А.Г. Танирбергенов

ФИЗИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

АЛМАТЫ 2005

УДК 533
ББК 22.253
М55

Физика жидкости и газа. Учебное пособие для вузов. – Алматы: 2005. -131стр.

ISBN 5-94628-040-6

В учебном пособии изложены основные свойства жидкости и газа, статика, кинематика и уравнения движения жидкости и газа. Приведены упражнения для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов нефтяных вузов, специализирующихся в области разработки и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений. Оно может быть использовано также инженерно-техническими работниками промыслов.

Рецензенты:

Орунханов М.К – декан механико-математического факультета КазНУ им. Аль – Фараби, д.ф.-м.н., профессор.

Мадалиев Т.Б. – снс Института механики и машиноведения МОН РК, к.ф.-м.н.

ISBN 5-94628-040-6 © А.Г. Танирбергенов.2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6
Введение 7
Глава I
Свойства жидкости и газа 9
1. Давление, плотность и вес единицы объёма..... 11
2. Классификация режимов и течений движения жидкости и газа..... 14
3. Поверхностное натяжение, скорость распространения звука..... 18
4. Физические свойства газов..... 19
5. Упражнения. 25
Глава II
Равновесие жидкости и газа..... 28
1. Напряжения в жидкостях, находящихся в равновесии..... 28
2. Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения гидростатики Эйлера)..... 30
3. Равновесие в поле сил тяжести..... 33
4. Упражнения..... 38
Глава III
Кинематика жидкости и газа..... 43
1. Две формы описания движения сплошной среды... 43
2. Линии тока и траектории..... 47
3. Уравнение неразрывности..... 50
4. Функции тока для двумерных течений несжимаемой жидкости..... 53
5. Вихревое и безвихревое движения..... 54
6. Потенциал скорости и его связь с функцией тока... 56
7. Вихревое поле и его свойства..... 58
8. Упражнения..... 61
Глава IV
Основные уравнения динамики идеальной

жидкости..... 63
1. Силы массовые и поверхностные..... 63
2. Общее уравнение движения..... 65
3. Гидродинамическое давление в идеальной жидкости..... 66
4. Общие уравнения движения идеальной жидкости.. 68
5. Уравнения движения в форме Эйлера..... 69
6. Общая постановка задач физики жидкости и газа..... 70
7. Случай несжимаемой жидкости..... 71
8. Случай сжимаемой жидкости. Баротропность и бароклинность. Уравнение притока энергии. 72
9. Упражнения..... 75
Глава V
Простейшие случаи движения идеальной жидкости..... 78
1. Установившееся движение..... 78
2. Безвихревое движение 81
3. Установившееся безвихревое движение..... 83
4. Ограничения, налагаемые на скорость..... 84
5. Формула Торичелли..... 85
6. Истечение газов..... 86
7. Зависимость между скоростями в сечениях при истечении газа из тонкой конической трубки 87
8. Упражнения..... 88
Глава VI
Движения вязкой жидкости..... 92
1. Понятие о вязкой жидкости..... 92
2. Тензор скоростей деформаций..... 94
3. Тензор напряжений..... 96
4. Связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций..... 98
5. Уравнения движения вязкой жидкости..... 99
6. Различные формы уравнений движения вязкой

несжимаемой жидкости..... 103
7. Диссипация энергии..... 106
8. Закон подобия. Числа Рейнольдса и Фруда..... 111
9. Уравнение притока тепла для вязкой сжимаемой жидкости..... 112
10. Упражнения..... 114
Глава VII
Точные решения уравнений движения вязкой жидкости..... 116
1. Одномерное течение между двумя параллельными плоскими стенками..... 116
2. Теория ламинарного течения в цилиндрических трубах (течение Пуазейля)..... 119
3. Гидравлические сопротивления..... 123
4. Упражнения..... 127
Литература..... 130

Предисловие

Предлагаемое читателю учебное пособие «Физика жидкости и газа» предназначено для студентов высших учебных заведений нефтегазового профиля очной и заочной форм обучения.

В учебном пособии содержится как теоретический материал, так и упражнения для самостоятельного решения. В теоретическом материале приведены основные свойства жидкости и газа, статика и кинематика жидкости и газа, основные уравнения динамики идеальной и вязкой жидкостей и закон подобия течений.

В конце каждой главы даны упражнения для глубокого усвоения теоретического материала. Упражнения в основном взяты из нефтегазового дела.

Учебное пособие служит основой для ряда дисциплин теоретического и прикладного характера, таких, как подземная гидромеханика, разработка нефтегазовых месторождений, техника и технология добычи нефти и газа.

Введение

Физика жидкости и газа представляет собой дисциплину, которая рассматривает природу и закономерности движения газообразных и жидких сред, являясь частью механики сплошной среды.

Теоретический фундамент современной механики жидкости создан работами, выполненными академиками Российской академии наук Л. Эйлером (1707-1783гг.) и Д. Бернулли (1700-1782гг.) Перу первого принадлежит трактат «Общие принципы движения жидкости», в котором впервые выведены дифференциальные уравнения равновесия и движения идеальной жидкости и дано общее их решение, введено понятие потенциала скорости.

Развитие физики жидкости и газа трудно представить без работы Д. Бернулли «Гидродинамика» Закон, которому присвоено его имя, устанавливал связь между давлением уровня и скоростью движения тяжелой жидкости при установившемся движении. Этот закон является фундаментальным в гидродинамике.

Французским ученым Л. Навье (1785-1836гг) и английским ученым Г. Стоксом (1819-1903гг.) были заложены основы учения о движении вязкой жидкости. Полученное ими дифференциальное уравнение пространственного движения вязкой жидкости (уравнение Навье-Стокса) и сегодня широко используется для решения многих задач теоретических и прикладных задач во всех областях техники, в том числе в нефтегазовой отрасли.

Особая роль в формировании физики жидкости принадлежит английскому ученому О. Рейнольдсу (1842-1912гг.). Им определены условия перехода ламинарного движения в турбулентное, много сделано для установления принципов гидродинамического подобия.

Существенный вклад в раскрытие природы влияния вязкости на сопротивление при движении потоков в каналах и трубах внесли Г. Стокс, Г. Хаген (1810-1869гг.), Ж. Пуазейль (1799- 1869гг).

Глава I
Свойства жидкости и газа.

Обычная классификация разделяет вещества по агрегатному состоянию на твердые, жидкие и газообразные. Из курса общей физики хорошо известно отличительные особенности этих фазовых состояний. В физике жидкости и газа жидкостями называют вещества, находящиеся как в жидком, так и в газообразном состоянии. Характерная особенность, которая позволяет объединить капельные жидкости, газы и пары общим понятием «жидкость», заключается в легкоподвижности частиц указанных веществ, их способности легко изменять форму под действием незначительных сил. В отличие от твердых тел жидкости легко принимают форму того сосуда, в котором они находятся, могут течь под влиянием собственного веса, а также, если для этого создаются условия. Эта общая специфическая особенность получила название текучести; она и послужила основой для развития понятий динамики жидкости.

Жидкости и газы состоят из дискретно расположенных и непрерывно движущихся молекул. Для определения и анализа явлений, связанных с поведением жидкостей, в физике жидкостей отвлекаются от дискретной молекулярной структуры и рассматривают некоторую модель жидкости, обладающую свойствами сплошной среды.

Представления о сплошности жидкой среды облегчают изучение закономерностей гидромеханики, позволяют оценивать свойства и параметры жидкостей зависимостями от времени и координат.

Подразделение жидкостей на два главных класса – сжимаемые и несжимаемые – может быть по типу их реакции на изменение давления. Все газы и пары сильно сжимаемы. Капельные жидкости сжимаемы лишь в

небольшой степени. Они способны под влиянием текучести изменять форму, что отличает их от твердых тел, и в отличие от газов с трудом изменяют свой объём. Газы же способны в определенных условиях изменять и свою форму, и свой объём. Необходимо подчеркнуть, что в случае, когда параметры состояния газа практически не меняются, его поведение при движении не отличается от поведения капельной жидкости. В этих условиях газ, как и жидкость, может рассматриваться как несжимаемая среда.

Довольно часто в гидродинамике малосжимаемые жидкости называют капельными, сжимаемые – газами, а обобщенное понятие «жидкость» относят к средам, обладающими свойствами текучести.

Определяя понятия свойств жидкостей, следует подчеркнуть, что в качестве основной системы единиц измерения используется СИ, в которой базовыми единицами являются единица длины – метр; единица массы – килограмм, кг; единица времени – секунда; единица температуры – градус Кельвина, К.. Эти единицы участвуют в формировании других, которые широко применяют в механике жидкостей и газов. В табл. 1приведены наиболее часто употребляемые производные единицы.

Таблица №1.1 Производные единицы Международной системы СИ

Величина	Размерность	Обозначение
Объёмный расход	куб. метр в секунду	$м^3/с$
Скорость	метр в секунду	$м/с$
Сила	ньютон	$Н$
Давление, напряжение	паскаль (ньютон на квадратный метр)	$Па$
	килограмм на куб. метр	

Плотность Динамическая вязкость Работа, энергия	паскаль -секунда джоуль (ньютон на метр)	$кг/м^3$ $Па*с$ $Дж(Н*м)$

1. Давление, плотность и вес единицы объёма

Из физики известно, что давление – это сила, отнесённая к единице площади. В механике жидкости и газа это определение сохраняется, но нуждается в некоторых разъяснениях.

Все силы, которые действуют на ограниченный объём жидкости, могут быть разделены на внутренние и внешние. Внутренние силы (например, вязкость) определяются силами взаимодействия отдельных частиц внутри рассматриваемого объёма. Внешние силы включают в себя объёмные, которые равномерно распределены по объёму однородной жидкости (например, сила тяжести), и поверхностные, которые воздействуют на поверхности, ограничивающие объём жидкости (например, силы реакции стенок сосуда на жидкость).

Если выделить некоторый объём жидкости и рассматривать его как свободное тело, то система сил, действующих на этот объём, включает поверхностные силы, действующие на каждый элемент поверхности, ограничивающий этот объём. В общем случае поверхностная сила имеет составляющие – перпендикулярную и параллельную поверхности жидкости. Перпендикулярная составляющая, приходящаяся на единицу площади, называется нормальным напряжением. В случае напряжения сжатия его называют давлением.

Давление – скалярная величина, а сила, связанная с данным давлением – $\vec{p}$, действующим на единицу площади dS, равна $\vec{p}\,dS$ и имеет направление нормали к единичной площади dS. Размерность давления – Па или $Н/м^2$.

Плотностью ρ называют отношение массы вещества, заключённого в объёме, к величине этого объёма, т.е. $\rho = m/V$.

Довольно часто, особенно при решении практических задач физики жидкостей и газов, используют представление о весе единицы объёма γ, определяя его как отношение веса вещества, заключённого в объёме, к величине этого объёма, т.е. $\gamma = G/V = mg/V = \rho g$.

Под действием давления объём жидкости меняется. Это свойство называется сжимаемостью. Количественно сжимаемость оценивается коэффициентом объёмного сжатия β_V, который представляет собой относительное изменение объёма жидкости на единицу изменения давления, т.е. $\beta_V = -\Delta V/(V_0 \Delta p)$, где V_0 – первоначальный объём жидкости, ΔV - уменьшение объёма жидкости при увеличении давления на величину Δp. Величину, обратную коэффициенту объёмного сжатия, называют объёмным модулем упругости. Таким образом, $E_V = 1/\beta_V$. Для капельных жидкостей величина β_V находится в пределах $(3-7{,}4)\cdot 10^{-9}\ Па^{-1}$, т.е. является довольно незначительной, что позволяет пренебречь в ряде инженерных расчетов явлением сжимаемости.

По-иному ведут себя газы. Их сжимаемость зависит от характера процесса изменения состояния. Для

атмосферного воздуха коэффициент объёмного сжатия при изотермическом процессе составляет примерно $10^{-5} Па^{-1}$, что на четыре порядка превышает сжимаемость жидкостей, поэтому пренебрегать явлением сжимаемости в газах при изменении давления нельзя. Расширение капельных жидкостей происходит при их нагреве. Оно оценивается коэффицентом температурного расширения β_t, который представляет собой относительное увеличение объёма жидкости при увеличении температуры на 1К:

$$\beta_t = (1/V_0) \cdot \Delta V / \Delta T ,$$

Коэффициент температурного расширения для воды равен $15 \cdot 10^{-5}$ (при $t = 4°C$), для мазута и трансформаторного масла - $0,705 \cdot 10^{-5}$ (при $t = 0.....100°C$).

Если известна плотность нефтепродуктов при $15°C$ (ρ_{15}), то величину ρ при другой температуре можно определить по формуле Менделеева:

$$\rho_t = \frac{\rho_{15}}{1 + \beta_T (t - 15)},$$

где t – температура нефтепродуктов, $°C$; β_t - коэффициент, зависящий от ρ_{15}.

В общем случае $\frac{\Delta V}{V} = \beta_V \Delta p + \beta_T \Delta T$.

2. Классификация режимов и течений движения жидкости и газа.

При анализе задач гидрогазодинамики широко

используется понятие «идеальная жидкость». Среда такого рода представляет собой жидкость, наделенную особыми свойствами, главным из которых является абсолютная подвижность или, другими словами отсутствие вязкости. Кроме того, идеальная жидкость не способна расширяться или сжиматься под действием температуры, а также абсолютно не способна сопротивляться разрыву под влиянием внешних или массовых сил.

Введение понятия идеальной жидкости облегчает решения некоторых задач, однако полученные при этом выводы корректируются с учётом свойств реальной жидкости.

Важнейшим свойством реальной жидкости (газа), во многом определяющим явления, наблюдаемые при её движении, является вязкость. Оно проявляется благодаря подвижности смежных объёмов, которое называют простым сдвигом. Это движение можно представить следующим образом. Выделим в движущейся жидкости плоскости,. которые, будучи параллельными некоторому элементу поверхности, скользят друг над другом как жёсткие. В процессе переноса количества движения (импульса) из одной плоскости движущейся жидкости в другую возникает трение, препятствующее деформации жидкости. Жидкость, в которой развиваются явления внутреннего трения, в отличие от идеальной получила название реальной, или вязкой.

Рассмотрим двухмерное параллельноструйное течение со сдвигом, описываемого скоростью u, величина которой зависит только от расстояния, отсчитываемого вдоль перпендикулярного направления y. В этом случае касательное напряжение τ_{yx} и градиент скорости du/dy связаны простой зависимостью, впервые установленной И.Ньютоном:

касательное напряжение τ_{yx} и градиент скорости du/dy связаны простой зависимостью, впервые установленной И.Ньютоном:

$$\tau_{yx} = \mu\,(du/dy).$$

Коэффициент пропорциональности μ назван коэффициентом динамической вязкости, потому что он представляет зависимость между силой и движением жидкости. Его размерность содержит величину – единицы силы, $Па \cdot с = Н \cdot с/м^2$.

Жидкости, для которых справедлив закон Ньютона, называются ньютоновскими. Такие жидкости обладают свойством динамической вязкости независимо от конкретного характера движения, претерпеваемого жидкостью. Наиболее распространенные жидкости, такие как вода, спирт, являются ньютоновскими. Жидкости с переменным коэффициентом пропорциональности между напряжением и скоростью деформации называются неньютоновскими. Жидкостями такого типа являются мазуты вблизи температуры застывания, бетоны и др. Опытным путём установлено, что неньютоновские жидкости могут начать двигаться только после того, как касательные напряжения достигнут определённой величины τ_0- начального напряжения сдвига. При напряжениях, меньших начальных, эти жидкости не текут, а испытывают только упругие деформации.

В общем случае τ_0 может зависеть от длительности интервала, в течение которого действует напряжение, от величины напряжения и других факторов.

Для ньютоновских жидкостей величина μ зависит только от состояния жидкости и поэтому является одним из её параметров. Зависимость от давления для жидкостей,

температуры являются следствием различий в молекулярном строении жидкостей и газов.

В уравнениях динамики жидкости часто появляется отношение μ / ρ, которое получило название коэффициента кинематической вязкости $\nu, м^2/с$.

Таким образом, $\nu = \mu / \rho$. Размерность коэффициента ν подобна размерностям коэффициентов диффузии и температуропроводности. Поэтому если коэффициент диффузии определяет скорость переноса вещества, а коэффициент температуропроводности – скорость распространения теплоты, то коэффициент кинематической вязкости характеризует ускорение частиц под влиянием сил вязкости.

Для капельных жидкостей коэффициент кинематической вязкости практически не зависит от давления, а для газов он с ростом давления падает. Зависимость величины ν от температуры аналогична, как и для динамической вязкости, только для газов эта связь проявляется сильнее.

Существование двух режимов движения жидкости было обнаружено экспериментально ещё в 1839г. Гаген обратил внимание на тот факт, что характер течения в цилиндрической трубе изменяется, когда скорость достигает определённого предела. Он обнаружил также, что при скорости меньших этого предела, вытекающая струя гладкая, как твердый стеклянный стержень, но когда скорость превышает этот предел, поверхность струи приобретает возмущения и течение кажется «рывками».

Таким образом были обнаружены свидетельства существования двух различных видов движения жидкости – их назвали ламинарным (слоистым) и турбулентным (вихревым) режимами.

В 1883г. Рейнольдс очень наглядно доказал

существование этих режимов движения жидкости и предложил критерий для определения вида движения в тех или иных условиях. Сформулируем этот критерий для установления условий существования ламинарного движения, исходя из того, что этому режиму должна быть свойственна большая относительная роль сил вязкого трения при второстепенном значении инерционных сил, обусловленных ускорениями частиц. Отношение этих сил определяет безразмерный комплекс – число Рейнольдса: $\mathrm{Re} = \rho \cdot V \cdot L / \mu$, где V - скорость, рассчитанная по расходу потока жидкости (газа) и поперечному сечению потока. Из отмеченного следует, что случаю ламинарного движения жидкости должны соответствовать относительно малые числа Рейнольдса, которые не должны превышать определенного критического значения. Если они превосходят критическое значение, то ламинарное движение становится неустойчивым и может возникнуть турбулентность. Значение критического числа Рейнольдса зависит от геометрии потока и характерных величин, используемых при его определении. В частности, для прямых закрытых каналов и труб оно равно 2300.

Когда число Рейнольдса стремится к нулю и, следовательно, можно полностью пренебречь инерционными членами, имеет место предельный случай ламинарного движения. Представление о таком движении дает фильтрация жидкости через слой мелкозернистой среды из твердых частиц или падение частиц в очень вязкой жидкости. Подобные движения названы ползущими течениями.

С увеличением скорости потока, его инерционных сил или при снижении вязкости характерные признаки ползущего течения концентрируются в узком слое, примыкающем к стенке (границе области движения). При этом в движущейся жидкости формируются две зоны:

пограничный слой и ядро потока. В пограничном слое скорость жидкости изменяется от нуля на твердых стенках

Классифицируют течения также на стационарные и нестационарные. Отличительной чертой первых является то, что поля скоростей для них, а также для других физических величин не изменяются во времени. Если это условие не соблюдается, то течения нестационарны.

3. Поверхностное натяжение, скорость распространения звука

Энергия поверхностных молекул отличается от энергии молекул, расположенных в объёме и окруженных со всех сторон такими же молекулами. Для оценки состояния молекул у поверхности раздела (твердой или жидкой) вводится понятие «поверхностная энергия». Величина этой энергии - $Э_П$ – пропорциональна площади поверхности раздела f, т.е. $Э_П = \sigma f$.

Входящий в это уравнение коэффициент пропорциональности σ получил название коэффициента поверхностного натяжения. Его величина зависит от природы соприкасающихся сред, степени чистоты жидкости и её температуры. Коэффициент σ можно представить отношением $\sigma = -F/l$, в котором F – сила поверхностного натяжения; l - длина линии, ограничивающий поверхность раздела. Из определения вытекает, что σ имеет размерность либо энергии на единицу площади ($Дж/м^2$), либо силы на единицу длины ($Н/м$). При повышении температуры величина σ снижается, а в критической точке перехода жидкости в пар устремляется к нулю.

Существуют вещества, названные поверхностно-активными (ПАВ), которые будучи добавленными к

жидкости в очень незначительных количествах, существенно снижают силы поверхностного натяжения.

Скорость звука (с) есть скорость распространения малых возмущений давления в неограниченном объёме вещества или в объёме вещества, ограниченном абсолютно жесткими стенками. Она зависит от состояния и свойств этого вещества. Таким образом, для каждого термодинамического состояния вещества существует определённая скорость звука c, которую можно определить из следующего соотношения: $c = \sqrt{dp/d\rho}$.

Величины давления p и плотности ρ для газов связаны уравнением состояния, что позволяет получить выражение для скорости звука в газах в виде функций одной переменной – температуры $c = \sqrt{kRT}$, т.е. скорость распространения звука в данном газе пропорциональна корню квадратному абсолютной температуры.

4. Физические свойства газов

Состояние однородного газа определяется тремя параметрами – абсолютным давлением p, плотностью ρ и абсолютной температурой T, из которых только два являются независимыми. Уравнение $\Phi(p,\rho,T) = 0$, связывающее эти величины, называется уравнением состояния.

Уравнение Клайперона для массы m, занимающей объём V, имеет вид

$$pV = mRT, \qquad (1.1)$$

где R - газовая постоянная, измеряемая в СИ в Дж/(кг К).

Уравнение (1.1) можно записать также в виде

$$p/\rho = RT. \qquad (1.2)$$

Уравнение Клайперона для одного киломоля газа записывается в виде

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\bar{R}}{\mu} T, \qquad (1.3)$$

где $\bar{R}$ - универсальная газовая постоянная, величина для всех газов и равная $8314\ Дж/(кг \cdot К)$.

Для воздуха газовая постоянная равна

$$R = \bar{R}/\mu = 8314/28{,}98 = 287\ Дж/(кг \cdot К) \qquad (1.4)$$

Удельный объём газа v и его плотность ρ связаны соотношением:

v/ρ.

Газ называется совершенным, если давление p, плотность ρ и абсолютная температура T удовлетворяет уравнению Клайперона (1.2) или (1.3) и удельную внутреннюю энергию газа U можно представить в виде

$$U = c_v T,$$

где c_V – теплоёмкость газа при постоянном объёме.

Для реальных углеводородных газов уравнение состояния представляется следующим образом:

$$p/\rho = zRT \qquad (1.5)$$

или $$\frac{p}{\rho} = z\frac{\bar{R}}{\mu} T \qquad (1.6)$$

Здесь $$z = z\left(\frac{p}{p_c}, \frac{T}{T_c}\right) \qquad (1.7)$$

z – коэффициент сжимаемости; p_c, T_c -критические давление и температура, т.е. давление и температура в критической точке.

Критической точкой называется точка на карте изотерм (диаграмме состояния $p-V-T$), в которой исчезает различие между насыщенным паром и жидкостью. При температуре выше критической не существует двухфазных состояний. Вещество находится в однофазном состоянии.

Для природных углеводородных газов коэффициент сжимаемости определяется по экспериментальным кривым.

Система находится в термодинамическом равновесии, если параметры, определяющие её состояние, остаются постоянными.

Обратимым процессом называется процесс изменения состояния системы, который, будучи проведен в обратном направлении, возвращает её в исходное состояние через те же промежуточные состояния и при этом в окружающей среде никаких изменений не происходит.

Только в том случае, когда реальный процесс может рассматриваться как квазистатический, при выводе формул, описывающих его, можно пользоваться уравнениями равновесного состояния (1.1) – (1.7).

Первое начало термодинамики выражает закон сохранения энергии в применении к преобразованиям механической энергии в тепловую и обратно. Для квазистатических процессов его можно сформулировать следующим образом: подведенное к единице массы газа элементарное количество теплоты dQ расходуется на повышение внутренней энергии газа dU и на выполнение работы расширения pdv:

$$dQ = dU + pdv. \qquad (1.8)$$

Количество теплоты dQ, сообщенное газу, не является полным дифференциалом, так как зависит не только от начального и конечного состояния газа, но и от самого процесса изменения состояния. Если уравнение (1.8) умножить на интегрирующий множитель 1/Т, то получим полный дифференциал некоторой функции, называемой энтропией:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dv. \qquad (1.9)$$

При переходе газа из состояния 1 в состояние 2 изменение энтропии $S_2 - S_1$ не зависит от процесса перехода, а определяется только начальным и конечными состояниями.

Для совершенного газа

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{p_2 \cdot \rho_1^k}{p_1 \cdot \rho_2^k} \qquad (1.10)$$

где $k = c_p / c_V$ - показатель адиабаты Пуассона; c_p и c_V - теплоемкости газа при постоянном давлении и при постоянном объёме соответственно, отнесенные к единице массы. Они измеряются в СИ в $Дж/(кг \cdot К)$. Определенное по формуле (1.9) приращение энтропии тоже отнесено к единице массы.

Процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой, называется адиабатическим, а процесс, происходящий при постоянной энтропии – изоэнтропическим. Изоэнтропический процесс описывается уравнением адиабаты Пуассона, которое получается из уравнения (1.10), если положить $S_2 = S_1$, т.е.

$$\frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p_2}{\rho_2^k} = \text{const.} \qquad (1.11)$$

Процесс, происходящий при постоянной температуре, называется изотермическим. Он описывается уравнением Бойля-Мариотта:

$$\frac{p}{\rho} = const. \qquad (1.12)$$

Энтальпией, отнесенной к единице массы (или теплосодержание при постоянном давлении), называется функция

$$i = U + \frac{p}{\rho}, \qquad (1.13)$$

которая определяется только состоянием газа, например, его температурой и давлением.

При адиабатическом течении реального газа через дроссель (вентиль, диафрагму и т.д.) из области большего давления p_1 в область меньшего давления p_2 наблюдается изменение температуры, вызванное изменением давления. Это явление называется эффектом Джоуля – Томпсона. Если за дросселем восстанавливается начальная скорость течения газа, то энтальпия сохраняется неизменной:

$$i_1 = i_2 \qquad (1.14)$$

или

$$U_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = U_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \qquad (1.15)$$

Температура в процессе Джоуля – Томпсона может как повышаться, так и понижаться, в зависимости от характера сил взаимодействия между молекулами газа. Один и тот же газ при разных температурах может вести

себя различно. Температура, при которой эффект меняет свой знак, называется точкой инверсии.

Дифференциальный эффект Джоуля – Томпсона характеризуется коэффициентом Джоуля – Томпсона

$$\delta = (\frac{\partial T}{\partial p})_i \qquad (1.16)$$

зависящим от температуры и давления.

При дросселировании от высокого давления p_1 до значительно более низкого p_2 температура газа меняется на конечную величину $T_1 - T_2$. Этот процесс принято называть интегральным эффектом Джоуля-Томпсона. Для его характеристики вводится среднее значение коэффициента Джоуля –Томпсона:

$$\delta_{ср} = \frac{T_1 - T_2}{p_1 - p_2} \qquad (1.17)$$

Для многих реальных газов составлены таблицы и построены графики зависимости энтальпии от температуры и давления, диаграмма i-T для метана. Эти графики могут служить для расчета эффекта Джоуля – Томпсона.

Для совершенного газа

$$i = c_p T, \qquad (1.18)$$

и изменение температуры за счет эффекта Джоуля – Томпсона равно нулю.

5. Упражнения

1. В вертикальном цилиндрическом резервуаре диаметром $d = 4м$ хранится 100т. нефти, плотность которой при $0° C$ $\rho_0 = 850кг/м^3$.

Определить изменение уровня в резервуаре при изменении температуры нефти от 0 до $30°C$. Расширение резервуара не учитывать. Коэффициент теплового расширения нефти принять равным $\beta_T = 0{,}00072\ 1/град$.

Решение. Объём, занимаемой нефтью при температуре $0° C$:

$$V = m/\rho = 100 \cdot 10^3 / 850 = 118 м^3.$$

В соответствии с формулой Менделеева изменение объёма при изменении температуры на $30°C$:

$$\Delta V = \beta_T V \Delta T = 0{,}00072 \cdot 118 \cdot 30 = 2{,}55 м^3.$$

Изменение уровня нефти в резервуаре:

$$h = 4\Delta V/(\pi d^2) = 2{,}55 \cdot 4/(3{,}14 \cdot 16) = 0{,}203 м.$$

2. Определить плотности воды и нефти при $4°C$, если известно, что 10 л. воды при $4°C$ имеет массу 10кг, а масса того же объёма нефти равна 8,2кг. Сравнить плотность нефти с плотностью воды.

Ответ: $\rho_B = 1000 кг/м^3$, $\rho_H = 820 кг/м^3$.

3. Цистерна заполнена нефтью плотностью $\rho_{см} = 850\ кг/м^3$. Диаметр цистерны $d = 3м$, длина $l = 6м$. Определить массу жидкости в цистерне.

Ответ: $m = 3{,}60 \cdot 10^4 кг$.

4. Найти плотность смеси жидкостей $\rho_{см}$, имеющей следующий массовый состав: керосина – 30%, мазута – 70%, если плотность керосина $\rho_к = 790 кг/м^3$, а для мазута $\rho_м = 900 кг/м^3$.

Ответ: $\rho_{см} = 864 кг/м^3$

5. Определить насколько поднимется уровень нефти в цилиндрическом резервуаре при увеличении температуры от 15 до 40°C. Плотность нефти при 15°C $\rho_{15} = 900 кг/м^3$. Диаметр резервуара $d = 10м$; нефть заполняет резервуары при 15 °C до высоты $H = 12м.$. Коэффициент теплового объёма расширения нефти $\beta_T = 6{,}4 \cdot 10^{-4}\, 1/градус$. Расширения резервуара не учитывается.

Ответ: $\Delta H = 0{,}192м.$

6. Трубопровод диаметром $d = 0{,}3м$, длиной $l = 100м$, подготовленный к гидравлическому испытанию, заполнен водой при атмосферном давлении.

Какое количество воды необходимо дополнительно подать в трубопровод, чтобы давление в нем поднялось до 5Мпа по манометру?

Коэффициент сжимаемости воды принять равным $\beta_V = 0.5 \cdot 10^{-9}\, Па^{-1}$. Деформацией трубопровода пренебречь.

Ответ: $\Delta V = 1{,}77 \cdot 10^{-2}\, м^3$

7. Насколько изменится объём воды, находящейся в пластовой водонапорной системе, окружающей нефтяное (или газовое) месторождение, за счет упругого расширения при падении пластового давления на $\Delta p = 9{,}8МПа$, если вода занимает площадь S=100000га, средняя толщина пласта h=10м, пористость пласта m=20%, коэффициент сжимаемости воды $\beta_p = 4{,}28 \cdot 10^{-10}\, Па^{-1}$.

Ответ: $\Delta V = 8{,}4 \cdot 10^6\, м^3$.

8. Найти кинематический коэффициент вязкости нефти, если известно, что при температуре $t = 40°C$ её

(1.8) динамический коэффициент вязкости $\eta = 0{,}5 кг./(м \cdot с)$. Плотность нефти при той же температуре равна $\rho = 920 кг/м^3$.

Ответ: $\nu = 0{,}543 \cdot 10^{-3} м^2/с.$

9. Для большинства жидкости зависимость динамического коэффициента вязкости η от абсолютной температуры T можно представить эмпирической (1.9) формулой вида:

$\eta = B \cdot e^{b/T}$, где коэффициенты B и b для данной жидкости имеют постоянное значение и определяются экспериментально. Установлено, что при $t_1 = 15°C$ динамический коэффициент вязкости нефти $\eta_1 = 0{,}187 кг/(м \cdot с)$, а при $t_2 = 30°C$ (1.10) $\eta_2 = 0{,}0312 кг/(м \cdot с)$.

Определить постоянные B и b и вычислить значение η для этой нефти при $t_1 = 25°C$.

Ответ:

$B = 3{,}65 \cdot 10^{-17} кг/(м \cdot с)$; $b = 1{,}04 \cdot 10^4 K$;

$\eta_{25} = 0{,}05 кг/(м \cdot с)$.

Глава II

Равновесие (статика) жидкости и газа.

Равновесие жидкости может иметь место либо в случае, когда она находится в состоянии покоя, либо в случае, когда она движется подобно твёрдому телу с одинаковой скоростью во всех точках объёма. Равновесие является результатом действия силового поля, в которое помещена жидкость, и связей, налагаемых на границах

объёма жидкости, и в равной степени проявляется как для идеальных так и для реальных жидких сред. Распределение давления в объёме жидкости зависит от характера силового поля. Важными примерами силовых полей являются поле силы тяжести и поле центробежной силы.

1. Напряжения в жидкостях, находящихся в равновесии

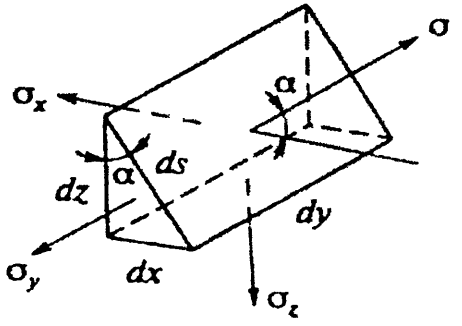


Рис. 2.1. Схема напряжений в точке при равновесии.

Рассмотрим элементарный объём жидкости призматической формы (рис.2.1). Предположим, что этот объём находится в равновесии, причём поверхностные силы, обусловливающие напряжения, уравновешиваются внешними силами, пропорциональными объёму или массе (т.е. объёмными или массовыми силами). Уравнения равновесия по направлениям координатных осей x и z таковы:

$$\sum F_x = 0 \quad \text{или}$$

$$-\sigma_x dxdz + \sigma_n dsdy \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$\sum F_z = 0 \text{ или}$$

$$-\sigma_z dxdy + \sigma_n dsdy \cdot \sin\alpha - (1/2)\rho \cdot g \cdot dxdydz = 0. \quad (1.3)$$

На рис. 2.1 легко заметить, что $\cos\alpha = dz/ds$, $\sin\alpha = dx/ds$, тогда вместо записанных только что уравнений получим

$$-\sigma_x dxdz + \sigma_n dydz = 0;$$

$$-\sigma_z dxdy + \sigma_n dxdy - (1/2)\rho\, gdxdydz = 0.$$

Сокращая на множители, находим

$$-\sigma_x + \sigma_n = 0; \quad -\sigma_z + \sigma_n - (1/2)\rho\, gdz = 0.$$

Устремим объём к нулю, т.е. будем стягивать его к точке. Тогда последним слагаемым второго уравнения можно пренебречь (оно стремится к нулю) и получим $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_n$. Переориентировав объём жидкости в пространстве можно показать, что $\sigma_y = \sigma_n$, и поэтому

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_n = \sigma \ .$$

Таким образом, нормальное напряжение в любой точке жидкости, находящейся в равновесии, не зависит от направления; оно является скалярной величиной.

Напряжение растяжения σ есть давление с обратным знаком, т.е. $\sigma = -p$.

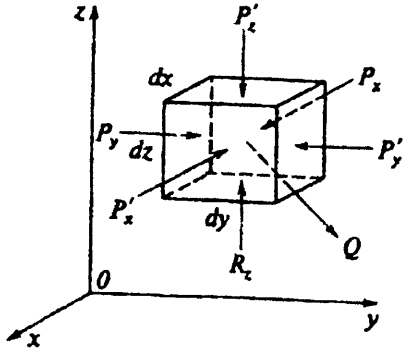
2. Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения гидростатики Эйлера)

Хотя величина нормального напряжения, а, следовательно, и давления, при равновесии не зависит от ориентации площади действия, в различных точках

жидкости в общем случае она может быть различной. Иными слова, давление, или, как его ещё называют гидростатическое давление, есть функция координат, т.е.

$$p = f(x, y, z). \qquad (2.1)$$

Расположим внутри покоящейся жидкости около произвольной точки 0 прямоугольную систему координат так, чтобы ось 0Z получила направление вертикально вверх. Выделим в жидкости элемент в форме параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz, параллельными осям координат, и напишем условия равновесия под действием шести сил давления на его грани и равнодействующей объёмных (массовых) сил (рис.2.2).



Р сил давления на грани параллелепипеда и равнодействующей объёмных (массовых) сил.

Уравнения равновесия выделенного объёма имеют вид

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0.$$

Уравнение $\sum F_y = 0$ выражает действие следующих сил: силы давления на левую грань $dp_y = pdxdy$, где p - гидростатическое давление среднее для данной грани;

силы давления на правую грань $dp_y^{'} = p^{'}dxdy$ и проекции объёмной силы на ось у $Q_y = Y\rho\, dxdydz$, где Y- проекция на ось y ускорения, соответствующего силе Q_y.

Выделенный объём достаточно мал. Это позволяет считать, что давление внутри него по любой координате изменяется линейно. Тогда разлагая $p^{'}$ (вблизи $y = 0$) в ряд Тейлора и ограничиваясь линейными слагаемыми ряда, получим $p^{'} = p + (\partial p / \partial y)dy$.

Таким образом,

$$\sum F_y = pdxdz - [p + (\partial p / \partial y)dy]dxdz + Y\rho\, dxdydz = 0,$$

или, после преобразований и деления на *dxdydz*,

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho\, Y = 0. \qquad (2.2)$$

Получив по аналогии два других уравнения, будем иметь следующую систему уравнений равновесия (Эйлера):

$$\begin{cases} -\partial p / \partial x + \rho X = 0, \\ -\partial p / \partial y + \rho Y = 0, \\ -\partial p / \partial z + \rho Z = 0. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Умножая первое уравнение этой системы на dx, второе – на dy, третье – на dz и складывая их, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho\,(Xdx + Ydy + Zdz). \qquad (2.4)$$

Левая часть выражения (2.4) представляет собой полный дифференциал dp. Поэтому можно записать

$$dp = \rho\,(Xdx + Ydy + Zdz). \qquad (2.5)$$

Это – основное дифференциальное уравнение статики жидкости и газов.

Если силы и плотность есть такие функции x, y и z, что правая часть выражения (2.5) не представляет собой полного дифференциала, то равновесие жидкости невозможно. Таким образом, не при всяких условиях в отношении сил и плотности жидкость может находиться в равновесии.

Для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) правая часть уравнения (2.5) будет полным дифференциалом при выполнении равенств

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad . \qquad (2.6)$$

Функция U, определяемая таким образом, называется силовой, а её величина с обратным знаком – потенциалом. Тогда уравнение (2.5) можно представить в виде $dp = \rho\, dU$, а условие равновесия сформулировать следующим образом: несжимаемая жидкость может находиться в равновесии, если приложенные к ней силы имеют потенциал.

Если жидкость (газ) сжимаема, но имеет постоянную температуру, то плотность является функцией только давления, т.е. $\rho = f(p)$. Тогда уравнение (2.5) имеет вид

$$\frac{dp}{f(p)} = Xdx + Ydy + Zdz$$

Обозначая через P интеграл левой части последнего уравнения, получим выражение

$$dP = Xdx + Ydy + Zdz.,$$

аналогичное предыдущему, и с таким же выводом: для того чтобы жидкость находилась в покое, приложенные к ней силы должны иметь потенциал.

Совершенно очевидно, что если в объёме жидкости есть какое – то поле температур, т.е. в разных точках объёма температуры различны, равновесие невозможно, так как в ней возникает перемещение горячих и холодных масс. Поверхность, во всех точках которой давление постоянно, называется поверхностью уровня. Описать эту поверхность можно уравнением (2.5) при $dp = 0.$. Следует отметить, что две разные поверхности уровня не пересекаются между собой.

3. Равновесие в поле сил тяжести

Довольно часто жидкости и газы находятся в равновесии под влиянием сил тяжести. Для анализа этого состояния необходимо проинтегрировать основное дифференциальное уравнение гидростатики (2.5), содержащее две неизвестные функции p и ρ. Чтобы осуществить эту операцию, нужно еще одно уравнение. Таким может быть, в частности, уравнение $\rho = const$, справедливое для несжимаемых (однородных) жидкостей, или уравнение состояния для газа.

Основное уравнение равновесия неподвижной массы жидкости для данного случая может быть найдено, если иметь в виду, что в качестве объёмной силы выступает сила тяжести, а ускорение этой силы соответствует ускорению свободного падения $g = 9{,}81 м/с^2$.

Направим ось ординат $0z$ вертикально вверх. Тогда значения проекций ускорения силы тяжести будут равны $X = 0, Y = 0, Z = -g$, а уравнение (2.5) примет вид

$$dp = -\rho\, gdz\,. \qquad (2.7)$$

Если полагать, что свободная поверхность имеет координату z_0 и на этой поверхности внешнее давление равно p_0 (в частном случае это давление может быть равно атмосферному p_{am}), то, интегрируя уравнение (2.7) в пределах от z_0 до z и от p_0 до p при условии $\rho = const$, получим

$$p = p_0 + \rho\, g(z_0 - z) = p_0 + \gamma\,(z_0 - z). \qquad (2.8)$$

Полученное выражение (2.8) является основным уравнением равновесия несжимаемой жидкости в поле сил тяжести. Оно служит математическим выражением закона Паскаля, из которого следует: всякое увеличение внешнего давления, осуществляемое в замкнутой системе, будет передаваться всем точкам жидкости одинаково по всем направлениям. Действительно, абсолютное давление в какой либо точке жидкости равно сумме внешнего давления и давления оказываемого столбом жидкости над этой точкой.

Уравнение (2.8) может быть записано в единицах длины:

$$\frac{p}{\gamma} + z = \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = H_0 = const. \qquad (2.9)$$

Плотность газообразных сред зависит от давления и температуры, поэтому интегрирование (2.7) для них должно проводиться с учётом этого обстоятельства.

Используя уравнение Менделеева – Клайперона $\rho = p/(R \cdot T)$ совместно с (2.7), получим

$$\frac{dp}{p} = -g\frac{dz}{RT(z)}$$

или после интегрирования, учитывая, что при $z = z_0 \;\; p = p_0$,

$$p = p_0 \cdot \exp\left[-g\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{RT(z)}\right]. \qquad (2.10)$$

Эта формула называется барометрической. Зная зависимость от высоты, с помощью выражения (2.10) можно найти изменение давления с высотой.

Если считать, что атмосфера находится в изотермическом равновесии $(T = const)$, то из барометрической формулы (2.10) следует экспоненциальный закон убывания давления с высотой

$$p/p_0 = \exp\left[-\frac{g}{RT}(z - z_0)\right]. \qquad (2.11)$$

В ограниченном диапазоне высот (до 11км) часто принимают, что температура с высотой в атмосфере убывает по линейному закону $T = T_0 - bz$. В этом случае из (2.11) имеем

$$p/p_0 = (T/T_0)^{g/(bR)}. \qquad (2.12)$$

Из формул (2.9) и (2.12) следует, что поверхностями равного давления для жидкости и газа, находящихся в абсолютном покое, являются горизонтальные плоскости: $z = const$.

Простейшим прибором для измерения давления в сосуде с жидкостью является пьезометр, представляющий собой вертикальную открытую сверху трубку, присоединяемую к сосуду (рис. 2.3).

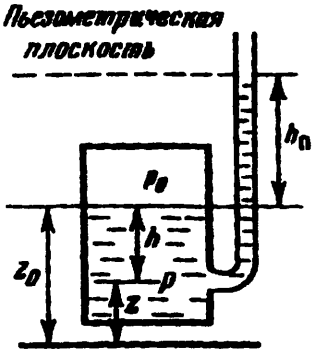


Рис. 2.3

Пьезометр измеряет избыточное давление на поверхности жидкости в сосуде; пьезометрическая высота равна:

$$h_П = \frac{p_0 - p_a}{\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g},$$

где p_a - атмосферное давление.

Назовём пьезометрической поверхностью, поверхность, проходящую через уровень жидкости в пьезометре, или, что то же, поверхность, на которой давление равно атмосферному.

Если $p_0 > p_a$, то $\Delta p > 0$, и пьезометрическая поверхность располагается выше уровня жидкости в сосуде; если $p_0 < p_a$, то $\Delta p < 0$, и она находится ниже

уровня жидкости; если $p_0 = p_a$, то пьезометрическая поверхность совпадает с поверхностью жидкости.

Давление избыточное и абсолютное связаны соотношением

$$p_u = p - p_a .$$

При $p > p_a$ величина $p_И > 0$. В этом случае $p_И$ называется также манометрическим давлением.

Если $p < p_a$, то $p_И < 0$ и, взятое с обратным знаком, называется вакуумом или вакуумметрическим давлением $p_в$.

$$p_в = p_a - p .$$

Для измерения давления применяется следующие приборы: барометры измеряют атмосферное давление, манометры – избыточное, вакуумметры – вакуум;

4. Упражнения

1. В закрытом резервуаре с нефтью $\rho = 880 кг.м^3$ вакуумметр, установленный на его крышке, показывает $p = 1{,}18 \cdot 10^4 \, Па$ (рис. 2.4).

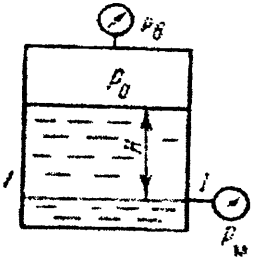


Рис. 2.4

Определить показание манометра p_M, присоединенного к резервуару на глубине $H = 6м$ от поверхности жидкости, и положение пьезометрической плоскости.

Решение. Проведем плоскость 1 – 1 на уровне присоединения манометра. В этой плоскости абсолютное давление в соответствии с основным уравнением гидростатики равно:

$$p_{1-1} = p_0 + \rho g H,$$

где p_0 - абсолютное давление на поверхности, равное $p_a - p_b$.

Тогда

$$p_{1-1} = p_a - p_b + \rho g H.$$

С другой стороны, так как манометр измеряет избыточное давление $(p_M = p_И)$, то

$$p_{1-1} = p_a + p_M.$$

Приравняв два выражения для p_{1-1}, найдём p_M:

$$p_M = -p_B + \rho g H = -1{,}18 \cdot 10^4 + 880 \cdot 9{,}8 \cdot 6 =$$

$$3{,}99 \cdot 10^4 \ Па$$

Так как на поверхности жидкости давление меньше атмосферного, то пьезометрическая высота отрицательна:

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g} = -\frac{p_B}{\rho g} = -\frac{1{,}18 \cdot 10^4}{880 \cdot 9{,}8} = -1{,}37м$$

и пьезометрическая плоскость расположена ниже поверхности жидкости на расстоянии 1, 37м.

2. Определить абсолютное и избыточное гидростатические давления в точке А, находящейся на

глубине $H_1 = 7м$ от свободной поверхности жидкости в сосуде, если пьезометрическая высота $H_2 = 1{,}2м$, плотность жидкости $\rho = 1000кг/м^3$ и атмосферное давление $p_a = 1{,}033ат$.

Ответ: 1,853ат.

3. Определить давление на забое закрытой газовой скважины (рис.2.5), если глубина скважины $H = 2200м$, манометрическое давление на устье $p_м = 10,7 Мпа$, плотность природного газа при атмосферном давлении и температуре в скважине (считаемой неизменной по высоте) $\rho = 0,76кг/м^3$, атмосферное давление $p_a = 98кПа$.

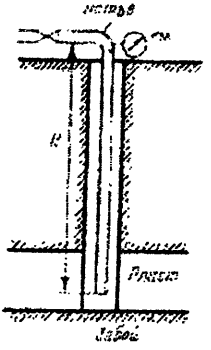


Рис. 2.5.

Ответ: $p_{заб} = 12{,}8МПа$.

4. Определить избыточное давление $p_и$ на поверхности жидкости в резервуаре и пьезометрическую высоту $h_П$ (рис. 2.6), если высота $H = 0,6м$, а показания ртутного манометра $h = 80мм$. Плотность жидкости $\rho = 800кг/м^3$, плотность ртути $\rho_р = 13600кг/м^3$.

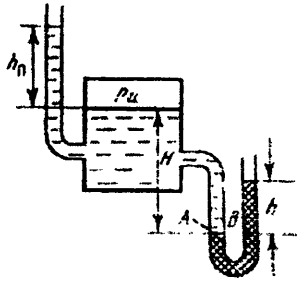


Рис. 2.6.

Ответ: $p_И = 5,96кПа; h_П = 0,76м.$

5. На рис. 2.7 приведен вертикальный разрез газонефтеводоносного пласта, имеющего выход на дневную поверхность в точке А.

Найти абсолютное давление в газовой шапке, если $H = 2500км$, $h_1 = 800м$, $h_3 = 300м$, плотность минерализованной воды $\rho_в = 1020кг/м^3$, плотность нефти $\rho_н = 850кг/м^3$, атмосферному давлению соответствует $740мм.рт.ст.$

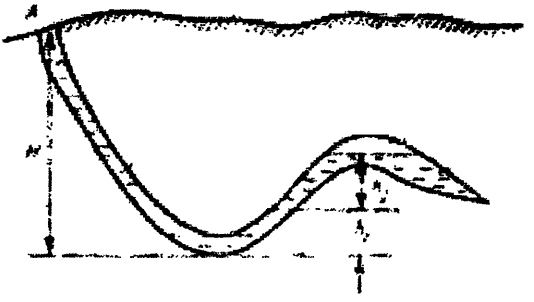


Рис. 2.7.

Ответ: p = 14,6МПа.

6. В закрытом цилиндрическом отстойнике уровень воды составляет $a = 0{,}25м$, уровень нефти $b = 0{,}8м$ (рис.2.8). Плотность воды $\rho = 1000кг/м^3$, плотность нефти $\rho_н = 880кг/м^3$

Определить уровни h_1 и h_2, если абсолютное давление на поверхности нефти $p_0 = 1{,}08 \cdot 10^5 Па$, атмосферному давлению соответствует $h_б = 735мм.рт.ст.$

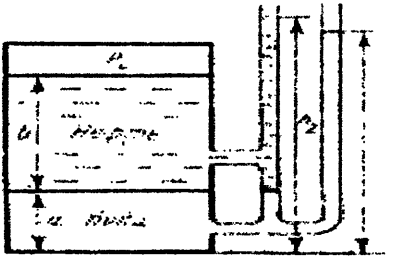


Рис. 2.8.

Ответ: $h_1 = 1{,}96м; h_2 = 2{,}2м$

Глава III
Кинематика жидкости и газа.

Часть механики, в которой рассматривается общие свойства движения тел без выяснения причин его возникновения, называется кинематикой. В кинематике жидкостей и газов изучается положение частиц жидкости и газа в пространстве в зависимости от времени. По выражению Н.Е.Жуковского, кинематика есть геометрия движения.

В кинематике жидкости и газа точка есть место в пространстве, а частица – малая часть материального континуума.

Различные частицы движущейся жидкости обычно имеют разные скорости и ускорения, поэтому поле течения должно описываться скоростями и ускорениями в различных точках во всем пространстве, занятом жидкостью. Как скорости, так и ускорения являются векторными величинами и обозначаются соответственно **v** и **a**. В общем случае **v** и **a** являются функциями времени и координат пространства.

1. Две формы описания движения сплошной среды

Для описания движения тела в механике жидкости и газа используются два способа: отсчетный и пространственный.

В середине XVIII в. Л.Эйлер ввел понятие, которое в гидродинамике называется лагранжевым. Это частный случай отсчетного описания, при котором движущаяся жидкость представляется в виде набора бесконечно большого количества «материальных точек» - частиц жидкости, причем в качестве «метки» каждой данной

частицы используются декартовы координаты её положения в момент времения $t = 0$. Это означает, что в некоторый произвольный момент, условно принятый за нуль, задаются координаты каждой частицы a, b, c и после этого следят за движением этой частицы в потоке. Положение частицы в любой момент времени (движение) определяется системой уравнений вида

$$\begin{cases} x = f_1(a,b,c,t); \\ y = f_2(a,b,c,t); \\ z = f_3(a,b,c,t). \end{cases} \qquad (3.1)$$

Соответствующие скорости и ускорения:

$$u = (\partial x / \partial t)_0, v = (\partial y / \partial t)_0, \quad w = (\partial z / \partial t)_0; \qquad (3.2)$$

$$a_x = (\partial^2 x / \partial t^2)_0, \; a_y = (\partial^2 y / \partial t^2)_0, \; a_z = (\partial^2 z / \partial t^2)_0 \; . \qquad (3.3)$$

При этом необходимо сохранять неизменным начальные координаты a, b, c.

Такое описание весьма удобно в теоретических исследованиях, связанных с обоснованием и развитием принципов механики. Однако в инженерной практике оно практически не используется в силу крайней громоздкости при решении конкретных задач.

При пространственном описании внимание сосредоточено на области пространства, занимаемой потоком жидкости в данный момент. Это описание, введенное Даламбером, в гидродинамике называется эйлеровым. При этом наблюдают за тем, что происходит в фиксированной области пространства по мере того, как идет время. Это описание представляется идеально подходящим для изучения жидкостей и газов, где зачастую быстро деформирующая масса приходит неизвестно откуда

в рассматриваемый объём и уходит неизвестно куда, так что предпочтительнее рассматривать то, что происходить в этом объёме.

Таким образом, в эйлеровом описании в качестве независимых переменных используются координаты точки x, y, z и времени t.

Основное различие между двумя способами описания состоит в том, что в лагранжевом описании координаты частиц представляются как функции времени, в то время как в эйлеровом описании скорости потока в различных точках определяются как функции времени. Поэтому в эйлеровом описании координаты x, y, z являются независимыми переменными, в то время как в лагранжевом описании они взаимозависимы.

Эйлерово поле скорости выражается в виде

$$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \qquad (3.4)$$

где

$$u = f_1(x,y,z,t); \quad v = f_2(x,y,z,t), \quad w = f_3(x,y,z,t);$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы, направленные вдоль осей x, y, z.

Любое изменение компонент скорости в окрестности некоторой точки определяется всеми четырьмя аргументами: x, y, z и t. Так, например, изменение x-компоненты скорости по правилу дифференцирования функции многих аргументов будет:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

поскольку данная частица смешается на небольшое расстояние в окрестности указанной точки за время dt.

Компоненты перемещений не являются независимыми и равны: $dx = udt, \quad dy = vdt, \quad dz = wdt$.

Подставляя эти величины в вышеприведенное выражение, получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \tag{3.5}$$

Это уравнение является полной или субстанциональной производной, представляющей быстроту изменения скорости частицы жидкости, занимающей определенную точку в пространстве в определенный момент времени.

Можно выделить локальное изменение скорости как функцию времени $\partial u / \partial t$ и её конвективное изменение, связанное с движением частицы в пространстве $u(\partial u / \partial x) + v(\partial u / \partial y) + w(\partial u / \partial z)$.

Любые другие свойства жидкости или её движения могут рассматриваться подобным же образом. Так, быстрота изменения плотности частицы сжимаемой жидкости

$$d\rho / dt = \partial\rho / \partial t + u(\partial\rho / \partial x) + v(\partial\rho / \partial y) + w(\partial\rho / \partial z).$$

Подобные соотношения определяют компоненты ускорения, соответствующие координатным осям:

$$a_x = du / dt = \partial u / \partial t + u(\partial u / \partial x) + v(\partial u / \partial y) + w(\partial u / \partial z);$$

$$a_y = dv / dt = \partial v / \partial t + u(\partial v / \partial x) + v(\partial v / \partial y) + w(\partial v / \partial z);$$

$$a_z = dw / dt = \partial w / \partial t + u(\partial w / \partial x) + v(\partial w / \partial y) + w(\partial w / \partial z);$$

В векторной форме имеем

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Если все локальные ускорения равны нулю, движение является стационарным. Скорость может изменяться от точки к точке пространства, но в фиксированной точке она постоянна во времени.

Если все конвективные ускорения равны нулю, движение является равномерным.

2. Линии тока и траектории.

Линия тока есть воображаемая линия, являющаяся геометрическим местом точек, в которых векторы скорости в данный момент времени направлены по касательной к этой линии, поэтому линии тока указывают направление движения в каждой точке вдоль линии в данный момент времени (рис. 3.1,а).

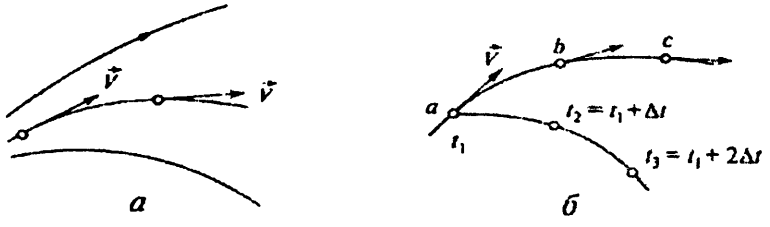


Рис.3.1. Линии тока и траектории: а – мгновенная линия тока; б – траектория частицы

Трубка тока, или элементарная струйка, есть малая воображаемая трубка или канал, ограниченный линиями

тока. При стационарном движении линии тока остаются неподвижными по отношению к системе отсчета. Для такого движения они представляют собой траектории движущихся частиц. При нестационарном движении частицы не будут оставаться на одних и тех же линиях тока, и, следовательно, траектории и линии тока в этом случае не совпадают. На рис.3.1, б для нестационарного течения показаны линии тока и траектория. На схеме приведены векторы скорости для частиц a, b, c, лежащих на линии тока в момент времени t_1, последовательные положения частицы a на ее траектории в моменты времени t_2 и t_3.

Траектории удобно определять по распределению скорости, так как скорость – производная во времени от координат. Параметрические уравнения траектории частицы являются решениями системы дифференциальных уравнений $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ или $dx/dt = u, \quad dy/dt = v, \quad dz/dt = w$, где $\vec{dr} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки на траектории.

В случае плоского двухмерного течения можно получить дифференциальное уравнение линии тока, написав, что при течении в плоскости xy $u = dx/dt, \quad v = dy/dt,$ откуда следует, что $dx/u = dy/v.$

Для трехмерного поля течения система уравнений линии тока в декартовых координатах имеет вид $dx/u = dy/v = dz/w$ или

$$vdx = udy, \quad wdx = udz, \quad wdy = vdz. \qquad (3.6)$$

Как следует из определения, линия тока есть такая линия, в каждой точке которой нормальная составляющая скорости равна нулю, т.е. через линию тока нет перетекания. Таким образом, между двумя произвольными линиями тока количество протекающей жидкости постоянно. Поэтому для несжимаемой жидкости в местах, где линии тока сближаются, скорость увеличивается и, наоборот, там, где они расходятся, скорость уменьшается.

В общем случае через любую точку движущейся среды в данный момент времени можно провести лишь одну линию тока. Однако в некоторых особых точках это правило нарушается. Существуют два типа особых точек: критические и источники (стоки). В них линии тока пересекаются, следовательно, вектор скорости должен иметь разные направления, что при конечном значении скорости невозможно. Поэтому в особых точках величина скорости либо равна нулю (критические точки), либо бесконечности (источники и стоки).

Важную роль в кинематике жидкости и газа играет понятие «поток вектора скорости» Q – интеграл по поверхности S, ограничивающей объем жидкости, от произведения вектора скорости на нормаль к данной поверхности в каждой точке, т.е.

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = \int_S v_n dS = \int_S (ududz + vdxdz + wdxdy)$$

Поток вектора скорости физически представляет собой объёмный секундный расход жидкости (газа) через поверхность S. Размерность потока вектора скорости $[Q] = [v] \cdot [S] = м^3./с.$

Если поверхность S замкнута, то при отсутствии внутри поверхности источников и стоков поток вектора скорости

$$Q = \oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

3. Уравнение неразрывности

Принцип сохранения массы жидкости для любой определенной системы следующий:

чистый приток массы жидкости в систему = приращению массы жидкости системы.

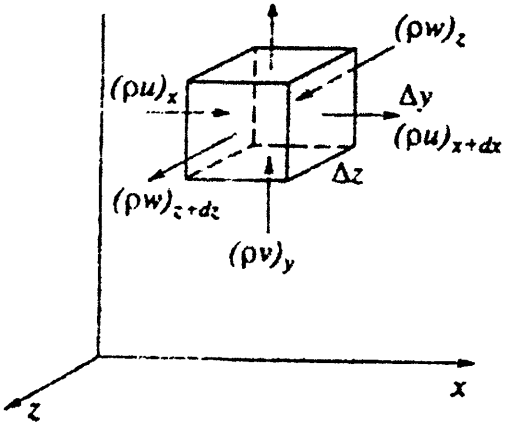


Рис. 3.2. Схема элементарного параллелепипеда для вывода уравнения неразрывности

Рассмотрим элементарный контрольный объём $\Delta x \Delta y \Delta z$ в форме параллелепипеда внутри некоторой области течения, в которой отсутствуют источники (стоки) массы, а плотность и скорость являются функциями пространственных координат и времени (рис.3.2). Вычислим чистый приток массы в этот объём.

По определению, поток массы равен произведению массовой скорости на сечение площадки, нормальной к скорости.

Тогда в выделенный объём втекает следующее количество жидкости:

$$(\rho u)_x \Delta y \Delta z + (\rho v)_y \Delta y \Delta z + (\rho w)_z \Delta y \Delta z,$$

а вытекает

$$(\rho u)_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z + (\rho v)_{y+\Delta y} \Delta y \Delta z + (\rho w)_{z+\Delta z} \Delta y \Delta z,$$

Таким образом, изменение массы жидкости в объёме параллелепипеда составляет

$$(\rho u)_x \Delta y \Delta z + (\rho v)_y \Delta y \Delta z + (\rho w)_z \Delta y \Delta z - \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\Delta x\right]_x \Delta y \Delta z -$$

$$- \left[\rho v - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\Delta y\right]_y \Delta x \Delta z - \left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\Delta z\right]_z \Delta x \Delta y = \qquad (3.7)$$

$$= - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

Здесь использовано разложение потока вытекающей массы в ряд Тейлора с точностью до линейных слагаемых, когда

$$(\rho u)_{x+\Delta x} = (\rho u)_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\Delta x.$$

Приращение массы жидкости в выделенном объёме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \, \Delta x \Delta y \Delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z. \qquad (3.8)$$

Здесь $\Delta x \Delta y \Delta z$ не зависит от времени, так как контрольный объём неподвижен. Приравняв уравнения (3.7) и (3.8), после сокращения на $\Delta x \Delta y \Delta z$ получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \qquad (3.9)$$

или $(\partial\rho / \partial t) + \nabla(\rho \vec{v}) = 0.$

Произведение оператора ∇ на вектор массовой скорости $\rho \vec{v}$ есть величина скалярная, и называется дивергенцией скорости $div(\rho \vec{v})$.. Она характеризует скорость относительного изменения элементарной массы жидкости, т.е. равна отношению массового расхода жидкости через поверхность S объёма V к величине этого объёма при стремлении последнего к нулю.

Используя правило дифференцирования произведения и, учитывая, что

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}\, grad\rho,$$

уравнение (3.9) можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div(\vec{v}) = 0. \qquad (3.10)$$

Если ρ не зависит от времени, то $\partial\rho / \partial t = 0,$ и вместо уравнения (3.10) имеем

$$div(\rho \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \qquad (3.11)$$

Такое движение называют изохорическим. Если ρ не зависит и от координат, то

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad (3.12)$$

Это обычная форма уравнений неразрывности для установившихся и неустановившихся течений несжимаемой жидкости.

4. Функции тока для двухмерных течений несжимаемой жидкости.

Легко заметить, что уравнение неразрывности содержит четыре неизвестных: плотность ρ и три компоненты скорости u, v, w. Следовательно, одного уравнения неразрывности для описания течения недостаточно. Однако в случаях, когда течение жидкости может рассматриваться как двухмерное, на основе уравнения неразрывности может быть установлена интересная и полезная связь между расположением линий тока и распределением скоростей в поле течения

Ограничимся случаем несжимаемой жидкости. Для плоскопараллельного течения уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{3.13}$$

Введем функцию тока $\phi(x,y)$, записав

$$u=\frac{\partial \varphi}{\partial y};\quad v=-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\ . \tag{3.14}$$

Тогда уравнение (3.13) тождественно удовлетворяется, так как

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0\ . \tag{3.15}$$

Уравнение линии тока для плоскопараллельного течения имеет вид

$$udy-vdx=0..$$

Используя выражения (3.14) находим, что вдоль линии тока

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx=d\varphi=0.$$

Поскольку дифференциал $d\varphi = 0$, то вдоль линии тока $\varphi = const$.

5. Вихревое и безвихревое движения.

Рассмотрим вращение элементарного объёма жидкости, вызванное деформациями, возникающими в процессе движения, под действием приложенных сил.

Угловая скорость вращения элемента жидкости $\Delta x \Delta y$ относительно оси z может быть выражена через компоненты скорости u, v и их производные по x и y, как показано на рис. 3.3.

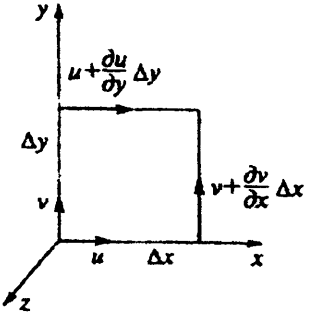


Рис. 3.3. Схема для расчета вращения элементарного объёма.

Считая положительным по знаку, вращение против часовой, находим, что скорость вращения для стороны Δx равна

$$\frac{v + (\partial v / \partial x)\Delta x - v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Для стороны Δy (вращение по часовой стрелке)

$$\frac{-[u+(\partial u/\partial y)\Delta y-u]}{\Delta y}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Полная угловая скорость вращения элемента жидкости относительно оси z является средним арифметическим скоростей вращения его сторон $\Delta x,\ \Delta y$, т.е.

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right].$$

Подобным же образом найдём

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right];\qquad \omega_y=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right].$$

Результирующий вектор угловой скорости вращения

$$\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\vec{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]= \qquad (3.16)$$

$$=\frac{1}{2}rot\,\vec{v}=\frac{1}{2}\nabla\times\vec{v}$$

называется вектором вихря скорости. Он характеризует вращение элементарного объёма среды как абсолютного твердого тела с угловой скоростью

$$\left|\vec{\omega}\right| = \left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.17)$$

Такое движение называется вихревым. Вектор $\vec{rot}\, v$, вдвое больший вектора вихря скорости, называется вектором завихренности или просто завихренностью ξ.

Если завихренность обращается в нуль во всех точках потока, то поле скоростей движущейся среды и само течение называют безвихревым. Поскольку вектор равен нулю в том случае, когда равны нулю все его компоненты, математическим выражением отсутствия (3.26)
завихренности движения будут соотношения $\vec{rot}\, v = 0$.

В декартовой системе координат они имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}; \qquad (3.18)$$

(3.27)

6. Потенциал скорости и его связь с функцией тока

Ранее безвихревое течение было определено как движение, в котором компоненты угловой скорости равны нулю, поэтому $\vec{rot}\, v = \nabla \times \vec{v} = 0$ и справедливы равенства (3.18).

С другой стороны, если $\phi(x, y, z, t)$ является (3.28)
некоторой скалярной функцией, имеющей непрерывные первую и вторую производные, то из векторного анализа известно, что $rot(grad\phi) = \nabla \times (\nabla\phi) \equiv 0$. В этом можно убедиться, если проделать необходимые операции дифференцирования. Поэтому при безвихревом движении

должна существовать скалярная функция ϕ, градиент которой равен вектору скорости $\vec{v}$. Принято считать положительным то направление течения, в котором эта скалярная функция уменьшается:

$$\vec{v} = -\nabla\phi(x, y, z, t). \qquad (3.19)$$

Поскольку отрицательный градиент ϕ равен вектору скорости, функция ϕ называется потенциалом скорости, а безвихревое течение часто потенциальным течением. В состоянии безвихревого движения могут быть, как сжимаемы, так и несжимаемые жидкости, и функция потенциала скорости будет существовать в каждом из этих случаев.

Для течения несжимаемой жидкости, согласно уравнению неразрывности,

$$\nabla\vec{v} = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0.$$

Следовательно,

$$\nabla(-\nabla\phi) = -\nabla(\nabla\phi) = -\nabla^2\phi = 0. \qquad (3.20)$$

Полученное уравнение является уравнением Лапласа, дифференциальный оператор ∇^2 называется лапласианом и в декартовых координатах имеет вид

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0; \qquad (3.21)$$

Для двухмерного безвихревого течения несжимаемой жидкости потенциал скорости ϕ и функция тока φ находятся в определенной связи. Представляя выражение (3.19) в проекциях на оси декартовых координат, находим

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}. \tag{3.22}$$

Принимая во внимание выражения (3.14), получаем

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{3.23}$$

Эти уравнения известны как условия Коши – Римана. Подставив их в уравнение, выражающее отсутствие завихренности $rot\,\vec{v} = 0$, или для случая двухмерного движения $\partial u / \partial y - \partial v / \partial x = 0$, находим, что $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$, т.е. функция тока также удовлетворяет уравнению Лапласа.

7. Вихревое поле и его свойства

Состояние движения жидкости называется вихревым, если существуют области, в точках которых вихрь скорости отличен от нуля. Введем в дальнейшем для краткости обозначение $rot\,\vec{v} = \Omega$, так что

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x},$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{3.24}$$

Считая, что точки, в которых вектор Ω отличен от нуля, сплошным образом заполняют некоторый объём, мы получаем таким образом возможность рассмотреть новое векторное поле – поле вихрей скорости, подобно тому как было рассмотрено поле скоростей.

Это поле вихрей является соленоидальным полем, т.е. в каждой точке поля расхождение вихря равно нулю:

$$div\Omega = 0, \tag{3.25}$$

или

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} = 0, \tag{3.26}$$

в чём убеждаемся непосредственным вычислением.

Из (3.25) на основании теоремы Гаусса вытекает, что поток вихря сквозь замкнутую поверхность равен нулю.

$$\int_S \Omega_n ds = 0. \tag{3.27}$$

Проведём в поле вихрей векторные линии, в каждой точке которых касательная совпадает с направлением вектора вихря; эти линии носят название вихревых линий.

Через каждую точку поля будет, вообще говоря проходить одна вихревая линия, дифференциальное уравнение которой будет

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z} \tag{3.28}$$

Взяв в вихревом поле малый замкнутый контур и проведя через каждую точку последнего вихревую линию, мы получим трубчатую поверхность, которая именуется вихревой трубкой (рис.3. 4);

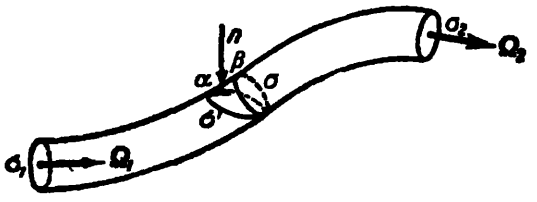


Рис. 3.4

применяя формулу (3.27) к замкнутой поверхности, образованной самой вихревой трубкой и двумя любыми нормальными её сечениями с площадями σ_1 и σ_2, мы получаем соотношение

$$\Omega_1 \cdot \sigma_1 = \Omega_2 \cdot \sigma_2 \qquad (3.29)$$

так как для элементарной площадки σ_1 будет $\Omega_n = \Omega_1$, для площадки σ_2 будет $\Omega_n = -\Omega_2$ и для поверхности самой трубки $\Omega_n = 0$. Произведение $\Omega \cdot \sigma$ из величины вихря на площадь нормального сечения носит название интенсивности вихревой трубки или, проще интенсивности вихря, и соотношение (3.29) показывает, что интенсивность вихря остается постоянной вдоль вихревой трубки. Разобьём все поле вихрей на вихревые трубки определенной интенсивности, например единичные; тогда мы вправе заключить, что внутри жидкости вихревые трубки не могут начинаться или прерываться, ибо формула (3.27) выражает, что число входящих в любую замкнутую поверхность трубок равно числу выходящих из поверхности трубок. Вихревые трубки могут или начинаться и заканчиваться у границы

жидкости, или же замыкаться сами на себя, образуя кольцеобразную поверхность.

8. Упражнения

1. Вычислить гидравлический радиус для живых сечений на рис.3.5. а-д.

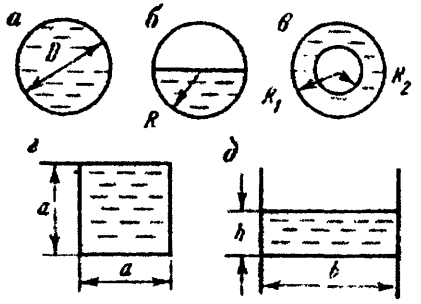


Рис.3. 5.

Ответ: а) D/4; б) R/2; в) $(R_1 + R_2)/2$; г) a/4; д) bh/(b+2h).

2. Жидкость течет по конической трубе кругового сечения. При $x = 0$ радиус трубы $R_1 = 0{,}1м$, а при $x = l$ $R_2 = 0{,}2м$. Расход жидкости $Q = 0{,}01м^3/с$.

Определить зависимость средней скорости v от x и построить линии тока и живые сечения.

Ответ: $v = 1/[\pi(1+x)^2]$; линии тока – радиусы с центром в точке x=-1м, живые сечения – участки сфер, ограниченные конусом, и с центром в той же точке.

3. По трубопроводу диаметром $d = 0{,}15$ м перекачивается нефть плотностью $\rho = 950 кг/м^3$ в количестве $1500 т/сут$.

Определить объёмный расход Q и среднюю скорость течения v.

Ответ: $Q = 0{,}0183 м^3/с, \quad v = 1{,}03 м/с.$

4. Жидкость вращается вокруг оси Oz как твердое тело с угловой скоростью ω. Определить поле вихрей скорости.

Ответ: Вихревые линии представляют собой прямые, параллельные оси Oz; величина вихря во всех точках одинакова: $\Omega = 2\omega$

5. Определить поле вихрей скорости при сдвиге, принимая координатную плоскость Oxz и считая, что скорости точек жидкости паралельны оси Ox, так что

$$v_x = cy, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Ответ: Все вихревые линии суть прямые, параллельные оси Oz; величина вихря во всех точках одинакова: $\Omega = c$

6. Скорости частиц жидкости пропорциональны расстояниям частиц от оси Ox и параллельны последней, так что

$$v_x = c(y^2 + z^2)^{1/2}, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Определить поле вихрей скорости.

Ответ: Вихревые линии суть окружности $y^2 + z^2 = const$, $x = const$; величина вихря во всех точках одинакова: $\Omega = c$.

Глава IV
Основные уравнения динамики идеальной жидкости

1. Силы массовые и поверхностные

Выделим в жидкости некоторый объём τ, ограниченный замкнутой поверхностью S (рис. 4.1). Силы, приложенные к выделенному объёму жидкости, можно разбить на два класса.

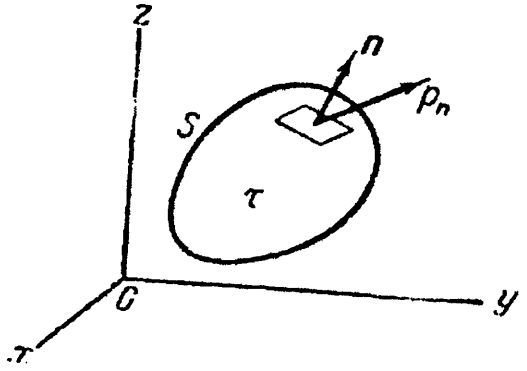


Рис. 4.1. Схема действия поверхностных сил на выделенный объём жидкости.

К одному классу мы отнесём силы, действующие на каждый элемент объёма $d\tau$ независимо от того, существуют или нет рядом с объёмом $d\tau$ другие части жидкости. Эти силы мы назовем массовыми или объёмными. Если назвать через $\vec{F}$ вектор массовой силы, отнесённый к единице массы, то к элементу объёма $d\tau$ жидкости, плотность которой ρ, будет приложена массовая сила $\vec{F}\rho d\tau$; главный вектор массовых сил,

приложенных ко всему объёму τ, выразится векторным интегралом

$$\int_{\tau} \vec{F} \rho \, d\tau ,$$

распространенным по объему τ, а проекции главного вектора на оси декартовых координат Ox, Oy, Oz будут соответственно:

$$\int_{\tau} X\rho \, d\tau, \quad \int_{\tau} Y\rho \, d\tau, \quad \int_{\tau} Z\rho \, d\tau \quad ,$$

где $X, Y\ Z$ суть проекции вектора $\vec{F}$.

Главный момент массовых сил, приложенных к объёму τ, относительно начала координат выразится векторным интегралом

$$\int_{\tau} (\vec{r} \times \vec{F}) \rho \, d\tau ,$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор частицы $d\tau$; проекциями главного момента на координатные оси будут соответственно служить интегралы:

$$\int_{\tau} (yZ - zY)\rho \, d\tau, \quad \int_{\tau} (zX - xZ)\rho \, d\tau, \quad \int_{\tau} (xY - yX)\rho \, d\tau .$$

Примером массовой силы является сила тяжести, сила инерции и др.

К другому классу сил, действующих на рассматриваемый объём τ, мы отнесём силы взаимодействия между различными частицами жидкости.

В силу принципа равенства действия и противодействия произойдет уравновешивание сил взаимодействия между всеми внутренними частицами объёма τ, лежащими внутри поверхности S. Поэтому (3.5) могут остаться неуравновешенными только силы взаимодействия, исходящие от частиц, лежащих снаружи

поверхности S и, приложенные к поверхностным частицам объёма τ; такие силы называют поверхностными.

Если через $\vec{p}_n$ обозначить вектор поверхностной силы, отнесенной к единице площади, то на элементарный dS поверхности S будет приложена к объему τ исходящая от внешних частиц сила $\vec{p}_n dS$; значок n указывает на то, что вектор $\vec{p}_n$ зависит от ориентировки площадки dS, т.е. от направления внешней нормали (рис.4.1);

Главный вектор и главный момент поверхностных сил, приложенных к объему τ, выразится интегралами

$$\int_S \vec{p}_n dS \quad \text{и} \quad \int_S (\vec{r} \times \vec{p}_n) dS,$$

распространенными по всей замкнутой поверхности S.

2. Общее уравнение движения

Применим начало Даламбера, гласящее; что в каждый момент движения любой материальной системы все силы, приложенные к ней, включая и силы инерции, взаимно уравновешиваются; тогда

$$\int_\tau (\vec{F} - \vec{w}) \rho \, d\tau + \int_S \vec{p}_n dS = 0, \qquad (4.1)$$

где $\vec{w}$ есть ускорение элемента $d\tau$; при этом - $\int \vec{w} \rho \, d\tau$ выражает главный вектор сил инерции.

3. Гидродинамическое давление в идеальной жидкости

В идеальной жидкости не проявляются силы трения, и нормальное малейшее растяжение влечет разрыв сплошности жидкости; следовательно, поверхностные силы, приложенные к элементам поверхности dS объёма τ идеальной жидкости, представляют собою нормальные давления, направленные внутрь объёма; иначе говоря, вектор $\vec{p}_n$ направлен по внутренней нормали к элементу dS.

Покажем, что для идеальной жидкости величина $\vec{p}_n$ этого вектора не зависит от ориентировки площадки dS. Для этого рассмотрим в жидкости элементарный объём тетраэдра KABC (рис. 4.2), три грани которого KBC, KAC и KAB параллельны кооординатным плоскостям, так что внешние нормали к этим граням направлены соответственно противоположно осям Ox, Oy и Oz; обозначим далее через α, β, γ косинусы углов, образованных с осями координат внешней нормалью Dn к четвертой наклонной грани ABC; пусть, наконец, площадь грани ABC есть dS, тогда площади граней KBC, KAC и KAB, являясь проекциями, будут соответственно $\alpha\, dS, \beta\, dS, \gamma\, dS$.

Применяя уравнение (4.1) к объёму тетраэдра, имеем:

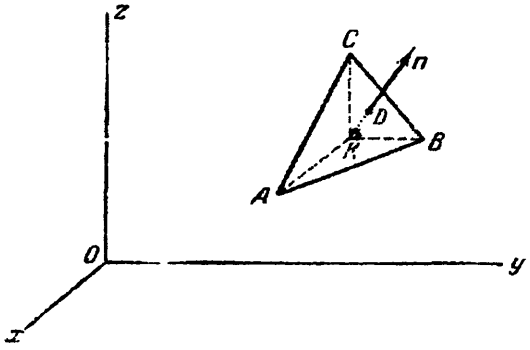


Рис. 4.2. Схема действия поверхностной силы на рассматриваемый элементарный объём тетраэдра.

$$(\vec{F}-\vec{w})\cdot\rho d\tau+\vec{p}_{-x}\alpha dS+\vec{p}_{-y}\beta dS+\vec{p}_{-z}\gamma dS+\vec{p}_n dS=0. \qquad (4.2)$$

Можно произвести замену

$$p_{-x}=-p_x;\quad p_{-y}=-p_y;\quad p_{-z}=-p_z;$$

обозначая затем через h высоту тетраэдра, получим:

$$d\tau=\frac{1}{3}hdS,$$

и таким образом уравнение (4.2) по сокращении на dS примет вид

$$\frac{1}{3}(\vec{F}-\vec{w})\rho h-\alpha\vec{p}_x-\beta\vec{p}_y-\gamma\vec{p}_z+\vec{p}_n=0,$$

откуда, переходя к пределу, при $h\to 0$, мы приходим к основному свойству поверхностных сил:

$$\vec{p}_n=\alpha\vec{p}_x+\beta\vec{p}_y+\gamma\vec{p}_z, \qquad (4.3)$$

показывающему, что вектор $\vec{p}_n$ при произвольной ориентировке внешней нормали n может быть определен,

коль скоро заданы три основных вектора p_x, p_y, p_z, выражающих поверхностные силы для площадок, внешние нормали которых параллельны и одинаково направлены с осями Ox, Oy, Oz. Свойство, выражаемое формулой (4.3), показывает, что совокупность векторов p_n, получаемая при всевозможных ориентировках площадок, образует тензор; он называется тензором упругих напряжений.

Применим теперь формулу (4.3), справедливую для любой жидкости к случаю идеальной жидкости. В этом случае векторы p_n, p_x, p_y, p_z будут направлены противоположно внешним нормалям Dn, Ox, Oy, Oz и, проектируя (4.3) последовательно на Ox, Oy, Oz, получим:

$$-p_n\alpha = -\alpha p_x; \quad -p_n\beta = -\beta p_y; \quad -p_n\gamma = -\gamma p_z,$$

откуда

$$p_n = p_x = p_y = p_z, \tag{4.4}$$

т.е. величина нормального давления для идеальной жидкости не зависит от ориентировки площадки, к которой оно приложено. Вследствие этого можно отбросить значок в обозначении, не указывая ориентировки и помня, что гидродинамическое давление направлено по внутренней нормали к площадке.

4. Общие уравнения движения идеальной жидкости

Уравнение (4.1) для случая идеальной жидкости принимает вид:

$$\int_\tau (\vec{F} - \vec{w})\rho \, d\tau + \int_S \vec{p} \, dS = 0, \tag{4.5}$$

причем вектор гидродинамического давления p направлен по внутренней нормали к поверхности S. Вводя в

рассмотрение орт n внешней нормали, имеем: $\vec{p} = -p \cdot \vec{n}$, и предыдущее уравнение принимает вид:

$$\int_{\tau} (\vec{F} - \vec{w}) \rho \, d\tau - \int_{S} p \vec{n} \, dS = 0 \qquad (4.6)$$

Применяя к последнему интегралу преобразование Гаусса, получаем

$$\int_{\tau} [(\vec{F} - \vec{w}) \rho - grad p] d\tau = 0 .$$

В силу произвольности рассматриваемого объёма τ подынтегральное выражение должно быть равно нулю в каждой точке жидкости и в любой момент движения. Таким образом, приходим к основному уравнению движения идеальной жидкости:

$$(\vec{F} - \vec{w}) \rho - \frac{1}{\rho} grad p = 0 . \qquad (4.7)$$

или в проекциях:

$$\begin{cases} Z - w_z - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0; \quad X - w_x - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0; \\ Y - w_y - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0; \end{cases} \qquad (4.8)$$

5. Уравнения движения в форме Эйлера

Выражая проекции ускорения в переменных Эйлера по кинематическим формулам:

$$w_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z ,$$

$$w_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_8}{\partial z} v_z,$$

$$w_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z,$$

и разрешая уравнения (4.8) относительно w_x, w_y, w_z, мы получаем так называемые гидродинамические уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \quad (4.9)$$

6. Общая постановка задач физики жидкости и газа.

Рассмотрим жидкость, как совокупность материальных частиц, (сплошным образом заполняющих пространство или его часть), между которыми появляются внутренние силы взаимодействия, выражающиеся в идеальной жидкости при посредстве гидродинамического давления.

Общую постановку задач физики жидкости и газа можно формулировать следующим образом: определить под действием заданных внешних сил движение каждой частицы и внутренние силы, т.е. гидродинамическое давление в каждой точке жидкости и в каждый момент движения.

Рассмотрим отдельно случаи несжимаемой и сжимаемой жидкости, считая в обоих случаях жидкость идеальной и для простоты однородной.

7. Случай несжимаемой жидкости

В несжимаемой жидкости плотность ρ есть некоторая постоянная, служащая физической характеристикой данного сорта жидкости и считается известной. Взяв уравнения Эйлера, мы видим, что в них неизвестными величинами являются четыре: v_x, v_y, v_z, p из системы четырех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_x}{\partial z}v_z=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial v_y}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_y}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_y}{\partial z}v_z=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{\partial v_z}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_z}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_z}{\partial z}v_z=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.\\
&\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.
\end{aligned} \qquad (4.10)$$

Если эту систему удается проинтегрировать, то будут определены векторное поле и скалярное поле давления для каждого момента времени, т.е. будут найдены функции:

$$p=f(x,y,z,t),\quad v_x=f_1(x,y,z,t),\quad v_y=f_2(x,y,z,t),\quad v_z=f_3(x,y,z,t),$$

удовлетворяющие системе (4.10). Чтобы довести задачу до конца и определить уравнения движения каждой частицы, т.е. зависимости координат частицы x, y, z от времени t и

начальных значений координат x_0, y_0, z_0, остается проинтегрировать еще систему трех уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y,z,t), \frac{dy}{dt} = f_2(x,y,z,t), \frac{dz}{dt} = f_3(x,y,z,t) \qquad (4.11)$$

8. Случай сжимаемой жидкости. Баротропность и бароклинность. Уравнение притока энергии

Переходим к задаче определения движения сжимаемой жидкости. Математически простейшим будет тот частный случай, когда во всем движении плотность есть заранее известная функция от давления

$$\rho = \Phi(p). \qquad (4.12)$$

Среды, в которых плотность есть функция одного давления, носят название баротропных. Для баротропных жидкостей уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

и первые три уравнения движения (4.10) замыкаются в том смысле, что эти четыре уравнения содержат как раз четыре искомые функции, ибо, пользуясь (4.12) можно исключить ρ, оставив в качестве неизвестных v_x, v_y v_z и p.

Простейшим примером закона для $\Phi(\rho)$ будет

$$\Phi(\rho) = const\ .$$

Это – случай несжимаемой жидкости.

Движения, для которых $\Phi(p) = Cp$, где C – постоянная, называются изотермическими.

Если $\Phi(p) = Cp^n$, где C и n - постоянные, то говорят о политропических процессах, причем величина $1/n$ называется показателем политропы. Таковы

простейшие и притом наиболее употребительные виды функций $\Phi(p)$ для баротропной жидкости.

Среды, в которых плотность не есть функция одного только давления, т.е. для которых нельзя подобрать никакой функции $\Phi(p)$, такой, что имеет место (4.12), носят название бароклинных. Здесь плотность ρ является пятой неизвестной функцией, подлежащей определению и поэтому четырех наших уравнений (уравнение неразрывности и три уравнения движения) недостаточно для решения задачи. Для исследования движения в общем случае бароклинной сжимаемой жидкости оказывается необходимым учет нового фактора – притока энергии. Это обстоятельство вводит в рассмотрение две новые величины: температуру (абсолютную) жидкости T и так называемую плотность тепловой мощности притока энергии ε , т.е. количество энергии, получаемое единицей объема жидкости в единицу времени. Уравнение притока энергии имеет вид

$$\varepsilon = c_v \rho \frac{dT}{dt} - A \cdot \frac{p}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt}, \qquad (4.13)$$

Здесь c_v - теплоемкость при постоянном объеме, A - термический эквивалент работы ($A = 1/E$, где E - механический эквивалент тепла).

Кроме уравнения (4.13), мы должны еще написать соотношение, связывающее p, ρ и T. Для совершенных газов таким соотношением является уравнение Клайперона

$$p = R\rho T, \qquad (4.14)$$

где R - газовая постоянная.

Таким образом, имеем шесть уравнений: уравнение неразрывности, три уравнения движения, уравнение притока энергии и уравнение состояния (4.14). Эти уравнения содержат как раз шесть неизвестных функциий:

$v_x, v_y, v_z, p, \rho, T$. К сожалению в (4.13) входит еще величина ε, которую не всегда можно считать известной. Простейшим и важным случаем будет отсутствие притока тепла извне, т.е. случай, когда

$$\varepsilon \equiv 0. \tag{4.15}$$

В данном случае можно, сначала используя (4.14), написать (4.13) в виде

$$0 = c_v \frac{1}{T}\frac{dT}{dt} - RA \cdot \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt},$$

а затем, пользуясь еще раз (4.14), исключить T. В результате получим:

$$0 = c_v\left(\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right) - A \cdot R\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt},$$

или, собирая члены с p и ρ:

$$0 = c_v \frac{d\ln p}{dt} - (c_v + AR)\frac{d\ln\rho}{dt}.$$

Вспоминая соотношение термодинамики

$$c_p - c_v = AR,$$

где c_p - теплоемкость при постоянном давлении, получим, окончательно для случая $\varepsilon \equiv 0$, уравнение притока энергии в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{p}{\rho^{\chi}} = 0, \tag{4.16}$$

где

$$\chi = \frac{c_p}{c_v} \tag{4.17}$$

Здесь мы имеем дело с так называемым адиабатическим движением. Величина p/ρ^{χ} связана с энтропией S соотношением

$$S = \frac{c_v}{A} \ln \frac{p}{\rho^{\varkappa}} + const. \qquad (4.18)$$

В силу (4.16) энтропия при $\varepsilon \equiv 0$ сохраняется в частице.

9. Упражнения

1. Тяжелая несжимаемая жидкость, налитая в вертикальный цилиндрический круговой сосуд, вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси цилиндра (рис. 4.3).

Определить давление в каждой точке вращающейся жидкости, если известно, что в состоянии покоя жидкость имела уровень h от дна сосуда и что над поверхностью жидкости нет давления.

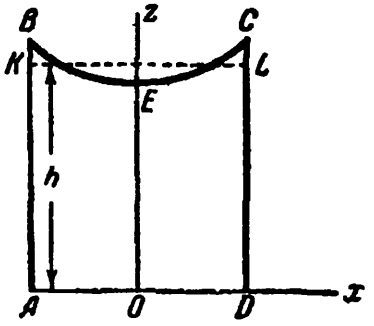


Рис. 4.3

Решение. Приняв ось цилиндра за ось Oz и взяв начало координат у дна, имеем по заданию:

$v_x = -\omega y$, $v_y = -\omega x$, $v_z = 0$, $\rho = const$.

Уравнения Эйлера дают:

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\omega^2 y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

откуда по умножении на dx, dy, dz и сложении получим для dp выражение

$$dp = \omega^2 \rho(xdx + ydy) - \rho g dz$$

или $$dp = d[\frac{1}{2}\omega^2 \rho(x^2 + y^2) - g\rho z]$$

и после интегрирования

$$p = \frac{1}{2}\omega^2 \rho(x^2 + y^2) - g\rho z + C$$

На поверхности жидкости $p = 0$; уравнение поверхности

$$\frac{1}{2}\omega^2 \rho(x^2 + y^2) - g\rho z + C = 0$$

дает параболоид вращения; вводя обозначение $OE = h'$, имеем:

$$C = g\rho h'$$

Для определения h' имеем условие сохранения объема в покое и при вращении

$$\pi a^2 h = \int_0^{2\pi} \int_0^a z r dr d\phi ,$$

где r и ϕ - полярные координаты. Вычисляя, имеем:

$$\pi a^2 h = \int_0^{2\pi} \int_0^a (h' + \frac{\omega^2}{2g} r^2) r dr d\phi \text{ или}$$

$$\pi a^2 h = \pi a^2 (h' + \frac{\omega^2}{4g} a^2),$$

откуда

$$h' = h - \frac{\omega^2}{4g} a^2$$

и давление в любой точке будет

$$p = g\rho(h - z) + \frac{1}{2}\omega^2 \rho[x^2 + y^2 - \frac{1}{2}a^2].$$

2. По условиям предыдущей задачи вычислить полное давление на дно сосуда.

Ответ: $P = \pi g \rho a^2 h$.

3. Убедиться, что при взрыве мины под водой взрывное давление изменяется обратно пропорционально расстоянию от места взрыва.

Глава V
Простейшие случаи движения идеальной жидкости.

1. Установившееся движение

Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости допускают интегралы в двух простейших случаях жидкости: 1 установившегося и 2) безвихревого.

Рассмотрим случай установившегося движения. В этом случае режим движения в каждой точке, занятой жидкостью, не изменяется с течением времени, и поле скоростей, поле вихрей, поле гидродинамических давлений, поле массовых сил суть постоянные, или стационарные. Линия тока при установившемся движении совпадают с траекториями частиц.

Умножая скалярно основное уравнение движения

$$\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} grad\, p$$

на элементарное перемещение жидкой частицы $\vec{v}\,dt$ вдоль линии тока, получаем:

$$\vec{F}\,\vec{v}\,dt - \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}\,dt = \frac{1}{\rho}(grad\, p \cdot \vec{v}\,dt)$$

или

$$Xdx + Ydy + Zdz - d(\frac{1}{2}v^2) = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz).$$

Так как при установившемся движении $\partial p / \partial t = 0$, то выражение

$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$ является полным дифференциалом dp и можно написать

$$X dx + Y dy + Z dz - d(\frac{1}{2}v^2) = dp/\rho .$$

Это уравнение может быть без труда проинтегрировано при соблюдении двух условий: 1) если массовые силы имеют потенциал, который обозначим через V, так что

$X = -\partial V/\partial x$, $Y = -\partial V/\partial y$, $Z = -\partial V/\partial z$,

и 2) если жидкость баротропна. В таком случае имеем:

$$-dV - d(\frac{1}{2}v^2) = dP,$$

где $$P = \int \frac{dp}{\Phi(p)} \qquad (5.1)$$

и все дифференциалы взяты при перемещении вдоль некоторой линии тока, или, иначе

$$d(V + \frac{1}{2}v^2 + P) = 0,$$

откуда получаем так называемый интеграл Бернулли:

$$V + \frac{1}{2}v^2 + P = \Gamma, \qquad (5.2)$$

где Γ есть величина, сохраняющая постоянное значение на данной линии тока, но, вообще говоря, изменяющаяся при переходе от одной линии к другой.

Если массовые силы суть силы тяжести, то, направив ось Oz вертикально вверх, имеем: $V = gz$, и интеграл Бернулли принимает вид

$$g \cdot z + \frac{1}{2}v^2 + P = \Gamma .$$

Для несжимаемой жидкости по формуле (5.1) имеем:

$$P = p/\rho .$$

Разделив на g и вводя обозначение $\gamma = \rho g$ для удельного веса, напишем еще интеграл Бернулли в виде

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \Gamma . \qquad (5.3)$$

В уравнении (5.3) первое слагаемое z выражает высоту рассматриваемой жидкой частицы в данной трубке тока над некоторой горизонтальной поверхностью и называется геометрической высотой. Второе слагаемое $v^2/2g$ выражает высоту, на которую могла бы подняться в пустоте материальная точка, брошенная вверх с начальной скоростью v: это слагаемое называется скоростной высотой. Наконец, третье слагаемое выражает высоту, которую должен иметь покоящийся столб жидкости, чтобы получить давление p у основания столба; это слагаемое называется пьезометрической высотой.

Таким образом, интеграл Бернулли выражает, что при установившемся движении несжимаемой жидкости сумма геометрической, скоростной и пьезометрической высот остается неизменной для частиц одной и той же трубки тока, что может быть еще записано так:

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}, \qquad (5.4)$$

В изотермическом движении

$$P = \int \frac{dp}{Cp} = \frac{1}{C} \ln p,$$

и интеграл Бернулли (5.2) примет вид

$$(4g) z + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{C} \ln p = \Gamma' .$$

2. Безвихревое движение

Если во время движения в каждой точке поля скоростей движущейся жидкости отсутствует вихрь, т.е. $rot\ \vec{v} = 0$,

и, следовательно, скорость является потенциальным вектором $\vec{v} = grad\,\phi$, так что $v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, $v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$, то основное уравнение движения упрощается, принимая вид

$$\frac{\partial grad\,\phi}{\partial t} + grad(\frac{1}{2}v^2) = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\ grad\,p. \qquad (5.5)$$

Так как, очевидно, $\frac{\partial grad\,\phi}{\partial t} = grad(\frac{\partial \phi}{\partial t})$, то из уравнения (5.5) получается

$$\vec{F} = grad(\frac{\partial \phi}{\partial t}) + grad(\frac{1}{2}v^2) + \frac{1}{\rho}grad\,p. \qquad (5.6)$$

Для однородной несжимаемой жидкости будет справедливо очевидное соотношение

$$\frac{1}{\rho}grad\,p = grad(\frac{p}{\rho}), \qquad (5.7)$$

так как ρ постоянна для всех точек поля.

Для сжимаемой жидкости можно установить аналогичное соотношение в том случае, когда жидкость баротропна. В этом случае введем обозначение

$$\frac{dp}{\rho} = dP \text{ или } P = \int\frac{dp}{\rho}, \qquad (5.8)$$

и тогда можно написать:

$$\frac{1}{\rho} grad\, p = gradP, \qquad (5.9)$$

ибо из (5.8) имеем:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}dz + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}dt = \frac{\partial P}{\partial x}dx +$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz + \frac{\partial P}{\partial t}dt$$

Сравнивая коэффициенты при дифференциалах, имеем:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

откуда следует (5.9); соотношение (5.7) является частным случаем (5.9).

Таким образом, для рассматриваемых случаев безвихревого движения уравнение (5.6) примет вид

$$\vec{F} = grad(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + P),$$

т.е. в этих случаях массовые силы должны являться потенциальным вектором. Обозначая потенциал сил через V, $\vec{F} = -gradV$,

мы приведем уравнение движения (5.6) к виду

$$grad(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + V + P) = 0, \qquad (5.10)$$

показывающему, что выражение, заключенное в скобках, не зависит от координат x, y, z и является только функцией времени t:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + V + P = F(t), \qquad (5.11)$$

(6.10) которой остается произвольным. Этот интеграл уравнений движения носит название интеграла Коши. При наличии только сил тяжести $V = gz$

интеграл Коши принимает вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + gz + P = F(t). \qquad (5.12)$$

Для несжимаемой жидкости будет $P = \frac{p}{\rho}$, и интеграл Коши получается в виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = F(t). \qquad (5.13)$$

3. Установившееся безвихревое движение

При установившемся безвихревом движении поле скоростей и поле давлений будут стационарными, поэтому $\partial\phi / \partial t = 0$, произвольная функция $F(t)$ превращается в произвольную постоянную С, и интеграл Коши принимает вид:

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + P = C, \qquad (5.14)$$

где $P = \int \frac{dp}{\rho}$.

В случае несжимаемой жидкости равенство (5.14) перепишется так:

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = C \qquad (5.15)$$

или, по разделению на g:

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = C, \qquad (5.16)$$

мы получим равенство, одинаковое по форме с интегралом Бернулли. Отличие от последнего заключается в том, что постоянная Γ интеграла Бернулли является постоянной лишь для частиц одной и той же линии тока, тогда как в

интеграле установившегося безвихревого движения постоянная C сохраняет одно и то же значение для всех частиц движущейся жидкости. Интеграл вида (5.14), 5.15), (5.16) называется интегралом Бернулли – Эйлера.

4. Ограничения, налагаемые на скорость

Существование интегралов Бернулли, Коши, Бернулли – Эйлера ставит для величины скорости известный предел, превзойти который движущаяся жидкость не может без разрыва сплошности. Рассмотрим, например, установившееся безвихревое движение тяжелой несжимаемой жидкости.

Пусть в некоторой точке поля на высоте z_0 скорость и давление равны соответственно v_0, p_0; тогда интеграл (5.16) примет вид

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = \frac{v_0^2}{2g} + z_0 + \frac{p_0}{\gamma},$$

откуда $$\frac{p}{\gamma} = \frac{v_0^2}{2g} + z_0 + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{v^2}{2g} - z.$$

Последнее соотношение показывает, что величина v не может оказаться чрезмерно большой ни в одной точке жидкости, так как давление p в идеальной жидкости не может быть отрицательным. Например, для точек на той же высоте $z = z_0$ получается неравенство

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{v^2}{2g} \geq 0,$$

откуда находим предел для величины скорости v:

$$v^2 \leq v_0^2 + \frac{2p_0}{\rho}.$$

Если, например, вода, находящаяся в большом сосуде, вытекает в пустоту под действием только атмосферного давления p_0, то на поверхности сосуда можно принять величину v_0 близкой к нулю, и для скорости истечения получается ограничительное условие

$$v^2 \le \frac{2p_0}{\rho}.$$

5. Формула Торричелли

Интеграл Бернулли имеет фундаментальное значение в вопросах гидравлики. Применим его для определения скорости истечения несжимаемой тяжелой жидкости из большого открытого сосуда через малое отверстие. Если обозначить через S площадь свободной поверхности в сосуде, через s - площадь отверстия, через V и v - скорости на поверхности и в отверстии, то уравнение неразрывности дает:

$SV = sv$.

Считая движение установившимся и безвихревым, и применяя интеграл Бенулли-Эйлера, имеем:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 - gz = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}V^2, \qquad (5.17)$$

если начало координат взять на свободной поверхности и ось Oz направить вертикально вниз, так как давление в отверстии на глубине z, где вытекающая жидкость образует также свободную поверхность, будет равно атмосферному давлению p_0. Из равенства (5.17) имеем:

$$v^2 - V^2 = 2gz \text{ или } v^2 - \frac{s^2}{S^2}v^2 = 2gz,$$

откуда $$v^2 = 2gz\frac{1}{1-\left(\frac{s}{S}\right)^2}.$$

Если отношение s/S мало, то, пренебрегая членом $(s/S)^2$, получаем для скорости истечения приближенную формулу Торричелли

$$v = \sqrt{2gz}.$$

6. Истечение газов

Можно получить аналогичную приближенную формулу для оценки скорости истечения газа из большого сосуда через малое отверстие. Пусть давление и плотность газа в сосуде будут p_1, ρ_1, атмосферное давление и плотность воздуха обозначим через p_0, ρ_0. Будем полагать, что размеры сосуда настолько велики, что истечение можно рассматривать как установившееся и притом безвихревое движение и что на достаточном расстоянии внутри сосуда от отверстия можно пренебречь скоростью газа.

Считая, далее, что расширение газа через отверстие происходит адиабатически, пренебрегая силой тяжести и применяя интеграл движния к двум точкам – внутри сосуда, где скорость ничтожна, и к отверстию, имеем:

$$\frac{1}{2}v^2 + \int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{dp}{\rho} = 0, \qquad (5.18)$$

где $p = k\rho^{\chi}$, $\chi = \frac{c_p}{c_v}$.

Из уравнения (5.18) получаем:

$$v^2 = -2k\chi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^{\chi-2} d\rho = \frac{2k\chi}{\chi-1}(\rho_1^{\chi-1} - \rho_0^{\chi-1}) = \frac{2\chi}{\chi-1}\frac{p_1}{\rho_1}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}}\right]$$

7. Зависимость между скоростями в сечениях при истечении газа из тонкой конической трубки

При установившемся истечении газа из тонкой конической трубки траектории частиц представляют собой прямые, сходящиеся в вершине конуса. Предполагая, что движение совершается изотермически, найти соотношение между скоростями V и v в сечениях AB и ab, площади которых суть S и s (рис. 5.1).

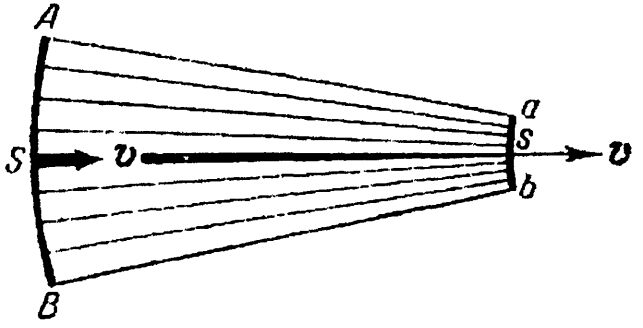


Рис. 5.1. Схема истечения газа из тонкой конической трубки

Решение. Из условия изотермичности имеем:

$$\frac{p}{\rho} = k = const\,.$$

Пренебрегая силой тяжести и применяя интеграл Бернулли – Эйлера

$$\frac{1}{2}v^2 + \int\frac{dp}{\rho} = C$$

к сечениям AB и ab, имеем:

$$\frac{1}{2}V^2 + k\ln P = \frac{1}{2}v^2 + k\ln p,$$

где P и p - давление в этих сечениях.

Условие неразрывности дает:

$$VPS = vps,$$

откуда $\frac{P}{p} = \frac{vs}{VS}$, и интеграл преобразуется к виду

$$k\ln\frac{P}{p} = \frac{v^2 - V^2}{2} \quad \text{или} \quad k\ln\frac{vs}{VS} = \frac{v^2 - V^2}{2},$$

откуда $$\frac{v}{V} = \frac{S}{s}e^{\frac{v^2-V^2}{2k}}.$$

8. Упражнения

1. Определить, пренебрегая потерями напора, скорость течения нефти на расстоянии r от оси трубопровода радиусом R при помощи устройства (трубка Пито), показанного на рис. 5.2. Уровень жидкости в трубке $Ah_1 = 1{,}2$ м, в трубке $Bh_2 = 1{,}35$ м.

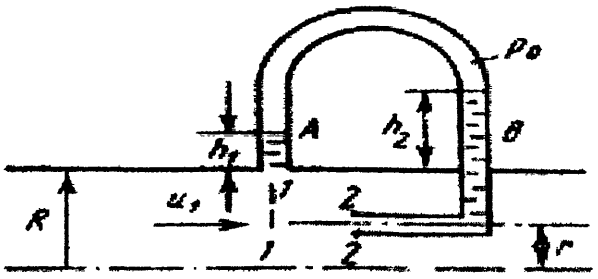


Рис. 5.2.

Решение. Учитывая, что $h_{1-2} = 0$ по условию, из уравнения Бернулли для струйки, проходящей на расстоянии r от оси трубы имеем:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}.$$

Так как трубопровод расположен горизонтально, то $z_1 = z_2$.

Скорость в сечении 2 – 2 $u_2 = 0$, поскольку жидкость в трубе В находится в состоянии покоя. Тогда

$$\frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_2 - p_1}{\rho g}.$$

С учётом того, что давление в трубках и живых сечениях потока распределено по гидростатическому закону, получим:

$$p_1 = p_0 + \rho g(h_1 + R - r),\ p_2 = p_0 + \rho g(h_2 + R - r)$$

и

$$\frac{u_1^2}{2g} = h_2 - h_1,$$

откуда

$$u_1 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8(1{,}35 - 1{,}2)} = 1{,}71 м/с.$$

2. Из открытого резервуара с постоянным уровнем (рис. 5.3) идеальная жидкость по горизонтальной трубе вытекает в атмосферу, $H = 1{,}6м$, $d_1 = 0{,}15м$ $d_2 = 0{,}075м$.

Определить уровень жидкости в пьезометре h.

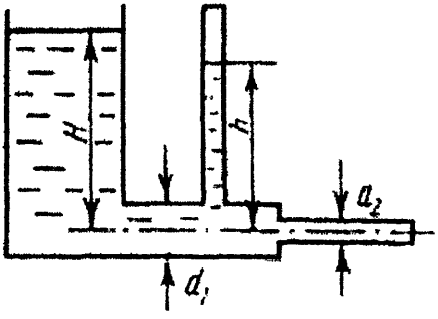


Рис. 5.3.

Ответ: h = 1,5м.

3. По трубопроводу перекачивается нефть плотностью $\rho = 910 кг/м^3$ в количестве $Q = 0{,}04 м^3/с$. Сечение 2 – 2 расположено выше сечения 1 - 1 на 10м.

Диаметры трубы $d_1 = 0{,}3$ м; $d_1 = 0{,}2$ м; давления $p_1 = 1{,}5 МПа$, $p_2 = 1 Мпа$. Определить потерю напора h_{1-2}.

Ответ: h_{1-2}=46,05м.

4. Жидкость из открытого резервуара А (рис. 5.4) перетекает в открытый резервуар В. Разность отметок между свободными поверхностями $h = 2м$.

Определить потери напора на участке между сечениями 1 – 1 и 2 – 2.

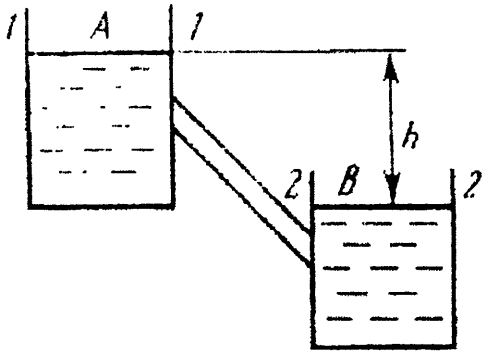


Рис. 5.4.

Ответ: $h_{1-2} = 2м$.

Глава VI
Движение вязкой жидкости

1. Понятие о вязкой жидкости

До сих пор мы рассматривали исключительно движения идеальной жидкости, т.е. предполагали, что поверхностные силы, приложенные к элементам поверхности dS любого объема жидкости, представляют собой нормальные давления, направленные внутрь объема. Однако все действительные жидкости являются в той или иной степени вязкими; иначе говоря, они обладают свойством внутреннего трения.

Для выяснения сущности этого свойства рассмотрим следующий типичный пример. Имеются две параллельные пластинки (рис. 6.1), между которыми находится жидкость. Нижняя пластинка удерживается неподвижной, в то время как верхнюю заставляют двигаться в одном и том же направлении в своей плоскости с постоянной скоростью U.

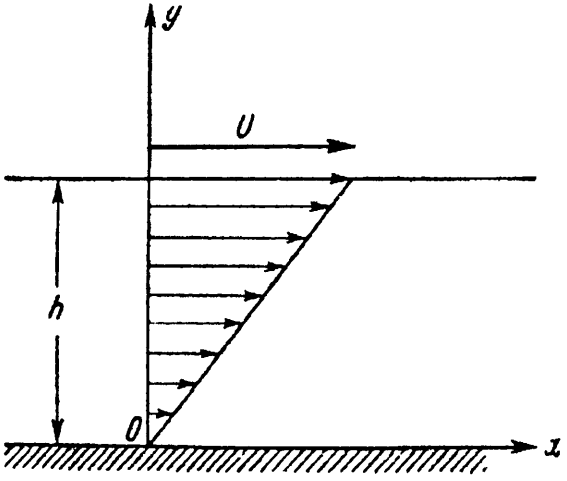


Рис. 6.1. Распределение скорости в вязкой жидкости, находящаяся между двумя параллельными пластинками.

Обозначим расстояние между пластинками через h. Тогда, в конце концов, получим следующую картину движения жидкости. Слой жидкости, непосредственно примыкающий к нижней пластинке, будет находится в покое; слой жидкости, непосредственно примыкающий к верхней пластинке, будет обладать той же самой скоростью U, что и эта пластинка. Наконец, любой промежуточный слой будет двигаться со скоростью v, пропорциональной расстоянию y от неподвижной пластинки:

$$v = U\frac{y}{h}. \qquad (6.1)$$

При этом как к верхней, так и к нижней пластинке необходимо приложить силы, а именно: к верхней пластинке необходимо приложить силу, лежащую в её плоскости и имеющую то же направление, что и направление движения пластинки. К нижней же пластинке необходимо приложить такую же силу, тоже лежащую в её плоскости, но имеющую прямо противоположное направление. Величина, как той, так и другой силы, отнесенная к единице площади, равна

$$\tau = \mu\frac{U}{h}. \qquad (6.2)$$

Коэффициент μ в этой формуле имеет для каждой жидкости при заданной температуре свое значение и называется коэффициентом вязкости.

Формулу (6.2) можно написать и так:

$$\tau = \mu\frac{dv}{dy} \qquad (6.3)$$

Можно дать такое определение: жидкость называется вязкой, если поверхностные силы,

приложенные к элементам поверхности любого объёма жидкости, имеют, вообще говоря, кроме нормальных, еще и касательные составляющие.

2. Тензор скоростей деформации

Рассмотрим какую – либо точку О движущейся среды; скорость этой точки обозначим через v_0. Пусть далее А-бесконечно близкая к О точка (рис.6.2); обозначим через $\vec{r}$ радиус-вектор $\vec{OA}$ и через ξ, η, ζ - проекции этого вектора на прямоугольные оси координат. Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial x}=\varepsilon_1,\quad \frac{\partial v_y}{\partial y}=\varepsilon_2,\ \frac{\partial v_z}{\partial z}=\varepsilon_3,\\
&\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}=\theta_1,\ \frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}=\theta_2,\\
&\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}=\theta_3,\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=\omega_1,\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=\omega_2,\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\omega_3,
\end{aligned}\right\} \qquad (6.4)$$

причем все эти величины вычисляются для точки О; ясно, что $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ являются составляющими вектора

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}rot\,\vec{v}. \qquad (6.5)$$

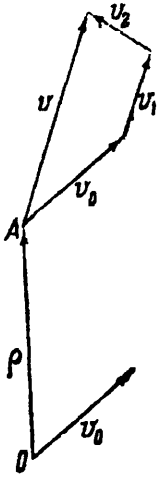


Рис. 6.2. Схема распределения скоростей в движущейся жидкой среде.

Скорость точки А может быть представлена в следующем виде:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 , \qquad (6.6)$$

где $\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}$ есть скорость вращательного движения точки А вокруг мгновенной оси, проходящей через точку 0, причем вектор угловой скорости равен $\vec{\omega}$, а вектор $\vec{v}_2$ есть скорость чистой деформации. Составляющие этой последней скорости имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} v_{2x} &= \varepsilon_1\xi + \frac{1}{2}\theta_3\eta + \frac{1}{2}\theta_2\zeta, \\ v_{2y} &= \frac{1}{2}\theta_3\xi + \varepsilon_2\eta + \frac{1}{2}\theta_1\zeta, \\ v_{2z} &= \frac{1}{2}\theta_2\xi + \frac{1}{2}\theta_1\eta + \varepsilon_3\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Таблица девяти величин

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_1 & \frac{1}{2}\theta_2 \\ \frac{1}{2}\theta_2 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1 \\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \tag{6.8}$$

носит название тензора скоростей деформации. Если этот тензор обращается в нуль, т.е. все девять составляющих вышеуказанной таблицы равняются нулю, то по формулам (6.7) и скорость деформации обратится в нуль. Это означает, что распределение скоростей частиц жидкости в окрестности точки О дается той же формулой

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

что и распределение скоростей точек твердого тела, т.е. что деформация частицы в окрестности точки 0 отсутствует.

3. Тензор напряжений

Перейдём теперь к рассмотрению поверхностных сил, появляющихся при движении вязкой жидкости. Вырежем внутри жидкости объём τ при помощи замкнутой поверхности S; рассмотрим элемент dS этой поверхности. Обозначим через n направление внешней нормали к этому элементу поверхности. Тогда действие частиц жидкости, расположенных с внешней стороны элемента dS, на

частицы жидкости, прилегающие к этому элементу с внутренней стороны, может быть приведено к действию поверхностной силы $\vec{p}_n dS$,

Если обозначить через $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$ напряжения поверхностных сил для площадок, внешние нормали которых параллельны и одинаково направлены, соответственно, с осями x, y, z, то имеет место соотношение

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x \cos(n,x) + \vec{p}_y \cos(n,y) + \vec{p}_z \cos(n,z). \qquad (6.9)$$

Введем теперь следующие обозначения для проекций на оси координат векторов $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$:

p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} для вектора $\vec{p}_x$,

p_{yx}, p_{yy}, p_{yz} для вектора $\vec{p}_y$,

p_{zx}, p_{zy}, p_{zz} для вектора $\vec{p}_z$,

p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} для вектора $\vec{p}_n$,

при этом, например, p_{xx} носит название нормального напряжения, действующего на площадку, перпендикулярную к оси Ox, а p_{xy}, p_{xz} называются касательными напряжениями.

Тогда, проектируя (6.9) на оси координат будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}\cos(n,x) + p_{yx}\cos(n,y) + p_{zx}\cos(n,z), \\ p_{ny} &= p_{xy}\cos(n,x) + p_{yy}\cos(n,y) + p_{zy}\cos(n,z), \\ p_{nz} &= p_{xz}\cos(n,x) + p_{yz}\cos(n,y) + p_{zz}\cos(n,z), \end{aligned}\right\}$$

Таблица девяти величин

$$П = \begin{pmatrix} p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} \\ p_{yx}, p_{yy}, p_{yz} \\ p_{zx}, p_{zy}, p_{zx} \end{pmatrix}$$

определяет тензор, который называется тензором напряжений.

4. Связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформации

Связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформации в вязкой жидкости имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p + \lambda\, div\,\vec{v} + 2\mu\varepsilon_1, \quad p_{xy} = p_{yx} = \mu\theta_3, \\ p_{yy} &= -p + \lambda\, div\,\vec{v} + 2\mu_1\varepsilon_2, \quad p_{xz} = p_{zx} = \mu\theta_2, \\ p_{zz} &= -p + \lambda\, div\,\vec{v} + 2\mu\varepsilon_3, \quad p_{yz} = p_{zy} = \mu\,\theta_1, \end{aligned}\right\} \qquad (6.11)$$

В случае несжимаемой жидкости, где $div\,\vec{v} = 0$ уравнение (6.11) с учетом (6.4) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad p_{xy} = p_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right), \\ p_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad p_{xz} = p_{zx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \\ p_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad p_{yz} = p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (6.12)$$

В общем случае сжимаемой жидкости формулы для напряжений принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p + \lambda\, div\,\vec{v} + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad p_{xy} = p_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right), \\ p_{yy} &= -p + \lambda\, div\,\vec{v} + 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad p_{xz} = p_{zx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \\ p_{zz} &= -p + \lambda\, div\,\vec{v} + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad p_{yz} = p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (6.13)$$

здесь $$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \qquad (6.14)$$

5. Уравнения движения вязкой жидкости

Общее уравнение движения сплошной среды имеет вид:

$$\int_{\tau}(\vec{F} - \vec{w})\rho\, d\tau + \int_{S} p_n dS = 0. \qquad (6.15)$$

Здесь τ означает произвольный объём, вырезаемый внутри жидкости поверхностью S, ρ – плотность частицы жидкости, $\vec{F}$ - вектор массовой силы, отнесенной к единице массы, ω - ускорение частицы жидкости, n - направление внешней нормали к поверхности S, $\vec{p}_n$ - вектор напряжения поверхностной силы. При этом справедливо равенство

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x \cos(n,x) + \vec{p}_y \cos(n,y) + \vec{p}_z \cos(n,z). \qquad (6.16)$$

Преобразуем теперь поверхностный интеграл, входящий в формулу (6.16), в объёмный. Для этого заметим, что имеет место следующая формула:

$$\int_S \vec{a}\cos(n,x)dS = \int_\tau \frac{\partial \vec{a}}{\partial x}d\tau, \qquad (6.17)$$

где $\vec{a}$ есть произвольный вектор, непрерывный вместе со своей производной по x в объёме τ.

На основании равенства (6.17) имеем:

$$\int_S \vec{p}_n dS = \int_S [\vec{p}_x\cos(n,x) + \vec{p}_y\cos(n,y) + \vec{p}_z\cos(n,z)]dS =$$

$$= \int_\tau (\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z})d\tau.$$

Поэтому равенство (6.15) принимает вид:

$$\int_\tau [\ (\vec{F} - \vec{w})\rho\, d\tau + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}\ ]d\tau = 0.$$

Таким образом, приходим к следующему уравнению движения:

$$(\vec{F} - \vec{w}) + \frac{1}{\rho}(\ \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}\ ) = 0. \qquad (6.18)$$

Его можно записать также в форме

$$\vec{w} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} div\Pi, \qquad (6.19)$$

если условиться называть расхождением тензора Π и обозначать через $div\,\Pi$ вектор

$$\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} = div\Pi,$$

Проекциями этого вектора на оси координат, очевидно, являются:

$$\left.\begin{aligned}(divП)_x &= \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z},\\ (divП)_y &= \frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z},\\ (divП)_z &= \frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z},\end{aligned}\right\} \qquad (6.20)$$

ибо проекциями вектора $\vec{p}_x$ являются p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} и т.д.

Обозначив проекции массовой силы $\vec{F}$ на оси координат через X, Y, Z и вспоминая, что проекциями ускорения $\vec{w}$ являются величины dv_x/dt, dv_y/dt, dv_z/dt, найдем из (6.19) уравнения движения в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= X+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right),\\ \frac{dv_y}{dt} &= Y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}\right),\\ \frac{dv_z}{dt} &= Z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

Воспользуемся теперь формулами (6.13) и (6.14) и предположим, что $\mu = const$. Тогда без труда получим, что, например:

$$(div\Pi)_x = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial div\,\vec{v}}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} +$$

$$+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial\, div\,\vec{v}}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) +$$

$$+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial\, div\,\vec{v}}{\partial x} + \mu\,\Delta v_x.$$

Поэтому, выписывая ещё в полном виде проекции ускорения, получим из (6.21) следующие окончательные уравнения движения вязкой жидкости:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = \\
&= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial\, div\,\vec{v}}{\partial x} + \nu\,\Delta v_x \\
&\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = \\
&= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial\, div\,\vec{v}}{\partial y} + \nu\,\Delta v_y
\end{aligned} \qquad (6.22)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} =$$

$$= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial\, div\, \vec{v}}{\partial z} + \nu \Delta v_z \quad ,$$

Здесь величина $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ носит название кинематического коэффициента вязкости. В системе СГС значения ν измеряются в $см^2/сек$; например, при температуре $0^\circ C$ кинематический коэффициент вязкости для воды равняется $0{,}018\, см^2/сек$, а для воздуха при вышеуказанных условиях $0{,}133\, см^2/сек$.

К этим уравнениям нужно присоединить ещё уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \qquad (6.23)$$

Уравнения (6.22) называются уравнениями Навье – Стокса.

6. Различные формы уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости.

Если мы имеем дело с движением вязкой сжимаемой жидкости, то четырех уравнений (6.22) и (6.23) недостаточно для определения пяти неизвестных функций p, ρ, v_x, v_y, v_z. В этом случае необходимо учитывать также и термодинамические свойства изучаемых процессов.

Далее рассмотрим уравнения притока тепла для вязкой сжимаемой жидкости, а пока ограничимся случаем несжимаемой жидкости.

Уравнения (6.22) и (6.23) для случая несжимаемой жидкости упрощаются следующим образом:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta v_x,$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta v_y,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta v_z, \qquad (6.24)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.$$

В векторной форме эти уравнения имеют вид:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}grad\,p+\nu\Delta\vec{v};\quad div\,\vec{v}=0. \qquad (6.25)$$

При $\nu=0$ эти уравнения приводятся к уравнениям движения идеальной жидкости.

Для любого вектора $\vec{a}$ имеет место следующее тождество:

$$\Delta\vec{a}=grad\,div\,\vec{a}-rot\,rot\,\vec{a}. \qquad (6.26)$$

Применим это тождество к вектору скорости несжимаемой жидкости $\vec{v}$, причём воспользуемся последним равенством (6.25) и обозначением

$$\vec{\Omega}=rot\,\vec{v},$$

тогда получим

$$\Delta\vec{v}=-rot\,\vec{\Omega}.$$

Выражая полную производную $\frac{d\vec{v}}{dt}$ по формуле векторного анализа

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$$

и, применяя известное из векторного анализа преобразование

$$\frac{1}{2} grad\, v^2 = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + \vec{v}\times rot\,\vec{v},$$

приходим к другой форме векторного уравнения

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + grad(\frac{1}{2}v^2) + \vec{\Omega}\times\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad\, p - \nu\cdot rot\,\vec{\Omega}.$$

Предположим ещё, что массовая сила $\vec{F}$ имеет потенциал V:

$$\vec{F} = -grad\, V,$$

и введем обозначение

$$H = \frac{p}{\rho} + V + \frac{v^2}{2},$$

тогда уравнения гидромеханики вязкой несжимаемой жидкости примут следующий вид:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega}\times\vec{v} = -gradH - \nu\cdot rot\,\vec{\Omega},$$

$$div\,\vec{v} = 0, \qquad (6.27)$$

$$\vec{\Omega} = rot\,\vec{v},$$

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + V$$

7. Диссипация энергии

Вглядываясь внимательным образом в уравнения (6.24), можно подметить необратимость процессов, описываемых этими уравнениями. Это означает следующее: рассмотрим некоторое движение вязкой жидкости, происходящее под действием сил, не зависящих от времени, и в некоторый момент времени определим поле скоростей. Переменим теперь направления всех скоростей на обратные и примем это распределение скоростей за начальное. Тогда жидкость будет совершать некоторое движение. Если бы жидкость была идеальной, то каждая частица жидкости проходила бы в обратном порядке ту траекторию, по которой она двигалась до момента $t = 0$ и притом с теми же скоростями, но только прямо противоположно направленными. В случае вязкой жидкости этого обстоятельства существовать не будет – новое движение не будет уже иметь такой непосредственной связи с первоначальным.

С математической точки зрения это последнее утверждение сводится к тому, что если мы имеем решения $\vec{v}(x,y,z,t)$ и $p(x,y,z,t)$ уравнений (6.24), то функции

$$\begin{cases} \vec{v}_1(x,y,z,t) = -\vec{v}(x,y,z,-t) \\ p_1(x,y,z,t) = p(x,y,z,-t) \end{cases} \qquad (6.28)$$

не будут уже давать решения уравнений (6.24). В самом деле, соотношения (6.29) приводят к равенствам типа:

$$\frac{\partial v_{1x}}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad v_{1x}\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} = v_x\frac{\partial v_x}{\partial x},$$

$$v_{1y}\frac{\partial v_{1x}}{\partial y} = v_y\frac{\partial v_x}{\partial y},$$

$$v_{1z}\frac{\partial v_{1x}}{\partial z} = v_z\frac{\partial v_x}{\partial z},$$

причём в левых частях этих равенств аргументами являются x, y, z, t, а в правых $x, y, z, -t$. С другой стороны, мы, очевидно, имеем равенства:

$$\Delta v_{1x} = -\Delta v_x, \quad \Delta v_{1y} = -\Delta v_y, \quad \Delta v_{1z} = -\Delta v_z,$$

а тогда ясно, что функции v_1 и p_1 не удовлетворяют системе (6.24), что и доказывает необратимость движений вязкой жидкости.

С этим обстоятельством тесно связано наличие так называемой диссипации энергии, которая состоит в том, что при движениях вязкой жидкости некоторая часть механической энергии переходит в энергию тепловую.

Рассмотрим внутри жидкости произвольный объём τ, ограниченный поверхностью S. Как выше, обозначим через $\vec{F}$ массовую силу. Элемент $d\tau$ имеет массу $\rho d\tau$, поэтому массовая сила, приложенная к элементу $d\tau$, будет равна $\vec{F}\rho d\tau$, а работа этой силы за время dt будет равна $\vec{F}\vec{v}\rho d\tau dt$, так как перемещение элемента

жидкости $d\tau$ равно $\vec{v}\,dt$. Работа всех массовых сил, приложенных ко всем элементам объёма τ, будет равна:

$$A_1 = \int \vec{F}\,\vec{v}\,\rho d\tau\,dt \qquad (6.29)$$

Далее к элементу dS поверхности S приложена сила $\vec{p}_n\,dS$, работа которой за время dt будет равна $\vec{p}_n\,\vec{v}\,dSdt$, а работа поверхностных сил, приложенных ко весм элементам поверхности S будет равна

$$A_2 = \int_S p_n\,\vec{v}\,dSdt \qquad (6.30)$$

Пользуясь формулой поверхностных сил и формулой Гаусса можно преобразовать выражение A_2:

$$A_2 = \int_S [p_x\,\vec{v}\cos(n,x) + p_y\,\vec{v}\cos(n,y) + \vec{p}_z\,v\cos(n,\vec{z})]dSdt =$$

$$\int_\tau \{\frac{\partial(p_x\vec{v})}{\partial x} + \frac{\partial(p_y\vec{v})}{\partial y} + \frac{\partial(p_z\vec{v})}{\partial z}\}dtd\tau$$

имеем далее

$$\frac{\partial(p_x\vec{v})}{\partial x} + \frac{\partial(p_y\vec{v})}{\partial y} + \frac{\partial(p_z\vec{v})}{\partial z} = (\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z})\cdot\vec{v} +$$

$$p_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + p_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + p_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} = divП + E$$

причем мы пользуемся следующими обозначениями:

$$E = p_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{p}_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{p}_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} =$$

$$= p_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + p_{xy} \frac{\partial v_y}{\partial x} + p_{xz} \frac{\partial v_z}{\partial x} + p_{yz} \frac{\partial v_x}{\partial y} + p_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + p_{yz} \frac{\partial v_z}{\partial y} +$$

$$+ p_{zx} \frac{\partial v_x}{\partial z} + p_{zy} \frac{\partial v_y}{\partial z} + p_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

или, что то же,

$$E = p_{xx}\varepsilon_1 + p_{yy}\varepsilon_2 + p_{zz}\varepsilon_3 + p_{xy}\theta_3 + p_{xz}\theta_2 + p_{yz}\theta_1 \qquad (6.31)$$

Итак,

$$A_1 + A_2 = \int_\tau (\vec{F} \cdot \vec{v}\,\rho + div\Pi\,\vec{v} + E)d\tau\,dt$$

Воспользуемся теперь уравнениями движения, тогда получим

$$A_1 + A_2 = \int_\tau (\vec{w} \cdot \vec{v}\,\rho + E)d\tau\,dt$$

Но если обозначить через T кинетическую энергию рассматриваемого объёма:

$$T = \int_\tau \frac{\rho v^2}{2} d\tau, \qquad (6.32)$$

то будем, очевидно иметь:

$$dT = \int_\tau \rho d(\frac{v^2}{2}) d\tau,$$

и так как

$$d(\frac{v^2}{2}) = \frac{1}{2}d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \vec{v}\,d\,\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{w}dt,$$

то

$$dT = \int_{\tau}\rho\,\vec{v}\cdot\vec{w}d\tau\,dt,$$

Поэтому окончательно получаем

$$A_1 + A_2 = dT + \int_{\tau} E d\tau\,dt \qquad (6.33)$$

Это равенство говорит, что производимая массовыми и поверхностными силами работа частью идёт на увеличение кинетической энергии T.Другая часть этой работы, которая будучи отнесена к единице объёма и единице времени, численно равняется E, в случае несжимаемой жидкости пропадает, как механическая работа.

Таким образом, в случае несжимаемой жидкости количество диссипирующейся энергии, т.е. количество механической энергии, превращающейся в тепловую, будучи отнесенной к единице времени и единице объёма, определяется выражением (6.32).

Если воспользоваться формулами типа

$$p_{xx} = -p + 2\mu\varepsilon_1,\ p_{xy} = \mu\theta_3$$

и условием несжимаемости

$$div\,\vec{v} = 0,$$

то получим другое выражение для

$$E = \mu[2\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2] =$$

$$= \mu\{2(\frac{\partial v_x}{\partial x})^2 + 2(\frac{\partial v_y}{\partial y})^2 + 2(\frac{\partial v_z}{\partial z})^2 + (\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y})^2 +$$

$$+ (\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z})^2 + (\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x})^2\}$$

Эта формула показывает, что диссипация энергии отсутствует только в таких движениях жидкости, когда все составляющие тензора скоростей деформации приводятся к нулю, т.е., когда движение сводится к комбинации поступательного и вращательного движений, иначе говоря, сводится к движению твердого тела.

8. Закон подобия. Числа Рейнольдса и Фруда

Рассматривая какое-либо течение жидкости, введем характерную для данного течения скорость V и характерную длину l. Так как можно принять, что характерная скорость V равна отношению характерной длины к характерному для данного течения промежутку времени T, то характерным промежутком времени будет $T = l/V$. Наконец, характерным ускорением будет V/T или V^2/l.

Введем в рассмотрение безразмерные величины, а именно, положим:

$$\left.\begin{aligned} x = l\xi;\quad y = l\eta;\quad z = l\zeta;\\ v = Vu;\quad t = \frac{l}{V}\tau;\quad p = P\bar{p} \end{aligned}\right\} \qquad (6.34)$$

Преобразуем теперь уравнения движения, например, третье уравнение системы (6.29) к введенным безразмерным величинам, причем для определенности будем считать, что массовая сила есть сила тяжести. Так, например, мы имеем:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{V^2}{l}\frac{\partial u_z}{\partial \tau},$$

$$\Delta v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = \frac{V}{l^2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial \zeta^2}\right) = \frac{V}{l^2}\Delta u_z$$

Простые вычисления показывают тогда, что третье уравнение системы (6.29) после указанного преобразования и умножения на l/V^2 принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u_z}{\partial \tau} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial \xi} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial \eta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial \zeta} = \frac{l\cdot Z}{V^2} - \frac{P}{\rho V^2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} + \frac{\nu}{lV}\Delta u_z$$

Положим: $P = \rho V^2$, и введем числа Рейнольдса и Фруда:

$$\mathrm{Re} = \frac{lV}{\nu}, \quad F = \frac{V^2}{l\cdot g};$$

тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial u_z}{\partial \tau} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial \xi} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial \eta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial \zeta} = -\frac{1}{F} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u_z.$$

Из этого уравнения, ясно видно, что характер течения зависит от значений чисел F и Re . Обратно, если для двух течений около подобных геометрических тел числа Рейнольдса и Фруда одинаковы, то уравнения движения в безразмерных величинах для обоих течений будут одинаковы и, следовательно, u_x, u_y, u_z будут для

обоих течений одинаковыми функциями от ξ, η, ζ, τ. Но тогда из уравнений (6.35) видно, что

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{l_2}{l_1}, \qquad \frac{t_2}{t_1} = \frac{l_2 V_1}{l_1 V_2}, \qquad v_2 = \frac{V_2}{V_1} v_1,$$

а это и означает, что два рассматриваемых течения подобны между собою.

Итак, при совпадении для двух движений чисел Рейнольдса и Фруда эти движения подобны между собою.

9. Уравнение притока тепла для вязкой сжимаемой жидкости

Уже было указано, что в случае движения вязкой сжимаемой жидкости четырех уравнений (6.22) и (6.23) недостаточно для определения пяти неизвестных функций p, ρ, v_x, v_y, v_z. Поэтому надо добавить пятое уравнение – уравнение притока тепла, которое имеет вид:

$$c_p \rho \frac{dT}{dt} - A \frac{dp}{dt} = \varepsilon + div(k grad T) +$$

$$+ A \left(\lambda (div \vec{v})^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 \right] \right).$$

Здесь c_p - теплоемкость при постоянном давлении, а A - термический эквивалент работы, k - коэффициент теплопроводности.

Температура T связана с давлением p и плотность ρ соотношением (для совершенного газа) Клайперона:

$$p = R \rho T.$$

10. Упражнения

1. Задана система величин ρ, μ, l (плотность, динамическая вязкость и длина). Обладают ли эти величины независимыми размерностями?

Решение. Размерности величин ρ, μ, l соответственно равны

$$[\rho] = M / L^3, \quad [\mu] = M /(LT), [l] = L$$

Если эти величины обладают зависимыми размерностями, то должно выполняться условие

$$(\frac{M}{L^3})^{P_1} (\frac{M}{LT})^{P_2} L^{P_3} = 1$$

или, так как M, L, T представляют собой независимые единицы измерения,

$$p_1 + p_2 = 0,$$
$$-3p_1 - p_2 + p_3 = 0,$$
$$-p_2 = 0,$$

откуда сразу следует, что $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, т.е. величины ρ, μ, l обладают независимыми размерностями.

2. Определить, обладают ли вязкость μ, давление p, длина l независимыми размерностями.

Ответ: обладают.

3. При сохранении расхода диаметр трубы увеличен в n раз. Во сколько раз изменится число Рейнольдса?

Ответ: уменьшится в n раз.

4. По гладкой трубе диаметром $d = 0{,}1м$ течет

нефть с расходом $Q = 0{,}02 м^3 / с$. Динамическая вязкость нефти $\mu = 0{,}01 Па \cdot с$, плотность $\rho = 900 кг / м^3$. Найти скорость течения воды по трубе диаметром $d_1 = 0{,}01 м$, при которой оба течения будут подобны.

Ответ: $v_1 = 2{,}3 м / с$

5. При течении нефти в трубопроводе диаметром $d = 0{,}2 м$ массовый расход $Q_M = 35 т / ч$. Нефть заполняет сечение до высоты $h = d / 2$. Вязкость нефти $\eta = 0{,}12 кг /(м \cdot с)$. Определить режим течения.

Ответ: $\mathrm{Re} = 1{,}03 \cdot 10^3$, режим течения ламинарный.

Глава VII
Точные решения уравнений движения вязкой жидкости.

1. Одномерное течение между двумя плоскими параллельными стенками.

Перейдем к исследованию отдельных конкретных движений вязкой жидкости, когда можно точно проинтегрировать уравнения движения вязкой жидкости. При этом будем иметь дело с несжимаемой жидкостью.

В качестве примера рассмотрим течение несжимаемой жидкости между двумя плоскими параллельными стенками. Пусть уравнения этих плоскостей будут соответственно

$$z = -h, \quad z = h;$$

допустим еще, что внешних сил нет, что движение стационарно и происходит параллельно оси Ox, так что

$$X = Y = Z = 0, \quad v_y = v_y = 0, \quad v_x = v(x, y, z).$$

Основные уравнения движения при сделанных предположениях сильно упрощаются:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \qquad (7.1)$$

Последнее из этих уравнений показывает, что v может зависеть только от y и z; средние же уравнения показывают, что p может зависеть только от x; но тогда первое уравнение (7.1), в левой части которого стоит функция от одного только x, а в правой части функция от y и z, может выполняться только в том случае, если левая и правая части уравнения являются постоянными величинами. Итак, должно быть:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = const.$$

Для определения v имеем уравнение:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{7.2}$$

и граничные условия

$$v = 0 \text{ при } z = \pm h, \tag{7.3}$$

вытекающие из требования прилипания жидкости к ограничивающим неподвижным стенкам. Легко найти частное решение уравнения (7.2) и (7.3), зависящее только от z; в самом деле, в этом случае мы имеем:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x},$$

и интегрирование этого уравнения дает нам:

$$v = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} z^2 + Az + B,$$

где A и B- две произвольные постоянные, для определения, которых служат два уравнения (7.3). Из этих последних уравнений выводим, что

$$\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} h^2 + Ah + B = 0; \quad \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} h^2 - Ah + B = 0,$$

откуда $$A = 0, \quad B = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} h^2$$

и, следовательно: $$v = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(z^2 - h^2).$$

Вычислим количество жидкости Q, протекающее в единицу времени в призме, ограниченной стенками и двумя плоскостями $y = 0$ и $y = b$. Так как

$$\int_{-h}^{h} v dz = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\int_{-h}^{h}(h^2 - z^2)dz = -\frac{2h^3}{3\mu}\frac{\partial p}{\partial x},$$

то $$Q = -\frac{2h^2 b}{3\mu}\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (7.4)$$

Деля это выражение на поперечное сечение $2hb$ вышеупомянутой призмы, получаем для средней скорости жидкости $\bar{v}$ выражение:

$$\bar{v} = -\frac{h^2}{3\mu}\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (7.5)$$

Если взять на оси Ox две точки M_0 и M_1 на расстоянии l друг от друга и обозначить давление в этих точках соответственно через p_0 и p_1, то, замечая, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_1 - p_0}{l},$$

получим из (7.5) для падения давления формулу:

$$\frac{p_0 - p_1}{l} = \frac{3\mu}{2b}\frac{Q}{h^3}. \qquad (7.6)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае падение давления на единицу длины прямо пропорционально коэффициенту вязкости и протекающему количеству жидкости и обратно пропорционально кубу расстояния между стенками.

Рассмотрим теперь другой частный подслучай. А именно, допустим, что жидкость ограничена двумя параллельными стенками, одна из которых $z = 0$ остается все время неподвижной, в то время как другая $z = h$ перемещается в своей собственной плоскости параллельно оси Ox со скоростью U. При тех допущениях, что и выше, мы найдем, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = const.$$

Для простоты примем, что $$\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \qquad (7.7)$$

Тогда те же рассуждения, что и выше, покажут нам, что v должно определяться дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2v}{dz^2}=0, \tag{7.8}$$

но только теперь граничные условия будут

$$\left.\begin{aligned} v&=0 \ \text{ при } \ z=0,\\ v&=U \ \text{ при } \ z=h, \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

ибо частицы жидкости, прилегающий к нижней стенке, должны оставаться неподвижными вместе со стенкой, частицы же прилегающие к верхней стенке, должны перемещаться с той же скоростью, что и эта стенка.

Интегрирование уравнения (7.8) дает $v=Az+B$, где A и B - произвольные постоянные, определяющиеся из уравнения (7.9):

$$B=0, \quad A=\frac{U}{h}.$$

Итак, в рассматриваемом случае течение определяется формулой

$$v=\frac{Uz}{h}. \tag{7.10}$$

Простые вычисления дают для протекающего количества жидкости и для средней скорости выражения

$$Q=\frac{Uhb}{2}, \quad \bar{v}=\frac{U}{2}. \tag{7.11}$$

2. Теория ламинарного течения в цилиндрических трубах (течение Пуазейля)

Исследование течений в трубах имеет громадное практическое значение. Задача о течении в трубе имеет вполне точное и строгое решение. Однако это относится

только к случаю ламинарной формы течения. Для турбулентной формы течения пока строгого решения нет. Однако преобладающее большинство течений в трубах, с которыми приходится иметь дело на практике – течения турбулентные. Наиболее важным случаем ламинарных течений являются течения в тонких трубках, так называемых капиллярах.

Пусть мы имеем цилиндрическую трубу кругового сечения, радиус которого равен a. Ось этой трубы примем за ось Oz цилиндрической системы координат. Пусть несжимаемая жидкость течет вдоль этой трубы, причем внешние силы отсутствуют. Допустим, наконец, что течение стационарно и что в каждой точке скорость направлена параллельно оси трубы, так что

$$v_r = v_0 = 0, \quad v_z = v(r,\theta,z).$$

При этих допущениях уравнения движения принимают следующий простой вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right), \\ &\frac{\partial v}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.12)$$

Первые два из этих уравнений показывают, что p может зависеть только от z. Последнее же уравнение показывает, что v есть функция только r и θ. Но так как правая часть третьего уравнения (7.12) не зависит от z, то и левая часть не может зависеть от z и, следовательно, $\frac{\partial p}{\partial z}$ есть постоянная величина $\frac{\partial p}{\partial z} = const$. Если давления в двух точках M_1 и M_2 на оси Oz, отстоящих одна от другой на расстоянии l, обозначить соответственно через p_1 и p_2, то будем иметь:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_2 - p_1}{l} = -\frac{p_1 - p_2}{l}. \qquad (7.13)$$

Итак, функция $v(r,\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (7.14)$$

и очевидно граничному условию на стенке

$$v = 0 \quad \text{при} \quad r = a. \qquad (7.15)$$

Можно легко найти решение уравнения (7.14), зависящее только от r и удовлетворяющее условию (7.15). В самом деле, если $v = v(r)$, то (7.14) может быть переписано так:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}r;$$

интегрируя, получаем:

$$r\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial z}r^2 + A;$$

разделив на r и еще раз интегрируя по r, находим:

$$v = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}r^2 + A\ln r + B. \qquad (7.16)$$

Произвольные постоянные A и B нужно определить из граничного условия (7.15) и добавочного условия, что скорость v остается ограниченной во всей рассматриваемой области. Но если $A \neq 0$, то, как показывает формула (7.16), скорость v становится бесконечной при $r = 0$, т.е. на оси трубы; поэтому надо непременно положить $A = 0$.

Условие (7.15) дает теперь:

$$\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}a^2 + B = 0,$$

откуда $$B = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}a^2,$$

Итак, мы нашли решение уравнений (7.14) и (7.15):

$$v = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}(a^2 - r^2).$$

Заменим $\partial p / dz$ его значением по (7.13), тогда окончательно находим:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}(a^2 - r^2). \qquad (7.17)$$

Распределение скорости подчиняется параболическому закону. Наибольшая скорость, равная

$$v_0 = \frac{(p_1 - p_2)}{4\mu l}a^2. \qquad (7.18)$$

имеет место на оси трубы. Объём жидкости, протекающей в единицу времени через поперечное сечение трубы, определяется по формуле

$$Q = \int_0^a 2\pi r v dr = \frac{\pi a^4}{8\mu}\frac{p_1 - p_2}{l}. \qquad (7.19)$$

Разделив это выражение на πa^2, найдем среднюю скорость течения

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{a^2}{8\mu}\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{1}{2}v_0 \qquad (7.20)$$

В опытах обычно определяется величина $p_1 - p_2 = \Delta p$. Поэтому решим уравнения (7.19) и (7.20) относительно Δp:

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{8\mu l Q}{\pi a^4}; \Delta p = \frac{8\mu l \bar{v}}{a^2}. \qquad (7.21)$$

Получаем таким образом закон Гагена – Пуазейля:

при ламинарном течении падение давления пропорционально секундному объёму протекающей жидкости и длине трубы и обратно пропорционально

четвёртой степени радиуса трубы. Или иначе: падение давления пропорционально средней скорости течения и длине трубы и обратно пропорционально квадрату радиуса трубы.

Осборн Рейнольдс показал, что при движении воды в трубе ламинарный или турбулентный характер течения зависит от значения соответствующего числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\bar{v}a}{\nu}.$$

Если число Рейнольдса меньше некоторого критического значения $\mathrm{Re}_{кр}$, то течение будет ламинарным, в противном случае оно будет турбулентным. Итак, движение жидкости будет ламинарным, если или скорости течения достаточно малы, или диаметр трубы достаточно мал, или жидкость достаточно вязка.

Опыты показывают, что для течений в цилиндрических трубах критическое число Рейнольдса равняется приблизительно 1000-1100.

В качестве примера рассмотрим течение воды в трубе диаметра $1\,см$. Так как $\nu = 0{,}018 см^2/сек$, $a = 0.5см$, то, принимая $\mathrm{Re}_{кр} = 1000$, найдем, что движение будет ламинарным при $\bar{v} < 36см./сек$. При диаметре трубы в $1мм$ движение остается ламинарным при скорости $\bar{v} < 3,6м./сек$.

3. Гидравлические сопротивления

Запас механической энергии жидкости, которым обладает каждая её единица силы тяжести, называется напором. Из-за работы сил трения напор по ходу движения

жидкости непрерывно уменьшается. Разность начального и конечного напоров между двумя сечениями потока называется потерями напора $h_{ПОТ}$. Эти потери напора представляют собой сумму потерь напора на трение по длине потока $h_Д$ и в местных сопротивлениях $h_М$.

$$h_{ПОТ} = h_Д + h_М \qquad (7.22)$$

Потери напора по длине труб постоянного диаметра определяются по формуле Дарси - Вейсбаха.

$$h_Д = \lambda \frac{l}{d} - \frac{v^2}{2g}, \qquad 7.23)$$

где λ - коэффициент гидравлического сопротивления, l - длина трубы, d - её внутренний диаметр, v - средняя скорость потока.

В общем случае λ является функцией числа Рейнольдса (Re) и относительной шероховатости стенок трубы Δ/d. Здесь Δ - абсолютная эквивалентная шероховатость.

Итак, в общем виде $\lambda = \lambda(\mathrm{Re}, \Delta/d)$. Численно λ определяется в зависимости от области сопротивления. При ламинарном режиме движения ($\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{КР}$), $\lambda = \lambda(\mathrm{Re})$

$$\lambda = 64/\mathrm{Re} \qquad (7.24)$$

В этом случае выражение (7.23) принимает вид формулы Пуазейля:

$$h_Д = \frac{128Q\mu l}{\pi g d^4}$$

При турбулентном режиме движения ($\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{КР}$) различают три зоны сопротивления.

1. Зона гидравлических гладких труб

($\mathrm{Re}_{КР} < \mathrm{Re} \le 10\frac{d}{\Delta}$; $\lambda = \lambda(\mathrm{Re})$);

$$\lambda = 0{,}3164/\mathrm{Re}^{0{,}25} \quad - \qquad (7.25)$$

это формула Блазиуса, используемая при $\mathrm{Re} \le 10^5$;

$$\lambda = \frac{1}{(1{,}8\lg \mathrm{Re} - 1{,}5)^2} \quad -$$

формула Конакова, используемая при $\mathrm{Re} \le 3 \cdot 10^6$.

2. Зона шероховатых труб ($10d/\Delta < \mathrm{Re} \le 500d/\Delta$; $\lambda = \lambda(\mathrm{Re}, \Delta/d)$);

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{68}{\mathrm{Re}} + \frac{\Delta}{d}\right)^{0{,}25} - \qquad (7.26)$$

формула Альтшуля.

3. Зона вполне шероховатых труб или квадратичная зона ($\mathrm{Re} > 500d/\Delta$; $\lambda = \lambda(\Delta/d)$:

$$\lambda = 0{,}11(\Delta/d)^{0{,}25} \quad - \qquad (7.27)$$

формула Шифринсона.

С незначительной погрешностью формула Альтшуля может использоваться как универсальная для всей турбулентной области течения.

Местными сопротивлениями называются участки трубопровода, в которых происходит резкая деформация потока (к ним относится, в частности, все виды арматуры трубопроводов – вентили, задвижки, тройники, колена и т.д.). Потери напора в местных сопротивлениях $h_{П}$ определяются по формуле Вейсбаха

$$h_M = \zeta \frac{v^2}{2g}, \qquad (7.28)$$

где ζ - коэффициент местного сопротивления, зависящей от его геометрической формы, состояния внутренней поверхности и Re. При развитом турбулентном движении ($\mathrm{Re} > 10^4$), что соответствует квадратичной зоне сопротивления для местных сопротивлений, $\zeta_{KB} = const$ и определяется по справочникам.

При ламинарном движении значение ζ можно приближенно вычислить по формуле $\zeta = \zeta_{KB}\phi$, где ϕ - некоторая функция от числа Рейнольдса Re. Если местных сопротивлений много и расстояние между ними больше длины их взаимного влияния, равного примерно 40d, то потери напора в них суммируются и расчетная формула (7.28) принимает вид

$$h_M = \sum_{i=1}^{n} \zeta \frac{v^2}{2g} \qquad 7.29)$$

где n – число местных сопротивлений, v –средняя скорость потока за местным сопротивлением

4. Упражнения

1. По трубопроводу течет вязкая нефть при ламинарном режиме движения. Как изменяется потери напора на трение по длине, если расход нефти снизится в 2 раза?

Решение: 1. Число Рейнольдса связано с объёмным расходом соотношением:

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\mu} = \frac{4Q}{\pi d\mu},$$

откуда видно, что снижение расхода в 2 раза приведет к уменьшению Re также в 2 раза. Следовательно, режим движения не изменится.

2. Так как режим движения ламинарный, то коэффициент гидравлического сопротивления находится по формуле

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{64\mu}{vd},$$

Подставив выражение для λ в формулу Дарси- Вейсбаха получим

$$h_д = \frac{64\mu}{vd}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}, \; h_д = v.$$

Но $v \approx Q$, следовательно, потери напора по длине трубопровода при ламинарном движении снизятся в 2 раза, если расход жидкости уменьшится в 2 раза.

2. По трубе ($d = 100мм, \quad \Delta = 0,2мм$) течет бензин ($\rho = 730кг/м^3$, $\nu = 6\cdot10^{-6} м^2/с$) с расходом $Q = 15,7дм^3/с$.

Можно ли, не вычисляя потери напора, определить, во сколько раз они увеличаться при возрастании расхода в 1,5 раза?

Ответ: можно, в 2,25 раза

3. По горизонтальному трубопроводу ($l = 50км,\ \ d = 500мм$) перекачивается нефть ($\rho = 830кг/м^3$, $\nu = 0{,}5см^2/с$) с расходом $Q = 0{,}4м^3/с$. Трубы стальные бесшовные новые.

Пренебрегая местными потерями напор, определить потери давления на трубопроводе.

Ответ: 4,62МПа

4. Какова зависимость потерь напора на трение по длине трубопровода от расхода жидкости в зоне действия формулы Блазиуса?

5. При перекачке нефти ($\nu = 10^{-4} м^2/с$) с расходом $Q = 7{,}85дм^3/с$ по трубопроводу ($d = 100мм,\ \ \Delta = 0{,}2мм$) постепенно на его стенках образовался слой парафина толщиной $\delta = 5мм$.

Как это повлияет на потери напора?

Ответ: потери напора возрастут в 1,52 раза

6. Манометр, установленный на трубе перед частично закрытой задвижкой (вода из трубы вытекает в атмосферу), показывает $p_м = 19{,}6кПа$. Средняя скорость воды в трубе $v = 1м/с$.

Определить коэффициент местного сопротивления задвижки.

Ответ: 39,2

7. На одном участке ($l_1 = 50м$) без местных сопротивлений горизонтального водопровода ($d = 150мм$) разность давлений Δp_1=420Па, а на другом ($l_1 = 25м$) с

частично прикрытой задвижкой Δp_2=4210Па.

Определить коэффициент местного сопротивления задвижки при расходе $Q = 35{,}3дм^3/с$

Ответ: 2.

8. По горизонтальному трубопроводу ($l = 1000м$, $d = 150мм$, $\Delta = 0{,}15мм$) перекачивается нефть ($\rho = 890кг/м^3$, $\nu = 2{,}5 \cdot 10^{-4} м^2/с$); конечное давление – атмосферное. Поршневой насос, установленный в начале трубопровода, может создать максимальный напор $H_н = 75м$ при заданном расходе $Q = 0{,}033м^3/с$.

Определить:

1. Чему равно падение давления на трубопроводе за счет потерь на трение по длине?
2. Какова должна быть суммарная величина коэффициента местных сопротивлений, чтобы использовать максимальный напор насоса?

Ответ: $\Delta p_п = 592кПа$, $\sum \xi = 40{,}5$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963г., ч.1., 584с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963г., ч.2., 728с.
3. Швыдкий В.С., Ярошенко Ю.Г., Гордон Я.М., Шаврин В.С., Носков А.С. Механика жидкости и газа. М.: ИКЦ «Академкнига», 2003г., 464с.
4. Розенберг Г.Д., Астрахан И.М., Евгеньев А.Е., И.Н. Кочина. Сборник задач по гидравлике и газодинамике для нефтяных вузов. М.: Недра,1990г., 238с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987г., 840с.
6. Яблонский В.С., Исаев И.А. Сборник задач и упражнений по технической гидромеханике. М.: Физматгиз, 1963г.,198с.
7. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1987. - 440 с.
8. Киселев П.Г. Гидравлика: Основы механики жидкости. М.: Энергия, 1980. -360с.
9. Повх И.Л. Техническая гидромеханика. Л.: Машиностроение, 1976.- 504с

Учебное пособие

Танирбергенов Аманжол Гиззатович

ФИЗИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Рекомендовано к печати Ученым советом
Института механики и машиноведения
им. академика У.А.Джолдасбекова МОН РК

Подписано в печать 10.02.2005. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 8.1. Тираж 500 экз.

Печать типографии ТОО «Эверо»
г. Алматы, ул. Байтурсынова, 22, офис 9
тел. 33-83-61, 33-83-43

Для заметок