

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық университеті

А.А. Бейсембаев

ЖҮЙЕЛЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ НЕГІЗДЕРІ

Университеттің Ғылыми-әдістемелік кеңесі
оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2012

ЖОК 510. (075.8)

Б 38

- Б38** Бейсембаев А.А. Жүйелер теориясының математикалық негіздері: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2012 – 168 б.
Сурет – 36. Кесте – 5. Әдебиеттер тізімі – 30 атау.
ISBN 978–601–228–340–2

Оқу құралында – жүйелер теориясының математикалық негіздері қарастырылып, автоматтық басқару жүйелерін құрастыру кезіндегі қолданылатын математикалық әдістер қарастырылған.

Осы анықтамаға сүйеніп, жүйені басқару есебі келтірілген.

Қосымшада жүйелер теориясының негіздері пәні бойынша практикалық сабақтардың жоспары және есептерді шығару жолдары, тапсырмалармен келтірілген.

Оқу құралы 5В0702 – Автоматтандыру және басқару мамандығы бойынша бакалаврларды оқыту үшін арналған.

ЖОК 510. (075.8)

Пікір жазғандар:

Тлебаев К.Б., физ.-мат. ғыл. докт., профессор «Кайнар» университетінің проректоры;

Табултаев С.С., техн. ғыл. канд., доцент Алматы энергетика және байланыс университетінің «Ақпараттық технологиялар» факультетінің деканы;

Тусеев Т., физ.-мат. ғыл. докторы, Қ.И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ «Робототехника және автоматиканың техникалық құрылғылар» кафедрасының профессоры.

ISBN 978–601–228–340–2

© Бейсембаев А.А., 2012

© ҚазҰТУ, 2012

Кіріспе

Өндіріс процестерін автоматтандыру кезінде математикалық модельдерін құрастыру мәселесі өте маңызды болып табылады. Осы есепті шығару үшін «5В0702 – Автоматтандыру және басқару» мамандығында оқып жүрген студенттер – жүйелер теориясының математикалық негіздері пәнін өтеді. Осы пәнді оқытудың негізгі мақсаты – студенттерге математикалық жағынан қажетті білімдерді беру. Сол себептен ұсынылып отырған оқу құралында әртүрлі математикалық аппараттар қарастырылады. Оқу құралдың негіздерін автордың он шақты жылдар бойы осы пәнді оқыту тәжірибесі құрастырады.

Бірінші тарауда – жиындар теориясының негіздері келтірілген. Мұнда жиындардың негізгі анықтамалары мен қасиеттері, жиындар алгебрасы, жиындар мен олардың элементтерінің арасындағы қатынастар, функция ұғымдары қарастырылады. Барлық ұғымдар шығарылған есептермен дәлелденеді.

Екінші тарауда – графтар теориясының негіздері қарастырылған. Графтардың түрлері және оларды матрицалар ретінде жазу әдістері келтірілген. Осы матрицалардың мысалдары қарастырылған. Графтарды қиылыстыру және біріктіру операциялары келтіріліп, мысалмен бекітілген.

Үшінші тарауда – математикалық логиканың элементтері жазылған. Мұнда логикалық айнымалы, логикалық функция ұғымдары қарастырылып, әртүрлі логикалық операциялар енгізіледі. Логика заңдары мен теңдеулері және элементарлы логикалық функциялар келтірілген. Логикалық функциялардың нормалды және кемел нормалды тұлғалары енгізіліп, логикалық функцияларды ақиқат кестелермен беру жолдары қарастырылған. Барлық ұғымдар шығарылған есептермен бекітіледі.

Төртінші тарауда – матрицалар теориясының элементтері келтірілген. Матрица ұғымы енгізіліп, матрицалармен

операцияларды орындау есептері қарастырылады. Матрицалардың түрлері келтіріліп, олардың ерекшеліктері қарастырылады. Матрицалар мен есептеулер мысалдары орындалып, келтірілген теориялық негіздер бекітіледі.

Бесінші тарауда – жүйелер теориясының негіздері жазылған. Мұнда динамикалық жүйе, жүйенің қалпы туралы ұғымдар анықтама ретінде келтіріледі. Жүйелерді басқару мәселелері, сызықты жүйенің өтпелі және импульсті, өтпелі функцияларының матрицалары қарастырылады.

Қосымшада осы пән бойынша практикалық сабақтардың мазмұны және есептерді шығару үшін арналған әдістемелер келтірілген.

Жазылған оқу құралын – студенттер, магистранттар, докторанттар оқу кезінде, практикалық есептерді шығару үшін қолдануға болады.

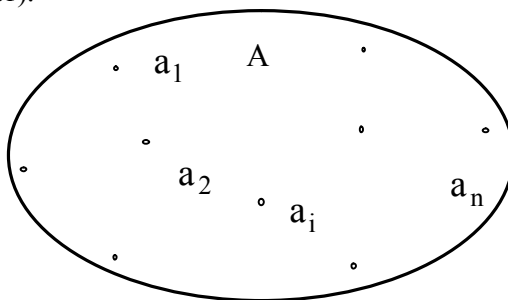
1. ЖИЫНДАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗДЕРІ

Жиындар теориясының әдістері – автоматтық басқару жүйелерін синтездеу мен талдау есептерін қарастырады. Бұл математикалық аппаратпен, әртүрлі объектілерді сипаттап көрсетуге болады. Физикалық, химиялық тағы басқа да мағыналарына карамай, объектілердегі өтіп жатқан процестерді математикалық көзқарасқа сүйеніп зерттейді. Жиындар теориясының ұғымдары арқылы, бейнелеу операцияларының функционалды байланыстары жаңа деңгейде енгізіледі, әртүрлі қатынастар, сәйкестер жазылады. Ары қарай, осы теорияның негіздерін қарастырамыз.

1.1. Жиындардың негізгі анықтамалары мен қасиеттері

Жиын – деп объектілердің (жиын элементтерінің) барлығын ортақ белгілермен біріктірген жиынтығын айтамыз. Мысалы, қазақ алфавиті 42 әріптен тұрады. Осы, әріптер жиынының элементтері болады.

Көбінесе жиынды латын $A, B, \dots, X, Y$ алфавитінің жазба әріптерімен, ал оның нақты элементтерін индекстері бар немесе жоқ $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, x, y$ әріптермен белгілейді. $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$, элементтерінен тұратын A жиынды $A\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ деп белгілеп, оны графикалық түрде тұйықталған аймақпен, ал оның элементтерін – осы аймақта жатқан нүктелермен көрсетуге болады (1.1-сурет).



1.1-сурет

Жиынға кіретін элементті мынадай $\in$ символмен (таңбамен) белгілейді. Мысалы: $a \in A$ бұл жазба a элементі A жиынына кіретінін көрсетеді. Ал, $b \notin A$ жазбасы, b элементі A жиынына кірмейтінін көрсетеді. Жиынды берудің, ең қарапайым әдісі – элементтерін тізімдеу. Мысалы, сандардың ондық жүйесінің жиыны былай жазылады: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Бірақ, бұл әдіс тек қана, шекті жиындарды анықтау үшін қолданылады. Осындай жиындардың элементтер саны, N натурал санымен берілсе, онда шексіз санды элементтері бар жиындар – оның қасиеттерімен беріледі. Мысал ретінде, теңжақты үш бұрыштар жиыны, жазықтық нүктелерінің жиыны, т. б. Жиындар теориясының түсініктемелері мен анықтамаларын, қысқаша жазу үшін, бірқатар символдар қолданылады.

Мысалы, теріс сандар жиынының жазылуын былай көрсетуге болады: $X = \{x: x < 0\}$. Бұл: X жиынының элементтері – x дегені. Олар теріс таңбалы сан қасиетіне ие болуы тиіс. Басқа логикалық символдар, олардың пайда болу кезінде түсіндіріледі.

Бірде бір элементі жоқ жиынды – *бос жиын* деп атайды да, оны $\emptyset$ символымен белгілейді. Бос жиын 0-дің аналогы (бірақ 0 емес). Ол шартты түрде шекті жиынға жатады.

Мысалы, студенттік топтың озығының жиыны бос болуы мүмкін ($S=0$, озық жоқ жағдайы). Оған қарамастан, осы жиынмен формалды операция жасайды.

Жиындарды салыстыру үшін жиынның қуаты деген ұғым қолданылады. Осы ұғымның әлі нақты анықтамасы жоқ. Көп жағдайларда бұл ұғым – элементтер санымен байланыстырылады да, ал шексіз жиындарды салыстыру кезінде, оның мағынасы жоғалып кетуі мүмкін. Сондықтан «жиын қуаты» критерийін кеңірек анықтауымыз керек.

Айталық, A және B жиын элементтерінің арасында өзара бір мәнді сәйкестікті бекітуге болады. Дәлірек айтсақ, $a_i \in A$ әрбір элементін, анықталған $b_i \in B$ элементіне сәйкестеп қойса керісінше, әрбір $b_i \in B$ элементінің тек қана бір анықталған

$a_j \in A$ элементі сәйкестеледі. Бұл жағдайда жиындарды - эквивалентті деп атап, $A \sim B$ деп белгілейді. Ондай жиындардың төмендегідей қасиеттері бар:

– рефлексивтік қасиетінің мағынасы – әрбір жиын өзіне-өзі эквивалентті, демек $A \sim A$;

– симметриялық қасиетінің мағынасы – егер A жиыны B жиынына эквивалентті болса, онда B жиыны да A жиынына эквивалентті, демек $A \sim B$, онда $B \sim A$;

– транзитивтік (өтпелілік) қасиетінің мағынасы егер $A \sim B$, ал $B \sim C$, онда $A \sim C$ болады.

Енді бірнеше жиындарды қарастырамыз: квадрат жақтарының жиындары, жоғары оқу орындарындағы білімді бағалауда бағалардың жиыны (өте жақсы, жақсы, қанағат, қанағатсыз), математиканың негізгі амалдарының жиыны (қосу, азайту, көбейту, бөлу), горизонт жақтарының жиыны (оңтүстік, солтүстік, батыс, шығыс). Бұл жағдайда бір жиынның әрбір элементіне басқаның бір элементі сәйкес қойылады. Яғни, барлық жиындар өзара эквивалентті. Осы әртүрлі жиындардың ортақ қасиеті – олардың элементтер саны. Бұл жағдайда элементтер саны – төртеу. Жоғарыда қарастырылған эквивалентті жиындардың қуаттары бір-біріне тең. Сондықтан, әрбір жиынның қуатын, қарастырылатын жиындардың ортақ қасиетімен бағалауға болады.

“Жиынның қуаты” ұғымы арқылы шексіз жиындардың элементтерін санамай-ақ, өзара салыстырады. Екі шексіз жиынды алсақ: бірінші жиын, оң таңбалы бүтін сандардың жиынтығы:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} \quad (1.1)$$

және осы сандардың квадраттар жиынтығы:

$$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}. \quad (1.2)$$

Бұдан екі шексіз жиындар элементтерінің арасындағы бір мәндік сәйкестік көрініп тұр. Сондықтан (1.1) және (1.2) жиындар өзара эквивалентті және тең қуатты.

Егер шексіз жиынның барлық элементтері санаулы және шексіз немесе ретті нөмірленсе, мысалы $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, онда мұндай жиынды – *саналымды жиын* деп атайды. Мысалы, жұп сандар жиыны, тақ сандар жиыны, $1/n$ түрдегі бөлшек жиындар, тағы сол сияқты. Шексіз саналымды жиындар, оң бүтін сан жиындарына тең қуатты. Транзитивтік қасиеті бойынша, барлық саналымдық жиындар бір-бірімен эквивалентті. Элементтерін санап шығуға және нөмірлеп қоюға болмайтын, шексіз жиындарды – *саналымсыз жиындар* деп атайды.

Ондай жиынға, сызықты нүктелік жиынды жатқызуға болады. Сызықты нүктелік жиынның қарапайым түріне – кесінді мен интервал жатады.

Кесінді (сегмент) – деп $a \leq x \leq b$ теңсіздігін қанағаттандыратын, сандық осінің нүктелерінің жиынын айтады. $x=a$ және $x=b$ шекаралық нүктелері кесіндіге кіреді. Кесіндіні $[a,b]$ символмен белгілейді.

Интервал (аралық) – деп $a < x < b$ теңсіздігін қанағаттандыратын, әрі сандық ось жататын нүктелер жиынын айтады. (a,b) -мен белгіленген интервалға шекаралық нүктелер кірмейтінін көрсетеді.

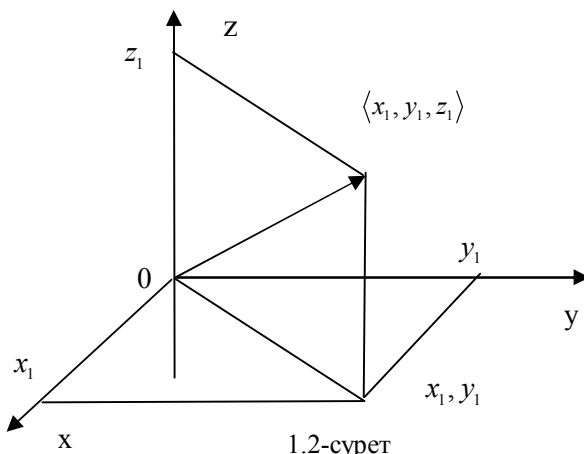
Шексіз саналымсыз жиын, үзіліссіз тізбектелген элементтермен берілсе, жиынның қуаты, континуумның қуаттылығына (латынның continuum - үзіліссіз деген сөзінен алынған) тең деп есептеледі.

Жиынды *реттелінген* – деп аталғанда, оның екі элементі өзара салыстырмалы болады да, олардың орналасуында белгілі бір тәртіп орнатылады. Реттелінген жиынға мысалы ретінде, T уақыт мезеттерінің жиынын алуға болады. Оның t элементтері “ертерек” және “кешірек” түсініктемелері арқылы салыстырылады. Уақыттың бағытталу қасиетінің бір элементі $t_i \in T$ ертерек болып кетсе, ал $t_{i+1} \in T$ кешірек болуы тиіс.

Реттелген жиынның элементтері өзара “азырақ” және “көбірек” түсініктемелері арқылы салыстырылуы да мүмкін. Мысалы: натурал сандардың жиыны.

Егер жиын, элементтердің тізбегімен көрсетіліп, тізбектегі әрбір элементке қатаң белгілі орын берілсе, мұндай жиын – *кортеж* деп аталады. $\langle a, b, c \rangle$ жазуы кортеждің үш элементтен немесе компоненттен тұратынын көрсетеді: a бірінші орында, b екінші орында, ал c үшінші орында орналасады. Оның реттелмеген жиындардан айырмашылығы – кортежде бірдей компоненттердің болуы, мысалы $\langle a, b, c, c \rangle$. Кортеждің компоненттер саны, оның өлшемділігін немесе ұзындығын көрсетеді.

Кортеждің ұзындығы n -ге байланысты болса, оны n -лік (екілік, үштік, төрттік, т.б.) деп атайды. Ұзындығы екіге тең кортеж – *реттелген жұп* деп аталады. Бірде бір элементі жоқ кортежді – *бос кортеж* дейді де, оны Λ деп белгілейді. Егер компоненттері нақты сандар болса, кортежді оған сәйкес өлшемі бар кеңістікте нүкте түрінде немесе координат басынан басталып, нүктеде аяқталатын, вектор түрінде көрсетуге болады. Осы вектордың компоненттері, оның ұшының координаттары болып табылады. Ендеше, $\langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ кортежді үш өлшемді кеңістіктегі вектор түрінде көрсетуге болады (1.2-сурет). Координат осіне түсірілген вектордың проекциялары, оның компоненттеріне сәйкес келеді: $Pr_x \langle x_1, y_1, z_1 \rangle = x_1$,



Осы вектордың x , y осьтерінің проекциялары төмендегідей көрсетіледі:

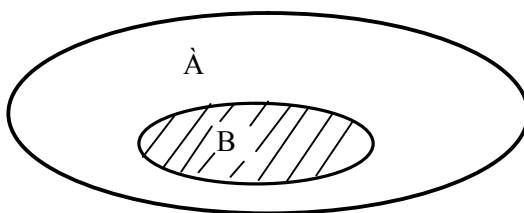
$$Pr_{x,y} \langle x_1, y_1, z_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle.$$

Вектордың басқа проекцияларын да осылай етіп көрсетуге болады.

1.1.1. Жиындар мен ішжиындар

Егер A жиынның барлық элементтері B жиынның элементтері болып табылса, керісінше, B жиынның барлық элементтері A жиынның элементтері болса, онда A және B жиындары өзара *сәйкес жиындар* немесе *тең жиындар* деп аталып, $A=B$ белгімен белгіленеді. Мысалы, егер A – екі бірдей жақтары бар үшбұрыштардың жиыны, ал B – екі бірдей бұрыштары бар үшбұрыштардың жиыны болса, онда осы екі жиын бір-біріне тең болады $A=B$.

Егер B жиынның әрбір элементі A жиынның элементі болса, сонымен қатар A жиыны B жиынына сәйкес болмаса, онда B жиыны A жиынның ішжиыны, мұны 1.3-суреттен көруге болады.



1.3-сурет

Бұл жағдайда A жиыны B жиыны элементтерінің бөлігін жалпы немесе дербес белгілер арқылы біріктіреді. Екі жиынның арасындағы осындай қатынас мынадай $\subseteq$ символмен белгіленеді:

$B \subseteq A$ - В жиыны А жиынның ішіне кіретінін көрсетеді де, $A \supseteq B$ - А жиынның ішіне В жиыны толық кіретіні осыдан көрініп тұр.

Келтірілген ұғымдарды түсіну үшін келесі мысалдарды қарастырамыз.

1.1-мысал. Егер А – студенттер тобының жиыны болса, ал В – топтың озық оқитын студенттер жиыны, онда $B \subseteq A$ жазуға болады.

1.2-мысал. Егер А – қоймадағы электр өлшегіш аспаптардың жиыны болса, ал В – жиыны олардың арасындағы амперметрлердің жиыны болса, онда $A \subseteq B$.

Келесі $\subseteq$ және $\supseteq$ символдармен байланысы, А жиыны В жиынына кейбір жағдайларда сәйкес болуы да мүмкін екенін көрсетеді. Егер А жиыны В жиынының кейбір элементтерінен тұрса, онда олардың арасындағы қатынас $\subset$ немесе $\supset$ қатаң ендіру символдары арқылы көрсетіледі. Мысалы, А жиыны әр түрлі қаламдардың жиыны, ал В тек қана сиямен жазатын қаламдардың жиыны болса, онда осы арақатыс $B \subset A$ және $A \supset B$ деп жазылады.

Логикалық символдарды қолданып $\rightarrow$ (импликация) және $\forall$ (жалпылық кванторы), ішжиынның анықтамасын былай жазуға болады:

$B \subseteq A$ орындалса, онда $\forall b[b \in B \rightarrow b \in A]$.

Егер В жиыны А жиынның ішжиыны болса, онда әрбір b үшін (барлық b үшін) “b В жиынның элементі” деген анықтама, өзінің артынан “b А жиынның элементі” деген анықтаманы тудырады.

Ішжиындардың төмендегідей қасиеттері бар:

1) рефлексивтік - $A \subseteq A$ (әрбір жиын өз-өзінің ішжиыны болады);

2) транзитивтік - $[C \subseteq B \text{ және } B \subseteq A \rightarrow C \subseteq A]$;

3) бос жиын кез келген жиынның ішжиыны бола алады. Мысалы $\emptyset$ жиыны берілсе, онда $\emptyset \subset M$.

Егер A және B шектелген жиындар болса, онда $B \subset A$ жағдайында, A жиынның қуаты B жиынның қуатынан төмен. Ал, осы жиындар шексіз жиындар болса, онда олардың қуаттары да бірдей болуы мүмкін. Мысалы, (1.2) жиынның элементтері (1.1) жиынына да кіреді, сол себептен (1.2) жиыны (1.1) жиынның ішжиыны деп айта аламыз. Осыған орай осы екі жиын эквивалентті және олардың қуаттары бірдей.

Бақылау сұрақтары.

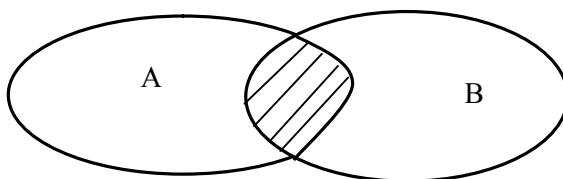
1. Жиын деген ұғымды түсіндіріңіз?
2. Қандай жиындарды эквивалентті деп атайды?
3. Жиын қуаты деген ұғымды түсіндіріңіз?
4. Саналымды, саналымсыз, реттелінген, реттелінбеген жиын деп қандай жиындарды атайды?
5. Жиынның ішжиыны деген ұғымды түсіндіріңіз?

1.2. Жиындар алгебрасы

Қазіргі математика – алгебраға әртүрлі амалдарды қолданып, түрлі операцияларды, объектілер жиынтығымен орындай алатын аппарат деп анықтайды. Жиындарды объектілер түрінде қарастыра отырып, олармен әртүрлі сандар алгебрасындағыдай қосу және көбейту операцияларына ұқсас операцияларды өткізуге болады. Оған қоса, мұнда сандар алгебрасының негізгі заңдары да сақталады:

- алмастыру (коммутативтік) заңы: $a+b=b+a$; $ab=ba$;
- терімділік (ассоциативтік) заңы: $(a+b)+c=a+(b+c)$;
 $(ab)c=a(bc)$;
- үлестірімділік (дистрибутивтік) заңы: $(a+b)c=ac+bc$.

Жиындар алгебрасының негізгі операцияларын қарастырайық. A және B жиындарының қиылысуы A жиынына да, B жиынына да кіретін элементтерден тұратын жиын (1.4-суретте штрихталған аудан). Қиылысу келесі символ арқылы белгіленеді: $A \cap B$.



1.4-сурет

Осыған сәйкес мысалдарды қарастырайық.

1.3-мысал. Егер A – оң сандық сандардың жұп сандар жиыны болса, ал B – оннан кіші бүтін оң сандар жиыны болса, онда:

$$A \cap B = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

1.4-мысал. A – лабораториядағы вольтметрлердің жиыны десек, B – лабораториядағы сандық аспаптардың жиыны дейік, онда $A \cap B$ – сандық вольтметрлердің жиыны болады.

Бірнеше жиынның қиылысуын былай белгілейді $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

Жиындардың қиылысуы мына заңдарға бағынады:

- алмастыру заңына – $A \cap B = B \cap A$;
- терімділік заңына – $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

Егер A және B жиындарының ортақ элементтері жоқ болса, онда осы жиындар – *қиылыспайтын жиын* деп аталады. Олардың арасындағы арақатыс былай көрсетіледі: $A \cap B = \emptyset$.

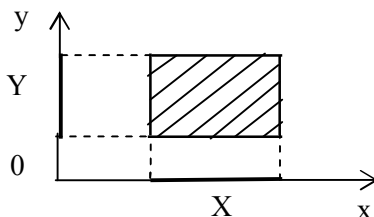
1.4-мысалындағы сандық вольтметрлердің жиыны бос болуы мүмкін. Қиылысу операциясының, көбейтумен біршама ұқсастығы бар. Сондықтан нәтижелі жиынның элементтері көбейткіштік жиынның қасиеттеріне ие болады. Бұл $A \cap \emptyset = \emptyset$ қатынасымен, сондай-ақ $a \times 0 = 0$ қатынасымен ұқсас.

A және B жиынның тура (декарттық) көбейтіндісі $a \in A$ және $b \in B$, $\langle a, b \rangle$ кортеждердің немесе реттелген барлық жұптардың жиыны болады. Ол $A \times B$ деп белгіленеді.

1.5-мысал. Мынадай жиындар берілсін, $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Онда осы жиындардың көбейтіндісі тең $A \times B = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \dots, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \dots, \langle h, 7 \rangle, \langle h, 8 \rangle\}$

$A \times B$ жиыны 64 кортежден құралады да, шахмат тақтасының 64 шақпақтарының белгісін көрсетеді.

1.6-мысал. Егер X және Y нақты осьтің кесінділер түрінде көрсетілсе (сызықты нүктелік жиындар), онда $X \times Y$ тура көбейтіндісі – штрихталған тікбұрыштың барлық нүктелер жиынтығымен анықталады (1.5-сурет).



1.5-сурет

Сол сияқты $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ жиындарының тура көбейтіндісі: $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$ түріндегі, ұзындығы n кортеждер жиыны болады.

Бұл жиыннан көретініміз, элементтердің реттелуіне байланысты тура көбейтінді алмастыру $A \times B \neq B \times A$ қасиетіне иемденбейді.

Тең жиындардың тура көбейтіндісі – *жиынның дәрежесі* деп аталады.

Егер $A_1 = A_2 = \dots = A_s = A$, онда

$$A_1 \times A_2 \rightarrow A \times A = A^2,$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \rightarrow A \times A \times A = A^3,$$

.....

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_s \rightarrow A^s$$

Бұл жерде $A^1 = A$ және $A^0 = \{\Lambda\}$ деп саналады.

Егер 1.6-мысалында $X = Y = R$ деп алса, мұндағы R -барлық нақты сандардың жиыны, онда $X \times Y = R \times R = R^2$ нақты жазықтықтың барлық нүктелерінің жиыны болады. Сол сияқты $R^3 = R \times R \times R$ – өлшемді кеңістікті көрсетсе, онда $R^n = R \times R \times \dots \times R$ n – өлшемді кеңістікті көрсетеді. n – өлшемді кеңістікті – *гиперкеңістік* деп атайды.

Вектор кортежінің проекцияларын табу аналогиясымен бірдей, ұзындығы бірдей кортежден тұратын, қандай да болсын жиындардың проекциялау операциясын жасауға болады. Осындай жиынның проекциясы, оған кіретін кортеждердің проекцияларының жиыны болады.

Егер V – v кортеждерінің жиыны болса, онда жиынның проекциясы болып кортеждер, басқаша айтсақ, $Pr_i V = \{Pr_i v : v \in V\}$.

1.7-мысал. Келесі жиынның проекцияларын табыңыз $V = \{\langle a, b, d \rangle, \langle c, b, d \rangle, \langle d, b, c \rangle\}$?

Осы жиынның проекциялары мына теңдеулермен анықталады:

$$Pr_1 V = \{a, c, d\}; \quad Pr_2 V = \{b\}; \quad Pr_{2,3} V = \{\langle b, d \rangle, \langle b, c \rangle\}.$$

1.8-мысал. $A = \{1, 2\}; B = \{1, 3\}; C = \{2, 5\}$ болсын дейік. Онда $V = A \times B \times C$ үшін мынаны аламыз:

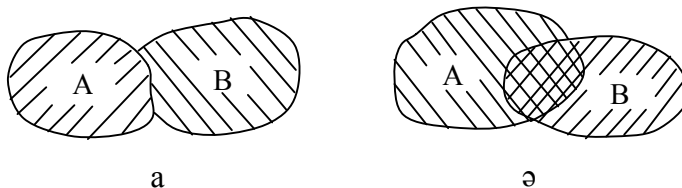
$$A \times B = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\};$$

$$V = A \times B \times C = \{\langle 1, 1, 2 \rangle, \langle 2, 1, 2 \rangle, \langle 1, 3, 2 \rangle, \langle 2, 3, 2 \rangle, \langle 1, 1, 5 \rangle, \langle 2, 1, 5 \rangle, \langle 1, 3, 5 \rangle, \langle 2, 3, 5 \rangle\};$$

$$Pr_1 V = \{1, 2\}; \quad Pr_2 V = \{1, 3\}; \quad Pr_3 V = \{2, 5\}; \quad Pr_{2,3} V = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 3, 5 \rangle\}.$$

1.8-мысалында $Pr_1 V = A$, $Pr_2 V = B$, $Pr_3 V = C$ екені көрініп тұр. $z \subseteq A \times B \times C$ үшін $Pr_1 z \subseteq A$, $Pr_2 z \subseteq B$, $Pr_3 z \subseteq C$ екенін көрсетуге болады.

А және В жиындарының бірігуі, А жиынына немесе В жиынына кіретін элементтерден тұратын жиын болып есептеледі (1.6-сурет).



1.6-сурет

Бірігуді $A \cup B$ деп белгілейді. Бірігудің қосу операциясымен аналогиясы бар. Бірақ бұл аналогия толық емес, өйткені бірігу қиылысумен қосылып кетуі мүмкін (1.6 б-сурет).

1.9-мысал. Егер А – каникул кезеңіндегі спортпен шұғылданатын студенттер тобының жиыны болып, ал В – спорттық секцияларға әрдайым қатысып жүретін студенттер тобының жиыны десек, онда $A \cup B$ – спортпен айналысатын студенттердің жиыны болып табылады. Олардың бір бөлігі – осы екі жиынға да кіруі мүмкін. Бірнеше жиындардың бірігуі $\bigcup_{i=1}^n A_i$ болып жазылады. Жиындардың біріктіру операциясы келесі заңдарға бағынады:

- алмастыру заңға – $A \cup B = B \cup A$;
- терімділік заңға – $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Бос жиыны үшін $A \cup \emptyset = A$ ($a+0=a$), қосу операциясымен ұқсастығы көрініп тұр. Біріктірілген ішжиындардың жүйесі қандай да бір І жиынын құрастырса, оны І жиынының бөлінуі деп атайды, егер барлық жиындар қиылыспаса (яғни жиындардың қос қиылысуы бос жиын болса).

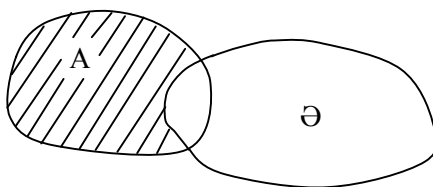
1.10-мысал. Футболдың жоғарғы тобында n командасы ойнайды. $F_1, F_2, \dots, F_n$ – командаларға біріктірілген футболшы-

лардың жиыны. $V = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ жүйесі жоғарғы тобының

барлық футболшыларының жиынының бөліндісі болады. $\bigcup_{i=1}^n F_i$

жиыны әр футболшының тек бір командада ғана ойнай алатынын көрсетеді.

А және Ә жиындарының айырымы Ә құрамында жатпайтын тек сол элементтердің жиыны болып табылады (1.7-сурет). Операция $A/\bar{A}$ деп белгіленеді. Бұл тек екі жиын үшін орындалатын операция (қатаң екі орынды).



1.7-сурет

1.11-мысал. Егер А – амперметрлердің жиыны, ал Ә – тұрақты токтың өлшеуіш құралдарының жиыны, онда $A/\bar{A}$ – айнымалы токтың амперметрлерінің жиыны болады.

Тек өзі барлық жарамды жиындарды толық қамтамасыз ететін, жиынды, толық немесе универсал жиыны деп атайды. Егер бос жиын, алгебрада, нөл рөлін атқаратын болса, онда универсал жиын бір рөлін атқарып, I деп белгіленеді. Графикалық түрде бұл жиын тікбұрыш түрінде көрсетіледі. Тікбұрыштың ішкі аймағында көрсетілген жиындар бейнелері, *Эйлер-Венн диаграммасы* деп аталады (1.8-сурет).

Универсал жиынның қасиеттері:

1) $A \cap I = A$ (сол сияқты $a \times 1 = a$);

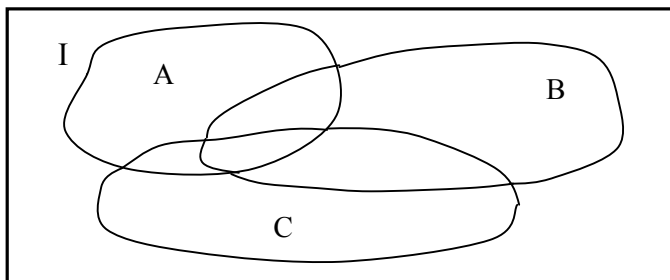
2) $A \cup I = I$, ($a + 1 = 1$) сандар алгебрасындағы осындай

ұқсас өрнектің мағынасы жоқ).

А жиыны универсал жиынның айырмасы сияқты анықталатын

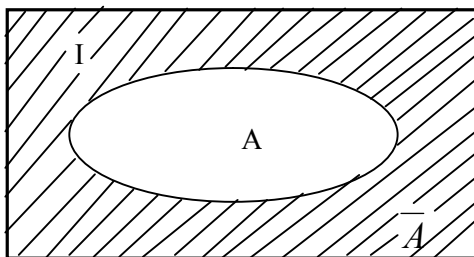
$\bar{A}$ жиыны – А жиынының қосымшасы деп аталады:

$$\overline{A} = I \setminus A.$$



1.8-сурет

Осы ұғым 1.9-суретте көрсетілген, $\overline{A}$ қосымшасы штрихпен белгіленіп тұр.



1.9-сурет

1.12-мысал. Студенттер тобы, алғашқы мысалдарда көрсетілгендей, I универсал жиын сияқты қарастырылсын. Онда, A топтағы стипендияны алатын студенттер жиыны болса, ал $\overline{A} = I \setminus A$ стипендияны алмайтын студенттер жиыны болады.

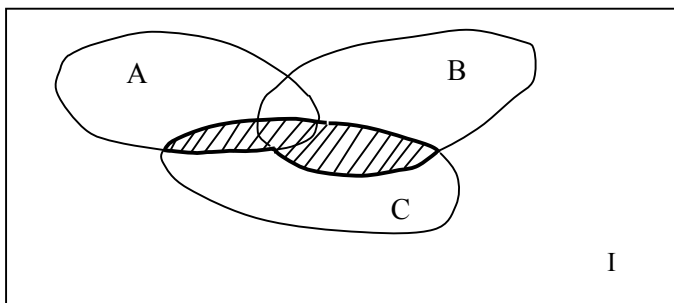
Қосымшалардың қасиеттері:

- 1) $A \cap \overline{A} = \emptyset$, өйткені A және $\overline{A}$ ортақ элементтері жоқ;

2) $A \cup \overline{A} = I$, өйткені I -дің барлық элементтері A және $\overline{A}$ жатады;

3) егер $\overline{\overline{A}}$ деген A жиынының қосымшасы болса, онда A -ны да $\overline{\overline{A}}$ жиынының қосымшасы деп атауға болады. Басқа жағынан, $\overline{\overline{\overline{A}}}$ жиынының қосымшасы $\overline{\overline{A}}$. Осыдан $\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{\overline{A}}$.

Жоғарыда айтылғандай, жиындар алгебрасында терімділік және алмастыру заңдары орындалады. Үлестірімділік заңына сәйкес Эйлер-Веннің диаграммасын салайық (1.10-сурет).



1 . -сурет

Қалың сызықпен сызылып штрихталған аудан, ортақ аймақты береді.

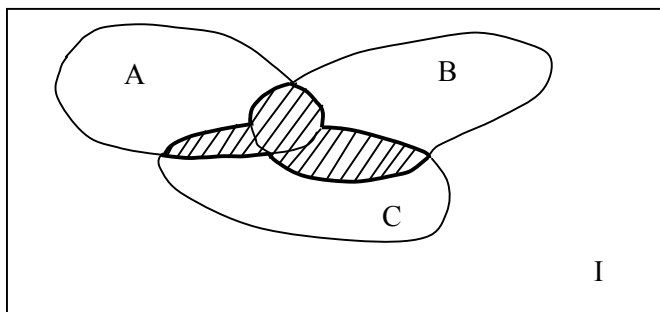
Осыдан,

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

өзара тең.

Сандар алгебрасындағы $(a+b)c=ac+bc$ арақатысына сәйкес келеді. Қарапайым алгебрада үлестірімділік заңының, терімділік және алмастыру заңдарынан айырмашылығы сол, қосу мен көбейтуге, симметриялы еместігі. Шынымен де, $+$ таңбасын $\times$ таңбасына ауыстыру, қарама-қайшылыққа алып келеді: $ab+c=(a+c)(b+c)$. Жиынға қолданатын өзара $\cup$ және $\cap$

таңбаларын ауыстыру екі жағдайда да бірдей жиындарды береді. 1.11-суреттегі диаграммада мұндай жиындар қалың сызықпен қоршалған аудан.



1.11-сурет

Осыдан мынау пайда болады:

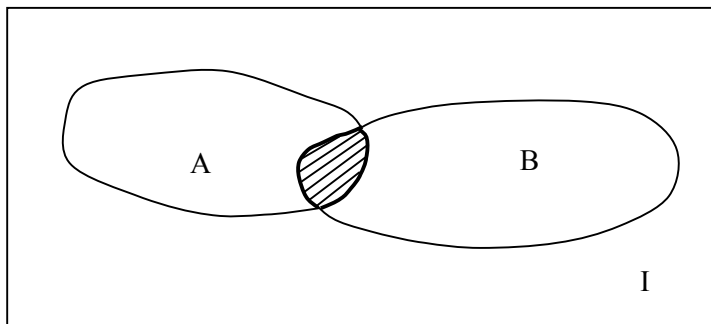
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Сондықтан, жиындар алгебрасында, барлық үш заң да бірігу мен қиылысу амалдарына қарағанда симметриялы болып калады.

1.12-суретте А және В жиындары универсалды І жиынның ішінде көрсетілген. Штрихталған аймақ – $A \cap B$ -нің қиылысуы.

Оның элементтерінің қосымшалары не $\overline{A}$ жиынының не тек қана, $\overline{B}$ жиынының $\overline{A \cap B}$ қиылысуына тиісті. Осы үш шарт $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ бірігуін анықтайды. Сол себептен, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Енді $A \cup B$ бірігуін қарастырып көрейік (қалың сызықпен сызылып штрихталған аудан). Оның қосымшасы $\overline{A \cup B}$ штрихталған болып шықты, басқаша айтқанда: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.



1.12-сурет

Алынған екі өрнекте де Морганның шарттары деп аталады. Осы ережелер арқылы әртүрлі есептерді логикалық теңдеулермен есептеуге және логикалық теңдеулердің ұзақтылығын азайтуға болады.

Бақылау сұрақтары.

1. Қалай жиындарды қиылыстырады?
2. Қалай жиындар бір-біріне тура көбейтіледі?
3. Қалай жиындарды біріктіреді?
4. Қалай жиындарды айырады?
5. Эйлер-Венн диаграммалары қалай салынады?
6. Жиынның қосымшасы және универсал жиын қалай табылады?
7. Эйлер-Венн диаграммалар арқылы негізгі заңдарды дәлелдеңіз?

1.3. Жиындар мен олардың элементтерінің арасындағы қатынастар

Енді жиындардың араларындағы қатынастарды қарастырайық. Олардың бірнеше түрлері болады. Бірінші түрі – *сәйкестік*. Сәйкестік жиын, элементтерінің арасындағы

қатынастарды көрсетеді. Екінші түрі – бейнелеу, бұл қатынас арқылы бір жиын элементтері белгілі теңдеулер арқылы екінші жиын элементтеріне айналады. Өзара екі жиынның арасындағы өрнек түріндегі байланыс – *функция* деп аталады. Ары қарай осы қатынастарды қарастырамыз.

Егер $a \in A$ элементтері $b \in B$ элементтерімен қабаттасып салыстырылсын, салыстырудың әдісі анықталған болса, онда A және B жиындарының арасында сәйкестік орнатылған дейді. $Q \subseteq A \times B$ жиыны сәйкес орнататын заңын анықтайды да, сәйкестік графигі деп аталады. (A, B, Q) үш жиындармен анықталатын, $\langle a, b \rangle \in Q$ кортеждері салыстырылатын элементтердің жұбын көрсетеді.

1.13-мысал. Курстық жобалауға тапсырманы студенттерге беру кезінде: A – студенттер жиыны десек; B – құрылған тапсырмалардың жиыны. $Q \subseteq A \times B$ графигі әр студентке қандай тапсырма орындау керек екенін анықтайды (сәйкестік орнатылған).

1.14-мысал. Студенттер тобының жиыны A , B -бағалардың жиыны, ал онда емтихан тапсыру нәтижелерінің кестесі $Q \subseteq A \times B$ сәйкес графигін көрсетеді.

Жалпы жағдайда A және B жиындарының барлық элементтер арасында сәйкестік орнатылуы мүмкін емес.

A жиыны сәйкестіктің жолдау аймағы, ал B қабылдау аймағы деп аталады. $a \in A$ элементтерінен тұратын $Pr_1 Q$ проекциясын – сәйкестіктің *анықталу аймағы*, ал $b \in B$ элементтерінен тұратын $Pr_2 Q$ сәйкестіктің *мәндерінің аймағы* деп атайды. Егер $Pr_1 Q = A$ болса, онда сәйкестікті әр жерде анықталған (басқа жағдайда – дербес анықталған) дейді. $Pr_2 Q = B$ жағдайында, сәйкестік – *сюръективті* деп аталады.

(X, Y, Q) әр жерде анықталған сәйкестік берілсін, оның анықтау және жолдау аймақтары бірдей болса, онда X , Y бейнеленеді деп атап, $Q: X \rightarrow Y (\forall x \in X)$ белгілейді. Жалпы

жағдайда $x \in X$ элементіне қандайда бір $Qx \subseteq Y$ ішжиын сәйкес болса, ол x элементінің бейнесі деп аталады. Ондай бейнені – *көпмәнді* дейді. Мысалы, ағылшын-орыс сөздігінде, A орыс сөздерінің жиынына, оған сәйкес Θ ағылшын сөздерінің жиыны беріледі. Осы бейнелеу көпмәнді. Бірмәнді бейне кезінде $x \in X$ элементіне сәйкес, тек қана бір $y \in Y$ элементі қойылады.

Енді функция деген ұғымды қарастырайық. Бірмәнді бейнелеу кезінде, f -пен белгіленген сәйкестіктің графигінің бірдей бірінші және әртүрлі екінші компоненттері бар кортеждері болмасын. Мұндай бейнелеу – *функция* деп аталады: $f: X \rightarrow Y$.

$\text{Pr}_1 f = x$ анықталу аймағының x элементін аргумент, ал мәндер аймағында f элементінің бейнесін функция мәні деп атайды. Бұл кезде (x, y, f) сәйкестігі $y = f(x)$ түрінде жазылады.

Егер X жолдау аймағының ақырлы жиыны болса, онда функция кесте түрінде, $\langle x, y \rangle$ жұптардың ақырлы тізімі ретінде көрсетіледі. Функцияның y мәніне сәйкес келетін, берілген x аргументінің мәнін өрнектесе, онда есептеу процедурасы формула арқылы беріле алады. Егер X және Y нақты сандардың жиыны болса, онда $y = f(x)$ функциясының графигі, R^2 нақты жазықтығының ішінде жатқан, нүктелер жиыны арқылы көрсетіледі. Әр нүкте белгілі бір $\langle x, y \rangle \in f$ кортежге сәйкес. F жиынының графикалық көрсетуін – *функцияның графигі* деп атайды.

Сәйкестіктің жолдау аймағы t уақыт мезеттерінің, X реттелінген жиын болуы мүмкін. Онда X жиынының f бейнесі R нақты сандар жиынының: $f: T \rightarrow R$, $\langle t, x \rangle$ жұптарынан құрастырылады, мұндағы $t \in T$ және $x \in R$, функцияның *лездік мәні* деп аталады. Барлық $t \in T$ үшін $\langle t, x \rangle$ лездік мәндерінің жиыны, $x(t)$ уақыт функциясы деп аталады. Егер t

мына $(-\infty, \infty)$ аралығында қандай да болсын, мәнді қабылдаса, онда оны - *үздіксіз уақыт функциясы* деп атайды.

Кейде уақытты натурал $\{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$ шексіз сандар жиыны ретінде қарастыруға болады. Онда $x(t)$ дискреттік уақыт функциясы болады және оның графигі n уақыт мезеттеріндегі $\langle n, x \rangle$ саналатын жиынтығын көрсетеді.

Енді жиындар арасындағы қатынастарды қарастырамыз. Жиынның өзіне-өзі бейнеленуі – бейненің дербес жағдайы болып саналады: $\Gamma: X \rightarrow X$. Бір жиында берілген (X, Y) жұбымен анықталатын бейнені – *қатынастар* деп атайды. X жиыны қатынастың берілу аймағы болады да, ал оның графигі келесі түрде жазылады: $\Gamma \subseteq [X \times X = X^2]$.

Әрбір бөлек алынған қатынастардың реттелген жұбын X^2 жиынының екі элементімен салыстыратын болсақ, ондай қатынасты – *бинарлы* деп атайды. Символды түрде x және y элементтері арасындағы бинарлық қатынасты $x\Gamma y$ деп жазамыз.

Бұл қатынастар келесі қасиеттерді иемденеді:

- рефлексивтік - $(\forall x \in X), [x\Gamma x]$;
- симметриялық - $(\forall x, y \in X), [x\Gamma y \rightarrow y\Gamma x]$;
- транзитивтік - $(\forall x, y, z \in X), [x\Gamma y, y\Gamma z \rightarrow x\Gamma z]$;
- тепе-теңдік - $(\forall x, y \in X), [x\Gamma y, y\Gamma x \rightarrow x=y]$.

Ақырлы жиындағы бинарлық қатынастар, $|X| \times |X|$ өлшемді матрица түрінде берілуі мүмкін. Осы матрицалардың жолдары мен бағандары X жиынының элементтеріне сәйкес келеді. Элементтерінің арасында қатынастар болған жағдайда, оған сәйкес жолмен және бағанмен қиылысуына 1, егер болмаса, 0 қойылады.

1.15-мысал. $\{1, 2, 3, 4\}$ қандар тобының жиыны үшін қан құю кезіндегі үйлесушіліктің қатынасы график түрінде анықталады,

$$\Gamma = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}.$$

Осыған сәйкес қатынастар матрицасының түрі төмендегідей болады:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.16-мысал. $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ натурал сандар жиынында x және y бірге тең емес ортақ бөлгіші бар $x\Gamma y$ қатынасы берілсін. Бұл жерде, элементтер арасындағы қатынастар, рефлексивтік және симметриялық қасиеттерді иемденеді. Қатынастар матрицасы мына түрде табылады:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Егер осы айтылым $(\forall x, y \in X)[x\Gamma y]$ дұрыс болса, $(A=X^2)$ қатынасты – *толық қатынас*, ал егер ол дұрыс болмаса, онда *бос* деп аталады ($\Gamma=\emptyset$). Толық қатынас тек бірлерден тұратын, ал бос қатынас, элементтері тек қана, нөлге тең матрицамен беріледі.

Айтылым төмендегідей берілсе:

$$(\forall x, y \in X), [x\Gamma y \rightarrow x=y],$$

ол теңдік қатынасты анықтайды. Егер қатынас рефлексивті, симметриялы және транзитивті болса, онда оны – *эквиваленттік қатынас* деп атайды.

Теңсіздіктің қатынасы, жиын элементтерінің орналасу ретін анықтайды. Қатаң емес рет $x \leq y$ қатынастары келесі қасиеттермен анықталады:

- рефлексивтік – $x \leq x$;
- тепе-теңдік – $(x \leq y, y \leq x) \rightarrow x = y$;
- транзитивтік – $(x \leq y, y \leq z) \rightarrow x \leq z$;

Қатаң рет қатынасы $x < y$ келесі қасиеттермен сипатталады:

- антирефлексивтік – $x < x$ жалған;
- симметриялы еместік – $(x < y \text{ және } y < x)$ жалған;
- транзитивтік – $(x < y \text{ және } y < z) \rightarrow x < z$.

Қатынастарға жиындардағы сияқты операцияларды да (бірігу, қию, айыру) қолданады.

Бақылау сұрақтары.

1. Қалай функция деген ұғым жиындар арқылы енгізіледі?
2. Функцияның анықталу және мәндер аймақтары қалай енгізіледі?
3. Қандай бейнелеу қатынас деп аталады?
4. Қалай бинарлы қатынастарды матрица арқылы анықтайды?
5. Қандай қатынастар эквивалентті деп аталады?
6. Қандай қатынас толық деп аталады?
7. Қатаң емес рет қатынастың негізгі қасиеттерін көрсетіңіз?
8. Қатаң рет қатынастың негізгі қасиеттерін көрсетіңіз?

2. ГРАФТАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗДЕРІ

Графтар арқылы жиын элементтер арасындағы әртүрлі қатынастарды көрсетеді. Графтармен түсінікті түрде күрделі басқару құрылғылардың жұмыс істеуін және құрылымын көрсетуге болады.

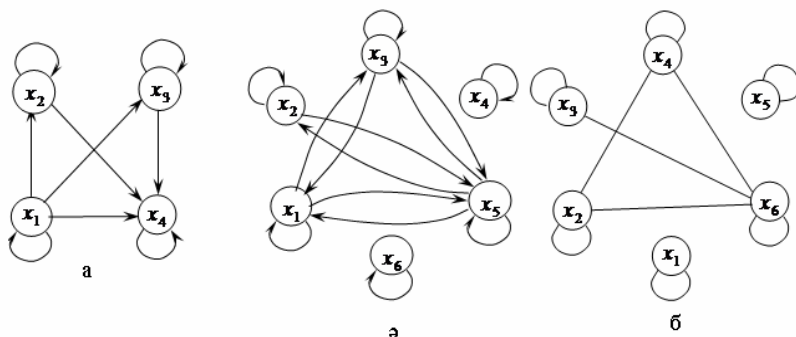
Көлік және коммуникациялық есептері, жобалау процесін автоматтандырылуы, массалық қызмет ету жүйелері, ойындар теориясы граф желілері арқылы жазылады. Кодтау теориясында тиімді кодтау және кері кодтау құрылғыларын синтездеуінде граф модельдері кең қолданылады.

2.1. Негізгі ұғымдар мен анықтамалар

Келесі X нүктелерді өзара қосатын U сызықтар жиындары қосылып $G(X,U)$ математикалық объект ретінде *абстрактті графты* құрастырады. Граф арқылы бинарлы қатынастарды көрсетуге болады. $x \in X$ нүктелерін жұптап қосатын сызықтардың жиыны, X жиынды өз-өзіне бейнелеуін береді. Жұптар жиыны немесе (x_i, x_j) кортеждер $\Gamma: X \rightarrow X$ қатынастың графигін көрсетеді. Онда, X және Γ жиын жұбымен графты беруге болады:

$$G=(X, \Gamma).$$

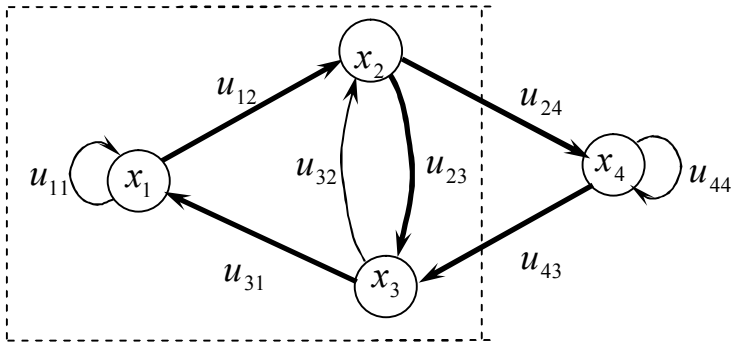
Жазықтағы ұштары бар сызықтармен жалғастырылған нүктелер немесе дөңгелекшіктер арқылы геометриялық түрде граф беріледі. Онда нүкте немесе дөңгелекшік *графтың төбесі* деп, ал оларды өзара жалғастыратын бағытталған сызықтар *доғасы* деп аталады. Осы төбелердің арасында $x_i \Gamma x_j$ қатынас орнатылады. x_i және x_j төбелердің арасында қатынас берілсе, онда доғаның ұшы x_i -дан x_j -ға бағытталады. Бұл жалпы жағдайда $x_j (\Gamma x_i)$ деп жазылады. Былай айтқанда Γx_i - x_j элементінің бейнесін белгілейді. 2.1а-суретінде қан топтарының өзара қатынасын көрсететін граф келтірілген, ал 2.1 а,б-суреттегі графтар, бірден алтыға дейін натурал сандардың ортақ бөлгіштерінің қатынасын анықтайды.



2.1-сурет

Графтар арқылы жиын элементтерінің арасындағы қатынастарды түсінікті түрде көрсетуге болады. Осыған орай келесі мысалыны қарастырайық. Түзбе комбинациясы жиын деп берілсін $X\{00, 01, 10, 11\}$. Осы жиын элементтерінің өзара қиылысуын граф ретінде табайық. Өзара екі n -разрядты түзбе комбинациялары қиылысу үшін алған комбинацияның бірінші $n-1$ -разряды, келесі комбинацияның, соңғы $n-1$ -разрядтарымен бірдей болуы тиіс. Онда, Γ графигі, қиылысқан түзбелер комбинация бейнелеулерін анықтайды. Жиын элементтерін x рет нөмірі бар сандармен белгілейік. x_1 – элементі өзімен және x_2 -элементімен қиылысады. Оны былай жазады $\Gamma x_1 = \{x_1, x_2\}$. Осыған ұқсас қалған элементтердің графиктері келесі түрде жазылады: $x_2 - \Gamma x_2 = \{x_3, x_4\}$, $x_3 - \Gamma x_3 = \{x_1, x_2\}$, $x_4 - \Gamma x_4 = \{x_3, x_4\}$. Екіразрядты түзбе комбинацияларының қиылысу қасиетін көрсететін граф 2.2-суретте келтірілген.

Егер екі төбе өзара бағытталған доғалармен қосылса, онда граф – бағытталған граф деп аталады. Төбеге келген және шыққан доғалар осы төбеге түйісті дейді. 2.2-суретте u_{12} доғасы x_1, x_2 төбелеріне түйісті. Осыған ұқсас x_1, x_2 төбелері u_{12} доғасына түйісті. Тек қана бір төбеге түйісті доға, тұзақ деп аталады. Бірде-бір доғасына түйісті емес төбе – оңаша төбе дейді. Мысалы 2.1б-суреттегі 1 төбе.



2.2 - сурет

Екі төбе доғамен қосылса, олар *сыбайлас* деп аталады. Мысалы 2.2-суреттегі x_1 және x_2 төбелері. Онда ортақ төбесі бар доғаларда сыбайлас болады. Мысалы: u_{12} , u_{32} , u_{23} және u_{24} доғалар.

Егер $S^* = (u_{12}, u_{24}, u_{43})$ доғалар тізбегінде, әрбір доғаның соңы келесі доғаның басымен дәл болса, онда ол *графтағы маршрут* немесе *жол* деп аталады. Барлық доғалардың ұзындығын бірге тең деп алып, жолдың ұзындығын тізбектегі доғалардың санымен табуға болады. Мысалы $d(S^*) = 3$.

Жолдың бір доғасының ұзындығы $l(u)$ санына тең болса, онда жолдың ұзындығын, доғалар ұзындығының қосындысына тең деп алады. Қарастырылған жол, өткен төбелер тізбегімен де беріледі, $S^* = (x_1, x_2, x_4, x_3)$.

Соңғы және бастапқы төбелер дәл болса, онда жол *контур* деп аталады. Контурда аралық төбелер әртүрлі болса, осыған қоса бастапқы және соңғы төбелер дәл болмаса, онда контур элементарлы дейді. Осыны ескерсек, тұзақ ұзындығы бірге тең контур болады.

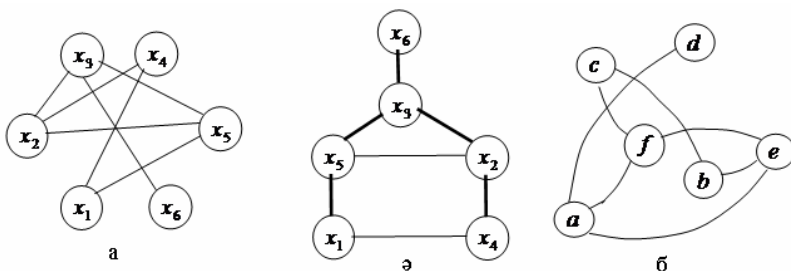
Егер екі салыстыралатын төбелердің қатынасы симметриялы болса ($x_i \Gamma x_j \rightarrow x_j \Gamma x_i$), онда төбелер екі қарсы бағытталған доғалармен қосылады. Мысалы: 2.1ә-сурет. Осы жағдайда төбелердің арасындағы байланыс ұшсыз сызықтармен

көрсетіледі. Графта қандай болсын екі төбе арасындағы қатынас симметриялы қасиетіне иемденсе, онда ол симметриялы бинарлы қатынасты көрсетіп, *бағытталмаған граф* деп аталады. Осындай графта төбелерді қосатын сызықтарды *қабырғалары* дейді. Жол және контур ұғымдары *тізбек және цикл* ұғымдарына ауыстырылады. Келесі 2.1б-суретінде бірден алтыға дейін натурал сандарының ортақ бөлгішін көрсететін бағытталмаған граф, 2.1ә-суретіндегі бағытталған графқа ұқсас етіп көрсетілген.

Егер $G=(X, U)$ графта кейбір төбелерін және оған түйісті доғаларын (қабырғаларын) алып тастасақ, онда $G'=(X', U')$ ішграфты табамыз. Табылған ішграфты беретін жиындар былай жазылады $X' \subseteq X, U' \subseteq U$. Мысалы ретінде 2.2-суретте берілген графта x_4 төбесін және u_{24}, u_{43}, u_{44} доғаларын алып тастасақ, онда нәтижелік ішграф пунктир сызықпен аймағы шекараланып көрсетілген. Графтың кейбір доғаларын алып тастап, ал төбелерін толық қалдырсақ, онда дербес немесе суграф $G''=(X'', U'')$ табылады. Мысалы 2.2-суретте берілген графта u_{11}, u_{32}, u_{44} доғаларын алып тастасақ, нәтижелік дербес граф жуан сызықпен суреттеліп көрсетілген.

Графтың суреті бойынша олардың бірдей екенін анықтау оңай емес. Оның себебі, төбелердің орналасуы 2.3а, 2.3ә-суреттері, белгіленуі және доғалардың түрлерінің әртүрлі болуы да мүмкін, 2.3б-суретіндегідей.

Төбелердің немесе доғалардың аттарын өзгертіп графтардың тепе-теңдік түрлендіруі орындалса, нәтижесінде *изоморфты графтар* табылады. Сәйкестік (символын қолданып өзара бірімәнді сәйкестік $X \leftrightarrow X'$ және $U \leftrightarrow U'$ берілсе, онда $G=(X, U)$ және $G'=(X', U')$ графтар изоморфты. Осыдан келесі жазулар ақиқат $(x_i, x_j) \in X \leftrightarrow (x'_i, x'_j) \in X'$ және $u_{ij} \in U \leftrightarrow u'_{ij} \in U'$.



2.3-сурет

Графтардың изоморфтығы эквиваленттік қатынасына сәйкес келеді.

Бақылау сұрақтары.

1. Графты құрастыратын негізгі элементтерін айтыңыз?
2. Қандай төбелер сыбайлас деп аталады?
3. Қандай төбе мен доға түйісті деп аталады?
4. Қандай доғалар тізбегін жол немесе графтағы маршрут деп атайды?
5. Бағытталған және бағытталмаған графтардың айырмашылықтарын келтіріңіз?
6. Қандай графтар изоморфты деп аталады?

2.2. Графтардың матрицалармен көрінісі

X және Γ жиындармен немесе сурет ретінде берілген қандай болсын граф *сыбайлас және түйістілік* матрицалармен көрсетіледі.

Сыбайлас $R[r_{ij}]$ квадрат матрицасының жолдарымен бағандары графтың төбелеріне сәйкес етіп құрастырылады. Бағытталған графта i жолындағы және j бағандағы матрицаның элементі келесі ереже бойынша табылады:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер } x_i \text{ төбесінен } x_j \text{ төбесіне доға болған жағдайында} \\ 0, & \text{доға болмаған жағдайда} \end{cases}$$

2.1-мысал. Берілген 2.2-суреттегі графтың сыбайлас матрицасы былай жазылады:

$$R = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Бас диагональдағы бірлер, графтың тұзақтары болғанын анықтайды.

2.2-мысал. Бағытталмаған графта сыбайлас матрицасының жол мен бағанның қиылысында бір болса, онда төбелер өзара қабырғамен жалғасады. Осы ереже бойынша 2.3-суреттегі графтың сыбайлас матрицасы, 1.16-мысалдағы қатынас матрицасына сәйкес болып табылады:

$$R = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Бағытталмаған графта қатынас қасиеті симметриялы болған соң $r_{ij} = r_{ji}$. Осыдан барлық қабырғалар, матрицаның бас

диагоналын қосып жоғары оң жағындағы үшбұрышпен анықталады. Сол себептен бағытталмаған графты үшбұрыш матрицасымен беруге болады.

Сыбайлас матрицаның басқа түрлері де болады. Қатынастардың *зілдеме матрицасында* r_{ij} элементі бірге емес, ал осы (x_i, x_j) байланыстың салмағына тең. *Ұзындықтар матрицасында* бұл элемент қабырғаның немесе доғаның ұзындығына тең.

Тіктөртбұрышты түйістілік $E = [e_{ij}]$ матрицасында жолдар графтың төбелеріне, ал бағандар қабырғаларына немесе доғаларына сәйкес. Бағытталмаған графта i -жолы j -бағанымен қиылысындағы элемент келесі ережемен табылады:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер қабырға } x_i \text{ төбесіне түйісті болған жағдайында,} \\ 0, & \text{доға болмаған жағдайда} \end{cases}$$

2.3-мысал. 2.16-суреттегі графтың түйістілік матрицасы былай жазылады:

E матрицаның әрбір бағанасында екіден көп емес бірлер бар, оның себебі қабырғаның екі ғана төбелерді жалғастыруы. Егер бағанда тек қана бір рет бір кездессе, ол тұзақ бар екенін көрсетеді.

$$E = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Бағытталған графта түйістілік матрицасының элементтері келесі ережеден табылады:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер доға } x_i \text{ төбесінен басталған жағдайында,} \\ -1, & \text{егер доға } x_i \text{ төбесінде аяқталған жағдайында,} \\ 0, & \text{егер доға } x_i \text{ төбесіне түйісті емес жағдайында,} \\ 2, & \text{егер доға } x_i \text{ тұзаққа түйісті болған жағдайында.} \end{cases}$$

2.4-мысал. 2.2-суреттегі графтың түйістілік матрицасы былай жазылады:

$$E = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{23} & u_{24} & u_{31} & u_{32} & u_{43} & u_{44} \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \left| \begin{array}{cccccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right| \end{matrix}$$

Түйістілік матрицасы сыбайлас матрица сияқты графты анықтайды. Бір матрица белгілі болса, екінші матрицаны табу бірнеше әдістері бар.

Түйістілік матрица арқылы графтардың изоморфтығын білуге болады. Ол үшін бір графтың түйістілік матрицасының бағандары мен жолдарының орындарын ауыстыру керек. Егер келесі ауыстырудан кейін тепе-тең матрицалар табылса, онда графтар изоморфты.

Осы матрицаларға қоса, графтарды жазу үшін контурлар, аралықтар тағы басқа матрицалар қолданылады.

Бақылау сұрақтары.

1. Бағытталған графтың сыбайлас матрицасы қалай құрастырылады?

2. Бағытталмаған графтың сыбайлас матрицасы қалай құрастырылады?
3. Бағытталған графтың түйістілік матрицасы қалай құрастырылады?
4. Бағытталмаған графтың түйістілік матрицасы қалай құрастырылады?

2.3. Графтардың түрлері және олармен жұмыс істеу амалдары

Егер екі төбе бірнеше қабырғалармен немесе бір бағытты доғалармен жалғастырылса, онда *граф* – *мультиграф* деп аталады. Ал төбелерді жалғастыратын қабырғалар мен доғаларды еселі дейді. Қабырғалары жоқ, тек қана оңаша төбелерден тұратын граф *нөл-граф* деп аталады.

Бағытталмаған графта төбеге түйісті қабырғалардың саны осы *төбенің локальды дәрежесі* $p(x)$ деп белгіленеді. Егер бағытталмаған графта

$$\forall x \in X [p(x) = m],$$

онда барлық төбелердің дәрежелері бірдей болып, граф *m* дәрежелі біртекті деп аталады. Бағытталған графта төбеден шыққан доғалар *шыға беріс жарты дәрежесі* $p^+(x)$, ал төбеге келген доғалар *кіре беріс жарты дәрежесі* $p^-(x)$ деп аталады. Егер

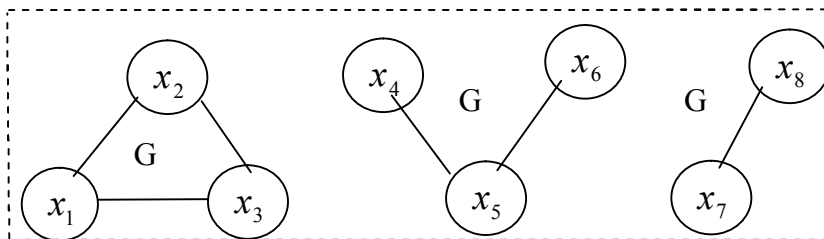
$$\forall x \in X [p^+(x) = p^-(x) = m],$$

онда бағытталған графты *m* дәрежелі біртекті дейді. Тұзақ төбенің дәрежесін есептегенде екі рет есептеледі, бірінші рет кіре беріс, екінші рет шыға беріс доға деп. 2.2-суреттегі граф екінші дәрежелі біртекті графтың мысалын көрсетеді.

Графтың барлық төбелері қос-қостап түйіндес болса, былай айтқанда қандай болсын төбелердің арасында қабырға болғаны, онда граф *толық* деп аталады. Толық графта *m* төбе болса, ол

қоса $m - 1$ дәрежелі біртекті граф болады. Оның себебі әрбір төбе қалған $m - 1$ төбелермен жалғасқаны.

Егер екі төбе тізбекпен байланысса, *граф байланысқан* дейді. Бағытталған граф жағдайында доғалардың бағыты ескерілмейді. Егер қандай болсын төбелер жұптарын жалғастыратын доғалардың бағытын ескертіп жол табылса, граф *қатаң байланысқан* дейді. Графта байланыс шарттары орындалмаса, онда ол байланысқан ішграфтардан құрастырылған деп есептеледі және олар байланыс компоненталары деп аталады. 2.4-суретте үш компоненттен құрастырылған граф көрсетілген.



2.4 - сурет

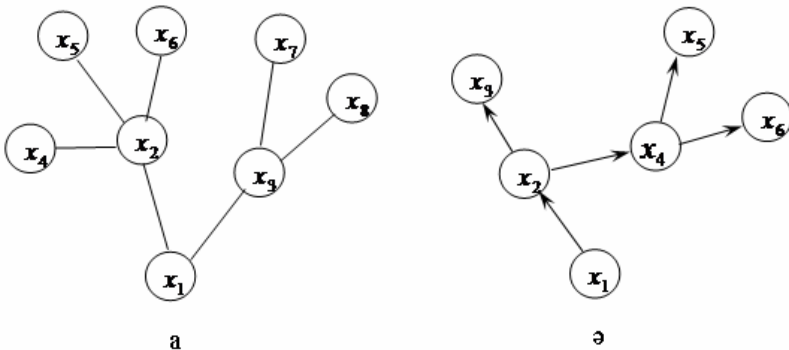
Эйлер және Гамильтон графтары байланысқан графтардың түрлері болады. Эйлер графында барлық қабырғалардан өтетін бір элементарлы цикл бар, ол Эйлер циклі деп аталады. Гамильтон графында барлық төбелерден тек қана бір рет өтетін Гамильтон циклі бар болады.

Байланысқан графтарға *тал* жатады. Тал – деп циклдары жоқ, ақырлы байланысқан бағытталмаған графты атайды. Осындай мысал 2.5а-суретінде көрсетілген. Мұндағы x_1 төбесі *талдың түбірі* – деп, ал қалған локальды дәрежесі бірге тең төбелер *ұштары* деп аталады. 2.5а-суретінде $x_4, \dots, x_8$ төбелері. Байланысқан бағытталған граф, x_1 түбірімен және қалған тек қана бір доға келетін төбелерінен құрастырылса, ол талға ұқсас дейді. Мысалы 2.5ә-суретіндегі граф.

Циклсіз байланыссыз граф *орман* – деп аталады. Орманның байланыстыру компоненттер ретінде талдар, кейбір қабырғалар немесе оңаша төбелер болуы мүмкін. Оңаша төбелер талдың дербес жағдайы деп есептеледі. 2.6-суретте осындай графтың мысалы келтірілген.

Егер талдың барлық төбелерін 0 немесе 1 мен белгіленсе, 2,6-суреттегідей, онда түбірден ұштар төбелеріне дейін жолдарын екілік сандар комбинацияларымен көрсетуге болады: 000, 001, 010, 011.

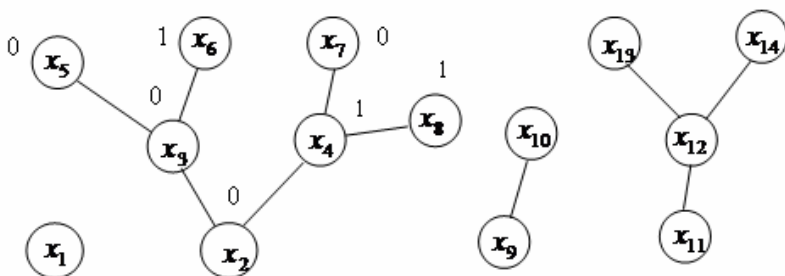
Графтың дербес $G = (X, U)$ графы, тал болса, онда ол G графын *бүркеулейтін тал* – деп аталады. 2.3а-суретінде осындай ағаш жуан сызықпен көрсетілген. Ең аз қабырғалар саны графты циклсіз графқа айналдыратын *циклматикалық сан* дейді.



2.5-сурет

Егер графта n төбе, m қабырға, k байланыстыру компоненттер болса, онда циклматикалық сан былай табылады:

$$v(G) = m - n + k.$$



2.6-сурет

2.3-суреттегі графтан бүркеулейтін ағашты табу үшін $\nu(G) = 7 - 6 + 1 = 2$, екі қабырғаны алып тастау керек.

Бақылау сұрақтары.

1. Қандай граф мультиграф деп аталады?
2. Нөл-графпен толық графтың айырмашылықтарын айтыңыз?
3. Қандай байланысқан граф тал деп аталады?
4. Цикломатикалық сан және оның есептеуін айтыңыз?

2.4. Графтармен жұмыс істеу әдістері

Графтар жиында бинарлы қатынастарды көрсетеді. Сол себептен олармен біріктіру, қиылыстыру, көбейту (композициялау), тура көбейту және тағы басқа операцияларын орындауға болады. Осы тізімдегі кейбір операцияларын қарастырайық.

$G_1 = (X_1, U_1)$ және $G_2 = (X_2, U_2)$ графтарын біріктіру операциясының нәтижесінде граф табылады. Осы графтың төбелер жиыны, екі қосымша графтардың төбелер жиындарының бірігуімен $X = X_1 \cup X_2$, ал әрбір төбенің бейнесі, сәйкес төбелер бейнелерінің бірігуімен $\forall x_i \in X [Gx_i = G_1x_i \cup G_2x_i]$ анықталады.

2.5-мысал. Мысалы ретінде, 2.7 а,ә-суреттегі графтарды біріктірейік.

Ол үшін келесі операцияларды орындау қажет. Ең алдымен біріктірілген графтың төбелерін табайық:

$$X = X_1 \cup X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} \cup \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_8\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$$

Енді әрбір төбенің бейнелерін табу қажет:

$$\Gamma x_1 = \Gamma_1 x_1 \cup \Gamma_2 x_1 = \{x_4, x_5, x_6\} \cup \{x_4, x_5, x_6\} = \{x_4, x_5, x_6\},$$

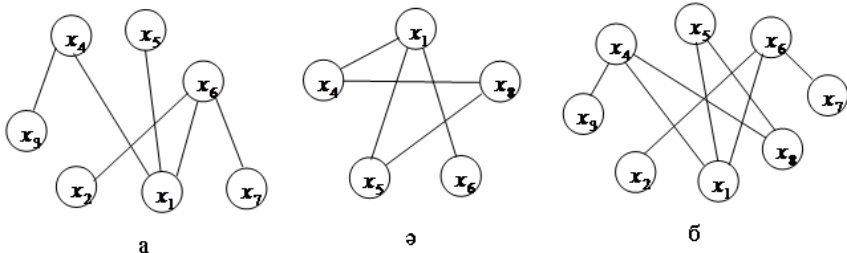
$$\Gamma x_2 = \Gamma_1 x_2 = \{x_6\}, \Gamma x_3 = \Gamma_1 x_3 = \{x_4\},$$

$$\Gamma x_4 = \Gamma_1 x_4 \cup \Gamma_2 x_4 = \{x_1, x_3\} \cup \{x_1, x_8\} = \{x_1, x_3, x_8\},$$

$$\Gamma x_5 = \Gamma_1 x_5 \cup \Gamma_2 x_5 = \{x_1\} \cup \{x_1, x_8\} = \{x_1, x_8\},$$

$$\Gamma x_6 = \Gamma_1 x_6 \cup \Gamma_2 x_6 = \{x_1, x_2, x_7\} \cup \{x_1\} = \{x_1, x_2, x_7\},$$

$$\Gamma x_7 = \Gamma_1 x_7 = \{x_6\}, \Gamma x_8 = \Gamma_2 x_8 = \{x_4, x_5\}.$$



2.7-сурет

Нәтижесінде табылған графтың суреті 2.7б-суретте көрсетілген. Осыған ұқсас бірнеше графтарды біріктіруге болады:

$$G(X, \Gamma) = \bigcup_{i=1}^n G_i(X_i, \Gamma_i).$$

Екі графтардың қиылысу операциясының нәтижесінде граф табылады. Осы граф мынадай болады:

$$G(X, \Gamma) = G_1(X_1, \Gamma_1) \cap G_2(X_2, \Gamma_2).$$

Табылған графтың төбелері келесі теңдеу арқылы табылады:

$$X = X_1 \cap X_2,$$

ал әрбір төбенің бейнесі былай анықталады:

$$\forall x_i \in X, [\Gamma x_i = \Gamma_1 x_i \cap \Gamma_2 x_i].$$

2.6-мысал. Жоғарыдағы мысалда келтірілген (2.7 а, ә-сурет) графтарды өзара қиылыстырайық. Нәтижесінде табылған графтың төбелері мынадай болады:

$$\begin{aligned} X = X_1 \cap X_2 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} \cap \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_8\} = \\ &= \{x_1, x_4, x_5, x_6\}. \end{aligned}$$

Әрбір төбенің бейнесі былай анықталады:

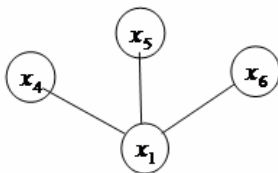
$$\Gamma x_1 = \Gamma_1 x_1 \cap \Gamma_2 x_1 = \{x_4, x_5, x_6\} \cap \{x_4, x_5, x_6\} = \{x_4, x_5, x_6\},$$

$$\Gamma x_4 = \Gamma_1 x_4 \cap \Gamma_2 x_4 = \{x_1, x_3\} \cap \{x_1, x_8\} = \{x_1\},$$

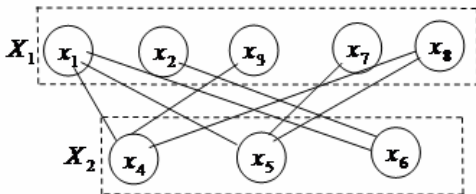
$$\Gamma x_5 = \Gamma_1 x_5 \cap \Gamma_2 x_5 = \{x_1\} \cap \{x_1, x_8\} = \{x_1\},$$

$$\Gamma x_6 = \Gamma_1 x_6 \cap \Gamma_2 x_6 = \{x_1, x_2, x_7\} \cap \{x_1\} = \{x_1\}.$$

Осы графтың қиылысуын көрсететін граф 2.8-суретте көрсетілген. Біріктіруге ұқсас бірнеше графтарды қиылыстыруға болады: $G(X, \Gamma) = \bigcap_{i=1}^n G_i(X_i, \Gamma_i).$



2.8-сурет



2.9-сурет

Графтардың төбелерін бояуға болады. Онда $G(X, \Gamma)$ графтың төбелерін k ішжиынға бөлу керек $X_1, X_2, \dots, X_k$. Әрбір ішжиынның екі төбесі сыбайлас болмауы тиіс. Егер әрбір төбені бір түске боясақ, онда бірде бір графтың доғасы бір түске боялған төбелеріне түйісті болмауы қажет. Осындай графты *k-хроматикалық граф* деп атайды. Ал графтың ең аз ішжиындарға бөліну саны $\gamma(G)$ – *хроматикалық саны* деп аталады.

Практикалық жағынан өте маңызды рөлді қосбөлікті немесе *бихроматикалық графтар* $\gamma(G) = 2$ атқарады. Осындай графты былай белгілейді $G(X_1, X_2, U)$, мұндағы U – қабырғалар арқылы X_1 және X_2 төбелер ішжиындары өзара жалғасады. Қосбөлікті графтың мысалысы 2.7 б-суреттегі граф, оны 2.9-сурет сияқты көрсетуге болады. Бихроматикалық қасиеттің мағынасы графта тақ санды ұзындығы бар элементарлы циклдарының болмағандығы. Егер қандай болсын графта бихроматикалық шарт орындалмаса, осындай графты кейбір қабырғаларын алып, оның кейбір бөлігін қосбөлікті суграф ретінде табуға болады. Осы жағдайда ең үлкен қабырғалар саны бар суграф бағытталмаған графтың максимальды қосбөлікті бөлігі болып табылады.

Бақылау сұрақтары.

1. Граф байланысқан деп қандай жағдайда аталады?
2. Тал және орман деп қандай графтарды атайды?
3. Графтарды қалай бір-бірімен біріктіреді?
4. Графтарды қалай бір-бірімен қиылыстырады?
5. Осы операцияларды орындағанда бағытталған және бағытталмаған графтардың айырмашылықтары?
6. Қандай графтар бихроматикалық деп аталады?

3. МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЛОГИКАНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Дискретті басқару құрылғылардың, ақпаратты тасымалдау процестерінің логикалық функциялар арқылы модельдері құрылады. Логика алгебрасының математикалық ақпараты арқылы күрделі схемаларды жобалау кезіндегі тиімді шешімді табу есебін шығаруға болады.

3.1. Логикалық функциялар және оларды жазу әдістері

Математикалық логикасы формалды аппаратының үлкен қолданбалы мағынасы бар. Осы аппараттың құрамына айтылымдар теориясы кіреді. Электрөлшеу аспаптардың жиынын универсал жиыны деп алайық. І-дің элементтерін әртүрлі қасиеттер бойынша жіктеуге болады. А-амперметрлер ішжиыны, В-вольтметрлер, С- магнитті электрлі аспаптар D-цифрлы аспаптар. Енді егер келесі сөйлемді айтсақ «бұл аспап вольтметр ме», ол ақиқат болу үшін аспап В тобынан болуы тиіс. Осындай тұжырымдар ақиқат немесе жалған болуы мүмкін, оларды айтылым деп атайды. Егер А жиынында айтылым ақиқат болса, ол осы айтылымның *ақиқаттық жиыны* дейді.

Айтылымға жай жиындар сәйкес болса олар жай айтылымдар деп аталады. Егер ақиқат жиыны күрделі болса, мысалы $A \cup B \cap C$, онда ол *құрама айтылым* дейді. Енді айтылымның мағынасын қарастырмай тек қана оны ақиқат немесе жалған болсын дейік. Онда кейбір логикалық операциялар арқылы бастапқы айтылымдардан құрама айтылымдарды құрастыруға болады. Элементтер айтылымдар жиыны логикалық операциялар және бірқатар ережелер мен заңдар жиынтығы *логика алгебрасы* деп аталады. Ол *Буль алгебрасының* бір түрі болып табылады.

Айтылымдар шамалар тек қана «ақиқат» немесе «жалған» мәндеріне тең болатын, логика алгебрасында *логикалық айнымалылар* деп аталады. Логикалық айнымалылар латын

алфавитінің индекстері бар немесе жоқ әріптерімен белгіленеді. «Ақиқат» немесе «жалған» мәндері 1 және 0 сәйкес дейді.

Логикалық айнымалылар мен операциялар жаңа айтылымдары туындайды, оның мәні 0 немесе 1 тең болады. Кейбір айнымалылардың жиынын алайық $\{x, y, z\}$. Айнымалылардың мәндеріне байланысты логикалық операциялардың нәтижелері әртүрлі болады. Айнымалылар мәндерінің комбинацияларын *жинақ* десек, онда осы жинақтар жиынның нәтижелер жиынына $\{0, 1\}$ бірімәнді бейнелеуді беруге болады. Осындай функционалды байланыс бар деп айтуға болады. $f\{x, y, z\}$ функция және оның аргументтері тек қана 0 немесе 1 тең болса, онда ол *логикалық немесе Буль функциясы* деп аталады. Айнымалылардың санына байланысты *бір, екі немесе көп айнымалы логикалық функциялар* болуы мүмкін.

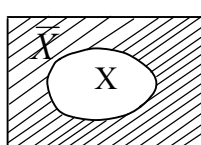
Функцияны кестемен, формуламен немесе графикпен көрсетуге болады. Айнымалылар жинақтарына сәйкес мәндерін ақиқаттық кесте ретінде логикалық функцияларды беруге болады.

3.1.1. Негізгі логикалық операциялар

Ең көп қолданылатын логикалық операцияларға – терістеу, қосу және көбейту жатады. Олар арқылы қандай болсын логикалық функцияны құрастыруға болады.

Терістеу немесе *инверсия* логикалық операциясы былай жазылады $f(x) = \bar{x}$. Оның Эйлер-Венн диаграмасы 3.1а-суретте көрсетілген. Ол жиындар теориясының жиынның қосымшасы деген ұғыммен байланысты. Осы логикалық операцияның ақиқаттық кестесі 3.1ә-суретінде көрсетілген. Былай айтқанда егер айнымалының мәні 0 тең болса, онда терістеу операциясының нәтижесінде айнымалы 1 тең болады, ал егер бастапқы жағдайда айнымалының мәні 1 тең болса онда терістеу операцияның нәтижесінде 0 тең болып қалады. Терістеу осы операциясын *инвертор* деген логикалық элемент арқылы орындауға болады. Осы логикалық элементін белгілеу 3.1б-суретінде көрсетілген. Бұл операция қатаң бір орынды

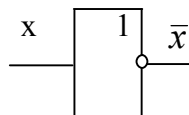
операция болып табылады. Оның себебі тек қана бір айнымалының инверсиясын табуға болатындығы.



а

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

ә



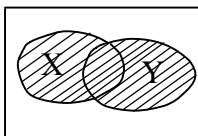
б

3.1-сурет

Келесі логикалық операция *логикалық қосу* немесе *дизъюнкция* деп аталады. Оны былай «+» немесе былай «V» белгілейді. Оны былай жазуға болады:

$$f(x,y)=x+y=x \vee y.$$

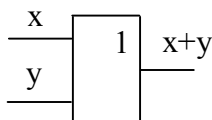
Осы операцияның Эйлер-Венн диаграмасы 3.2а-суретте көрсетілген. Ол жиындар теориясының жиындарды біріктіру сияқты. Осы логикалық операцияның ақиқаттық кестесі 3.2ә-суретінде көрсетілген.



а

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ә



б

3.2-сурет

Былай айтқанда егер бір айнымалының мәні 1 тең болса, онда логикалық қосу операциясының нәтижесі де 1 тең болады. Логикалық қосу операциясын *дизъюнктор*, *НЕМЕСЕ-элементі* деген логикалық элементтер арқылы орындауға болады. Осы логикалық элементін белгілеу 3.26-суретінде көрсетілген.

Эйлер-Венн диаграммалар арқылы келесі теңдеулердің ақиқаттығын дәлелдеуге болады:

$$1) x+1=1, \quad (x \cup I=I),$$

$$2) x+0=x, \quad (x \cup 0=x),$$

$$3) x + \bar{x} = 1, \quad (x \cup \bar{x} = I),$$

$$4) x+x=x \quad (x \cup x=x).$$

Келесі логикалық операция *логикалық көбейту* немесе *конъюнкция* деп аталады. Оны көбейту символы арқылы немесе былай « $\wedge$ » белгілейді. Оны былай жазуға болады:

$$f(x,y)=xy=x \wedge y.$$

Осы операцияның Эйлер-Венн диаграмасы 3.3а-суретте көрсетілген. Ол жиындар теориясының жиындарды қиылыстыру операциясы сияқты. Осы логикалық операцияның ақиқаттық кестесі 3.3ә-суретінде көрсетілген. Былай айтқанда егер екі айнымалының мәні 1 тең болса, онда логикалық көбейту операциясының нәтижесі де 1 тең болады. Логикалық көбейту операциясын *конъюнктор*, *ЖӘНЕ-элементі*, *дәлдес* деген логикалық элементтер арқылы орындауға болады. Осы логикалық элементін белгілеу 3.3б-суретінде көрсетілген.

Логикалық көбейту xy функциясына келесі теңдеулер ақиқат:

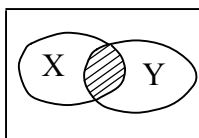
$$1) x1=x \quad (x \cap I=x),$$

$$2) x0=0 \quad (x \cap 0 = 0),$$

$$3) x\bar{x} = 0, \quad (x \cap x=0),$$

$$4) xx=x \quad (x \cap x=x).$$

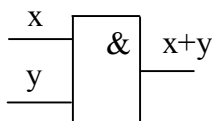
Логикалық қосу, көбейту операциялары бірнеше айнымалылармен де өткізе беріледі.



а

x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ә



б

3.3 - сурет

3.1.2. Логика заңдары мен теңдеулері

Логика алгебрасында заңдар пара-пар түрлендірулер дейді. Енді теңдеудің пара-парлығын ақиқаттық кестелер арқылы дәлелдейді.

Логика алгебрасының негізгі заңдарын және теңдеулерін келтірейік.

1) Орын ауыстыру (коммутативтік) заңы:

$$xy = yx \quad x + y = y + x.$$

2) Терімділік (ассоциативтік) заңы:

$$xyz = x(yz) = (xy)z, \\ x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z.$$

3) Үлестірімділік (дистрибутивтік) заңы:

а) дизъюнкцияларға сәйкес конъюнкция:

$$x(y + z) = xy + xz,$$

ә) конъюнкцияға сәйкес дизъюнкция:

$$(x+y)(x+z)=x+yz.$$

4) инверсия (де Морган) заңдары:

а) инверсиялар дизъюнкциясы конъюнкциялар инверсиясына тең:

$$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\overline{abc...xy} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}... \overline{x} + \overline{y}$$

ә) инверсиялар конъюнкциясы дизъюнкциялар инверсиясына тең:

$$\overline{\overline{x} + \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}}$$

$$\overline{a + b + c...x + y} = \overline{a} \overline{b} \overline{c}... \overline{x} \overline{y}$$

б) ұсынған де Морган заңдарының жалпыламасы:

$$\overline{f(a, b, c, ..., x, y, z)} = f(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, ..., \overline{x}, \overline{y}, \overline{z},)$$

5) $x = x$.

6) Кейбір функциясын және а айнымалының конъюнкция кезінде сәйкес айнымалылар функцияда 1, ал инверсиялылары 0 ауыстырылады. Дизъюнкция болған жағдайда қарама-қарсы түрлендіру өткізіледі.

$$a \cdot f(a, \overline{a}, b, c, ..., z) = a \cdot f(1, 0, b, c, ..., z);$$

$$\overline{a} \cdot f(a, \overline{a}, b, c, ..., z) = \overline{a} \cdot f(1, 0, b, c, ..., z);$$

$$a \cdot f(a, \overline{a}, b, c, ..., z) = a \cdot f(1, 0, b, c, ..., z);$$

$$\overline{a} \cdot f(a, \overline{a}, b, c, ..., z) = \overline{a} \cdot f(1, 0, b, c, ..., z);$$

Осы теңдеулерден келесі тепе-теңдіктер табылады, олар жойылу заңдары деп аталады:

$$a + ab = a; a + ab + ac + ... + az = a;$$

$$a(a + b) = a; a(a + b)(a + c)...(a + z) = a.$$

7) Жабыстыру заңдары:

а) толық жабыстыру

$$ab + a\bar{b} = a \leftrightarrow a = a \cdot 1 = a(b + \bar{b}) = ab + a\bar{b};$$

$$(a + b)(a + \bar{b}) = a \leftrightarrow a = a + 0 = a + b\bar{b} = (a + b)(a + \bar{b}).$$

б) толық емес жабыстыру

$$ab + a\bar{b} = a + ab + a\bar{b};$$

$$(a + b)(a + \bar{b}) = a(a + b)(a + \bar{b});$$

в) жалпыланған жабыстыру

$$ab + bc + c\bar{a} = ab + \bar{a}c,$$

$$(a + b)(b + c)(c + \bar{a}) = (a + b)(c + \bar{a}).$$

$$8) (a + b)(\bar{a} + c) = ac + \bar{a}b$$

Осы заңдарды және теңдеулерді қолданып, күрделі логикалық функцияларды түрлендіруге болады.

3.1-мысалы:

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= (\bar{a}b + cd)(a + bc)(\bar{a}d + bc) + (a + c)(a + \bar{b}d)(a + cd) = \\ &= (1\bar{b} + cd)(0 + bc)(1d + bc) + (a + c)[(a + \bar{b})(a + d)] \cdot [(a + c)(a + d)] = \\ &= (0 + 1d)bc(d + 1) + (a + c)(a + \bar{b})(a + d) = bcd + (a + \bar{b}c)(a + d) = \\ &= bcd + a + \bar{b}cd = a + cd(b + \bar{b}) = a + cd \end{aligned}$$

Бұл мысалда b айнымалысы берілген бастапқы функциясында жалған болған екен.

Логикалық түрлендіру кезінде операцияларды орындауда келесі тәртіп орнатылған:

- 1) инверсия,
- 2) конъюнкция,
- 3) дизъюнкция,
- 4) басқа операциялар.

Жақшалар арқылы логикалық теңдеуде кейбір көрсету және операцияларды орындау тәртіпті өзгертуге болады.

Бақылау сұрақтары.

1. Логикалық айнымалы және функция ұғымдарын түсіндіріңіз?

2. Терістеу немесе инверсия операциясын түсіндіріңіз?
3. Логикалық қосу немесе дизъюнкция операциясын түсіндіріңіз?
4. Логикалық көбейту немесе конъюнкция операциясын түсіндіріңіз?
5. Логика алгебрасының негізгі заңдарын айтыңыз?

3.2. Элементарлы логикалық функциялар

Әрбір логикалық айнымалы тек қана екі мәнге тең болады, сол себептен егер n -айнымалы болса, онда толық жинағы шекті болып ақырлы санға тең

$$m = 2^n.$$

3.2-мысал. Демек, $n=2$ онда жинақтардың саны $m = 2^n = 4$. Жинақтардың жиыны былай жазылады: $\{00, 01, 10, 11\}$.

Барлық жинақтардың жиыны логикалық функциясының анықтау аймағын береді. Әрбір жинақта логикалық функцияның 0 немесе 1 мәні сәйкес. Сол себептен барлық әртүрлі n аргументтен функциялардың саны шекті және тең:

$$N = 2^m = 2^{2^n}$$

Егер $n=2$ онда әртүрлі функциялардың саны $N = 2^{2^2} = 16$. 3.1-кестесінде $f(x,y)$ екі айнымалы функциялардың барлық түрлері жиналған.

3.1- кесте

Элементарлы логикалық функциялар

X	0	0	1	1	Функция
Y	0	1	0	1	
f_0	0	0	0	0	0
f_1	0	0	0	1	xy
f_2	0	0	1	0	$\overline{xy}$
f_3	0	0	1	1	x

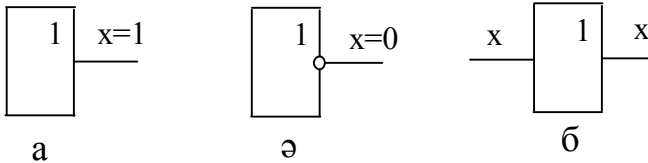
3.1-кестенің жалғасы

1	2	3	4	5	6
f_4	0	1	0	0	$\overline{xy}$
f_5	0	1	0	1	y
f_6	0	1	1	0	$x \oplus y$
f_7	0	1	1	1	$x + y$
f_8	1	0	0	0	$\overline{x + y}$
f_9	1	0	0	1	$\overline{x \oplus y}$
f_{10}	1	0	1	0	$\overline{y}$
f_{11}	1	0	1	1	$y \rightarrow x$
f_{12}	1	1	0	0	$\overline{x}$
f_{13}	1	1	0	1	$x \rightarrow y$
f_{14}	1	1	1	0	$\overline{xy}$
f_{15}	1	1	1	1	1

Берілген 3.1-кестені f_7 және f_8 функциялар арасында сызықпен бөлсек, онда функциялар бір-біріне осы сызыққа симметриялы инверсті болады. Мысалы $f_8 = \bar{f}_7$, $f_9 = \bar{f}_6$... Осы кестемен функциялардың түрлері бойынша бірнеше түрлерге бөлуге болады.

Келесі f_0 және f_{15} функциялардың мәндері айнымалылардың мәндерінен тәуелсіз, онда x және y жалған аргументтер деп айтуға болады. Осы функциялар *константа функциялар* деп аталады. $N_0 = 2^{2^0} = 2$ олардың саны екіге тең. Жоғарыда айтылған f_0 функциясы *нөлдік* деп аталады, оған сәйкес

логикалық элемент *нөлдің генераторы* дейді, оның белгілеуі 3.4а-суретінде көрсетілген. Оған симметриялы f_{15} функция *бірлік* деп аталады, оны іске асыратын элемент *бірдің генераторы* 3.4ә-суретінде көрсетілген.



3.4 - сурет

Келесі функцияларды алсақ f_3 , f_5 , f_{10} және f_{12} олардың бір айнымалысы жалған болып табылады. Былай айтқанда олар бір айнымалының функциялары.

Олардың саны $N_1 = 2^{2^1} = 4$, төртке тең. Осындай функциялардың саны екіге тең, олар f_3 және f_5 болып табылады. Осы функциялар *қайталағыш* немесе *тавтология* деп аталады оларға сәйкес келетін логикалық элемент – қайталағыш 3.4б-суретінде көрсетілген. Ал f_{10} және f_{12} функциялар қарастырылған f_3 және f_5 функциялардың инверсиялары болады.

Келесі жазылған $f_7 = x + y$ және $f_1 = xy$ функциялар жоғарыда қарастырылған дизъюнкция мен конъюнкция болып табылады. Осы функциялардың инверсиялары $f_7 = \bar{f}_8$, $f_{14} = \bar{f}_1$ арқылы қандай болсын басқа логикалық функциясын көрсетуге болады.

Алынған $f_8 = \overline{x + y} = \overline{x \vee y} = x \downarrow y$ функция *НЕМЕСЕ-ТЕРІС*, *Пирс функциясы*, *Пирс нұсқамасы* деп аталады. Осы функцияға келесі арақатыстар ақиқат болады:

$$\overline{x + 0} = \bar{x}, \quad \overline{x + 1} = 0, \quad \overline{x + x} = \bar{x}, \quad \overline{x + \bar{x}} = 0.$$

Қарастырылған функцияны іске асыратын логикалық элемент 3.5а-суретінде көрсетілген. Ол *НЕМЕСЕ-ТЕРІС элементі*, *Пирс элементі* – деп аталады.

Енді $f_{14} = \overline{xy} = \overline{x \wedge y} = x / y$ функциясын қарастырайық. Бұл функция *ЖӘНЕ-ТЕРІС*, *Шеффер функциясы*, *Шеффер штрихы* деп аталады. Оған келесі арақатынастар ақиқат:

$$\overline{x0} = 1, \quad \overline{x1} = \bar{x}, \quad \overline{xx} = \bar{x}, \quad \overline{x\bar{x}} = 1.$$

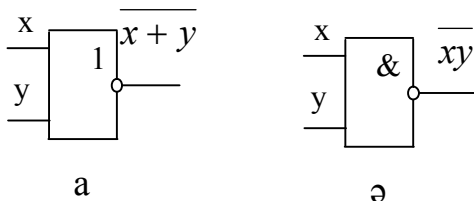
Қарастырылған функцияны іске асыратын логикалық элемент 3.5ә-суретінде көрсетілген. Ол *ЖӘНЕ-ТЕРІС элементі*, *Шеффер элементі* – деп аталады.

Келесі функция $f_6 = x \oplus y$ екiнiң модулімен қосуын көрсетеді. Оны былай жазуға болады:

$$f_6 = x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y = (x + y)(\bar{x} + \bar{y}).$$

Оған келесі теңдеулер ақиқат:

$$x \oplus 0 = x, \quad x \oplus x = 0, \quad x \oplus 1 = \bar{x}, \quad x \oplus \bar{x} = 1.$$



3.5-сурет

Жоғарыда келтірілген 3.1-кестеден келесі тұжырым жасауға болады, $f_6 = 1$ тең болу үшін $x=0, y=1$ немесе $x=1, y=0$ тең болуы қажет. Сол себептен бұл элемент эквивалентсіз арақатысты көрсетеді.

Стандартты екiнiң модулімен қосу логикалық элемент 3.6 а-суреттерінде көрсетілген.

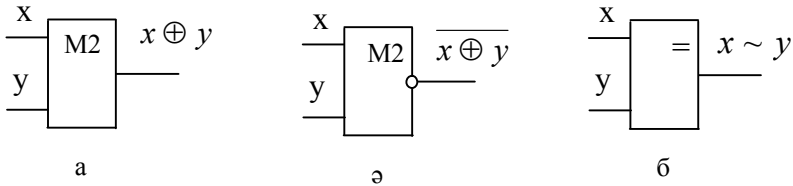
Осы функцияның инверсиясы $f_9 = \bar{f}_6$ функциясы болады. Оған келесі арақатыстар ақиқат:

$$f_9 = x \oplus y = \overline{x y} = \overline{x} \overline{y} = (\bar{x} + y)(x + \bar{y}) = x y + \bar{x} \bar{y}.$$

Бұл функция $f_9 = 1$ тең болу үшін x және y бірдей болуы қажет. Сол себептен оны *эквиваленттілікті көрсететін* дейді. Тағы да бұл элементті былай жазады. $f_9 = x \sim y$. Оған келесі теңдеулер ақиқат:

$$x \sim 0 = \bar{x}, \quad x \sim 1 = x, \quad x \sim x = 1, \quad x \sim \bar{x} = 0.$$

Бұл функцияға екі логикалық элемент сәйкес келеді, ол: 3.6 а-суреттегі *теріс екі модулімен қосу элементі* және 3.6 б-суреттегі *эквиваленттілік элементі* көрсетілген.



3.6-сурет

Келесі $f_{13} = x \rightarrow y$ функция *импликация* деп аталады (егер x болса, онда y деп оқылады). Жоғарыда берілген 3.1-кестеден $f_{13} = 1$ тең болу үшін $x=0$ немесе $y=1$ тең болуы тиіс. Ал $f_{13} = 0$ тең болу үшін $x=1$ және $y=0$ тең болуы тиіс. Сол себептен бұл функцияны былай жазуға болады:

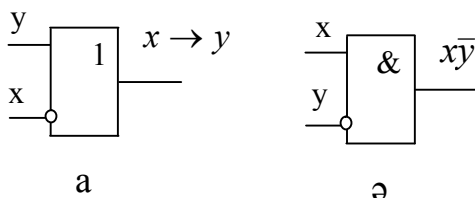
$$f_{13} = x \rightarrow y = \bar{x} + y.$$

Осы функцияны іске асыратын стандартты логикалық элемент *импликация* деп аталады, оның белгіленуі 3.7а-суретінде көрсетілген.

Қарастырылған функцияға *инверсті функция* болып, *инверстік импликация функциясы* болады. Оны былай жазады

$$f_2 = \overline{x \rightarrow y} = \overline{\bar{x} + y} = x y.$$

Оның мәні $f_2 = 0$ тең болу үшін $y=1$, ал x мәні қандай болса да болуы мүмкін. Сол себептен бұл логикалық функция *рұқсат еместік* деп аталады. *Рұқсат еместік* деген логикалық элементтің белгіленуі 3.7-суретінде көрсетілген.



3.7-сурет

Келесі $f_{11} = y \rightarrow x$ және $f_4 = \overline{y \rightarrow x} = \bar{x}y$ қарастырылған f_{13} және f_2 функциялардан айырмашылығы айнымалылардың орналасуында. Сол себептен олардың айырмашылықтары ешқандай өзгеріске әкелмейді.

Қарастырылған бір және екі айнымалы функциялар элементарлы логикалық функциялар деп аталады. Олар арқылы канша болсын айнымалы функцияларды құрастыруға болады.

Суперпозиция принципі мағынасы келесі де:

$$f_1(a, b, c, d) = f_1[f_2(a, b), f_3(c, d)]$$

Логикалық функциялардың жинағы *толық* деп аталу үшін олар арқылы қандай болсын функцияны көрсетуге болуы тиіс.

Конъюнкция, дизъюнкция, инверсия функциялары толық жинақтардың бірі. Үш функцияның орнына бір функция да болуы мүмкін.

Мысалы ретінде және теріс функциясын алсақ (Шеффер штрихы), онда қалған функциялардың жазылуы мынадай болады:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{x}} &= \overline{xx} = x / x, \\ xy &= \overline{\overline{xy}} = \overline{(x / y)(x / y)} = (x / y) / (x / y), \end{aligned}$$

$$\overline{\overline{x + y}} = \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{xy}} = (x / x) / (y / y).$$

Келесі осындай функция болып немесе теріс элементі болады, оның қолдаумен қалған логикалық функциялардың жазылуы мынадай болады:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{x}} &= \overline{\overline{x + x}} = x + x, \\ \overline{\overline{xy}} &= \overline{\overline{x + y}} = \overline{\overline{x + x + y + y}} = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y), \\ \overline{\overline{x + y}} &= \overline{\overline{x + y + x + y}} = \overline{\overline{x + y + x + y + x + y}} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y). \end{aligned}$$

Бақылау сұрақтары.

1. Екі айнымалысы бар элементарлы логикалық функция қалай құрастырылады?
2. Негізгі функцияларды және оларға сәйкес логикалық элементтерді айтыңыз?
3. Қандай логикалық функциялар жинақтары толық деп аталады?
4. Шеффер штрихы немесе Пирс нұсқамасы функциялар арқылы қалай басқа логикалық функциялар жазылады?

3.3. Логикалық функциялардың нормалды және кемел нормалды тұлғалары

Қандай болсын бір айнымалының инверсиялы немесе инверсиялысыз конъюнкциясы (дизъюнкциясы) бір реттен аспай кездесе, ол *элементарлы* – деп аталады. Айнымалылар саны конъюнкцияның (дизъюнкцияның) *рангін* анықтайды.

Қандай болсын элементарлы конъюнкциялардың дизъюнкциясы *нормалды дизъюнктивтік тұлғасы (НДТ)* деп аталады, мысалы:

$$f = x + x\bar{y}z + xy + \bar{x}y\bar{z}.$$

Қандай болсын элементарлы дизъюнкциялардың конъюнкциясы *нормалды конъюнктивтік тұлғасы (НКТ)* деп аталады, мысалы:

$$f = x(x + \bar{y} + z)(x + y)(\bar{x} + y + \bar{z}).$$

Де Морган заңдарымен НДТ инверсиясы НКТ түрінде немесе керісінше жазылуы ақиқат:

$$f = x\bar{y} + \bar{x}y = (\bar{x} + y)(x + \bar{y}).$$

Әрбір функцияға бірнеше тепе-тең НДТ (НКТ) болады, мысалы:

$$f = a + \bar{a}b = a + \bar{a}b + ab.$$

Егер НДТ-де (НКТ-де) айнымалылардың саны басқа жазуларына қарағанда минимальды болса, онда ол *минимальды* – деп аталады.

Бірдей рангісі бар элементарлы функциялардың НДТ-сін, кемел нормалды дизъюнктивтік тұлғасы дейді. Мысалы:

$$f = x\bar{y}z + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}.$$

Қандай болсын НДТ -ден КНДТ-ге өтуге болады. Ол үшін:
– кіші рангілі конъюнкцияларға жетпейтін айнымалыларды келесі тепе-теңдікті $x + \bar{x} = 1$ көбейткіш ретінде алып, мұндағы x жетпейтін айнымалы, осы конъюнкцияға көбейткіш етіп қосамыз,

– жақшаларды ашып қайталанатын конъюнкцияларды $x + x = x$ ережемен жазуды қысқартамыз.

3.3-мысал. Берілген $f = x\bar{y}z + xz$ функциясына сәйкес КНДТ-сін құрастыру қажет.

Есепті шығару үшін жоғарыда айтылған алгоритмге сүйеніп, екінші конъюнкцияның қысқа екені көрініп тұр. Оған жетпейтін $y + \bar{y} = 1$ айнымалына қосайық, онда:

$$f = x\bar{y}z + xz(y + \bar{y}) = x\bar{y}z + xyz + x\bar{y}z = x\bar{y}z + xyz.$$

КНДТ келесі қасиеттерге иемденеді:

– егер КНДТ $f=1$ тең болса, онда бір элементарлы конъюнкция міндетті түрде 1 тең болуы тиіс,

– егер КНДТ $f=0$ тең болса, онда бірде бір элементарлы конъюнкция міндетті түрде 1 тең болмауы тиіс.

КНДТ-ға кіретін элементарлы конъюнкциялар *минтерм* немесе *бірдің конституенталары* деп аталады. Оның себебі минтермдердің арасында кейбіреулері бірге тең болғанда КНДТ бірге тең болғаны. Осыдан КНДТ бірлердің конституент-

таларының дизъюнкциясы дейді. Әрбір дизъюнкция ақиқат кестесі бойынша жинақтың бірге тең екенін көрсетеді. Ақиқат кестесі бойынша функцияның КНДТ-сін құрастыруға болады.

Бірлердің конституенталарын құрастыру ережесі келесі де: егер айнымалы 1 тең болса, онда конституентаға айнымалы инверсиялысыз, ал 0 тең болса, онда инверсиямен кіреді. Осыған орай келесі мысалыны қарастырайық.

3.4-мысал. Келтірілген 3.2-кестемен берілген ақиқаттық кестесі арқылы КНДТ-ні құрастырыңыз. Жоғарыда келтірілген ережеге сүйеніп, бірдің конституенталарын табайық. Онда:

$$f = \overline{x}\overline{y}z + x\overline{y}z + x\overline{y}\overline{z} + x\overline{y}z + x\overline{y}z.$$

Дизъюнктивтік тұлғалар

3.2-кесте

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

сияқты конъюнктивтік тұлғаларда құрастырылады. Бірдей ранкті элементарлы дизъюнкциялардан құрастырылған логикалық функция кемел нормалды конъюнктивтік тұлғасы (КНКТ) деп аталады.

КНКТ-нің қасиеттері мынадай болады:

- егер берілген жинақта $f=0$, онда КНКТ-де бір элементарлы конъюнкция міндетті түрде нөлге тең болуы тиіс,
- егер берілген жинақта $f=1$, онда КНКТ-де бірде бір элементарлы конъюнкция міндетті түрде нөлге тең болмауы тиіс.

КНКТ-ні макстермдардың конъюнкциясы немесе нөлдің конституенталары дейді. Олар жинақтағы функцияның нөлге теңдігін көрсетеді. Нөлдің конституенталарының құрастыру заңы келесі де: әрбір айнымалы конституентаға инверсиялысыз кіру үшін оның жинақтағы мәні 0 тең болуы тиіс. Егер айнымалының жинақтағы мәні 1 тең болса, онда ол конституентаға инверсиялы түрінде кіреді. Осыған орай мысалыны қарастырайық.

3.5-мысал. Келтірілген 3.2-кестемен берілген ақиқаттық кестесі арқылы КНКТ-ні құрастырыңыз. Жоғарыда келтірілген ережеге сүйеніп, нөлдің конституенталарын табайық. Онда:

$$f = (x + y + z)(x + \bar{y} + z)(x + \bar{y} + \bar{z}).$$

Минтерм және макстермдердің суперпозициялары КНДТ-ні және КНКТ-ні көрсетіп *логикалық функцияның канондық тұлғалары* дейді. Тепе-тең функцияларда олардың КНДТ-рі және КНКТ-рі бірдей болады. Осындай дәлдесу функциялардың тепе-теңдігін дәлелдеу әдісі болып табылады.

3.3.1. Логикалық функцияларды минимальдау

Логикалық функцияның ақиқаттық кестесі арқылы құрастыруға болады. Бұл жағдайда табылған теңдеу өте ұзын болуы мүмкін. Функцияның жазуын қысқартуы оны минимальды нормалды тұлғасына келтіру *минимальдау* деп аталады. Ең жалпы әдіс тікелей ықшамдау.

Егер функция КНДТ түрінде берілсе ықшамдау келесі ережемен орындалады:

1) барлық бір айнымалы айырмашылығы бар конъюнкциялардың жұптарын тауып, мысалы $xуz$ және $xу\bar{z}$ толық жабыстыру заңын қолданып табамыз $xуz + xу\bar{z} = xу(z + \bar{z}) = xу$. Жабыстырудың нәтижесінде табылған конъюнкциялар *импликанта* деп аталады. Әрбір конъюнкция бірнеше рет қолданылуы мүмкін. Толық жабыстыру операциясы бірнеше рет қайталанып көрші конъюнкциялар қалмағанша өткізіледі. Нәтижесінде қысқартылған нормалды тұлға табылады, оған кіретін конъюнкциялар – жалпы импликанталар деп аталады. Әрбір жалпы импликанта бірнеше бірдің конституенталардың бөліктері болады.

2) Қысқартылған нормалды тұлғасына жалпылау жабыстыру заңын қолданып, артық импликанталарды жоямыз. Мысалы: $xу + yz + z\bar{x} = xу + \bar{x}z$. Тізбектеп өткізілген түрлендірулер нәтижесінде ақырлы тұлға табылады. Бір

логикалық функцияда бірнеше ақырлы тұлғалар болуы мүмкін. Ең аз ұзындықты ақырлы тұлға – функцияның минимальды тұлғасы болады.

3.6-мысал. Жоғарыда қарастырылған 3.4-мысалдағы функцияны минимальдау қажет. Осы функциямен жоғарыда келтірілген ережеге сүйеніп орындаймыз.

$$\begin{aligned} f &= \overline{x}yz + x\overline{y}z + x\overline{y}\overline{z} + xy\overline{z} + xyz = (\overline{x}yz + x\overline{y}z) + \\ &(\overline{x}y\overline{z} + xy\overline{z}) + (x\overline{y}z + x\overline{y}\overline{z}) + (xy\overline{z} + xyz) = \\ &= \overline{y}z + (x\overline{z} + xz) + (x\overline{y} + xy) = \overline{y}z + x + x = x + \overline{y}z. \end{aligned}$$

Енді бастапқы теңдеу КНКТ түрінде берілсін дейік. Онда осы теңдеуге толық жабыстыру заңын қолданады, мысалы $(x + y)(x + \overline{y}) = x$. Ары қарай жақшаны ашып үлестірімділік заңды қолданып, ұқсас мүшелерге жою операциясын өткізеді. Табылған НДТ-ні жоғарыда көрсетілген әдістермен қысқартады.

3.7-мысал. Жоғарыда қарастырылған 3.5-мысалдағы функцияны минимальдау қажет. Осы функциямен жоғарыда келтірілген ережеге сүйеніп орындаймыз.

$$\begin{aligned} f &= (x + y + z)(x + \overline{y} + z)(x + \overline{y} + \overline{z}) = [(x + y + \overline{z})(x + \overline{y} + z)](x + \overline{y} + z)(x + \overline{y} + \overline{z}) = \\ &(x + z)(x + \overline{y}) = x + \overline{y}z. \end{aligned}$$

Бақылау сұрақтары.

1. Нормалды дизъюнктивтік және конъюнктивтік тұлғалар қалай құрастырылады?
2. Кемел нормалды дизъюнктивтік және конъюнктивтік тұлғалар қалай құрастырылады?
3. Қалай логикалық функциялар минимальданады?

4. МАТРИЦАЛАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

4.1. Матрицалар теориясына кіріспе

Алгебралық және дифференциалды теңдеулерін ықшамды және ыңғайлы жазу үшін матрицаларды қолдануы тиімді. Осыған орай матрицалар есептеу жағынан компьютерлермен зерттеу өткізгенде оңтайлы. Матрицалар теориясының әдістері қазіргі автоматтық басқару жүйелер теориясында кең қолданылады. Сол себептен осы математикалық аппарат міндетті түрде автоматика және басқару саласында дайындалатын мамандарға қажет.

Комплексті немесе нақты сандар тіктөртбұрышты кесте түрінде реттеліп жазылса, ол *тіктөртбұрышты матрица* – деп аталады. Матрицаның жолдары m , ал бағандары n болсын дейік, онда оны былай жазады:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Бұл анықтамада матрица жай кесте емес, ол біртұтас математикалық объект, оның элементтерімен әртүрлі математикалық операцияларды: қосу, көбейту тағы басқаларды орындауға болады. Матрицаның элементтері қос индексті $a_{i,j}$ деп белгіленеді, мұндағы i – жолды, ал j – бағанды көрсетеді. Егер жолдар n , ал бағандар m сандарына тең болса, матрицаның өлшемі $(n \times m)$ дейді. Жолдар мен бағандар саны бірдей болған кезде матрицаның өлшемі $(n \times n)$ болады, мынадай матрица *шаршы матрица* деп аталады. Бірдей индекстері бар $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементтері матрицаның *бас диагоналында* орналасқан дейді. Бір жолдан тұратын матрица $(1 \times m)$, жол-векторы, ал бір бағаннан құрастырылған матрица $(n \times 1)$ баған-векторы деп аталады.

Егер бас диагоналындағы элементтері нөлге тең болмай, ал қалған элементтері нөлге тең болса,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

диагональды матрица табылады. Диагональды матрицаның бас диагоналындағы элементтер бір-біріне тең болса, онда *скаляр матрицасы* дейді. Бас диагоналындағы барлық элементтері бірге тең болса, *бірлік матрица* табылады. Бас диагоналындағы элементтермен коса оның төмен немесе жоғары орналасқан элементтері нөлге тең болмай, ал қалған элементтері нөлге тең болғанда, оны *үшбұрышты матрица* деп атайды. Жоғарғы және төменгі үшбұрышты матрицалар былай жазылады:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Егер матрицаның барлық элементтері нөлге тең болса, *нөлдік матрица* табылады және ол **0** деп белгіленеді. Екі матрицаның өлшемдері мен олардың барлық сәйкес элементтері бірдей болса, онда екі матрицаны бір-біріне тең дейді. Матрицаны өзінің бас диагонали бойынша бұрып өзгертсе, онда оның жолдары мен бағандары бір-бірінің орындарымен ауысады. Бұл айна түріндегі шағылу операциясы *транспонирлеу* деп аталады және табылған матрица A^T деп белгіленеді. Егер квадратты емес матрицаларды транспонирлесек, оларды ең алдымен квадратты түрге түрлендіру қажет. Транспонирлеу операциясы келесі қасиеттерге иемденеді:

$$(A^T)^T = A; (A + B)^T = A^T + B^T; (AB)^T = B^T A^T; \\ \det A^T = \det A.$$

Транспонирлеу кезінде матрица өзінің мәнін өзгертпесе $A = A^T$, онда ол бас диагоналы бойынша симметриялы болып *симметриялы* деп аталады. Келесі көбейту $AA^T = C$ табылған матрицада симметриялы болады, оның себебі:

$$C^T = (AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T = C.$$

Егер A матрицасын транспонирлеу кезінде нәтижелік матрицасының таңбасы өзгерсе $A = -A^T$, онда матрица *кососимметриялы* деп аталады. Кососимметриялы матрицасының бас диагональ элементтері нөлге тең болады. Бір A^* матрицасын транспонирлесе және оның элементтері A матрицасының элементтеріне комплексгі түйіндес болса, былай айтқанда $A = [A^*]^T$, онда A^* *эрмит матрицасы* дейді. Нақты элементтері бар симметриялы матрица эрмит матрицасы да болады. Егер A матрицасына келесі теңдік ақиқат болса $A = -[A^*]^T$, онда ол *косоэрмит матрицасы* деп аталады. Симметриялы және эрмит матрицалары тек қана квадрат матрицалары болады.

Матрица деген ұғыммен анықтауыш деген ұғым байланысты. Егер матрица деп әртүрлі математикалық операцияларды орындауға болатын реттелінген сандар жүйесін атасақ, ал оның *анықтаушы* деп белгілі әдіспен есептелетін санды атайды және былай белгілейді $\det A$ немесе $|A|$.

Матрицаның жолдары мен бағандарынан құрастырылған жолдар мен бағандардың қандай болсын анықтаушы *минор* – деп аталады. Мысалы, A матрицаның k -ретіндегі миноры k жолдар және k бағандар қиылысындағы матрицаның элементтер ретін өзгертпей құрастырылған k -ретіндегі анықтаушын атайды. Максимальды нөлге тең емес матрицаның минорлары A матрицаның *рангі* деп аталады. Максимальды сызықты тәуелсіз жолдар немесе бағандар санын матрицаның рангісі көрсетеді.

Егер матрицаның анықтаушы нөлге тең болса, онда ол *ерекше немесе өзгеше матрицасы* дейді. Қандай болсын A өзгеше емес квадрат матрицасының кері матрицасы A^{-1} бар. Матрица кері болу үшін

$$AA^{-1} = E,$$

мұндағы E – бірлік матрица.

Берілген матрицаның тек қана бір кері матрицасы бар. Жоғарыдағы (1.1) теңдеуден келесі тұжырымдарды жасауға болады: $(A^{-1})^{-1} = A$, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Матрица *ортогональды* болу үшін, келесі теңдік $A^T A = E$ орындалу қажет. Ортогональды матрицалар әрқашан өзгеше емес.

Ортогональды матрицаларға мына теңдіктер ақиқат:

$$A^{-1} = A^T; AA^T = E.$$

A матрицасы *унитарлы* болу үшін $A^* A = E$, мұндағы A^* – комплексті түйіндес транспонирленген матрицасы. Унитарлы матрицасы әрқашан өзгеше емес. Оған келесі арақатыстар ақиқат: $A^* = A^{-1}$, $AA^* = E$. Нақты ортогональды матрица унитарлы болады екен.

Кері матрицаның әрбір элементін табу үшін, транспонирленген матрицаның $A_{i,j}$ алгебралық толықтауышын Δ матрицаның анықтаушына бөлу қажет:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{bmatrix}$$

Үлкен дәрежелі алгебралық толықтауыштарын есептеу оңай есеп болмайды. Оны есептеу үшін компьютерді қолдану

тиімді сияқты, оған карамастан мұнда әдей жасалған әдістер қолданылады. Есеп өте жеңіл диагональды матрицалармен өткізіледі.

Матрицалар бір-бірімен қосылу, алу, скалярға көбейту элементарлы алгебраның заңдарына бағынады. Матрицалардың бір-біріне көбейту операциясы оған арналған әдіспен орындалады. Егер A және B матрицалардың көбейтіндісі C матрицасы болады. Бұл матрицаның элементтері табу үшін бірінші матрицаның i жолдарын екінші матрицаның j бағандарына көбейтіп, ары қарай табылған көбейтінділерді қосу қажет. Былай айтқанда:

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

мұндағы $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$, $i = 1, 2, \dots, n$;
 $j = 1, 2, \dots, n$.

Екі матрицаны бір-біріне көбейтуін 3×3 өлшемді деп алып, мысал ретінде көрсетейік:

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix},$$

мұндағы $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$, $c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$,
 $c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}$, $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$,
 $c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$, $c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$,
 $c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$, $c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$,
 $c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$.

Екі матрицаны A және B бір-біріне көбейту үшін A матрицаның бағандар саны және B матрицаның жолдар саны тең болу тиіс. Осы себепке байланысты тіктөртбұрышты матрицаны баған-векторына көбейтсек баған-векторы табылады. Жол-векторын баған-векторына көбейтсек, бір элементтен тұратын матрица болады.

Жалпы скалярлы алгебра келесі негізгі алты заңдарға бағынады:

- 1) Қосудың коммутативтік заңы: $a + b = b + a$;
- 2) Қосудың ассоциативтік заңы: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- 3) Көбейтудің коммутативтік заңы: $ab = ba$;
- 4) Көбейтудің ассоциативтік заңы: $(ab)c = a(bc)$;
- 5) Көбейтудің дистрибутивтік заңы: $(a + b)c = ac + bc$,

$$c(a + b) = ca + cb;$$

6) Нөлге тең емес көбейткіштердің жіктелмеуі: егер $ab = 0$, онда $a = 0$, немесе $b = 0$, немесе $a = b = 0$.

Матрицалармен операция өткізгенде 1,2,4 және 5 заңдар орындалады. Оған қарамастан 3 және 6 заңдар орындалмайды. Екі матрицаны бір-біріне көбейткенде бірінші матрицаның жолдары екінші матрицаның бағандарымен араласып, жоғарыда келтірілген заңмен орындалады. Ал бұл араласу симметриялы емес. Сол себептен 3 заң орындалмайды. Осындай симметриялы

емес екі матрицаның элементтерін араластыру нәтижесінде, жалпы жағдайда: $AB \neq BA$.

Егер көбейту операциясының нәтижесінде $AB = BA$ болса, онда матрицалар *коммутативті* немесе орын *ауыстырылатын* деп аталады. Мысалы, диагональды матрицалар бір-біріне көбейткен кезінде коммутативті болады, олардың көбейту операциясының нәтижесінде диагональды матрица табылады. Скалярлы матрица қандай болсын дәрежесі бар квадрат матрицасына көбейткен кезінде, олар коммутативті болады екен. Осындай қасиетке де бірлік матрица E иемденеді. Ол скалярлы сандардағындай бірдің рөлін атқарады: $AE = EA = A$, $E^k = E$. Осыған қоса келесі теңдік ақиқат: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Әрбір матрица өз-өзіне және қандай болсын осы матрицаның оң таңбалы дәрежесіндегі матрицасына коммутативті болады. Егер, A матрицасын сол жағынан кейбір D диагональды матрицаға көбейтсек онда жолдармен операциясына сәйкес дейді. Оң жағынан көбейткен кезде бағандармен операциясына сәйкес келеді.

4.1-мысал. A матрицасын оң жағынан диагональды матрицасына көбейтейік:

$$DA = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -6 & 2 & -4 \\ -12 & -15 & 18 \end{bmatrix}.$$

Онда, A матрицаның әрбір жолын сәйкес келетін диагональдағы элементке көбейтсек, нәтижелік матрицасын табамыз.

4.2-мысал. A матрицасын сол жағынан диагональды матрицасына көбейтейік:

$$AD = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -9 \\ 3 & 2 & 6 \\ -4 & 10 & 18 \end{bmatrix}.$$

Бұл жағдайда, нәтижелік матрицасындағы әрбір бағанды сәйкес диагональдағы элементке көбейту керек.

4.3-мысал. Диагональды матрицалардың коммутативтігін қарастырайық:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}.$$

4.4-мысал. Скалярлы матрица – дегеніміз диагональды матрица, диагональдағы элементтері бір-біріне тең болуы тиіс. Былай айтқанда бұл матрицаны табу үшін бірлік матрицаны скалярлы мәнге көбейту керек. Екі скалярлы матрицаларды көбейтейік:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -6E.$$

Келесі транспонирленген көбейтіндісінің ережесі ақиқат. Матрицалардың $(AB)^T$ транспонирленген көбейтіндісі осы екі B^T және A^T транспонирленген матрицалардың кері ретіндегі көбейтіндісіне тең болады: $(AB)^T = B^T A^T$.

4.5-мысал. Қандай болсын матрицаны өзінен транспонирленген матрицасына көбейтсек симметриялы матрица табылады. Мысалы:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 15 \\ 15 & 59 \end{bmatrix}.$$

Егер, A матрицасы симметриялы болса, онда $C^T AC$ матрицасы да симметриялы болады екен.

Кері матрицалардың көбейтіндісі транспонирленген матрицалары сияқты көбейткіштердің орын ауыстыру заңына бағынады: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Екі шаршы матрица көбейтіндісінің анықтаушы осы екі матрицалардың анықтауыштар көбейтіндісіне тең болады: $|AB| = |A||B|$.

Бірнеше матрицалар көбейтіндісін түрлендірген кезінде ассоциативтік заңына байланысты оларды әртүрлі жиынтық ретінде бөлуге болады. Бөлген кезде көбейткіштер ретін сақтайды. Егер матрицаның рангі r болғанда, оны сол немесе оң жағынан өзгеше емес матрицасына көбейтсек, онда табылған матрицаның рангісі де r -ға тең болады.

Матрицалармен әртүрлі элементарлы түрлендірулерді өткізуге болады:

1) қандай болсын жолды немесе бағанды кейбір нөлге тең емес санға көбейту;

2) қандай болсын жолды немесе бағанды кейбір нөлге тең емес санға көбейтіп, басқа жолға немесе бағанға бірнеше рет қосуға болады. Бұл жағдайда матрица анықтауыштың мәні өзгермейді;

3) қандай болсын екі жолды немесе екі бағанды өзара орындарын ауыстыруға болады. Бұл жағдайда матрица анықтауыштың мәнінің таңбасы керісіне өзгереді, былай айтқанда – 1 көбейтіледі.

Егер A матрицасы өзгеше емес болса, онда (4.2) жүйенің шешімін табу үшін A^{-1} матрицасына оң және сол жағын көбейтейік. Нәтижесінде жүйенің шешімін былай жазамыз:

$$x = A^{-1} \cdot y. \quad (4.3)$$

Табылған (4.3) теңдеу белгілі Крамер формуласының матрицалық түрін көрсетеді.

Бақылау сұрақтары.

1. Қандай кесте матрица деп аталады?
2. Матрицалардың түрлерін айтыңыз?
3. Қалай кері матрица есептеледі?
4. Қалай матрицалар бір-біріне көбейтіледі?
5. Сызықты алгебралық теңдеулер қалай матрицалардың көмегімен жазылады?

4.2. Үшбұрышты матрицалармен сипаттайтын теңдеу

Егер квадратты матрицаның элементтері бас диагоналының төмен немесе жоғары жағында жатып, ал қалған элементтер нөлге тең болса, онда матрица *үшбұрышты* деп аталады. Үшбұрышты матрицаның A_{Δ} төменгі немесе A^{Δ} жоғарғы құрылысы болуы мүмкін. Олардың түрлері мынадай болады:

$$A^{\Delta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A_{\Delta} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Үшбұрышты матрицалар практикалық жағынан бірқатар маңызды қасиеттерге иемденеді.

1) Үшбұрышты матрицаның анықтаушы оның диагональ элементтер көбейтіндісіне тең

$$|A_{\Delta}| = \det A_{\Delta} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Осыдан, үшбұрышты матрица өзгеше емес болуы үшін оның бас диагональ элементтері нөлге тең болмауы тиіс.

2) Құрылымдары бірдей үшбұрышты матрицалардың қосындысы және көбейтіндісі құрылымын сақтап үшбұрышты матрица болады.

3) Өзгеше емес үшбұрышты матрицадан кері матрица табылады да оның құрылымы бастапқы матрицаның құрылымы сияқты болады.

4) Қандай болсын өзгеше емес матрица оның жолдары мен бағандарын түрлендіріп үшбұрышты матрицасына айналдыруға болады. Мысалы ретінде, орнықтылық теориясындағы Гурвиц матрицасын алайық, оның құрылымы мынадай:

$$G_{n-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Жоғары үшбұрышты түріне өту үшін келесі элементарлы түрлендірулерді өткізу қажет. Екінші жолдағы әрбір элементтен оның үстінде орналасқан бірінші жолдың элементін $c_1 = a_0/a_1$ көбейтіп алу операциясын орындайық. Онда $a_0, a_2, a_4, \dots$, жолдың орнына $0, b_2, b_4, \dots$, жолын табамыз, мұндағы $b_2 = a_2 - c_1 a_3$, $b_4 = a_4 - c_1 a_5$, $b_6 = a_6 - c_1 a_7$, ...

Тура осындай түрлендіруді қалған төменгі жолдармен орындайық. Осыдан кейін үшінші жолдың әрбір элементінен үстіндегі екінші жолдың элементін $c_2 = a_1/a_2$ көбейтіп алу операциясын орындайық. Қалған жолдармен осындай

түрлендіруді орындап, m қадамнан кейін жоғары үшбұрышты матрица табылады:

$$\tilde{G}_{n-1} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} & \tilde{a}_{15} & \cdots \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} & \tilde{a}_{25} & \cdots \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} & \tilde{a}_{35} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{a}_{44} & \tilde{a}_{45} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{n-1,n-1} \end{bmatrix}.$$

Осындай түрлендіру матрицаны оң немесе сол жағынан кейбір көмекші матрицаға көбейтуіне эквивалентті.

Гурвиц матрицасының анықтаушы келесі теңдеуден табылады:

$$|\tilde{G}_{n-1}| = \tilde{a}_{11} \cdot \tilde{a}_{22} \cdot \dots \cdot \tilde{a}_{n-1,n-1}.$$

Қандай болсын шаршы матрицасын екі үшбұрышты матрицалардың көбейтіндісі түрінде көрсетуге болуы туралы теорема бар. Осы теорема бойынша, қандай болсын квадрат матрицасын төмен және жоғарғы үшбұрышты матрицалар көбейтіндісі түрінде көрсетуге болады:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

егер диагональды минорлар нөлге тең болмаса:

$$a_{11} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, |A| \neq 0.$$

Бұл жіктеу жалғыз болу үшін бір үшбұрышты матрицасының диагональ элементтерін бекітеді, мысалы олар бірге тең деп алуға болады. Осындай жіктеулер компьютермен есептеулер кезінде кең қолданылады.

Матрицаны екі үшбұрышты матрицалардың көбейтіндісі ретіндегі бірімәнді көрініс шаршылы матрицаларға да тарайды. Осындай матрицаларда өзі элементтер матрица болып табылады. Шаршылы матрица төменгі және жоғарғы квазиүшбұрышты матрицалар көбейтіндісіне жіктеледі. Квазиүшбұрышты матрицаның анықтаушы диагональ шаршылардың көбейтіндісіне тең болады. Диагональ матрицаларда көбейту операциясы коммутативті болса, ал үшбұрышты матрицаларды алсақ олармен көбейту операциясы коммутативті емес.

Автоматты басқару теориясындағы есептеу әдістерде үшбұрышты және үшбұрышты сияқты матрицалардың рөлі жоғары. Көп әдістерде матрицаны екі матрицаның көбейтіндісі ретінде көрініс кең қолданылады, бұл жіктеуде бір матрица үшбұрышты болады.

Келесі A матрицасы оң (сол) үшбұрышты сияқты немесе Хессенберг матрицасы деп аталады. Осындай матрицалардың элементтері a_{ij} келесі арақатысқа бағынады:

$$a_{ij} = 0; i > j + 1; (j > i + 1).$$

Мысалы ретінде (4×4) өлшемді оң үшбұрышты сияқты Хессенберг матрицасының түрі мынадай болады:

$$H = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}.$$

Осындай матрицалардың есептеу әдістерінде қолданғанда ерекше қасиеттерін айтып кетейік:

а) құрылымдары бірдей үшбұрышты сияқты матрицаларды қосқан кезінде құрылымы өзгермейді, ал көбейткен кезінде құрылым өзгеріп кетеді;

ә) үшбұрышты сияқты матрицалардың сипаттайтын полиномын құрастыру тиімді, бұл жағдайда жай матрицаларға карағанда есептеу көлемі азаяды, көбейту операциялар саны $\frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 - n)$ тең болса, ал косу операциялар саны $\frac{1}{2}(n^2 + n)$ тең болады;

б) үшбұрышты сияқты матрицаны екі үшбұрышты матрицалардың көбейтіндісіне жіктеуге болады, осы жіктеуде матрицалардың біреуінің құрылымы жеңілдейді де, ол қосдиагональды матрица болып қалады.

Автоматтандырылған жобалау жүйелерінде қолданылатын қазіргі кездегі инженерлік әдістерде матрицалардың мультипликативтік көрінісі кең қолданылады. Мынадай көріністердің мысалы ретінде QR -көрінісін айта аламыз. Оның мағынасы келесі де, қандай болсын A шаршы матрицасын ортогональды және үшбұрышты сияқты тұлғасының көбейтіндісі ретінде көрсетуге болады:

$$A = QR, \text{ немесе } A = QL, \quad (4.4)$$

мұндағы Q – ортогональды матрица, R, L – сәйкесінше, оң (жоғарғы), сол (төменгі) матрицаның үшбұрышты тұлғалары.

Табылған (4.4) көрініс, A шаршы матрицаның QR , QL жіктеулерін көрсетеді. Шаршы матрицаның осындай жіктеу жалғыз ғана екен.

Шаршы матрицаны QR алгоритмі арқылы компьютермен іске асыру үшін ол ең алдымен егер қажет болса масштабтандырылады, осыдан кейін Хессенберг үшбұрышты тұлғасына келтіріледі. QR алгоритмді қолдану үшін бұл операциялар орындалды дейді. Бастапқы матрицаны H Хессенберг матрицасына келтірудің қажеттілігі, арифметикалық

Сипаттайтын (4.11) полином түбірлері матрицаның *өзіндік* немесе *сипаттайтын сандары* деп аталады. Барлық λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ өзіндік сандар жиыны *матрицаның спектрі* дейді.

Ары қарай өзіндік сандарды және A матрицаның элементтері арасындағы екі байланысты қарастырайық. Олар белгілі Виет теоремасынан туады. Егер (4.11) теңдеуде $\lambda = 0$ деп алсақ, онда:

$$a_n = |A|. \quad (4.12)$$

Былай айтқанда сипаттайтын теңдеудің бос мүшесі A матрицаның анықтаушына тең болады.

Сипаттайтын полиномды, барлық өзіндік сандар λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ әртүрлі деп, көбейткіштер көбейтіндісі түрінде жазайық:

$$|A - \lambda E| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n). \quad (4.13)$$

Егер $\lambda = 0$, табамыз:

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

Онда, A матрицаның анықтаушы λ_i өзіндік сандар көбейтіндісіне тең болады. Осы қасиеттен келесіні айтуға болады, егер λ_i өзіндік сандардың бір саны нөлге тең болса, онда матрица өзгеше екен.

Табылған (4.13) теңдеуден, әртүрлі λ дәрежелеріндегі коэффициенттер мен өзіндік сандар арасындағы байланыстарды табуға болады. Мысалы, λ^{n-1} коэффициенті тең:

$$a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n. \quad (4.14)$$

Ал, $|A - \lambda E|$ анықтауышты ашсақ, онда λ^{n-1} коэффициент матрицаның диагональ элементтер қосындысына тең болып табылады:

$$a_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}. \quad (4.15)$$

Онда, матрицаның диагональ элементтердің қосындысы өзіндік сандар қосындысына тең екен.

Осы қасиеттердің маңыздылығын ескеріп, диагональ элементтердің қосындысын *матрицаның ізі* дейді. Алынған A матрицаның ізі былай белгіленеді: SpA немесе trA . Былай айтқанда:

$$SpA = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (4.16)$$

Матрицаның ізіне келесі арақатыстар ақиқат:

$$SpA = SpA^T, \quad Sp(\alpha A) = \alpha SpA, \quad Sp(A + B) = SpA + SpB, \\ Sp(AB) = Sp(BA).$$

Қарастырылған (4.5) теңдеудің шешімі ретінде нөлге тең емес λx векторы болу үшін λ пропорционал коэффициенті A матрицаның бір өзіндік санына тең болуы қажет.

Әрбір $(n \times n)$ өлшемді матрицада n өзіндік сандары бар. Кейбір өзіндік сандар бірдей немесе еселі болуы мүмкін. Барлық $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ мәндеріне сәйкес (4.8) біртекті жүйенің шешімін табуға болады. Бір $\lambda = \lambda_1$ мәнін алып, оны (4.8) жүйеге алмастырып қойып, келесі шешім векторын табамыз:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Егер, $\lambda = \lambda_2$ тең десек, онда екінші шешім векторы алынады:

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Осыны жалғастырсақ, $\lambda = \lambda_n$ тең болғанда соңғы шешім векторының түрі мынадай болады:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_n^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Табылған $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ векторлар A матрицаның *өзіндік векторлары* деп аталады. Былай айтқанда, әрбір өзіндік санға өзіне сәйкес өзіндік векторы табылады. Егер нақты матрицаның өзіндік сандары комплексті болса, онда өзіндік вектордың координаттары да комплексті болады.

Барлық өзіндік векторлар біртекті жүйенің шешімдері болады. Сол себептен әрбір шешім нөлге тең емес қандай болсын көбейткішпен бағаланатын дәлдігімен анықталады. Егер шешімді скалярлы көбейткішке көбейтсек, онда қайтадан шешім табылады.

Былай айтқанда, өзіндік векторды қандай болсын нөлге тең емес санға көбейткенде, оның ұзындығы өзгеріп, ал кеңістіктегі бағыты өзгермейді. Осымен өзіндік векторлар n -өлшенген кеңістікте n шешімдер жүйесін құрастырып, бірімәнді түрде тек қана бағыт бойынша анықталады, ал ұзындық (модуль) бойынша кез келген оң таңбалы санға тең болуы мүмкін.

Егер матрицаның өзіндік сандары әртүрлі болса, онда осы сандарға сәйкес өзіндік векторлар сызықты тәуелсіз болады.

Сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі R^n кеңістіктің базисін құрастырады.

Базистің мысалы ретінде – келесі векторлар жиынтығын алуға болады:

$$l_1 = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0],$$

$$l_2 = [0 \quad 1 \quad \dots \quad 0],$$

$$\dots\dots\dots$$

$$l_n = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1].$$

Қандай болсын $x = [x_1, \quad x_2, \quad \dots \quad x_n]$ векторды өзіндік векторлардан құрастырылған базисте көрсетуге болады. Былай айтқанда:

$$x = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_n x_n.$$

Базисті құрастыратын векторлар саны кеңістіктің өлшеміне тең болады. Егер еселі өзіндік сандар болса, онда сызықты тәуелсіз векторлардың болуы белгісіз. Оларға сызықты тәуелсіз векторлар сәйкесте немесе сәйкес емес болуы мүмкін.

Симметриялы матрицалардың кейбір қасиеттерін айтып кетейік.

1) Симметриялы матрицаның өзіндік сандары нақты. Бұл қасиет матрицаның элементтері комплексті-түйіндес жағдайға да тарайды.

2) Симметриялы матрицаның өзіндік векторлары ортогональды. Бұл қасиеттің мағынасы, олардың скалярлы көбейтіндісі нөлге тең болады.

Егер A симметриялы матрица n әртүрлі $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ өзіндік сандары болса, онда оларға сәйкес $k_i x_i$ өзіндік векторлар n - өлшемді кеңістікте ортогональды базисті құрастырады.

4.6-мысал. Келесі матрицаны қарастырайық

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оның сипаттайтын теңдеуінің түрі мынадай болады

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Бұл матрицаның өзіндік сандары $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

Енді $\lambda_1 = -1$ сәйкес өзіндік векторын табайық, ол үшін $(A - \lambda_1 E)x = 0$ теңдеуді алып, табамыз

$$\begin{bmatrix} -3 - (-1) & -2 \\ 1 & -(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Табылған теңдеудің $-2x_1 + (-2)x_2 = 0$, бір шешімін табайық: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Онда, $\lambda_1 = -1$ сәйкес келетін өзіндік вектордың түрі мынадай

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Табылған өзіндік вектор жалғыз емес. Жоғарыдағы $x_1 - x_2 = 0$ теңдеуін $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ қанағаттандырады. Сол себептен, бұл жағдайда өзіндік вектор мынадай болады

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Енді $\lambda_1 = -2$ тудыратын өзіндік векторды іздейік. Бұл жағдайда $(A - \lambda_2 E)x = 0$ теңдеу алынады, осыдан табамыз

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Мұндағы $x_1 + 2x_2 = 0$ теңдеу табылады, $x_{11} = 2$, $x_{21} = -1$ шешімдерін алайық. $\lambda_1 = -2$ сәйкес келетін өзіндік вектор мынадай болады

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Бұл да өзіндік вектор жалғыз емес. Мысалы $x^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

вектор $\lambda_1 = -2$ сәйкес келеді. Бұл векторлар сызықты тәуелсіз, сол себептен олар кеңістіктің базисін құрастырады.

Мысалы. Келесі симметриялы матрицаны алайық

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, |A - \lambda E| = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0, \lambda_1 = 1,$$

$$\lambda_2 = -4.$$

Өзіндік векторларды табайық

$$(A - \lambda E)x = 0, \begin{bmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Егер } \lambda_1 = 1, \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Егер } \lambda_2 = -4, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Өзіндік векторлар ортогональды базисті құрастырады. Расында, олардың скалярлы көбейтіндісі нөлге тең болады

$$\langle x^{(1)} \cdot x^{(2)} \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 2 - 2 = 0.$$

Бақылау сұрақтары.

1. Қандай матрица үшбұрышты деп аталады?
2. Үшбұрышты матрицалардың мысалдарын келтіріңіз?
3. Матрицаның сипаттайтын теңдеуі қалай табылады?
4. Матрицаның өзіндік векторлары қалай құрастырылады?

4.4. Кели-Гамильтон теоремасы және оның қолдануы

Бұл теореманың өте маңызды теориялық мағынасы бар. Ол басқару теориясының қолданбалы есептерін шығарған кезінде қолданылады.

Кели-Гамильтон теоремасының мағынасы мынадай, әрбір матрица өзінің сипаттайтын теңдеуін тепе-тең қанағаттандырады. Егер A шаршы матрицаның сипаттайтын теңдеуінің түрі былай жазылса

$$f(\lambda) = |A - \lambda E| = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (4.17)$$

онда берілген теореманың анықтамасы бойынша, келесі теңдік ақиқат болады

$$f(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n E = O, \quad (4.18)$$

мұндағы O – нөлдік матрицасы.

Кели-Гамильтон теоремасынан тудырылған (4.17), (4.18) арақатыстардың мағынасы мынадай, A шаршы матрицаны, λ_i өзіндік сандар орнына (4.17) теңдікте айырбастасақ, онда матрица өзінің $|A - \lambda E| = 0$ сипаттайтын теңдеуін теңдікке айналдырады. Былай айтқанда, әрбір матрица өзінің сипаттайтын теңдеуінің түбірі болып табылады.

Бұл теореманың нәтижелері қандай болсын шаршы матрицаларға тарайды, матрицаның өзіндік сандар түріне ешқандай шенеулер бекітпейді. Онда теореманы еселі өзіндік сандар кезінде де қолдануға болады.

Матрицаны айырбастап қойып, полиномның мәнін нөлге тең келетін полином жалғыз емес. Осындай қасиетпен $f(\lambda)$ ие болған соң, оған әрбір $f(\lambda)$ бөлінетін де полином ие болады. Ең төмен дәрежелі полином, A шаршы матрица оны нөлдеу қасиетіне ие болса, матрицаның минимальды полиномы деп аталады. Матрицаны сипаттайтын полиномы минимальды полиномына міндетті түрде бөлінеді. Еселі өзіндік сан өзгеше матрицаға сәйкес келіп және оның сипаттайтын полиномы минимальды полином болып табылады. Қандай болсын

матрицаның минимальды полиномы жалғыз. Егер A шаршы матрицаның барлық λ_i сипаттайтын сандары әртүрлі болса, онда сипаттайтын және минимальды полиномдар бірдей болады.

4.7-мысал. Келесі матрица берілсін

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Алынған A матрицаның сипаттайтын полиномының түрі мынадай болады

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 15\lambda - 61 = 0.$$

Кели-Гамильтон теоремасы бойынша

$$A^3 + 5A^2 + 15A - 61E = 0.$$

Ең алдымен матрицаның екінші және үшінші дәрежелерін есептеп алып, оларды алмастырып табылған теңдеуге жазайық

$$\begin{bmatrix} 31 & -35 & -15 \\ -40 & 61 & 150 \\ 30 & -65 & 191 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 5 & 60 \\ -20 & 75 & -240 \\ -60 & 100 & -115 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 30 & -45 \\ 60 & -75 & 90 \\ 30 & -45 & -15 \end{bmatrix} - \\ \begin{bmatrix} 61 & 0 & 0 \\ 0 & 61 & 0 \\ 0 & 0 & 61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Кели-Гамильтон теңдеулерінің кейбір қолдануларын көрсетейік.

Біріншіден, шаршы матрицаның оң таңбалы дәрежелерін есептеуге болады. Келесі теңдікті алсақ $f(A) = O$, осыдан $Af(A) = O$, $A^2f(A) = O, \dots$ деп жазуға болады. Онда A , $(n \times n)$ шаршы матрицаның қандай болсын оң таңбалы дәрежесін осы матрицаның $n-1$ дәрежесімен E бірлік матрицаны қолданып есептеуге болады.

4.8-мысал. Келесі матрица берілсін

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

оның сипаттайтын теңдеуі мынадай болсын
 $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

Кели-Гамильтон теңдеуіне сәйкестеп жазамыз

$$A^3 - 2A^2 - 5A + 6E = 0,$$

осыдан,

$$A^3 = 2A^2 + 5A - 6E = 0,$$

$$\begin{aligned} A^4 &= 2A^3 + 5A^2 - 6A = 2(2A^2 + 5A - 6E) + 5A^2 - 6A = \\ &= 9A^2 + 4A - 12E, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^5 &= 2A^4 + 5A^3 - 6A^2 = 2(9A^2 + 4A - 12E) + 5A^3 - 6A^2 = \\ &= 22A^2 + 33A - 54E. \end{aligned}$$

Матрицаның оң таңбалы дәрежелерін есептеуін ары қарай да жалғастыруға болады.

Екіншіден, шаршы матрицаның теріс таңбалы дәрежелерін есептеуге болады. Бұл жағдайда алынған матрица өзгеше емес болуы тиіс. Жоғарыда жазылған теңдеулерге сүйеніп A , $(n \times n)$ шаршы матрицаның A^{-1} кері матрицасын есептей аламыз.

4.9-мысал. Келесі матрицаны алайық

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Кели-Гамильтон теңдеуінен табамыз

$$f(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

$$f(A) = A^2 + 3A + 2E = 0,$$

осыдан

$$A + 3E + 2A^{-1} = 0,$$

$$A^{-1} = -1/2 A - 3/2 E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Келесі мысалды қарастырайық. Жоғарыда алынған матрицаны қарастырайық

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

оның сипаттайтын теңдеуі мынадай болады

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Кели-Гамильтон теңдеуіне сәйкестеп жазамыз

$$f(A) = A^3 - 2A^2 - 5A + 6E = 0.$$

Осы арақатыстан матрицаның теріс таңбалы дәрежелерін табуға болады

$$A^{-1}A^3 - 2A^{-1}A^2 - 5A^{-1}A + 6A^{-1} = 0,$$

$$6A^{-1} = -A^2 + 2A + 5E,$$

$$36A^{-2} = -6A + 12E + 30A^{-1} = -5A^2 + 4A + 37E,$$

есептеуді, осылай ары қарай жалғастыруға болады.

Үшіншіден, қандай болсын n -дәрежелі матрицалық полиномды A матрицаның $n-1$ -дәрежесі және E бірлік матрица арқылы жазуға болады. Былай айтқанда, қандай болсын полином немесе A матрица және оның дәрежелері элементі бар үйлестірілген қатар, $E, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ сызықты комбинациялар ретінде көрсетуге болады. Мысалы, егер A шаршы матрицасы өлшемі $n \times n$ болса, онда

$$e^{At} = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3, \quad (4.19)$$

мұндағы $a_i, (i=1,2,3)$ - скалярлы сандар.

Бір матрицаның қандай болсын полиномдары өзара орын ауыстырылады және бір-бірімен қосу және көбейту операциялар бойынша қатынасады. Сол себептен матрицалық

көпмүшелермен алгебралық операцияларды скалярлы көпмүшелермен ұқсас орындауға болады.

4.4.1. Ұқсастықты түрлендіру

Демек, B матрицасы A матрицасына ұқсас болу үшін келесі қатынас орындалу тиіс

$$B = S^{-1}AS, \quad (4.20)$$

мұндағы S – өзгеше емес матрицасы, былай айтқанда $|A| \neq 0$.

Осы (4.20) арақатыс ұқсастықты түрлендіру деп аталады. Осыдан келесіні жазуға болады

$$A = S^{-1}BS.$$

Ұқсастықты түрлендіру келесі қасиеттерге иемденеді.

1) Қосудың түрлендіруі – түрлендірудің қосылуына тең

$$S^{-1}(A+B)S = S^{-1}AS + S^{-1}BS.$$

2) Көбейтудің түрлендіруі көбейткіштер түрлендіруінің көбейтіндісіне тең

$$S^{-1}(AB)S = S^{-1}AS \cdot S^{-1}BS.$$

3) Кері матрицаның түрлендіруі – түрлендірудің кері матрицасына тең

$$S^{-1}A^{-1}S = (S^{-1}AS)^{-1}.$$

4) Оң немесе теріс таңбалы бүтін дәрежесінің түрлендіруі – сол дәрежесінің түрлендіруіне тең

$$S^{-1}A^nS = (S^{-1}AS)^n.$$

Ұқсас матрицалардың сипаттайтын полиномдары бірдей болады

$$\begin{aligned} |B - \lambda E| &= |S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda S^{-1}ES| = \\ &= |S|^{-1} |A - \lambda E| |S| = |A - \lambda E|. \end{aligned}$$

Осы қасиеттен келесі тұжырымды жасауға болады, ұқсас матрицалардың өзіндік сандары да бірдей болады екен. Өзіндік вектордың болуы базиске кіретін векторлардың таңдауына

байланысты емес. Сол себептен ұқсас матрицалардың өзіндік векторлары келесі теңдеумен байланысады

$$x = S^{-1} x,$$

мұндағы S – координаттар түрлендіру матрицасы.

Расында, егер

$$Ax = \lambda x,$$

онда

$$(S^{-1}AS)(S^{-1}x) = \lambda(S^{-1}x).$$

Егер матрица ортогональды болса $S^T = S^{-1}$, онда келесі ортогональды түрлендіру орын алады

$$B = S^T AS.$$

Бақылау сұрақтары.

1. Кели-Гамильтон теоремасының мағынасын ашыңыз?
2. Матрица өзінің сипаттайтын теңдеуінің шешімі болатындығын мысалдармен дәлелдеңіз?
3. Кели-Гамильтон теоремасына сүйеніп, матрицаның кері матрицасы қалай табылады?
4. Қандай матрицалар ұқсас деп аталады?

4.5. Матрицаларды диагональдау және матрицалардың функциясы

Диагональды матрицалар мен операциялар жай матрицаларға қарағанда жеңіл орындалады. Сол себептен қандай болсын матрицаны диагональды түріне келтіру тиімді болады. Әрбір матрицаны диагональды түріне келтіру есебі оңай болып табылмайды. Ол үшін түрлендіру S матрицасын табу қажет.

Демек, A матрицаның әртүрлі $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ өзіндік сандары болсын, оларға n сызықты тәуелсіз өзіндік векторлар $x_1, x_2, \dots, x_n$ сәйкес келеді. Егер осы векторларды кеңістіктің

базисі ретінде алсақ, онда бастапқы матрицаға сәйкес диагональды матрица табылады.

Осымен, өзіндік векторлардан құрастырылған базистің ерекшелігі, ондағы ұқсастық түрлендіру диагональды түрде өткізіледі.

Келесі матрицаны құрастырайық, оның баған элементтері қандай болсын нөлге тең емес $k_1, k_2, \dots, k_l$ сандарына көбейтілген өзіндік векторлар болсын

$$M = \begin{bmatrix} k_1 x_{11} & k_2 x_{12} & \cdots & k_l x_{1n} \\ k_1 x_{21} & k_2 x_{22} & \cdots & k_l x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_1 x_{n1} & k_2 x_{n2} & \cdots & k_l x_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Мына (4.21) теңдеумен берілген матрица модальды деп аталады. Осы M матрица арқылы ұқсастық түрлендіру былай жазылып

$$L = M^{-1} A M,$$

диагональды түрге келтіреді. Мұндағы L – бас диагоналында $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ өзіндік сандары орналасқан диагональды матрицасы.

Модальды матрицаны түрлендіргіш ретінде қолдану үшін оның барлық өзіндік сандарын және оларға сәйкес келетін өзіндік векторларын есептеуі қажет. Есептеу математикасында бұл проблема өзіндік мәндерінің толық проблемасы деп аталады. Матрицаның дәрежесі жоғары болғанда, ол күрделі проблемаға айналады.

Егер бір әдіспен өзіндік векторларды жуықтап анықтасақ онда ұқсастық түрлендіру арқылы абсолюттік мәні бойынша басқа элементтерге қарағанда диагональды элементтерді іріктеп шығарады және оларды жетекші элементтерге айналдырады. Осындай псевдодиагональдау арқасында компьютерді қолданып, есептеу алгоритмдерінің үйлестіруі жоғарылайды.

Әртүрлі өзіндік мәндер кезінде модальды матрицаның бағандары бір нөлге тең емес $Adj[A - \lambda_i E]$ бағанға тең немесе оған пропорционал етіп алынады. Мұндағы $Adj[A - \lambda_i E]$ – дегеніміз алгебралық толықтауыштардың транспонирленген матрицасы, ол тағы да қосалқы матрица деп аталады.

Әрбір $Adj[A - \lambda_i E]$ бағандары берілген λ_i сызықты тәуелді болғандықтан, әрбір λ_i модальды матрицасының тек қана бір бағанын анықтайды.

Ерекше түрде еселі өзіндік сандар жағдайын қарастыру керек. Компьютермен есептегенде бұл мәселе өте маңызды болып табылады. Оның себебі осы жағдайда матрица элементтері дәл берілмегендігіне байланысты, қателіктердің арқасында еселі түбірлер әртүрлі түбірлерге айналып кетуі мүмкін.

Егер матрица еселі өзіндік сандарға ие болса, оны *Жордан канондық тұлғасына* келтіруге болады. Жордан канондық тұлғасы шаршылы диагональды матрица түрінде беріледі. Осы матрицаның бас диагоналында *канондық жәшіктер* немесе *Жордан шаршылары* орналасады. Канондық жәшіктің түрі мынадай болады

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Бұл матрицада бас диагоналында еселі өзіндік сан еселік дәрежесіне тең рет қайталанып жазылады, ал диагональдың басында бір жазылып, қалған элементтер нөлге тең болады. Канондық жәшік ұқсастық түрлендіру арқылы қысқартылмайды. Мысал ретінде алсақ, Жордан тұлғасының түрі мынадай болады

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Канондық жәшік тек қана бір өзіндік векторға ие болады. Жәшіктің минимальды полиномы сипаттайтын полиноммен бірдей болып, былай жазылады $(\lambda - \lambda_i)^k$, мұндағы k – жәшіктің дәрежесі.

4.10-мысал. Келесі матрицаны диагональды түріне келтіру қажет

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ұқастық түрлендірудегі – түрлендіру матрицасы ретінде модальды матрица арқылы есепті шығарыңыз.

Ең алдымен сипаттайтын теңдеудің түбірлерін табайық, ол үшін $|A - \lambda E| = 0$ тең деп алып, жазамыз

$$|A - \lambda E| = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2.$$

Осы өзіндік сандарға сәйкес, өзіндік векторлар мынадай болады

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Модальды матрицаны табайық

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Осыдан

$$L = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

4.5.1. Матрицалардың функциялары

Демек, λ скалярлы аргументтің $f(\lambda)$ функциясы және кейбір A квадрат матрицасы берілсін. Енді $f(\lambda)$ функциясын матрицаның аргументтеріне тарату қажет. Егер $f(\lambda)$ полином болса, онда Кели-Гамильтон теоремасы осы есептің шешімін береді. Нәтижесінде $f(A)$ матрицалық функцияның коэффициенттері полиномның коэффициенттерімен бірдей болады.

Алынған $f(\lambda)$ функциясы A матрицаның спектрінде анықталып берілсін, мұндағы λ осы матрицаның өзіндік мәндері. Онда табылған $f(A)$ матрицаның функциясы деп аталады.

Егер A және B матрицалары ұқсас болса және S матрицасы A матрицасын B матрицасына түрлендірсе

$$B = S^{-1}AS,$$

онда, $f(A)$ және $f(B)$ -да ұқсас және S матрицасы $f(A)$ $f(B)$ -ға түрлендіреді

$$f(B) = S^{-1}f(A)S.$$

Соңғы тендеудің мағынасы, A және B матрицалардың спектрінде $f(\lambda)$ функцияның мәні бірдей болады.

Енді матрицалық дәрежелі қатарды қарастырайық. Демек, $(h \times h)$ өлшемді A_k , $(k=1,2,\dots)$ матрицалар қатары берілсін. Осы матрицалар қатарының шегін былай жазайық

$$\hat{A} = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \left[\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} \right].$$

Егер матрицалық қатарының шегі болса, онда матрицалық қатар жинақталатын қатар болады. Егер шегі болмаса, онда матрицалық қатар жинақталмайтын қатар екен.

Матрица шегі ұғымына сүйеніп қарастыруға, келесі матрицалық дәрежелі қатарды енгізуге болады

$$F(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k. \quad (4.22)$$

Табылған (22) жинақталатын болу үшін, A матрицаның барлық $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ өзіндік сандары $R|\lambda| \leq R$ радиусы R тең тұйықталған шеңбердің ішінде орналасса. Өзіндік сандарын келесі скалярлы қатардың түбірлері болады

$$F(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k, \quad (\lambda = \alpha \pm j\beta). \quad (4.23)$$

Шеңбердің шекарасында жатқан өзіндік сандар жай – деп аталады.

Матрицалық дәрежелі қатар жинақталмайтын болу үшін A матрицасының бір өзіндік саны (4.23) скалярлы қатардың жинақталатын шеңберінің сыртында немесе шекарасында жатуы тиіс. Осыдан, (4.22) матрицалық дәрежелі қатар бір матрицаға жинақталатын болу үшін қажетті және жеткілікті (4.23) скалярлы қатар A матрицасының спектрінде болуы тиіс. Демек, дәрежелі қатарды жинақталатын шеңбердің ішінде мүше-мүшемен қажетті рет дифференциалдауға болады, онда (4.22) қатар қандай болсын матрицаның өзіндік сандары жинақталатын шеңбердің ішінде болып, осы матрица өзінің спектрінде жинақталады деуге болады. Онда, $f(\lambda)$

функцияның $|\lambda - \lambda_0| \leq R$ шеңбердің ішінде дәрежелі қатарға жіктелу арқасында λ A матрицасына айырбастау үшін оның барлық өзіндік сандары R радиусты шеңбердің ішінде жатуы тиіс.

Скаляр аргументті функцияның және матрицалық аргумент мәндерінің арасындағы кейбір маңызды теңдіктерді келтірейік. Келесі теңдіктен

$$\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda = 1$$

Қандай болсын матрицаға келесі теңдік ақиқат

$$\sin^2 A + \cos^2 A = E.$$

Тура осылайша, қандай болсын A матрицасымен келесі теңдік орындалады

$$e^A e^{-A} = E, \text{ онда } e^{-A} = (e^A)^{-1}.$$

Қандай болсын A матрицасына келесі теңдік ақиқат

$$e^{iA} = \cos A + i \sin A.$$

Экспоненциалды функцияны былай көрсетуге болады

$$e^A = \exp A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^m}{m!} + \dots,$$

$$e^{-A} = \exp(-A) = E - A + \frac{A^2}{2!} - \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^m A^m}{m!} + \dots$$

Бұл қатар бірқалыпты және абсолютті жинақталады. Екі скаляр мәндерінің $e^{\lambda_1} e^{\lambda_2}$ көбейтіндісі коммутативті, ал экспоненциалды матрицалардың көбейтіндісін $e^B e^A$ түрінде көрсету үшін A және B матрицалары коммутативті болуы тиіс.

Тригонометриялық функциялардың түрі келесідей болады

$$\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \dots = \frac{\exp(jA) - \exp(-jA)}{2j},$$

$$\cos A = E - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \dots = \frac{\exp(jA) + \exp(-jA)}{2},$$

$$shA = A + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \dots = \frac{\exp A - \exp(-A)}{2},$$

$$chA = E + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \dots = \frac{\exp A + \exp(-A)}{2},$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A.$$

4.5.2. Сильвестр теоремасы

Сильвестр арақатысы арқылы матрицаның функцияларын жазуға болады. Тек қана бұл жағдайда функция матрицалық полином ретінде көрсетілуі тиіс. Демек, A матрицасында n әртүрлі өзіндік сандар болсын. Онда қандай болсын $f(A)$ матрицалық полиномды келесі түрде жіктеуге болады

$$f(A) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) Z_0(\lambda_i),$$

$$\text{мұндағы } Z_0(\lambda_i) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j E)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

4.11-мысал. Мысалы ретінде e^{At} функциясын келесі матрицадан табайық

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Берілген e^{At} функциясын жинақталатын дәрежелік қатар ретінде көрсетуге болады. Сол себептен Сильвестр теоремасын қолдануға болады. Сильвестр арақатысына байланысты табамыз

$$e^{At} = \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i t} Z_0(\lambda_i), \quad Z_0(\lambda_1) = \frac{A - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$Z_0(\lambda_2) = \frac{A - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Келесі $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ өзіндік сандарына сәйкес келетін $Z_0(\lambda_1)$, $Z_0(\lambda_2)$ матрицаларын есептейік

$$Z_0(\lambda_1) = \frac{\begin{bmatrix} -3 - (-2) & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$Z_0(\lambda_2) = \frac{\begin{bmatrix} -3 - (-1) & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Онда $f(A) = e^{At}$ матрицаның функциясы былай табылады

$$e^{At} = \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i t} Z_0(\lambda_i) = e^{-t} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -e^{-t} & -2e^{-t} \\ e^{-t} & 2e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - 2e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

4.5.3. Матрицаның нормасы

Векторлар мен матрицаларды нормалау – есептеу математикасында кең қолданылады. Осы процедура арқылы сандар тізбектерінің және қатарларының жинақталу жылдамдығын бағалайды. Егер A матрицасын алсақ, оның нормасын $\|A\|$ деп белгілейді. Матрицаның нормасы келесі шарттарды қанағаттандырады:

- 1) $\|A\| \geq 0$, ал $\|A\| = 0$ болу үшін $A = 0$ болуы тиіс;
- 2) $\|cA\| = |c| \|A\|$, мұндағы c – сан. Осыдан $\| -A \| = \|A\|$;
- 3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- 4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Матрицаның нормасы әртүрлі әдістер арқылы енгізіледі. Ары қарай ең көп қолданылатын үш әдістерін келтірейік.

$$1) \|A\|_I = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|;$$

$$2) \|A\|_{II} = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|;$$

$$3) \|A\|_{III} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}.$$

4.12 мысал. Келесі матрицаның нормасын келтірілген үш әдіс арқылы есептеу қажет.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$\|A\|_I = \max_i [1 + 2 + 3; 4 + 5 + 6; 7 + 8 + 9] = \max[6, 15, 24] = 24;$$

$$\|A\|_{II} = \max_j [1 + 4 + 7; 2 + 5 + 8; 3 + 6 + 9] = \max[12, 15, 18] = 18;$$

$$\begin{aligned} \|A\|_{III} &= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + (-4)^2 + 5^2 + (-6)^2 + (-7)^2 + 8^2 + 9^2} = \\ &= \sqrt{285} = 16.88. \end{aligned}$$

Бақылау сұрақтары.

1. Не үшін матрицалар диагональданады?
2. Жордан канондық тұлғасы қалай құрастырылады?
3. Сильвестр арақатысы арқылы қалай матрицаның функциясы құрастырылады?
4. Матрицаның нормасы қалай есептеледі?

5. ЖҮЙЕЛЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗДЕРІ

5.1. Динамикалық жүйе

Әдетте жүйе – деп бір-бірімен өзара байланысқан элементтерді немесе оның бөліктерін айтамыз (белгілі бір заңдылықтармен айналадағы ортамен өзара байланысатын). Нақтырақ айтқанда, жүйе – дегеніміз ол кіре беріс, шыға беріс айнаымалылары бар құрылғы, кешен, бірлестік. Сырттан берілген әсерлерге байланысты өзінің жағдайларын өзгертеді. Бұл өзгерістер айналадағы орта әсерлеріне байланысты. Жүйенің анықтамасында, жүйенің физикалық параметрлері нақтыланбаған. Біздің тұжырымдағанымыз, жүйе түсінігінің қатаң анықтамасы. Болашақта ғылымның осы саласын тереңірек зерттеу мақсаты қойылып отыр. Осы анықтаманы бір топ есеп кластарына кеңінен қолдануға болады.

Жүйелерде өтетін процестерді зерттеу үшін кіре беріс әсерлердің ағымдағы мәндерімен, жүйенің шығыс шамаларын анықтай білу керек. Ол үшін алдымен жүйені математика тілінде жазу қажет, яғни жүйенің математикалық моделін құрған дұрыс. Теориялық жоспарда жүйе туралы ұғым қазіргі кезде де, кейінгі уақытта да, оның (жүйенің) күйін білуді қажет етеді. Бұл күйлер берілген математикалық қатынастармен толық анықталады. Осы қатынастар - қарастырылған жүйеге, бір мәнді түрде беріледі.

Сөйтіп, айтылған физикалық және логикалық жазулар 5.1-суретте көрсетілген жүйенің жалпы сұлбасына алып келеді.



5.1-сурет

Енді кіре беріс әсерлері, жүйенің күйлерінің және шыға беріс шамаларының, толық анықтамаларын қарастырайық. Кіре беріс әсерлерді, лездік мәндерінің жиынымен беруге болады. Оны u арқылы белгілейік. Енді уақыт мезеттерінің жиынын енгізіп, оны T арқылы белгілейік. Бұл - $u(t)$ нақты кіре беріс әсерлері берілген t уақыт мезеттерінде u жиынымен қатынасады.

Қарапайым физикалық түсініктерде, T уақыт мезеттерінің жиыны реттелген болуы керек. Басқаша айтқанда оның ішінде уақыттың бағыты анықталып, ал бағытты таңдағанда, уақыт тек қана алға жүретінін ескерту қажет.

Жалпы жағдайда кіре беріс әсерді, $u(t)$ кез келген еркін уақыт функциясы деп есептеуге болмайды. Әдетте, әрбір күй үшін белгілі шектеулер енгізіледі.

Олар енгізілгенде, шығарылып отырған есептің берілгені айналадағы ортаны әсерлейтін қасиетімен көрсетіледі. Ол әрқашан орнықты болуы қажет. Егер $u(t)$ функцияларының жарамды абстрактілі ережелерін ω арқылы белгілесек, онда $u(t)$ функцияларының Ω жиыны жарамды екенін былай анықтауға болады:

$$\Omega = \{\omega; T \rightarrow U\}.$$

Мына өрнектің мағынасы: T және U жиындарында, ω сәйкестік (ереже) арқылы, T жиыны U жиынына бейнеленіп, Ω бейнелер жиынын құрастырады. Ω жиыны $T \times U$ жиынының ішжиыны болып табылады. Нақты шамалардың мәндері үшін жоғарыда көрсетілген өрнекті мына түрде жазуға болады:

$$U(t) = \omega(t).$$

Ары қарай $U(t)$ жазуын қолданғанда, бұл функция жарамды жиынға қатысты екендігін ескертейік.

Реалды жүйелерде кіре беріс әсерлер кесінділермен беріледі. Оның себебі – уақыттың шектелуінде. Онда Ω жиынында берілген функциялар тобы, сондай болуы керек. Егер

екі әртүрлі ω_1 және ω_2 функциялар екі көрші уақыт кесінділерінде берілсе $[t_1, t_2]$ және $[t_2, t_3]$ олар қосынды $[t_1, t_3]$ кесінді ω_3 функциясымен ауыстырылады (5.2-сурет).

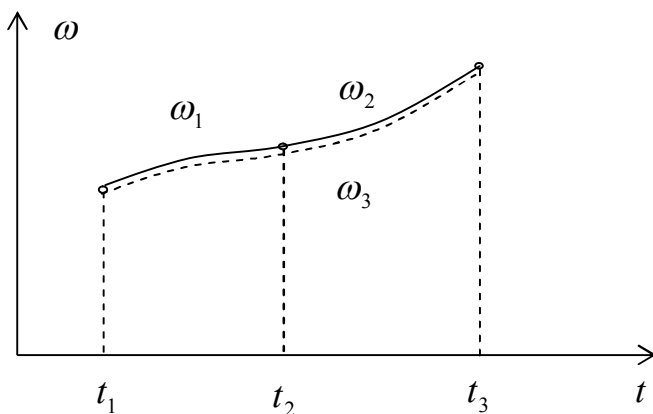
Онда бұл шартты былай жазамыз:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega, \quad t_1 < t_2 < t_3 \in T,$$

болса, онда келесі шарт орын алады:

$$\omega_3 = \omega_1 \quad t_1 < t \leq t_2 \text{ орындалғанда,}$$

$$\omega_3 = \omega_2 \quad t_2 < t \leq t_3 \text{ орындалады.}$$



5.2- сурет

Осы өрнектермен жазылған кіре беріс әсерлерін, ары қарай да қолданылуы жеткілікті. Енді жүйе күйлерінің түсінігін қарастырайық. Нақтылап айтқанда, кіре беріс әсерлер ағымдағы уақыттың алдыңғы күйіне тәуелді, берілген уақыт кезіндегі жүйе күйін сипаттайтын, кейбір шамалар (оларды x арқылы белгілейік) бар екендігін ескеруіміз қажет. Бұл тәуелділікті жалпы түрде төмендегідей жазуға болады:

$$x(t_1) = \varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega],$$

мұндағы t_1 – берілген уақыт мезеті; $t_0 - t_0 < t_1$ шартына лайық кейбір өткен мезеттегі уақыт; $x(t_0)$ - жүйенің берілген өткен күйі; $\omega - \omega \in \Omega$ шартына лайық кіре беріс әсер.

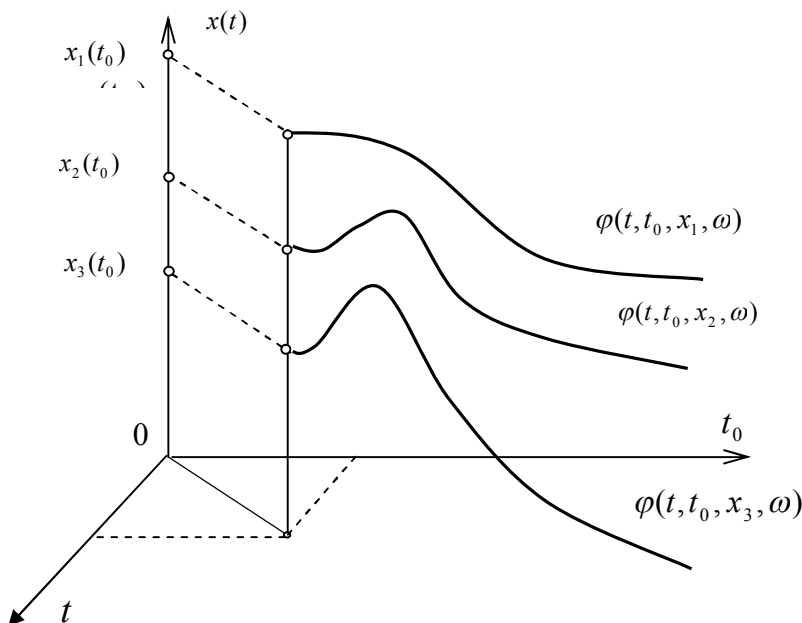
Егер x шамаларын кейбір X жиынының элементтері ретінде, ал барлық уақыт мезеттерін (соның ішінде t_0 және t_1) X жиынында жататын етіп қарастырсақ, онда x күйлерінің өрнегін осы түрде жазуға болады:

$$\Phi = \{\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X\}.$$

Егер $T \times T \times X \times \Omega$ жиыны $t_1, t_0, x(t_0), \omega$ түріндегі төрт еселі элементтерінен тұрады. Яғни φ сәйкестігі x элементтерінен тұратын осы төрт еселінің X жиынына бейнесін (функционалды байланыс) орнатады. Алынған φ бейнесі, кейбір X жиынында жатады және жүйе – *күйдің өтпелі функциясы* деп аталады. Күйдің өтпелі функциясы, бірімді анықтамалардың талаптарын қанағаттандыруы қажет. Әрине біріншіден, күйдің өтпелі функциясы барлық $t \geq t_0$ үшін анықталуы қажет, ал $t = t_0$ кезінде барлық $t \in T, x \in X$ және $\omega \in \Omega$ үшін келесі теңдік орындалуы керек:

$$\varphi[t_0; t_0, x(t_0), \omega] = x(t_0).$$

Бұл теңдеу φ функциясының бастапқы мәнімен келісетіндігін көрсетеді. Осы бастапқы $x(t_0)$ мәнінің $t = t_0$ ω кіре беріс сигналдың, берілген мәніне тәуелсіздігін анықтайды (5.3-сурет).



5.3-сурет

Ары қарай, $t = t_0$ кезіндегі және ω кіре беріс әсер кесіндісінің $[t_0, t_1]$ уақыт кесіндісінде, $\omega [t_0, t_1]$ деп белгілейік. $x(t_0)$ жүйе қалпының мәнін $t = t_1$ мезеттегі $x(t_1)$ қалпын анықтауға мүмкіндік беретін жеткілікті және қажетті шартты табу керек. Соған байланысты мына қатынас орындалады:

$$x(t_1) = \varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega(t_0, t_1)]$$

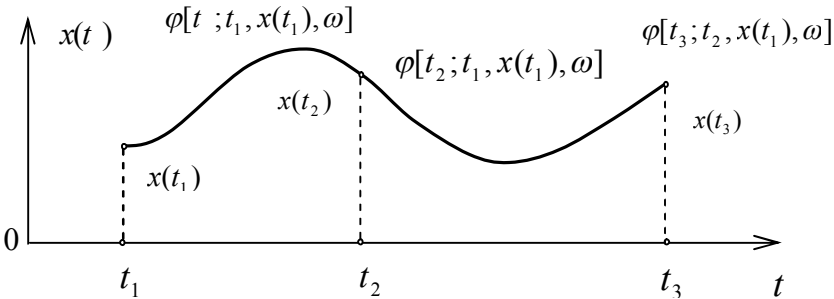
Осы арақатыстарға лайық жүйелер – *динамикалық жүйелер* деп аталады. Сонда, уақыт кесіндісі мен жүйенің бастапқы қалыптары $x(t_0)$ берілген кезде, екі бірдей кіре беріс әсерлердің нәтижелері де бірдей болуы тиіс, онда:

$$\varphi[t_1, t_0, x(t_0), \omega_1] = \varphi[t_1, t_0, x(t_0), \omega_2],$$

осы кезде $\omega_1 = \omega_2$, егер $t_0 < t \leq t_1$.

Айта кету керек, бірдей кіре беріс әсерлер ω , $[t_1, t_3]$ уақыт аралығының соңында берілсе, жүйе қалпын анықтайтын әсер келесі аралықтарда $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$ беріледі. Онда нәтижелік күйі өзгермейді. Осы жағдай 5.4-суретте көрсетілген. Бұл шарт барлық $x \in X$, $\omega \in \Omega$ мәндеріне және барлық $t_1 < t_2 < t_3 \in T$ уақыт аралықтарына келесі теңдеумен беріледі:

$$\varphi[t_3, t_1, x(t_1), \omega] = \varphi\{t_3, t_2, \varphi[t_2, t_1, x(t_1), \omega], \omega\}.$$



5.4-сурет

Қарастырылған қатынастармен берілген жүйе, оның күйінің өтпелі функциясының қасиеттері, осы жүйенің негізгі сипаттамасы ретінде анықталады. Жүйе күйінің өтпелі функциясы белгілі болып кіре беріс әсерлер берілген болса, онда жүйенің шыға беріс шамаларын анықтауға болады. Соңғысы өз-өзіне кіре беріс әсерін қосатындықтан, шыға беріс шама (оны $y(t)$ деп белгілейміз) былай жазылады:

$$y(t) = \eta[t; x(t)].$$

Әдетте шыға беріс шамалар жиынына шектеулер қойылмайды, бірақ олар Γ жиынында жатуы керек. t уақыт мезеттерінің T жиынында, ал x мәндері X жиынында жатқандықтан, шыға беріс шамалар жиынын жалпы мына түрде жазуға болады:

$$\tilde{A} = \{\eta : T \times X \rightarrow Y\}.$$

Енді Р. Калманның, П. Фалбтың және М. Арбибтың динамикалық жүйеге берген анықтамасын толық бере аламыз.

5.1 Анықтама. *Динамикалық жүйе* – деп келесі аксиомаларды қанағаттандыратын, өзара байланысты элементтер жиынтығының математикалық моделін атаймыз:

1. Берілген T уақыт кезіндегі жиын, X жүйе күйлерінің жиыны, U кіре беріс лездік мәндерінің жиыны, олардың жарамды мәндерінің жиыны берілсін:

$$\Omega = \{\omega : T \rightarrow U\},$$

Келесі Y шыға беріс лездік мәндер жиыны және олардың жарамды мәндер жиыны

$$\tilde{A} = \{\eta : T \times X \rightarrow Y\}.$$

2. Берілген T жиыны нақты сандар жиынының, реттелген ішжиыны (уақыт бағытын көрсететін жиын): $T \subseteq \mathbb{R}$.

3. Берілген келесі шарттарды қанағаттандыратын кіре беріс әсерлер жиыны:

а) Келесі Ω бос емес жиын;

ә) Берілген ω кіре беріс әсерлер кесіндісі, $(t_1, t_3]$ уақыт аралығында келесі қасиетке ие болуы тиіс:

$$\text{егер } \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega \text{ және } t_1 < t_2 < t_3 \in T,$$

онда

$$t_1 < t \leq t_2 \text{ кезде } \omega_3 = \omega_1, \quad (5.1)$$

$$t_2 < t \leq t_3 \text{ кезде } \omega_3 = \omega_2.$$

4. Егер t_0 уақыт кезеңдерінде жүйе $x(t_0) \in X$ бастапқы қалпында болса және оған $\omega \in \Omega$ кіре беріс әсері әсер етсе, онда $t \in T$ уақыт кезінде:

$$x(t) = \varphi[t, t_0, x(t_0), \omega] \in X \quad (5.2)$$

жағдайларында болатын өтпелі күй функциясы былай табылады:

$$\Phi = \{\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X\} \quad (5.3)$$

Өтпелі күй функциясының қасиеттері:

а) функция барлық $t \geq t_0$ үшін анықталған және барлық $t < t_0$ (уақыттың бағыты) үшін анықталмайды;

ә) функция өзінің бастапқы мәндерімен келісілген, яғни

$$x(t_0) = \varphi[t_0; t_0, x(t_0), \omega] \quad (5.4)$$

теңдігі кез келген $t \in T, x \in X, \omega \in \Omega$ үшін орындалады.

б) $t_0 < t \leq t_1$ үшін $\omega_1 = \omega_2$ болатын $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ кіре беріс әсерлерінің барлық кесінділері үшін келесі теңдік орындалады:

$$\varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega_1] = \varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega_2] \quad (5.5)$$

в) функция жартылай топтық қасиетіне ие, яғни кез келген $t_1 < t_2 < t_3$ және $x \in X, \omega \in \Omega$ үшін осындай теңдік орындалады:

$$\varphi[t_3; t_1, x(t_1), \omega] = \varphi\{t_3; t_2, \varphi[t_2; t_1, x(t_1), \omega], \omega\}. \quad (5.6)$$

4. Келесі теңдеумен күйдің өтпелі функциясы берілсе:

5.

$$y(t) = \eta[t; x(t)], \quad (5.7)$$

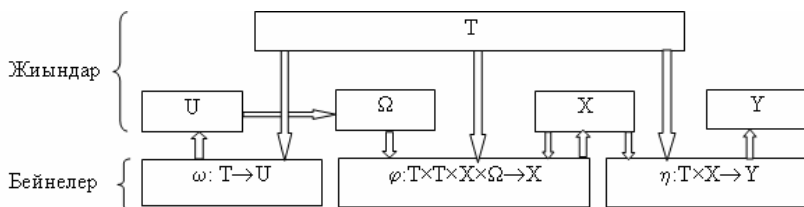
онда жүйенің шыға беріс шамаларының мәндерін анықтайтын

$$\Gamma = \{\eta : T \times X \rightarrow Y\}, \quad (5.8)$$

шыға беріс бейнелеуін табуға болады.

Келтірілген анықтама, жалпы түрде динамикалық жүйенің математикалық моделін сипаттайды. Сұлба түрінде оны

5.5-суретте көрсетілгендей, құрылымдық сұлбасы ретінде көрсетуге болады. Бұл математикалық модельді, физикалық жүйелердің әртүрлі кластарына қолдануға болады. Ол теориялық жағынан өте маңызды. Онда бірталай дербес қосымшалар, ортақ терминологиямен, негізгі түсініктермен және теорияның фундаментальды нәтижелерімен бірігеді. Бөлек қосымша терминдер, динамикалық жүйенің математикалық моделін нақтылайды. Мысалы, x -жүйесінің t_0 кезіндегі қалпы немесе $T \times X$ жиындарының қос элементтері, жүйенің оқиғасы немесе фазасы деп аталады. $T \times X$ жиынының өзі оқиға кеңістігі немесе фазалық кеңістік деп аталады.



5.5-сурет

Осы жағдайда кіре беріс әсерінің Ω_1 жиыны жүйені басқару үшін қолданылса, онда ол – *басқару* деп аталады. Басқару $u(t_0)$ қалпын $\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ қалпына ауыстырады (немесе түрлендіреді).

Егер жарамды кіре беріс әсерлер Ω жиыны бір элементтен ғана тұрса, ол *еркін* немесе *автономды динамикалық жүйе* деп аталады. Практикалық жағдайда ол – кіре беріс әсерлер жоқ болған кезде, жүйенің қозғалысы тек қана бастапқы мәндердің ауытқуларымен туындалады. Күйлердің өтпелі функциялары, дифференциалды тендеулермен жазылатын жүйелер, динамикалық жүйелердің бір маңызды топтарын құрады. Осындай жүйелердің анықтамасын (жоғарыда келтірілген) жалпы 2.1-анықтама арқылы енгізейік. Ол үшін жүйе күйінің X , кіре беріс әсерлерінің Ω және уақыт мезеттерінің T жиындарын

карастырайық. Онда осы айтылып кеткен жиындар, метрикалық кеңістіктер болып табылады. Карастырылып отырған кеңістіктердің элементтер ретінде нақты сандар R болады.

Онда: $T = R$, $\Omega = R^m$, $X = R^n$, мұндағы m және n кеңістіктердің өлшемдері. Табылған кеңістіктер нормаланған (векторлы) кеңістіктер болып табылады.

Күйдің өтпелі функциясы $\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$, барлық нүктелерде үзіліссіз бейнелеу болу үшін, $x \in X$ әрбір $t \in T$ анықталуы қажет. Осы бейнелеу жоғарыда айтылған анықтамаға сәйкес түрінде берілсін.

Енді жүйенің қалпы, t уақыт мезетінде күйдің өтпелі функциясының мәнімен берілсе:

$$x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega],$$

онда x айнымалының өсімшесі, t уақыт ақырсыз кішкене мәнге өзгерген кезінде, φ функциясы үзіліссіз қасиетін ескеріп, келесі түрде жазылады:

$$dx = \frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega] dt.$$

Тағы да осы функция $\frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ бірімді болып, келесі үзіліссіз функцияға $f(t; x, \omega)$ сәйкес түрінде берілсін.

Онда жүйенің күйі келесі дифференциалды теңдеумен анықталады:

$$\frac{dx}{dt} = f[t; x, u(t)],$$

мұндағы $u(t) = \omega(t)$. Осындай жүйе барлық жоғарыдағы шарттарды қанағаттандырса, онда ол қарапайым динамикалық жүйе деп аталады. Осы жүйенің толық анықтамасын келесі түрде беруге болады.

5.2. Анықтама. *Қарапайым динамикалық жүйе* – деп өзара байланысқан элементтердің жиынтығын айтамыз. Ол 5.1-

анықтаманың барлық аксиомаларына сәйкес, оған қоса келесі шарттарға лайықты, математикалық модель:

1. Берілген T уақыт мезеттер жиынының нақты сандар осі, ал U кіре беріс әсерлердің лездік мәндері. Жарамдық кіре беріс әсерлерінің мәндері, X жүйесі күйлерінің векторлық кеңістіктері болып табылады;

2. Барлық $t \in T$ мәндерінде үзіліссіз функциямен $\frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ берілген $f(t, x, \omega)$, туындатқыш функция деп аталады;

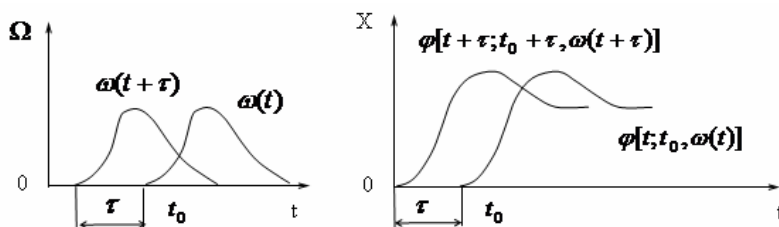
3. Жүйенің күйлерінің өтпелі функциясы, келесі дифференциалды теңдеудің шешімі болады:

$$\frac{dx}{dt} = f[t; x, u(t)]. \quad (5.9)$$

Осы дифференциалды теңдеудің шешімдері келесі бастапқы мәндерінде $x(t_0) = x_0$ барлық $t \in T$, $x \in X$ және $u \in \Omega$ есептеледі, мұндағы x – жүйенің күйлер векторы, u – кіре беріс әсерлердің векторы.

Кейбір жағдайларда динамикалық жүйенің элементтері мен олардың өзара байланыстары, уақыт өзгерісімен бірге өзгермейді. Осындай жүйелердің күйлері өтпелі функциямен анықталған кезде уақыт санаудан тәуелсіз.

Мысалы, берілген кіре беріс әсері $\omega(t)$, Ω жиынынан болса және жүйедегі күйлер өтпелі функциясы $f(t; t_0, x, \omega)$, онда оның τ ығыстыру уақыты тура осындай мәндегі күйлер өтпелі функциясын да ығыстырады, осы кезде функцияның түрі өзгермейді (5.6-сурет).



5.6-сурет

Осындай жүйелердің анықтамасы дәлірек келесі түрде беріледі.

5.3. Анықтама. Динамикалық жүйе стационарлы болу үшін (әлі де параметрлері уақыттан тәуелді болуы үшін), келесі шарттар орындалуы тиіс:

1. Жарамды Ω кіре беріс әсерлер кеңістігі кез - келген t , $\tau \in T$ үшін барлық $\omega_1(t) = \omega(t + \tau)$ функцияларынан тұрады.

2. Барлық $\tau \in T$ үшін келесі теңдеу орындалады:

$$\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega] = \varphi[t + \tau; t_0 + \tau, x, \omega(t + \tau)] \quad (5.10)$$

3. $y(t) = \eta[t; x(t)]$ шығыс шамаларын анықтайтын $\eta: T \times X \rightarrow Y$ бейнесі t -дан тәуелді емес, яғни келесі теңдік орындалады:

$$y(t) = \eta(x). \quad (5.11)$$

T барлық нақты сандар жиыны болғанда, динамикалық жүйе уақыты үзіліссіз жүйе болады. T бүтін сандар жиыны болғанда, жүйе дискретті уақыты бар жүйе болады.

Бақылау сұрақтары.

1. Жүйе деген ұғымды түсіндіріңіз?
2. Жүйенің кіре беріс және шыға беріс сигналдары қалай жазылады?
3. Жүйенің күйі қалай жазылады?
4. Динамикалық жүйенің анықтамасын келтіріңіз?

5. Қарапайым динамикалық жүйенің анықтамасын келтіріңіз?
6. Қандай жүйе стационарлы деп аталады?

5.2. Жүйелерді басқару

Алдыңғы тақырыпта анықталған динамикалық жүйенің анықтамасында – динамикалық жүйе, басқару объектісі ретінде қарастырыла алатындығы анықталған. Жүйе күйлерінің кейбір алдын ала берілген өзгерістеріне сәйкес, кіре беріс әсерлерін – *басқару* деп атайды.

Енді басқару түсінігін нақтылап, оған бірнеше анықтама беру керек. Басқарылатын объект алдын ала белгілі заңдар бойынша өзгеруі қажет. Осы өзгерістің сапасы, берілген критерий бойынша анықталады. Сонда, басқару есебі сондай кіре беріс әсерлерді тауып, олардың әсерінен жүйе өзгерісі – осы критерийдің тиімді мәніне сәйкес болуы тиіс. Осындай басқару – *тиімді басқару* деп аталады да, басқару есебінің мазмұнын құрады.

Жоғарыда енгізілген динамикалық жүйе деген ұғымға сүйене отырып, басқару есебін жалпы түрде қарастырамыз.

Басқару объектісі ретінде динамикалық жүйені 5.1 анықтамаға сәйкес аламыз. Енді басқару объектісінің $x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ мәндерімен берілген, күйдің өтпелі функциясын алайық:

$$\varphi : T \times T \times X \times O \rightarrow X,$$

және $y(t) = \eta[t; x(t)]$ мәндері бар шыға беріс функциясын табайық:

$$\eta : T \times X \rightarrow Y.$$

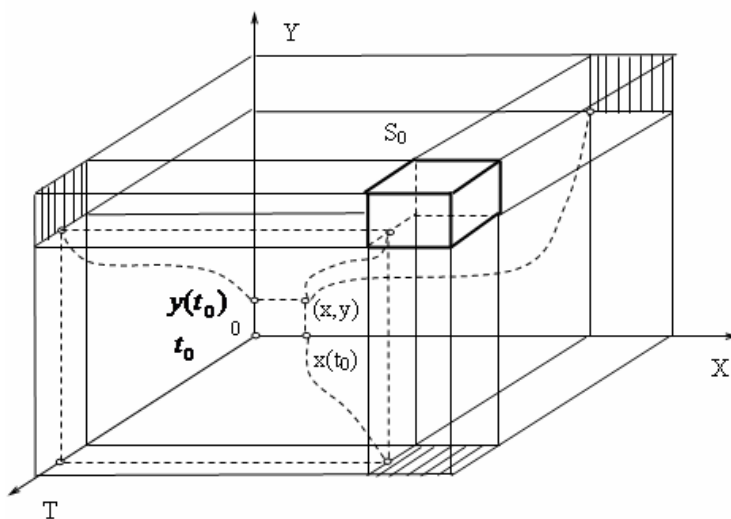
Келесі $x(t)$ объектінің күйі өзгергенде, оның шыға беріс шамасы да өзгереді, яғни берілген t уақыт мезеті үшін $T \times X \times Y$ жиынының да, (x, y) жұбын анықтауға болады. Осы жиынның элементтері берілген (x, y, t) мәндері болып табылатын, $S_0 \subset T \times X \times Y$ ішжиынын ерекшелейміз. S_0

ішжиынын – *мақсат жиыны* деп атайық. Ω жиынында Ω_0 ішжиынын ерекшелейміз. Оны – *жарамды басқарулар жиыны* деп атаймыз.

Егер (x_0, t_0) оқиғасы, яғни $y(t_0)$ шыға беріс шамасында шаманың көп мәні болса:

$$\varphi[t, t_0, x(t_0), u], \eta[t; x(t)]$$

Осы S_0 жиынымен қиылысатындай етіп түрлендіретін $u(t) = \omega(t)$ кіре беріс әсері табылса, (жарамды басқару жиынынан), онда процесс жүретін t_1 уақытын - *жету уақыты* деп атайды (5.7-сурет).



5.7-сурет

Берілген Ω_0 жиынында осындай түрлендіруді қамтамасыз ететін, кіре беріс әсердің қажет еместігін айтуға болады. Келесі η функцияларымен анықталатын, x объектінің жағдайы мен

оның қасиетінен u және y кіре беріс және шыға беріс шамаларының мәндеріне тәуелді кейбір нақты

$$I = I(u, y, x, \varphi, \eta, t)$$

функциясын жасайық.

Олай болса, объекті (x_0, t_0) қалпынан $[x(t_1, t_1)]$ қалпына ауыстыратын $u(t)$ басқаруы болғанда I функциясы

$$I_1 = I_1\{u, y(t_1), x(t_1), \varphi[t_1; t_0, x(t_0), u], \eta[t_1; x(t_1)], t_1\}$$

тең, нақты сан мәнін алады. Осы функцияның басқару сапасын – *шығындар функциясы* деп атайды.

Функцияның мәні азайған кезде, басқарудың сапасы жоғарылайды. Осыған сүйеніп, басқарудың жалпы есебінің анықтамасын келтіре аламыз.

5.4. Анықтама. Келесі шарттармен жасалған математикалық ұғым басқарудың жалпы есебі деп аталады:

1) Басқару объектісі болып, $\varphi[t; t_0, x(t_0), u]$ күйлердің ауыспалы функциясы және $\eta[t; x(t)]$ шыға беріс функциясы бар, динамикалық жүйе табылады. Басқару объектісі үшін $S_0 \subset T \times X \times Y$ мақсат жиыны және $\Omega_0 \subset \Omega$ жарамды басқарулар жиыны көрсетілген.

2) Басқарудың сапасына шығындау функциясы берілсе

$$I = I(u, y, x, t, \varphi, \eta)$$

және берілген t_1 жету уақыты, t_0 бастапқы уақыт кезінде, $x(t_0)$ -дың бастапқы қалпы үшін басқарудың сапасына шығындау функционалы алынады:

$$I_1 = I_1\{u, y(t_1), x(t_1), \varphi[t; t_0, x(t_0), u], \eta[t; x(t_1)], t_1\} \quad (5.12)$$

3) Әрбір берілген (t_0, x_0) күйлер үшін (t_0, x_0) өзгерілген мәндері, $\varphi[t; t_0, x(t_0), u]$, $\eta[t; x(t)]$ мәндері S_0 мақсат жиынымен қиылысатындай етіп түрлендіретін және басқарудың сапасын шығындау функционалын минимумдайтын $u(t) \in \Omega_0$ жарамды басқаруды анықтайды:

$$\{\varphi[t; t_0, x(t_0), u], \eta[t; x(t)]\} \cap S_0. \quad (5.13)$$

Бұл берілген анықтама жалпы жүйені анықтайды.

Алдында белгіленгендей, динамикалық жүйелердің негізгі тобы қарапайым динамикалық жүйелер болып табылады. Олардың жағдайларының өтпелі функциялары, дифференциалды теңдеулердің шешімі болып табылады. Бұл жағдайда басқару сапасын, шығындар функциясын дәлірек жазуға болады. Осы функция, нақты функция L_K түрінде берілсе:

$$L_K = L_K \{t_1; \varphi[t; t_0, x(t_0), u]\},$$

онда осы функция $u(t)$ басқаруының, t_1 жеткілікті уақытына және φ күйдің өтпелі функцияның түріне тәуелділігін көрсетеді. Осы жағдайда L_K функциясы міндетті түрде таңдалуы керек, себебі негізгі мақсат, оның мәнін азайту, сонда ғана басқару сапасы жоғарылайды. Сонымен, үздіксіз нақты функцияның $L_t = L_t \{t; \varphi[t; t_0, x(t_0), u], u(t)\}$, $u(t)$ басқаруының тәуелділігін, ағымды уақыт t және φ жағдайындағы өтпелі функцияның, $[t_0, t_1]$ аралығында интегралдауын анықтауға болады.

Басқару сапасының шығындар функциясын, мынадан көруге болады:

$$I_1 = L_K \{t_1; \varphi[t_1; t_0, x(t_0), u]\} + \int_{t_0}^{t_1} L_t \{t; \varphi[t; t_0, x(t_0), u], u(t)\} dt. \quad (5.14)$$

Келесі L_K функциясы осы өрнектің бірінші қосылғышы, t_1 уақыттың соңғы мезетінде, басқару сапасын сипаттайды да, функционалдың *терминалды құрастырушысы* деп аталады. Екінші қосылғышы t_0 мезеттегі қалыптан t_1 мезеттегі қалыпқа өту процесінің сапасын сипаттайды және өтпелі (әлі де стационарлы) функционалдың *құрастырушысы* деп аталады.

Қарапайым динамикалық жүйе сызықты болған кезде, туындатқыш функция былай беріледі:

$$f[t; x, u(t)] = F(t)x + G(t)u,$$

ал шыға беріс функцияның түрі мына тендеумен анықталады:

$$\eta(t; x) = H(t)x.$$

Басқарудың сапасын бағалауда ең көп тараған критерийлердің бірі - квадраттық критерий. Ал басқару сапасының шығындау функционалының анықтамасы мынадай.

Бейнелеу берілгенде $z: T \rightarrow Y$, оның мәндері ретінде $y = z(t)$ функцияның шамалары болып табылады. Осы бейнелеуді шыға беріс сигналы деп атайық. Онда, берілген шыға беріс сигналымен шыға беріс шаманың, ағымды мәнінің арасындағы айырымы басқарудың қателігін сипаттайды:

$$\varepsilon(t) = z(t) - y(t) = z(t) - H(T)x(t),$$

сонда басқару сапасының шығындану функционалы жай түрде былай жазылады:

$$I_1 = |\varepsilon(t_1)|^2 = \int_{t_0}^{t_1} [|\varepsilon(t)|^2 + |u(t)|^2] dt.$$

Осы жағдайда басқару есебі келесі түрде қойылады да, басқарудың қателігін және басқаратын органдарының энергия шығымын азайтып, минимальдайтын басқаруларды $u(t)$ табу керек.

Енді басқару заңы деген ұғымды анықтайық. Басында айтып кеткендей, кері байланыс принципі, автоматтық реттеу теориясының негізі болып, техникалық қосымшаларда кеңінен, жан-жақты пайдаланылады. Оған қарамастан, осы принциптің әдістемелік негізі көп уақыт бойы түсініксіз болып келді. Осыны дәлелдейтін жағдай, автоматтық басқару теориясы бойынша оқулықтарда, басқару жүйелері – *тұйықталған* және *тұйықталмаған* жүйелерге бөлінді. Осы жерде, ұғымның техникалық жағы әдістемелік жағынан жоғары болып кетеді.

Жоғарыда енгізілген динамикалық жүйенің басқару есептерінің анықтамалары, басқару заңының ұғымын анықтауға алып келеді. Расында, күйдің өтпелі функциясы $\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ жүйенің қалпын анықтайды. Ал, онда жүйенің күйі t_0 мезетінде және $[t_0, t)$ аралығында берілген ω кіре беріс әсерлердің кесіндісі, t уақыт мезетіндегі шыға беріс шамалардың мәндерін де анықтайды. Сонымен, қажетті басқаратын әсерлерді $u(t) = \omega(t)$ анықтау үшін, барлық ақпараттар жүйенің ағымды күйімен беріледі.

Басқару заңы деп аталатын бейнелеу келесі түрде жазылады:

$$k : T \times X \rightarrow U,$$

оның мәндері $u(t) = k[t; x(t)]$ шамалар, басқарулар болып табылады.

Жалпы жағдайда k функциясын анықтау күрделі, оның себебін келесі арақатыс көрсетеді:

$$u(t) = k\{t; \varphi[t; t_0, x(t_0), u]\},$$

жарамды басқарулардың Ω жиынына қойылатын, шарттар k функцияның бар болу аймағын көрсетпейді.

Осыған орай, күйлер айнымаларын анықтау үшін шыға беріс шамаларының мәндерін білу қажет. Сонда кері түрлендіру операциясының анықталуы тиіс:

$$\eta^{-1} : Y \rightarrow X$$

оның мәндері ізделінген шамалар болып табылады:

$$x(t) = \eta^{-1}[y(t)].$$

Осындай операция орындалса, онда $x(t)$ анықтау дәлдігін, әлі де $x_0(t)$ қалпын бағалау әдістерін табу керек.

Автоматтық басқару ұғымының қатаң анықтамасын берейік.

5.5. Анықтама. Динамикалық жүйелерде автоматтық басқару уақыт бойынша өтетін процесс. Осы процесс келесі шарттарды қанағаттандыруы қажет:

1) 2.1 анықтамасына лайық басқару объектісінің мақсат жиыны $S_0 \subset T \times X \times Y$ және жарамды басқарулар жиыны $\Omega_0 \subset \Omega$ берілуі тиіс;

2) Басқару заңы деп аталатын бейнелеу анықталуы қажет:

$$k: T \times X \rightarrow U, \quad (5.15)$$

оның мәндері ретінде басқарулардың шамалары болып табылады:

$$u(t) = k\{t; \varphi[t; t_0, x(t_0), u]\} \quad (5.16)$$

3) Басқарулар $u(t) \in \Omega_0$, басқару объектісінің $x(t_0) \in T \times X$ қалпынан $x(t) \in S_0$ қалпына, ауысу уақыты деп аталатын $t_1 - t_0$ уақыт кесіндісіне ауыстырып, келесі басқарудың сапасының шығындау функционалын минималдайды:

$$I_1 = I_1\{u, y(t_1), x(t_1), \varphi[t; t_0, x(t_0), u], \eta[t; x(t_1)], t_1\}.$$

4) Шыға беріс функциясы $\eta(t, x)$, у шыға беріс шаманың S_0 мақсат жиынына кіруін көрсетеді. Сонда $x(t) \in S_0$ теріс бейнелеуді былай табуға болады:

$$\eta^{-1}: Y \rightarrow X \quad (5.17)$$

оның мәндері келесі теңдеумен анықталады:

$$x(t) = \eta^{-1}[y(t)] \quad (5.18)$$

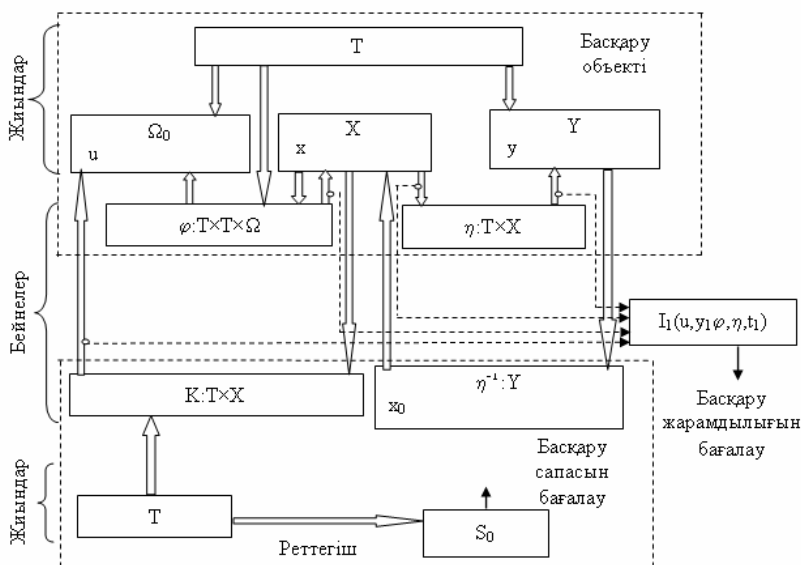
5) Шыға беріс шаманың $y(t_0): t_0 \leq t$ мәні жүйенің күйлерін $x(t_0)$ бағасын көрсетеді.

Бұл анықтамада, шарттардың бір бөлігі автоматтық басқару есебін орындайтын жүйені құрастырады. *Реттегіш* – деп жүйенің математикалық моделін атайды. Оның құрамына басқару объектінің қалпын бағалайтын және басқару заңын құрастыратын элементтер кіреді. Басқару объектінің құрылымды логикалық сұлбасы 5.8-суретте көрсетілген.

Басқару объектісіне әсерлеп Ω_0 жиынында жататын u басқарулар, жүйе күйлерінің шамаларының $x \in X$ және шыға

беріс шамаларының $y \in Y$ бір мәндерін береді. Шыға беріс шамалардың мәндері арқылы жүйенің x күйлері, сонымен қоса, X жиынынан алынған x бағаларды басқару заңын k құрастырады. Осы заң арқылы Ω_0 жиынынан u басқарудың қажетті шамасы табылады. Басқару сапасы – басқару сапасының шығындау функционалы I_1 арқылы, ал басқару мүмкіншілігі x және y мәндерінің мақсат жиынында S_0 жатуымен бақыланады.

Жоғарыда келтірілген анықтамалар, басқару мәселелерімен байланысқан жүйелер теориясының бірқатар есептерін көрсетеді.



5.8-сурет

Жүйенің идентификация есебі. Бұл жерде басқару жиынының $u(t) \in \Omega_0$ бірмәнде сәйкесетін, шыға беріс шамалардың жиынын көрсетуге болады. Осы сәйкестікті бір топ функциялар құрастырады.

Сәйкестікті құрастыратын функциялар келесі бейнелеумен анықталады:

$$f_r : T \times \Omega \rightarrow Y,$$

әрбір бейнелеу, бір басқаруға, бір шыға беріс шаманы $y(t)$ сәйкестеп қойып, оны келесі теңдікпен көрсетеді:

$$y(t) = f_{ri}[u(t)], \quad (5.19)$$

мұндағы i - $y(t)$ тәуелділердің нөмірлері.

Осыдан күрделі жағдайларда $u(t)$ және $y(t)$ шамаларының арасындағы қатынас, кейбір F және M айнымалылардың функциялары арқылы орналастырылады:

$$F[y(t)] = f_{ri}[M(u(t))]. \quad (5.20)$$

Осындай динамикалық жүйелердің математикалық модельдерді құрастыру есебі, идентификацияның есебі болып табылады. Көп жағдайларда идентификацияның мақсаты бойынша, (5.19) (5.20) теңдеулермен берілген, эксперимент арқылы табылған нәтижелерден, жүйенің қасиеттерін көрсететін, күйдің өтпелі функциясын $\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ табу қажет.

Келесі қарастырылатын есепте, жүйенің басқарылуы мен бақылауын табу керек. Бұл есепте мағынасы берілген шарт бойынша, жүйенің $x(t_0)$ қалпынан $x(t_1)$ қалпына ауысатын басқаруларды $u(t)$ табу керек. Ал, бұл мақсатты орындау оңай емес. Расында, алдын ала қойылған мақсатқа лайық, сәйкес басқарулардың жарамды жиыны, $u(t) \in \Omega_0$ бар, жоғы белгісіз.

Осы жиын, келесі жиынның $\{x(t), y(t)\}$ және шектелген уақытта t_1 , берілген мақсат жиынымен S_0 қиылысын қамтамасыз етуі қажет. Кейбір жағдайларда Ω_0 жиынының ішжиыны, осы қиылысты қамтамасыз етеді. Сонда, $u(t)$ басқарулардың бөлігін, басқару есебін толық шеше алмайды. Осы жағдайда жүйе – *басқарылмайтын жүйе* деп аталады.

Сонымен, динамикалық жүйенің басқарылуын анықтау үшін келесі шарттарды орындау қажет: күйлердің өтпелі функциясының $\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$ мәндері $x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ бар болуын және оған сәйкес барлық басқарулар $u(t) \in \Omega_0$ нөлге тең болмауы керек.

Жүйені басқару үшін оның күйлерінің $x(t)$, шыға беріс мәндерін $y(t)$ арқылы анықтаймыз. Былайша айтқанда, бейнелеу солай $\eta: Y \rightarrow X$ болуы қажет. Осындай нөлге тең емес бейнелеулерді, барлық $y(t) \in Y$, $x(t) \in X$ сәйкес, анықтау есебі, динамикалық жүйенің басқарулығын анықтау есебі деп аталады.

Келесі берілген есеп, тиімді басқару есебі деп аталады. Бұл есеп жүйелер теориясының негізгі мақсатының бірі. Осы есепте басқару заңдарын $k: T \times X \rightarrow U$ табу керек. Олар берілген жиындар X, Y, Ω_0 шығындау функционалдың минимальды сапасын қамтамасыз етеді:

$$I_1 = I_1(u, y, x, \varphi, \eta, t_1).$$

Осы есеп тиімді басқарудың есебі болып табылады.

Бақылау сұрақтары.

1. Жүйенің басқаруы қалай беріледі?
2. Динамикалық жүйелердегі автоматтық басқару қалай беріледі?

3. Қандай жүйелер тұйықталған және тұйықталмаған деп аталады?
4. Реттегіш қандай функцияларды атқарады?
5. Басқарылатын және басқарылмайтын жүйелердің айырмашылықтарын айтыңыз?

5.3. Сызықты динамикалық жүйе

Сызықты динамикалық жүйе мағынасы жоғарыда айтылып кеткендей, суперпозиция принципіне сүйенеді. Бұл принциптің мағынасы мынадай: жүйеге әсер ететін кіре беріс сигналдар қосындысының жалпы шыға беріс мәні, әр әсерден шығатын сигналдардың қосындысына тең болады. Суперпозицияның мнемоникалық формуласы да бар: «Себептер қосындысының нәтижесі әрбір жеке себеп нәтижелерінің қосындысы болады». 5.1 және 5.2 анықтамаларына сүйене отырып, сызықты динамикалық жүйенің анықтамасын тұжырымдаймыз.

5.6. Анықтама. Сызықты динамикалық жүйе — деп 5.1 аксиомалар келесі шарттарды қанағаттандыратын, өзара байланысқан элементтер қосындысының математикалық моделін айтады:

1. Келесі X жүйесінің күйлері сызықты (векторлы) кеңістіктер, лездік кіре беріс әсерлері U , олардың жарамды мәндері Ω , Y шығыс лездік мәндері және олардың жарамды мәндері Γ берілсін.

2. Мәндері бар $\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$ өтпелі күйлер функциясы $X \times \Omega$ жиынында сызықты болып табылады, яғни келесі теңдік орындалады:

$$\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega] = \varphi[t; t_0, x, 0] + \varphi[t; t_0, 0, \omega], \quad (5.21)$$

және ол дифференциалды теңдеуді қанағаттандырады:

$$\frac{dx}{dt} = f[t; x, u(t)], \quad (5.22)$$

3. Шығыс бейнелеуі $\eta: T \times X \rightarrow Y$ X -жиынында сызықты, яғни келесі теңдік дұрыс болады:

$$y(t) = \eta[t; x(t)] = h(t)x(t). \quad (5.23)$$

Біз қарапайым сызықты динамикалық жүйеге, яғни қозғалысы дифференциалдық тендеулермен сипатталатын жүйеге анықтама бердік. Енді осы анықтаманы, сызықты кеністіктің қасиеттерін пайдаланып нақтылаймыз.

Х сызықты кеңістігінде базисі анықталып және кеңістіктің өлшемі n^* берілген болса, Ω кіре беріс сигналдары кеңістігінің өлшемі $n \leq m$ болады. Берілген t уақыт мезетінде жүйенің жағдайы X векторымен анықталса, осы вектордың туындысы $\frac{dX}{dt}$ базистің координаттары бойынша n құраушыға

$\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$ жіктеледі. 5.6-анықтаманың 2-шартына сүйеніп, (5.23) теңдігінің оң жағы $\Omega \times X$ жиынында сызықты, яғни ол X және U векторларының сызықты комбинациясы болып табылады. Сәйкесінше, $\frac{dX}{dt}$ векторының құраушыларын

келесі түрде көрсетуге болады:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \dots + f_{1n}x_n + g_{11}u_1 + g_{12}u_2 + \dots + g_{1m}u_m, \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \dots + f_{2n}x_n + g_{21}u_1 + g_{22}u_2 + \dots + g_{2m}u_m, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \dots + f_{nn}x_n + g_{n1}u_1 + g_{n2}u_2 + \dots + g_{nm}u_m, \end{aligned} \right. \quad (5.24)$$

мұндағы f_{ij} және g_{ik} – X және U векторлардың координаттары.

Векторлардың жазуын матрица-баған түрінде енгізейік:

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

және координаталық функцияларды матрица түрінде жазайық:

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix}, \quad G(t) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mm} \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Келесі $F(t)$ матрицасының n жолы және n бағаны бар, $G(t)$ матрицасының n жолы және m бағаны бар. Матрицаларды көбейту ережесін пайдаланып, (2.19) теңдеуді төмендегідей жазуға болады:

$$\frac{dX}{dt} = F(t)X + G(t)U. \quad (5.27)$$

Шығыс мәндерінің Y кеңістігінің өлшемі, p болса, онда 5.6-анықтаманың 3-шартына сәйкес, (5.23) теңдеудің X векторының құраушыларының сызықты комбинациясын, Y векторының проекциялары ретінде көрсетуге болады.

$$\begin{cases} y_1(t) = h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \dots + h_{1n}x_n, \\ y_2(t) = h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + \dots + h_{2n}x_n, \\ \dots \\ y_p(t) = h_{p1}x_1 + h_{p2}x_2 + \dots + h_{pn}x_n. \end{cases} \quad (5.28)$$

Берілген Y векторын баған матрицасы түрінде жазып:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

және h_{ij} координаталық функциялар матрицасын енгізіп:

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{p1} & h_{p2} & \dots & h_{pn} \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

жазылған (5.28) теңдеуін мына түрде аламыз:

$$Y(t) = H(t)X. \quad (5.31)$$

5.7. *Анықтама.* Сызықты динамикалық жүйе, (шекті өлшемді және үзіліссіз уақытты) сызықты дифференциалды теңдеулер жүйесімен сипатталады:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(t)X + G(t)U, \\ Y(t) = H(t)X. \end{cases} \quad (5.32)$$

Егер F, G және H матрицалары уақытқа тәуелсіз болса, онда сызықты динамикалық жүйе стационарлы болады.

Берілген (5.32) жүйесінің бірінші теңдеуі – жүйенің *қалып-күй теңдеуі*, ал екіншісі – *шығыс шамаларының теңдеуі* деп аталады.

5.3.1. Сызықты жүйенің өтпелі және импульсті, өтпелі функцияларының матрицалары

Алдыңғы параграфта келтірілген сызықты динамикалық жүйенің анықтамалары, сызықты жүйелерді зерттеудің принципіалды негізін орнатады.

Кейбір конструктивтік нәтижелерді табу үшін жүйеге сәйкес және оның қасиеттерін толығырақ ашатын сипаттаманы алу керек. Төменде сызықты жүйенің дифференциалды теңдеуін қарастырамыз:

$$\frac{dX}{dt} = F(t)X, \quad (5.33)$$

Ол жүйенің күйлер теңдеуінен, $U(t)$ кіре беріс әсерлерін нөлге теңестіру арқылы алынған:

$$\frac{dX}{dt} = F(t)X + G(t)U \quad (5.34)$$

Берілген (5.33) теңдеуі $t=t_0$ мезетінде $X(t_0)$ бастапқы шарттар векторымен анықталатын, бастапқы ауытқулардың әсерінен болатын жүйенің күйін сипаттайды. Бұл вектор үшін арнайы белгі енгізейік:

$$X(t_0) = \Lambda. \quad (5.35)$$

Қарастырылған (5.33) теңдеуін қанағаттандыратын әр $X(t_0)$ векторы, Λ бастапқы шарттар векторының кез келген мәнінде, $X(t_0)=X(t, \Lambda)$ теңдеуінің шешімі деп аталады, $t=t_0$ үшін $X(t, \Lambda)=\Lambda$ болу керек.

Келесі (5.33) және (5.34) теңдеулерін қарастыру берілген шешімнің жалғыз болуы туралы теореманы дәлелдеуден басталады. Келесі қарастырулардың мақсаты – негізінен шешімдердің қасиеттерін зерттеу болғандықтан, біз негізгі теореманың тұжырымдамасымен ғана шектелеміз, оны дәлелдеудің қажеті жоқ.

Егер t бойынша $F(t)$ матрицасы t_0 және $t \in T$ және Λ бастапқы шарттан, $\|\Lambda\| < 0$, әр мәндері үшін үздіксіз болса, (5.34) теңдеуінің $X(t, \Lambda)$ жалғыз ғана шешімі болады.

Сонымен, бастапқы шарттарының векторынан Λ тәуелді, анықталған t_0 мәніне сәйкес, $X(t_0, \Lambda)$ векторлардың (функциялардың) жиыны бар екен. Осы жиын, шешімдердің сызықты кеңістігін құрастырады, 5.6–анықтамасына сәйкес, жүйенің күйлер кеңістігі сызықты (векторлы) кеңістік.

Келесі (5.34) теңдеу $X(t_0, \Lambda)$ шешімдерінің кеңістік өлшемі n -ға тең екенін көрсетейік, мұндағы n - $F(t)$ матрица жолдарының саны.

Бастапқы шарттарының векторы Λ кез келген түрде берілсін. Онда, сызықты кеңістікте n сызықты тәуелсіз тұрақты векторларын λ_i таңдайық. Олар (5.34) теңдеудің бастапқы векторлары болсын. Осы вектор элементтерінің бастапқы мәндерін анықтап, сан болған себептен, R^n сандық кеңістігінде жатады.

Қарастырылған векторлар n -өлшемді сызықты кеңістіктің R^n базисін құрастырады. Сол себептен, кез келген бастапқы шарттарының векторы осы базис бойынша жіктеледі:

$$\Lambda = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n, \quad (5.36)$$

мұндағы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – жіктеудің координаттары.

Шешімнің бар және жалғыз болуы туралы теоремалар бойынша, әрбір бастапқы шарттарының векторына және (5.34) теңдеудің кез келген n бастапқы шарттарына λ_i сәйкес, шешімдердің кеңістігінде n бірімді анықталған шешімдер $X(t, \lambda_i)$ табылады:

$$X_i(t_0, \lambda_i) = \lambda_i.$$

Осылардан сызықты комбинацияны құрастырайық:

$$X(t) = \alpha_1 X_1(t, \lambda_1) + \alpha_2 X_2(t, \lambda_2) + \dots + \alpha_n X_n(t, \lambda_n), \quad (5.37)$$

ол өзі де (5.34) теңдеудің шешімі болады.

Осы комбинацияның сызықты тәуелсіздігін көрсету үшін кері жағдайды қарастырайық. Онда кейбір нөлге тең емес α_i бойынша, $X(t)$ функциясы бір кез келген $t = \tau$ мәнінде де нөлге тең болуы кажет:

$$X(\tau) = \alpha_1 X_1(\tau, \lambda_1) + \alpha_2 X_2(\tau, \lambda_2) + \dots + \alpha_n X_n(\tau, \lambda_n) = 0.$$

Ал шешімнің жалғыз болуы жайлы теоремасы бойынша берілген λ_i мәндеріне сәйкес $X(\tau)$ функциясы барлық $\tau \in T$

нөлге тең болуы тиіс, оның арасына $\tau = t_0$ мәні де кіреді. Осы кезде, $X_i(t_0, \lambda_i) = \lambda_i$ болған кезде:

$$X(t_0) = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n = 0.$$

Онда бұл теңдеу, λ_i векторлардың сызықты тәуелдік шартына қайшылыққа келеді де, (5.28) комбинацияның сызықты тәуелсіздігін көрсетеді.

Келесі (5.36) және (5.37) жіктеулерінің координаттары бірдей екенін ескертсек, $t = t_0$ болғанда:

$$\alpha_1 X_1(t_0, \lambda_1) + \alpha_2 X_2(t_0, \lambda_2) + \dots + \alpha_n X_n(t_0, \lambda_n) = \Lambda.$$

Қандай болсын бастапқы шарттар Λ кезінде, $X(t)$ (5.35) теңдеудің шешімі. Онда, $X_i(t, \lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ сызықты тәуелсіз векторлар, n -өлшенген кеңістіктің базисін құрастырады.

Шешімнің фундаменталды матрица ұғымын келтірейік. Оңай түсіндіру үшін мысал ретінде 2-ретті теңдеулер жүйесін қарастырамыз.

Келесі матрицаны:

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

және баған-матрицаны:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.39)$$

енгізсек, (5.33) теңдеу жазыңқы түрде жазылады:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_{11}x_1 + f_{12}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_{21}x_1 + f_{22}x_2. \end{cases} \quad (5.40)$$

Осы жазуды қысқарту үшін t аргументі жазылмады.

Бастапқы мәндері мына түрде берілсе, $x_1(t_0) = x_{10}$, $x_2(t_0) = 0$, онда $x_1(t, x_{10}, 0)$, $x_2(t, x_{10}, 0)$ кейбір дербес шешімдері де (5.40) теңдеудің шарттарына лайық болу тиіс. Оларды былай белгілейік $\gamma_{11}(t, t_0)$, $\gamma_{21}(t, t_0)$. Осы белгілеуде бірінші индекс (5.40) теңдеудегі $x(t)$ нөмірін, ал екінші индекс, нөлге тең емес бастапқы шартын көрсетеді.

Бастапқы шарттардың орындарын ауыстырып $x_1(t_0) = 0$, $x_2(t_0) = x_{20}$ дербес шешімдерін келесі түрде жазамыз $\gamma_{12}(t, t_0)$, $\gamma_{22}(t, t_0)$. Онда $\gamma_{ij}(t, t_0)$ функциялары шешімдер – векторлардың, ал бастапқы шарттардың мәндері бастапқы векторларының құраушылары:

$$\begin{cases} X_1(t, \lambda_1) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(t, t_0) \\ \gamma_{21}(t, t_0) \end{bmatrix}, & \lambda_1 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ X_2(t, \lambda_2) = \begin{bmatrix} \gamma_{12}(t, t_0) \\ \gamma_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}, & \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{20} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (5.41)$$

Берілген $t = t_0$ болғанда $X_1(t_0, \lambda_1) = \lambda_1$, $X_2(t_0, \lambda_2) = \lambda_2$. Осы арақатыстарды n -ретті теңдеуге таратып, мынаны жазуға болады:

$$X_i(t, \lambda_i) = \begin{bmatrix} \gamma_{1i}(t, t_0) \\ \gamma_{2i}(t, t_0) \\ \vdots \\ \gamma_{ni}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

мұндағы, γ функциясының бірінші индекс $F(t)$ матрица жолының, ал екінші индекс λ_i бастапқы вектордың нөмірлерін көрсетеді.

Біздің мысалда 2-ретті жүйелерге алғышарттарын бірлік етіп қоялық, яғни $x_{10} = 1$ және $x_{20} = 1$.

Сәйкес дербес шешімдерін $\varphi_{ij}(t, t_0)$ деп белгілейік. Онда келесі арақатыстар орын алады:

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(t, t_0) &= \lambda_1 \varphi_{11}(t, t_0), & \gamma_{12}(t, t_0) &= \lambda_2 \varphi_{12}(t, t_0), \\ \gamma_{21}(t, t_0) &= \lambda_1 \varphi_{21}(t, t_0), & \gamma_{22}(t, t_0) &= \lambda_2 \varphi_{22}(t, t_0), \end{aligned}$$

немесе матрицалық түрде:

$$X_1(t, \lambda_1) = \lambda_1 \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t, t_0) \\ \varphi_{21}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad X_2(t, \lambda_2) = \lambda_2 \begin{bmatrix} \varphi_{12}(t, t_0) \\ \varphi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

Осы арақатыстарды n -ретті теңдеулерге таратып, оларды төмендегідей етіп жазамыз:

$$X_i(t, \lambda_i) = \lambda_i \begin{bmatrix} \varphi_{1i}(t, t_0) \\ \varphi_{2i}(t, t_0) \\ \vdots \\ \varphi_{ni}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad (5.43)$$

және $t = t_0$ болғанда $X_i(t, \lambda_i) = \lambda_i$, өйткені

$$\begin{cases} \varphi_{ij}(t_0, t_0) = 0, & i \neq j \text{ кезінде,} \\ \varphi_{oi}(t_0, t_0) = 1, & i = j \text{ кезінде.} \end{cases} \quad (5.44)$$

Берілген (5.40) теңдеуіне қайта келейік. Табылған (5.41) дербес шешімдері оларды (5.40) теңдеуге алмастырған кезінде келесі тепе-теңдік табылады:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{11}}{dt} &= f_{11}\gamma_{11} + f_{12}\gamma_{21}, & \frac{d\gamma_{12}}{dt} &= f_{11}\gamma_{12} + f_{12}\gamma_{22}, \\ \frac{d\gamma_{21}}{dt} &= f_{21}\gamma_{11} + f_{22}\gamma_{21}, & \frac{d\gamma_{22}}{dt} &= f_{21}\gamma_{12} + f_{22}\gamma_{22}, \end{aligned}$$

Бұл арақатыстарды матрица элементтері ретінде келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\gamma_{11}}{dt} & \frac{d\gamma_{12}}{dt} \\ \frac{d\gamma_{21}}{dt} & \frac{d\gamma_{22}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}\gamma_{11} + f_{12}\gamma_{21} & f_{11}\gamma_{12} + f_{12}\gamma_{22} \\ f_{21}\gamma_{11} + f_{22}\gamma_{21} & f_{21}\gamma_{12} + f_{22}\gamma_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

мұндағы оң жақ матрицаның әрбір элементі, сол жақ матрицаның сәйкесінше элементіне тең.

Екі матрицаны көбейту формуласын қолдана отырып, оң жақ матрица екі матрицаның көбейтіндісі екенін аңғаруға болады

$$\begin{bmatrix} f_{11}\gamma_{11} + f_{12}\gamma_{21} & f_{11}\gamma_{12} + f_{12}\gamma_{22} \\ f_{21}\gamma_{11} + f_{22}\gamma_{21} & f_{21}\gamma_{12} + f_{22}\gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}.$$

Белгілеу енгізейік:

$$\Gamma(t, t_0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

және (5.38) қолдана отырып, (5.45) арақатысын келесі түрде аламыз:

$$\frac{d\Gamma(t, t_0)}{dt} = F(t) \tilde{A}(t, t_0). \quad (5.46)$$

Келесі n -дәрежелі жүйе үшін $\Gamma(t, t_0)$ матрицасы келесі түрде болады:

$$\Gamma(t, t_0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \cdots \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \cdots \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} \cdots \gamma_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

осы матрица – шешімдердің *фундаменталды матрицасы* деп аталады. Бұл матрицаның тік жолдары сызықты тәуелсіз, демек матрицаның анықтауышы нөлден өзге болады.

Ал негізінде (5.42) формуласы мен (5.47) матрицасын келесі түрде жаза аламыз:

$$\Gamma(t, t_0) = \begin{bmatrix} X_1(t, \lambda_1), & X_2(t, \lambda_2) \dots X_n(t, \lambda_n) \end{bmatrix}$$

мұндағы тік жолдар рөлін атқарып тұрған функциялар (векторлар) $X_i(t, \lambda_i)$ сызықты тәуелсіз. (5.42) формуласымен анықталатын $X_i(t, \lambda_i)$ мәндерін соңғы өрнекке қойсақ, шығады:

$$\Gamma(t, t_0) = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \cdots \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \cdots \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} \cdots \varphi_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (5.48)$$

Белгілеулерді енгізсек,

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \cdots \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \cdots \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots \cdots \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} \cdots \varphi_{nn} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Онда

$$\Gamma(t, t_0) = \Phi(t, t_0) \Lambda_0.$$

Берілген $\Phi(t, t_0)$ матрицасы, жүйенің өтпелі матрицасы деп аталады. Бұл атаудың түсінігін төменде қарастырамыз.

Айталық, Λ_0 , λ_i құраушыларынан құралған бастапқы вектор, оның α_i жіктеу координаталары бірге тең [(5.36) формуласы].

Егер Λ_0 бастапқы векторының барлық құраушыларын бірге тең деп алсақ, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$, онда фундаменталды шешімдер матрицасы өтпелі матрицамен бірдей болады. Соңғысы, $t=t_0$ болғанда бірлік матрицаға айналады, өйткені (5.44) формуласымен анықталатын φ_{ij} мәндері келесі теңдеуден табылады:

$$\Phi(t_0, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I \quad (5.50)$$

Алынған (5.46) арақатысы негізінде өтпелі матрица келесі теңдеуді қанағаттандырады деп ұйғаруға болады:

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = F(t). \quad (5.51)$$

Осы формуланы (5.32) теңдеуімен салыстырсақ, $\Phi(t, t_0)$ n-өлшемді кеңістіктегі (5.48) матрицасының сызықты тәуелсіз құраушылары бар, вектор деп түсінуге болады.

Өтпелі матрица түсінігін енгізу – жүйенің күйлер векторы мен кіре беріс әсер векторының арасындағы тікелей байланысты, іздеу есебін шешуге мүмкіндік береді.

Берілген (5.34) теңдеуінің келесі түрдегі шешімін іздестірсек:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)K(t, t_0) \quad (5.52)$$

мұндағы $K(t, t_0)$ - $U(t)$ кіре беріс сигнал векторына тәуелді, белгілі бір матрица. (3.46) қатынасын уақыт бойынша дифференциалдағанда, табатыны:

$$\frac{dX}{dt} = \Phi(t, t_0) \frac{dK}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} K(t, t_0).$$

Берілген (5.51) өрнегінен $x(t)$ мәнін және алынған $\frac{dX}{dt}$ -ны (5.34) теңдеуіне қойсақ, онда былай болады:

$$\Phi(t, t_0) \frac{dK}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} K(t, t_0) = F(t)X(t, t_0)K(t, t_0) + G(t)U,$$

немесе

$$\Phi(t, t_0) \frac{dK}{dt} = G(t)U, \quad (5.53)$$

Табылған (5.50) негізіне келесі теңдік орын алады:

$$\frac{d\Phi}{dt} K(t, t_0) = F(t)X(t, t_0)K(t, t_0).$$

Келесі $\Phi(t, t_0)$ өтпелі матрицасының тік жолдары сызықты тәуелсіз болғандықтан, матрица өзгеше емес және оның кері

матрицасы $\Phi^{-1}(t, t_0)$ бар. (5.37) қатынасының сол жағын $\Phi^{-1}(t, t_0)$ көбейтіп, кері матрица қасиетін ескерсек:

$$\Phi^{-1}(t, t_0)\Phi(t, t_0) = I$$

онда біз мынаны табамыз:

$$\frac{dK}{dt}\Phi^{-1}(t, t_0) = G(t)U(t).$$

Осы өрнекті t_0 мен t аралығында интегралдасақ:

$$K(t, t_0) = C + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s, t_0)G(s)U(s)ds,$$

сонымен бірге, $t = t_0$ болғанда $C = K(t_0, t_0)$. (5.51)

арақатысының сол жағын $\Phi^{-1}(t, t_0)$ көбейтіп, $t = t_0$ деп алып, (5.49) негізінде $\Phi^{-1}(t, t_0) = I$, болатындығын ескерсек, болады:

$$C = x(t_0).$$

Берілген $K(t, t_0)$ және C мәндерін (3.46) формуласына қойсақ, нәтижесі былай болады:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + X(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s, t_0)G(s)U(s)ds, \quad (5.54)$$

Келесі (5.54) формуласы $x(t)$ - жүйенің күй векторы мен $X(t_0)$ - бастапқы шарттар мен $U(t)$ кіре беріс әсерлер векторлар арасында жүйенің $\Phi(t, t_0)$ - өтпелі матрица арқылы байланысын орнатады. Осылайша өтпелі матрица, жүйенің динамикалық қасиеттерін толығымен анықтайтын сызықты жүйенің сипаттамасы болып табылады. Егер кіре беріс әсері болмаса, $U(t)=0$, жүйенің күй векторы жүйенің қозғалысын анықтайды. (5.54) формуласы негізінде төмендегідей болады:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0), \quad U(t) = 0 \quad (5.55)$$

Алынған арақатынас, $\Phi(t, t_0)$ матрицасы жүйенің t_0 кезіндегі бастапқы қалпынан t уақыт кезіне сәйкес, $x(t)$ қалпына өтуін анықтайтындығын көрсетеді. Сондықтан да $\Phi(t, t_0)$ жүйенің өтпелі матрицасы деп аталады. Егер кіре беріс әсер бермей тұрғанда жүйе тыныштық күйде $X(t_0) = 0$ болса, кіре беріс әсер бергеннен кейін, жүйенің күй векторы еріксіз қозғалысты анықтайтын болады. Мұнда (5.56) формуласы келесі түрде беріледі:

$$X(t) = \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s, t_0) G(s) U(s) ds, \quad X(t_0) = 0$$

Өтпелі матрицаның кейбір қасиеттерін айқындайық. (5.56) формуласын қолдана отырып, жазамыз:

$$X(t_1) = \Phi(t_1, t_0) X(t_0),$$

$$X(t_2) = \Phi(t_2, t_1) X(t_1),$$

бұдан:

$$X(t_2) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) X(t_0).$$

Екінші жағынан,

$$X(t_2) = \Phi(t_2, t_0) X(t_0),$$

демек,

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0). \quad (5.56)$$

Алынған формула күйлердің өтпелі функциясының, жартылай топтың қасиетінің нақты таралуы болып табылады және ол 5.1-анықтамамен келіседі. (5.56) формуласына $t_2 = t_0, t_1 = t$ деп енгізсек, онда ол:

$$\Phi(t_0, t_0) = \Phi(t_0, t) \Phi(t, t_0) = I,$$

бұдан:

$$\Phi^{-1}(t_0, t) = \Phi(t, t_0). \quad (5.57)$$

Бақылау сұрақтары.

1. Қандай жүйе сызықты динамикалық жүйе деп аталады?
2. Сызықты жүйенің өтпелі функциясы қалай табылады?
3. Сызықты жүйенің импульсті өтпелі функциясы қалай табылады?
4. Қандай матрица фундаменталды деп аталады?

Қорытынды

Автоматтық басқару жүйелерін құрастырған кезінде әртүрлі математикалық әдістер қолданылады. Осы себепке байланысты 5В0702 – Автоматтандыру және басқару мамандығы бойынша студенттерді оқыту барысында математикалық дайындығын жоғарылату үшін жүйелер теориясының математикалық негіздері пәні оқытылады.

Осы пән бойынша – жиындар, графтар, математикалық логиканың, матрицалар аппаратының, жүйелер теорияларының негіздері қарастырылады. Жиындар теориясының негіздерінде жиын ұғымы енгізіліп, жиындармен әртүрлі операцияларды орындау, сәйкестік, бейнелеу ұғымдары арқылы функция ұғымы енгізіледі. Графтар теориясының негіздерін қарастырғанда, граф ұғымы енгізіліп, олардың түрлері, графтарды матрицалармен жазу әдістері, графтарды қиылыстыру, біріктіру операцияларын орындау әдістері көрсетілген. Математикалық логиканың элементтерін қарастырған кезінде логикалық айнымалы, логикалық функция ұғымдары енгізіліп, логикалық операциялар қарастырылады. Ары қарай элементарлы логикалық функциялар, логикалық функциялардың нормалды және кемел нормалды тұлғалары қарастырылады. Логикалық функциялардың жазылуын минималдау негіздері келтірілген. Матрица ұғымы енгізіліп, олардың түрлері қарастырылып, матрицалар мен операцияларды орындау әдістері келтіріледі. Кері матрица ұғымы енгізіліп, кері матрицаны есептеу жолдары көрсетіледі. Кели-Гамильтон теоремасына сүйеніп матрицалардың дәрежелерін есептеу әдістері, матрица функциялары қарастырылған. Жүйелер теориясының негіздері бойынша жүйенің кіре беріс әсер, қалыпы, шыға беріс сигнал ұғымдарына сүйеніп, жүйені қалып жазығында жазылуы ұсынылады. Динамикалық жүйе, басқару ұғымдары анықтама түрінде келтірілген. Барлық тараулар бойынша есептерді шығару жолдары келтірілген.

Қосымша ретінде практикалық сабақтардың жоспары және есептер шығарылып, тапсырмалар келтірілген.

Қосымша. Практикалық сабақтардың жоспары

К1.1. Жиындармен әртүрлі операцияларды орындау

Жиындармен әртүрлі операцияларды орындауға болады. Оларды өзара қиылыстыру, біріктіру, айыру операцияларды өткізеді. Осы операцияларды мысалдармен түсіндірейік.

Демек, $A = \{a, b, f, g, h\}$, $B = \{f, g, h, m, n, o, p\}$ және $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ жиындар берілсін.

Осы жиындарды өзара қиылыстырайық. Нәтижесінде, табылған жиын элементтері А және В жиынның ортақ элементтері болып табылады, былай айтқанда:

$$A \cap B = \{a, b, f, g, h\} \cap \{f, g, h, m, n, o, p\} = \{f, g, h\}.$$

Қиылыстыру операциясын бірнеше жиындармен де өткізуге болады, онда нәтижелік жиынға қиылыстырылатын барлық жиындардың ортақ элементтері кіреді, мысалы:

$$A \cap B \cap C = \{a, b, f, g, h\} \cap \{f, g, h, m, n, o, p\} \cap \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{f, g\}$$

Енді жиындардың бірігуін қарастырайық. Екі жиында біріктірсек нәтижелік жиынға осы екі жиынның барлық элементтері кіреді. Жоғарыда берілген А және В жиындарын біріктірейік, онда:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{a, b, f, g, h\} \cup \{f, g, h, m, n, o, p\} = \\ &= \{a, b, f, g, h, m, n, o, p\}. \end{aligned}$$

Біріктіру операциясын бірнеше жиындармен де өткізуге болады, онда нәтижелік жиынға біріктірілетін жиындардың барлық элементтері кіреді, мысалы:

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C &= \{a, b, f, g, h\} \cup \{f, g, h, m, n, o, p\} \cup \{a, b, c, d, e, f, g\} = \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\} \end{aligned}$$

Келесі жиындар арасында өткізілетін операция – айыру деп аталады. Бірінші жиынды екінші жиыннан айыру операциясы нәтижесінде бірінші жиынның екінші жиынға кірмейтін элементтер кіреді. Жоғарыда берілген А жиыннан В жиынын айырайық, онда:

$$A \setminus B = \{a, b, f, g, h\} \setminus \{f, g, h, m, n, o, p\} = \{a, b\}.$$

Енді айыру операциясын А, В және С жиындармен өткізейік:

$$B \setminus A = \{f, g, h, m, n, o, p\} \setminus \{a, b, f, g, h\} = \{m, n, o, p\},$$

$$A \setminus C = \{a, b, f, g, h\} \setminus \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{h\},$$

$$C \setminus A = \{a, b, c, d, e, f, g\} \setminus \{a, b, f, g, h\} = \{c, d, e\},$$

$$C \setminus B = \{a, b, c, d, e, f, g\} \setminus \{f, g, h, m, n, o, p\} = \{a, b, c, d, e\}.$$

Барлық жиындарды қамтитын жиын І универсал жиыны деп аталады. Егер, жоғарыда алынған А, В және С жиындарын алып универсал жиынын құрастырсақ, онда:

$$I = A \cup B \cup C = \{a, b, f, g, h\} \cup \{f, g, h, m, n, o, p\} \cup \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\}$$

Осы ұғымға сүйеніп, жиынның қосымша ұғымын енгізуге болады. Егер І универсал жиыны белгілі болса, онда А жиынның қосымшасы $\overline{A}$ деп белгіленіп, былай табылады:

$$\begin{aligned} \overline{A} = I \setminus A &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\} \setminus \{a, b, f, g, h\} = \\ &= \{c, d, e, m, n, o, p\}. \end{aligned}$$

Осы ережеге сүйеніп В және С жиындардың қосымшаларын табайық:

$$\begin{aligned}\overline{B} &= I \setminus B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\} \setminus \{f, g, h, m, n, o, p\} = \\ &= \{a, b, c, d, e\}, \\ \overline{C} &= I \setminus C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\} \setminus \{a, b, c, d, e, f, g\} = \\ &= \{h, m, n, o, p\}.\end{aligned}$$

Егер A жиынның қосымшасы $\overline{A}$ біріктірсек универсал I жиынын табамыз, яғни:

$$\begin{aligned}I &= A \cup \overline{A} = \{a, b, f, g, h\} \cup \{c, d, e, m, n, o, p\} = \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\}.\end{aligned}$$

Осыған қоса, жиындармен жоғарыда айтылған барлық операцияларды біріктіріп өткізуге болады. Осыған орай мысалдарды қарастырайық. Жоғарыда берілген және табылған жиындармен келесіні орындау қажет:

$$((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C})) \cap ((A \setminus \overline{C}) \cup (\overline{B} \setminus \overline{A})) = ?.$$

Есепті шығару үшін ең алдымен операцияларды орындау кезеңдерін анықтау қажет. Орындау кезеңдері бұл жағдайда жақшалармен беріледі.

Ең алдымен екі үлкен жақшалардың ішіндегі өрнектерді орындайық.

$$\begin{aligned}A \cap \overline{B} &= \{a, b, f, g, h\} \cap \{a, b, c, d, e\} = \{a, b\}, \\ B \cap \overline{C} &= \{f, g, h, m, n, o, p\} \cap \{h, m, n, o, p\} = \{h, m, n, o, p\}.\end{aligned}$$

Енді бірінші жақшаның ішіндегі операцияны толық орындауға болады:

$$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) = \{a, b\} \cup \{h, m, n, o, p\} = \{a, b, h, m, n, o, p\}$$

Екінші жақшаны түрлендірейік:

$$\begin{aligned}A \setminus \overline{C} &= \{a, b, f, g, h\} \setminus \{h, m, n, o, p\} = \{a, b, f, g\}, \\ \overline{B} \setminus \overline{A} &= \{a, b, c, d, e\} \setminus \{c, d, e, m, n, o, p\} = \{a, b\}.\end{aligned}$$

Енді екінші жақшаның нәтижесін табуға болады:

$$(A \setminus \bar{C}) \cup (\bar{B} \setminus \bar{A}) = \{a, b, f, g\} \cup \{a, b\} = \{a, b, f, g\}.$$

Осыдан кейін берілген есепті шығаруға болады:

$$\begin{aligned} & ((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{C})) \cap ((A \setminus \bar{C}) \cup (\bar{B} \setminus \bar{A})) = \\ & = \{a, b, h, m, n, o, p\} \cap \{a, b, f, g\} = \{a, b\}. \end{aligned}$$

Осылайша жиындар теориясының жалпы операцияларына сәйкес есептерді шығаруға болады. Берілген материалды бекіту үшін студент төмендегі берілген есептерді шығарып тапсыру тиіс.

Есептер

Келесі А, В, С және универсал І жиындарын берілген нұсқа бойынша төменгі кестеден алып

№	А	В	С	І
0	{a,b,c,d}	{c,d,e,f}	{e,f,g,h}	{a,b,c,d,e,f,g,h,m,n}
1	{a,b,e,f}	{e,f,g,h}	{g,h,m,n}	{a,b,c,d,e,f,g,h,m,n,o}
2	{c,d,e,f}	{e,f,m,n}	{m,n,o,p}	{c,d,e,f,g,h,m,n,o,p}
3	{b,e,f,g}	{f,g,h,m}	{h,m,n,o}	{b,c,d,e,f,g,h,m,n,o}
4	{e,f,g,h}	{g,h,m,n}	{m,n,o,p}	{c,d,e,f,g,h,m,n,o,p}
5	{f,g,h,m}	{h,m,n,o}	{a,n,o,p}	{a,d,e,f,g,h,m,n,o,p}
6	{g,h,m,n}	{m,n,o,p}	{a,b,o,p}	{a,b,e,f,g,h,m,n,o,p}
7	{a,b,g,h}	{g,h,m,n}	{m,n,o,p}	{a,b,c,d,g,h,m,n,o,p}
8	{c,d,g,h}	{g,h,o,p}	{a,b,o,p}	{a,b,c,d,g,h,m,n,o,p}
9	{e,f,o,p}	{a,b,e,f}	{a,b,g,h}	{a,b,e,f,g,h,m,n,o,p}

мына операцияларды орындаңыз:

- 1) $V = A \times B \times C \times D$, 2) $Pr_{1,2}V = ?$ 3) $Pr_{23}V = ?$ 4) $Pr_{1,2,4}V = ?$
 5) $Pr_{1,3}V \cap Pr_{2,4}V = ?$ 6) $Pr_{1,3}V \cup Pr_{2,4}V = ?$

Бақылау сұрақтары.

1. Жиындардың бірігуі қалай орындалады?
2. Жиындардың қиылыстыруы қалай орындалады?
3. Жиындардың айыруы қалай орындалады?
4. Универсал жиын – деп қандай жиынды атайды?
5. Жиынның қосымшасы – деп қандай жиынды атайды?

**K1.2. Жиындарды тура көбейту, проекциялар,
Эйлер-Венн диаграммалары**

Келесі $A_1, A_2, \dots, A_n$ жиындардың тура көбейтіндісі ұзындығы n әртүрлі кортеждер жиыны (реттелінген n -ліктер) болады:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n \}.$$

Мұндай жиынның проекциясы кортежге кіретін проекциялар жиыны болады. Егер V – v кортеждер жиыны, онда жиындар проекциясы кортеждер проекциялар жиыны болады, яғни $Pr_i V = \{ Pr_i v : v \in V \}$. Жиындардың тура көбейтіндісін және проекциялар анықтамасын орындауға мысал қарастырайық. $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \{c, d\}$ және $D = \{d, e\}$ жиындары берілсін. Келесі $V = A \times B \times C \times D$ түрдегі жиынның тура көбейтіндісін анықтау қажет. Ол үшін ең алдымен A жиынның B жиынына көбейтейік, онда келесі ұзындығы екіге тең кортеждер жиыны табылады

$$A \times B = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle \}.$$

Енді табылған көбейтіндіні C жиынына көбейтіп ұзындығы үшке тең кортеждер жиыны табылады

$$A \times B \times C = \{ \langle a, b, c \rangle, \langle a, c, c \rangle, \langle b, b, c \rangle, \langle b, c, c \rangle, \\ \langle a, b, d \rangle, \langle a, c, d \rangle, \langle b, b, d \rangle, \langle b, c, d \rangle \}.$$

Осыдан кейін табылған нәтижелік жиынды D жиынына көбейтіп, ұзындығы төртке тең кортеждер жиыны табылады

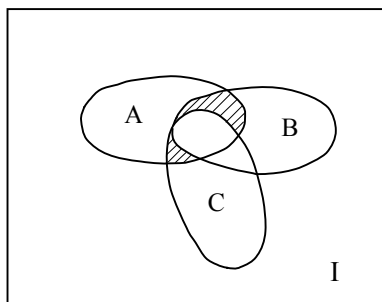
$$V = A \times B \times C \times D = \{ \langle a, b, c, d \rangle, \langle a, c, c, d \rangle, \langle b, b, c, d \rangle, \\ \langle b, c, c, d \rangle, \langle a, b, d, d \rangle, \langle a, c, d, d \rangle, \langle b, b, d, d \rangle, \langle b, c, d, d \rangle, \\ \langle a, b, c, e \rangle, \langle a, c, c, e \rangle, \langle b, b, c, e \rangle, \langle b, c, c, e \rangle, \langle a, b, d, e \rangle, \\ \langle a, c, d, e \rangle, \langle b, b, d, e \rangle, \langle b, c, d, e \rangle \}$$

Ары қарай табылған кортеждердің жиынның проекцияларын табайық:

$$Pr_{1,2}V = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle \}, \\ Pr_{1,3}V = \{ \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle \},$$

$$Pr_{1,2,3}V = \{ \langle a, b, c \rangle, \langle a, c, c \rangle, \langle b, b, c \rangle, \langle b, c, c \rangle, \langle a, b, d \rangle, \\ \langle a, c, d \rangle, \langle b, b, d \rangle, \langle b, c, d \rangle \},$$

$$Pr_{1,2,4}V = \{ \langle a, b, d \rangle, \langle a, c, d \rangle, \langle b, b, d \rangle, \langle b, c, d \rangle, \\ \langle a, b, e \rangle, \langle a, c, e \rangle, \langle b, b, e \rangle, \langle b, c, e \rangle \}.$$



К.1-сурет

Берілген Эйлер-Венн диаграммасы бойынша штрихталған ауданның құрастыру теңдеуін табу қажет (К.1-сурет). Ол үшін штрихталған аудан екі бөліктен тұрғаны көрініп тұр. Бірінші бөлігі А жиынмен В жиынның аймағында және С жиынның сыртында орналасады, сол себептен оны мынадай

теңдеу ретінде жазамыз:

$$(A \cap B) \setminus C.$$

Ары қарай екінші бөлігін қарастырайық, ол A және C жиынның аймағында, ал B жиынның сыртында жатады, оны келесі теңдеу ретінде көрсетеміз:

$$(A \cap C) \setminus B.$$

Енді осы екі жазуды біріктіріп, толық штрихталған ауданның теңдеуін былай көрсетеміз:

$$((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B).$$

Жоғарыда алынған $A = \{a, b, f, g, h\}$, $B = \{f, g, h, m, n, o, p\}$ және $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ жиындары берілсін. Осы жиындармен негізгі заңдарды дәлелдеу қажет. Ең алдымен үлестірімділік заңды дәлелдейік:

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$$

$$A \cap C = \{a, b, f, g, h\} \cap \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{a, b, f, g\},$$

$$B \cap C = \{f, g, h, m, n, o, p\} \cap \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{f, g\},$$

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{a, b, f, g\} \cup \{f, g\} = \{a, b, f, g\}.$$

$$A \cup B = \{a, b, f, g, h\} \cup \{f, g, h, m, n, o, p\} = \{a, b, f, g, h, m, n, o, p\},$$

$$(A \cup B) \cap C = \{a, b, f, g, h, m, n, o, p\} \cap \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{a, b, f, g\}$$

Соңғы теңдеу бастапқы заң дұрыс екенін көрсетеді.

Енді келесі заңның дұрыстығын алынған A , B және C жиындар арқылы дәлелдейік

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Осы теңдіктің сол жағын есептейік:

$$A \cap B = \{a, b, f, g, h\} \cap \{f, g, h, m, n, o, p\} = \{f, g, h\},$$

$$(A \cap B) \cup C = \{f, g, h\} \cup \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

Енді теңдіктің оң жағын табайық:

$$A \cup C = \{a, b, f, g, h\} \cup \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\},$$

$$\begin{aligned} B \cup C &= \{f, g, h, m, n, o, p\} \cup \{a, b, c, d, e, f, g\} = \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\}, \end{aligned}$$

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \cup \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

Соңғы жазудан заңның дұрыстығы дәлелденді деуге болады.

Енді бастапқы жиындарға сәйкес – де Морган заңдарын дәлелдейік. Бірінші заңның түрі мынадай:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Теңдіктің сол жағындағы бөлігін есептейік, ол үшін ең алдымен универсал I жиынын табу қажет:

$$I = A \cup B \cup C = \{a, b, f, g, h\} \cup \{f, g, h, m, n, o, p\} \cup \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\}$$

осыдан

$$\overline{A \cap B} = \{a, b, c, d, e, m, n, o, p\}.$$

Енді жақтағы бөлігін табайық:

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{c, d, e, m, n, o, p\} \cup \{a, b, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e, m, n, o, p\}.$$

Келесі заңды дәлелдейік:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Осы теңдіктің оң жағын есептейік:

$$\overline{A \cup B} = \{c, d, e\}.$$

Сол жағын есептейік:

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{c, d, e, m, n, o, p\} \cap \{a, b, c, d, e\} = \{c, d, e\}.$$

Қарастырылған заңның дұрыстығына көзіміз жетіп тұр.

Есептер

Келесі A, B, C және D жиындарын берілген нұсқа бойынша төменгі кестеден алып

№	A	B	C	D
0	{a, b, c}	{b, c, d}	{1, 2}	{2, 4}
1	{a, b}	{b, c, d}	{1, 2, 3}	{3, 4}
2	{a, b, c}	{c, d}	{1, 2}	{2, 3, 4}

№	A	B	C	D
3	{b,c}	{b,c,d}	{1,2,3}	{3,4}
4	{c,d}	{a,b,c}	{1,2}	{2,3,4}
5	{a,c}	{b,c,d}	{2,3}	{1,3,4}
6	{a,d}	{a,b,d}	{3,4}	{1,2,3}
7	{b,c}	{a,c,d}	{1,2,4}	{2,4}
8	{a,c}	{a,b,d}	{1,2,3}	{2,3}
9	{a,b}	{a,c,d}	{1,2,}	{2,3,4}

мына операцияларды орындаңыз:

- 1) $V = A \times B \times C \times D$, 2) $Pr_{1,2}V = ?$ 3) $Pr_{23}V = ?$
 4) $Pr_{1,2,4}V = ?$ 5) $Pr_{1,3}V \cap Pr_{2,4}V = ?$ 6) $Pr_{1,3}V \cup Pr_{2,4}V = ?$

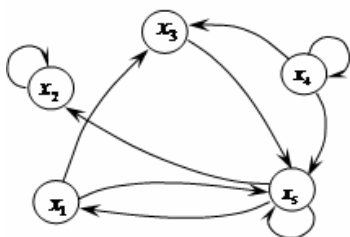
Бақылау сұрақтары.

1. Кортж – деп қандай жиынды атайды?
2. Жиындарды тура көбейту нәтижесінде қандай жиын табылады?
3. Эйлер-Венн диаграммалары не үшін қажет?
4. Де Морган заңдарын Эйлер-Венн диаграммалар арқылы дәлелдеңіз?

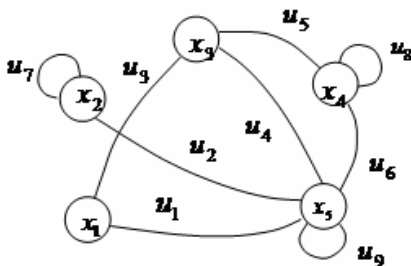
К1.3. Графтар теориясы бойынша есептерді шығару

Негізінде графтар бағытталған және бағытталмаған түрлеріне бөлінеді. Бағытталған графтың түрі К.2, ал бағытталмаған графтың түрі К.3-суреттерде көрсетілген.

Бағытталған графты математикалық объект ретінде былай көрсетуге болады, біріншіден төбелер жиынын құрастырайық $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, екіншіден осы төбелердің бейнелерін (төбелерді өзара жалғастыратын доғаларды) табайық: $Gx_1 = \{x_3, x_5\}$, $Gx_2 = \{x_2\}$, $Gx_3 = \{x_5\}$, $Gx_4 = \{x_3, x_4, x_5\}$, $Gx_5 = \{x_1, x_2, x_5\}$.



1.2- сурет



1.3- сурет

Бағытталмаған графтың төбелерінің бейнелерін былай жазуға болады: $\Gamma x_1 = \{x_3, x_5\}$, $\Gamma x_2 = \{x_2, x_5\}$, $\Gamma x_3 = \{x_1, x_4, x_5\}$, $\Gamma x_4 = \{x_3, x_4, x_5\}$, $\Gamma x_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Бағытталған графтың сыбайлас матрицасын табайық:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Бағытталмаған графтың сыбайлас матрицасын табайық:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Бағытталған графтың түйістілік матрицасын табайық:

$$\begin{array}{c}
 u_{13} \quad u_{15} \quad u_{22} \quad u_{35} \quad u_{43} \quad u_{44} \quad u_{45} \quad u_{51} \quad u_{52} \quad u_{55} \\
 E = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.
 \end{array}$$

Бағытталмаған графтың түйістілік матрицасын табайық:

$$\begin{array}{c}
 u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7 \quad u_8 \quad u_9 \\
 E = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{array}$$

Келесі графтар берілсін $G_1(X_1, \Gamma_1)$ және $G_2(X_2, \Gamma_2)$. Біріншісінің төбелер жиыны $X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, оның төбелерінің бейнелері $\Gamma_1 x_1 = \{x_3, x_4\}$, $\Gamma_1 x_2 = \{x_1, x_3\}$, $\Gamma_1 x_3 = \{x_3, x_4\}$, $\Gamma_1 x_4 = \{x_2, x_4\}$, ал екінші графтың төбелер жиыны $X_2 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$, оның төбелерінің бейнелері $\Gamma_2 x_1 = \{x_1, x_4, x_5\}$, $\Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_5\}$, $\Gamma_2 x_4 = \{x_2, x_4\}$,

$$\Gamma_2 x_5 = \{x_4\}.$$

Осы графтармен келесі операцияны орындайық

$$G(X, \Gamma) = G_1(X_1, \Gamma_1) \cap G_2(X_2, \Gamma_2).$$

Графтардың төбелер жиындарының қиылысуын табайық

$$X_1 \cap X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_2, x_4, x_5\} = \{x_1, x_2, x_4\}.$$

Табылған әрбір ортақ төбелерінің бейнелерін табайық

$$\Gamma x_1 = \Gamma_1 x_1 \cap \Gamma_2 x_1 = \{x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_4, x_5\} = \{x_4\},$$

$$\Gamma x_2 = \Gamma_1 x_2 \cap \Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_3\} \cap \{x_1, x_5\} = \{x_1\},$$

$$\Gamma x_4 = \Gamma_1 x_4 \cap \Gamma_2 x_4 = \{x_2, x_4\} \cap \{x_2, x_4\} = \{x_2, x_4\}.$$

Осы графтармен келесі операцияны орындайық
 $G(X, \Gamma) = G_1(X_1, \Gamma_1) \cup G_2(X_2, \Gamma_2).$

Графтардың төбелер жиындарының біріктіруін табайық

$$X_1 \cup X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_1, x_2, x_4, x_5\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

Табылған әрбір төбелерінің бейнелерін табайық

$$\Gamma x_1 = \Gamma_1 x_1 \cup \Gamma_2 x_1 = \{x_3, x_4\} \cup \{x_1, x_4, x_5\} = \{x_1, x_3, x_4, x_5\},$$

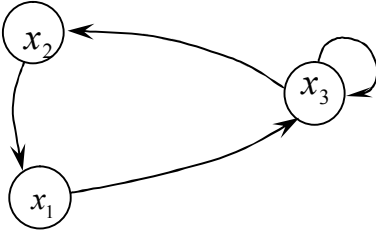
$$\Gamma x_2 = \Gamma_1 x_2 \cup \Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_3\} \cup \{x_1, x_5\} = \{x_1, x_3, x_5\},$$

$$\Gamma x_3 = \Gamma_1 x_3 \cup \Gamma_2 x_3 = \{x_3, x_4\} \cup \emptyset = \{x_3, x_4\},$$

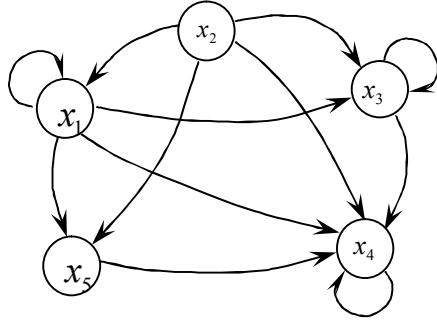
$$\Gamma x_4 = \Gamma_1 x_4 \cup \Gamma_2 x_4 = \{x_2, x_4\} \cup \{x_2, x_4\} = \{x_2, x_4\},$$

$$\Gamma x_5 = \Gamma_1 x_5 \cup \Gamma_2 x_5 = \emptyset \cup \{x_4\} = \{x_4\}.$$

Қиылысу операциясының нәтижесінде табылған граф К.4-суретте, ал біріктіру нәтижесінде табылған граф К.5-суретте көрсетілген.



К.4-сурет



К.5-сурет

Есептер

Келесі графтар берілсін:

$$1) G_1(X_1, \Gamma_1): \Gamma_1 x_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \Gamma_1 x_2 = \{x_3\}, \Gamma_1 x_3 = \{x_2, x_3, x_4\}, \Gamma_1 x_4 = \{x_1\},$$

$$G_2(X_2, \Gamma_2): \Gamma_2 x_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, \Gamma_2 x_2 = \{x_3\}, \Gamma_2 x_3 = \{x_2, x_3, x_5\}, \Gamma_2 x_5 = \{x_1\},$$

$$G_3(X_3, \Gamma_3): \Gamma_3 x_1 = \{x_2\}, \Gamma_3 x_2 = \{x_1, x_2, x_4, x_6\}, \Gamma_3 x_4 = \{x_6\}, \Gamma_3 x_6 = \{x_1, x_4, x_6\},$$

$$G_4(X_4, \Gamma_4): \Gamma_4 x_1 = \{x_2\}, \Gamma_4 x_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_6\}, \Gamma_4 x_3 = \{x_2\}, \Gamma_4 x_6 = \{x_1, x_3, x_6\}.$$

$$2) G_1(X_1, \Gamma_1): \Gamma_1 x_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \Gamma_1 x_2 = \{x_1, x_4\}, \Gamma_1 x_3 = \{x_1, x_4\}, \Gamma_1 x_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$G_2(X_2, \Gamma_2): \Gamma_2 x_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_3\}, \Gamma_2 x_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \Gamma_2 x_5 = \{x_1, x_3\}$$

$$G_3(X_3, \Gamma_3): \Gamma_3 x_1 = \{x_1, x_2, x_6\}, \Gamma_3 x_2 = \{x_1, x_4, x_6\}, \Gamma_3 x_4 = \{x_2, x_4, x_6\}, \Gamma_3 x_6 = \{x_1, x_2, x_4\}$$

$$G_4(X_4, \Gamma_4): \Gamma_4 x_1 = \{x_1, x_2, x_6\}, \Gamma_4 x_2 = \{x_1, x_3, x_6\}, \Gamma_4 x_3 = \{x_2, x_3, x_6\}, \\ \Gamma_4 x_6 = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$3) G_1(X_1, \Gamma_1): \Gamma_1 x_1 = \{x_2, x_3\}, \Gamma_1 x_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \\ \Gamma_1 x_3 = \{x_2\}, \Gamma_1 x_4 = \{x_1, x_3, x_4\}$$

$$G_2(X_2, \Gamma_2): \Gamma_2 x_1 = \{x_2\}, \Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$\Gamma_2 x_3 = \{x_1, x_2, x_5\}, \Gamma_2 x_5 = \{x_1, x_5\},$$

$$G_3(X_3, \Gamma_3): \Gamma_3 x_1 = \{x_2, x_6\}, \Gamma_3 x_2 = \{x_2, x_6\},$$

$$\Gamma_3 x_4 = \{x_2, x_6\}, \Gamma_3 x_6 = \{x_2\},$$

$$G_4(X_4, \Gamma_4): \Gamma_4 x_1 = \{x_2, x_6\}, \Gamma_4 x_2 = \{x_2, x_6\},$$

$$\Gamma_4 x_3 = \{x_2, x_6\}, \Gamma_4 x_6 = \{x_2, x_6\}.$$

$$4) G_1(X_1, \Gamma_1): \Gamma_1 x_1 = \{x_2, x_4\}, \Gamma_1 x_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \Gamma_1 x_3 = \{x_2, x_4\}, \\ \Gamma_1 x_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$G_2(X_2, \Gamma_2): \Gamma_2 x_1 = \{x_2, x_5\}, \Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \Gamma_2 x_3 = \{x_2, x_5\}, \\ \Gamma_2 x_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$$

$$G_3(X_3, \Gamma_3): \Gamma_3 x_1 = \{x_2, x_6\}, \Gamma_3 x_2 = \{x_1, x_2, x_4\}, \Gamma_3 x_4 = \{x_1, x_2, x_6\}, \\ \Gamma_3 x_6 = \{x_1, x_4, x_6\}$$

$$G_4(X_4, \Gamma_4): \Gamma_4 x_1 = \{x_2, x_3, x_6\}, \Gamma_4 x_2 = \{x_1, x_2, x_3\}, \Gamma_4 x_3 = \{x_1, x_2, x_6\}, \\ \Gamma_4 x_6 = \{x_1, x_3, x_6\}$$

Осы графтармен келесіні орындау қажет:

1) Берілген төрт графтың суреттерін салыңыз.

2) Барлық графтардың сыбайлас және түйістілік матрицаларын анықтаңыз.

3) Графтармен келесі операцияны орындаңыз:

$$G(X, \Gamma) = (G_1(X_1, \Gamma_1) \cap G_2(X_2, \Gamma_2)) \cup (G_3(X_3, \Gamma_3) \cap G_4(X_4, \Gamma_4)).$$

4) Нәтижелік $G(X, \Gamma)$ графтың суретін салыңыз.

5) Нәтижелік $G(X, \Gamma)$ графтың сыбайлас және түйістілік матрицаларын табыңыз.

Бақылау сұрақтары.

1. Графтың сыбайлас матрицасы қалай табылады?
2. Графтың түйістілік матрицасы қалай құрастырылады?
3. Графтарды қиылыстыру операциясы қалай өткізіледі?
4. Графтарды біріктіру операциясы қалай өткізіледі?

К1.4. Математикалық логика бойынша есептерді шығару

Келесі логикалық жазуды қысқартыңыз

$$\begin{aligned} (a + b\bar{c})(\bar{b} + cd)(\bar{b} + c)(a + b) &= (a + b)(a + \bar{c})(\bar{b} + c)(\bar{b} + d)(\bar{b} + c)(a + b) \\ &= (a + b)(a + \bar{c})(\bar{b} + c)(\bar{b} + d) = \\ &= (a + b\bar{c})(\bar{b} + cd) = a\bar{b} + acd + \bar{b}b\bar{c} + b\bar{c}cd = a(\bar{b} + cd). \end{aligned}$$

Нормалды және кемел нормалды тұлғаларға есептердің шығаруын көрсетейік.

Берілген нормалды дизъюнктивтік тұлғасынан (НДТ) кемел нормалды дизъюнктивтік тұлғасына (КНДТ) өту қажет. Мысалы НДТ мынадай болсын

$$f(x, y, z) = x\bar{y} + xyz + \bar{x}z.$$

Онда оған сәйкес КНДТ былай жазылады

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x\bar{y}(z + \bar{z}) + xyz + \bar{x}z(y + \bar{y}) = \\ &= x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + xyz + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} \end{aligned}$$

Берілген нормалды конъюнктивтік тұлғасынан (НКТ) кемел нормалды конъюнктивтік тұлғасына (КНКТ) өту қажет. Мысалы НКТ мынадай болсын

$$f(x, y, z) = (x + \bar{y})(x + y + z)(\bar{x} + z).$$

Онда оған сәйкес КНКТ былай жазылады

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + \bar{y})(z + \bar{z})(x + y + z)(\bar{x} + z)(y + \bar{y}) = \\ &= (x + \bar{y} + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(x + y + z)(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + \bar{y} + z) \end{aligned}$$

Келтірілген кестемен берілген ақиқаттық кестесі арқылы КНДТ-ні және КНКТ-ні құрастырып жазуларын қысқартыңыз. КНДТ түрі мынадай болады

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz = \\
 &= (\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz) + (xy\bar{z} + xyz) = \\
 &= \bar{x}y + xy = y.
 \end{aligned}$$

КНКТ түрі мынадай болады

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= (x + y + z)(x + y + \bar{z})(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z}) = \\
 &= [(x + y + z)(x + y + \bar{z})][(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})] = \\
 &= (x + y)(\bar{x} + y) = x\bar{x} + y + y\bar{x} + yx = y.
 \end{aligned}$$

Есептер

1) Келесі логикалық функциялар алынған нұсқа бойынша ақиқаттық кестемен берілсін

а)

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

ә)

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

б)

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

в)

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

– ақиқаттық кесте арқылы кемел нормалды дизъюнктивтік тұлғасын жазып, жазудың ұзындығын қысқартыңыз;

– ақиқаттық кесте арқылы кемел нормалды конъюнктивтік тұлғасын жазып, жазудың ұзындығын қысқартыңыз;

2) Келесі НДТ-ні КНДТ түрінде жазыңыз

а) $f(x, y, z) = x\bar{y} + xyz + \bar{x}z + xy$,

ә) $f(x, y, z) = xy + xyz + \bar{x}z + x + y$.

3) Келесі НКТ-ні КНКТ түрінде жазыңыз

а) $f(x, y, z) = (\bar{x} + y)(x + \bar{y} + z)(x + z)x$,

ә) $f(x, y, z) = (\bar{x} + \bar{y})(x + \bar{y} + z)(x + \bar{z})\bar{x}y$.

Бақылау сұрақтары.

1. Кемел нормалды дизъюнктивтік тұлға (КНДТ) ақиқаттық кесте арқылы қалай құрастырылады?
2. Кемел нормалды конъюнктивтік тұлға (КНКТ) ақиқаттық кесте арқылы қалай құрастырылады?

К1.5. Матрицалармен элементарлы операцияларды орындау

Екі А және В матрицалары берілсін

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 21 \\ 7 & 0 & -40 \end{bmatrix},$$

олардың $A + B$ қосындысын есептеп табайық:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2-6 & 1+3 & 3+21 \\ -1+7 & 3+0 & 8-40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 24 \\ 6 & 3 & -32 \end{bmatrix}.$$

Матрицаның санға көбейтуін қарастырайық $5 \times A$, онда

$$5 \times A = 5 \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 \\ -5 & 15 & 40 \end{bmatrix}.$$

Екі матрица C және D матрицалар берілсін, оларды $C \times D$ бір-біріне көбейту қажет,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C \times D = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 11 & 10 \\ -3 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

Келесі A және B матрицалары берілсін $A \times B \neq B \times A$ дәлелдеңіз:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

соңғы теңдеулерден жазылған тұжырымның дұрыстығы көрініп тұр.

Осы матрицалармен келесіні дәлелдеңіз

$$(A \times B)^T = B^T \times A^T$$

$$(A \times B)^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix},$$

$$B^T \times A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix},$$

соңғы теңдеулерден жазылған тұжырымның дұрыстығы көрініп тұр.

Келесі А матрицаның анықтауышын табайық:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot (-4) + (-4) \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \cdot 3 - 3 \cdot 0 \cdot 0 -$$

$$5 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) \cdot (-4) = 0 + 0 + 30 - 0 - 5 - 32 = -7.$$

Егер матрицаның өлшемі үлкен болса, онда анықтауышты есептеу күрделі есепке айналып кетеді, бұл жағдайда анықтауышты бір жолмен немесе бағанмен алгебралық қосымшаларға жіктеп есептеуге болады. Мысалы жоғарыдағы берілген А матрицаның анықтауышын бірінші баған бойынша былай жіктеуге болады:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$1(0 - 5) - 2(16 - 15) = -7$$

Берілген А матрицаның A^{-1} кері матрицасын есептеп табайық

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, |A| = 2.$$

Осыдан A матрица өзгеше емес матрица, оның кері матрицасын есептеуге болады, ол үшін барлық алгебралық қосымшаларын тауып, анықтауыштарын есептеу қажет:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, D_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \\ D_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6, D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5, \\ D_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1, D_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4, D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3. \end{aligned}$$

Осыған сүйеніп D алгебралық қосымшалардың $A^d = D^T$ қосылған матрицаларын жазайық:

$$D = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 3 & 6 & 5 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}, A^d = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Енді кері матрицаны былай табамыз:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Есептер

1) Келесі матрицаларды бір-біріне көбейтіңіз

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ә) } \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{б) } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [1 \ 2 \ 3], \text{ в) } [1 \ 2 \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{г) } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ д) } \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{е) } \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Келесі матрицалардың дәрежелерін есептеңіз

$$\text{a) } \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^2, \text{ ә) } \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3, \text{ б) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2.$$

3) Келесі операцияны $AB - BA$ мына матрицалармен орындаңыз

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

4) Келесі матрицалардың кері матрицаларын есептеңіз

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ә) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Бақылау сұрақтары.

1. Матрицаларды бір-біріне қосу ережесін айтыңыз?
2. Матрицаларды бір-біріне көбейту ережесін айтыңыз?
3. Матрицаның анықтауышын есептеу ережесін айтыңыз?
4. Матрицаның алгебралық қосымшалары қалай есептеледі?
5. Кері матрицаны қалай есептейді?

К1.6. Үшбұрышты матрицалармен есептерді шығару және матрицаның өзіндік сандарын есептеу

Егер шаршы матрицаның бас диагональ бойынша барлық анықтауыштары нөлге тең болмаса, оны екі үшбұрышты матрицалардың көбейтіндісі ретінде көрсетуге болады. Мысалы, келесі шаршы матрицасын алып:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{bmatrix},$$

оны екі үшбұрышты T_1 , T_2 матрицалардың көбейтіндісі ретінде көрсетейік. Изделінетін матрицалар мынадай болсын:

$$T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & v_{12} & v_{13} \\ 0 & 1 & v_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Осыдан

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{bmatrix} = T_1 T_2 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{11}v_{12} & t_{11}v_{13} \\ t_{21} & t_{21}v_{12} + t_{22} & t_{21}v_{13} + t_{22}v_{23} \\ t_{31} & t_{31}v_{12} + t_{32} & t_{31}v_{13} + t_{32}v_{23} + t_{33} \end{bmatrix}$$

Екі матрицалардың теңдігінен табамыз:

$$\begin{aligned} t_{11} &= 1, \quad t_{21} = -1, \quad t_{31} = 2, \quad t_{11}v_{12} = -1, \quad t_{11}v_{13} = 2, \\ t_{21}v_{12} + t_{22} &= 5, \quad t_{31}v_{12} + t_{32} = 4, \quad t_{21}v_{13} + t_{22}v_{23} = 4, \end{aligned}$$

$$t_{31}v_{13} + t_{32}v_{23} + t_{33} = 14.$$

Осы теңдеулер жүйесін шығарып табамыз:

$$t_{11} = 1, t_{21} = -1, t_{31} = 2, t_{22} = 4, t_{32} = 6, t_{33} = 1,$$

$$v_{12} = -1, v_{13} = 2, v_{23} = \frac{3}{2}.$$

Онда ізделген үшбұрышты матрицалардың түрі мынадай болады:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Келесі үшбұрышты матрицаның анықтауышын есептейік

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Кері матрица табылды дейік

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}.$$

Онда,

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{11} + 2t_{31} & 2t_{22} & 0 \\ t_{11} + 2t_{21} + 3t_{31} & 2t_{22} + 3t_{32} & 3t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Осыдан,

$$t_{11} = 1, t_{11} + 2t_{31} = 0, t_{11} + 2t_{21} + 3t_{31} = 0, 2t_{22} = 1, \\ 2t_{22} + 3t_{32} = 0, 3t_{33} = 1.$$

Табылған теңдеулер жүйесін шығару нәтижесінде

$$t_{11} = 1, \quad t_{21} = -\frac{1}{2}, \quad t_{31} = 0, \quad t_{22} = \frac{1}{2}, \quad t_{32} = -\frac{1}{3}, \quad t_{33} = \frac{1}{3}.$$

Кері матрицаның түрі мынадай болады

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Берілген А матрицаның сипаттайтын полиномын және оның түбірлерін табайық

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Бұл матрицаның сипаттайтын полиномы мынадай болады

$$A = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 3 \\ 2 & 3 - \lambda & 6 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0.$$

Онда сипаттайтын полиномның түбірлері тең

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 4.$$

Есептер

1) Келесі үшбұрышты матрицалардың анықтауыштарын есептеңіз

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{ә) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

2) Келесі үшбұрышты матрицалардың кері матрицаларын есептеңіз

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{ә) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3) Келесі шаршы матрицаларын екі үшбұрышты матрицалар көбейтіндісі ретінде көрсетіңіз

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{ә) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Бақылау сұрақтары.

1. Қандай матрица үшбұрышты деп аталады?
2. Үшбұрышты матрицалардың анықтауыштарын есептеу?
3. Шаршы матрица екі үшбұрышты матрицалар көбейтіндісі ретінде қалай көрсетіледі?
4. Үшбұрышты матрицаның кері матрицасы қалай есептеледі?

К1.7. Жүйелер теориясы бойынша есептерді шығару

Сызықты жүйе келесі матрицалармен берілсін:

$$F(t) = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad G(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad U(t) = \begin{bmatrix} e^{-\alpha t} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad X(t_0) = 0.$$

Жүйенің өтпелі матрицасын және күйлер векторының баған-матрицасын табу керек.

Күйлер теңдеуіне (бұл мысалда стационарлы жүйе):

$$\frac{dX}{dt} = FX + GU,$$

сонда алғашқы берілгендерді аламыз,

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e^{-\alpha t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Көбейту амалдарын орындағаннан кейін

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -6x_1 + 5x_2 + e^{-\alpha t}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1. \end{aligned} \right\}.$$

Өтпелі матрицаны табу үшін $U(t) = 0$ ($e^{-\alpha t} = 0$) қойып, теңдеулерді операторлық түрде жазамыз:

$$px_1 = -6x_1 + 5x_2,$$

$$px_2 = -x_1.$$

Сонда біз мынаны көреміз:

$$(p^2 + 6p + 5)x_1 = 0,$$

$$(p^2 + 6p + 5)x_2 = 0,$$

демек, x_1 және x_2 сипаттамалық теңдеулерінің бірдей түбірлері болады. Олар $p_1 = -1$, $p_2 = -5$ тең болады. Жалпы шешімі мына түрде табылады:

$$x_{1,2}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-5t}.$$

Уақыт t бойынша дифференциалдасак:

$$\frac{dx_{1,2}}{dt} = -C_1 e^{-t} - 5C_2 e^{-5t}.$$

Қарастырылып отырған жүйе үшін өтпелі матрица мына түрде жазылады:

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t, t_0) & \varphi_{12}(t, t_0) \\ \varphi_{21}(t, t_0) & \varphi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}.$$

Табылған $\Phi(t, t_0)$ матрицасының элементтерін анықтау үшін, келесі кестеге сәйкес бастапқы шарттарды беру қажет:

Матрица элементтері		φ_{11}	φ_{21}	φ_{12}	φ_{22}
Бастапқы шарттар	$x_1(t_0)$	1	1	0	0
	$x_2(t_0)$	0	0	1	1

Осы теңдеуіне мына мәндерді және $t = t_0$ деп қойып, туындылардың бастапқы мәндерін табамыз. Олар келесі кестеден табылады:

$x_1(t_0)$	$x_2(t_0)$	$\dot{x}_1(t_0)$	$\dot{x}_2(t_0)$
1	0	-6	-1
0	1	5	0

Берілген φ -дің барлық мәндері жалғыз формуласымен анықталады, бірақ әрбір φ үшін өзінің C_1 және C_2 тұрақтылар жұбын анықтау керек. Олар $t = t_0$ деп қойып және теңдеулерінен алынған теңдеулердің бірге шешілуімен анықталады

$$\left. \begin{aligned} x_{1,2}(t_0) &= C_1 e^{-t_0} + C_2 e^{-5t_0}, \\ \dot{x}_{1,2}(t_0) &= -C_1 e^{-t_0} - 5C_2 e^{-5t_0}. \end{aligned} \right\}$$

Жоғарыда келтірілген кестеден алынған бастапқы шарттарды теңдеуіне қою мына жолмен іске асады:

$$\varphi_{11} \rightarrow x_1(t_0), \dot{x}_1(t_0),$$

$$\varphi_{21} \rightarrow x_2(t_0), \dot{x}_2(t_0),$$

$$\varphi_{12} \rightarrow x_1(t_0), \dot{x}_1(t_0),$$

$$\varphi_{22} \rightarrow x_2(t_0), \dot{x}_2(t_0).$$

Есептеулер нәтижесінде келесі C_1 және C_2 тұрақтылар кестесін аламыз:

Матрица элементі	φ_{11}	φ_{21}	φ_{12}	φ_{22}
C_1	-1/4	-1/4	5/4	5/4
C_2	5/4	1/4	-5/4	-1/4

Берілген (3.64) қатынасына осы мәндерді қойсақ, өтпелі матрица элементтерін табамыз. Ол былай болады:

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -e^{-(t-t_0)} + 5e^{-5(t-t_0)} & 5e^{-(t-t_0)} - 5e^{-5(t-t_0)} \\ -e^{-(t-t_0)} + e^{-5(t-t_0)} & 5e^{-(t-t_0)} - e^{-5(t-t_0)} \end{bmatrix}$$

Онда $t = t_0$ болғанда $\Phi(t, t_0) = I$ болатынын оңай тексеруге болады.

Берілген $X(t)$ күй векторын табу үшін (3.52) формуласын қолданамыз. $X(t_0) = 0$ екенін ескерсек, онда:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} -e^{-(t-s)} + 5e^{-5(t-s)} & 5e^{-(t-s)} - 5e^{-5(t-s)} \\ -e^{-(t-s)} + e^{-5(t-s)} & 5e^{-(t-s)} - e^{-5(t-s)} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e^{-as} \\ 0 \end{bmatrix} ds.$$

Матрицаларды көбейтсек, мынаны аламыз:

$$x_1(t) = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \left[-e^{-(t-s)} + 5e^{-5(t-s)} \right] e^{-as} ds,$$

$$x_2(t) = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \left[-e^{-(t-s)} + e^{-5(t-s)} \right] e^{-\alpha s} ds.$$

Интегралдап, ізделініп отырған күйлер векторын табамыз:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4(\alpha-1)}(e^{-\alpha t} - e^{-t}) - \frac{5}{4(\alpha-5)}(e^{-\alpha t} - e^{-5t}) \\ \frac{1}{4(\alpha-1)}(e^{-\alpha t} - e^{-t}) - \frac{1}{4(\alpha-5)}(e^{-\alpha t} - e^{-5t}) \end{bmatrix}.$$

Есептер

1) Сызықты жүйе келесі матрицалармен берілсін:

$$F(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad G(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad U(t) = \begin{bmatrix} e^{-\alpha t} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad X(t_0) = 0.$$

Жүйенің өтпелі матрицасын және күйлер векторының баған-матрицасын табу керек.

Бақылау сұрақтары.

1. Жүйенің күйлері қалай анықталады?
2. Сызықты жүйені қалай матрицалар арқылы жазамыз?
3. Өтпелі матрицаны қалай есептейміз?
4. Жүйенің күйлер матрицасы қалай есептеледі?

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. *Коршунов Ю.М.* Математические основы кибернетики. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 496 с.
2. *Кузин Л.Т.* Основы кибернетики. Т.1. Математические основы кибернетики. – М.: Энергия, 1973. – 504 с.
3. *Кузин Л.Т.* Основы кибернетики. Т.2. Основы кибернетических моделей. – М.: Энергия, 1979. – 584 с.
4. Математические основы теории автоматического регулирования. Т.1. /Под ред. Б.К. Чемоданова. - М.: Высш. шк. 1977 – 366 с.
5. Математические основы теории автоматического регулирования. Т.2. Под ред. Б.К. Чемоданова. - М.: Высш. шк. 1977 – 455 с.
6. *Бейсембаев А.А.* Жүйелер теориясының негіздері. – Алматы: ҚазҰТУ. 2003. – 120 б.
7. *Хасеинов К.А.* Математика канондары: Оқулық. – Алматы: 2004. – 691 б.
8. *Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И.* Математика 1. Оқу құралы. – Алматы: 2010. – 336 б.
9. *Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И.* Математика 2. Оқу құралы. – Алматы: 2010. – 349 б.
10. *Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И.* Математика 3. Оқу құралы. – Алматы: 2010. – 185 б.
11. *Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И.* Математика 4. Оқу құралы. – Алматы: 2010. – 259 б.
12. *Сақабеков Ә.* Техникадағы математика. Оқу құралы. – Алматы: ҚБТУ, 2010. – 294 б.
13. *Хасеинов К.А.* Инженерлік математиканың есептері мен жаттығулары. – Алматы: Акбар, 2004. – 691 б.
14. *Хайруллин Е.М., Бектасова Т., Кныкова А.У., т.б.* Жоғары математика есептер жинағы. 1 – бөлім. Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ. 2004. – 254 б.
15. *Хайруллин Е.М., Бектасова Т., Кныкова А.У., т.б.* Жоғары математика есептер жинағы. 2 – бөлім. Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ. 2004. – 236 б.

16. Хайруллин Е.М., Бектасова Т., Кныкова А.У., т.б. Жоғары математика есептер жинағы. 3 – бөлім. Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ. 2004. – 362 б.
17. Акимов О.Е. Дискретная математика, логика, группы, графы. – М.: Лаборатория базовых знаний. 2001. – 352 с.
18. Квакернак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. - М.: Мир. 1977. – 650 с.
19. Дидук Г.А. Методы теории матриц и их применение для исследования и проектирования систем управления. – Л. СЗПИ. – 83 с.
20. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир. 1971. – 340 с.
21. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. Метод пространства состояний. – М.: Наука. 1970. – 703 б.
22. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика. – М. Энергия. 1980.- 344 с.
23. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука. 1969. – 367 с.
24. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.-М.: Наука. 1966. – 576 б.
25. Берталанфи Л. фон. Общая теория систем – критический обзор. В кн.: Исследования по общей теории систем. Сб. переводов. М.: Прогресс, 1969, С.23–82.
26. Месарович М., Такаха Я. Общая теория систем: математические основы. Пер. с англ. — М.: Мир, 1978. — 311 с.
27. Bertalanffy L. von. General System Theory: foundations, development, applications. Re-vised edition. New York: George Braziller, 1968.
28. Laszlo Ervin. The Systems View of the World: a Holistic Vision for Our Time. Hampton press, Inc., 1996.
29. Klir, George Jiri. Methodology in Systems Modelling and Simulation, with B. P. Zeigler, M. S. Elzas, and T. I. Oren (ed.), North-Holland, Amsterdam. 1979.
30. Laszlo, Ervin. The Systems View of the World. The natural philosophy of the new developments in the sciences. New York: George Brazillier. 1972.

Мазмұны

	Кіріспе.....	3
1.	Жиындар теориясының негіздері	5
1.1.	Жиындардың негізгі анықтамалары мен қасиеттері	5
1.1.1.	Жиындар мен ішжиындар	10
1.2.	Жиындар алгебрасы	12
1.3.	Жиындар мен олардың элементтерінің арасындағы қатынастар	21
2.	Графтар теориясының негіздері	27
2.1.	Негізгі ұғымдар мен анықтамалар.....	27
2.2.	Графтардың матрицалармен көрінісі.....	31
2.3.	Графтардың түрлері және олармен жұмыс істеу амалдары	35
2.4.	Графтармен жұмыс істеу әдістері	38
3.	Математикалық логиканың элементтері.....	42
3.1.	Логикалық функциялар және оларды жазу әдістері.....	42
3.1.1.	Негізгі логикалық операциялар.....	43
3.1.2.	Логика заңдары мен теңдеулері.....	46
3.2.	Элементарлы логикалық функциялар.....	49
3.3.	Логикалық функциялардың нормалды және кемел нормалды тұлғалары.....	55
3.3.1.	Логикалық функцияларды минимальдау.....	58
4.	Матрицалар теориясының элементтері.....	60
4.1.	Матрицалар теориясына кіріспе.....	60
4.1.1.	Сызықты алгебралық теңдеулерді матрицалар арқылы жазу.....	69
4.2.	Үшбұрышты матрицалармен сипаттайтын теңдеу.....	70
4.3.	Сипаттайтын теңдеу. Өзіндік сандар мен векторлар	75
4.4.	Кели-Гамильтон теоремасы және оның қолдануы.....	83
4.4.1.	Ұқсастықты түрлендіру.....	87

4.5.	Матрицаларды диагональдау және матрицалардың функциясы.....	88
4.5.1.	Матрицалардың функциялары.....	92
4.5.2.	Сильвестр теоремасы.....	95
4.5.3.	Матрицаның нормасы.....	96
5.	Жүйелер теориясының негіздері.....	98
5.1.	Динамикалық жүйе.....	98
5.2.	Жүйелерді басқару.....	110
5.3.	Сызықты динамикалық жүйе.....	120
5.3.1.	Сызықты жүйенің өтпелі және импульсті, өтпелі функцияларының матрицалары.....	123
	Қорытынды.....	136
	Қосымша. Практикалық сабақтардың жоспары	137
K1.1.	Жиындармен әртүрлі операцияларды орындау....	137
K1.2.	Жиындарды тура көбейту, проекциялар, Эйлер- Венн диаграммалары.....	141
K1.3.	Графтар теориясы бойынша есептерді шығару....	145
K1.4.	Математикалық логика бойынша есептерді шығару.....	151
K1.5.	Матрицалармен элементарлы операцияларды орындау.....	153
K1.6.	Үшбұрышты матрицалармен есептерді шығару және матрицаның өзіндік сандарын есептеу.....	158
K1.7.	Жүйелер теориясы бойынша есептерді шығару... Пайдаланылған әдебиеттер тізімі.....	161 166

Оқулық басылым

Бейсембаев Ақамбай Ағыбайұлы

ЖҮЙЕЛЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ
НЕГІЗДЕРІ

Оқу құралы

АБО РБ бастығы

З.А. Ғубайдулина

Редакторы

А.И. Бейсебаева

Компьютерде қалыптаған

А.Н. Оразалиева

Басуға қол қойылды 24.09. 2012 ж.

Таралымы 300 дана. Пішімі 60x84 1/16. №1 баспаханалық қағаз.

Көлемі 10,5 есепті б.т. Шартты б.т. 9,8. Тапсырыс № 602. Бағасы келісімді.

Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық
университетінің басылымы, Ақпараттық-баспа орталығы,
Алматы, қ., Қ. Сәтбаев, к., 22

ISBN 978-601-228-340-2



9