



А. Н. Тюреходжаев

Г. У. Маматова

Г. К. Калжанова

*Упругий изгиб
неоднородных и нелинейных
пластин и оболочек*

Алматы 2014

УДК 539.3
ББК 22.251
Т98

Рекомендовано к печати Ученым советом Казахского
национального технического университета имени К.И.Сатпаева.

Рецензенты:

Синчев Б.К. – доктор технических наук, профессор

Отарбаев Ж.О. – доктор технических наук, профессор

Тюреходжаев А.Н. и др.

Т98 Упругий изгиб неоднородных и нелинейных пластин и оболочек: Монография / А.Н. Тюреходжаев, Г.У. Маматова, Г.К. Калжанова – Алматы: Издательство «Alliance Print» – 264 стр., 25 рис., библи. из 31 наим.

ISBN 978-601-228-681-6

В монографии изложены аналитические решения задач о напряженно-деформированном состоянии упругих круглых неоднородных пластин и оболочек при переменных параметрах с учетом неравномерного температурного поля и начальной кривизны привлечением метода частичной дискретизации дифференциальных уравнений, построенного А.Н.Тюреходжаевым, на основе теории обобщенных функций.

УДК 539.3
ББК 22.251

ISBN 978-601-228-681-6

© Тюреходжаев А.Н., 2015
© Маматова Г.У., 2015
© Калжанова Г.К., 2014

СОДЕРЖАНИЕ

	ВВЕДЕНИЕ	5
1	СЛОЖНЫЙ ИЗГИБ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ В НЕРАВНОМЕРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ	8
1.1	Уравнения равновесия пластины	8
1.2	Соотношения между усилиями, моментами и деформациями	15
1.3	Разрешающие уравнения и граничные условия	17
1.4	Совместное симметричное растяжение и несимметричный изгиб, совместное симметричное растяжение и симметричный изгиб	24
1.5	Симметрично деформированная круглая пластина с малой начальной кривизной	26
1.6	Задачи термоупругости неоднородных круглых пластин при осесимметричном температурном поле	37
1.7	Задача термоупругости неоднородных пластин при изменении температуры по толщине	43
1.8	Задача термоупругости неоднородных пластин при изменении температуры по радиусу	45
1.9	Общее решение задачи о сложном изгибе упругой неоднородной пластины в неравномерном температурном поле	47
2	ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ НЕОДНОРОДНОЙ ГИБКОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ПО ТОЛЩИНЕ И ПО РАДИУСУ	60
2.1	Решение задачи об изгибе круглой пластины при изменении температуры по радиусу пластины	60
2.2	Сложный изгиб неоднородных круглых пластин при изменении температуры по толщине	78
2.3	Решение задачи об изгибе неоднородной круглой	

	пластины, находящейся в условиях неравномерного вдоль радиуса и толщины нагрева	127
3	ЗАДАЧА ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ИЗГИБЕ КРУГЛОЙ ГИБКОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ	154
3.1	Постановка задачи и основные уравнения	154
3.2	Решение задачи об осесимметричном изгибе круглой гибкой пластины с учетом начальной кривизны, при зашемлении по контуру	163
3.3	Аналитическое решение задачи об осесимметричном изгибе шарнирно опертой пластины при равномерной нагрузке	176
3.4	Круглая гибкая пластина с заданным начальным прогибом	188
4	ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ НЕРАВНОМЕРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ И НАЧАЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ	208
4.1	Неравномерно нагретые тонкостенные оболочки вращения	208
4.2	Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки	220
4.3	Осесимметричный изгиб пологой конической панели . .	229
4.4	Изгиб шарнирно закрепленной конической оболочки . . .	237
4.5	Изгиб гофрированной мембраны	243
4.6	Изгиб круглой абсолютно гибкой пластины	253
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	258
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . .	260

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о напряженно-деформированном состоянии упругих круглых пластин переменной жесткости, о напряженном состоянии неоднородных пластин и оболочек при переменных параметрах с учетом неравномерного температурного поля и начальной кривизны является одной из актуальных задач теории упругости. Круглые пластины переменной толщины в качестве конструктивного элемента находят широкое применение, к расчету которой приводят многие вопросы, связанные с проектированием круглых фундаментных плит, турбинных дисков, гибких соединений валов, лопастей гидромашин, дисковых пружин, задвижек, клапанов и др.. Анализ температурных напряжений и деформаций в конструктивных элементах различного типа двигателей и установок, работающих при высоких температурах, имеет исключительно большое значение. В самом деле, длительная прочность, термическое выпучивание, термическая усталость и другие аналогичные явления зависят от интенсивности и характера распределения этих напряжений и деформаций.

Важные проблемы, возникающие при разработке новых конструкций паровых и газовых турбин, реактивных и ракетных двигателей, ядерных реакторов, высокоскоростных самолетов и др. вызвали появление большого числа работ, посвященных определению температурных напряжений. Элементы этих конструкций работают в условиях неравномерного нестационарного нагрева, при котором изменяются физико-механические свойства материалов и возникают градиенты температуры, сопровождающиеся неодинаковым тепловым расширением частей элементов.

Неравномерное тепловое расширения вызывает тепловые (термические, температурные) напряжения. Знания величины и характера действия тепловых напряжений необходимо для всестороннего анализа прочности конструкции.

В последние годы большое значение приобрел анализ температурных напряжений в различных конструкциях ядерных реакторов. Большую роль играет анализ температурных напряжений в тепловыделяющих элементах, что особенно важно для реакторов, работающих в условиях высоких температур, так как размеры тепловыделяющих элементов определяются в значительной степени температурными напряжениями.

Расчет круглых и кольцевых пластин при неравномерном нагреве существенно отличается от расчета их при нормальной температуре.

Весьма характерна для механических параметров материала зависимость их от высоких температур. Для конструкционных материалов ядерных реакторов характерно также изменение механических свойств, связанных с облучением. Многообразие зависимости механических свойств материалов от воздействия тепла делает расчет конструкций типа пластин и оболочек весьма сложным.

Точный расчет тонких пластин и оболочек в условиях неравномерного нагрева с учетом изменения механических параметров материала весьма сложен, так как связан с решением систем нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Нелинейная теория оболочек дает ключ к объяснению процесса потери устойчивости, которая приводит нередко к полному разрушению конструкции. Поэтому определение закономерности напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек имеют большое значение для практических расчетов.

Развитие современной практики требует от исследователей и конструкторов создания методов решения большого числа прочностных задач, связанных с переменностью толщины, модуля упругости, коэффициента Пуассона при наличии высокого температурного поля в агрегатах и узлах конструкции.

Высока потребность в аналитических и приближенно аналитических методах решения задач о напряженно-деформированном состоянии неоднородных упругих пластин и оболочек в неравномерном температурном поле с учетом начальной кривизны. Исследование таких задач исключительно актуально для скрепленного с камерой заряда твердотопливных ракет двигателей.

Существующие исследования симметричного изгиба круглых пластин переменной толщины и с начальной кривизной носят частный характер. Несимметричный изгиб круглых пластин переменной толщины исследован еще менее; здесь кроме решений для пластин гиперболического профиля практически отсутствует решения для каких-либо других профилей, имеющих практическое значение.

Недостаточно изучена важная для современного машиностроения, строительной механики задача о сложном изгибе

круглой пластины переменной толщины, обусловленном как силовыми воздействиями, так и неравномерным нагревом.

Указанные задачи математически сводятся к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами, точное решение которых, как правило, не существует. Поэтому построение аналитических решений названных задач является весьма актуальной.

В работе в существенной мере выполняется указанный пробел.

Привлечением метода частичной дискретизации дифференциальных уравнений, построенного А.Н.Тюреходжаевым, на основе теории обобщенных функций, рассматриваются задачи об изгибе и сложном изгибе неоднородных упругих круглых пластин и оболочек с учетом начальной кривизны, а так же задачи о температурных напряжениях неоднородных пластин с учетом неравномерного температурного поля.

Монография состоит из четырех разделов.

В первом разделе приведены основные уравнения и определяющие соотношения теории изгиба тонких круглых пластин малого прогиба с учетом влияния растяжения на изгиб и неравномерного нагрева. Получены аналитические решения задачи о сложном изгибе неоднородных пластин с учетом неравномерного температурного поля, для различной зависимости жесткости от радиуса и толщины.

Второй раздел посвящен исследованию напряженно-деформированного состояния неоднородных гибких круглых пластин при неравномерном по толщине и по радиусу пластины нагреве.

В третьем разделе приводятся системы разрешающих дифференциальных уравнений, описывающие осесимметричный изгиб круглой гибкой пластины с учетом начальной кривизны. Получены кривые изменения прогиба для различных значений стрелы начального прогиба.

В четвертом разделе исследованы задачи об осесимметричной деформации неравномерно нагретых оболочек вращения и задачи о сложном симметричном изгибе пологой конической панели, гофрированной мембраны и абсолютно гибкой пластины.

1 СЛОЖНЫЙ ИЗГИБ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ В НЕРАВНОМЕРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

1.1 Уравнения равновесия пластины

Рассмотрим в квазистатической постановке растяжение и изгиб тонких круглых пластин, обусловленные пространственным температурным полем $T(r, \theta, z, t)$, где r, θ - полярные координаты в срединной плоскости пластины; z - координата вдоль нормали к срединной плоскости пластины; t - время, которое играет роль параметра. Эти задачи излагаются в рамках теории изгиба тонких круглых пластин малого прогиба [1], основанной на гипотезе о неизменяемости нормального элемента и на предположении о том, что нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной плоскости пластины, можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями. Согласно гипотезе о неизменяемости нормального элемента прямолинейные волокна пластины, до деформации нормальные к срединной плоскости, при деформации поворачиваются, оставаясь прямолинейными и нормальными к деформированной срединной поверхности, и не изменяют своей длины.

Выведем систему уравнений, описывающую рассматриваемую задачу, в общем случае для круглой пластины переменной толщины с учетом влияния растяжения на изгиб.

Выделим из пластины толщиной h элемент двумя радиальными плоским сечениями, перпендикулярными к срединной плоскости и образующими углы θ и $\theta + d\theta$ с координатной плоскостью xz , и двумя цилиндрическими сечениями, нормальными к срединной плоскости и пересекающимися с ней по окружностям радиуса r и $r + dr$ (рисунок 1).

Пусть σ_r, σ_θ - нормальные напряжения, действующие по площадкам, ограничивающим элемент; $\tau_{r\theta}, \tau_\theta (-\tau_{r\theta})$ и τ_{rz}, τ_θ - касательные напряжения, действующие по тем же площадкам соответственно в направлениях единичных векторов e_θ, e_r и e_z .

Введем вместо напряжений статически им эквивалентные усилия и моменты по формулам:

$$\left. \begin{aligned}
N_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz, & N_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz, & N_{r\theta} &= N_{\theta r} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} dz, \\
Q_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} z dz, & Q_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta z} z dz, \\
M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz, & M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz, & M_{r\theta} &= M_{\theta r} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} z dz
\end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Здесь $N_r, N_{r\theta}, Q_r$ - соответственно нормальное, сдвигающее и поперечное усилия, действующие в цилиндрическом сечении, $N_\theta, N_{\theta r} = N_{r\theta}, Q_\theta$ - соответственно нормальное, сдвигающее и поперечное усилия, действующие в радиальном сечении; $M_r, M_{r\theta}$ - изгибающий и крутящий моменты, действующие в цилиндрическом сечении; $M_\theta, M_{\theta r} = M_{r\theta}$ - изгибающий и крутящий моменты, действующие в радиальном сечении. Внутренние усилия и моменты отнесены к единице длины, соответствующей координатной линии (окружности или полярного радиуса).

Обозначим, далее, внешнюю силу, приходящуюся на единицу площади срединной поверхности, через q , а ее составляющие по направлениям единичных векторов e_r, e_θ, e_z - через q_r, q_θ, q_z .

Задачи о равновесии пространственного элемента пластины сводится к задаче о равновесии соответствующего элемента ее срединной поверхности. Этот элемент ограничен окружностями $r = \text{const}$ и $r + dr = \text{const}$ и полярными радиусами $\theta = \text{const}$ и $\theta + d\theta = \text{const}$.

Рассматривая равновесие элемента срединной поверхности, учитываем составляющие усилий $N_r, N_\theta, N_{r\theta}, N_{\theta r}$ на направление e_z возникающие при его деформации.

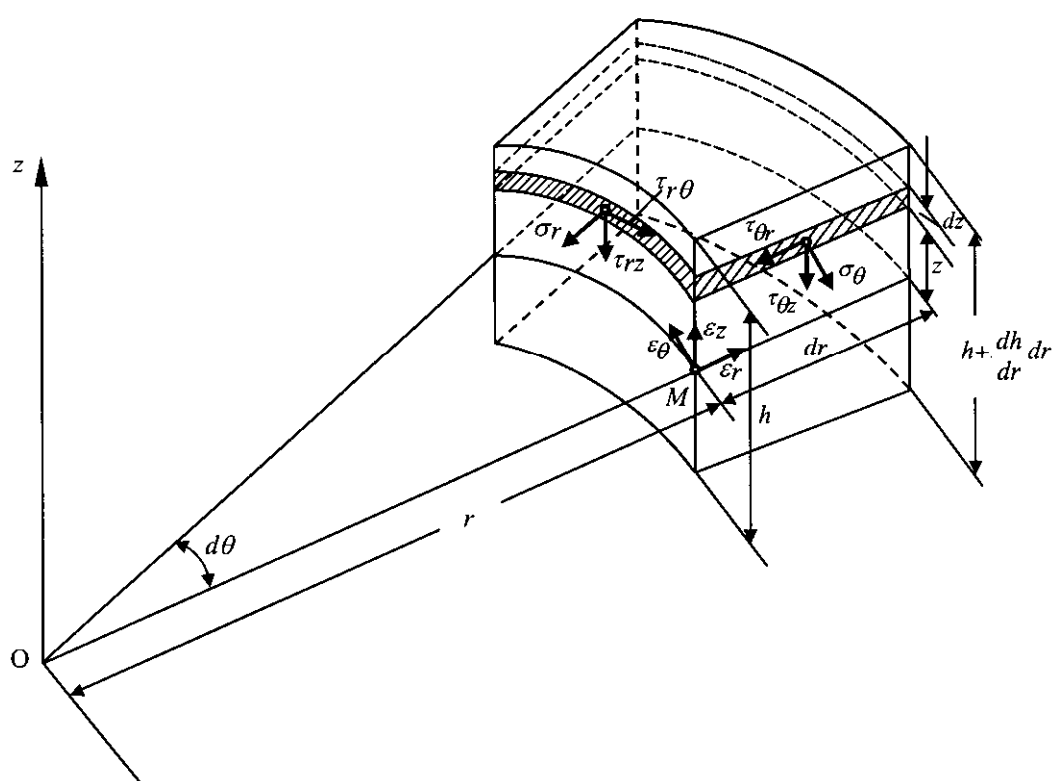


Рисунок 1

Усилие $N_r r d\theta$, приложенное к стороне элемента $r = const$, поворачивается вокруг оси e на угол ϑ_r и дает проекцию на ось z $N_{r\theta} r \vartheta_r d\theta$.

Усилие $N_{r\theta} r d\theta$, приложенное к этой же стороне элемента, поворачивается вокруг оси e_r на угол ϑ_θ и образует проекцию на ось z $N_{r\theta} r \vartheta_\theta d\theta$.

Таким образом, на сторону элемента $r = const$ действует усилие

$$- [N_r e_r + N_{r\theta} e_\theta + (Q_r - N_r \vartheta_r - N_{r\theta} \vartheta_\theta) e_z] r d\theta,$$

а на сторону $r + dr = const$ - усилие

$$\begin{aligned} & [N_r e_r + N_{r\theta} e_\theta + (Q_r - N_r \vartheta_r - N_{r\theta} \vartheta_\theta) e_z] r d\theta + \\ & + \left[\frac{\partial N_r r e_r}{\partial r} + \frac{\partial N_{r\theta} r e_\theta}{\partial r} + \frac{\partial (Q_r - N_r \vartheta_r - N_{r\theta} \vartheta_\theta) r e_z}{\partial r} \right] dr d\theta. \end{aligned}$$

Равнодействующая этих двух усилий равна

$$\left[\frac{\partial N_r r e_r}{\partial r} + \frac{\partial N_{r\theta} r e_\theta}{\partial r} + \frac{\partial (Q_r - N_r \vartheta_r - N_{r\theta} \vartheta_\theta) r e_z}{\partial r} \right] dr d\theta. \quad (1.2)$$

Таким же образом находим равнодействующую усилий, действующих на стороны элемента $\theta = const$ и $\theta + d\theta = const$:

$$\left[\frac{\partial N_{\theta r} e_r}{\partial \theta} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial (Q_\theta - N_{\theta r} \vartheta_r - N_\theta \vartheta_\theta) e_z}{\partial \theta} \right] dr d\theta. \quad (1.3)$$

Внешняя сила, действующая на элемент, имеет величину

$$q r d\theta dr = (q_r e_r + q_\theta e_\theta + q_z e_z) r dr d\theta.$$

Переходя к моментам, определим сначала равнодействующую моментов, действующих на стороны элемента $r = const$ и $r + dr = const$:

$$\left(-\frac{\partial M_{r\theta} r e_r}{\partial r} + \frac{\partial M_r r e_\theta}{\partial r} \right) dr d\theta \quad (1.4)$$

и равнодействующую моментов, действующих на стороны элемента $\theta = const$ и $\theta + d\theta = const$:

$$\left(-\frac{\partial M_\theta e_r}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\theta r} e_\theta}{\partial \theta} \right) dr d\theta. \quad (1.5)$$

Затем, с точностью до величин того же порядка малости, находим момент всех действующих на элемент усилий:

$$(Q_\theta e_r - Q_r e_\theta) r dr d\theta. \quad (1.6)$$

Из условий равенства нулю главного вектора и главного момента получаем два векторных уравнения равновесия пластины:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial N_r r e_r}{\partial r} + \frac{\partial N_{r\theta} r e_\theta}{\partial r} + \frac{\partial (Q_r - N_r \vartheta_r - N_{r\theta} \vartheta_\theta) r e_z}{\partial r} + \frac{\partial N_{\theta r} e_r}{\partial \theta} + \\ & + \frac{\partial N_\theta e_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial (Q_\theta - N_{\theta r} \vartheta_r - N_\theta \vartheta_\theta) e_z}{\partial \theta} + (q_r e_r + q_\theta e_\theta + q_z e_z) r = 0, \\ & -\frac{\partial M_{r\theta} r e_r}{\partial r} + \frac{\partial M_r r e_\theta}{\partial r} - \frac{\partial M_\theta e_r}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\theta r} e_\theta}{\partial \theta} + (Q_\theta e_r - Q_r e_\theta) r = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

где $N_{\theta r} = N_{r\theta}$ и $M_{\theta r} = M_{r\theta}$.

Используя формулы дифференцирования единичных векторов и приравнявая нулю коэффициенты при e_r, e_θ, e_z находим из двух

векторных уравнений пять скалярных уравнений равновесия пластины:

$$\frac{\partial N_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta} - N_{\theta} + q_r r = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + N_{r\theta} + q_{\theta} r = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial Q_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(N_{rr} \vartheta_r) - \frac{\partial}{\partial \theta}(N_{\theta} \vartheta_{\theta}) - \quad (1.10)$$

$$- \frac{\partial}{\partial r}(N_{r\theta} \vartheta_{\theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta}(N_{r\theta} \vartheta_r) + q_z r = 0,$$

$$\frac{\partial M_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - M_{\theta} - Q_{rr} = 0, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + M_{r\theta} - Q_{\theta} r = 0. \quad .12)$$

При составлении уравнений равновесия учитываем проекций усилий $N_r, N_{\theta}, N_{\theta r}, N_{r\theta}$ на ось z . Так, при деформации элемента срединной поверхности усилия $N_r r d\theta$ и $\left(N_r r + \frac{\partial N_r}{\partial r} dr\right) d\theta$, приложенные к сторонам элемента $r = \text{const}$ и $r + dr = \text{const}$, поворачиваются соответственно на углы ϑ_r и $\vartheta_r + \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} dr$ и дают равнодействующую проекции на ось z - $\frac{\partial N_r \vartheta_r r}{\partial r} dr d\theta$ (рисунок 2).

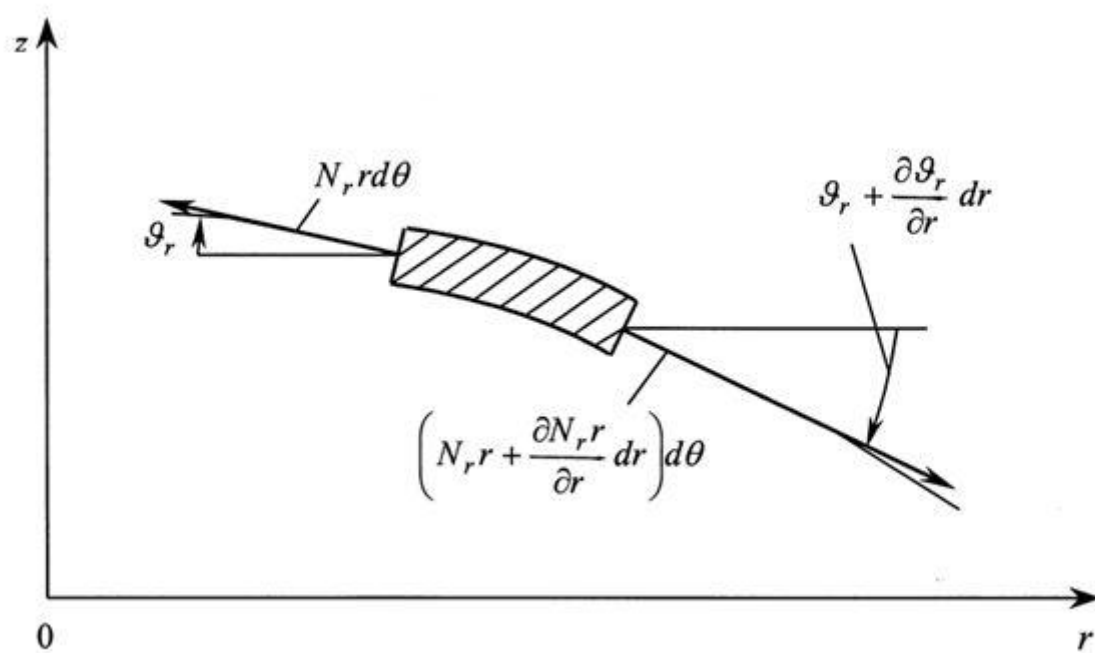


Рисунок 2

1.2 Соотношения между усилиями, моментами и деформациями

Деформации состоят из упругих деформаций, связанных с напряжениями известными соотношениями, и чисто тепловых деформаций.

Если температура тела возрастает на T , то при тепловом расширении относительное удлинение линейного элемента в любом направлении равно $\alpha_T T$, где α_T - коэффициент линейного теплового расширения.

Таким образом, получается:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r^{(z)} &= \frac{\sigma_r - \nu \sigma_\theta}{E} + \alpha_T T, \\ \varepsilon_\theta^{(z)} &= \frac{\sigma_\theta - \nu \sigma_r}{E} + \alpha_T T, \\ \gamma_{r\theta}^{(z)} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

где E - модуль упругости, а ν - коэффициент Пуассона. Здесь по толщине пластины считаем модуль упругости постоянным.

Обе части равенств (1.13) умножаем сначала на dz , а затем на $z dz$ и интегрируя их в пределах от $z = -\frac{h}{2}$ до $z = \frac{h}{2}$, вводя вместо напряжений усилия и моменты по формулам (1.1), находим:

$$\varepsilon_r = \frac{N_r - \nu N_\theta}{Eh} + \varepsilon_T, \quad (1.14)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{N_\theta - \nu N_r}{Eh} + \varepsilon_T, \quad (1.15)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{r\theta}, \quad (1.16)$$

$$\chi_r = \frac{12(M_r - \nu M_\theta)}{Eh^3} + \chi_T, \quad (1.17)$$

$$\chi_\theta = \frac{12(M_\theta - \nu M_r)}{Eh^3} + \chi_T, \quad (1.18)$$

$$\chi_{r\theta} = \frac{12(1+\nu)}{E} M_{r\theta}. \quad (1.19)$$

где

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T T dz, \quad (1.20)$$

$$\chi_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T T z dz.$$

Величины ε_T и χ_T можно рассматривать как обобщенные чисто тепловые деформации, h – толщина пластины.

Определяя из выражений (1.14) - (1.18) усилия и моменты, получаем следующие соотношения между усилиями, моментами и деформациями:

$$N_r = D_N [\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta - (1+\nu) \varepsilon_T], \quad (1.21)$$

$$N_\theta = D_N [\nu \varepsilon_r + \varepsilon_\theta - (1+\nu) \varepsilon_T], \quad (1.22)$$

$$N_{r\theta} = N_{\theta r} = \frac{1-\nu}{2} D_N \gamma_{r\theta}, \quad (1.23)$$

$$M_r = D_M [\chi_r + \nu \chi_\theta - (1+\nu) \chi_T], \quad (1.24)$$

$$M_\theta = D_M [\nu \chi_r + \chi_\theta - (1+\nu) \chi_T], \quad (1.25)$$

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = (1 - \nu)D_M \gamma_{r\theta}, \quad (1.26)$$

где $D_N = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ - цилиндрическая жесткость растяжения пластины, $D_M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - цилиндрическая жесткость изгиба пластины.

1.3 Разрешающие уравнения и граничные условия

Исключая из уравнений (1.10)-(1.12) условия Q_r и Q_θ , получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_{rr}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 M_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (N_{rr} \vartheta_r) - \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta \vartheta_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (N_{r\theta} r \vartheta_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{r\theta} \vartheta_r) + q_z = 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Заменяя в уравнении (1.27) моменты через прогиб с помощью выражений

$$\begin{aligned} \chi_r &= \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}, \\ \chi_\theta &= \frac{1}{r} \left(\vartheta_r + \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2}, \\ \chi_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} - \vartheta_\theta \right) + \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial r} \right] = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.28)$$

и соотношений (1.24)-(1.26), находим следующее уравнение несимметричного изгиба круглой пластины переменной жесткости, подверженной действию сил в ее срединной плоскости:

$$\begin{aligned}
& D_M \nabla^2 \nabla^2 \omega + \frac{dD_M}{dr} \left(2 \frac{\partial^3 \omega}{\partial r^3} + \frac{2+\nu}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \omega}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) + \\
& + \frac{d^2 D_M}{dr^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (N_r r \mathfrak{G}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta \mathfrak{G}_\theta) + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (N_{r\theta} r \mathfrak{G}_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta r} \mathfrak{G}_r) - q_z + (1+\nu) \nabla^2 (\chi_T D_M) = 0, \quad (1.29)
\end{aligned}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Усилия $N_r, N_\theta, N_{r\theta} = N_{\theta r}$ находим независимо от ω . Для их определения удобно ввести функцию напряжений. Если силы q_r и q_θ имеют потенциал U и определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} q_r &= -\frac{\partial U}{\partial r}, \\ q_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

то уравнения равновесия (1.8) и (1.9) тождественно удовлетворяется при следующих выражениях для усилий:

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + U, \\ N_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + U, \\ N_{r\theta} &= N_{\theta r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

где F - функция напряжений.

Уравнение для F составляем, используя известное условие совместности деформаций:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta}. \quad (1.32)$$

Заменяя в выражении (1.32) деформации усилиями по формулам (1.14)-(1.16), а усилия – выражениями (1.31), получаем следующее уравнение для F :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 F + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{Eh} \right) \left(2 \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} + \frac{2-\nu}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial r} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{Eh} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \\ & + \nabla^2 \left[(1-\nu) \frac{U}{Eh} + \varepsilon_T \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Подставляя в уравнение (1.29) выражения (1.31) и учитывая (1.8) и (1.9), находим в преобразованном виде второе разрешающее уравнение рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned}
& D_M \nabla^2 \nabla^2 \omega + \frac{dD_M}{dr} \left(2 \frac{\partial^3 \omega}{\partial r^3} + \frac{2+\nu}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \omega}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) + \\
& + \frac{d^2 D_M}{dr^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + U \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - \\
& - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + U \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) + 2 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \right] \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) + \\
& + q_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + q_\theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - q_z + (1+\nu) \nabla^2 (\chi_T D_M) = 0.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Уравнения (1.33) и (1.34) описывают задачу о несимметричном растяжении и о несимметричном изгибе круглой пластины радиально переменной жесткости, испытывающей действие как силовой нагрузки (поперечных сил и сил в срединной плоскости), так и действие неравномерного нагрева.

Если внешние силы, действующие в срединной плоскости, невелики, а неравномерный нагрев также не вызывает существенных усилий в срединной плоскости пластины, заметно влияющих на ее изгиб, то в уравнении несимметричного изгиба пластины (1.34) можно не учитывать влияния усилий в срединной плоскости. Тогда это уравнение может быть представлено в одной из следующих трех тождественных форм:

$$\begin{aligned}
& D_M \nabla^2 \nabla^2 \omega + \frac{dD_M}{dr} \left(2 \frac{\partial^3 \omega}{\partial r^3} + \frac{2+\nu}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \right. \\
& + \left. \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \omega}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) + \frac{d^2 D_M}{dr^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) - \\
& - q_z + (1+\nu) \nabla^2 (\chi_T D_M) = 0,
\end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned} & \nabla^2 (D_M \nabla^2 \omega) - (1-\nu) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial D_M}{\partial r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 D_M}{\partial r^2} \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right] - q_z + (1+\nu) \nabla^2 (\chi_T D_M) = 0, \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[D_M \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \omega + \frac{\partial D_M}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{D_M}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \nabla^2 \omega + \frac{1-\nu}{r^2} \frac{\partial D_M}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{r} \omega \right) - q_z + \\ & + (1+\nu) \nabla^2 (\chi_T D_M) = 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Зная ω , можно найти все моменты и усилия.

Соотношения между моментами и прогибом получаем из (1.24)-(1.26) после замены деформаций их выражениями по формулам (1.28).

Подставляя полученные таким образом выражения для моментов в уравнения (1.11) и (1.12), находим поперечные усилия. Выражения для изгибающих моментов и поперечных усилий имеют вид:

$$M_r = -D_M \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) + (1+\nu) \chi_T \right], \quad (1.38)$$

$$M_\theta = -D_M \left[\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + (1+\nu) \chi_T \right], \quad (1.39)$$

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = -(1-\nu) D_M \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right), \quad (1.40)$$

$$Q_r = -D_M \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \omega - \frac{dD_M}{dr} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right] - \quad (1.41)$$

$$-(1+\nu) \frac{\partial}{\partial r} (\chi_T D_M),$$

$$Q_\theta = -D_M \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \omega - (1-\nu) \frac{\partial D_M}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \quad (1.42)$$

$$-(1+\nu) \frac{D_M}{r} \frac{\partial \chi_T}{\partial \theta},$$

где $D_M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

Рассмотрим теперь граничные условия задачи.

Граничные условия для функции F будут такими же, как и для функции напряжений в плоской задаче теории упругости.

Граничные условия для ω на контуре $r = \text{const}$ могут быть следующие:

1) контур свободно оперт:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 0, \\ M_r &= 0 \text{ или } \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) + (1+\nu) \chi_T = 0; \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

2) контур жестко заделан:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 0, \\ \vartheta_r &= 0 \text{ или } -\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

3) контур подвержен действию изгибающего момента M и поперечной силы Q :

$$\begin{aligned}
 M_r = M \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) + (1 + \nu) \chi_T &= -\frac{M}{D_M}, \\
 Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} &= Q \\
 \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \omega + \frac{1}{D_M} \frac{dD_M}{dr} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right] + \\
 + \frac{1 - \nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) + \frac{(1 + \nu)}{D_M} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_T D_M) &= -\frac{Q}{D_M}.
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

При составлении последнего граничного условия крутящий момент $M_{r\theta}$, в соответствии с известным в теории пластин преобразованием, заменяется статически эквивалентным поперечным усилием $\frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta}$.

Аналогичные граничные условия в случае пластины, имеющей форму сектора, можно записать и на контуре $\theta = \text{const}$.

При одновременном действии на контуре радиальной силы и поперечной силы Q второе из граничных условий (1.46) принимает вид

$$Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = Q - N \frac{\partial \omega}{\partial r}. \tag{1.46}$$

Здесь учитывается, что сила N имеет составляющую $N \frac{\partial \omega}{\partial r}$ в направлении нормали к деформированной срединной плоскости пластины.

1.4 Совместное симметричное растяжение и несимметричный изгиб, совместное симметричное растяжение и симметричный изгиб

В случае симметричного растяжения пластины (от силовых воздействий и неравномерного нагрева) удобно для расчета вместо уравнения (1.34) применять разрешающее уравнение в форме (1.29), полагая в этом уравнении

$$N_{r\theta} = N_{\theta r} = 0.$$

Усилия N_r и N_θ , входящие в уравнение (1.29), определяются следующим образом: заменяя в уравнении совместности деформаций осесимметричной плоскости задачи

$$\frac{d\varepsilon_\theta r}{dr} = \varepsilon_r$$

деформации усилиями по формулам (1.14) и (1.15) и исключая N_θ с помощью уравнения (1.8), находим следующее уравнение для N_r :

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 N_r}{dr^2} + r \left(3 - \frac{r}{D_N} \frac{dD_N}{dr} \right) \frac{dN_r}{dr} - (1-\nu) \frac{r}{D_N} \frac{dD_N}{dr} N_r + \\ + r \frac{dq_r r}{dr} + q_r r \left(1 + \nu - \frac{r}{D_N} \frac{dD_N}{dr} \right) + (1-\nu^2) D_N r \frac{d\varepsilon_T}{dr} = 0, \end{aligned} \quad (1.47)$$

где $D_N = \frac{Eh}{1-\nu^2}$.

Зная N_r на основании уравнения (1.8) определяем

$$N_\theta = \frac{dN_r r}{dr} + q_r r. \quad (1.48)$$

В случае совместного симметричного растяжения и симметричного изгиба уравнение (1.29) в соответствии с уравнением (1.37) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[D_M \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{dD_M}{dr} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - N_r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] \right\} + (1 + \nu) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} (x_T D_M) \right] - q_Z = 0, \end{aligned} \quad (1.49)$$

где N_r определяется уравнением (1.47).

Соотношения между изгибающими моментами и прогибом, поперечной силой и прогибом в этом случае принимают вид:

$$M_r = -D_M \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + (1 + \nu) x_T \right], \quad (1.50)$$

$$M_\theta = -D_M \left[\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + (1 + \nu) x_T \right], \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} Q_r = -D_M \frac{\partial \omega}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - \frac{dD_M}{dr} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - \\ - (1 + \nu) \frac{d}{dr} (x_T D_M). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Если поперечная нагрузка q_2 является статической и не связана с прогибом, то уравнение четвертого порядка (1.49) можно представить в виде уравнения второго порядка относительно $\mathfrak{g}_r \left(\mathfrak{g}_r = -\frac{d\omega}{dr} \right)$:

$$r^2 \frac{d^2 \vartheta_r}{dr^2} + r \left(1 - \frac{r}{D_M} \frac{dD_M}{dr} \right) \frac{d\vartheta_r}{dr} + \left(\frac{vr}{D_M} \frac{dD_M}{dr} - \frac{N_r r^2}{D_M} - 1 \right) \vartheta_r +$$

(1.53)

$$+ \frac{r}{D_M} \left(\int q_z r dr - C \right) - \frac{(1+\nu)r^2}{D_M} \frac{d}{dr} (x_T D_M) = 0.$$

При отсутствии растяжения ($N_r = 0$) исходное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$r^2 \frac{d^2 \vartheta_r}{dr^2} + r \left(1 - \frac{r}{D_M} \frac{dD_M}{dr} \right) \frac{d\vartheta_r}{dr} + \left(\frac{vr}{D_M} \frac{dD_M}{dr} - 1 \right) \vartheta_r +$$

(1.54)

$$+ \frac{r}{D_M} \left(\int q_z r dr - C \right) - \frac{(1+\nu)r^2}{D_M} \frac{d}{dr} (x_T D_M) = 0.$$

Здесь, в соответствии с уравнением (1.10),

$$- \int q_z r dr + C = Q_r r, \quad (1.55)$$

где C - постоянная.

1.5 Симметрично деформированная круглая пластина с малой начальной кривизной

Рассмотрим симметричную деформацию круглой пластины, срединная поверхность которой в недеформированном состоянии есть пологая поверхность вращения.

Вершину этой поверхности (центр пластины) располагаем в начале координат, а ось z направляем вдоль оси вращения. Линиями главной кривизны такой срединной поверхности являются меридианы $\theta = const$ и параллельные круги $s = const$, где θ - угол между плоскостью данного меридиана и плоскостью начального меридиана, а s - дуга, отсчитываемая вдоль меридиана от вершины.

Обозначим радиус кривизны меридиана через R_I , радиус параллельного круга через r и угол между нормалью к срединной поверхности и ее осью через φ .

Пусть пластина нагружается симметрично относительно оси радиальными и поперечными силами и подвергается осесимметричному неравномерному нагреву. Симметричная деформация срединной поверхности характеризуется относительными удлинениями ε_S и ε_θ в направлениях меридиана и параллели и изменениями кривизны χ_S и χ_θ в тех же направлениях.

Установим зависимости между деформациями и перемещениями срединной поверхности, следуя работе А.Д. Коваленко [1].

Обозначим проекции вектора перемещения произвольной точки срединной поверхности на направления касательной к меридиану и внешней нормали через u_S и ω_n . Приращение длины элемента меридиана $ds = R_I d\varphi$, обусловленное перемещениями u_S и $u_S + \frac{du_S}{ds} ds$ его концов, равно $\frac{du_S}{ds} ds$. Вследствие перемещения ω_n этого элемента в направлении нормали его длина изменяется на величину $\omega_n d\varphi$.

Таким образом, относительное удлинение в направлении меридиана равно:

$$\varepsilon_S = \frac{du_S}{ds} + \frac{\omega_n}{R_I}. \quad (1.56)$$

Из-за перемещений u_S и ω_n радиус параллельного круга возрастает на величину $u_S \cos \varphi + \omega_n \sin \varphi$.

Это вызывает относительное удлинение в направлении параллели:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} (u_S \cos \varphi + \omega_n \sin \varphi). \quad (1.57)$$

Рассматривая угол поворота нормали к срединной поверхности ϑ_S , в соответствии с теорией пологих оболочек не принимаем во

внимание поворота нормали, вызванного перемещением u_S . Тогда получаем

$$\vartheta_S = -\frac{d\omega_n}{ds}. \quad (1.58)$$

Вводя координату ζ , отсчитываемую от срединной поверхности в направлении ее внешней нормали, находим на основании гипотезы о неизменяемости нормального элемента следующие зависимости между перемещениями u_S^ζ , ω_n^ζ в соответствующей точке срединной поверхности:

$$u_S^{(\zeta)} = u_S + \zeta \vartheta_S, \quad (1.59)$$

$$\omega_n^{(\zeta)} = \omega_n. \quad (1.60)$$

Теперь можно определить относительные удлинения $\varepsilon_S^{(\zeta)}$ и $\varepsilon_\theta^{(\zeta)}$ в точке на расстоянии ζ от срединной поверхности. Заменяя в зависимостях (1.56) и (1.57) u_S , ω_n , на u_S^ζ , ω_n^ζ и считая, что $R_I + \zeta \approx R_I$, $r + \zeta \sin \varphi \approx r$, $ds \left(1 + \frac{\zeta}{R_I}\right) \approx ds$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_S^{(\zeta)} &= \varepsilon_S + \zeta x_S, \\ \varepsilon_\theta^{(\zeta)} &= \varepsilon_\theta + \zeta x_\theta, \end{aligned} \right\} \quad (1.61)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x_S &= \frac{d\vartheta_S}{ds}, \\ x_\theta &= \frac{\vartheta_\theta \cos \varphi}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

С точностью до погрешностей исходных допущений технической теории оболочек величины x_S и x_θ представляют собой изменения кривизны срединной поверхности в направлениях меридиана и параллели.

Так как срединная поверхность является слабо искривленной поверхностью, то можно положить $\sin \varphi \approx 1$, $\cos \varphi \approx 1$, $u_S \approx u_r$, $\omega_n \approx \omega$, $ds \approx dr$, где u_r и ω - перемещение поверхности в направлениях оси r и оси z .

После указанных упрощений зависимости (1.56), (1.57) и (1.61) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_S &= \frac{du_r}{dr} + \frac{\omega}{R_I}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}(u_r + \omega\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

$$\left. \begin{aligned} x_S &= \frac{d\vartheta_r}{dr}, \\ x_\theta &= \frac{\vartheta_r}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

где $\vartheta_r = -\frac{d\omega}{dr}$.

Вычисляя производную от $\varepsilon_\theta r$ по r

$$\frac{d\varepsilon_\theta r}{dr} = \frac{du_r}{dr} + \frac{d\omega}{dr}\varphi + \omega \frac{d\varphi}{dr}$$

и учитывая, что

$$\frac{d\varphi}{dr} \approx \frac{1}{R_I},$$

находим с точностью до величин второго порядка малости следующее уравнение совместности деформаций

$$\frac{d\varepsilon_{\theta}r}{dr} = \varepsilon_S - \mathfrak{G}_{\varphi} . \quad (1.65)$$

Переходя к рассмотрению уравнений равновесия элемента пластины, обозначим через N_r , Q , M_r соответственно нормальное усилие, поперечное усилие и изгибающий момент, действующие в нормальном к меридиану сечении и отнесенные к единице длины параллели, через N_{θ} , M_{θ} - нормальное усилие и изгибающий момент, действующие в меридиональном сечении и отнесенные к единице длины меридиана, через q_r и q_z - внешние поверхностные силы, параллельные осям r и z отнесенные к единице площади срединной поверхности.

Проектируя все приложенные к элементу внутренние усилия и внешние силы на ось r , получаем следующее уравнение равновесия:

$$\frac{dN_r}{dr} - N_{\theta} + \frac{d}{dr}(Qr\varphi) + q_r r = 0. \quad (1.66)$$

В этом уравнении можно пренебречь членом $\frac{d}{dr}(Qr\varphi)$ по сравнению с $\frac{dN_r}{dr}$ и N_{θ} .

Отбрасывая в уравнении (1.66) член $\frac{d}{dr}(Qr\varphi)$, находим первое уравнение равновесия в виде

$$\frac{dN_r}{dr} - N_{\theta} + q_r r = 0. \quad (1.67)$$

Проектируя усилия на ось z и принимая во внимание, что радиальные усилия могут достигать значительной величины (например, в случае быстровращающейся вокруг своей оси

пластины), учитываем проекции усилий $N_r r d\theta$ и $N_r r d\theta + \frac{dN_r r}{dr} r d\theta$ на ось z , обусловленные не только начальной кривизны пластины, но также и изменением этой кривизны при деформации пластины.

$$\frac{dQr}{dr} - \frac{d}{dr} [N_r r (\varphi + \vartheta_r)] + q_2 r = 0. \quad (1.68)$$

Из условия равенства нулю суммы внутренних моментов и момента от поперечных усилий, действующих на элемент относительно касательной к параллели срединной поверхности, находим третье уравнение равновесия:

$$\frac{dN_r r}{dr} - N_\theta - Qr = 0. \quad (1.69)$$

Соотношения между усилиями, моментами и деформациями по аналогии с соотношениями (1.14), (1.15), (1.50), (1.51) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_S &= \frac{N_r - \nu N_\theta}{Eh} + \varepsilon_T, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{N_\theta - \nu N_r}{Eh} + \varepsilon_T, \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D_M \left[\frac{d\vartheta_r}{dr} + \nu \frac{\vartheta_r}{r} - (1 + \nu) x_T \right], \\ M_\theta &= D_M \left[\frac{d\vartheta_r}{dr} + \frac{\vartheta_r}{r} - (1 + \nu) x_T \right], \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

где

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r d\zeta, & N_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta d\zeta, \\ M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \zeta d\zeta, & M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta \zeta d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T T d\zeta, \quad x_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T T \zeta d\zeta. \quad (1.73)$$

При составлении разрешающих уравнений в качестве основных неизвестных выбираем

$$N_r \text{ и } \mathcal{G}_r = -\frac{d\omega}{dr}.$$

Заменяя в уравнении (1.65) относительные удлинения усилиями по формулам (1.70) и с помощью уравнения (1.67) исключая N_θ , находим первое разрешающее уравнение:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 N_r}{dr^2} + r \left(3 - \frac{r}{D_N} \frac{dD_N}{dr} \right) \frac{dN_r}{dr} - \frac{(1-\nu)r}{D_N} \frac{dD_N}{dr} N_r + (1-\nu^2) \times \\ \times D_N \mathcal{G}_r + r \frac{dq_r r}{dr} + q_r r \left(1 + \nu - \frac{r}{D_N} \frac{dD_N}{dr} \right) + (1-\nu^2) D_N r \frac{d\varepsilon_T}{dr} = 0, \end{aligned} \quad (1.74)$$

$$\text{где } D_N = \frac{Eh}{1-\nu^2}.$$

Для получения второго уравнения, связывающего N_r и $\mathcal{G}_r$, сначала из уравнения (1.68) определяем

$$Q_r = N_r r (\varphi + \vartheta_r) - \int q_z r dr + C. \quad (1.75)$$

Затем, подставляя выражение (1.75) в уравнение (1.69) и заменяя в нем моменты выражениями (1.71), находим второе разрешающее уравнение:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 \vartheta_r}{dr^2} + r \left(1 + \frac{1}{D_M} \frac{dD_M}{dr} \right) \frac{d\vartheta_r}{dr} + \left(\frac{vr}{D_M} \frac{dD_M}{dr} - \frac{N_r r^2}{D_M} - 1 \right) \vartheta_r - \\ - \frac{N_r r^2}{D_M} + \frac{r}{D_M} \int (q_z r dr - C) - \frac{(1+\nu)r^2}{D_M} \frac{d}{dr} (x_T D_M) = 0, \end{aligned} \quad (1.76)$$

где

$$D_M = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}.$$

Для того чтобы получить дифференциальные уравнения симметрично деформированной пластины в общем случае неравномерного нагрева рассмотрим симметричную деформацию неравномерно нагретой пластины, когда модуль упругости является переменным не только вдоль радиуса, но также и по толщине пластины.

Пусть срединная плоскость пластины совпадает с координатной плоскостью XOY . Для упрощения соотношений между усилиями, моментами и деформациями введем в рассмотрение некоторую начальную поверхность вращения, расстояние которой $z_0 = f(r)$ от срединной плоскости определяется из уравнения

$$\int_{-h/2}^{h/2} E \cdot (z - z_0) dz = 0, \quad (1.77)$$

где модуль упругости $E = E(r, z)$ есть функция координат r и z .

Начальная поверхность является весьма пологой поверхностью вращения.

Пусть u_0 и $\omega_0 \approx \omega$ - перемещения произвольной точки начальной поверхности в направлениях оси r и оси z .

Считая пластину тонкой, а следовательно, справедливой гипотезу о неизменяемости нормального элемента, на основании зависимостей (1.61) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_S^{(Z)} &= \varepsilon_{SO} + (z - z_0)x_S, \\ \varepsilon_\theta^{(Z)} &= \varepsilon_{\theta O} + (z - z_0)x_\theta, \end{aligned} \right\} \quad (1.78)$$

где ε_{SO} и $\varepsilon_{\theta O}$ - относительные удлинения начальной поверхности в направлениях меридиана и параллели, x_S и x_θ - изменения кривизны начальной поверхности в тех же направлениях.

Относительные удлинения ε_{SO} и $\varepsilon_{\theta O}$ по аналогии с зависимостями (1.63) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{SO} &= \frac{du_\theta}{dr} + \frac{\omega}{R}, \\ \varepsilon_{\theta O} &= \frac{1}{r}(u_0 + \omega\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (1.79)$$

где R_I - радиус кривизны меридиана начальной поверхности, а $\varphi = -\frac{dz_0}{dr}$ - угол, образуемый нормалью к начальной поверхности с осью z .

Изменения кривизны x_S и x_θ определяются выражениями (1.64).

Соотношения (1.13) между относительными удлинениями и напряжениями сохраняются без изменения и для рассматриваемого случая.

Определяя из этих соотношений напряжения, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_s^{(Z)} + \nu \varepsilon_\theta^{(Z)} - (1+\nu) \alpha_T T \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_\theta^{(Z)} + \nu \varepsilon_s^{(Z)} - (1+\nu) \alpha_T T \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

где чисто тепловое относительное удлинение $\alpha_T T$ и модуль упругости E являются заданными функциями координат r и z .

Усилия и моменты на единицу длины координатных линий $\theta = \text{const}$ и $s \approx r = \text{const}$ начальной поверхности определяются выражениями (1.1.5.16), в которых ζ и $d\zeta$ следует заменить на $z - z_0$ и dz .

Подставляя выражения для деформаций (1.78) в соотношения (1.80), а затем выражения для напряжений (1.80) в соответствующие выражения для усилий и моментов и принимая во внимания условие (1.77), находим следующие соотношения между усилиями, моментами и деформациями:

$$N_r = D_N (\varepsilon_{s0} + \nu \varepsilon_{\theta 0}) - N_T, \quad (1.81)$$

$$N_\theta = D_N (\varepsilon_{\theta 0} + \nu \varepsilon_{s0}) - N_T, \quad (1.82)$$

$$M_r = D_M (\chi_s + \nu \chi_\theta) - M_T, \quad (1.83)$$

$$M_\theta = D_M (\chi_\theta + \nu \chi_s) - M_T, \quad (1.84)$$

где

$$D_N = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E dz, \quad (1.85)$$

$$D_M = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E (z - z_0)^2 dz, \quad (1.86)$$

$$N_T = \frac{1}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T T E dz, \quad (1.87)$$

$$M_T = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T T E (z - z_0) dz. \quad (1.88)$$

Здесь D_N и D_M можно рассматривать как обобщенные цилиндрические жесткости растяжения и изгиба пластины, а N_T и M_T как чисто тепловое усилие и чисто тепловой изгибающий момент. Величина z_0 , входящая в выражения (1.86) и (1.88), определяется из уравнения (1.77).

При составлении уравнений равновесия сводим рассматриваемую задачу к задаче об изгибе пластины с начальной кривизной. Предполагая, что усилие N_T действует по касательной к меридиану начальной поверхности, получаем первые два уравнения равновесия в виде уравнений (1.67) и (1.68).

Учитывая, что расстояние какой-либо точки начальной поверхности до срединной поверхности равно z_0 , находим вместо уравнения (1.69) следующее третье уравнение равновесия:

$$\frac{dM_r r}{dr} - M_\theta - Qr - q_r z_0 r = 0. \quad (1.89)$$

Далее получаем следующие разрешающие уравнения:

$$\begin{aligned} & r^2 \frac{d^2 N_r}{dr^2} + r \left(3 - \frac{r}{D_N} \frac{dD_N}{dr} \right) \frac{dN_r}{dr} - \frac{(1-\nu)r}{D_N} \frac{dD_N}{dr} N_r + \\ & + (1-\nu^2) D_N g_r \varphi + r \frac{dq_r r}{dr} + q_r r \left(1 + \nu - \frac{r}{D_N} \frac{dD_N}{dr} \right) + \\ & + (1-\nu) D_N r \frac{d}{dr} \left(\frac{N_T}{D_N} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.90)$$

$$r^2 \frac{d^2 \vartheta_r}{dr^2} + r \left(1 + \frac{r}{D_M} \frac{dD_M}{dr} \right) \frac{d\vartheta_r}{dr} + \left(\frac{vr}{D_M} \frac{dD_M}{dr} - \frac{N_r r^2}{D_M} - 1 \right) \vartheta_r - \frac{N_r r^2}{D_M} \varphi + \frac{r}{D_N} \left(\int q_z r dr - C \right) - \frac{q_r z_0 r^2}{D_M} - \frac{r^2}{D_M} \frac{dM_T}{dr} = 0. \quad (1.91)$$

Сравнивая уравнения (1.90) и (1.91) с уравнениями (1.74) и (1.76), видим, что задача о симметричном растяжении и симметричном изгибе неравномерно нагретой круглой пластины с переменным модулем упругости $E = E(r, z)$ сводится к задаче о симметричном растяжении и симметричном изгибе круглой пластины с малой начальной кривизной, но с постоянным по толщине модулем упругости; при этом в качестве цилиндрических жесткостей растяжения и изгиба пластины следует рассматривать величины

$$D_N = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E dz \quad \text{и} \quad D_M = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E (z - z_0)^2 dz.$$

а под начальной кривизной пластины следует понимать кривизну условной срединной поверхности в виде весьма пологой поверхности вращения, у которой угол между нормалью и осью равен

$$\varphi = -\frac{dz_0}{dr},$$

где z_0 определяется из условия (1.77).

1.6 Задачи термоупругости неоднородных круглых пластин при осесимметричном температурном поле

Рассмотрим термоупругое напряженное состояние пластины при осесимметричном температурном поле в случае, когда $q_z = 0$.

При осесимметричном температурном поле перемещение u_θ угол поворота ϑ_θ , деформации $\gamma_{r\theta}$, $\chi_{r\theta}$, усилия $N_{r\theta}$, Q_θ и крутящий

момент $M_{r\theta}$ равны нулю. Соотношения между деформациями и перемещениями имеют вид

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \chi_r = \frac{d\vartheta_r}{dr}, \quad \chi_\theta = \frac{\vartheta_r}{r}, \quad (1.92)$$

где $\vartheta_r = -\frac{d\omega}{dr}$.

Уравнения равновесия (1.8)-(1.12) при $q_z = 0$ принимают вид

$$\frac{\partial N_{rr}}{\partial r} - N_\theta = 0, \quad (1.93)$$

$$Q_{rr} - N_{rr}\vartheta_r - C = 0, \quad (1.94)$$

$$\frac{\partial M_{rr}}{\partial r} - M_\theta - Q_{rr} = 0, \quad (1.95)$$

где C – постоянная интегрирования, которая равна с точностью до постоянного множителя равнодействующей несамоуравновешенных (поперечных) контурных усилий.

Уравнения совместности деформаций следующие:

$$\varepsilon_r = \frac{d\varepsilon_\theta r}{dr}, \quad \chi_r = \frac{d\chi_\theta r}{dr}. \quad (1.96)$$

При осесимметричном температурном поле соотношения между усилиями и функцией напряжений (1.31) примут вид

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad N_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}. \quad (1.97)$$

Соотношения между деформациями и перемещениями (1.92), уравнения равновесия (1.93)-(1.95), соотношения между усилиями и функцией напряжений (1.98), а также уравнения совместности деформаций (1.96) одни и те же для однородных и для неоднородных

пластин. Соотношения же упругости для неоднородных пластин принципиально отличны. Это влияет на разрешающие уравнения.

Сначала получим соотношения между усилиями, моментами и деформациями. Для этого разрешим уравнения (1.13) относительно напряжений. Учитывая осевую симметрию задачи, имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_r^{(z)} + \nu \varepsilon_\theta^{(z)} - (1+\nu) \alpha_T T \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_\theta^{(z)} + \nu \varepsilon_r^{(z)} - (1+\nu) \alpha_T T \right] \\ \sigma_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.98)$$

Умножая соотношения (1.98) на dz , а затем на zdz , интегрируя в пределах от $z = -\frac{h}{2}$ до $z = \frac{h}{2}$ и используя выражения относительных удлинений и сдвига в точке на расстоянии z от срединной поверхности, а так же (1.1), получаем следующие соотношения между усилиями, моментами и деформациями:

$$N_r = D_N \varepsilon_r + D_{N\nu} \varepsilon_\theta + D\chi_r + D_\nu \chi_\theta - N_T, \quad (1.99)$$

$$N_\theta = D_{N\nu} \varepsilon_r + D_N \varepsilon_\theta + D_\nu \chi_r + D\chi_\theta - N_T,$$

$$M_r = D\varepsilon_r + D_\nu \varepsilon_\theta + D_M \chi_r + D_{M\nu} \chi_\theta - M_T, \quad (1.100)$$

$$M_\theta = D_\nu \varepsilon_r + D\varepsilon_\theta + D_{M\nu} \chi_r + D_M \chi_\theta - M_T,$$

где

$$D_N = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} dz, D_{N\nu} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E\nu}{1-\nu^2} dz, D = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} z dz, \quad (1.101)$$

$$D_\nu = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E\nu}{1-\nu^2} z dz, D_M = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} z^2 dz, D_{M\nu} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E\nu}{1-\nu^2} z^2 dz,$$

$$N_T = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu} \alpha_T T dz, \quad M_T = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu} \alpha_T T z dz. \quad (1.102)$$

Эти соотношения отличаются от таковых для однородных пластин (1.21) - (1.26) тем, что усилия и моменты зависят как от деформаций растяжения - сжатия, так и от деформаций изгиба, т.е. отличаются членами, содержащими D и D_V .

Разрешим соотношения (1.99) и (1.100) относительно деформаций растяжения - сжатия и моментов:

$$\varepsilon_\theta = a_{11}N_\theta + a_{12}N_r - a_{13}\chi_r - a_{14}\chi_\theta + (a_{11} + a_{12})N_T, \quad (1.103)$$

$$\varepsilon_r = a_{12}N_\theta + a_{11}N_r - a_{14}\chi_r - a_{13}\chi_\theta + (a_{11} + a_{12})N_T,$$

$$M_r = a_{13}N_\theta + a_{14}N_r - a_{33}\chi_r - a_{34}\chi_\theta + (a_{13} + a_{14})N_T - M_T, \quad (1.104)$$

$$M_\theta = a_{14}N_\theta + a_{13}N_r - a_{34}\chi_r - a_{33}\chi_\theta + (a_{13} + a_{14})N_T - M_T,$$

где

$$a_{11} = kD_N, \quad a_{12} = -kD_{N_V}, \quad k = \frac{l}{D_N^2 - D_{N_V}^2},$$

$$a_{13} = k(D_N D_V - D_{N_V} D), \quad a_{14} = k(D_N D - D_{N_V} D_V), \quad (1.105)$$

$$a_{33} = Da_{14} + D_V a_{13} - D_M, \quad a_{34} = Da_{13} + D_V a_{14} - D_{M_V}.$$

Из уравнений (1.94) и (1.95) при $C = 0$ получается следующее уравнение равновесия:

$$\frac{dM_r r}{dr} - M_\theta - N_r r \vartheta_r = 0. \quad (1.106)$$

Подставляя выражения (1.103)-(1.104) в первое уравнение совместности деформаций (1.96) и уравнение равновесия (1.106) и используя формулы (1.92), (1.97) находим систему разрешающих уравнений задачи:

$$\begin{aligned}
& a_{11}r^3 \frac{d^3 F}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{11}}{dr} + a_{11} \right) \frac{d^2 F}{dr^2} + r \left(r \frac{da_{12}}{dr} - a_{11} \right) \frac{dF}{dr} + \\
& + a_{13}r^3 \frac{d^3 \omega}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{13}}{dr} + a_{13} \right) \frac{d^2 \omega}{dr^2} + r \left(r \frac{da_{14}}{dr} - a_{13} \right) \frac{d\omega}{dr} + \quad (1.107) \\
& + r^3 \frac{d}{dr} (a_{11} + a_{12}) N_T = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{13}r^3 \frac{d^3 F}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{13}}{dr} + a_{13} \right) \frac{d^2 F}{dr^2} + r \left(r \frac{da_{14}}{dr} - a_{13} \right) \frac{dF}{dr} + \\
& + a_{33}r^3 \frac{d^3 \omega}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{33}}{dr} + a_{33} \right) \frac{d^2 \omega}{dr^2} + r \left(r \frac{da_{34}}{dr} - a_{33} \right) \frac{d\omega}{dr} + \quad (1.108) \\
& + r^2 \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} + r^3 \frac{d}{dr} [(a_{13} + a_{14}) N_T - M_T] = 0.
\end{aligned}$$

Функции F и ω , принятые в качестве разрешающих, не зависят от положения исходной поверхности (от которой отсчитывается координата z). Поэтому, как показано в работе [2], разрешающие уравнения также инвариантны по отношению к положению этой поверхности. Следовательно, упростить уравнения (1.107) и (1.108) за счет выбора исходной поверхности невозможно.

Для неоднородных пластин в общем случае задача не распадается на две самостоятельные (о плоском напряженном состоянии и об изгибе пластины) независимо от того, учитывается или не учитывается влияние растяжения на изгиб. Функции F и ω совместно входят и в граничные условия.

В качестве граничных условий на контуре $r = \text{const}$ могут быть заданы три величины:

$$N_r \text{ или } u_r, \quad M_r \text{ или } \vartheta_r, \quad Q_r \text{ или } \omega, \quad (1.109)$$

которые выражаются через F и ω с помощью формул (1.97), (1.103), (1.104), (1.92), (1.94), (1.95).

Формулы для определения тепловых напряжений на основании (1.98), (1.103), (1.104) имеют вид

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} [(a_{11} + \nu a_{12})N_r + (a_{12} + \nu a_{11})N_\theta - (a_{14} + \nu a_{13} - z)\chi_r - (a_{13} + \nu a_{14} - \nu z)\chi_\theta] + \frac{E}{1-\nu} [(a_{11} + a_{12})N_T - \alpha_T T], \quad (1.110)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} [(a_{12} + \nu a_{11})N_r + (a_{11} + \nu a_{12})N_\theta - (a_{13} + \nu a_{14} - \nu z)\chi_r - (a_{14} + \nu a_{13} - z)\chi_\theta] + \frac{E}{1-\nu} [(a_{11} + a_{12})N_T - \alpha_T T], \quad (1.111)$$

Если коэффициент Пуассона постоянный, то

$$a_{12} = \nu a_{11}, \quad a_{13} = 0, \quad a_{34} = \nu a_{33} \quad (1.112)$$

и разрешающие уравнения несколько упрощаются:

$$a_{11}r^3 \frac{d^3 F}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{11}}{dr} + a_{11} \right) \frac{d^2 F}{dr^2} - r \left(r\nu \frac{da_{11}}{dr} + a_{11} \right) \frac{dF}{dr} + r^2 \frac{da_{14}}{dr} \frac{d\omega}{dr} + r^3 \frac{d}{dr} (a_{11} + a_{12}) N_T = 0, \quad (1.113)$$

$$a_{33}r^3 \frac{d^3 \omega}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{33}}{dr} + a_{33} \right) \frac{d^2 \omega}{dr^2} + r \left(r\nu \frac{da_{33}}{dr} - a_{33} \right) \frac{d\omega}{dr} + r^2 \frac{da_{14}}{dr} \cdot \frac{dF}{dr} + r^2 \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} + r^3 \frac{d}{dr} [(a_{13} + a_{14})N_T - M_T] = 0. \quad (1.114)$$

Функции F и ω остаются в этих уравнениях связанными. Эти функции можно разделить лишь в соотношениях между усилиями, моментами и деформациями, выбрав исходную поверхность из условия

$$D' = 0. \quad (1.115)$$

Штрих в формуле (1.115) указывает на то, что величина D в формуле (1.101) вычисляется не относительно срединной плоскости пластины, а относительно исходной плоскости, находящейся на расстоянии z_0 от срединной.

Подставляя в выражение для D вместо z величину $z - z_0$ в соответствии с условием (1.115) находим

$$z_0 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E z dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E dz}. \quad (1.116)$$

При $\nu = \text{const}$ величина $D_\nu = \nu D$, поэтому соотношения между усилиями, моментами и деформациями будут иметь ту же форму, что и для однородных пластин.

1.7 Задача термоупругости неоднородных пластин при изменении температуры по толщине

Рассмотрим пластину, температурное поле которой изменяется только по толщине. Тогда

$$E = E(z), \quad \nu = \nu(z). \quad (1.117)$$

В этом случае, хотя функции F и ω в соотношениях (1.99) и (1.100) не разделяются, в разрешающих уравнениях, как принято считать [3], если не учитывать влияния растяжения пластины на ее изгиб, они разделяются. Уравнения (1.107) и (1.108) в рассматриваемом случае превращаются в следующие:

$$a_{11}r \frac{d}{dr} \nabla^2 F + a_{13}r \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega = 0 , \quad (1.118)$$

$$a_{13}r \frac{d}{dr} \nabla^2 F + a_{33}r \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega + \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} = 0 .$$

Разрешая эти уравнения относительно $\frac{d}{dr} \nabla^2 F$ и $\frac{d}{dr} \nabla^2 \omega$ и учитывая выражения (1.105), получаем

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \nabla^2 F - \frac{D_{Nv}D - D_N D_v}{D_N D_M - D^2} \cdot \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} &= 0 , \\ r \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega - \frac{D_N}{D_N D_M - D^2} \cdot \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} &= 0 . \end{aligned} \quad (1.119)$$

Если не учитывать влияния растяжения на изгиб, то каждое из этих уравнений включает только одну разрешающую функцию: F и ω . В этом случае

$$\frac{d}{dr} \nabla^2 F = 0 , \quad \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega = 0 . \quad (1.120)$$

Интегрирование однородных уравнений (1.120) дает выражения

$$\begin{aligned} F &= C_0 + C_1 r^2 + C_2 \ln r , \\ \omega &= C'_0 + C'_1 r^2 + C'_2 \ln r . \end{aligned} \quad (1.121)$$

В случае сплошной пластины на основании условий $N_r \neq \infty$, $\mathcal{G}_r = 0$ при $r = 0$ постоянные C_2 и C'_2 равны нулю. Постоянная C_0 не оказывает влияния на напряженное состояние пластины.

В [1] А.Д. Коваленко рассматривает сложный симметричный изгиб круглой пластины линейно-переменной толщины при модуле

упругости, изменяющемся по толщине пластины следующим образом:

$$E = E_C + \frac{z}{h} \Delta E, \quad E_C = \frac{E' + E''}{2}, \quad \Delta E = E' - E'', \quad h = h_0(1 - x), \quad x = \pm \frac{r}{r_0},$$

где E' и E'' - значения модуля упругости на поверхностях $z = \frac{h}{2}$ и

$z = -\frac{h}{2}$, E_C и ΔE – постоянные.

При решении задачи вводится начальная поверхность.

1.8 Задача термоупругости неоднородных пластин при изменении температуры по радиусу

Если температура пластины изменяется по ее радиусу и не изменяется по толщине или изменяется симметрично относительно срединной плоскости, так что

$$T = T(r) \text{ или } T = T(r, z) = T(r, -z) \quad (1.122)$$

то величины D , D_V , а следовательно, и a_{13} , a_{14} обращаются в нуль и уравнения (1.107) и (1.108) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{11}r^3 \frac{d^3 F}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{11}}{dr} + a_{11} \right) \frac{d^2 F}{dr^2} + r \left(r \frac{da_{12}}{dr} - a_{11} \right) \frac{dF}{dr} + \\ + r^3 \frac{d}{dr} (a_{11} + a_{12}) N_T = 0, \end{aligned} \quad (1.123)$$

$$\begin{aligned} a_{33}r^3 \frac{d^3 \omega}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{33}}{dr} + a_{33} \right) \frac{d^2 \omega}{dr^2} + r \left(r \frac{da_{34}}{dr} - a_{33} \right) \frac{d\omega}{dr} + \\ + r^2 \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} - r^3 \frac{dM_T}{dr} = 0. \end{aligned} \quad (1.124)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} a_{11} &= kD_N, \quad a_{12} = -kD_{N\nu}, \quad a_{33} = -D_M, \\ a_{34} &= -D_{M\nu}, \quad k = \frac{I}{D_N^2 - D_{N\nu}^2}. \end{aligned} \quad (1.125)$$

$$\begin{aligned} D_N(r) &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(r)}{1-\nu(r)^2} dz, \quad D_{N\nu}(r) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(r)\nu(r)}{1-\nu(r)^2} dz, \\ D_M(r) &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(r)}{1-\nu(r)^2} z^2 dz, \quad D_{M\nu}(r) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(r)\nu(r)}{1-\nu(r)^2} z^2 dz, \end{aligned} \quad (1.126)$$

$$N_T(r) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(r)\alpha_T T}{1-\nu(r)} dz, \quad M_T(r) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(r)\alpha_T T z}{1-\nu(r)} dz.$$

где N_T – чисто тепловое усилие, M_T – чисто тепловой момент.

Здесь так же, как и для однородных пластин, функция F находится независимо от ω . Если не учитывать влияния растяжения пластины на ее изгиб, то и ω находится независимо от функции напряжений F .

Изгибающие моменты в этом случае определяются из следующих соотношений

$$\begin{aligned} M_r &= -a_{33}\chi_r - a_{34}\chi_\theta - M_T, \\ M_\theta &= -a_{34}\chi_r - a_{33}\chi_\theta - M_T, \end{aligned} \quad (1.127)$$

которые с учетом формул (1.125) примут вид

$$\begin{aligned} M_r &= D_M [\chi_r + \nu\chi_\theta - (1+\nu)\chi_T], \\ M_\theta &= D_M [\nu\chi_r + \chi_\theta - (1+\nu)\chi_T]. \end{aligned} \quad (1.128)$$

Решения задачи при изменении температуры согласно (1.122) для многих законов изменения жесткости пластины по радиусу можно найти в работе [4].

1.9 Общее решение задачи о сложном изгибе упругой неоднородной пластины в неравномерном температурном поле

Напряженно-деформированное состояние неравномерно нагретой неоднородной круглой пластины, когда модуль упругости является переменным не только вдоль радиуса, но также и по толщине, описывается дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, которые, изучению существующим линейным математическим аппаратом не поддаются.

Положим, что силовая нагрузка и неравномерный нагрев вызывают значительные радиальные усилия. В этом случае обусловленное начальной кривизной влияние изгиба на растяжения из-за переменного по толщине пластины модуля упругости можно считать [5] несущественным. Пренебрегая в связи с этим в уравнениях (1.74) членом $(1-\nu^2)D_N \vartheta_r \varphi$ и переходя к независимой переменной $x = (r/r_0)^{\alpha_0}$ вместо системы (1.74) получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_r}{dx^2} + \left(\frac{1+2/\alpha_0}{x} - \frac{1}{D_N} \cdot \frac{dD_N}{dx} \right) \frac{dN_r}{dx} + \frac{1-\nu}{\alpha_0 D_N x} \frac{dD_N}{dx} N_r + F(r) = 0; \\ \frac{d^2 \vartheta_r}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D_M} \cdot \frac{dD_M}{dx} \right) \frac{d\vartheta_r}{dx} + \left(\frac{\nu}{\alpha_0 x D_M} \frac{dD_M}{dx} - \right. \\ \left. - \frac{r_0^2 x^{-2(1-1/\alpha_0)} N_r}{\alpha_0^2 D_M} - \frac{1}{\alpha_0^2 x^2} \right) \vartheta_r + F_I(r) = 0, \end{aligned} \quad (1.129)$$

где

$$\begin{aligned} F(r) = \frac{1}{\alpha_0^2 x^2} \left[r \frac{dq_r r}{dr} + q_r r \left(1 + \nu - \frac{\alpha_0 x}{D_N} \cdot \frac{dD_N}{dx} \right) + \right. \\ \left. + (1-\nu) D_N r \frac{d}{dr} (N_T / D_N) \right]; \end{aligned}$$

$$F_I(r) = \frac{l}{\alpha_0^2 x^2} \left[-\frac{r^2 N_r}{D_M} \varphi + \frac{r}{D_M} \left(\int q_z r dr - C \right) - \right. \\ \left. - \frac{q_r z_0 r^2}{D_M} - \frac{r^2}{D_M} \cdot \frac{dM_T}{dr} \right];$$

$N_r(r)$ – квазистатическое усилие, соответствующее нормальному напряжению σ_r ;

$D_N(r)$ и $D_M(r)$ – цилиндрические жесткости растяжения и изгиба;

$q_z(r)$ – составляющая в направлении оси z внешней силы, приходящая на единицу площади срединной поверхности пластины;

ν – коэффициент Пуассона;

ε_T – чисто тепловое удлинение срединной плоскости,

ϑ_r – малый угол поворота относительно оси r ;

χ_T – кривизна срединной плоскости, обусловленное тепловым расширением.

Таким образом, задача сводится к последовательному решению уравнений системы (1.129). Сначала находим решение первого уравнения, в котором N_r считаем независимым от изгиба, а затем находим ϑ_r , где учитываем влияние растяжения на изгиб, связанное как с начальной кривизной, так и с изменением этой кривизны при деформации пластины.

В соответствии с непрямым операторным методом [6] имеем

$$D_N(x) = D_0 e^{\int \frac{\beta' - \beta^2 + a_1(x)\beta}{\beta - a_2(x)} dx}, \quad (1.130)$$

где

$$a_1(x) = \frac{l + 2/\alpha_0}{x} \quad a_2(x) = \frac{l - \nu}{\alpha_0 x},$$

$\beta = \beta(x)$ – произвольная функция, не равная $a_2(x)$, D_0 – постоянный множитель.

Пусть $\beta = \frac{a}{x}$, где a – не равная нулю константа. Нетрудно видеть в этом случае, что

$$D_N(x) = D_0 x^{-b}, \quad b = \frac{a(a - \frac{2}{\alpha_0})}{a + \frac{\nu - 1}{\alpha_0}}. \quad (1.131)$$

Для $b = -1$ первое уравнения системы (1.129) примет вид

$$\frac{d^2 N_r}{dx^2} + \frac{2}{\alpha_0 x} \frac{dN_r}{dx} - \frac{1-\nu}{\alpha_0 x^2} N_r = -F(r). \quad (1.132)$$

Общее решения уравнения (1.132) имеет выражения

$$N_r = \frac{x^{a - \frac{2}{\alpha_0} + 1}}{2\left(a - \frac{1}{\alpha_0}\right) + 1} \left(C_1 - \int x^{\frac{2}{\alpha_0} - a} F(x) dx \right) + x^{-a} \left(C_2 + \frac{1}{2\left(a - \frac{1}{\alpha_0}\right) + 1} \int x^{a+1} F(x) dx \right). \quad (1.133)$$

Раскрывая интегралы, имеем

$$N_r = \frac{C_1}{2\left(a - \frac{1}{\alpha_0}\right) + 1} x^{a - \frac{2}{\alpha_0} + 1} + C_2 x^{-a} + \frac{1}{\alpha_0^2} \frac{1}{2\left(a - \frac{1}{\alpha_0}\right) + 1} \times$$

$$\times \left[qr_0(1+\nu) \left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha_0} + a} - \frac{1}{\frac{3}{\alpha_0} - a - 1} \right) x^{\frac{1}{\alpha_0}} + E_0 h \alpha_T \gamma \left(\frac{1}{\frac{2}{\alpha_0} - a - 1} - \frac{1}{a} \right) \right]. \quad (1.134)$$

Совместное рассмотрение уравнения (1.132) с граничными условиями

$$N_r(b_1) = N_1, \quad N_r(b_2) = N_2 \quad (1.135)$$

дает

$$N_r = L_1 x^{a - \frac{2}{\alpha_0} + 1} + L_2 x^{-a} + L_3 x^{\frac{1}{\alpha_0}} + L_4, \quad (1.136)$$

где

$$L_1 = \frac{N_2 b_2^a - N_1 b_1^a + \frac{1}{\alpha_0^2} \cdot \left[\frac{E_0 h \alpha_T \gamma \cdot (b_1^a - b_2^a)}{a \left(\frac{2}{\alpha_0} - a - 1 \right)} - \frac{qr_0(1+\nu) \left(b_1^{a + \frac{1}{\alpha_0}} - b_2^{a + \frac{1}{\alpha_0}} \right)}{\left(\frac{1}{\alpha_0} + a \right) \left(\frac{3}{\alpha_0} - a - 1 \right)} \right]}{b_2^{2 \left(a - \frac{1}{\alpha_0} \right) + 1} - b_1^{2 \left(a - \frac{1}{\alpha_0} \right) + 1}},$$

$$L_2 = b_1^a \cdot N_1 - \frac{b_1^a}{\alpha_0^2} \left(\frac{E_0 h \alpha_T \gamma}{a \left(\frac{2}{\alpha_0} - a - 1 \right)} - \frac{qr_0(1+\nu) \cdot b_1^{1/\alpha_0}}{\left(\frac{1}{\alpha_0} + a \right) \left(\frac{3}{\alpha_0} - a - 1 \right)} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& - \left(b_2^a N_2 - b_1^a N_1 + \frac{1}{\alpha_0^2} \left[\frac{E_0 h \alpha_T \gamma \cdot (b_1^a - b_2^a)}{a \left(\frac{2}{\alpha_0} - a - 1 \right)} - \frac{q r_0 (1 + \nu)}{\left(\frac{1}{\alpha_0} + a \right) \left(\frac{3}{\alpha_0} - a - 1 \right)} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left(b_1^{\frac{a + \frac{1}{\alpha_0}}{\alpha_0}} - b_2^{\frac{a + \frac{1}{\alpha_0}}{\alpha_0}} \right) \right] \right) \cdot \frac{b_1^{2 \left(a - \frac{1}{\alpha_0} \right) + 1}}{b_2^{2 \left(a - \frac{1}{\alpha_0} \right) + 1} - b_1^{2 \left(a - \frac{1}{\alpha_0} \right) + 1}}, \\
L_3 &= - \frac{1}{\alpha_0^2} \cdot \frac{q r_0 (1 + \nu)}{\left(\frac{1}{\alpha_0} + a \right) \left(\frac{3}{\alpha_0} - a - 1 \right)}, \quad L_4 = \frac{1}{\alpha_0^2} \cdot \frac{E_0 h \alpha_T \gamma}{a \left(\frac{2}{\alpha_0} - a - 1 \right)}.
\end{aligned}$$

Аналогично строятся решения задачи для других выражений цилиндрических жесткостей.

Далее находим решение второго уравнения системы (1.129), где учитываем влияние растяжения на изгиб, связанное как с начальной кривизной, так и с изменением этой кривизны при деформации пластины. Для решения второго уравнения системы (1.129) воспользуемся методом частичной дискретизации [7]-[9]. В соответствии с этим методом общее решение уравнения имеет вид

$$\mathcal{G}_r = C_2 + \int \frac{1}{x D_M} [C_1 + \psi(x)] dx, \quad (1.137)$$

где при $D_M = A x^{\frac{1}{\alpha_0 \cdot \nu}}$, A - постоянный множитель,

$$\psi(x) = \frac{r_0^2}{2 \alpha_0^2} \sum (x_k + x_{k+1}) \left[x_k^{\frac{2}{\alpha_0} - 1} N_{r_k} \mathcal{G}_{r_k} H(x - x_k) - \right.$$

$$\left. -x_{k+l}^{\frac{2}{\alpha_0}-l} N_{r_{k+l}} \mathfrak{G}_{r_{k+l}} H(x-x_{k+l}) \right] - \int x D_M F_l(r) dx.$$

Интегрируя (1.137) получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_r = C_2 - C_1 \frac{\alpha_0^\nu}{Ax^{\frac{1}{\alpha_0^\nu}}} - \frac{r_0^2 \nu}{2A\alpha_0} \sum (x_k + x_{k+l}) \left[x_k^{\frac{2}{\alpha_0}-l} N_{r_k} \mathfrak{G}_{r_k} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha_0^\nu}}} - \frac{1}{x_k^{\frac{1}{\alpha_0^\nu}}} \right) H(x-x_k) - x_{k+l}^{\frac{2}{\alpha_0}-l} N_{r_{k+l}} \mathfrak{G}_{r_{k+l}} \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha_0^\nu}}} - \frac{1}{x_{k+l}^{\frac{1}{\alpha_0^\nu}}} \right) \times \right. \\ \left. \times H(x-x_{k+l}) \right] - f(x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{A\alpha_0^2} \left[-r_0^2 \phi L_1 \frac{x^{a-\frac{1}{\alpha_0^\nu}-l}}{(a+l) \left(a - \frac{1}{\alpha_0^\nu} - l \right)} - r_0^2 \phi L_2 \times \right. \\ \left. \times \frac{x^{\frac{2}{\alpha_0}-a-\frac{1}{\alpha_0^\nu}}}{\left(\frac{2}{\alpha_0} - a \right) \left(\frac{2}{\alpha_0} - a - \frac{1}{\alpha_0^\nu} \right)} - \left(r_0^2 \phi L_3 - \frac{r_0^3 q_z}{2} \right) \frac{x^{\frac{3}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0^\nu}}}{\frac{3}{\alpha_0} \left(\frac{3}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0^\nu} \right)} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(r_0^2 \varphi L_4 + q z_0 r_0^2 \right) \frac{x^{\frac{2}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0 \nu}}}{\frac{2}{\alpha_0} \left(\frac{2}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0 \nu} \right)} - C r_0 \alpha_0 \frac{x^{\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0 \nu}}}{\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0 \nu}} - \\
& \left. - \frac{\alpha_T \gamma E_I h^3}{12(1-\nu)} \cdot \frac{\alpha_0 \nu}{x^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}}} (\ln x + \alpha_0 \nu) \right].
\end{aligned}$$

Полагая, что наружный контур заделан, имеем

$$x = b_2 : \quad \mathfrak{G}_r = 0, \quad \omega = 0, \quad (1.138)$$

где $\omega = -\int \mathfrak{G}_r dx$.

С учетом граничных условий, окончательно получим

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_r = & \frac{r_0^2 \nu}{2A\alpha_0} \sum (x_k + x_{k+l}) \left[x_k^{\frac{2}{\alpha_0} - l} N_{r_k} \mathfrak{G}_{r_k} \left(\frac{1}{b_2 x_k^{\frac{1}{\alpha_0 \nu} - l}} - \frac{1}{x_k^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}}} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}}} - \frac{b_2^{\frac{1}{\alpha_0 \nu} - l}}{x^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}} x_k^{\frac{1}{\alpha_0 \nu} - l}} - \left. \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}}} - \frac{1}{x_k^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}}} \right) H(x - x_k) \right) - x_{k+l}^{\frac{2}{\alpha_0} - l} \times \\
& \times N_{r_{k+l}} \mathfrak{G}_{r_{k+l}} \left(\frac{1}{b_2 x_{k+l}^{\frac{1}{\alpha_0 \nu} - l}} - \frac{1}{x_{k+l}^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}}} - \frac{b_2^{\frac{1}{\alpha_0 \nu} - l}}{x^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}} x_{k+l}^{\frac{1}{\alpha_0 \nu} - l}} - \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}}} - \frac{1}{x_{k+l}^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}}} \right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times H(x - x_{k+1}))] + \left(f(b_2) - \frac{Q(b_2)}{b_2} \right) (\alpha_0 \nu - 1) \left(1 - \left(\frac{b_2}{x} \right)^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}} \right) + f(b_2) - f(x),$$

где $Q(x) = \int f(x) dx$.

При этом аналитические выражения малых углов поворота в точках x_k , $k = \overline{1, n}$ определяются в следующем виде

$$\mathfrak{g}_{r_1} = \frac{\left(f(b_2) - \frac{Q(b_2)}{b_2} \right) (\alpha_0 \nu - 1) \left(1 - \left(\frac{b_2}{x_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}} \right) + f(b_2) - f(x_1)}{1 - \frac{r_0^2 \nu}{2A\alpha_0} (x_1 + x_2) x_1^{\frac{2}{\alpha_0} - 1} N_{r_1} \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_0 \nu} - 1} - \frac{b_2^{\alpha_0 \nu}}{2}}{b_2 x_1^{\alpha_0 \nu} \quad x_1^{\alpha_0 \nu}} \right)},$$

$k = \overline{2, n}$

$$\mathfrak{g}_{r_k} = \left\{ \frac{r_0^2 \nu}{2A\alpha_0} \sum_{i=1}^{k-2} (x_i + x_{i+1}) \left[x_i^{\frac{2}{\alpha_0} - 1} N_{r_i} \mathfrak{g}_{r_i} \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_0 \nu} - 1} - \frac{b_2^{\alpha_0 \nu}}{\frac{1}{x^{\alpha_0 \nu}} \frac{1}{x_i^{\alpha_0 \nu}} - 1}}{b_2 x_i^{\alpha_0 \nu} \quad x^{\alpha_0 \nu} x_i^{\alpha_0 \nu}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - x_{i+1}^{\frac{2}{\alpha_0} - 1} N_{r_{i+1}} \mathfrak{g}_{r_{i+1}} \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_0 \nu} - 1} - \frac{b_2^{\alpha_0 \nu}}{\frac{1}{x^{\alpha_0 \nu}} \frac{1}{x_{i+1}^{\alpha_0 \nu}} - 1}}{b_2 x_{i+1}^{\alpha_0 \nu} \quad x^{\alpha_0 \nu} x_{i+1}^{\alpha_0 \nu}} \right) \right] + \frac{r_0^2 \nu}{2A\alpha_0} (x_{k-1} + x_k) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times x_{k-1}^{\frac{2}{\alpha_0}-1} N_{r_{k-1}} \mathcal{G}_{r_{k-1}} \left(\frac{1}{b_2 x_{k-1}^{\alpha_0 \nu}} \frac{b_2^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}-1}}{x^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}} x_{k-1}^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}-1}} \right) + \left(f(b_2) - \frac{Q(b_2)}{b_2} \right) \times \\
& \times (\alpha_0 \nu - 1) \left\{ 1 - \left(\frac{b_2}{x_k} \right)^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}} + f(b_2) - f(x_k) \right\} / \left\{ 1 - \right. \\
& \left. - \frac{r_0^2 \nu}{2 A \alpha_0} (x_{k+1} - x_{k-1}) x_k^{\frac{2}{\alpha_0}-1} N_{r_k} \left(\frac{1}{b_2 x_k^{\alpha_0 \nu}} \frac{b_2^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}-1}}{x_k^{\frac{2}{\alpha_0 \nu}-1}} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Находим приближенное аналитическое решение задачи о сложном изгибе круглой пластины, для другой зависимости жесткости от радиуса и толщины.

Общее решение второго уравнения системы (1.129), для случая

$$D_M = A + B/x^2$$

имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_r = & C_2 + \frac{C_1}{2A} \ln |Ax^2 + B| + \frac{1}{4A} \sum (x_k + x_{k+1}) \left[\left(\frac{2\nu B}{\alpha_0 x_k^3} + \frac{r_0^2 x_k^{2/\alpha_0} N_{r_k}}{x_k \alpha_0^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{Ax_k^2 + B}{\alpha_0^2 x_k^3} \right) \mathcal{G}_{r_k} \ln \left| \frac{Ax^2 + B}{Ax_k^2 + B} \right| H(x - x_k) - \left(\frac{2\nu B}{\alpha_0 x_{k+1}^3} + \frac{r_0^2 x_{k+1}^{2/\alpha_0} N_{r_{k+1}}}{x_{k+1} \alpha_0^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{Ax_{k+1}^2 + B}{\alpha_0^2 x_{k+1}^3} \right) \mathcal{G}_{r_{k+1}} \ln \left| \frac{Ax^2 + B}{Ax_{k+1}^2 + B} \right| H(x - x_{k+1}) \right].
\end{aligned}$$

$$+ \frac{Ax_{k+1}^2 + B}{\alpha_0^2 x_{k+1}^3} \Big) \mathfrak{g}_{r_{k+1}} \ln \left| \frac{Ax^2 + B}{Ax_{k+1}^2 + B} \right| H(x - x_{k+1}) \Big] - f(x),$$

где

$$f(x) = \frac{l}{\alpha_0^2} \int \frac{x}{Ax^2 + B} \left[-r_0^2 \varphi L_1 \frac{x^{a+1}}{(a+1)} - r_0^2 \alpha_0 \varphi L_2 \frac{x^{\frac{2}{\alpha_0} - a}}{(2 - \alpha_0 a)} - \left(r_0^2 \varphi L_3 - \frac{r_0^3 q_z}{2} \right) \alpha_0 \frac{x^{\frac{3}{\alpha_0}}}{3} - \frac{\alpha_0 (r_0^2 \varphi L_4 + q_z r_0^2)}{2} x^{\frac{2}{\alpha_0}} - Cr_0 \alpha_0 x^{\frac{1}{\alpha_0}} - \frac{\alpha_T \gamma E_I h^3}{12(1-\nu)} \ln x \right] dx.$$

С учетом граничных условий (1.138), окончательно получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_r = & -\frac{l}{4A} \sum (x_k + x_{k+1}) \left[\left(\frac{2\nu B}{\alpha_0 x_k^3} + \frac{r_0^2 x_k^{2/\alpha_0} N_{r_k}}{x \alpha_0^2} + \frac{Ax_k^2 + B}{\alpha_0^2 x_k^3} \right) \times \right. \\ & \times \mathfrak{g}_{r_k} \left[\ln \left| \frac{Ax^2 + B}{Ax_k^2 + B} \right| (1 - H(x - x_k)) + \frac{x_k - \sqrt{B/A} \operatorname{arctg} \frac{x_k}{\sqrt{B/A}}}{b_2 - \sqrt{B/A} \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{B/A}}} \times \right. \\ & \times \ln \left| \frac{Ab_2^2 + B}{Ax^2 + B} \right| \Big] - \left(\frac{2\nu B}{\alpha_0 x_{k+1}^3} + \frac{r_0^2 x_{k+1}^{2/\alpha_0} N_{r_{k+1}}}{x_{k+1} \alpha_0^2} + \frac{Ax_{k+1}^2 + B}{\alpha_0^2 x_{k+1}^3} \right) \mathfrak{g}_{r_{k+1}} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[\ln \left| \frac{Ax^2 + B}{Ax_{k+1}^2 + B} \right| (1 - H(x - x_{k+1})) + \frac{x_{k+1} - \sqrt{B/A} \arctg \frac{x_{k+1}}{\sqrt{B/A}}}{b - \sqrt{B/A} \arctg \frac{b}{\sqrt{B/A}}} \times \right.$$

$$\left. \times \ln \left| \frac{Ab_2^2 + B}{Ax^2 + B} \right| \right] - \frac{\ln \left| \frac{Ab_2^2 + B}{Ax^2 + B} \right| (f(b_2)b_2 - Q(b_2))}{2 \left(b_2 - \sqrt{B/A} \arctg \frac{b_2}{\sqrt{B/A}} \right)} + f(b_2) - f(x),$$

где $Q(x) = \int f(x) dx$.

Значения функции на интегральной кривой (1.139) в точках $k = \overline{1, n}$ даются выражениями

$$g_{r_1} = \frac{\ln \left| \frac{Ab_2^2 + B}{Ax_1^2 + B} \right| (f(b_2)b_2 - Q(b_2)) - f(x_1)}{1 - \frac{1}{4A} (x_1 + x_2) \left(\frac{2\nu B}{\alpha_0 x_1^3} + \frac{r_0^2 x_1^{2/\alpha_0} N_{r_1}}{x_1 \alpha_0^2} + \frac{Ax_1^2 + B}{\alpha_0^2 x_1^3} \right) \frac{x_1 - \sqrt{\frac{B}{A}} \arctg \sqrt{\frac{A}{B}} x_1}{b_2 - \sqrt{\frac{B}{A}} \arctg \sqrt{\frac{A}{B}} b_2}},$$

$k = \overline{2, n}$

$$g_{r_k} = \left\{ \frac{1}{4A} \sum_{i=1}^{k-2} (x_i + x_{i+1}) \ln \left| \frac{Ab_2^2 + B}{Ax_k^2 + B} \right| \left[\left(-\frac{2\nu B}{\alpha_0 x_i^3} - \frac{r_0^2 x_i^{2/\alpha_0} N_{r_i}}{x_i \alpha_0^2} - \frac{Ax_i^2 + B}{\alpha_0^2 x_i^3} \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \frac{x_i - \sqrt{B/A} \arctg \sqrt{\frac{A}{B}} x_i}{b_2 - \sqrt{B/A} \arctg \sqrt{\frac{A}{B}} b_2} g_{r_i} - \left(-\frac{2\nu B}{\alpha_0 x_{i+1}^3} - \frac{r_0^2 x_{i+1}^{2/\alpha_0} N_{r_i}}{x_{i+1} \alpha_0^2} - \frac{Ax_{i+1}^2 + B}{\alpha_0^2 x_{i+1}^3} \right) g_{r_{i+1}} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{x_{i+1} - \sqrt{\frac{B}{A}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A}{B}} x_{i+1}}{b_2 - \sqrt{\frac{B}{A}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A}{B}} b_2} \left] + \frac{1}{4A} (x_{k-1} + x_k) \left(\frac{2\nu B}{\alpha_0 x_{k-1}^3} + \frac{r_0^2 x_{k-1}^{2/\alpha_0} N_{r_i}}{x_{k-1} \alpha_0^2} + \frac{A x_{k-1}^2 + B}{\alpha_0^2 x_{k-1}^3} \right) \times \right. \\
& \times \frac{x_{k-1} - \sqrt{B/A} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A}{B}} x_{k-1}}{b_2 - \sqrt{B/A} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A}{B}} b_2} \vartheta_{r_{k-1}} \ln \left| \frac{A b_2^2 + B}{A x_k^2 + B} \right| - \frac{\ln \left| \frac{A b_2^2 + B}{A x_k^2 + B} \right|}{2 \left(b_2 - \sqrt{B/A} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A}{B}} b_2 \right)} \times \\
& \times \left(f(b_2) b_2 - Q(b_2) \right) + f(b_2) - f(x_k) \left. \right\} / \left\{ 1 - \frac{1}{4A} (x_{k+1} - x_{k-1}) \times \right. \\
& \times \left(-\frac{2\nu B}{\alpha_0 x_k^3} - \frac{r_0^2 x_k^{2/\alpha_0} N_{r_k}}{x_k \alpha_0^2} - \frac{A x_k^2 + B}{\alpha_0^2 x_k^3} \right) \frac{x_k - \sqrt{B/A} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A}{B}} x_k}{b_2 - \sqrt{B/A} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A}{B}} b_2} \ln \left| \frac{A b_2^2 + B}{A x_k^2 + B} \right| \left. \right\}.
\end{aligned}$$

На рисунке 3 приведены графики изменения угла поворота и прогиба неоднородной пластины переменной жесткости

$$D_M = A x^{\frac{1}{\alpha_0 \nu}}.$$

Проиллюстрированный подход позволяет получить приближенное аналитическое решение задачи о сложном изгибе круглой пластины с учетом различной зависимости жесткости и температурного поля от радиуса и толщины.

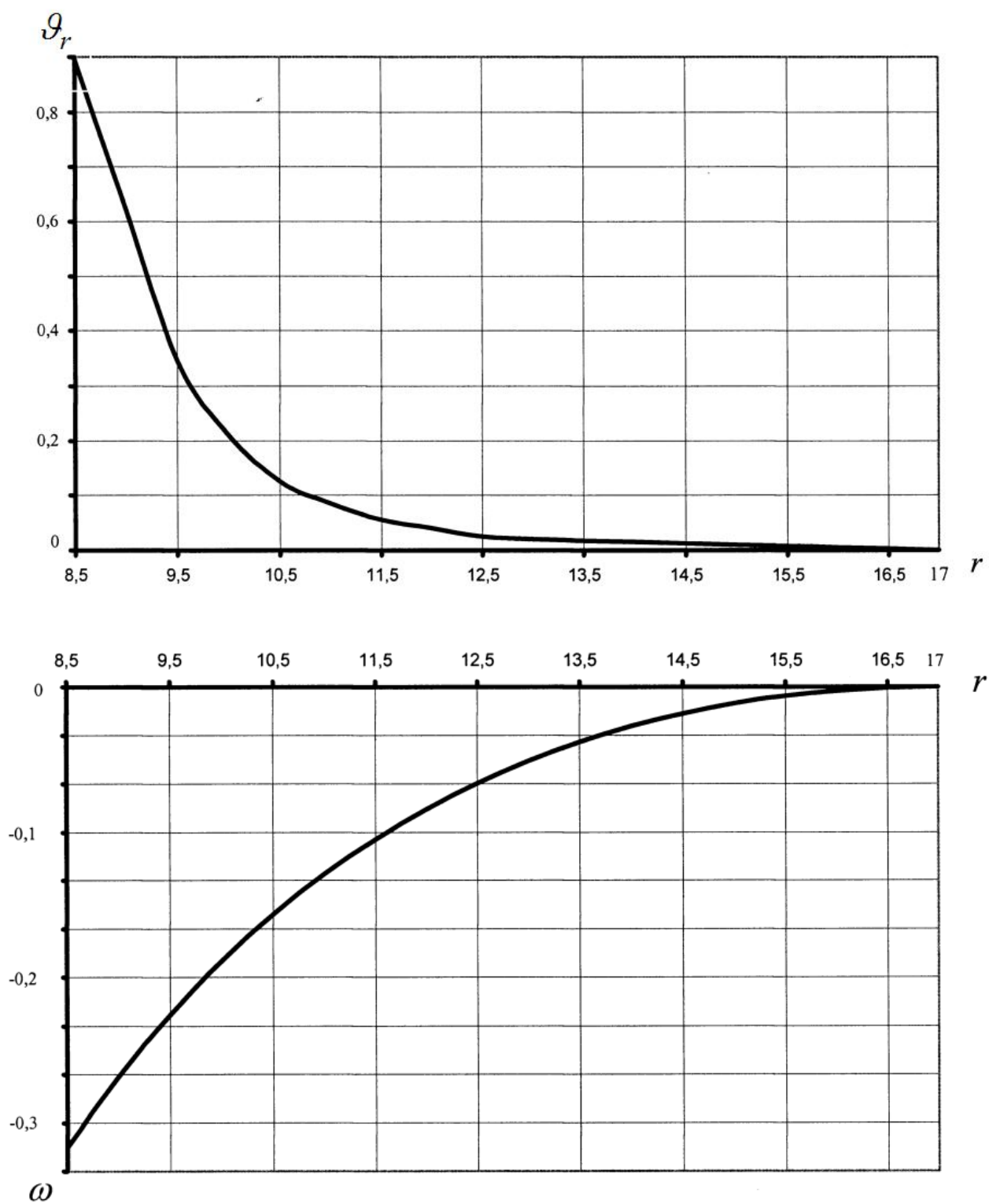


Рисунок 3 – Графики изменения угла поворота и прогиба неоднородной пластины переменной жидкости

2 ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ НЕОДНОРОДНОЙ ГИБКОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ПО ТОЛЩИНЕ И ПО РАДИУСУ

2.1 Решение задачи об изгибе круглой пластины при изменении температуры по радиусу пластины

Рассмотрим термоупругость неоднородной круглой пластины постоянной толщины при осесимметричном температурном поле, изменяющемся только по радиусу пластины. В этом случае величины D , D_v , следовательно, a_{13} , a_{14} обращаются в нуль. Задача описывается системой дифференциальных уравнений (1.123) и (1.124).

Если коэффициент Пуассона постоянный, то

$$\begin{aligned} a_{11} &= k D_N, \quad a_{12} = -\nu a_{11}, \quad a_{33} = -D_M, \\ a_{34} &= -\nu a_{33}, \quad k = \frac{l}{D_N^2 (1 - \nu^2)}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$D_N(r) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(r)}{1 - \nu^2} dz, \quad D_M(r) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(r)}{1 - \nu^2} z^2 dz, \quad (2.2)$$

$$N_T(r) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(r)}{1 - \nu} \alpha_T T dz, \quad M_T(r) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(r)}{1 - \nu} \alpha_T T z dz,$$

где N_T - чисто тепловое усилие, M_T - чисто тепловой момент.

Проинтегрировав выражения (2.2) с учетом (1.20) получим

$$D_N(r) = \frac{E(r)h}{1-\nu^2}, \quad D_M(r) = \frac{E(r)h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (2.3)$$

$$N_T(r) = \frac{E(r)h}{1-\nu} \varepsilon_T(r), \quad M_T(r) = \frac{E(r)h^3}{12(1-\nu)} \chi_T(r).$$

В случае осесимметричного температурного поля нормальное усилие N_r , действующее в цилиндрическом сечении, и угол поворота ϑ_r нормали имеют выражения

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}, \quad \vartheta_r = -\frac{d\omega}{dr}. \quad (2.4)$$

С учетом (2.1)-(2.3) система разрешающих уравнений (1.123)-(1.124) третьего порядка приводится к системе разрешающих уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_r}{dr^2} + \left(\frac{3}{r} - \frac{1}{D_N} \frac{dD_N}{dr} \right) \frac{dN_r}{dr} - \frac{1-\nu}{rD_N} \frac{dD_N}{dr} N_r + \\ + \frac{1-\nu^2}{r} D_N \frac{d\varepsilon_T}{dr} = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vartheta_r}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D_M} \frac{dD_M}{dr} \right) \frac{d\vartheta_r}{dr} + \left(\frac{\nu}{rD_M} \frac{dD_M}{dr} - \frac{1}{r^2} - \frac{N_r}{D_M} \right) \vartheta_r - \\ - \frac{1+\nu}{D_M} \frac{d(\chi_T D_M)}{dr} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь функция N_r находится независимо от ϑ_r .

Соотношения (1.104) для изгибающих моментов M_r и M_θ , действующих соответственно в цилиндрическом и радиальном

сечениях, в случае изменения температуры пластины по ее радиусу принимают вид

$$M_r = -a_{33}\chi_r - a_{34}\chi_\theta - M_T, \quad (2.7)$$

$$M_\theta = -a_{34}\chi_r - a_{33}\chi_\theta - M_T. \quad (2.8)$$

С учетом (2.1), (2.3) и (1.92) соотношения (2.7)-(2.8) запишутся в виде

$$M_r = D_M \left[\frac{d\vartheta_r}{dr} + \nu \frac{\vartheta_r}{r} - (1 + \nu)\chi_T \right], \quad (2.9)$$

$$M_\theta = D_M \left[\nu \frac{d\vartheta_r}{dr} + \frac{\vartheta_r}{r} - (1 + \nu)\chi_T \right]. \quad (2.10)$$

Тепловые напряжения в этом случае определяются по формулам

$$\sigma_r = \frac{N_r}{h} + \frac{12M_r z}{h^3} + \frac{E}{1 - \nu} [\varepsilon_T + z\chi_T - \alpha_T T], \quad (2.11)$$

$$\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} + \frac{12M_\theta z}{h^3} + \frac{E}{1 - \nu} [\varepsilon_T + z\chi_T - \alpha_T T]. \quad (2.12)$$

Для решения задачи об изгибе круглой пластины при изменении температуры по ее радиусу применяем метод частичной дискретизации дифференциальных уравнений [10, 11].

Общее решение уравнения (2.5) имеет вид [12]

$$\begin{aligned} N_r(r) = & C_1 \int e^{-\int \phi(r) dr} dr + C_2 + \\ & + \int e^{-\int \phi(r) dr} \left(\int [\beta(r) + \eta(r)] e^{\int \phi(r) dr} dr \right) dr, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\phi(r) = \frac{3}{r} - \frac{1}{D_N} \frac{dD_N}{dr}, \quad \eta(r) = -\frac{1-v^2}{r} D_N \frac{d\varepsilon_T}{dr},$$

$$\beta(r) = \frac{1-v}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{1}{r_k D_N(r_k)} \frac{dD_N}{dr} \Big|_{r=r_k} N_r(r_k) \delta(r-r_k) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r_{k+1} D_N(r_{k+1})} \frac{dD_N}{dr} \Big|_{r=r_{k+1}} N_r(r_{k+1}) \delta(r-r_{k+1}) \right].$$

Используя метод частичной дискретизации, определяем общее решение дифференциального уравнения (2.6)

$$\mathcal{G}_r(r) = C_3 \int e^{-\int \Phi(r) dr} dr + C_4 + \\ + \int e^{-\int \Phi(r) dr} \left(\int [\varphi(r) + v(r) + \theta(r)] e^{\int \Phi(r) dr} dr \right) dr, \quad (2.14)$$

где

$$\Phi(r) = \frac{1}{r} + \frac{1}{D_M} \frac{dD_M}{dr}, \quad v(r) = \frac{1+v}{D_M} \frac{d(\chi_T D_M)}{dr},$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{r_k^2} - \frac{v}{r_k D_M(r_k)} \frac{dD_M}{dr} \Big|_{r=r_k} \right) \mathcal{G}_r(r_k) \delta(r-r_k) - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{r_{k+1}^2} - \frac{v}{r_{k+1} D_M(r_{k+1})} \frac{dD_M}{dr} \Big|_{r=r_{k+1}} \right) \mathcal{G}_r(r_{k+1}) \delta(r-r_{k+1}) \right],$$

$$\theta(r) = \frac{1}{2} N_r(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{1}{D_M(r_k)} \mathcal{G}_r(r_k) \delta(r-r_k) - \frac{1}{D_M(r_{k+1})} \mathcal{G}_r(r_{k+1}) \delta(r-r_{k+1}) \right].$$

Изгибающие моменты M_r и M_θ согласно (2.9)-(2.10) с учетом выражения (2.14) примут вид

$$\begin{aligned}
 M_r = D_M & \left[C_3 e^{-\int \Phi(r) dr} + e^{-\int \Phi(r) dr} \left(\int [\varphi(r) + \nu(r) + \theta(r)] \times \right. \right. \\
 & \times e^{\int \Phi(r) dr} dr \Big) + \frac{\nu}{r} \left\{ C_4 + C_3 \int e^{-\int \Phi(r) dr} dr + \int e^{-\int \Phi(r) dr} \times \right. \\
 & \times \left(\int [\varphi(r) + \nu(r) + \theta(r)] e^{\int \Phi(r) dr} dr \right) dr \Big\} - (1 + \nu) \chi_T \Big], \quad (2.15) \\
 M_\theta = D_M & \left[\nu C_3 e^{-\int \Phi(r) dr} + \nu e^{-\int \Phi(r) dr} \left(\int [\varphi(r) + \nu(r) + \theta(r)] \times \right. \right. \\
 & \times e^{\int \Phi(r) dr} dr \Big) + \frac{I}{r} \left\{ C_4 + C_3 \int e^{-\int \Phi(r) dr} dr + \int e^{-\int \Phi(r) dr} \times \right. \\
 & \times \left(\int [\varphi(r) + \nu(r) + \theta(r)] e^{\int \Phi(r) dr} dr \right) dr \Big\} - (1 + \nu) \chi_T \Big].
 \end{aligned}$$

Исследуем решение задачи, когда влияние растяжения пластины на ее изгиб незначительное. В этом случае рассматриваемая задача распадается на две независимые задачи: об осесимметричном плоском напряженном состоянии пластины, вызванном чисто тепловой деформацией ε_T , и об осесимметричном тепловом изгибе пластины, обусловленном чисто тепловой деформацией χ_T . Первая задача описывается уравнением (2.5). Разрешающее уравнение второй задачи относительно $\mathcal{G}_r$ получаем из (2.6), отбрасывая

член $-\frac{I}{D_M} N_r \mathcal{G}_r$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathfrak{G}_r}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D_M} \frac{dD_M}{dr} \right) \frac{d\mathfrak{G}_r}{dr} + \left(\frac{\nu}{rD_M} \frac{dD_M}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \mathfrak{G}_r - \\ - \frac{1+\nu}{D_M} \frac{d(\chi_T D_M)}{dr} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Найдем решение дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (2.16). Для этого применим метод частичной дискретизации дифференциальных уравнений. Общее решение уравнения (2.16) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_r(r) = C_3 \xi(r) + C_4 + \frac{1}{2} \xi(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [P_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \\ - P_0(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\xi(r_k) P_0(r_k) \times \\ \times \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \xi(r_{k+1}) P_0(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + R(r), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} \xi(r) = \int \frac{dr}{rD_M(r)}, \quad P_0(r) = \frac{D_M(r)}{r} - \nu \frac{dD_M(r)}{dr}, \\ R(r) = (1+\nu) \int \frac{1}{rD_M(r)} \left[\int r \frac{d(\chi_T D_M)}{dr} dr \right] dr. \end{aligned}$$

Рассмотрим кольцевую пластину постоянной толщины, жестко заделанную по внешнему контуру и подвергающуюся действиям изгибающего момента по внутреннему контуру. Граничные условия задачи примут вид:

$$\mathfrak{G}_r|_{r=b} = 0, \quad M_r|_{r=a} = M, \quad \omega|_{r=b} = 0, \quad (2.18)$$

где a - радиус внутреннего контура пластины, b - радиус внешнего контура пластины.

Изгибающий момент M_r определяется из (2.9) при учете (2.17):

$$\begin{aligned}
 M_r = D_M & \left[C_3 \left(\frac{d\xi}{dr} + \nu \frac{\xi}{r} \right) + \frac{\nu}{r} C_4 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{dr} + \nu \frac{\xi}{r} \right) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \right. \\
 & \times [P_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - P_0(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \\
 & - \frac{\nu}{2r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\xi(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \xi(r_{k+1}) P_0(r_{k+1}) \times \\
 & \times \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \frac{dR}{dr} + \nu \frac{R(r)}{r} - (1 + \nu) \chi_T \left. \right].
 \end{aligned}$$

С учетом условий (2.18) решение уравнения (2.13) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{G}_r(r) = Bw(r) + \frac{\nu}{2a} w(r) & \left[\xi(b) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [P_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) - P_0(r_{k+1}) \times \right. \\
 & \times \mathfrak{G}_r(r_{k+1})] - \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\xi(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) - \xi(r_{k+1}) P_0(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1})] \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \xi(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [P_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - P_0(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) \times \\
 & \times H(r - r_{k+1})] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\xi(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \\
 & - \xi(r_{k+1}) P_0(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \frac{1}{2} \xi(b) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [P_0(r_k)g_r(r_k) - P_0(r_{k+1})g_r(r_{k+1})] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\xi(r_k)P_0(r_k) \times \\
& \times g_r(r_k) - \xi(r_{k+1})P_0(r_{k+1})g_r(r_{k+1})] + R(r) - R(b). \tag{2.19}
\end{aligned}$$

При этом аналитическое выражение угла поворота нормали в точках r_k ($k = \overline{1, n}$) определяется следующим образом

$$\begin{aligned}
g_r(r_1) &= \frac{Bw(r_1) + R(r_1) - R(b)}{1 + \frac{(r_1 + r_2)}{2} P_0(r_1) (\xi(b) - \xi(r_1)) \left[1 - \frac{\nu}{a} w(r_1) \right]}, \\
g_r(r_k) &= \frac{1}{1 + \frac{(r_{k+1} - r_{k-1})}{2} P_0(r_k) (\xi(b) - \xi(r_k)) \left[1 - \frac{\nu}{a} w(r_k) \right]} \{ Bw(r_k) + \\
& + R(r_k) - R(b) - \left(1 - \frac{\nu}{a} w(r_k) \right) \left[\frac{(r_1 + r_2)}{2} P_0(r_1) (\xi(b) - \xi(r_1)) g_r(r_1) + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) P_0(r_j) [\xi(b) - \xi(r_j)] g_r(r_j) \right] + \frac{(r_1 + r_2)}{2} P_0(r_1) \times \\
& \times [\xi(r_k) - \xi(r_1)] g_r(r_1) + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) P_0(r_j) (\xi(r_k) - \xi(r_j)) g_r(r_j) \},
\end{aligned}$$

$$B = \frac{M}{D_M(a)} - \frac{dR}{dr} \Big|_{r=a} + \frac{\nu}{a} (R(b) - R(a)) + (1 + \nu) \chi_T(a),$$

$$w(r) = \frac{\xi(r) - \xi(b)}{\frac{d\xi}{dr} \Big|_{r=a} + \frac{\nu}{a} (\xi(a) - \xi(b))}.$$

Интегрируя выражение (2.19), получим прогиб пластины

$$\begin{aligned}
\omega(r) = & A(W(b) - W(r)) - \left[b - r - \frac{v}{a}(W(b) - W(r)) \right] \left\{ \frac{1}{2} \xi(b) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \right. \\
& \times [P_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - P_0(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\xi(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - \\
& - \xi(r_{k+1}) P_0(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] \} - \frac{1}{2} \zeta(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [P_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \\
& - P_0(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\zeta(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) \times \\
& \times H(r - r_k) - \zeta(r_{k+1}) P_0(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \frac{1}{2} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times [\xi(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \xi(r_{k+1}) P_0(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \xi(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \xi(r_{k+1}) P_0(r_{k+1}) \times \\
& \times \mathfrak{g}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \frac{1}{2} \zeta(b) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [P_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - P_0(r_{k+1}) \times \\
& \times \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\zeta(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - \zeta(r_{k+1}) P_0(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] - \\
& - \frac{1}{2} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\xi(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - \xi(r_{k+1}) P_0(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] + \\
& \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \xi(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+1} \xi(r_{k+1}) P_0(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] + \\
& + V(b) - V(r) + (r - b)R(b),
\end{aligned}$$

где

$$W(r) = \int w(r)dr, \quad \zeta(r) = \int \xi(r)dr, \quad V(r) = \int R(r)dr.$$

Задача об изгибе неоднородной круглой пластины без учета влияния растяжения на изгиб сводится к дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами (2.16). Для определения решения этого уравнения применяется метод частичной дискретизации.

Теперь рассмотрим задачу о растяжении неоднородной пластины в неравномерном температурном поле. В этом случае дифференциальное уравнение равновесия имеет вид (1.123)

Относительно нормального усилия N_r , действующего в цилиндрическом сечении, уравнение равновесия будет (2.5). После применения метода частичной дискретизации дифференциальных уравнений, получим общее решение уравнения (2.5):

$$\begin{aligned} N_r(r) = & C_1 f(r) + C_2 + \frac{1-\nu}{2} f(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [D_0(r_k) N_r(r_k) H(r - r_k) - \\ & - D_0(r_{k+1}) N_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \frac{1-\nu}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [f(r_k) D_0(r_k) \times \\ & \times N_r(r_k) H(r - r_k) - f(r_{k+1}) D_0(r_{k+1}) N_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + G(r), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$f(r) = \int \frac{D_N(r)}{r^3} dr, \quad D_0(r) = \frac{r^2}{D_N^2(r)} \frac{dD_N(r)}{dr},$$

$$G(r) = -(1-\nu^2) \int \frac{D_N(r)}{r^3} \left[\int r^2 \frac{d\varepsilon_T}{dr} dr \right] dr.$$

Рассмотрим осесимметричное растяжение круглой пластины с отверстием при следующих граничных условиях:

$$N_r|_{r=a} = N, \quad N_r|_{r=b} = 0. \quad (2.21)$$

Совместное рассмотрение уравнения (2.5) с условиями (2.21) дает

$$\begin{aligned} N_r(r) = & \psi(r) \left(N + G(b) - G(a) + \frac{I-\nu}{2} f(b) \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) [D_0(r_k) N_r(r_k) - \right. \\ & \left. - D_0(r_{k+l}) N_r(r_{k+l})] - \frac{I-\nu}{2} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) [f(r_k) D_0(r_k) N_r(r_k) - f(r_{k+l}) \times \right. \\ & \left. \times D_0(r_{k+l}) N_r(r_{k+l})] + \frac{I-\nu}{2} f(r) \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) [D_0(r_k) N_r(r_k) H(r - r_k) - \right. \\ & \left. - D_0(r_{k+l}) N_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] - \frac{I-\nu}{2} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) [f(r_k) D_0(r_k) N_r(r_k) \times \right. \\ & \left. \times H(r - r_k) - f(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) N_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] + N + G(r) - G(a), \quad (2.22) \right) \end{aligned}$$

где

$$N_r(r_l) = \frac{A\psi(r_l) + N + G(r_l) - G(a)}{I - \frac{I-\nu}{2} (r_l + r_2) \psi(r_l) D_0(r_l) [f(b) - f(r_l)]},$$

$$N_r(r_k) = \frac{I}{I - \frac{I-\nu}{2} (r_{k+l} - r_{k-l}) \psi(r_k) D_0(r_k) [f(b) - f(r_k)]} \times$$

$$\times \left\{ A\psi(r_k) + N + G(r_k) - G(a) + \frac{I-\nu}{2} \psi(r_k) [(r_l + r_2) D_0(r_l) \times \right.$$

$$\left. \times [f(b) - f(r_l)] N_r(r_l) + \sum_{j=2}^{k-l} (r_{j+l} - r_{j-l}) D_0(r_j) [f(b) - f(r_j)] N_r(r_j) \right\} +$$

$$+ \frac{1-\nu}{2}(r_1 + r_2)D_0(r_1)[f(r_k) - f(r_1)]N_r(r_1) + \frac{1-\nu}{2} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) \times \\ \times D_0(r_j)[f(r_k) - f(r_j)]N_r(r_j) \quad (k = \overline{2, n}),$$

$$A = N + G(b) - G(a), \quad \psi(r) = \frac{f(r) - f(a)}{f(a) - f(b)}.$$

Если усилие N_r велико, то необходимо в уравнении (2.6) сохранить член $-\frac{I}{D_N}N_r\vartheta_r$. Подставив выражение (2.20) в уравнение (2.6) и дискретизируя третий член уравнения (2.6), получим следующее выражение для угла поворота нормали

$$\vartheta_r(r) = C_3\xi(r) + C_4 + \frac{I}{2}\xi(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [P(r_k)\vartheta_r(r_k)H(r - r_k) - \\ - P(r_{k+1})\vartheta_r(r_{k+1})H(r - r_{k+1})] - \frac{I}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\xi(r_k)P(r_k)\vartheta_r(r_k) \times \\ \times H(r - r_k) - \xi(r_{k+1})P(r_{k+1})\vartheta_r(r_{k+1})H(r - r_{k+1})] + R(r), \quad (2.23)$$

где

$$P(r) = P_0(r) + F(r), \quad F(r) = r(C_1 f(r) + C_2 + G(r)).$$

Пусть кольцевая пластина постоянной толщины, жестко заделанная по внешнему контуру, подвергается действиям изгибающего момента M_r и радиального растяжения N_r по внутреннему контуру. Граничные условия в этом случае примут вид:

$$N_r|_{r=a} = N, \quad N_r|_{r=b} = 0, \quad \vartheta_r|_{r=b} = 0, \quad M_r|_{r=a} = M, \quad \omega|_{r=b} = 0. \quad (2.24)$$

Здесь изгибающий момент M_r определяется по формуле

$$\begin{aligned}
 M_r = D_M \left[C_3 \left(\frac{d\xi}{dr} + \nu \frac{\xi}{r} \right) + \frac{\nu}{r} C_4 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{dr} + \nu \frac{\xi}{r} \right) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \right] & \times \\
 & \times \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - P(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \Big] - \frac{\nu}{2r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
 & \times \left[\xi(r_k) P(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \xi(r_{k+1}) P(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \right] + \\
 & + \frac{dR}{dr} + \nu \frac{R(r)}{r} - (1 + \nu) \chi_T \Big]. \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

С учетом условий (2.24) окончательное решение уравнения (2.6) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{G}_r(r) = Bw(r) + \frac{\nu}{2a} w(r) \left[\xi(b) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \right] & \times \\
 & \times \left[P(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) - P(r_{k+1}) \times \right. \\
 & \times \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) \Big] - \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\xi(r_k) P(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) - \xi(r_{k+1}) P(r_{k+1}) \times \right. \\
 & \times \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) \Big] + \frac{1}{2} \xi(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[P(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - P(r_{k+1}) \times \right. \\
 & \times \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \Big] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\xi(r_k) P(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \right. \\
 & - \xi(r_{k+1}) P(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) \times \times H(r - r_{k+1}) \Big] - \frac{1}{2} \xi(b) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

$$\times [P(r_k)g_r(r_k) - P(r_{k+1})g_r(r_{k+1})] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\xi(r_k) \times \\ \times P(r_k)g_r(r_k) - \xi(r_{k+1})P(r_{k+1})g_r(r_{k+1})] + R(r) - R(b),$$

где

$$g_r(r_1) = \frac{Bw(r_1) + R(r_1) - R(b)}{1 + \frac{(r_1 + r_2)}{2} P(r_1) (\xi(b) - \xi(r_1)) \left[1 - \frac{\nu}{a} w(r_1) \right]},$$

$$g_r(r_k) = \frac{1}{1 + \frac{(r_{k+1} - r_{k-1})}{2} P(r_k) (\xi(b) - \xi(r_k)) \left[1 - \frac{\nu}{a} w(r_k) \right]} \{ Bw(r_k) + \\ + R(r_k) - R(b) - \left(1 - \frac{\nu}{a} w(r_k) \right) \left[\frac{(r_1 + r_2)}{2} P(r_1) (\xi(b) - \xi(r_1)) g_r(r_1) + \frac{1}{2} \times \right. \\ \times \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) P(r_j) [\xi(b) - \xi(r_j)] g_r(r_j) \left. \right] + \frac{(r_1 + r_2)}{2} P(r_1) [\xi(r_k) - \xi(r_1)] \times \\ \times g_r(r_1) + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) P(r_j) (\xi(r_k) - \xi(r_j)) g_r(r_j) \} \quad (k = \overline{2, n}).$$

Интегрирование выражения (2.26) совместно с условием (2.24) дает для прогиба пластины

$$\omega(r) = A(W(b) - W(r)) - \left[b - r - \frac{\nu}{a} (W(b) - W(r)) \right] \left\{ \frac{1}{2} \xi(b) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \right. \\ \times [P(r_k)g_r(r_k) - P(r_{k+1})g_r(r_{k+1})] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\xi(r_k)P(r_k)g_r(r_k) -$$

$$\begin{aligned}
& \times P(r_{k+l})\vartheta_r(r_{k+l})] \left\{ -\frac{I}{2}\zeta(r)\sum_{k=l}^n(r_k+r_{k+l})[P(r_k)\vartheta_r(r_k)H(r-r_k)-P(r_{k+l})\times \right. \\
& \times \vartheta_r(r_{k+l})H(r-r_{k+l})] + \frac{I}{2}\sum_{k=l}^n(r_k+r_{k+l})[\zeta(r_k)P(r_k)\vartheta_r(r_k)H(r-r_k)- \\
& - \zeta(r_{k+l})P(r_{k+l})\vartheta_r(r_{k+l})H(r-r_{k+l})] + \frac{I}{2}r\sum_{k=l}^n(r_k+r_{k+l})[\xi(r_k)P(r_k)\times \\
& \times \vartheta_r(r_k)H(r-r_k) - \xi(r_{k+l})P(r_{k+l})\vartheta_r(r_{k+l})H(r-r_{k+l})] - \frac{I}{2}\sum_{k=l}^n(r_k+r_{k+l})\times \\
& \times [r_k\xi(r_k)P(r_k)\vartheta_r(r_k)H(r-r_k) - r_{k+l}\xi(r_{k+l})P(r_{k+l})\vartheta_r(r_{k+l})H(r-r_{k+l})] + \\
& + \frac{I}{2}\zeta(b)\sum_{k=l}^n(r_k+r_{k+l})[P(r_k)\vartheta_r(r_k)-P(r_{k+l})\vartheta_r(r_{k+l})] - \frac{I}{2}\sum_{k=l}^n(r_k+r_{k+l})\times \\
& \times [\zeta(r_k)P(r_k)\vartheta_r(r_k) - \zeta(r_{k+l})P(r_{k+l})\vartheta_r(r_{k+l})] - \frac{I}{2}b\sum_{k=l}^n(r_k+r_{k+l})[\xi(r_k)P(r_k)\times \\
& \times \vartheta_r(r_k) - \xi(r_{k+l})P(r_{k+l})\vartheta_r(r_{k+l})] + \frac{I}{2}\sum_{k=l}^n(r_k+r_{k+l})[r_k\xi(r_k)P(r_k)\vartheta_r(r_k) - \\
& - r_{k+l}\xi(r_{k+l})P(r_{k+l})\vartheta_r(r_{k+l})] + V(b) - V(r) + (r-b)R(b). \tag{2.27}
\end{aligned}$$

В случае учета растяжения пластины на ее изгиб задача сводится к исследованию системы дифференциальных уравнений (2.5)-(2.6). Принимая во внимание решение уравнения (2.5), методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений определяем решение уравнения (2.6).

Для оценки влияния растяжения на изгиб в круглой пластине рассмотрим задачу об осесимметричном термоупругом напряженном состоянии круглой кольцевой неоднородной гибкой пластины

постоянной толщины [13]. Модуль упругости кольцевой пластины с внешним радиусом b и внутренним радиусом a изменяется по закону

$$E(r) = E_0 + E_1 \frac{r}{b}, \quad (2.28)$$

где $E_0 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $E_1 = 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $b = 1 \text{ м}$. Чисто тепловые деформации изменяются вдоль радиуса по законам

$$\varepsilon_T(r) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \frac{r}{b}, \quad \chi_T(r) = \frac{1}{h} \left(\mu_0 + \mu_1 \frac{r}{b} \right), \quad (2.29)$$

где $\varepsilon_0 = 0,00230942$, $\varepsilon_1 = -0,0028245$, $\mu_0 = 0,0040975$, $\mu_1 = 0,003231$.

Численные расчеты произведены для стальной пластины толщины $h = 0,1 \text{ м}$ и внутреннего радиуса $a = 0,2 \text{ м}$. Коэффициент Пуассона равен $\nu = 0,3$. Внутренний контур пластины растягивается усилием $N = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}$ и подвергается изгибающему моменту $M = 8 \cdot 10^7 \text{ Н}$.

Результаты расчетов выражены в виде графиков. Распределение по радиусу нормального усилия N_r , вычисленного по формуле (2.22), показано на рисунке 4. На рисунке 5 приведены сравнительные кривые изменения прогиба кольцевой пластины при учете влияния растяжения на изгиб и без учета этого влияния.

Осесимметричная деформация неоднородной гибкой круглой пластины в условиях неравномерного вдоль радиуса нагрева описывается системой дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, решение которых представляет математические трудности даже если не принимать во внимание влияния растяжения пластины на ее изгиб. На основе решения методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений проведено исследование влияния растяжения на изгиб в круглой пластине постоянной толщины.

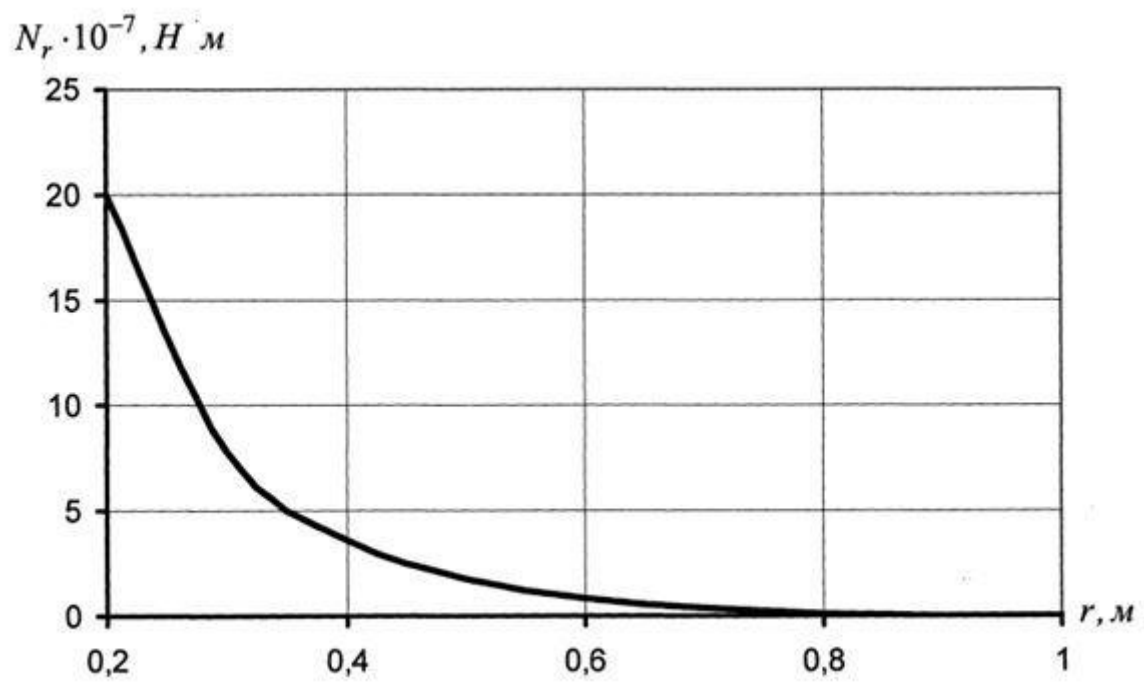


Рисунок 4 - Нормальное усилие для пластины с отверстием, подвергающейся неравномерному по радиусу нагреву и изгибающему моменту

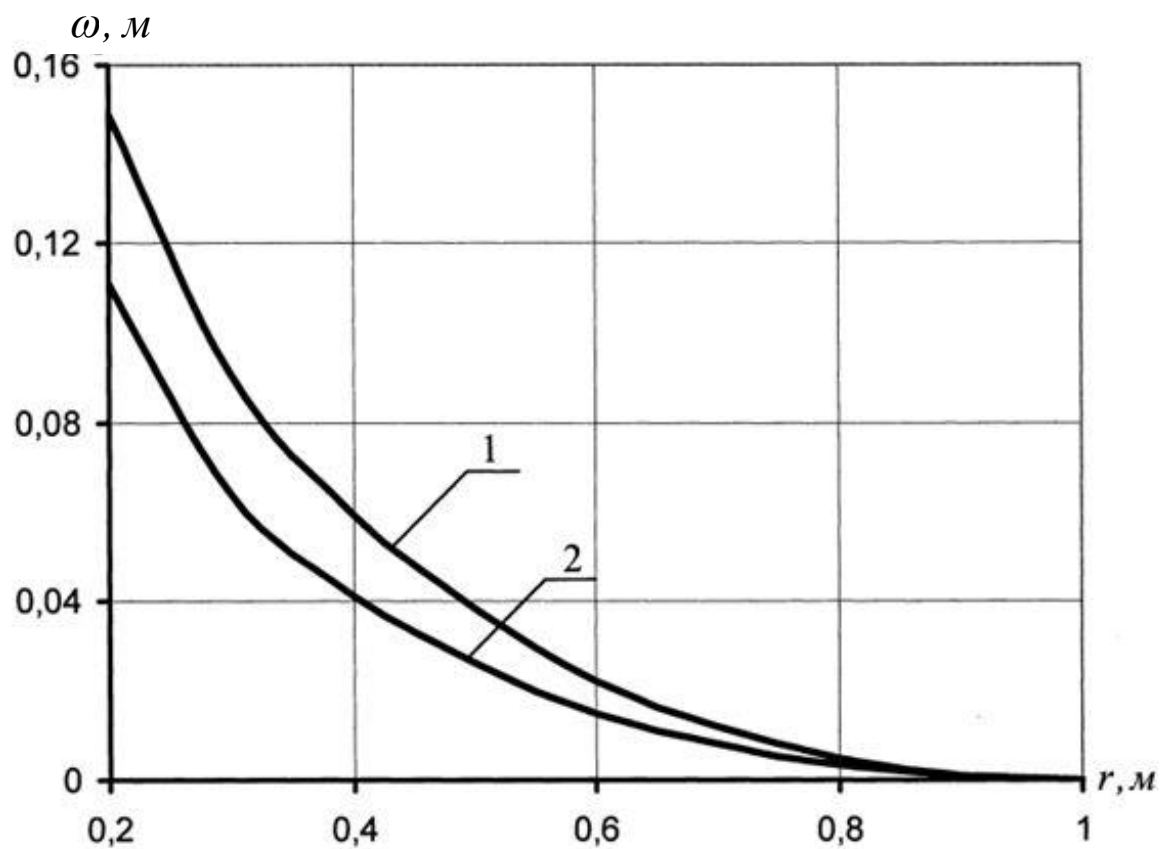


Рисунок 5 - Кривые изменения прогиба: 1 - без учета влияния растяжения пластины на ее изгиб; 2 - с учетом влияния растяжения пластины на изгиб.

2.2 Сложный изгиб неоднородных круглых пластин при изменении температуры по толщине

Рассмотрим задачу термоупругости неоднородных круглых пластин при осесимметричном температурном поле с учетом влияния растяжения на изгиб и изменения упругих свойств материала пластины по ее толщине.

Получим основные уравнения задачи о сложном изгибе неоднородной круглой пластины, подвергающейся действию распределенной поперечной нагрузки.

В случае осесимметричного температурного поля при $q_z \neq 0$, уравнения равновесия (1.8) - (1.12) примут вид

$$\frac{dN_r r}{dr} - N_\theta = 0, \quad (2.30)$$

$$rQ_r - rN_r \vartheta_r = -\int q_z r dr + C, \quad (2.31)$$

$$\frac{dM_r r}{dr} - M_\theta - Q_r r = 0, \quad (2.32)$$

где C - постоянная интегрирования, которая равна с точностью до постоянного множителя равнодействующей несамоуравновешенных (поперечных) контурных усилий.

Подставляя выражения (1.103) и (1.104) в первое уравнение совместности деформаций (1.96) и уравнение равновесия

$$\frac{dM_r r}{dr} - M_\theta - rN_r \vartheta_r + \int q_z r dr - C = 0, \quad (2.33)$$

вытекающее из уравнений (2.31) и (2.32), и используя формулы (1.92), (1.97) выражение для угла поворота ϑ_r , находим систему разрешающих уравнений задачи

$$a_{11}r \frac{d^3 F}{dr^3} + \left(r \frac{da_{11}}{dr} + a_{11} \right) \frac{d^2 F}{dr^2} + \left(\frac{da_{12}}{dr} - \frac{a_{11}}{r} \right) \frac{dF}{dr} + a_{13}r \frac{d^3 \omega}{dr^3} + \quad (2.33)$$

$$+ \left(r \frac{da_{13}}{dr} + a_{13} \right) \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \left(\frac{da_{14}}{dr} - \frac{a_{13}}{r} \right) \frac{d\omega}{dr} + r \frac{d}{dr} (a_{11} + a_{12}) N_T = 0 ,$$

$$a_{13}r \frac{d^3 F}{dr^3} + \left(r \frac{da_{13}}{dr} + a_{13} \right) \frac{d^2 F}{dr^2} + \left(\frac{da_{14}}{dr} - \frac{a_{13}}{r} \right) \frac{dF}{dr} + \quad (2.34)$$

$$+ a_{33}r \frac{d^3 \omega}{dr^3} + \left(r \frac{da_{33}}{dr} + a_{33} \right) \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \left(\frac{da_{34}}{dr} - \frac{a_{33}}{r} \right) \frac{d\omega}{dr} +$$

$$+ \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} + r \frac{d}{dr} [(a_{13} + a_{14}) N_T - M_T] + \int q_z r dr - C = 0 ,$$

где коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{33}, a_{34}$ определяются по формуле (1.105).

Если температурное поле изменяется только по толщине пластины, то

$$E = E(z), \quad \nu = \nu(z) .$$

Уравнения (2.33) и (2.34) в рассматриваемом случае превращаются в следующие:

$$a_{11}r \frac{d}{dr} \nabla^2 F + a_{13}r \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega = 0, \quad (2.35)$$

$$a_{13}r \frac{d}{dr} \nabla^2 F + a_{33}r \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega + \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} = - \int q_z r dr + C ,$$

где

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} .$$

Разрешая эти уравнения относительно $\frac{d}{dr}\nabla^2 F$ и $\frac{d}{dr}\nabla^2 \omega$ и учитывая выражения (1.105), получаем

$$r \frac{d}{dr} \nabla^2 F - \frac{D_{Nv}D - D_N D_v}{D_N D_M - D^2} \cdot \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} = \frac{D_{Nv}D - D_N D_v}{D_N D_M - D^2} (\int q_z r dr - C), \quad (2.36)$$

$$r \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega - \frac{D_N}{D_N D_M - D^2} \cdot \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} = \frac{D_N}{D_N D_M - D^2} (\int q_z r dr - C),$$

где

$$\begin{aligned} D_N &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} dz, & D_{Nv} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu^2(z)} dz, \\ D &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} z dz, & D_v &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu^2(z)} z dz, \\ D_M &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} z^2 dz, & D_{Mv} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu^2(z)} z^2 dz. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Сложный изгиб неоднородной гибкой круглой пластины, подвергающейся действию поперечной нагрузки, при изменении температуры по толщине пластины описывается системой связанных дифференциальных уравнений (2.35). Принято считать [3], что система уравнений (2.35) в случае учета влияния растяжения на изгиб не приводится к несвязанным уравнениям. На самом деле систему дифференциальных уравнений (2.35) можно привести к адекватной системе дифференциальных уравнений, каждое из которых включает только одну разрешающую функцию [14-16]. Для этого представим уравнения (2.36) в виде

$$r \frac{d}{dr} \nabla^2 F = \frac{D_{Nv}D - D_N D_v}{D_N D_M - D^2} \left(\frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} + \left(\int q_z r dr - C \right) \right), \quad (2.38)$$

$$r \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega = \frac{D_N}{D_N D_M - D^2} \left(\frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} + \left(\int q_z r dr - C \right) \right).$$

Вводя обозначения

$$A = \frac{D_{Nv}D - D_N D_v}{D_N D_M - D^2}, \quad B = \frac{D_N}{D_N D_M - D^2} \quad (2.39)$$

получим вместо системы (2.38) уравнения

$$r \frac{d}{dr} \nabla^2 F = A \left[\frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} + \left(\int q_z r dr - C \right) \right], \quad (2.40)$$

$$r \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega = B \left[\frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} + \left(\int q_z r dr - C \right) \right]. \quad (2.41)$$

Разделив уравнение (2.40) на (2.41), получим

$$r \frac{d}{dr} \nabla^2 F = \frac{A}{B} \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega$$

или

$$\frac{d}{dr} \nabla^2 \left(F - \frac{A}{B} \omega \right) = 0. \quad (2.42)$$

Решение этого уравнения дает выражение

$$F - \frac{A}{B} \omega = \frac{C_1 r^2}{4} + C_2 \ln r + C_0. \quad (2.43)$$

Подставим выражение (2.43) в уравнение (2.42) и, выражая ω из (2.43) и подставляя в уравнение (2.41), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^3 F}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} + \left(\frac{BC_1}{2} - \frac{1 - BC_2}{r^2} \right) \frac{dF}{dr} - \frac{B}{r} \left(\frac{dF}{dr} \right)^2 = \frac{A}{r} \left(\int q_z r dr - C \right), \quad (2.44)$$

$$\frac{d^3 \omega}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \omega}{dr^2} - \left(\frac{BC_1}{2} + \frac{1 + BC_2}{r^2} \right) \frac{d\omega}{dr} - \frac{A}{r} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 = \frac{B}{r} \left(\int q_z r dr - C \right). \quad (2.45)$$

Дифференциальные уравнения третьего порядка (2.44) - (2.45) относительно нормального усилия N_r , действующего в цилиндрическом сечении, и угла поворота нормали ϑ_r , определяемых при осесимметричном температурном поле соотношениями (2.4) переписутся в следующем виде

$$\frac{d^2 N_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dN_r}{dr} + \left(\frac{BC_1}{2} - \frac{BC_2}{r^2} \right) N_r - B N_r^2 = \frac{A}{r^2} \left(\int q_z r dr - C \right), \quad (2.46)$$

$$\frac{d^2 \vartheta_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta_r}{dr} - \left(\frac{BC_1}{2} + \frac{1 + BC_2}{r^2} \right) \vartheta_r + \frac{A}{r} \vartheta_r^2 = -\frac{B}{r} \left(\int q_z r dr - C \right). \quad (2.47)$$

Радиальное усилие и угол прогиба связаны соотношением

$$N_r = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} - \frac{A}{B} \cdot \frac{\vartheta_r}{r}. \quad (2.48)$$

Итак, вместо системы связанных дифференциальных уравнений (2.35) получаем несвязанные дифференциальные уравнения (2.44) и (2.45), описывающие осесимметричную деформацию неоднородной упругой круглой пластины при неравномерном по толщине пластины температурном поле. Постоянные интегрирования C_1 , C_2 определяются из граничных условий.

Задача термоупругости неоднородных круглых пластин при осесимметричном температурном поле с учетом влияния растяжения

на изгиб и изменения упругих свойств материала пластины по ее толщине сводится к исследованию дифференциальных уравнений с нелинейными членами (2.44)-(2.45) относительно функции напряжений F и прогиба срединной плоскости пластины ω или дифференциальных уравнений (2.46)-(2.47) относительно радиального усилия N_r и угла поворота ϑ_r . Точное решение таких уравнений существующим математическим аппаратом не представляется возможным.

Определим общее решение дифференциальных уравнений (2.46)-(2.47) методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений [17-18].

При исследовании задачи термоупругости неоднородных круглых пластин в условиях неравномерного вдоль толщины нагрева в данной постановке не обязательно решать оба уравнения: (2.46) и (2.47). Достаточно решить одно из этих уравнений. Например, можно найти решение дифференциального уравнения (2.47), тем самым, определив угол поворота нормали, затем по формуле (2.48) найти радиальное усилие.

Применение метода частичной дискретизации к дифференциальному уравнению (2.47) дает следующее выражение для общего решения уравнения

$$\begin{aligned} \vartheta_r(r) = & C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{A}{4} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \times \right. \\ & \times H(r - r_{k+1}) \left. \right] + \frac{BC_1}{8} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\vartheta_r(r_k) H(r - r_k) - \vartheta_r(r_{k+1}) \times \right. \\ & \times H(r - r_{k+1}) \left. \right] + \frac{BC_2}{4} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r(r_k)}{r_k^2} H(r - r_k) - \frac{\vartheta_r(r_{k+1})}{r_{k+1}^2} \times \right. \\ & \times H(r - r_{k+1}) \left. \right] + \frac{A}{4r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times H(r - r_{k+l})] - \frac{BC_1}{8r} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^2 \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l}^2 \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \times \right. \\
& \times H(r - r_{k+l})] - \frac{BC_2}{4r} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) [\mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \times \\
& \times H(r - r_{k+l})] - \frac{B}{2} r \int \frac{1}{r} (\int q_z r dr - C) dr + \frac{B}{2r} \int r (\int q_z r dr - C) dr.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Подставив выражение (2.49) в формулу (2.48), получим

$$\begin{aligned}
N_r(r) = & \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} - \frac{A}{B} \left\{ C_3 + \frac{C_4}{r^2} - \frac{A}{4} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \right. \right. \\
& - \frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+l})}{r_{k+l}} H(r - r_{k+l})] + \frac{BC_1}{8} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) [\mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \\
& - \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] + \frac{BC_2}{4} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[\frac{\mathfrak{g}_r(r_k)}{r_k^2} H(r - r_k) - \right. \\
& - \frac{\mathfrak{g}_r(r_{k+l})}{r_{k+l}^2} H(r - r_{k+l})] \left. \right] + \frac{A}{4r^2} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k \mathfrak{g}_r^2(r_k) H(r - r_k) - \right. \\
& - r_{k+l} \mathfrak{g}_r^2(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] - \frac{BC_1}{8r^2} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^2 \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \right. \\
& - r_{k+l}^2 \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] - \frac{BC_2}{4r^2} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) [\mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \\
& - \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] - \frac{B}{2} \int \frac{1}{r} (\int q_z r dr - C) dr + \frac{B}{2r^2} \int r (\int q_z r dr - C) dr \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Изгибающие моменты M_r и M_θ находим по формулам (1.104).
С учетом (1.92) и (1.96) получим

$$M_r = a_{13} \frac{d^2 F}{dr^2} + a_{14} \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - a_{33} \frac{d\vartheta_r}{dr} -$$

$$- a_{34} \frac{\vartheta_r}{r} + (a_{13} + a_{14})N_T - M_T, \quad (2.51)$$

$$M_\theta = a_{14} \frac{d^2 F}{dr^2} + a_{13} \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - a_{34} \frac{d\vartheta_r}{dr} -$$

$$- a_{33} \frac{\vartheta_r}{r} + (a_{13} + a_{14})N_T - M_T. \quad (2.52)$$

Выражая функцию напряжений F по формуле (2.43), определяя первую и вторую производные от функции F по r и затем подставляя в формулы (2.51) и (2.52), придем к соотношениям

$$M_r = (a_{13} + a_{14}) \frac{C_1}{2} - (a_{13} - a_{14}) \frac{C_2}{r^2} - \left(a_{33} + a_{13} \frac{A}{B} \right) \frac{d\vartheta_r}{dr} -$$

$$- \left(a_{34} + a_{14} \frac{A}{B} \right) \frac{\vartheta_r}{r} + (a_{13} + a_{14})N_T - M_T, \quad (2.53)$$

$$M_\theta = (a_{13} + a_{14}) \frac{C_1}{2} + (a_{13} - a_{14}) \frac{C_2}{r^2} - \left(a_{34} + a_{14} \frac{A}{B} \right) \frac{d\vartheta_r}{dr} -$$

$$- \left(a_{33} + a_{13} \frac{A}{B} \right) \frac{\vartheta_r}{r} + (a_{13} + a_{14})N_T - M_T. \quad (2.54)$$

Учитывая формулы (1.105) и выражение (2.49), получим

$$M_r = \frac{D + D_\nu}{D_N + D_{N\nu}} \frac{C_1}{2} + \frac{D - D_\nu}{D_N - D_{N\nu}} \frac{C_2}{r^2} + \left(D_M - \frac{D^2}{D_N} \right) \left\{ C_3 - \frac{C_4}{r^2} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{BC_1}{8} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \mathfrak{g}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \\
& + \frac{BC_2}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathfrak{g}_r(r_k)}{r_k^2} H(r - r_k) - \frac{\mathfrak{g}_r(r_{k+1})}{r_{k+1}^2} H(r - r_{k+1}) \right] - \\
& - \frac{A}{4r^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \mathfrak{g}_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \mathfrak{g}_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \\
& + \frac{BC_1}{8r^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k^2 \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1}^2 \mathfrak{g}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \\
& + \frac{BC_2}{4r^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \mathfrak{g}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \\
& - \frac{B}{2} \int \frac{1}{r} (\int q_z r dr - C) dr - \frac{B}{2} q_z (\int q_z r dr - C) + \frac{B}{2r^2} (\int q_z r dr - C)^2 \Big\} + \\
& + \left(D_{Mv} - \frac{DD_v}{D_N} \right) \left\{ C_3 + \frac{C_4}{r^2} - \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right] + \frac{BC_1}{8} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \right. \\
& \left. - \mathfrak{g}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \frac{BC_2}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathfrak{g}_r(r_k)}{r_k^2} H(r - r_k) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mathfrak{g}_r(r_{k+1})}{r_{k+1}^2}H(r-r_{k+1})\Bigg]+\frac{A}{4r^2}\sum_{k=1}^n(r_k+r_{k+1})\Bigg[r_k\mathfrak{g}_r^2(r_k)H(r-r_k)- \\
& -r_{k+1}\mathfrak{g}_r^2(r_{k+1})H(r-r_{k+1})\Bigg]-\frac{BC_1}{8r^2}\sum_{k=1}^n(r_k+r_{k+1})\Bigg[r_k^2\mathfrak{g}_r(r_k)H(r-r_k)- \\
& -r_{k+1}^2\mathfrak{g}_r(r_{k+1})H(r-r_{k+1})\Bigg]-\frac{BC_2}{4r^2}\sum_{k=1}^n(r_k+r_{k+1})\Bigg[\mathfrak{g}_r(r_k)H(r-r_k)- \\
& -\mathfrak{g}_r(r_{k+1})H(r-r_{k+1})\Bigg]-\frac{B}{2r^2}\int r\left(\int q_z r dr-C\right)dr+\frac{B}{2}q_z r^2\left(\int q_z r dr-C\right)+ \\
& +\frac{B}{2}\left(\int q_z r dr-C\right)^2\Bigg\}+\frac{D+D_v}{D_N+D_{Nv}}N_T-M_T, \tag{2.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_\theta &= \frac{D+D_v}{D_N+D_{Nv}}\frac{C_1}{2}+\frac{D-D_v}{D_N-D_{Nv}}\frac{C_2}{r^2}+\left(D_{Mv}-\frac{DD_v}{D_N}\right)\left\{C_3-\frac{C_4}{r^2}-\right. \\
& -\frac{A}{4}\sum_{k=1}^n(r_k+r_{k+1})\left[\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_k)}{r_k}H(r-r_k)-\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}}H(r-r_{k+1})\right]+\frac{BC_1}{8}\times \\
& \times\sum_{k=1}^n(r_k+r_{k+1})\left[\mathfrak{g}_r(r_k)H(r-r_k)-\mathfrak{g}_r(r_{k+1})H(r-r_{k+1})\right]+\frac{BC_2}{4}\times \\
& \times\sum_{k=1}^n(r_k+r_{k+1})\left[\frac{\mathfrak{g}_r(r_k)}{r_k^2}H(r-r_k)-\frac{\mathfrak{g}_r(r_{k+1})}{r_{k+1}^2}H(r-r_{k+1})\right]-\frac{A}{4r^2}\times \\
& \times\sum_{k=1}^n(r_k+r_{k+1})\left[r_k\mathfrak{g}_r^2(r_k)H(r-r_k)-r_{k+1}\mathfrak{g}_r^2(r_{k+1})H(r-r_{k+1})\right]+\frac{BC_1}{8r^2}\times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^2 \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l}^2 \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \right] + \frac{BC_2}{4r^2} \times \\
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[\mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \right] - \frac{B}{2} \int \frac{1}{r} (\int q_z r dr - C) dr - \\
& - \frac{B}{2} q_z (\int q_z r dr - C) + \frac{B}{2r^2} (\int q_z r dr - C)^2 \left\} + \left(D_M - \frac{D^2}{D_N} \right) \left\{ C_3 + \frac{C_4}{r^2} - \right. \\
& - \frac{A}{4} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+l})}{r_{k+l}} H(r - r_{k+l}) \right] + \frac{BC_1}{8} \times \\
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[\mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \right] + \frac{BC_2}{4} \times \\
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[\frac{\mathfrak{g}_r(r_k)}{r_k^2} H(r - r_k) - \frac{\mathfrak{g}_r(r_{k+l})}{r_{k+l}^2} H(r - r_{k+l}) \right] + \frac{A}{4r^2} \times \\
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k \mathfrak{g}_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l} \mathfrak{g}_r^2(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \right] - \quad (2.56) \\
& - \frac{BC_1}{8r^2} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^2 \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l}^2 \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \right] - \\
& - \frac{BC_2}{4r^2} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[\mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \right] - \frac{B}{2r^2} \times \\
& \times \int r (\int q_z r dr - C) dr + \frac{B}{2} q_z r^2 (\int q_z r dr - C) + \frac{B}{2} (\int q_z r dr - C)^2 \left\} + \frac{D + D_V}{D_N + D_{N_V}} N_T - M_T.
\end{aligned}$$

Метод частичной дискретизации дифференциальных уравнений позволяет найти решение уравнений (2.44)-(2.45) практически для любых законов изменения модуля упругости и коэффициента

Пуассона. Для определения частных решений дифференциальных уравнений (2.44)-(2.45) достаточно рассмотреть пять граничных условий.

Ниже рассмотрим некоторые примеры решения задач термоупругости неоднородных круглых пластин с отверстием при изменении температуры по толщине пластины.

Рассмотрим кольцевую пластину постоянной толщины, внешний контур которой жестко заделан, а внутренний контур может смещаться в направлении оси пластины, но при этом не поворачивается [19] действует произвольная поперечная нагрузка. Контур пластины свободны от радиальных усилий. Тогда постоянные C_1 , C_2 определяются из следующих граничных условий

$$N_r|_{r=a} = 0, \quad N_r|_{r=b} = 0, \quad \vartheta_r|_{r=a} = 0, \quad \vartheta_r|_{r=b} = 0. \quad (2.57)$$

Постоянная C_0 не оказывает влияния на напряженное состояние пластины. Согласно условиям (2.57) постоянные C_1 и C_2 будут равны нулю.

Получим аналитическое решение задачи (2.46)-(2.48) методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений. Дифференциальное уравнение (2.47) с учетом значений C_1 , C_2 тогда примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vartheta_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \vartheta_r}{dr} - \frac{\vartheta_r}{r^2} = & -\frac{A}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} \delta(r - r_k) - \right. \\ & \left. - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \delta(r - r_{k+1}) \right] - \frac{B}{r} (\int q_z r dr - C), \end{aligned} \quad (2.58)$$

где $\delta(r - r_k)$ - дельта-функция Дирака.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\vartheta_r(r) = C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{A}{4} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}}H(r-r_{k+1})\Bigg] + \frac{A}{4r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \Bigg[r_k \mathfrak{g}_r^2(r_k) \times \\
& \times H(r-r_k) - r_{k+1} \mathfrak{g}_r^2(r_{k+1}) H(r-r_{k+1}) \Bigg] - \frac{1}{2} r \int \frac{B}{r} \left(\int q_z r dr - \right. \\
& \left. - C \right) dr + \frac{1}{2r} \int B \left(\int q_z r dr - C \right) r dr.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Проинтегрировав последнее выражение, найдем для прогиба

$$\begin{aligned}
\omega(r) = & -\frac{C_3 r^2}{2} - C_4 \ln r + \frac{A}{8} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \Bigg[\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_k)}{r_k} H(r-r_k) - \\
& - \frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r-r_{k+1}) \Bigg] + \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \Bigg[r_k \ln r_k \mathfrak{g}_r^2(r_k) \times \\
& \times H(r-r_k) - r_{k+1} \ln r_{k+1} \mathfrak{g}_r^2(r_{k+1}) H(r-r_{k+1}) \Bigg] - \frac{A}{4} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \times \\
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \Bigg[r_k \mathfrak{g}_r^2(r_k) H(r-r_k) - r_{k+1} \mathfrak{g}_r^2(r_{k+1}) H(r-r_{k+1}) \Bigg] + \\
& + \frac{1}{2} \int r \left[\int \frac{B}{r} \left(\int q_z r dr - C \right) dr \right] dr - \frac{1}{2} \int \frac{1}{r} \left[\int B \left(\int q_z r dr - C \right) r dr \right] dr + C_5.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Постоянная C_5 определяется из условия жесткой заделки внешнего контура пластины

$$\omega|_{r=b} = 0. \tag{2.61}$$

С учетом значений C_1 , C_2 соотношение (2.48) примет вид

$$N_r = -\frac{A}{B} \cdot \frac{\vartheta_r}{r}. \quad (2.62)$$

Подставив в (2.62) выражение (2.59), получим

$$\begin{aligned} N_r(r) = & -\frac{A}{B} \left\{ C_3 + \frac{C_4}{r^2} - \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \times \right. \right. \\ & \times H(r - r_{k+1}) \left. \right] + \frac{A}{4r^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) \times \right. \\ & \times H(r - r_{k+1}) \left. \right] - \frac{1}{2} \int \frac{B}{r} (\int q_z r dr - C) dr + \frac{1}{2r^2} \int B (\int q_z r dr - C) r dr \left. \right\}. \quad (2.63) \end{aligned}$$

С помощью метода частичной дискретизации дифференциальных уравнений получены выражения для прогиба и угла поворота нормали неоднородной круглой пластины, свободной от радиальных усилий на контурах при произвольном распределении поперечной нагрузки.

Рассмотрим различные случаи распределения поперечной нагрузки.

Пусть поперечная нагрузка распределена равномерно по всей поверхности пластины с интенсивностью q . Принимая во внимание условия (2.57) и считая, что на внутреннем контуре равномерно нагруженной пластины отсутствуют поперечные усилия, получим из (2.31)

$$C = \frac{qa^2}{2}. \quad (2.64)$$

С учетом значения постоянной C уравнение (2.47) примет вид

$$\frac{d^2 \vartheta_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta_r}{dr} - \frac{\vartheta_r}{r^2} + \frac{A}{r} \vartheta_r^2 = -\frac{Bqr}{2} + \frac{Bqa^2}{2r}. \quad (2.65)$$

Для определения решения нелинейного дифференциального уравнения (2.65) используем метод частичной дискретизации дифференциальных уравнений [17]. В соответствии с этим методом общее решение уравнения (2.65) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_r(r) = & C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{A}{4} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathcal{G}_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \right. \\ & \left. - \frac{\mathcal{G}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \times H(r - r_{k+1}) \right] + \frac{A}{4r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \mathcal{G}_r^2(r_k) H(r - r_k) - \right. \\ & \left. - r_{k+1} \mathcal{G}_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \right] - \frac{Bqr^3}{16} + \frac{Bqa^2}{4} r \left(\ln r - \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.66)$$

где $H(r - r_k)$ - единичная функция Хевисайда.

С учетом граничных условий (2.57) окончательное решение уравнения (2.66) примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_r(r) = & -\frac{Bqr(r^2 - a^2)}{16} - \frac{b(r^2 - a^2)}{r(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \mathcal{G}_r^2(r_k) - \right. \right. \\ & \left. - r_{k+1} \mathcal{G}_r^2(r_{k+1}) \right] - \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathcal{G}_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\mathcal{G}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \\ & \left. - \frac{Bqb(b^2 - a^2)}{16} + \frac{Bqba^2}{4} \ln \frac{b}{a} \right\} + \frac{A}{4r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \mathcal{G}_r^2(r_k) \times \right. \\ & \left. \times H(r - r_k) - r_{k+1} \mathcal{G}_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \right] - \frac{A}{4} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\times \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r-r_k) - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r-r_{k+1}) \right] + \frac{Bqa^2}{4} r \ln \frac{r}{a}.$$

При этом аналитическое выражение угла поворота в точках r_k ($k = \overline{1, n}$) определяется следующим образом

$$\vartheta_r(r_1) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - A(r_1 + r_2) \left(\frac{r_1}{b} - \frac{b}{r_1} \right) f(r_1) [Lf(r_1) - \psi(r_1)]}}{\frac{A}{2} (r_1 + r_2) \left(\frac{r_1}{b} - \frac{b}{r_1} \right) f(r_1)},$$

$$\vartheta_r(r_k) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - A(r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{r_k}{b} - \frac{b}{r_k} \right) f(r_k) G}}{\frac{A}{2} (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{r_k}{b} - \frac{b}{r_k} \right) f(r_k)},$$

где

$$\psi(r_k) = -\frac{Bqr_k(r_k^2 - a^2)}{16} + \frac{Bqa^2}{4} r_k \ln \frac{r_k}{a},$$

$$L = -\frac{Bqb(b^2 - a^2)}{16} + \frac{Bqba^2}{4} \ln \frac{b}{a}, \quad f(r_k) = \frac{b(r_k^2 - a^2)}{r_k(b^2 - a^2)},$$

$$\begin{aligned} G = & Lf(r_k) - \psi(r_k) + \frac{A}{4} (r_1 + r_2) \left(\frac{r_1}{b} - \frac{b}{r_1} \right) f(r_k) \vartheta_r^2(r_1) - \\ & - \frac{A}{4} (r_1 + r_2) \left(\frac{r_1}{r_k} - \frac{r_k}{r_1} \right) \vartheta_r^2(r_1) + \frac{A}{4} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) f(r_k) \times \\ & \times \left(\frac{r_j}{b} - \frac{b}{r_j} \right) \vartheta_r^2(r_j) - \frac{A}{4} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) \left(\frac{r_j}{r_k} - \frac{r_k}{r_j} \right) \vartheta_r^2(r_j). \end{aligned}$$

Прогиб ω срединной плоскости кольцевой пластины, равномерно нагруженной по всей поверхности, будет равен

$$\begin{aligned}
 \omega(r) = & \frac{Bq(b^4 - r^4)}{64} - \frac{Bqa^2(b^2 - r^2)}{32} - \left(\frac{b}{b^2 - a^2} \right) \left(a^2 \ln \frac{r}{b} + \frac{b^2 - r^2}{2} \right) \times \\
 & \times \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \mathfrak{G}_r^2(r_k) - r_{k+1} \mathfrak{G}_r^2(r_{k+1})] - \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \right. \\
 & \times \left[\frac{\mathfrak{G}_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\mathfrak{G}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \frac{Bqb(b^2 - a^2)}{16} + \frac{Bqba^2}{4} \ln \frac{b}{a} \left. \right\} - \frac{A}{4} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \mathfrak{G}_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \mathfrak{G}_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \\
 & + \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \ln r_k \mathfrak{G}_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \ln r_{k+1} \mathfrak{G}_r^2(r_{k+1}) \times \\
 & \times H(r - r_{k+1})] + \frac{A}{8} r^2 \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathfrak{G}_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\mathfrak{G}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \times \right. \\
 & \times H(r - r_{k+1}) \left. \right] + \frac{A}{4} \left(\ln b + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times [r_k \mathfrak{G}_r^2(r_k) - r_{k+1} \times \\
 & \times \mathfrak{G}_r^2(r_{k+1})] - \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \ln r_k \mathfrak{G}_r^2(r_k) - r_{k+1} \ln r_{k+1} \mathfrak{G}_r^2(r_{k+1})] - \\
 & - \frac{A}{8} b^2 \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathfrak{G}_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\mathfrak{G}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \frac{Bqa^2}{8} \left(r^2 \ln \frac{r}{a} - b^2 \ln \frac{b}{a} \right). \quad (2.68)
 \end{aligned}$$

Радиальное усилие определяется по формуле (2.62) при учете выражения для угла поворота (2.67)

$$\begin{aligned}
N_r = & \frac{Aq(r^2 - a^2)}{16} + \frac{A}{B} \frac{b(r^2 - a^2)}{r^2(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \mathfrak{g}_r^2(r_k) - \right. \right. \\
& \left. \left. - r_{k+1} \mathfrak{g}_r^2(r_{k+1}) \right] \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{Bqb(b^2 - a^2)}{16} + \frac{Bqba^2}{4} \ln \frac{b}{a} \right\} - \frac{A^2}{4Br^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[r_k \mathfrak{g}_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \mathfrak{g}_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \right] + \frac{A^2}{4B} \times \\
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right] - \\
& - \frac{Aqa^2}{4} \ln \frac{r}{a} .
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Произведем численные расчеты для случая линейного закона изменения модуля упругости и коэффициента Пуассона по толщине пластины

$$E(z) = E_0 + E_1 \frac{z}{h}, \quad \nu(z) = \nu_0 + \nu_1 \frac{z}{h}$$

при следующих значениях параметров и постоянных: толщина пластины $h = 0,1$ м, радиус внутреннего контура пластины $a = 0,2$ м, радиус внешнего контура $b = 1$ м, интенсивности нагрузки $q_1 = 1,7 \cdot 10^8$ Н/м, $q_2 = 3 \cdot 10^8$ Н/м, постоянные $\nu_0 = 0,3$, $\nu_1 = 0,1$, $E_0 = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $E_1 = 10^{10}$ Н/м².

На рисунках 6 и 7 показаны графики изменения угла поворота нормали и прогиба для двух значений интенсивности нагрузки q .

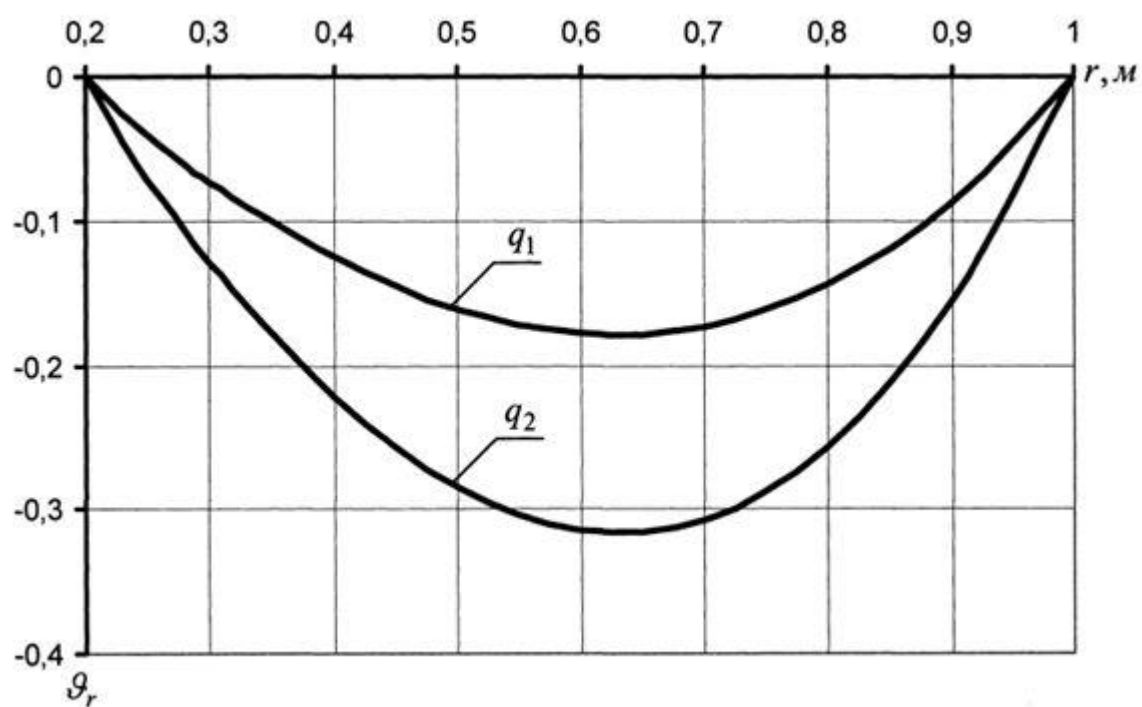


Рисунок 6 - Кривые изменения угла поворота для пластины, подвергающейся неравномерному по толщине нагреву и равномерной поперечной нагрузке, при различных значениях q .

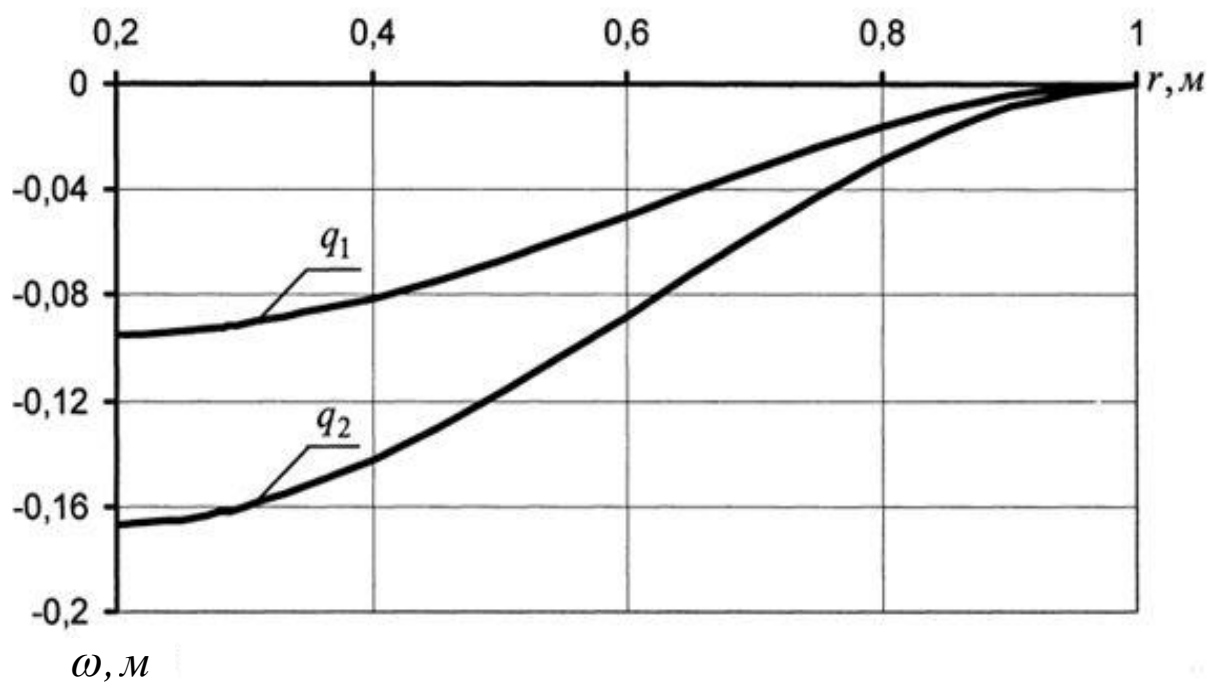


Рисунок 7 - Кривые изменения прогиба для пластины, подвергающейся неравномерному по толщине нагреву и действию равномерной поперечной нагрузки, при различных значениях q .

Если влияние растяжения на изгиб не учитывать, система уравнений (2.35) становится линейной и получение ее аналитического решения не представляет особого труда. Учет же этого влияния приводит к рассмотрению связанной системы разрешающих уравнений с нелинейными членами (2.35), получение аналитического решения которой существующим математическим аппаратом не представлялось возможным.

В настоящей работе удалось расщепить систему (2.35) на два адекватных ей, несвязанных нелинейных уравнений (2.44)-(2.45), и, применяя метод частичной дискретизации, получить решение, удовлетворяющее системе уравнений (2.35) и граничным условиям (2.57).

Теперь обратимся к случаю нагрузки, распределенной по площади кольца радиуса c и ширины cd . Постоянная интегрирования C в этом случае будет равна нулю. Окончательное решение уравнения (2.58), удовлетворяющее граничным условиям (2.57), имеет вид

$$\begin{aligned} \vartheta_r(r) = & -\frac{Bq_I(r^4 - c^4)}{16r} H(r - c) + \frac{Bq_I(r^4 - d^4)}{16r} H(r - d) + \frac{Bq_I c^2 r}{4} \ln \frac{r}{c} H(r - c) \\ & - \frac{Bq_I d^2 r}{4} \ln \frac{r}{d} H(r - d) - \frac{b(r^2 - a^2)}{r(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \vartheta_r^2(r_k) - \right. \right. \\ & \left. \left. - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) \right] - \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \frac{Bq_I(d^4 - c^4)}{16b} + \right. \\ & \left. + \frac{Bq_I c^2 b}{4} \ln \frac{b}{c} - \frac{Bq_I d^2 b}{4} \ln \frac{b}{d} \right\} + \frac{A}{4r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - \right. \\ & \left. - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \right] - \frac{A}{4} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \right. \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+l})}{r_{k+l}}H(r-r_{k+l}) \right], \quad (2.70)$$

где

$$\mathfrak{g}_r(r_l) = \frac{-l \pm \sqrt{l - A(r_l + r_2) \left(\frac{r_l}{b} - \frac{b}{r_l} \right) f_l(r_l) [L_l f_l(r_l) - \psi_l(r_l)]}}{\frac{A}{2}(r_l + r_2) \left(\frac{r_l}{b} - \frac{b}{r_l} \right) f_l(r_l)},$$

$$\mathfrak{g}_r(r_k) = \frac{-l \pm \sqrt{l - A(r_{k+l} - r_{k-l}) \left(\frac{r_k}{b} - \frac{b}{r_k} \right) f_l(r_k) G_l}}{\frac{A}{2}(r_{k+l} - r_{k-l}) \left(\frac{r_k}{b} - \frac{b}{r_k} \right) f_l(r_k)},$$

$$G_l = L_l f_l(r_k) - \psi_l(r_k) + \frac{A}{4}(r_l + r_2) \left(\frac{r_l}{b} - \frac{b}{r_l} \right) f_l(r_k) \mathfrak{g}_r^2(r_l) -$$

$$- \frac{A}{4}(r_l + r_2) \left(\frac{r_l}{r_k} - \frac{r_k}{r_l} \right) \mathfrak{g}_r^2(r_l) + \frac{A}{4} \sum_{j=2}^{k-l} (r_{j+l} - r_{j-l}) f_l(r_k) \times$$

$$\times \left(\frac{r_j}{b} - \frac{b}{r_j} \right) \mathfrak{g}_r^2(r_j) - \frac{A}{4} \sum_{j=2}^{k-l} (r_{j+l} - r_{j-l}) \left(\frac{r_j}{r_k} - \frac{r_k}{r_j} \right) \mathfrak{g}_r^2(r_j), \quad (k = \overline{2, n}),$$

$$f_l(r_k) = \frac{b(r_k^2 - a^2)}{r_k(b^2 - a^2)},$$

$$L_l = -\frac{Bq_l(d^4 - c^4)}{16b} + \frac{Bq_l b c^2}{4} \ln \frac{b}{c} - \frac{Bq_l b d^2}{4} \ln \frac{b}{d},$$

$$\begin{aligned}\psi_I(r_k) = & -\frac{Bq_I(r_k^4 - c^4)}{16r_k}H(r-c) + \frac{Bq_I(r_k^4 - d^4)}{16r_k}H(r-d) + \\ & + \frac{Bq_Ic^2r_k}{4}\ln\frac{r_k}{c}H(r-c) - \frac{Bq_Id^2r_k}{4}\ln\frac{r_k}{d}H(r-d).\end{aligned}$$

Прогиб пластины с локализованной нагрузкой равен

$$\begin{aligned}\omega(r) = & \frac{Bq_I(r^4 - c^4)}{64}H(r-c) - \frac{Bq_I(r^4 - d^4)}{64}H(r-d) - \frac{Bq_Ic^2(2r^2 + c^2)}{16} \times \\ & \times \ln\frac{r}{c}H(r-c) + \frac{Bq_Id^2(2r^2 + d^2)}{16}\ln\frac{r}{d}H(r-d) + \frac{Bq_Ic^2(r^2 - c^2)}{16} \times \\ & \times H(r-c) - \frac{Bq_Id^2(r^2 - d^2)}{16}H(r-d) - \left(\frac{b}{b^2 - a^2}\right) \left(a^2 \ln\frac{r}{b} + \frac{b^2 - r^2}{2}\right) \times \\ & \times \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \mathfrak{g}_r^2(r_k) - r_{k+1} \mathfrak{g}_r^2(r_{k+1})] - \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \right. \\ & \times \left[\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \frac{Bq_I(d^4 - c^4)}{16b} + \frac{Bq_Ic^2b}{4} \ln\frac{b}{c} - \frac{Bq_Id^2b}{4} \times \\ & \times \ln\frac{b}{d} \left. \right\} - \frac{A}{4} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \mathfrak{g}_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \mathfrak{g}_r^2(r_{k+1}) \times \\ & \times H(r - r_{k+1})] + \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \ln r_k \mathfrak{g}_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \ln r_{k+1} \times \\ & \times \mathfrak{g}_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \frac{A}{8} r^2 \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+l})}{r_{k+l}}H(r-r_{k+l})\Bigg]+\frac{A}{4}\left(\ln b+\frac{l}{2}\right)\sum_{k=l}^n(r_k+r_{k+l})\Big[r_k\mathfrak{g}_r^2(r_k)- \\
& -r_{k+l}\mathfrak{g}_r^2(r_{k+l})\Big]-\frac{A}{4}\sum_{k=l}^n(r_k+r_{k+l})\Big[r_k\ln r_k\mathfrak{g}_r^2(r_k)-r_{k+l}\mathfrak{g}_r^2(r_{k+l})\times \\
& \times\ln r_{k+l}\Big]-\frac{A}{8}b^2\sum_{k=l}^n(r_k+r_{k+l})\left[\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_k)}{r_k}-\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+l})}{r_{k+l}}\right]-\frac{Bq_l(d^4-c^4)}{64}- \\
& -\frac{Bq_lc^2(b^2-c^2)}{16}+\frac{Bq_ld^2(b^2-d^2)}{16}-\frac{Bq_ld^2(2b^2+d^2)}{16}\ln\frac{b}{d}+ \\
& +\frac{Bq_lc^2(2b^2+c^2)}{16}\ln\frac{b}{c}.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Радиальное усилие будет равно

$$\begin{aligned}
N_r(r) &= \frac{Aq_l(r^4-c^4)}{16r^2}H(r-c)-\frac{Aq_l(r^4-d^4)}{16r^2}H(r-d)-\frac{Aq_lc^2}{4}\times \\
& \times\ln\frac{r}{c}H(r-c)+\frac{Aq_ld^2}{4}\ln\frac{r}{d}H(r-d)+\frac{A}{B}\cdot\frac{b(r^2-a^2)}{r^2(b^2-a^2)}\times \\
& \times\left\{\frac{A}{4b}\sum_{k=l}^n(r_k+r_{k+l})\Big[r_k\mathfrak{g}_r^2(r_k)-r_{k+l}\mathfrak{g}_r^2(r_{k+l})\Big]-\frac{A}{4}b\times\right. \\
& \times\sum_{k=l}^n(r_k+r_{k+l})\left[\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_k)}{r_k}-\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+l})}{r_{k+l}}\right]-\frac{Bq_l(d^4-c^4)}{16b}+\frac{Bq_lc^2b}{4}\ln\frac{b}{c}- \\
& \left.-\frac{Bq_ld^2b}{4}\ln\frac{b}{d}\right\}-\frac{A^2}{4Br^2}\sum_{k=l}^n(r_k+r_{k+l})\Big[r_k\mathfrak{g}_r^2(r_k)H(r-r_k)-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -r_{k+1} g_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \Big] + \frac{A^2}{4B} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \Bigg[\frac{g_r^2(r_k)}{r_k} \times \\
& \times H(r - r_k) - \frac{g_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \Bigg].
\end{aligned} \tag{2.72}$$

В качестве примера рассмотрим задачу о сложном изгибе стальной круглой пластины постоянной толщины, вызванном действием равномерно распределенной по площади кольца радиуса c и ширины cd поперечной нагрузки при температурном поле, изменяющемся вдоль толщины пластины.

Численные расчеты проводятся для линейных законов изменения модуля упругости и коэффициента Пуассона по толщине пластины

$$E(z) = E_0 + E_1 \frac{z}{h}, \quad \nu(z) = \nu_0 + \nu_1 \frac{z}{h}$$

при следующих значениях параметров и постоянных: толщина пластины $h = 0,1$ м, радиус внутреннего контура пластины $a = 0,2$ м, радиус внешнего контура $b = 1$ м, постоянные $\nu_0 = 0,3$, $E_0 = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $E_1 = 10^{10}$ Н/м², $\nu_1 = 0,1$, значения $c_1 = 0,4$ м, $c_2 = 0,4$ м, $c_3 = 0,3$ м, $d_1 = 0,8$ м, $d_2 = 0,6$ м, $d_3 = 0,7$ м

Результаты расчетов приводятся на рисунках 8-9 в виде кривых изменения угла поворота и прогиба для разных значений радиуса c и ширины cd кольца.

Анализ полученных результатов показывает, что угол поворота и прогиб пластины, в которой нагрузка распределена равномерно по площади кольца, зависят от радиуса c и ширины cd кольца.

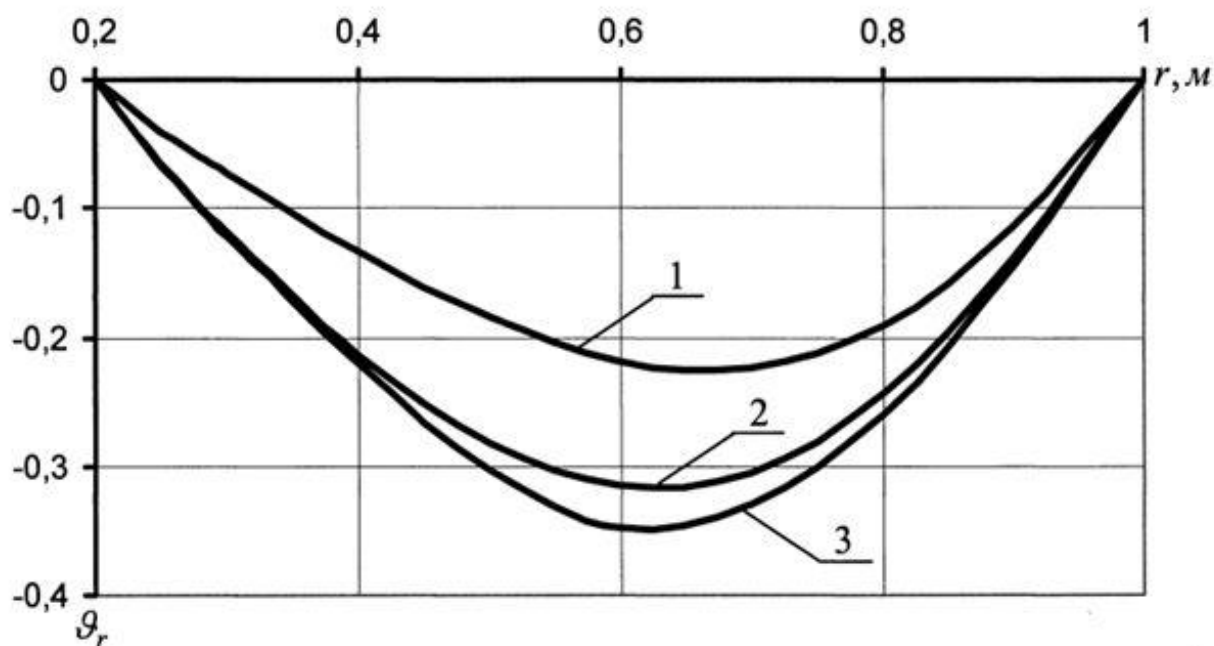


Рисунок 8 - Кривые изменения угла поворота для пластины, подвергающейся неравномерному по толщине нагреву и действию поперечной нагрузки, распределенной по площади кольца, при различных значениях радиуса c и ширины cd :

1 - при $c = 0,4 \text{ м}$, $d = 0,8 \text{ м}$; 2 – при $c = 0,3 \text{ м}$, $d = 0,7 \text{ м}$;
 3 - при $c = 0,4 \text{ м}$, $d = 0,6 \text{ м}$.

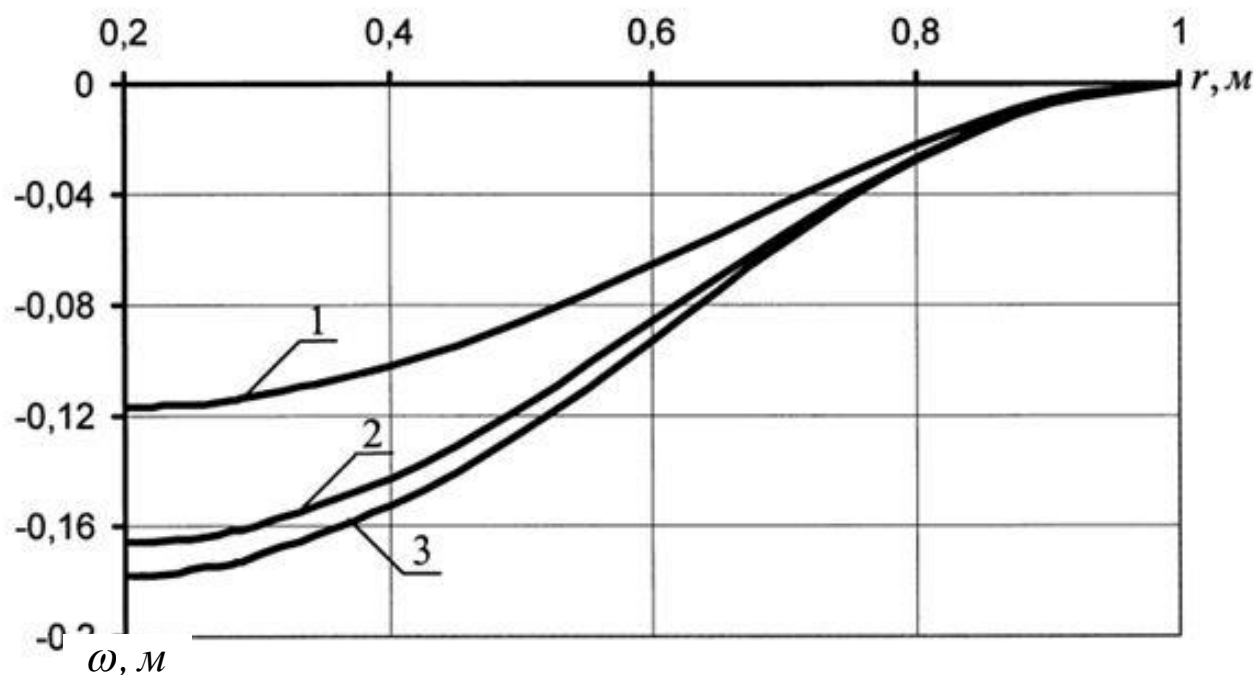


Рисунок 9 - Кривые изменения прогиба для пластины, подвергающейся неравномерному по толщине нагреву и действию поперечной нагрузки, распределенной по площади кольца, при различных значениях радиуса c и ширины cd :

1 - при $c = 0,4$ м, $d = 0,8$ м; 2 - при $c = 0,3$ м, $d = 0,7$ м;
 3 - при $c = 0,4$ м, $d = 0,6$ м.

В случае пластины, в которой поперечная нагрузка равномерно распределена по окружности радиуса r_0 с интенсивностью q_2 ,

$$q_z = q_2 \delta(r - r_0) \quad (2.73)$$

и постоянная C равна нулю. С учетом граничных условий (2.57) угол прогиба пластины запишется в виде

$$\begin{aligned} \vartheta_r(r) = & -\frac{Bq_2 r_0 r}{2} \ln \frac{r}{r_0} H(r - r_0) + \frac{Bq_2 r_0 (r^2 - r_0^2)}{4r} H(r - r_0) - \frac{b(r^2 - a^2)}{r(b^2 - a^2)} \times \\ & \times \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1})] - \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \right. \\ & \times \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \frac{Bq_2 r_0 b}{2} \ln \frac{b}{r_0} + \frac{Bq_2 r_0 (b^2 - r_0^2)}{4b} \left. \right\} + \frac{A}{4r} \times \\ & \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \\ & - \frac{A}{4} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right]. \quad (2.74) \end{aligned}$$

При этом аналитическое выражение угла поворота в точках r_k ($k = \overline{1, n}$) определяется следующим образом

$$\vartheta_r(r_l) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - A(r_l + r_2) \left(\frac{r_l}{b} - \frac{b}{r_l} \right) f_2(r_l) [L_2 f_2(r_l) - \psi_2(r_l)]}}{\frac{A}{2} (r_l + r_2) \left(\frac{r_l}{b} - \frac{b}{r_l} \right) f_2(r_l)},$$

$$\mathfrak{g}_r(r_k) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - A(r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{r_k}{b} - \frac{b}{r_k} \right) f_2(r_k) G_2}}{\frac{A}{2} (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{r_k}{b} - \frac{b}{r_k} \right) f_2(r_k)} \quad (k = \overline{2, n}),$$

$$\begin{aligned} G_2 = & L_2 f_2(r_k) - \psi_2(r_k) + \frac{A}{4} (r_1 + r_2) \left(\frac{r_1}{b} - \frac{b}{r_1} \right) f_2(r_k) \mathfrak{g}_r^2(r_1) - \frac{A}{4} \times \\ & \times (r_1 + r_2) \left(\frac{r_1}{r_k} - \frac{r_k}{r_1} \right) \mathfrak{g}_r^2(r_1) + \frac{A}{4} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) f_2(r_k) \left(\frac{r_j}{b} - \frac{b}{r_j} \right) \times \\ & \times \mathfrak{g}_r^2(r_j) - \frac{A}{4} \times \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) \left(\frac{r_j}{r_k} - \frac{r_k}{r_j} \right) \mathfrak{g}_r^2(r_j), \end{aligned}$$

$$f_2(r_k) = \frac{b(r_k^2 - a^2)}{r_k(b^2 - a^2)}, \quad L_2 = \frac{Bq_2 r_0 (b^2 - r_0^2)}{4b} - \frac{Bq_2 b r_0}{2} \ln \frac{b}{r_0},$$

$$\psi_2(r_k) = \frac{Bq_2 r_0 (r_k^2 - r_0^2)}{4r_k} - \frac{Bq_2 r_0 r_k}{2} \ln \frac{r_k}{r_0}.$$

Прогиб ω срединной плоскости пластины будет равен

$$\begin{aligned} \omega(r) = & -\frac{Bq_2 r_0 (r^2 - r_0^2)}{4} H(r - r_0) + \frac{Bq_2 r_0 (r^2 + r_0^2)}{4} \ln \frac{r}{r_0} H(r - r_0) - \left(\frac{b}{b^2 - a^2} \right) \times \\ & \times \left(a^2 \ln \frac{r}{b} + \frac{b^2 - r^2}{2} \right) \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \mathfrak{g}_r^2(r_k) - r_{k+1} \mathfrak{g}_r^2(r_{k+1})] - \frac{A}{4} b \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathcal{G}_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\mathcal{G}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \frac{Bq_2 r_0 b}{2} \ln \frac{b}{r_0} + \frac{Bq_2 r_0 (b^2 - r_0^2)}{4b} \Bigg\} - \\
& - \frac{A}{4} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \mathcal{G}_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \mathcal{G}_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \ln r_k \mathcal{G}_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \ln r_{k+1} \mathcal{G}_r^2(r_{k+1}) \times \right. \\
& \times H(r - r_{k+1}) \Big] + \frac{A}{8} r^2 \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathcal{G}_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\mathcal{G}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \times \right. \\
& \times H(r - r_{k+1}) \Big] + \frac{A}{4} \left(\ln b + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \mathcal{G}_r^2(r_k) - r_{k+1} \mathcal{G}_r^2(r_{k+1}) \right] - \\
& - \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \ln r_k \mathcal{G}_r^2(r_k) - r_{k+1} \ln r_{k+1} \mathcal{G}_r^2(r_{k+1}) \right] - \frac{A}{8} b^2 \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[\frac{\mathcal{G}_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\mathcal{G}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] + \frac{Bq_2 r_0 (b^2 - r_0^2)}{4} - \frac{Bq_2 r_0 (b^2 + r_0^2)}{4} \ln \frac{b}{r_0}. \quad (2.75)
\end{aligned}$$

В случае неоднородной пластины, подвергающейся поперечной нагрузке, распределенной равномерно по окружности радиуса r_0 с интенсивностью q_2 , радиальное усилие выразится формулой

$$N_r(r) = \frac{Aq_2 r_0}{2} \ln \frac{r}{r_0} H(r - r_0) - \frac{Aq_2 r_0 (r^2 - r_0^2)}{4r^2} H(r - r_0) + \frac{A}{B} \cdot \frac{b(r^2 - a^2)}{r^2(b^2 - a^2)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{A}{4b} \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \vartheta_r^2(r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) \right] - \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \right. \\
& \times \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \frac{Bq_2 r_0 b}{2} \ln \frac{b}{r_0} + \frac{Bq_2 r_0}{4b} (b^2 - r_0^2) \left. \right\} - \frac{A^2}{4Br^2} \times \\
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{A^2}{4B} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right]. \quad (2.76)
\end{aligned}$$

Выполним численный расчет угла поворота ϑ_r и прогиба ω по формулам (2.74) - (2.75) для кольцевой пластины постоянной толщины, подвергающейся распределенной равномерно по окружности r_0 поперечной нагрузке, при модуле упругости и коэффициенте Пуассона, изменяющихся по толщине пластины [20]

$$E(z) = E_0 + E_I \frac{z}{h}, \quad \nu(z) = \nu_0 + \nu_I \frac{z}{h}.$$

Результаты вычислений угла поворота ϑ_r и прогиба ω по формулам (2.74)-(2.75) сравним с результатами вычислений по формулам (2.67)-(2.68) и (2.70)-(2.71). При вычислениях примем следующие значения параметров и постоянных: толщина пластины $h = 0,1$ м, радиус внутреннего контура пластины $a = 0,2$ м, радиус внешнего контура $b = 1$ м, радиус окружности $r_0 = 0,6$ м постоянные $\nu_0 = 0,3$, $E_0 = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $E_I = 10^{10}$ Н/м², $\nu_I = 0,1$, значения $c = 0,4$ м, $d = 0,8$ м, интенсивности нагрузки $q_I = 3,4 \cdot 10^8$ Н/м, $q_2 = 1,36 \cdot 10^8$ Н/м, $q_0 = 1,17 \cdot 10^8$ Н/м.

На рисунках 10-11 приведены кривые изменения угла поворота и прогиба для разных случаев распределения поперечной нагрузки.

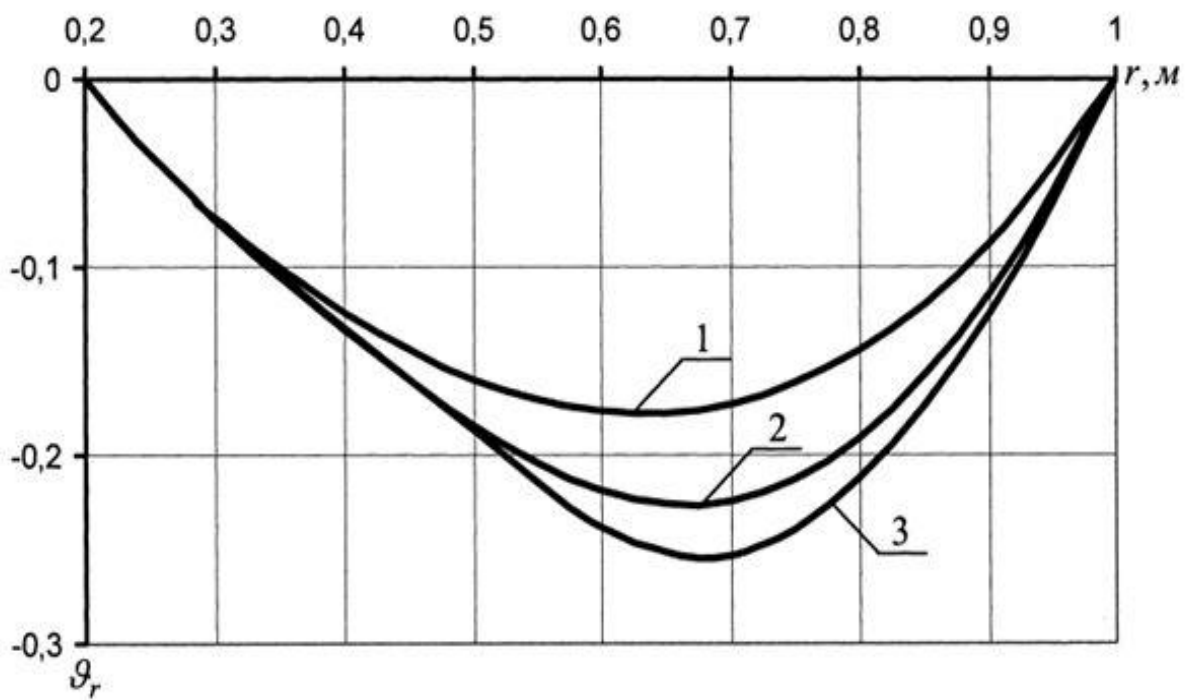


Рисунок 10 - Кривые изменения угла поворота для пластины с отверстием, подверженной действию поперечной нагрузки, распределенной: 1 - равномерно по поверхности пластины; 2 - равномерно по площади кольца радиуса c и ширины cd ; 3 - равномерно по окружности радиуса r_0

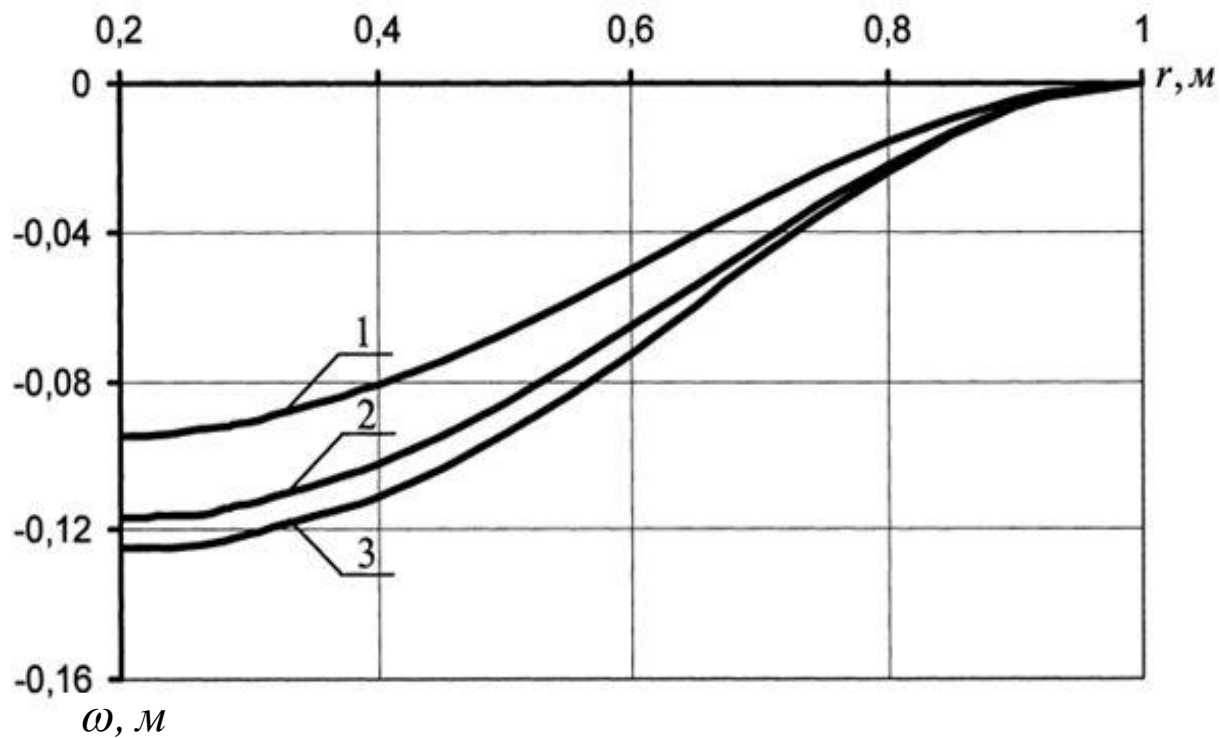


Рисунок 11 - Кривые изменения прогиба для пластины с отверстием, подверженной действию поперечной нагрузки, распределенной: 1 - равномерно по поверхности пластины; 2 - равномерно по площади кольца радиуса c и ширины cd ; 3 - равномерно по окружности радиуса r_0 ($c < r_0 < d$).

Как видно из рисунка, наибольший прогиб кольцевой пластины, защемленной по внешнему контуру и у которой внутренний контур смещается по направлению оси пластины, но при этом не поворачивается, получается при распределении нагрузки по окружности. Нужно отметить, что поперечная нагрузка во всех трех случаях одинакова.

Прогиб пластины, в которой нагрузка распределена равномерно по площади кольца радиуса c и ширины cd , зависит от ширины и радиуса кольца.

Метод частичной дискретизации позволяет получить решение задачи практически для любого закона распределения поперечной нагрузки.

Далее исследуем термоупругость неоднородной кольцевой пластины при осесимметричном температурном поле с учетом влияния растяжения на изгиб и изменения по толщине упругих свойств материала пластины, подвергающейся действиям равномерно распределенной по ее поверхности поперечной нагрузки интенсивности q и радиальных сжимающих усилий [21]. Осесимметричная деформация пластины в условиях неравномерного по толщине нагрева описывается связанной системой дифференциальных уравнений (2.35), которая приводится к несвязанным нелинейным дифференциальным уравнениям (2.44)-(2.45) относительно разрешающих функций F и ω или к дифференциальным уравнениям (2.46)-(2.47) относительно радиального усилия N_r и угла поворота нормали $\mathcal{G}_r$.

Пусть пластина защемлена по внешнему контуру, а внутренний контур ее смещается в направлении оси пластины, но при этом не поворачивается, также по внутреннему и внешнему контурам приложены сжимающие усилия одинаковой интенсивности. Тогда граничные условия задачи примут вид:

$$\begin{aligned} N_r|_{r=a} = -N, \quad N_r|_{r=b} = -N, \quad \mathcal{G}_r|_{r=a} = 0, \\ \mathcal{G}_r|_{r=b} = 0, \quad \omega|_{r=b} = 0, \quad Q_r|_{r=a} = 0. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Рассматривая совместно (2.31), (2.48) и (2.77), найдем

$$C_1 = -2N, \quad C_2 = 0, \quad C = \frac{qa^2}{2}. \quad (2.78)$$

С учетом (2.78) уравнения (2.46)-(2.47) переписутся в виде

$$\frac{d^2 N_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dN_r}{dr} - BNN_r - BN_r^2 = \frac{Aq}{2} - \frac{Aqa^2}{2r^2}, \quad (2.79)$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{G}_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathfrak{G}_r}{dr} - \frac{\mathfrak{G}_r}{r^2} + BN\mathfrak{G}_r + \frac{A}{r} \mathfrak{G}_r^2 = -\frac{Bqr}{2} + \frac{Bqa^2}{2r}. \quad (2.80)$$

Используя метод частичной дискретизации, получим решение дифференциального уравнения (2.80)

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_r(r) = & C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{A}{4} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathfrak{G}_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\mathfrak{G}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \times \right. \\ & \times H(r - r_{k+1}) \Big] + \frac{A}{4r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \mathfrak{G}_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \mathfrak{G}_r^2(r_{k+1}) \times \right. \\ & \times H(r - r_{k+1}) \Big] - \frac{BN}{4} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) \times \right. \\ & \times H(r - r_{k+1}) \Big] + \frac{BN}{4r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^2 \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1}^2 \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) \times \right. \\ & \times H(r - r_{k+1}) \Big] + \frac{Bqa^2 r}{4} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) - \frac{Bqr^3}{16}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Учет граничных условий (2.57) дает

$$\mathfrak{G}_r(r) = \frac{Bqa^2 r}{4} \ln \frac{r}{a} - \frac{Bqr(r^2 - a^2)}{16} - \frac{b(r^2 - a^2)}{r(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[r_k \mathfrak{g}_r^2(r_k) - r_{k+l} \mathfrak{g}_r^2(r_{k+l}) \right] - \frac{A}{4} b \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+l})}{r_{k+l}} \right] + \\
& + \frac{BN}{4b} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^2 \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+l}^2 \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \right] - \frac{BN}{4} b \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \times \\
& \times \left[\mathfrak{g}_r(r_k) - \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \right] + \frac{Bqa^2b}{4} \ln \frac{b}{a} - \frac{Bqb(b^2 - a^2)}{16} \left\} + \frac{A}{4r} \times \\
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k \mathfrak{g}_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l} \mathfrak{g}_r^2(r_{k+l}) \times H(r - r_{k+l}) \right] - \\
& - \frac{A}{4} r \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[\frac{\mathfrak{g}_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\mathfrak{g}_r^2(r_{k+l})}{r_{k+l}} H(r - r_{k+l}) \right] + \frac{BN}{4r} \times \\
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^2 \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l}^2 \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \right] - \frac{BN}{4} r \times \\
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[\mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \right], \tag{2.82}
\end{aligned}$$

где

$$\mathfrak{g}_r(r_l) = \frac{-S(r_l) \pm \sqrt{S^2(r_l) - A(r_l + r_2) \left(\frac{r_l}{b} - \frac{b}{r_l} \right) f(r_l) [Lf(r_l) - \psi(r_l)]}}{\frac{A}{2} (r_l + r_2) \left(\frac{r_l}{b} - \frac{b}{r_l} \right) f(r_l)},$$

$$\mathfrak{g}_r(r_k) = \frac{-S(r_k) \pm \sqrt{S^2(r_k) - A(r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{r_k}{b} - \frac{b}{r_k} \right) f(r_k) G}}{\frac{A}{2} (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{r_k}{b} - \frac{b}{r_k} \right) f(r_k)}, \quad (k = \overline{2, n}),$$

$$G = Lf(r_k) - \psi(r_k) + \frac{A}{4} (r_1 + r_2) \left(\frac{r_1}{b} - \frac{b}{r_1} \right) f(r_k) \mathfrak{g}_r^2(r_1) - \frac{A}{4} (r_1 + r_2) \times$$

$$\times \left(\frac{r_1}{r_k} - \frac{r_k}{r_1} \right) \mathfrak{g}_r^2(r_1) + \frac{A}{4} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) f(r_k) \left(\frac{r_j}{b} - \frac{b}{r_j} \right) \mathfrak{g}_r^2(r_j) - \frac{A}{4} \times$$

$$\times \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) \left(\frac{r_j}{r_k} - \frac{r_k}{r_j} \right) \mathfrak{g}_r^2(r_j) - \frac{BNb}{4} (r_1 + r_2) \left(1 - \frac{r_1^2}{b^2} \right) f(r_k) \times$$

$$\times \mathfrak{g}_r(r_1) + \frac{BN}{4} (r_1 + r_2) \left(1 - \frac{r_1^2}{r_k^2} \right) r_k \mathfrak{g}_r(r_1) - \frac{BNb}{4} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) f(r_k) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{r_j^2}{b^2} \right) \mathfrak{g}_r(r_j) + \frac{BN}{4} r_k \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) \left(1 - \frac{r_j^2}{r_k^2} \right) \mathfrak{g}_r(r_j),$$

$$f(r_k) = \frac{b(r_k^2 - a^2)}{r_k(b^2 - a^2)}, \quad L = -\frac{Bqb(b^2 - a^2)}{16} + \frac{Bqba^2}{4} \ln \frac{b}{a},$$

$$\psi(r_k) = -\frac{Bqr_k(r_k^2 - a^2)}{16} + \frac{Bqa^2 r_k}{4} \ln \frac{r_k}{a}.$$

Прогиб пластины, вызванный равномерно распределенной по всей поверхности поперечной нагрузкой, найдем, проинтегрировав выражение (2.82)

$$\begin{aligned}
\omega(r) = & -\frac{Bq(b^4 - r^4)}{64} - \frac{Bqa^2(b^2 - r^2)}{32} - \left(\frac{b}{b^2 - a^2}\right) \left(a^2 \ln \frac{r}{b} + \frac{b^2 - r^2}{2}\right) \left\{ \frac{A}{4b} \times \right. \\
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \mathfrak{G}_r^2(r_k) - r_{k+1} \mathfrak{G}_r^2(r_{k+1}) \right] - \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathfrak{G}_r^2(r_k)}{r_k} - \right. \\
& \left. \left. - \frac{\mathfrak{G}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] + \frac{BN}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^2 \mathfrak{G}_r(r_k) - r_{k+1}^2 \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) \right] - \frac{BN}{4} b \times \right. \\
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\mathfrak{G}_r(r_k) - \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) \right] + \frac{Bqa^2b}{4} \ln \frac{b}{a} - \frac{Bqb(b^2 - a^2)}{16} \left. \right\} - \frac{A}{4} \times \\
& \times \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \mathfrak{G}_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \mathfrak{G}_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \ln r_k \mathfrak{G}_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \ln r_{k+1} \mathfrak{G}_r^2(r_{k+1}) \times \right. \\
& \times H(r - r_{k+1}) \left. \right] + \frac{A}{8} r^2 \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathfrak{G}_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\mathfrak{G}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \times \right. \\
& \times H(r - r_{k+1}) \left. \right] - \frac{BN}{4} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^2 \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1}^2 \times \right. \\
& \times \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \left. \right] + \frac{BN}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^2 \ln r_k \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \right. \\
& \left. - r_{k+1}^2 \ln r_{k+1} \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \right] + \frac{BN}{8} r^2 \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\mathfrak{G}_r(r_k) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times H(r - r_k) - \mathfrak{G}_r(r_{k+1})H(r - r_{k+1})] - \frac{Bqa^2}{8} \left(r^2 \ln \frac{r}{a} - b^2 \ln \frac{b}{a} \right) + \frac{A}{4} \times \\
& \left(\ln b + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \mathfrak{G}_r^2(r_k) - r_{k+1} \mathfrak{G}_r^2(r_{k+1})] - \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[r_k \ln r_k \mathfrak{G}_r^2(r_k) - r_{k+1} \ln r_{k+1} \mathfrak{G}_r^2(r_{k+1}) \right] - \frac{A}{8} b^2 \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathfrak{G}_r^2(r_k)}{r_k} - \right. \\
& \left. - \frac{\mathfrak{G}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] + \frac{BN}{4} \left(\ln b + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k^2 \mathfrak{G}_r(r_k) - r_{k+1}^2 \mathfrak{G}_r(r_{k+1})] - \\
& - \frac{BN}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k^2 \ln r_k \mathfrak{G}_r(r_k) - r_{k+1}^2 \ln r_{k+1} \mathfrak{G}_r(r_{k+1})] - \frac{BN}{8} b^2 \times \\
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\mathfrak{G}_r(r_k) - \mathfrak{G}_r(r_{k+1})]. \tag{2.83}
\end{aligned}$$

Подставив выражение (2.83) в формулу (2.48) и учитывая значения постоянных (2.78), получим выражение для радиального усилия

$$\begin{aligned}
N_r(r) = & -N - \frac{Aqa^2}{4} \ln \frac{r}{a} + \frac{Aq(r^2 - a^2)}{16} + \frac{A}{B} \cdot \frac{b(r^2 - a^2)}{r^2(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \right. \\
& \times [r_k \mathfrak{G}_r^2(r_k) - r_{k+1} \mathfrak{G}_r^2(r_{k+1})] - \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathfrak{G}_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\mathfrak{G}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] + \frac{BN}{4b} \times \\
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k^2 \mathfrak{G}_r(r_k) - r_{k+1}^2 \mathfrak{G}_r(r_{k+1})] - \frac{BN}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\mathfrak{G}_r(r_k) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mathcal{G}_r(r_{k+1})\Big] + \frac{Bqb^3}{4} \ln \frac{b}{a} - \frac{Bqb(b^2 - a^2)}{16} \Big\} - \frac{A^2}{4Br^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[r_k \mathcal{G}_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \mathcal{G}_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \right] + \frac{A^2}{4B} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[\frac{\mathcal{G}_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\mathcal{G}_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right] - \frac{AN}{4r^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^2 \times \right. \\
& \times \mathcal{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1}^2 \mathcal{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \Big] + \frac{AN}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[\mathcal{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \mathcal{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \right] \tag{2.84}
\end{aligned}$$

На рисунках 12-13 приведены кривые изменения прогиба и угла поворота нормали при различных значениях интенсивности поперечной нагрузки. Расчеты проводятся для следующих законов изменения модуля упругости и коэффициента Пуассона $E(z) = E_0 e^{10z}$, $\nu(z) = \nu_0 e^{7z}$ при $a = 0,2 \text{ м}$, $b = 0,8 \text{ м}$, $h = 0,08 \text{ м}$, $\nu_0 = 0,25$, $E_0 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $N = 2 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$.

Изгиб неоднородной гибкой кольцевой пластины, вызванный действиями равномерно распределенной поперечной нагрузки и радиальных сжимающих усилий, описывается связанной системой дифференциальных уравнений, решение которых представляет значительные математические трудности. В работе аналитическое решение определено с помощью метода частичной дискретизации и непрямого операторного метода.

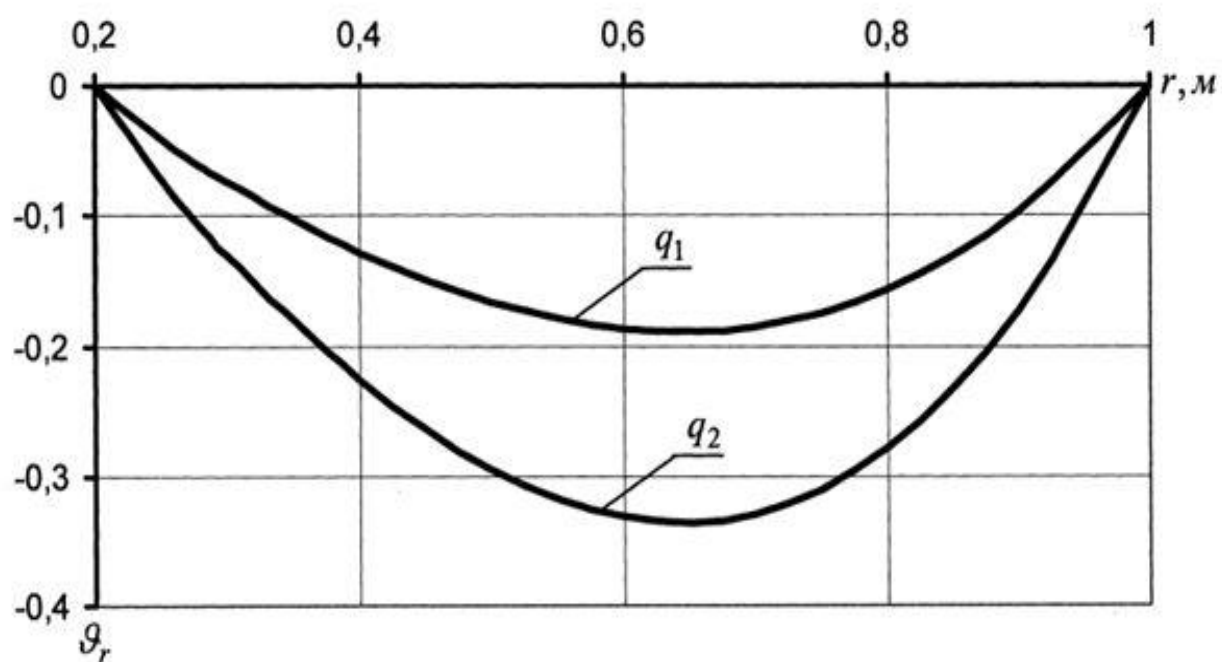


Рисунок 12 - Кривые изменения угла поворота для пластины, подвергающейся сжатию и действию равномерной поперечной нагрузки, при различных значениях q .

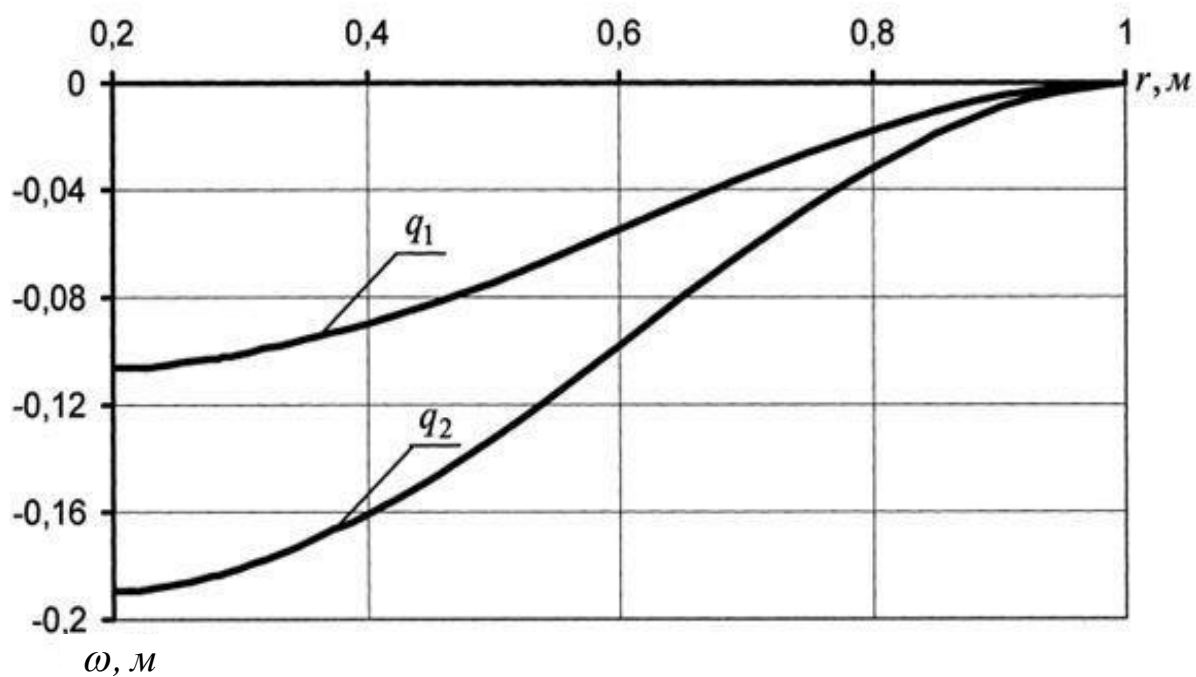


Рисунок 13 - Кривые изменения прогиба для пластины, подвергающейся сжатию и действию равномерной поперечной нагрузки, при различных значениях q .

Задача о сложном изгибе неоднородной круглой пластины, подвергающейся действию поперечной нагрузки, при изменении температуры по толщине пластины с учетом растяжения на изгиб, описывается системой связанных дифференциальных уравнений (2.40)-(2.41). Если не учитывать растяжение пластины на ее изгиб, то каждое из этих уравнений включает только одну разрешающую функцию: F или ω . В этом случае уравнения (2.40)-(2.41) запишутся в виде

$$r \frac{d}{dr} \nabla^2 F = A \left(\int q_z r dr - C \right), \quad (2.85)$$

$$r \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega = B \left(\int q_z r dr - C \right). \quad (2.86)$$

Дифференциальное уравнение третьего порядка (2.86) относительно угла поворота нормали с учетом выражения (2.64) примет вид

$$\frac{d^2 \vartheta_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta_r}{dr} - \frac{\vartheta_r}{r^2} = -\frac{Bqr}{2} + \frac{Bqa^2}{2r}. \quad (2.87)$$

Интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (2.87) дает выражение

$$\vartheta_r(r) = C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{Bqr^3}{16} + \frac{Bqa^2}{4} r \left(\ln r - \frac{1}{2} \right). \quad (2.88)$$

Рассмотрим изгиб неоднородной круглой пластины постоянной толщины, внешний контур которой жестко заделан, а внутренний контур может смещаться в направлении оси пластины, но при этом не поворачивается. Граничные условия задачи имеют вид

$$\vartheta_r|_{r=a} = 0, \quad \vartheta_r|_{r=b} = 0, \quad \omega|_{r=b} = 0. \quad (2.89)$$

С учетом граничных условий (2.89) решение уравнения (2.87) примет вид

$$\vartheta_r(r) = \frac{Bqa^2r}{4} \ln \frac{r}{a} - \frac{Bqr(r^2 - a^2)}{16} - \frac{b(r^2 - a^2)}{r(b^2 - a^2)} \left[\frac{Bqba^2}{4} \ln \frac{b}{a} - \frac{Bqb(b^2 - a^2)}{16} \right]. \quad (2.90)$$

Интегрируя выражение (2.90), получим прогиб пластины

$$\omega(r) = \frac{Bqa^2}{8} \left(b^2 \ln \frac{b}{a} - r^2 \ln \frac{r}{a} \right) - \frac{Bqa^2(b^2 - r^2)}{32} - \frac{Bq(b^4 - r^4)}{64} - \frac{b}{(b^2 - a^2)} \left[\frac{Bqa^2b}{4} \ln \frac{b}{a} - \frac{Bqb(b^2 - a^2)}{16} \right] \left(\frac{b^2 - r^2}{2} - a^2 \ln \frac{b}{r} \right). \quad (2.91)$$

Теперь для определения решения уравнения (2.87) используем метод частичной дискретизации дифференциальных уравнений и сравним полученное таким образом решение с точными решениями (2.90) и (2.91).

Дискретизирование третьего члена дифференциального уравнения (2.87) дает

$$\frac{d^2 \vartheta_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \vartheta_r}{dr} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \left[\frac{\vartheta_r(r_k)}{r_k^2} \delta(r - r_k) - \frac{\vartheta_r(r_{k+1})}{r_{k+1}^2} \delta(r - r_{k+1}) \right] - \frac{Bqr}{2} + \frac{Bqa^2}{2r}. \quad (2.92)$$

В соответствии с методом частичной дискретизации общее решение уравнения (2.92) имеет вид

$$\vartheta_r(r) = C_3 \ln r + C_4 + \frac{Bqa^2r}{2} - \frac{Bqr^3}{18} + \frac{1}{2} \ln r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times$$

$$\times \left[\frac{\mathcal{G}_r(r_k)}{r_k} H(r-r_k) - \frac{\mathcal{G}_r(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r-r_{k+1}) \right] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times$$

$$\times \left[\frac{\mathcal{G}_r(r_k)}{r_k} \ln r_k H(r-r_k) - \frac{\mathcal{G}_r(r_{k+1})}{r_{k+1}} \ln r_{k+1} H(r-r_{k+1}) \right]. \quad (2.93)$$

Рассматривая уравнение (2.92) совместно с граничными условиями (2.89), получим окончательное решение уравнения (2.92)

$$\mathcal{G}_r(r) = \frac{Bqa^2(r-a)}{2} - \frac{Bq(r^3-a^3)}{18} + \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \left\{ \frac{Bq(b^3-a^3)}{18} - \frac{Bqa^2(b-a)}{2} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathcal{G}_r(r_k)}{r_k} \ln r_k - \frac{\mathcal{G}_r(r_{k+1})}{r_{k+1}} \ln r_{k+1} \right] - \frac{1}{2} \ln b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathcal{G}_r(r_k)}{r_k} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mathcal{G}_r(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] \left. \right\} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathcal{G}_r(r_k)}{r_k} \ln r_k H(r-r_k) - \frac{\mathcal{G}_r(r_{k+1})}{r_{k+1}} \ln r_{k+1} H(r-r_{k+1}) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathcal{G}_r(r_k)}{r_k} H(r-r_k) - \frac{\mathcal{G}_r(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r-r_{k+1}) \right]. \quad (2.94)$$

Аналитическое выражение угла поворота в точках r_k определяется следующим образом

$$\mathcal{G}_r(r_l) = \frac{f(r_l) + L\phi(r_l)}{1 + \frac{r_l + r_2}{2r_l} \phi(r_l) \ln \frac{b}{r_l}},$$

$$\begin{aligned} \vartheta_r(r_k) = & \frac{1}{1 + \frac{r_{k+1} - r_{k-1}}{2r_k} \phi(r_k) \ln \frac{b}{r_k}} \left\{ f(r_k) + L \phi(r_k) - \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \phi(r_k) \times \right. \\ & \times \ln \frac{b}{r_1} \vartheta_r(r_1) - \frac{1}{2} \phi(r_k) \sum_{j=2}^{k-1} \frac{r_{j+1} - r_{j-1}}{r_j} \ln \frac{b}{r_j} \vartheta_r(r_j) + \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \ln \frac{r_k}{r_1} \vartheta_r(r_1) + \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k-1} \frac{r_{j+1} - r_{j-1}}{r_j} \ln \frac{r_k}{r_j} \vartheta_r(r_j) \right\} \quad (k = \overline{2, n}), \end{aligned}$$

где

$$f(r) = \frac{Bqa^2(r-a)}{2} - \frac{Bq(r^3 - a^3)}{18}, \quad \phi(r) = \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}},$$

$$L = \frac{Bq(b^3 - a^3)}{18} - \frac{Bqa^2(b-a)}{2}.$$

Прогиб пластины имеет выражение

$$\begin{aligned} \omega(r) = & \frac{Bqa^2(b^2 - r^2)}{4} - \frac{Bq(b^4 - r^4)}{72} - \frac{4Bqa^3(b-r)}{9} + \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \left(b \ln \frac{b}{a} - \right. \\ & \left. - r \ln \frac{r}{a} - b + r \right) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r(r_k)}{r_k} \ln r_k - \frac{\vartheta_r(r_{k+1})}{r_{k+1}} \ln r_{k+1} \right] - \frac{1}{2} \ln b \times \right. \\ & \left. \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r(r_k)}{r_k} - \frac{\vartheta_r(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] + \frac{Bq(b^3 - a^3)}{18} - \frac{Bqa^2(b-a)}{2} \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(r \ln r - r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathcal{G}_r(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\mathcal{G}_r(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right] - \\
& -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\mathcal{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \mathcal{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \frac{1}{2} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[\frac{\mathcal{G}_r(r_k)}{r_k} \ln r_k H(r - r_k) - \frac{\mathcal{G}_r(r_{k+1})}{r_{k+1}} \ln r_{k+1} H(r - r_{k+1}) \right] + \frac{1}{2} (b \ln b - b) \times \\
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathcal{G}_r(r_k)}{r_k} - \frac{\mathcal{G}_r(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\mathcal{G}_r(r_k) - \mathcal{G}_r(r_{k+1})] + \\
& + \frac{1}{2} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\mathcal{G}_r(r_k)}{r_k} \ln r_k - \frac{\mathcal{G}_r(r_{k+1})}{r_{k+1}} \ln r_{k+1} \right]. \quad (2.95)
\end{aligned}$$

Выполним численные расчеты для следующего закона изменения модуля упругости и коэффициента Пуассона по толщине пластины

$$E(z) = E_0 + E_I \frac{z}{h}, \quad \nu(z) = \nu_0 + \nu_I \frac{z}{h}$$

при следующих значениях параметров и постоянных: толщина пластины $h = 0,1$ м, радиус внутреннего контура пластины $a = 0,2$ м, радиус внешнего контура $b = 1$ м, постоянные $\nu_0 = 0,3$, $E_0 = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $E_I = 10^{10}$ Н/м², $\nu_I = 0,1$, интенсивность поперечной нагрузки $q = 1,7 \cdot 10^8$ Н/м.

Результаты вычислений угла поворота и прогиба по формулам (2.90)-(2.91) сравним с расчетами, произведенными по формулам (2.94)-(2.95). На рисунках 14-15 приведены кривые угла поворота и прогиба круглой пластины, полученные методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений (сплошная линия) и построенные по точному решению задачи (пунктирная линия).

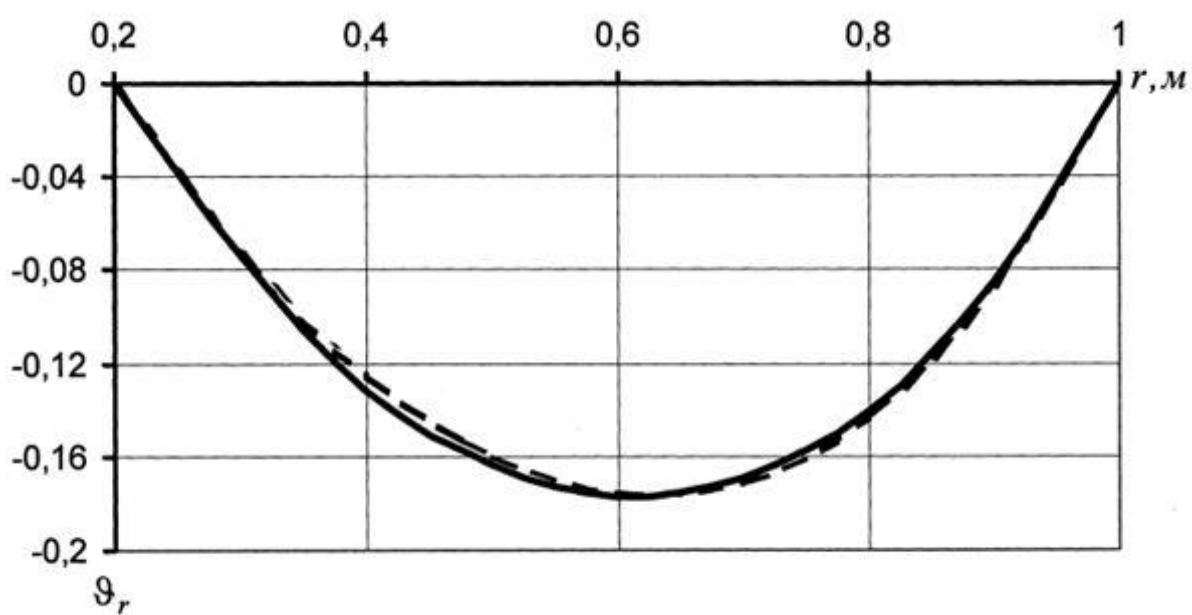


Рисунок 14 - Кривые изменения угла поворота для пластины, подвергающейся неравномерному по толщине нагреву и равномерной поперечной нагрузке, без учета влияния растяжения на изгиб.

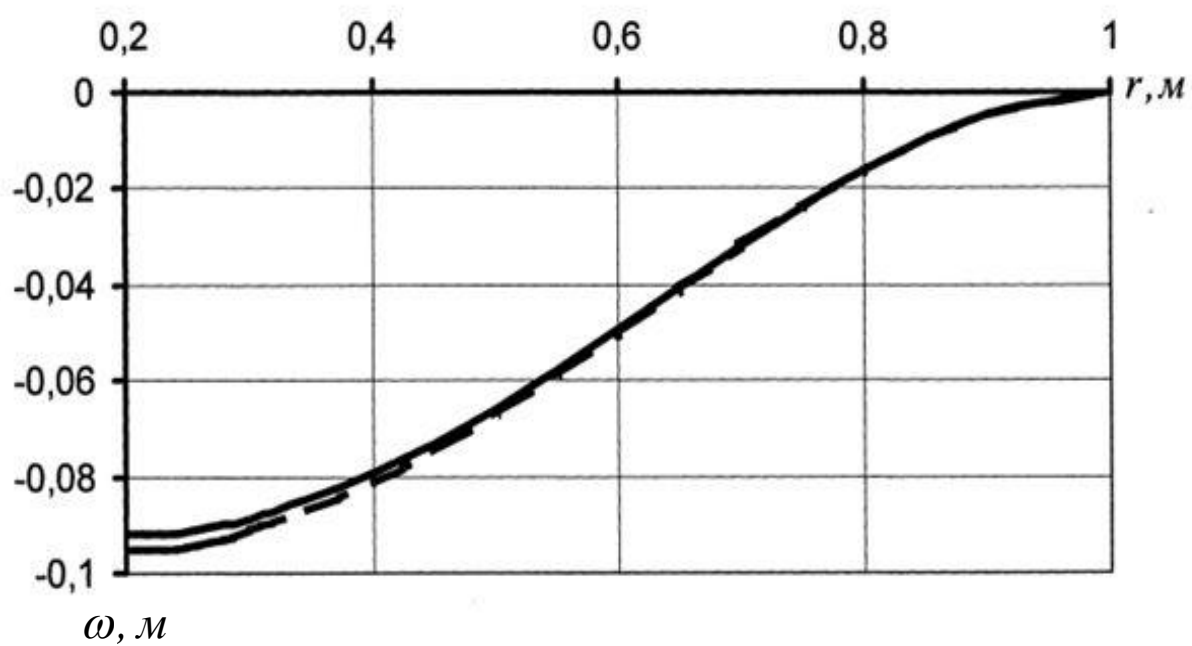


Рисунок 15 - Кривые изменения прогиба для пластины, подвергающейся неравномерному по толщине нагреву и равномерной поперечной нагрузке.

2.3 Решение задачи об изгибе неоднородной круглой пластины, находящейся в условиях неравномерного вдоль радиуса и толщины нагрева

Рассмотрим задачу термоупругости гибкой неоднородной круглой пластины при изменении температуры по толщине и по радиусу. Неоднородность пластины связана с переменностью модуля упругости. Коэффициент Пуассона остается постоянным. Задача в этом случае сводится к исследованию системы связанных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и с нелинейными членами

$$a_{11}r^3 \frac{d^3 F}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{11}}{dr} + a_{11} \right) \frac{d^2 F}{dr^2} - r \left(r\nu \frac{da_{11}}{dr} + a_{11} \right) \frac{dF}{dr} +$$

$$+ r^2 \frac{da_{14}}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} + r^3 \frac{d}{dr} (a_{11} + a_{12}) N_T = 0, \quad (2.96)$$

$$a_{33}r^3 \frac{d^3 \omega}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{33}}{dr} + a_{33} \right) \frac{d^2 \omega}{dr^2} + r \left(r\nu \frac{da_{33}}{dr} - a_{33} \right) \frac{d\omega}{dr} +$$

$$+ r^2 \frac{da_{14}}{dr} \cdot \frac{dF}{dr} + r^2 \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d\omega}{dr} + r^3 \frac{d}{dr} (a_{14} N_T - M_T) = 0, \quad (2.97)$$

где

$$a_{11} = \frac{l}{(1-\nu^2)D_N}, \quad a_{12} = -\nu a_{11}, \quad a_{14} = \frac{D}{D_N}, \quad a_{33} = \frac{D^2}{D_N} - D_M,$$

$$D = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Ez}{l-\nu^2} dz, \quad D_N = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{l-\nu^2} dz, \quad D_M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{l-\nu^2} z^2 dz. \quad (2.98)$$

С учетом (2.4) и (2.98) система разрешающих уравнений (2.96) третьего порядка приводится к системе разрешающих уравнений второго порядка

$$\frac{d^2 N_r}{dr^2} + \left(\frac{3}{r} - \frac{1}{D_N} \frac{dD_N}{dr} \right) \frac{dN_r}{dr} - \frac{1-\nu}{rD_N} \frac{dD_N}{dr} N_r -$$

(2.99)

$$- \frac{1-\nu^2}{r^2} D_N \frac{d}{dr} \left(\frac{D}{D_N} \right) \mathcal{G}_r + \frac{1-\nu}{r} \left[\frac{dN_T}{dr} - \frac{N_T}{D_N} \frac{dD_N}{dr} \right] = 0;$$

$$\frac{d^2 \mathcal{G}_r}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a_{33}} \frac{da_{33}}{dr} \right) \frac{d\mathcal{G}_r}{dr} + \left(\frac{\nu}{ra_{33}} \frac{da_{33}}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \mathcal{G}_r -$$

(2.100)

$$- \frac{1}{a_{33}} \frac{da_{14}}{dr} N_r + \frac{1}{a_{33}} N_r \mathcal{G}_r - \frac{1}{a_{33}} \frac{d}{dr} [a_{14} N_T - M_T] = 0.$$

Таким образом, задача об осесимметричном изгибе упругой неоднородной круглой пластины в неравномерном температурном поле, когда модуль упругости является переменным как вдоль радиуса, так и по толщине описывается дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами (2.96)-(2.97) относительно разрешающих функций F и ω или (2.99)-(2.100) относительно функций N_r и $\mathcal{G}_r$.

В работе [1] рассматривается симметричная деформация круглой пластины переменной толщины от действия внешних сил и неравномерного нагрева при модуле упругости, изменяющемся по толщине по закону

$$E = E_C + \frac{z}{h} \Delta E, \quad E_C = \frac{E' + E''}{2}, \quad \Delta E = E' - E'',$$

где E_C аппроксимируется выражением

$$E_C = E_{OC} \left| 1 - \frac{x}{a} \right|^{\gamma_0}, x = \pm \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\alpha_0},$$

функций $E_{OC}, a, \gamma_0, r_0, \alpha_0$ - положительные постоянные, E', E'' - значения модуля упругости на поверхностях $z = \frac{h}{2}$ и $z = -\frac{h}{2}$, ΔE - постоянная. Для решения задачи А.Д. Коваленко привлекает аппарат гипергеометрических функций.

Получим решение задачи методом частичной дискретизации и непрямым операторным методом.

Пользуясь методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений, уравнение (2.99) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 N_r}{dr^2} + \left(\frac{3}{r} - \frac{1}{D_N} \frac{dD_N}{dr} \right) \frac{dN_r}{dr} - \frac{1-\nu}{rD_N} \frac{dD_N}{dr} N_r = \frac{1-\nu^2}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\ & \times \left[\frac{D_N(r_k)}{r_k^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{D}{D_N} \right) \Big|_{r=r_k} \mathfrak{G}_r(r_k) \delta(r-r_k) - \frac{D_N(r_{k+1})}{r_{k+1}^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{D}{D_N} \right) \Big|_{r=r_{k+1}} \times \right. \\ & \left. \times \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) \delta(r-r_{k+1}) \right] - \frac{1-\nu}{r} \left[\frac{dN_T}{dr} - \frac{N_T}{D_N} \frac{dD_N}{dr} \right]. \end{aligned} \quad (2.101)$$

При этом для однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.101), в общем случае получить аналитическое решение не удастся. Но, применяя не прямой операторный метод, получим решение дифференциального уравнения (2.101) в квадратурах

$$\begin{aligned} N_r(r) = & e^{-\int \beta(r) dr} \left[C_1 + \int e^{-\int [\beta(r) - \alpha(r)] dr} \times \right. \\ & \left. \times \left(C_2 + \int \Phi e^{\int \alpha(r) dr} dr \right) dr \right], \end{aligned} \quad (2.102)$$

где

$$\Phi = \frac{1-\nu^2}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{D_N(r_k)}{r_k^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{D}{D_N} \right) \right]_{r=r_k} \mathfrak{g}_r(r_k) \delta(r-r_k) - \frac{D_N(r_{k+1})}{r_{k+1}^2} \times$$

$$\times \frac{d}{dr} \left(\frac{D}{D_N} \right) \bigg|_{r=r_{k+1}} \mathfrak{g}_r(r_{k+1}) \delta(r-r_{k+1}) \bigg] - \frac{1-\nu}{r} \left[\frac{dN_T}{dr} - \frac{N_T}{D_N} \frac{dD_N}{dr} \right],$$

$\beta(r)$ - произвольная функция, не равная $\frac{1-\nu}{r}$ и связанная с переменными коэффициентами рассматриваемого уравнения, $\alpha(r)$ - функция, связанная с $\beta(r)$ зависимостью

$$\alpha(r) = \frac{3}{r} - \frac{1}{D_N} \frac{dD_N}{dr} - \beta(r). \quad (2.103)$$

Тогда, как нетрудно видеть, переменная цилиндрическая жесткость растяжения пластины будет определяться соотношением

$$D_N(r) = C_0 e^{\int \frac{\beta' - \beta^2 + \frac{3}{r}\beta}{\beta - \frac{1-\nu}{r}} dr}, \quad (2.104)$$

где C_0 - постоянная величина.

Определяя функцию $\beta(r)$ из этого соотношения и подставляя функции $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ в (4.7), мы бы получили общее решение (2.101). Однако определение функции $\beta(r)$ из (2.104) представляет значительные математические трудности. Поэтому поступим следующим образом: задаваясь конкретным выражением функции $\beta(r)$, найдем соответствующее выражение $D_N(r)$. Тогда (2.102) определит решение (2.101), соответствующее выбранному закону $\beta = \beta(r)$.

Для решения нелинейного дифференциального уравнения (2.100) применим метод частичной дискретизации. В соответствии с этим методом общее решение данного уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \vartheta_r(r) = & C_3 \int e^{-\int \chi(r) dr} dr + C_4 + \\ & + \int e^{-\int \chi(r) dr} \left(\int \psi(r) e^{\int \chi(r) dr} dr \right) dr, \end{aligned} \quad (2.105)$$

где

$$\begin{aligned} \chi(r) = & \frac{1}{r} + \frac{1}{a_{33}} \frac{da_{33}}{dr}, \\ \psi(r) = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{r_k^2} - \frac{\nu}{r_k a_{33}(r_k)} \frac{da_{33}}{dr} \right) \Big|_{r=r_k} \right] \vartheta_r(r_k) \delta(r - r_k) - \\ & - \left[\left(\frac{1}{r_{k+1}^2} - \frac{\nu}{r_{k+1} a_{33}(r_{k+1})} \frac{da_{33}}{dr} \right) \Big|_{r=r_{k+1}} \right] \vartheta_r(r_{k+1}) \delta(r - r_{k+1}) \Big] + \frac{1}{a_{33}} \times \\ & \times \frac{da_{14}}{dr} N_r - \frac{1}{2a_{33}} N_r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\vartheta_r(r_k) \delta(r - r_k) - \vartheta_r(r_{k+1}) \times \\ & \times \delta(r - r_{k+1})] + \frac{1}{a_{33}} \frac{d}{dr} (a_{14} N_T - M_T). \end{aligned}$$

Здесь N_r определяется из (2.102). При помощи метода частичной дискретизации в совокупности с непрямым операторным методом получено общее решение связанной системы дифференциальных уравнений (2.99)-(2.100), описывающих осесимметричный изгиб неоднородной круглой пластины в условиях неравномерного вдоль радиуса и толщины нагрева.

Возьмем пластину с концентрическим отверстием и в качестве примера рассмотрим случай, когда $\beta = \frac{c}{r}$ [22]. В этом случае

$$D_N = m_0 r^{m_1}, \quad (4.106)$$

где

$$m_1 = \frac{2c - c^2}{c + \nu - 1}. \quad (4.107)$$

Тогда дифференциальное уравнение (2.101) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 N_r}{dr^2} + \left(\frac{3}{r} - \frac{2c - c^2}{r(c + \nu - 1)} \right) \frac{dN_r}{dr} - \frac{(1 - \nu)(2c - c^2)}{r^2(c + \nu - 1)} N_r = \\ & = \frac{1 - \nu^2}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{D_N(r_k)}{r_k^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{D}{D_N} \right) \Big|_{r=r_k} \mathfrak{G}_r(r_k) \times \right. \\ & \times \delta(r - r_k) - \frac{D_N(r_{k+1})}{r_{k+1}^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{D}{D_N} \right) \Big|_{r=r_{k+1}} \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) \\ & \left. \times \delta(r - r_{k+1}) \right] - \frac{1 - \nu}{r} \left[\frac{dN_T}{dr} - \frac{N_T}{r} \left(\frac{2c - c^2}{c + \nu - 1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Общее решение уравнения (2.108)

$$\begin{aligned} N_r(r) = & \frac{C_1}{r^c} + \frac{C_2}{m} r^{m-c} + \frac{1 - \nu^2}{2m} r^{m-c} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^l D_0(r_k) \times \right. \\ & \times \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1}^l D_0(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \left. \right] - \frac{1 - \nu^2}{2mr^c} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^{c-l} D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l}^{c-l} D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r \times \right. \\
& \left. \times (r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \right] - R(r), \tag{2.109}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
m &= 2(c-l) + \frac{2c-c^2}{c+\nu-l}, \quad l = l - c - \frac{2c-c^2}{c+\nu-l}, \quad D_0(r) = D_N(r) \frac{d}{dr} \left(\frac{D(r)}{D_n(r)} \right), \\
R(r) &= \frac{l-\nu}{r^c} \int r^{m-l} \left(\int r^{l+l} \left[\frac{dN_T}{dr} - \frac{N_T}{r} \left(\frac{2c-c^2}{c+\nu-l} \right) \right] dr \right) dr.
\end{aligned}$$

Подставляя решение (2.109) в дифференциальное уравнение (2.100) и дискретизируя пятый член этого уравнения, получим общее решение дифференциального уравнения (2.100)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_r(r) &= C_3 \Phi(r) + C_4 + \frac{l}{2} \Phi(r) \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[S(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \right. \\
& - S(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \left. \right] - \frac{l}{2} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[\Phi(r_k) S(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) \times \right. \\
& \times H(r - r_k) - \Phi(r_{k+l}) S(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \left. \right] - \frac{l}{2} \Phi(r) \times \\
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[P(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - P(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \right] + \\
& + \frac{l}{2} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[\Phi(r_k) P(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \Phi(r_{k+l}) P(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times H(r - r_{k+l})] + Q(r) + \frac{1-v^2}{2m} f_l(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) [r_k^l D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) \times \\
& \times H(r - r_k) - r_{k+l}^l D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] - \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \times \\
& \times [r_k^l f_l(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l}^l f_l(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \times \\
& \times H(r - r_{k+l})] - \frac{1-v^2}{2m} \Phi(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) [r_k^l f(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - \\
& - r_{k+l}^l f(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] + \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \times \\
& \times [r_k^l \Phi(r_k) f(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l}^l \Phi(r_{k+l}) f(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \times \\
& \times \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] - \frac{1-v^2}{2m} \varphi_l(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) [r_k^{c-l} D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) \times \\
& \times H(r - r_k) - r_{k+l}^{c-l} D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] + \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \times \\
& \times [r_k^{c-l} \varphi_l(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l}^{c-l} \varphi_l(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \times \\
& \times H(r - r_{k+l})] + \frac{1-v^2}{2m} \Phi(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) [r_k^{c-l} \varphi(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) \times \\
& \times H(r - r_k) - r_{k+l}^{c-l} \varphi(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] - \frac{1-v^2}{2m} \times \\
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) [r_k^{c-l} \Phi(r_k) \varphi(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l}^{c-l} \Phi(r_{k+l}) \times
\end{aligned}$$

$$\times \varphi(r_{k+1})D_0(r_{k+1})\mathfrak{g}_r(r_{k+1})H(r-r_{k+1})]. \quad (2.110)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \int \frac{dr}{ra_{33}(r)}, \quad S(r_k) = \frac{a_{33}(r_k)}{r_k} - \nu \frac{da_{33}(r)}{dr} \Big|_{r=r_k}, \\ P(r_k) &= \frac{C_1}{r_k^{c-1}} + \frac{C_2}{m} r_k^{m-c+1} - r_k R(r_k), \quad f(r) = \int r^{m-c+1} \frac{da_{14}}{dr} dr, \\ f_1(r) &= \int \frac{f(r)}{ra_{33}(r)} dr, \quad \varphi(r) = \int \frac{1}{r^{c-1}} \frac{da_{14}}{dr} dr, \quad \varphi_1(r) = \int \frac{\varphi(r)}{ra_{33}(r)} dr, \\ Q(r) &= \int \frac{1}{ra_{33}(r)} \left(\int P(r) \frac{da_{14}(r)}{dr} dr \right) dr + \int \frac{1}{ra_{33}(r)} \left(\int r \frac{d}{dr} [a_{14} N_T - M_T] dr \right) dr. \end{aligned}$$

$$\text{Пусть } m_1 = 1. \text{ Тогда } c = \frac{1 \pm \sqrt{5-4\nu}}{2}.$$

Совместное рассмотрение уравнения (2.108) с граничными условиями

$$N_r|_{r=a} = 0, N_r|_{r=b} = 0 \quad (2.111)$$

дает решение задачи в виде

$$\begin{aligned} N_r(r) &= \frac{R(a)a^c}{r^c} + \frac{b^c(r^m - a^m)}{r^c(b^m - a^m)} \left\{ R(b) - R(a) \left(\frac{a}{b} \right)^c - \frac{1-\nu^2}{2m} b^{m-c} \times \right. \\ &\times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^l D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+1}^l D_0(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1}) \right] + \frac{1-\nu^2}{2mb^c} \times \\ &\times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^{c-1} D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+1}^{c-1} D_0(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1}) \right] \Big\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1-v^2}{2m} r^{m-c} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^l D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r-r_k) r_{k+l}^l D_0(r_{k+l}) \times \right. \\
& \times \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r-r_{k+l}) \left. \right] - \frac{1-v^2}{2mr^c} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^{c-l} D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) \times \right. \\
& \times H(r-r_k) - r_{k+l}^{c-l} D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r-r_{k+l}) \left. \right] - R(r), \quad (2.112)
\end{aligned}$$

где

$$D_0(r_k) = \frac{dD}{dr} \Big|_{r=r_k} - \frac{D(r_k)}{2r_k}, \quad R(r) = \frac{1-v}{r^c} \int r^{m-l} \left[\int r^{l+l} \left(\frac{dN_T}{dr} - \frac{N_T}{r} \right) dr \right] dr,$$

$$m = \pm \sqrt{5-4v}, \quad l = \mp \frac{1}{2} \sqrt{5-4v} - \frac{1}{2}.$$

Подстановка (2.112) в (2.110) дает следующее выражение для общего решения уравнения (2.110)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_r(r) = & C_3 \Phi(r) + C_4 + \frac{1}{2} \Phi(r) \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[S(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r-r_k) - \right. \\
& - S(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r-r_{k+l}) \left. \right] - \frac{1}{2} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[\Phi(r_k) S(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) \times \right. \\
& \times H(r-r_k) - \Phi(r_{k+l}) S(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r-r_{k+l}) \left. \right] - \frac{1}{2} \Phi(r) \times \\
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[P_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r-r_k) - P_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r-r_{k+l}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[\Phi(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r-r_k) - \Phi(r_{k+l}) P_0(r_{k+l}) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathfrak{g}_r(r_{k+l})H(r-r_{k+l})] + Q_0(r) + \frac{1-v^2}{2m} f_l(r) \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^l D_0(r_k) \times \right. \\
& \times \mathfrak{g}_r(r_k)H(r-r_k) - r_{k+l}^l D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l})H(r-r_{k+l}) \left. \right] - \frac{1-v^2}{2m} \times \\
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^l f_l(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k)H(r-r_k) - r_{k+l}^l f_l(r_{k+l}) \times \right. \\
& \times D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l})H(r-r_{k+l}) \left. \right] - \frac{1-v^2}{2m} \Phi(r) \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^l f(r_k) \times \right. \\
& \times D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k)H(r-r_k) - r_{k+l}^l f(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l})H(r-r_{k+l}) \left. \right] + \\
& + \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^l \Phi(r_k) f(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k)H(r-r_k) - r_{k+l}^l \Phi(r_{k+l}) \times \right. \\
& \times f(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l})H(r-r_{k+l}) \left. \right] - \frac{1-v^2}{2m} \varphi_l(r) \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \times \\
& \times \left[r_k^{c-l} D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k)H(r-r_k) - r_{k+l}^{c-l} D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l})H(r-r_{k+l}) \right] + \\
& + \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^{c-l} \varphi_l(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k)H(r-r_k) - r_{k+l}^{c-l} \times \right. \\
& \times \varphi_l(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l})H(r-r_{k+l}) \left. \right] + \frac{1-v^2}{2m} \Phi(r) \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \times \\
& \times \left[r_k^{c-l} \varphi(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k)H(r-r_k) - r_{k+l}^{c-l} \varphi(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \times \right. \\
& \times H(r-r_{k+l}) \left. \right] - \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^{c-l} \Phi(r_k) \varphi(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times H(r - r_k) - r_{k+l}^{c-l} \Phi(r_{k+l}) \varphi(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \Big] - \\
& - \frac{1-v^2}{4mb^c} \left\{ \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^{c-l} D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+l}^{c-l} D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \right] - \right. \\
& - b^m \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^l D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+l}^l D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \right] \Big\} \Phi(r) \times \\
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[t(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - t(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \right] + \\
& + \frac{1-v^2}{4mb^c} \left\{ \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^{c-l} D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+l}^{c-l} D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \right] - \right. \\
& - b^m \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^l D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+l}^l D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \right] \Big\} \times \\
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[t(r_k) \Phi(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) H(r - r_k) - t(r_{k+l}) \Phi(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \times \right. \\
& \times H(r - r_{k+l}) \Big] + \frac{1-v^2}{2mb^c} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left\{ \left[r_k^{c-l} D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+l}^{c-l} \times \right. \right. \\
& \times D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \Big] - b^m \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^l D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+l}^l \times \right. \\
& \times D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \Big] \Big\} G(r),
\end{aligned}$$

где

$$P_0(r) = \frac{a^c}{r^{c-1}}(N + R(a)) + t(r) \left[R(b) - \frac{a^c}{b^c}(N + R(a)) \right] - rR(r),$$

$$Q_0(r) = \int \frac{1}{ra_{33}(r)} \left(\int P_0(r) \frac{da_{14}(r)}{dr} dr + \int r \frac{d}{dr} [a_{14}N_T - M_T] dr \right) dr,$$

$$G(r) = \int \frac{1}{ra_{33}(r)} \left(\int t(r) \frac{da_{14}(r)}{dr} dr \right) dr, \quad t(r) = \frac{b^c(r^m - a^m)}{r^{c-1}(b^m - a^m)}.$$

Решение уравнения (2.100) для рассматриваемого $\beta = \frac{l \pm \sqrt{5 - 4\nu}}{2r}$

при условии, что наружный контур пластины заделан, а внутренний подвергается действию изгибающего момента

$$\mathfrak{G}_r|_{r=b} = 0, \quad M_r|_{r=a} = M \quad (2.113)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_r(r) = & L\Phi_0(r) + \Omega \left(\frac{va_{33}(a)}{a} \Phi_0(r) - l \right) + Q_0(r) - Q_0(b) + \frac{l}{2} \Phi(r) \times \\ & \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [S(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - S(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \\ & - \frac{l}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\Phi(r_k) S(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \Phi(r_{k+1}) S(r_{k+1}) \times \\ & \times \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \frac{l}{2} \Phi(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times [P_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) \times \\ & \times H(r - r_k) - P_0(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \frac{l}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\Phi(r_k) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times P_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \Phi(r_{k+l}) P_0(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \Big] + \\
& + \frac{1-v^2}{2m} f_l(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \Big[r_k^l D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l}^l D_0(r_{k+l}) \times \\
& \times \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \Big] - \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \Big[r_k^l f_l(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) \times \\
& \times H(r - r_k) - r_{k+l}^l f_l(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \Big] - \frac{1-v^2}{2m} \Phi(r) \times \\
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \Big[r_k^l f_l(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l}^l f_l(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \times \\
& \times \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \Big] + \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \Big[r_k^l \Phi(r_k) f_l(r_k) D_0(r_k) \times \\
& \times \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l}^l \Phi(r_{k+l}) f_l(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \times \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \Big] - \\
& - \frac{1-v^2}{2m} \varphi_l(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \Big[r_k^{c-l} D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l}^{c-l} D_0(r_{k+l}) \times \\
& \times \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \Big] + \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \Big[r_k^{c-l} \varphi_l(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) \times \\
& \times H(r - r_k) - r_{k+l}^{c-l} \varphi_l(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l}) \Big] + \frac{1-v^2}{2m} \Phi(r) \times \\
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \Big[r_k^{c-l} \varphi_l(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l}^{c-l} \varphi_l(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathfrak{G}_r(r_{k+l})H(r-r_{k+l})] - \frac{1-\nu^2}{2m} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^{c-l} \Phi(r_k) \varphi(r_k) D_0(r_k) \times \right. \\
& \times \mathfrak{G}_r(r_k) H(r-r_k) - r_{k+l}^{c-l} \Phi(r_{k+l}) \varphi(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r-r_{k+l})] - \\
& - \frac{1-\nu^2}{4mb^c} \left\{ \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^{c-l} D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) - r_{k+l}^{c-l} D_0(r_{k+l}) - \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) \right] - \right. \\
& - b^m \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^l D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) - r_{k+l}^l D_0(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) \right] \left. \right\} \{ \Phi(r) \times \\
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) [t(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r-r_k) - t(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r-r_{k+l})] - \\
& - \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) [t(r_k) \Phi(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r-r_k) - t(r_{k+l}) \Phi(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) \times \\
& \times H(r-r_{k+l})] \} + \frac{1-\nu^2}{2mb^c} \left\{ \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^{c-l} D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) - r_{k+l}^{c-l} D_0(r_{k+l}) \times \right. \right. \\
& \times (r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l})] - b^m \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^l D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) - r_{k+l}^l D_0(r_{k+l}) \times \right. \\
& \times \mathfrak{G}_r(r_{k+l})] \left. \right\} G(r),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
L &= a_{l4} (N + N_T(a)) - M_T(a) - M - a_{33}(a) \left[\frac{dQ_0}{dr} \Big|_{r=a} + \frac{\nu}{a} Q_0(a) \right] + \\
&+ \frac{\nu a_{33}(a)}{a} Q_0(b),
\end{aligned}$$

$$\Phi_0(r) = \frac{\Phi(r) - \Phi(b)}{a_{33}(a) \left[\frac{d\Phi}{dr} \Big|_{r=a} + \frac{v}{a} (\Phi(a) - \Phi(b)) \right]},$$

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{1}{2} \Phi(b) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [S(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - S(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\ & \times [\Phi(r_k) S(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - \Phi(r_{k+1}) S(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] - \frac{1}{2} \Phi(b) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\ & \times [P_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - P_0(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\Phi(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - \\ & - \Phi(r_{k+1}) P_0(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] + \frac{1-v^2}{2m} f_I(b) [r_k^l D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+1}^l D_0(r_{k+1}) \times \\ & \times \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] - \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k^l D_0(r_k) f_I(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+1}^l D_0(r_{k+1}) \times \\ & \times f_I(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] - \frac{1-v^2}{2m} \Phi(b) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k^l D_0(r_k) f(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - \\ & - r_{k+1}^l D_0(r_{k+1}) f(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] + \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k^l f(r_k) \Phi(r_k) \times \\ & \times D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+1}^l f(r_{k+1}) \Phi(r_{k+1}) D_0(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] - \frac{1-v^2}{2m} \varphi_I(b) \times \\ & \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k^{c-l} D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+1}^{c-l} D_0(r_{k+1}) \mathfrak{g}_r(r_{k+1})] + \frac{1-v^2}{2m} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^{c-l} \varphi_l(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+l}^{c-l} \varphi_l(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \right] + \\
& + \frac{1-v^2}{2m} \Phi(b) \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^{c-l} \varphi(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+l}^{c-l} \varphi(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \times \right. \\
& \times \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \left. \right] - \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^{c-l} \varphi(r_k) \Phi(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+l}^{c-l} \varphi(r_{k+l}) \times \right. \\
& \times \Phi(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \left. \right] - \frac{1-v^2}{4mb^c} \left\{ \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^{c-l} D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - \right. \right. \\
& - r_{k+l}^{c-l} D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \left. \right] - b^m \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^l D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+l}^l D_0(r_{k+l}) \times \right. \\
& \times \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \left. \right] \left\{ \Phi(b) \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[t(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - t(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \right] - \right. \\
& - \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[t(r_k) \Phi(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - t(r_{k+l}) \Phi(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \right] \left. \right\} + \frac{1-v^2}{2mb^c} \times \\
& \times \left\{ \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^{c-l} D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+l}^{c-l} D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \right] - b^m \times \right. \\
& \times \sum_{k=l}^n (r_k + r_{k+l}) \left[r_k^l D_0(r_k) \mathfrak{g}_r(r_k) - r_{k+l}^l D_0(r_{k+l}) \mathfrak{g}_r(r_{k+l}) \right] \left. \right\} G(b).
\end{aligned}$$

Используя метод математической индукции, нетрудно получить следующие аналитические выражения функции $\mathfrak{g}_r(r)$ для произвольной точки на интегральной кривой:

$$\mathfrak{g}_r(r_l) = \frac{-\beta(r_l) \pm \sqrt{\beta^2(r_l) - 4\alpha(r_l)\gamma(r_l)}}{2\alpha(r_l)},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(r_l) &= \frac{1-v^2}{4mb^c} (r_l + r_2)^2 \left(\frac{va_{33}(a)}{a} \Phi_0(r_l) - l \right) (r_l^{c-l} - b^m r_l^l) D_0(r_l) \times \\ &\times (\Phi(r_l) - \Phi(b)) t(r_l), \\ \beta(r_l) &= \frac{r_l + r_2}{2} \left(\frac{va_{33}(a)}{a} \Phi_0(r_l) - l \right) \left\{ d(r_l) [\Phi(r_l) - \Phi(b)] - g(r_l) \times \right. \\ &\times [f_l(r_l) - f_l(b)] \lambda(r_l) [\varphi_l(r_l) - \varphi_l(b)] \left. \right\} + \frac{1-v^2}{2mb^c} (r_l + r_2) (r_l^{c-l} - b^m r_l^l) \times \\ &\times D_0(r_l) \left[\left(\frac{va_{33}(a)}{a} \Phi_0(r_l) - l \right) G(b) + G(r_l) \right] - l, \\ \gamma(r_l) &= L \Phi_0(r_l) + Q_0(r_l) - Q_0(b), \end{aligned}$$

$$d(r_l) = P_0(r_l) - S(r_l) + \frac{1-v^2}{m} [r_l^l f(r_l) - r_l^{c-l} \varphi(r_l)] D_0(r_l),$$

$$g(r_l) = \frac{1-v^2}{m} r_l^l D_0(r_l), \quad \lambda(r_l) = \frac{1-v^2}{m} r_l^{c-l} D_0(r_l).$$

$$\mathfrak{g}_r(r_k) = \frac{-\beta(r_k) \pm \sqrt{\beta^2(r_k) - 4\alpha(r_k)\gamma(r_k)}}{2\alpha(r_k)}, \quad (k = \overline{2, n}),$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha(r_k) &= \frac{1-v^2}{4mb^c} (r_{k+1} - r_{k-1})^2 \left(\frac{va_{33}(a)}{a} \Phi_0(r_k) - 1 \right) (r_k^{c-1} - b^m r_k^l) \times \\
&\times D_0(r_k) (\Phi(r_k) - \Phi(b)) t(r_k), \\
\beta(r_k) &= \frac{r_{k+1} - r_{k-1}}{2} \left(\frac{va_{33}(a)}{a} \Phi_0(r_k) - 1 \right) \left\{ d(r_k) [\Phi(r_k) - \Phi(b)] - g(r_k) \times \right. \\
&\times [f_l(r_k) - f_l(b)] \lambda(r_k) [\varphi_l(r_k) - \varphi_l(b)] \left. \right\} + \frac{1-v^2}{2mb^c} (r_{k+1} - r_{k-1}) (r_k^{c-1} - b^m r_k^l) \times \\
&\times D_0(r_k) \left[\left(\frac{va_{33}(a)}{a} \Phi_0(r_k) - 1 \right) G(b) + G(r_k) \right] + \frac{1-v^2}{4mb^c} (r_{k+1} - r_{k-1}) \times \\
&\times \left(\frac{va_{33}(a)}{a} \Phi_0(r_k) - 1 \right) \left\{ (r_k^{c-1} - b^m r_k^l) D_0(r_k) [(r_l + r_2) t(r_l) (\Phi(r_l) - \Phi(b))] \times \right. \\
&\times \mathfrak{G}_r(r_l) + \left. \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) t(r_j) (\Phi(r_j) - \Phi(b)) \mathfrak{G}_r(r_j) \right] + t(r_k) (\Phi(r_k) - \Phi(b)) + \\
&+ \left[(r_l + r_2) (r_l^{c-1} - b^m r_l^l) D_0(r_l) \mathfrak{G}_r(r_l) + \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) (r_j^{c-1} - b^m r_j^l) \times \right. \\
&\times D_0(r_j) \mathfrak{G}_r(r_j) \left. \right] \left. \right\} - \frac{1-v^2}{4mb^c} (r_{k+1} - r_{k-1}) (r_k^{c-1} - b^m r_k^l) D_0(r_k) [(r_l + r_2) t(r_l) \times \\
&\times (\Phi(r_k) - \Phi(r_l)) \mathfrak{G}_r(r_l) + \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) (r_j) (\Phi(r_k) - \Phi(r_j)) \mathfrak{G}_r(r_j)] - 1, \\
\gamma(r_k) &= L \Phi_0(r_k) + \mathcal{Q}_0(r_k) - \mathcal{Q}_0(b) + \left(\frac{va_{33}(a)}{a} \Phi_0(r_k) - 1 \right) \left\{ \left(d(r_l) [\Phi(r_l) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Phi(b)]-g(r_l)[f_l(r_l)-f_l(b)]+\lambda(r_l)[\varphi_l(r_l)-\varphi_l(b)]\Bigg)\frac{r_l+r_2}{2}\mathfrak{G}_r(r_l)+ \\
& +\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k-1}(r_{j+1}-r_{j-1})\Big(d(r_j)[\Phi(r_j)-\Phi(b)]-g(r_j)[f_l(r_j)-f_l(b)]+\lambda(r_j)\times \\
& \times[\varphi_l(r_j)-\varphi_l(b)]\Big)\mathfrak{G}_r(r_j)\Bigg\}+\frac{1-\nu^2}{4mb^c}\left(\frac{\nu a_{33}(a)}{a}\Phi_0(r_k)-1\right)\Bigg\{(r_l+r_2)t(r_l)\times \\
& \times[\Phi(r_l)-\Phi(b)]\mathfrak{G}_r(r_l)+\sum_{j=2}^{k-1}(r_{j+1}-r_{j-1})\times t(r_j)[\Phi(r_j)-\Phi(b)]\mathfrak{G}_r(r_j)\Bigg\}\times \\
& \times\left[(r_l+r_2)(r_l^{c-1}-b^m r_l^l)D_0(r_l)\mathfrak{G}_r(r_l)+\sum_{j=2}^{k-1}(r_{j+1}-r_{j-1})(r_j^{c-1}-b^m r_j^l)\times\right. \\
& \times D_0(r_j)\mathfrak{G}_r(r_j)\Bigg]+\frac{1-\nu^2}{2mb^c}\left\{(r_l+r_2)(r_l^{c-1}-b^m r_l^l)D_0(r_l)t(r_l)\mathfrak{G}_r(r_l)+\right. \\
& +\sum_{j=2}^{k-1}(r_{j+1}-r_{j-1})(r_j^{c-1}-b^m r_j^l)D_0(r_j)\mathfrak{G}_r(r_j)\Bigg\}\left[\left(\frac{\nu a_{33}(a)}{a}\Phi_0(r_k)-1\right)\times\right. \\
& \times G(b)-G(r_k)\Bigg]+\left[(r_l+r_2)(r_l^{c-1}-b^m r_l^l)D_0(r_l)\mathfrak{G}_r(r_l)+\sum_{j=2}^{k-1}(r_{j+1}-r_{j-1})\times\right. \\
& \times(r_j^{c-1}-b^m r_j^l)D_0(r_j)\mathfrak{G}_r(r_j)\Bigg]\left[(r_l+r_2)t(r_l)(\Phi(r_k)-\Phi(r_l))\mathfrak{G}_r(r_l)+\right. \\
& +\sum_{j=2}^{k-1}(r_{j+1}-r_{j-1})t(r_j)(\Phi(r_k)-\Phi(r_j))\mathfrak{G}_r(r_j)\Bigg],
\end{aligned}$$

$$d(r_k) = P_0(r_k) - S(r_k) + \frac{1-\nu^2}{m} [r_k^l f(r_k) - r_k^{c-l} \varphi(r_k)] D_0(r_k),$$

$$g(r_k) = \frac{1-\nu^2}{m} r_k^l D_0(r_k), \quad \lambda(r_k) = \frac{1-\nu^2}{m} r_k^{c-l} D_0(r_k).$$

Прогиб жестко закрепленной по внешнему контуру пластины, находящейся в условиях неравномерного по радиусу и толщине нагрева, будет равен

$$\begin{aligned} \omega(r) = & -L\psi(r) - G\varpi(r) - V(r) + rQ(b) - \frac{1}{2}\eta(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) [S(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) \times \\ & \times H(r - r_k) - S(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) [S(r_k) \eta(r_k) \times \\ & \times \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - S(r_{k+l}) \eta(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] + \frac{1}{2} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \times \\ & \times [\Phi(r_k) S(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \Phi(r_{k+l}) S(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) [r_k \Phi(r_k) S(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+l} \Phi(r_{k+l}) S(r_{k+l}) \times \\ & \times \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] + \frac{1}{2} \eta(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) [P_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \\ & - P_0(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) [\eta(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) \times \\ & \times H(r - r_k) - \eta(r_{k+l}) P_0(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] - \frac{1}{2} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \times \\ & \times [\Phi(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \Phi(r_{k+l}) P_0(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r - r_{k+l})] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k \Phi(r_k) P_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \Phi(r_{k+1}) P_0(r_{k+1}) \right. \\
& \times \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \left. \right] - \frac{1-v^2}{2m} f_2(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^l D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - \right. \\
& - r_{k+1}^l D_0(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \left. \right] + \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^l f_2(r_k) D_0(r_k) \times \right. \\
& \times \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1}^l f_2(r_{k+1}) D_0(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \left. \right] + \frac{1-v^2}{2m} \times \\
& \times r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^l f_l(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1}^l f_l(r_{k+1}) D_0(r_{k+1}) \times \right. \\
& \times \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \left. \right] - \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^{l+1} f_l(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) \times \right. \\
& \times H(r - r_k) - r_{k+1}^{l+1} f_l(r_{k+1}) D_0(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \left. \right] + \frac{1-v^2}{2m} \eta(r) \times \\
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^l f(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1}^l f(r_{k+1}) D_0(r_{k+1}) \times \right. \\
& \times \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \left. \right] - \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^l \eta(r_k) f(r_k) D_0(r_k) \times \right. \\
& \times \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1}^l \eta(r_{k+1}) f(r_{k+1}) D_0(r_{k+1}) \mathfrak{G}_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1}) \left. \right] - \\
& - \frac{1-v^2}{2m} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[r_k^l \Phi(r_k) f(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1}^l \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \Phi(r_{k+l})f(r_{k+l})D_0(r_{k+l})\mathfrak{G}_r(r_{k+l})H(r-r_{k+l})\Big] + \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \times \\
& \times \Big[r_k^{l+l} \Phi(r_k)f(r_k)D_0(r_k)\mathfrak{G}_r(r_k)H(r-r_k) - r_{k+l}^{l+l} \Phi(r_{k+l})f(r_{k+l})D_0(r_{k+l}) \times \\
& \times \mathfrak{G}_r(r_{k+l})H(r-r_{k+l}) \Big] + \frac{1-v^2}{2m} \varphi_2(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \Big[r_k^{c-l} D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) \times \\
& \times H(r-r_k) - r_{k+l}^{c-l} D_0(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r-r_{k+l}) \Big] - \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \times \\
& \times \Big[r_k^{c-l} \varphi_2(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r-r_k) - r_{k+l}^{c-l} \varphi_2(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) \times \\
& \times H(r-r_{k+l}) \Big] - \frac{1-v^2}{2m} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \Big[r_k^{c-l} \varphi_l(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r-r_k) - \\
& - r_{k+l}^{c-l} \varphi_l(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r-r_{k+l}) \Big] + \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \times \\
& \times \Big[r_k^c \varphi_l(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r-r_k) - r_{k+l}^c \varphi_l(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) \times \\
& \times H(r-r_{k+l}) \Big] - \frac{1-v^2}{2m} \eta(r) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \Big[r_k^{c-l} \varphi(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r-r_k) - \\
& - r_{k+l}^{c-l} \varphi(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \mathfrak{G}_r(r_{k+l}) H(r-r_{k+l}) \Big] + \frac{1-v^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+l}) \times \\
& \times \Big[r_k^{c-l} \eta(r_k) \varphi(r_k) D_0(r_k) \mathfrak{G}_r(r_k) H(r-r_k) - r_{k+l}^{c-l} \eta(r_{k+l}) \varphi(r_{k+l}) D_0(r_{k+l}) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \vartheta_r(r_{k+1})H(r-r_{k+1})\Big] + \frac{1-\nu^2}{2m} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \Big[r_k^{c-1} \Phi(r_k) \varphi(r_k) D_0(r_k) \times \\
& \times \vartheta_r(r_k) H(r-r_k) - r_{k+1}^{c-1} \Phi(r_{k+1}) \varphi(r_{k+1}) D_0(r_{k+1}) \vartheta_r(r_{k+1}) H(r-r_{k+1}) \Big] - \\
& - \frac{1-\nu^2}{2m} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \Big[r_k^c \Phi(r_k) \varphi(r_k) D_0(r_k) \vartheta_r(r_k) H(r-r_k) - r_{k+1}^{c-1} \Phi(r_{k+1}) \times \\
& \times \varphi(r_{k+1}) D_0(r_{k+1}) \vartheta_r(r_{k+1}) H(r-r_{k+1}) \Big],
\end{aligned}$$

где

$$\psi(r) = \int \Phi_0(r) dr, \quad \varpi(r) = \int \left(\frac{\nu a_{33}(a)}{a} \Phi_0(r) - 1 \right) dr, \quad V(r) = \int Q(r) dr,$$

$$f_2(r) = \int f_1(r) dr, \quad \varphi_2(r) = \int \varphi_1(r) dr, \quad \eta(r) = \int \Phi(r) dr.$$

На рисунках 16-17 представлены результаты расчетов угла поворота и прогиба для жестко закрепленной по внешнему контуру пластины, находящейся в условиях неравномерного по радиусу и толщине нагрева.

В качестве численного примера рассматривается изгиб кольцевой пластины, модуль упругости материала которого изменяется по закону

$$E(r, z) = E_0 \left(1 + \frac{z}{h} \right) \frac{r}{b}.$$

Расчеты проводятся при следующих параметрах:

$$a = 0,2 \text{ м}, \nu = 0,3, M = 2 \cdot 10^6 \text{ Н}, E_0 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н / м}^2, h = 0,08 \text{ м}, b = 1 \text{ м}.$$

Изменение чисто теплового относительного удлинения, определяемого температурным полем, аппроксимируется выражением

$$\alpha_T T = \varepsilon_T^0 + (\varepsilon_T' - \varepsilon_T'') \frac{z}{h},$$

где $\varepsilon_T^0, \varepsilon_T', \varepsilon_T''$ – распределения чисто тепловых относительных удлинений соответственно на поверхностях $z = \frac{h}{2}$, $z = 0$, $z = -\frac{h}{2}$, задаваемые в виде полиномов

$$\varepsilon_T^0 = \sum_{j=0}^m \varepsilon_j^0 \left(\frac{r}{b}\right)^j, \quad \varepsilon_T' = \sum_{j=0}^m \varepsilon_j' \left(\frac{r}{b}\right)^j, \quad \varepsilon_T'' = \sum_{j=0}^m \varepsilon_j'' \left(\frac{r}{b}\right)^j.$$

При вычислениях ограничимся двумя членами полиномов. На основании данных примера, рассмотренного в [3]

$$\varepsilon_0^0 = 0,002096, \quad \varepsilon_1^0 = -0,001992, \quad \varepsilon_0' = 0,004785,$$

$$\varepsilon_1' = -0,002874, \quad \varepsilon_0'' = 0,0006875, \quad \varepsilon_1'' = -0,000610.$$

Аналитическое решение задачи осесимметричной деформации неоднородной круглой гибкой пластины с отверстием в условиях неравномерного по толщине и вдоль радиуса нагрева, описывающейся связанной системой нелинейных дифференциальных уравнений, представляет достаточно серьезное математическое затруднение. В работе при помощи метода частичной дискретизации в совокупности с непрямым операторным методом получено решение этой задачи для достаточно общих законов изменения механических характеристик и температурного поля. Построен пример для конкретного простого закона изменения цилиндрической жесткости пластины.

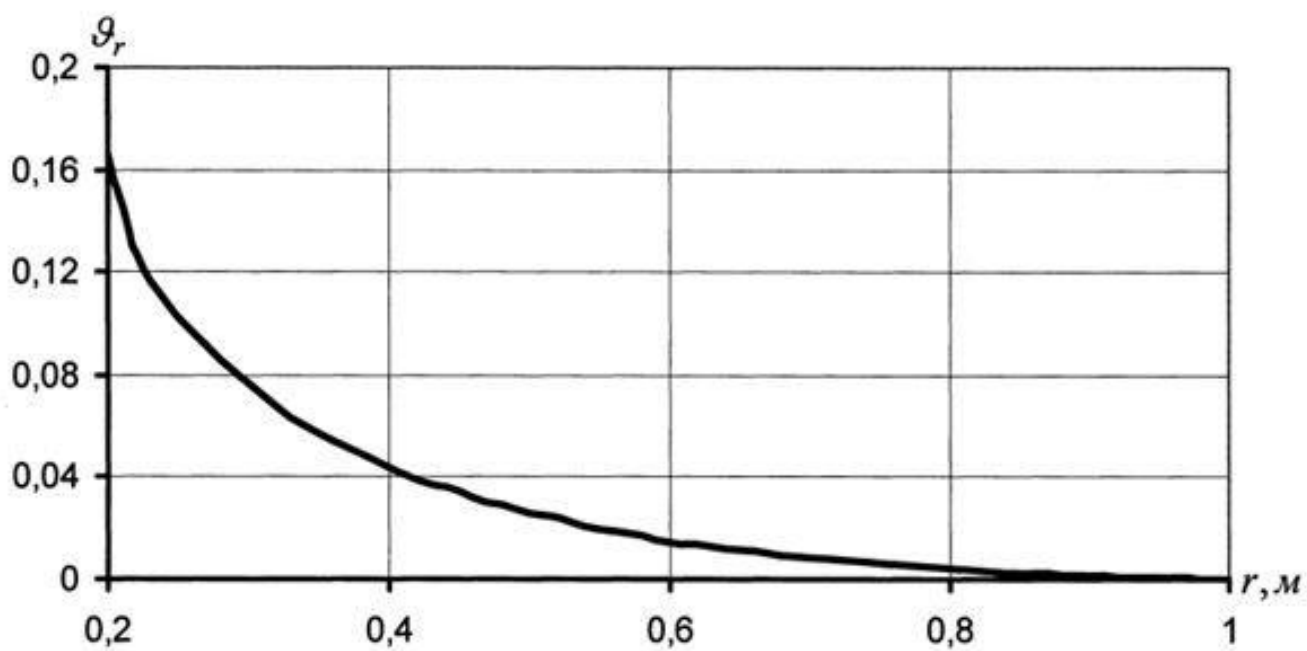


Рисунок 16 - Угол поворота для жестко закрепленной по внешнему контуру пластины, находящейся в условиях неравномерного по радиусу и толщине.

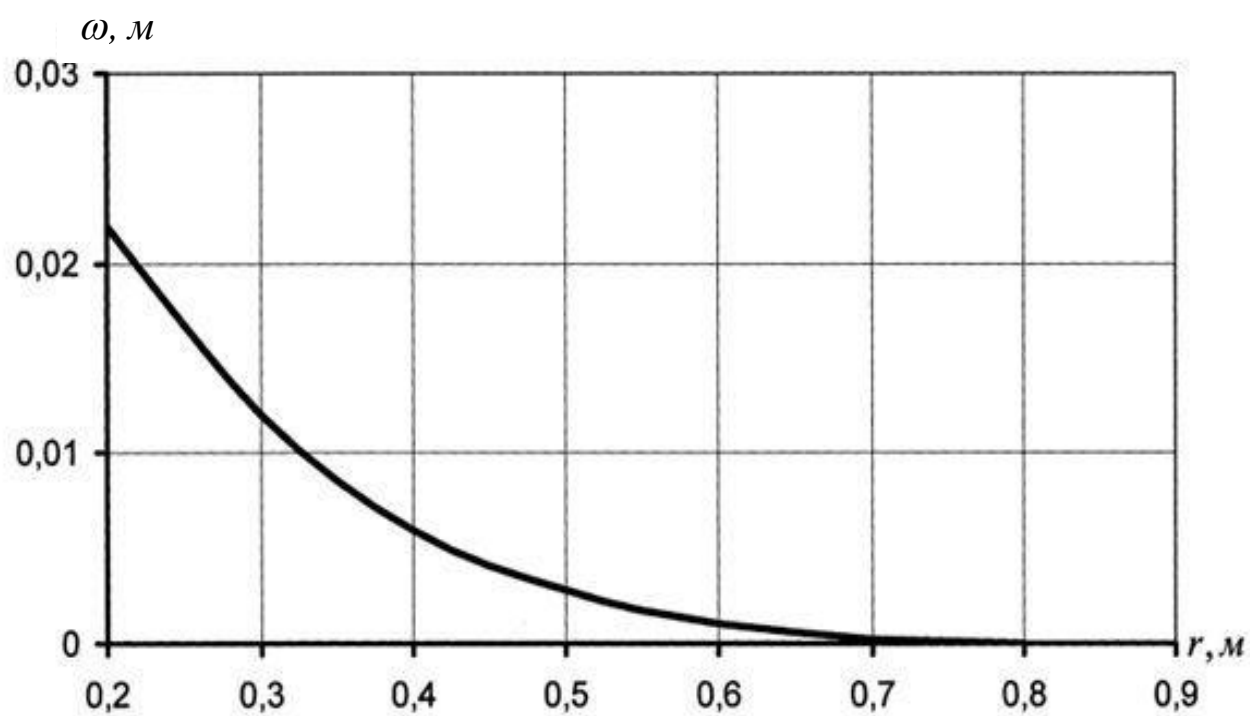


Рисунок 17 - Прогиб жестко закрепленной по внешнему контуру пластины, находящейся в условиях неравномерного по радиусу и толщине нагрева.

3 ЗАДАЧА ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ИЗГИБЕ КРУГЛОЙ ГИБКОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

3.1 Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим круглую пластину, известным образом закрепленных по контуру. Будем считать, что пластина является кольцеобразным, радиуса r и толщины h .

Рассмотрим случай, когда прогибы симметричны относительно оси z . При этом прогиб, а также все остальные величины, характеризующие напряженное и деформированное состояние, будут функциями только r .

Обозначим через θ угол между нормалью и осью z . Пусть будет u_r – радиальное перемещение точек срединной поверхности, ω – прогиб.

Деформация уравнения ε_r выражается формулой [23]:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2. \quad (3.1)$$

Деформация удлинения ε_φ имеет вид:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}. \quad (3.2)$$

Деформация сдвига при осесимметричном изгибе пластины не будет.

Сопоставление выражений (3.1) и (3.2) показывает, что каждое из них содержит величину u_r , так что не являются независимыми. Подставляя в (3.1) $u_r = r\varepsilon_\varphi$, находим уравнение совместности деформаций:

$$\frac{d}{dr}(re_\varphi) - \varepsilon_r = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2. \quad (3.3)$$

Главные кривизны определяются формулами:

$$x_r = \frac{d\theta}{dr}; \quad x_\varphi = \frac{1}{r}\theta \quad \text{или} \quad x_r = -\frac{d^2\omega}{dr^2}; \quad x_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{d\omega}{dr}. \quad (3.4)$$

Напряжения в срединной поверхности пластины обозначим через σ_r и σ_φ ; касательные напряжения здесь равны нулю. Для изгибающих моментов введены обозначения M_r и M_φ . Поперечная сила обозначается через Q .

Выделим элемент пластинки двумя радиальными сечениями, угол между которыми равен $d\varphi$, и двумя дуговыми сечениями, одно из которых расположено на окружности радиуса r , а второе – на окружности радиуса $(r + dr)$. На рисунке 18 изображены усилия в срединной поверхности, поперечные силы и векторы пар изгибающих моментов. Действующая на элемент поперечная нагрузка считается равной $qrd\varphi dr$, где q – интенсивность нагрузки.

Через точку, делящую внешнюю дугу пополам, проведем взаимно перпендикулярные оси по направлению радиуса (ось x) и вдоль касательной (ось y). Составим уравнение равновесия элемента в проекциях на ось x

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)hd\varphi - \sigma_r hrd\varphi - 2\sigma_\varphi hdr \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Пренебрегая малыми высшего порядка, получим:

$$rd\sigma_r + \sigma_r dr - \sigma_\varphi dr = 0,$$

или

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\varphi = 0. \quad (3.5)$$

Выпишем теперь уравнение моментов сил, действующих на элемент пластинки, относительно оси y :

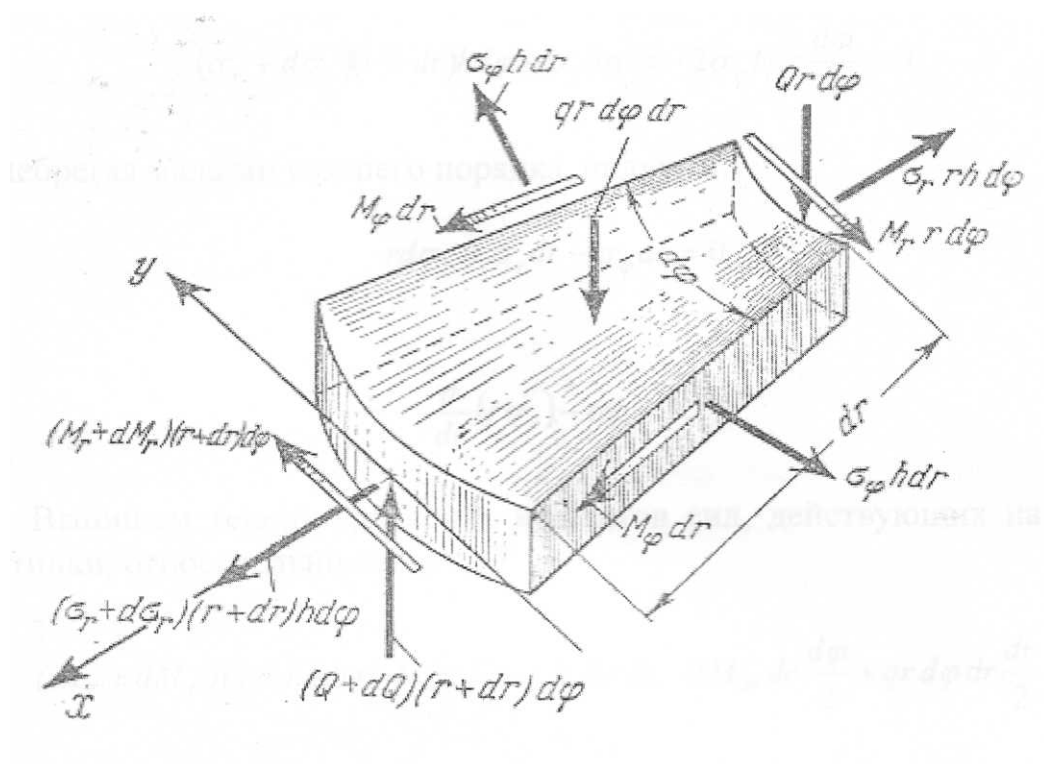


Рисунок 18 – Элемент пластинки

$$(M_r + dM_r)(r + dr)d\varphi - M_r r d\varphi + Qr d\varphi dr - 2M_\varphi dr \frac{d\varphi}{2} + qr d\varphi dr \frac{dr}{2} = 0$$

Отбрасывая малые высшего порядка, получим:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r}{r} - \frac{M_\varphi}{r} = -Q. \quad (3.6)$$

Для составления уравнения равновесия в проекциях на ось z надо, представить пластинку в деформированном состоянии. Сделаем круговое сечение пластинки по дуге радиуса r и рассмотрим центральную часть в изогнутом положении. Равнодействующая внешней нагрузки при q , зависящей от радиуса, равна

$$R = \int_0^r q 2\pi r dr. \quad (3.7)$$

Уравнение равновесия будет иметь вид

$$Q2\pi r + \sigma_r h 2\pi r \theta = R. \quad (3.8)$$

Для поперечной силы получим выражение

$$Q = \frac{1}{2\pi r} R - \sigma_r h \theta = \frac{1}{r} \int_0^r qr dr - \sigma_r h \theta. \quad (3.9)$$

Введем понятие функции нагрузки Ψ равной

$$\Psi = \frac{1}{r} \frac{R}{2\pi} = \frac{1}{r} \int_0^r qr dr. \quad (3.10)$$

Тогда поперечная сила будет

$$Q = \Psi - h\sigma_r \theta, \quad (3.11)$$

а интенсивность нагрузки выразится формулой

$$q = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Psi). \quad (3.12)$$

Напряжения в срединной поверхности связаны с деформациями зависимостями типа:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\varphi), \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_r). \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Изгибающие моменты выражаются формулами вида:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D(x_r + \nu x_\varphi) = -D \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right), \\ M_\varphi &= D(x_\varphi + \nu x_r) = -D \left(\frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} + \nu \frac{d^2 \omega}{dr^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Уравнение равновесия (3.5); содержащее напряжения в срединной поверхности, будет удовлетворено, если ввести функцию напряжений по формулам:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \quad \sigma_\varphi = \frac{d^2 \Phi}{dr^2}. \quad (3.15)$$

Сопоставляя уравнения (3.6) и (3.11), находим:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r}{r} - \frac{M_\varphi}{r} = -\Psi + h\sigma_r\theta. \quad (3.16)$$

Воспользуемся выражениями для изгибающих моментов (3.10) и для кривизн (3.4), тогда получим:

$$D \left(\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{\theta}{r^2} \right) = -\Psi + h \sigma_r \theta. \quad (3.17)$$

Как легко видеть, уравнение (3.14) может быть записано в виде

$$D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \theta) \right] = -\Psi + h \sigma_r \theta, \quad (3.18)$$

или после введения функции напряжений

$$D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \theta) \right] = -\Psi + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \theta. \quad (3.19)$$

Выразим θ через прогиб ω по формуле

$$\theta = -\frac{d\omega}{dr},$$

тогда будет

$$D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) \right] = \Psi + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{d\omega}{dr}. \quad (3.19)$$

Можно сказать, что выражение, заключенное здесь в квадратных скобках, соответствует оператору ∇^2 , записанному в полярной системе координат (при ω , не зависящем от полярного угла φ):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) = \nabla^2 \omega. \quad (3.20)$$

Поэтому уравнение равновесия (3.16) может быть представлено в виде:

$$D \frac{d}{dr} (\nabla^2 \omega) = \Psi + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{d\omega}{dr}. \quad (3.21)$$

Выразим далее деформации (3.13) через функцию напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \left(\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \nu \frac{d^2\Phi}{dr^2} \right), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E} \left(\frac{d^2\Phi}{dr^2} - \nu \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Вводя эти выражения в уравнение совместности деформаций (3.3), придадим ему вид

$$\frac{d^3\Phi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{E}{2r} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2. \quad (3.23)$$

Пользуясь и здесь оператором ∇^2 , найдем:

$$\frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) = -\frac{E}{2r} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2, \quad (3.24)$$

или

$$\frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) = -\frac{E}{2r} \theta^2. \quad (3.24')$$

Таким образом, основная система дифференциальных уравнений для круглой гибкой пластинки имеет вид

$$D \frac{d}{dr} (\nabla^2 \omega) = \Psi + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{d\omega}{dr}, \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) = -\frac{E}{2r} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2. \quad (3.26)$$

Уравнения (3.25)-(3.26) содержат полные производные третьего порядка, в то время как система уравнений для прямоугольных координат, содержат частные производные четвертого порядка. Поэтому интегрирование системы (3.25)-(3.26) представляет собой менее сложную задачу.

Для жесткой пластинки малого прогиба уравнение (3.26) отпадает, а уравнение (3.30) принимает вид

$$D \frac{d}{dr} (\nabla^2 \omega) = \Psi. \quad (3.27)$$

Напротив, для абсолютно гибкой пластинки можно пренебречь членом в уравнении (2.1.25), содержащим D ; тогда получим следующую систему уравнений:

$$\frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{d\omega}{dr} = -\Psi, \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) = -\frac{E}{2r} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2. \quad (3.29)$$

Повторяя вывод основных уравнений для круглой пластинки, имеющей начальную прогиб, получим следующую систему [23]:

$$D \frac{d}{dr} (\nabla^2 \omega) = \Psi + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \left(\frac{d\omega}{dr} + \frac{d\omega_{нч}}{dr} \right), \quad (3.30)$$

$$\frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) = -\frac{E}{r} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{нч}}{dr} \frac{d\omega}{dr} \right]. \quad (3.31)$$

Здесь через $\omega_{нч}$ обозначен начальный прогиб, считающийся некоторой функцией r .

Двум обыкновенным дифференциальным уравнениям третьего порядка должны соответствовать, вообще говоря, шесть граничных условий. Однако здесь можно ограничиться пятью условиями, так как

сама по себе функция Φ нас не интересует: достаточно определить ее первую производную по r .

Граничные условия для прогиба ω будут: при шарнирном опирании по контуру

$$\omega|_{r=r_b} = 0, \quad (3.32)$$

$$M_r|_{r=r_b} = D \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right)_{r=r_b} = 0; \quad (3.33)$$

при защемлении по контуру

$$\omega|_{r=r_b} = 0, \quad (3.34)$$

$$\theta|_{r=r_b} = - \left(\frac{d\omega}{dr} \right)_{r=r_b} = 0. \quad (3.35)$$

В случае пластинки, не имеющей центрального отверстия, к этим условиям может быть добавлено условие отсутствия поворота нормали для центра пластинки:

$$\theta|_{r=0} = \left(- \frac{d\omega}{dr} \right)_{r=0} = 0. \quad (3.36)$$

Выясним, каковы будут граничные условия для Φ . Допустим, что смещение точек контура в радиальном направлении оказывается невозможным. В этом случае должно быть

$$u_r|_{r=r_b} = 0. \quad (3.37)$$

Сопоставляя формулы (3.2) и (3.22), получим

$$\frac{u_r}{r} = E \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right). \quad (3.37)$$

Следовательно, при полном закреплении точек опорного контура по отношению к радиальным смещениям должно быть

$$\left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right)_{r=r_b} = 0. \quad (3.38)$$

В другом предельном случае, когда радиальное смещение контура ничем не стеснено, должно быть равно нулю на контуре радиальные напряжения σ_r :

$$\sigma_r|_{r=c} = \left(\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right)_{r=r_b} = 0. \quad (3.39)$$

К условиям (3.38) или (3.39) должно быть добавлено условие ограниченности производной $\frac{d\Phi}{dr}$ для всей площади пластинки, в частности, и при $r = r_a$

$$\left. \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r=r_a} = 0, \quad (3.40)$$

где r_a – внутренний радиус пластины.

В этой главе методом частичной дискретизации получены аналитические решения задачи об осесимметричном изгибе круглой гибкой пластины с учетом начальной кривизны.

3.2 Решение задачи об осесимметричном изгибе круглой гибкой пластины с учетом начальной кривизны, при защемлении по контуру

Рассмотрим круглую пластину, радиуса r_b , защемленную по контуру и подвергающуюся действию равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q .

Система разрешающих дифференциальных уравнении рассматриваемой задачи имеет вид (3.30) - (3.31).

А.С.Вольмир для получения решения системы задается формой прогиба и в дальнейшем использует метод Бубнова-Галеркина [23]. Система уравнений нередко решаются методом малого параметра, когда множитель перед нелинейными членами является малым. В случае, когда такое ограничение на этот множитель не ставится, то получение решения является проблематичной. Поэтому можно воспользоваться методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений [24], точность получаемого решения для которого многократно проверялась при решении задач, связанных получением изгибов пластин.

Пользуясь методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений, уравнение (3.31) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^3\Phi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi}{dr} = & -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\frac{E}{r_k} \left(\frac{1}{2} \times \right. \right. \\ & \times \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{нч}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \Big) \delta(r - r_k) - \frac{E}{r_{k+1}} \times \\ & \times \left. \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{нч}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \delta(r - r_{k+1}) \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

где $\delta(r - r_k)$ – обобщенная дельта-функция Дирака.

Общее решение уравнения (3.31) имеет выражение

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} = & C_1 r + C_2 \frac{1}{r} - \frac{E}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\ & + \frac{d\omega_{нч}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \Big) \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) H(r - r_k) - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{d\omega_{нч}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \Big) \left(r - \frac{r_{k+1}^2}{r} \right) H(r - r_{k+1}), \end{aligned} \quad (3.42)$$

где $H(r - r_k)$ – функция Хевисайда.

Рассмотрим пластину с отверстием с внутренним радиусом r_a . Внешний радиус обозначим через r_b . Отметим, что система уравнений (3.30)-(3.31) записана для пластины постоянной толщины h . Вследствие того, что на r_b не накладывается ограничение о малости, произвольную постоянную C_2 примем, равной нулю.

Граничные условия примем в виде (3.34), (3.35) и

$$\left. \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r=r_a} = \sigma_o = const. \quad (3.43)$$

С учетом условий (3.43) решение уравнения (3.41) будет

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} = & \frac{\sigma_o}{r_a} - \frac{E}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{нч}(r_k)}{dr} \times \right. \right. \\ & \times \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left. \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) H(r - r_k) - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{d\omega_{нч}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(r - \frac{r_{k+1}^2}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Подставив полученное выражение в уравнение (3.30) и выполнив далее дискретизацию множителя $\frac{d\omega}{dr}$ в правой части этого уравнения получим

$$\frac{d^3\omega}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\omega}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} = \frac{\psi}{D} + \frac{h\sigma_o}{Dr_a} \cdot \frac{d\omega_{нч}}{dr} \cdot \frac{1}{r} - \frac{Eh}{4Dr} \cdot \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) H(r - r_k) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(r - \frac{r_{k+1}^2}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right] \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} + \\
& + \frac{h\sigma_o}{2Dr_a} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\frac{1}{r_k} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \delta(r - r_k) - \frac{1}{r_{k+1}} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \delta(r - r_{k+1}) \right) - \\
& - \frac{Eh}{8D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \times \right. \\
& \times \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \frac{1}{r_{i+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{i+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \left. \right\} \frac{d\omega_k}{dr} \delta(r - r_k)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Общее решение (3.45) имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dr} = & C_3 \frac{1}{r} + C_4 r + \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr + \frac{h\sigma_o r}{2Dr_a} \int \frac{1}{r} \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} dr - \\
& - \frac{h\sigma_o}{2Dr_a r} \int r \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} dr + \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \frac{d\omega_{H\psi}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left. \right) \left(\frac{1}{r} B(r, r_k) - rA(r, r_k) \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \right. \\
& + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \left. \right) \left(\frac{1}{r} B(r, r_{k+1}) - rA(r, r_{k+1}) \right) \left. \right] + \frac{h\sigma_o}{4Dr_a} \times
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{r} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} H(r - r_k) - \left(\frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r} \right) \times \right. \\
& \times \left. \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} H(r - r_{k+1}) \right] + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \times \right. \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{r_k^2}{r_i r} - \frac{r_i}{r} - \frac{r}{r_i} + \frac{r_i r}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{i+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{r_k^2}{r_{i+1} r} - \frac{r_{i+1}}{r} - \frac{r}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1} r}{r_k^2} \right) \right] \left. \right\} \frac{d\omega(r_k)}{dr} H(r - r_k),
\end{aligned}$$

где

$$B(r, r_k) = \int \left(\frac{r^2}{r_k} - r_k \right) \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} H(r - r_k) dr,$$

$$A(r, r_k) = \int \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2} \right) \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} H(r - r_k) dr.$$

Принимая во внимание то, что первый член (3.46) неограниченно растет, при стремлении к нулю, будем считать $C_3 = 0$. Произвольное постоянное C_4 находим из условия (3.35):

$$\begin{aligned}
C_4 = & \left[-\frac{1}{2D} \int \psi dr + \frac{1}{2Dr_b^2} \int r^2 \psi dr - \frac{h\sigma_o}{2Dr_a} \int \frac{1}{r} \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} dr + \frac{h\sigma_o}{2Dr_a r_b^2} \int r \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} dr \right]_{r=r_b} - \\
& - \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_b^2} B(r_b, r_k) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -A(r_b, r_k) \Big) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_b^2} B(r_b, r_{k+1}) - \right. \\
& \left. - A(r_b, r_{k+1}) \right) \Big] - \frac{h\sigma_o}{4Dr_a} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} - \left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r_b^2} \right) \times \right. \\
& \times \left. \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right] - \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_i)}{dr} \times \right. \right. \right. \\
& \times \left. \left. \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{r_k^2}{r_i r_b^2} - \frac{r_i}{r_b^2} - \frac{1}{r_i} + \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{i+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \left(\frac{r_k^2}{r_{i+1} r_b^2} - \frac{r_{i+1}}{r_b^2} - \frac{1}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \right\} \frac{d\omega(r_k)}{dr}.
\end{aligned}$$

После соответствующих преобразований, с учетом свойств обобщенных функций, получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dr} = & F(r) + \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \\
& \times \left(\frac{1}{r} B(r, r_k) - rA(r, r_k) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_k) + rA(r_b, r_k) \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \right. \\
& + \left. \frac{d\omega_{H\psi}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r} B(r, r_{k+1}) - rA(r, r_{k+1}) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_{k+1}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + r A(r_b, r_{k+1}) \Bigg] + \frac{h\sigma_o}{4Db} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \Bigg[\left(\left(\frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{r} \right) H(r - r_k) - \frac{r}{r_k} + \frac{r_k r}{r_b^2} \right) \times \\
& \times \frac{d\omega(r_k)}{dr} - \left(\left(\frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r} \right) H(r - r_{k+1}) - \frac{r}{r_{k+1}} + \frac{r_{k+1} r}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \Bigg] + \\
& + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \times \right. \right. \\
& \times \left[\left(\frac{r_k^2}{r_i r} - \frac{r_i}{r} + \frac{r_i r}{r_k^2} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{r_k^2}{r_i r_b^2} - \frac{r_i}{r_b^2} - \frac{1}{r_i} + \frac{r_i}{r_k^2} \right) r \right] - \left(\frac{1}{2} \times \right. \\
& \times \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{i+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \Bigg] \left[\left(\frac{r_k^2}{r_{i+1} r} - \frac{r_{i+1}}{r} + \frac{r_{i+1} r}{r_k^2} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left. H(r - r_k) - \left(\frac{r_k^2}{r_{i+1} r_b^2} - \frac{r_{i+1}}{r_b^2} - \frac{1}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) r \right] \right\} \frac{d\omega(r_k)}{dr}, \tag{3.47}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F(r) = & \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr + \frac{h\sigma_o r}{2Dr_a} \int \frac{1}{r} \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} dr - \frac{h\sigma_o}{2Dr_a r} \int \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} r dr - \\
& - r \left[\frac{1}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr_b^2} \int r^2 \psi dr + \frac{h\sigma_o}{2Dr_a} \int \frac{1}{r} \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} dr - \frac{h\sigma_o}{2Dr_a r_b^2} \int \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} r dr \right]_{r=r_b}
\end{aligned}$$

При этом углы поворота в точках $r_k, k = \overline{1, n}$ определяются из системы рекуррентных уравнений второго порядка:

$$k = 1$$

$$\begin{aligned} & \frac{Eh}{16D} (r_1 + r_2) \left(\frac{1}{r_1} B(r_1, r_1) - r_1 A(r_1, r_1) - \frac{r_1}{c^2} B(r_b, r_1) + r_1 A(r_b, r_1) \right) \times \\ & \times \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \left\{ \frac{Eh}{8D} (r_1 + r_2) \frac{d\omega_{H^4}(r_1)}{dr} \left(\frac{1}{r_1} B(r_1, r_1) - r_1 A(r_1, r_1) - \frac{r_1}{r_b^2} B(r_b, r_1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + r_1 A(r_b, r_1) \right) + \frac{h\sigma_o}{4Dr_a} (r_1 + r_2) \left(\frac{r_1^2}{r_b^2} - 1 \right) - l \right\} \frac{d\omega(r_1)}{dr} + F(r_1) = 0, \end{aligned}$$

$$k = 2$$

$$\begin{aligned} & \frac{Eh}{16D} (r_3 - r_1) \left(\frac{1}{r_2} B(r_2, r_2) - r_2 A(r_2, r_2) - \frac{r_2}{r_b^2} B(r_b, r_2) + r_2 A(r_b, r_2) \right) \times \\ & \times \left(\frac{d\omega(r_2)}{dr} \right)^2 + \left\{ \frac{Eh}{8D} (r_3 - r_1) \frac{d\omega_{H^4}(r_2)}{dr} \left(\frac{1}{r_2} B(r_2, r_2) - r_2 A(r_2, r_2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{r_2}{r_b^2} B(r_b, r_2) + r_2 A(r_b, r_2) \right) - \frac{Eh}{16D} (r_3 - r_1) (r_1 + r_2) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{d\omega_{H^4}(r_1)}{dr} \frac{d\omega(r_1)}{dr} \right) \left(\frac{r_2^2}{r_1 r_b^2} - \frac{r_1}{r_b^2} - \frac{1}{r_1} + \frac{r_1}{r_2^2} \right) r_2 + \frac{h\sigma_o}{4Dr_a} (r_3 - r_1) \left(\frac{r_2}{r_b^2} - 1 \right) - \right. \\ & \left. - l \right\} \frac{d\omega(r_2)}{dr} + \frac{Eh}{8D} (r_1 + r_2) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H^4}(r_1)}{dr} \frac{d\omega(r_1)}{dr} \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{r_2} B(r_2, r_1) - r_2 A(r_2, r_1) - \frac{r_2}{r_b^2} B(r_b, r_1) + r_2 A(r_b, r_1) \right) + \frac{h\sigma_o}{4Dr_a} \times \end{aligned}$$

$$\times (r_1 + r_2) \left(\frac{r_1 r_2}{r_b^2} - \frac{r_1}{r_2} \right) \frac{d\omega(r_1)}{dr} + F(r_2) = 0 .$$

Далее методом математической индукции получим уравнение для произвольной k :

$$k = \overline{3, n}$$

$$\begin{aligned} & \frac{Eh}{16D} (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{1}{r_k} B(r_k, r_k) - r_k A(r_k, r_k) - \frac{r_k}{r_b^2} B(r_b, r_k) + r_k A(r_b, r_k) \right) \times \\ & \times \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \left\{ \frac{Eh}{8D} (r_{k+1} - r_{k-1}) \frac{d\omega_{\text{нч}}(r_k)}{dr} \left(\frac{1}{r_k} B(r_k, r_k) - r_k A(r_k, r_k) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{r_k}{r_b^2} B(r_b, r_k) + r_k A(r_b, r_k) \right) + \frac{h\sigma_o}{4Dr_a} (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{r_k^3}{r_b^2} - l \right) - \right. \\ & \left. - \frac{Eh}{16D} (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ (r_1 + r_2) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{\text{нч}}(r_1)}{dr} \frac{d\omega(r_1)}{dr} \right) \times \right. \right. \\ & \times \left(\frac{r_k^2}{r_1 r_b^2} - \frac{r_1}{r_b^2} - \frac{l}{r_1} + \frac{r_1}{r_k^2} \right) r_k + \sum_{i=2}^{k-1} (r_{i+1} - r_{i-1}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{\text{нч}}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \times \\ & \times \left(\frac{r_k^2}{r_i r_b^2} - \frac{r_i}{r_b^2} - \frac{l}{r_i} + \frac{r_i}{r_k^2} \right) r_k \left. \right\} - l \left\{ \frac{d\omega(r_k)}{dr} + \frac{Eh}{8D} \left\{ (r_1 + r_2) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{\text{нч}}(r_1)}{dr} \right) \times \right. \right. \\ & \times \frac{d\omega(r_1)}{dr} \left. \right\} \left(\frac{1}{r_k} B(r_k, r_1) - r_k A(r_k, r_1) - \frac{r_k}{r_b^2} B(r_b, r_1) + r_k A(r_b, r_1) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=2}^{k-1} (r_{i+1} - r_{i-1}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_k} B(r_k, r_i) - r_k A(r_k, r_i) - \right. \\
& \left. - \frac{r_k}{r_b^2} B(r_b, r_i) + r_k A(r_b, r_i) \right) \left. \right\} + \frac{h\sigma_o}{4Dr_a} (r_1 + r_2) \left(\frac{r_k r_1}{r_b^2} - \frac{r_1}{r_k} \right) \frac{d\omega(r_1)}{dr} + \\
& + \frac{h\sigma_o}{4Dr_a} \sum_{i=2}^{k-1} (r_{i+1} - r_{i-1}) \left(\frac{r_k r_i}{r_b^2} - \frac{r_i}{r_k} \right) \frac{d\omega(r_i)}{dr} + \frac{Eh}{16D} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) \times \\
& \times \left\{ (r_1 + r_2) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_1)}{dr} \frac{d\omega(r_1)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r_b^2} \right) \left(\frac{r_j^2}{r_1} - r_1 \right) + \right. \\
& + \left. \sum_{i=2}^{j-1} (r_{i+1} - r_{i-1}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r_b^2} \right) \left(\frac{r_j^2}{r_i} - r_i \right) \right\} \times \\
& \times \frac{d\omega(r_j)}{dr} + F(r_k) = 0 .
\end{aligned}$$

Интегрируя (3.47) находим общее выражение для прогиба в виде

$$\begin{aligned}
\omega = C_5 + \int & \left(F(r) + \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \right. \\
& \times \left(\frac{1}{r} B(r, r_k) - r A(r, r_k) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_k) + r A(r_b, r_k) \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \right. \\
& + \left. \frac{d\omega_{H\psi}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left. \right) \left(\frac{1}{r} B(r, r_{k+1}) - r A(r, r_{k+1}) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_{k+1}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A(b_b, r_{k+1}) \Big) \Big) dr + \frac{h\sigma_o}{4Dr_a} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \Bigg[\left(\left(\frac{r^2}{2r_k} - r_k \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{2} \right) H(r - r_k) - \right. \\
& - \left. \frac{r^2}{2r_k} + \frac{r_k r^2}{2r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} - \left(\left(\frac{r^2}{2r_{k+1}} - r_{k+1} \ln \frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{2} \right) H(r - r_{k+1}) - \right. \\
& - \left. \frac{r^2}{2r_{k+1}} + \frac{r_{k+1} r^2}{2r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \Bigg] + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \times \right. \\
& \times \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{\text{нч}}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left[\left(\left(\frac{r_k^2}{r_i} - r_i \right) \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r^2}{2r_i} + \frac{r_i r^2}{2r_k^2} + \frac{r_k^2}{2r_i} - \frac{r_i}{2} \right) \times \right. \right. \\
& \times H(r - r_k) - \left. \left(\frac{r_k^2}{r_i r_b^2} - \frac{r_i}{r_b^2} - \frac{1}{r_i} + \frac{r_i}{r_k^2} \right) \frac{r^2}{2} \right] - \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{\text{нч}}(r_{i+1})}{dr} \right) \times \right. \\
& \times \left. \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left[\left(\left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}} - r_{i+1} \right) \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r^2}{2r_{i+1}} + \frac{r_{i+1} r^2}{2r_k^2} + \frac{r_k^2}{2r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{2} \right) \times \right. \\
& \times H(r - r_k) - \left. \left(\frac{r_k^2}{r_{i+1} r_b^2} - \frac{r_{i+1}}{r_b^2} - \frac{1}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \frac{r^2}{2} \right] \Bigg\} \frac{d\omega(r_k)}{dr}.
\end{aligned}$$

Учитывая условие (3.34) находим произвольную постоянную C_5 :

$$\begin{aligned}
C_5 = & - \left(\int \left(F(r) + \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{\text{нч}}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \right. \right. \\
& \times \left(\frac{1}{r} B(r, r_k) - r A(r, r_k) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_k) + r A(r_b, r_k) \right) - \left. \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d\omega_{Hy}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \left(\frac{1}{r} B(r, r_{k+1}) - r A(r, r_{k+1}) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_{k+1}) + \right. \\
& \left. + r A(r_b, r_{k+1}) \right) \Bigg) \Bigg) \Bigg) \Bigg) \Bigg)_{r=r_b} + \frac{h\sigma_o}{4Dr_a} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(r_k \ln \frac{r_b}{r_k} \frac{d\omega(r_k)}{dr} - \right. \\
& \left. - r_{k+1} \ln \frac{r_b}{r_{k+1}} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) - \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \times \right. \\
& \times \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{Hy}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{r_k^2}{r_i} - r_i \right) \ln \frac{r_b}{r_k} - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{d\omega_{Hy}(r_{i+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}} - r_{i+1} \right) \ln \frac{r_b}{r_k} \right\} \frac{d\omega(r_k)}{dr}.
\end{aligned}$$

Тогда решение уравнения (3.30) будет

$$\omega = \int \left(F(r) + \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{Hu}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \right. \\ \times \left(\frac{1}{r} B(r, r_k) - rA(r, r_k) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_k) + rA(r_b, r_k) \right) - \\ \left. \left. - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{Hu}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r} B(r, r_{k+1}) - rA(r, r_{k+1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_{k+1}) + rA(r_b, r_{k+1}) \right) \right) \right) dr - \left[\int \left(F(r) + \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{Hq}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r} B(r, r_k) - rA(r, r_k) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_k) + \right. \right. \\
& + rA(r_b, r_k) \left. \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{Hq}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r} B(r, r_{k+1}) - \right. \\
& - rA(r, r_{k+1}) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_{k+1}) + rA(r_b, r_{k+1}) \left. \right) \left. \right] dr \Bigg]_{r=r_b} + \frac{h\sigma_o}{4Dr_a} \times \\
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\left(\frac{r^2}{2r_k} - r_k \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{2} \right) H(r - r_k) - \frac{r^2}{2r_k} + \frac{r_k r^2}{2r_b^2} + \right. \right. \quad (3.48) \\
& + r_k \ln \frac{r_b}{r_k} \left. \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} - \left(\left(\frac{r^2}{2r_{k+1}} - r_{k+1} \ln \frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_k}{2} \right) H(r - r_{k+1}) - \frac{r^2}{2r_{k+1}} + \right. \\
& + \frac{r_{k+1} r^2}{2r_b^2} + r_{k+1} \ln \frac{r_b}{r_{k+1}} \left. \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \left. \right] + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \times \right. \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{Hq}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left[\left(\left(\frac{r_k^2}{r_i} - r_i \right) \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r^2}{2r_i} + \frac{r_i r^2}{2r_k^2} + \frac{r_k^2}{2r_i} - \frac{r_i}{2} \right) \times \right. \right. \\
& \times H(r - r_k) - \left(\frac{r_k^2}{r_i r_b^2} - \frac{r_i}{r_b^2} - \frac{1}{r_i} + \frac{r_i}{r_k^2} \right) \frac{r^2}{2} - \left(\frac{r_k^2}{r_i} - r_i \right) \ln \frac{r_b}{r_k} \left. \right] - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \right. \\
& + \frac{d\omega_{Hq}(r_{i+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \left. \right) \left[\left(\left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}} - r_{i+1} \right) \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r^2}{2r_{i+1}} + \frac{r_{i+1} r^2}{2r_k^2} + \frac{r_k^2}{2r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{2} \right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times H(r-r_k) - \left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}r_b^2} - \frac{r_{i+1}}{r_b^2} - \frac{1}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \frac{r^2}{2} - \left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}} - r_{i+1} \right) \ln \frac{r_b}{r_k} \left] \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right\}.$$

Существующий метод нахождения решений нелинейных дифференциальных уравнений Бубнова-Галеркина [23], хотя и является весьма полезным, однако при общей постановке задачи и стремлении числа линейной комбинации заданной линейной независимой системы к бесконечности не может гарантировать даже слабую сходимость приближенного решения к точному. В этой связи применение метода частичной дискретизации к рассматриваемой системе нелинейных уравнений оказывается весьма целесообразным.

3.3 Аналитическое решение задачи об осесимметричном изгибе шарнирно опертой пластины при равномерной нагрузке

Разрешающие дифференциальные уравнения остаются в виде (3.30) – (3.31). В случае шарнирного опирания по контуру граничные условия будут в виде (3.32), (3.33) и

$$\left. \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r=r_a} = 0. \quad (3.49)$$

Общее решение задачи имеет вид [25]

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} = & C_1 r + C_2 \frac{1}{r} - \frac{E}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{d\omega_{HЧ}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) H(r - r_k) - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{d\omega_{HЧ}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(r - \frac{r_{k+1}^2}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

В силу условий (3.49) решение задачи будет

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{dr} = & -\frac{E}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_k)}{dr} \times \right. \right. \\
& \times \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left. \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) H(r - r_k) - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(r - \frac{r_{k+1}^2}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right). \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в уравнение (3.30) и выполним далее дискретизацию множителя $\frac{d\omega}{dr}$ в правой части этого уравнения. Тогда уравнение (3.30) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{d^3\omega}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\omega}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} = & \frac{\psi}{D} - \frac{Eh}{4Dr} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \frac{d\omega_{H\psi}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left. \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) H(r - r_k) - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \left. \left(r - \frac{r_{k+1}^2}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right) \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} - \frac{E}{8} \frac{h}{Dr} \times \\
& \times \frac{d\omega}{dr} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times H(r-r_k) - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \times \\
& \times \left(r - \frac{r_{k+1}^2}{r} \right) H(r-r_{k+1}) \Bigg) \cdot \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) (\delta(r-r_k) - \delta(r-r_{k+1})). \quad (3.52)
\end{aligned}$$

Общее решение уравнения (3.52) будет

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dr} = & C_3 \frac{1}{r} + C_4 r + \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr + \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r} \int \left(\frac{r^2}{r_k} - r_k \right) \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} H(r-r_k) dr - \right. \right. \\
& \left. \left. - r \int \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2} \right) \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} H(r-r_k) dr \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \times \right. \\
& \left. \times \left(\frac{1}{r} \int \left(\frac{r^2}{r_{k+1}} - r_{k+1} \right) \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} H(r-r_{k+1}) dr - r \int \left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r^2} \right) \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} H(r-r_{k+1}) dr \right) \right] - \\
& - \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{i+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right) \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} \times \\
& \times \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) H(r-r_k),
\end{aligned}$$

где $C_3 = 0$. Произвольную постоянную C_4 находим из условия (3.33) в виде

$$\begin{aligned}
C_4 = & -\frac{1}{2D} \left[\int \psi dr + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r_b^2} \int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b} - \frac{Eh}{8D(1+\nu)} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(\frac{\nu-1}{r_b^2} \int \left(\frac{r^2}{r_k} - r_k \right) \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} H(r-r_k) dr - \right. \right. \\
& - (1+\nu) \int \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2} \right) \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} H(r-r_k) dr \Bigg)_{r=r_b} - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{k+1})}{dr} \times \right. \\
& \times \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \Bigg) \left(\frac{\nu-1}{r_b^2} \int \left(\frac{r^2}{r_{k+1}} - r_{k+1} \right) \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} H(r-r_{k+1}) dr - (1+\nu) \int \left(\frac{1}{r_{k+1}} - \right. \right. \\
& - \frac{r_{k+1}}{r^2} \Bigg) \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} H(r-r_{k+1}) dr \Bigg)_{r=r_b} \Bigg] + \frac{Eh}{16D(1+\nu)} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(1 + \frac{r_k^2}{r_b^2} + \right. \\
& + \nu \left(1 - \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) \Bigg) \left(\sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \right. \right. \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{i+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right) \Bigg) \frac{d\omega(r_k)}{dr}.
\end{aligned}$$

Тогда выражение для угла поворота получим в виде

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr - \frac{r}{2D} \left[\int \psi dr + \frac{1-\mu}{1+\mu} \cdot \frac{1}{r_b^2} \int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Ehr}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r^2} \int \left(\frac{r^2}{r_k} - r_k \right) \times \right. \right. \\
& \times \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_k) dr - \int \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2} \right) \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_k) dr - \frac{\nu - 1}{r_b^2 (1 + \nu)} \times \\
& \times \left[\int \left(\frac{r^2}{r_k} - r_k \right) \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_k) dr \right]_{r=r} + \left[\int \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2} \right) \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_k) dr \right]_{r=r_b} \Bigg] - \\
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r^2} \int \left(\frac{r^2}{r_{k+1}} - r_{k+1} \right) \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} \times \right. \\
& \times H(r - r_{k+1}) dr - \int \left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r^2} \right) \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_{k+1}) dr - \frac{\nu - 1}{r_b^2 (1 + \nu)} \times \\
& \times \left[\int \left(\frac{r^2}{r_{k+1}} - r_{k+1} \right) \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_{k+1}) dr \right]_{r=r_b} + \left[\int \left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r^2} \right) \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_{k+1}) dr \right]_{r=r_b} \Bigg] + \\
& + \frac{Ehr}{16D(1 + \nu)} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(1 + \frac{r_k^2}{r_b^2} + \nu \left(1 - \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) - (1 + \nu) \left(1 - \frac{r_k^2}{r^2} \right) H(r - r_k) \right) \times \\
& \times \left(\sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}(r_{i+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right) \right) \frac{d\omega_k}{dr} - \frac{Ehr}{16D(1 + \nu)} (r_n + r_{n+1}) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(1 + \frac{r_{n+1}^2}{r_b^2} + \nu \left(1 - \frac{r_{n+1}^2}{r_b^2} \right) - (1 + \nu) \left(1 - \frac{r_{n+1}^2}{r^2} \right) H(r - r_{n+1}) \right) \left(\sum_{i=1}^n (r_i + r_{i+1}) \times \right. \\
& \times \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{\text{HЧ}}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_{n+1}^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{d\omega_{\text{HЧ}}(r_{i+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_{n+1}^2} \right) \right) \left. \right) \frac{d\omega_{n+1}}{dr} . \tag{3.53}
\end{aligned}$$

При этом аналитическое выражение угла поворота в точках r_k находим из следующих алгебраических уравнений

$$k = 1$$

$$\begin{aligned}
& \frac{Ehr_1}{16D} (r_1 + r_2) \left(\frac{1}{r_1^2} B(r_1, r_1) - A(r_1, r_1) - \frac{\nu - 1}{r_b^2 (1 + \nu)} B(r_b, r_1) + A(r_b, r_1) \right) \times \\
& \times \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \left\{ \frac{Ehr_1}{8D} (r_1 + r_2) \frac{d\omega_{\text{HЧ}}(r_1)}{dr} \left(\frac{1}{r_1^2} B(r_1, r_1) - A(r_1, r_1) - \frac{\nu - 1}{r_b^2 (1 + \nu)} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times B(r_b, r_1) + A(r_b, r_1) \right) - 1 \right\} \frac{d\omega(r_1)}{dr} + F(r_1) = 0
\end{aligned}$$

$$k = 2$$

$$\frac{Ehr_2}{16D} (r_3 - r_1) \left(\frac{1}{r_2^2} B(r_2, r_2) - A(r_2, r_2) - \frac{\nu - 1}{r_b^2 (1 + \nu)} B(r_b, r_2) + A(r_b, r_2) \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{d\omega(r_2)}{dr} \right)^2 + \left\{ \frac{Ehr_2}{8D} (r_3 - r_1) \left(\frac{d\omega_{\text{H}\Psi}(r_2)}{dr} \left(\frac{1}{r_2^2} B(r_2, r_2) - A(r_2, r_2) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{\nu - 1}{r_b^2 (1 + \nu)} B(r_b, r_2) + A(r_b, r_2) \right) + \frac{1}{2(1 + \nu)} \left(1 + \frac{r_2^2}{r_b^2} + \nu \left(1 - \frac{r_2^2}{r_b^2} \right) \right) \right\} \times \\
& \times (r_1 + r_2) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{\text{H}\Psi}(r_1)}{dr} \frac{d\omega(r_1)}{dr} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{r_1}{r_2^2} \right) \right) - I \left\{ \frac{d\omega(r_2)}{dr} + \right. \\
& + \frac{Ehr_1}{8D} (r_1 + r_2) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{\text{H}\Psi}(r_1)}{dr} \frac{d\omega(r_1)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_2^2} B(r_2, r_1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - A(r_2, r_1) - \frac{\nu - 1}{r_b^2 (1 + \nu)} B(r_b, r_1) + A(r_b, r_1) \right) \right\} + F(r_2) = 0,
\end{aligned}$$

$$k = \overline{3, n}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{Ehr_k}{16D} (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{1}{r_k^2} B(r_k, r_k) - A(r_k, r_k) - \frac{\nu - 1}{r_b^2 (1 + \nu)} B(r_b, r_k) + A(r_b, r_k) \right) \times \\
& \times \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \left\{ \frac{Ehr_k}{8D} (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{d\omega_{\text{H}\Psi}(r_k)}{dr} \left(\frac{1}{r_k^2} B(r_k, r_k) - A(r_k, r_k) - \frac{\nu - 1}{r_b^2 (1 + \nu)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \times B(r_b, r_k) + A(r_b, r_k) \right) + \frac{1}{2(1 + \nu)} \left(1 + \frac{r_k^2}{r_b^2} + \nu \left(1 - \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) \right) \right\} \left((r_1 + r_2) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_l)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_l)}{dr} \frac{d\omega(r_l)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_l} - \frac{r_l}{r_k^2} \right) + \sum_{i=1}^{k-1} (r_{i+1} - r_{i-1}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{d\omega_{H\psi}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) \left. \right\} - l \left\{ \frac{d\omega(r_k)}{dr} + \frac{Ehr_k}{8D} \left\{ \sum_{i=1}^{k-2} (r_i + r_{i+1}) \times \right. \right. \\
& \times \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_k^2} B(r_k, r_i) - A(r_k, r_i) - \frac{\nu - l}{r_b^2 (1 + \nu)} \times \right. \right. \\
& \times B(r_b, r_i) + A(r_b, r_i) \left. \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{i+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \times \\
& \times \left(\frac{1}{r_k^2} B(r_k, r_{i+1}) - A(r_k, r_{i+1}) - \frac{\nu - l}{r_b^2 (1 + \nu)} B(r_b, r_{i+1}) + A(r_b, r_{i+1}) \right) \left. \right\} + \\
& + (r_{k-1} + r_k) \times \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k-1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{k-1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k-1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_k^2} B(r_k, r_{k-1}) - \right. \right. \\
& \left. \left. - A(r_k, r_{k-1}) - \frac{\nu - l}{r_b^2 (1 + \nu)} B(r_b, r_{k-1}) + A(r_b, r_{k-1}) \right) \right\} + F(r_k) = 0,
\end{aligned}$$

где

$$F(r) = \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{l}{2Dr} \int r^2 \psi dr - \frac{r}{2D} \left[\int \psi dr + \frac{l - \nu}{(1 + \nu)r_b^2} \int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b},$$

$$B(r, r_k) = \int \left(\frac{r^2}{r_k} - r_k \right) \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} H(r - r_k) dr,$$

$$A(r, r_k) = \int \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2} \right) \frac{d\omega_{H\psi}}{dr} H(r - r_k) dr.$$

Интегрируя (3.53) находим аналитическое выражение для прогиба в общем виде

$$\begin{aligned} \omega = & C_5 + \int F(r) dr + \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \\ & \times \left(\int \left(\frac{1}{r} B(r, r_k) - r A(r, r_k) \right) dr + \frac{(1-\nu)r^2}{2r_b^2(1+\nu)} B(c, r_k) + \frac{r^2}{2} A(c, r_k) \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \left. \right) \left(\int \left(\frac{1}{r} B(r, r_{k+1}) - r A(r, r_{k+1}) \right) dr + \frac{(1-\mu)r^2}{2r_b^2(1+\mu)} B(c, r_{k+1}) + \right. \\ & + \frac{r^2}{2} A(c, r_{k+1}) \left. \right) \left. \right] + \frac{Eh}{16Dl + \mu} \sum_{k=2}^n \left\{ (r_{k+1} - r_{k-1}) \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r_k^2}{r_b^2} \frac{r^2}{2} + \nu \left(1 - \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) \times \right. \right. \\ & \times \frac{r^2}{2} - (1+\mu) \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r_k^2}{r^2} - \frac{r_k^2}{2} - 1 \right) H(r - r_k) \left. \right] \left[\sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ & + \frac{d\omega_{H\psi}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \left. \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\psi}(r_{i+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \times \\ & \times \left. \left. \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \right] \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left. \right\}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (3.32)

$$\begin{aligned}
\omega = & \int F(r)dx - \left[\int F(r)dx \right]_{r=r_b} + \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}(r_k)}{dr} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left. \right) \left(\int \left(\frac{1}{r} \int \left(\frac{r^2}{r_k} - r_k \right) \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_k) dr - r \int \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2} \right) \times \right. \right. \\
& \times \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_k) dr \left. \right) dr - \int_{r=r_b} \left(\frac{1}{r} \int \left(\frac{r^2}{r_k} - r_k \right) \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_k) dr - \right. \\
& - r \int \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2} \right) \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_k) dr \left. \right) dr + \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} \left(\frac{r^2}{r_b^2} - 1 \right) \int_{r=r_b} \left(\frac{r^2}{r_k} - r_k \right) \times \\
& \times \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_k) dr + \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_b^2}{2} \right) \int_{r=r_b} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2} \right) \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_k) dr \left. \right) - \\
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}(r_{k+1})}{dr} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(\int \left(\frac{1}{r} \int \left(\frac{r^2}{r_{k+1}} - r_{k+1} \right) \times \right. \right. \\
& \times \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_{k+1}) dr - r \int \left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r^2} \right) \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_{k+1}) dr \left. \right) dr - \\
& - \int_{r=r_b} \left(\frac{1}{r} \int \left(\frac{r^2}{r_{k+1}} - r_{k+1} \right) \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_{k+1}) dr - r \int \left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r^2} \right) \times \right. \\
& \times \frac{d\omega_{H\mathcal{U}}}{dr} H(r - r_{k+1}) dr \left. \right) dr + \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} \left(\frac{r^2}{r_b^2} - 1 \right) \int_{r=r_b} \left(\frac{r^2}{r_{k+1}} - r_{k+1} \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{d\omega_{нч}}{dr} H(r - r_{k+l}) dr + \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_b^2}{2} \right) \int_{r=r_b} \left(\frac{1}{r_{k+l}} - \frac{r_{k+l}}{r^2} \right) + \frac{d\omega_{нч}}{dr} \times \\
& \times H(r - r_{k+l}) dr \left] \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+l} - r_{k-l}) \left[\left(1 + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{r_k^2}{c^2} \right) \frac{r^2}{2} - \right. \\
& - \frac{r_k^2}{1+\nu} - l + \frac{r_k^2}{c^2} - \left(\frac{r^2}{2} - l \right) \left(1 - \frac{r_k^2}{r^2} \right) H(r - r_k) \left. \right] \left\{ \sum_{i=l}^{k-l} (r_i + r_{i+l}) \times \right. \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega_{нч}(r_i)}{dr} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+l})}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{d\omega_{нч}(r_{i+l})}{dr} \frac{d\omega(r_{i+l})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+l}} - \frac{r_{i+l}}{r_k^2} \right) \right] \left. \right\} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Поскольку кривые решения квазистатических задач является плавными, то для получения значений функций $d\Phi/dr$, ω достаточно нескольких точек.

На рисунке 19 приведены графики изменения прогиба и угла поворота шарнирно закрепленной пластины без учета начальной кривизны.

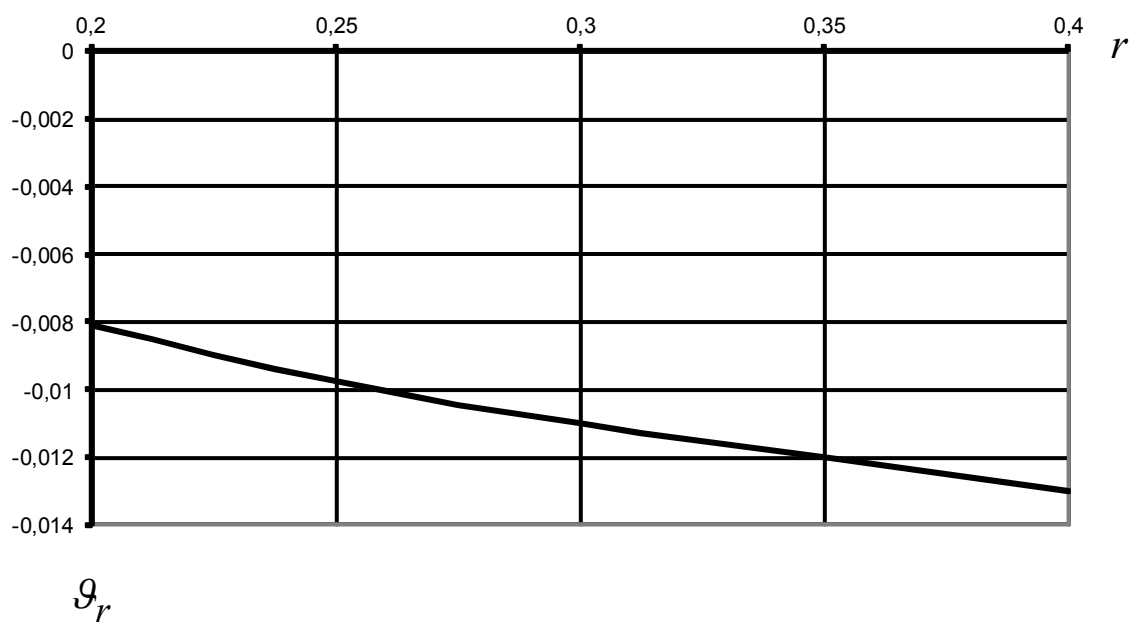
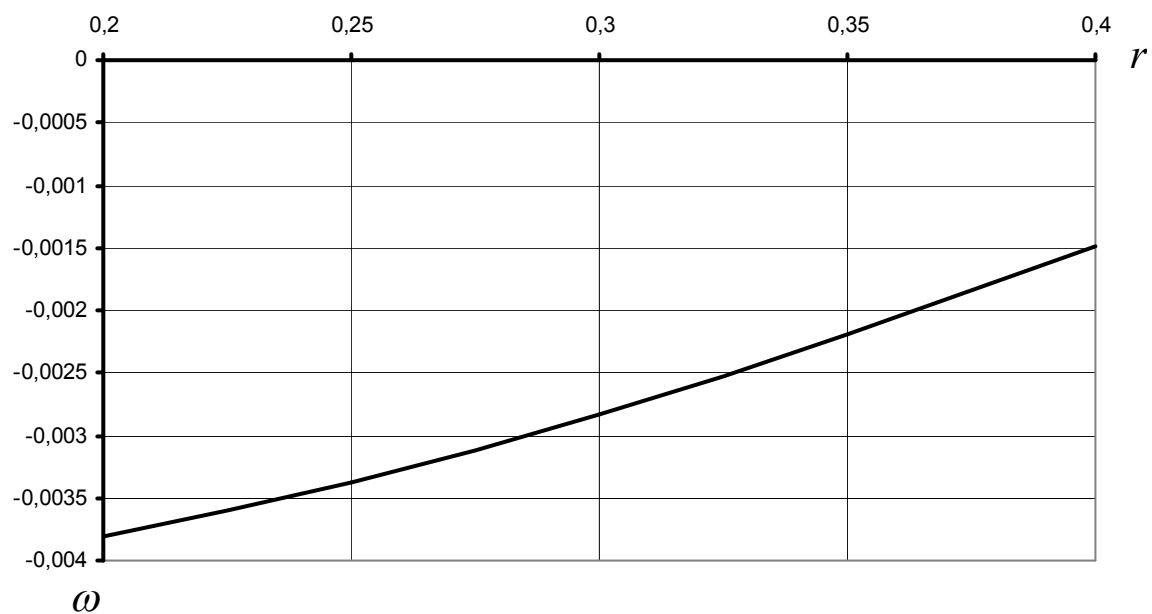


Рисунок 19 – Кривые изменения прогиба и угла поворота шарнирно закрепленной пластины без учета начальной кривизны.

3.4 Круглая гибкая пластина с заданным начальным прогибом

Рассмотрим круглую гибкую пластину с начальным прогибом $\omega_{нч} = f_{нч} \left(1 - r^2/r_b^2\right)^2$, шарнирно закрепленную по контуру и подвергающуюся действию равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q .

Тогда соответствующая система дифференциальных уравнений имеет следующий вид [23]

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d}{dr} (\nabla^2 \omega) &= \psi + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \left(\frac{d\omega}{dr} - \frac{4f_{нч}}{r_b^2} \left(r - \frac{r^3}{r_b^2} \right) \right) \\ \frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) &= -\frac{E}{r} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{нч}}{r_b^2} \left(r - \frac{r^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega}{dr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

где $f_{нч}$ – стрела начального прогиба, r_b – наружный радиус пластины. Внутренний радиус обозначим через r_a .

Пользуясь методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений, второе уравнение запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi}{dr} &= -\frac{E}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4f_{нч}}{r_b^2} \left(r_k - \frac{r_k^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \delta(r - r_k) + \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4f_{нч}}{r_b^2} \left(r_{k+1} - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \delta(r - r_{k+1}) \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Общее решение уравнения (3.56) будет [26]

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{dr} = & C_1 r + C_2 \frac{1}{r} - \frac{E}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{нч}}{r_b^2} \left(r_k - \frac{r_k^3}{r_b^2} \right) \right) \times \right. \\
 & \times \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left(\frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{r} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{нч}}{r_b^2} \left(r_{k+1} - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \right) \times \\
 & \times \left. \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \left(\frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right). \quad (3.57)
 \end{aligned}$$

Напомним, что система уравнений (3.55) записана для пластины постоянной толщины h . Вследствие того, что на r_a не накладывается ограничение о малости, произвольную постоянную C_2 примем, равной нулю.

Пластину рассмотрим при граничных условиях (3.32), (3.33), (3.1). Учет условий (3.49) дает

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{dr} = & -\frac{E}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{нч}}{r_b^2} \left(r_k - \frac{r_k^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \\
 & \times \left(\frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{r} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{нч}}{r_b^2} \left(r_{k+1} - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \times \\
 & \times \left. \left(\frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right). \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

Соответствующее первое уравнение системы (3.55) после применения метода частичной дискретизации примет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{d^3\omega}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\omega}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} = \frac{\psi}{D} + \frac{Eh f_{H\psi}}{D r_b^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{4 f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_k - \frac{r_k^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(\frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{r} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4 f_{H\psi}}{r_b^2} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left(r_{k+1} - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(\frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right) \left(1 - \frac{r^2}{r_b^2} \right) - \frac{Eh}{8D} \times \\
& \times \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 - \frac{4 f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_i - \frac{r_i^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \times \right. \\
& \left. \times \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4 f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_{i+1} - \frac{r_{i+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \times \right. \\
& \left. \times \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right) \cdot \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \delta(r - r_k). \tag{3.59}
\end{aligned}$$

Общее решение уравнения (3.59)

$$\begin{aligned}
& \frac{d\omega}{dr} = C_3 \frac{1}{r} + C_4 r + \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr + \frac{Eh f_{H\psi}}{8Dr_b^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 - \frac{4 f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_k - \frac{r_k^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \right] \left(r^3 - \frac{r^5}{3r_b^2} + \frac{r_k^2 r^3}{r_b^2} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{r_k^4}{r} + \frac{r_k^6}{3r_b^2 r} - 4r_k^2 r \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r_k^4 r}{r_b^2} \Bigg) H(r - r_k) - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{H\psi}}{r_b^2} \times \right. \\
& \times \left(r_{k+1} - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \Bigg) \left\langle \left(r^3 - \frac{r^5}{3r_b^2} + \frac{r_{k+1}^2 r^3}{r_b^2} - \frac{r_{k+1}^4}{r} + \frac{r_{k+1}^6}{3r_b^2 r} - 4r_{k+1}^2 r \times \right. \right. \\
& \times \ln \frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}^4 r}{r_b^2} \Bigg) H(r - r_{k+1}) + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) \times \quad (3.60) \\
& \times \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_i - \frac{r_i^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_{i+1} - \frac{r_{i+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \right\} \frac{d\omega(r_k)}{dr}.
\end{aligned}$$

С учетом условий (3.33) и того обстоятельства, что первый член решения (3.60) неограниченно растет при стремлении r к нулю, получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dr} &= \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr - \frac{r}{2D} \left[\int \psi dr + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r_b^2} \int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b} + \\
&+ \frac{Ehf}{8Dr_b^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_k - \frac{r_k^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left\langle \left(r^3 - \frac{r^5}{3r_b^2} + \right. \right. \right. \\
&+ \frac{r_k^2 r^3}{r_b^2} - \frac{r_k^4}{r} + \frac{r_k^6}{3r_b^2 r} - 4r_k^2 r \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r_k^4 r}{r_b^2} \Bigg) H(r - r_k) + r \left(\frac{\nu - 1}{r_b^2 (1 + \nu)} \left(\frac{r_b^4}{3} - r_k^2 r_b^2 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + r_k^4 - \frac{r_k^6}{3r_b^2} \Big) - c^2 - 4r_k^2 \ln \frac{r_k}{r_b} + \frac{r_k^4}{r_b^2} \Big) \Bigg\rangle - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_{k+1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \Bigg\rangle \left(r^3 - \frac{r^5}{3r_b^2} + \frac{r_{k+1}^2 r^3}{r_b^2} - \frac{r_{k+1}^4}{r} + \frac{r_{k+1}^6}{3r_b^2 r} - 4r_{k+1}^2 r \ln \frac{r}{r_{k+1}} - \right. \\
& \left. - \frac{r_{k+1}^4 r}{r_b^2} \right) H(r - r_{k+1}) + r \left(\frac{\nu - 1}{r_b^2 (1 + \nu)} \left(\frac{r_b^4}{3} - r_{k+1}^2 r_b^2 + r_{k+1}^4 - \frac{r_{k+1}^6}{3r_b^2} \right) - r_b^2 - \right. \\
& \left. - 4r_{k+1}^2 \ln \frac{r_{k+1}}{r_b} + \frac{r_{k+1}^4}{r_b^2} \right) \Bigg\rangle \Bigg] + \frac{Ehr}{16D(1 + \nu)} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(1 + \frac{r_k^2}{r_b^2} + \right. \\
& + \nu \left(1 - \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) - (1 + \nu) \left(1 - \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) H(r - r_k) \Bigg\} \left[\sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_i - \frac{r_i^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_{i+1} - \frac{r_{i+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \Bigg\} \frac{d\omega(r_k)}{dr}. \tag{3.61}
\end{aligned}$$

Аналитические выражения угла поворота в точках r_k определяются из следующих алгебраических уравнений:

$$k = 1$$

$$\frac{Ehf}{16Dr_b^2}(r_l+r_2)K(r_l)\left(\frac{d\omega(r_l)}{dr}\right)^2 - \left\{ \frac{Ehf}{2Dr_b^2}(r_l+r_2)\frac{f_{Hq}}{r_b^2}\left(r_l-\frac{r_l^3}{r_b^2}\right)K(r_l)+1 \right\} \times$$

$$\times \frac{d\omega(r_l)}{dr} + F(r_l) = 0,$$

$$k = \overline{2, n}$$

$$\frac{Ehf_{Hq}}{16Dr_b^2}(r_{k+1}-r_{k-1})K(r_k)\left(\frac{d\omega(r_k)}{dr}\right)^2 - \left\{ \frac{Ehf_{Hq}^2}{2Dr_b^4}(r_{k+1}-r_{k-1})\left(r_k-\frac{r_k^3}{r_b^2}\right)K(r_k) - \right.$$

$$- \frac{Ehr_k}{16D(1+\nu)}(r_{k+1}-r_{k-1})\left(1+\frac{r_k^2}{r_b^2}+\nu\left(1-\frac{r_k^2}{r_b^2}\right)\right)\left[(r_l+r_2)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega(r_l)}{dr}\right)^2 - \right.$$

$$- \frac{4f_{Hq}}{r_b^2}\left(r_l-\frac{r_l^3}{r_b^2}\right)\frac{d\omega(r_l)}{dr}\right)\left(\frac{1}{r_l}-\frac{r_l}{r_k^2}\right) + \sum_{i=2}^{k-1}(r_{k+1}-r_{k-1})\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega(r_i)}{dr}\right)^2 - \frac{4f_{Hq}}{r_b^2} \times \right.$$

$$\times \left(r_i-\frac{r_i^3}{r_b^2}\right)\frac{d\omega(r_i)}{dr}\right)\left(\frac{1}{r_i}-\frac{r_i}{r_k^2}\right)\left.+1\right\}\frac{d\omega(r_k)}{dr} + \frac{Ehf_{Hq}}{8Dr_b^2}(r_l+r_2)\frac{1}{r_l}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega(r_l)}{dr}\right)^2 - \right.$$

$$- \frac{4f_{Hq}}{r_b^2}\left(r_l-\frac{r_l^3}{r_b^2}\right)\frac{d\omega(r_l)}{dr}\right)\left(r_k^3-\frac{r_k^5}{3r_b^2}+\frac{r_l^2r_k^3}{r_b^2}-\frac{r_l^4}{r_k}+\frac{r_l^6}{3r_b^2r_k}-4r_l^2r_k\ln\frac{r_k}{r_l}-\frac{r_l^4r_k}{r_b^2} + \right.$$

$$\left.+r_3K(r_l)\right) + \frac{Ehf_{Hq}}{8Dr_b^2}\sum_{i=2}^{k-1}(r_{i+1}-r_{i-1})\frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega(r_i)}{dr}\right)^2 - \frac{4f_{Hq}}{r_b^2}\left(r_i-\frac{r_i^3}{r_b^2}\right)\frac{d\omega(r_i)}{dr}\right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(r_k^3 - \frac{r_k^5}{3r_b^2} + \frac{r_i^2 r_k^3}{r_b^2} - \frac{r_i^4}{r_k} + \frac{r_l^6}{3r_b^2 r_k} - 4r_i^2 r_k \ln \frac{r_k}{r_i} - \frac{r_i^4 r_k}{r_b^2} + r_k K(r_i) \right) + \frac{Eh\eta_k}{8D(1+\nu)} \times \\
& \times \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) \left(1 + \frac{r_j^2}{r_b^2} + \nu \left(1 - \frac{r_j^2}{r_b^2} \right) - (1+\nu) \left(1 - \frac{r_j^2}{r_k^2} \right) \right) \sum_{i=1}^{j-1} (r_i + r_{i+1}) \times \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_i - \frac{r_i^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_j^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_{i+1} - \frac{r_{i+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_j^2} \right) \right] + 1 \left[\frac{d\omega(r_j)}{dr} + F(r_k) \right] = 0 ,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F(r) &= \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr - \frac{r}{2D} \left[\int \psi dr + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r_b^2} \int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b} , \\
K(r_k) &= \frac{\nu-1}{r_b^2(1+\nu)} \left(\frac{r_b^4}{3} - r_k^2 r_b^2 + r_k^4 - \frac{r_k^6}{3r_b^2} \right) - r_b^2 - 4r_k^2 \ln \frac{r_k}{r_b} + \frac{r_k^4}{r_b^2} .
\end{aligned}$$

Интегрирование (3.61) дает

$$\omega = C_5 + \int \left(\frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr - \frac{r}{2D} \left[\int \psi dr + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r_b^2} \int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b} \right) dr +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Ehf}{32Dr_b^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_k - \frac{r_k^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left\langle \left(\frac{r^4}{r_k} - \right. \right. \right. \\
& - \frac{2r^6}{9r_k r_b^2} + \frac{r_k r^4}{r_b^2} - 4 \left(r_k^3 - \frac{r_k^5}{3r_b^2} + 2r_k r^2 \right) \ln \frac{r}{r_k} + 4r_k r^2 - \frac{2r_k^3 r^2}{r_b^2} - 5r_k^3 + \frac{1lr_k^5}{9r_b^2} \Bigg) \times \\
& \times H(r - r_k) + \frac{2(\nu - l)}{l + \mu} K(r_k) \Bigg] - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_{k+1} - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \times \\
& \times \left\langle \left(\frac{r^4}{r_{k+1}} - \frac{2r^6}{9r_{k+1} r_b^2} + \frac{r_{k+1} r^4}{r_b^2} - 4 \left(r_{k+1}^3 - \frac{r_{k+1}^5}{3r_b^2} + 2r_{k+1} r^2 \right) \ln \frac{r}{r_{k+1}} + 4r_{k+1} r^2 - \right. \right. \\
& - \frac{2r_{k+1}^3 r^2}{r_b^2} - 5r_{k+1}^3 + \frac{1lr_{k+1}^5}{9r_b^2} \Bigg) H(r - r_{k+1}) + \frac{2(\nu - l)}{l + \nu} K(r_{k+1}) + \\
& + \frac{Ehr}{16D} \sum_{k=2}^n \left\{ (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\left(l + \frac{l - \nu}{l + \nu} \cdot \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) \frac{r^2}{2} - \left(\frac{r^2}{2} - l \right) \left(l - \frac{r_k^2}{r^2} \right) \times \right. \right. \\
& \times H(r - r_k) \Bigg) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_i - \frac{r_i^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{l}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \right. \right. \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_{i+1} - \frac{r_{i+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{l}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \Bigg\} \frac{d\omega(r_k)}{dr}.
\end{aligned}$$

С учетом условия (3.32) решение первого дифференциального уравнения системы (3.55) получим в виде

$$\begin{aligned}
\omega = & \int \left(\frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr - \frac{r}{2D} \left[\int \psi dr + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r_b^2} \int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b} \right) dr - \\
& - \left[\int \left(\frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr - \frac{r}{2D} \left[\int \psi dr + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r_b^2} \int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b} \right) dr \right]_{r=r_b} + \\
& + \frac{Ehf}{32Dr_b^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hu}}{r_b^2} \left(r_k - \frac{r_k^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left\langle \left(\frac{r^4}{r_k} - \right. \right. \right. \\
& - \frac{2r^6}{9r_k r_b^2} + \frac{r_k r^4}{r_b^2} - 4 \left(r_k^3 - \frac{r_k^5}{3r_b^2} + 2r_k r^2 \right) \ln \frac{r}{r_k} + 4r_k r^2 - \frac{2r_k^3 r^2}{r_b^2} - 5r_k^3 + \frac{1lr_k^5}{9r_b^2} \Bigg) \times \\
& \times H(r - r_k) - \frac{7r_b^2}{9r_k} - 5r_k r_b^2 + 4 \left(r_k^3 - \frac{r_k^5}{3r_b^2} + 2r_k r_b^2 \right) \ln \frac{r_b}{r_k} + 7r_k^3 - \frac{1lr_k^5}{9r_b^2} - \frac{2(1-\nu)}{1+\nu} \times \\
& \times \left(\frac{r^2}{r_b^2} - 1 \right) \left(\frac{r_b^4}{3r_k} - r_k r_b^2 + r_k^3 - \frac{r_k^5}{3r_b^2} \right) - 4 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_b^2}{2} \right) \left(\frac{r_b^2}{r_k} + 4r_k \ln \frac{r_k}{r_b} - \frac{r_k^3}{r_b^2} \right) \Bigg] - \\
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hu}}{r_b^2} \left(r_{k+1} - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left\langle \left(\frac{r^4}{r_{k+1}} - \frac{2r^6}{9r_{k+1} r_b^2} + \frac{r_{k+1} r^4}{r_b^2} - \right. \right. \\
& - 4 \left(r_{k+1}^3 - \frac{r_{k+1}^5}{3r_b^2} + 2r_{k+1} r^2 \right) \ln \frac{r}{r_{k+1}} + 4r_{k+1} r^2 - \frac{2r_{k+1}^3 r^2}{r_b^2} - 5r_{k+1}^3 + \frac{1lr_{k+1}^5}{9r_b^2} \Bigg) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times H(r - r_{k+1}) - \frac{7r_b^2}{9r_{k+1}} - 5r_{k+1}r_b^2 + 4 \left(r_{k+1}^3 - \frac{r_{k+1}^5}{3r_b^2} + 2r_{k+1}r_b^2 \right) \ln \frac{r_b}{r_{k+1}} + 7r_{k+1}^3 - \\
& - \frac{11r_{k+1}^5}{9r_b^2} - \frac{2(1-\nu)}{1+\nu} \left(\frac{r^2}{r_b^2} - 1 \right) \left(\frac{r_b^4}{3r_{k+1}} - r_{k+1}r_b^2 + r_{k+1}^3 - \frac{r_{k+1}^5}{3r_b^2} \right) - 4 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_b^2}{2} \right) \times \\
& \times \left(\frac{r_b^2}{r_{k+1}} + 4r_{k+1} \ln \frac{r_{k+1}}{r_b} - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \Bigg] + \frac{Ehr}{16D} \sum_{k=2}^n \left\{ (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\left(1 + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) \times \right. \right. \\
& \times \frac{r^2}{2} - \frac{r_k^2}{1+\mu} - 1 + \frac{r_k^2}{r_b^2} - \left. \left(\frac{r^2}{2} - 1 \right) \left(1 - \frac{r_k^2}{r^2} \right) H(r - r_k) \right) \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \times \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{HЧ}}{r_b^2} \left(r_i - \frac{r_i^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{4f_{HЧ}}{r_b^2} \left(r_{i+1} - \frac{r_{i+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \Bigg\} \frac{d\omega(r_k)}{dr}. \quad (3.62)
\end{aligned}$$

На рисунках 20, 21 показаны графики изменения угла поворота и изгиба гибкой пластины при отдельных начальных значениях стрелы прогиба $f_{HЧ}$.

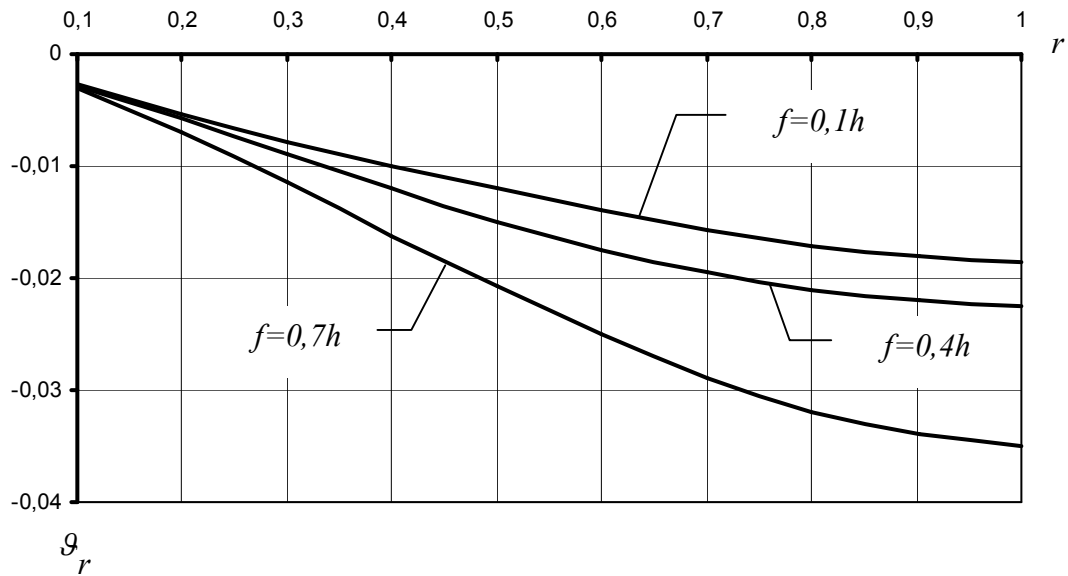


Рисунок 20 – Кривые изменения угла поворота для различных значений стрелы начального прогиба.

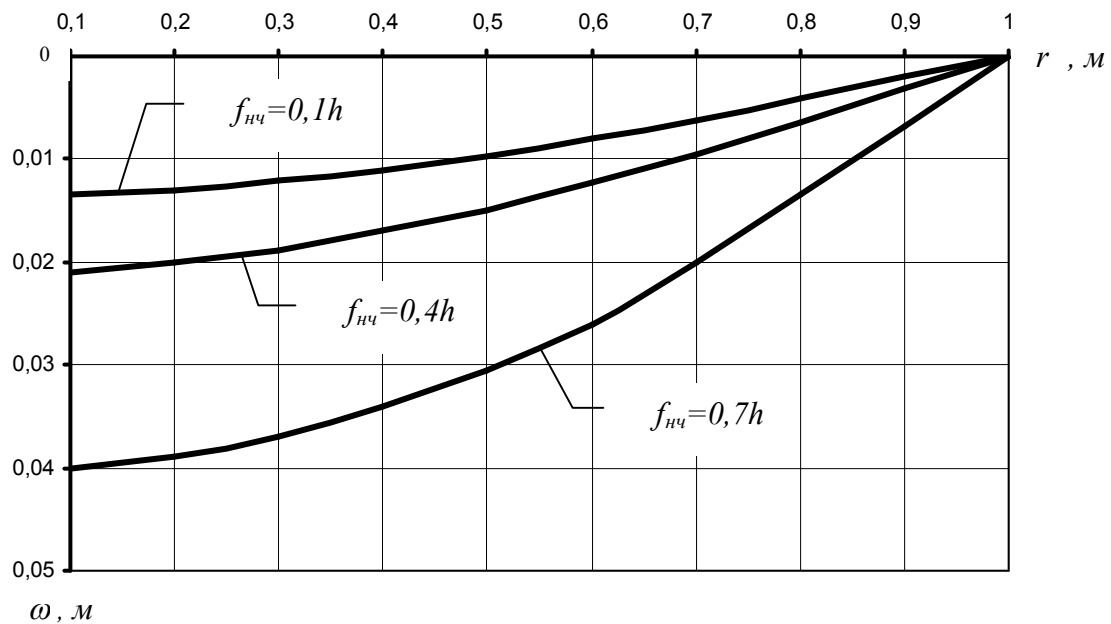


Рисунок 21 – Кривые изменения прогиба для $f_{нч} = 0,1h$; $f_{нч} = 0,4h$; $f_{нч} = 0,7h$; $h = 0,02$ м; $q = 2,5 \cdot 10^4$ Н/м²; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\nu = 0,3$.

В случае жесткого защемления пластины граничные условия рассматриваем в виде (3.34), (3.35), и (3.43)

В силу условия (3.43) решение второго уравнения системы (3.55) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} = & \frac{\sigma_o}{b} - \frac{E}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega_k}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_k - \frac{r_k^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \\ & \times \left(\frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{r} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega_{k+1}}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_{k+1} - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega_{k+1}}{dr} \right) \times \\ & \times \left. \left(\frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Подставив (3.63) в первое уравнение системы (3.55) и дискретизируя множителя $\frac{d\omega}{dr}$ в правой части этого уравнения получим

$$\begin{aligned} \frac{d^3\omega}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\omega}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} = & \frac{\psi}{D} - \frac{4h\sigma_o f_{H\psi}}{Dr_a r_b^2} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_b^2} \right) + \frac{Ehf_{H\psi}}{Dr_b^2} \times \\ & \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_k - \frac{r_k^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \\ & \times \left(\frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{r} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_{k+1} - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \times \\ & \times \left. \left(\frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_{k+1} - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \times \\ & \times \left. \left(\frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right) \left(1 - \frac{r^2}{r_b^2} \right) + \frac{h\sigma_o}{2Dr_a} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\frac{1}{r_k} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \delta(r - r_k) - \frac{1}{r_{k+1}} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \times \right. \\
& \times \delta(r - r_{k+1}) \left. \right) - \frac{Eh}{8D} \cdot \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 - \right. \right. \\
& - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_i - \frac{r_i^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_i)}{dr} \left. \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega_{i+1}}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \times \right. \\
& \times \left. \left(r_{i+1} - \frac{r_{i+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \left. \right\} \frac{d\omega_k}{dr} \delta(r - r_k).
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Общее решение уравнения (3.64) будет

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dr} = & C_3 \frac{1}{r} + C_4 r + \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr - \frac{4h\sigma_0 f_{Hy}}{Dr_a r_b^2} \left(\frac{r^2}{3} - \frac{r^4}{15r_b^2} \right) + \\
& + \frac{Eh f_{Hy}}{8Dr_b^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_k - \frac{r_k^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \\
& \times \left(r^3 - \frac{r^5}{3r_b^2} + \frac{r_k^2 r^3}{r_b^2} - \frac{r_k^4}{r} + \frac{r_k^6}{3r_b^2 r} - 4r_k^2 r \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r_k^4 r}{r_b^2} \right) H(r - r_k) - \frac{1}{r_{k+1}} \times \\
& \times \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_{k+1} - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(r^3 - \frac{r^5}{3r_b^2} + \frac{r_{k+1}^2 r^3}{r_b^2} - \right. \\
& - \frac{r_{k+1}^4}{r} + \frac{r_{k+1}^6}{3r_b^2 r} - 4r_{k+1}^2 r \ln \frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}^4 r}{r_b^2} \left. \right) H(r - r_{k+1}) \left. \right] + \frac{h\sigma_0}{4Dr_a} \times
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{r} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} H(r - r_k) - \left(\frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r} \right) \times \right. \\
& \times \left. \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} H(r - r_{k+1}) \right] - \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n \left\{ \left(r_{k+1} - r_{k-1} \right) \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) \times \right. \\
& \times \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_i - \frac{r_i^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \right. \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_{i+1} - \frac{r_{i+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \Bigg\} \times \\
& \times \frac{d\omega(r_k)}{dr} H(r - r_k).
\end{aligned}$$

Произвольное постоянное C_4 находим с учетом условия (3.35), а C_3 принимаем равной нулю. Тогда решение уравнения (3.64) будет

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dr} = & \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr - r \left[\frac{1}{2D} \int \psi dr + \frac{1}{2Dr^2} \int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b} + \\
& + \frac{4h\sigma_0 f_{H\psi}}{Dr_a r_b^2} \left[\frac{4r_b}{15} r - \frac{r^2}{3} + \frac{r^4}{15r_b^2} \right] + \frac{Eh f_{H\psi}}{8Dr_b^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 - \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{4f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_k - \frac{r_k^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(\left(r^3 - \frac{r^5}{3r_b^2} + \frac{r_k^2 r^3}{r_b^2} - \frac{r_k^4}{r} + \frac{r_k^6}{3r_b^2 r} - 4r_k^2 r \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r_k^4 r}{r_b^2} \right) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. H(r - r_k) - \left(\frac{2r_b^2}{3} + r_k^2 - \frac{2r_k^4}{r_b^2} + \frac{r_k^6}{3r_b^4} - 4r_k^2 \ln \frac{r_b}{r_k} \right) r \right) - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_{k+1} - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \Bigg/ \left(r^3 - \frac{r^5}{3r_b^2} + \frac{r_{k+1}^2 r^3}{r_b^2} - \frac{r_{k+1}^4}{r} + \frac{r_{k+1}^6}{3r_b^2 r} - 4r_{k+1}^2 \times \right. \\
& \times r \ln \frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}^4 r}{r_b^2} \Bigg) H(r - r_{k+1}) - \left(\frac{2r_b^2}{3} + r_{k+1}^2 - \frac{2r_{k+1}^4}{r_b^2} + \frac{r_{k+1}^6}{3r_b^4} - 4r_{k+1}^2 \times \right. \\
& \times \ln \frac{r_b}{r_{k+1}} \Bigg) r \Bigg] + \frac{h\sigma_0}{4Dr_a} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\left(\frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{r} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r_b^2} \right) r \right) \times \right. \\
& \times \frac{d\omega(r_k)}{dr} - \left(\left(\frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r_b^2} \right) H(r - r_{k+1}) - \left(\frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r} \right) r \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \Bigg] + \frac{Eh}{16D} \times \\
& \times \sum_{k=2}^n \left\{ \left(r_{k+1} - r_{k-1} \right) \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_i - \frac{r_i^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_{i+1} - \frac{r_{i+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \Bigg\} \times \\
& \times \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left(\left(1 - \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) r - \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) H(r - r_k) \right), \tag{3.66}
\end{aligned}$$

где аналитические выражения для $\frac{d\omega(r_k)}{dr}$ ($k = \overline{1, n}$) определяются из следующих алгебраических уравнений:

$$k = 1$$

$$\begin{aligned} & \frac{Ehf_{H\psi}}{16Dr_b^2}(r_l+r_2)K(r_l)\left(\frac{d\omega(r_l)}{dr}\right)^2 - \left\{\frac{Ehf_{H\psi}^2}{2Dr_b^4}(r_l+r_2)\left(r_l-\frac{r_l^3}{r_b^2}\right)K(r_l)-\frac{h\sigma_0}{4Dr_a}(r_l+r_2)\right. \\ & \times \left.\left(1-\frac{r_l^2}{r_b^2}\right)-l\right\}\frac{d\omega(r_l)}{dr}-F(r_l)=0, \end{aligned}$$

$$k = \overline{2, n}$$

$$\begin{aligned} & \frac{Ehf_{H\psi}}{16Dr_b^2}(r_{k+1}-r_{k-1})K(r_k)\left(\frac{d\omega(r_k)}{dr}\right)^2 - \left\{\frac{Ehf_{H\psi}^2}{2Dr_b^4}(r_{k+1}-r_{k-1})\left(r_k-\frac{r_k^3}{r_b^2}\right)K(r_k)-\right. \\ & -\frac{h\sigma_0}{4Dr_a}(r_{k+1}-r_{k-1})\left(1-\frac{r_k^2}{r_b^2}\right)+\frac{Ehr_k}{16D}(r_{k+1}-r_{k-1})\left(1-\frac{r_k^2}{r_b^2}\right)\left[\left(r_l+r_2\right)\times\right. \\ & \times \left.\left(\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega(r_l)}{dr}\right)^2-\frac{4f_{H\psi}}{r_b^2}\left(r_l-\frac{r_l^3}{r_b^2}\right)\frac{d\omega(r_l)}{dr}\right)\left(\frac{1}{r_l}-\frac{r_l}{r_k^2}\right)+\sum_{i=2}^{k-1}(r_{k+1}-r_{k-1})\times\right.\right. \\ & \times \left.\left.\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega(r_i)}{dr}\right)^2-\frac{4f_{H\psi}}{r_b^2}\left(r_i-\frac{r_i^3}{r_b^2}\right)\frac{d\omega(r_i)}{dr}\right)\left(\frac{1}{r_i}-\frac{r_i}{r_k^2}\right)\right]\right]-l\right\}\frac{d\omega(r_k)}{dr}-\frac{Ehf_{H\psi}}{8Dr_b^2}\times \\ & \times (r_l+r_2)\frac{1}{r_l}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega(r_l)}{dr}\right)^2-\frac{4f_{H\psi}}{r_b^2}\left(r_l-\frac{r_l^3}{r_b^2}\right)\frac{d\omega(r_l)}{dr}\right)\left(r_k^3-\frac{r_k^5}{3r_b^2}+\frac{r_l^2r_k^3}{r_b^2}-\right. \\ & -\frac{r_l^4}{r_k}+\frac{r_l^6}{3r_b^2r_k}-4r_l^2r_k\ln\frac{r_k}{r_l}-\frac{r_l^4r_k}{r_b^2}+r_kK(r_l)\Bigg)-\frac{Ehf_{H\psi}}{8Dr_b^2}\sum_{i=2}^{k-1}(r_{i+1}-r_{i-1})\frac{1}{r_i}\times \\ & \times \left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega(r_i)}{dr}\right)^2-\frac{4f_{H\psi}}{r_b^2}\left(r_i-\frac{r_i^3}{r_b^2}\right)\frac{d\omega(r_i)}{dr}\right)\left(r_k^3-\frac{r_k^5}{3r_b^2}+\frac{r_i^2r_k^3}{r_b^2}-\frac{r_i^4}{r_k}+\frac{r_l^6}{3r_b^2r_k}-\right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4r_i^2 r_k \ln \frac{r_k}{r_i} - \frac{r_i^4 r_k}{r_b^2} + r_k K(r_i) \Bigg) - \frac{h\sigma_0}{4Dr_a} (r_l + r_2) \left(\frac{r_k}{r_l} - \frac{r_l}{r_k} - \left(\frac{1}{r_l} - \frac{r_l}{r_b^2} \right) r_k \right) \times \\
& \times \frac{d\omega(r_l)}{dr} - \frac{h\sigma_0}{4Dr_a} \sum_{i=2}^{k-1} (r_{i+1} - r_{i-1}) \left(\frac{r_k}{r_i} - \frac{r_i}{r_k} - \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_b^2} \right) r_k \right) \frac{d\omega(r_i)}{dr} - \frac{Ehr_k}{16D} \times \\
& \times \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) \left(\frac{r_j^2}{r_b^2} + \frac{r_j^2}{r_k^2} \right) \sum_{i=1}^{j-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_i - \frac{r_i^3}{r_b^2} \right) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_j^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_{i+1} - \frac{r_{i+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left. \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_j^2} \right) \right] \right] \frac{d\omega(r_j)}{dr} - F(r_k) = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F(r) &= \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr - \frac{r}{2D} \left[\int \psi dr - \frac{1}{r_b^2} \int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b} + \\
& + \frac{4h\sigma_0 f_{Hy}}{Dr_a r_b^2} \left(\frac{4r_b}{15} r - \frac{r^2}{3} + \frac{r^4}{15r_b^2} \right), \\
K(r_k) &= \frac{2r_b^2}{3} + r_k^2 - \frac{2r_k^4}{r_b^2} + \frac{r_k^6}{3r_b^4} - 4r_k^2 \ln \frac{r_b}{r_k}.
\end{aligned}$$

Интегрируя (3.66) и учитывая условие (3.34), решение первого уравнения системы (3.55) получим в виде

$$\begin{aligned}
\omega = & \int F(r)dr - \left[\int F(r)dr \right]_{r=r_b} + \frac{Ehf_{H\psi}}{8Dr_b^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 - \right. \right. \\
& - \frac{4f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_k - \frac{r_k^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left. \right) \left\langle \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{18r_b^2} + \frac{r_k^2 r^4}{4r_b^2} + \left(\frac{r_k^6}{3r_b^2} - r_k^4 \right) \ln \frac{r}{r_k} - \right. \right. \\
& - 4r_k^2 \left(\frac{r^2}{2} \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r^2}{4} \right) - \frac{r_k^4 r^2}{2r_b^2} - \frac{5r_k^4}{4} + \frac{11r_k^6}{36r_b^2} \left. \right) H(r - r_k) - \frac{7r_b^4}{36} - \frac{5r_k^2 r_b^2}{4} - \\
& - \left(\frac{r_k^6}{3r_b^2} - r_k^4 - 2r_k^2 r_b^2 \right) \ln \frac{r_b}{r_k} + \frac{7r_k^4}{4} - \frac{11r_k^6}{36r_b^2} + \left(\frac{r_b^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) K(r_k) \left. \right\rangle - \frac{1}{r_{k+1}} \times \\
& \times \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{H\psi}}{r_b^2} \left(r_{k+1} - \frac{r_{k+1}^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \left\langle \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{18r_b^2} + \right. \right. \\
& + \frac{r_{k+1}^2 r^4}{r_b^2} + \left(\frac{r_{k+1}^6}{3r_b^2} - r_{k+1}^4 \right) \ln \frac{r}{r_{k+1}} - 4r_{k+1}^2 \left(\frac{r^2}{2} \ln \frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r^2}{4} \right) - \frac{r_{k+1}^4 r^2}{2r_b^2} - \\
& - \frac{5r_{k+1}^4}{4} + \frac{11r_{k+1}^6}{36r_b^2} \left. \right) H(r - r_{k+1}) - \frac{7r_b^4}{36} - \frac{5r_{k+1}^2 r_b^2}{4} - \left(\frac{r_{k+1}^6}{3r_b^2} - r_{k+1}^4 - 2r_{k+1}^2 r_b^2 \right) \times \\
& \times \ln \frac{r_b}{r_{k+1}} + \frac{7r_{k+1}^4}{4} - \frac{11r_{k+1}^6}{36r_b^2} + \left(\frac{r_b^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) K(r_{k+1}) \left. \right\rangle \left. \right] + \frac{h\sigma_0}{4Dr_a} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[\left(\left(\frac{r^2}{2r_k} - r_k \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{2} \right) H(r - r_k) + r_k \ln \frac{r_b}{r_k} - \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r_b^2} \right) \frac{r^2}{2} \right) \frac{d\omega(r_k)}{dr} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\left(\frac{r^2}{2r_{k+1}} - r_{k+1} \ln \frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{2} \right) H(r - r_{k+1}) + r_{k+1} \ln \frac{r_b}{r_{k+1}} - \left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r_b^2} \right) \times \right. \\
& \times \left. \frac{r^2}{2} \right) \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \Bigg] + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n \left\{ (r_{k+1} - r_{k-1}) \sum_{k=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 - \right. \right. \\
& - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_i - \frac{r_i^3}{r_b^2} \right) \frac{d\omega(r_i)}{dr} \Bigg] \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 - \frac{4f_{Hy}}{r_b^2} \left(r_{i+1} - \frac{r_{i+1}^3}{r_b^2} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left. \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \Bigg\} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left(\left(1 - \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) \frac{r^2}{2} - r_k^2 \ln \frac{r_b}{r_k} - \right. \\
& - \left. \left(\frac{r^2}{2} - r_k^2 \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r_k^2}{2} \right) H(r - r_k) \right). \tag{3.67}
\end{aligned}$$

После определения функции ω , $\frac{d\omega}{dr}$ вычислить изгибающие моменты M_r , M_φ по формуле (3.14) не составляет труда.

На рисунке 22 приведены интегральные кривые задачи для $h = 0,02 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $q_0 = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,3$.

Как видно из рисунка, с увеличением радиальной нагрузки σ_0 на внутреннем контуре уменьшается прогиб пластины.

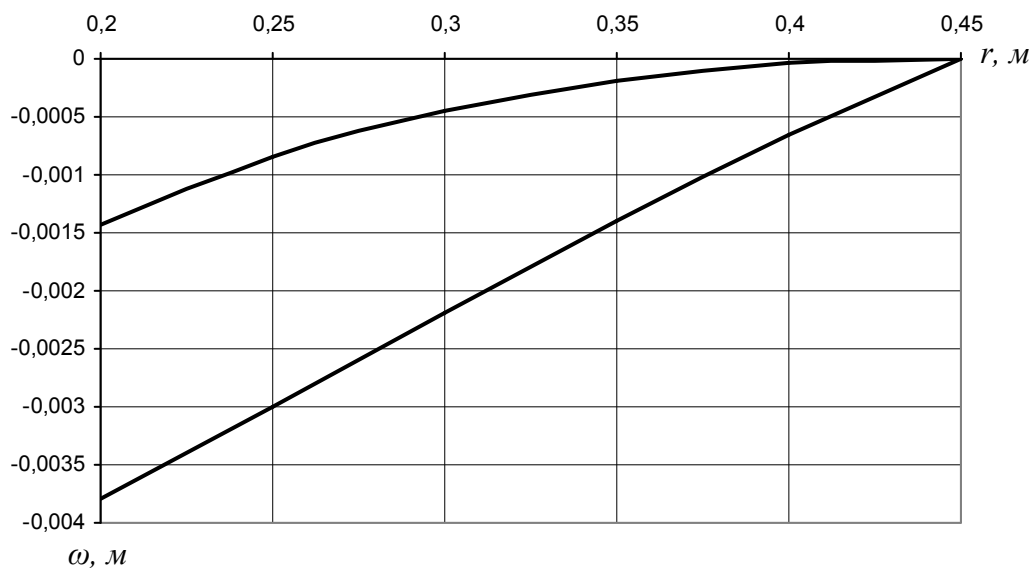


Рисунок 22 – Графики изменения прогиба круглой гибкой пластины без учета начальной кривизны при $h = 0,02 \text{ м}$; $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$; $q_0 = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$; $\sigma_0 = 0$; $\sigma_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$; $\nu = 0,3$.

4 ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ НЕРАВНОМЕРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ И НАЧАЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ

4.1 Неравномерно нагретые тонкостенные оболочки вращения

Рассмотрим тонкостенную оболочку вращения неравномерно нагретую по толщине стенки и находящуюся под действием равномерных радиальных давлений. Допустим, что материал оболочки является изотропным, однородным, подчиняющимся закону Гука, а перемещения оболочки малы по сравнению с ее толщиной. Будем считать справедливыми гипотезу о неизменности нормали и гипотезу об отсутствии надавливания слоев оболочки друг на друга.

Введение последних двух гипотез существенно упрощает расчеты, так как исследование деформаций оболочки сводится, по существу, к исследованию деформаций ее срединной поверхности. Указанные гипотезы при достаточной тонкостенности оболочки не вносят существенных погрешностей.

Приведем основные уравнения моментной теории осесимметричных деформаций неравномерно нагретых оболочек вращения с использованием перечисленных выше гипотез.

В результате рассмотрения геометрических, физических и статических соотношений решение задачи можно свести к системе двух дифференциальных уравнений относительно двух функций, с помощью которых определяются напряжения и деформации в оболочке [27].

Рассмотрим геометрические соотношения, связывающие деформации в произвольной точке с перемещениями точек срединной поверхности.

В том случае, когда в процессе работы оболочки ее срединная поверхность искривляется, относительные деформации в направлении меридиана и параллели в точке, отстоящей на расстоянии z от срединной поверхности, складываются из деформаций срединной поверхности и деформации, обусловленной изгибом:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du}{dx} - \frac{\omega}{R_x} + z \frac{d\vartheta}{dx}; \\ \varepsilon_y &= (uctg\varphi - \omega) \frac{l}{R_y} + zctg\varphi \frac{\vartheta}{R_y}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где $\vartheta = \frac{u}{R_x} + \frac{d\omega}{dx}$ – изменение угла между нормалью к оболочке и осью вращения, u, ω – перемещения вдоль осей x, z , R_x, R_y – радиусы кривизны.

Переходя к условиям равновесия элемента оболочки можно получить три уравнения статики.

Если взять сумму проекций сил на направление внутренней нормали и направление касательной к меридиану и приравнять нулю сумму моментов относительно касательной к параллели, то получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(Qr)}{dx} + N_x \frac{r}{R_x} + N_y \sin\varphi - pr &= 0; \\ \frac{d(M_x r)}{dx} - M_y \cos\varphi - Qr &= 0; \\ \frac{d(N_x r)}{dx} - N_y \cos\varphi - Q \frac{r}{R_x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

где $r = R_y \sin\varphi$, N_x, N_y – усилия, приходящиеся на единицу длины сечений оболочки толщины h , p – интенсивность распределенной нагрузки.

Используя физические соотношения

$$\sigma_x = \frac{E(x, z)}{1 - \nu^2} [\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y - (1 + \nu) \alpha(x, z) T(x, z)];$$

$$\sigma_y = \frac{E(x, z)}{1 - \nu^2} \left[\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x - (1 + \nu) \alpha(x, z) T(x, z) \right],$$

для оболочки толщиной h можно вычислить внутренние силовые факторы следующим образом:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz; \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz;$$

$$M_x = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; \quad M_y = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz.$$

После интегрирования имеем:

$$N_x = \frac{l}{1 - \nu^2} \left\{ \left[\frac{du}{dx} - \frac{\omega}{R_x} + \frac{\nu}{R_y} (u \operatorname{ctg} \varphi - \omega) \right] E_T^{(0)}(x) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d\vartheta}{dx} + \nu \frac{\vartheta}{R_y} \operatorname{ctg} \varphi \right) E_T^{(l)}(x) - (1 + \nu) N_T(x) \right\};$$

$$N_y = \frac{l}{1 - \nu^2} \left\{ \left[\frac{l}{R_y} (u \operatorname{ctg} \varphi - \omega) + \nu \left(\frac{du}{dx} - \frac{\omega}{R_x} \right) \right] E_T^{(0)}(x) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\vartheta}{R_y} \operatorname{ctg} \varphi + \nu \frac{d\vartheta}{dx} \right) E_T^{(l)}(x) - (1 + \nu) N_T(x) \right\};$$

$$M_x = - \frac{l}{1 - \nu^2} \left\{ \left[\frac{du}{dx} - \frac{\omega}{R_x} + \nu \frac{l}{R_y} (u \operatorname{ctg} \varphi - \omega) \right] E_T^{(l)}(x) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d\vartheta}{dx} + \nu \frac{\vartheta}{R_y} \operatorname{ctg} \varphi \right) E_T^{(2)}(x) - (1 + \nu) M_T(x) \right\};$$
(4.3)

$$M_y = -\frac{l}{1-\nu^2} \left\{ \left[\frac{l}{R_y} (u \operatorname{ctg} \varphi - \omega) + \nu \left(\frac{du}{dx} - \frac{\omega}{R_x} \right) \right] E_T^{(1)}(x) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\vartheta}{R_y} \operatorname{ctg} \varphi + \nu \frac{d\vartheta}{dx} \right) E_T^{(2)}(x) - (1+\nu) M_T(x) \right\},$$

где

$$\left. \begin{aligned} E_T^i(x) &= \int_{-h/2}^{h/2} E(x, z) z^i dz, \quad i = 0, 1, 2; \\ N_T(x) &= \int_{-h/2}^{h/2} \alpha E(x, z) T(x, z) dz; \\ M_T(x) &= \int_{-h/2}^{h/2} \alpha E(x, z) T(x, z) z dz. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Уравнения (4.2) и (4.3) образуют систему семи уравнений с семью неизвестными функциями: $N_x, N_y, Q, M_x, M_y, u, \omega$. Эта система уравнений сводится к двум дифференциальным уравнениям относительно неизвестных функций

$$\vartheta = \frac{u}{R_x} + \frac{d\omega}{dx} \quad \text{и} \quad \eta = QR_y, \quad (4.5)$$

которые при условии совпадения нейтральной и срединной поверхностей, т.е.

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(x, z) z dz = 0,$$

ИМЕЕТ ВИД

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d}{dx} \left[\frac{R_y}{E_T^{(0)}(x)} \cdot \frac{d\eta}{dx} \right] - \frac{d}{dx} \left[\frac{\nu \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{E_T^{(0)}(x)} \cdot \eta \right] + \left(\nu + \frac{R_y}{R_x} \right) \cdot \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{E_T^{(0)}(x)} \cdot \frac{d\eta}{dx} - \\
 & - \frac{\operatorname{ctg}^2 \varphi}{R_y} \cdot \left(1 + \nu \cdot \frac{R_y}{R_x} \right) \frac{1}{E_T^{(0)}(x)} \cdot \eta - \mathcal{G} = A_P + A_N; \\
 & \frac{1}{1-\nu^2} \cdot \frac{d}{dx} \left[R_x E_T^{(2)}(x) \frac{d\mathcal{G}}{dx} \sin \varphi \right] + \frac{\nu}{1-\nu^2} \cdot \frac{d}{dx} \left[\mathcal{G} E_T^{(2)}(x) \cos \varphi \right] - \\
 & - \frac{\nu}{1-\nu^2} E_T^{(2)}(x) \frac{d\mathcal{G}}{dx} \cos \varphi - \frac{E_T^2(x)}{1-\nu^2} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \varphi \cdot \cos \varphi}{R_y} \mathcal{G} + \sin \varphi = A_M,
 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_P &= -\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{E_T^{(0)}(x)} \left\{ \left[\frac{1}{R_y} + \frac{\nu}{R_x} + \frac{R_y}{R_x} \left(\frac{1}{R_x} + \frac{\nu}{R_y} \right) \right] \cdot \frac{P}{2\pi \sin^2 \varphi} - \right. \\
 & \left. - \left(\nu R_y + \frac{R_y^2}{R_x} \right) p \right\} - \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{1}{R_x} + \frac{\nu}{R_y} \right) \frac{R_y P}{E_T^{(0)}(x) 2\pi \sin^2 \varphi} - \frac{R_y^2}{E_T^{(0)}(x)} p \right]; \\
 A_N &= -\frac{N_T(x)}{E_T^{(0)}(x)} \operatorname{ctg} \varphi \left(1 - \frac{R_y}{R_x} \right) + \frac{d}{dx} \left[\frac{N_T(x)}{E_T^{(0)}(x)} R_y \right]; \\
 A_M &= \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{d}{dx} \left[R_y M_T(x) \sin \varphi - M_T(x) \cos \varphi \right].
 \end{aligned}$$

Для случая статически определимого характера закрепления оболочки P определяют из условия равновесия отсекаемой части оболочки, т.е.

$$P = 2\pi R_y (N_x \sin \varphi + Q \cos \varphi) \sin \varphi. \quad (4.7)$$

Из уравнений (4.6) определяют искомые функции ϑ и η . Зная эти функции, можно в любом сечении оболочки определить усилия N_x, N_y и моменты M_x, M_y . В самом деле, из условия (4.7), учитывая, что $\eta = QR_y$, можно получить

$$N_x = -\eta \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R_y} + \frac{P}{2\pi R_y \sin^2 \varphi}. \quad (4.8)$$

Используя полученное равенство и первое уравнение равновесия (4.2), найдем усилие N_y :

$$N_y = -\frac{d\eta}{dx} - \frac{P}{2\pi R_x \sin^2 \varphi} + pR_y. \quad (4.9)$$

Значения изгибающих моментов определяются последними двумя равенствами (4.3).

Учитывая, что по принятому ранее

$$E_T^{(I)} = \int_{-h/2}^{h/2} E(x, z) z dz = 0,$$

выражения изгибающих моментов через функции ϑ и η могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{E_T^{(2)}(x)}{1-\nu^2} \left(\frac{d\vartheta}{dx} + \nu \frac{\vartheta}{R_y} \operatorname{ctg} \varphi \right) + \frac{M_T(x)}{1-\nu}; \\ M_y &= -\frac{E_T^{(2)}(x)}{1-\nu^2} \left(\frac{\vartheta}{R_y} \operatorname{ctg} \varphi + \nu \frac{d\vartheta}{dx} \right) + \frac{M_T(x)}{1-\nu}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Полученная система разрешающих уравнений (4.6), описывающих осесимметричную деформацию неравномерно нагретой оболочки вращения, представляет собой систему уравнений

второго порядка с переменными коэффициентами и имеет замкнутое решение только в некоторых частных случаях. Поэтому в исследованиях обычно прибегают к всякого рода приближенным методам.

Среди приближенных методов решения разрешающей системы уравнений (4.6) имеется один достаточно простой и удобный в практическом применении, который был использован еще в работе И.Я.Штаермана [28] и изложенный в работе И.А.Биргера [29].

Сущность этого приближенного метода состоит в том, что оболочка вращения сводится к некоторой эквивалентной ей цилиндрической оболочке радиуса R_y , обладающей одинаковой жесткостью на растяжение и изгиб с рассматриваемой оболочкой вращения. Математически это осуществляется заменой системы уравнений (4.6) следующими приближенными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_y}{E_T^{(0)}(x)} \cdot \frac{d^2 \eta}{dx^2} - \vartheta &= A_P + A_N; \\ \frac{R_y E_T^{(2)}(x)}{1 - \nu^2} \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \eta &= A_M / \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Если дифференцируя второе уравнение (4.11) дважды по x , вносить в него выражение $\frac{d^2 \eta}{dx^2}$ из первого уравнения и пренебречь низшими производными и самой функцией, не содержащими в качестве множителя большой параметр, будет

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \vartheta}{dx^4} + (1 - \nu^2) \frac{E_T^{(0)}(x)}{R_y^2 E_T^{(2)}(x)} \vartheta &= - \frac{E_T^{(0)}(x)}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \frac{1 - \nu^2}{R_y^2} (A_P + A_N) + \\ &+ \frac{1 - \nu^2}{R_y} \cdot \frac{1}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{\sin \varphi} A_M \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Таким образом, получается приближенное уравнение симметричной деформации неравномерно нагретой оболочки вращения.

Как известно, в общем случае, для рассматриваемого уравнения (4.12) аналитическое решение не существует.

Методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений получено обобщенное решение уравнения симметричных деформаций оболочек вращения в неоднородном температурном поле, без привлечения дополнительных упрощений, принятых в [29].

После применения метода частичной дискретизации уравнение (4.12) имеет вид [30]

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \vartheta}{dx^4} = & -\frac{1-\nu^2}{2R_y^2} \sum_{k=1}^n (x_k + x_{k+1}) \left(\frac{E_T^{(0)}(x_k)}{E_T^{(2)}(x_k)} \vartheta_k \delta(x - x_k) - \right. \\ & \left. - \frac{E_T^{(0)}(x_{k+1})}{E_T^{(2)}(x_{k+1})} \vartheta_{k+1} \delta(x - x_{k+1}) \right) - \frac{E_T^{(0)}(x)}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \frac{1-\nu^2}{R_y^2} (A_P + A_N) + \\ & + \frac{1-\nu^2}{R_y} \cdot \frac{1}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{\sin \varphi} A_M \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Общее решение уравнения (4.13) записывается в виде

$$\begin{aligned} \vartheta = & C_4 + C_3 x + C_2 \frac{x^2}{2} + C_1 \frac{x^3}{6} - \frac{1-\nu^2}{12} \sum (x_k + x_{k+1}) \times \\ & \times \left[\frac{E_T^{(0)}(x_k)}{R_y^2(x_k) E_T^{(2)}(x_k)} \vartheta_k (x - x_k)^3 H(x - x_k) - \frac{E_T^{(0)}(x_{k+1})}{R_y^2(x_{k+1}) E_T^{(2)}(x_{k+1})} \times \right. \\ & \left. \times \vartheta_{k+1} (x - x_{k+1})^3 H(x - x_{k+1}) \right] - \psi_4(x). \end{aligned} \quad (4.14)$$

С учетом условий

$$\mathcal{G}|_{x=0} = 0, \quad \mathcal{G}|_{x=l} = 0, \quad (4.15)$$

$$M_x|_{x=0} = 0, \quad M_x|_{x=l} = 0, \quad (4.16)$$

где

$$M_x = -\frac{E_T^{(2)}(x)}{1-\nu^2} \left(\frac{d\mathcal{G}}{dx} + \nu \frac{\mathcal{G}}{R_y} \operatorname{ctg} \varphi \right) + \frac{M_T(x)}{1-\nu}, \quad (4.17)$$

находим произвольные постоянные в виде

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{6}{l^2} \left[-\frac{M_T(l)}{E_T^{(2)}(l)} (1+\nu) + \psi_3(l) + \frac{M_T(0)}{E_T^{(2)}(0)} (1+\nu) - \psi_3(0) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{l} (\psi_4(l) - \psi_4(0) - C_3 l) \right] - \frac{1-\nu^2}{2l^2} \sum_{k=1}^n (x_k + x_{k+1}) \times \\ & \times \left[\frac{E_T^{(0)}(x_k)}{R_y^2(x_k) E_T^{(2)}(x_k)} \mathcal{G}_k (l - x_k)^2 \left(\frac{2}{l} (l - x_k) - 3 \right) - \right. \\ & \left. - \frac{E_T^{(0)}(x_{k+1})}{R_y^2(x_{k+1}) E_T^{(2)}(x_{k+1})} \mathcal{G}_{k+1} (l - x_{k+1})^2 \left(\frac{2}{l} (l - x_{k+1}) - 3 \right) \right], \\ C_2 = & \frac{2}{l^2} (\psi_4(l) - \psi_4(0) - C_3 \cdot l) - C_1 \frac{l}{3} + \frac{1-\nu^2}{6l^2} \times \\ & \times \sum_{k=1}^n (x_k + x_{k+1}) \left[\frac{E_T^{(0)}(x_k)}{R_y^2(x_k) E_T^{(2)}(x_k)} \mathcal{G}_k (l - x_k)^3 - \right. \\ & \left. - \frac{E_T^{(0)}(x_{k+1})}{R_y^2(x_{k+1}) E_T^{(2)}(x_{k+1})} \mathcal{G}_{k+1} (l - x_{k+1})^3 \right], \end{aligned}$$

$$C_3 = -\frac{M_T(0)}{E_T^{(2)}(0)}(1+\nu) + \psi_3(0), \quad C_4 = \psi_4(0).$$

Тогда решение задачи (4.12) – (4.16) будет

$$\begin{aligned} \vartheta = & \psi_4(0) + \left(\psi_3(0) - \frac{M_T(0)}{E_T^{(2)}(0)}(1+\nu) \right) x + \left[\frac{2}{l^2} (\psi_4(l) - \psi_4(0) - C_3 \cdot l) - \right. \\ & \times \frac{2}{l} \left\langle -\frac{M_T(l)}{E_T^{(2)}(l)}(1+\nu) + \psi_3(l) + \frac{M_T(0)}{E_T^{(2)}(0)}(1+\nu) - \psi_3(0) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{2}{l} (\psi_4(l) - \psi_4(0) - C_3 \cdot l) \right\rangle \right] \frac{x^2}{2} + \frac{6}{l^2} \left[-\frac{M_T(l)}{E_T^{(2)}(l)}(1+\nu) + \psi_3(l) + \right. \\ & \left. + \frac{M_T(0)}{E_T^{(2)}(0)}(1+\nu) - \psi_3(0) - \frac{2}{l} (\psi_4(l) - \psi_4(0) - C_3 \cdot l) \right] \frac{x^3}{6} + \\ & + \frac{1-\nu^2}{2} \sum_{k=1}^n (x_k + x_{k+1}) \left[\frac{E_T^{(0)}(x_k)}{R_y^2(x_k) E_T^{(2)}(x_k)} \vartheta_k \left\langle \frac{(l-x_k)^2}{6l^2} x^2 \times \right. \right. \\ & \times \left(\left(\frac{2}{l} x_k + l \right) x - 3x_k \right) - \frac{l}{6} (x-x_k)^3 H(x-x_k) \left. \right\rangle - \frac{E_T^{(0)}(x_{k+1})}{R_y^2(x_{k+1}) E_T^{(2)}(x_{k+1})} \times \\ & \times \vartheta_{k+1} \left\langle \frac{(l-x_{k+1})^2}{6l^2} x^2 \left(\left(\frac{2}{l} x_{k+1} + l \right) x - 3x_{k+1} \right) - \frac{l}{6} (x-x_{k+1})^3 H(x-x_{k+1}) \right. \left. \right\rangle \left. \right] - \\ & \left. - \psi_4(x), -3x_{k+1} \right) - \frac{l}{6} (x-x_{k+1})^3 H(x-x_{k+1}) \left. \right\rangle \left. \right] - \psi_4(x), \end{aligned} \quad (4.18)$$

где

$$\begin{aligned}\psi_4(x) = & \iiint \left(\frac{E_T^{(0)}(x)}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \frac{1-v^2}{R_y^2} (A_P + A_N) + \frac{1-v^2}{R_y} \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{\sin \varphi} A_M \right) \right) dx dx dx dx, \\ \psi_3(x) = & \int \iiint \left(\frac{E_T^{(0)}(x)}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \frac{1-v^2}{R_y^2} (A_P + A_N) + \frac{1-v^2}{R_y} \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{\sin \varphi} A_M \right) \right) dx dx dx dx.\end{aligned}$$

Для определения $\mathcal{G}_k$, $k = \overline{1, n}$ получим следующую систему конечных уравнений:

$$k = 1$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 = & \left\{ \psi_4(0) + A x_1 + B \frac{x_1^2}{2} + D \frac{x_1^3}{6} - \psi_4(x_1) \right\} / \left\{ 1 - \frac{1-v^2}{2} \times \right. \\ & \left. \times (x_1 + x_2) \frac{E_T^{(0)}(x_1)}{R_y^2(x_1) E_T^{(2)}(x_1)} \frac{(l-x_1)^2}{2l^2} x_1^2 \left(\frac{1}{l} x_1^2 - x_1 \right) \right\},\end{aligned}$$

$$k = \overline{2, n}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_k = & \left\{ \psi_4(0) + A x_k + B \frac{x_k^2}{2} + D \frac{x_k^3}{6} - \psi_4(x_1) + \frac{1-v^2}{2} \times \right. \\ & \left. \times (x_1 + x_2) \frac{E_T^{(0)}(x_1)}{R_y^2(x_1) E_T^{(2)}(x_1)} \mathcal{G}_1 \left(\frac{(l-x_1)^2}{6l^2} \left(\left(\frac{2}{l} x_1 + 1 \right) x_k - 3x_1 \right) \times \right. \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times x_k^2 - \frac{l}{6}(x_k - x_l)^3 \Bigg) + \frac{1-\nu^2}{2} \sum_{i=2}^{k-1} (x_{i+1} - x_{i-1}) \frac{E_T^{(0)}(x_i)}{R_y^2(x_i) E_T^{(2)}(x_i)} \mathcal{G}_i \times \\
& \times \left(\frac{(l-x_i)^2}{6l^2} \left(\left(\frac{2}{l} x_i + 1 \right) x_k - 3x_i \right) x_k^2 - \frac{l}{6}(x_k - x_i)^3 \right) \Bigg] / \left\{ 1 - \frac{1-\nu^2}{2} \times \right. \\
& \times (x_{k+1} - x_{k-1}) \frac{E_T^{(0)}(x_k)}{R_y^2(x_k) E_T^{(2)}(x_k)} \frac{(l-x_k)^2}{3l^2} x_k^2 \left(\frac{l}{l} x_k^2 - x_k \right) \Bigg\},
\end{aligned}$$

где

$$A = \psi_3(0) - \frac{M_T(0)}{E_T^{(2)}(0)}(1+\nu),$$

$$\begin{aligned}
B = \frac{6}{l^2} [\psi_4(l) - \psi_4(0) - C_3 l] - \frac{2}{l} \Bigg[- \frac{M_T(l)}{E_T^{(2)}(l)}(1+\nu) + \psi_3(l) + \\
+ \frac{M_T(0)}{E_T^{(2)}(0)}(1+\nu) - \psi_3(0) \Bigg],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = \frac{6}{l^2} \Bigg[- \frac{M_T(l)}{E_T^{(2)}(l)}(1+\nu) + \psi_3(l) + \frac{M_T(0)}{E_T^{(2)}(0)}(1+\nu) - \psi_3(0) - \\
- \frac{2}{l} [\psi_4(l) - \psi_4(0) - C_3 l] \Bigg].
\end{aligned}$$

Определив функции $\mathcal{G}$ и η , можно подсчитать внутренние силовые факторы по формулам (4.8) – (4.10). Зная внутренние усилия и моменты, можно определить возникающие в оболочке деформации, напряжения и перемещения срединной поверхности.

4.2 Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки

Рассмотрим осесимметричную деформацию неравномерно нагретой по толщине и длине тонкостенной цилиндрической оболочки, находящейся под действием радиального давления p и осевой силы N_x . На рисунке 23 приведена схема неравномерно нагретой цилиндрической оболочки.

Разрешающее уравнение задачи легко получить из приведенного выше уравнения (4.12); необходимо учесть, что для цилиндрической оболочки $R_x = \infty$, $R_y = R$, $\varphi = \pi/2$, $\vartheta = d\omega/dx$, $P = 2\pi R N_x$.

Подставляя указанные значения в уравнение (4.12), получим следующее разрешающее дифференциальное уравнение осесимметричных деформаций для неравномерно нагретой тонкостенной цилиндрической оболочки:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \omega}{dx^4} + \frac{1-\nu^2}{R^2} \frac{E_T^{(0)}(x)}{E_T^{(2)}(x)} \omega = - \left(1-\nu^2\right) \frac{E_T^{(0)}(x)}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \left\{ \frac{1}{R} \frac{N_T(x)}{E_T^{(0)}(x)} - \right. \\ \left. - \nu \frac{N_x}{R} \cdot \frac{1}{E_T^{(0)}(x)} + p(x) \cdot \frac{1}{E_T^{(0)}(x)} \right\} + \frac{1+\nu}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} (M_T(x)). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Общее решение уравнения (4.19), после применения метода частичной дискретизации, будет

$$\begin{aligned} \omega = D + Cx + B \frac{x^2}{2} + A \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1-\nu^2}{R} \sum (x_k + x_{k+1}) \left[\frac{E_T^{(0)}(x_k)}{E_T^{(2)}(x_k)} \times \right. \\ \times \omega_k (x - x_k)^3 H(x - x_k) - \frac{E_T^{(0)}(x_{k+1})}{E_T^{(2)}(x_{k+1})} \cdot \omega_{k+1} (x - x_{k+1})^3 \times \\ \left. \times H(x - x_{k+1}) \right] - \iiint \left(\left(1-\nu^2\right) \frac{E_T^{(0)}(x)}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \left\{ \frac{1}{R} \frac{N_T(x)}{E_T^{(0)}(x)} - \nu \frac{N_x}{R} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{1}{E_T^{(0)}(x)} + p(x) \frac{1}{E_T^{(0)}(x)} \right\} + \frac{1+\nu}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} (M_T(x)) \right) dx dx dx dx. \end{aligned} \quad (4.20)$$

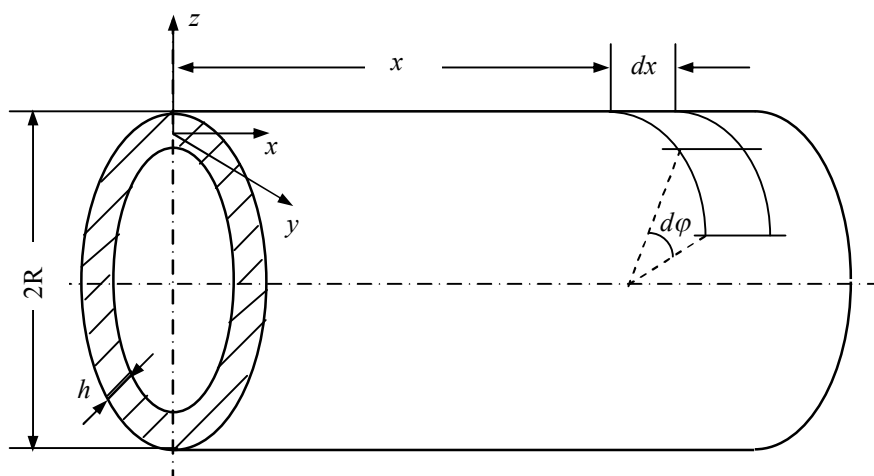


Рисунок 23 – Схема неравномерно нагретой цилиндрической оболочки

Учет условий (4.15), (4.16) дает решение задачи в виде

$$\begin{aligned}
 \omega = & f(x) \frac{l}{L_1} (Q_1 - \varphi_2(l)) + \alpha(x) - \psi_4(x) + \frac{l}{2R^2} \sum_{k=1}^n (x_k + x_{k+1}) \times \\
 & \times \left\{ \frac{E_T^{(0)}(x_k)}{E_T^{(2)}(x_k)} \omega_k \left[-\frac{f(x)}{L_1} \left(L_2 \cdot \frac{(l-x_k)^2}{2} \left(1 + \frac{l-x_k}{3} \cdot \frac{v \cdot \text{ctg} \varphi}{R} \right) + \right. \right. \\
 & + E_T^{(2)}(l) \cdot (l-x_k) + L_3 \frac{(l-x_k)^2}{2} + L_4 (l-x_k)^3 \left. \right) + \beta(x) \frac{(l-x_k)^2}{2} \times \\
 & \times \left(1 + \frac{l-x_k}{3} \cdot \frac{v \text{ctg} \varphi}{R} \right) - \frac{1-v^2}{6} \cdot (x-x_k)^3 H(x-x_k) \left. \right] - \frac{E_T^{(0)}(x_{k+1})}{E_T^{(2)}(x_{k+1})} \times \\
 & \times \omega_{k+1} \left[-\frac{f(x)}{L_1} \left(L_2 \cdot \frac{(l-x_{k+1})^2}{2} \left(1 + \frac{l-x_{k+1}}{3} \cdot \frac{v \cdot \text{ctg} \varphi}{R} \right) + E_T^{(2)}(l) \times \right. \right. \\
 & \times (l-x_{k+1}) L_3 \frac{(l-x_{k+1})^2}{2} + L_4 (l-x_{k+1})^3 \left. \right) + \beta(x) \frac{(l-x_{k+1})^2}{2} \times \\
 & \times \left(1 + \frac{l-x_{k+1}}{3} \cdot \frac{v \text{ctg} \varphi}{R} \right) - \frac{1-v^2}{6} \cdot (x-x_{k+1})^3 H(x-x_{k+1}) \left. \right] \left. \right\},
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$L_1 = \left[-\frac{E_T^{(2)}(l)}{1-v^2} \cdot l - L_3 \cdot \frac{1}{1-v^2} \frac{l^2}{2} - L_4 \cdot \frac{l^3}{1-v^2} \right] \left(-\frac{3v^3 \text{ctg}^3 \varphi}{3R + v l \text{ctg} \varphi} \cdot \frac{l}{R^2} \right) +$$

$$+ \left[-\frac{E_T^{(2)}(l)}{1-v^2} - L_3 \cdot \frac{l}{1-v^2} - L_3 \cdot \frac{3l^2}{1-v^2} \right] \frac{v^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{R^2} + \left[L_3 \cdot \frac{l}{1-v^2} + \right. \\ \left. + L_4 \cdot \frac{6l}{1-v^2} \right] \frac{v \operatorname{ctg} \varphi}{R} - L_4 \cdot \frac{6}{1-v^2};$$

$$L_2 = \left[-E_T^{(2)}(l) \cdot l - L_3 \frac{l^2}{2} - L_4 l^3 \right] \frac{6R_y}{3Rl^2 + v l^3 \operatorname{ctg} \varphi};$$

$$L_3 = \frac{dE_T^{(2)}(l)}{dx} + \frac{E_T^{(2)}(l)}{R} v \operatorname{ctg} \varphi;$$

$$L_4 = \frac{dE_T^{(2)}(l)}{dx} \frac{v \operatorname{ctg} \varphi}{6R};$$

$$f(x) = l - \frac{v \operatorname{ctg} \varphi}{R} x + \frac{v^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{R^2} \frac{x^2}{2} - \frac{l}{3R + v l \operatorname{ctg} \varphi} \cdot \frac{v^3 \operatorname{ctg}^3 \varphi}{R^2} \cdot \frac{x^3}{2};$$

$$\alpha(x) = J_1(0)x + J_2(0) \frac{x^2}{2} + J_1(l) \frac{x^3}{6};$$

$$\beta(x) = (1-v^2) \frac{6R}{3Rl^2 + v l^3 \operatorname{ctg} \varphi} \cdot \frac{x^3}{6};$$

$$J_1(0) = \psi_3(0) + \frac{v \operatorname{ctg} \varphi}{R} \psi_4(0) + \frac{1-v^2}{E_T^{(2)}(0)} \left[\frac{M_T(0)}{1-v} - M_0 \right];$$

$$J_2(0) = -\frac{l}{E_T^{(2)}(0)} \left[\frac{dE_T^{(2)}(0)}{dx} + E_T^{(2)}(0) \frac{v \operatorname{ctg} \varphi}{R} \right] [J_1(0) - \psi_3(0)] + \psi_2(0) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{l}{E_T^{(2)}(0)} \frac{dE_T^{(2)}(0)}{dx} \frac{\nu \operatorname{ctg} \varphi}{R} \psi_4(0) + \frac{1-\nu^2}{E_T^{(2)}(0)} \left[\frac{dM_T(0)}{dx} \cdot \frac{l}{1-\nu} - Q_0 \right]; \\
J_1(l) = & \frac{6R_y}{3Rl^2 + \nu l^3 \operatorname{ctg} \varphi} \left[\left(l + \frac{\nu l \operatorname{ctg} \varphi}{R} \right) J_1(0) + \left(l + \frac{\nu l^2 \operatorname{ctg} \varphi}{2R} \right) J_2(0) - \right. \\
& \left. - \psi_3(l) - \frac{\nu \operatorname{ctg} \varphi}{R} \psi_4(l) - \frac{1-\nu^2}{E_T^2(l)} \left(\frac{M_T(l)}{1-\nu} - M_l \right) \right]; \\
J_2(l) = & \left[-\frac{E_T^{(2)}(l)}{1-\nu^2} l - \left(\frac{dE_T^{(2)}(l)}{dx} \cdot \frac{l}{1-\nu^2} + \frac{E_T^{(2)}(l)}{1-\nu^2} \cdot \frac{\nu \operatorname{ctg} \varphi}{R} \right) \frac{l^2}{2} - \right. \\
& \left. - \frac{dE_T^{(2)}(l)}{dx} \cdot \frac{l}{1-\nu^2} \frac{\nu l^3 \operatorname{ctg} \varphi}{6R} \right] \cdot J_1(l) + \left[-\frac{E_T^{(2)}(l)}{1-\nu^2} - \left(\frac{dE_T^{(2)}(l)}{dx} \times \right. \right. \\
& \left. \times \frac{l}{1-\nu^2} + \frac{E_T^{(2)}(l)}{1-\nu^2} \cdot \frac{\nu \operatorname{ctg} \varphi}{R} \right) l - \frac{dE_T^{(2)}(l)}{dx} \frac{l}{1-\nu^2} \cdot \frac{\nu l^2 \operatorname{ctg} \varphi}{2R} \Big] J_2(0) - \\
& - \left[\frac{dE_T^{(2)}(l)}{dx} \cdot \frac{l}{1-\nu^2} + \frac{E_T^{(2)}(l)}{1-\nu^2} \cdot \frac{\nu \operatorname{ctg} \varphi}{R} + \frac{dE_T^{(2)}(l)}{dx} \cdot \frac{l}{1-\nu^2} \times \right. \\
& \left. \times \frac{\nu \operatorname{ctg} \varphi}{R} l \right] J_1(0) + \frac{E_T^{(2)}(l)}{1-\nu^2} \psi_2(l) + \left(\frac{dE_T^{(2)}(l)}{dx} \cdot \frac{l}{1-\nu^2} + \frac{E_T^{(2)}(l)}{1-\nu^2} \times \right. \\
& \left. \times \frac{\nu \operatorname{ctg} \varphi}{R} \right) \psi_3(l) - \frac{dE_T^{(2)}(l)}{dx} \cdot \frac{l}{1-\nu^2} \cdot \frac{\nu \operatorname{ctg} \varphi}{R} \psi_4(l) + \frac{l}{1-\nu} \frac{dM_T(l)}{dx};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_4(x) &= \iiint \left((1-v^2) \frac{E_T^{(0)}(x)}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \left\{ \frac{1}{R} \frac{N_T(x)}{E_T^{(0)}(x)} - v \frac{N_x}{R} \cdot \frac{1}{E_T^{(0)}(x)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p(x) \frac{1}{E_T^{(0)}(x)} \right\} + \frac{1+v}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} (M_T(x)) \right) dx dx dx dx; \\
\psi_3(x) &= \int \iiint \left((1-v^2) \frac{E_T^{(0)}(x)}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \left\{ \frac{1}{R} \frac{N_T(x)}{E_T^{(0)}(x)} - v \frac{N_x}{R} \cdot \frac{1}{E_T^{(0)}(x)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p(x) \frac{1}{E_T^{(0)}(x)} \right\} + \frac{1+v}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} (M_T(x)) \right) dx dx dx dx; \\
\psi_2(x) &= \iint \left((1-v^2) \frac{E_T^{(0)}(x)}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \left\{ \frac{1}{R} \frac{N_T(x)}{E_T^{(0)}(x)} - v \frac{N_x}{R} \cdot \frac{1}{E_T^{(0)}(x)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p(x) \frac{1}{E_T^{(0)}(x)} \right\} + \frac{1+v}{E_T^{(2)}(x)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} (M_T(x)) \right) dx dx.
\end{aligned}$$

Для определения ω_k , $k = \overline{1, n}$ получим следующую систему конечных уравнений:

$$k = 1$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \left\{ f(x_1) \frac{1}{L_1} (Q_1 - \varphi_2(l)) + \alpha(x_1) - \psi_4(x_1) \right\} / \left\{ 1 - \frac{1}{2R^2} (x_1 + x_2) \frac{E_T^{(0)}(x_1)}{E_T^{(2)}(x_1)} \times \right. \\
&\quad \times \left[- \frac{f(x_1)}{L_1} \left(L_2 \cdot \frac{(l-x_1)^2}{2} \left(1 + \frac{l-x_1}{3} \cdot \frac{v \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{R} \right) + E_T^{(2)}(l) \cdot (l-x_1) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ L_3 \frac{(l-x_l)^2}{2} + L_4 (l-x_l)^3 \Big) + \beta(x_l) \frac{(l-x_l)^2}{2} \left(1 + \frac{l-x_l}{3} \cdot \frac{v \cdot ctg \varphi}{R} \right) \Big] \Big] \Big\},$$

$$k = \overline{2, n}$$

$$\omega_k = \left\{ f(x_k) \frac{l}{L_l} (Q_l - \varphi_2(l)) + \alpha(x_k) - \psi_4(x_k) + \frac{l}{2R^2} \sum_{i=1}^{k-2} (x_i + x_{i+1}) \times \right.$$

$$\times \left\{ \frac{E_T^{(0)}(x_i)}{E_T^{(2)}(x_i)} \omega_i \left[- \frac{f(x_k)}{L_l} \left(L_2 \cdot \frac{(l-x_i)^2}{2} \left(1 + \frac{l-x_i}{3} \cdot \frac{v \cdot ctg \varphi}{R} \right) + \right. \right.$$

$$+ E_T^{(2)}(l)(l-x_i) + L_3 \frac{(l-x_i)^2}{2} + L_4 (l-x_i)^3 \Big) + \beta(x_k) \frac{(l-x_i)^2}{2} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{l-x_i}{3} \cdot \frac{v \cdot ctg \varphi}{R} \right) - \frac{1-v^2}{6} \cdot (x_k - x_i)^3 \Big] - \frac{E_T^{(0)}(x_{i+1})}{E_T^{(2)}(x_{i+1})} \omega_{i+1} \times$$

$$\times \left[- \frac{f(x_k)}{L_l} \left(L_2 \frac{(l-x_{i+1})^2}{2} \left(1 + \frac{l-x_{i+1}}{3} \frac{v \cdot ctg \varphi}{R} \right) + E_T^{(2)}(l)(l-x_{i+1}) + \right.$$

$$+ L_3 \frac{(l-x_{i+1})^2}{2} + L_4 (l-x_{i+1})^3 \Big) + \beta(x_k) \frac{(l-x_{i+1})^2}{2} \left(1 + \frac{l-x_{i+1}}{3} \frac{v \cdot ctg \varphi}{R} \right) -$$

$$- \frac{1-v^2}{6} \cdot (x_k - x_{i+1})^3 \Big] \Big\} + \frac{l}{2R^2} \cdot (x_{k-1} + x_k) \left\{ \frac{E_T^{(0)}(x_{k-1})}{E_T^{(2)}(x_{k-1})} \omega_{k-1} \times \right.$$

$$\times \left[- \frac{f(x_k)}{L_l} \left(L_2 \frac{(l-x_{k-1})^2}{2} \left(1 + \frac{l-x_{k-1}}{3} \frac{v \cdot ctg \varphi}{R} \right) + E_T^{(2)}(l)(l-x_{k-1}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + L_3 \frac{(l-x_{k-1})^2}{2} + L_4 (l-x_{k-1})^3 \Big) + \beta(x_k) \frac{(l-x_{k-1})^2}{2} \left(1 + \frac{l-x_{k-1}}{3} \cdot \frac{v \operatorname{ctg} \varphi}{R} \right) - \\
& - \frac{1-v^2}{6} \cdot (x_k - x_{k-1})^3 \Big] \Bigg/ \left\{ 1 - \frac{l}{2R^2} (x_{k+1} - x_{k-1}) \frac{E_T^{(0)}(x_k)}{E_T^{(2)}(x_k)} \times \right. \\
& \times \left[- \frac{f(x_k)}{L_1} \left(L_2 \cdot \frac{(l-x_k)^2}{2} \left(1 + \frac{l-x_k}{3} \cdot \frac{v \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{R} \right) + E_T^{(2)}(l) \cdot (l-x_k) + \right. \right. \\
& \left. \left. + L_3 \frac{(l-x_k)^2}{2} + L_4 (l-x_k)^3 \right) + \beta(x_k) \frac{(l-x_k)^2}{2} \left(1 + \frac{l-x_k}{3} \cdot \frac{v \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{R} \right) \right] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

После того как функция ω получена, определение внутренних силовых факторов и напряжений не представляет затруднений.

Из полученного следует, что применение метода частичной дискретизации дифференциальных уравнений позволяет получить решение дифференциального уравнения (4.19) практически для любых коэффициентов.

На рисунке 24 приведены графики сравнения для прогиба, когда модуль упругости и коэффициент линейного расширения материала оболочки постоянные величины.

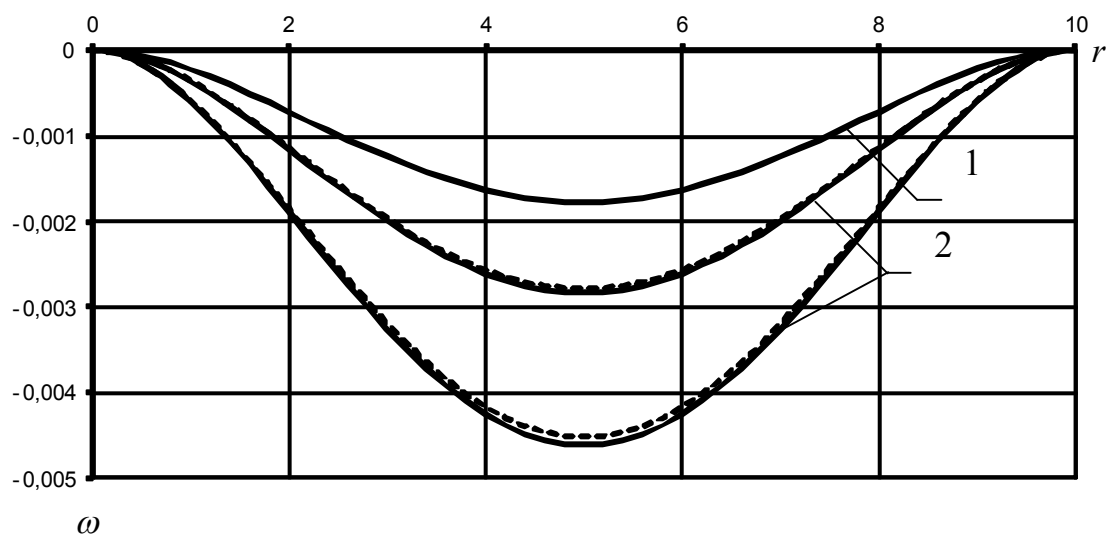


Рисунок 24 – Графики изменения прогиба для случая, когда модуль упругости и коэффициент линейного расширения материала оболочки постоянны, без учета (1) и учетом (2) температурного поля.

----- решение, полученное И.И. Гольденблатом,
 ————— решение, полученное автором

4.3 Осесимметричный изгиб пологой конической панели

Пологую коническую панель можно рассматривать как круглую пластину с начальным прогибом, для которой производная $\frac{d\omega_{нч}}{dr}$ постоянна и равна малому углу α наклона образующей конуса:

$$\frac{d\omega_{нч}}{dr} = \alpha$$

Основная система дифференциальных уравнений будет

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d}{dr} (\nabla^2 \omega) &= \psi + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \left(\frac{d\omega}{dr} + \alpha \right), \\ \frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) &= -\frac{E}{r} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega}{dr} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Разберем случай, когда коническая панель, защемленная по контуру, подвергается равномерно распределенной нагрузке, интенсивности q .

Применяя метод частичной дискретизации дифференциальных уравнений второе уравнение системы (4.22) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi}{dr} &= -\frac{E}{2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left\{ \frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \\ &\times \delta(r - r_k) - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \delta(r - r_{k+1}) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Рассмотрим случай, когда наружный контур пластины защемлен, а внутренний контур смещается свободно. Тогда граничные условия будут

$$\sigma_r|_{r=r_a} = \left(\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right)_{r=r_a} = 0, \quad (4.24)$$

$$\theta|_{r=r_b} = - \left(\frac{d\omega}{dr} \right)_{r=r_b} = 0, \quad (4.25)$$

$$\omega|_{r=r_b} = 0. \quad (4.26)$$

Общее решение уравнения (4.23) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} = & C_1 r + C_2 \frac{1}{r} - \frac{E}{4} \sum (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) \times \right. \\ & \left. \times H(r - r_k) - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(r - \frac{r_{k+1}^2}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right]. \end{aligned}$$

Постоянная C_2 равна нулю. Учет условий (4.24) для задачи (4.23)-(4.24) дает

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} = & - \frac{E}{4} \sum (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) H(r - r_k) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(r - \frac{r_{k+1}^2}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right]. \quad (4.27) \end{aligned}$$

Дискретизируя множитель $\frac{d\omega}{dr}$ функции $\frac{d\Phi}{dr}$ запишем первое уравнение системы в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{d^3\omega}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\omega}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} = \frac{\psi}{D} - \frac{Eh\varepsilon}{4D} \cdot \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \\
& \times \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r^2} \right) H(r - r_{k+1}) \Bigg) - \\
& - \frac{Eh}{8D} \cdot \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \right\} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \delta(r - r_k). \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Общее решение (4.28) будет

$$\begin{aligned}
& \frac{d\omega}{dr} = C_3 \frac{1}{r} + C_4 r + \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr + \frac{Eh\alpha}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(2r - \frac{2r^2}{3r_k} - 2r_k + \frac{2r_k^2}{3r} \right) H(r - r_k) - \right. \quad (4.29) \\
& \left. - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(2r - \frac{2r^2}{3r_{k+1}} - 2r_{k+1} + \frac{2r_{k+1}^2}{3r} \right) H(r - r_{k+1}) \right] - \\
& - \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) \left[\sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \times \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \left] \right] \frac{d\omega(r_k)}{dr} H(r - r_k),$$

где $C_3 = 0$, C_4 определяется с учетом условий (4.25):

$$\begin{aligned} C_4 = & -\frac{1}{2D} \left[\int \psi dr \right]_{r=r_b} + \frac{1}{2Dr_b^2} \left[\int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b} - \frac{Eh\alpha}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\ & \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(2 - \frac{2r_b}{3r_k} - \frac{2r_k}{r_b} + \frac{2r_k^2}{3r_b^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(2 - \frac{2r_b}{3r_{k+1}} - \frac{2r_{k+1}}{r_b} + \frac{2r_{k+1}^2}{3r_b^2} \right) \right] + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \times \\ & \times \left(1 - \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) \left[\sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \right] \frac{d\omega(r_k)}{dr}. \end{aligned}$$

Тогда угол поворота запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dr} = & \frac{r}{2D} \left[\int \psi dr - \left(\int \psi dr \right)_{r=r_b} \right] + \frac{1}{2D} \left[\frac{r}{r_b^2} \left(\int r^2 \psi dr \right)_{r=r_b} - \frac{1}{r} \int r^2 \psi dr \right] + \\ & + \frac{Eh\alpha}{4D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(r - \frac{r^2}{3r_k} - r_k + \frac{r_k^2}{3r} \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times H(r - r_k) - \left(1 - \frac{r_b}{3r_k} - \frac{r_k}{r_b} + \frac{r_k^2}{3r_b^2} \right) r \left[- \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left[\left(r - \frac{r^2}{3r_{k+1}} - r_{k+1} + \frac{r_{k+1}^2}{3r} \right) H(r - r_{k+1}) - \left(1 - \frac{r_b}{3r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r_b} + \frac{r_{k+1}^2}{3r_b^2} \right) r \right] \right] + \\
& + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left[\sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \right] \times \\
& \times \left[\left(1 - \frac{r_k^2}{3r_b^2} \right) r - \left(r - \frac{r_k^2}{3r} \right) H(r - r_k) \right] \frac{d\omega(r_k)}{dr}, \tag{4.30}
\end{aligned}$$

где $\frac{d\omega(r_k)}{dr}$ ($k = \overline{1, n}$) определяются рекуррентными алгебраическими уравнениями.

$k = 1$

$$\begin{aligned}
& \frac{Eh\alpha}{16D} (r_1 + r_2) \left(\frac{2r_b}{3r_1} + \frac{2r_1}{r_b} - \frac{2r_1^2}{3r_b^2} - 2 \right) r_1 \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \left[\frac{Eh\alpha^2}{8D} (r_1 + r_2) \times \right. \\
& \times \left. \left(\frac{2r_b}{3r_1} + \frac{2r_1}{r_b} - \frac{2r_1^2}{3r_b^2} - 2 \right) r_1 - 1 \right] \frac{d\omega(r_1)}{dr} + F(r_1) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда нетрудно записать $\frac{d\omega(r_k)}{dr}$ для произвольного k ($k = \overline{2, n}$):

$$\begin{aligned}
& \frac{Eh\alpha}{8D}(r_{k+1}-r_{k-1})\left(\frac{r_b}{3r_k}+\frac{r_k}{r_b}-\frac{r_k^2}{3r_b^2}-1\right)r_k\left(\frac{d\omega(r_k)}{dr}\right)^2 + \\
& + \left\{\frac{Eh\alpha^2}{4D}(r_{k+1}-r_{k-1})\left(\frac{r_b}{3r_k}+\frac{r_k}{r_b}-\frac{r_k^2}{3r_b^2}-1\right)r_k+\frac{Eh}{16D}(r_{k+1}-r_{k-1})\times\right. \\
& \times \left[\sum_{i=1}^{k-1}(r_i+r_{i+1})\left[\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega(r_i)}{dr}\right)^2+\alpha\frac{d\omega(r_i)}{dr}\right)\left(\frac{1}{r_i}-\frac{r_i}{r_k^2}\right)-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr}\right)^2+\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left.+\alpha\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr}\right)\left(\frac{1}{r_{i+1}}-\frac{r_{i+1}}{r_k^2}\right)\right]\left(1-\frac{r_k^2}{3r_b^2}\right)r_k-1\right\}\frac{d\omega(r_k)}{dr}+\frac{Eh\alpha}{4D}(r_1+r_2)\times \\
& \times \left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega(r_1)}{dr}\right)^2+\alpha\frac{d\omega(r_1)}{dr}\right)\left(\frac{r_1^2}{3r_k}-\frac{r_k^2}{3r_1}-r_1-\left(\frac{r_1^2}{3r_b^2}-\frac{r_b}{3r_1}-\frac{r_1}{r_b}\right)r_k\right)+ \\
& + \frac{Eh}{4D}\sum_{i=2}^{k-1}(r_{i+1}-r_{i-1})\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega(r_i)}{dr}\right)^2+\alpha\frac{d\omega(r_i)}{dr}\right)\left(\frac{r_i^2}{3r_k}-\frac{r_k^2}{3r_i}-r_i-\right. \\
& \left.-\left(\frac{r_i^2}{3r_b^2}-\frac{r_b}{3r_i}-\frac{r_i}{r_b}\right)r_k\right)+\frac{Eh}{16D}\sum_{j=2}^{k-1}(r_{j+1}-r_{j-1})\left[\sum_{i=1}^{j-1}(r_i+r_{i+1})\times\right. \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega(r_i)}{dr}\right)^2+\alpha\frac{d\omega(r_i)}{dr}\right)\left(\frac{1}{r_i}-\frac{r_i}{r_j^2}\right)-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr}\right)^2+\alpha\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr}\right)\times\right. \\
& \times \left.\left.\left(\frac{1}{r_{i+1}}-\frac{r_{i+1}}{r_k^2}\right)\right]\right]\left[\left(1-\frac{r_j^2}{r_b^2}\right)r_k-r_k+\frac{r_j^2}{r_k}\right]\frac{d\omega(r_j)}{dr}+F(r_k)=0,
\end{aligned}$$

где

$$F(x) = \frac{r}{2D} \left[\int \psi dr - \left(\int \psi dr \right)_{r=r_b} \right] + \frac{1}{2D} \left[\frac{r}{r_b^2} \left(\int r^2 \psi dr \right)_{r=r_b} - \frac{1}{r} \int r^2 \psi dr \right].$$

Далее, интегрируя (4.28), находим ω :

$$\begin{aligned} \omega = & C_5 + \int F(r) dr + \frac{Eh\alpha}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \\ & \times \left[\left(r^2 - \frac{2r^3}{9r_k} - 2r_k r + \frac{2r_k^2}{3} \ln \frac{r}{r_k} - r_k^2 + \frac{20r_k^2}{9} \right) H(r - r_k) - \right. \\ & \left. \left. - \left(1 - \frac{r_b}{3r_k} - \frac{r_k}{r_b} + \frac{r_k^2}{3r_b^2} \right) r^2 \right] - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \times \right. \\ & \times \left[\left(r^2 - \frac{2r^3}{9r_{k+1}} - 2r_{k+1} r + \frac{2r_{k+1}^2}{3} \ln \frac{r}{r_{k+1}} - r_{k+1}^2 + \frac{20r_{k+1}^2}{9} \right) \times \right. \\ & \left. \left. \times H(r - r_{k+1}) - \left(1 - \frac{r_b}{3r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r_b} + \frac{r_{k+1}^2}{3r_b^2} \right) r^2 \right] \right] + \\ & + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left[\sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \times \right. \right. \\ & \times \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \times \\ & \times \left[\left(1 - \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) \frac{r^2}{2} - \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_k^2}{2} - r_k^2 \ln \frac{r}{r_k} \right) H(r - r_k) \right] \frac{d\omega(r_k)}{dr}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Учет условий (4.26) дает

$$\begin{aligned}
C_5 = & -\left(\int F(r)dr\right)_{r=r_b} - \frac{Eh\alpha}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \\
& \times \left[\left(\frac{r_b^3}{9r_k} - r_k r_b - r_k^2 + \frac{17r_k^2}{9} + \frac{2r_k^2}{3} \ln \frac{r_b}{r_k} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \times \right. \\
& \times \left[\left(\frac{r_b^3}{9r_{k+1}} - r_{k+1} r_b - r_{k+1}^2 + \frac{17r_{k+1}^2}{9} + \frac{2r_{k+1}^2}{3} \ln \frac{r_b}{r_{k+1}} \right) - \frac{Eh}{16D} \times \right. \\
& \times \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \right\} r_k^2 \ln \frac{r_b}{r_k} \cdot \frac{d\omega(r_k)}{dr}.
\end{aligned}$$

Тогда решение первого дифференциального уравнения системы (4.22) будет

$$\begin{aligned}
\omega = & \int F(r)dr - \left(\int F(r)dr\right)_{r=r_b} + \frac{Eh\alpha}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left. \right) \left[\left(r^2 - \frac{2r^3}{9r_k} - 2r_k r + \frac{2r_k^2}{3} \ln \frac{r}{r_k} - r_k^2 + \frac{20r_k^2}{9} \right) H(r - r_k) - \right. \\
& \left. \left. - \left(1 - \frac{r_b}{3r_k} - \frac{r_k}{r_b} + \frac{r_k^2}{3r_b^2} \right) r^2 - \frac{r_b^3}{9r_k} + r_k r_b + r_k^2 - \frac{17r_k^2}{9} - \frac{2r_k^2}{3} \ln \frac{r_b}{r_k} \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left[\left(r^2 - \frac{2r^3}{9r_{k+1}} - 2r_{k+1}r + \frac{2r_{k+1}^2}{3} \ln \frac{r}{r_{k+1}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - r_{k+1}^2 + \frac{20r_{k+1}^2}{9} \right) H(r - r_{k+1}) - \left(1 - \frac{r_b}{3r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r_b} + \frac{r_{k+1}^2}{3r_b^2} \right) r^2 - \frac{r_b^3}{9r_{k+1}} + \right. \\
& \left. + r_{k+1}r_b + r_{k+1}^2 - \frac{17r_{k+1}^2}{9} - \frac{2r_{k+1}^2}{3} \ln \frac{r_b}{r_{k+1}} \right] + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \times \\
& \times \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \right\} \left[\left(1 - \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) \frac{r^2}{2} - \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_k^2}{2} - r_k^2 \ln \frac{r}{r_k} \right) \times \right. \\
& \left. \times H(r - r_k) - r_k^2 \ln \frac{r_b}{r_k} \right] \frac{d\omega(r_k)}{dr}. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Решение данной задачи при приближенном задании прогиба $\omega = f \left(1 - r^2 / r_b^2 \right)^2$ построено С.П. Тимошенко [31]. В данной же работе никакие ограничения подобного рода не приводятся.

4.4 Изгиб шарнирно закрепленной конической оболочки

Разрешающая система дифференциальных уравнений остается в виде (4.42).

Граничные условия будут (3.32), (3.33), (4.24).

Решение второго уравнения (4.42) с учетом условий (4.24) равно

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{dr} = & -\frac{E}{4} \sum (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \\
& \times \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right) H(r - r_k) - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \times \\
& \left. \times \left(r - \frac{r_{k+1}^2}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right].
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Подставив последнее выражение в первое уравнение системы (4.42), и применяя метод частичной дискретизации дифференциальных уравнений, запишем в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d^3\omega}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\omega}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} = & \frac{\psi}{D} - \frac{Eh\alpha}{4D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left. \right) \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \times \\
& \times \left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r^2} \right) H(r - r_{k+1}) - \frac{Eh}{8D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \times \right. \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \times \right. \\
& \left. \left. \times \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \right\} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \delta(r - r_k) \right].
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Общее решение уравнения (4.34) будет

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dr} = & C_3 \frac{1}{r} + C_4 r + \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr + \frac{Eh\alpha}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) 2 \left(r - r_k + \frac{r_k^2}{3r} - \frac{r^2}{3r_k} \right) H(r - r_k) - \right. \\
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) 2 \left(r - r_{k+1} + \frac{r_{k+1}^2}{3r} - \frac{r^2}{3r_{k+1}} \right) \times \\
& \times H(r - r_{k+1}) \left. \right] + \frac{Ehr}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \right. \\
& + \alpha \frac{d\omega(r_i)}{dr} \left. \left. \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \right\} \times \\
& \times \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left(\frac{r^2}{2} - r_k \ln \frac{r}{r_k} \frac{r_k^2}{2} \right) H(r - r_k).
\end{aligned}$$

С учетом условий (3.33) получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dr} = & \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr - \frac{r}{2D} \left[\int \psi dr + \frac{1-v}{1+v} \cdot \frac{1}{r_b^2} \int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b} + \\
& + \frac{Eh\alpha}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left[2 \left(r - r_k + \frac{r_k^2}{3r} - \frac{r^2}{3r_k} \right) \times \right. \right. \\
& \times H(r - r_k) - \left. \left. \left(\frac{v-1}{r_b^2(1+v)} \left(\frac{r_b^3}{3r_k} - r_k r_b + \frac{2r_k^2}{3} \right) - \frac{r_b}{r_k} - \frac{r_k}{r_b} + 2 \right) r \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left[2 \left(r - r_{k+1} + \frac{r_{k+1}^2}{3r} - \frac{r^2}{3r_{k+1}} \right) H(r - r_{k+1}) - \right. \\
& - \left. \left(\frac{\nu - 1}{r_b^2(1 + \nu)} \left(\frac{r_b^3}{3r_k} - r_{k+1}r_b + \frac{2r_{k+1}^2}{3} \right) - \frac{r_b}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r_b} + 2 \right) r \right] + \frac{Ehr}{16D(1 + \nu)} \times \\
& \times \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left[1 + \frac{r_k^2}{r_b^2} + \nu \left(1 - \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) - (1 + \nu) \left(1 - \frac{r_k^2}{r^2} \right) H(r - r_k) \right] \times \\
& \times \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \alpha \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \right\} \frac{d\omega(r_k)}{dr}, \tag{4.35}
\end{aligned}$$

где значения углов поворота $\frac{d\omega_k}{dr}$ ($k = \overline{1, n}$) определяется из системы квадратичных алгебраических уравнений:

$$k = 1$$

$$\begin{aligned}
& \frac{Ehr_1\alpha}{16D} (r_1 + r_2) \left(\frac{\nu - 1}{r_b^2(1 + \nu)} \left(r_1r_b - \frac{r_b^3}{3r_1} - \frac{2r_1^2}{3} \right) + \frac{r_b}{r_1} + \frac{r_1}{r_b} - 2 \right) \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 - \\
& - \left\{ \frac{Ehr_1\alpha}{8D} (r_1 + r_2) \left(\frac{\nu - 1}{r_b^2(1 + \nu)} \left(r_1r_b - \frac{r_b^3}{3r_1} + \frac{2r_1^2}{3} \right) + \frac{r_b}{r_1} + \frac{r_1}{r_b} - 2 \right) - 1 \right\} \times \\
& \times \frac{d\omega(r_1)}{dr} + F(r_1) = 0.
\end{aligned}$$

$$k = \overline{2, n}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{Ehr_k}{8D} (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{v-1}{r_b^2(1+v)} \left(r_k r_b - \frac{r_b^3}{3r_k} - \frac{2r_k^2}{3} \right) + \frac{r_b}{r_k} + \frac{r_k}{r_b} - 2 \right) \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \\
& + \left\{ \frac{Ehr_k \alpha^2}{8D} (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{v-1}{r_b^2(1+v)} \left(r_k r_b - \frac{r_b^3}{3r_k} - \frac{2r_k^2}{3} \right) + \frac{r_b}{r_k} + \frac{r_k}{r_b} - 2 \right) + \right. \\
& + \frac{Ehr_k}{16D(1+v)} (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(1 + \frac{r_k^2}{r_b^2} + v \left(1 - \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) \right) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \alpha \frac{d\omega(r_i)}{dr} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left. \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right) \right] \right\} - I \Big\} \times \\
& \times \frac{d\omega(r_k)}{dr} + \frac{Eh\alpha}{8D} (r_1 + r_2) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_1)}{dr} \right) \left[2 \left(r_k - r_1 + \frac{r_1^2}{3r_k} - \frac{r_k^2}{3r_1} \right) - \right. \\
& - \left. \left(\frac{v-1}{r_b^2(1+v)} \left(\frac{r_b^3}{3r_1} - r_1 r_b + \frac{2r_1^2}{3} \right) - \frac{r_b}{r_1} - \frac{r_1}{r_b} + 2 \right) r_k \right] + \frac{Eh\alpha}{8D} \times \\
& \times \sum_{i=1}^{k-1} (r_{i+1} - r_{i-1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left[2 \left(r_k - r_i + \frac{r_i^2}{3r_k} - \frac{r_k^2}{3r_i} \right) - \right. \right. \\
& - \left. \left(\frac{v-1}{r_b^2(1+v)} \left(\frac{r_b^3}{3r_i} - r_i r_b + \frac{2r_i^2}{3} \right) - \frac{r_b}{r_i} - \frac{r_i}{r_b} + 2 \right) r_k \right] + \frac{Ehr_k}{16D(1+v)} \times \\
& \times \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) \left(1 + \frac{r_j^2}{r_b^2} + v \left(1 - \frac{r_j^2}{r_b^2} \right) - (1+v) \left(1 - \frac{r_j^2}{r_k^2} \right) \right) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_j^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_j^2} \right) \right] \left\} \frac{d\omega(r_k)}{dr} + F(r_k) = 0,$$

где

$$F(r) = \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{l}{2Dr} \int r^2 \psi dr - \frac{r}{2D} \left[\int \psi dr + \frac{l-v}{l+v} \cdot \frac{l}{r_b^2} \int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b}.$$

Интегрируя (4.35) с учетом условий (3.32) имеем:

$$\omega = \int F(r) dr - \left[\int F(r) dr \right]_{r=r_b} + \frac{Eh\alpha}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left\{ \left(r^2 - 2r_k r - \frac{2r^3}{9r_k} + \frac{2r_k^2}{3} \ln \frac{r}{r_k} + \frac{11r_k^2}{9} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{v-l}{r_b^2(1+v)} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{r_b^3}{3r_k} - r_k r_b + \frac{2r_k^2}{3} \right) - \frac{r_b}{r_k} - \frac{r_k}{r_b} + 2 \right) \frac{r^2}{2} - r_b^2 + 2r_k r_b + \frac{2r_b^3}{9r_k} - \frac{2r_k^2}{3} \ln \frac{r_b}{r_k} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{11r_k^2}{9} + \left(\frac{v-l}{1+v} \left(\frac{r_b}{3r_k} - \frac{r_k}{r_b} + \frac{2r_k^2}{3r_b^2} \right) - \frac{r_b}{r_k} - \frac{r_k}{r_b} + 2 \right) \frac{r_b^2}{2} \right\} - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left\{ \left(r^2 - 2r_{k+1} r - \frac{2r^3}{9r_{k+1}} + \frac{2r_{k+1}^2}{3} \ln \frac{r}{r_{k+1}} + \frac{11r_{k+1}^2}{9} \right) H(r - r_{k+1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{v-l}{r_b^2(1+v)} \left(\frac{r_b^3}{3r_{k+1}} - r_{k+1} r_b + \frac{2r_{k+1}^2}{3} \right) - \frac{r_b}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r_b} + 2 \right) \frac{r^2}{2} - r_b^2 + \right. \right. \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}
& + 2r_{k+1}r_b + \frac{2r_b^3}{9r_{k+1}} - \frac{2r_{k+1}^2}{3} \ln \frac{r_b}{r_{k+1}} - \frac{11r_{k+1}^2}{9} + \left(\frac{v-1}{1+v} \left(\frac{r_b}{3r_{k+1}} - \frac{r_k}{r_b} + \frac{2r_{k+1}^2}{3r_b^2} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{r_b}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r_b} + 2 \right) \frac{r_b^2}{2} \Bigg] + \frac{Eh\alpha}{16D(1+v)} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left[\left(1 + \frac{1-v}{1+v} \frac{r_k^2}{r_b^2} \right) \frac{r^2}{2} - \right. \\
& \left. - \frac{r_k^2}{1+v} - 1 + \frac{r_k^2}{r_b^2} - \left(\frac{r^2}{2} - 1 \right) \left(1 - \frac{r_k^2}{r^2} \right) H(r - r_k) \right] \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_i}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \alpha \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \right\} \frac{d\omega(r_k)}{dr}.
\end{aligned}$$

Рассмотренная конструкция конической оболочки на самом деле представляет пластину с соответствующим характером кривизны, принятой за начальную. Конструирование таких моделей может быть предложено и далее, однако их целесообразность должна быть продиктована, по видимому, с учетом интересов практики.

4.5 Изгиб гофрированной мембраны

Распространенным элементом различных приборов является гофрированная пластинка или, как чаще выражаются, гофрированная мембрана. Последний термин является условным, так как применяется к пластинкам с конечной изгибной жесткостью.

Пластинка, снабженная концентрическими складками (гофром), обладает гораздо большей жесткостью, чем плоская; при одной и той же интенсивности поперечной нагрузки величина прогиба резко меняется в зависимости от характера гофрировки.

Разберем случай синусоидального гофра. Будем считать, что начальные прогибы пластинки определяется уравнением

$$\omega_{нч} = f_{нч} \left(\cos \frac{2\pi n r}{r_b} - 1 \right), \quad (4.37)$$

где r_b - внешний радиус мембраны.

Наибольший начальный прогиб характеризуется параметром $f_{нч}$. Угол между нормалью к срединной поверхности и осью z равен

$$\theta_{нч} = - \frac{d\omega_{нч}}{dr} = f_{нч} \frac{2\pi n}{r_b} \sin \frac{2\pi n r}{r_b}.$$

Положим, что амплитуда гофре $f_{нч}$ сравнима по величине с толщиной пластинки, но вместе с тем мала по отношению к радиусу. Введя обозначение $\beta = 2\pi n$, получим

$$\frac{d\omega_{нч}}{dr} = \beta \frac{f_{нч}}{r_b} \sin \frac{\beta r}{r_b}. \quad (4.38)$$

Разрешающие уравнения принимают вид

$$D \frac{d}{dr} (\nabla^2 \omega) = \psi + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \left(\frac{d\omega}{dr} + \beta \frac{f_{нч}}{r_b} \sin \frac{\beta r}{r_b} \right), \quad (4.39)$$

$$\frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) = - \frac{E}{r} \left[- \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{нч}}{r_b} \sin \frac{\beta r}{r_b} \frac{d\omega}{dr} \right]. \quad (4.40)$$

На контуре (при $r = r_b$) величины $\omega_{нч}$ и $\theta_{нч}$ обращаются в нуль. Нагрузку будем считать равномерно распределенной по всей поверхности пластины. Примем, что дополнительные прогибы пластины подчинены условию скользящего защемления по контуру:

$$\sigma_r|_{r=r_a} = \left(\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right)_{r=r_a} = 0, \quad (4.41)$$

$$\theta|_{r=c} = -\left(\frac{d\omega}{dr}\right)_{r=r_b} = 0, \quad (4.42)$$

$$\omega|_{r=r_b} = 0. \quad (4.43)$$

Общее решение уравнения (4.40) после применения метода частичной дискретизации имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} = & C_1 r + C_2 \frac{1}{r} - \frac{E}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_k}{r_b} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \\ & \times \left(\frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{r} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_{k+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \times \\ & \left. \times \left(\frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right], \end{aligned}$$

где C_2 приравниваем нулю, а из условия (4.41) $C_1 = 0$.

Тогда решение задачи (4.40)- (4.41) будет

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} = & -\frac{E}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_k}{r_b} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \\ & \times \left(\frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{r} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_{k+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \times \\ & \left. \times \left(\frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r} \right) H(r - r_{k+1}) \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Уравнение (4.39) соответствующее (4.44), после применения метода частичной дискретизации дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{d^3 \omega}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \omega}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} = \frac{\psi}{D} - \frac{Eh}{4Dr} \beta \frac{f_{i\div}}{r_b} \sin \frac{\beta r}{r_b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{i\div}}{r_b} \sin \frac{\beta r_k}{r_b} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(\frac{r}{r_k} - \frac{r_k}{r} \right) H(r - r_k) - \right. \\
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{i\div}}{r_b} \sin \frac{\beta r_{k+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(\frac{r}{r_{k+1}} - \frac{r_{k+1}}{r} \right) \times \\
& \times H(r - r_{k+1}) \left. \right] - \frac{Eh}{8D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_i}{r_b} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_{i+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left. \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \right] \right\} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \delta(r - r_k). \tag{4.45}
\end{aligned}$$

Общее решение дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (4.45) будет

$$\begin{aligned}
& \frac{d\omega}{dr} = C_4 r + C_3 \frac{1}{r} + \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr + \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_k}{r_b} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r} B(r, r_k) - r A(r, r_k) \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_{k+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right] \left(\frac{1}{r} B(r, r_{k+1}) - r A(r, r_{k+1}) \right) \Bigg] + \\
& + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_i}{r_b} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right] \times \right. \\
& \times \left(\frac{r_k^2}{r_i r} - \frac{r_i}{r} - \frac{r}{r_i} + \frac{r_i r}{r_k^2} \right) - \left. \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_{i+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left. \left(\frac{r_k^2}{r_{i+1} r} - \frac{r_{i+1}}{r} - \frac{r}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1} r}{r_k^2} \right) \right] \right\} \frac{d\omega(r_k)}{dr} H(r - r_k),
\end{aligned}$$

где

$$B(r, r_k) = \int \left(\frac{r^2}{r_k} - r_k \right) \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r}{r_b} H(r - r_k) dr,$$

$$A(r, r_k) = \int \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2} \right) \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r}{r_b} H(r - r_k) dr.$$

Для произвольных постоянных интегрирования имеем: $C_3 = 0$, а C_4 находим из условия (4.42)

$$\begin{aligned}
C_4 = & \left[-\frac{1}{2D} \int \psi dr + \frac{1}{2Dr^2} \int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b} - \frac{1}{r_b} \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_k}{r_b} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_b} B(r_b, r_k) - r_b A(r_b, r_k) \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{Hy}}{r_b} \sin \frac{\beta r_{k+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_b} B(r_b, r_{k+1}) - \right. \\
& \left. - r_b A(r_b, r_{k+1}) \right) \Bigg] + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \sum_{i=1}^n (r_i + r_{i+1}) \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \beta \frac{f_{Hy}}{r_b} \sin \frac{\beta r_i}{r_b} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{r_k^2}{r_i r} - \frac{r_i}{r} - \frac{r}{r_i} + \frac{r_i r}{r_k^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{Hy}}{r_b} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \sin \frac{\beta r_{i+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left(\frac{r_k^2}{r_{i+1} r} - \frac{r_{i+1}}{r} - \frac{r}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1} r}{r_k^2} \right) \right] \Bigg] \frac{d\omega(r_k)}{dr} H(r - r_k).
\end{aligned}$$

Тогда угол поворота θ определяется формулой

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dr} = & F(r) + \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{Hy}}{r_b} \sin \frac{\beta r_k}{r_b} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \\
& \times \left(\frac{1}{r} B(r, r_k) - r A(r, r_k) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_k) + r A(r_b, r_k) \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \beta \frac{f_{Hy}}{r_b} \sin \frac{\beta r_{k+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r} B(r, r_{k+1}) - r A(r, r_{k+1}) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_{k+1}) + \right. \\
& \left. + r A(r_b, r_{k+1}) \right) \Bigg] + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \beta \frac{f_{Hy}}{r_b} \sin \frac{\beta r_i}{r_b} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{r_k^2}{r_i r} - \frac{r_i}{r} - \frac{r}{r_i} + \frac{r_i r}{r_k^2} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{r_k^2}{r_i r_b^2} - \frac{r_i}{r_b^2} - \frac{1}{r_i} + \frac{r_i}{r_k^2} \right) r \right\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{i+1}}{r_b} \sin \frac{\beta r_{i+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \left[\left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}r} - \frac{r_{i+1}}{r} - \frac{r}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1}r}{r_k^2} \right) \times \right. \\
& \left. \times H(r - r_k) - \left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}r_b^2} - \frac{r_{i+1}}{r_b^2} - \frac{1}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) r \right] \left. \right\} \frac{d\omega(r_k)}{dr}, \quad (4.46)
\end{aligned}$$

где

$$F(r) = \frac{r}{2D} \int \psi dr - \frac{1}{2Dr} \int r^2 \psi dr + r \left[\frac{1}{2D} \int \psi dr + \frac{1}{2Dr_b^2} \int r^2 \psi dr \right]_{r=r_b},$$

$$B(r, r_k) = \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \int \left(\frac{r^2}{r_k} - r_k \right) \sin \frac{\beta r}{r_b} H(r - r_k) dr,$$

$$A(r, r_k) = \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \int \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2} \right) \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r}{r_b} H(r - r_k) dr.$$

При этом углы поворота в точках $r_k, k = \overline{1, n}$ определяются из системы рекуррентных уравнений второго порядка:

$$k = 1$$

$$\begin{aligned}
& \frac{Eh}{16D} (r_1 + r_2) \left(\frac{1}{r_1} B(r_1, r_1) - r_1 A(r_1, r_1) - \frac{r_1}{r_b^2} B(r_b, r_1) + r_1 A(r_b, r_1) \right) \times \\
& \times \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \frac{Eh}{8D} (r_1 + r_2) \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_1}{r_b} \left(\frac{1}{r_1} B(r_1, r_1) - r_1 A(r_1, r_1) - \right. \\
& \left. - \frac{r_1}{r_b^2} B(r_b, r_1) + r_1 A(r_b, r_1) \right) - 1 \left\{ \frac{d\omega(r_1)}{dr} + F(r_1) \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$k = \overline{2, n}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{Eh}{16D} (r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{1}{r_k} B(r_k, r_k) - r_k A(r_k, r_k) - \frac{r_k}{r_b^2} B(r_b, r_k) + r_k A(r_b, r_k) \right) \times \\
& \times \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \left\{ \frac{Eh}{8D} (r_{k+1} - r_{k-1}) \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_k}{r_b} \left(\frac{1}{r_k} B(r_k, r_k) - r_k A(r_k, r_k) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{r_k}{r_b^2} B(r_b, r_k) + r_k A(r_b, r_k) \right) + \frac{Eh}{16D} (r_{k+1} - r_{k-1}) \left\{ (r_1 + r_2) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_1}{r_b} \frac{d\omega(r_1)}{dr} \right) \left(\frac{r_k^2}{r_l r_b^2} - \frac{r_l}{r_b^2} - \frac{1}{r_l} + \frac{r_l}{r_k^2} \right) r_k + \sum_{i=2}^{k-1} (r_{i+1} - r_{i-1}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_i}{r_b} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{r_k^2}{r_i r_b^2} - \frac{r_i}{r_b^2} - \frac{1}{r_i} + \frac{r_i}{r_k^2} \right) r_k \right\} - l \left\{ \frac{d\omega(r_k)}{dr} + \frac{Eh}{8D} \left\{ (r_1 + r_2) \times \right. \right. \\
& \times \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_1}{r_b} \frac{d\omega(r_1)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_k} B(r_k, r_1) - r_k A(r_k, r_1) - \frac{r_k}{r_b^2} B(r_b, r_1) + \right. \\
& \left. \left. + r_k A(r_b, r_1) \right) + \sum_{i=2}^k (r_{i+1} - r_{i-1}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_i}{r_b} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left(\frac{1}{r_k} B(r_k, r_i) - \right. \\
& \left. \left. - \left(r_k A(r_k, r_i) - \frac{r_k}{r_b^2} B(r_b, r_i) + r_k A(r_b, r_i) \right) \right\} + \frac{Eh}{16D} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) \left\{ (r_1 + r_2) \times \right. \\
& \times \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{i\div}}{r_b} \sin \frac{\beta r_1}{r_b} \frac{d\omega(r_1)}{dr} \right) \left(\frac{r_j^2}{r_l r_k} - \frac{r_l}{r_k} - \frac{r_k}{r_l} + \frac{r_k r_l}{r_j^2} - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{r_j^2}{r_i r_b^2} - \frac{r_l}{r_b^2} - \frac{l}{r_l} + \frac{r_l}{r_j^2} \right) r_k \left\} + \sum_{i=2}^{j-1} (r_{i+1} - r_{i-1}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{i+}}{r_b} \sin \frac{\beta r_i}{r_b} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{r_j^2}{r_i r_k} - \frac{r_i}{r_k} - \frac{r_k}{r_i} + \frac{r_k r_i}{r_j^2} - \left(\frac{r_j^2}{r_i r_b^2} - \frac{r_i}{r_b^2} - \frac{l}{r_i} + \frac{r_i}{r_j^2} \right) r_k \right\} + F(r_k) = 0.
\end{aligned}$$

Интегрируя (4.46) общее решение дифференциального уравнения (4.39) получим в виде

$$\begin{aligned}
\omega = C_5 + \int & \left(F(r) + \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \times \right. \right. \\
& \times \sin \frac{\beta r_k}{r_b} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \left. \left. \left(\frac{1}{r} B(r, r_k) - rA(r, r_k) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_k) + rA(r_b, r_k) \right) - \right. \right. \\
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_{k+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r} B(r, r_{k+1}) - rA(r, r_{k+1}) - \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_{k+1}) + rA(r_b, r_{k+1}) \right) \right) \right) dr + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \times \\
& \times \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_i}{r_b} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left[\left(\frac{r_k^2}{r_i} - r_i \right) \times \right. \right. \\
& \times \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r^2}{2r_i} + \frac{r_i r^2}{2r_k^2} + \frac{r_k}{r_i} - \frac{r_i}{r_k} \left. \right] H(r - r_k) - \left(\frac{r_k^2}{r_i r_b^2} - \frac{r_i}{r_b^2} - \frac{l}{r_i} + \frac{r_i}{r_k^2} \right) \frac{r^2}{2} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{r_k^2}{r_i} - r_i \right) \ln \frac{r_b}{r_k} - \left(\frac{r_k}{r_i} - \frac{r_i}{r_k} \right) \left(1 - \frac{r_k}{2} \right) \Bigg] - \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \times \right. \right. \\
& \times \sin \frac{\beta r_{i+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \Bigg) \left[\left(\left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}} - r_{i+1} \right) \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r^2}{2r_{i+1}} + \frac{r_{i+1}r^2}{2r_k^2} + \frac{r_k}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k} \right) \times \right. \\
& \times H(r - r_k) - \left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}r_b^2} - \frac{r_{i+1}}{r_b^2} - \frac{1}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \frac{r^2}{2} - \left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}} - r_{i+1} \right) \times \\
& \left. \left. \times \ln \frac{r_b}{r_k} - \left(\frac{r_k}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k} \right) \left(1 - \frac{r_k}{2} \right) \right] \right\} \frac{d\omega(r_k)}{dr}.
\end{aligned}$$

Учет условия (4.43) окончательно дает

$$\begin{aligned}
\omega = & \int \left(F(r) + \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_k}{r_b} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \right) \times \right. \right. \\
& \times \left(\frac{1}{r} B(r, r_k) - rA(r, r_k) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_k) + rA(r_b, r_k) \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \right. \\
& + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \sin \frac{\beta r_{k+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \Bigg) \left(\frac{1}{r} B(r, r_{k+1}) - rA(r, r_{k+1}) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_{k+1}) + \right. \\
& \left. \left. \left. + rA(r_b, r_{k+1}) \right) \right) \right) dr - \left[\int \left(F(r) + \frac{Eh}{8D} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{H\psi}}{r_b} \times \right. \right. \right. \right. \\
& \times \sin \frac{\beta r_k}{r_b} \frac{d\omega(r_k)}{dr} \Bigg) \left(\frac{1}{r} B(r, r_k) - rA(r, r_k) - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_k) + rA(r_b, r_k) \right) - \quad (4.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{Hy}}{r_b} \sin \frac{\beta r_{k+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right) \left(\frac{1}{r} B(r, r_{k+1}) - r A(r, r_{k+1}) - \right. \\
& \left. - \frac{r}{r_b^2} B(r_b, r_{k+1}) + r A(r_b, r_{k+1}) \right) \Bigg]_{r=r_b} + \frac{Eh}{16D} \sum_{k=2}^n (r_{k+1} - r_{k-1}) \times \\
& \times \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (r_i + r_{i+1}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{Hy}}{r_b} \sin \frac{\beta r_i}{r_b} \frac{d\omega(r_i)}{dr} \right) \left[\left(\frac{r_k^2}{r_i} - r_i \right) \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r^2}{2r_i} - \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{r_i r^2}{2r_k^2} + \frac{r_k}{r_i} - \frac{r_i}{r_k} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{r_k^2}{r_i^2} - \frac{r_i}{r_b^2} - \frac{1}{r_i} + \frac{r_i}{r_k^2} \right) \frac{r^2}{2} - \left(\frac{r_k^2}{r_i} - r_i \right) \ln \frac{r_b}{r_k} - \right. \\
& \left. - \left(\frac{r_k}{r_i} - \frac{r_i}{r_k} \right) \left(1 - \frac{r_k}{2} \right) \right] - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right)^2 + \beta \frac{f_{Hy}}{r_b} \sin \frac{\beta r_{i+1}}{r_b} \frac{d\omega(r_{i+1})}{dr} \right) \times \\
& \times \left[\left(\left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}} - r_{i+1} \right) \ln \frac{r}{r_k} - \frac{r^2}{2r_{i+1}} + \frac{r_{i+1} r^2}{2r_k^2} + \frac{r_k}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k} \right) H(r - r_k) - \left(\frac{r_k^2}{r_{i+1} r_b^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{r_{i+1}}{r_b^2} - \frac{1}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1}}{r_k^2} \right) \frac{r^2}{2} - \left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}} - r_{i+1} \right) \ln \frac{r_b}{r_k} - \left(\frac{r_k}{r_{i+1}} - \frac{r_{i+1}}{r_k} \right) \left(1 - \frac{r_k}{2} \right) \right] \Bigg\} \frac{d\omega(r_k)}{dr}.
\end{aligned}$$

Аналогичные решения могут быть получены и для различных других законов гофрировки оболочек.

4.6 Изгиб круглой абсолютно гибкой пластины

Рассмотрим круглую абсолютно гибкую пластину, подвергающуюся действию равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q .

Основная система дифференциальных уравнений теории абсолютно гибкой круглой пластины имеет следующий вид [23]

$$\left. \begin{aligned} \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{d\omega}{dr} &= -\psi, \\ \frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) &= -\frac{A}{2r} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Пользуясь методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений, второе уравнение системы (4.48) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi}{dr} &= -\frac{E}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\ &\times \left(\frac{1}{r_k} \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 \delta(r - r_k) - \frac{1}{r_{k+1}} \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 \delta(r - r_{k+1}) \right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Общее решение уравнения (4.49) будет

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} &= C_1 r + C_2 \frac{1}{r} + \frac{E}{8} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left(\left(\frac{r_k}{r} - \frac{r}{r_k} \right) \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 \times \right. \\ &\times H(r - r_k) - \left. \left(\frac{r_{k+1}}{r} - \frac{r}{r_{k+1}} \right) \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 H(r - r_{k+1}) \right). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Рассмотрим мембрану с отверстием с внутренним радиусом r_a . Внешний радиус обозначим через r_b . Отметим, что система уравнений (4.48) записана для мембраны постоянной толщины h . Примем следующие граничные условия

$$\left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right)_{r=r_a} = 0, \quad \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right)_{r=r_b} = 0. \quad (4.51)$$

Тогда в силу условий (4.51) решение задачи (4.49) - (4.51) получим в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{dr} = & \frac{E}{8} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\left(\frac{r_b^2}{r_b^2 - r_a^2} \left(\frac{r_k}{r_b^2} \cdot \frac{l+\nu}{l-\nu} + \frac{l}{r_k} \right) r + \frac{r_b^2}{r_b^2 - r_a^2} \times \right. \right. \\
 & \times \left(\frac{r_k}{r_b^2} + \frac{l}{r_k} \cdot \frac{l-\nu}{l+\nu} \right) \frac{l}{r} + \left(\frac{r_k}{r} - \frac{r}{r_k} \right) H(r - r_k) \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^2 - \left(\frac{r_b^2}{r_b^2 - r_a^2} \times \right. \\
 & \times \left(\frac{r_{k+1}}{r_b^2} \cdot \frac{l+\nu}{l-\nu} + \frac{l}{r_{k+1}} \right) r + \frac{r_b^2}{r_b^2 - r_a^2} \left(\frac{r_{k+1}}{r_b^2} + \frac{l}{r_{k+1}} \cdot \frac{l-\nu}{l+\nu} \right) \frac{l}{r} + \\
 & \left. \left. \left(\frac{r_{k+1}}{r} - \frac{r}{r_{k+1}} \right) H(r - r_{k+1}) \left(\frac{d\omega(r_{k+1})}{dr} \right)^2 \right] \right]. \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

Подставив (4.52) в первое уравнение системы (4.48) находим углы поворота в точках r_k :

$$\frac{d\omega(r_l)}{dr} = -2 \sqrt[3]{\frac{\psi r_l}{hE(r_l + r_2) \frac{r_b^2}{r_b^2 - r_a^2} \left(\frac{r_l^2}{r_b^2} \cdot \frac{l+\nu}{l-\nu} + l + \frac{l}{r_b^2} + \frac{l}{r_l^2} \cdot \frac{l-\nu}{l+\nu} \right)}},$$

для $k = \overline{2, n}$, получаем систему кубических алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 & (r_{k+1} - r_{k-1}) \frac{r_b^2}{r_b^2 - r_a^2} \left(\frac{r_k^2}{r_b^2} \cdot \frac{l+\nu}{l-\nu} + l + r_a^2 \left(\frac{l}{r_b^2} + \frac{l}{r_k^2} \cdot \frac{l-\nu}{l+\nu} \right) \right) \left(\frac{d\omega(r_k)}{dr} \right)^3 + \\
 & + \frac{r_b^2}{r_b^2 - r_a^2} \left\{ \left(r_l + r_2 \right) \left(\frac{r_l r_k}{r_b^2} \cdot \frac{l+\nu}{l-\nu} + \frac{r_l}{r_k} + \left(\frac{r_l}{r_b^2} + \frac{l}{r_l} \cdot \frac{l-\nu}{l+\nu} \right) \frac{r_a^2}{r_k} \right) \left(\frac{d\omega(r_l)}{dr} \right)^2 + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=2}^{k-1} (r_{i+1} - r_{i-1}) \left(\frac{r_i r_k}{r_b^2} \frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{r_i}{r_k} + \left(\frac{r_i}{r_b^2} + \frac{1}{r_i} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \frac{r_a^2}{r_k} \right) \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 \left\{ \frac{d\omega(r_k)}{dr} + \right. \\ \left. + \frac{8\psi_k r_k}{Eh} = 0, \right.$$

решая которую получим

$$\frac{d\omega_k}{dr} = \sqrt[3]{-\frac{q_k}{2} - \sqrt{Q_k}} + \sqrt[3]{-\frac{q_k}{2} + \sqrt{Q_k}},$$

$$\text{где } Q_k = \left(\frac{p_k}{3} \right)^3 + \left(\frac{q_k}{2} \right)^2,$$

$$q_k = \frac{8}{E \cdot h} \cdot \psi_k \cdot r_k / \left(r_{k+1} - r_{k-1} \right) \left(\frac{r_k^2}{r_b^2} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_k^2} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} + 1 \right),$$

$$p_k = \frac{1}{\left(r_{k+1} - r_{k-1} \right) \left(\frac{r_k^2}{r_b^2} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_k^2} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} + 1 \right)} \left((r_1 + r_2) \left(\frac{r_1 r_k}{r_b^2} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{r_1}{r_b^2} + \frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \frac{1}{r_k} + \frac{r_1}{r_k} \right) \left(\frac{d\omega(r_1)}{dr} \right)^2 + \sum_{i=2}^{k-1} (r_{i-1} - r_{i-1}) \left(\frac{r_i r_k}{r_b^2} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{r_i}{r_b^2} + \frac{1}{r_i^2} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \frac{1}{r_k} + \frac{r_i}{r_k} \right) \left(\frac{d\omega(r_i)}{dr} \right)^2 \right).$$

Далее из первого уравнения системы определение прогиба не составляет трудности. На рисунке 25 приведены кривые изменения прогиба для абсолютно гибкой пластины при различных значениях q

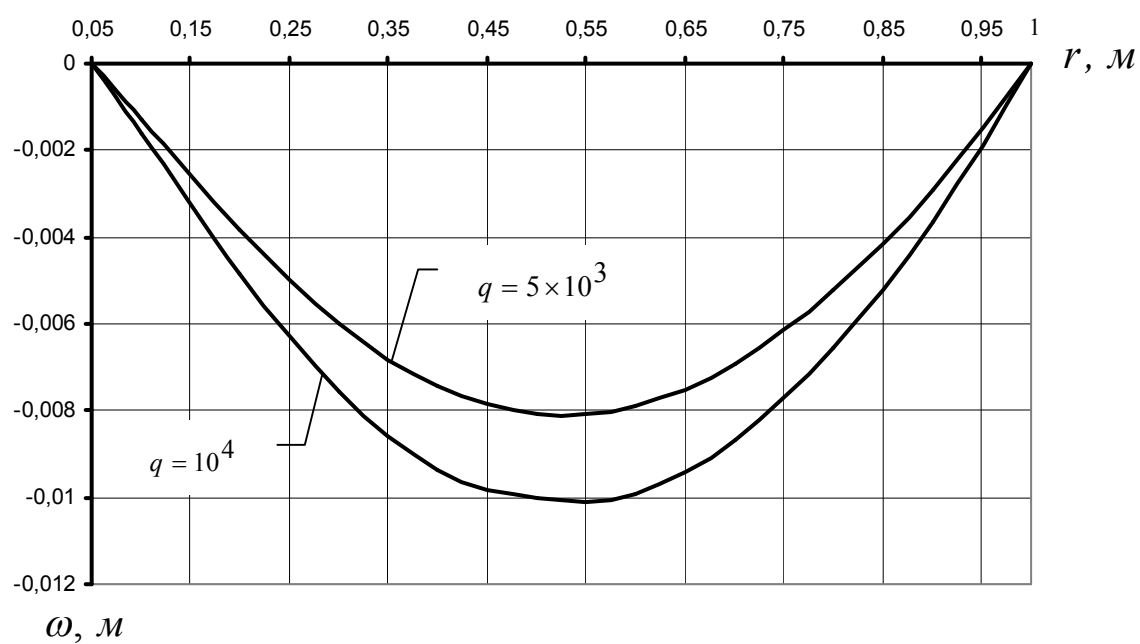


Рисунок 25 – Кривые изменения прогиба для абсолютно гибкой пластины при различных значениях q .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование задач о напряженно-деформированном состоянии тонких гибких неоднородных круглых пластин при осесимметричном температурном поле и с начальной кривизной имеют большое практическое значение и сводятся к связанным системам дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и нелинейным дифференциальным уравнениям, аналитическое решение которых наталкивается на серьезные трудности. Для определения решений подобного рода задач привлекается метод частичной дискретизации дифференциальных уравнений и не прямой операторный метод, разработанный профессором А.Н.Тюреходжаевым.

Основные результаты работы сводятся к следующему:

1. Исследовано напряженно-деформированное состояние гибких упругих круглых пластин с отверстием при малых прогибах в условиях неравномерного вдоль радиуса нагрева. Методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений получено решение задачи об осесимметричном напряженно-деформированном состоянии неоднородных гибких кольцевых пластин, подвергнутых неравномерному вдоль радиуса нагреву и действию изгибающего момента. Исследовано влияние растяжения пластины на ее изгиб.

2. Решена задача о сложном изгибе неоднородной гибкой упругой круглой пластины под действием температурного поля, изменяющегося по толщине пластины. Рассмотрены различные виды распределения поперечной нагрузки. Построено решение задачи об осесимметричном изгибе круглой пластины, вызванном действиями равномерно распределенной по поверхности поперечной нагрузки и радиальных сжимающих усилий. Решения задач получены с помощью метода частичной дискретизации дифференциальных уравнений.

3. Методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений и непрямым операторным методом достигнуто решение задачи об осесимметричной деформации круглой гибкой упругой

неоднородной пластины, находящейся в условиях неравномерного вдоль радиуса и по толщине нагрева.

4. Построены аналитические решения связанных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и систем нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние гибких упругих неоднородных круглых пластин.

5. Впервые получены решения дифференциальных уравнений для гибких пластин. Решены задачи с начальными прогибами при переменных механических характеристиках. Результаты сравнивались с известными точными результатами.

6. В работе использован метод частичной дискретизации дифференциальных уравнений для определения напряженно-деформированного состояния неоднородных пластин и неравномерно нагретых оболочек вращения.

7. Получены решения по определению закономерностей сложного изгиба для конических, гофрированных оболочек и мембраны.

8. Показано преимущество метода частичной дискретизации, которая состоит в том, что решения этим методом достаточно легко реализуется для любого закона изменения всех параметров рассмотренных задач.

9. Рассматривалось решение задачи об осесимметричных тонких оболочках и задача решена как для цилиндрической оболочки, так и для общего.

10. Показано преимущество метода частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений, заключающееся в том, что можно получить решения рассматриваемых и других подобного рода задач практически для любого закона изменения механических характеристик.

Список использованных источников

1. Коваленко А.Д. Круглые пластины переменной толщины. - М.: Физматгиз, 1959. - 298 с.
2. Лобкова Н.А., Ильин Л.А. К теории тонких неоднородных пластин. // ПМ,- 1965,Т.1, №8. - С. 9.
3. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. - Киев: Наукова думка, 1970. - 307 с.
4. Hodge P.O., Stress distribution in nonsymmetric rotation // J. Appl. Mech., 1995, №23.
5. Подстригай Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. - Киев: Наукова думка, 1972. - 308 с.
6. Тюреходжаев А.Н., Касабеков С.И., Култасов К.А. Новое решение задачи о напряженно – деформированном состоянии заряда твердотопливных реактивных двигателей. // Вестник КазНТУ – Алматы, №1-2. 1997. - С.2-9.
7. Култасов К.А., Култасов А.А. Аналитическое решение задачи о симметричном изгибе неоднородной упругой пластины в неоднородном температурном поле // Вестник университета «Кайнар» - Алматы, 1998. выпуск 1.
8. Култасов К.А., Култасов А.А., Аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии неоднородной круглой пластины // Сборник кафедры физики. ТКУ им. И.Жансугурова. - Талдыкорган, 1998.
9. Тюреходжаев А.Н., Култасов К.А., Касабеков С.И. Аналитическое решение задачи о симметричном изгибе неоднородной пластины с отверстием в неоднородном температурном поле // ISSN 1026-9045 «Наука и новые технологии» - Бишкек, №4. 1998. - С.7-14.
10. Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К. и др. Метод частичной дискретизации в нелинейных задачах Теоретической механики и

Механики деформируемого твердого тела // Mathematical Modeling of Ecological Systems: тезисы докладов Международной конференции - Алматы, 2003. - С. 157.

11. Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К. Термоупругость неоднородных круглых пластин при осесимметричном температурном поле, изменяющемся по радиусу // Современное состояние образования и науки в Казахстане и пути их реформирования: сб. тр. Международной научно-практической конференции, -Талдыкорган, 2003. - С. 109-114.

12. Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К., Маматова Г.У. Сложный осесимметричный изгиб неоднородной круглой пластины при изменении температуры по радиусу // Актуальные проблемы механики и машиностроения: сб. тр. Международной научной конференции, -Алматы, 2005. - С. 348-353.

13. Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К. Сложный изгиб упругой круглой пластины при изменении температуры по толщине // Современное состояние образования и науки в Казахстане и пути их реформирования: сб. тр. Международной научно-практической конференции - Талдыкорган, 2003. - С.114-118.

14. Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К. Термоупругость гибких неоднородных круглых пластин при неравномерном температурном поле // Проблемы современной математики и механики: тезисы докладов Международной конференции. - Алматы, 2005. - С. 182-183.

15. Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К. Сложный изгиб неоднородной круглой пластины в условиях неравномерного по толщине нагрева // Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики: тезисы докладов Международной научной конференции. - Алматы, 2005. - С. 203.

16. Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К. Определение изгибающих моментов в гибкой неоднородной пластине с учетом неравномерного температурного поля // Вестник ПГУ. - Павлодар, 2004, №2. - С. 18-23.

17. Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К. Определение напряжений гибкой неоднородной пластины с учетом неравномерного температурного поля // Образование через науку: сб. тр. Международного научно-технического юбилейного симпозиума. - Бишкек, 2004., - Т.1. - С. 140-143.

18. Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К. Сложный изгиб гибкой кольцевой пластины в осесимметричном температурном поле // Доклады НАН РК.- 2005, №2. - С.86-92.

19. Frangi A. A new regularized B B formulation for kirchoff plates // Eur. J. Mecn.A-1996-15 №5.

20. Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К. Задача об осесимметричном нелинейном изгибе неоднородной гибкой круглой пластины в неравномерном температурном поле // Доклады НАН РК. - 2005, №3. - С.23-33.

21. Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К. Задача о сложном изгибе неоднородной гибкой круглой пластины // Актуальные проблемы механики и машиностроения: сб. тр. Международной научной конференции. - Алматы, 2005. - С. 343-347.

22. Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К. Аналитическое решение задачи об изгибе неоднородной гибкой круглой пластины в неравномерном температурном поле // Вестник НАН РК. - 2005, №1. - С.24-34.

23. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М., 1956, 419 с.

24. Тюреходжаев А.Н., Маматова Г.У. Задача об осесимметричном изгибе круглой гибкой пластины с учетом начальной кривизны // Математический журнал. - Алматы, 2003, №3, - С. 69-74.

25. Тюреходжаев А.Н., Маматова Г.У. Аналитическое решение задачи об осесимметричном изгибе круглой гибкой пластины с учетом начальной кривизны // Вестник НАН РК. -2003, №5, - С.177-182.

26. Маматова Г.У. Решение задачи об осесимметричном изгибе шарнирно опертой пластины с учетом начальной кривизны // Материалы Международной научной конференции "Состояние и перспективы развития механики и машиностроения в Казахстане". - Алматы, 2007. - С. 133-137.

27. Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Н.А. Николаенко, А.М. Синюков, Расчет конструкции на тепловые воздействия. М., Изд-во «Машиностроение» 1969, 599 с.

28. Штаерман И.Я. К симметричной деформации анизотропных упругих оболочек. Изв. Киевск. политех. института. 1924.

29. Биргер И.А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1961.

30. Тюреходжаев А.Н., Маматова Г.У. Осесимметричные упругие деформации неравномерно нагретых тонкостенных оболочек вращения // Вестник ПГУ. - Павлодар, 2004, №2. - С. 28-33.

31. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, М., 1948.

Рекомендовано к печати Ученым советом Казахского
национального технического университета имени К.И.Сатпаева.

**А.Н. ТЮРЕХОДЖАЕВ
Г.У. МАМАТОВА
Г.К. КАЛЖАНОВА**

**«УПРУГИЙ ИЗГИБ
НЕОДНОРОДНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ
ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК»**

Рецензенты:

**Синчев Б.К. – доктор технических наук, профессор
Отарбаев Ж.О. – доктор технических наук, профессор**

ISBN 978-601-228-681-6

Подписано в печать 01.10.2014
Формат 60х90/16, бумага 150 гр., печать цифровая
Объем 16,5 п.л., тираж 250 экз.

Отпечатано в типографии «Alliance Print»
г. Алматы, ул. Райымбека 221 А/4,
тел.: 8 727 329 75 95