^2+9\right]^2}+$$

$$+(C_1+C_2)\frac{3}{(p+1)^2+9}\cdot\frac{1}{3}+C_1\frac{p+1}{(p+1)^2+9}\to 2\frac{1}{2\cdot3}t\,sin\,3t+(C_1+C_2)\frac{1}{3}e^{-t}\,sin\,3t+C_1e^{-t}\,cos\,3t.$$

Сонымен берілген дифференциал теңдеудің жалпы шешімі мына түрде анықталады:

$$y(t)=\frac{1}{3}t\,sin\,3t+C_0\frac{1}{3}e^{-t}\,sin\,3t+C_1e^{-t}\,cos\,3t,$$

мұндағы $C_0=C_1+C_2$.

4.27. Сызықты дифференциал теңдеуді Дюамель интегралы әдісімен шешу

Біз сызықты дифференциал теңдеудің

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = f(t) \qquad (4.91)$$

Коши шартын қанағаттандыратын

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0 \qquad (4.92)$$

дербес шешімін табайық, a_i – тұрақты сандар, $i = \overline{1,n}$, $f(t)$ – түпнұсқа.

Берілген дифференциал теңдеудің дербес шешімін табу үшін қосымша мына дифференциал теңдеуді қарастырайық:

$$a_0 w^{(n)}(t) + a_1 w^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n w(t) = 1. \qquad (4.93)$$

Бұл дифференциал теңдеудің дербес шешімі $w(t)$ болсын, ал

$$w(0) = w'(0) = \ldots = w^{(n-1)}(0) = 0 \qquad (4.94)$$

4.93–дифференциал теңдеудің Коши шарты және $w(t) \leftarrow\!\cdot\!\!\cdot\!\!\cdot\, W(p)$ болсын. Онда 4.93–дифференциал теңдеудің операторлық түрі мына түрде анықталады:

$$a_0 p^n W(p) + a_1 p^{n-1} W(p) + \ldots + a_{n-1} p W(p) + a_n W(p) = \frac{1}{p}.$$

Осыдан $W(p)$ кескінді табайық:

$$W(p) = \frac{1}{p\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n\right)}. \qquad (4.95)$$

Берілген (4.91)–дифференциал теңдеудің шешімін $y(t)$ таңбамен белгілейік, ал оның кескіні $Y(p)$ және $f(t) \leftarrow\!\cdot\!\!\cdot\!\!\cdot\, F(p)$, болсын. Онда (4.91)–теңдеудің операторлық теңдеуі

$$a_0 p^n Y(p) + a_1 p^{n-1} Y(p) + \ldots + a_{n-1} p Y(p) + a_n Y(p) = F(p)$$

болады. Осыдан $Y(p)$ кескінді анықтайық:

$$Y(p) = \frac{1}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n}. \qquad (4.96)$$

Енді (4.95) пен (4.96) салыстырып, мына теңдікті аламыз:

$$Y(p) = pF(p)W(p).$$

Онда, $w(0)=0$ болғандықтан (4.14-тақырып, 4.41-формула) Дюамель формуласынан іздестіріп отырған $y(t)$ шешімді табамыз:

$$y(t)=\int_0^t f(u)w'(t-u)du\,. \tag{4.97}$$

Осы интегралды бөліктеп интегралдап мына теңдікті аламыз:

$$y(t)=w(t)f(0)+\int_0^t w(u)f'(t-u)du\,. \tag{4.98}$$

Соңғы екі теңдікке үйірткінің қасиетін пайдаланайық:

$$y(t)=\int_0^t f(t-u)w'(t-u)du\,, \tag{4.99}$$

$$y(t)=w(t)f(0)+\int_0^t w(t-u)f'(u)du\,. \tag{4.100}$$

Сонымен, іздестіріп отырған дербес $y(t)$ шешімді 4.97-4.100–формулардан табамыз. Демек, егер (4.93)-(4.94)–есептерді шешімі белгілі болса, Дюамель интегралы әдісімен (4.91)-(4.92)–есептердің шешімін бір квадратура арқылы табамыз.

Мысал. $y''(t)-2y'(t)=t^2e^t$ теңдеуінің $y(0)=y'(0)=0$ Коши шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімді табайық, $t>0$.

Шешімі. Берілген теңдеуді шешу үшін қосымша дифференциал теңдеуді қарастырайық:

$$w''(t)-2w'(t)=1,\ w(0)=w'(0)=0$$

және $w(t)$ осы теңдеудің шешімі болсын, ал $W(p)\dot{\to}w(t)$ болсын.

Қосымша дифференциал теңдеудің операторлық теңдеуін табайық:

$$p^2W(p)-2pW(p)=\frac{1}{p}\,.$$

Осыдан $W(p)$ кескінді табайық және оны жай бөлшектерге жіктейік:

$$W(p)=\frac{1}{p^2(p-2)}=\frac{1}{2p^2}-\frac{1}{4p}+\frac{1}{4(p-2)}.$$

$W(p)$ кескінінің түпнұсқасын табайық:

$$w(t)=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2t}.$$

Осыдан $w'(t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}$, онда 4.97–формуладан іздестіріп отырған дифференциал теңдеудің дербес шешімін табамыз:

$$y(t)=\int_0^t f(u)w'(t-u)du=\int_0^t u^2e^u\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2(t-u)}\right)du=1+e^{2t}-2e^t+t^2e^t,\ t>0.$$

4.28. Айнымалы коэффициентті екінші дәрежелі сызықты дифференциал теңдеуді шешу

Біз айнымалы коэффициентті сызықты дифференциал теңдеудің

$$\begin{aligned}&\left(a_0t^2+a_1t+a_2\right)y''(t)+\left(t_0t^2+t_1t+t_2\right)y'(t)+\\&+\left(c_0t^2+c_1t+c_2\right)y(t)=f(t)\end{aligned}\qquad(4.101)$$

Коши шарттарын қанағаттандыратын

$$y(0)=y_0,\ y'(0)=y_1\qquad(4.102)$$

шешімін табайық, мұндағы a_n,b_n,c_n – тұрақты коэффициенттер, $i=\overline{0.2}$, y_0,y_1 – белгілі тұрақты сандар, $f(t)$- нақты t айнымалы белгілі функция әрі үзіліссіз түпнұсқа, $y(t)$- іздестіріп отырған (4.101)– дифференциал теңдеудің дербес шешімі және $y(t)$ әрі оның $y'(t),y''(t)$ туындыларын үзіліссіз түпнұсқа, $y(t)$ белгісіз функцияның кескіні $Y(p)$ болсын. (4.101)–теңдіктің екі жағын e^{-pt} функцияға көбейтіп, оны t айнымалы бойынша $0-$ ден $n-$ ге дейін интегралдайық сонда:

$$\int_0^\infty \left(a_0 t^2 + a_1 t + a_2\right) y''(t) e^{-pt} dt + \int_0^\infty \left(b_0 t^2 + b_1 t + b_2\right) y'(t) e^{-pt} dt + \tag{4.103}$$

$$+ \int_0^\infty \left(c_0 t^2 + c_1 t + c_2\right) y(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt.$$

(4.96)–формулаға кескінді дифференциалдау (4.10-тақырып, 4.7-теорема) теореманы $Y^k(p)$ функцияға қолдайық:

$$t^m y^{(k)}(t) \leftarrow (-1)^m \frac{d^m}{dp^m}\left[p^k Y(p) - p^{k-1} y_0 - \ldots - y_{k-1}\right]. \tag{4.104}$$

Кескіннің сызықты қасиетін (4.5-тақырып) және (4.104), (4.102), формулаларды пайдаланып, (4.103)-теңдікті мына түрге түрлендіреміз:

$$a_0 \frac{d^2}{dp^2}\left[p^2 Y(p)\right] - a_1 \frac{d}{dp}\left[p^2 Y(p)\right] + a_1 y_0 + a_2\left[p^2 Y(p) - p y_0 - y_1\right] + \tag{4.105}$$

$$+ b_0 \frac{d^2}{dp^2}\left[pY(p)\right] - b_1 \frac{d}{dp}\left[pY(p)\right] + b_2\left[pY(p) - y_0\right] +$$

$$+ c_0 \frac{d^2 Y(p)}{dp^2} - c_1 \frac{dY(p)}{dp} + c_2 Y(p) = F(p).$$

Осы теңдікті түрлендірейік:

$$\frac{d^2}{dp^2}\left[\left(a_0 p^2 + b_0 p + c_0\right) Y(p)\right] - \frac{d}{dp}\left[\left(a_1 p^2 + b_1 p + c_1\right) Y(p)\right] + \tag{4.106}$$

$$+ \left(a_2 p^2 + b_2 p + c_2\right) Y(p) + \left(a_1 - a_2 p - b_2\right) y_0 - a_2 y_1 = F(p).$$

Соңғы теңдік айнымалы коэффициентті $Y(p)$ кескінге тәуелді дифференциал теңдеу. Сонымен, (4.101)–теңдеу $y(t)$ шешімінің $Y(p)$ кескінін табу үшін (4.106)–теңдеуді шешу керек, одан соң $Y(p)$ кескіннің сәйкес түпнұсқасын тапсақ жеткілікті.

Мысал. Мына айнымалы коэффициентті дифференциал теңдеудің дербес шешімін табайық:

$$ty''(t) + y'(t) + y(t) = t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Шешімі. 4.104–формуладан және Коши шарттарынан

$$y(t) \leftarrow Y(p),\ y'(t) \leftarrow pY(p),\ \ldots$$

$$ty''(t) \xleftarrow{\cdot} -\frac{d}{dp}\left[p^2Y(p)\right],\ t \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{p^2}\cdot$$

Сонда берілген дифференциал теңдеудің операторлық түрін мына түрде анықтаймыз:

$$-\frac{d}{dp}\left[p^2Y(p)\right]+pY(p)+Y(p)=\frac{1}{p^2},\ p^2\frac{dY(p)}{dp}+(p-1)Y(p)=-\frac{1}{p^2}\cdot$$

Соңғы теңдеу, бірінші дәрежелі біртекті емес $Y(p)$ кескінге тәуелді дифференциал теңдеу, ал оның шешімі

$$Y(p)=c\frac{e^{-\frac{1}{p}}}{p}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2},$$

мұндағы $c-$ тұрақты сан. $Y(p)$ кескіннің $y(t)$ түпнұсқасын табамыз:

$$y(t)=cI_0\left(2\sqrt{t}\right)-1+t,\ t>0\,.$$

Есептің шарты бойынша $y(t)_{t=0}=y_0=0$. Сондықтан $c=1$, ал $I_0(p)=1$. Сонда $y(t)=I_0\left(2\sqrt{t}\right)+t-1.$

4.29. Тұрақты коэффициентті сызықты дифференциалды теңдеулер жүйесі

Мына жүйенің дербес шешімін табайық:

$$\begin{cases} y_1'(t)+a_{11}y_1(t)+a_{12}y_2(t)+\ldots+a_{1n}y_n(t)=f_1(t), \\ y_2'(t)+a_{21}y_1(t)+a_{22}y_2(t)+\ldots+a_{2n}y_n(t)=f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(t)+a_{n1}y_1(t)+a_{n2}y_2(t)+\ldots+a_{nn}y_n(t)=f_n(t), \end{cases} \tag{4.107}$$

$$y_1(0)=y_{10},\ y_2(0)=y_{20},\ldots,\ y_n(0)=y_{n0},$$

мұндағы $a_{km}-$ тұрақты сандар, $k=\overline{1.n},\quad m=\overline{1.n},\quad y_{k0}-$ белгілі бастапқы мәндер, $f_k(t)-$ нақты t аргументті түпнұсқа, ал $y_k(t)$ берілген жүйенің дербес шешімдері әрі өздері және олардың бірінші ретті туындылары үзіліссіз түпнұсқа.

Енді $y_k(t) \xleftarrow{\cdot} Y_k(p),\ f_k(t) \xleftarrow{\cdot} F_k(p)$ болсын. (4.107)–жүйенің әрқайсысын e^{-pt} функцияға көбейтіп және одан t айнымалы

бойынша $0-$ден $\infty-$ке дейін интегралдайық, түпнұсқаны дифференциалдау теореманы пайдаланып, мына жүйені аламыз:

$$pY_1(p)-y_{10}+a_{11}Y_1(p)+a_{12}Y_2(p)+\ldots+a_{1n}Y_n(p)=F_1(p),$$
$$pY_2(p)-y_{20}+a_{21}Y_1(p)+a_{22}Y_2(p)+\ldots+a_{2n}Y_n(p)=F_2(p),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$pY_n(p)-y_{n0}+a_{n1}Y_1(p)+a_{n2}Y_2(p)+\ldots+a_{nn}Y_n(p)=F_n(p).$$

Осы жүйені түрлендірейік:

$$\begin{cases}(a_{11}+p)Y_1(p)+a_{12}Y_2(p)+\ldots+a_{1n}Y_n(p)=F_1(p)+y_{10},\\ a_{21}Y_1(p)+(a_{22}+p)Y_2(p)+\ldots+a_{2n}Y_n(p)=F_2(p)+y_{20},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}Y_1(p)+a_{n2}Y_2(p)+\ldots+(a_{nn}+p)Y_n(p)=F_n(p)+y_{n0}.\end{cases} \tag{4.108}$$

(4.108)–жүйенің n ретті анықтауыш нөлге тең болмасын деп ұйғарайық: $\Delta(p)=\begin{vmatrix} a_{11}+p & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}+p & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}+p\end{vmatrix}\neq 0.$

Онда Крамер теоремасы [14,17] бойынша, (4.108)–жүйесінің шешімін табамыз:

$$Y_k(p)=\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}[F_k(p)+y_{k0}]\Delta_{km}(p)}{\Delta(p)}, \tag{4.109}$$

мұндағы $\Delta_{km}(p)$ анықтауыштың k жатық және m тік жолдарының қиылысу жерінде орналасқан элементтің алгебралық толықтауышы ([17]).

Сонымен, берілген жүйенің дербес шешімін табу үшін, (4.109)–формуладан анықталған $Y_k(p)$ кескіннің сәйкес $Y_k(t)$ түпнұсқасын анықтасақ жеткілікті.

Мысал. Мына жүйені шешейік:

$$\begin{cases}y'(t)-2y(t)-z(t)=\cos t,\\ z'(t)+y(t)+2z(t)=\sin t,\end{cases}$$
$$y(0)=0,\ z(0)=0.$$

Шешімі. $y(t),\ \ z(t)$ берілген жүйенің дербес шешімі, ал $Y(p)$ мен $Z(p)$ олардың сәйкес кескіні болсын. Онда берілген жүйенің операторлық теңдеулерге жүйесі мына түрде анықталады:

$$\begin{cases}(-2+p)Y(p)-4Z(p)=\dfrac{p}{p^2+1},\\ Y(p)+(2+p)Z(p)=\dfrac{1}{p^2+1}.\end{cases}$$

Осы жүйенің $\Delta(p)$ анықтауышын есептейік:

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix}-2+p & -4\\ 1 & 2+p\end{vmatrix}=p^2\neq 0.$$

Крамер формуласы бойынша $Y(p)$ мен $Z(p)$ кескіндерге тәуелді жүйені шешейік, онда:

$$Y(p)=\frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)},\ Z(p)=-\frac{2}{p^2(p^2+1)}.$$

Анықталған рационал бөлшектерді жай бөлшектерге жіктейік:

$$Y(p)=\frac{4}{p^2}+\frac{2}{p}-\frac{2p+3}{p^2+1},$$

$$Z(p)=-\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^2+1}.$$

Ал бұл кескіндердің түпнұсқалары берілген жүйенің дербес шешімі болады, яғни

$$\begin{cases}y(t)=4t+2-2\cos t-3\sin t,\\ z(t)=-2t+2\sin t.\end{cases}$$

4.30. Үйірткі түрдегі Вольтердің интегралдық теңдеуін шешу

Анықтама. Егер теңдеудегі белгісіз функция интеграл астындағы функция болса, онда ол теңдеу *интегралдық теңдеу* деп аталады .

Анықтама. Мына интегралдық теңдеу

$$\int_a^b K(t,u)y(u)du=f(t), \tag{4.110}$$

бірінші түрдегі Вольтердің интегралдық теңдеуі деп аталады, ал

$$y(t)-\lambda\int_u^t K(t,u)y(u)du=f(t) \tag{4.111}$$

екінші түрдегі Вольтердің интегралдық теңдеуі деп аталады, мұндағы $f(t)$ -белгілі функция, $y(t)$-белгісіз функция, λ-кез келген параметр,

$K(t,u)$ белгілі t мен u айнымалыларға тәуелді функция және ол *интегралдық теңдеудің ядросы* деп аталады.

Операциялық есептеу арқылы, Вольтердің теңдеуін шешуге болады, егер оның ядросы t мен u аргументтері арқылы мына түрде берілсе:

$$K(t,u) = K(t-u).$$

Бұл жағдайда Вольтердің интегралдық теңдеуін *үйірткі түрдегі интегралдық теңдеуі* деп атаймыз .

Енді $K(t-u)$ ядро мен $f(t)$ функциялар t - ға тәуелді түпнұсқа болсын, яғни:

$$y(t) \leftarrow Y(p), f(t) \leftarrow F(p), K(t-u) \leftarrow K(p).$$

Берілген (4.111)–Вольтердің екінші түрдегі интегралдық теңдеуінің екі жағын e^{-pt} функцияға көбейтейік :

$$y(t)e^{-pt} - \int_u^t K(t-u)y(u)e^{-pt}du = f(t)e^{-pt} .$$

Осы интегралдық теңдеудің екі жағын t айнымалы бойынша 0-ден ∞ -ке дейін интегралдайық:

$$\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt - \lambda\int_0^\infty \left\{\int_0^t K(t-u)y(u)du\right\}e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \quad (4.112)$$

Үйірткі кескіннің теоремасын пайдаланып, осы теңдіктен берілген (4.111)–интегралдық теңдеудің кескін түрдегі теңдеуін аламыз:

$$Y(p) - \lambda K(p)Y(p) = F(p). \quad (4.113)$$

Бұл теңдеу екінші түрдегі Вольтердің интегралдық теңдеуінің *операторлық теңдеуі* деп аталады .

(4.113)–теңдеуден $Y(p)$ кескінді табайық:

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1-\lambda K(p)}.$$

Осы табылған теңдеуден $Y(p)$ кескіннің $y(t)$ түпнұсқасын табамыз және ол іздестіріп отырған (4.111)–интегралдық теңдеудің шешімі болады.

Бірінші түрдегі Вольтердің интегралдық теңдеуінің операторлық теңдеуі мына түрде өрнектеледі:

$$K(p)Y(p) = F(p).$$

Осыдан, бірінші түрдегі Вольтердің интегралдық теңдеуі шешімінің кескінін табамыз:

$$Y(p)=\frac{F(p)}{K(p)}.$$

Мысал. 1. Бірінші түрдегі Вольтердің интегралдық теңдеуін шешейік

$$\int_0^{\infty} sin(t-u)y(u)du = sin^2 t\cdot$$

Шешімі. Берілген теңдеудегі ядро $K(t)=sin\,t, f(t)=sin^2 t.$

Енді $sin^2 t$ және ядро $sin\,t$ түпнұсқалардың кескіндерін табайық :

$$sin^2 t=\frac{1}{2}(1-cos\,2t)\leftarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right),\quad sin\,t\leftarrow\frac{1}{p^2+1}.$$

Егер $y(t)\leftarrow Y(p)$ болса, онда берілген интегралдық теңдеудің операторлық теңдеуін мына түрде анықтаймыз:

$$\frac{1}{p^2+1}Y(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right).$$

Осыдан $Y(p)$ кескінді табайық және оны жай бөлшектерге жіктейік:

$$Y(p)=\frac{2(p^2+1)}{p(p^2+4)}=\frac{1}{2p}+\frac{3p}{2(p^2+4)}.$$

Осы анықталған $y(t)$ түпнұсқасын $Y(p)$ кескіні бойынша түпнұсқасының өзін табамыз, сонда :

$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}cos\,2t,\quad t>0\cdot$$

2. Екінші түрдегі Вольтердің интегралдық теңдеуін шешейік:

$$y(t)-\int_0^t (t-u)y(u)du = sin\,t.$$

Шешімі. Берілген интегралдық теңдеуде $K(t)=t, f(t)=sin\,t.$ Онда,

$$f(t)=sin \overset{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{p^2+1}, K(t)=t \overset{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{p^2}.$$

Егер $y(t) \overset{\cdot}{\leftarrow} F(p)$ болса, онда берілген интегралдық теңдеудің операторлық теңдеуін мына түрде анықтаймыз :

$$Y(p)=\frac{1}{p^2}Y(p)=\frac{1}{p^2+1}.$$

Осы операторлық теңдеуден $Y(p)$ кескінді табайық :

$$Y(p)=\frac{p^2}{(p^2-1)(p^2+1)}.$$

Соңғы теңдікті жай бөлшектерге жіктейік, сонда

$$Y(p)=\frac{1}{4(p-1)}-\frac{1}{4(p+1)}+\frac{1}{2(p^2+1)}.$$

Осыдан берілген теңдеудің шешімін табамыз :

$$y(t)=\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}sin t, \quad t>0.$$

4.31. Тұрақты коэффициентті дербес туындылы сызықты дифференциал теңдеуді шешу

Екінші дәрежелі дифференцил теңдеуді қарастырайық:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}+a_{22}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+ \qquad (4.114)$$
$$+2a_{13}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+2a_{23}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+a_{33}u(x,t)=f(x,t),$$

және тағайындалған t үшін 4.114–теңдеулердің бастапқы шартын, ал тағайындалған x үшін шекаралық шартты қанағаттандыратын 4.114–теңдеудің шешімін іздестірейік, мұндағы $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ - тұрақты коэффициенттер, $f(x,t)$ - екі айнымалы x пен t - ға тіуелді функция әрі t айнымалы бойынша түпнұсқа .

Іздестіріп отырған $u(x,t)$ шешім және оның бірінші мен екінші туындыларының t бойынша Лаплас түрлендірулері бар болсын әрі $u(x,t)$ функцияның және оның туындыларының t бойынша өсу дәрежесі x - ке тәуелді болсын, ал $u(x,t) \dot{\leftarrow} \bigcup(x,p), f(x,t) \dot{\leftarrow} F(x,p)$ болсын.

Енді (4.114)–теңдеудің екі жағында e^{-pt} функцияға көбейтейік және оны t бойынша 0-ден ∞ - ке дейін интегралдайық, сонда:

$$a_{11}\int_0^{\infty}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}e^{-pt}dt + 2a_{12}\int_0^{\infty}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}e^{-pt}dt +$$

$$+ a_{22}\int_0^{\infty}\frac{\partial^2 u(xt)}{\partial t^2}e^{-pt}dt + 2a_{13}\int_0^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\cdot e^{-pt}dt + 2a_{23}\int_0^{\infty}\frac{du(x,t)}{\partial t}e^{-pt}dt + . \quad (4.115)$$

$$+ a_{33}\int_0^{\infty}u(x,t)e^{-pt}dt = \int_0^{\infty}f(x,t)e^{-pt}dt.$$

Осы теңдіктің әрбір қосылғышының кескінін жеке-жеке табайық .

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ -*қосылғыштың кескіні :*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \dot{\leftarrow} \int_0^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-pt}dt = e^{-pt}u(x,t)\Big|_{t=0}^{t=\infty} +$$

$$+ p\int_0^{\infty}u(x,t)e^{-pt}dt = -u(x,0) + pU(x,p)$$

Осыдан,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \dot{\leftarrow} pU(x,p) - u(x,0). \quad (4.116)$$

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ - *қосылғыштың кескіні* :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \dot{\leftarrow} \int_0^{\infty}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}e^{-pt}dt = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-pt}\Big|_0^{\infty} + p\int_0^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-pt}dt =$$

$$= -\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + pu(x,t)e^{-pt} \Big|_0^\infty + p^2 \int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}\,dt =$$

$$= p^2 U(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}.$$

Осыдан ,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \underset{\cdot}{\overset{\cdot}{\leftarrow}} p^2 U(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}. \qquad (4.117)$$

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ - *қосылғыштың кескіні:*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \underset{\cdot}{\overset{\cdot}{\leftarrow}} \int_0^\infty \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left[u(x,t)e^{-pt}\right]dt =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}\,dt = \frac{\partial U(x,p)}{\partial x}.$$

Осыдан ,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \underset{\cdot}{\overset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{\partial U(x,p)}{\partial x}. \qquad (4.118)$$

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ *-қосылғыштың кескіні :*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \underset{\cdot}{\overset{\cdot}{\leftarrow}} \int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[u(x,t)e^{-pt}\right]dt =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}\,dt = \frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}.$$

Осыдан,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \underset{\cdot}{\overset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}. \qquad (4.119)$$

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}$ *-қосылғыштың кескіні:*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \overset{\cdot}{\leftarrow} \int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-pt}\right] dt =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-pt} dt = p \frac{\partial U(x,p)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,0)}{\partial x}.$$

Осыдан,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \overset{\cdot}{\leftarrow} p \frac{\partial U(x,p)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,0)}{\partial x}. \qquad (4.120)$$

Анықталған (4.116)-(4.120)–кескіндерді пайдаланып, берілген (4.115)–дифференциял теңдеудің операторлық теңдеуін аламыз :

$$a_{11} \frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} + 2a_{12} p \frac{\partial U(x,p)}{\partial x} + a_{22} p^2 U(x,p) +$$

$$+ 2a_{13} \frac{\partial U(x,p)}{\partial x} + 2a_{23} p U(x,p) + a_{33} U(x,p) -$$

$$- 2a_{12} \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} - a_{22} p u(x,0) - a_{22} \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} - 2a_{23} u(x,0) = F(x,p).$$

Соңғы теңдік, (4.115) $U(x,p)$ кескінге тәуелді жай дифференциал теңдеу. Осы теңдеуді шешіп, $U(x,p)$ кескінді анықтаймыз, содан соң $u(x,t)$ функцияны табамыз.

Мысал. Толқындық теңдеудің

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

шекаралық шарты:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$

бастапқы шарты :

$$u(x,o) = E \sin \frac{\pi x}{e}, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$$

қанағаттандыратын шешімді табайық.

Шешім. Толқындық теңдеуін e^{-pt} функцияға көбейтейік және оны t бойынша 0-ден ∞ - ке дейін интегралдайық:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} e^{-pt} dt - \frac{1}{a^2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} e^{-pt} dt = 0 \cdot \qquad (4.121)$$

Енді (4.117), (4.119)–формулаларды және шекаралық пен бастапқы шарттарды пайдаланып, берілген толқынның операторлық теңдеуін аламыз:

$$\frac{\partial \bigcup(x,p)}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2}\bigcup(x,p) = -\frac{PE}{a^2} sin\frac{\pi x}{l}.$$

Осы теңдеуді шешейік, сонда:

$$\bigcup(x,p) = c_1 e^{\frac{p}{a}x} + c_2 e^{-\frac{p}{a}x} + \frac{PE}{p^2 + \frac{a^2\pi^2}{l^2}} \cdot sin\frac{\pi x}{l},$$

мұндағы c_1, c_2 - тұрақты сандар. Шекаралық шарттарды ескеріп, $c_1 = c_2 = 0$.

Онда,

$$\bigcup(x,p) = \frac{PE}{p^2 + \frac{a^2\pi^2}{l^2}} sin\frac{\pi x}{l}.$$

Осы кескіннің түпнұсқасын тауып, берілген теңдеудің шешімін анықтаймыз:

$$u(x,t) = E\cos\frac{\pi at}{l} \cdot sin\frac{\pi x}{l}.$$

4.32. Шектік теоремаларды және Парсеваль формуласын пайдаланып меншіксіз интегралдарды есептеу

1. Бізге $\frac{f(t)}{t}$ функция берілсін және ол үзіліссіз түпнұсқа және $F(p)$ оның кескіні болсын, яғни $\frac{f(t)}{t} \leftarrow F(p)$.

Егер $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt$ меншіксіз интеграл жинақты болса, онда

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(x)dx$$

теңдігі орындалатындығы бізге белгілі (4.10-тақырып, (4.45)-формула), ал егер $\int_0^\infty f(t)dt$ меншіксіз интеграл жинақсыз болса, онда

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = F(0)$$

теңдік орындалады (4.11-тақырып, (4.32)- формула).

2. Бізге $f(t)$ мен $\varphi(t)$ түпнұсқалар берілсін және $f(t) \xleftarrow{\cdot\cdot} F(p)$, $\varphi(t) \xleftarrow{\cdot\cdot} \Phi(p)$ болсын, ал $\int_0^{\infty} f(t)\Phi(t)dt$ мен $\int_0^{\infty} \varphi(t)F(t)dt$ меншіксіз интегралдары абсалютті жинақты болсын.

Онда Парсеваль формуласы мына түрде болады (4.16-тақырып, (4.45)-формула):

$$\int_0^{\infty} f(t)\Phi(t)dt = \int_0^{\infty} \varphi(t)F(t)dt.$$

Мысал. Мына интегралдарды есептейік:

1. $\int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt, \quad a > 0;$ **2.** $\int_0^{\infty} \frac{e^{at} - e^{-bt}}{t} dt, \quad a > 0, \quad b > 0;$

3. $\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha t - \cos \beta t}{t} dt, \quad \alpha, \quad \beta$ -нақты сандар; **4.** $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t} dt$.

Шешімі. 1. $f(t) = \frac{\sin at}{t}$ түпнұсқаның кескінін табайық:

$$\sin at \xleftarrow{\cdot\cdot} \frac{a}{p^2 + a^2}.$$

Онда, 4.33–формуладан:

$$\frac{\sin at}{t} \xleftarrow{\cdot\cdot} \int_0^{\infty} \frac{adz}{z^2 + a^2} = arctg\frac{a}{p},$$

ал 4.32–формуладан:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = arctg\frac{a}{p}\Big|_{p=0} = \frac{\pi}{2}.$$

2. $f(t) = e^{at} - e^{-bt}$ функцияның кескінін табайық:

$$e^{at} - e^{bt} \overset{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b},\ Re > max\{a,b\}.$$

Онда 4.37–формуладан

$$\int_0^\infty \frac{e^{at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right) dx = ln\frac{b}{a}.$$

3. $f(t) = cos\,\alpha t - cos\,\beta t, \Phi(p) = \frac{1}{p}$ болсын, онда:

$$F(p) = \frac{p}{p^2+\alpha^2} - \frac{p}{p^2+\beta^2}, \varphi(t) = 1.$$

Енді Парсеваль формуласын пайдаланайық:

$$\int_0^\infty \frac{cos\,\alpha t - cos\,\beta}{t} dt = \int_0^\infty \left(\frac{t}{t^2+\alpha^2} - \frac{t}{t^2+\beta^2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} ln \frac{t^2+\alpha^2}{t^2+\beta^2} \Bigg|_0^\infty = -\frac{1}{2} ln \frac{a^2}{b^2} = ln\frac{a}{b}.$$

4. Тригонометриялық формуланы пайдаланайық:

$$sin^3 t = \frac{1}{4}(3\,sin\,t - sin\,3t).$$

Онда:

$$\int_0^\infty \frac{sin^3}{t} dt = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{3\,sin\,t - sin\,3t}{t} dt.$$

Енді $f(t) = 3\,sin\,t - sin\,3t$ және $\Phi(t) = \frac{1}{t}$ болсын, онда бұл түпнұсқаның кескіні мына сәйкес функциялар болады:

$$F(p) = \frac{3}{p^2+1} - \frac{3}{p+9}, \quad \varphi(t) = 1.$$

Онда Персеваль формуласынан:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 t}{t}dt=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\left(\frac{3}{t^2+1}-\frac{3}{t^2+9}\right)dt=\frac{3}{4}arctgt\Big|_0^{\infty}-\frac{1}{4}arctg\frac{t}{3}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{4}.$$

4.33. Фурье мен Лаплас түрлендірулерінің арасындағы байланыс

Бізге бүкіл OT сандар өсінде периодты емес $f(t)$ функциясы берілсін және ол мына екі шартты қанағаттандырсын:

1. Кез келген шектеулі интервалда $f(t)$ функция Фурье қатарына жіктелсін.

2. $f(t)$ функцияның абсалют шамасымен алынған меншіксіз $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$ интегралы бар және жинақты болсын.

Егер $f(t)$ функцияға жоғарыдағы екі шарт орындалса, онда бұл функцияны Фурье интегралы арқылы өрнектеуге болады, біз бұл интегралды комплекс түрде жазайық:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)e^{iwt}dw, \qquad (4.122)$$

мұндағы

$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iwt}dt\cdot \qquad (4.123)$$

Фурье қатары үшін, $f(t)$ функцияның бірінші түрдегі үзілісті нүтелерде функцияның Фурье интегралы

$$\frac{f(t_0-0)+f(t_0+0)}{2}$$

өрнекке тең, мұндағы t_0-үзілісті нүкте, $f(t_0-0)$мен $f(t_0+0)$ функцияның t_0 нүктедегі сәйкес сол және оң жақты шектердің мәндері.

Сонымен, егер әрбір периодты функцияға оның спектрлік тізбегі сәйкес қойылса, онда периодты емес $f(t)$ функцияға да $F(w)$ комплекс функцияны сәйкес қоямыз және ол функцияны біз *Фурье түрлендіруі* немесе *спектрлік функция* деп атаймыз.

Жоғарыдағы (4.123)–формуладан, берілген $f(t)$ функция арқылы осы функцияның $F(w)$ спектрлік функциясын, ал (4.122) – формуладан, берілген $F(w)$ спектр бойынша алғашқы $f(t)$ функцияны табамыз.

Енді Лаплас пен Фурье түрлендірулерінің арасындағы байланысты қарастырайық. Ол үшін, біржақты Фурье түрлендіруін қарастырайық. Бұл жағдайда, $f(t)=0, \quad t<0$ болады. Онда (4.123) – формула мына түрге түрленеді:

$$F(w)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt \ . \qquad (4.124)$$

Бұл теңдіктің оң жағы Лаплас интегралы болып табылады, егер $iw=p$ болса, яғни комплекс айнымалы p тек комплекс айнымалының жорамал бөлігі болса. Лаплас түрлендіруін $f(t)$ функцияға қолдануға болады тек сол жағдайда, егер функция

$$|f(t)|\le Me^{St}$$

теңсіздігін қанағаттандырса. Онда, біржақты Фурье түрлендіруі бар болуы үшін

$$\int_0^{\infty}|f(t)|dt \qquad (4.125)$$

интегралының жинақты болуын талап етеміз. Ал бұл соңғы талап, яғни (4.125)–интегралдың жинақты болуы, $f(t)$ функцияның өсу жылдамдығына қарағанда тым қатаң шарт. Мысалы, жиі кездесетін $\chi(t),\ sint,\ cost$ функциялар үшін $\int_0^{\infty}|\chi(t)|dt$, $\int_0^{\infty}|sint|dt$, $\int_0^{\infty}|cost|dt$ интегралдар жинақсыз болады, ал дәрежелі $t, \quad t^2,\ldots$ функциялар үшін де (4.125)–интеграл жинақсыз. Бірақ бұл функциялардың Лаплас түрлендіруі бойынша кескіндері бар. Бұлай болуының мәні мынада, Лаплас түрлендіруіндегі интеграл астындағы функцияның модулі, яғни

$$\left|f(t)e^{-pt}\right|=|f(t)|e^{-St}, \quad p=s+i\omega, \quad Re\,p=s,$$

$|f(t)|$ модульден айырмашылығы, $s>0$ болғанда e^{-st} көбейткіш оны тез кемімелі жасайды және оның кемімелі болуы Лаплас интегралының абсолютті жинақты болуын қамтамассыз етеді. Түпнұсқаның анықтамасында 3) шарттағы $s_0<0$ болса, онда

$$\int_0^{\infty}|f(t)|dt<M\int_0^{\infty}e^{s_0t}dt=M\left.\frac{e^{s_0t}}{s_0}\right|_0^{\infty}=-\frac{M}{s_0},$$

себебі $s_0 < 0, \quad t \to +\infty$ болғанда, $e^{s0t} \to 0$ болады. Бұл жағдайда $f(t)$ функцияның Лаплас және Фурье түрлендірулері бар. Жоғарыдағы $s_0 < 0$ шарт жорамал өстің Лаплас интегралының жинақты облысына тиісті болатынын білдіреді. Онда кері түрлендіру:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\, p-i\infty}^{Re\, p+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad f(t) \leftarrow F(p)$$

формуладағы γ мен p сандары: $\gamma = 0, p = i\omega$ деп жазсақ, онда $dp = id\omega$ және

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(iw) e^{iwt} dw. \qquad (4.126)$$

Сонымен, біз Фурье түрлендіруінің кері түрлендіру формуласын таптық. Енді (4.126) және (1.122)–формулаларды салыстырсақ, онда олардың арасында елеусіз айырмашылық бар, ол $F(iw)$ мен $F(w)$ функцияларының жазылуында. Ал бұл айырмашылық бірдей болу үшін Фурье түрлендіруінде, яғни (4.122)–формуладағы $F(w)$ функцияның орнына $F(iw)$, ал Лаплас интегралындағы p санды комплекс санның жорамал бөлігі деп қарастырсақ болғаны.

Сонымен, Лаплас түрлендіруіндегі $f(t)$ түпнұсқа (4.125)–интегралға қойылған қосымша шартты қанағаттандырса, онда бұл функцияға Фурье түрлендіруі де бар және Фурье түрлендіруінің барлық қасиеттерін Лаплас түрлендіруінің қасиетерінен аламыз, бұл жағдайда $p = i\sigma$.

V тарау

ФУНКЦИОНАЛДЫҚ АНАЛИЗ

Біз I-III ([17]) тарауларда n өлшемді кеңістіктегі нүктелік жиындарды әрі онда анықталған фунцияларды зерттедік және математикалық анализдегі ұғымдарды, мысалы функциялық тәуелділік ұғымды жалпыладық. Функционалдық анализ пәні функциялардан, векторлардан, матрицалардан, тізбектерден анықталған шектеулі және шексіз кеңістіктерді зерттейді. Математикалық анализ, функциялар теориясы, жиындар теориясы, алгебра, геометрия пәндері функционалдық анализде бірге қосылып функциялық тәуелділіктің терең мағынасын ұсынады. Осы тараудың мақсаты (қысқаша), біріншіден, жиындар элементтерінің арақашықтығын белгілі заңдылық бойынша анықталған жиындарды зерттеу (метрикалық кеңістіктер, сызықты кеңістіктер), екіншіден, кеңістікті сандар өсіне бейнелейтін (функционалдар) және кеңістікті кеңістікке бейнелейтін (операторлар) бейнелердің қасиеттерін қарастыру. Мысалы, үзіліссіз функционалдарға үзіліссіз функциялардың көптеген қасиеттері орындалады, ал операторлар функциялардың жалпы мағынасы. Россияда фунционалдық анализ идеясын насихаттау Л.А. Люстерник (Основные понятия функционального анализа. Успехи математических наук, I, 1936) пен В.В. Немыцкийдің (Метод неподвижных точек в анализе. Успехи математических наук, I, 1936) ғылыми еңбектерінен басталады, ал Қазақстанда, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚазҰҒА академигі М.Өтелбаевтың жетекшілігімен 1971 жылдан бастап дифференциалдық операторлар идеясын насихаттаудан басталады.

5.1. Метрикалық кеңістіктер және негізгі ұғымдар

Барлық жинақтылықтар (жай, бірқалыпты, орташа, норма бойынша, әлсіз жинақтылықтар) мен сандар тізбектің x_n элементтерінің (x_n -сандар, векторлар, функциялар) x элементке жинақтылық ұғымдарына ортақ ұғым мынаны білдіреді: n нөмірі шексіз өскенде сандар тізбегінің x_n элементтері x элементке жақындауы осы элементтердің арақашықтықтарының шексіз кемуінде және осы арақашықтықтарды қандай етіп алуымызға байланысты шектің анықтамасы әртүрлі болады. Егер біз кез

келген жиынды қарастырсақ, онда біз осы жиында анықталған арақашықтық белгілі бір шартты қанағаттандыруы керек.

Анықтама. Кез келген X жиын *метрикалық кеңістік* деп аталады, егер X жиынның кез келген екі x, y элементтеріне нақты $\rho_X(x, y) = \rho(x, y)$ оң саны анықталып, $\rho(x, y)$ санға мына шарттар орындалса:

1) $\rho(x, y) = 0$ болады, егер $x = y$ болғанда ғана (*тепе-теңдік аксиома*);

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*симметриялық аксиома*);

3) кез келген $x, y, z \in X$ үшін

$$\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(y, z)$$ (*үшбұрыш аксиома*);

Анықтамадағы $\rho(x, y)$ сан X жиынның x, y элементтерінің *арақашықтығы* немесе X жиынның *метрикасы,* ал жоғарыдағы үш шарт *метриканың аксиомалары* деп аталады. Метрикалық кеңістіктің элементтері оның *нүктелері* деп аталады. Метрикалық кеңістік $M = (X, \rho)$ таңбаменде белгіленеді.

Метрикалық X кеңістікке тиісті кез келген Y жиынның метрикасы X жиынның метрикасындай анықталса, онда Y метрикалық кеңістік болады және ол X метрикалық кеңістіктің *ішкі кеңістігі* деп аталады.

Анықтамадағы аксиомалар практикада кездесетін арақашықтықпен үйлеседі: арақашықтық әрқашанда оң сан; арақашықтық нөлге тең, егер ол нүктелер беттессе; x нүктеден y нүктеге дейінгі арақашықтық, y нүктеден x нүктеге дейінгі арақашықтыққа тең; x нүктеден y нүктеге дейінгі арақашықтық, z нүкте арқылы өтетін x пен y нүктелердің арақашықтығынан үлкен емес. Осы қасиеттер, жазықтықтағы арақашықтықтармен үш өлшемді кеңістіктегі арақашықтықтарға да орындалады.

Мысал. $X = R = (-\infty, \infty)$ сандар өсін қарастырайық. Егер $x, y \in R$ элементтер үшін метриканы мына түрде анықтасақ:

$$\rho_R(x, y) = |x - y|,$$

онда R жиын метрикалық кеңістік болады. Шынында да, метрика аксиомаларының орындалатынына оңай көз жеткізуге болады.

Анықтама. Бір метрикалық кеңістікте анықталған екі $\rho_1(x, y), \rho_2(x, y)$ *метрикалар эквивалентті* деп аталады, егер

$$\alpha\rho_1(x,y) \le \rho_2(x,y) \le \beta\rho_1(x,y),$$

мұндағы $\alpha > 0, \beta > 0$ тұрақты сандар, $x, y \in X$.

Анықтама. X метрикалық кеңістіктің x нүктелерінен (тағайындалған) берілген a нүктеге дейінгі арақашықтық r санынан кіші болса, яғни

$$\rho(x,a) < r,$$

онда осы теңсіздікті қанағаттандыратын x нүктелер жиыны центрі a нүкте, радиусы r-ге тең *ашық шар* немесе *шар* деп аталады және ашық шар $S(a,r)$ немесе $S_r(a) = \{x \in X : \rho(x,a) < r\}$ таңбалардың бірі арқылы белгіленеді, ал

$$\rho(x,a) \le a$$

теңсіздікті қанағаттандыратын x нүктелер жиыны *тұйық шар* деп аталады және ол $\overline{S}(a,r)$ $\overline{S_r}(a) = \{x \in X : \rho(x,a) \le r\}$ таңбаларымен белгіленеді. Егер $\rho(x,a) = r$ болса, онда осы теңдікті қанағаттандыратын x нүктелер жиыны центрі a нүкте, радиусы r-ге тең *сфера* деп аталады және $\sigma_r(a) = \sigma(a,r) = \{x \in X : \rho(x,a) = r\}$. Осы анықтамалардан мына теңдіктің орындалатынына оңай көз жеткізуге болады: $\overline{S_r}(a) = S_r(a) \cup \sigma_r(a)$.

Центрі x болатын кез келген ашық шар x *нүктенің маңайы* деп аталады.

Анықтама. X метрикалық кеңістіктің x_0 элементі осы кеңістіктің элементтерінен анықталған $\{x_n\}$ *тізбектің шегі* деп аталады, егер $n \to \infty$-да $\rho(x_n, x_0) \to 0$.

Бұл жағдайда $x_n \to x_0, n \to \infty$ немесе $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ таңбаларымен белгілейміз әрі $\{x_n\}$ тізбек жинақты (жай жинақты).

Математикалық анализ курсындағы шектер теориясымен ортақ келетін мына тұжырымдарды келтірейік:

1. Егер X метрикалық кеңістікегі $\{x_n\}$ нүктелер тізбегі $x_0 \in X$ нүктеге жинақты болса, онда осы нүктелер тізбектің кез келген $\{x_{n_k}\}$ тізбекшесіде x_0 нүктеге жинақты болады.

2. X метрикалық кеңістіктегі жинақты $\{x_n\}$ нүктелер тізбегінің тек бір ғана шегі бар.

Дәлелдеуі. $\{x_n\} \in X, \{y_n\} \in X$ тізбектері $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ болсын. Онда, кез келген $\varepsilon > 0$ және жеткілігінше үлкен n үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\rho(x_0, y_0) \le \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0) < \varepsilon .$$

Соңғы теңсіздіктегі x_0 мен y_0 тағайындалған нүктелер, ал ε кез келген оң сан болғандықтан теңсіздік тек қана $\rho(x_0, y_0) = 0$ болғанда ғана орындалады, яғни $x_0 = y_0$.

3. Егер X метрикалық кеңістіктегі $\{x_n\}$ нүктелер тізбегі $x_0 \in X$ нүктеге жинақты болса, онда X кеңістіктегі тағайындалған кез келген θ нүкте үшін $\rho(x_n, \theta)$ саны шектелген.

Дәлелдеуі. Үшбұрыш аксиомасы бойынша кез келген n және X кеңістіктегі x_n, x_0, θ нүктелер үшін

$$\rho(x_n, \theta) \le \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, \theta).$$

теңсіздігі орындалады. $\{x_n\}$ тізбек x_0 нүктеге жинақты болғандықтан $\{\rho(x_n, x_0)\}$ оң сандар тізбегі шектелген. Олай болса, $\rho(x_n, x_0)$ сандары L санынан үлкен емес, ал $\rho(x_0, \theta)$ тұрақты сан. Онда:

$$\rho(x_n, \theta) \le \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, \theta) \le L + \rho(x_0, \theta) = K.$$

Жоғарыда айтылғандардан мына *қорытындыға* келеміз: x нүкте $\{x_n\}$ тізбектің шегі болады тек сонда ғана, егер тізбектің барлық мүшелері x нүктенің маңайына тиісті болса, ал саны санаулы мүшелері осы маңайдан тыс жатса.

Егер $M \subset X$ жиын кез келген не ашық не тұйық шардың ішінде толығымен жатса, онда ол *жиын шектелген* немесе *арақашықтық бойынша шектелген* деп аталады.

4. Егер X метрикалық кеңістіктегі $\{x_n\}$ тізбек жинақты болса, онда ол тізбек шектелген.

Дәлелдеуі. Теорема шарты бойынша, $x_n \to x_0$ болсын, онда $\varepsilon = 1$ саны үшін $n \ge n_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n үшін $\rho(x_n, x_0) < 1$ теңсіздік орындалады. Енді r оң саны $1, \rho(x_1, x_0), \rho(x_2, x_0), ..., \rho(x_{n_0}, x_0)$ сандардың ең үлкені болсын, онда кез келген n үшін

$$\rho(x_n, x_0) \le r$$

теңсіздік орындалады. Демек, $\{x_n\}$ тізбек $\overline{S_r(x_0)}$ шардың ішінде орналасқан, сондықтан $\{x_n\}$ тізбек шектелген.

5.2. Шектік нүктелер. Ашық және тұйық жиындар

Жоғарыдағы қорытындыдан, жинақты тізбектердің нүктелері үшін шар ұғымы мына сипаттаманы береді: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ теңдік орындалуы үшін центрі x_0 болатын $S(x_0)$-ашық не тұйық шар үшін N нөмірі табылып, $n \geq N$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n үшін $x_n \in S(x_0)$ болуы қажетті әрі жеткілікті.

Бізге X метрикалық кеңістікте жататын M жиын берілсін.

Анықтама. X метрикалық кеңістіктің a нүктесі $(a \in X)$ $M \subset X$ жиынның *шектік нүктесі* деп аталады, егер $M \setminus a$ жиынның кем дегенде бір нүктесі a нүктенің кез келген маңайына тиісті болса, яғни кез келген r радиус үшін:

$$S_r(a) \cap (M \setminus a) \neq \emptyset.$$

Мысалы, $R = (-\infty, \infty) = X$ метрикалық кеңістіктегі $a = 0$ нүкте $(0,1) = M$ интервалдың шектік нүктесі болады, себебі $x_n = \frac{1}{2n} \in (0,1)$ және $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Осы анықтамадан: M жиынның шектік a нүктесінің кез келген маңайында осы жиынның шексіз нүктелері тиісті болады. Олай болса, метрикалық кеңістіктегі шектеулі жиынның шектік нүктесі жоқ.

Анықтама. $M \subset X$ жиынның барлық шектік нүктелері осы жиынның *туынды жиыны* немесе *шектік нүктелер жиыны* деп аталады және M' таңбамен белгіленеді.

Егер M жиын мен оның M' шектік нүктелер жиындарының қосындысы *тұйықталу жиын* деп аталады және ол $\overline{M}$ таңбамен белгіленеді, яғни $\overline{M} = M \cup M'$ және $M \subset M'$. Мысалы, $R = (-\infty, +\infty)$ сандар өсіндегі $(a,b) = M$ интервалдың тұйықталу интервалы $[a,b] = \overline{M}$ сегмент болады.

Метрикалық кеңістіктегі $M \subset X$ жиын *тұйық жиын* деп аталады, егер кез келген жинақты $\{x_n\} \in M$ тізбектің шегі M

жиынның өзіне тиісті болса, яғни $M = \overline{M}$. Мысалы, тұйық жиындарға кез келген $a \le x \le b$ сегмент, $x \ge a$ және $x \le b$ теңсіздікті қанағаттандыратын x нүктелер жиындары мысал бола алады.

Осы анықтымадан соң мына *тұжырымды* дәлелдейік: $\overline{S_r(a)}$ *тұйық шар әрқашанда тұйық жиын болады.* Осы тұжырымды дәлелдеу үшін алдағы тақырыптарда жиі кездесетін *арақашықтықтардың үзіліссіздігі* деп аталатын мына *қасиетті* дәлелдейік: *егер* $x_n \to x, y_n \to y$ *болса, онда* $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y), n \to \infty$.

Метрикалық X кеңістіктегі $a,b,c \in X$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\rho(a,c) \le \rho(a,b) + \rho(b,c).$$

Осыдан:

$$\rho(a,c) - \rho(b,c) \le \rho(a,b).$$

Енді соңғы теңсіздіктегі a мен b нүктелердің орнын алмастырайық:

$$\rho(b,c) - \rho(a,c) \le \rho(a,b), \qquad -[\rho(a,c) - \rho(b,c)] \le \rho(a,b),$$

мұндағы $\rho(a,b)$ оң сан болғандықтан

$$|\rho(a,c) - \rho(b,c)| \le \rho(a,b).$$

Онда $n \to \infty$ -да

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x,y)| = |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y) + \rho(x_n, y) - \rho(x,y)| \le \quad (5.1)$$
$$\le |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y)| + |\rho(x_n, y) - \rho(x,y)| \le \rho(y_n, y) + \rho(x_n, y).$$

Арақашықтықтардың үзіліссіздігі дәлелденді. Енді тұжырымды дәлелдейік, $x_n \in \overline{S_r(a)}$ болсын, онда тұйық шардың анықтамасы бойынша:

$$\rho(x_n, a) \le r$$

теңсіздігі орындалады. Егер $x_n \to x_0$ болса $(n \to \infty)$, онда арақашықтықтардың үзіліссіздік қасиеті бойынша

$$\rho(x_0, a) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) \le r$$

болады. Олай болса, $x_0 \in \overline{S_r(a)}$.

Сонымен, кез келген тұйық жиынның (шардың) шектік нүктелері осы тұйық жиынның өзіне тиісті болады. Дәлелденді.

Осы тұжырымнан, X метрикалық кеңістіктің кез келген жиынының шектік нүктелері осы кеңістікке тиісті болғандықтан, онда кеңістіктің өзі тұйық жиын болады.

Метрикалық кеңістіктегі тұйықталу жындарына мына *қасиеттер* орындалады:

1. Егер $M \subset N$ болса, онда $\overline{M} \subset \overline{N}$;

2. $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$;

3. $(\overline{M}) = \overline{\overline{M}} = \overline{M},$ яғни метрикалық кеңістіктегі кез келген жиынның тұйықталу жиыны тұйық жиын болады;

4. Бос жиынның тұйықталу жиыны бос жиын, яғни Ø=Ø .

Дәлелдеуі. Бірінші қасиетті дәлелдейік. Егер нүкте жиыншаның шектік нүктесі болса, онда ол нүкте бүкіл жиынның шектік нүктесі болады.

Екінші қасиеттің дәлелденуі. Шектік a нүкте үшін $a \in \overline{M \cup N}$ болсын және $a \notin \overline{M} \cup \overline{N}$ болсын деп ұйғарайық. Онда $a \notin \overline{M}$ және $a \notin \overline{N}$ болады, яғни a нүкте M және N жиындарының нүктесі емес әрі осы жиындардың шектік нүктесі емес. Олай болса, a нүктенің $S_{r_1}(a)$ маңайы табылып, $S_{r_1}(a) \cap M = \acute{\text{Ø}}$ болады, осы сияқты, a нүктенің $S_{r_2}(a)$ маңайы табылып, $S_{r_2}(a) \cap N = \acute{\text{Ø}}$. Егер $r = min\{r_1, r_2\}$ болса, онда a нүктенің $S_r(a)$ маңайында не M, не N жиындардың нүктелері жоқ, яғни $M \cup N$ жиынның нүктелері $S_r(a)$ маңайға тиісті емес. Ал бұл тұжырым орындалуы мүмкін емес, себебі $a \in \overline{M \cup N}$. Сонымен, $a \in \overline{M} \cup \overline{N}$ және a кез келген нүкте әрі $a \in \overline{M \cup N}$ болғандықтан

$$\overline{M \cup N} \subset \overline{M} \cup \overline{N} \qquad (5.2)$$

болады.

Енді кері енгізуді дәлелдейік. Ол үшін $M \subset M \cup N$, $N \subset M \cup N$ енгізулерден және 1-қасиеттен мына енгізулер орындалады:

$$\overline{M} \subset \overline{M \cup N} \text{ және } \overline{N} \subset \overline{M \cup N}.$$

Онда:

$$\overline{M} \cup \overline{N} \subset \overline{M \cup N}. \qquad (5.3)$$

(5.2) мен (5.3) енгізулерден, дәлелдеу керек $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ теңдікті аламыз.

Үшінші қасиеттің дәлелденуі. $M \subset \overline{M}$ болғандықтан, 2-қасиеттен $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$ болады. Сондықтан, үшінші қасиетті дәлелдеу үшін $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$ енгізуін дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін $x \in \overline{M}$

болсын, онда кез келген $r>0$ үшін $S_r(x)\cap\overline{M}\neq\acute{O}$ болады. Сондықтан, $\overline{M}$ жиынға тиісті y нүкте табылып, $y\in S_r(x)$ болады. Енді $\rho(x,y)=r_3$ болсын. Онда $S_{r-r3}(y)\subset S_r(x)$.

Шынында да, егер $z\in S_{r-r3}(y)$ болса, онда:

$$\rho(z,x)\le\rho(z,y)+\rho(y,z)<(r-r_3)+r_3=r.$$

Демек, $z\in S_r(x)$. Енді $y\in\overline{M}$ болғандықтан $S_{r-r3}(y)\cap M\neq\acute{O}$.

Олай болса, $S_r(x)\cap M\neq\acute{O}$, яғни $x\in\overline{M}$ және $\overline{\overline{M}}\subset\overline{M}$.

Төртінші қасиеттің дәлелденуі. X метрикалық кеңістіктегі $M\subset X$ жиын үшін дәлелдеуіміз бойынша:

$$\overline{M}=\overline{M}\cup\overline{\Phi}=\overline{M}+\overline{\Phi}$$

Соңғы теңдік, $\overline{\Phi}$ жиынның кез келген тұйық жиында жататынын білдіреді, ал бұл $\overline{\Phi}=\acute{O}$ болғанда орындалады. Қасиеттер толық дәлелденді.

Анықтама. Егер осы жиынның әрбір x нүктесінің $S_r(x)$ маңайы табылып, $S_r(x)\subset M$ болса, метрикалық кеңістіктегі M жиын *ашық жиын* деп аталады.

Ашық жиынға кез келген ашық шар және бүкіл X кеңістік мысал бола алады. Біз 3-қасиетте, кез келген $x\in S_r(a)$ нүктеге $S_{r_0}(x)\subset S_r(a)$ енгізілуі орындалатын $S_{r_0}(x)$ ашық шар тұрғыздық.

Анықтама. X метрикалық кеңістіктегі $M(M\subset X)$ жиын N *жиында тығыз* деп аталады, егер $N\subset\overline{M}$. Метрикалық кеңістіктегі M *жиын кеңістіктің өзінде барлық жерде тығыз* (қысқаша, *барлық жерде тығыз*) деп аталады, егер $\overline{M}=X$.

Мысалы, рационал сандар жиыны сандар өсінде барлық жерде тығыз болады.

Метрикалық кеңістіктегі $M\subset X$ жиын X кеңістіктің еш жерінде *тығыз емес* деп аталады, егер кеңістіктегі әрбір шарға тиісті шарларда M жиынның нүктелері тиісті болмаса.

Анықтама. x_0 нүкте $M\subset X$ *жиынның ішкі нүктесі* деп аталады, егер x_0 нүктенің өзі және оның маңайы толығымен M жиынға тиісті болса, яғни $x_0\in M$, $S_r(x_0)\subset M$. Мысалы, кез келген ашық жиынның әрбір нүктесі осы жиынға ішкі нүкте болады.

$x_0 \notin M$ нүкте M *жиынның сыртқы нүктесі* деп аталады, егер $S_r(x_0) \cap M = \emptyset$.

$x_0 \in X$ нүкте $M \subset X$ *жиынның шекара нүктесі* деп аталады, егер $S_r(x_0)$ шарда M жиынға тиісті әрі тиісті емес нүктелер бар болса. M жиынның шекара нүктелерінен құралған жиынды ∂M таңбамен белгілейік. Демек, M жиынның шекаралық нүктелері M жиынның өзіне тиісті болуы да, болмауы да мүмкін. Сондықтан мына жағдайлар орындалуы мүмкін: $\partial M \subset M$, $\partial M \cap M = \emptyset$ немесе $\partial M \cap M \neq \partial M$.

$x_0 \in M$ нүкте M *жиынның оңаша нүктесі* деп аталады , егер x_0 нүктенің жеткілікті аз $S_\varepsilon(x_0)$ маңайында x_0 нүктеден өзге M жиынның нүктелері жоқ болса.

Сонымен, M жиынның $\overline{M}$ тұйықталу жиыны үш түрлі нүктелерден тұрады:

1) M жиынның оңаша нүктелері;
2) M жиынның өзіне тиісті осы жиынның шектік нүктелері;
3) M жиынның өзіне тиісті емес осы жиынның шектік нүктелері;

Метрикалық кеңістіктегі $x_0 \in X$ нүкте $M \subset X$ *жиынның жанасу нүктесі* деп аталады, егер M жиынның кем дегенде бір нүктесі x_0 нүктенің кез келген $S_\varepsilon(x_0)$ маңайына тиісті болса.

5.1- теорема. X метрикалық кеңістіктегі $\overline{M}$ тұйықталу жиынның кез келген $a \in \overline{M}$ шектік нүктесін мына түрде жазуға болады: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, мұндағы $x_n \in M$.

Дәлелдеуі. Егер $a \in M$ болса, онда барлық n үшін $a = x_n$ теңдік орындалады. Ал егер $a \notin M$ болса, онда анықтама бойынша $a \in \overline{M}$, ал бұл

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

теңдіктің орындалатынын білдіреді, мұндағы $x_n \in M$.

5.2- теорема. Метрикалық кеңістіктегі M жиынның a шектік нүктесі $a \in \overline{M}$ болуы үшін, алдын ала берілген кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $x \in M$ нүкте табылып, $\rho(a,x) < \varepsilon$ теңсіздігінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Теореманың қажетті шарты *5.1*-теоремада дәлелденді. Егер $\rho(a,x)<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда әрбір n үшін $x_n \in M$ нүкте табылып, $\rho(a,x_n)<\frac{1}{n}$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $a \in \overline{M}$.

5.3-теорема. Метрикалық кеңістіктегі M жиынның $\overline{M}$ тұйықталу жиыны ең кіші жиын болады және $M \subset \overline{M}$.

Дәлелдеуі. M жиын тиісті болатын кез келген A тұйық жиынында $x_n \in M$ жинақты тізбектерінің шектері A жиынның нүктелері болады. Олай болса, $\overline{M} \subset A$ және $\overline{M}$ тұйық жиын. Сонымен , $\overline{M}$ тұйықталу жиыны $M \subset A$ жиынның тұйық жиындарының ішіндегі ең кішісі.

Біз X,Y метрикалық кеңістіктерді қарастырайық және $y=f(x)$ функция X кеңістіктің M жиынында анықталсын, ал оның қабылдай алатын мәндері Y кеңістік болсын.

Анықтама. $f(x)$ функция $x_0 \in M$ *нүктеде үзіліссіз* деп аталады, егер кез келген $\varepsilon>0$ сан үшін $\delta>0$ саны табылып, $\rho_X(x,x_0)<\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x \in M$ үшін $\rho_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

Осы анықтамадан, егер $x_n \in M, x_0 \in M, x_n \to x_0$ болса, онда $f(x_n)\to f(x_0), n\to\infty$ шек орындалады. Осы тұжырымға кері тұжырым да орындалады, егер $x_0 \in M$ нүктеге жинақты кез келген $\{x_n\} \in M$ тізбек үшін $f(x_n)\to f(x_0)$ болса, онда $f(x)$ *функция* x_0 *нүктеде үзіліссіз* болады.

Егер $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ болса, онда метрикалық кеңістіктегі $\rho(x,y)$ арақашықтықты x пен y-ке тәуелді *үзіліссіз функция* деп қарастыруға болады, яғни $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y), n\to\infty$.

Шынында да, 5.1–теңсіздіктен:

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)| \le \rho(x_n,x_0)+\rho(y_n,y_0)\to 0$$

5.3. Метрикалық кеңістіктерге мысалдар

1. X_1 кез келген жиын болсын және осы жиында метрика $\rho_{X_1}(x,y)=1$, егер $x\neq y$; $\rho_{X_1}(x,y)=0$, егер $x=y$ болсын.

Метрика осылайша анықталған X жиын метрикалық кеңістік болатынын дәлелдейік. Ол үшін $\rho_{X_1}(x,y) \le \rho_{X_1}(x,z) + \rho_{X_1}(z,y)$ теңсіздікті қарастырайық. Егер $\rho_{X_1}(x,z) + \rho_{X_1}(z,y) = 0$ болса, онда $\rho_{X_1}(x,y) = \rho_{X_1}(z,y) = 0$ болады. Онда $x = y = z$. Енді $x = y$ болғанда, $\rho_{X_1}(x,y) = 0$ болады. Бұл жағдайда үшбұрыш теңсіздігі орындалады. Ал енді қалған жағдайларда, қарастырып отырған теңсіздіктің сол жағы 1-ден үлкен емес, ал оң жағы бірден кіші емес. Олай болса, X_1-метрикалық кеңістік.

2. X_2 метрикалық кеңістік сандар өсіндегі нақты сандар болсын, яғни $X_2 = R = (-\infty, +\infty)$**.** Егер $x, y \in R$ болса, онда

$$\rho_R(x,y) = |x - y|$$

метрика метрикалық кеңістіктің барлық аксиомаларын қанағаттандыратынын оңай дәлелдеуге болады. Нақты сандар өсіндегі кеңістікте сандар тізбектеріне орындалатын *жай жинақтылық* орындалады.

3. $E_m - m$ өлшемді нақты евклид кеңістік болсын. Егер $x = \{x_1, x_2, ..., x_m\},\ y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ болса, онда:

$$\rho_{E_m}(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$$

E_m кеңістіктегі $\rho(x,y)$ метрика тепе-теңдік және симметрия аксиоманы қанағаттандырытынын оңай дәлелдеуге болады. Үшбұрыш аксиомасын Коши-Минковский

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (a_i + b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}$$

теңсіздігін пайдаланып дәлелдейік. Ол үшін $z = \{z_i\} \in R_m$ болсын, онда:

$$\rho_{E_m} = \rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} [(x_i - y_i) + (y_i - z_i)]^2} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2} = \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Сонымен, E_m-метрикалық кеңістік. Енді $x_k = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_m^{(k)}\}$ болсын $(k = 1,2,...)$ және

$$\rho_{E_m}(x_k, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i^{(k)} - x_i)} \to 0, k \to \infty.$$

Ал бұл шек орындалады тек $x_i^{(k)} \to x_i,\ k \to \infty$ болғанда, мұндағы $i = 1,2,...,m$, яғни x_k нүктенің координаттары x нүктенің сәйкес координаттарына жинақталады. Сонымен E_m кеңістіктегі жинақтылық *координаттар бойынша жинақтылық* деп аталады.

4. $[a,b]$ сегментте анықталған нақты үзіліссіз функцияладың жиыны X болсын және $x(t)$ мен $y(t)$ функциялардың арақашықтығын мына формуладан анықтайық:

$$\rho_X(x(t), y(t)) = \max_{t\in[a,b]}|x(t) - y(t)|,$$

мұндағы $x(t), y(t) \in X, t \in [a,b]$. Онда $\rho_X(x(t), y(t))$ метрика тепе-теңдік пен симметрия аксиомаларын қанағаттандырады:

$$\rho_X(x(t), y(t)) = \max_{t\in[a,b]}|x(t) - y(t)| = 0,$$

$$\rho_X(x(t), y(t)) = \rho_X(y(t), x(t)).$$

Үшбұрыш аксиоманы дәлелдейік. Кез келген $t \in [a,b]$ үшін

$$|x(t) - z(t)| = |x(t) - y(t) + y(t) - z(t)| \le |x(t) - y(t)| + y(t) - z(t) \le$$
$$\le \max_t|x(t) - y(t)| + \max_t|y(t) - z(t)| = \rho_x(x(t), y(t)) + \rho_x y(t), z(t).$$

Олай болса,

$$\max_t|x(t) - z(t)| \le \rho_X(x(t), y(t)) + \rho_X(y(t), z(t)).$$

Осыдан дәлелдеу керек теңсіздікті аламыз:

$$\rho_X(x(t), y(t)) \le \rho_X(x(t), y(t)) + \rho_X(y(t), z(t)).$$

$[a,b]$ сегментте анықталған нақты үзіліссіз функциялардың кеңістігі метрикалық кеңістік және $C[a,b]$ таңбамен белгіленеді және бұл кеңістікте метрика

$$\rho_{C[a,b]}(x(t), y(t)) = \max_{t\in[a,b]}|x(t) - y(t)|$$

формуладан анықталады, мұндағы $x(t), y(t) \in C[a,b],\ t \in [a,b]$.

Енді $C[a,b]$ метрикакалық кеңістіктегі жинақтылықты тексерейік. Ол үшін $\{x_n(t)\}$ үзіліссіз функциялар тізбегі $x(t)$ функцияға жинақты болсын, яғни:

$$\rho(x_n(t),x(t)) = \max_t |x_n(t) - x(t)| \to 0,\ n \to \infty.$$

Демек, кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $n_0(\varepsilon)$ нөмір табылып, $n \geq n_0(\varepsilon)$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n үшін

$$\max_t |x_t(t) - x(t)| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады. Онда

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

теңсіздік барлық $n \geq n_0(\varepsilon)$ және $t \in [a,b]$ үшін орындалады. Соңғы теңсіздік $\{x_n(t)\}$ тізбектің $x(t)$ функцияға бірқалыпты жинақты болатынын айқындайды.

Осы тұжырымға кері тұжырымда орындалады, яғни егер $\{x_n(t)\}$ тізбек $x(t)$ функцияға бірқалыпты жинақты болса, онда $\rho(x_n(t),x(t)) \to 0,\ n \to \infty$.

Сонымен, $C[a,b]$ кеңістіктегі жинақтылық *бірқалыпты жинақтылық* болады.

5. Жинақты сандар тізбектерінен анықталған X жиынды қарастырайық, яғни

$$x = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\},\ \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

болсын. Енді $y = \{y_1, y_2, ..., y_n, ...\}$ және X жиынның x пен y элементтерінің арақашықтығы

$$\rho(x,y) = \sup_i |x_i - y_i|$$

болсын деп ұйғарайық. Онда үшбұрыш аксиоманың орындалатынын тексерейік. Сонда:

$$|x_i - y_i| = |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq$$
$$\leq \sup_i |x_i - z_i| + \sup_i |z_i - y_i| = \rho_X(x,z) + \rho_X(z,y),$$

мұндағы $z = \{z_1, z_2, .., z_n, ...\} \in X$. Онда :

$$\sup_i |x_i - y_i| \leq \rho_X(x,z) + \rho_X(z,y).$$

Осыдан $\rho_X(x,y) \le \rho_X(x,z) + \rho_X(z,y)$. Жинақты сандар тібектерден анықталған кеңістік c метрикалық кеңістік болады және онда метрика

$$\rho_c(x_n, y) = \sup_i |x_i - y_i|$$

формуладан анықталады. Енді жинақтылықты тексерейік. $x_n,\ x \in c$ болсын, мұндағы $x_n = \{x_i^{(n)}\},\ x = \{x_i\}$ және $\rho_c(x_n, x) \to 0,\ n \to \infty$ болсын. Онда, кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $n_0(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n \ge n_0(\varepsilon)$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\rho_c(x_n, x) = \sup_i |x_i^{(n)} - x_i| < \varepsilon.$$

Осыдан, барлық $n \ge n_0(\varepsilon)$ және кезкелген i үшін мына теңсіздік орындалады:

$$|x_i^{(n)} - x_i| < \varepsilon$$

Кері тұжырым да орындалады. Сонымен c кеңістіктегі *жинақтылық координат бойынша жинақты әрі координаттың нөмірлері арқылы бірқалыпты жинақты*.

6. Шектелген нақты $x(t)$ функциялардың жиынын қарастырайық және

$$\rho(x,y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|,$$

мұндағы барлық $t \in [a,b]$ үшін $x(t),\ y(t)$ шектелген нақты функциялар. Метрикалық кеңістіктің барлық аксиомалары орындалады. Шектелген нақты функциялардың кеңістігі $M[a,b]$ таңбамен белгіленеді және оның метрикасы

$$\rho_{M[a,b]}(x,y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

формуладан анықталады және бұл кеңістікте барлық $t \in [a,b]$ *бірқалыпты жинақтылық* орындалады. $C[a,b]$ мен $M[a,b]$ үшін $C[a,b] \subset M[a,b]$.

7. Шексіз сандар тізбектерден анықталған жиынды қарастырайық: $x = \{x_1, x_2, .., x_n, ...\}$ және оның координаттары үшін

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$$

шарт орындалсын. Енді осы жиынның $x = \{x_i\}$ мен $y = \{y_i\}$ элементтері үшін олардың арақашықтығы

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$$

формуладан анықталсын. Тепе-теңдік аксиома, барлық i үшін $x = y$ немесе $x_i = y_i$ болғанда орындалады, және $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ теңдігінен симметрия аксиомасы да орындалады. Енді $x = \{x_i\},\ y = \{y_i\},\ z = \{z_i\}$ үшін

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - z_i + y_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} \left[|x_i - z_i| + |z_i - y_i|\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |z_i - y_i| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

Сонымен, шексіз сандар тізбектерден анықталған жиын метрикалық кеңістік болады әрі ол l таңбамен белгіленеді және мұнда *координат бойынша жинақты.*

8. Шектелген сандар тізбегінің кеңістігі m таңбамен белгіленеді әрі ол метрикалық кеңістік және оның метрикасы мына формуладан анықталады:

$$\rho_m(x, y) = \sup_i \{x_i - y_i\},$$

мұндағы $x = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\},\ y = \{y_1, y_2, ..., y_n, ...\}$ және кез келген i үшін $|x_i| \le K_x,\ |y_i| \le K_y$.

m кеңістікте координат бойынша әрі координаттардың нөмірі арқылы бірқалыпты жинақты.

9. Барлық нақты сандар тізбектерден анықталған әрі оның элементтеріне

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\,2} < \infty,\ x = \{x_i\}$$

шарт орындалатын жиынды қарастырайық және

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2},$$

мұндағы $y = \{y_i\}$. Метрикалық кеңістіктің аксиомалары орындалатынын тексерейік. Мына тізбектен

$$(x_i \pm y_i)^2 \le 2(x_i^{\,2} + y_i^{\,2})$$

және жоғарыдағы шарттан $\rho(x,y)$ ара қашықтықтың мағынасы бар екенін көруге болады, яғни барлық $x, y \in l_2$ үшін мына қатар

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2 < \infty$$

жинақты болады, егер

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\,2} < \infty,\ \sum_{i=1}^{\infty} y_i^{\,2} < \infty$$

қатарлар жинақты болса. Үшбұрыш аксиомасын мына түрде жазайық:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(z_i - x_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(z_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i - x_i)^2}, \qquad (5.4)$$

мұндағы үш қатардың әрқайсысыда жинақты және мына теңсіздік орындалады:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - x_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2},$$

ал бұл теңсіздік кез келген n үшін орындалады. Енді $n \to \infty$ шекке көшіп дәлелдеу керек 5.4–теңсіздікті аламыз. Сонымен, барлық нақты сандардан анықталған жиын l_2 таңбамен белгіленеді және оның элементтерінің арақашықтығы немесе мерикасы мына формуладан анықталады:

$$\rho_{l_2}(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}.$$

l_2 кеңістікте 5.2 -тақырыптағы арақашықтықтың үзіліссіздігінен *координат бойынша жинақты* болатынын көреміз, яғни, егер $x_n = \{x_i^{\,n}\} \to x = \{x_i\}$ болса, онда $x_i^{\,n} \to x_i$ шек кез келген i үшін орындалады.

10. Барлық нақты сандар тізбектерінен анықталған жиын және оның элементтерінен тұратын

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p < \infty$$

қатар жинақты, ал арақашықтықтары

$$\rho_{l_p} = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

формуладан анықталатын кеңістік l_p таңбамен белгіленеді ($p = 2$, 9-мысал).

Метрикалық кеңістіктің тепе-теңдік пен симметрия аксиомалары оңай дәлелденеді, ал үшбұрыш аксиомасын Минковскийдің

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

теңсіздігінен аламыз. Осы теңсіздікке $a_i = x_i - y_i;\ b_i = y_i - z_i$ теңдіктерін қояйық:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Бұл теңсіздіктің кез келген n үшін орындалатынын ескеріп, $n \to \infty$ шекке көшіп, дәлелдеу керек теңсіздікті аламыз, яғни:

$$\rho_{l_p}(x,z) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{\infty} |y_i - z_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \rho_{l_p}(x,y) + \rho_{l_p}(y,z).$$

Сонымен, l_p кеңістігі метрикалық кеңістік. l_p кеңістіктегі $\{x_n\} = \{x_i^{(n)}\}$ тізбектің $x = \{x_i\}$ элементке жинақтылығы мынаны білдіреді:

1) кез келген i үшін $n \to \infty$-да $x_i^{(n)} \to x_i$;

2) кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $N_0(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $N \ge N_0(\varepsilon)$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық N және барлық n үшін

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \left|x_i^{(n)}\right|^p < \varepsilon^p$$

теңсіздігі орындалады.

Егер $p = 1$ болса, онда кеңістік l таңбамен белгіленеді әрі $x = \{x_i\}$ үшін

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty,\ \rho_l(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|$$

мұндағы $y=\{y_i\}\in l$ және осы кеңістікте *координат бойынша жинақты* болады.

11. $[a,b]$ сегментте анықталған өлшемді функциялардың жиыны $L_p[a,b]=L_p$ таңбамен белгіленеді әрі Лебег интегралы мағынасында мына интеграл

$$\int_a^b|x(t)|^p\,dt$$

бар және кеңістіктің $x(t)$ мен $y(t)$ ара қашықтығы

$$\rho(x,y)=\left[\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}} \tag{5.5}$$

формуладан анықталады. $L_p[a,b]$ кеңістікте 5.5–метрика бойынша анықталған арақашықтық метрикалық кеңістіктің тепе-теңдік пен симметрия аксиомаларын қанағаттандырады, ал үшбұрыш аксиомасын Минковскийдің интегралдық теңсіздігінен аламыз:

$$\left[\int_a^b|f(t)+g(t)^p|\right]^{\frac{1}{p}}\le\left[\int_a^b|f(t)|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_a^b|g(t)|^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

мұндағы $f(t)=x(t)-y(t), g(t)=y(t)-z(t)$ функцияларды Минковский теңсіздігіне қойып, үшбұрыш аксиомасы орындалатынын оңай дәлелдеуге болады.

Егер $x_n\in L_p[a,b]$ және $\{x_n(t)\}$ өлшемді функция тізбегі $x(t)\in L_p[a,b]$ өлшемді функцияға жинақты болса, яғни:

$$\int_a^b|x_n(t)-(t)|^p\,dt\to 0, n\to\infty,$$

онда $\{x_n(t)\}$ тізбек $x(t)$ функцияға p *көрсеткішті орташа жинақты* деп аталады.

Егер $p=2$ болса, онда кеңістік $L_2[a,b]=L_2$ таңбамен белгіленеді және

$$\int_a^b|x(t)|^2\,dt<\infty,\ \rho(x,y)=\sqrt{\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt}$$

$L_2[a,b]$ кеңістіктегі жинақтылық *орташа жинақтылық* деп аталады.

5.4. Толық метрикалық кеңістік

Анықтама. X метрикалық кеңістіктегі $\{x_n\}$ нүктелер тізбегі *фундаментальді* немесе *Коши тізбегі* деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін N нөмірі табылып, $n \geq N$, $m \geq N$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын n мен m үшін

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса немесе

$$\rho(x_n, x_m) \to 0,\ n,m \to \infty,\ x_n, x_m \in X.$$

5.4-теорема. Кез келген жинақты тізбек фундаментальді болады.

Дәлелдеуі. Егер $\rho(x_n, x) \to 0$ болсын, онда барлық $n > N, m > N$ үшін

$$\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2},\ \rho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

теңсіздіктері орындалады. Осыдан және үшбұрыш аксиомасы бойынша дәлелдеу керек теңсіздікті аламыз:

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \varepsilon$$

Осы тұжырымның кері тұжырымы орындалмайды. Мысалы, сандар өсіндегі Q – рационал сандар $\{r_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ тізбегін қарастырайық және $\rho_Q(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$ болсын. Бұл тізбек фундаментальді тізбек, яғни анық шегі e - ге тең, бірақ ол осы кеңістікте жинақты емес, себебі $e \notin Q$.

5.5-теорема. Кез келген фундаментальді тізбек шектелген.

Дәлелдеуі. $\{x_n\}$ фундаментальді тізбек болсын және кез келген $\varepsilon > 0$ санды тағайындайық және $n \geq N, m \geq N$ болғанда $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай N нөмірді таңдап алайық. Енді

$$r = max\{\varepsilon, \rho(x_1, x_N), \rho(x_2, x_N), ..., \rho(x_{N-1}, x_N)\}$$

болсын. Онда барлық $n = 1,2,...$ үшін $\rho(x_n, x_N) \leq r$ болады, яғни барлық $x_n \in \overline{S_r}(x_N)$, мұндағы $\overline{S_r}(x_N)$ - тұйық шар. Енді r -ді r' -ке

($r' > r$) алмастырып,барлық x_n-ді $S_{r'}(x_N)$ ашық шарға енгіземіз. Дәлелденді.

Анықтама. Егер X мерикалық кеңістіктегі кез келген $\{x_n\}$ фундаментальді тізбектің шегі бар болса, онда X кеңістік *толық* деп аталады.

5.6-теорема. X толық метрикалық кеңістіктің кез келген F тұйық ішкі жиыны толық метрикалық кеңістік болады.

Дәлелдеуі. $x_n \in F$ және ол фундаментальді тізбек болсын. X толық кеңістік болғандықтан $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ шек бар және ол F тұйық болғандықтан $x \in F$ болады. Демек, F жиындағы кез келген фундаментальді тізбек F жиынының элементіне жинақты, яғни F толық кеңістік. Дәлелденді.

Енді толық метрикалық кеңістіктерге мысалдар қарастырайық.

1-мысал. $E_m - m -$ өлшемді нақты евклид кеңістігі толық метрикалық кеңістік болатынын тексерейік, мұнда арақашықтық мына формуладан анықталады (5.3- тақарып):

$$\rho_{E_m}(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - y_i)^2}.$$

$\{x_n\}$ тізбек E_m-кеңістіктегі фундаментальді тізбек болсын, яғни кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін N нөмірі табылып, $p \geq N, q \geq N$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын барлық p мен q үшін

$$\sum_{k=1}^{m}(x_k^{(p)} - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2$$

теңсіздік орындалады, мұндағы $x^{(p)} = \left\{x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_m^{(p)}\right\}$. Онда әрбір $k = 1,2,\ldots,m$ үшін $\left\{x^p\right\}$ фундаментальді тізбектің сәйкес $x_k^{(p)}$ координаттарына мына теңсіздік орындалады, барлық $p,q \geq N$ үшін:

$$\left|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right| < \varepsilon .$$

Соңғы теңсіздік, $\left\{x_k^{(p)}\right\}$ тізбектің фундаментальді сандар тізбегі болатынын білдіреді. Енді

$$x_k = \lim_{p\to\infty} x_k^{(p)}, \quad x = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$

болсын. Онда:

$$\lim_{p\leftarrow\infty} x^{(p)} = x \in E_m.$$

Жинақты $\left\{x_k^{(p)}\right\}$ нақты сандар тізбектің шегі нақты сан болады. Сондықтан x нақты сан, яғни $x \in E_m$. Демек E_m -толық метрикалық кеңістік.

2-мысал. $C[a,b]$ нақты үзіліссіз функциялар кеңістігінің толық кеңістік болатынын тексерейік. Ол үшін $x_n(t) \in C[a,b]$ және $\rho(x_n(t), x_m(t)) \to 0$ болсын. Онда әрбір $t \in [a,b]$үшін $\{x_n(t)\}$ санды тізбек фундаментальды тізбек болады, олай болса

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$$

шек бар. Енді тағайындалған $\varepsilon > 0$ сан және барлық $n \geq N$, $m \geq N$ үшін

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \text{ немесе } \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad (5.6)$$

теңсіздігі орындалатын N нөмірді тауып аламыз, кез келген $t \in [a,b]$ үшін. (5.6)–теңсіздіктен $m \to +\infty$ -дағы шекті табайық, сонда:

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon,\ t \in [a,b],\ n \geq N.$$

Демек, $x_n(t)$ функцияның $x(t)$ функцияға жинақтылығы бірқалыпты жинақты болады. Онда $x(t)$ функция үзіліссіз, яғни $x(t) \in C[a,b]$ және $\rho(x_n(t), x(t)) \to 0, n \to \infty$. Сонымен, $C[a,b]$ толық метриркалық кеңістік.

3-мысал. l_2 кеңістікті қарастырайық. $\left\{x^{(n)}\right\}$ тізбек l_2 кеңістіктегі фундаментальді тізбек болсын, яғни кз келген $\varepsilon > 0$ сан үшін N нөмірі табылып, барлық $n \geq N, m \geq N$ үшін

$$\rho^2(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon \qquad (5.7)$$

теңсіздік орындалады, мұндағы $x^{(n)} = \left\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\right\}$.

Кез келген $k = 1,2,\ldots$ үшін (5.7)–теңсіздіктен

$$\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| < \varepsilon$$

болады, яғни әрбір k үшін $\{x_k^{(n)}\}$ тізбегі фундаментальді тізбек болады және жинақты. Енді $x_k = \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ және $x = \{x_1, x_2, ..., x_k, ...\}$ болсын. Алдымен мына шарттарды дәлелдейік:

а) $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2 < \infty$, яғни $x \in l_2$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x^{(n)}, x) = 0$.

Жоғарыдағы (5.7)–теңсіздіктен, кез келген тағайындалған M сан үшін

$$\sum_{k=1}^{M} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon$$

Соңғы теңсіздіктегі қосылғыштардың саны санаулы және n натурал санды тағайындап, $m \to \infty$-да шекке көшейік:

$$\sum_{k=1}^{M} (x_k^{(n)} - x_k)^2 \le \varepsilon.$$

Ал бұл теңсіздік кез келген M үшін орындалады. Енді $M \to \infty$-да шекке көшейік:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(x_k^{(n)}\right)^2 - 2x_k^{(n)} x_k + x_k^2 \right] \le \varepsilon \qquad (5.8)$$

Мына элементар теңсіздіктен $(a \pm b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$ және

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k{}^n)^2, \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k{}^{(n)} - x_k\right)^2$$

қатарлардың жинақтылығынан $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k{}^2$ қатардың жинақтылығын аламыз. Сонымен, жоғарыдағы а) шарт дәлелденді. (5.8)–теңсіздіктегі ε шексіз аз шама болғандықтан, осы теңсіздіктен

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x^{(n)}, x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k{}^{(n)} - x_k)^2} = 0,$$

яғни $\left\{x^{(n)}\right\} \in l_2$ тізбек осы кеңістіктегі метрика бойынша осы кеңістіктің x элементіне жинақты, олай болса, $x \in l_2$. Сонымен, l_2 кеңістік толық кеңістік болады.

4-мысал. $C[0,1]$ кеңістіктің (5.3-тақырып, 4-мысал) элементтері арасындағы арақашықтықты

$$\rho(x(t), y(t)) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.9}$$

метрика бойынша анықтайық. Онда барлық $t \in [0,1]$ үшін үзіліссіз функциялар тізбекті

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, \ 0 \le t \le \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^n}; \\ 2^{n-1}(2t-1), \ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^n} \le t \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^n}; \\ 1, \ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^n} \le t \le 1 \end{cases}$$

фундаментальды тізбек болады. Шынында да, $n > m$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\rho(x_n(t), x_m(t)) = \left(\int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}} |x_n(t) - x_m(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}.$$

Қарастырып отырған $\{x_n(t)\}$ тізбек $sign(t - \frac{1}{2})$ функцияға жинақты және бұл функция барлық $t \in [0,1]$ үшін үзіліссіз емес. Ал мына интеграл

$$\left(\int_0^1 \left| x_n(t) - sign(t - \frac{1}{2}) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

бар және мына теңсіздік орындалады:

$$\left(\int_0^1 \left|x_n(t) - sign(t-\frac{1}{2})\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}.$$

Минковскийдің интеграл теңсіздігі бөлікті-үзіліссіз функция үшін де орыдалатын болғандықтан, барлық $x(t) \in C[0,1]$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\rho(x_n(t), x(t)) = \left(\int_0^1 \left|x(t) - sign(t-\frac{1}{2})\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\int_0^1 \left|x_n(t) - sign(t-\frac{1}{2})\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Соңғы теңсіздіктің сол жағындағы интеграл оң, ал оң жағындағы екінші интеграл $n \to \infty$-да нөлге ұмтылады. Сондықтан, $\rho(x_n(t), x(t))$ арақашықтық нөлге ұмтылуы мүмкін емес. Демек, 5.9–метрикамен анықталған $C[0,1]$ кеңістік толық кеңістік емес.

Жоғарыдағы 5.3-тақырыпта қарастырылған метрикалық кеңістіктер толық метрикалық кеңістіктер.

5.5. Енгізілген шарлар теоремасы

5.7-теорема. X метрикалық кеңістік толық кеңістік болуы үшін осы кеңістіктегі радиустары нөлге ұмтылған, бір-біріне енгізілген кез келген тұйық шарлар тізбектің қиылысуы бос болмауы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. X толық кеңістік және $B_1, B_2, \ldots$ -радиустары нөлге ұмтылатын, бір-біріне енгізілген тұйық шарлар болсын. B_n - шардың центрі $x_n \in X$ нүкте, r_n – радиусы болсын. Енгізілген шарлардың $\{x_n\}$ центрлері фундаментальді тізбек болады, себебі

$$\rho(x_n, x_m) < r_n, m > n,$$
$$r_n \to 0, n \to \infty.$$

X кеңістік толық кеңістік болғандықтан $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ шек бар және ол шекті $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ белгілейік. Онда $x \in \bigcap\limits_n B_n$ болады. Шынында да, B_n шарда $\{x_n\}$ тізбектің $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ нүктелерден өзге барлық нүктелері тиісті болады. Демек, x нүкте әрбір B_n шардың шектік нүктесі болады. B_n-тұйық шар болғандықтан, барлық n үшін $x \in B_n$.

Енді x нүктенің тек біреу ғана болатынын дәлелдейік. Ол үшін $x \neq y$, барлық n үшін $y \in B_n$ және $x_n \to x$, $x_n \to y$ болсын. Онда $n \to \infty$-да

$$\rho(x, y) \le \rho(x_n, x) + \rho(x_n, y) \to 0,$$

яғни $\rho(x, y) = 0$ немесе $x = y$.

Жеткіліктілігі. $\{x_n\}$ фундаментальді тізбек болсын. Осы фундаментальді тізбектің шегі бар болатынын дәлеледейік.

$\{x_n\}$ фундаментальді тізбек болғандықтан, осы тізбектен $\rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$ теңсіздігі орындалатын x_{n_1} нүктені таңдап алуға болады, барлық $n \ge n_1$ үшін**.** Осы x_{n_1} нүктені радиусы 1-ге тең тұйық шардың центрі етіп алайық және осы тұйық шарды B_1 таңбамен белгілейік. Енді $\{x_n\}$ тізбектен, $n_2 > n_1$ және $\rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ теңсіздіктері орындалатын барлық $n \ge n_2$ үшін x_{n_2} нүктені таңдап алайық. Осы x_{n_2} нүкте радиусы $\frac{1}{2}$-ге тең тұйық шардың центрі болсын және осы тұйық шарды B_1 таңбамен белгілейік.

Енді $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ нүктелер жоғарыдағыдай таңдалып алынды дейік, онда $n_{k+1} > n_k$, барлық $n \ge n_{k+1}$, $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ орындалатындай $x_{n_{k+1}}$ нүктені радиусы $\frac{1}{2^k}$-ге тең B_{k+1} тұйық шармен

қоршайық. Осы процесті жалғастырып, бір-біріне енгізілген B_k тұйық шарлар тізбегін құрамыз, мұндағы B_k шардың радиусы $\frac{1}{2^{k-1}}$-ге тең. Ұйғаруымыз бойынша осы шарлардың ортақ нүктесі бар, ол x нүкте болсын. Бұл нүкте $\{x_{n_k}\}$ тізбектің шегі болады. Онда, $\{x_n\}$ тізбек x нүктеге жинақты болады, себебі

$$\rho(x_n, x) \le \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x)$$

тізбектің оң жағындағы әрбір қосылғышты жеткілігінше аз етіп алуға болады, егер n мен n_k сандарын жеткілігінше үлкен етіп алсақ. Олай болса, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Дәлелденді.

1-мысал. Теоремада айтылған кеңістіктің *толық* болуы шарлардың қиылысуының бос болмауын қамтамасыз ететін негізгі шарт болып табылады. Шынында да, Q сандар жиынында r_1 мен r_2 нүктелердің арақашықтығын

$$\rho_Q(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$$

формуладан анықтайық, мұндағы $r_1 \in Q, r_2 \in Q$ және

$$r_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Енді центрі $r_n' = r_n + \frac{1}{2n!\,n}$ нүкте, ал радиусы $\frac{1}{2n!\,n}$-ге тең $\left[r_n, r_n + \frac{1}{n!\,n}\right]$-тұйық шарларды қарастырайық. Бұл шарлар енгізілген тұйық шарлар болатынына оңай көз жеткізуге болады. Математикалық анализ курсында $[14,16]$ мына теңдік бізге белгілі:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}) = e.$$

Онда:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[r_n, r_n + \frac{1}{n!\,n}\right] = \{e\}.$$

Сонымен, жоғарыда тұрғызылған шарлар тібегі Q кеңістікте бос жиын, себебі $e \notin Q$.

2-мысал. Теоремада айтылған енгізілген шарлардың *тұйық* болуы негізгі шарт. E_2 – евклид кеңістігіндегі нүктелердің арақашықтығын

$$\rho(x,y)=(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2)^{\frac{1}{2}}$$

формуламен анықтайық және енгізілген мына ашық шарларды қарастырайық:

$$\left|x_1-\frac{1}{n}\right|^2+|y_2|^2<\frac{1}{n^2},$$

онда бұл ашық шарлардың қиылысуы бос жиын болады. Себебі, енгізілген шарлар ашық шарлар.

5.6. Метрикалық кеңістіктерді толықтыру

Бізге X және *H* кеңістіктері берілсін.

Анықтама. Егер белгілі бір заңдылық немесе ереже әрбір $x\in X$ элементке тек бір ғана толық анықталған $y\in Y$ элементті сәйкес қойса, онда бізге X жиында анықталған, ал қабылдай алатын мәндер жиыны Y жиынында болатын *оператор* берілді дейміз немесе X жиынды Y жиынға *бейнелеу* дейді және

$$y=Ax \text{ немесе } y=f(x)$$

таңбалармен белгіленеді.

Егер оператордың қабылдай алатын мәндері нақты сандар болса, онда ол оператор *функционал* деп аталады.

X метрикалық кеңістіктегі $x_1\in X, x_2\in X$ элементтердің арақашықтығы $\rho_X(x_1x_2)$, ал Y метрикалық кеңістіктегі $y_1\in Y, y_2\in Y$ элементтердің арақашықтығы $\rho_Y(y_1,y_2)$ болсын.

Егер X пен Y кеңістіктері элементтерінің арасында өзара бірмәнділік сәйкестік бар болса және бір кеңістіктегі элементтердің арақашықтықтары осы элементтерге сәйкес келетін екінші кеңістіктегі элементтердің арақашықтығына тең болса, онда X пен Y кеңістіктері *изометриялық* кеңістіктер деп аталады.

Енді X метрикалық кеңістік толық болмасын, яғни осы кеңістікте фундаментальді тізбек бар, бірақ оның шегі X кеңістікке тиісті емес. Бұл жағдайда, X метрикалық кеңістіктен басқа толық $\widetilde{X}$

метрикалық кеңістіктің $\widetilde{X}_0$ жиыншасы $(\widetilde{X}_0 \subset \widetilde{X})$ табылып, ол осы кеңістікте барлық жерде дерлік тығыз $(\overline{\widetilde{X}_0} = \widetilde{X})$ және $\widetilde{X}$ пен X изометриялы болатын толық $\widetilde{X}$ метрикалық кеңістіктің бар болатынын дәлелдейік. $\widetilde{X}$ кеңістік X кеңістіктің толықтырушы кеңістігі деп аталады.

Ол үшін элементтерді $\widetilde{X}$ кеңістіктің мүмкін болатын элементтерінен құралған

$$\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, \ldots$$

тізбектерді қарастырайық және олар өзіне жинақты (фундаментальді) болсын.Енді $\rho(x_n, x_n^{'}) \to 0, n \to \infty$ шартты қанағаттандыратын және өзіне жинақты кез келген екі $\{x_n\}, \{x_n^{'}\}$ тізбекті бір $\widetilde{x}$ класқа жатқызайық. Осы кластарды $\widetilde{X}$ кеңістіктің жаңа элементері деп қарастырайық, $\widetilde{X}$ жиыннан $\widetilde{x}$ және $\widetilde{y}$ екі элементті алайық $\left(\widetilde{x} \in \widetilde{X}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}\right)$ және әрбір $\widetilde{x}_0$ пен $\widetilde{y}$ кластардан сәйкес бір $\{x_n\}$ мен $\{y_n\}$ тізбектерді алайық.

Енді $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$ шектің бар болатынын дәлелдейік. Шынында да, мына теңсіздік орындалады:

$$\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n).$$

осыдан:

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m). \quad (5.10)$$

Соңғы теңсіздіктегі m мен n орындарымен орын алмастырайық:

$$\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n) \le \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n). \quad (5.11)$$

(5.10) мен (5.11)–теңсіздіктерден:

$$\left| \rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n) \right| \le \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n).$$

Соңғы теңсіздіктерден оң жағындағы өрнек $n \to \infty, m \to \infty$ - да нөлге ұмтылады. Олай болса , $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$ шек бар.

Енді $\tilde{X}$ кеңістікте арақашықтықты мына формуладан анықтайтын болайық:

$$\rho(\tilde{x},\tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Осы арақашықтықтың қисынды екенін дәлелдейік, яғни $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$ шектің $\{x_n\}$ мен $\{y_n\}$ тізбектерді $\tilde{x}$ пен $\tilde{y}$ кластардан таңдап алу әдісіне тәуелсіз болатынын көрсетейік. Ол үшін $\{x_n'\}$ пен $\{y_n'\}$ осы кластардан алынған $\{x_n\}$ пен $\{y_n\}$ тізбектерден басқа тізбектер болсын. Онда:

$$\rho(x_n', y_n') \le \rho(x_n', x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_n'). \quad (5.12)$$

мұндағы $\rho(x_n, x_n') \to 0, \rho(y_n, y_n') \to 0$ болғандықтан (5.12) теңсіздіктен шекке көшіп,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n', y_n') \le \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n). \quad (5.13)$$

теңсіздікті аламыз. Осы сияқты , мына теңсіздікті аламыз :

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) \le \lim_{n\to\infty} \rho(x_n', y_n') \quad (5.14)$$

Онда , 5.13 пен 5.14–теңсіздітерден $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n', y_n')$ теңдік орындалады, яғни тізбектерді $\tilde{x}, \tilde{y}$ кластардан таңдап алу әдісіне шек тәуелсіз.

Енді метрика аксиомаларының орындалатынын тексерейік.

1) $\rho(x_n, y_n) \ge 0$ болғандықтан $\rho(\tilde{x},\tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) \ge 0$ және $\rho(\tilde{x},\tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ теңдік, шарт бойынша, $\{x_n\}$ мен $\{y_n\}$ тізбектері бір кластағы тізбектер болатынын білдіреді.

$\{x_n\}$ тізбек $\tilde{x}$ кластағы, ал $\{y_n\}$ тізбек $\tilde{y}$ кластағы кез келген тізбек болғандықтан, онда $\tilde{x} = \tilde{y}$.

2) $\rho(\tilde{x},\tilde{y}) = \rho(\tilde{x},\tilde{y})$ теңдіктің орындалатынын оңай дәлелдеуге болады.

3) Егер $\{x_n\} \in \tilde{x}$, $\{y_n\} \in \tilde{y}$, $\{z_n\} \in \tilde{z}$ болса, онда :

$$\rho(\tilde{x},\tilde{z}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) \le \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) +$$
$$+ \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, z_n) = \rho(\tilde{x},\tilde{y}) + \rho(\tilde{y},\tilde{z}).$$

Демек, $\widetilde{X}$ метрикалық кеңістік болады.

Енді $\widetilde{X}$ кеңістіктің толық кеңістік болатынын дәлелдейік. $\widetilde{X}$ кеңістіктен өзіне жинақты $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, \ldots\}$ тізбекті алайық, яғни $\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \to 0,\ n, m \to \infty$.

Әрбір $\tilde{x}_n$ кластан $\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\}$ тізбекті қарастырайық. Бұл тізбек өзіне жинақты болғандықтан $\rho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) < \frac{1}{n},\ p > k_n$ теңсіздік орындалатын k_n санды таңдап алуға болады. Онда $\{x_{k_1}^{(n)}, x_{k_2}^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}, \ldots\}$ тізбекті алып, оны өзіне жинақты болатынын дәлелдейік. Сонда :

$$\rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_m}^{(m)}) \le \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_p^{(n)}) + \rho(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) + \rho(x_p^{(m)}, x_{k_m}^{(m)}). \quad (5.15)$$

Кез келген $\varepsilon > 0$ санды алайық. Жоғарыда айтылғандай, $\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \to 0,\ n \to \infty,\ m \to \infty$ болғандықтан, n_0 нөмірі табылып, $n \ge n_0, m \ge n_0$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын барлық n мен m үшін

$$\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) = \lim_{p\to\infty} (x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

теңсіздігі орындалады. Сондықтан $n \ge n_0, m \ge n_0$ және жеткілікті үлкен p үшін

$$\rho(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.16)$$

болады. Бұл жағдайда, біз n_0 санды $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{4}$ теңсіздікті қанағаттандыратындай етіп алсақ болады. Енді $n \ge n_0, m \ge n_0$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын n мен m сандарды тағайындап,

p санды, $p > k_n$ және $p > k_m$ теңсіздіктері орындалатындай өте үлкен сан дейік. Онда таңдалған k_n мен k_m сандар үшін:

$$\rho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \rho(x_p^{(m)}, x_{k_m}^{(m)}) < \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (5.17)$$

5.15-5.17–теңсіздіктерден, $n \geq n_0, m \geq n_0$ болғанда

$$\rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_m}^{(m)}) < \varepsilon$$

болады, яғни $\left\{x_{k_n}^{(n)}\right\}$ тізбек өзіне жинақты (фундаментальді).

Өзіне жинақты $\left\{x_{k_n}^{(n)}\right\}$ тізбектер тиісті класты $\tilde{x}$ таңбамен белгілейік. Енді $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ болатынын дәлелдейік. Мына теңсіздік орындалады:

$$\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \lim_{p\to\infty} \rho(x_p^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) \leq \lim_{p\to\infty} \rho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) + \qquad (5.18)$$

$$+ \lim_{p\to\infty} \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) < \frac{1}{n} + \lim_{p\to\infty} \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}).$$

Мұндағы $\left\{x_{k_n}{}^{(n)}\right\}$ тізбек өзіне жинақты болғандықтан, берілген $\varepsilon > 0$ саны үшін n_0 нөмірі табылып, $n \geq n_0, n \geq p$ үшін $\rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) < \frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздік орындалады. Онда, $n \geq n_0$ болғанда да

$$\lim_{p\to\infty} \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5.19)$$

орындалады. Енді $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ болсын. (5.18) және (5.19)–теңсіздіктерден $\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}) < \varepsilon$ болады $n \geq n_0$ болғанда, яғни $\{\tilde{x}_n\}$ тізбек $\tilde{x}$ элементке жинақты болады. Сонымен, $\tilde{X}$ кеңістік толық кеңістік екені дәлелденді.

5.7. Қысылған бейнелер пинципі

5.8-теорема (Банах теоремасы). Толық X метрикалық кеңістікте осы кеңістіктің элементін осы кеңістіктің элементіне

бейнелейтін A оператор берілсін. Егер кез келген $x \in X, y \in X$ элементтер үшін

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y) \tag{5.20}$$

теңсіздігі орындалса, мұндағы $\alpha < 1$ саны x пен y-ке тәуелсіз, онда тек бір ғана x_0 нүкте табылып, $Ax_0 = x_0$ теңдік орындалады.

Теоремадағы x_0 *-қозғалмайтын нүкте,* ал α -қысу *коэффициенті* деп аталады.

Дәлелдеуі. X -толық метрикалық кеңістіктен кез келген тағайындалған $x \in X$ элементті алайық және

$$x_1 = Ax,\ x_2 = Ax_1, ..., x_n = Ax_{n-1}, ...$$

болсын. Алдымен алынған $\{x_n\}$ тізбектің өзіне жинақты болатынан дәлелдейік, ол үшін оның көрші элементтерінің арақашықтықтарын бағалайық:

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(Ax, Ax_1) \le \alpha\rho(x, x_1) = \alpha\rho(x, Ax),$$

$$\rho(x_2, x_3) = \rho(Ax_1, Ax_2) \le \alpha\rho(x_1, x_2) = \alpha^2\rho(x, Ax),$$

– –

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \le \alpha^n\rho(x, Ax),$$

Осылайша жалғастырып және геометриялық прогрессияны пайдаланып, мына теңсіздікті аламыз:

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \le$$

$$\le \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + ... + \alpha^{n+p-1}\right)\rho(x, Ax) = \alpha^n(1 + \alpha + ... + \alpha^{p-1})\,\rho(x, Ax) =$$

$$= \alpha^n \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha}\rho(x, Ax). \tag{5.21}$$

Теореманың шарты бойынша $\alpha < 1,$ онда:

$$\rho(x_n, x_{n+p}) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x, Ax).$$

Осыдан, $\rho(x_n, x_{n+p}) \to 0,\ p > 0, n \to \infty.$ Онда, $\{x_n\}$ тізбек өзіне жинақты, ал X толық кеңістік болғандықтан осы кеңістіктен

x_0 элемент $(x_0 \in X)$ табылып, ол элемент $\{x_n\}$ тізбектің шегі болады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Енді $Ax_0 = x_0$ теңдігі орындалатынын дәлелдейік. Шынында да,

$$\rho(x_0, Ax_0) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, Ax_0) = \rho(x_n, x_0) + \rho(Ax_{n-1}, Ax_0) \le$$
$$\le \rho(x_n, x_0) + \alpha\rho(x_{n-1}, x_0).$$

Кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін және жеткілікті үлкен n үшін

$$\rho(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \alpha\rho(x_0, x_{n-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

болады. Онда, $\rho(x_0, Ax_0) < \varepsilon$. Мұндағы ε кез келген болғандықтан, $\rho(x_0, Ax_0) = 0$, яғни $Ax_0 = x_0$ болады.

Енді x_0 элемент тек бір ғана элемент болатынын дәлелдейік. Ол үшін мұндай элемент екеу болсын деп ұйғарайық, яғни $x_0 \in X, y \in X$ және $Ax_0 = x_0, Ay_0 = y_0$. Онда $\rho(x_0, y_0) = \rho(Ax_0, Ay_0) \le \alpha\rho(x_0, y_0)$. Егер $\rho(x_0, y_0) > 0$ болса, онда $\alpha \ge 1$ болған болар еді. Ал бұл $(\alpha \ge 1)$ тоераманың шартына қайшы келеді. Дәлелденді.

1-Ескерту. Егер 5.21–формуладан $p \to \infty$ -да шекке көшсек, онда n -жуықтауда кеткен қателіктің бағалауын табамыз:

$$\rho(x_n, x_0) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x, Ax).$$

2-Ескерту. Қозғалмайтын x_0 нүктеге жинақты x_n −ді біртіндеп жуықтағанда X кеңістіктегі кез келген x элементтен бастауға болады. x элементті таңдап алу $\{x_n\}$ тізбектің шектік x_0 нүктеге жылдам жетуіне ғана әсері бар.

5.8. Итерация әдісімен сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешу

Біз E'_m - m өлшемді нақты евклид кеңістігін қарастырайық. Егер $x = \{x_1, x_2, ..., x_m\}, y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ болса, онда:

$$\rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$$

және E'_m - метрикалық және толық кеңістік. Осы кеңістікте $y = Ax$ оператор мына теңдікпен берілсін:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + b_i, i = 1,2,...,m.$$

Онда:

$$\rho(y_1, y_2) = \rho(Ax_1, Ax_2) = \max_i \left| y_i^{(1)} - y_i^{(2)} \right| = \max_i \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left(x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \right) \right| \le$$

$$\le \max_i \sum_{j=1}^{m} \left| a_{ij} \right| \cdot \left| x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \right| \le$$

$$\le \max_i \left| x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \right| \cdot \max_i \sum_{j=1}^{m} \left| a_{ij} \right| = \rho(x_1, x_2) \cdot \max_i \sum_{j=1}^{m} \left| a_{ij} \right|.$$

Сонымен барлық i үшін $\sum_{j=1}^{m} \left| a_{ij} \right| < 1$ болса, онда бейненің қысылу принципі орындалады, олай болса, оператордың тек бір ғана қозғалмайтын нүктесі бар.

Демек, егер (a_{ij}) *матрицаға барлық* i *үшін* $\sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right| < 1$ *шарт орындалса, онда мына жүйенің:* $x_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i$ *тек бір ғана* $x_0 = \left\{ x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_m^{(0)} \right\}$ *шешімі бар. Бұл шешімді кез келген* $x = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ *вектордан бастап, итерация әдісімен табуға болады.*

Егер m өлшемді евклид кеңістікте метриканы басқа түрде анықтасақ, онда $\sum_{j=1}^{m} \left| a_{ij} \right| < 1$ шарттан басқа шарт аламыз. Мысалы,

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$$

болса, онда:

$$\rho(y_1, y_2) = \rho(Ax_1, Ax_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \right\}^2} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{m} (x_j^{(2)} - x_j^{(2)})^2 \right\}} = \rho(x_1, x_2) \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}.$$

Бұл жағдайда біртіндеп жуықтау әдісінің жинақты шарты мына шарт болады:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 < 1.$$

5.9. Интегралдық теңдеу шешімінің бар және оның тек біреу ғана болуы

Бізге $K = \{(t,s) : a \le t \le b, a \le s \le b\}$ квадратта анықталған, өлшемді нақты $K(t,s)$ функция берілсін және

$$\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dtds < \infty, \qquad (5.22)$$

$f(t) \in L_2[a,b]$ болсын. Енді мына интегралдық теңдеудің

$$x(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

әрбір жеткілікті аз λ мәнінде теңдеудің тек бір ғана $x(t) \in L_2[a,b]$ шешімі бар болатынын дәлелдейік.

Мына операторды қарастырайық:

$$Ax = f(t) + \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

Бұл оператор $L_2[a,b]$ кеңістіктегі әрбір $x(t)$ функцияны $(x(t) \in L_2[a,b])$ осы кеңістіктегі функцияға бейнелейтінін көрсетейік. Мұндағы $f(t) \in L_2[a,b]$ болғандықтан,

$$A_0x = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

оператор $L_2[a,b]$ кеңістіктегі әрбір $x(t)$ функцияны осы кеңістіктегі функцияға бейнелейтінін дәлелдесек жеткілікті. (5.22)–шарттан және Фубини теоремадан $K^2(t,s)$ функция $s \in [a,b]$ бойынша барлық жерде дерлік $t \in [a,b]$ бойынша интегралданады. Осыдан барлық жерде дерлік $t \in [a,b]$ үшін

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t)$$

интегралы бар. Онда Буняковскийдің теңсіздігі бойынша:

$$y^2(t)=\left(\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right)^2 \le \int_a^b K^2(t,s)ds\int_a^b x^2(s)ds.$$

Мұнадағы $\int_a^b x^2(s)ds$ -тұрақты сан, ал 5.22–шарт пен Фубини теоремасынан $\int_a^b K^2(t,s)ds$ интегралы $t\in[a,b]$ бойынша интегралданады, онда $y^2(t)$ функцияда $t\in[a,b]$ бойынша интегралданады әрі

$$\int_a^b y^2(t)dt \le \int_a^b\left[\int_a^b K^2(t,s)ds\cdot\int_a^b x^2(s)ds\right]dt.$$

Енді $\rho(Ax,Ay)$ арақашықтықты бағалайық:

$$\rho(Ax,Ay)=\left\{\int_a^b\left(\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds-\lambda\int_a^b K(t,s)y(s)ds\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=|\lambda|\left\{\int_a^b\left(\int_a^b K(t,s)[x(s)-y(s)]ds\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le|\lambda|\left(\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dtds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b[x(s)-y(s)]^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=|\lambda|\left(\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dtds\right)^{\frac{1}{2}}\rho(x,y).$$

Егер

$$|\lambda|<\frac{1}{\left(\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dtds\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (5.23)$$

болса, онда бейненің қысылу принципін қолдануға болады. Сонымен, 5.23–шарт орындалғанда интегралдық теңдеудің шешімі бар және ол тек біреу ғана.

5.10. Сепарабельді кеңістіктер

Анықтама. X кеңістік *сепарабельді кеңістік* деп аталады, егер осы кеңістікте барлық жерде тығыз саналымды жиын бар болса, яғни X кеңістікте

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \tag{5.24}$$

тізбек табылып, кез келген $x \in X$ үшін, осы x – ке жинақты болатын (5.24)–тізбектің

$$x_n, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$$

тізбекшесі табылса.

Егер X метрикалық кеңістік болса, онда сепарабельді кеңістіктің анықтамасын мына түрде беруге болады:

Егер X кеңістіктен (5.24) тізбек табылып, кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін және кез келген $x \in X$ үшін $\rho(x, x_{n_0}) < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын (5.24) тізбектен x_{n_0} элемент табылса, X кеңістік *сепарабельді кеңістік* деп аталады.

Енді сепарабельді кеңістікке мысалдар келтірейік.

1-мысал. E_m – *m өлшемді евклид кеңістік сепарабельді.* Шынында да, E_m кеңістіктегі рационал координатты нүктелер жиынынан анықталған $E_m{}^0 \subset E_m$ кеңістік E_m кеңістікте саналымды әрі барлық жерде тығыз.

2-мысал. $C[a,b]$ - *сепарабельді кеңістік.* $C[a,b]$ кеңістіктен рационал коэффициентті барлық көпмүшеліктерден анықталған C_0 жиынды қарастырайық. C_0 саналымды жиын. Енді C_0 жиын $C[a,b]$ кеңістікте барлық жерде тығыз болатынын тексерейік. Ол үшін, $C[a,b]$ кеңістіктен кез келген $x(t)$ функцияны алайық. Онда Вейерштрасстың теоремасы бойынша, $\max\limits_t |x(t) - p(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздігі орындалатын $p(t)$ көпмүшелік табылады, мұндағы $\varepsilon > 0$. Екіншіден $\max\limits_t |p(t) - p_0(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздігі орындалатын рационал коэффициентті $p_0(t)$ көпмүшелік табылады. Осыдан:

$$\rho(x(t), p_0(t)) = \max_t |x(t) - p_0(t)| < \varepsilon.$$

Сонымен, $C[a,b]$ сепарабельді кеңістік.

3-мысал. l_p *-сепарабельді кеңістік.* E_0 жиын $\{r_1, r_2, ..., r_n, 0, 0...\}$ түрде анықталатын x элементтердің жиыны болсын, мұндағы r_i – кез келген рационал, ал n -кез келген натурал сандар. E_0 саналымды жиын. Енді E_0 жиынның l_p кеңістікте барлық жерде тығыз болатынын дәлелдейік. Ол үшін l_p кеңістіктен кез келген $x = \{x_i\}$ элементті алайық $(x \in l_p)$ және кез келген $\varepsilon > 0$ сан берілсін. Алдымен

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

теңсіздігі орындалатын n натурал санды тауып алайық. Содан соң

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - r_k| < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

теңсіздік орындалатын $x_0 = \{r_1, r_2, ..., r_n, 0, 0, ...\}$ элементті аламыз. Онда :

$$[\rho(x, x_0)]^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k - r_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p.$$

Осыдан, $\rho(x, x_0) < \varepsilon$. Дәлелденді.

Осы сияқты, $L_p[a,b]$, s *– сепарабельді кеңістіктер,* ал m *сепарабельді кеңістік емес.*

5.11. Метрикалық кеңістіктегі компактілі жиындар

Математикалық анализ курсының ең негізгі теоремаларының бірі Больцано-Вейерштрасс теоремасы болып табылады *[14.16]:* кез келген шектелген $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ тізбектен, шектелген шегі бар $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$ $(n_1 < n_2 < ... n_k, ...)$ тізбекше бөліп алуға болады. Егер Y кез келген шектелген сандар жиыны болса, онда Больцано-Вейерштрасс теоремасын Y жиынның элементтерінен құралған кез

келген жиынға пайдалануға болады. Бірақ, егер Y шектелмеген жиын болса, онда осы жиыннан $\infty -$ке жинақты тізбек бөліп алуға болады, ал бұл тізбектен шектелген шегі бар ешқандай тізбекше бөліп алуға болмайды. Сондықтан, $R=(-\infty,+\infty)$ нақты сандар кеңістігінде мынадай қорытындыға келеміз: $A \subset R$ болсын. A жиынында кез келген $\{x_n\}$ $(x_n \in A)$ тізбектен шектелген шегі бар тізбекше бөліп алу үшін A жиынның шектелген болуы қажетті әрі жеткілікті. Дегенмен, кез келген метрикалық кеңістіктерге көшкенде Больцано-Вейерштрасс теоремасының тұжырымы орындалатын жиындар класын бөліп ала алмаймыз.

Анықтама. X метрикалық кеңістіктегі M жиын *компактілі* (*немесе өзіне компактілі)* деп аталады, егер M жиынның кез келген шексіз жиыншаларынан шегі осы жиынға тиісті тізбекше бөліп алуға болатын болса.

Компактілі жиынның анықтамасынан және метрикалық кеңістіктегі жинақты тізбектің кез келген тізбекшесі жинақты тізбектің шегіне жинақты болатынын ескерсек, онда компактілі жиын тұйық болады. Онда, компактілі жиынның тұйық жиыншасы компактілі болады.

Анықтама. X метрикалық кеңістіктегі M жиын *салыстырмалы компактілі* немесе *шала компактілі* деп аталады, егер M жиынның $\overline{M}$ тұйықталуы компактылы болса.

5.9 -теорема. Шала компактілі жиын шектелген.

Дәлелдеуі. Кері жориық, яғни M жиын шала компактілі, бірақ шектелмеген болсын және x_1 нүкте M жиынның кез келген нүктесі болсын. Ұйғаруымыз бойынша M шектелмеген жиын болғандықтан, $S_1(x_1)$ (центрі x_1 нүкте, радиусы 1-ге тең) ашық шарға тиісті емес $x_2 \in M$ нүкте табылады. Енді $r_2=\rho(x_1,x_2)+1$ болсын. M шектелмеген жиын болғандықтан, жоғарыда айтылғандай $x_3 \notin S_{r_2}(x_1), x_3 \in M$ нүкте табылады. Енді $r_3=\rho(x_1,x_3)+1$ болсын. Осы сияқты жалғастырып, $\rho(x_i,y_j)\geq 1, i \neq j$ теңсіздігі орындалатын және $\{x_n\} \in M$ тізбекті аламыз. Сонымен біз, ешқандай жинақты тізбекшесі жоқ тізбекті құрдық, ал бұл M жиынның компактілігіне қайшы келеді. Дәлелденді.

Егер X метрикалық кеңістіктің әрбір шексіз жиыншасында осы кеңістіктің элементіне жинақты тізбек бар болса, онда X *компактілі*

кеңістік деп аталады. Компактілі метрикалық кеңістік *компакт* деп аталады. Демек, *компакт* дегеніміз толық метрикалық кеңістік.

Мысал. $X=[0,1]$ кеңістіктің метрикасы $R=(-\infty,\infty)$ кеңістік метрикасындай анықталсын. Больцано-Вейерштрасс тоеремасы бойынша X кеңістік компактілі кеңістік, ал R компактілі емес. Себебі, $M=\{1,2,3,...\}\subset R$ жиынына тиісті әрі жинақты болатын бірде-бір тізбекше жоқ, ал R кеңістікке тиісті кез келген тұйық шектелген жиын Бальцано-Вейерштрасс тоеремасы бойынша компактілі болады.

5.12. Метрикалық кеңістіктердің компактілігі

Біз X метрикалық кеңістікті және осы кеңістікте жататын M жиынды қарастырайық, яғни $M\subset X$.

Анықтама. X метрикалық кеңістіктегі A жиын $M\subset X$ *жиынның* ε*-торы* деп аталады, егер кез келген $x\in M$ үшін кем дегенде бір $a\in A$ нүкте табылып,

$$\rho(x,a)\le\varepsilon$$

теңсіздігі орындалса (A жиын M жиында жатуы міндетті емес әрі $A\cap M=\phi$ болуы да мүмкін, бірақ A жиын M жиынның ε-торы болса, онда B жиын M жиынның 2ε-тары болатын $B\subset M$ жиынды құруға болады).

M *жиын жете шектелген* деп аталады, егер кез келген $\varepsilon>0$ үшін жиынның шектеулі ε-торы бар болса. Осы анықтамадан, шектеулі жиындардың қосындысы шектелген, осы сияқты жете шектелген жиын әрқашанда шектелген.

Егер M жиын жете шектелген болса, онда оның $\overline{M}$ тұйықталуы да жете шектелген болады.

Жиынның жете шектелгендік анықтамасынан мына *тұжырымды* аламыз: егер X метрикалық кеңістіктің өзі жете шектелген болса, онда ол сепарабелді кеңістік болады.

Анықтама. Кеңістік *саналымды-компактілі* деп аталады, егер оның әрбір шексіз жиыншасының кем дегенде бір шектік нүктесі бар болса.

5.10-теорема. Егер X *метрикалық* кеңістік саналымды-компактілі болса, онда ол жете шектелген болады.

Салдар. Кез келген саналымды-компактілі X метрикалық кеңістік компактілі болады.

5.11-теорема. X метрикалық кеңістік компактілі болу үшін ол жете шектелген әрі толық кеңістік болуы қажетті әрі жеткілікті.

5.12-теорема. X толық метрикалық кеңістіктегі M жиын шала компактілі болу үшін M жиынның жете шектелген болуы қажетті әрі жеткілікті.

Анықтама. X метрикалық кеңістіктегі M жиын *саналымды-шала компактілі жиын* деп аталады, егер жиынның A шексіз жиыншасының $(A \subset M)$ кем дегенде бір шектік нүктесі бар болса (шектік нүкте M жиынға тиісті не тиісті емес болуы мүмкін).

Анықтама. $[a,b]$ сегментте анықталған φ функциялардың ϕ үйірі *бірқалыпты шектелген* деп аталады, егер $K > 0$ саны табылып, барлық $x \in [a,b]$ және барлық $\varphi \in \phi$ үшін

$$|\varphi(x)| < K$$

теңсіздігі орындалса.

Егер кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $\delta > 0$ табылып, $\rho(x_1, x_2) < \delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x_1, x_2 \in [a,b]$ және барлық $\varphi \in \phi$ үшін мына теңсіздік орындалса: $\phi = \{\varphi\}$ үйір *тең дәрежелі үзіліссіз* деп аталады.

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon .$$

Арцель теоремасы. $[a,b]$ сегментте анықталған үзіліссіз функциялардың ϕ үйірі $C[a,b]$ кеңістікте шала компактілі болу үшін ϕ үйірдің бірқалыпты шектелген әрі тең дәрежелі үзіліссіз болуы қажетті әрі жеткілікті.

Арцель теоремасын пайдаланып, дифференциал теңдеудің шешімінің бар болатынын дәлелдеуге болады.

Пеано теоремасы. Егер дифференциал теңдеудің

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

оң жағындағы $f(x,y)$ функция G тұйық облыста үзіліссіз болса, онда осы облыстың әрбір ішкі (x_0, y_0) нүктесінен осы теңдеудің кем дегенде бір интегралдың қисық сызығы өтеді.

5.13. Нормаланған кеңістіктер

Егер сызықты кеңістік метрикалық кеңістік болса, онда ол *сызықты метрикалық кеңістік* деп аталады. Метрикалық кеңістіктерде метрика ұғымын енгіздік, ол *нормаланған кеңістік* деп аталатын кеңістікте элементтің нормасы ұғымын енгізуіміз керек болады.

Анықтама. E сызықты кеңістік сызықты *нормаланған кеңістік* деп аталады, егер:

1. E - сызықты кеңістік;

2. E сызықты кеңістіктің әрбір x элементіне *норма* деп аталатын нақты сан сәйкес қойылса және ол $\|x\|_E = \|x\|$ таңбамен белгіленеді. Норма мына *норма аксиомалары* деп аталатын шарттарды қанағаттандырса:

1) кез келген $x \in E$ үшін $\|x\| \geq 0$ және $\|x\| = 0$, тек $x = 0$ болғанда;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ кез келген $x \in E$ және кез келген λ сан;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, кез-келген $x \in E, y \in E$ (үшбұрыш аксиомасы).

Осы анықтамадан, *норма дегеніміз функционал.*

Нормаланған кеңістік нақты немесе комплекс болады, егер E кеңістік нақты немесе комплекс кеңістік болса.

Енді E нормаланған кеңістікте кез келген $x, y \in E$ элементтердің арақашықтығын норма түрінде анықтаймыз:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|. \tag{5.25}$$

Егер $y = 0$ болса, онда

$$\|x\| = \rho(x,0) = \|x - 0\|,$$

яғни кез келген x элементтің нормасы x элементтен 0 элементке дейінгі арақашықтыққа тең. Енді E кеңістікте метрикалық кеңістіктің аксиомалары орындалатынын тексерейік. Егер $x \neq y$ болса, онда $x - y \neq 0$, ал онда 1) аксиома бойынша $\|x - y\| = \rho(x, y) > 0$. Ал егер $x = y$ болса, онда $x - y = 0$, демек $\|x - y\| = \rho(x, y) = 0$; Енді $x - y = (-1)(y - x)$ болғандықтан, осыдан және 2) аксиомадан $\|x - y\| = \|y - x\|$, яғни $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; Метрикалық кеңістіктің үшбұрыш аксиомасын норманың үшбұрыш аксиомасынан аламыз:

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\|x-z+z-y\|\le\|x-z\|+\|z-y\|=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Демек, нормаланған кеңістік метрикалық кеңістіктің дербес жағдайы болады. Сонымен, сызықты нормаланған кеңістікте 5.25–метриканы енгіздік, олай болса $\{x_n\}$ тізбектің x элементке жинақтылығын анықтайық: егер $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ немесе $x_n\to x, n\to\infty$ болса, онда $\|x_n-x\|\to 0, n\to\infty$. Бұл жинақтылық *норма бойынша жинақтылық* деп аталады.

Егер сызықты нормаланған кеңістік норма мағынада толық кеңістік болса, онда ол *Банах кеңістігі* деп аталады және ол В-таңбамен белгіленеді.

Енді метрикалық кеңістігі арақашықтық үзіліссіздігі сияқты (5.2-тақырып), $\|x-y\|$-норма өзінің аргументтері бойынша *үзіліссіз* болады, яғни егер $x_n\to x, y_n\to y, n\to\infty$ болса, онда $\|x_n-y_n\|\to\|x+y\|$. Бұл жағдайда, егер $y_n=0$ болса, онда $\|x_n\|\to\|x\|$.

Енді негізгі арифметикалық операциялар нормаланған кеңістікке үзіліссіз болатынын дәлелдейік.

а) Егер $x_n\to x, y_n\to y, n\to\infty$ болса, онда $x_n+y_n\to x+y, n\to\infty$ болса, онда $x_n+y_n\to x+y, n\to\infty$ болады.

Шынында да,

$$\|(x_n-y_n)-(x+y)\|=\|(x_n-x)+(y_n-y)\|\le\|x_n-x\|+\|y_n-y\|\to 0$$

ә) Егер $x_n\to x,\ \lambda_n\to\lambda$ онда $\lambda_n x_n\to\lambda x,\ n\to\infty$ болады.

Шынында да, λ_n сандар жиынының шектелгендігін ескеріп ($\{\lambda_n\}$ тізбектің шектелген шегі бар), мына шекті аламыз:

$$\|\lambda_n x_n-\lambda x\|=\|\lambda_n x_n+\lambda_n x-\lambda_n x-\lambda x\|=\|\lambda_n(x_n-x)+(\lambda_n-\lambda)x\|\le$$
$$\le|\lambda_n|\cdot\|x_n-x\|+|\lambda_n-\lambda|\cdot\|x\|\to 0,\ n\to\infty$$

Нормаланған кеңістіктегі A жиынының шектелгендігінің анықтамасын қарапайым түрде беруге болады және ол метрикалық кеңістікте арақашықтық бойынша берілген шектелгендіктің анықтамасымен бірдей: A жиын *норма бойынша шектелген* деп аталады, егер жиынның барлық элементтерінің нормасы шектелген болса.

Осы анықтамадан, егер A жиын арақашықтық бойынша шектелген болса, онда A жиын центрі a нүкте, ал радиусы r-тең

тұйық шардың ішінде жатады, яғни $A \subset \overline{S_r}(a): \|x-a\| \le r$, барлық $x \in A$ үшін. Онда :

$$\|x\| = \|x-a+a\| \le \|x-a\| + \|a\| \le r + \|a\|.$$

Осыдан, теңсіздіктің оң жағындағы қосынды тұрақты сан, сондықтан бұл теңсіздік $\|x\|$ норманың шектелгендігін білдіреді.

Кері тұжырымда орындалады, егер барлық $x \in A$ үшін $\|x\| \le r$ болса, онда $A \subset \overline{S_r}(a)$, яғни A жиын арақашықтық бойынша шектелген.

Нормаланған кеңістіктегі $\{x_n\}$ фундаментальді тізбек мына шартты білдіреді:

$$\|x_n - x_m\| \to 0,\ n \to \infty,\ m \to \infty$$

Сонымен, метрикалық кеңістікте берілген барлық ұғымдар (шар, шектелген жиын, сепарабелдік, т.с.б), барлық теоремалар нормалданған кеңістік үшін де орындалады.

Рисс теоремасы. Егер сызықты нормаланған E кеңістікпен беттеспейтін L $(L \ne E)$ кеңістік E кеңістіктің ішкі кеңістігі болса $(L \subset E)$, онда кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін E кеңістік тен нормасы 1-ге тең y элемент табылып $(y \in E)$, барлық $x \in X$ үшін $\|x-y\| > 1-\varepsilon$ теңсіздік орындалады.

Дәлелдеуі. $y_0 \in E,\ y_0 \notin L$ және $d = \inf\limits_{x \in L} \|y_0 - x\|$ болсын. Онда $d > 0$, себебі, егер $d \le 0$ болса, онда y_0 элемент L кеңістіктің шектік элементі болған болар еді, яғни $y_0 \in L$ болады, ал бұл шарт бойынша $y_0 \in L$ болуы мүмкін емес. Кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $x_0 \in L$ элемент табылады және $d \le \|y_0 - x_0\| < d + d \cdot \varepsilon.$ Енді $y = \dfrac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$, болсын. Бұл элемент $y \in L$ және $\|y\| = 1$. L кеңістіктен кез келген x элемент алайық және $z = x_0 + \|y_0 - x_0\| x$, $z \in L$ болсын, онда дәлелдеу керек теңсіздікті аламыз:

$$\|y-x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} \|y_0 - x_0 - x\|y_0 - x_0\| \| =$$

$$= \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} \|y_0 - z\| > \frac{1}{d + d\varepsilon} \|y_0 - z\| \geq \frac{d}{d + d\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon.$$

5.14. $L_p[a,b]$ нормаланған кеңістік

Анықтама. Өлшемді $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментте p дәрежелі *қосындылы функция* деп аталады, егер

$$\int_a^b |f(x)|^p ax < +\infty, p \geq 1 \cdot$$

Осы теңсіздікті қанағаттандыратын функциялар жиыны $L_p[a,b]$ немесе L_p таңбамен белгіленеді.

5.13-теорема. Егер $f(x)$ функция $p > 1$ көрсеткішті қосындылы болса, онда ол қосындылы функция болады, яғни $L_p \subset L$ -қосындылы кеңістік.

5.14-теорема. Егер $L_p[a,b]$ кеңістікке тиісті $f(x)$, $\varphi(x)$ функциялардың қосындысы да осы кеңістікке тиісті болады, яғни, егер $f(x) \in L_p[a,b]$, $\varphi(x) \in L_p[a,b]$, онда $f(x) + \varphi(x) \in L_p[a,b]$.

Енді $p > 1$ болсын. Мына сан

$$q = \frac{p}{p-1} \text{ немесе } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

p санымен *түйіндес көрсеткішті сан* деп аталады.

5.15-теорема. Егер $f(x) \in L_p[a,b]$, $\varphi(x) \in L_q[a,b]$ және p мен q өзара түйіндес болса, онда $f(x) \cdot \varphi(x)$ қосындылы функция және *Гельдер теңсіздігі* деп аталатын мына теңсіздік орындалады:

$$\left| \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx} \cdot \sqrt[q]{\int_a^b |f(x)|^q dx} \cdot \tag{5.26}$$

Дәлелдеуі. Мына функцияны қарастырайық:

$$\psi(x) = x^\alpha - \alpha x,\ 0 < \alpha < 1,\ x \in (0, +\infty).$$

Бұл функцияның $\psi'(x)=\alpha\left[x^{\alpha-1}-1\right]$ туындысы барлық $x\in(0,1)$ үшін оң, ал барлық $x\in(1,\infty)$ үшін теріс. Онда $\psi(x)$ өзінің ең үлкен мәнін $x=1$ нүктеде қабылдайды. Онда $\psi(x)\le\psi(x)=1-\alpha$ теңсіздігі орындалғандықтан, барлық $x\in(0,\infty)$ мына теңсіздік орындалады:

$$x^{\alpha}\le\alpha x+(1-\alpha). \tag{5.27}$$

Енді A мен B оң сандар болсын, онда (5.27)–теңсіздікке $x=\frac{A}{B}$ мәнді қойып, теңсіздікті B -ға көбейтейік, сонда :

$$A^{\alpha}B^{1-\alpha}\le\alpha A+(1-\alpha)B.$$

Егер $\alpha=\frac{1}{p}, 1-\alpha=\frac{1}{q}$ болса, онда:

$$A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\le\frac{A}{p}+\frac{B}{q}. \tag{5.28}$$

Егер $f(x)$ пен $\varphi(x)$ функциялардың кем дегенде біреуі нөлге эквивалентті болса, онда теорема орындалады. Сондықтан

$$\int_a^b|f(x)|^p\,dx,\ \int_a^b|\varphi(x)|^q\,dx$$

интегралдар оң болсын. Онда мына функцияларды қарастыруға болады:

$$g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt[p]{\int_a^b|f(x)|^p\,dx}},\qquad \gamma(x)=\frac{\varphi(x)}{\sqrt[q]{\int_a^b|\varphi(x)|^q\,dx}}$$

Егер (5.28)–теңсіздікте $A=|g(x)|^p$, $B=|\gamma(x)|^q$ болса , онда:

$$|g(x)\cdot\gamma(x)|\le\frac{|g(x)|^p}{p}+\frac{|\gamma(x)|^q}{q}. \tag{5.29}$$

Осыдан $g(x)\cdot\gamma(x)$ функцияның қосындысы функция болатыны шығады , онда $f(x)\cdot\varphi(x)$ функцияда қосындылы функция және

$$\int_a^b|g(x)|^p\,dx=\int_a^b|\gamma(x)|^q\,dx=1$$

теңдікті ескеріп, (5.29)–теңсіздікті интегралдайық, сонда:

$$\int_a^b |g(x)\cdot\gamma(x)|dx \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Осыдан дәлелдеу керек Гельдер теңсіздігін аламыз:

$$\int_a^b |f(x)\cdot\varphi(x)|dx \le \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}\cdot\sqrt[q]{\int_a^b |\varphi(x)|^p\,dx}.$$

5.16-теорема. Егер $f(x)\in L_p[a,b]$, $\varphi(x)\in L_p[a,b]$ болса , онда *Минковский теңсіздігі* деп аталатын мына теңсіздік орындалады:

$$\sqrt[p]{\int_a^b |f(x)+\varphi(x)|^p\,dx} \le \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}+\sqrt[p]{\int_a^b |\varphi(x)|^p\,dx}.$$

Анықтама. Егер $f(x)\in L_p[a,b]$ болса, онда мына сан

$$\|f\|_{L_p[a,b]}=\sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}$$

$f(x)$ *функцияның* $L_p[a,b]$ *кеңістіктегі нормасы* деп аталады.

$L_p[a,b]$ кеңістіктегі $\{f_n(x)\}$ тізбектің $f(x)\in L_p[a,b]$ функцияға p *дәрежелі орта жинақтылығы* немесе *норма бойынша жинақтылығы* деп мына шекті айтамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^p\,dx=0.$$

$L_p[a,b]$ кеңістіктегі $\{f_n(x)\}$ тізбектің $f(x)\in L_p[a,b]$ функцияға *әлсіз жинақтылығы* деп мына шекті айтамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\cdot\varphi(x)dx=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

егер осы теңдік кез келген $\varphi(x)\in L_q[a,b]$ үшін орындалса, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

l_p-нақты сандар жиынындағы $\{x_n\}$ $(x=\{x_1,x_2,...,x_n,...\})$ тізбектерден анықталған кеңістік элементінің *нормасы* деп мына санды айтамыз:

$$\|x\|_{l_p} = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p} < +\infty$$

5.15. Гельберт кеңістігі

Сызықты алгебра курсында E_m m өлшемді нақты (комплекс) сызықты кеңістіктің элементтерін қосу, нақты (комплекс) санды элементке көбейту және элементтерді скаляр көбейту операциялары орындалатыны бізге белгілі [17].

Егер $x = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, онда скаляр көбейтінді мына түрде анықталады:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

Осы кеңістіктегі x элементтің *нормасы* деп мына санды айтамыз:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2}.$$

Математикалық анализ курсында скалярлық көбейтінді жиі кездеседі. Сондықтан скалярлық көбейтінді анықталған кеңістіктерді қарастыруға тура келеді.

Анықтама. $x, y, z, ...$ элементтерден анықталған H кеңістікке мына шарттар (аксиомалар) орындалсын:

1. H кеңістік сызықты кеңістік.

2. H кеңістіктің әрбір қосарланған $x, y \in H$ элементтеріне (x, y) комплекс саны сәйкес келсін және (x, y)-скаляр көбейтінді мына шарттарды қанағаттандырсын:

а) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

ә) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

б) кез келген λ комплекс сан үшін $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ $\left((x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)\right)$;

в) $(x, x) \geq 0$;

3. H толық кеңістік $\rho(x, y) = \|x - y\|$ метрика мағынада.

4. Кез келген натурал n сан үшін H кеңістіктен n сызықты тәуелсіз элементтер табылады, яғни H шексіз өлшемді кеңістік, онда H *кеңістік гильберт кеңістік* деп аталады.

Егер анықтамадағы 1-3 шарттар орындалса, онда H *унитар кеңістік* деп аталады.

Енді Гельберт кеңістігінің қасиеттерін қарастырайық.

Жоғарыдағы анықтаманы тікелей қолданып, алғашқы екі қасиетті аламыз.

1-қасиет. Егер $x, y_1, y_2 \in H$ болса, онда:

$$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)\ ,\ (x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y).$$

2-қасиет. Егер $x \in H$, онда:

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|. \tag{5.30}$$

3-қасиет. Кез келген $x, y \in H$, $y \neq 0$, онда

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \tag{5.31}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \tag{5.32}$$

Бірінші теңсіздік *Шварц-Буняковский теңсіздігі* деп аталады.

Дәлелдеуі. Мына скаляр көбейтіндіні қарастырайық:

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0.$$

Осыдан:

$$(x, x) + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2 (y, y) \geq 0.$$

Енді $\lambda = -\dfrac{(x, y)}{(y, y)}$ болсын, онда:

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geq 0.$$

Осыдан дәлелдеу керек 5.31–теңсіздікті аламыз. Енді Коши-Буняковский теісіздігін пайдаланайық:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Онда : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

2-аксиома және 5.30, 5.32 - формулалар анықтамадағы скаляр көбейтінді арқылы анықталған норма, нормаланған кеңістіктегі нормалардың барлық аксиомаларын қанағаттандырады. Сондықтан,

3-аксиомадағы арақашықтық метрикалық кеңістіктегі барлық аксиомаларды қанағаттандырады.

$\{x_n\} \in H$ *тізбек фундаметальді* немесе *Коши тізбегі* деп аталады, егер

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|x_n - x_m\| = 0.$$

Гельберт кеңістігі толық деп аталады, егер мұндағы кез келген фундаментальді тізбектің шегі бар болса.

5.17-теорема. Норма бойынша жинақты скаляр көбейтінді үзіліссіз функция.

Дәлелдеуі. $x_n \to x$ және $y_n \to y$, $n \to \infty$ болсын. Онда $\|x_n\|, \|y_n\|$ сандар шектелген болады, ал M олардың жоғарғы шекарасы болсын. Сонда:

$$\begin{aligned}
&|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \le \\
&\le |(x_n, y_n) - (x_n, y)| + |(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| + |(x_n - x, y)| \le \\
&\le \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \le M\|y_n - y\| + \|y\| \cdot \|x_n - x\|.
\end{aligned}$$

Теореманың норма бойынша жинақтылығынан, яғни $\|x_n - x\| \to 0$, $\|y_n - y\| \to 0$, $n \to \infty$ және соңғы теңсіздіктен:

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \to 0, n \to \infty.$$

Анықтама. H_1 мен H_2 гельберт кеңістіктері *изоморфты* деп аталады, егер олардың элементтерінің арасында өзара бір мәнді сәйкес бар болса және ол мына шарттарды қанағаттандырса:

1. егер $x', y' \in H_1$ элементтерге сәйкес $x'', y'' \in H_2$ элементтер сәйкес келсе, онда $x' + y' \in H_1$ элементке $x'' + y'' \in H_2$ элемент сәйкес келсе және кез келген нақты α сан үшін $\alpha x' \in H_1$ элементке $\alpha x'' \in H_2$ элемент сәйкес келсе;

2. (x', y') санға (x'', y'') сан сәйкес келсе , мұндағы $x', y' \in H_1$, $x'', y'' \in H_2$.

5.16. Гильберт кеңістігіндегі элементтердің ортогональдылығы

Анықтама. H гильберт кеңістігіндегі кез келген x, y *екі элемент ортогональ* деп аталады, егер $(x, y) = 0$ болса, ол $x \perp y$ таңбамен белгіленеді.

Егер $x \in H$ элемент $L \subset H$ ішкі кеңістіктің кез келген y элементіне $(y \in L)$ ортогональ болса, онда x *элемент* L *ішкі кеңістікке ортогональ* деп аталады және $x \perp L$ таңбамен белгіленеді.

Элементтің жіктелуі туралы теорема. Егер $x \in H$, L кеңістік болса, $L \subset H$, онда x элемент бір рет жіктеледі:

$$x = y + z,$$

мұндағы $y \in L$, $z \perp L$.

Дәлелдеуі. Егер $x \in L$ болса, онда $y = x$, $z = 0$. Бұл жағдайда теорема дәлелденді. Енді $x \notin L$, $d = \inf\limits_{y \in L} \|x - y\|^2$ болсын және $d_n = \|x - y_n\|^2 \to d$, $n \to \infty$ орындалатын L ішкі кеңістіктен $\{y_n\}$ тізбекті қарастырайық. Егер h элемент L ішкі кеңістіктегі нөлге тең емес кез келген элемент болса $(0 \neq h \in L)$, онда кез келген ε комплекс сан үшін $y_n + \varepsilon h \in L$ болады, сондықтан $\|x - (y_n + \varepsilon h)\|^2 \geq d$ теңсіздігі орындалады, яғни:

$$\|x - y_n\|^2 - \bar{\varepsilon}(x - y_n, h) - \varepsilon(h, x - y_n) + |\varepsilon|^2 \cdot \|h\|^2 \geq d.$$

Енді $\varepsilon = \dfrac{(x - y_n, h)}{\|h\|^2}$ болсын, онда:

$$\|x - y\|^2 - \frac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^2} \geq d \text{ немесе } |(x - y_n, h)|^2 \leq \|h\|^2 \cdot (d_n - d).$$

Осыдан:

$$|(x - y_n, h)| \leq \|h\| \cdot \sqrt{d_n - d}.$$

Егер $h = 0$ болса да соңғы теңсіздік орындалады. Соңғы теңсіздіктен, кез келген $h \in L$ үшін

$$|(y_n - y_m, h)| \leq |(y_n - x, h)| + |(y_m - x, h)| \leq \left(\sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d}\right) \cdot \|h\|.$$

Егер $h = y_n - y_m$ болса, онда:

$$\|y_n - y_m\|^2 \le \sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d}.$$

Сондықтан $\{y_n\} \in L$ тізбек өзіне жинақты және H толық кеңістік болғандықтан $y_n \to y \in H$ болады. Ал L тұйық болғандықтан $y \in L$ болады.

Енді $|(x - y_n, h)| \le \|h\|\sqrt{d_n - d}$ теңсіздіктен $n \to \infty$-да шекке көшейік, сонда $(x - y, h) = 0$. Мұндағы h элемент L ішкі кеңістіктің кез келген элементі болғандықтан $x - y \perp L$ болады. $x - y = z$ болсын, онда дәлелдеу керек $x = y + z$ жіктелуді аламыз.

Енді осы жіктелудің тек біреу ғана болуын дәлелдейік. Ол үшін $x = y + z$ және $x = y' + z'$ болсын, мұндағы $y, y' \in L, z \perp L, z' \perp L$. Онда $y - y' = z' - z$ және $y - y' \in L, z' - z \perp L$ болғандықтан

$$\|y - y'\|^2 = (z' - z, y - y') = 0$$

болады. Олай болса, $y' = y$ және $z' = z$. Дәлелденді.

Теореманың $x = y + z$ теңдігіндегі y элемент x элементтің L *ішкі кеңістіктегі проекциясы* деп аталады $(x \in H, x \notin L, y \in L \subset H)$.

L кеңістікке ортогональ болатын элементтер жиынын M таңбамен белгілейік. Онда M кеңістігіде ішкі кеңістік болады, сондықтан жіктелудегі z элемент x элементтің M ішкі кеңістіктегі проекциясы болады. M ішкі кеңістік L *ішкі кеңістіктің ортогональды толықтауышы* деп аталады және ол былай белгіленеді: $H - L$ немесе $H \dot{-} L$ немесе $H \setminus L$, ал H кеңістік L мен M ішкі кеңістіктердің *ортогональ қосындысы* деп аталады және $H = L + M$ немесе $H = L \dot{+} M$ немесе $H = L \oplus M$ таңбалармен белгіленеді.

Енді H кеңістіктің ортонормаланған жүйелері және ортогонализациялау тәсілін біз «Сызықты алгебра» курсында қарастырғанбыз ([17], 2.6,4.3-тақырыптар]). Сондықтан біз оларға тоқталмаймыз.

5.17. $L_2[a,b]$ кеңістігі

Енді $L_2[a,b]$ кеңістікті қарастырайық. Егер $x(t), y(t) \in L_2[a,b]$, c-кез келген тұрақты сан болса онда $c \cdot x(t) \in L_2[a,b]$ және $x(t)+y(t) \in L_2[a,b]$. Енді $x(t) \cdot y(t) \in L_2[a,b]$болатынын тексерейік. Ол үшін мына теңсіздікті ескерсек болғаны:

$$|x(t) \cdot y(t)| \le x^2(t) + y^2(t).$$

Теңсіздіктің оң жағындағы қосындылы екі функцияның қосындысы да қосындылы функция, онда $x(t) \cdot y(t)$ өлшемді функция болғандықтан, ол да қосындылы функция болады. Енді мына теңдіктен:

$$(x(t)+y(t))^2 = x^2 + 2x(t) \cdot y(t) + y^2(t),$$

$(x(t)+y(t))^2$ функцияда қосындылы, яғни $x(t)+y(t) \in L_2[a,b]$.

$L_2[a,b]$ кеңістіктің кез келген $x(t)$ элементінің нормасын $L_2[a,b]$ және $L[a,b]$, яғни $\|x(t)\|_{L_2[a,b]}, \|x(t)\|_{L[a,b]}$, кеңістіктерде қарастыруға болады. Буняковский теңсіздігіндегі:

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt\right)^2 \le \int_a^b x^2(t)dt \cdot \int_a^b y^2(t)dt$$

$y(t) \equiv 1$ болса, онда:

$$\left(\int_a^b x(t)dt\right)^2 \le \sqrt{b-a} \int_a^b x^2(t)dt.$$

Осыдан:

$$\|x\|_{L[\overline{a,b}]} < \sqrt{b-a}\|x\|_{L_2[a,b]}$$

Егер $[a,b]=[0,1]$ болса, онда $\|x\|_{L[0,1]} \le \|x\|_{L_2[0,1]}$.

Ал егер $|y(t)| \le M$ болса, онда Буняковский теңсіздігінен:

$$\left|\int_a^b x(t) \cdot y(t)dt\right| \le M\sqrt{b-a}\|x\|_{L_2[a,b]}.$$

$L_2[a,b]$ кеңістігі гильберт кеңістігі б олатындай скаляр көбейтіндіні анықтауға болады. Ол үшін кез келген $x(t), y(t) \in L_2[a,b]$ функцияларға скаляр көбейтіндіні мына түрде анықтаймыз:

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t) \cdot y(t) dt.$$

Бұл скаляр көбейтіндіге скаляр көбейтінің барлық аксиомалары орындалады. $L_2[a,b]$ кеңістікте норма мен скаляр көбейтінді:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

формуламен байланысты, демек $L_2[a,b]$ кеңістікте скаляр көбейтінді норманы анықтайды. Сонымен, $L_2[a,b]$ толық және сепарабельді болғандықтан, ол *сепарабельді гильберттік* кеңістік болады және ол шексіз өлшемді кеңістік. Шынында да, $L_2[a,b]$ кеңістіктен сызықты тәуелсіз шексіз элементтерді табуға болады, мысалы $t^n (n = 0,1,2,...)$ түрдегі үзіліссіз функцияларды табуға болады.

Осы сияқты, квадратымен интегралданатын комплекс функцияларға скаляр көбейтіндіні мына түрде анықтауға болады:

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t) \cdot \overline{y(t)} dt.$$

Скаляр көбейтінді осы түрде анықталған кеңістікте комплекс глиьберт кеңістік болады.

5.18. Аддитивті операторлар

Бізге сызықты X пен Y кеңістіктер және әрбір $x \in X$ элементке $y \in Y$ элементті сәйкес қоятын A оператор берілсін. Бұл жағдайда A оператор X кеңістікте анықталған, ал операторлың қабылдай алатын мәндері Y кеңістікке тиісті.

Анықтама. *A оператор аддитивті* деп аталады, егер кез келген $x_1, x_2 \in X$, элементтер үшін

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2. \qquad (5.33)$$

A оператор *біртекті* деп аталады, егер барлық $x \in X$ және кез келген α үшін

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax). \qquad (5.34)$$

Енді аддитивті операторлардың қасиеттерін қарастырайық.

Егер A аддитивті оператор болса, онда

а) $AO = O$ ($AO_x = O_y$, мұндағы O_x элемет X кеңістіктегі нөл элемент, O_y элемент Y кеңістіктегі нөл элемент, ал бұл элементтерді біз төменде нөл таңбамен белгілейтін боламыз).

ә) $A(-x) = -Ax$ барлық, $x \in X$ үшін;

б) (5.34) теңдік рационал α үшін орындалады.

Дәлелдеуі. а) Кез келген $x \in X$ үшін

$$Ax = A(x + 0) = Ax + A0,$$

онда $A0 = 0$.

ә) $x - x = 0$ болғандықтан

$$Ax + A(-x) = A(x - x) = A0 = 0,$$

онда $A(-x) = -Ax.$

б) Егер n натурал сан болса, онда :

$$A(nx) = A\left(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ қосынды}}\right) = nAx.$$

Егер $\alpha = \frac{1}{n}$ болса (n -натурал сан), онда :

$$Ax = A\left(n \cdot \frac{1}{n}x\right) = nA\left(\frac{1}{n}x\right).$$

Осыдан:

$$A\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}(Ax).$$

Егер $\alpha = \frac{m}{n}$, (m, n - натурал сандар), онда б) пункт бойынша:

$$A(\alpha x) = A\left(m \cdot \frac{1}{n}x\right) = mA\left(\frac{1}{n}x\right) = m \cdot \frac{1}{n}A(x) = \frac{m}{n}(Ax) = \alpha(Ax).$$

Егер α – теріс рационал сан болса, яғни $\alpha = -r$, мұндағы $r = \frac{m}{n}$, онда ә) пункт бойынша: $A(\alpha x) = A(-rx) = -A(rx) = -r(Ax) = \alpha(Ax).$

Егер X пен Y нақты сандар жиыны болса, онда A қарапайым функция болады және A операторды аддитивтігінен оның біртектігі шықпайды.

5.19 . Сызықты операторлар

Бізге X, Y нормаланған кеңістіктер берілсін.

Анықтама. $D \subset X$ жиынды Y кеңістікке бейнелейтін A *оператор* $x_0 \in D$ *нүктеде үзіліссіз* деп аталады, егер x_0 нүктеге жинақты кез келген $\{x_n\} \in D$ тізбек үшін $(x_n \to x_0)$, мына шек орындалса: $Ax_n \to Ax_0$, егер $x_n \to x_0$.

Осы анықтаманы мына түрде де беруге болады: A *оператор* $x_0 \in D$ *нүктеде үзіліссіз* деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $\delta > 0$ сан табылып, $\rho_X(x, x_0) < \delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x \in D$ мына теңсіздік орындалса:

$$\rho_Y(Ax, Ax_0) < \varepsilon .$$

Анықтама. Егер ол аддитивті әрі бір текті оператор болса, $y = Ax$ *оператор сызықты* деп аталады

Сызықты үзіліссіз операторлардың X кеңістікті Y кеңістікке бейнелеуін $X \to Y$ таңбамен белгілейміз.

5.18-теорема. Егер аддитивті A оператор X кеңістіктің бір $x_0 \in X$ нүктесінде үзіліссіз болса онда ол X кеңістіктің кез келген нүктесінде үзіліссіз болады, яғни ол сызықты оператор.

Дәлелдеуі. $x_n \in X$ және $x_n \to x,\ n \to \infty$ болсын. Онда $x_n - x + x_0 \to x_0$ болады. Теореманың шарты бойынша, A оператор $x_0 \in X$ нүктеде үзіліссіз, сондықтан

$$Ax_n - Ax + Ax_0 = A(x_n - x + x_0) \to Ax_0,\ \ n \to \infty,$$

онда : $Ax_n - Ax \to 0$ немесе $Ax_n \to Ax$. Дәлелденді.

Осы теоремадан: *аддитивті операторлардың сызықты оператор болуын дәлелдеу үшін оның үзіліссіздігін, мысалы 0 (нөл) нүктеде дәлелдесек жеткілікті*. Себебі, аддитивті оператор $A0 = 0$ теңдік орындалады (5.17- тақырып, а)), онда A операторды 0 нүктедегі

үзіліссіздігі мына тұжырымды білдіреді: *егер* $x_n \to 0$, *онда* $Ax_n \to 0$ *болады.*

Егер X пен Y нормаланған кеңістік болса, онда бұл кеңістіктердегі жинақтылық норма бойынша болады. Ал A операторды үзіліссіздігі мынаны білдіреді:

егер $\|x_n - x\| \to 0$ *болса, онда:*

$$\|Ax_n - Ax\| \to 0.$$

5.19-теорема. X нақты кеңістікте анықталған аддитивті үзіліссіз Ax оператар біртекті оператор болады.

Мысалдар.1. $X = Y = C[a,b]$ болсын. Кез келген $x(t) \in C[a,b]$ үшін

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds \tag{5.35}$$

болсын, мұндағы $K(t,s)$ функция $a \le t, s \le b$ квадратта үзіліссіз функция. 5.35–теңдік $C[a,b]$ кеңістікте әсер ететін $Ax = y$ операторды анықтайды және ол *Фредгольмнің интегралдық операторы* деп аталады. Осы операторды сызықты оператор болатынын көрсетейік.

Операторды аддитивтігі:

$$A(x_1 + x_2) = \int_a^b K(t,s)[x_1(s) + x_2(s)]ds = \int_a^b K(t,s)x_1(s)ds + \int_a^b K(t,s)x_2(s)ds = Ax_1 + Ax_2.$$

Енді Фредгольмнің интегралдық операторының үзіліссіздігін дәлелдейік.

$C[a,b]$ кеңістікте бірқалыпты жинақтылық орындалады, сондықтан интеграл астынан шекке көшуге болады. Сонымен, егер $x_n(t) \to x_0(t)$, болса, онда :

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b K(t,s)x_n(s)ds = \int_a^b K(t,s)\lim_{n\to\infty} x_n(s)ds = \int_a^b K(t,s)x_0(t)ds = Ax_0.$$

2. Енді (5.35) Фредгольмнің интегралдық операторын $X = Y = L_2[a,b]$ кеңістікте қарастырайық, мұндағы $K(t,s)$ *операторды ядросы деп* аталады және ол s пен t айнымалылары бойынша квадратымен интегралданады, яғни:

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t,s)dtds < \infty. \tag{5.36}$$

A операторды $L_2[a,b]$ кеңістіктен $L_2[a,b]$ кеңістікке әсер ететінін дәлелдейік, яғни $y(t)\in L_2[a,b]$. (5.36) теңсіздік орындалатындықтан және

$$\int_a^b\int_a^b x^2(s)dtds=\int_a^b dt\int_a^b x^2(s)ds=(b-a)\int_a^b x^2(s)ds$$

теңдіктен $K(t,s)\cdot x(s)$ функциясының $a\le t,s\le b$ квадратта интегралданатынын аламыз. Онда Фубини теоремасы (3.1-тақырып) бойынша 5.35–функция өлшемді әрі интегралданатын функция. Гельдер теңсіздігінен (5.4-тақырып, $p=q=\frac{1}{2}$):

$$\int_a^b y^2(t)dt=\int_a^b\left\{\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right\}^2 dt\le\int_a^b\left\{\int_a^b K^2(t,s)ds\int_a^b x^2(s)ds\right\}dt=$$

$$=\int_a^b x^2(s)ds\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dtds<\infty.$$

Осыдан $y(t)\in L_2[a,b]$.

Операторды аддитивті болатынын 1-мысалдағыдай оңай дәлелдеуге болады. Енді үзіліссіз болатынын дәлелдейік. Соңғы теңсіздіктен мына теңсіздікті аламыз:

$$\|y\|=\|Ax\|\le k\|x\|. \tag{5.37}$$

Егер $x_n\to x_0, n\to\infty$ болса, онда 5.37–теңсіздіктен:

$$\|Ax_n-Ax_0\|=\|A(x_n-x)\|\le k\|x_n-x_0\|\to 0, n\to\infty.$$

Сонымен, $n\to\infty$ – да $Ax_n\to Ax_0$. Дәлелденді.

5.20. Сызықты операторды шектелуі

Нормаланған кеңістіктегі аддитивті операторды үзіліссіздік қасиеті оның шектелгендік қасиетіне пара-пар.

Анықтама. X нормаланған кеңістіктегі A *оператор шектелген* деп аталады, егер C тұрақты сан табылып, барлық $x\in X$ үшін

$$\|Ax\|\le C\|x\| \tag{5.38}$$

теңсіздігі орындалса.

5.20-теорема. A сызықты оператор үзіліссіз болу үшін, ол шектелген болуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. A оператор үзіліссіз, ал бірақ шектелмеген болсын, яғни барлық (5.38) теңсіздік орындалатын C тұрақты сан табылмасын. Онда, барлық n натурал сан үшін $x_n \in X$ элементі табылып,

$$\|Ax_n\| > n\|x_n\| \tag{5.39}$$

болады. Осы теңсіздіктен $Ax_n \neq 0$ болады, онда $x_n \neq 0$. Енді $x_n^{'} = \dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$ болсын,онда $\|x_n^{'}\| = \dfrac{1}{n} \to 0$, яғни $x_n^{'} \to 0$. Сызықты операторды біртектілігінен

$$Ax_n^{'} = \frac{1}{n\|x_n\|} Ax_n$$

және (5.39)–теңсіздіктен

$$\|Ax_n^{'}\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|Ax_n\| > 1\cdot$$

Сондықтан, $Ax_n^{'}$ нөлге ұмтылмайды, ал бұл A операторды үзіліссіздігіне қайшы келеді. Олай болса, A шектелген оператор.

Жеткіліктілігі. Аддативті A оператор шектелген болсын, яғни 5.38–теңсіздік орындалсын. Егер $x_n \to 0$ болса, яғни $\|x_n\| \to 0$ онда 5.38–теңсіздіктен $\|Ax_n\| \to 0$, яғни $Ax_n \to 0$. Демек, A оператор нөл нүктеде үзіліссіз болғандықтан, онда ол 5.18-теорема бойынша үзіліссіз оператор. Дәлелденді,

5.21-теорема. Барлық X нормаланған кеңістікте (5.38) теңсіздік орындалуы үшін $\|Ax\| \le C$ теңсіздік $\|x\| \le 1$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық x үшін орындалуы қажетті әрі жеткілікті (мұндағы C тұрақты саны (5.3) теңсіздіктегі сан).

Дәлелдеуі. (5.38)–теңсіздіктен, егер $\|x\| \le 1$ болса, онда $\|Ax\| \le C\|x\| \le C$. Енді барлық $\|x\| \le 1$ үшін $\|Ax\| \le C$ болсын. Кез келген $x \in X$ үшін $r_n \to \|x\|$ шек орындалатын $r_n > \|x\|$ рационал сандарды таңдап алуға болады. Енді $x_n' = \dfrac{x}{r_n}$ болсын, онда

$\|x_n'\| = \dfrac{\|x\|}{r_n} < 1.$ Сондықтан $\|Ax_n'\| \le C$. Оператордың аддитивтігінен оның рационал көбейткіштері бойынша біртектілігін аламыз, демек

$$\|Ax\| = \|A(r_n x_n')\| = r_n \|Ax_n'\| \le C \cdot r_n \qquad (5.40)$$

5.40–теңсіздігінен шекке көшіп, 5.38–теңсіздікті аламыз. Дәлелденді.

5.21–теоремадағы $\|x\| \le 1$ теңсіздікті қанағаттандыратын x-тер жиыны X кеңістіктегі *бірлік шар* деп аталады.

Осы теоремадан соң аддитивті оператордың шектелгендігінің анықтамасын мына түрде беруге болады: *аддитивті оператор шектелген* деп аталады, егер X нормаланған кеңістіктегі бірлік $\overline{S_1}$ шардағы оператордың мәндер жиынтығы шектелген болса.

Сызықты операторлардың ең негізгі қасиеттерінің бірі оның $\overline{S_1}$ - *бірлік* $\|x\| \le 1$ *шардағы шектелуі.* Кез келген сызықты емес оператор үшін бұл қасиет оператордың үзіліссіздігінен оның шектелуі шықпайды, себебі кеңістіктегі бірлік шар компактылы болмауы мүмкін. *Сызықты операторлардың бірлік шарда шектелуін дәлелдейік.* Ол үшін кері жориық, яғни $\|Ax_n\| = a_n \to \infty$ болатын $\|x_n\| \le 1, \{x_n\}$ тізбек бар болсын. Енді $x_n' = \dfrac{x_n}{a_n}$ болсын, онда: $\|x_n'\| \le \dfrac{1}{a_n} \to 0$, яғни $x_n' \to 0,\ n \to \infty$ болады және де

$$\|Ax_n'\| = \left\|A\left(\frac{x_n}{a_n}\right)\right\| = \frac{1}{a_n}\|Ax_n\| = \frac{1}{a_n} \cdot a_n = 1 \quad 0 = \|AO\|.$$

Сонымен, біз қайшылыққа келдік.

Мысал. 5.17-тақырыпта қарастырылған $C[a,b]$ кеңістіктегі Фредгольмнің интегралды операторын қарастырайық (1-мысал): мұнда $\sup\limits_{a \le t,\, s \le b} |K(t,s)| = \beta_0$ болсын. Онда $x(t) \in C[a,b],\ \|x(t)\| \le 1$ үшін:

$$\|Ax\| = \max_t \left| \int_a^b K(t,s)x(s)ds \right| \le \max_t \int_a^b |K(t,s)| \cdot |x(s)|ds \le$$

$$\le \max_s |x(s)| \beta_0 \int_a^b ds = \max_s |x(s)| \cdot \beta_0 \cdot (b-a) = \beta(b-a)\|x\| \le \beta(b-a).$$

Осыдан:

$$\|A\| = \underset{\|x\|\le 1}{Sup}\|Ax\| \le \beta(b-a)\cdot$$

Мысал. Аддитивті

$$Ax = \frac{d}{dt}x(t)$$

операторды $C[a,b]$ кеңістікте қарастырайық, мұндағы $x(t)\in C[a,b]$. Бұл A оператор үзіліссіз емес. Бізге мына тұжырым математикалық анализ курсынан белгілі: бірқалыпты жинақты функциялар тізбегі шегінің туындысы, осы тізбектің туындыларынан анықталған тізбектің шегіне тең болмауы мүмкін. Операторды аддитивті болатынын оңай дәлелдеуге болады. A операторды шектелмегендігін дәлелдейік. Ол үшін $x_n(t) = sin\, n\pi\, t$ болсын, онда $\|x_n\| = 1$ және

$$Ax_n = (sin\, n\pi\, t)' = n\pi\, cos\, n\pi\, t\,.$$

Осыдан $\|Ax_n\| = n\pi$ және $n\to\infty, \|x_n\| = 1$, ал $\|Ax_n\|$ шексіз өседі. Қарастырып отырған A оператор бүкіл $C[a,b]$ кеңістікте анықталмаған, ол осы кеңістік функцияларының туындысы үзіліссіз болатын жиында ғана анықталған.

5.21. Сызықты операторды нормасы және нормалардың эквиваленттілігі

Біз сызықты шектелген A операторды қарастырайық.

Анықтама. Мына теңсіздікті қанағаттандыратын

$$\|Ax\| \le C\|x\|$$

С тұрақты сандардың ең кіші мәні A *операторды нормасы* деп аталады және ол $\|A\|$ таңбамен белгіленеді.

Сонымен, $\|A\|$ санға мына екі қасиет орындалады:

а) Кез келген $x\in X$ үшін

$$\|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\|; \qquad (5.41)$$

ә) кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін x_ε элемент табылып,

$$\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\| \tag{5.42}$$

теңсіздігі орындалады.

Енді мына теңдіктің орындалатынын дәлелдейік:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| \text{ немесе } \|A\| = \operatorname{Sup}_{\|x\|\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{5.43}$$

Бірінші теңдікті дәлелдейік, егер $\|x\| \le 1$ болса, онда:

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\| \le \|A\|.$$

Осыдан:

$$\sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| \le \|A\| \tag{5.44}$$

Енді операторлың нормасына орындалатын ә) - қасиетті пайдаланайық және

$$\xi_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}$$

болсын, онда:

$$\|A\xi_\varepsilon\| = \left\|A\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}\right\| = \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}\|Ax_\varepsilon\| > \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}(\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\| = \|A\| - \varepsilon.$$

Енді $\|\xi_\varepsilon\| = \left\|\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}\right\| = 1$ теңдікті ескерейік, сонда

$$\operatorname{Sup}_{\|x\|\le 1}\|Ax\| \ge \|A\xi\| > \|A\| - \varepsilon.$$

Осыдан:

$$\operatorname{Sup}_{\|x\|\le 1}\|Ax\| \ge \|A\| \tag{5.45}$$

Жоғарыдағы (5.44) және (5.45) – теңсіздіктерді салыстырып, (5.43)– теңдікті аламыз.

Енді сызықты операторлың біртектілігін ескеріп (5.19-теорема), операторлың нормасына мына теңдікте орындалады.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| \tag{5.46}$$

Демек, оператордың $\|A\|$ нормасын есептеу үшін, бірлік $\overline{S}$ шардың бетіндегі Ax мәндердің ең үлкен шекарасын есептесек жеткілікті.

Анықтама. X сызықты кеңістіктегі $\|x\|_1$ мен $\|x\|_2$ *нормалар эквивалентті* деп аталады, егер m, M сандары табылып, барлық $x \in X$ үшін

$$m\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\|x\|_1$$

теңсіздік орындалса.

Демек, бір X сызықты кеңістікте анықталған $\|x\|_1$ мен $\|x\|_2$ нормалардың әрқайсысы X кеңістікті нормаланған кеңістікке айналдырады және нормалар бойынша жинақтылық бірдей, яғни егер $\|x\|_1$ норма бойынша $x_n \to x$ болса, онда $\|x\|_2$ норма бойыншада $x_n \to x$ болады және керісінше.

Мысал. $C[a,b]$ кеңістікте

$$Bx = t \cdot x(t)$$

тәуелсіз айнымалы көбейту операторы деп аталатын операторды қарастырайық, $0 < a < b$.

Кез келген $x(t) \in C[a,b]$, $\|x\| \le 1$ үшін :

$$\|Bx\| = \max_t |t \cdot x(t)| < b \max_t |x(t)| = b\|x\| \le b. \qquad (5.47)$$

Осыдан $\|B\| \le b$. Егер $x_0(t) = 1$ болса, онда:

$$\|Bx_0\| = \max_t |tx_0(t)| = \max_t |t| = b.$$

Сондықтан:

$$\|B\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Bx\| \ge \|Bx_0\| = b \qquad (5.48)$$

Сонымен, (5.47) және (5.48)–теңсіздіктерден $\|B\| = b$ болады.

5.22 Операторлардың қосындысы мен көбейтіндісі

Бізге X сызықты кеңістікті Y сызықты кеңістікке бейнелейтін A мен B сызықты операторлары берілсін.

Анықтама. A мен B *сызықты операторлардың қосындысы* деп C операторды айтамыз: $A+B=C$, егер ол $x \in X$ элементке $y = Ax + Bx \in Y$ элементті сәйкес қойса.

$A+B=C$ операторы A мен B операторларының анықталу облыстарының қиылысу облысында анықталған:

$$D(C)=D(A)\cap D(B),$$

мұндағы $D(A)$ мен $D(B)$ сәйкес A мен B операторлардың анықталу облыстары.

Егер A мен B сызықты және үзіліссіз оператор болса, онда $A+B=C$ оператор да сызықты әрі үзіліссіз болады. Шынында да,

$$C(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = (A+B)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 + \alpha_1 Bx_1 + \alpha_2 Bx_2 =$$
$$= \alpha_1 (Ax_1 + Bx_1) + \alpha_2 (Ax_1 + Bx_2) = \alpha_1 Cx_1 + \alpha_2 Cx_2.$$

Енді үзіліссіз болатынын көрсетейік. Егер $x_n \to x_0$ болса, онда:

$$\|Cx_n - Cx\| = \|(A+B)x_n - (A+B)x\| \le \|A+B\| \cdot \|x_n - x\| \to 0.$$

Егер X пен Y нормаланған кеңістіктер, ал A мен B шектелген операторлар болса, онда $A+B=C$ операторда шектелген және мына теңсіздік орындалады:

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|. \qquad (5.49)$$

Шынында да, кез келген $x \in X$ үшін:

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le (\|A\| + \|B\|) \cdot \|x\|.$$

Бізге A мен B сызықты операторлары берілсін және A оператор X сызықты кеңістікті Y сызықты кеңістікке, ал B оператор Y кеңістікті Z сызықты кеңістікке бейнелесін.

Анықтама. A мен B *сызықты операторлардың көбейтіндісі* деп $BA=C$ операторды айтамыз, егер ол $x \in X$ элементке $z \in Z$ элементті сәйкес қойса:

$$Z = B(Ax)$$

$B \cdot A = C$ операторларының анықталу облысы $Ax \in D(B)$ енгізуі орындалатын $D(A)$ облысының x нүктелерінен тұрады.

Егер A мен B сызықты және үзіліссіз операторлар болса, онда $BA=C$ сызықты әрі үзіліссіз оператор болады. Шынында да,

$$C(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = BA(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = B(\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2) =$$
$$= \alpha_1 BAx_1 + \alpha_2 BAx_2 = \alpha_1 Cx_1 + \alpha_2 Cx_2.$$

Егер $x_n \to x_0$ болса, онда:

$$\|Cx_n - Cx_0\| = \|BAx_n - BAx_0\| \le \|BA\| \cdot \|x_n - x_0\| \to 0.$$

Егер A мен B шектелген және нормалданған кеңістіктерде берілсе, онда $BA = C$ оператор шектелген және

$$\|BA\| \le \|B\| \cdot \|A\|. \qquad (5.50)$$

Шынында да,

$$\|B(Ax)\| \le \|B\| \cdot \|Ax\| \le \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|$$

Осыдан 5.50–теңсіздікті аламыз.

Тұрақты k санды A операторға көбейту амалы $kA = C$ операторды анықтайды және ол элементке kAx элементті сәйкес қояды.

5.23. Шектелген сызықты операторлар кеңістігі

X сызықты кеңістікті Y сызықты кеңістікке бейнелейтін барлық сызықты шектелген операторлар жиыны сызықты кеңістік құрайды, ол кеңістікті $Z(X,Y)$ таңбамен белгілейік

Егер X пен Y нормаланған кеңістіктер болса, онда $Z(X,Y)$ кеңістікте де метриканы енгізуге болады. Шынында да, X кеңістікті Y кеңістікке бейнелейтін A сызықты шектелген операторлардың нормасы анықталған. Бұл норма норма аксиомаларын қанағаттандыратынын дәлелдейік:

1) $\|A\| = \underset{\|x\|\le 1}{Sup}\|Ax\| \ge 0$. Егер $\|A\| = 0$ болса, яғни $\underset{\|x\|\le 1}{Sup}\|Ax\| = 0,$ онда $\|x\| \le 1$ теңдікті қанағаттандыратын бірлік шарда $\|Ax\| = 0$ болады. Операторлың аддитивтігінен барлық x үшін $Ax = 0$, онда $A = 0$.

2) $\|\lambda a\| = \underset{\|x\|\le 1}{Sup}\|\lambda x\| = |\lambda| \underset{\|x\|\le 1}{Sup}\|Ax\| = |\lambda| \cdot \|A\|.$

3) $\|A + B\| = \underset{\|x\|\le 1}{Sup}\|Ax + Bx\| \le \underset{\|x\|\le 1}{Sup}\|Ax\| + \underset{\|x\|\le 1}{Sup}\|Bx\| = \|A\| + \|B.\|$

Сонымен, $Z(X,Y)$ сызықты шектелген операторлар кеңістігі нормаланған кеңістік.

Дербес жағдайда, $Y = R$–нақты сандар жиыны болғанда, яғни біз X кеңістікте анықталған сызықты функционалдар кеңістіктігін

қарастырғанда, онда бұл функционалды кеңістік X кеңістіктің *түйіндес кеңістігі* деп аталады және ол X^* таңбамен белгіленеді.

5.22-теорема. Егер Y толық кеңістік болса, онда $Z(X,Y)$ сызықты шектелген операторлар кеңістігі де толық кеңістік болады, яғни ол банах кеңістігі.

Дәлелдеуі: $\{A_n\}$ тізбегі $Z(X,Y)$ сызықты шектелген операторлар кеңістігіндегі норма бойынша өзіне жинақты сызықты операторлар тізбегі болсын, яғни $\|A_n - A_m\| \to 0, n,m \to \infty$. Онда кез келген $x \in X$ үшін

$$\|A_n x - A_m x\| \le \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \to 0, \ n,m \to \infty.$$

Сондықтан әрбір тағайындалған x үшін Y кеңістіктегі $\{A_n x\}$ тізбек өзіне жинақты. Y толық кеңістік болғандықтан $\{A_n x\}$ тізбектің y шегі бар.

Сонымен, әрбір $x \in X$ элементке $y \in Y$ элементті сәйкес қоятын A операторды аламыз, яғни $y = Ax$, ал бұл оператор сызықты:

$$A(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \lim_{n\to\infty} A_n x_2 = Ax_1 + Ax_2$$

Енді A сызықты оператордың шектелгендігін дәлелдейік. Теореманың шарты бойынша:

$$\|A_n - A_m\| \to 0, \ n,m \to \infty .$$

Осыдан:

$$\|\|A_n\| - \|A_m\|\| \to 0, \ \ n,m \to \infty ,$$

яғни $\{\|A_n\|\}$ санды тізбек өзіне жинақты. Олай болса, ол шектелген. Сондықтан, K тұрақты саны табылып, барлық n үшін $\|A_n\| \le K$ болады. Осыдан барлық n үшін:

$$\|A_n x\| \le K\|x\| .$$

Онда:

$$\|A_n x\| = \lim_{n\to 0} \|A_n x\| \le K\|x\| .$$

Сонымен, A шектелген оператор.

Енді сызықты операторлар кеңістігінде A оператор норма бойынша $\{A_n\}$ тізбектің шегі болатынын дәлелдейік. Кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін n_0 нөмірі табылып, $\|x\| \le 1$ теңсіздікті қанағаттандыратын

барлық x үшін және $p > 0$, $n \geq n_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын n үшін

$$\left\| A_{n+p}x - A_n x \right\| < \varepsilon \qquad (5.51)$$

теңсіздік орындалады. (5.51)–теңсіздіктен $p \to \infty$-да шекке көшейік, сонда:

$$\left\| Ax - A_n x \right\| \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0, \ \left\| x \right\| < 1.$$

Сондықтан $n \geq n_0$ үшін

$$\left\| A_n - A \right\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| (A_n - A)x \right\| \geq \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады. Демек,

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n.$$

Салдар. X сызықты нормаланған кеңістіктің X^* түйіндес кеңістігі банах кеңістік болады.

5.24. Операторлардың бірқалыпты мен нүктелі жинақтылығы

Біз $\zeta(X, Y)$ сызықты шектелген операторлар кеңістігін қарастырайық.

Анықтама. Сызықты операторлар кеңістіктегі сызықты шектелген операторлардың $\{A_n\}$ тізбегі A сызықты операторға *бірқалыпты жинақты* деп аталады, егер ол тізбек норма бойынша жинақты болса, яғни

$$\left\| A_n - A \right\| \to 0, \ n \to \infty.$$

Егер $A_n \to A$ норма бойынша жинақты болса, онда кез келген $\left\| x \right\| \leq r$ шарда $A_n x \to Ax$ бірқалыпты жинақты болады. Шынында да, берілген $\varepsilon > 0$ сан үшін n_0 нөмірді $n \geq n_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын n үшін

$$\left\| A_n - A \right\| \leq \frac{\varepsilon}{r}$$

теңсіздігі орындалатындай етіп таңдап аламыз. Онда, барлық $x \in \overline{S_r(x)}$ үшін:

$$\left\| A_n x - Ax \right\| \leq \left\| A_n - A \right\| \cdot \left\| x \right\| < \frac{\varepsilon}{r} \cdot r = \varepsilon.$$

Дәлелденді. Енді кері ұйғарайық, егер кез келген $\|x\| \le r$ шарда $A_n x \to Ax$ бірқалыпты жинақты болсын. Онда $A_n x \to Ax$-ке бірлік шарда да бірқалыпты жинақты болады және жоғарыда дәлелденгендей:

$$\|A_n - A\| \to 0.$$

Анықтама. Егер әрбір тағайындалған x үшін $\{A_n x\}$ тізбек Ax-ке жинақты болса, $\zeta(X,Y)$ сызықты операторлар кеңістектегі сызықты шектелген операторлардың $\{A_n\}$ тізбегі A сызықты операторға *нүктелі жинақты* деп аталады.

Осы анықтамалардан: *егер* $\{A_n\}$ *тізбек бірқалыпты жинақты болса, онда бұл тізбек нүктелі жинақты болады,* ал кері тұжырым орындалмауы мүмкін.

Банах-Штейнхаус теоремасы. Егер $\zeta(X,Y)$ кеңістіктегі сызықты шектелген операторлардың $\{A_n\}$ тізбегі, X банах кеңістігінің әрбір x нүктесінде өзіне жинақты болса, онда осы операторлардың нормасынан анықталған $\{\|A_n\|\}$ тізбек шектелген.

5.23 - теорема. Егер X пен Y толық кеңістіктер болса, онда $\zeta(X,Y)$ сызықты шектелген операторлардың кеңістігі нүктелі жинақты мағынада толық кеңістік болады.

5.24 – теорема. $\{A_n\}$ операторлар тізбегі A_0 операторларға нүктелі жинақты болу үшін мына шарттардың орындалуы қажетті әрі жеткілікті:

1) $\{\|A_n\|\}$ тізбегі шектелген болса;

2) Элементтерінің сызықты комбинациясы X кеңістікте барлық жерде дерлік толық болатын қандайда бір X_0 жиынның кез келген x элементі үшін мына шек орындалса:

$$A_n x \to A_0 x, \ n \to \infty.$$

Дәлелдеуі. Бірінші шарттың қажетті болуы Банах-Штейнхаус теоремасы, ал екінші шарттың қажетті болуын оңай дәлелдеуге болады. Сондықтан теореманы толық дәлелдеу үшін шарттардың жеткіліктігін дәлелдесек болғаны.

Енді

$$M = \sup_n \|A_n\|, n = 0,1,2,...$$

және X_0 жиынның $L(X_0)$- сызықты қабықшасы болсын [17]. A_n, A_0 сызықты операторлар және 2) шарттан, кез келген $x \in L(x_0)$ үшін $A_n x \to A_0 x$.

X жиыннан $L(X_0)$ қабықшаға тиісті емес ξ нүкте алайық, яғни $\xi \in X$, $\xi \notin L(x_0)$. Берілген $\varepsilon > 0$ сан үшін $x \in L(X_0)$ элемент табылып, $\|\xi - x\| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$ орындалады. Сонда:

$$\|A_n\xi - A_0\xi\| = \|A_n\xi + A_n x - A_n x + A_0 x - A_0 x\| \le \|A_n\xi - A_n x\| + \|A_n x - A_n x\| +$$

$$+ \|A_0 x - A_0\xi\| \le \|A_n x - A_0 x\| + (\|A_n\| + \|A_0\|)\|x - \xi\| < \|A_n x - A_0 x\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теореманың шарты бойынша $A_n x \to A_0 x$ болғандықтан, n_0 нөмір табылып, $n \ge n_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n үшін

$$\|A_n x - A_0 x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

болады. Онда барлық $n \ge n_0$ үшін дәлелеу керек теңсіздікті аламыз:

$$\|A_n\xi - A_0\xi\| < \varepsilon.$$

Егер $A_n \to A, B_n \to B$ бірқалыпты жинақты болса, онда 5.21–тақырыптағы 5.50 – теңсіздіктен $A_n B_n \to AB$ болады. $\{A_n\}$ операторлар тізбектің A операторға жинақтылығы $\{\|A_n\|\}$ санда тізбектің шектелгендігін білдіреді, яғни кез келген n үшін $\|A_n\| \le K$. Сондықтан:

$$\|A_n B_n - AB\| = \|A_n B_n + A_n B - A_n B - AB\| \le \|A_n B_n - A_n B\| + \|A_n B - AB\| \le$$

$$\le \|A_n\| \cdot \|B_n - B\| + \|A_n - A\| \cdot \|B\| \to 0, n \to \infty.$$

Теңсіздіктің оң жағындағы әрбір қосындының бір көбейткіші шектелген, ал екіншісі $n \to \infty$ -да ол нөлге ұмтылады.

5.25. Кері операторлар

Бізге X сызықты кеңістікті Y сызықты кеңістікке бейнелейтін A оператор берілсін және $D(A)$ мен $R(A)$ облыстар A операторың сәйкес анықталу мен қабылдай алатын мәндер облыстары болсын.

Анықтама. Әрбір $y \in R(A)$ элемент үшін $D(A)$ облыстан тек бір ғана x элемент сәйкес қойылса және ол элемент $Ax = y$ теңдеудің шешімі болса, онда осы сәйкестікті қоятын оператор A операторың *кері операторы* деп аталады және ол A^{-1} таңбамен белгіленеді.

5.25–теорема. Егер A сызықты оператор болса, онда оның A^{-1} кері операторыда сызықты болады.

Дәлелдеуі. $y_1, y_2 \in R(A)$ және $Ax_1 = y_1,\ Ax_2 = y_2$ болсын, онда A сызықты оператор болғандықтан:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2. \quad (5.52)$$

Кері операторың анықтамасы бойынша:

$$A^{-1} y_1 = x_1,\ A^{-1} y_2 = x_2.$$

Соңғы теңдіктерді сәйкес α_1 мен α_2 сандарға көбейтіп қосайық

$$\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2. \quad (5.53)$$

Кері операторың анықтамасы мен соңғы теңдіктен мына теңдікті аламыз:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2). \quad (5.54)$$

Жоғарыда 5.53 және 5.54–теңдіктерді салыстырып, дәлелдеу керек теңдікті аламыз, яғни:

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2.$$

Банах теоремасы (кері операторың бар болуы). X банах кеңістігін Y кеңістігіне өзара бір мәнді сәйкес бейнелейтін A сызықты оператор шектелген болса, онда оның A^{-1} кері операторы да шектелген.

X сызықты кеңістікті Y сызықты кеңістікке бейнелейтін сызықты үзіліссіз операторлардың жиыны сызықты үзіліссіз операторлар кеңістігін құрайды және бұл кеңістікте 5.21-тақырыпта қарастырылған операциялар орындалады. Осы сызықты үзіліссіз операторлар кеңістігін $Z(X,Y)$ таңбамен белгілейміз. Егер X пен Y нормаланған кеңістіктер болса, онда $Z(X,Y)$ нормаланған кеңістік болады.

Енді X банах кеңістікті Y банах кеңістігіне бейнелейтін A сызықты шектелген операторлар $Z(X,Y)$ кеңістігін қарастырайық. Бұл кеңістік банах кеңістігі болады. Осы $Z(X,Y)$ банах кеңістігіндегі, X кеңістікті барлық Y кеңістікке бейнелейтін және кері шектелген операторлары бар $Z(X,Y)$ жиынды бөліп алайық.

5.26-теорема. Егер $A_0 \in Z(X,Y)$ және кез келген оператор $\Delta A \in Z(X,Y)$ әрі $\|\Delta A\| < \dfrac{1}{\|A_0^{-1}\|}$ болса, онда $(A_0 + \Delta A)^{-1}$ операторы бар әрі шектелген, яғни $A = A_0 + \Delta A \in Z(X,Y)$.

Дәлелдеуі. Кез келген $y \in Y$ элементті тағайындайық және X жиынды өзіне бейнелейтін мына теңдіктен анықталатын

$$Bx = A_0^{-1} y - A_0^{-1} \Delta A x$$

B бейнелеуді қарастырайық. Онда теореманың шартындағы $\|\Delta A\| \le \|A_0^{-1}\|^{-1}$ теңсіздіктен B қысыла бейнелеу болатынын көреміз.

$$Bx_1 = A_0^{-1} y - A_0^{-1} \Delta A x_1,\ Bx_2 = A_0^{-1} y - A_0^{-1} \Delta A x_2,$$
$$\rho(Ax_1, Ax_2) = |\Delta A| \cdot |A_0^{-1}| \rho(x_1, x_2),\ \ |\Delta A| \cdot |A_0^{-1}| < 1.$$

Осыдан және теореманың шарты бойынша, X толық кеңістік болғандықтан B бейнелеудің қозғалмайтын x нүктесі бар әрі ол тек біреу ғана:

$$x = Bx = A_0^{-1} y - A_0^{-1} \Delta A x = A_0^{-1}(y - \Delta A x),.$$
$$A_0 x = y - \Delta A x,\ \ y = A_0 x + \Delta A x = (A_0 + \Delta A)x = Ax.$$

Егер $Ax' = y$ болса, онда x' нүкте B бейнелеудің қозғалмайтын нүктесі болады, яғни $x' = x$. Сонымен, кез келген $y \in Y$ үшін $Ax = y$ теңдеуінің X кеңістікте тек бір ғана шешімі бар, яғни A операторды A^{-1} операторы бар және ол барлық Y кеңістікте анықталған. Енді Банах теоремасы (кері оператордың бар болуы) бойынша A^{-1} шектелген оператор. Дәлелденді.

5.27-теорема. Егер X Банах кеңістігі, осы кеңістіктегі E бірлік оператор, ал A оператор X кеңістікті өзіне бейнелейтін сызықты

шектелген оператор болса, онда $(E-A)^{-1}$ кері оператор бар әрі шектелген және оны мына түрде өрнектеуге болады:

$$(E-A)^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}A^k.$$

5.28-теорема. Егер X сызықты нормаланған кеңістікті Y сызықты нормаланған кеңістікке бейнелейтін A оператор сызықты болса, және кез келген $x\in X$ үшін

$$\|Ax\|\geq m\|x\|,\ m>0$$

болса, онда A операторды A^{-1} сызықты кері оператор бар.

5.29–теорема. 1. Егер X сызықты кеңістікті осы X кеңістікке бейнелейтін A оператор сызықты шектелген және $\|A\|\leq q<1$ болса, онда $E+A$ операторды сызықты шектелген кері операторы бар.

2. Егер A оператор X сызықты кеңістікті Y сызықты кеңістікке өзара бір мәнді бейнелесе, онда A^{-1} кері операторы бар және ол сызықты оператор.

5.26. Үзіліссіздік бойынша операторды кеңейту

Бізге нормаланған сызықты X кеңістікте L сызықты көпбейне берілсін *[17]*. Бұл көпбейненің өзін жеке не толық, не толық емес сызықты кеңістік ретінде қарастыруға болады. L көпбейнеде анықталған аддитивті A сызықты операторды қабылдай алатын мәндері Y нормаланған сызықты кеңістік болсын. Сызықты A оператор L *көпбейнеде шектелген* деп аталады, егер

$$\|Ax\|\leq M\|x\|,\ M>0,\ x\in L,$$

мұндағы M сандардың ең кіші мәні A *операторды* L *көпбейнедегі нормасы* деп аталады әрі ол $\|A\|_L$ таңбамен белгіленеді, осы сияқты X кеңістіктегі норма: $\|A\|_X$.

5.30–теорема. A_0-сызықты шектелген операторды қабылдай алатын мәндері Y-сызықты толық нормаланған кеңістік, ал X сызықты нормаланған кеңістікте барлық жерде тығыз L сызықты көпбейнеде берілген A_0 операторды нормасын өзгертпей бүкіл

кеңістікте жалғастыруға болады, яғни X кеңістікте мына шарттарды қанағаттандыратын A операторды табуға болады

$$Ax = A_0 x,\ x \in L;\ \|A\|_X = \|A_0\|_L.$$

Дәлелдеуі. $x \in X$ және $x \notin L$ болсын. Теореманың шарты бойынша, яғни L сызықты көпбейне X кеңістікте барлық жерде тығыз болғандықтан $\{x_n\} \in L$ тізбек табылып, $\|x_n - x\| \to 0,\ n \to \infty$ болады және

$$\|x_n - x_m\| \to 0,\ n,m \to \infty.$$

Онда:

$$\|A_0 x_n - A_0 x_m\| = \|A_0(x_n - x_m)\| \le \|A_0\|_L \cdot \|x_n - x_m\| \to 0,$$
$$n,m \to \infty,$$

яғни $\{A_0\ x_n\}$ тізбек өзіне жинақты, ал Y толық кеңістік болғандықтан $\{A_0 x_n\}$ тізбектің шегі бар. Осы шекті Ax деп белгілейік. Енді x-ке жинақты $\{\xi_n\} \subset L$ тізбекті қарастырайық. Онда :

$$\|x_n - \xi_n\| \to 0.$$

Осыдан $\|A_0 x_n - A_0 \xi_n\| \to 0.$ Олай болса, $A\xi_n \to Ax.$ Осы шек, X кеңістіктің элементтерінде A оператор бір мәнді анықталатындығын білдіреді. Егер $x \in L$ болса, онда барлық n үшін $x_n = x$ дейміз, және

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_0 x_n = A_0 x.$$

Анықталған A аддитивті оператор:

$$A(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} A_0\left(x_n^{(1)} + x_n^{(2)}\right) = \lim_{n\to\infty} A_0 x_n^{(1)} + \lim_{n\to\infty} A_0 x_n^{(2)} = Ax_1 + Ax_2,$$

ал операторды шектелгендігін мына теңсіздіктен алмыз:

$$\|A_0 x_n\| \le \|A_0\|_L \cdot \|x_n\|.$$

Осы теңсіздіктен шекке көшейік:

$$\|Ax\| \le \|A_0\|_L \cdot \|x\|.$$

Осы теңсіздіктен:

$$\|A\|_X \le \|A_0\|_L.$$

Операторды нормасын жалғастырғанда оның нормасы кемімейді, сондықтан:

$$\|A\|_X = \|A_0\|_L.$$

Дәлелденді. Жоғарыда келтірілген процесс, *операторды үзіліссіздігі бойынша кеңейту* деп аталады.

5.27. Сызықты функционал

Сызықты оператордың дербес жағдайы сызықты функционал болып табылады (5.6-тақырып). Егер сызықты операторлың анықталу облысы кезкелген X сызықты нормаланған кеңістік, ал оның қабылдай алатын мәндері нақты сандар болса $Y=(-\infty,+\infty)$, онда мұндай оператор X кеңістікте анықталған *сызықты функционал* деп аталады және ол $f(x)$ таңбамен белгіленеді.

Сандар өсі сызықты нормаланған кеңістіктің дербес жағдайы болғандықтан жоғарыда сызықты операторға келтірілген анықтамалар, ұғымдар, теоремалар сызықты функционалға да орындалады. Мысалы, $f(x)$ сызықты функционалдың нормасы сан:

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\le 1}|f(x)| \text{ немесе } \|f\|=\sup_{\|x\|\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

және кез келген $x\in X$ үшін:

$$|f(x)|\le\|f\|\cdot\|x\|.$$

Біз операторға орындалған негізгі теоремаларды функционал үшін келтірейік.

Банах–Штейнхаус теоремасы. Егер X банах кеңістігінде анықталған сызықты функционалдар тізбек әрбір $x\in X$ нүктеде шектелсе, онда осы функционалдар тізбектің нормасынан анықталған $\{\|f_n\|\}$ норма тізбегіде шектелген.

5.31-теорема. Егер сызықты функционалдар $\{f_n(x)\}$ тізбегі X банах кеңістігінің әрбір нүктесінде өзіне жинақты болса, онда $f(x)$ сызықты функционал табылып, барлық $x\in X$ үшін, $n\to\infty$ -да

$$f_n(x)\to f(x).$$

5.32-теорема. $\{f_n\}$ сызықты фукционалдар тізбегі X банах кеңістігінің кез келген $x\in X$ нүктесінде f_0 фукционалға жинақты болу үшін мына шарттардың орындалуы қажетті әрі жеткілікті:

1) $\{\|f_n(x)\|\}$ норма тізбегі шектелген болуы;

2) элементтерінің сызықты комбинациясы X кеңістікте барлық жерде дерлік толық болатын қандайда бір X_0 жиынның кез келген x элементі үшін мына шек орындалса:

$$f_n(x) \to f_0(x),\ n \to \infty .$$

Банах–Хан теоремасы. X нормаланған кеңістіктің L сызықты көпбейнелі жиынында анықталған кез келген $f(x)$ функционалдың нормасын сақтап, оны бүкіл кеңістікте төмендегі шарттар орындалатындай жалғастыруға болады:

1) $F(x) = f(x)$ барлық $x \in L;$

2) $\|F\|_X = \|f\|_L$.

Банах-Хан теоремасының екі салдарын келтірейік.

1–салдар. Егер X сызықты нормаланған кеңістік және $x_0 \neq 0$ тағайындалған нүкте әрі $x_0 \in X$ болса, онда бүкіл X кеңістікте анықталған f сызықты функционал табылады және

1) $\|f\| = 1;$ 2) $f(x_0) = \|x_0\|.$

2–салдар. Егер L кеңістік X сызықты нормалаған кеңістіктің көпбейнесі және $x_0 \notin L$ нүкте L көпбейнеден $d = \inf\limits_{x \in L} \|x - x_0\| > 0$ арақашықтықта болса, онда бүкіл X кеңістікте анықталған f сызықты функционал табылады және

$$1)\ f(x) = 0, x \in L;\ \ 2)\ f(x_0) = 1;\ \ 3)\ \|f\| = \frac{1}{d}.$$

Мысалдар. 1. $X = L_2(a,b)$ және

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt$$

болсын, мұндағы интеграл Лебега мағынасында. Бұл интегралды, $x(t)$ функция мен 1-дің скаляр көбейтіндісі ретінде карастырайық:

$$f(x) = (x,1).$$

Буняковский теңсіздігінен:

$$|f(x)| = |(x,1)| \le \|x\| \cdot \|1\| = \sqrt{b-a} \cdot \|x\|.$$

Сонымен, $f(x)$ шектелген. Функционалдың аддитивті, біртектілігін оңай дәлелдеуге болады, яғни $f(x)$ сызықты функционал және

$$\|f\| = b - a.$$

2. $X = C[a,b]$ және

$$f(x) = x(a)$$

болсын. Функционалдың аддитивті және біртекті болатынын оңай дәлелдеуге болады. Енді

$$|f(x)| = |x(a)| \le \max_t |x(t)| = \|x\|.$$

Сонымен, $f(x)$ шектелген, олай болса ол сызықты функционал және $\|f\| = 1.$

5.28. Нормаланған кеңістіктердегі функционалдардың жалпы түрі

1. $C[0,1]$ **кеңістіктегі сызықты функционалдың жалпы түрі.** Бізге $C[0,1]$ кеңістікте $f(x)$ сызықты функционал берілсін. $[0,1]$ сегментте анықталған үзіліссіз функция шектелген [14, 32-тақырып], себебі үзіліссіз функцияға

$$\sup_{t\in[0,1]}\{x(t)\} = \max_{t\in[0,1]}\{x(t)\}.$$

теңдік орындалады, сондықтан $C[0,1]$ кеңістікті $M[0,1]$ кеңістіктің ішкі кеңістігі деп қарастыруға болады, мұндағы $M[0,1]$-барлық шектелген нақты функциялардан анықталған кеңістік (5.3-тақырып) және

$$\|x\|_{M[0,1]} = \rho_{M[0,1]}(x(t),0) = \sup_{t\in[0,1]}\{|x(t)|\}.$$

$C[0,1]$ кеңістікте берілген $f(x)$ функционалды оның нормасын өзгертпей барлық $M[0,1]$ кеңістікке жалғастырылған функционалды $F(x)$ таңбамен белгілейік.

Мына қосындыны қарастырайық:

$$U_0(\xi) = 0,\ U_t(\xi) = \begin{cases} 1, \xi \in [0,t), \\ 0, \xi \in [t,1]. \end{cases}$$

Ал бұл функция $U_t(\xi) \in M[0,1]$. Енді $F[U_t(\xi)] = g(t)$ болсын және, осы $g(t)$ функцияның өзгерісі шектелген функция болатынын дәлелдейік (1.5-тақырып). Ол үшін $[0,1]$ сегментті n бөлікке бөліктейік, мына нүктелермен: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ және $\varepsilon_i = sign[g(t_i) - g(t_{t-i})]$ болсын. Мына қосындыны қарастырайық:

$$\sum_{i=1}^{n}[g(t_i) - g(t_{t-i})].$$

Онда:

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i) - g(t_{t-i})| = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i[g(t_i) - g(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\left[F\left(U_{t_i}\right) - F\left(U_{t_{i-1}}\right)\right] =$$

$$= F\left[\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\left(U_{t_i} - U_{t_{i-1}}\right)\right].$$

Осыдан:

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i) - g(t_{i-1})| \le \|F\| \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\left(U_{t_i} - U_{t_{i-1}}\right)\right\|.$$

Осыдан және мына теңдіктерді ескеріп,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\left(U_{t_i} - U_{t_{i-1}}\right)\right\| = 1,\ \|F\| = \|f\|.$$

төмендегі теңсіздікті аламыз:

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i) - g(t_{i-1})| \le \|f\|.$$

Сонымен, функция өзгерісі шектелген функция болды.

Енді $[0,1]$ сегментте анықталған кез келген $x(t)$ үзіліссіз функцияны қарастырайық және $z_n(t)$ функцияны тұрғызайық:

$$z_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)\left[U_{\frac{k}{n}}(t) - U_{\frac{k-1}{n}}(t)\right].$$

Бұл функция сатылы функция. Сонда

$$F(z_n) = \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)\left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right].$$

Сондықтан:

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)\left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] = \int_0^1 x(t)dg(t).$$

Сатылы функциялардан құралған $\{z_n(t)\}$ тізбек $n \to \infty$-да ол $x(t)$ функцияға бір қалыпты жинақты болады, яғни $\|z_n - x\| \to 0$, себебі $F(x)$ үзіліссіз функция. Демек, $F(z_n) \to F(x)$. Сондықтан $F(x) = \int_0^1 x(t)dg(t)$. Бірақ $x(t)$ үзіліссіз функция үшін $F(x) = f(x)$ болады, онда :

$$f(x) = \int_0^1 x(t)dg(t). \tag{5.55}$$

Сонымен, біз мына тұжырымға келдік.

Рисс теоремасы. $C[0,1]$ кеңістіктегі кез келген $f(x)$ сызықты функционал Стильтес интегралы арқылы (5.55)–формуламен өрнектеледі, мұндағы $g(t)$ функция $f(x)$ функционал бойынша анықталатын өзгерісі шектелген функция.

Рисс теоремасынан: *мына функционал*

$$\varphi(x) = \int_0^1 x(t)dh(t)$$

$C[0,1]$ *кеңістіктегі сызықты функционал болады, мұндағы* $h(t)$*-өзгерісі шектелген кез келген функция.*

$C[0,1]$ кеңістіктегі $f(x)$ функционалдың нормасы мына формуладан анықталады:

$$\|f\| = \bigvee_0^1 \{g\}. \tag{5.56}$$

2. $L_p[0,1]$ **кеңістіктегі сызықты функционалдың жалпы түрі**

$L_p[0,1]$ кеңістіктегі кез келген $f(x)$ сызықты функционалды қарастырайық, $p > 1$.

Енді $U_0(\xi) = 0,\ U_t(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [0,t), \\ 0, & \xi \in [t,1], \end{cases}\ g(t) = f[U_t(\xi)],\ g'(t) = \alpha(t)$

болсын, мұндағы $g(t)$-абсолютті интегралданатын функция. Онда $L_p[0,1]$ кеңістіктегі кез келген $f(x)$ сызықты функционал мына түрде анықталады:

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\alpha(t)dt, \tag{5.57}$$

мұндығы $x(t)$ - кез келген шектелген өлшемді функция.

5.57–функционалдың $L_p[0,1]$ кеңістіктегі нормасын есептейік. 5.57–теңдіктен

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt\right| \le \left(\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^1 |x(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \|x\|,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Осыдан:

$$\|f\| \le \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.58}$$

Енді $x_n(t)$ функцияны мына түрде анықтайық:

$$x_n(t) = \begin{cases} |\alpha(t)|^{q-1} \cdot sign\,\alpha(t), & |\alpha(t)| \le n, \\ 0, & |\alpha(t)| > n. \end{cases}$$

Бұл $x_n(t)$ функция шектелген және өлшемді функция. Олай болса, біріншіден:

$$f(x_n) = \int_0^1 x_n(t)\cdot\alpha(t)dt,\ \|f(x_n)\| \le \|f\|\cdot\|x_n\| = \|f\|\left(\int_0^1 |x_n(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Екіншіден:

$$|f(x_n)| = f(x_n) = \int_0^1 x_n(t)\alpha(t)dt = \int_0^1 |x_n(t)|\cdot|\alpha(t)|dt \ge$$

$$\ge \int_0^1 |x_n(t)|\cdot|x_n(t)|^{\frac{1}{q-1}}\,dt = \int_0^1 |x_n(t)|^{\frac{q}{q-1}}dt = \int_0^1 |x_n(t)|^p\,dt.$$

Демек:

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p\,dt \le \|f\|\cdot\|x_n\| \le \|f\|\left(\int_0^1 |x_n(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Осыдан:

$$\left(\int_0^1 |x_n(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\|. \tag{5.59}$$

Бірақ, $n \to \infty$-да $|x_n(t)| \to |\alpha(t)|^{q-1}$, себебі $\alpha(t)$ қосындылы функция, демек ол өлшемі нөлге тең жиында ғана шексіздікке ұмтылады. 5.59–теңсіздіктен $n \to \infty$-да шекке көшейік, сонда:

$$\left(\int_0^1 |\alpha(t)|^{(q-1)\cdot p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \|f\| \text{ немесе } \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\|, \qquad (5.60)$$

осыдан $\alpha(t) \in L_p[0,1]$. Енді (5.58) және (5.60)–теңсіздіктерді салыстыратып, $L_p[0,1]$ кеңістіктегі $f(x)$ сызықты функционалдың нормасын мына түрде табамыз:

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Егер $p = 1$ болса, онда $L[0,1]$ кеңістіктегі Лебег бойынша қосындылы функцияның нормасы мына түрде анықталады:

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt,$$

ал жалпы түрдегі $f(x)$ функционал мына интегралдан анықталады:

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\alpha(t) dt \text{ және } \|f\| = vrai \max_{t \in [0,1]} |\alpha(t)|,$$

мұндағы $\alpha(t)$-барлық жерде дерлік шектелген функция, $f(x)$ функционалдың нормасы $\alpha(t)$ функцияның елеулі максимумына тең.

3. l_p кеңістіктегі сызықты функционалдың жалпы түрі. l_p кеңістіктегі кез келген $f(x)$ сызықты функционал

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k \qquad (5.61)$$

формуладан анықталады, мұндағы $c_k = f(e_k)$-сандары бір мәнді анықталады,

$$\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...\} = x \in l_p,\ e_k = \{\xi_i^{(k)}\},\ \xi_k^{(k)} = 1,$$

$$\xi_i^{(k)} = 0, i \neq k,\ \ x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k,$$

$c_k \in l_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$ Норма

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.62}$$

Егер $p = 2$ болса, онда :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k, \quad \|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.63}$$

мұндағы $\sum_{k=1}^{\infty 2} c_k^2 < +\infty.$

Егер $p = 1$ болса, онда $l_1 = l$ кеңістіктің $x = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...\}$ элементтері мына теңсіздікті қанағаттндыратын элементтерден тұрады:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty,$$

Ал оның кез келген x элементінің нормасы:

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|,$$

ал сызықты функционалы:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k,$$

мұндағы $\{c_k\}$ нақты шектелген сандар тізбек , ал нормасы:

$$\|f\| = \sup_k |c_k| \cdot$$

5.29. Гильберт кеңістіктегі сызықты функционалдың жалпы түрі

H гильберт кеңістігінде анықталған $f(x)$ сызықты функционалды қарастырайық. Осы функционалдың нөлге айналатын x элементтер жиынын L таңбамен белгілейік, яғни $f(x)=0$ теңдікті қанағаттандыратын $x \in H$ элементтер жиыны. Сонда, L-ішкі кеңістік болады. Шынында да, L-сызықты көп бейне, себебі $f(x)$ функционал адиттивті және біртекті болғандықтан, ал L кеңістіктің тұйықтығын $f(x)$ функционалдың үзіліссіздігінен аламыз.

Енді L ішкі кеңістіке тиісті емес H кеңістіктің элементін алайық, осы элементтің $H-L$ ішкі кеңістіктегі проекциясын x_0 таңбамен белгілейік, және $f(x_0)=\alpha$ болсын. Онда $\alpha \neq 0$.

Егер $x_1=\dfrac{x_0}{\alpha}$ болса, онда $f(x_1)=1$. Егер x элемент H кеңістіктегі кез келген элемент $(x \in H)$ және $f(x)=\beta$ болса, онда:

$$f(x)-\beta f(x_1)=0 \text{ немесе } f(x-\beta x_1)=0.$$

Осыдан $x-\beta x_1=z \in L,$ яғни $x=\beta x_1+z$. Соңғы теңдік, L ішкі кеңістікпен x_1 элементтен түзелген бір өлшемді ішкі кеңістіктердің ортогонал қосындысы H кеңістік болып табылатынын білдіреді. Сонда $x_1 \perp z$ болғандықтан $(x,x_1)=\beta\|x_1\|^2$. Осыдан $\beta=f(x)$ теңдікті ескеріп, $f(x)=\left(x,\dfrac{x_1}{\|x_1\|^2}\right)$ теңдікті аламыз. Енді $\dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ элементті u таңбамен белгілейік, сонда :

$$f(x)=(x,u). \tag{5.64}$$

Сонымен, гильберт кеңістіктегі кез келген сызықты функционалды x элемент пен тағайындалған $u=\dfrac{x_1}{\|x_1\|^2}$ элементтердің скаляр көбейтіндісі арқылы өрнектедік. Ал u элемент $f(x)$ функционал арқылы бірмәнді анықталады, егер $f(x)=(x,v)$ болса, онда кез келген $x \in H$

үшін $(x, u - v) = 0$ теңдік орындалады. Онда $u = v$ болады. Енді (5.64)–тендіктен

$$|f(x)| = |(x, u)| \le \|x\| \cdot \|u\|.$$

Осыдан $\|f\| < \|u\|$. Егер $x = u$ болса, онда

$$f(u) = (u, u) = \|u\|^2.$$

Соңғы тендіктен, $\|f\|$ норма $\|u\|$-дың нормасынан кіші болу мүмкін емес, олай болса :

$$\|f\| = \|u\|. \qquad (5.65)$$

Сонымен, гильберт кеңістігінде анықталған кез келген сызықты $f(x)$ функционал $f(x) = (x, u)$ түрде, ал оның нормасы (5.65)– формуладан анықталады.

Демек, (5.65)–формула кез келген гильберт кеңістіктегі функцианолдың жалпы формуласы болып табылады.

5.30. Түйіндес және рефлексифті кеңістіктер

Бізге X нормаланған кеңістікті Y кеңістікке бейнелейтін сызықты операторлар берілсін.

Нормаланған X кеңістікте берілген барлық сызықты функционалдардың жиынын $\zeta(X, Y)$-сызықты операторлар кеңестігінің дербес жағдайы деп қарастыруға болады және сызықты функционалдар жиынында $\zeta(X, Y)$-кеңістігіндегі алгебралық амалдар орындалады деп есептейік. X кеңестікте берілген барлық сызықты функционалдар жиыны нормаланған кеңістік болады, осы кеңістік X кеңістіктің *түйіндес кеңістігі* деп аталады және X^* таңбамен белгіленеді.

X^* түйіндес кеңістікте берілген функционалдардың ішінен арнайы түрдегі функционалдарды қарастыруға тура келеді. $f(x)$ өрнектегі x элемент X кеңістіктің тағайындалған элементі, ал f элемент бүкіл X^* кеңестікті қабылдап шықсын. Онда $f(x)$ өрнек X^* кеңістікте берілген функционал болып саналады. Осы функционалды F_x таңбамен белгілейік, яғни:

$$f(x) = F_x(f), \tag{5.66}$$

мұндағы $x \in X$ - тағайындылған элемент, $f \in X^*$- айнымалы элемент.

Тағайындалған $x \in X$ және әрбір айнымалы $f \in X^*$ элементке нақты сан сәйкес келеді , демек тағайындалған x пен айнамалы f үшін $f(x)$ өрнекті X^* түйіндес кеңістікте анықталған F_x функционал ретінде қарастыруға болады.

5.33 – теорема. Әрбір тағайындаған $x \in X$ үшін (5.66)–формула X^* түйіндес кеңістікте F_x сызықты функционалды анықтайды және

$$\|F_x\| = \|x\| \tag{5.67}$$

теңдік орындалады.

Дәлелдеуі. F_x сызықты функционал болатынын көрсетейік, яғни $F_x \in X^*$:

$$F_x(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = F_x(f_1) + F_x(f_2),$$
$$|F_x(f)| = |f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|.$$

Сонымен F_x - сызықты функционал, яғни $F_x \in X^*$. Осыдан:

$$\|F_x\| \le \|x\|. \tag{5.68}$$

Бана-Хана теоремасы бойынша, әрбір x элемент үшін нормасы 1-ге тең f_0 сызықты функционал табылып, $f_0(x) = \|x\|$ теңдігі және

$$|F_x(f_0)| = |f_0(x)| = \|x\| \text{ немесе } |F_x(f_0)| = \|f_0\| \cdot \|x\|.$$

Осыдан:

$$\|F_x\| = \|x\|. \tag{5.69}$$

(5.68) және (5.69)–теңсіздіктерді салыстырып, дәлелдеу керек (5.67)– формуланы аламыз.

Мына теңдіктерді оңай дәлелдеуге болады:

$$F_{x_1+x_2}(f) = F_{x_1}(f) + F_{x_2}(f), \quad F_{\lambda x}(f) = \lambda F_x(f).$$

Енді X сызықты нормаланған кеңістік, ал X^* кеңістік X кеңістіктің түйідес кеңістігі болсын. Онда X^* кеңістікте нормаланған кеңістік болады. Олай болса, X^* кеңістіктің $(X^*)^* = X^{**}$ түйідес кеңістігінде құруға болады, осы сияқты жалғастыруғада болады. Демек X^{**} кеңістік F сызықты функционалдардың кеңістігі әрі оның элементтері X кеңістікте анықталған сызықты функционалдар болады.

Сонымен, кез келген $x \in X$ үшін X^{**} кеңістіктен толық (жете) анықталған $F_x \in X^{**}$ функционал сәйкес келеді және X кеңістіктен $\{F_x\} \subset X^{**}$ жиын арасындағы сәйкестік изоморфты және изометриялы болады, яғни $X \subset X^{**}$. Мұнда кеңістіктердің бір мәнді сәйкестігін 5.67–теңдіктен аламыз. Сонымен, осы айтылған сәйкестікте $X = X^{**}$ теңдік орындалса, онда X кеңістік *рефлексивті кеңістік* деп аталады.

5.31. Функционалдардың әлсіз жинақтылығы

Анықтама. X нормаланған кеңістікте берілген $\{f_n\}$ сызықты функционалдар тізбек осы кеңістікте берілген f сызықты функционалға *әлсіз жинақты* деп аталады, егер кез келген $x \in X$ үшін $f_n(x) \to f(x)$ шек орындалса және ол $f_n \overset{эл.}{\to} f$ таңбамен белгіленеді.

5.24 – тақырыпта нүктелі жинақтылыққа келтірілген теоремалар функционалдарға орындалады. Осы теоремаларды функционал үшін келтірейік.

1. *Банах кеңістігіндегі кез келген әлсіз жинақты сызықты функционалдар тізбегі шектелген, яғни функционалдар нормаларының тізбегі шектелген (норма бойынша шектелген).*

2. *Егер X кез келген нормаланған кеңістік және X кеңістікте барлық жерде дерлік тығыз жиында, сызықты функционалдар тізбегі нүктелі жинақты болса, онда бұл тізбек сызықты функционалға әлсіз жинақты болады.*

3. *Егер X - банах кеңістік, f_n мен f функционалдары X кеңістіктегі сызықты функционалдар болса, онда $f_n \overset{эл.}{\to} f$ орындалуы үшін мына шарттардың орындалуы қажетті әрі жеткілікті:*

1) $\|f_n\|$ нормаларының жиыны шектелген;

2) X кеңістігінде барлық жерде дерлік тығыз A жиындағы барлық x үшін $f_n(x) \to f(x)$.

5.34 – теорема. E_m евклид кеңістігіндегі сызықты функционалдардың әлсіз жинақтылығы бірқалыпты жинақтылықпен бірдей болады.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін E_m кеңістігінде әлсіз жинақтылықтан бірқалыпты жинақтылықты алсақ жеткілікті, ол үшін $f_n \overset{э.}{\to}$ болсын және

$$f_n(x) = (x_n, c_n) = \sum_{k=1}^{m} c_k^{(n)} \xi_k,$$

$$f(x) = (x, c) = \sum_{k=1}^{m} c_k \xi_k,$$

мұндағы $x = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$, $c_n = \{c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, ..., c_m^{(n)}\}$, $c = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$.

Енді x-ті e_k орт координаттарының кез келгеніне тең деп алайық, сонда:

$$c_k^{(n)} = f_n(e_k) \to f(e_k) = c_k, \ n \to \infty, \ k = 1,2,...,m.$$

E_m кеңістіктегі координат бойынша жинақтылық норма бойынша жинақтылықпен бірдей. Сондықтан $c_n \to c$, себебі $(f_n - f)(x) = (x, c_n - c)$. Онда $\|f_n - f\| = \|c_n - c\|$ және $f_n \to f$ норма бойынша. Дәлелденді.

5.32. Түйіндес операторлар

X сызықты нормаланған кеңістікті Y сызықты нормаланған кеңістікке бейнелейтін $y = Ax$ сызықты шектелген операторды және Y кеңістікте анықталған $\varphi(y)$ сызықты функционалды қарастырайық. Онда $\varphi(y)$ функционал $y = Ax$ элемент үшін анықталған, мұндағы $x \in X$ және

$$\varphi(y) = \varphi(Ax) = f(x), \tag{5.70}$$

мұндағы $f(x)$ X кеңістікте анықталған функционал және

$$f(x_1 + x_2) = \varphi[A(x_1 + x_2)] = \varphi(Ax_1 + Ax_2) = \varphi(Ax_1) + \varphi(Ax_2) = f(x_1) + f(x_2),$$
$$f(\alpha x) = \varphi(A(\alpha x)) = \varphi(\alpha Ax) = \alpha\varphi(Ax) = \alpha\, f(x).$$

Демек $f(x)$ сызықты функционал.

Сонымен, X^* кеңістікте анықталған, ал қабылдай алатын мәндері Y^* кеңістікке тиісті оператор тұрғызылды. Осы тұрғызылған

оператор A^* таңбамен белгіленеді және ол A операторлың *түйіндес операторы* деп аталады. Сонда (5.70)–теңдікті A^* түйіндес оператор арқылы мына түрде жазуға болады:

$$f = A^*\varphi .$$

5.35-теорема. X нормаланған сызықты кеңістікті Y нормаланған сызықты кеңістікке бейнелейтін шектелген операторлың A^* түйіндес оператор сызықты шектелген оператор және $\|A\| = \|A^*\|$.

Дәлелдеуі. A^* түйіндес операторлың аддитивті оператор болатынын оңай дәлелдеуге болады, осы операторлың шектелгендігін дәлелдейік:

$$\left|\left(A^*\varphi\right)(x)\right| = |f(x)| = |\varphi(Ax)| \le \|\varphi\| \cdot \|Ax\| \le \|\varphi\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|.$$

Осыдан $\left\|A^*\varphi\right\| \le \|\varphi\| \cdot \|A\|$, яғни A^* - шектелген оператор:

$$\left\|A^*\right\| \le \|A\|. \qquad (5.71)$$

Олай болса, 5.20-теорема бойынша A^*-сызықты оператор.

Енді $x_0 \in X$ кез келген элемент болсын. Онда Банах-Хан теоремасының 1-салдары бойынша, $\varphi_0 \in X^*$ сызықты функционал табылады және $\|\varphi_0\| = 1, \varphi_0(Ax_0) = \|Ax_0\|$. Осыдан:

$$\|Ax_0\| = \varphi_0(Ax_0) = f_0(x_0) \le \|f_0\| \cdot \|x_0\| \le \left\|A^*\varphi_0\right\| \cdot \|x_0\| \le$$

$$\le \left\|A^*\right\| \cdot \|\varphi_0\| \cdot \|x_0\| = \left\|A^*\right\| \cdot \|x_0\|.$$

Онда :

$$\|A\| \le \left\|A^*\right\|. \qquad (5.72)$$

Енді (5.71) және (5.72)-теңсіздіктерді салыстырып, дәлелдеу керек теңдікті аламыз, яғни $\|A\| = \left\|A^*\right\|$.

Ескерту. Шектелмеген операторлың түйіндес операторы туралы да сөз қозғауға болады, егер ол сызықты оператор әрі X сзықты нормалданған кеңістіктің L сызықты көпбейнесінде анықталса және L көпбейне X кеңістікте барлық жерде дерлік тығыз, ал қабылдай алатын мәндері Y кеңістікке тиісті болса. A оператор шектелмеген сызықты оператор және $\varphi \in Y^*$ болсын. Енді

$\varphi(Ax) = f_0(x), x \in L$ функционалды қарастырайық. Онда $f_0(x)$ функционал L көпбейне де анықталған және аддитивті әрі бір текті функционал, яғни ол сызықты болады. Онда 5.20-теорема бойынша $f_0(x)$ функционал L көпбейнеде шектелген. Егер Y^* кеңістіктегі кейбір φ үшін $(\varphi \in Y^*)$ f_0 функционал шектелген болса, онда бұл функционалды бүкіл X кеңістікте анықталатындай үзіліссіз бойынша f сызықты функционалға дейін жалғастыруға болады.

Сонымен, $M \subset Y^*$ көпбейнеде A^* оператор анықталады және ол оператор $\varphi \in Y^*$ функционалға $f \in x^*$ функционалдарды сәйкес қояды. Осы оператор A шектелмеген сызықты оператордың *түйіндес операторы* деп аталады. Мұндағы M *сызықты көпбейне* және A^*-түйіндес оператор M сызықты көпбейнеде *сызықты оператор,* жалпы жағдайда A^* шектелмеген сызықты оператор болуы мүмкін.

5.33. Гильберт кеңістігіндегі түйіндес операторлар.

Біз H сепарабельді гильберт кеңістігін және осы кеңістікте анықталған әрі қабылдай алатын мәндеріде осы кеңістікке тиісті A шектелген сызықты операторды қарастырайық. H гильберт кеңістігінде анықталған f_y сызықты функционалды қарастырайық және $f_y(x) = (Ax, y)$ болсын. Онда $f_y(x)$ гильберт кеңістіктегі сызықты функционал болғандықтан оны (5.64)–формула бойынша мына түрде жазуға болады:

$$f_y(x) = (x, y^*), \tag{5.73}$$

мұндағы y^* элемент H гильберт кеңістігіндегі элемент және ол f, функционал арқылы бір мәнді анықталады. (5.73)-формуладағы y элемент өзгергенде f_y функционалда өзгереді, онда y^* элементте өзгереді, демек біз H гильберт кеңістігінде анықталған, ол қабылдай алатын мәндері осы кеңістікке тиісті болатын мына операторды аламыз:

$$y^* = A^* y.$$

Бұл оператор A оператормен мына теңдік арқылы байланысты:

$$(Ax, y) = f_y(x) = (x, y^*) = (x, A^* y). \qquad (5.74)$$

(5.74)–теңдік арқылы байланысты A^* оператор берілген A оператордың *түйіндес операторы* деп аталады. A^* *түйіндес оператор бір мәнді анықталады.* Шынында да, егер барлық x, y үшін

$$(Ax, y) = (x, A^* y) = (x, A_1^* y)$$

болса, онда $A^* y = A_1^* y$ болады. Соңғы теңдік барлық y үшін $A^* = A_1^*$ теңдіктің орындалатынын білдіреді. 5.30–тақырыптағы түйіндес операторға орындалатын тұжырымдар комплекс кеңістіктеде (гильберт кеңістіктеде) орындалады. Мысалы, *егер* A *шектелген оператор болса, онда* A^* *түйіндес операторда шектелген және* $\|A\| = \|A^*\|$ *теңдік орындалады.*

Енді A^* түйіндес оператордың түйіндес операторын табайық және ол операторды $(A^*)^* = A^{**}$ таңбамен белгілейік. Кез келген $x, y \in H$ үшін 5.74–теңдіктен

$$(A^* x, y) = \overline{(y, A^* x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay).$$

Осыдан $A^{**} = A$. Осылайша $A^{***} = A^*$ теңдікті және т.б. дәлелдеуге болады.

Түйіндес операторлардың қарапайым теңдіктерін қарастырайық, егер A мен B гильберт кеңістігінде сызықты операторлар болса, онда:

а) $(A + B)^* = A^* + B^*$;

ә) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;

б) $(BA)^* = A^* B^*$.

Алдымен а) формуланы дәлелдейік:

$$((A + B)x, y) = (Ax + Bx, y) = (Ax, y) + (Bx, y) = (x, A^* y) +$$

$$+ (x, B^* y) = (x, A^* y + B^* y) = (x, (A^* + B^*) y);$$

ә) $((\lambda A)x, y) = \lambda (Ax, y) = \lambda (x, A^* y) = (x, (\lambda A)^* y)$;

в) $((BA)x, y) = (B(Ax), y) = (Ax, B^* y) = (x, A^* (B^* y)) =$

$$= \left(x, \left(A^* B^*\right) y\right).$$

5.34. Өзіне түйіндес және унитар операторлар

Анықтама. A сызықты шектелген оператор *өзіне түйіндес шектелген* деп аталады, егер $A = A^*$.

Анықтамадан, 1) егер A өзіне түйіндес шектелген оператор, λ - нақты сан болса, онда λA - өзіне түйіндес шектелген оператор; 2) егер A, B шектелген өзіне түйіндес шектелген операторлар болса, онда $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ өзіне түйіндес шектелген оператор, ал AB өзіне түйіндес шектелген оператор болу үшін A мен B орын алмастырымды оператор болуы қажетті және жеткілікті, яғни $AB = BA$.

Егер $A_n \to A$ шек оператор кеңістікте норма бойынша немесе нүктелі мағынада орындалса және A_n өзіне түйіндес операторлар болса, онда A өзіне түйіндес оператор болады. Шынында да, скаляр көбейтіндінің үзіліссіздігі бойынша, кез келген $x, y \in H$ үшін:

$$(Ax, y) = \left(\lim_{n\to\infty} A_n x, y\right) = \lim_{n\to\infty}(A_n x, y) = \lim_{n\to\infty}(x, A_n y) =$$
$$= \left(x, \lim_{n\to\infty} A_n y\right) = (x, Ay).$$

Егер A өзіне түйіндес оператор, ал $A(x, y)$ скаляр көбейтінді x пен y -ке тәуелді болса, онда ол функционал болады және оны $A(x, y)$ таңбамен белгілейік $A(x, y) = (Ax, y)$. $A(x, y)$ функционалға мына теңдіктер орындалады:

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha A(x_1, y) + \beta A(x_2, y), \quad A(x, y) = \overline{A(x, y)}.$$

Осы теңдіктер орындалатын $A(x, y)$ функционал *бисызықты эрмитті форма* (тұлға) деп аталады және ол шектелген деп аталады, егер

$$|A(x, y)| \le C_A \|x\| \cdot \|y\|,$$

мұндағы $\mathrm{C_A}$ - тұрақты сан. (қарастырып отырған жағдай үшін $C_A = \|A\|$ болады).

Сонымен, әрбір A өзіне түйіндес оператор шектелген бисызықты эрмитті форманы анықтайды

$$A(x,y)=(Ax,y)=(x,Ay).$$

Керсінше, егер $A(x,y)$ шектелген бисызықты эрмитті форма берілсе, онда ол өзіне түйіндес A операторды анықтайды және мына теңдік орындалады:

$$A(x,y)=(Ax,y).$$

$A(x,y)$ формадағы y элементті тағайындасақ, онда біз x-ке тәуелді сызықты функционал аламыз. Сондықтан

$$A(x,y)=(x,y^*),$$

мұндағы y^* элемент бір мәнді анықталады. Сонымен, біз

$$Ay=y^*$$

теңдіктен анықталатын A операторды табамыз әрі бұл операторға

$$(x,Ay)=A(x,y)$$

теңдік орындалады. A операторды сызықты оператор болатынын оңай дәлелдеуге болады. Енді осы операторды шектелгендігін дәлелдейік:

$$|(x,Ay)|=|A(x,y)|\le C_A\|x\|\cdot\|y\|.$$

Егер $x=Ay$ болса, онда теңдіктің екі жағын $\|A\|$-ке бөліп, мына теңсіздікті аламыз:

$$\|Ay\|\le C_A\|y\|.$$

Енді A өзіне түйіндес оператор болатынын дәлелдейік. Кез келген $x,y\in H$ үшін

$$(x,Ay)=\overline{A(y,x)}=\overline{(y,Ax)}=(Ax,y).$$

Осыдан: $A=A^*$ және $A(x,y)=(Ax,y)$.

Анықтама. U сызықты оператор *унитар* деп аталады, егер ол норманы өзгертпей H гилберт кеңістікті бүкіл H кеңістікке бейнелесе, яғни:

$$(Ux,Uy)=(x,y) \text{ немесе } \|Ux\|=\|x\|=\sqrt{(x,y)}. \quad (5.75)$$

Анықтама бойынша, бұл *бейнелеу өзара бір мәнді* бейнелеу болады, яғни егер

$$Ux_1=Ux_2 \text{ немесе } U(x_1-x_2)=0$$

болса, онда :

$$\|x_1 - x_2\| = \|U(x_1 - x_2)\| = 0 \text{ және } x_1 = x_2.$$

Сондықтан, 5.25 – тақырыптағы ескерту бойынша, U^{-1} кері оператор бар.

Енді U^{-1} *кері операторлың унитар оператор болатынын көрсетейік.* Егер $Ux = x'$, $Uy = y'$ болса, онда 5.75–теңдікті мына түрде жазуға болады:

$$(x', y') = (U^{-1}x', U^{-1}y'),$$

мұндағы $x', y' \in H$ кез келген элементтер болғандықтан U^{-1} кері операторлың унитарлығы дәлелденді.

5.35. Тұйық оператор

Анықтама. Егер A операторлың $D(A)$ анықталу облысы B операторлың $D(B)$ анықталу облысына қарағанда кең болса, яғни $D(B) \subset D(A)$ және барлық $x \in D(B)$ үшін

$$Ax = Bx$$

орындалса, онда A *оператор* B *операторлың кеңейтілген операторы* деп аталады және ол $B \subset A$ таңбамен белгіленеді.

Осы сияқты кеңейтілген функционал ұғымын беруге болады.

5.19 – тақырыпта операторлың x_0 нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамасы берілген. Енді біз математикалық анализ курсында $[14,16]$ келтірілген функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамасынан операторлың нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамасына келеміз.

Анықтама. A *оператор* $x_0 \in D(A)$ *нүктеде үзіліссіз* деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып,

$$\|x - x_0\| < \delta, \ x \in D(A)$$

теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x \in D(A)$ үшін

$$\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, яғни басқаша айтқанда

$$\lim_{x \to x_0} Ax = Ax_0, \ x \in D(A)$$

орындалса.

Осы сияқты функционалдың үзіліссіздік ұғымын беруге болады.

Егер x_0 элемент $D(A)$ облысқа тиісті болмаса, яғни $x_0 \notin D(A)$, бірақ

$$x \in D(A) \text{ және } \lim_{x \to x_0} Ax = y_0$$

шек бар болса, онда A операторға x_0 элементте

$$Ax_0 = y_0$$

теңдігі орындалсын деп ұйғарып, A операторды x_0 элементте анықтауға болады. $D(A)$ облысқа тиісті емес (x_0 нүкте сияқты) барлық нүктелерге x_0 нүктеге жасағандай жасап, біз A *операторды үзіліссіздік бойынша кеңейту* деп аталатын ұғымға келеміз. Осы кеңейту A оператор арқылы бір мәнді анықталады.

Алдағы тақырыптарда сызықты операторларды қарастырғанда оған үзіліссіз шартты қоймай қарастыратын боламыз. Егер операторға үзіліссіздік шарттың орнына оған тектес *тұйық* деп аталатын шартты қойсақ, онда тұйық шарт көп жағдайда бізге жеткілікті болады. Бірақ, дегенменде тұйық шарт үзіліссіздік шартқа қарағанда «әлсіз» шарт болып табылады.

Анықтама. A *операторы* (сызықты оператор болуы міндетті емес) *тұйық* деп аталады, егер

$$\lim x_n = x,\ \lim Ax_n = y,\ x_n \in D(A)$$

теңдіктері орындалып, осыдан

$$y = Ax,\ x \in D(A)$$

орындалса.

Операторлардың үзіліссіздігінің анықтамасы мен осы анықтамадан, *операторлардың тұйықтығы мен үзіліссіздігінің айырмашылығы мынада:* егер A оператор үзіліссіз болса, онда $\lim_{n \to \infty} x_n,\ x_n \in D(A)$ шектің бар болуынан $\lim_{n \to \infty} Ax_n$ шектің бар болуы шығады; егер оператор тұйық болса, онда

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{5.76}$$

тізбектің жинақты болуынан

$$Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n, \ldots \tag{5.77}$$

тізбектің жинақты болуы міндетті емес, бірақ бұл жағдайда: егер (5.76) түрдегі екі тізбек бір шекке ұмтылса, онда осы тізбектерге сәйкес келетін (5.77) түрдегі екі тізбек әртүрлі шекке ұмтылмайды.

Соңғы айтылғаннан A операторы тұйық деп тұжырымдауға болмайды, бірақ ол A опертордың *тұйық кеңейту операторлары* бар екенін қамтамасыз етеді, егер A операторның өзі тұйық оператор болмаса да. Осы кеңейту операторларының ішінен, A операторның тұйық кеңейту операторларының әрқайсысына тиісті *минимальды тұйық кеңейту операторы* деп аталатын операторды бөліп аламыз. A операторның минимальды тұйық кеңейту операторы A оператор арқылы бір мәнді анықталады. A операторның минимальды тұйық кеңейту операторы, қысқаша, A операторның *тұйықталу операторы* деп аталады және ол $\overline{A}$ таңбамен белгіленеді. $\overline{A}$ тұйықталу операторды табу үшін кем дегенде бір (5.76) түрдегі жинақты тізбек табылып, (5.77) тізбек жинақты және

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \overline{Ax}$$

теңдігі орындалатын барлық $x \in \overline{D(A)}$ нүктелерді $D(A)$ облысқа қоссақ жеткілікті.

Мына тұжырымды дәлелдеусіз қабыл алайық: *егер* A *тұйық оператор болса, онда* $A - \lambda E$ *оператор да тұйық болады және егер* A^{-1} *кері оператор бар болса, онда* A *оператор да тұйық.*

Мысал. $L_2(0,1)$ кеңістікте A оператор $\overline{A}$ тұйықталу операторды анықтамайды:

$$Ax = tx(1)$$

мұндағы $x(t)$ барлық үзіліссіз функциялар. Онда $D(A)$ облысы $L_2(0,1)$ кеңістікте тығыз. A оператор тұйық емес және ол тұйықталу операторды анықтамайтынын тексерейік. $L_2(0,1)$ кеңістікте жинақты үзіліссіз функциялар тізбегін құрайық $\{x_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ және $x_n(1) \to 1$, $z_n(1) \to 0$ болсын. Онда $Ax_n \to t$, $Az_n \to 0$ болады. Сонымен, $\{Ax_n\}$ мен $\{Az_n\}$ тізбектерінің шектері бар, бірақ олар әртүрлі (бір-біріне тең емес).

5.36. Түйіндес оператордың жалпы анықтамасы

Біз 5.33–тақырыпта H гилберт кеңістігінде анықталған шектелген B операторлың түйіндес операторын қарастырдық, кез келген y элементке y^* элемент бірмәнді анықталсын және

$$(Bx, y) = (x, y^*) = (x, A^* y)$$

теңдік орындалады.

Ал A кез келген оператор болғанда да біз скаляр көбейтіндіні қарастырамыз:

$$(Ax, y),\ x \in D(A). \tag{5.78}$$

Енді кез келген y элемент үшін (5.78)–скаляр көбейтіндіні мына түрге:

$$(x, y^*)$$

түрлендіруге болады деп тұжырымдауға болмайды. Бірақ жалпы жағдайда

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \tag{5.79}$$

теңдік орындалатындай қосарланған y, y^* элементтер табылады, кез келген $x \in D(A)$ үшін. Шынында да, (5.79)–теңдік, ең болмағанда $y = y^* = 0$ болғанда орындалады.

Кез келген $x \in D(A)$ үшін қосарланған $y, y*$ бар болып, осы элементтерге (5.79)–теңдік орындалғанда да A операторға түйіндес $A*$ операторды тұрғыздық деп айтуға болмайды. $A*$ операторды тұрғызу үшін $y*$ элемент y элемент арқылы бір мәнді анықталуы қажет. Ал бұл қажеттілік облыс H кеңістікте тығыз болғанда орындалады $D(A)$. Шынында да, *егер* $D(A)$ *облыс* H *гильберт кеңістікте тығыз болмаса,* яғни айталық z элемент $D(A)$ облысқа ортогональды болса, онда барлық $x \in D(A)$ үшін (5.79)–теңдікпен бірге мына теңдік те орындалады:

$$(Ax, y) = (x, y* + z).$$

Енді, *егер* $D(A)$ *облыс* H *кеңістікте тығыз* және $x \in D(A)$ үшін

$$(Ax, y) = (x, y_1 *),\ (Ax, y) = (x, y_2 *)$$

болсын, онда кез келген $x \in D(A)$

$$(x, y_1 * - y_2 *) = 0.$$

Егер $y_1^* \neq y_2^*$ болса, онда соңғы теңдік орындалмайды.

Сонымен, егер $D(A)$ облыс H кеңістікте тығыз болса, онда 1) A операторының $A*$ түйіндес операторы бар; 2) $A*$ түйіндес операторының $D(A*)$ анықталу облысы (5.79)–теңдікті қанағаттандыратын барлық y элементтер жиынынан тұрады әрі осы элементтерге $y*$ элементтері табылып,

$$A*y = y*$$

теңдік орындалады, $x \in D(A)$.

Түйіндес операторының анықтамасынан тікелей шығатын негізгі *тұжырымдарды* келтірейік:

1) $A*$ *сызықты оператор;*

2) *Егер* $B \subset A$ *болса, онда* $B* \supseteq A*$*;*

3) $A*$ *түйіндес оператор тұйық болады, егер* A *оператор тұйық болмасада;*

4) *Егер* A *операторының* $\overline{A}$ *тұйықталу операторы бар болса, онда* $(\overline{A})* = A*$*;*

5) *Егер* $A**$ *оператор бар болса, онда* $A \subseteq A**$.

5.36-теорема. Егер A сызықты операторының A^{-1} кері операторы бар және $D(A)$ мен $D(A^{-1})$ облыстары H кеңістікте тығыз болса, онда $A*$ мен $(A^{-1})*$ операторлары бар.

5.37. Симметриялы операторлар

Анықтама. A сызықты оператор *симметриялы оператор* деп аталады , егер

1. $D(A)$ анықталу облысы H кеңістікте тығыз;
2. кез келген $x, y \in D(A)$ үшін

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

теңдігі орындалса.

Осы анықтамадан, кез келген $x \in D(A)$ үшін (Ax, x) скаляр көбейтінді нақты сан.

Егер A симметриялы оператор шектелген болса, онда оның кеңейтілген операторы үзіліссіздік бойынша бүкіл H кеңістікте анықталған және ол өзіне түйіндес әрі шектелген оператор болады.

5.37-теорема. Егер A симметриялы оператор бүкіл H кеңістікте анықталса, онда A шектелген өзіне түйіндес оператор.

Егер A симметриялы оператор болса, онда $A \subseteq A^*$, себебі A^* түйіндес оператор әрқашанда тұйық оператор және осы енгізуден симметриялы операторлың әрқашанда тұйықталу операторы бар.

Егер B симметтриялы оператор A операторлың кеңейтілу операторы болса, онда $B \subseteq A^*$, яғни A операторлың кез келген симметриялы кеңейтілуі A^* түйіндес операторға тиісті болады. Шынында да, $B \supseteq A$ енгізуінен $B^* \subseteq A^*$ енгізуін аламыз. Енді $B \subseteq B^*$ енгізуін ескерсек болғаны: $B \subseteq B^* \subseteq A^*$.

Егер $A = A^*$ теңдік орындалса, онда A *өзіне түйіндес оператор* деп аталады. (бұл жағдайда A операторлың кеңейуі жоқ).

5.38-теорема. Егер A операторлың қабылдай алатын мәндер $\Delta(A)$ облысы барлық кеңістікпен беттессе, онда ол өзіне түйіндес оператор.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін кез келген $y \in D(A^*)$ элемент $D(A)$ облысқа тиісті болатынын дәлелдесек жеткілікті. Сондықтан $y \in D(A^*)$ және $A^* y = y^*$ болсын. Теореманың шарты бойынша $\Delta(A) = H$, онда $z \in D(A)$ элементі табылып, $Az = y^*$ теңдік орындалады. Демек, кез келген $x \in D(A)$ үшін

$$(Ax, y) = (x, y^*) = (x, Az) = (Ax, z).$$

Теореманың шарты бойынша $\Delta(A) = H$, онда $y = z$ яғни $y \in D(A)$. Дәлелденді.

5.39-теорема. Егер өзіне түйіндес операторлың кері операторы бар болса, онда бұл кері оператор өзіне түйіндес оператор (шектелген, шектелмеген) болады.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. *Соболев В.И.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. М.: Наука, 1968.

2. *Макаров И.П.* Дополнительные главы математического анализа. М.: Просвещение, 1968.

3. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1957.

4. *Вулих Б.З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1965.

5. *Араманович И.Г., Лунс Г.Л., Эльсгольц Л.Э.* Функций комплексного переенного. Операционное исчисление. М.: Наука, 1968.

6. *Капланов М.Г.* Теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.

7. *Шилов Е.Г.* Математический анализ. Специальный курс. М.: Наука, 1960.

8. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М.: Физ. Мат. Гнз., 1963.

9. *Толстов Г.П.* Ряды Фурье. М.: Наука, 1980.

10. *Кожевников Н.И., Краснощекова Т.Н., Шишкин Н.Е.* Ряды и интеграл Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. М.: Наука, 1964.

11. *Мартыненко В.С.* Операционное исчисление. Киев., Выща школа, 1990.

12. *Люстерник Л.А., Соболев В.Н.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

13. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функий и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

14. *Қасымов Қ.Ә., Қасымов Е.Ә.* Жоғары математика курсы. Математикалық анализ. I-бөлім, Алматы, ҚазҰУ, 2005.

15. *Қасымов Қ.Ә., Қасымов Е.Ә.* Жоғары математика курсы. Математикалық анализ. II-бөлім, Алматы, ҚазҰУ, 2005.

16. *Қасымов Е.Ә.* Жоғары математика. I-бөлім, Алматы, ҚазҰТУ, 2004.

17. *Қасымов Қ.Ә., Қасымов Е.Ә.* Жоғары математика курсы. Сызықты алгебра. Алматы, Санат, 1994, 2004.

18. *Қасымов Қ.Ә., Қасымов Е.Ә.* Жоғары математика курсы. Аналитикалық геометрия, Алматы, Санат, 1997.

19. *Досымов Т.Б.* Функционалдық анализ негіздері. Алматы, “Мектеп”, 1988.

20. *Беделбаев А.А., Бияров Т.* Функционалдық анализ I-III бөлім, ҚазҰУ, 1982–1988.

21. *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничи В.А*. Задачи и упражнения по математическому анализу. 1-2 том, Высшая школа, 2002.

22. *Треногин В.А*. Функциональный анализ. М., Наука, 1980.

23. *Лостерник Л.А., Соболев В.И*. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.

24. *Рудин У*. Функциональный анализ. М., Мир, 1975.

25. *Князев П.Н.* Функциональный анализ. Минск, Высшэйшая школа, 1985.

26. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов, М.: Мир, 1983.

27. *Талдыкин А.Т.,* Элементы прикладного функционального анализа. М.: Высшая школа,1982.

28. *Ахиезер Н.Н., Глазман Н.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966

29. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. В 4^x томах, Т.1, Т.2. Функциональный анализ, М.: Мир, 1977, 1978.

Оқулық басылым

Еділ Әбдіхалықұлы Қасымов

Математиканың арнайы курстары

Оқулық

РБ меңгерушісі *З.А. Ғұбайдулина*
Редакторы *А.М. Балхашева*
Техн. редакторы *Қ.Ж. Көшербаева*
Компьютерде беттеген *А.Н. Оразалиева*

Басуға қол қойылды 11.10. 2005 ж

Таралымы 500 дана. Пішімі 60х84 1/16. №1
баспаханалық қағаз. Көлемі 20.8 есепті-баспа табақ.
Тапсырыс № . Бағасы келісімді.

Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық
университетінің басылымы
ҚазҰТУ-дың баспа орталығы, Алматы қаласы,
Ладыгин көшесі, 32

336