

51(075)
К 400

СЭТБАЕВ
УНИВЕРСИТЕТИ



SATBAYEV
UNIVERSITY

Н.Х. Ким, А.Ж. Толганбаев

МАТЕМАТИКА-1,2 СРС

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$
$$\left(\frac{U}{V} \right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}.$$

Учебное
пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Satbayev university

Н. Х. Ким, А. Ж. Толганбаев

МАТЕМАТИКА-1, 2 СРС

Рекомендовано Учебно-методическим Советом университета
в качестве учебного пособия

Алматы 2019

УДК 517(076.1)(075.8)

Рецензенты:

Киряковская Г. Б. – канд. физ.-мат. наук, доцент ЕдГУ им. М. Тынышпаева;

Койтышев А. К. – канд. физ.-мат. наук, доцент ЕдГУ им. д-ра Фараби;

Егисбайев Н. О. – канд. физ.-мат. наук, доцент Сатбаевского УИУ.

Печатается по плану издания Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2019 г.

Ким Н. Х., Толганбаев А. Ж. Математика I – II курс. Учебное пособие. – Алматы: Satbayev university, 2019. – 103 с.

ISBN 978-601-323-480-8

Настоящее учебное пособие «Математика I – II курс» направлено на развитие и активизацию самостоятельной работы студентов высших технических учебных заведений в соответствии с новой технологией образования и государственным стандартам образования. В пособие включены индивидуальные задания (30 вариантов) предусмотренные программой курса математики для технических специальностей в I-II курсах. Приведены примеры решения типовых задач.

УДК 517(076.1)(075.8)

Предисловие

Математические методы исследования, моделирования и проектирования в современной науке и технике играют огромную роль. Развитие вычислительной техники, существенно расширяют возможности успешного применения математики в технических и экономических задачах.

Математика – фундаментальная дисциплина, ее преподавание предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического решения мышления;
- овладение основными методами исследования;
- овладение численным методом математики и их реализация на современных ЭВМ;
- самостоятельные расширения математических знаний и проведение анализа прикладных задач.

Общий курс математики является фундаментом математического образования специалистов, и имеют важное значение для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин высших технических учебных заведений. Объем и содержание курса определяется государственными стандартами образования и программой.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей высших учебных заведений. Основным фактором освоения математики является самостоятельная работа студентов. Системой индивидуальных заданий активизирует эту работу и способствует более глубокому изучению курсу математики.

Появление новых типов высших учебных заведений, многообразие учебных программ по математике, недостаточная до вузовская подготовка многих студентов вызывает необходимость внедрение активных форм обучения, развитие навыков самостоятельной работы учащихся.

В сборнике индивидуальных заданий «Математика-I» включены следующие разделы: Пределы и дифференцирования. Для выполнения индивидуальных заданий, студентам необходим определенный объем знаний

курса математики. Дифференцированный подход к студентам обеспечен разнообразием предлагаемых задач. Среди них есть тривиальные, решаемые по определению, с применением таблиц производных или интегралов их можно предложить студентам с недостаточной математической подготовкой. Задачи повышенной трудности можно дать студентам обучавшимся в школе с углубленным изучением математики в обоих случаях необходим индивидуальный подход к студентам. Задачи отмеченные знаком «*» повышенной трудности, выполнение этих задач преподавателям необходимо дифференцировано подходить к оценке знания студентов.

В сборнике индивидуальных заданий «Математика-2» включены следующие разделы: Интегралы. Несобственные интегралы. Числовые и функциональные ряды.

Для выполнения индивидуальных заданий, студентам необходим определенный объем знаний курса математики. Дифференцированный подход к студентам обеспечен разнообразием предлагаемых задач. Среди них есть тривиальные, решаемые по определению, с применением таблиц производных или интегралов их можно предложить студентам с недостаточной математической подготовкой. Задачи отмеченные знаком «*» повышенной трудности, выполнение этих задач преподавателям необходимо дифференцировано подходить к оценке знания студентов.

Выполнение студентами индивидуальных заданий контролируется преподавателем предварительно проверяется правильность решения задач. Завершающим этапом является защита индивидуального задания, умения пояснять решения задач и решать задачи аналогичного типа.

При составлении сборника индивидуальных заданий использовались задачки различных авторов и изданий по курсу «Высшая математика».

При составлении сборника индивидуальных заданий использовались задачки различных авторов и изданий по курсу «Высшая математика».

Задача 1. Вычислить пределы числовых последовательностей

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$$

$$1.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4}$$

$$1.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2+n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$$

$$1.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^4 - (1+n)^4}{(1+n)^3 - (1-n)^3}$$

$$1.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(1-n)^2 - (1+n)^2}$$

$$1.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}$$

$$1.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}$$

$$1.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}$$

$$1.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2 - (n+2)^3}{(4-n)^3}$$

$$1.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}$$

$$1.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^3}$$

$$1.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4}$$

$$1.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$$

$$1.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n+1)^4 - (n-1)^4}$$

$$1.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}$$

$$1.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 - (n+5)^3}{(3n-1)^3 + (2n+3)^3}$$

$$1.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+10)^2 + (3n+1)^2}{(n+6)^3 - (n+4)^3}$$

$$1.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-7)^3}$$

$$1.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 + (4n+1)^2}$$

$$1.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2}$$

$$1.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4}$$

$$1.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2}$$

$$1.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$$

$$1.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}$$

$$1.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$$

$$1.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 + (n+2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1}$$

$$1.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 - 3n}$$

$$1.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3 + 1}}{\sqrt[3]{n^6 + 2} - n}$$

$$1.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n^3 + 1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[5]{n^5 + 1}}$$

Задача 2. Вычислить пределы числовых последовательностей

$$2.1. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1})$$

$$2.2. \lim_{n \rightarrow \infty} n[\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2 - 3}]$$

$$2.3. \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{n^3 - 5})n\sqrt{n}$$

$$2.4. \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 4)} - \sqrt{n^4 - 9}]$$

$$2.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n^3 - 8} - n) \sqrt{n(n^2 + 3)}}{\sqrt{n}}$$

$$2.7. \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{4 - n^3})$$

$$2.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)}\}$$

$$2.11. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n)$$

$$2.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt[3]{(n+2)^3} - \sqrt[3]{(n-3)^3}\}$$

$$2.15. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 3})$$

$$2.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n(n^2 + 9)} - \sqrt{(n^2 - 1)(n^2 + 5)})}{n}$$

$$2.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 + 8}(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1}).$$

$$2.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 + 2)} - \sqrt{(n^2 - 1)(n^2 - 2)}\}.$$

$$2.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4 + 1)(n^2 - 1)} - \sqrt{n^6 - 1}}{n}$$

$$2.25. \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \{\sqrt[3]{n^2(n^6 + 4)} - \sqrt[3]{(n^8 - 1)}\}$$

$$2.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n}[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)}]$$

$$2.29. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^3 + 3} - \sqrt{n^3 - 2})$$

$$2.6. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - 3n} + 2 - n)$$

$$2.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2 - 2n+3}\}$$

$$2.10. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \{\sqrt{n(n^2 - 1)} - \sqrt{n^3 - 8}\}$$

$$2.12. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{5 + n^3} - \sqrt[3]{3 + n^3})$$

$$2.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$$

$$2.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 3})$$

$$2.18. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n).$$

$$2.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^3 + 1)(n^2 + 3)} - \sqrt{n(n^4 + 2)}}{2\sqrt{n}}$$

$$2.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} - n\sqrt{n(n^4 + 1)}}{n}$$

$$2.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \{n - \sqrt{n(n-1)}\}$$

$$2.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \{n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)}\}$$

$$2.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4})$$

$$2.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)} - (\sqrt{n^3 - 3} - \sqrt{n^3 - 2})$$

Задача 3. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$3.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n$$

$$3.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n-1}$$

$$3.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^2}$$

$$3.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}$$

$$3.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2}$$

$$3.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1} \right)^{-n+1}$$

$$3.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1} \right)^{n+2}$$

$$3.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-10}{n+1} \right)^{3n-1}$$

$$3.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4} \right)^{3n+2}$$

$$3.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7} \right)^{2n+5}$$

$$3.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right)^{n^2}$$

$$3.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3} \right)^n$$

$$3.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$3.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^{2n+3}$$

$$3.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^{n+4}$$

$$3.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9} \right)^{2n+1}$$

$$3.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7} \right)^{n-1}$$

$$3.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5} \right)^{3n+2}$$

$$3.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15} \right)^{n+2}$$

$$3.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2} \right)^{2n^2}$$

$$3.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1} \right)^{3n^2-7}$$

$$3.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3} \right)^{n^2}$$

$$3.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1} \right)^{-n^2}$$

$$3.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-1} \right)^{2n-n^3}$$

$$3.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n-3}{10n-1} \right)^{5n}$$

$$3.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$3.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+2} \right)^n$$

$$3.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+1}$$

$$3.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{13n+3}{13n-10} \right)^{n-3}$$

$$3.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-7} \right)^{n^2/6+1}$$

Задача 4. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что:

$$4.1. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$$

$$4.3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+5x-2}{x+2} = -7$$

$$4.5. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{6x^2+x-1}{x+1/2} = -5$$

$$4.7. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{9x^2-1}{x+1/3} = -6$$

$$4.9. \lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{3x^2-2x-1}{x+1/3} = -4$$

$$4.11. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = 2$$

$$4.13. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2-5x+1}{x-1/3} = -1$$

$$4.15. \lim_{x \rightarrow 7/2} \frac{2x^2+13x+21}{2x+7} = -\frac{1}{2}$$

$$4.17. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2+x-1}{x-1/3} = 5$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2-4x-1}{x-1} = 6$$

$$4.4. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2-14x+6}{x-3} = 10$$

$$4.6. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{6x^2-x-1}{x-1/2} = 5$$

$$4.8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2} = 7$$

$$4.10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2+8x+1}{x+1} = -6$$

$$4.12. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2+3x-2}{x-1/2} = 5$$

$$4.14. \lim_{x \rightarrow -7/5} \frac{10x^2+9x-7}{x+7/5} = -19$$

$$4.16. \lim_{x \rightarrow 5/2} \frac{2x^2-9x+10}{2x-5} = \frac{1}{2}$$

$$4.18. \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2-75x-39}{x+1/2} = -81$$

$$4.19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 21x + 11}{x - 1} = 23$$

$$4.21. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x + 7} = -13$$

$$4.23. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 - x - 1}{3x + 1} = -\frac{5}{3}$$

$$4.25. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3x^2 - 40x + 128}{x - 8} = 8$$

$$4.27. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 1/2} = -3$$

$$4.29. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x - 1/3} = 19$$

$$4.20. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x^2 - 24x - 5}{x - 5} = 26$$

$$4.22. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} = -10$$

$$4.24. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = -8$$

$$4.26. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{5x^2 - 51x + 10}{x - 10} = 49$$

$$4.28. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x + 6} = -19$$

$$4.30. \lim_{x \rightarrow -1/5} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x + 1/5} = -8$$

Задача 5. Вычислить пределы функций

$$5.1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$$

$$5.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 3x - 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$5.5. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$$

$$5.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^3 - (1 + 3x)}{x + x^5}$$

$$5.9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$$

$$5.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$5.13. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}$$

$$5.15. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

$$5.17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

$$5.19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$5.21. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$$

$$5.23. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$$

$$5.25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^4 + 2x^2 - x - 2}$$

$$5.27. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$$

$$5.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$5.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$$

$$5.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$5.6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1}$$

$$5.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$5.10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$$

$$5.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$5.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$$

$$5.16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

$$5.18. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}$$

$$5.20. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$$

$$5.22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$5.24. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$5.26. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}$$

$$5.28. \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 + y)^3 - (1 + 3y)}{x^2 + x^5}$$

$$5.30. \lim_{y \rightarrow 3} \frac{x^4 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$$

Задача 6. Вычислить пределы функций

$$6.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt{x}-2}$$

$$6.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$$

$$6.11. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$$

$$6.13. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}$$

$$6.15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$$

$$6.17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$$

$$6.19. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$$

$$6.21. \lim_{x \rightarrow 4/4} \frac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$$

$$6.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$$

$$6.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$$

$$6.27. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{(\sqrt{x}-4)^2}}$$

$$6.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2}-16}$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$$

$$6.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$$

$$6.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^3}}$$

$$6.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$$

$$6.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$$

$$6.16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$$

$$6.18. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$$

$$6.20. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$$

$$6.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[2]{x}}$$

$$6.24. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2}+x^3}$$

$$6.26. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$6.28. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3}+8}$$

$$6.30. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$$

Задача 7. Вычислить пределы функций

$$7.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}$$

$$7.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$$

$$7.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}$$

$$7.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - \lg a}{\ln x - \ln a}$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln e^{-x} - 1 + \cos x}{x^2}$$

$$7.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \cos x} - 1}{e^x - 1}$$

$$7.9. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(\pi - 3x)}$$

$$7.11. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$$

$$7.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}$$

$$7.15. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) + \ln(x-h) - 2 \ln x}{h^2}, \quad x > 0$$

$$7.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$$

$$7.19. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h}$$

$$7.21. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x-h} + a^{x+h} - 2a^x}{h^2}$$

$$7.23. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sqrt[3]{5+x} - 2}{\sin \pi x}$$

$$7.25. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x-9} - 1}$$

$$7.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$$

$$7.29. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$$

$$7.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - e^{-x})}{e^{x^3+1} - e}$$

$$7.10. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$$

$$7.12. \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}$$

$$7.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x \ln \cos 5x}$$

$$7.16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\log_2 x}$$

$$7.18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}$$

$$7.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}$$

$$7.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$$

$$7.24. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$$

$$7.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\ln(1 + x\sqrt{1 + xe^x})}$$

$$7.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx - \sin ax}{\ln(\operatorname{tg}(\pi/4 + ax))}$$

$$7.30. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\log_3 x - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$$

Примечание: Данную задачу решить по правилу Лопиталья, после раздела дифференцирования, т.е. двумя способами.

Задача 8. Вычислить пределы функций

$$8.1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{1/x}$$

$$8.2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x} \right)^x$$

$$8.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x} \right)^{2/(x+2)}$$

$$8.4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{x} \right)^{\cos(\pi/4 + 1-x)}$$

$$8.5. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos)^{1/x}$$

$$8.6. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 4}{x + 2} \right)^{1/x}$$

$$8.7. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{6x} \right)^{1/(x+3)}$$

$$8.8. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 4}{x} \right)^{1/x}$$

$$8.9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right)^{(2x+3)/(1+x)}$$

$$8.10. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+3}{x+4} \right)^{1/(x+4)}$$

$$8.11. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x}{2x} \right)^{2+x}$$

$$8.13. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x} \right)^x$$

$$8.15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 8}{3x^2 + 10} \right)^{x-2}$$

$$8.17. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^{2x} - 1}{x} \right)^{x+1}$$

$$8.19. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{11x + 8}{12x + 1} \right)^{\cos^2 x}$$

$$8.21. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \right)^{3/(x+8)}$$

$$8.23. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{2/(x+5)}$$

$$8.25. \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\cos x^4}$$

$$8.27. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} x \right) \right)^{(e^x - 1)/x}$$

$$8.29. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+8x}{2+11x} \right)^{1/(x^2-1)}$$

$$8.12. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right)^{6/(1+x)}$$

$$8.14. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right)^{x+2}$$

$$8.16. \lim_{x \rightarrow 0} [\sin(x+2)]^{3/(3-x)}$$

$$8.18. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4 + 5}{x + 10} \right)^{4/(x+2)}$$

$$8.20. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 + 8} \right)^{2/(x-1)}$$

$$8.22. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{x}{\pi} \right)^{1+x}$$

$$8.24. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} 3x}{x} \right)^{x+2}$$

$$8.26. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x^2}{\sin x} \right)^{4/(x-6)}$$

$$8.28. \lim_{x \rightarrow 0} (6 - 5/\cos x)^{x^2 x}$$

$$8.30. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x} \right)^{2x+1}$$

Задача 9. Найти производную

$$9.1. y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}$$

$$9.3. y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)}$$

$$9.5. y = \frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^2}$$

$$9.7. y = \frac{(x^2 - 6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^3}$$

$$9.9. y = \frac{4+3x^3}{x^3\sqrt{(2+x^3)^2}}$$

$$9.11. y = \frac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{1-x^3}}$$

$$9.13. y = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$$

$$9.15. y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$$

$$9.2. y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$$

$$9.4. y = \frac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}}$$

$$9.6. y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^2}}$$

$$9.8. y = \frac{(x^2 - 8)\sqrt{x^2 - 3}}{6x^3}$$

$$9.10. y = \sqrt[3]{\frac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}$$

$$9.12. y = \frac{(x^2 - 2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$$

$$9.14. y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$$

$$9.16. y = \frac{x^6 + 8x^3 - 128}{\sqrt{8-x^3}}$$

$$9.17. y = \frac{\sqrt{2x+3(x-2)}}{x^2}$$

$$9.19. y = \frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$$

$$9.21. y = \frac{(2x^3+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$$

$$9.23. y = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$$

$$9.25. y = 3\sqrt{(x+1)/(x-1)^2}$$

$$9.27. y = (x\sqrt{x+1})/(x^2+x+1)$$

$$9.29. y = ((x+3)\sqrt{2x-1})/(2x+7)$$

$$9.18. y = (1-x^2)\sqrt{x^3+\frac{1}{x}}$$

$$9.20. y = \frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$$

$$9.22. y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$$

$$9.24. y = 3\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$$

$$9.26. y = (x+7)/(6\sqrt{x^2+2x+7})$$

$$9.28. y = (x^2+2)/(2\sqrt{1-x^4})$$

$$9.30. y = (3x+\sqrt{x})/(\sqrt{x^2+2})$$

Задача 10. Найти производную.

$$10.1. y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1})$$

$$10.2. y = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x)/8$$

$$10.3. y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}$$

$$10.4. y = \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1+2^x}{1-2^x}$$

$$10.5. y = 2\sqrt{e^x+1} + \ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$$

$$10.6. y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}$$

$$10.7. y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) - 2 \operatorname{arctg} e^x$$

$$10.8. y = \ln(e^x+1) + \frac{18e^{2x}+27e^x+11}{6(e^x+1)^3}$$

$$10.9. y = 2(\sqrt{2^x-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x-1})/\ln 2$$

$$10.10. y = 2(x-2)\sqrt{1+e^x} - 2 \ln((\sqrt{1+e^x}-1)/(\sqrt{1+e^x}+1))$$

$$10.11. y = e^{\alpha}(\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)/(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$10.12. y = e^{\alpha}(\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)/(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$10.13. y = e^{\alpha} \left\{ \frac{1}{2a} + \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{2(a^2 + 4b^2)} \right\}$$

$$10.14. y = x + 1/(1+e^x) - \ln(1+e^x)$$

$$10.15. y = x - 3 \ln[(1+e^{x/6})\sqrt{1+e^{x/3}}] - 3 \operatorname{arctg} e^{x/6}$$

$$10.16. y = x + \frac{8}{1+e^{x/4}}$$

$$10.17. y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin e^{-x}$$

$$10.18. y = x - e^{-x} \arcsin e^{-x} - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}})$$

$$10.19. y = x - \ln(1+e^x) - 2e^{-x/2} \operatorname{arctg} e^{x/2} - (\operatorname{arctg} e^{x/2})^2$$

$$10.20. y = \frac{e^{-x^2}}{1+x^3}$$

$$10.21. y = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}(e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}})$$

$$10.22. y = 3e^{\frac{3}{2}x} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 2)$$

$$10.23. y = \ln \frac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x-1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x+1}$$

$$10.24. y = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$10.25. y = \frac{e^x}{2} [(x^2-1)\cos x + (x-1)^2 \sin x]$$

$$10.26. y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x})$$

$$10.27. y = 3e^{\frac{3}{2}x} [\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120]$$

$$10.28. y = -e^{3x} / (3sh^3 x)$$

$$10.29. y = \arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}}$$

$$10.30. y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^4 + 2x^2 + 2)$$

Задача 11. Найти производную

$$11.1. y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}$$

$$11.3. y = 2\sqrt{x} - 4 \ln(2 + \sqrt{x})$$

$$11.5. y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$$

$$11.7. y = \ln^2(x + \cos x)$$

$$11.9. y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$11.11. y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

$$11.13. y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}$$

$$11.15. y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg} x$$

$$11.17. y = \ln \cos \frac{2x+3}{2x+1}$$

$$11.19. y = \log_a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11.21. y = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}$$

$$11.23. y = \ln(bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2})$$

$$11.2. y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

$$11.4. y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$$

$$11.6. y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$$

$$11.8. y = \ln^3(1 + \cos x)$$

$$11.10. y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

$$11.12. y = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right) + a$$

$$11.14. y = \log_{16} \log_5 \operatorname{tg} x$$

$$11.16. y = x(\cos \ln x + \sin \ln x) / 2$$

$$11.18. y = \lg \ln \operatorname{ctg} x$$

$$11.20. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} \operatorname{tg} x + \sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x})$$

$$11.22. y = \ln \arccos \sqrt{1-e^{2x}}$$

$$11.24. y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{2}}$$

$$11.25. y' = \ln(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}})$$

$$11.27. y' = \ln \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}(x/2)}$$

$$11.29. y' = \ln \ln \sin(1 + 1/x)$$

$$11.26. y' = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$$

$$11.28. y' = \ln \frac{\ln x}{\sin(1/x)}$$

$$11.30. y' = \ln \ln^3 \ln^2 x$$

Задача 12. Найти производную

$$12.1. y' = \sin \sqrt{3} + \frac{1 \sin^2 4x}{3 \cos 6x}$$

$$12.3. y' = \operatorname{tg} \lg \frac{1}{3} + \frac{1 \sin^2 4x}{4 \cos 8x}$$

$$12.5. y' = \frac{\cos \sin 5 \cdot \sin^2 2x}{2 \cos 4x}$$

$$12.7. y' = \frac{\cos \ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7 \cos 14x}$$

$$12.9. y' = \operatorname{ctg} \cos 2x + \frac{1 \sin^2 6x}{6 \cos 12x}$$

$$12.11. y' = \frac{1}{3} \cos \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \frac{1 \sin^2 10x}{10 \cos 20x}$$

$$12.13. y' = 8 \sin \operatorname{ctg} 3 + \frac{1 \sin^2 5x}{5 \cos 10x}$$

$$12.15. y' = \frac{\cos \operatorname{tg} (1/3) \cdot \sin^2 15x}{15 \cos 30x}$$

$$12.17. y' = \frac{\operatorname{ctg} \sin (1/3) \cdot \sin^2 17x}{17 \cos 34x}$$

$$12.19. y' = \frac{\operatorname{tg} \ln 2 \cdot \sin^2 19x}{19 \cos 38x}$$

$$12.21. y' = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \frac{\sin^2 21x}{21 \cos 42x}$$

$$12.23. y' = \ln \cos \frac{1}{3} + \frac{\sin^2 23x}{23 \cos 46x}$$

$$12.25. y' = \sin \ln \frac{1}{2} + \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}$$

$$12.27. y' = \sqrt[7]{\operatorname{tg} \cos 2} + \frac{\sin^2 27x}{27 \cos 54x}$$

$$12.29. y' = \cos^2 \sin 3 + \frac{\sin^2 29x}{29 \cos 58x}$$

$$12.2. y' = \cos \ln 2 - \frac{1 \cos^2 3x}{3 \sin 6x}$$

$$12.4. y' = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{1 \cos^2 4x}{8 \sin 8x}$$

$$12.6. y' = \frac{\sin \cos 3 \cdot \cos^2 2x}{4 \sin 4x}$$

$$12.8. y' = \cos \operatorname{ctg} 2 - \frac{1 \cos^2 8x}{16 \sin 16x}$$

$$12.10. y' = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \frac{1 \cos^2 10x}{20 \sin 20x}$$

$$12.12. y' = \ln \sin \frac{1}{2} + \frac{1 \cos^2 12x}{24 \sin 24x}$$

$$12.14. y' = \frac{\cos \operatorname{ctg} 3 \cdot \cos^2 14x}{28 \sin 28x}$$

$$12.16. y' = \frac{\sin \operatorname{tg} (1/7) \cdot \cos^2 16x}{32 \sin 32x}$$

$$15.18. y' = \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2} \cdot \cos^2 18x}{36 \sin 36x}$$

$$15.20. y' = \operatorname{ctg} \cos 5 - \frac{1 \cos^2 20x}{40 \sin 40x}$$

$$15.22. y' = \cos \ln 13 - \frac{1 \cos^2 22x}{44 \sin 44x}$$

$$15.24. y' = \operatorname{ctg} \sin \frac{1}{13} - \frac{1 \cos^2 24x}{48 \sin 48x}$$

$$15.26. y' = \sqrt[3]{\cos \sqrt{2}} - \frac{1 \cos^2 26x}{52 \sin 52x}$$

$$15.28. y' = \sin \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2} - \frac{\cos^2 28x}{56 \sin 56x}$$

$$15.30. y' = \sin^3 \cos 2 - \frac{\cos^2 30x}{60 \sin 60x}$$

Задача 13. Найти производную.

$$13.1. y' = \arctg \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}.$$

$$11.25. y' = \ln(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}})$$

$$11.27. y' = \ln \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}(x/2)}$$

$$11.29. y' = \ln \ln \sin(1 + 1/x)$$

$$11.26. y' = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$$

$$11.28. y' = \ln \frac{\ln x}{\sin(1/x)}$$

$$11.30. y' = \ln \ln^3 \ln^2 x$$

Задача 12. Найти производную

$$12.1. y' = \sin \sqrt{3} + \frac{1 \sin^2 4x}{3 \cos 6x}$$

$$12.3. y' = \operatorname{tg} \lg \frac{1}{3} + \frac{1 \sin^2 4x}{4 \cos 8x}$$

$$12.5. y' = \frac{\cos \sin 5 \cdot \sin^2 2x}{2 \cos 4x}$$

$$12.7. y' = \frac{\cos \ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7 \cos 14x}$$

$$12.9. y' = \operatorname{ctg} \cos 2x + \frac{1 \sin^2 6x}{6 \cos 12x}$$

$$12.11. y' = \frac{1}{3} \cos \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \frac{1 \sin^2 10x}{10 \cos 20x}$$

$$12.13. y' = 8 \sin \operatorname{ctg} 3 + \frac{1 \sin^2 5x}{5 \cos 10x}$$

$$12.15. y' = \frac{\cos \operatorname{tg} (1/3) \cdot \sin^2 15x}{15 \cos 30x}$$

$$12.17. y' = \frac{\operatorname{ctg} \sin (1/3) \cdot \sin^2 17x}{17 \cos 34x}$$

$$12.19. y' = \frac{\operatorname{tg} \ln 2 \cdot \sin^2 19x}{19 \cos 38x}$$

$$12.21. y' = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \frac{\sin^2 21x}{21 \cos 42x}$$

$$12.23. y' = \ln \cos \frac{1}{3} + \frac{\sin^2 23x}{23 \cos 46x}$$

$$12.25. y' = \sin \ln \frac{1}{2} + \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}$$

$$12.27. y' = \sqrt[7]{\operatorname{tg} \cos 2} + \frac{\sin^2 27x}{27 \cos 54x}$$

$$12.29. y' = \cos^2 \sin 3 + \frac{\sin^2 29x}{29 \cos 58x}$$

$$12.2. y' = \cos \ln 2 - \frac{1 \cos^2 3x}{3 \sin 6x}$$

$$12.4. y' = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{1 \cos^2 4x}{8 \sin 8x}$$

$$12.6. y' = \frac{\sin \cos 3 \cdot \cos^2 2x}{4 \sin 4x}$$

$$12.8. y' = \cos \operatorname{ctg} 2 - \frac{1 \cos^2 8x}{16 \sin 16x}$$

$$12.10. y' = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \frac{1 \cos^2 10x}{20 \sin 20x}$$

$$12.12. y' = \ln \sin \frac{1}{2} + \frac{1 \cos^2 12x}{24 \sin 24x}$$

$$12.14. y' = \frac{\cos \operatorname{ctg} 3 \cdot \cos^2 14x}{28 \sin 28x}$$

$$12.16. y' = \frac{\sin \operatorname{tg} (1/7) \cdot \cos^2 16x}{32 \sin 32x}$$

$$15.18. y' = \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2} \cdot \cos^2 18x}{36 \sin 36x}$$

$$15.20. y' = \operatorname{ctg} \cos 5 - \frac{1 \cos^2 20x}{40 \sin 40x}$$

$$15.22. y' = \cos \ln 13 - \frac{1 \cos^2 22x}{44 \sin 44x}$$

$$15.24. y' = \operatorname{ctg} \sin \frac{1}{13} - \frac{1 \cos^2 24x}{48 \sin 48x}$$

$$15.26. y' = \sqrt[3]{\cos \sqrt{2}} - \frac{1 \cos^2 26x}{52 \sin 52x}$$

$$15.28. y' = \sin \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2} - \frac{\cos^2 28x}{56 \sin 56x}$$

$$15.30. y' = \sin^3 \cos 2 - \frac{\cos^2 30x}{60 \sin 60x}$$

Задача 13. Найти производную.

$$13.1. y' = \arctg \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}.$$

$$2.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n^3 - 8} - n) \sqrt{n(n^2 + 3)}}{\sqrt{n}}$$

$$2.7. \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{4 - n^3})$$

$$2.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)}\}$$

$$2.11. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n)$$

$$2.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt[3]{(n+2)^3} - \sqrt[3]{(n-3)^3}\}$$

$$2.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 3}\}$$

$$2.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n(n^2 + 9)} - \sqrt{(n^2 - 1)(n^2 + 5)})}{n}$$

$$2.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 + 8}(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^3 - 1}).$$

$$2.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 + 2)} - \sqrt{(n^2 - 1)(n^2 - 2)}\}.$$

$$2.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4 + 1)(n^2 - 1)} - \sqrt{n^6 - 1}}{n}$$

$$2.25. \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \{\sqrt[3]{n^2(n^6 + 4)} - \sqrt[3]{(n^8 - 1)}\}$$

$$2.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)}\}$$

$$2.29. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^3 + 3} - \sqrt{n^4 - 2})$$

$$2.6. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - 3n} + 2 - n)$$

$$2.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2 - 2n+3}\}$$

$$2.10. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \{\sqrt{n(n^4 - 1)} - \sqrt{n^5 - 8}\}$$

$$2.12. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{5 + n^3} - \sqrt[3]{3 + n^3})$$

$$2.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$$

$$2.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^3 - 3})$$

$$2.18. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n).$$

$$2.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^3 + 1)(n^2 + 3)} - \sqrt{n(n^4 + 2)}}{2\sqrt{n}}$$

$$2.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} - n\sqrt{n(n^4 + 1)}}{n}$$

$$2.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \{n - \sqrt{n(n-1)}\}$$

$$2.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \{n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)}\}$$

$$2.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4})$$

$$2.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)} (\sqrt{n^3 - 3} - \sqrt{n^3 - 2})$$

Задача 3. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$3.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n$$

$$3.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n-1}$$

$$3.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^2}$$

$$3.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}$$

$$3.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2}$$

$$3.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1} \right)^{-n+1}$$

$$3.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1} \right)^{n+2}$$

$$3.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-10}{n+1} \right)^{3n-1}$$

$$3.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4} \right)^{3n+2}$$

$$3.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7} \right)^{2n+5}$$

$$3.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right)^{n^2}$$

$$3.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3} \right)^n$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln e^{-x} - 1 + \cos x}{x^2}$$

$$7.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \cos x} - 1}{e^x - 1}$$

$$7.9. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(\pi - 3x)}$$

$$7.11. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$$

$$7.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}$$

$$7.15. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) + \ln(x-h) - 2 \ln x}{h^2}, \quad x > 0$$

$$7.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$$

$$7.19. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h}$$

$$7.21. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x-h} + a^{x+h} - 2a^x}{h^2}$$

$$7.23. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sqrt[3]{5+x} - 2}{\sin \pi x}$$

$$7.25. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x-9} - 1}$$

$$7.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$$

$$7.29. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$$

$$7.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - e^{-x})}{e^{x^3+1} - e}$$

$$7.10. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$$

$$7.12. \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}$$

$$7.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x \ln \cos 5x}$$

$$7.16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\log_2 x}$$

$$7.18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}$$

$$7.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}$$

$$7.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$$

$$7.24. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$$

$$7.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\ln(1 + x\sqrt{1 + xe^x})}$$

$$7.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx - \sin ax}{\ln(\operatorname{tg}(\pi/4 + ax))}$$

$$7.30. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\log_3 x - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$$

Примечание: Данную задачу решить по правилу Лопиталья, после раздела дифференцирования, т.е. двумя способами.

Задача 8. Вычислить пределы функций

$$8.1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{21x}$$

$$8.2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x} \right)^x$$

$$8.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x} \right)^{2/(x+2)}$$

$$8.4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{x} \right)^{\cos(\pi/4 + 1-x)}$$

$$8.5. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos)^{1/3}$$

$$8.6. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 4}{x + 2} \right)^{1/x}$$

$$8.7. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{6x} \right)^{1/(x+3)}$$

$$8.8. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 4x}{x} \right)^{1/x}$$

$$8.9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right)^{(2x+3)/(1+x)}$$

$$8.10. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+3}{x+4} \right)^{1/(x+4)}$$

$$8.11. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x}{2x} \right)^{2+x}$$

$$8.13. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x} \right)^x$$

$$8.15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 8}{3x^2 + 10} \right)^{x-2}$$

$$8.17. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^{2x} - 1}{x} \right)^{x+1}$$

$$8.19. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{11x + 8}{12x + 1} \right)^{\cos^2 x}$$

$$8.21. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \right)^{3/(x+8)}$$

$$8.23. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{2/(x+5)}$$

$$8.25. \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\cos x^4}$$

$$8.27. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} x \right) \right)^{(e^x - 1)/x}$$

$$8.29. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+8x}{2+11x} \right)^{1/(x^2-1)}$$

$$8.12. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right)^{6/(1+x)}$$

$$8.14. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right)^{x+2}$$

$$8.16. \lim_{x \rightarrow 0} [\sin(x+2)]^{3/(3-x)}$$

$$8.18. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4 + 5}{x + 10} \right)^{4/(x+2)}$$

$$8.20. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 + 8} \right)^{2/(x-1)}$$

$$8.22. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{x}{\pi} \right)^{1+x}$$

$$8.24. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} 3x}{x} \right)^{x+2}$$

$$8.26. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x^2}{\sin x} \right)^{4/(x-6)}$$

$$8.28. \lim_{x \rightarrow 0} (6 - 5/\cos x)^{x^2 x}$$

$$8.30. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x} \right)^{2x+1}$$

Задача 9. Найти производную

$$9.1. y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}$$

$$9.3. y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)}$$

$$9.5. y = \frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^2}$$

$$9.7. y = \frac{(x^2 - 6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^3}$$

$$9.9. y = \frac{4+3x^3}{x^3\sqrt{(2+x^3)^2}}$$

$$9.11. y = \frac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{1-x^3}}$$

$$9.13. y = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$$

$$9.15. y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$$

$$9.2. y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$$

$$9.4. y = \frac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}}$$

$$9.6. y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^2}}$$

$$9.8. y = \frac{(x^2 - 8)\sqrt{x^2 - 3}}{6x^3}$$

$$9.10. y = \sqrt[3]{\frac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}$$

$$9.12. y = \frac{(x^2 - 2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$$

$$9.14. y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$$

$$9.16. y = \frac{x^6 + 8x^3 - 128}{\sqrt{8-x^3}}$$

$$9.17. y = \frac{\sqrt{2x+3(x-2)}}{x^2}$$

$$9.19. y = \frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$$

$$9.21. y = \frac{(2x^3+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$$

$$9.23. y = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$$

$$9.25. y = 3\sqrt{(x+1)/(x-1)^2}$$

$$9.27. y = (x\sqrt{x+1})/(x^2+x+1)$$

$$9.29. y = ((x+3)\sqrt{2x-1})/(2x+7)$$

$$9.18. y = (1-x^2)\sqrt{x^3+\frac{1}{x}}$$

$$9.20. y = \frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$$

$$9.22. y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$$

$$9.24. y = 3\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$$

$$9.26. y = (x+7)/(6\sqrt{x^2+2x+7})$$

$$9.28. y = (x^2+2)/(2\sqrt{1-x^4})$$

$$9.30. y = (3x+\sqrt{x})/(\sqrt{x^2+2})$$

Задача 10. Найти производную.

$$10.1. y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1})$$

$$10.2. y = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x)/8$$

$$10.3. y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}$$

$$10.4. y = \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1+2^x}{1-2^x}$$

$$10.5. y = 2\sqrt{e^x+1} + \ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$$

$$10.6. y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}$$

$$10.7. y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) - 2 \operatorname{arctg} e^x$$

$$10.8. y = \ln(e^x+1) + \frac{18e^{2x}+27e^x+11}{6(e^x+1)^3}$$

$$10.9. y = 2(\sqrt{2^x-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x-1})/\ln 2$$

$$10.10. y = 2(x-2)\sqrt{1+e^x} - 2 \ln((\sqrt{1+e^x}-1)/(\sqrt{1+e^x}+1))$$

$$10.11. y = e^{\alpha} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)/(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$10.12. y = e^{\alpha} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)/(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$10.13. y = e^{\alpha} \left\{ \frac{1}{2a} + \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{2(a^2 + 4b^2)} \right\}$$

$$10.14. y = x + 1/(1+e^x) - \ln(1+e^x)$$

$$10.15. y = x - 3 \ln[(1+e^{x/6})\sqrt{1+e^{x/3}}] - 3 \operatorname{arctg} e^{x/6}$$

$$10.16. y = x + \frac{8}{1+e^{x/4}}$$

$$10.17. y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin e^{-x}$$

$$10.18. y = x - e^{-x} \arcsin e^{-x} - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}})$$

$$10.19. y = x - \ln(1+e^x) - 2e^{-x/2} \operatorname{arctg} e^{x/2} - (\operatorname{arctg} e^{x/2})^2$$

$$10.20. y = \frac{e^{-x^2}}{1+x^3}$$

$$10.21. y = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}(e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}})$$

$$10.22. y = 3e^{\frac{3}{2}x} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 2)$$

$$10.23. y = \ln \frac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x-1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x+1}$$

$$10.24. y = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$10.25. y = \frac{e^x}{2} [(x^2-1)\cos x + (x-1)^2 \sin x]$$

$$10.26. y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x})$$

$$10.27. y = 3e^{\frac{3}{2}x} [\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120]$$

$$10.28. y = -e^{3x} / (3sh^3 x)$$

$$10.29. y = \arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}}$$

$$10.30. y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^4 + 2x^2 + 2)$$

Задача 11. Найти производную

$$11.1. y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}$$

$$11.3. y = 2\sqrt{x} - 4 \ln(2 + \sqrt{x})$$

$$11.5. y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$$

$$11.7. y = \ln^2(x + \cos x)$$

$$11.9. y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$11.11. y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

$$11.13. y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}$$

$$11.15. y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg} x$$

$$11.17. y = \ln \cos \frac{2x+3}{2x+1}$$

$$11.19. y = \log_a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11.21. y = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}$$

$$11.23. y = \ln(bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2})$$

$$11.2. y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

$$11.4. y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$$

$$11.6. y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$$

$$11.8. y = \ln^3(1 + \cos x)$$

$$11.10. y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

$$11.12. y = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right) + a$$

$$11.14. y = \log_{16} \log_5 \operatorname{tg} x$$

$$11.16. y = x(\cos \ln x + \sin \ln x) / 2$$

$$11.18. y = \lg \ln \operatorname{ctg} x$$

$$11.20. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} \operatorname{tg} x + \sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x})$$

$$11.22. y = \ln \arccos \sqrt{1-e^{2x}}$$

$$11.24. y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{2}}$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Satbayev university

Н. Х. Ким, А. Ж. Толганбаев

МАТЕМАТИКА-1, 2 СРС

Рекомендовано Учебно-методическим Советом университета
в качестве учебного пособия

Алматы 2019

$$11.25. y' = \ln(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}})$$

$$11.27. y' = \ln \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}(x/2)}$$

$$11.29. y' = \ln \ln \sin(1 + 1/x)$$

$$11.26. y' = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$$

$$11.28. y' = \ln \frac{\ln x}{\sin(1/x)}$$

$$11.30. y' = \ln \ln^3 \ln^2 x$$

Задача 12. Найти производную

$$12.1. y' = \sin \sqrt{3} + \frac{1 \sin^2 4x}{3 \cos 6x}$$

$$12.3. y' = \operatorname{tg} \lg \frac{1}{3} + \frac{1 \sin^2 4x}{4 \cos 8x}$$

$$12.5. y' = \frac{\cos \sin 5 \cdot \sin^2 2x}{2 \cos 4x}$$

$$12.7. y' = \frac{\cos \ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7 \cos 14x}$$

$$12.9. y' = \operatorname{ctg} \cos 2x + \frac{1 \sin^2 6x}{6 \cos 12x}$$

$$12.11. y' = \frac{1}{3} \cos \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \frac{1 \sin^2 10x}{10 \cos 20x}$$

$$12.13. y' = 8 \sin \operatorname{ctg} 3 + \frac{1 \sin^2 5x}{5 \cos 10x}$$

$$12.15. y' = \frac{\cos \operatorname{tg} (1/3) \cdot \sin^2 15x}{15 \cos 30x}$$

$$12.17. y' = \frac{\operatorname{ctg} \sin (1/3) \cdot \sin^2 17x}{17 \cos 34x}$$

$$12.19. y' = \frac{\operatorname{tg} \ln 2 \cdot \sin^2 19x}{19 \cos 38x}$$

$$12.21. y' = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \frac{\sin^2 21x}{21 \cos 42x}$$

$$12.23. y' = \ln \cos \frac{1}{3} + \frac{\sin^2 23x}{23 \cos 46x}$$

$$12.25. y' = \sin \ln \frac{1}{2} + \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}$$

$$12.27. y' = \sqrt[7]{\operatorname{tg} \cos 2} + \frac{\sin^2 27x}{27 \cos 54x}$$

$$12.29. y' = \cos^2 \sin 3 + \frac{\sin^2 29x}{29 \cos 58x}$$

$$12.2. y' = \cos \ln 2 - \frac{1 \cos^2 3x}{3 \sin 6x}$$

$$12.4. y' = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{1 \cos^2 4x}{8 \sin 8x}$$

$$12.6. y' = \frac{\sin \cos 3 \cdot \cos^2 2x}{4 \sin 4x}$$

$$12.8. y' = \cos \operatorname{ctg} 2 - \frac{1 \cos^2 8x}{16 \sin 16x}$$

$$12.10. y' = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \frac{1 \cos^2 10x}{20 \sin 20x}$$

$$12.12. y' = \ln \sin \frac{1}{2} + \frac{1 \cos^2 12x}{24 \sin 24x}$$

$$12.14. y' = \frac{\cos \operatorname{ctg} 3 \cdot \cos^2 14x}{28 \sin 28x}$$

$$12.16. y' = \frac{\sin \operatorname{tg} (1/7) \cdot \cos^2 16x}{32 \sin 32x}$$

$$15.18. y' = \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2} \cdot \cos^2 18x}{36 \sin 36x}$$

$$15.20. y' = \operatorname{ctg} \cos 5 - \frac{1 \cos^2 20x}{40 \sin 40x}$$

$$15.22. y' = \cos \ln 13 - \frac{1 \cos^2 22x}{44 \sin 44x}$$

$$15.24. y' = \operatorname{ctg} \sin \frac{1}{13} - \frac{1 \cos^2 24x}{48 \sin 48x}$$

$$15.26. y' = \sqrt[3]{\cos \sqrt{2}} - \frac{1 \cos^2 26x}{52 \sin 52x}$$

$$15.28. y' = \sin \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2} - \frac{\cos^2 28x}{56 \sin 56x}$$

$$15.30. y' = \sin^3 \cos 2 - \frac{\cos^2 30x}{60 \sin 60x}$$

Задача 13. Найти производную.

$$13.1. y' = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}.$$

$$2.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n^3 + 8} - n) \sqrt{n(n^2 + 3)}}{\sqrt{n}}$$

$$2.7. \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{4 - n^3})$$

$$2.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)}\}$$

$$2.11. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n)$$

$$2.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt[3]{(n+2)^3} - \sqrt[3]{(n-3)^3}\}$$

$$2.15. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 3})$$

$$2.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n(n^2 + 9)} - \sqrt{(n^2 - 1)(n^2 + 5)})}{n}$$

$$2.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 + 8}(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^3 - 1}).$$

$$2.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 + 2)} - \sqrt{(n^2 - 1)(n^2 - 2)}\}.$$

$$2.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4 + 1)(n^2 - 1)} - \sqrt{n^6 - 1}}{n}$$

$$2.25. \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \{\sqrt[3]{n^2(n^6 + 4)} - \sqrt[3]{(n^8 - 1)}\}$$

$$2.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)}\}$$

$$2.29. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^3 + 3} - \sqrt{n^4 - 2})$$

$$2.6. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - 3n} + 2 - n)$$

$$2.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2 - 2n+3}\}$$

$$2.10. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \{\sqrt{n(n^4 - 1)} - \sqrt{n^5 - 8}\}$$

$$2.12. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{5 + n^3} - \sqrt[3]{3 + n^3})$$

$$2.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$$

$$2.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^3 - 3})$$

$$2.18. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n).$$

$$2.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^3 + 1)(n^2 + 3)} - \sqrt{n(n^4 + 2)}}{2\sqrt{n}}$$

$$2.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} - n\sqrt{n(n^4 + 1)}}{n}$$

$$2.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \{n - \sqrt{n(n-1)}\}$$

$$2.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \{n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)}\}$$

$$2.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2}(\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n-4})$$

$$2.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)} (\sqrt{n^3 - 3} - \sqrt{n^3 - 2})$$

Задача 3. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$3.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n$$

$$3.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n-1}$$

$$3.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^2}$$

$$3.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}$$

$$3.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2}$$

$$3.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1} \right)^{-n+1}$$

$$3.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1} \right)^{n+2}$$

$$3.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-10}{n+1} \right)^{3n-1}$$

$$3.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4} \right)^{3n+2}$$

$$3.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7} \right)^{2n+5}$$

$$3.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right)^{n^2}$$

$$3.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3} \right)^n$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Satbayev university

Н. Х. Ким, А. Ж. Толганбаев

МАТЕМАТИКА-1, 2 СРС

Рекомендовано Учебно-методическим Советом университета
в качестве учебного пособия

Алматы 2019

$$3.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$3.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^{2n+3}$$

$$3.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^{n+4}$$

$$3.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9} \right)^{2n+1}$$

$$3.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7} \right)^{n-1}$$

$$3.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5} \right)^{3n+2}$$

$$3.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15} \right)^{n+2}$$

$$3.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2} \right)^{2n^2}$$

$$3.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1} \right)^{3n^2-7}$$

$$3.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3} \right)^{n^2}$$

$$3.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1} \right)^{-n^2}$$

$$3.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-1} \right)^{2n-n^3}$$

$$3.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n-3}{10n-1} \right)^{5n}$$

$$3.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$3.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+2} \right)^n$$

$$3.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+1}$$

$$3.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{13n+3}{13n-10} \right)^{n-3}$$

$$3.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-7} \right)^{n^2/6+1}$$

Задача 4. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что:

$$4.1. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$$

$$4.3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+5x-2}{x+2} = -7$$

$$4.5. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{6x^2+x-1}{x+1/2} = -5$$

$$4.7. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{9x^2-1}{x+1/3} = -6$$

$$4.9. \lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{3x^2-2x-1}{x+1/3} = -4$$

$$4.11. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = 2$$

$$4.13. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2-5x+1}{x-1/3} = -1$$

$$4.15. \lim_{x \rightarrow 7/2} \frac{2x^2+13x+21}{2x+7} = -\frac{1}{2}$$

$$4.17. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2+x-1}{x-1/3} = 5$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2-4x-1}{x-1} = 6$$

$$4.4. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2-14x+6}{x-3} = 10$$

$$4.6. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{6x^2-x-1}{x-1/2} = 5$$

$$4.8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2} = 7$$

$$4.10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2+8x+1}{x+1} = -6$$

$$4.12. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2+3x-2}{x-1/2} = 5$$

$$4.14. \lim_{x \rightarrow -7/5} \frac{10x^2+9x-7}{x+7/5} = -19$$

$$4.16. \lim_{x \rightarrow 5/2} \frac{2x^2-9x+10}{2x-5} = \frac{1}{2}$$

$$4.18. \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2-75x-39}{x+1/2} = -81$$

$$4.19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 21x + 11}{x - 1} = 23$$

$$4.21. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x + 7} = -13$$

$$4.23. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 - x - 1}{3x + 1} = -\frac{5}{3}$$

$$4.25. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3x^2 - 40x + 128}{x - 8} = 8$$

$$4.27. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 1/2} = -3$$

$$4.29. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x - 1/3} = 19$$

$$4.20. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x^2 - 24x - 5}{x - 5} = 26$$

$$4.22. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} = -10$$

$$4.24. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = -8$$

$$4.26. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{5x^2 - 51x + 10}{x - 10} = 49$$

$$4.28. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x + 6} = -19$$

$$4.30. \lim_{x \rightarrow -1/5} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x + 1/5} = -8$$

Задача 5. Вычислить пределы функций

$$5.1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$$

$$5.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 3x - 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$5.5. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$$

$$5.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^3 - (1 + 3x)}{x + x^5}$$

$$5.9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$$

$$5.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$5.13. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}$$

$$5.15. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

$$5.17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

$$5.19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$5.21. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$$

$$5.23. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$$

$$5.25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^4 + 2x^2 - x - 2}$$

$$5.27. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$$

$$5.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$5.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$$

$$5.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$5.6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1}$$

$$5.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$5.10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$$

$$5.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$5.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$$

$$5.16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

$$5.18. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}$$

$$5.20. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$$

$$5.22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$5.24. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$5.26. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}$$

$$5.28. \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 + y)^3 - (1 + 3y)}{x^2 + x^5}$$

$$5.30. \lim_{y \rightarrow 3} \frac{x^4 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$$

Задача 6. Вычислить пределы функций

$$6.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt{x}-2}$$

$$6.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$$

$$6.11. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$$

$$6.13. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}$$

$$6.15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$$

$$6.17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$$

$$6.19. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$$

$$6.21. \lim_{x \rightarrow 4/4} \frac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$$

$$6.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$$

$$6.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$$

$$6.27. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{(\sqrt{x}-4)^2}}$$

$$6.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2}-16}$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$$

$$6.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$$

$$6.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^3}}$$

$$6.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$$

$$6.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$$

$$6.16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$$

$$6.18. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$$

$$6.20. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$$

$$6.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[2]{x}}$$

$$6.24. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2}+x^3}$$

$$6.26. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$6.28. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3}+8}$$

$$6.30. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$$

Задача 7. Вычислить пределы функций

$$7.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}$$

$$7.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$$

$$7.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}$$

$$7.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - \lg a}{\ln x - \ln a}$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln e^{-x} - 1 + \cos x}{x^2}$$

$$7.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \cos x} - 1}{e^x - 1}$$

$$7.9. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(\pi - 3x)}$$

$$7.11. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$$

$$7.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}$$

$$7.15. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) + \ln(x-h) - 2 \ln x}{h^2}, \quad x > 0$$

$$7.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$$

$$7.19. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h}$$

$$7.21. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x-h} + a^{x+h} - 2a^x}{h^2}$$

$$7.23. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sqrt[3]{5+x} - 2}{\sin \pi x}$$

$$7.25. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x-9} - 1}$$

$$7.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$$

$$7.29. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$$

$$7.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - e^{-x})}{e^{x^3+1} - e}$$

$$7.10. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$$

$$7.12. \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}$$

$$7.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x \ln \cos 5x}$$

$$7.16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\log_2 x}$$

$$7.18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}$$

$$7.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}$$

$$7.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$$

$$7.24. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$$

$$7.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\ln(1 + x\sqrt{1 + xe^x})}$$

$$7.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx - \sin ax}{\ln(\operatorname{tg}(\pi/4 + ax))}$$

$$7.30. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\log_3 x - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$$

Примечание: Данную задачу решить по правилу Лопиталья, после раздела дифференцирования, т.е. двумя способами.

Задача 8. Вычислить пределы функций

$$8.1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{1/x}$$

$$8.2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x} \right)^x$$

$$8.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x} \right)^{2/(x+2)}$$

$$8.4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{x} \right)^{\cos(\pi/4 + x)}$$

$$8.5. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos)^{1/x}$$

$$8.6. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 4}{x + 2} \right)^{1/x}$$

$$8.7. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{6x} \right)^{1/(x+3)}$$

$$8.8. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 4}{x} \right)^{1/x}$$

$$8.9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right)^{(2x+3)/(1+x)}$$

$$8.10. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+3}{x+4} \right)^{1/(x+1)}$$

$$8.11. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x}{2x} \right)^{2+x}$$

$$8.13. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x} \right)^x$$

$$8.15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 8}{3x^2 + 10} \right)^{x-2}$$

$$8.17. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^{2x} - 1}{x} \right)^{x+1}$$

$$8.19. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{11x + 8}{12x + 1} \right)^{\cos^2 x}$$

$$8.21. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \right)^{3/(x+8)}$$

$$8.23. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{2/(x+5)}$$

$$8.25. \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\cos x^4}$$

$$8.27. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} x \right) \right)^{(e^x - 1)/x}$$

$$8.29. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+8x}{2+11x} \right)^{1/(x^2-1)}$$

$$8.12. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right)^{6/(1+x)}$$

$$8.14. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right)^{x+2}$$

$$8.16. \lim_{x \rightarrow 0} [\sin(x+2)]^{3/(3-x)}$$

$$8.18. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4 + 5}{x + 10} \right)^{4/(x+2)}$$

$$8.20. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 + 8} \right)^{2/(x-1)}$$

$$8.22. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{x}{\pi} \right)^{1+x}$$

$$8.24. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} 3x}{x} \right)^{x+2}$$

$$8.26. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x^2}{\sin x} \right)^{4/(x-6)}$$

$$8.28. \lim_{x \rightarrow 0} (6 - 5/\cos x)^{x^2 x}$$

$$8.30. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x} \right)^{2x+1}$$

Задача 9. Найти производную

$$9.1. y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}$$

$$9.3. y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)}$$

$$9.5. y = \frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^2}$$

$$9.7. y = \frac{(x^2 - 6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^3}$$

$$9.9. y = \frac{4+3x^3}{x^3\sqrt{(2+x^3)^2}}$$

$$9.11. y = \frac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{1-x^3}}$$

$$9.13. y = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$$

$$9.15. y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$$

$$9.2. y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$$

$$9.4. y = \frac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}}$$

$$9.6. y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^2}}$$

$$9.8. y = \frac{(x^2 - 8)\sqrt{x^2 - 3}}{6x^3}$$

$$9.10. y = \sqrt[3]{\frac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}$$

$$9.12. y = \frac{(x^2 - 2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$$

$$9.14. y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$$

$$9.16. y = \frac{x^6 + 8x^3 - 128}{\sqrt{8-x^3}}$$

$$9.17. y = \frac{\sqrt{2x+3(x-2)}}{x^2}$$

$$9.19. y = \frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$$

$$9.21. y = \frac{(2x^3+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$$

$$9.23. y = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$$

$$9.25. y = 3\sqrt{(x+1)/(x-1)^2}$$

$$9.27. y = (x\sqrt{x+1})/(x^2+x+1)$$

$$9.29. y = ((x+3)\sqrt{2x-1})/(2x+7)$$

$$9.18. y = (1-x^2)\sqrt{x^3+\frac{1}{x}}$$

$$9.20. y = \frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$$

$$9.22. y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$$

$$9.24. y = 3\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$$

$$9.26. y = (x+7)/(6\sqrt{x^2+2x+7})$$

$$9.28. y = (x^2+2)/(2\sqrt{1-x^4})$$

$$9.30. y = (3x+\sqrt{x})/(\sqrt{x^2+2})$$

Задача 10. Найти производную.

$$10.1. y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1})$$

$$10.2. y = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x)/8$$

$$10.3. y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}$$

$$10.4. y = \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1+2^x}{1-2^x}$$

$$10.5. y = 2\sqrt{e^x+1} + \ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$$

$$10.6. y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}$$

$$10.7. y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) - 2 \operatorname{arctg} e^x$$

$$10.8. y = \ln(e^x+1) + \frac{18e^{2x}+27e^x+11}{6(e^x+1)^3}$$

$$10.9. y = 2(\sqrt{2^x-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x-1})/\ln 2$$

$$10.10. y = 2(x-2)\sqrt{1+e^x} - 2 \ln((\sqrt{1+e^x}-1)/(\sqrt{1+e^x}+1))$$

$$10.11. y = e^{\alpha}(\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)/(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$10.12. y = e^{\alpha}(\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)/(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$10.13. y = e^{\alpha} \left\{ \frac{1}{2a} + \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{2(a^2 + 4b^2)} \right\}$$

$$10.14. y = x + 1/(1+e^x) - \ln(1+e^x)$$

$$10.15. y = x - 3 \ln[(1+e^{x/6})\sqrt{1+e^{x/3}}] - 3 \operatorname{arctg} e^{x/6}$$

$$10.16. y = x + \frac{8}{1+e^{x/4}}$$

$$10.17. y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin e^{-x}$$

$$10.18. y = x - e^{-x} \arcsin e^{-x} - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}})$$

$$10.19. y = x - \ln(1+e^x) - 2e^{-x/2} \operatorname{arctg} e^{x/2} - (\operatorname{arctg} e^{x/2})^2$$

$$10.20. y = \frac{e^{-x^2}}{1+x^3}$$

$$10.21. y = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}(e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}})$$

$$10.22. y = 3e^{\frac{3}{2}x} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 2)$$

$$10.23. y = \ln \frac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x-1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x+1}$$

$$10.24. y = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$10.25. y = \frac{e^x}{2} [(x^2-1)\cos x + (x-1)^2 \sin x]$$

$$10.26. y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x})$$

$$10.27. y = 3e^{\frac{3}{2}x} [\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120]$$

$$10.28. y = -e^{3x} / (3\sinh^3 x)$$

$$10.29. y = \arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}}$$

$$10.30. y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^4 + 2x^2 + 2)$$

Задача 11. Найти производную

$$11.1. y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}$$

$$11.3. y = 2\sqrt{x} - 4 \ln(2 + \sqrt{x})$$

$$11.5. y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$$

$$11.7. y = \ln^2(x + \cos x)$$

$$11.9. y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$11.11. y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

$$11.13. y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}$$

$$11.15. y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg} x$$

$$11.17. y = \ln \cos \frac{2x+3}{2x+1}$$

$$11.19. y = \log_a \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$11.21. y = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}$$

$$11.23. y = \ln(bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2})$$

$$11.2. y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

$$11.4. y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$$

$$11.6. y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$$

$$11.8. y = \ln^3(1 + \cos x)$$

$$11.10. y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

$$11.12. y = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right) + a$$

$$11.14. y = \log_{16} \log_5 \operatorname{tg} x$$

$$11.16. y = x(\cos \ln x + \sin \ln x) / 2$$

$$11.18. y = \lg \ln \operatorname{ctg} x$$

$$11.20. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} \operatorname{tg} x + \sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x})$$

$$11.22. y = \ln \arccos \sqrt{1-e^{2x}}$$

$$11.24. y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{2}}$$

$$11.25. y' = \ln(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}})$$

$$11.27. y' = \ln \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}(x/2)}$$

$$11.29. y' = \ln \ln \sin(1 + 1/x)$$

$$11.26. y' = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$$

$$11.28. y' = \ln \frac{\ln x}{\sin(1/x)}$$

$$11.30. y' = \ln \ln^3 \ln^2 x$$

Задача 12. Найти производную

$$12.1. y' = \sin \sqrt{3} + \frac{1 \sin^2 4x}{3 \cos 6x}$$

$$12.3. y' = \operatorname{tg} \lg \frac{1}{3} + \frac{1 \sin^2 4x}{4 \cos 8x}$$

$$12.5. y' = \frac{\cos \sin 5 \cdot \sin^2 2x}{2 \cos 4x}$$

$$12.7. y' = \frac{\cos \ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7 \cos 14x}$$

$$12.9. y' = \operatorname{ctg} \cos 2x + \frac{1 \sin^2 6x}{6 \cos 12x}$$

$$12.11. y' = \frac{1}{3} \cos \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \frac{1 \sin^2 10x}{10 \cos 20x}$$

$$12.13. y' = 8 \sin \operatorname{ctg} 3 + \frac{1 \sin^2 5x}{5 \cos 10x}$$

$$12.15. y' = \frac{\cos \operatorname{tg} (1/3) \cdot \sin^2 15x}{15 \cos 30x}$$

$$12.17. y' = \frac{\operatorname{ctg} \sin (1/3) \cdot \sin^2 17x}{17 \cos 34x}$$

$$12.19. y' = \frac{\operatorname{tg} \ln 2 \cdot \sin^2 19x}{19 \cos 38x}$$

$$12.21. y' = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \frac{\sin^2 21x}{21 \cos 42x}$$

$$12.23. y' = \ln \cos \frac{1}{3} + \frac{\sin^2 23x}{23 \cos 46x}$$

$$12.25. y' = \sin \ln \frac{1}{2} + \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}$$

$$12.27. y' = \sqrt[7]{\operatorname{tg} \cos 2} + \frac{\sin^2 27x}{27 \cos 54x}$$

$$12.29. y' = \cos^2 \sin 3 + \frac{\sin^2 29x}{29 \cos 58x}$$

$$12.2. y' = \cos \ln 2 - \frac{1 \cos^2 3x}{3 \sin 6x}$$

$$12.4. y' = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{1 \cos^2 4x}{8 \sin 8x}$$

$$12.6. y' = \frac{\sin \cos 3 \cdot \cos^2 2x}{4 \sin 4x}$$

$$12.8. y' = \cos \operatorname{ctg} 2 - \frac{1 \cos^2 8x}{16 \sin 16x}$$

$$12.10. y' = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \frac{1 \cos^2 10x}{20 \sin 20x}$$

$$12.12. y' = \ln \sin \frac{1}{2} + \frac{1 \cos^2 12x}{24 \sin 24x}$$

$$12.14. y' = \frac{\cos \operatorname{ctg} 3 \cdot \cos^2 14x}{28 \sin 28x}$$

$$12.16. y' = \frac{\sin \operatorname{tg} (1/7) \cdot \cos^2 16x}{32 \sin 32x}$$

$$15.18. y' = \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2} \cdot \cos^2 18x}{36 \sin 36x}$$

$$15.20. y' = \operatorname{ctg} \cos 5 - \frac{1 \cos^2 20x}{40 \sin 40x}$$

$$15.22. y' = \cos \ln 13 - \frac{1 \cos^2 22x}{44 \sin 44x}$$

$$15.24. y' = \operatorname{ctg} \sin \frac{1}{13} - \frac{1 \cos^2 24x}{48 \sin 48x}$$

$$15.26. y' = \sqrt[3]{\cos \sqrt{2}} - \frac{1 \cos^2 26x}{52 \sin 52x}$$

$$15.28. y' = \sin \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2} - \frac{\cos^2 28x}{56 \sin 56x}$$

$$15.30. y' = \sin^3 \cos 2 - \frac{\cos^2 30x}{60 \sin 60x}$$

Задача 13. Найти производную.

$$13.1. y' = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}.$$

$$13.2. y = \arcsin \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{5x}}.$$

$$13.3. y = \frac{2x-1}{4} \sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-1}{3}.$$

$$13.4. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.$$

$$13.5. y = \arccos \frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}.$$

$$13.6. y = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{6x}}.$$

$$13.7. y = \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

$$13.8. y = (x-4) \sqrt{8x-x^2-7} / 2 - 9 \arccos \sqrt{(x-1)/6}.$$

$$13.9. y = \frac{(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{3x\sqrt{x}}.$$

$$13.10. y = \frac{x^2}{3} \arccos x - \frac{2+x^2}{9} \sqrt{1-x^2}.$$

$$13.11. y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1+x}{2x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$13.12. y = \frac{3+x}{2} \sqrt{x(2-x)} + 3 \arccos \sqrt{\frac{x}{2}}.$$

$$13.13. y = \frac{4+x^4}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}.$$

$$13.14. y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$13.15. y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{\arccos x}{2x^2}.$$

$$13.16. y = 6 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{6+x}{2} \sqrt{x(4-x)}.$$

$$13.17. y = \frac{x-3}{2} \sqrt{6x-x^2-8} + \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}-1}.$$

$$13.18. y = \frac{(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x-\sqrt{x}}}{x}.$$

$$13.19. y = \frac{2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$13.20. y = \frac{2x-5}{4} \sqrt{5x-4-x^2} + \frac{9}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-1}{3}}.$$

$$13.21. y = \operatorname{arctg} x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2+1}{x^2+4}.$$

$$13.22. y = \arcsin \frac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}.$$

$$13.24. y = \sqrt{x} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

$$13.25. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}.$$

$$13.26. y = (2x^2 + 6x + 5) \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x+2} - x.$$

$$13.27. y = \frac{x}{2\sqrt{1-4x^2}} \arcsin 2x + \frac{1}{8} \ln(1-4x^2)$$

$$13.28. y = \left(2x^2 - x + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} - \frac{x^3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

$$13.29. y = (x + 2\sqrt{x} + 2) \operatorname{arctg}(\sqrt{x}/(\sqrt{x} + 2)) - \sqrt{x}.$$

$$13.30. y = \sqrt{1+2x-x^2} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+x} - \sqrt{2} \ln(1+x).$$

Задача 14. Найти производную.

$$14.1. y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}.$$

$$14.2. y = 4 \ln \frac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}} - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}.$$

$$14.3. y = x(2x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 1} + 3 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$14.4. y = x^3 \arcsin x + \frac{x^2 + 2}{3} \sqrt{1-x^2}.$$

$$14.5. y = 3 \arcsin \frac{3}{4x+1} + 2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}, \quad 4x+1 > 0$$

$$14.6. y = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$14.7. y = 2 \arcsin \frac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2 + 24x + 12}, \quad 3x+4 > 0.$$

$$14.8. y = x(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$14.9. y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

$$14.10. y = \sqrt{1-3x-2x^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x+3}{\sqrt{17}}.$$

$$14.11. y = \sqrt{(4+x)(1+x)} + 3 \ln(\sqrt{4+x} + \sqrt{1+x})$$

$$14.12. y = \ln \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$14.13. y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}.$$

$$14.14. y = 4 \arcsin \frac{4}{2x+3} + \sqrt{4x^2 + 12x - 7}, \quad 2x+3 > 0.$$

$$14.15. y = 2 \arcsin \frac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2 + 6x - 3}, \quad 3x+1 > 0.$$

$$14.16. y = (2+3x)\sqrt{x-1} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}.$$

$$14.17. y = \frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + \ln(\sqrt{x+1}+1)$$

$$14.18. y = \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

$$14.19. y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2-1} \right) \operatorname{arctg} x.$$

$$14.20. y = x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2} (\arcsin x - x).$$

$$14.21. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$14.22. y = 3 \arcsin \frac{3}{x+2} + \sqrt{x^2+4x-5}.$$

$$14.23. y = \sqrt{(3-x)(2+x)} + 5 \arcsin \sqrt{(x+2)/5}.$$

$$14.24. y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x$$

$$14.25. y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x.$$

$$14.26. y = x^3 \arccos x - \frac{x^2+2}{3} \sqrt{1-x^2}.$$

$$14.27. y = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{x^2+2}}{x}.$$

$$14.28. y = (x/4)(10-x^2)\sqrt{4-x^2} + 6 \arcsin(x/2)$$

$$14.29. y = \arcsin \frac{1}{2x+3} + 2\sqrt{x^2+3x+2}, \quad 2x+3 > 0.$$

$$14.30. y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

Задача 15. Найти дифференциал dy

$$15.1. y = x \arcsin(1/x) + \ln|x + \sqrt{x^2-1}|, \quad x > 0.$$

$$15.2. y = \operatorname{tg}(2 \arccos \sqrt{1-2x^2}), \quad x > 0.$$

$$15.3. y = \sqrt{1+2x} - \ln(x + \sqrt{1+2x})$$

$$15.4. y = x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1},$$

$$15.5. y = \arccos(1/\sqrt{1+2x^2}), \quad x > 0.$$

$$15.6. y = x \ln|x + \sqrt{x^2+3}| - \sqrt{x^2+3}$$

$$15.7. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + (\operatorname{sh} x) \ln \operatorname{ch} x.$$

$$15.8. y = \arccos((x^2-1)/(x^2\sqrt{2}))$$

$$15.9. y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^2 x})$$

$$15.10. y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x$$

$$15.11. y = \frac{\ln|x|}{1+x^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$15.12. y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin e$$

$$15.13. y = x\sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin(x/2)$$

$$15.14. y = \ln \operatorname{tg}(x/2) - x/\sin x$$

$$15.15. y = 2x + \ln|\sin x + 2 \cos x|$$

$$15.16. y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}^3 x/3}$$

$$15.17. y = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2x} \right|$$

$$15.19. y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$15.21. y = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right)$$

$$15.23. y = \ln |\cos \sqrt{x}| + \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}$$

$$15.25. y = x(\sin \ln x - \cos \ln x)$$

$$15.27. y = \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$15.29. y = \sqrt{x} - (1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

$$15.18. y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}$$

$$15.20. y = \ln |x^2 - 1| - \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$15.22. y = \ln |2x + 2\sqrt{x^2 + x} + 1|$$

$$15.24. y = e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x)$$

$$15.26. y = (\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}) e^{2\sqrt{x-1}}$$

$$15.28. y = \sqrt{3+x^2} - x - \ln |x + \sqrt{3+x^2}|$$

$$15.30. y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$$

Задача 16. Вычислить приближенно с помощью дифференциала

$$16.1. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,76$$

$$16.3. y = (x + \sqrt{5-x^2})/2, \quad x = 0,98$$

$$16.5. y = \arcsin x, \quad x = 0,08$$

$$16.7. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 26,46$$

$$16.9. y = x^{11}, \quad x = 1,021$$

$$16.11. y = x^{21}, \quad x = 0,998$$

$$16.13. y = x^6, \quad x = 2,01$$

$$16.15. y = x^7, \quad x = 1,996$$

$$16.17. y = \sqrt{4x-1}, \quad x = 2,56$$

$$16.19. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,36$$

$$16.21. y = x^7, \quad x = 2,002$$

$$16.23. y = \sqrt{x^3}, \quad x = 0,98$$

$$16.25. y = \sqrt[3]{x^2}, \quad x = 1,03$$

$$16.27. y = \sqrt{1+x+\sin x}, \quad x = 0,01$$

$$16.29. y = \sqrt{2x - \sin(\pi x/2)}, \quad x = 1,02$$

$$16.2. y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}, \quad x = 1,012$$

$$16.4. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 27,5411$$

$$16.6. y = \sqrt{x^2 + 2x + 5}, \quad x = 0,97$$

$$16.8. y = \sqrt{x^2 + x + 3}, \quad x = 1,97$$

$$16.10. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1,21$$

$$16.12. y = \sqrt[3]{x^2}, \quad x = 1,03$$

$$16.14. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,24$$

$$16.16. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,64$$

$$16.18. y = 1/\sqrt{2x^2 + x + 1}, \quad x = 1,016$$

$$16.20. y = 1/\sqrt{x}, \quad x = 4,16$$

$$16.22. y = \sqrt{4x-3}, \quad x = 1,78$$

$$16.24. y = x^5, \quad x = 2,997$$

$$16.26. y = x^4, \quad x = 3,998$$

$$16.28. y = \sqrt[3]{3x + \cos x}, \quad x = 0,01$$

$$16.30. y = \sqrt{x^2 + 5}, \quad x = 1,97$$

Задача 17. Составить уравнение нормали (в вариантах 2.1.-2.12) или уравнение касательной (в вариантах 2.13-2.30) к данной кривой в точке с абсциссой x_0

$$17.1. y = (4x - x^2)/4, \quad x_0 = 2$$

$$17.3. y = x - x^3, \quad x_0 = -1$$

$$17.5. y = x + \sqrt{x^3}, \quad x_0 = 1$$

$$17.7. y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, \quad x_0 = 4$$

$$17.9. y = 2x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = 1$$

$$17.2. y = 2x^2 + 3x - 4, \quad x_0 = -2$$

$$17.4. y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, \quad x_0 = 4$$

$$17.6. y = \sqrt[3]{x^3} - 20, \quad x_0 = -8$$

$$17.8. y = 8\sqrt[4]{x} - 70, \quad x_0 = 16$$

$$17.10. y = (x^3 - 3x + 6)/x^2, \quad x_0 = 3$$

$$17.11. y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 64$$

$$17.13. y = 2x^2 + 3, \quad x_0 = -1$$

$$17.15. y = 2x + 1/x, \quad x_0 = 1$$

$$17.17. y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}, \quad x_0 = 1$$

$$17.19. y = 3(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}), \quad x_0 = 1$$

$$17.21. y = x/(x^2 + 1), \quad x_0 = -2$$

$$17.23. y = 2x/(x^2 + 1), \quad x_0 = 1$$

$$17.25. y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}, \quad x_0 = 1$$

$$17.27. y = 3\sqrt{x} - \sqrt{x}, \quad x_0 = 1$$

$$17.29. y = x^2/10 + 3, \quad x_0 = 2$$

$$17.12. y = (x^3 + 2)/(x^3 - 2), \quad x_0 = 2$$

$$17.14. y = \frac{x^{29} + 6}{x + 1}, \quad x_0 = 1$$

$$17.16. y = -2(x^3 + 2)/(3(x^4 + 1)), \quad x_0 = 1$$

$$17.18. y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}, \quad x_0 = 1$$

$$17.20. y = 1/(3x + 2), \quad x_0 = 2$$

$$17.22. y = (x^2 - 3x + 3)/3, \quad x_0 = 3$$

$$17.24. y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}), \quad x_0 = 1$$

$$17.26. y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2, \quad x_0 = 1$$

$$17.28. y = (3x - 2x^3)/3, \quad x_0 = 1$$

$$17.30. y = (x^2 - 2x - 3)/4, \quad x_0 = 4$$

Задача 18. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t=t_0$.

$$18.1. \begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, t_0 = \pi/3. \end{cases}$$

$$18.3. \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), t_0 = \pi/3 \end{cases}$$

$$18.5. \begin{cases} x = (2t + t^2)/(1 + t^3) \\ y = (2t - t^2)/(1 + t^3), t_0 = 1. \end{cases}$$

$$18.7. \begin{cases} x = t(t \cos t - 2 \sin t), \\ y = t(t \sin t + 2 \cos t), t_0 = \pi/4 \end{cases}$$

$$18.9. \begin{cases} x = 2 \ln ctgt + 1, \\ y = tgt + ctgt, t_0 = \pi/4 \end{cases}$$

$$18.11. \begin{cases} x = at \cos t, \\ y = at \sin t, t_0 = \pi/2. \end{cases}$$

$$18.13. \begin{cases} x = \arcsin(t/\sqrt{1+t^2}) \\ y = \arccos(1/\sqrt{1+t^2}), t_0 = 1. \end{cases}$$

$$18.15. \begin{cases} x = (1+t)/t^2, \\ y = 3/(2t^2) + 2/t, t_0 = 2. \end{cases}$$

$$18.17. \begin{cases} x = a(t \sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), t_0 = \pi/4. \end{cases}$$

$$18.19. \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^2, t_0 = 2. \end{cases}$$

$$18.2. \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sin t, t_0 = \pi/3. \end{cases}$$

$$18.4. \begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, t_0 = 1. \end{cases}$$

$$18.6. \begin{cases} x = \arcsin(t/\sqrt{1+t^2}) \\ y = \arccos(1/\sqrt{1+t^2}), t_0 = -1. \end{cases}$$

$$18.8. \begin{cases} x = 3at/(1+t^2) \\ y = 3at^2/(1+t^2), t_0 = 2 \end{cases}$$

$$18.10. \begin{cases} x = (1/2)t^2 - (1/4)t^2, \\ y = (1/2)t^2 + (1/3)t^3, t_0 = 0 \end{cases}$$

$$18.12. \begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, t_0 = \pi/6. \end{cases}$$

$$18.14. \begin{cases} x = (1 + \ln t)/t^2, \\ y = (3 + 2 \ln t)/t, t_0 = 1. \end{cases}$$

$$18.16. \begin{cases} x = a \sin^3 t \\ y = a \cos^3 t, t_0 = \pi/6 \end{cases}$$

$$18.18. \begin{cases} x = (t+1)/t, \\ y = (t-1)/t, t_0 = -1 \end{cases}$$

$$18.20. \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctgt, t_0 = 1. \end{cases}$$

$$18.21. \begin{cases} x = t(1 - \sin t) \\ y = t \cos t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$18.23. \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$$

$$18.25. \begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 + t + 1, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$18.27. \begin{cases} x = 2t \operatorname{tg} t \\ y = 2 \sin^2 t + \sin 2t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$$

$$18.29. \begin{cases} x = \sin t \\ y = a^t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$18.22. \begin{cases} x = (1 + t^3)/(t^2 - 1) \\ y = t/(t^2 - 1), \quad t_0 = 2. \end{cases}$$

$$18.24. \begin{cases} x = t - t^4 \\ y = t^2 - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$18.26. \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t, \quad t_0 = -\pi/3. \end{cases}$$

$$18.28. \begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2, \quad t_0 = -2. \end{cases}$$

$$18.30. \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$$

Задача 19. Найти производную указанного порядка.

$$19.1. y = (2x^2 - 7) \ln(x-1), \quad y' = ?$$

$$19.3. y = x \cos x^2, \quad y''' = ?$$

$$19.5. y = \frac{\log_2 x}{x^3}, \quad y''' = ?$$

$$19.7. y = x^2 \sin(5x-3), \quad y''' = ?$$

$$19.9. y = (2x+3) \ln^3 x, \quad y''' = ?$$

$$19.11. y = (\ln x)/x^3, \quad y''' = ?$$

$$19.13. y = e^{1-2x} \cdot \sin(2+3x), \quad y''' = ?$$

$$19.15. y = (2x^3+1) \cos x, \quad y' = ?$$

$$19.17. y = (1-x+x^2) e^{(x-1)^{1/2}}, \quad y'' = ?$$

$$19.19. y = (x+7) \ln(x+4), \quad y'' = ?$$

$$19.21. y = \frac{\ln(2x+5)}{2x+5}, \quad y''' = ?$$

$$19.23. y = (\ln x)/x^5, \quad y''' = ?$$

$$19.25. y = (x^2+3x+1) e^{3x+2}, \quad y' = ?$$

$$19.27. y = \frac{\ln(x-2)}{x-2}, \quad y' = ?$$

$$19.29. y = (5x-1) \ln^2 x, \quad y''' = ?$$

$$19.2. y = (3-x^2) \ln^2 x, \quad y''' = ?$$

$$19.4. y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}, \quad y''' = ?$$

$$19.6. y = (4x^3+5) e^{2x+1}, \quad y' = ?$$

$$19.8. y = (\ln x)/x^2, \quad y''' = ?$$

$$19.10. y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x, \quad y''' = ?$$

$$19.12. y = (4x+3) 2^x, \quad y' = ?$$

$$19.14. y = \frac{\ln(3+x)}{3+x}, \quad y''' = ?$$

$$19.16. y = (x^2+3) \ln(x-3), \quad y''' = ?$$

$$19.18. y = (1/x) \sin 2x, \quad y''' = ?$$

$$19.20. y = (3x-7) 3^{-x}, \quad y'' = ?$$

$$19.22. y = e^x \sin 2x, \quad y'' = ?$$

$$19.24. y = x \ln(1-3x), \quad y^{(4)} = ?$$

$$19.26. y = (5x-8) \cdot 2^{-x}, \quad y'' = ?$$

$$19.28. y = e^{-x} (\cos 2x - 3 \sin 2x), \quad y''' = ?$$

$$19.30. y = \frac{\log_3 x}{x^2}, \quad y''' = ?$$

Задача 20. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически.

$$20.1. \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = 2 \sec^2 t \end{cases}$$

$$20.2. \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = 1/t \end{cases}$$

$$20.3. \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

$$20.4. \begin{cases} x = sh^2 t \\ y = 1/ch^2 t \end{cases}$$

$$20.5. \begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$$

$$20.7. \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = 1/\sqrt{1-t} \end{cases}$$

$$20.9. \begin{cases} x = t \operatorname{tg} t \\ y = 1/\sin 2t \end{cases}$$

$$20.11. \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t-1} \end{cases}$$

$$20.13. \begin{cases} x = \sqrt{t^3-1} \\ y = \ln t \end{cases}$$

$$20.15. \begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = 1/\sqrt{t} \end{cases}$$

$$20.17. \begin{cases} x = \sqrt{t-3} \\ y = \ln(t-2) \end{cases}$$

$$20.19. \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t \end{cases}$$

$$20.21. \begin{cases} x = \cos t \\ y = \ln \sin t \end{cases}$$

$$20.23. \begin{cases} x = e^t \\ y = \arcsin t \end{cases}$$

$$20.25. \begin{cases} x = ch t \\ y = \sqrt[3]{sh^2 t} \end{cases}$$

$$20.27. \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 4(2 + \cos t) \end{cases}$$

$$20.29. \begin{cases} x = 1/t^2 \\ y = 1/(t^2 + 1) \end{cases}$$

$$20.6. \begin{cases} x = 1/t \\ y = 1/(1+t^2) \end{cases}$$

$$20.8. \begin{cases} x = \sin t \\ y = \sec t \end{cases}$$

$$20.10. \begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = t/\sqrt{t-1} \end{cases}$$

$$20.12. \begin{cases} x = \cos t/(1+2\cos t) \\ y = \sin/(1+2\cos t) \end{cases}$$

$$20.14. \begin{cases} x = sh t \\ y = th^2 t \end{cases}$$

$$20.16. \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg}^2 t \end{cases}$$

$$20.18. \begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln \cos t \end{cases}$$

$$20.20. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$$

$$20.22. \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

$$20.24. \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^4(t/2) \end{cases}$$

$$20.26. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = t^2/2 \end{cases}$$

$$20.28. \begin{cases} x = \sin t - t \cos t \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$$

$$20.30. \begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$$

Решение типового варианта индивидуального задания №1 Пределы последовательности и функции. Производные функции.

Задача №1. Вычислить предел числовой последовательности.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n-2)^2}{(n+3)^2}$$

Решение: При $n \rightarrow \infty$ в числителе и знаменателе дроби бесконечно большие величины образуют неопределённость $\frac{\infty - \infty}{\infty}$. Разделим числитель и

знаменатель дроби на старшую степень целочисленной переменной n , в данном случае на n^2 , получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n-2)^2}{(n+3)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 - n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)^2}{n^2 \left(1 + \frac{3}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^2}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2} = \frac{1-1}{1} = 0$$

Задача №2. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)} (\sqrt{n^3-3} - \sqrt{n^3-2})$$

Решение: При $n \rightarrow \infty$ под знаком предела имеем неопределённость $\infty(\infty - \infty)$. Умножим и разделим на сопряжённое $(\sqrt{n^3-3} + \sqrt{n^3-2})$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n+1)(n+2)} (\sqrt{n^3-3} - \sqrt{n^3-2}) (\sqrt{n^3-3} + \sqrt{n^3-2})}{(\sqrt{n^3-3} + \sqrt{n^3-2})} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n+1)(n+2)} (n^3-3 - n^3+2)}{\sqrt{n^3-3} + \sqrt{n^3-2}} &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}{\sqrt{n^3-3} + \sqrt{n^3-2}} = \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{n(n+1)(n+2)}{n^3}}}{\sqrt{\frac{n^3-3}{n^3}} + \sqrt{\frac{n^3-2}{n^3}}} = \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{n}{n} * \frac{n+1}{n} * \frac{n+2}{n}}}{\sqrt{1 - \frac{3}{n^3}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n^3}}} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)}}{2} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

т. к. $\frac{1}{n}$ и $\frac{2}{n}$ при $n \rightarrow \infty$ стремятся к 0

Задача №3. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-7} \right)$$

Решение:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-7} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-7} \right)^{\frac{n}{6}} \cdot \left(\frac{n+5}{n-7} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+5}{n-7} - 1 \right)^{\frac{n}{6}} \cdot \left(\frac{n+5}{n-7} \right) = \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+5-n+7}{n-7} \right)^{\frac{n}{6}} \cdot \frac{1+\frac{5}{n}}{1-\frac{7}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{12}{n-7} \right)^{\frac{n-7}{12}} \right]^{\frac{12}{n-7} \cdot \frac{n}{6}} \cdot \frac{1+\frac{5}{n}}{1-\frac{7}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2n}{n-7}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2n}{n-7}} = \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2}{1-\frac{7}{n}}} = e^2\end{aligned}$$

т.к. $\frac{5}{n}$ и $\frac{7}{n}$ при $n \rightarrow \infty$ стремятся к 0. Здесь мы воспользовались вторым

замечательным пределом: $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e$.

Задача №4. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x + \frac{1}{5}} = -8$

Решение: Воспользуемся определением предела функции $y=f(x)$ в точке x_0 . Функция $y=f(x)$ имеет число A своим пределом при $x \rightarrow x_0$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдётся (мы найдём, укажем) такое число δ , вообще говоря зависящее от ε , $\delta = \delta(\varepsilon)$, что как только выполняется $|x - x_0| < \delta$, будет $|f(x) - A| < \varepsilon$. В нашей задаче $f(x) = \frac{15x^2 - 2x - 1}{x + \frac{1}{5}}$, $x_0 = -\frac{1}{5}$, $A = -8$. Наша задача: найти такое

$\delta > 0$, чтобы из неравенства $\left| x - \left(-\frac{1}{5} \right) \right| = \left| x + \frac{1}{5} \right| < \delta$ следовало неравенство

$$\left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x + \frac{1}{5}} - (-8) \right| = \left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x + \frac{1}{5}} + 8 \right| < \varepsilon$$

$$\text{т.к. } \left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x + \frac{1}{5}} + 8 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{15 \left(x + \frac{1}{5} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right)}{x + \frac{1}{5}} + 8 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \left| 15 \left(x - \frac{1}{3} \right) + 8 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |15x - 5 + 8| < \varepsilon \Leftrightarrow |15x + 3| < \varepsilon \Leftrightarrow 15 \left| x + \frac{1}{5} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| < \frac{\varepsilon}{15},$$

то мы выбираем для любого $\varepsilon > 0$ число $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{15}$ и, следуя по цепочке наших неравенств в обратном направлении, получаем решение поставленной задачи по определению.

Ответ: при любого $\varepsilon > 0$ следует взять $\delta = \frac{\varepsilon}{15}$.

Задача №5. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18} &= \left(\frac{-27 + 63 - 45 + 9}{-27 + 72 - 63 + 18} \right) = \left(\frac{72 - 72}{90 - 90} \right) = \left(\frac{0}{0} \right) / = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x^2 + 4x^2 + 12x + 3x + 9}{x^3 + 3x^2 + 5x^2 + 15x + 6x + 18} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2(x+3) + 4x(x+3) + 3(x+3)}{x^2(x+3) + 5x(x+3) + 6(x+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 5x + 6} = \left(\frac{9 - 12 + 3}{9 - 15 + 6} \right) = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x + x + 3}{x^2 + 3x + 2x + 6} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+3) + (x+3)}{x(x+3) + 2(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+2} = \frac{-3+1}{-3+2} = 2 \end{aligned}$$

Задача №6. Вычислить предел функции. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})\sqrt[3]{x^2-9}} \\ &= \frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+13-4x-4}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x+9}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)}{\sqrt[3]{(x-3)(x+3)}} = \\ &= \frac{-3}{8} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{\sqrt[3]{x+3}} = -\frac{3}{8} \frac{0}{\sqrt[3]{6}} = 0. \end{aligned}$$

Задача №7. Вычислить предел функции. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - 1}{\lg \pi x}$

Решение: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - 1}{\lg \pi x} = \left(\frac{1-1}{0} \right) = \left(\frac{0}{0} \right) \left| \begin{matrix} x \rightarrow 3 - t, t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow t + 3 \end{matrix} \right| =$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_3(t+3) - 1}{\operatorname{tg}(\pi + 3\pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_3(t+3) - \log_3 3}{\operatorname{tg} \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_3 \frac{t+3}{3}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} * \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_3 \left(1 + \frac{t}{3}\right)}{\pi} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \log_3 \left(1 + \frac{t}{3}\right) = \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \log_3 \left(1 + \frac{t}{3}\right)^{\frac{3}{t}} = \frac{1}{\pi} \log_3 e^1 = \frac{1}{3\pi \ln 3}$$

Использованы формулы - следствия из первого и второго замечательного предела: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1$; $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

Задача №8. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x} \right)^{2x+1}$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin^2 x * x^2}{\frac{x^2}{\arcsin^2 4x * 16x^2}} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{16x^2} \right)^{2x+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{16} \right)^{2x+1} = \frac{1}{16}$$

Использована формула - следствие из первого замечательного предела

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\arcsin \alpha}{\alpha} = 1$$

Задача №9. Найти производную функции $y = \frac{3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2}{15\sqrt{1+x^2}}$

Решение: Применим формулу производной дроби

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2}{15\sqrt{1+x^2}} \right)' = \\ &= \frac{1}{15} \cdot \frac{(3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2)\sqrt{1+x^2} - (3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2)(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \\ &= \frac{(18x^5 + 16x^3 - 2x)\sqrt{1+x^2} - (3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2) \cdot \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{15(1+x^2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x(18x^4 + 16x^2 - 2)(1+x^2) - x(3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2)}{15(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \\
&= \frac{x(18x^4 + 16x^2 - 2 + 18x^6 + 16x^4 - 2x^2 - 3x^6 - 4x^4 + x^2 + 2)}{15(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{x(15x^6 + 30x^4 + 15x^2)}{15\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{15x^3(x^4 + 2x^2 + 1)}{15\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{x^3(x^2 + 1)^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = x^3\sqrt{1+x^2}
\end{aligned}$$

Ответ: $y' = x^3\sqrt{1+x^2}$

Задача №10. Найти производную функции $y = \frac{e^{x^2}}{1+x^2}$

Решение: Применим формулу производной дроби

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{e^{x^2}}{1+x^2}\right)' = \frac{(e^{x^2})' \cdot (1+x^2) - e^{x^2} (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\
&= \frac{e^{x^2} \cdot 2x(1+x^2) - e^{x^2} \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2xe^{x^2}(1+x^2-1)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^3e^{x^2}}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}$$

Задача №11. Найти производную функции $y = \ln \ln^2 \ln^3 x$

Решение: Применим формулу производной сложной функции

$$y = \ln \ln^2 \ln^3 x = \ln(\ln \ln^3 x)^2 = 2 \ln \ln \ln^3 x = 2 \ln 3 \ln \ln x = 2(\ln 3 + \ln \ln \ln x)$$

Теперь найдём y'

$$\begin{aligned}
y' &= (2(\ln 3 + \ln \ln \ln x))' = 2((\ln 3)' + (\ln \ln \ln x)') = 2\left(0 + \frac{1}{\ln \ln x \cdot \ln x \cdot x}\right) = \\
&= \frac{2}{\ln \ln x \cdot \ln x \cdot x}
\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{2}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}$$

Задача №12. Найти производную функции $y = \operatorname{tg} \sqrt{\cos \frac{1}{3}} + \frac{\sin^2 31x}{31 \cos 62x}$

Решение: Сначала преобразуем второе слагаемое в данной функции

$$\frac{\sin^2 31x}{31 \cos 62x} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 62x)}{31 \cos 62x} = \frac{1 - \cos 62x}{62 \cos 62x} = \frac{1}{62} \left(\frac{1}{\cos 62x} - 1 \right)$$

$$\left(\operatorname{tg} \sqrt{\cos \frac{1}{3}} + \frac{1}{62} \left(\frac{1}{\cos 62x} - 1 \right) \right)' = 0 + \frac{1}{62} \left(-\frac{1}{\cos^2 62x} (-\sin 62x) 62 + 0 \right)$$

$$\frac{1}{62} \frac{\sin 62x}{\cos^2 62x} 62 = \frac{\sin 62x}{\frac{1}{2}(1 + \cos 124x)} = \frac{2 \sin 62x}{1 + \cos 124x}$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{2 \sin 62x}{1 + \cos 124x}$$

Задача №13. Найти производную функции $y = \arctg \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2}$

Решение:

$$\left(\arctg \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2} \right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2} \right)^2} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2} \right)' = \frac{1}{1 + \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right)^2}{4}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4 + \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right)^2}{4}} = \frac{4}{4 + \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right)^2} \cdot \frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{2} + \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2} =$$

$$\frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{2} + 1 + \sin x} =$$

$$\frac{1}{2(1 + \cos x) + 1 + \sin x} = \frac{1}{\sin x + 2 \cos x + 3}$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{1}{\sin x + 2 \cos x + 3}$$

Задача №14. Найти производную функции $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$

$$\text{Решение: } y' = \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \right)' + \frac{1}{2} (\ln(1-x) - \ln(1+x))' =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} - \arcsin x}{1-x^2} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) = \\
&= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x}{(1-x^2)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) = \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+x+1-x}{1-x^2} = \\
&= \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{2(1-x^2)} = \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x - \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

Задача №15. Найти дифференциал dy , если

$$y = x\sqrt{x^2-1} + \ln|x + \sqrt{x^2-1}|$$

Решение: $dy = y' dx$

$$\begin{aligned}
y' &= (x)' \sqrt{x^2-1} + x(\sqrt{x^2-1})' + \frac{(x + \sqrt{x^2-1})'}{x + \sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} + \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{x^2-1}} + \\
&+ \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2-1+x^2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})} = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \\
&= \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

Ответ: $dy = \frac{2x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}}$

Задача №16. Вычислить приближённо с помощью дифференциала

$$y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, \quad x=1.58$$

Решение: Воспользуемся формулой: $y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x$

У нас $x=1.5$; $x+\Delta x=1.58$; $\Delta x=1.58-1.5=0.08$ $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$,

$$y(1.5) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1.5 + 1}} = \frac{1}{2}; \quad y' = \frac{1 \cdot 2}{2\sqrt{(2x+1)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}};$$

$$y'(1.5) = -\frac{1}{\sqrt{(2 \cdot 1.5 + 1)^3}} \approx -\frac{1}{8}. \text{ И так, } y(1.58) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot 0.08 = 0.5 - 0.01 = 0.49$$

Ответ: $y(1.58) \approx 0.49$

Задача №17. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке x_0 $y = 6\sqrt[3]{x} - \frac{16}{3}\sqrt[4]{x}$, $x_0 = 1$

Решение: Найдем $y'(x_0)$ и воспользуемся формулами уравнений искоемых прямых: касательной $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$ и нормали

$$y = y_0 - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) \quad y' = 6 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{3\sqrt[4]{x^3}} \quad y'(1) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3};$$

$$y(1) = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}. \quad \text{Уравнение касательной: } y = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(x - 1) \quad \text{или}$$

$$3y = 2 + 2x - 2 \Rightarrow 2x - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x. \quad \text{Уравнение нормали:}$$

$$y = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}(x - 1) \quad \text{или} \quad 6y = 4 - 9x + 9 \Rightarrow 9x + 6y - 13 = 0$$

Ответ: $y = \frac{2}{3}x$, $9x + 6y - 13 = 0$.

Задача №18. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ в точки $t = 0$.

Решение: Воспользуемся уравнением касательной $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$ и нормали $y = y_0 - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$ к кривой в точке x_0 .

$$\text{У нас } x_0 = x(0) = 2e^0 = 2; \quad y_0 = y(0) = e^0 = 1 \quad y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t dt}{x'_t dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-e^{-t}}{2e^t};$$

$$y'_x(x_0) = \frac{-e^{-0}}{2e^0} = -\frac{1}{2}. \quad \text{Таким образом уравнение касательной будет иметь вид:}$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{или} \quad y = -\frac{1}{2}x + 2. \quad \text{Уравнение нормали будет таким:}$$

$$y = 1 + 2(x - 2) \quad \text{или} \quad y = 2x - 3.$$

Ответ: $y = -\frac{1}{2}(x + 2)$ $y = 2x - 3$

Задача №19. Найти y^{IV} функции $y = \frac{\log_3 x}{x^2}$

Решение: Найдём последовательно $y^I, y^{II}, y^{III}, y^{IV}$ упростив функцию

$$y = \frac{\log_3 x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2 \ln 3}$$

$$y^I = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{\frac{1}{x} x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$y^{II} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{-\frac{2}{x} x^3 - 3x^2(1 - 2 \ln x)}{x^6} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{-2x^2 - 3x^2 + 6x^2 \ln x}{x^6} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{6 \ln x - 5}{x^4}$$

$$y^{III} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{6x^{-4} - 4x^4(6 \ln x - 5)}{x^8} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{6 - 24 \ln x + 20}{x^5} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{26 - 24 \ln x}{x^5}$$

$$y^{IV} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{-\frac{24}{x} x^5 - 5x^4(26 - 24 \ln x)}{x^{10}} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{-24 - 130 + 120 \ln x}{x^6} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{120 \ln x - 154}{x^6}$$

Ответ: $y^{IV} = \frac{2(60x - 77)}{x^6 \ln 3}$

Задача №20. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрический $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \arctg t \end{cases}$

Решение: Сначала найдём $y_x = \frac{dy}{dx} = \frac{(\arctg t) dt}{(\ln t) dt} = \frac{1+t^2}{t} = \frac{t}{t^2+1}$ затем

найдем y''_{xx}

$$y''_{xx} = (y_x)'_x = \frac{dy_x}{dx} = \frac{\left(\frac{t}{t^2+1} \right)' dt}{\frac{1}{t} dt} = t * \frac{1(t^2+1) - t * 2t}{(t^2+1)^2} = t \frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2} = t \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{t-t^3}{(t^2+1)^2}$$

Ответ: $y''_{xx} = \frac{t-t^3}{(t^2+1)^2}$

Индивидуальное задание №2
Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

Задача №1. Написать разложение вектора x по векторам p, q, r .

1.1. $x = \{-2, 4, 7\}$,	$p = \{0, 1, 2\}$,	$q = \{1, -2, 0\}$,	$r = \{-1, 2, 4\}$.
1.2. $x = \{6, 12, -1\}$,	$p = \{1, 3, 0\}$,	$q = \{3, -1, 2\}$,	$r = \{0, -1, 2\}$.
1.3. $x = \{1, -4, 4\}$,	$p = \{2, 1, -1\}$,	$q = \{3, 1, -1\}$,	$r = \{1, -1, 1\}$.
1.4. $x = \{-9, 5, 5\}$,	$p = \{4, 1, 1\}$,	$q = \{-3, 0, 2\}$,	$r = \{-1, 2, 1\}$.
1.5. $x = \{-5, -5, 5\}$,	$p = \{-2, 0, 1\}$,	$q = \{3, 2, 0\}$,	$r = \{0, 4, 1\}$.
1.6. $x = \{13, 2, 7\}$,	$p = \{5, 1, 0\}$,	$q = \{1, -1, 2\}$,	$r = \{1, 0, -1\}$.
1.7. $x = \{-19, -1, 7\}$,	$p = \{0, 1, 1\}$,	$q = \{1, 0, 1\}$,	$r = \{3, 1, 0\}$.
1.8. $x = \{3, -3, 4\}$,	$p = \{1, 0, 2\}$,	$q = \{1, -1, 0\}$,	$r = \{2, -1, -4\}$.
1.9. $x = \{3, 3, -1\}$,	$p = \{3, 1, 0\}$,	$q = \{0, -2, 1\}$,	$r = \{-1, 0, 2\}$.
1.10. $x = \{-1, 7, -4\}$,	$p = \{-1, 2, 1\}$,	$q = \{3, 2, -1\}$,	$r = \{1, 1, -1\}$.
1.11. $x = \{6, 5, -14\}$,	$p = \{1, 1, 4\}$,	$q = \{3, -1, 1\}$,	$r = \{2, 1, -1\}$.
1.12. $x = \{6, -1, 7\}$,	$p = \{1, -2, 0\}$,	$q = \{-3, 2, 0\}$,	$r = \{1, 0, 4\}$.
1.13. $x = \{5, 15, 0\}$,	$p = \{1, 0, 5\}$,	$q = \{3, 0, 2\}$,	$r = \{0, -1, 1\}$.
1.14. $x = \{2, -1, 11\}$,	$p = \{1, 1, 0\}$,	$q = \{1, 2, -1\}$,	$r = \{1, 0, 3\}$.
1.15. $x = \{11, 5, -3\}$,	$p = \{1, 0, 2\}$,	$q = \{1, 1, 0\}$,	$r = \{2, 5, -3\}$.
1.16. $x = \{8, 0, 5\}$,	$p = \{2, 0, 1\}$,	$q = \{-1, 0, 1\}$,	$r = \{4, 1, 2\}$.
1.17. $x = \{3, 1, 8\}$,	$p = \{0, 1, 3\}$,	$q = \{0, 1, -2\}$,	$r = \{2, 0, -1\}$.
1.18. $x = \{8, 1, 12\}$,	$p = \{1, 2, -1\}$,	$q = \{-1, 3, 2\}$,	$r = \{-1, 1, 1\}$.
1.19. $x = \{-9, -8, -3\}$,	$p = \{1, 4, 1\}$,	$q = \{-1, 1, 3\}$,	$r = \{1, -1, 2\}$.
1.20. $x = \{-5, 9, -13\}$,	$p = \{0, 1, -2\}$,	$q = \{0, -3, 2\}$,	$r = \{4, 1, 0\}$.
1.21. $x = \{-15, 5, 6\}$,	$p = \{0, 5, 1\}$,	$q = \{2, 0, 3\}$,	$r = \{-1, 1, 0\}$.
1.22. $x = \{8, 9, 4\}$,	$p = \{1, 0, 1\}$,	$q = \{-1, 2, 1\}$,	$r = \{1, 3, 0\}$.
1.23. $x = \{23, -14, -30\}$,	$p = \{2, 1, 0\}$,	$q = \{0, 1, 1\}$,	$r = \{-3, 2, 5\}$.
1.24. $x = \{3, 1, 3\}$,	$p = \{2, 1, 0\}$,	$q = \{-2, 0, 1\}$,	$r = \{4, 2, 1\}$.
1.25. $x = \{-1, 7, 0\}$,	$p = \{0, 3, 1\}$,	$q = \{2, -1, 3\}$,	$r = \{2, -1, 0\}$.
1.26. $x = \{11, -1, 4\}$,	$p = \{1, -1, 2\}$,	$q = \{1, 3, -1\}$,	$r = \{-1, 1, 1\}$.
1.27. $x = \{-13, 2, 18\}$,	$p = \{1, 1, 4\}$,	$q = \{2, 0, -3\}$,	$r = \{1, 2, -1\}$.
1.28. $x = \{0, -8, 9\}$,	$p = \{0, -2, 1\}$,	$q = \{0, 3, 2\}$,	$r = \{4, 0, 1\}$.
1.29. $x = \{8, -7, -13\}$,	$p = \{0, 1, 5\}$,	$q = \{2, -1, 1\}$,	$r = \{-1, 0, 1\}$.
1.30. $x = \{2, 7, 5\}$,	$p = \{1, 0, 1\}$,	$q = \{1, 0, 1\}$,	$r = \{0, 3, 1\}$.

Задача №2. Коллинеарны ли векторы c_1 и c_2 , построенные по векторам a и b ?

2.1. $a = \{1, -2, 3\}$,	$b = \{3, 0, -1\}$,	$c_1 = 2a + 4b, c_2 = 3b - a$.
2.2. $a = \{1, 0, 1\}$,	$b = \{-2, 3, 5\}$,	$c_1 = a + 2b, c_2 = 3a - b$.
2.3. $a = \{-2, 4, 1\}$,	$b = \{1, -2, 7\}$,	$c_1 = 5a + 3b, c_2 = 2a - b$.
2.4. $a = \{1, 2, -3\}$,	$b = \{2, -1, -1\}$,	$c_1 = 4a + 3b, c_2 = 8a - b$.
2.5. $a = \{3, 5, 4\}$,	$b = \{5, 9, 7\}$,	$c_1 = -2a + b, c_2 = 3a - 2b$.
2.6. $a = \{1, 4, -2\}$,	$b = \{1, 1, -1\}$,	$c_1 = a + b, c_2 = 4a + 2b$.
2.7. $a = \{1, -2, 5\}$,	$b = \{3, -1, 0\}$,	$c_1 = 4a - 2b, c_2 = b - 2a$.
2.8. $a = \{3, 4, -1\}$,	$b = \{2, -1, 1\}$,	$c_1 = 6a - 3b, c_2 = b - 2a$.
2.9. $a = \{-2, -3, -2\}$,	$b = \{3, -2, 6\}$,	$c_1 = 3a + 9b, c_2 = -a - 3b$.

2.10. $a = \{-1, 4, 2\}$,	$b = \{1, 0, 5\}$,	$c_1 = 2a - b$, $c_2 = 3b - 6a$.
2.11. $a = \{5, 0, -1\}$,	$b = \{7, 2, 3\}$,	$c_1 = 2a - b$, $c_2 = 3b - 6a$.
2.12. $a = \{0, 3, -2\}$,	$b = \{1, -2, 1\}$,	$c_1 = 5a - 2b$, $c_2 = 3a + 5b$.
2.13. $a = \{-2, 7, -1\}$,	$b = \{-3, 5, 2\}$,	$c_1 = 2a + 3b$, $c_2 = 3a + 2b$.
2.14. $a = \{3, 7, 0\}$,	$b = \{1, -3, 4\}$,	$c_1 = 4a - 2b$, $c_2 = b - 2a$.
2.15. $a = \{-1, 2, -1\}$,	$b = \{2, -7, 1\}$,	$c_1 = 6a - 2b$, $c_2 = b - 3a$.
2.16. $a = \{7, 9, -2\}$,	$b = \{5, 4, 3\}$,	$c_1 = 4a - b$, $c_2 = 4b - a$.
2.17. $a = \{5, 0, -2\}$,	$b = \{6, 4, 3\}$,	$c_1 = 5a - 3b$, $c_2 = 6b - 10a$.
2.18. $a = \{8, 3, -1\}$,	$b = \{4, 1, 3\}$,	$c_1 = 2a - b$, $c_2 = 2b - 4a$.
2.19. $a = \{3, -1, 6\}$,	$b = \{5, 7, 10\}$,	$c_1 = 4a - 2b$, $c_2 = b - 2a$.
2.20. $a = \{1, -2, 4\}$,	$b = \{7, 3, 5\}$,	$c_1 = 6a - 3b$, $c_2 = b - 2a$.
2.21. $a = \{3, 7, 0\}$,	$b = \{1, -3, 4\}$,	$c_1 = 3a + 2b$, $c_2 = 5a - 7b$.
2.22. $a = \{2, -1, 4\}$,	$b = \{5, 0, -3\}$,	$c_1 = 2a - 3b$, $c_2 = 3a - 2b$.
2.23. $a = \{5, -1, -2\}$,	$b = \{2, -1, 0\}$,	$c_1 = 3a - 2b$, $c_2 = 4b - 6a$.
2.24. $a = \{-9, 5, 3\}$,	$b = \{-3, 1, 7\}$,	$c_1 = 2a - b$, $c_2 = 3a + 5b$.
2.25. $a = \{4, 2, 9\}$,	$b = \{-1, 3, 8\}$,	$c_1 = 4b - 3a$, $c_2 = 4a - 3b$.
2.26. $a = \{2, -1, 6\}$,	$b = \{0, -1, 3\}$,	$c_1 = 5a - 2b$, $c_2 = 2a - 5b$.
2.27. $a = \{5, 0, 8\}$,	$b = \{7, 1, -2\}$,	$c_1 = 3a - 4b$, $c_2 = 12b - 9a$.
2.28. $a = \{-1, 3, 4\}$,	$b = \{3, -7, -6\}$,	$c_1 = 6a - 2b$, $c_2 = b - 3a$.
2.29. $a = \{4, 2, -7\}$,	$b = \{6, 0, 7\}$,	$c_1 = a - 3b$, $c_2 = 6b - 2a$.
2.30. $a = \{2, 0, -5\}$,	$b = \{4, 6, -1\}$,	$c_1 = 2a - 5b$, $c_2 = 5a - 2b$.

Задача №3. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

3.1. $A(1, -2, 3)$,	$B(0, -1, 2)$,	$C(3, -4, 5)$.
3.2. $A(0, -3, 6)$,	$B(-12, -3, -3)$,	$C(-9, -3, -6)$.
3.3. $A(3, 3, -1)$,	$B(5, 5, -2)$,	$C(4, 1, 1)$.
3.4. $A(-1, 2, -3)$,	$B(3, 4, -6)$,	$C(1, 1, -1)$.
3.5. $A(-4, -2, 0)$,	$B(-1, -2, 4)$,	$C(3, -2, 1)$.
3.6. $A(5, 3, -1)$,	$B(5, 2, 0)$,	$C(6, 4, -1)$.
3.7. $A(-3, -7, -5)$,	$B(0, -1, -2)$,	$C(2, 3, 0)$.
3.8. $A(2, -4, 6)$,	$B(0, -2, 4)$,	$C(6, -8, 10)$.
3.9. $A(0, 1, -2)$,	$B(3, 1, 2)$,	$C(4, 1, 1)$.
3.10. $A(3, 3, -1)$,	$B(1, 5, -2)$,	$C(4, 1, 1)$.
3.11. $A(2, 1, -1)$,	$B(6, -1, -4)$,	$C(4, 2, 1)$.
3.12. $A(-1, -2, 1)$,	$B(-4, -2, 5)$,	$C(-8, -2, 2)$.
3.13. $A(6, 2, -3)$,	$B(6, 3, -2)$,	$C(7, 3, -3)$.
3.14. $A(0, 0, 4)$,	$B(-3, -6, 1)$,	$C(-5, -10, -1)$.
3.15. $A(2, -8, -1)$,	$B(4, -6, 0)$,	$C(-2, -5, -1)$.
3.16. $A(3, -6, 9)$,	$B(0, -3, 6)$,	$C(9, -12, 15)$.
3.17. $A(0, 2, -4)$,	$B(8, 2, 2)$,	$C(6, 2, 4)$.
3.18. $A(3, 3, -1)$,	$B(5, 1, -2)$,	$C(4, 1, 1)$.
3.19. $A(-4, 3, 0)$,	$B(0, 1, 3)$,	$C(-2, 4, -2)$.
3.20. $A(1, -1, 0)$,	$B(-2, -1, 4)$,	$C(8, -1, -1)$.
3.21. $A(7, 0, 2)$,	$B(7, 1, 3)$,	$C(8, -1, 2)$.
3.22. $A(2, 3, 2)$,	$B(-1, -3, -1)$,	$C(-3, -7, -3)$.

3.23. $A(2,2,7),$	$B(0,0,6),$	$C(-2,5,7).$
3.24. $A(-1,2,-3),$	$B(0,1,-2),$	$C(-3,4,-5).$
3.25. $A(0,3,-6),$	$B(9,3,6),$	$C(12,3,3).$
3.26. $A(3,3,-1),$	$B(5,1,-2),$	$C(4,1,-3).$
3.27. $A(-2,1,1),$	$B(2,3,-2),$	$C(0,0,3).$
3.28. $A(1,4,-1),$	$B(-2,4,-5),$	$C(8,4,0).$
3.29. $A(0,1,0),$	$B(0,2,1),$	$C(1,2,0).$
3.30. $A(-4,0,4),$	$B(-1,6,7),$	$C(1,10,9).$

Задача №4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b .

4.1. $a=p+2q, b=3p-q, |p|=1, |q|=2, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/6$

4.2. $a=3p+q, b=p-2q, |p|=4, |q|=1, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/4$

4.3. $a=p-3q, b=p+2q, |p|=1/5, |q|=1, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/2$

4.4. $a=3p-2q, b=p+5q, |p|=4, |q|=1/2, (\hat{p} \hat{q}) = 5\pi/6$

4.5. $a=p-2q, b=2p+q, |p|=2, |q|=3, (\hat{p} \hat{q}) = 3\pi/4.$

4.6. $a=p+3q, b=p-2q, |p|=2, |q|=3, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/3.$

4.7. $a=2p-q, b=p+3q, |p|=3, |q|=3, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/2.$

4.8. $a=4p+q, b=p-q, |p|=7, |q|=2, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/4.$

4.9. $a=p-4q, b=3p+q, |p|=1, |q|=2, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/6.$

4.10. $a=p+4q, b=2p-q, |p|=7, |q|=2, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/3.$

4.11. $a=3p+2q, b=p-q, |p|=10, |q|=1, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/2.$

4.12. $a=4p-q, b=p+2q, |p|=5, |q|=4, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/4.$

4.13. $a=2p+3q, b=p-2q, |p|=6, |q|=7, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/3.$

4.14. $a=3p-q, b=p+2q, |p|=3, |q|=4, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/3.$

4.15. $a=2p+3q, b=p-2q, |p|=2, |q|=3, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/4.$

4.16. $a=2p-3q, b=3p+q, |p|=4, |q|=1, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/6.$

4.17. $a=5p+q, b=p-3q, |p|=1, |q|=2, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/3.$

4.18. $a=7p-2q, b=p+3q, |p|=1/2, |q|=2, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/2.$

4.19. $a=6p-q, b=p+q, |p|=3, |q|=4, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/4.$

4.20. $a=10p+q, b=3p-2q, |p|=4, |q|=1, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/6.$

4.21. $a=6p-q, b=p+2q, |p|=8, |q|=1/2, (\hat{p} \hat{q}) = \pi/3.$

- 4.22. $a = 3p + 4q, b = p - q, |p| = 2,5, |q| = 2, (p \wedge q) = \pi/2$.
- 4.23. $a = p + q, b = p - 3q, |p| = 3, |q| = 1, (p \wedge q) = 3\pi/4$.
- 4.24. $a = p + 3q, b = 3p - q, |p| = 3, |q| = 5, (p \wedge q) = 2\pi/3$.
- 4.25. $a = 3p + q, b = p - 3q, |p| = 7, |q| = 2, (p \wedge q) = \pi/4$.
- 4.26. $a = 5p - q, b = p + q, |p| = 5, |q| = 3, (p \wedge q) = 5\pi/6$.
- 4.27. $a = 3p - 4q, b = p + 3q, |p| = 2, |q| = 3, (p \wedge q) = \pi/4$.
- 4.28. $a = 6p - q, b = 5q + p, |p| = 1/2, |q| = 4, (p \wedge q) = 5\pi/6$.
- 4.29. $a = 2p + 3q, b = p - 2q, |p| = 2, |q| = 1, (p \wedge q) = \pi/3$.
- 4.30. $a = 2p - 3q, b = 5p + q, |p| = 2, |q| = 3, (p \wedge q) = \pi/2$.

Задача №5. Коллинеарны ли векторы a, b и c ?

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------|----------------------|
| 5.1. $a = \{2, 3, 1\},$ | $b = \{-1, 0, -1\},$ | $c = \{2, 2, 2\}.$ |
| 5.2. $a = \{3, 2, 1\},$ | $b = \{2, 3, 4\},$ | $c = \{3, 1, -1\}.$ |
| 5.3. $a = \{1, 5, 2\},$ | $b = \{-1, 1, -1\},$ | $c = \{1, 1, 1\}.$ |
| 5.4. $a = \{1, -1, -3\},$ | $b = \{3, 2, 1\},$ | $c = \{2, 3, 4\}.$ |
| 5.5. $a = \{3, 3, 1\},$ | $b = \{1, -2, 1\},$ | $c = \{1, 1, 1\}.$ |
| 5.6. $a = \{3, 1, -1\},$ | $b = \{-2, -1, 0\},$ | $c = \{5, 2, -1\}.$ |
| 5.7. $a = \{4, 3, 1\},$ | $b = \{1, -2, 1\},$ | $c = \{2, 2, 2\}.$ |
| 5.8. $a = \{4, 3, 1\},$ | $b = \{6, 7, 4\},$ | $c = \{2, 0, -1\}.$ |
| 5.9. $a = \{3, 2, 1\},$ | $b = \{1, -3, -7\},$ | $c = \{1, 2, 3\}.$ |
| 5.10. $a = \{3, 7, 2\},$ | $b = \{-2, 0, -1\},$ | $c = \{2, 2, 1\}.$ |
| 5.11. $a = \{1, -2, 6\},$ | $b = \{1, 0, 1\},$ | $c = \{2, -6, 17\}.$ |
| 5.12. $a = \{6, 3, 4\},$ | $b = \{-1, -2, -1\},$ | $c = \{2, 1, 2\}.$ |
| 5.13. $a = \{7, 3, 4\},$ | $b = \{-1, -2, -1\},$ | $c = \{4, 2, 4\}.$ |
| 5.14. $a = \{2, 3, 2\},$ | $b = \{4, 7, 5\},$ | $c = \{2, 0, -1\}.$ |
| 5.15. $a = \{5, 3, 4\},$ | $b = \{-1, 0, -1\},$ | $c = \{4, 2, 4\}.$ |
| 5.16. $a = \{3, 10, 5\},$ | $b = \{-2, -2, -3\},$ | $c = \{2, 4, 3\}.$ |
| 5.17. $a = \{-2, -4, -3\},$ | $b = \{4, -3, 1\},$ | $c = \{6, 7, 4\}.$ |
| 5.18. $a = \{3, 1, -1\},$ | $b = \{1, 0, -1\},$ | $c = \{8, 3, -2\}.$ |
| 5.19. $a = \{4, 2, 2\},$ | $b = \{-3, -3, -3\},$ | $c = \{2, 1, 2\}.$ |
| 5.20. $a = \{4, 1, 2\},$ | $b = \{9, 2, 5\},$ | $c = \{1, 1, -1\}.$ |
| 5.21. $a = \{5, 3, 4\},$ | $b = \{4, 3, 3\},$ | $c = \{9, 5, 8\}.$ |
| 5.22. $a = \{3, 4, 2\},$ | $b = \{1, 1, 0\},$ | $c = \{8, 11, 6\}.$ |
| 5.23. $a = \{4, -1, -6\},$ | $b = \{1, -3, -7\},$ | $c = \{2, -1, -4\}.$ |
| 5.24. $a = \{3, 1, 0\},$ | $b = \{-5, -4, -5\},$ | $c = \{4, 2, 4\}.$ |
| 5.25. $a = \{3, 0, 3\},$ | $b = \{8, 1, 6\},$ | $c = \{1, 1, -1\}.$ |
| 5.26. $a = \{1, -1, 4\},$ | $b = \{1, 0, 3\},$ | $c = \{1, -3, 8\}.$ |
| 5.27. $a = \{6, 3, 4\},$ | $b = \{-1, -2, -1\},$ | $c = \{2, 1, 2\}.$ |
| 5.28. $a = \{4, 1, 1\},$ | $b = \{-9, -4, -9\},$ | $c = \{6, 2, 6\}.$ |

- 5.29. $a=\{-3,3,3\}$, $b=\{-4,7,6\}$, $c=\{3,0,-1\}$.
 5.30. $a=\{-7,10,-5\}$, $b=\{0,-2,-1\}$, $c=\{-2,4,-1\}$.

Задача №6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$.

- 6.1. $A_1(1,3,6), A_2(2,2,1), A_3(-1,0,1), A_4(-4,6,-3)$.
 6.2. $A_1(-4,2,6), A_2(2,-3,0), A_3(-10,5,8), A_4(-5,2,-4)$.
 6.3. $A_1(7,2,4), A_2(7,-1,-2), A_3(3,3,1), A_4(-4,2,1)$.
 6.4. $A_1(2,1,4), A_2(-1,5,-2), A_3(-7,-3,2), A_4(-6,-3,6)$.
 6.5. $A_1(-1,-5,2), A_2(-6,0,-3), A_3(3,6,-3), A_4(-10,6,7)$.
 6.6. $A_1(0,-1,-1), A_2(-2,3,5), A_3(1,-5,-9), A_4(-1,-6,3)$.
 6.7. $A_1(5,2,0), A_2(2,5,0), A_3(1,2,4), A_4(-1,1,1)$.
 6.8. $A_1(2,-1,-2), A_2(1,2,1), A_3(5,0,-6), A_4(-10,9,-7)$.
 6.9. $A_1(-2,0,-4), A_2(-1,7,3), A_3(4,-8,-4), A_4(1,-4,6)$.
 6.10. $A_1(14,4,5), A_2(-5,-3,2), A_3(-2,-6,-3), A_4(-2,2,-1)$.
 6.11. $A_1(1,2,0), A_2(3,0,-3), A_3(5,2,6), A_4(8,4,-9)$.
 6.12. $A_1(2,-1,2), A_2(1,2,-1), A_3(3,2,1), A_4(-4,2,5)$.
 6.13. $A_1(1,1,2), A_2(-1,1,3), A_3(2,-2,4), A_4(-1,0,-2)$.
 6.14. $A_1(2,3,1), A_2(4,1,-2), A_3(6,3,7), A_4(7,5,-3)$.
 6.15. $A_1(1,1,-1), A_2(2,3,1), A_3(3,2,1), A_4(5,9,-8)$.
 6.16. $A_1(1,5,-7), A_2(-3,6,3), A_3(-2,7,3), A_4(-4,8,-12)$.
 6.17. $A_1(-3,4,-7), A_2(1,5,-4), A_3(-5,-2,0), A_4(2,5,4)$.
 6.18. $A_1(-1,2,-3), A_2(4,-1,0), A_3(2,1,-2), A_4(3,4,5)$.
 6.19. $A_1(4,-1,3), A_2(-2,1,0), A_3(0,-5,1), A_4(3,2,-6)$.
 6.20. $A_1(1,-1,1), A_2(-2,0,3), A_3(2,1,-1), A_4(2,-2,-4)$.
 6.21. $A_1(1,2,0), A_2(1,-1,2), A_3(0,1,-1), A_4(-3,0,1)$.
 6.22. $A_1(1,0,2), A_2(1,2,-1), A_3(2,-2,1), A_4(2,1,0)$.
 6.23. $A_1(1,2,-3), A_2(1,0,1), A_3(-2,-1,6), A_4(0,-5,-4)$.
 6.24. $A_1(3,10,-1), A_2(-2,3,-5), A_3(-6,0,-3), A_4(1,-1,2)$.
 6.25. $A_1(-1,2,4), A_2(-1,-2,-4), A_3(3,0,-1), A_4(7,-3,1)$.
 6.26. $A_1(0,-3,1), A_2(-4,1,2), A_3(2,-1,5), A_4(3,1,-4)$.
 6.27. $A_1(1,3,0), A_2(4,-1,2), A_3(3,0,1), A_4(-4,3,5)$.
 6.28. $A_1(-2,-1,-1), A_2(0,3,2), A_3(3,1,-4), A_4(-4,7,3)$.
 6.29. $A_1(-3,-5,6), A_2(2,1,-4), A_3(0,-3,-1), A_4(-5,2,-8)$.
 6.30. $A_1(2,-4,-3), A_2(5,-6,0), A_3(-1,3,-3), A_4(-10,-8,7)$.

Задача №7. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящий через три точки M_1, M_2, M_3

- 7.1. $M_1(-3,4,-7), M_2(1,5,-4), M_3(-5,-2,0), M_0(-12,7,-1)$
 7.2. $M_1(-1,2,-3), M_2(4,-1,0), M_3(2,1,-2), M_0(1,-6,-5)$
 7.3. $M_1(-3,-1,1), M_2(-9,1,-2), M_3(3,-5,4), M_0(-7,0,-1)$
 7.4. $M_1(1,-1,1), M_2(-2,0,3), M_3(2,1,-1), M_0(-2,4,2)$
 7.5. $M_1(1,2,0), M_2(1,-1,2), M_3(0,1,-1), M_0(2,-1,4)$
 7.6. $M_1(1,0,2), M_2(1,2,-1), M_3(2,-2,1), M_0(-5,-9,1)$

- 7.7. $M_1(1,2,-3)$, $M_2(1,0,1)$, $M_3(-2,-1,6)$, $M_0(3,-2,-9)$
 7.8. $M_1(3,10,-1)$, $M_2(-2,3,-5)$, $M_3(-6,0,-3)$, $M_0(-6,7,-10)$
 7.9. $M_1(-1,2,4)$, $M_2(-1,-2,-4)$, $M_3(3,0,-1)$, $M_0(-2,3,5)$
 7.10. $M_1(0,-3,1)$, $M_2(-4,1,2)$, $M_3(2,-1,5)$, $M_0(-3,4,-5)$
 7.11. $M_1(1,3,0)$, $M_2(4,-1,2)$, $M_3(3,0,1)$, $M_0(4,3,0)$
 7.12. $M_1(-2,-1,-1)$, $M_2(0,3,2)$, $M_3(3,1,-4)$, $M_0(-21,20,-16)$
 7.13. $M_1(-3,-5,6)$, $M_2(2,1,-4)$, $M_3(0,-3,-1)$, $M_0(3,6,68)$
 7.14. $M_1(2,-4,-3)$, $M_2(5,-6,0)$, $M_3(-1,3,-3)$, $M_0(2,-10,8)$
 7.15. $M_1(1,-1,2)$, $M_2(2,1,2)$, $M_3(1,1,4)$, $M_0(-3,2,7)$
 7.16. $M_1(1,3,6)$, $M_2(2,2,1)$, $M_3(-1,0,1)$, $M_0(5,-4,5)$
 7.17. $M_1(-4,2,6)$, $M_2(2,-3,0)$, $M_3(-10,5,8)$, $M_0(-12,1,8)$
 7.18. $M_1(7,2,4)$, $M_2(7,-1,-2)$, $M_3(-5,-2,-1)$, $M_0(10,1,8)$
 7.19. $M_1(2,1,4)$, $M_2(3,5,-2)$, $M_3(-7,-3,2)$, $M_0(-3,1,8)$
 7.20. $M_1(-1,-5,2)$, $M_2(-6,0,-3)$, $M_3(3,6,-3)$, $M_0(10,-8,-7)$
 7.21. $M_1(0,-1,-1)$, $M_2(-2,3,5)$, $M_3(1,-5,-9)$, $M_0(-4,-13,6)$
 7.22. $M_1(5,2,0)$, $M_2(2,5,0)$, $M_3(1,2,4)$, $M_0(-3,-6,-8)$
 7.23. $M_1(2,-1,-2)$, $M_2(1,2,1)$, $M_3(5,0,-6)$, $M_0(14,-3,7)$
 7.24. $M_1(-2,0,-4)$, $M_2(-1,7,1)$, $M_3(4,-8,-4)$, $M_0(-6,5,5)$
 7.25. $M_1(14,4,5)$, $M_2(-5,-3,2)$, $M_3(-2,-6,-3)$, $M_0(-1,-8,7)$
 7.26. $M_1(1,2,0)$, $M_2(3,0,-3)$, $M_3(5,2,6)$, $M_0(-13,-8,16)$
 7.27. $M_1(2,-1,2)$, $M_2(1,2,-1)$, $M_3(3,2,1)$, $M_0(-5,3,7)$
 7.28. $M_1(1,1,2)$, $M_2(-1,1,3)$, $M_3(2,-2,4)$, $M_0(2,3,8)$
 7.29. $M_1(2,3,1)$, $M_2(4,1,-2)$, $M_3(6,3,7)$, $M_0(-5,-4,8)$
 7.30. $M_1(1,1,-1)$, $M_2(2,3,1)$, $M_3(3,2,1)$, $M_0(-3,-7,6)$

Задача №8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$.

- | | |
|---|--|
| 8.1. $A(1,0,-2)$, $B(2,-1,3)$, $C(0,-3,2)$. | 8.2. $A(-1,3,4)$, $B(-1,5,0)$, $C(2,6,1)$. |
| 8.3. $A(4,-2,0)$, $B(1,-1,-5)$, $C(-2,1,-3)$. | 8.4. $A(-8,0,7)$, $B(-3,2,4)$, $C(-1,4,5)$. |
| 8.5. $A(7,-5,1)$, $B(5,-1,-3)$, $C(3,0,-4)$. | 8.6. $A(-3,5,-2)$, $B(-4,0,3)$, $C(-3,2,5)$. |
| 8.7. $A(1,-1,8)$, $B(-4,-3,10)$, $C(-1,-1,7)$. | 8.8. $A(-2,0,-5)$, $B(2,7,-3)$, $C(1,10,-1)$. |
| 8.9. $A(1,9,-4)$, $B(5,7,1)$, $C(3,5,0)$. | 8.10. $A(-7,0,3)$, $B(1,-5,-4)$, $C(2,-3,0)$. |
| 8.11. $A(0,-3,5)$, $B(-7,2,6)$, $C(-3,2,4)$. | 8.12. $A(5,-1,2)$, $B(2,-4,3)$, $C(4,-1,3)$. |
| 8.13. $A(-3,7,2)$, $B(3,5,1)$, $C(4,5,3)$. | 8.14. $A(0,-2,8)$, $B(4,3,2)$, $C(1,4,3)$. |
| 8.15. $A(1,-1,5)$, $B(0,7,8)$, $C(-1,3,8)$. | 8.16. $A(-10,0,9)$, $B(12,4,11)$, $C(8,5,15)$. |
| 8.17. $A(3,-3,-6)$, $B(1,9,-5)$, $C(6,6,-4)$. | 8.18. $A(2,1,7)$, $B(9,0,2)$, $C(9,2,3)$. |
| 8.19. $A(-7,1,-4)$, $B(8,11,-3)$, $C(9,9,-1)$. | 8.20. $A(1,0,-6)$, $B(-7,2,1)$, $C(-9,6,1)$. |
| 8.21. $A(-3,1,0)$, $B(6,3,3)$, $C(9,4,-2)$. | 8.22. $A(-4,-2,5)$, $B(3,-3,-7)$, $C(9,3,-7)$. |
| 8.23. $A(0,-8,10)$, $B(-5,5,7)$, $C(-8,0,4)$. | 8.24. $A(1,-5,-2)$, $B(6,-2,1)$, $C(2,-2,-2)$. |
| 8.25. $A(0,7,-9)$, $B(-1,8,-11)$, $C(-4,3,-12)$. | 8.26. $A(-3,-1,7)$, $B(0,2,-6)$, $C(2,3,-5)$. |
| 8.27. $A(5,3,-1)$, $B(0,0,-3)$, $C(5,-1,0)$. | 8.28. $A(-1,2,-2)$, $B(13,14,1)$, $C(14,15,2)$. |
| 8.29. $A(7,-5,0)$, $B(8,3,-1)$, $C(8,5,1)$. | 8.30. $A(-3,6,4)$, $B(8,-3,5)$, $C(10,-3,7)$. |

Задача №9. Найти угол между плоскостями.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 9.1. $x-3y+5z=0$, $2x-y+5z-16=0$. | 9.2. $x-3y+z-1=0$, $x+z-1=0$. |
| 9.3. $4x-5y+3z-1=0$, $x-4y-z+9=0$. | 9.4. $3x-y+2z+15=0$, $5x+9y-3z-1=0$. |

$$\begin{aligned}
9.5. & 6x+2y-4z+17=0, 9x+3y-6z-4=0. \\
9.7. & 3y-z=0, 2y+z=0. \\
9.9. & x+2y+2z-3=0, 16x+12y-15z-1=0. \\
9.11. & 2x+2y+z-1=0, x+z-1=0. \\
9.13. & 3x-2y-2z-16=0, x+y-3z-7=0. \\
9.15. & x+2y+2z-3=0, 2x-y+2z+5=0. \\
9.17. & x-3y-2z-8=0, x+y-z+3=0. \\
9.19. & x+y+3z-7=0, y+z-1=0. \\
9.21. & x+2y-1=0, x+y+6=0. \\
9.23. & 5x+3y+z-18=0, 2y+z-9=0. \\
9.25. & x+4y-z+1=0, 2x+y+4z-3=0. \\
9.27. & 2x-6y+14z-1=0, 5x-15y+35z-3=0. \\
9.29. & 3x-y-5=0, 2x+y-3=0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9.6. & x-y\sqrt{2}+z-1=0, x+y\sqrt{2}-z+3=0. \\
9.8. & 6x+3y-2z=0, x+2y+6z-12=0. \\
9.10. & 2x-y+5z+16=0, x+2y+3z+8=0. \\
9.12. & 3x+y+z-4=0, y+z+5=0. \\
9.14. & 2x+2y+z+9=0, x-y+3z-1=0. \\
9.16. & 3x+2y-3z-1=0, x+y+z-7=0. \\
9.18. & 3x-2y+3z+23=0, y+z+5=0. \\
9.20. & x-2y+2z+17=0, x-2y-1=0. \\
9.22. & 2x-z+5=0, 2x+3y-7=0. \\
9.24. & 4x+3z-2=0, x+2y+2z+5=0. \\
9.26. & 2y+z-9=0, x-y+2z-1=0. \\
9.28. & x-y+7z-1=0, 2x-2y-5=0. \\
9.30. & x+y+z\sqrt{2}-3=0, x-y+z\sqrt{2}-1=0.
\end{aligned}$$

Задача 10. Написать канонические уравнения прямой.

$$\begin{aligned}
10.1. & 2x+y+z-2=0, 2x-y-3z+6=0 \\
10.3. & x-2y+z-4=0, 2x+2y-z-8=0 \\
10.5. & 2x+3y+z+6=0, x-3y-2z+3=0 \\
10.7. & x+5y+2z+11=0, x-y-z-1=0 \\
10.9. & 5x+y-3z+4=0, x-y+2z+2=0 \\
10.11. & 4x+y-3z+2=0, 2x-y+z-8=0 \\
10.13. & 6x-7y-4z-2=0, x+7y-z-5=0 \\
10.15. & 6x-5y-4z+8=0, 6x+5y+3z+4=0 \\
10.17. & 2x-3y+z+6=0, x-3y-2z+3=0 \\
10.19. & 4x+y+z+2=0, 2x-y-3z-8=0 \\
10.21. & x+y-2z-2=0, x-y+z+2=0 \\
10.23. & x-y+z-2=0, x-2y-z+4=0 \\
10.25. & x+5y+2z-5=0, 2x-5y-z+5=0 \\
10.27. & 2x+3y-2z+6=0, x-3y+z+3=0 \\
10.29. & 3x+3y+z-1=0, 2x-3y-2z+6=0 \\
10.2. & x-3y+2z+2=0, x+3y+z+14=0 \\
10.4. & x+y+z-2=0, x-y-2z+2=0 \\
10.6. & 3x+y-z-6=0, 3x-y+2z=0 \\
10.8. & 3x+4y-2z+1=0, 2x-4y+3z+4=0 \\
10.10. & x-y-z-2=0, x-2y+z+4=0 \\
10.12. & 3x+3y-2z-1=0, 2x-3y+z+6=0 \\
10.14. & 8x-y-3z-1=0, x+y+z+10=0 \\
10.16. & x+5y-z-5=0, 2x-5y+2z+5=0 \\
10.18. & 5x+y+z+4=0, x-y-3z+2=0 \\
10.20. & 2x+y-3z-2=0, 2x-y+z+6=0 \\
10.22. & x+5y-z+11=0, x-y+2z-1=0 \\
10.24. & 6x-7y-z-2=0, x+7y-4z-5=0 \\
10.26. & x-3y+z+2=0, x+3y+2z+14=0 \\
10.28. & 3x+4y+3z+1=0, 2x-4y-2z+4=0 \\
10.30. & 6x-5y+3z+8=0, 6x+5y-4z+4=0
\end{aligned}$$

Задача 11. Найти точку пересечения прямой и плоскости

$$\begin{aligned}
11.1. & \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}, x+2y+3z-14=0 \\
11.3. & \frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}, x-3y+7z-24=0 \\
11.5. & \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}, 3x+y-5z-12=0 \\
11.7. & \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}, x-2y+5z+17=0 \\
11.9. & \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}, 2x-y+3z+23=0 \\
11.11. & \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}, 4x+2y-z-11=0 \\
11.13. & \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}, x+2y-z-2=0 \\
11.2. & \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}, x+2y-5z+20=0 \\
11.4. & \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}, 2x-y+4z=0 \\
11.6. & \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}, x+3y-5z+9=0 \\
11.8. & \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}, x-2y+4z-19=0 \\
11.10. & \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}, 2x-3y-5z-7=0 \\
11.12. & \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}, 3x-2y-4z-8=0 \\
11.14. & \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}, 5x-y+4z+3=0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
11.15. \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}, & x+3y+5z-42=0 \\
11.17. \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}, & 2x+3y+7z-52=0 \\
11.19. \frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}, & 2x-5y+4z+24=0 \\
11.21. \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}, & x+7y+3z+11=0 \\
11.23. \frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}, & 4x+y-6z-5=0 \\
11.25. \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}, & x+4y+13z-23=0 \\
11.27. \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}, & 3x-y+4z=0 \\
11.29. \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}, & x+2y-5z+16=0 \\
11.16. \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}, & 7x+y+4z-47=0 \\
11.18. \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}, & 3x+4y+7z-16=0 \\
11.20. \frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}, & x-2y-3z+18=0 \\
11.22. \frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}, & 3x+7y-5z-11=0 \\
11.24. \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}, & 5x+9y+4z-25=0 \\
11.26. \frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}, & 3x-2y+5z-3=0 \\
11.28. \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}, & 3x-7y-2z+7=0 \\
11.30. \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11}, & 5x+7y+9z-32=0
\end{array}$$

Задача 12. Найти точку M' , симметричную точке M относительно прямой (для вариантов 1-15) или плоскости (для вариантов 16-30).

$$\begin{array}{ll}
12.1. M(0,-3,-2), & \frac{x-1}{1} = \frac{y+1.5}{-1} = \frac{z}{1} \\
12.2. M(2,-1,1), & \frac{x-4.5}{1} = \frac{y+3}{-0.5} = \frac{z-2}{1} \\
12.3. M(1,1,1), & \frac{x-2}{1} = \frac{y+1.5}{-2} = \frac{z-1}{1} \\
12.4. M(1,2,3), & \frac{x-0.5}{0} = \frac{y+1.5}{-1} = \frac{z-1.5}{1} \\
12.5. M(1,0,-1), & \frac{x-3.5}{2} = \frac{y-1.5}{2} = \frac{z}{0} \\
12.6. M(2,1,0), & \frac{x-2}{0} = \frac{y+1.5}{-1} = \frac{z+0.5}{1} \\
12.7. M(-2,-3,0), & \frac{x+0.5}{1} = \frac{y+1.5}{0} = \frac{z-0.5}{1} \\
12.8. M(-1,0,-1), & \frac{x}{-1} = \frac{y-1.5}{0} = \frac{z-2}{1} \\
12.9. M(0,2,1), & \frac{x-1.5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1} \\
12.10. M(3,-3,-1), & \frac{x-6}{5} = \frac{y-3.5}{4} = \frac{z+0.5}{0} \\
12.11. M(3,3,3), & \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1.5}{0} = \frac{z-3}{1} \\
12.12. M(-1,2,0), & \frac{x+0.5}{1} = \frac{y+0.7}{-0.2} = \frac{z-2}{2} \\
12.13. M(2,-2,-3), & \frac{x-1}{-1} = \frac{y+0.5}{0} = \frac{z+1.5}{0} \\
12.14. M(-1,0,1), & \frac{x+0.5}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{2} \\
12.15. M(0,-3,-2), & \frac{x-0.5}{0} = \frac{y+1.5}{-1} = \frac{z-1.5}{1} \\
12.16. M(1,0,1), & 4x+6y+4z-25=0 \\
12.17. M(-1,0,-1), & 2x+6y-2z+11=0 \\
12.18. M(0,2,1), & 2x+4y-3=0 \\
12.19. M(2,1,0), & y+z+2=0 \\
12.20. M(-1,2,0), & 4x-5y-z-7=0 \\
12.21. M(2,-1,1), & x-y+2z-2=0 \\
12.22. M(1,1,1), & x+4y+3z+5=0 \\
12.23. M(1,2,3), & 2x+10y+10z-1=0 \\
12.24. M(0,-3,-2), & 2x+10y+10z-1=0 \\
12.25. M(1,0,-1), & 2y+4z-1=0 \\
12.26. M(3,-3,-1), & 2x-4y-4z-13=0 \\
12.27. M(-2,-3,0), & x+5y+4=0 \\
12.28. M(2,-2,-3), & y+z+2=0 \\
12.29. M(-1,0,1), & 2x+4y-3=0 \\
12.30. M(3,3,3), & 8x+6y+8z-25=0
\end{array}$$

Задача 13. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

$$13.1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$13.3. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$13.5. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$$

$$13.7. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$$

$$13.9. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$$

$$13.11. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

$$13.13. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$13.15. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$$

$$13.17. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

$$13.19. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$$

$$13.21. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases}$$

$$13.23. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

$$13.2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

$$13.4. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$$

$$13.6. \begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

$$13.8. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$$

$$13.10. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$$

$$13.12. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

$$13.14. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

$$13.16. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$13.18. \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$$

$$13.20. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$$

$$13.22. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$13.24. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$$

$$13.25. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

$$13.27. \begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$$

$$13.29. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_2 - 7x_3 = -6 \end{cases}$$

$$13.26. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

$$13.28. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 3x_3 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

$$13.30. \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$$

Задача №14. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

$$14.1. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.3. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.5. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.7. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.9. \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.11. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.13. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.15. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.2. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.4. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.6. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.8. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.10. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.12. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.14. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.16. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.18. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.19. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.21. \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.23. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.25. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.27. \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.29. \begin{cases} 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.20. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.22. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.24. \begin{cases} 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.26. \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.28. \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14.30. \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Задача №15. Найти собственные значения и собственные векторы оператора с матрицей.

$$15.1. \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$15.2. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$15.3. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$15.4. \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$15.5. \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$15.6. \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$15.7. \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$15.8. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$15.9. \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$15.10. \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$15.11. \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$15.12. \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$15.13. \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$15.14. \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$15.15. \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$15.16. \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$15.17. \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$15.18. \begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll}
15.19. \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 15.20. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} & 15.21. \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 13 & -4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 11 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\
15.22. \begin{pmatrix} 19/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 2/3 & -2/3 & 11/3 \end{pmatrix} & 15.23. \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} & 15.24. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
15.25. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} & 15.26. \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} & 15.27. \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \\
15.28. \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2/3 & 5/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -13/3 \end{pmatrix} & 15.29. \begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 7/3 \end{pmatrix} & 15.30. \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Задача №16*. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| 16.1. $-x^2-y^2+4xy+2x-4y+1=0$ | 16.2. $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0$ |
| 16.3. $4xy+4x-4y=0$ | 16.4. $-2x^2-2y^2+2xy-6x+6y+3=0$ |
| 16.5. $-3x^2-3y^2+4xy-6x+4y+2=0$ | 16.6. $-2xy-2x-2y+1=0$ |
| 16.7. $-x^2-y^2+4xy-4x-2y+2=0$ | 16.8. $-4x^2-4y^2+2xy+10x-10y+1=0$ |
| 16.9. $4xy+4x-4y-2=0$ | 16.10. $x^2+y^2+2xy-8x-8y+1=0$ |
| 16.11. $x^2+y^2+4xy-8x-4y+1=0$ | 16.12. $x^2+y^2-2xy-2x+2y-7=0$ |
| 16.13. $2xy+2x+2y-3=0$ | 16.14. $4x^2+4y^2+2xy+12x+12y+1=0$ |
| 16.15. $3x^2+3y^2+4xy+8x+12y+1=0$ | 16.16. $x^2+y^2-8xy-20x+20y+1=0$ |
| 16.17. $3x^2+3y^2-2xy-6x+2y+1=0$ | 16.18. $4xy+4x+4y+1=0$ |
| 16.19. $3x^2+3y^2-4xy+6x-4y-7=0$ | 16.20. $-4xy-4x+4y+6=0$ |
| 16.21. $5x^2+5y^2-2xy+10x-2y+1=0$ | 16.22. $2x^2+2y^2+4xy+8x+8y+1=0$ |
| 16.23. $-x^2-y^2+2xy+2x-2y+1=0$ | 16.24. $2x^2+2y^2-4xy-8x+8y+1=0$ |
| 16.25. $3x^2+3y^2+2xy-12x-4y+1=0$ | 16.26. $-4xy+8x+8y+1=0$ |
| 16.27. $2x^2+2y^2-2xy+6x-6y-6=0$ | 16.28. $x^2+y^2+4xy+4x+2y-5=0$ |
| 16.29. $4xy+4x-4y+4=0$ | 16.30. $3x^2+3y^2-4xy+4x+4y+1=0$ |

Решение типового варианта индивидуального задания №2.

Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

Задача №1. Написать разложение вектора x по векторам p и q , если $x=\{11,-6,5\}$, $p=\{3,-2,1\}$, $q=\{-1,1,-2\}$ и $r=\{2,1,-3\}$.

Решение. Напишем векторное уравнение разложения вектора x по векторам p, q и r $x = ap + bq + cr$, где a, b и c являются координатами вектора x в базисе векторов p, q и r . Тогда в координатной форме это векторное

уравнение будет иметь вид:
$$\begin{cases} 3a - b + 2c = 11 \\ -2a + b + c = -6 \\ a - 2b - 3c = 5 \end{cases}$$

Решим систему так: прибавим первое уравнение ко второму, получим $a+b=5$, далее сложим все три уравнения, будем иметь $2a-2b=10$ или $a-b=5$.

Тогда система примет вид:
$$\begin{cases} a+3c=5 \\ a-b=5 \\ -2a+b+c=-6 \end{cases}$$

Из новой системы вычтем из первого уравнения второе, получим $3c+b=0$ или $b=-3c$, из первого уравнения выразим a ; получим $a=5-3c$ и подставим результаты преобразования во второе уравнение системы:

$$\begin{cases} a=5-3c \\ b=-3c \\ -10+6c-3c+c=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5-3c \\ b=-3c \\ 4c=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=1 \end{cases}$$

Ответ: $x=2p-3q+r$

Задача №2. Коллинеарны ли векторы c_1 и c_2 , построенные по векторам a и b : $a = \{1, 2, 8\}$, $b = \{3, 7, -1\}$, $c_1 = 4a - 3b$, $c_2 = 9a - 12b$

Решение: Найдём последовательно вектора $4a - 3b$, c_1 , $9a$, $12b$, и c_2

$$4a = \{-4, 8, 32\}$$

$$3b = \{9, 21, -3\} \Rightarrow c_1 = 4a - 3b = \{-13, -13, 35\}$$

$$9a = \{-9, 18, 72\}$$

$$12b = \{36, 84, -12\} \Rightarrow c_2 = 9a - 12b = \{-45, -72, 84\}$$

Используя условие коллинеарности двух векторов, найдём отношения их соответствующих координат: $\frac{-13}{-45} \neq \frac{-13}{-72} \neq \frac{35}{84}$ отношения эти неравны между собой

Ответ: вектора c_1 и c_2 не коллинеарны.

Задача №3. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$A(-2, 4, -6), B(0, 2, -4), C(-6, 8, -10)$$

Решение: Найдём вектор $\overrightarrow{AB} = \{0 - (-2), 2 - 4, -4 - (-6)\} = \{2, -2, 2\}$. Найдём вектор $\overrightarrow{AC} = \{-6 - (-2), 8 - 4, -10 - (-6)\} = \{-4, 4, -4\}$.

Теперь найдём их длины: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{3}$

Найдём косинус угла между векторами по формуле $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\sqrt{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \sqrt{|\overrightarrow{AC}|}}$,

где $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ - скалярное произведение векторов, $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$ - модули векторов-множителей.

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 4 + 2 \cdot (-4)}{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot (-8)}{8 \cdot 3} = -1 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi = 180^\circ$$

Ответ: искомый угол равен 180° .

Задача №4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b $a = 3p + 2q$, $b = 2p - q$, $|p| = 4$, $|q| = 3$, $(p, q) = \frac{3\pi}{4}$

Решение: $S = |a||b|\sin(\angle a, b) = |a \times b|$
 $|a \times b| = |(3p + 2q) \times (2p - q)| = |3p \times 2p + 2q \times 2p - 3p \times q - 2q \times q| =$
 $= |4q \times p + 3q \times p| = 7|q \times p| = 7|q||p|\sin(\angle p, q) = 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 42\sqrt{2} \quad (\text{кв.ед})$

Ответ: площадь параллелограмма равна $42\sqrt{2}$ (кв.ед)

Задача №5. Компланарны ли векторы a, b и c ?
 $a = \{7, 4, 6\}$, $b = \{2, 1, 1\}$, $c = \{19, 11, 17\}$

Решение: Найдём смешанное произведение трёх векторов:

$$abc = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 19 & 11 & 17 \end{vmatrix} = 119 + 76 + 132 - 114 - 136 - 77 = 327 - 327 = 0$$

Ответ: векторы a, b и c компланарны.

Задача №6. Вычислить объём тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$.

$$A_1(1, -1, 2), A_2(2, 1, 2), A_3(1, 1, 4), A_4(6, -3, 8)$$

Решение: $V_{A_1 A_2 A_3 A_4} = \pm \frac{1}{6} (\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{A_1 A_3} \times \overrightarrow{A_1 A_4})$

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = \{2 - 1, 1 - (-1), 2 - 2\} = \{1, 2, 0\}$$

$$\overrightarrow{A_1 A_3} = \{1 - 1, 1 - (-1), 4 - 2\} = \{0, 2, 2\}$$

$$\overrightarrow{A_1 A_4} = \{6 - 1, -3 - (-1), 8 - 2\} = \{5, -2, 6\}$$

$$V_{A_1 A_2 A_3 A_4} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} |6 + 10 + 2| = \frac{1}{3} \cdot 18 = 6 \quad (\text{куб. ед})$$

С другой стороны, $V_{A_1 A_2 A_3 A_4} = \frac{1}{3} S_{A_1 A_2 A_3} \cdot h_{A_4}$

$$S_{A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1 A_2} \times \overrightarrow{A_1 A_3}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |4 - 2 \cdot 2| = \frac{1}{2} \cdot 2 |\{2, -1, 1\}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot h_{A_4} = 6 \Rightarrow h_{A_4} = \frac{18}{\sqrt{6}} = \frac{18\sqrt{6}}{6} = 3\sqrt{6} \quad (\text{лин.ед.})$$

Ответ: высота равна $3\sqrt{6}$ лин.ед.

Задача №7. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3 . $M_1(1, 5, -7)$, $M_2(-3, 6, 3)$, $M_3(-2, 7, 3)$ $M_0(1, -1, 2)$

Решение: Уравнение плоскости, проходящей через три точки будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z-(-7) \\ 3-1 & 6-5 & 3-(-7) \\ 2-1 & 7-5 & 3-(-7) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{или } 10(x-1) - 30(y-5) - 8(z+7) + 3(z+7) + 40(y-5) - 20(x-1) = 0$$

$$10(x-1) + 10(y-5) - 5(z+7) = 0 \Rightarrow 2(x-1) - 2(y-5) + (z+7) = 0$$

обобщательно $2x - 2y + z + 15 = 0$. Найдем расстояние d от точка M_0 до

$$\text{вычисленной плоскости: } d = \frac{|2 \cdot 1 - 2(-1) + 2 + 15|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}} = \frac{21}{3} = 7$$

Ответ: $d=7$

Задача №8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC}$. $A(2, 5, -3)$, $B(7, 8, -1)$, $C(9, 7, 4)$

Решение: Найдем вектор $\overline{BC} = \{9-7, 7-8, 4-(-1)\} = \{2, -1, 5\}$ и примем его за нормальный вектор плоскости. Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку A , перпендикулярно вектору $\overline{BC}$.

$$2(x-2) - (y-5) + 5(z-(-3)) = 0$$

$$2x - 4 - y + 5 + 5z + 15 = 0$$

$$2x - y + 5z + 16 = 0$$

Ответ: $2x - y + 5z + 16 = 0$

Задача №9. Найти угол между плоскостями

$$p_1: x + 2y - 2z = 0 \quad p_2: x + y - 3z = 0$$

Решение: Напишем нормальные вектора данных плоскостей:

$$n_1 = \{1, 2, -2\} \quad n_2 = \{1, 1, 0\}. \text{ Найдем косинус угла } \varphi \text{ между этими}$$

$$\text{векторами: } \cos \varphi = \frac{\overline{n_1 n_2}}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 0}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

Задача №10.

Написать каноническое уравнение прямой: $e: \begin{cases} 2x - 3y - 2z + 6 = 0 & : p_1 \\ x - 3y + z + 3 = 0 & : p_2 \end{cases}$

Решение: В условии задачи мы написали уравнение прямой e в пространстве в виде системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными, т.е. рассматриваем прямую как пересечение двух плоскостей; p_1 и p_2 , $n_1 = \{2, -3, -2\}$ и $n_2 = \{1, -3, 1\}$ – нормальные векторы этих плоскостей.

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \perp \vec{p}_1 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp e \Rightarrow e \text{ для прямой направляющий вектор служит вектор } a = n_1 \times n_2 \\ \vec{n}_2 \perp \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{n}_2 \perp e \\ \vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \right\} = \{-3-6; -(2+2); -6+3\} = \{-9; -4; -3\}. \end{aligned}$$

Из написанной выше системы найдем одну из точек прямой e . Примем за

$$z \text{ свободное неизвестное, } z=0 \text{ и получим } \begin{cases} 2x-3y=-6 \\ x-3y=-3 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\text{уравнение второе и выразим из второго } y. \begin{cases} x=-3 \\ y=\frac{x+3}{3} \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Найденные вектор и точку используем при составлении канонического уравнения прямой. $\frac{x-(-3)}{-9} = \frac{y-0}{-4} = \frac{z-0}{-3}$ упростим его, заменив $\vec{a}$ на коллинеарный ему вектор $-\vec{a}$. Получим $\frac{x+3}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

Ответ: $\frac{x+3}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

Задача №11. Найти точку пересечения прямой и плоскости, если

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}, \quad 2x+y+7z-3=0$$

Решение: Перепишем каноническое уравнение прямой в

$$\text{параметрической форме: } \begin{cases} x=7+3t \\ y=3+t \\ z=-1-2t \end{cases} \text{ и для нахождения точки пересечения}$$

прямой и плоскости решим систему

$$\begin{cases} x=7+3t \\ y=3+t \\ z=-1-2t \\ 2x+y+7z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7+3t \\ y=3+t \\ z=-1-2t \\ 14+6t+3+t-7-14t-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7+3t \\ y=3+t \\ z=-1-2t \\ -7t=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=10 \\ y=4 \\ z=-3 \end{cases}$$

Ответ: Точка А пересечения прямой и плоскости имеет координаты А(10, 4, -3)

Задача №12. Найти точку М, симметричную точке М относительно прямой (варианты 1-15) или плоскости (варианты 16-31)

Решение: Для вариантов 1-15 М(2,-5,7), $e: \frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{2}$

Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку М перпендикулярно прямой e , за нормаль $\vec{n}$ примем направляющий вектор $\vec{a}(1,3,2)$ этой плоскости примем вектор прямой e .

Получим: $1(x-2)+3(y+5)+2(z-7)=0 \Rightarrow p: x+3y+2z-1=0$. Найдем точку O -

пересечение e и найденной плоскости p $\begin{cases} x+3y+2z-1=0 \\ \frac{x+5}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{2} \end{cases}$ выразив y и z

через x : $y-4=3x+15 \Rightarrow y=3x+19$ $z-6=2x+10 \Rightarrow z=2x+16$ и подставив в первое уравнение системы, получим

$$\begin{cases} x+3(3x+19)+2(2x+16)-1=0 \\ y=3x+19 \\ z=2x+16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14x=-88 \\ y=3x+19 \\ z=2x+16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{44}{7} \\ y=19-\frac{132}{7}=\frac{1}{7} \\ z=16-\frac{88}{7} \end{cases} \text{ точка } O(-\frac{44}{7}, \frac{1}{7}, \frac{24}{7})$$

является серединой отрезка MM' т.е.

$$\begin{cases} \frac{x_{M'}+2}{2} = -\frac{44}{7} \\ \frac{y_{M'}-5}{2} = \frac{1}{7} \\ \frac{z_{M'}+7}{2} = \frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = -2 - \frac{88}{7} \\ y_{M'} = \frac{2}{7} + 5 \\ z_{M'} = \frac{48}{7} - 7 \end{cases} \Rightarrow M'(-\frac{102}{7}, \frac{39}{7}, -\frac{1}{7}). \text{ Для вариантов 16-31}$$

$M(-2,0,3)$, $p: 2x-2y+10z+1=0$. Напишем уравнение прямой $e \perp p$ и проходящей через точку M , за её направляющий вектор примем нормальный вектор плоскости p : $\vec{n} = \vec{a}$. Так как $M(-2,0,3) \in e$ то получим $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{10}$.

Упростим уравнение прямой заменив вектор $\vec{a}$ на коллинеарный ему вектор $\frac{1}{2}\vec{a}$. $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{5}$. Теперь найдём точку O пересечения прямой и плоскости:

$$\begin{cases} 2x-2y+10z+1=0 \\ \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{5} \Rightarrow y=-x-2 \quad z-3=5x+10 \Rightarrow z=5x+13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-2(-x-2)+10(5x+13)+1=0 \\ y=-x-2 \\ z=5x+13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50x=-135 \\ y=-x-2 \\ z=5x+13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{27}{25} \\ y=-2-\frac{27}{25}=-\frac{77}{25} \\ z=-\frac{27}{5}+13 \end{cases}$$

точка $O(-\frac{27}{25}, -\frac{77}{25}, \frac{38}{5})$ середина отрезка MM' т.е.

$$\begin{cases} \frac{x_{M'}-2}{2} = -\frac{27}{25} \\ \frac{y_{M'}+0}{2} = -\frac{77}{25} \\ \frac{z_{M'}+3}{2} = \frac{38}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2 - \frac{54}{25} \\ y_{M'} = -\frac{154}{25} \\ z_{M'} = \frac{76}{5} - 3 \end{cases} \Rightarrow M'(-\frac{4}{25}, -\frac{154}{25}, \frac{61}{5}) \text{ или } M'(-0.16; -6.16; 12.5).$$

Задача №13. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение: Решим систему методом Крамера. Для этого придётся вычислить четыре определителя третьего порядка. В начале проверим на совместность систем уравнений, т.е. $\Delta \neq 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 14 + 24 + 9 + 4 - 12 + 63 = 102$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 13 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & -10 & 1 \end{vmatrix} = 21 + 78 + 30 + 6 - 39 + 210 = 306$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 13 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -10 \end{vmatrix} = -140 + 24 - 117 - 52 + 63 + 120 = -102$$

По формулам Крамера $\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \end{cases}$ будем иметь $\begin{cases} x_1 = \frac{0}{102} = 0 \\ x_2 = \frac{306}{102} = 3 \\ x_3 = \frac{-102}{102} = -1 \end{cases}$

Ответ: $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=-1$.

Задача №14. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: Вычислим определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 10 + 21 - 36 - 45 - 4 + 42 = 73 - 85 = -12 \neq 0$$

Следовательно, по методу Крамера система имеет только одно, нулевое решение (тривиальное), т.е. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Ответ: $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$.

Задача №15. Найти собственные значения и собственные векторы

оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 4(1-\lambda) - 4(3-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 4(4-2\lambda) = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 8(2-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8) = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$\lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 5$$

Определим собственные векторы, соответствующие найденным характеристическим числам. Для определения координат собственных векторов составим три системы линейных уравнений.

$$1) \lambda_1 = 2 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = -2x_2 \\ x_2 = x_2 = c \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_1(-2c, c, 2c) \text{ где } c \neq 0$$

$$2) \lambda_2 = -1 \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = 2x_1 \\ x_1 = x_1 = c \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_2(c, -2c, 2c)$$

$$3) \lambda_3 = 5 \quad \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 = x_3 = c \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_3(2c, 2c, c)$$

Ответ: собственные значения 2, -1 и 5; собственные векторы

$$\vec{a}_1(-2c, c, 2c)$$

$$\vec{a}_2(c, -2c, 2c)$$

$$\vec{a}_3(2c, 2c, c)$$

Задача №16. Исследовать кривую второго порядка и построить её

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Решение: Матрица старших членов имеет вид $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Составим

характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 9.$$

Полагая $\lambda_1 = 4$, для определения соответствующего собственного вектора получаем систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2 = x_2 = -\alpha \end{cases}$.

Вектор $\vec{r}_1 = 2\alpha\vec{i} - \alpha\vec{j} = \alpha(2\vec{i} - \vec{j})$ собственный. Нормируя вектор $\vec{r}_1$, учитывая его модуль $|\vec{r}_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, и получим единичный собственный вектор $\vec{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$. Полагая $\lambda_2 = 9$, для определения второго собственного вектора

получим систему уравнений $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_1 = x_1 = 2 \end{cases}$. Получаем $\vec{r}_2 = \alpha\vec{i} + 2\alpha\vec{j}$,

нормируем его: $|\vec{r}_2| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, тогда $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ - второй единичный

собственный вектор. Легко проверить, что скалярное произведение $\vec{e}_1\vec{e}_2 = 0$, т.е. векторы $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ - ортогональны. Используем собственные нормированные ортогональные векторы для построения матрицы преобразования координат:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \Delta(A) = 1 \quad \text{отсюда} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}. \quad \text{Найденные для } x \text{ и } y$$

выражение подставим в уравнение кривой:

$$5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 8\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2 -$$

$$- 32\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 56\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 80 = 0, \quad \text{откуда после простых}$$

преобразований и приведения подобных членов получим

$$4x'^2 + 9y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{144}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0.$$

Заметим, что в преобразованном уравнении коэффициентами при x'^2 и y'^2 оказались (как и следовало ожидать) характеристические числа λ_1 и λ_2 .

Перепишем уравнение в виде

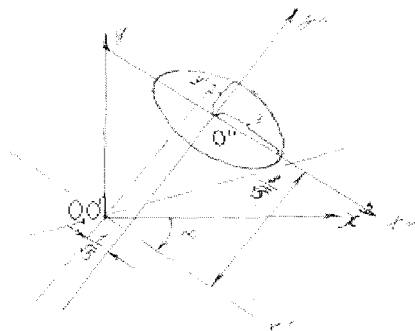
$$4\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + 9\left(y'^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}y' + \frac{64}{5} - \frac{64}{5}\right) + 80 = 0 \quad \text{или}$$

$$4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{5} + 9\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{576}{5} + 80 = 0 \quad \text{или окончательно}$$

$$4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36. \quad \text{Произведём параллельный перенос осей координат,}$$

$$\text{полагая } \begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \frac{8}{\sqrt{5}} \end{cases}. \quad \text{Получим } 4x''^2 + 9y''^2 = 36, \quad \text{или } \frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1 \quad \text{- каноническое}$$

уравнение эллипса.



Задача № 17. Исследовать кривую второго порядка и построить её:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

Решение: Проверим, является ли данная кривая центральной, найдём из общего уравнения кривой второго порядка $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}. \text{ У нас } A=5, \quad B=2, \quad C=8, \quad D=-16, \quad E=-28, \quad F=80.$$

$\delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 36 \neq 0 \Rightarrow$ уравнение определяют центральную линию второго порядка, т.к. $\delta > 0 \Rightarrow$ уравнение называется эллиптическим. Координаты центра

$$(x_0, y_0) \text{ могут быть определены по формулам } \left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} \\ y_0 = \frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} \end{array} \right. \text{ как решение системы}$$

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \text{ У нас}$$

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -16 \\ 8 & -28 \end{vmatrix}}{36} = \frac{-2 \cdot 4}{36} = -\frac{2(7-16)}{9} = 2$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} -16 & 5 \\ -28 & 2 \end{vmatrix}}{36} = \frac{-4 \cdot 7}{36} = -\frac{8-35}{9} = 3$$

. Исходное уравнение, преобразованное по

формулам $\begin{cases} x = \tilde{x} + x_0 \\ y = \tilde{y} + y_0 \end{cases}$, у нас $\begin{cases} x = \tilde{x} + 2 \\ y = \tilde{y} + 3 \end{cases}$ принимает вид $A\tilde{x}^2 + 2B\tilde{x}\tilde{y} + C\tilde{y}^2 + \tilde{F} = 0$,

где $\tilde{F} = D\tilde{x}_0 + E\tilde{y}_0 + F$ или $\tilde{F} = \frac{\Lambda}{\delta}$ где, в свою очередь, $\Lambda = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$. В нашей

задаче получим $\tilde{F} = -16 \cdot 2 - 28 \cdot 3 + 80 = 80 - 32 - 84 = -36$

$$5\tilde{x}^2 + 4\tilde{x}\tilde{y} + 8\tilde{y}^2 - 36 = 0$$

Дальнейшее упрощения уравнения кривой второго порядка достигается при помощи преобразования координат: $\begin{cases} \tilde{x} = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ \tilde{y} = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$ соответствующего

повороту осей на угол α . Угол α выбирается так, что $B \lg^2 \alpha - (C - A) \lg \alpha - B = 0$ и в новых координатах уравнение линии принимает вид $A'x'^2 + C'y'^2 + \tilde{F} = 0$, где $A' \neq 0, C' \neq 0$. У нас $2 \lg^2 \alpha - (8 - 5) \lg \alpha - 2 = 0$ или $2 \lg^2 \alpha - 3 \lg \alpha - 2 = 0$, решая это

квадратное уравнение, найдем $(\lg \alpha)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$ выберем одно из

значении $\lg \alpha$, например, второе $\lg \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\lg \alpha}{\sqrt{1 + \lg^2 \alpha}} \\ \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \lg^2 \alpha}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} \\ \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} \end{cases}$

окончательно, $\begin{cases} \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$ знак минус у $\lg \alpha$ (или $\sin \alpha$) означает лишь, то что

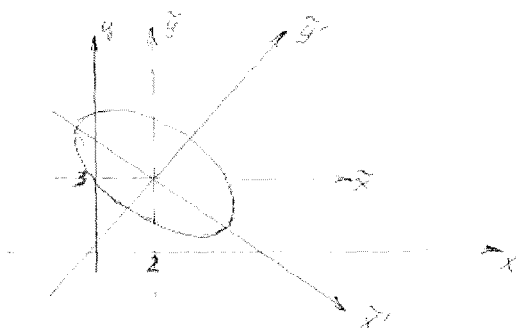
поворот на угол α осуществляется по часовой стрелке.

Полезно помнить, что между коэффициентами A', C', A, C и B существуют важные соотношения $\begin{cases} A'C' = AC - B^2 \\ A' + C' = A + C \end{cases} \Rightarrow$ у нас

$$\begin{cases} A'C' = 36 \\ A' + C' = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'(A' - 13) = 36 \\ C' = A' - 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'^2 - 13A' - 36 = 0 \\ C' = A' - 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases} \\ C' = A' - 13 = \begin{cases} 4 \\ 9 \end{cases} \end{cases}$$

Выберем одно из решений системы: $\begin{cases} A' = 4 \\ C' = 9 \end{cases}$ получим

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0 \Rightarrow \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$



Математика-2

Индивидуальное задание №3

Интегралы

Задача 1. Найти неопределенные интегралы

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1.1. $\int (4-3x)e^{3x} dx.$ | 1.2. $\int \arctg \sqrt{4x-1} dx.$ |
| 1.3. $\int (3x+4)e^{3x} dx.$ | и 1.4. $\int (4x-2) \cos 2x dx.$ |
| 1.5. $\int (4-16x) \sin 4x dx.$ | 1.6. $\int (5x-2)e^{3x} dx.$ |
| 1.7. $\int (1-6x)e^{2x} dx.$ | 1.8. $\int \ln(x^2+4) dx.$ |
| 1.9. $\int \ln(4x+1) dx.$ | 1.10. $\int (2-4x) \sin 2x dx.$ |
| 1.11. $\int \arctg \sqrt{6x-1} dx.$ | 1.12. $\int e^{2x}(4x-3) dx.$ |
| 1.13. $\int e^{3x}(2-9x) dx.$ | 1.14. $\int \arctg \sqrt{2x-1} dx.$ |
| 1.15. $\int \arctg \sqrt{3x-1} dx.$ | 1.16. $\int \arctg \sqrt{5x-1} dx.$ |
| 1.17. $\int (5x+6) \cos 2x dx.$ | 1.18. $\int (3x-2) \cos 5x dx.$ |
| 1.19. $\int (x\sqrt{2}-3) \cos 2x dx.$ | 1.20. $\int (4x+7) \cos 3x dx.$ |
| 1.21. $\int (2x-5) \cos 4x dx.$ | 1.22. $\int (8-3x) \cos 5x dx.$ |
| 1.23. $\int (x+5) \sin 3x dx.$ | 1.24. $\int (2-3x) \sin 2x dx.$ |
| 1.25. $\int (4x+3) \sin 5x dx.$ | 1.26. $\int (7x-10) \sin 4x dx.$ |
| 1.27. $\int (\sqrt{2}-8x) \sin 3x dx.$ | 1.28. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$ |
| 1.29. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$ | 1.30. $\int x \sin^2 x dx.$ |

Задача 2. Найти неопределённые интегралы

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 2.1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$ | 2.2. $\int \frac{1+\ln x}{x} dx.$ |
| 2.3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$ | 2.4. $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x} dx.$ |

$$2.5. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

$$2.7. \int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx$$

$$2.9. \int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$2.11. \int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

$$2.13. \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$$

$$2.15. \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$2.17. \int \frac{(x^2 + 1)}{(x^3 + 3x + 1)^5} dx.$$

$$2.19. \int \frac{x^3}{x^2 + 4} dx.$$

$$2.21. \int \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

$$2.23. \int \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$2.25. \int \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$2.27. \int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx.$$

$$2.29. \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$2.6. \int \frac{(\arccos x)^4 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$2.8. \int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$2.10. \int \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$$

$$2.12. \int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$2.14. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}.$$

$$2.16. \int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$2.18. \int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx.$$

$$2.20. \int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$2.22. \int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$2.24. \int \frac{x}{x^4 + 1} dx.$$

$$2.26. \int \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$2.28. \int \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1 + x^2} dx.$$

$$2.30. \int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Задача 3. Найти неопределённые интегралы

$$3.1. \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

$$3.3. \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

$$3.5. \int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x - 6} dx.$$

$$3.7. \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$$

$$3.9. \int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx.$$

$$3.11. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)x} dx.$$

$$3.13. \int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x} dx.$$

$$3.2. \int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx.$$

$$3.4. \int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx.$$

$$3.6. \int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx.$$

$$3.8. \int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx.$$

$$3.10. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx.$$

$$3.12. \int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} dx.$$

$$3.14. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)x} dx.$$

$$3.15. \int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

$$3.17. \int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx.$$

$$3.19. \int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} dx.$$

$$3.21. \int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx.$$

$$3.23. \int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x-2)(x+2)} dx.$$

$$3.25. \int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}{x(x-1)(x+2)} dx.$$

$$3.27. \int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)} dx.$$

$$3.29. \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx.$$

$$3.16. \int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x} dx.$$

$$3.18. \int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx.$$

$$3.20. \int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx.$$

$$3.22. \int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{(x+3)(x-1)x} dx.$$

$$3.24. \int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} dx.$$

$$3.26. \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)} dx.$$

$$3.28. \int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx.$$

$$3.30. \int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} dx.$$

Задача 4. Найти неопределённые интегралы

$$4.1. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$4.3. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$4.5. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$4.7. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x-1)(x+1)^3} dx.$$

$$4.9. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 2}{x(x+1)^3} dx.$$

$$4.11. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 7}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$4.13. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 10}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$4.15. \int \frac{3x^3 + 9x^2 + 10x + 2}{(x-1)(x+1)^3} dx.$$

$$4.17. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 4}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

$$4.19. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x-2)(x+1)^3} dx.$$

$$4.21. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$4.2. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx.$$

$$4.4. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$4.6. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 7}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$4.8. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 10}{(x-1)(x+2)^3} dx.$$

$$4.10. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{x(x-2)^3} dx.$$

$$4.12. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$4.14. \int \frac{x^3 + x + 2}{(x+2)x^3} dx.$$

$$4.16. \int \frac{2x^3 + x + 1}{(x+1)x^3} dx.$$

$$4.18. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

$$4.20. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x + 4}{(x-2)(x+1)^3} dx.$$

$$4.22. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 4}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$4.23. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 18x - 4}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$4.25. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 4}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$4.27. \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x-2)(x-1)^3} dx.$$

$$4.29. \int \frac{x^3 + 6x^2 - 10x + 52}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$4.24. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 12}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$4.26. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 2}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$4.28. \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)^3} dx.$$

$$4.30. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

Задача 5. Найти неопределённые интегралы

$$5.1. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx.$$

$$5.3. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(x+2)^2(x^2+x+1)} dx.$$

$$5.5. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)} dx.$$

$$5.7. \int \frac{3x^3 + 6x^2 + 5x - 1}{(x+1)^2(x^2+2)} dx.$$

$$5.9. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 8x + 8}{(x+2)^2(x^2+4)} dx.$$

$$5.11. \int \frac{2x^3 - 4x^2 - 16x - 12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} dx.$$

$$5.13. \int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)} dx.$$

$$5.15. \int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)} dx.$$

$$5.17. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$5.19. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} dx.$$

$$5.21. \int \frac{4x^2 + 3x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$5.23. \int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$5.25. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$5.27. \int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$5.29. \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$5.2. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2+1)} dx.$$

$$5.4. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)} dx.$$

$$5.6. \int \frac{2x^3 + 11x^2 + 16x + 10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)} dx.$$

$$5.8. \int \frac{x^3 + 9x^2 + 21x + 21}{(x+3)^2(x^2+3)} dx.$$

$$5.10. \int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx.$$

$$5.12. \int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1}{(x-2)^2(x^2-x+1)} dx.$$

$$5.14. \int \frac{3x^3 + x + 46}{(x-1)^2(x^2+9)} dx.$$

$$5.16. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$5.18. \int \frac{x^2 + x + 3}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$5.20. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 9}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} dx.$$

$$5.22. \int \frac{3x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2 + 2)(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$5.24. \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$5.26. \int \frac{2x^3 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$5.28. \int \frac{x + 4}{(x^2 + x + 2)(x^2 + 2)} dx.$$

$$5.30. \int \frac{3x^3 + 7x^2 + 12x + 6}{(x^2 + x + 3)(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

Задача 6*. Найти неопределённые интегралы

$$6.1. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^4 \sqrt{x^3}} dx.$$

$$6.2. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3 \sqrt{x^2}} dx.$$

$$6.3. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x \sqrt{x}} dx.$$

$$6.4. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^2 \sqrt{x^4}} dx.$$

$$6.5. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^9 \sqrt{x^8}} dx.$$

$$6.6. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x^9 \sqrt{x^5}} dx.$$

$$6.7. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$6.8. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x^6 \sqrt{x^5}} dx.$$

$$6.9. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx.$$

$$6.10. \int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$6.11. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x^8 \sqrt{x^7}} dx.$$

$$6.12. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x^{12} \sqrt{x^7}} dx.$$

$$6.13. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2 \sqrt[6]{x}} dx.$$

$$6.14. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \sqrt[8]{x}} dx.$$

$$6.15. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2} dx.$$

$$6.16. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2 \sqrt[4]{x}} dx.$$

$$6.17. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x^{10} \sqrt{x^9}} dx.$$

$$6.18. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x^5 \sqrt{x^3}} dx.$$

$$6.19. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx.$$

$$6.20. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^{22} \sqrt[7]{x}} dx.$$

$$6.21. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[5]{x^4})}}{x^{22} \sqrt[11]{x^{11}}} dx.$$

$$6.22. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx.$$

$$6.23. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[15]{x}} dx.$$

$$6.24. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2 \sqrt[3]{x}} dx.$$

$$6.25. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[5]{x^4})^3}}{x^{25} \sqrt{x^2}} dx.$$

$$6.26. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x^3 \sqrt{x}} dx.$$

$$6.27. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x^{12} \sqrt{x^5}} dx.$$

$$6.28. \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^{12} \sqrt{x^5}} dx.$$

$$6.29. \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^9 \sqrt{x^5}} dx.$$

$$6.30. \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[5]{x}}}{x^{18} \sqrt{x^4}} dx.$$

Задача 7. Вычислить определённые интегралы

$$7.1. \int_2^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$$

$$7.2. \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$$

$$7.3. \int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx.$$

$$7.5. \int_4^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx.$$

$$7.7. \int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx.$$

$$7.9. \int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx.$$

$$7.11. \int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx.$$

$$7.13. \int_1^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx.$$

$$7.15. \int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx.$$

$$7.17. \int_3^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx.$$

$$7.19. \int_0^{\pi/2} (1 - 5x^2) \sin x dx.$$

$$7.21. \int_1^2 x \ln^2 x dx.$$

$$7.23. \int_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$7.25. \int_{\frac{3}{2}}^3 (x - 1)^3 \ln^2 (x - 1) dx.$$

$$7.27. \int_0^2 (x + 1)^2 \ln^2 (x + 1) dx.$$

$$7.29. \int_{-1}^1 x^2 e^{-x/2} dx.$$

$$7.4. \int_2^0 (x + 2)^2 \cos 3x dx.$$

$$7.6. \int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx.$$

$$7.8. \int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx.$$

$$7.10. \int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx.$$

$$7.12. \int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx.$$

$$7.14. \int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx.$$

$$7.16. \int_0^{\pi/2} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$$

$$7.18. \int_0^{\pi/4} (x^2 + 17.5) \sin 2x dx.$$

$$7.20. \int_{\pi/4}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx.$$

$$7.22. \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}.$$

$$7.24. \int_0^1 (x + 1) \ln^2 (x + 1) dx.$$

$$7.26. \int_{-1}^0 (x + 2)^3 \ln^2 (x + 2) dx.$$

$$7.28. \int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

$$7.30. \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

Задача 8. Вычислить определённые интегралы

$$8.1. \int_{e^{-1}}^{e^{1/2}} \frac{1 + \ln(x - 1)}{x - 1} dx.$$

$$8.3. \int_0^1 \frac{4 \arctg x - x}{1 + x^2} dx.$$

$$8.5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$8.7. \int_0^{1/2} \frac{8x - \arctg 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$8.9. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

$$8.11. \int_{\sqrt[3]{3}}^{\sqrt[3]{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$8.2. \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}.$$

$$8.4. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}.$$

$$8.6. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

$$8.8. \int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$8.10. \int_{\sqrt[3]{3}}^{\sqrt[3]{8}} \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$8.12. \int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{\arctg x + x}{1 + x^2} dx.$$

$$8.13. \int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{x - (\arctg x)^4}{1+x^2} dx.$$

$$8.15. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$8.17. \int_{\sqrt[3]{3}}^{\sqrt[3]{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$8.19. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$8.21. \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

$$8.23. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$8.25. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$8.27. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

$$8.29. \int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$$

$$8.14. \int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1} dx.$$

$$8.16. \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

$$8.18. \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx.$$

$$8.20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$8.22. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$8.24. \int_1^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$8.26. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$$

$$8.28. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$8.30. \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^3-x^3-1}} dx.$$

Задача 9. Вычислить определённые интегралы.

$$9.1. \int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)} dx.$$

$$9.3. \int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \cos x)} dx.$$

$$9.5. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx.$$

$$9.7. \int_{2\operatorname{arctg}(1/3)}^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)}.$$

$$9.9. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5 + 4 \cos x}.$$

$$9.11. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x - \cos x}.$$

$$9.13. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 + \cos x + \sin x}.$$

$$9.15. \int_0^2 \frac{\cos x dx}{1 + \cos x + \sin x}.$$

$$9.17. \int_{2\pi/3}^0 \frac{\cos x dx}{1 + \cos x - \sin x}.$$

$$9.19. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$9.2. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x} dx.$$

$$9.4. \int_{2\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^3}.$$

$$9.6. \int_{2\operatorname{arctg} 2}^{2\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{\cos x (1 - \cos x)}.$$

$$9.8. \int_{2\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2}.$$

$$9.10. \int_0^{2\pi/3} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$$

$$9.12. \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \cos x) dx}{1 + \cos x + \sin x}.$$

$$9.14. \int_0^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)^2} dx.$$

$$9.16. \int_0^{2\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x)(1 - \sin x)}.$$

$$9.18. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$9.20. \int_0^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos x (1 + \cos x)}.$$

$$9.21. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2}.$$

$$9.23. \int_{\pi/2}^0 \frac{\sin x dx}{2(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$9.25. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$9.27. \int_{\pi/2}^{2\arctan 2} \frac{dx}{\sin x(1 + \sin x)}.$$

$$9.29. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}.$$

$$9.22. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x + \cos x)^2}.$$

$$9.24. \int_{2\pi/3}^0 \frac{\cos^2 x dx}{3(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$9.26. \int_0^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$9.28. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \sin x + \cos x)^2}.$$

$$9.30. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(1 + \cos x)}.$$

Задача 10*. Вычислить определённые интегралы

$$10.1. \int_{\pi/4}^{\arctan 3} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}.$$

$$10.3. \int_0^{\arccos(1/\sqrt{7})} \frac{3 + 2 \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 1} dx.$$

$$10.5. \int_0^{\arctan(1/3)} \frac{(8 + \operatorname{tg} x)}{18 \sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$$

$$10.7. \int_0^{\pi/4} \frac{6 \operatorname{tg} x dx}{\arcsin(1/\sqrt{37}) 3 \sin 2x + 5 \cos^2 x}.$$

$$10.9. \int_{\arctan(1/3)}^0 \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin 2x - 5 \cos 2x + 1} dx.$$

$$10.11. \int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{3})} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x - 5 \cos^2 x + 4} dx.$$

$$10.13. \int_0^{\arctan 3} \frac{4 + \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 18 \cos^2 x} dx.$$

$$10.15. \int_0^{\arctan(2/3)} \frac{6 + \operatorname{tg} x}{9 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$10.17. \int_0^{\pi/4} \frac{7 + 3 \operatorname{tg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

$$10.19. \int_{\arccos(1/\sqrt{10})}^0 \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 50}{2 \operatorname{tg} x + 7} dx.$$

$$10.21. \int_{\pi/4}^{\arcsin(1/\sqrt{5})} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{4 \cos^2 x - \sin 2x + 1} dx.$$

$$10.23. \int_0^{\arccos(1/\sqrt{5})} \frac{11 - 3 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 3} dx.$$

$$10.25. \int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{36 dx}{(6 - \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$$

$$10.27. \int_{\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\pi/4} \frac{2 - \operatorname{tg} x}{(\sin x + 3 \cos x)^2} dx.$$

$$10.2. \int_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx.$$

$$10.4. \int_{\pi/4}^{\arctan 3} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$10.6. \int_0^{\arccos(2/3)} \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x - 3} dx.$$

$$10.8. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 11 \operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x} dx.$$

$$10.10. \int_{\pi/4}^{\arctan 3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

$$10.12. \int_0^{\pi/4} \frac{6 \sin^2 x}{3 \cos 2x - 4} dx.$$

$$10.14. \int_0^{\arctan 2} \frac{12 + \operatorname{tg} x}{3 \sin^2 x + 12 \cos^2 x} dx.$$

$$10.16. \int_0^{\arcsin(3/\sqrt{7})} \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - 7}.$$

$$10.18. \int_{\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{2 \operatorname{tg} x + 5}{(5 - \operatorname{tg} x) \sin 2x} dx.$$

$$10.20. \int_0^{\pi/4} \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx.$$

$$10.22. \int_0^{\arcsin(1/\sqrt{8})} \frac{6 \sin^2 x dx}{4 + 3 \cos 2x}.$$

$$10.24. \int_0^{\arcsin(1/\sqrt{10})} \frac{2 \operatorname{tg} x - 5}{(4 \cos x - \sin x)^2} dx.$$

$$10.26. \int_0^{\pi/4} \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx.$$

$$10.28. \int_{\pi/4}^{\arcsin(2/3)} \frac{8 \operatorname{tg} x dx}{3 \cos^2 x + 8 \sin^2 x - 7}.$$

$$10.29. \frac{\arccos(1/\sqrt{26})}{\arccos(1/\sqrt{10})} \frac{12dx}{(6+5\operatorname{tg}x)\sin 2x}.$$

$$10.30. \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4+3\cos 2x} dx.$$

Задача 11. Вычислить определённые интегралы

$$11.1. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx.$$

$$11.2. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$11.3. \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$11.4. \int_0^{2\pi} \sin^2(x/4) \cos^6(x/4) dx.$$

$$11.5. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8(x/2) dx.$$

$$11.6. \int_{\pi/2}^0 2^8 \sin^8 x dx.$$

$$11.7. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$11.8. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$11.9. \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$11.10. \int_0^{2\pi} \cos^8(x/4) dx.$$

$$11.11. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8(x/2) dx.$$

$$11.12. \int_{\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$11.13. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$11.14. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$11.15. \int_0^{2\pi} \cos^8 x dx.$$

$$11.16. \int_0^{2\pi} \sin^8(x/4) dx.$$

$$11.17. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6(x/2) \cos^2(x/2) dx.$$

$$11.18. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$11.19. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$11.20. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 x dx.$$

$$11.21. \int_0^{2\pi} \sin^8 x dx.$$

$$11.22. \int_0^{2\pi} \sin^6(x/4) \cos^2(x/4) dx.$$

$$11.23. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4(x/2) \cos^4(x/2) dx.$$

$$11.24. \int_{\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$11.25. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \cos^8 x dx.$$

$$11.26. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x dx.$$

$$11.27. \int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$11.28. \int_0^{2\pi} \sin^4(x/4) \cos^4(x/4) dx.$$

$$11.29. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2(x/2) \cos^6(x/2) dx.$$

$$11.30. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \cos^8 x dx.$$

Задача 12*. Вычислить определённые интегралы

$$12.1. \int_0^1 \frac{4\sqrt{1-x} - \sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x})(3x+1)^2} dx.$$

$$12.2. \int_1^{64} \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} dx.$$

$$12.3. \int_{14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2 \sqrt{x+4}} dx.$$

$$12.4. \int_6^9 \frac{\sqrt{9-2x}}{\sqrt{2x-2}} dx.$$

$$12.5. \int_0^5 e^{\sqrt[5]{5-x}} \frac{dx}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}.$$

$$12.6. \int_8^{12} \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{x-14}} dx.$$

$$12.7. \int_0^1 e^{\sqrt{1-x}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12.9. \int_1^8 \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2\sqrt{x}} dx.$$

$$12.11. \int_6^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}} dx.$$

$$12.13. \int_{1/2}^0 \frac{x dx}{2 + \sqrt{2x+1}}.$$

$$12.15. \int_{1/8}^1 \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}} dx.$$

$$12.17. \int_2^3 \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}} dx.$$

$$12.19. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{3x+2}) dx}{(\sqrt{3x+2} + 4\sqrt{2-x})(3x+2)^2}.$$

$$12.21. \int_3^5 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}} dx.$$

$$12.23. \int_9^{15} \sqrt{\frac{6-x}{x-18}} dx.$$

$$12.25. \int_1^{64} \frac{(2 + \sqrt[3]{x}) dx}{(8\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})\sqrt{x}}.$$

$$12.27. \int_0^6 \frac{e^{\sqrt{(6-x)/(6-x)}} dx}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}.$$

$$12.29. \int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}) dx}{(\sqrt{x+1} + 4\sqrt{1-x})(x+1)^2}.$$

$$12.8. \int_{5/2}^{10/3} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(x-2)^2} dx$$

$$12.10. \int_1^2 \frac{(x + \sqrt{3x-2}) - 10}{\sqrt{3x-2} + 7} dx.$$

$$12.12. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2}) dx}{(\sqrt{2x+2} + 4\sqrt{2-x})(2x+2)^2}.$$

$$12.14. \int_0^4 e^{\sqrt{4-x}} \frac{dx}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}.$$

$$12.16. \int_{5/3}^1 \frac{\sqrt[3]{3x+5} + 2}{1 + \sqrt[3]{3x+5}} dx.$$

$$12.18. \int_0^7 \frac{\sqrt{x+25} dx}{(x+25)^2\sqrt{x+1}}.$$

$$12.20. \int_0^2 e^{\sqrt{2-x}} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{4-x^2}}.$$

$$12.22. \int_{1/24}^1 \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}} dx.$$

$$12.24. \int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{2x+1}) dx}{(\sqrt{2x+1} + 4\sqrt{1-x})(2x+1)^2}.$$

$$12.26. \int_{16}^{4/3} \frac{4\sqrt{x}}{15x^2\sqrt{x-1}} dx.$$

$$12.28. \int_1^{64} \frac{(6 - \sqrt{x} + \sqrt[4]{x})}{\sqrt{x^3} - 7x - 6\sqrt[3]{x^3}} dx.$$

$$12.30. \int_0^3 \frac{e^{\sqrt{(3-x)/(3+x)}} dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}.$$

Задача 13. Вычислить определённые интегралы

$$13.1. \int_0^{16} \sqrt{256-x^2} dx.$$

$$13.2. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$13.3. \int_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}.$$

$$13.4. \int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}.$$

$$13.5. \int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$$

$$13.6. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx.$$

$$13.7. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

$$13.8. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$$

$$13.9. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2-x^2)^{3/2}}.$$

$$13.10. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

$$13.11. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$13.13. \int_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$13.15. \int_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2} dx.$$

$$13.17. \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}^3}.$$

$$13.19. \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16-x^2)\sqrt{(16-x^2)}}.$$

$$13.21. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$13.23. \int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}.$$

$$13.25. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$13.27. \int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}.$$

$$13.29. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$13.12. \int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}.$$

$$13.14. \int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

$$13.16. \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$13.18. \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx.$$

$$13.20. \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$13.22. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$$

$$13.24. \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$$

$$13.26. \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx.$$

$$13.28. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{3/2}}.$$

$$13.30. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Задача 14. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

$$14.1. y = (x-2)^2, y = 4x-8.$$

$$14.2. y = x\sqrt{9-x^2}, y = 0, \\ (0 \leq x \leq 3).$$

$$14.3. y = 4-x^2, \\ y = x^2-2x.$$

$$14.4. y = \sin x \cos^2 x, y = 0 \\ (0 \leq x \leq \pi/2).$$

$$14.5. y = \sqrt{4-x^2}, y = 0, \\ x = 0, x = 1.$$

$$14.6. y = x^2 \sqrt{4-x^2}, y = 0, \\ (0 \leq x \leq 2).$$

$$14.7. y = \cos x \sin^2 x, y = 0 \\ (0 \leq x \leq \pi/2).$$

$$14.8. y = \sqrt{e^x-1}, y = 0, \\ x = \ln 2.$$

$$14.9. y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}, \\ y = 0, x = 1, x = e^3.$$

$$14.10. y = \arccos x, y = 0 \\ x = 0$$

$$14.11. y = (x+1)^2, \\ y^2 = x+1.$$

$$14.12. y = 2x-x^2+3, \\ y = x^2-4x+3.$$

$$14.13. y = x\sqrt{36-x^2}, y = 0, \\ (0 \leq x \leq 6).$$

$$14.14. x = \arccos y, x = 0 \\ y = 0.$$

$$14.15. \begin{cases} y = \operatorname{arctg} x, y = 0 \\ x = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$14.17. \begin{cases} x = \sqrt{e^2 - 1}, x = 0, \\ y = \ln 2. \end{cases}$$

$$14.19. \begin{cases} y = x/(1 + \sqrt{x}), y = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

$$14.21. \begin{cases} x = (y - 2)^3, \\ x = 4y - 8. \end{cases}$$

$$14.23. \begin{cases} y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}, y = 0, x = 1. \end{cases}$$

$$14.25. \begin{cases} y = \frac{1}{y\sqrt{1 + \ln y}}, x = 0, y = 1, \\ y = e^3. \end{cases}$$

$$14.27. \begin{cases} y = x^2 \sqrt{16 - x^2}, y = 0, \\ (0 \leq x \leq 4). \end{cases}$$

$$14.29. \begin{cases} y = (x - 1)^2, \\ y^2 = x - 1. \end{cases}$$

$$14.16. \begin{cases} y = x^2 \sqrt{8 - x^2}, y = 0, \\ (0 \leq x \leq 2\sqrt{2}). \end{cases}$$

$$14.18. \begin{cases} y = x\sqrt{4 - x^2}, y = 0, \\ (0 \leq x \leq 2). \end{cases}$$

$$14.20. \begin{cases} y = 1/(1 + \cos x), y = 0, \\ x = \pi/2, x = -\pi/2. \end{cases}$$

$$14.22. \begin{cases} y = \cos^5 x \sin 2x, y = 0 \\ (0 \leq x \leq \pi/2). \end{cases}$$

$$14.24. \begin{cases} x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y. \end{cases}$$

$$14.26. \begin{cases} y = \frac{e^{1/x}}{x^2}, y = 0, x = 2, x = 1. \end{cases}$$

$$14.28. \begin{cases} x = \sqrt{4 - y^2}, x = 0, \\ y = 0, y = 1. \end{cases}$$

$$14.30. \begin{cases} y = x^2 \cos x, y = 0, \\ (0 \leq x \leq \pi/2). \end{cases}$$

Задача 15. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

$$15.1. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 (x \geq 2). \end{cases}$$

$$15.3. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4(0 < x < 8\pi, y \geq 4) \end{cases}$$

$$15.5. \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \\ y = 3 (y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.7. \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 6\sqrt{3} (x \geq 6\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.9. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 3(0 < x < 6\pi, y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.2. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \\ y = 2 (y \geq 2). \end{cases}$$

$$15.4. \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 (x \geq 2). \end{cases}$$

$$15.6. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 3(0 < x < 4\pi, y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.8. \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ y = \sqrt{3} (y \geq \sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.10. \begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 4 (x \geq 4). \end{cases}$$

$$15.11. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \\ y = 3(y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.13. \begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 4(x \geq 4). \end{cases}$$

$$15.15. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 6(0 < x < 12\pi, y \geq 6). \end{cases}$$

$$15.17. \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ y = 2\sqrt{3}(y \geq 2\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.19. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 1(x \geq 1). \end{cases}$$

$$15.21. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = 1(0 \leq x \leq 2\pi, y \geq 1). \end{cases}$$

$$15.23. \begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ y = 2(y \geq 2). \end{cases}$$

$$15.25. \begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 9\sqrt{3}(x \geq 9\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.27. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 2(0 < x < 4\pi, y \geq 2). \end{cases}$$

$$15.29. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \sin t, \\ y = 5(y \geq 5). \end{cases}$$

$$15.12. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 9(0 < x < 12\pi, y \geq 9). \end{cases}$$

$$15.14. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4(y \geq 4). \end{cases}$$

$$15.16. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \\ x = 3\sqrt{3}(x \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.18. \begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 15(0 \leq x \leq 20\pi, y \geq 15). \end{cases}$$

$$15.20. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \\ y = 4(y \geq 4). \end{cases}$$

$$15.22. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \\ x = 1(x \geq 1). \end{cases}$$

$$15.24. \begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \\ y = 12(0 < x < 16\pi, y \geq 12). \end{cases}$$

$$15.26. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4\sqrt{3}(y \geq 4\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.28. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2(x \geq 2). \end{cases}$$

$$15.30. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 6(0 < x < 8\pi, y \geq 6). \end{cases}$$

Задача 16. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

$$16.1. r = 4 \cos 3\varphi, r = 2(r \geq 2).$$

$$16.2. r = \cos 2\varphi.$$

$$16.3. r = \sqrt{3} \cos \varphi, r = \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$16.4. r = 4 \sin 3\varphi, r = 2(r \geq 2).$$

$$16.5. \quad r = 2 \cos \varphi, r = 2\sqrt{3} \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$16.7. \quad r = 6 \sin 3\varphi, r = 3(r \geq 3), \\ r = \cos \varphi,$$

$$16.9. \quad r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4) \\ (-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$16.11. \quad r = 6 \cos 3\varphi, r = 3(r \geq 3), \\ r = \cos \varphi,$$

$$16.13. \quad r = \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$16.15. \quad r = \cos \varphi, r = 2 \cos \varphi,$$

$$16.17. \quad r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi,$$

$$16.19. \quad r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi,$$

$$16.21. \quad r = (3/2) \cos \varphi, r = (5/2) \cos \varphi,$$

$$16.23. \quad r = 6 \sin 6\varphi,$$

$$16.25. \quad r = \cos \varphi + \sin \varphi,$$

$$16.27. \quad r = 2 \cos 6\varphi,$$

$$16.29. \quad r = 3 \sin \varphi, r = 5 \sin \varphi,$$

$$16.6. \quad r = \sin 3\varphi,$$

$$16.8. \quad r = \cos 3\varphi, \\ r = \sin \varphi,$$

$$16.10. \quad r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4) \\ ((0 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$$

$$16.12. \quad r = 1/2 + \sin \varphi, \\ r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4),$$

$$16.14. \quad r = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4) \\ (\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$$

$$16.16. \quad r = \sin \varphi, r = 2 \sin \varphi,$$

$$16.18. \quad r = 1/2 + \cos \varphi,$$

$$16.20. \quad r = (5/2) \sin \varphi, r = (3/2) \sin \varphi,$$

$$16.22. \quad r = 4 \cos 4\varphi,$$

$$16.24. \quad r = 2 \cos \varphi, r = 3 \cos \varphi,$$

$$16.26. \quad r = 2 \sin 4\varphi,$$

$$16.28. \quad r = \cos \varphi - \sin \varphi,$$

$$16.30. \quad r = 2 \sin \varphi, r = 4 \sin \varphi,$$

Задача 17. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

$$17.1. \quad y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$$

$$17.3. \quad y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq 7/9.$$

$$17.5. \quad y = -\ln \cos x, 0 \leq x \leq \pi/6.$$

$$17.7. \quad y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, 1/4 \leq x \leq 1.$$

$$17.9. \quad y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, 0 \leq x \leq 8/9.$$

$$17.11. \quad y = 2 + \operatorname{ch} x, 0 \leq x \leq 1.$$

$$17.13. \quad y = e^x + 13, \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$$

$$17.15. \quad y = 2 - e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}.$$

$$17.17. \quad y = 1 - \ln \sin x, \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$$

$$17.19. \quad y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5, 1/9 \leq x \leq 1.$$

$$17.21. \quad y = \ln \sin x, \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$$

$$17.2. \quad y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2.$$

$$17.4. \quad y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

$$17.6. \quad y = e^x + 6, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$$

$$17.8. \quad y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3.$$

$$17.10. \quad y = \ln(1-x^2), 0 \leq x \leq 1/4.$$

$$17.12. \quad y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \pi/6.$$

$$17.14. \quad y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, 0 \leq x \leq 1/4.$$

$$17.16. \quad y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq \frac{15}{16}.$$

$$17.18. \quad y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4.$$

$$17.20. \quad y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2} + 1, 0 \leq x \leq 9/16.$$

$$17.22. \quad y = \ln 7 - \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

$$17.23. y = \operatorname{ch} x + 3, 0 \leq x \leq 1.$$

$$17.25. y = \ln \cos x + 2, 0 \leq x \leq \pi/6.$$

$$17.27. y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, 0 \leq x \leq 2.$$

$$17.29. y = (e^{2x} + e^{-2x} + 3)/4, 0 \leq x \leq 2.$$

$$17.24. y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 3/4.$$

$$17.26. y = e^x + 26, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$$

$$17.28. y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2}, 0 \leq x \leq 1/2.$$

$$17.30. y = e^x + e, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$$

Задача 18. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

$$18.1. \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi.$$

$$18.3. \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 2.$$

$$18.5. \begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$18.7. \begin{cases} x = 3(1 - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$$

$$\pi \leq t \leq 2\pi.$$

$$18.9. \begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$18.11. \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$18.13. \begin{cases} x = 2.5(t - \sin t), \\ y = 2.5(1 - \cos t), \end{cases}$$

$$\pi/2 \leq t \leq \pi.$$

$$18.15. \begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi.$$

$$18.17. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi/6.$$

$$18.2. \begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$18.4. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi.$$

$$18.6. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi.$$

$$18.8. \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \end{cases}$$

$$\pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$$

$$18.10. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$18.12. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases}$$

$$\pi/2 \leq t \leq \pi.$$

$$18.14. \begin{cases} x = 3.5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3.5(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$18.16. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$18.18. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$18.19. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(t - \cos t), \end{cases}$$

$$\pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$$

$$18.21. \begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi/4.$$

$$18.23. \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases}$$

$$\pi/6 \leq t \leq \pi/4.$$

$$18.25. \begin{cases} x = 2(1 - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$18.27. \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$18.29. \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi/4.$$

$$18.20. \begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$18.22. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$18.24. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 3\pi/2.$$

$$18.26. \begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi.$$

$$18.28. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 3\pi.$$

$$18.30. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases}$$

$$\pi/6 \leq t \leq \pi/4.$$

Задача 19. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

$$19.1. \rho = 3e^{3\varphi/4}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.3. \rho = \sqrt{2}e^\varphi, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.5. \rho = 6e^{12\varphi/5}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.7. \rho = 4e^{4\varphi/3}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.9. \rho = 5e^{5\varphi/12}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.11. \rho = 1 - \sin \varphi, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.13. \rho = 3(1 + \sin \varphi), -\pi/6 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.15. \rho = 5(1 - \cos \varphi), -\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.17. \rho = 7(1 - \sin \varphi), -\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.19. \rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 3/4.$$

$$19.21. \rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 5/12.$$

$$19.23. \rho = 4\varphi, 0 \leq \varphi \leq 3/4.$$

$$19.25. \rho = 5\varphi, 0 \leq \varphi \leq 12/5.$$

$$19.27. \rho = 8 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/4.$$

$$19.29. \rho = 2 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.2. \rho = 2e^{4\varphi/3}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.4. \rho = 5e^{5\varphi/12}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.6. \rho = 3e^{3\varphi/4}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.8. \rho = \sqrt{2}e^\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.10. \rho = 12e^{12\varphi/5}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.12. \rho = 2(1 - \cos \varphi), -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2.$$

$$19.14. \rho = 4(1 - \sin \varphi), 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.16. \rho = 6(1 + \sin \varphi), -\pi/2 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.18. \rho = 8(1 - \cos \varphi), -2\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.20. \rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 4/3.$$

$$19.22. \rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 12/5.$$

$$19.24. \rho = 3\varphi, 0 \leq \varphi \leq 4/3.$$

$$19.26. \rho = 2 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.28. \rho = 6 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.30. \rho = 8 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/4.$$

Задача 20. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями

$$20.1. x^2/9 + y^2 = 1, z = y, z = 0 (y \geq 0).$$

$$20.2. z = x^2 + 4y^2, z = 2.$$

$$20.3. x^2/9 + y^2/4 - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$$

$$20.4. x^2/9 + y^2/4 - z^2/36 = -1, z = 12.$$

$$20.5. x^2/16 + y^2/9 + z^2/4 = 1, z = 1, z = 0.$$

$$20.6. x^2 + y^2 = 9, z = y, z = 0 (y \geq 0).$$

$$20.7. z = x^2 + 9y^2, z = 3.$$

$$20.8. x^2/4 + y^2 - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$$

- 20.9. $x^2/9 + y^2/16 - z^2/64 = -1$, $z = 16$.
 20.10. $x^2/16 + y^2/9 + z^2/16 = 1$, $z = 2$, $z = 0$.
 20.11. $x^2/3 + y^2/4 = 1$, $z = y\sqrt{3}$, $z = 0$ ($y \geq 0$).
 20.12. $z = 2x^2 + 8y^2$, $z = 4$.
 20.13. $x^2/81 + y^2/25 - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 2$.
 20.14. $x^2/4 + y^2/9 - z^2/36 = -1$, $z = 12$.
 20.15. $x^2/16 + y^2/9 + z^2/36 = 1$, $z = 3$, $z = 0$.
 20.16. $x^2/3 + y^2/16 = 1$, $z = y\sqrt{3}$, $z = 0$ ($y \geq 0$).
 20.17. $z = x^2 + 5y^2$, $z = 5$.
 20.18. $x^2/9 + y^2/4 - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 4$.
 20.19. $x^2/9 + y^2/25 - z^2/100 = -1$, $z = 0$, $z = 20$.
 20.20. $x^2/16 + y^2/9 + z^2/64 = 1$, $z = 4$, $z = 0$.
 20.21. $x^2/27 + y^2/25 = 1$, $z = y/\sqrt{3}$, $z = 0$ ($y \geq 0$).
 20.22. $z = 4x^2 + 9y^2$, $z = 6$.
 20.23. $x^2 + y^2/4 - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 3$.
 20.24. $x^2/25 + y^2/9 - z^2/100 = -1$, $z = 20$.
 20.25. $x^2/16 + y^2/9 - z^2/100 = 1$, $z = 5$, $z = 0$.
 20.26. $x^2/27 + y^2 = 1$, $z = y/\sqrt{3}$, $z = 0$ ($y \geq 0$).
 20.27. $z = 2x^2 + 18y^2$, $z = 6$.
 20.28. $x^2/25 + y^2/9 - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 2$.
 20.29. $x^2/16 + y^2/9 - z^2/64 = -1$, $z = 16$.
 20.30. $x^2/16 + y^2/9 + z^2/144 = 1$, $z = 6$, $z = 0$.

Решение типового варианта индивидуального задания №3

Интегралы.

Задача №1. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$

Решение: Применим формулу интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x} &= \begin{cases} u = x, du = dx \\ dv = \frac{\cos x}{\sin^3 x}, v = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} = \int \frac{d \sin x}{\sin^3 x} = \\ = \int \sin^{-3} x d \sin x = \frac{\sin^{-2} x}{-2} = -\frac{1}{2 \sin^2 x} \end{cases} = \\ &= -\frac{x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + C \\ \text{Ответ: } \int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x} &= C - \frac{x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x \end{aligned}$$

Задача №2. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$

Решение: Применим метод замены переменной

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2t dt \\ \sqrt{x} = t \end{matrix} \right| = \int \frac{(1-t)2t dt}{t(t^2+1)} = 2 \int \frac{1-t}{t^2+1} dt = 2 \left(\int \frac{dt}{t^2+1} - \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} \right) =$$

$$= 2 \left(\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) \right) + C = 2 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln|x+1| \right) + C$$

Ответ: $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx = 2 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln|x+1| \right) + C$

Задача №3. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx$

Решение: Так как старшие степени многочленов в числителе и знаменателе дроби равны, то нужно выделить целую часть дроби. Сначала выполним умножение в знаменателе, записав многочлен по убывающим степеням x .

$$x(x+4)(x-2) = x(x^2+4x-2x-8) = x(x^2+2x-8) = x^3+2x^2-8x$$

Теперь разделим числитель дроби на знаменатель

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - 40x - 8}{x^3 + 2x^2 - 8x} &= \frac{2x^3 + 4x^2 - 16x - 4x^2 - 24x - 8}{x^3 + 2x^2 - 8x} = \frac{2x^3 + 4x^2 - 16x}{x^3 + 2x^2 - 8x} - \frac{4x^2 + 24x + 8}{x^3 + 2x^2 - 8x} = \\ &= 2 - \frac{4x^2 + 24x + 8}{x^3 + 2x^2 - 8x} \end{aligned}$$

Таким образом имеем

$$\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx = \int \left(2 - \frac{4x^2 + 24x + 8}{x(x+4)(x-2)} \right) dx = 2x - 4 \int \frac{x^2 + 6x + 2}{x(x+4)(x-2)} dx$$

Теперь разложим дробь $\frac{x^2 + 6x + 2}{x(x+4)(x-2)}$ на сумму дробей

$$\frac{x^2 + 6x + 2}{x(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-2}, \text{ где } A, B, C \text{ -- неопределённые коэффициенты.}$$

$$\frac{x^2 + 6x + 2}{x(x+4)(x-2)} = \frac{A(x^2 + 2x - 8) + B(x^2 - 2x) + C(x^2 + 4x)}{x(x+4)(x-2)}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых x , получим систем

$$\left. \begin{aligned} x^2: \quad A + B + C &= 1 \\ x: \quad 2A - 2B + 4C &= 6 \\ x^0: \quad -8A &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= -1/4 \\ B + C &= 5/4 \\ B + 2C &= 13/4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= -1/4 \\ B &= -1/4 \\ C &= 3/2 \end{aligned} \right\}$$

$$\int \frac{x^2 + 6x + 2}{x(x+4)(x-2)} dx = \int \frac{-\frac{1}{4}}{x} dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{x+4} dx + \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-2} dx =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x+4| - \frac{1}{4} \ln|x-2| + C$$

Ответ: $\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx = 2x + \ln|x| - 6 \ln|x+4| + \ln|x-2| + C$

Задача №4. Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} dx$$

Решение: Дробь под знаком интеграла правильная, так как старшая степень многочлена в числителе меньше старшей степени многочлена в знаменателе (4). Разложим дробь на сумму простых дробей

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} = \frac{A^{(x-2)^1}}{x-2} + \frac{B^{(x-2)(x^2+4x-4)}}{x+2} + \frac{C^{(x^2-4)}}{(x+2)^2} + \frac{D^{(x-2)}}{(x+2)^3} \text{ имеем}$$

$$x^3 + 6x^2 + 13x + 6 = A(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + B(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) + C(x^2 - 4) + D(x - 2)$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых x , получим систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} x^3: A + B = 1 \\ x^2: 6A + B + C = 6 \\ x: 12A - 4B + D = 13 \\ x^0: A - 8B - 4C - 2D = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 1 - B \\ 6 - 6B + 2B + C = 6 \\ 12 - 12B - 4B + D = 13 \\ 8 - 8B - 8B - 4C - 2D = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 1 - B \\ -4B + C = 0 \\ -16B + D = 1 \\ -16B - 4C - 2D = -2 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 1 - B \\ C = 4B \\ D = 1 + 16B \\ -64B = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = 1 \end{array} \right\}$$

Итак,

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{(x+2)^3} = \ln|x-2| - \frac{1}{2(x+2)^2} + C$$

Ответ: $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} dx = \ln|x-2| - \frac{1}{2(x+2)^2} + C$

Задача №5. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx$

Решение: Дробь под знаком интеграла правильная, поэтому представим её как сумму простых дробей.

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}; \text{ получим}$$

$$(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)=2x^3+3x^2+3x+2$$

$$Ax^3+Bx^2+Ax+B+Cx^3+Dx^2+Cx^2+Dx+Cx+D=2x^3+3x^2+3x+2$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых x , получим систем

$$\text{уравнений} \quad \left. \begin{array}{l} x^3: A+C=2 \\ x^2: B+C+D=3 \\ x: A+C+D=3 \\ x^0: B+D=2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} D=1 \\ C=1 \\ A=-2-C \\ B=2-D \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} A=1 \\ B=1 \\ C=1 \\ D=1 \end{array} \right\}$$

Таким образом получим

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx = \int \frac{x+1}{x^2 + x + 1} dx + \int \frac{x+1}{x^2 + 1} dx$$

Первый из полученных интегралов вычисляем

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2 + x + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \\ \text{так:} \quad &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

Второй интеграл будет вычислен так:

$$\int \frac{x+1}{x^2 + x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x + C$$

Ответ:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} x + \ln \sqrt{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} + C$$

Задача №6. Вычислить определённый интеграл $\int \frac{\sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{5}{2}} \sqrt{x^2}} dx$

Решение: Перепишем интеграл в виде $\int x^{-\frac{7}{5}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} dx$ и применим

третью подстановку при интегрировании дифференциального бинома

$\int x^m (a + bx^n)^p dx$, так как у нас $p=1/5$, $m=-7/5$, $n=1/3$ и

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{-\frac{7}{5}+1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{5} = -\frac{6}{5} + \frac{1}{5} = -1 - \text{целое поэтому}$$

$$x^{-\frac{1}{3}} + 1 = t^5 \Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} = t^5 - 1, x = (t^5 - 1)^{-3},$$

$$x^{\frac{1}{3}} = (t^5 - 1)^{-1}, 1 + x^{\frac{1}{3}} = t^5 x^{\frac{1}{3}} = t^5 (t^5 - 1)^{-1}$$

$$dx = -3(t^5 - 1)^{-4} 5t^4 dt = -15t^4 (t^5 - 1)^{-4} dt$$

Таким образом $\int x^{-\frac{7}{5}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} dx =$

$$= \int (t^5 - 1)^{\frac{21}{5}} t (t^5 - 1)^{-\frac{1}{5}} (-15t^4) (t^5 - 1)^{-4} dt = -15 \int t^5 dt = -15 \frac{t^6}{6} + C = C - \frac{5}{2} t^6 =$$

$$= C - 2.5 \left(x^{-\frac{1}{3}} + 1 \right)^6 = C - 2.5 \left[x^{\frac{1}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}} \right) \right]^6 = C - 2.5 x^{\frac{2}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}} \right)^6 =$$

$$= C - \frac{2.5 \sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x})^6}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Ответ: $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{5}{3}} \sqrt{x^2}} dx = C - \frac{2.5 \sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x})^6}}{\sqrt[3]{x^2}}$

Задача №7. Вычислить определённый интеграл $\int_{-2}^0 (x^2 + 2) e^{\frac{x}{2}} dx$

Решение: Применим формулу интегрирования по частям в определённом

интеграле $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$

$$\int_{-2}^0 (x^2 + 2) e^{\frac{x}{2}} dx = \left| u = x^2 + 2, du = 2x dx \right. \\ \left. dv = e^{\frac{x}{2}} dx, v = \int e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} \right| = 2e^{\frac{x}{2}} (x^2 + 2) \Big|_{-2}^0 - 4 \int_{-2}^0 x e^{\frac{x}{2}} dx =$$

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^{\frac{x}{2}}, v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{array} \right| &= 2e^0 \cdot 2 - 2e^{-1} \cdot 6 - 4 \left(2xe^{\frac{x}{2}} \Big|_{-2}^0 - 2 \int_{-2}^0 e^{\frac{x}{2}} dx \right) = \\
 &= 4 - \frac{12}{e} - 4 \left(0 - (-4e^{-1}) - 2 \cdot 2e^{\frac{x}{2}} \Big|_{-2}^0 \right) = 4 - \frac{12}{e} - \frac{16}{e} + 16(1 - e^{-1}) = \\
 &= 4 - \frac{28}{e} + 16 - \frac{16}{e} = 20 - \frac{44}{e} \\
 \text{Ответ: } \int_{-2}^0 (x^2 + 2)e^{\frac{x}{2}} dx &= 20 - \frac{44}{e}
 \end{aligned}$$

Задача №8. Вычислить определённый интеграл $\int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

Решение: Применим метод замены переменной в определённом интеграле

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t), dx = \varphi'(t) dt \\ t = \psi(x), t_1 = \psi(a), t_2 = \psi(b) \end{array} \right| = \\
 &= \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\
 \int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}} &= \left| \begin{array}{l} x-1 = t^3, x = t^3 + 1, dx = 3t^2 dt \\ t = \sqrt[3]{x-1}, t_1 = \sqrt[3]{2-1} = 1, t_2 = \sqrt[3]{9-1} = 2 \end{array} \right| = 3 \int_1^2 \frac{(t^3 + 1)t^2 dt}{t} = \\
 &= 3 \int_1^2 (t^4 + t) dt = 3 \left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \\
 &= 3 \left(\frac{32}{5} + 2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) = 3 \left(\frac{31}{5} + \frac{3}{2} \right) = \frac{3(62+15)}{10} = \frac{77 \cdot 3}{10} = \frac{231}{10} = 23.1
 \end{aligned}$$

Задача №9. Вычислить определённый интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x}$

Решение: Вычислим определённый интеграл, применяя метод замены переменной, а именно, универсальную подстановку

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctg t \Rightarrow x = 2 \arctg t,$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \quad t_1 = \operatorname{tg} 0 = 0,$$

$$t_2 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2 \cdot 2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x} &= \int_0^1 \frac{2t \cdot 2dt}{(1+t^2)(1+t^2)\left(5 + \frac{3 \cdot 2t}{1+t^2}\right)} = \\ &= 4 \int_0^1 \frac{t(1+t^2)dt}{(1+t^2)^2(5+5t^2+6t)} = 4 \int_0^1 \frac{tdt}{(t^2+1)(5t^2+6t+1)}; \end{aligned}$$

Вычислим сначала неопределённый интеграл $\int \frac{tdt}{(t^2+1)(5t^2+6t+1)}$

$$\frac{t}{(t^2+1)(5t^2+6t+1)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{5t^2+6t+1}$$

$$(At+B)(5t^2+6t+1) + (Ct+D)(t^2+1) = t$$

$$\left. \begin{aligned} t^3: 5A + C &= 0 \\ t^2: 6A + 5B + D &= 0 \\ t: A + 6B + C &= 1 \\ t^0: B + D &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} C &= -5A \\ 6A + 4B &= 0 \\ B &= -1.5A \\ D &= 1.5A \end{aligned} \right\}$$

из (1) $\Rightarrow C = -5A$; (2)-(4) $\Rightarrow 6A + 4B = 0 \Rightarrow B = -1.5A$; из (4) $\Rightarrow D = -B \Rightarrow D = 1.5A$.

Тогда в уравнении (3) имеем:

$$A - 6 \cdot 1.5A - 5A = 1 \Rightarrow A - 9A - 5A = 1 \Rightarrow -13A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{13} \Rightarrow C = \frac{5}{13}, B = \frac{3}{26},$$

$$D = -\frac{3}{26}.$$

$$\begin{aligned} 4 \int \frac{tdt}{(t^2+1)(5t^2+6t+1)} &= 4 \left[\int \frac{-\frac{1}{13}t + \frac{3}{26}}{t^2+1} dt + \int \frac{\frac{5}{13}t - \frac{3}{26}}{5t^2+6t+1} dt \right] = \\ &= 4 \left[-\frac{1}{26} \int \frac{2tdt}{t^2+1} + \frac{3}{26} \int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{26} \int \frac{10t-3}{5t^2+6t+1} dt \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{26} \left[-\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + 3\operatorname{arctgt} + \left(\int \frac{10t+6}{5t^2+6t+1} dt - \frac{9}{5} \int \frac{dt}{t^2+\frac{6}{5}t+\frac{1}{5}} \right) \right] = \\
&= 0.1 \cdot \left[-\ln(t^2+1) + 3\operatorname{arctgt} + \left(\ln(5t^2+6t+1) - \frac{9}{5} \int \frac{dt}{\left(t+\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} - \frac{9}{25}} \right) \right] = \\
&= 0.1 \cdot \left[\ln \frac{(5t^2+6t+1)}{(t^2+1)} + 3\operatorname{arctgt} - \frac{9}{5} \int \frac{dt}{\left(t+\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}} \right] = \\
&= 0.1 \cdot \left[\ln \frac{5t^2+6t+1}{t^2+1} + 3\operatorname{arctgt} - \frac{9}{5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{5}} \ln \left| \frac{t+\frac{3}{5}-\frac{2}{5}}{t+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}} \right| \right] = \\
&= 0.1 \ln \frac{5t^2+6t+1}{t^2+1} + 0.4\operatorname{arctgt} - 0.3 \ln \left| \frac{5t+1}{5t+5} \right|.
\end{aligned}$$

Теперь остаётся вычислить определённый интеграл

$$\begin{aligned}
4 \int_0^1 \frac{tdt}{(t^2+1)(5t^2+6t+1)} &= \left(0.1 \ln \frac{5t^2+6t+1}{t^2+1} + 0.4\operatorname{arctgt} - 0.3 \ln \frac{5t+1}{5t+5} \right) \Big|_0^1 = \\
&= 0.4 \ln \frac{2}{12} - 1.2\operatorname{arctg}1 - 0.9 \ln \frac{6}{10} - 0.4 \ln 1 + 1.2\operatorname{arctg}0 + 0.9 \ln \frac{1}{5} = \\
&= 0.4 \ln \frac{1}{6} - 1.2 \frac{\pi}{4} - 0.9 \ln \frac{3}{5} + 0.9 \ln \frac{1}{5} = 0.4 \ln \frac{1}{6} - 0.3\pi + 0.9 \ln \frac{1 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \\
&= 0.4 \ln \frac{1}{6} + 0.9 \ln \frac{1}{3} - 0.3\pi
\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{5+3 \sin x} = 0.4 \ln \frac{1}{6} + 0.9 \ln \frac{1}{3} - 0.3\pi$$

Задача №10. Вычислить определённый интеграл $\int_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}} \frac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5} dx$

Решение: Вычислим интеграл, применяя метод замены переменной.

Пусть

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{6}} = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{1} - 1 =$$

6 Замена

$$= 6 - 1 = 5 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{5} \text{ берём } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}, \text{ т. к. как } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

переменной

$$\operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$t_1 = \operatorname{tg} 0 = 0, t_2 = \operatorname{tg}(\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}) = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$$

$$\text{Таким образом } \int_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5} dx = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{3t^2 - 1}{t^2 + 5} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{(3t^2 - 1) dt}{(t^2 + 5)(t^2 + 1)},$$

Вычислим сначала неопределённый интеграл, а потом воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница

$$\frac{3t^2 - 1}{(t^2 + 5)(t^2 + 1)} = \frac{At + B}{t^2 + 5} + \frac{Ct + D}{t^2 + 1} \quad (At+B)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2+5)=3t^2-1$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых t , получим систем

$$\text{уравнений } \left. \begin{array}{l} t^3: A + C = 0 \\ t^2: B + D = 3 \\ t: A + 5C = 0 \\ t^0: B + 5D = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} C = -A \\ A - 5A = 0 \\ D = 3 - B \\ B + 15 - 5B = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0 \\ C = 0 \\ -4B = -16 \\ D = 3 - B \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 4 \\ C = 0 \\ D = -1 \end{array} \right\}$$

$$\int \frac{3t^2 - 1}{(t^2 + 5)(t^2 + 1)} dt = 4 \int \frac{dt}{t^2 + 5} - \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{4}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} t + C.$$

$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{(3t^2 - 1) dt}{(t^2 + 5)(t^2 + 1)} = \left(\frac{4}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} t \right) \Big|_0^{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} 0 \right) -$$

$$- (\operatorname{arctg} \sqrt{5} - \operatorname{arctg} 0) = \frac{4}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \sqrt{5} = \frac{4}{\sqrt{5}} \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \sqrt{5} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} \sqrt{5}$$

$$\text{Ответ: } \int_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5} dx = \frac{\pi}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} \sqrt{5}$$

Задача №11. Вычислить определённый интеграл $\int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx$

$$\text{Решение: } \int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx = \int_0^{2\pi} (\sin 3x \cos 3x)^4 dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 6x \right)^4 dx = \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} \sin^4 6x dx = \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 12x}{2} \right)^2 dx = \\
&= \frac{1}{64} \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos 12x + \cos^2 12x) dx = \frac{1}{64} \left[\left(x - \frac{2}{12} \sin 12x \right) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 24x) dx \right] \\
&= \frac{1}{64} \left[2\pi - \frac{1}{6} (\sin 24\pi - \sin 0) + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{24} \sin 24x \right) \Big|_0^{2\pi} \right] = \\
&= \frac{1}{64} \left[2\pi + \frac{1}{2} \left(2\pi + \frac{1}{24} (\sin 48\pi - \sin 0) \right) \right] = \frac{1}{64} 3\pi = \frac{3\pi}{64} \\
\text{Ответ: } \int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx &= \frac{3\pi}{64}
\end{aligned}$$

Задача №12. Вычислить определённый интеграл

$$\int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{x+2}) dx}{(\sqrt{x+2} + 4\sqrt{2-x})(x+2)^2}$$

Решение: Вычислим интеграл, применив метод замены переменной, предварительно разделив числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{x+2}$, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \frac{4\sqrt{\frac{2-x}{x+2}} - 1}{1 + 4\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}} \frac{dx}{(x+2)^2} = \left| \frac{2-x}{x+2} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2-x}{x+2}} \right. \\
&\quad \left. t_1 = 1, t_2 = 0; \right. \\
&2t dt = \frac{-1(x+2) - (2-x)}{(x+2)^2} dx = \frac{-x-2-2+x}{(x+2)^2} dx = \\
&= -\frac{4dx}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{dx}{(x+2)^2} = -\frac{1}{2} t dt \Big| = -\frac{1}{2} \int_1^0 \frac{(4t-1)t dt}{4t+1} = -\frac{1}{2} \int_1^0 \frac{4t^2 - t}{4t+1} dt = \\
&= -\frac{1}{2} \int_1^0 \left(t - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{4t+1} \right) dt = -\frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \frac{1}{4} \ln|4t+1| \right) \Big|_1^0 = -\frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \ln 5 \right) = \\
&= \frac{1}{16} \ln 5
\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{x+2}) dx}{(\sqrt{x+2} + 4\sqrt{2-x})(x+2)^2} = \frac{1}{16} \ln 5$$

Задача №13. Вычислить определённый интеграл $\int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Решение: Применим метод замены переменной

$$x = 3 \sin t \Rightarrow dx = 3 \cos t dt; \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = 3 \cos t;$$

$$t = \arcsin \frac{x}{3} \Rightarrow t_1 = \arcsin 0 = 0 \quad t_2 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

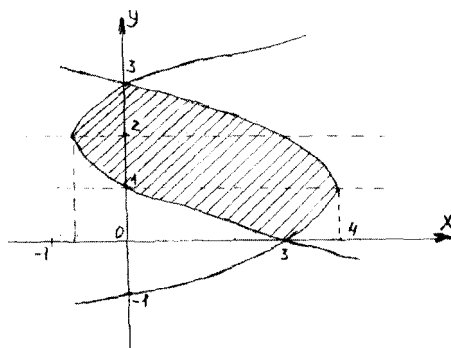
Таким образом

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{9 \sin^2 t \cdot 3 \cos t dt}{3 \cos t} = 9 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2t) dt = \\ &= \frac{9}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{9}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{9}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{8} (2\pi - 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{3}{8} (2\pi - 3\sqrt{3})$$

Задача №14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $x = 4 - (y-1)^2$, $x = y^2 - 4y + 3$

Решение: Графиками функций являются параболы $(y-1)^2 = -(x-4)$ - вершина в точке $(4,1)$, ось симметрии $y=1$, ветви параболы направлены влево от вершины $x = y^2 - 4y + 3 \Rightarrow (y-2)^2 - 1 \Rightarrow (y-2)^2 = x+1$ - вершина в точке $(-1,2)$, ось симметрии $y=2$, ветви направлены вправо от вершины. Найдём точки пересечения парабол с осями координат:



$$\begin{aligned} x = 4 - (y-1)^2 &= y^2 - 4y + 3 & 4 - y^2 + 2y - 1 &= y^2 - 4y + 3 & 2y^2 - 6y &= 0 & 2y(y-3) &= 0 \\ y &= 0, y = 3 \end{aligned}$$

Итак, у парабол есть общие точки - точки пересечения (3,0) и (0,3)

Искомая площадь вычисляется так: $S = \int [x_1(y) - x_2(y)] dy$.

$$S = \int_0^3 \left[4 - (y-1)^2 - (y-2)^2 + 1 \right] dy = \left[5y - \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-2)^3}{3} \right]_0^3 =$$

$$= 15 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 15 \quad (\text{кв.ед}).$$

Ответ: $S=15$ (кв.ед)

Задача №15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

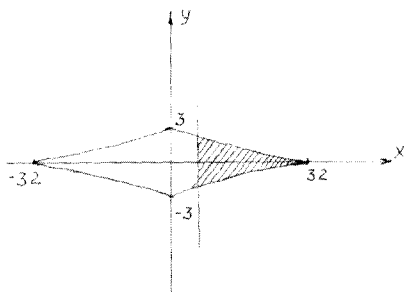
$$\left. \begin{aligned} x &= 32 \cos^3 t \\ y &= 3 \sin^3 t \end{aligned} \right\} \quad x = 12\sqrt{3} \quad (x \geq 12\sqrt{3}) \quad 0 < t < 2\pi$$

Решение: Линия, задаваемая уравнениями, является астроидой, симметричной относительно осей координат

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{9 \sin^2 t \cos t dt}{-32 \cdot 3 \cos^2 t \sin t dt} = -\frac{3}{32} \operatorname{tg} t$$

$$\text{Приравниваем } 12\sqrt{3} = 32 \cos^3 t \quad \cos^3 t = \frac{12\sqrt{3}}{32}; \quad \cos^3 t = \frac{3\sqrt{3}}{8}; \quad t_1 = -\frac{\pi}{6}; \quad t_2 = \frac{\pi}{6}.$$

Эскиз фигуры без точного соблюдения масштаба приводится. При нахождении площади фигуры используем формулу $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$, у нас



$$\frac{1}{2}S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 3 \sin^3 t (-32 \cdot 3 \cos^2 t \sin t) dt = -288 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t \sin^4 t dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= -288 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t (\sin t \cos t)^2 dt = -288 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2t) \sin^2 2t dt = \\
 &= -36 \left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin^2 2t - \cos 2t \sin^2 2t) dt \right] = -36 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 4t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2t d \sin 2t \right] = \\
 &= -18 \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t - \frac{\sin^3 2t}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -18 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{3} - \frac{\sin^3 \frac{\pi}{3}}{3} - 0 \right) = \\
 &= -18 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8 \cdot 3} \right) = -18 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = -18 \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} = -\frac{3(2\pi - 3\sqrt{3})}{2}
 \end{aligned}$$

Результат получился отрицательный потому, что при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

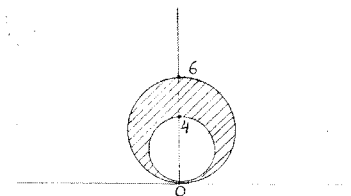
$$x = -96 \cos^2 t \sin t < 0. \text{ Поэтому } \frac{1}{2} S = \left| -\frac{3(2\pi - 3\sqrt{3})}{2} \right| = \frac{3(2\pi - 3\sqrt{3})}{2}$$

Ответ: $S = 3(2\pi - 3\sqrt{3})$ (кв.ед.)

Задача №16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярных координатах. $\rho = 6 \sin \varphi$ $\rho = 4 \sin \varphi$

Решение: Область определения данных функций $\rho \geq 0$, т.е. $\sin \varphi \geq 0 \Rightarrow 2\pi k \leq \varphi \leq \pi + 2\pi k$, при $k=0$ получим $0 \leq \varphi \leq \pi$. Искомая площадь выразится формулой:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\rho_2^2 - \rho_1^2) d\varphi, \text{ у нас } \alpha=0, \beta=\pi, \rho_2=6\sin\varphi, \rho_1=4\sin\varphi$$



$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (36 \sin^2 \varphi - 16 \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \cdot 20 \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi =$$

$$= 10 \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 5 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = 5 \left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi - 0 \right) = 5\pi \quad (\text{кв.ед.})$$

Ответ: 5π (кв.ед.)

Задача №17. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением

$$y = \frac{1}{2} (1 - e^x - e^{-x}), \quad 0 \leq x \leq 3$$

Решение: Воспользуемся формулой вычисления длины дуги кривой:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad \text{у нас } a=0, \quad b=3, \quad y' = \frac{1}{2} (-e^x + e^{-x})$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4} (e^{-2x} - 2 + e^{2x}) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2$$

$$\ell = \int_0^3 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \Big|_0^3 = \frac{1}{2} (e^3 - e^{-3} - 1 + 1) = \frac{1}{2} (e^3 - e^{-3}) = sh3 \quad (\text{лин.ед.})$$

Ответ: $\ell = \frac{1}{2} (e^3 - e^{-3}) = sh3$ (лин.ед.)

Задача №18. Вычислить длину дуги кривой, заданной

параметрическими уравнениями
$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Решение: Воспользуемся формулой вычисления длины дуги кривой:

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \quad \text{у нас } t_1=0, \quad t_2=\pi$$

$$x' = 2t \sin t + (t^2 - 2) \cos t + 2 \cos t - 2t \sin t = t^2 \cos t$$

$$y' = -2t \cos t - (2 - t^2) \sin t + 2 \sin t + 2t \cos t = t^2 \sin t$$

$$\ell = \int_0^{\pi} \sqrt{t^4 \cos^2 t + t^4 \sin^2 t} dt = \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} \quad (\text{лин.ед.})$$

Ответ: $\ell = \frac{\pi^3}{3}$ (лин.ед.)

Задача №19. Вычислить длину дуги кривой, заданной в полярной

системе координат $\rho = 6 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$

Решение: Воспользуемся формулой $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$, у нас $\alpha=0$,

$\beta = \frac{\pi}{3}$, $\rho = 6 \cos \varphi$, поэтому

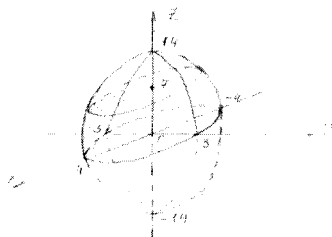
$$\ell = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{36 \sin^2 \varphi + 36 \cos^2 \varphi} d\varphi = 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = 6\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$$

Ответ: $\ell = 2\pi$ (лин.ед.)

Задача №20. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{196} = 1, \quad z=7, \quad z=0$$

Решение: В данной задаче задан эллипсоид ($a=4, b=3, c=14$), координатная плоскость OXY ($z=0$) и плоскость, ей параллельная, $z=7$. Рассекая эллипсоид плоскостью, параллельной OXY на расстоянии z от нее ($0 \leq z \leq 7$), получим эллипс



$$\frac{x^2}{16 \left(1 - \frac{z^2}{196}\right)} + \frac{y^2}{9 \left(1 - \frac{z^2}{196}\right)} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{4 \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{196}}\right)^2} + \frac{y^2}{3 \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{196}}\right)^2} = 1$$

Напомним, что площадь эллипса равна произведению значений его полуосей на число π , т.е. если уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow S = \pi ab$. У нас

$$a = 4\sqrt{1 - \frac{z^2}{196}}, \quad b = 3\sqrt{1 - \frac{z^2}{196}}, \Rightarrow S(z) = 12\pi \left(1 - \frac{z^2}{196}\right)$$

Применим формулу вычисления объёма тела по известной площади параллельного сечения:

$$V' = \int_a^b S(z) dz. \quad \text{В нашей задаче}$$

$$V = 12\pi \int_0^7 \left(1 - \frac{z^2}{196}\right) dz = 12\pi \left(z - \frac{z^3}{3 \cdot 196}\right) \Big|_0^7 = 12\pi \left(7 - \frac{7^3}{3 \cdot 196}\right) =$$

$$= 12\pi \left(7 - \frac{7}{3 \cdot 2 \cdot 2}\right) = 84\pi \left(1 - \frac{1}{12}\right) = 84\pi \cdot \frac{11}{12} = 77\pi (\text{куб.ед.})$$

Ответ: $V = 77\pi$ (куб.ед.)

Индивидуальное задание №4 Числовые и функциональные ряды

Задача 1. Найти сумму ряда

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}$

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}$

1.5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}$

1.9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}$

1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 + 24n - 5}$

1.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 13}$

1.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 20}$

1.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{6n^2 - 8n - 15}$

1.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6}$

1.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 35n - 6}$

1.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35}$

1.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}$

1.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 + 8n - 15}$

1.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}$

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8}$

1.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 28n - 45}$

1.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12}$

1.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48}$

1.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 + 84n - 13}$

1.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 35n - 6}$

1.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 42n - 40}$

1.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 21n - 10}$

1.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}$

1.22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}$

1.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 21n - 10}$

1.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 - 5n - 6}$

1.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 56n - 33}$

$$1.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 - 12n - 35}$$

$$1.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 7n - 12}$$

Задача 2. Найти сумму ряда

$$2.1. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$$

$$2.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$$

$$2.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}$$

$$2.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.11. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}$$

$$2.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n-10}{(n-1)(n+1)(n-2)}$$

$$2.17. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-4}{n(n-1)(n-2)}$$

$$2.19. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}$$

$$2.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.25. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$$

$$2.27. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n+1}{(n-1)n(n+1)}$$

$$2.29. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n-1)(n-2)}$$

$$2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{(n+3)(n+2)n}$$

$$2.4. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$$

$$2.6. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-5}{n(n^2-1)}$$

$$2.8. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-4)}$$

$$2.10. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$$

$$2.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+2)(n+1)n}$$

$$2.14. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+5}{(n+2)(n^2-1)}$$

$$2.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n^2-1)}$$

$$2.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+9}{n(n+1)(n+3)}$$

$$2.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.24. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-2}{(n-1)n(n+1)}$$

$$2.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n(n+1)(n+3)}$$

$$2.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-n}{(n+3)(n+1)n}$$

Задача 3. Исследовать на сходимость указанные ряды с положительными членами

$$3.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+2)!}{n^5}$$

$$3.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{5^n(n+1)!}$$

$$3.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8} \right)^n \left(\frac{1}{n} \right)^7$$

$$3.4. \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}$$

$$\begin{aligned}
3.5. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{3^n} \\
3.7. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n n^7 \\
3.9. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n} \\
3.11. & \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2\pi}{3^n} \\
3.13. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n (n+3)!} \\
3.15. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!} \\
3.17. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)}{(n+1)!} \\
3.19. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} \\
3.21. & \sum_{n=1}^{\infty} (3n-1) \sin \frac{\pi}{4^n} \\
3.23. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{\sqrt{n} 7^n} \\
3.25. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n!} \\
3.27. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} \\
3.29. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n (2n-1)} \\
3.6. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)} \\
3.8. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)} \\
3.10. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n} \\
3.12. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/2}}{n!} \\
3.14. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)} \\
3.16. & \sum_{n=1}^{\infty} n^i \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5^n} \\
3.18. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!} \\
3.20. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)} \\
3.22. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!} \\
3.24. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} \\
3.26. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdots (5n-3)} \\
3.28. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^i}{(2n)!} \\
3.30. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n} \cdot 2^n}
\end{aligned}$$

Задача 4. Исследовать на сходимость указанные ряды с положительными членами

$$\begin{aligned}
4.1. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} \\
4.3. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} \right)^n \\
4.5. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n} \right)^{3n} \\
4.7. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{5^n} \right)^n \\
4.9. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n(n+1))^{2n}} \\
4.2. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n} \right)^{n^2} \\
4.4. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+2))^n} \\
4.6. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2+2} \right)^n \\
4.8. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/(n+1))^n}{2^n} \\
4.10. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{5^n} \right)^{3n}
\end{aligned}$$

$$4.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{ln(n+3)\}^n}$$

$$4.13. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^{n^2}$$

$$4.15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n} \right)^{3n}$$

$$4.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{ln(n+1)\}^{3^2}}$$

$$4.19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3^n} \right)^n$$

$$4.21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 - n - 1}{7n^2 + 3n + 4} \right)^n$$

$$4.23. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3n} \right)^{2n}$$

$$4.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)/n)^{n^2}}{5^n}$$

$$4.27. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{5n+1} \right)^n$$

$$4.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(ln(n+5))^2}$$

$$4.12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1} \right)^{n^2}$$

$$4.14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n^3} \right)^{2n}$$

$$4.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{((n+1)/n)^{n^2}}$$

$$4.18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n} \right)^{n^2}$$

$$4.20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{n^2}$$

$$4.22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n$$

$$4.24. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{5n}$$

$$4.26. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1} \right)^n$$

$$4.28. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n-1} \right)^{2n}$$

$$4.30. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+3}{2n+5} \right)^n$$

Задача 5. Исследовать на сходимость указанные ряды с положительными членами

$$5.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n^2+1} \right)^2.$$

$$5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)ln^3(2n+1)}.$$

$$5.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)ln^2(3n+4)}.$$

$$5.7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7+n}{49+n^2} \right)^2.$$

$$5.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \ln \frac{n+1}{n-1}.$$

$$5.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6+n}{36+n^2}.$$

$$5.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}.$$

$$5.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)ln(3n+2)}.$$

$$5.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}.$$

$$5.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(7n-5)^5}}.$$

$$5.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)ln(3n-1)}.$$

$$5.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)ln(5n-2)}.$$

$$5.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(3+7n)^{10}}}.$$

$$5.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)ln(n+2)}.$$

$$5.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+5)ln(10n+5)}.$$

$$5.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{25+n^2}.$$

$$5.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)ln^5(3+2n)}$$

$$5.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-4)ln^2(9n-4)}.$$

$$5.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+8)ln^3(5n+8)}.$$

$$5.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)ln(n+4)ln(ln(n+4))}.$$

$$5.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(4n-3)^3}}.$$

$$5.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{4+n^2-n}.$$

$$5.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}.$$

$$5.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)ln(n+3)ln(ln(n+3))}$$

$$5.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{(4+9n)^5}}$$

$$5.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{9+n^2-2n}.$$

$$5.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{(7n-5)^3}}$$

$$5.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+8n)ln^3(3+8n)}.$$

$$5.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+3)ln^2(10n+3)}.$$

$$5.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)ln(n+5)ln(ln(n+5))}.$$

Задача 6. Исследовать на абсолютную сходимость указанные ряды

$$6.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n}$$

$$6.3. \sum_{n=0}^{\infty} n(2n-1)x^{n+2}$$

$$6.5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$$

$$6.7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

$$6.9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$6.11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$6.13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}$$

$$6.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)3^n}.$$

$$6.17. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n}$$

$$6.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$$

$$6.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

$$6.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$$

$$6.4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}$$

$$6.6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$6.8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)n}$$

$$6.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3\sqrt{n}}$$

$$6.12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}.$$

$$6.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

$$6.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}.$$

$$6.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+1}.$$

$$6.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 5^n}$$

$$6.22. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{ln(n+1)}.$$

$$6.23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{5n(n+1)}$$

$$6.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^n}{(2n+1)^n}$$

$$6.27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}$$

$$6.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$$

$$6.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$$

$$6.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}}$$

$$6.28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+7} \right)^n$$

$$6.30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n! n \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

Задача 7. Найти область сходимости ряда

$$7.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2 + 1}.$$

$$7.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n}.$$

$$7.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$7.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{2n-1}.$$

$$7.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

$$7.11. \sum_{n=1}^{\infty} (n(n+1)x^n).$$

$$7.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}.$$

$$7.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n-1} n}.$$

$$7.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0,1)^n x^{2n}}{n}.$$

$$7.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}.$$

$$7.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

$$7.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n^3}.$$

$$7.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{3n-1}}.$$

$$7.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}.$$

$$7.29. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \lg \frac{1}{n}.$$

$$7.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^{n-1} \cdot 3^n}.$$

$$7.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}.$$

$$7.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$7.8. \sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$$

$$7.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n (n^2 + 1)}.$$

$$7.12. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \lg \frac{x}{2^n}$$

$$7.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}.$$

$$7.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

$$7.18. \sum_{n=1}^{\infty} (\lg x)^n$$

$$7.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3}^n}.$$

$$7.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$$

$$7.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$$

$$7.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$$

$$7.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{6^n \sqrt[3]{n}}$$

$$7.30. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \frac{x^n}{5^n}.$$

Задача 8*. Найти область сходимости ряда

$$8.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} x^n}{n!}.$$

$$8.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2} x^n}{(n+1)!}.$$

$$8.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^{n+2}}.$$

$$8.4. \sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n.$$

$$8.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}.$$

$$8.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!}.$$

$$8.7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n-1)!}.$$

$$8.8. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}.$$

$$8.9. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}.$$

$$8.10. \sum_{n=1}^{\infty} \lg \frac{x}{2^n}.$$

$$8.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$8.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{x^n}.$$

$$8.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} x^n}.$$

$$8.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x-2)^n}.$$

$$8.15. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n n \ln n}.$$

$$8.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}.$$

$$8.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{2n+1}}.$$

$$8.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nx)^n}.$$

$$8.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

$$8.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

$$8.21. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}.$$

$$8.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}.$$

$$8.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}.$$

$$8.24. \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n.$$

$$8.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}.$$

$$8.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}.$$

$$8.27. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}.$$

$$8.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}.$$

$$8.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}.$$

$$8.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Задача 9. Найти область сходимости ряда

$$9.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n+1}}{2n-1}$$

$$9.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n \ln(1+1/n)}$$

$$9.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$$

$$9.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$$

$$9.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^2}$$

$$9.6. \sum_{n=1}^{\infty} (2+x)^n$$

$$9.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$$

$$9.9. \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} (x+2)^{n^2}$$

$$9.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+10)^n}{n^n}$$

$$9.13. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{n+1} (x+1)^n$$

$$9.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2x)^n}{n - \ln^2 n}$$

$$9.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$$

$$9.19. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n+2}}{n+1} (x-2)^n$$

$$9.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} n^n}$$

$$9.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$$

$$9.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$$

$$9.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$$

$$9.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1) \ln(n+1)}$$

$$9.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1} \sqrt{n^2+1}}$$

$$9.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n \ln(n+1)}$$

$$9.12. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$$

$$9.14. \sum_{x=0}^{\infty} (2-x)^x \sin \frac{\pi}{2^x}$$

$$9.16. \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^x}{(n+1)^2 2^{x-1}}$$

$$9.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}$$

$$9.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}$$

$$9.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$$

$$9.24. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$$

$$9.26. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{(n+1) \ln(n+1)}$$

$$9.28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^{2n} (x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$$

$$9.30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$$

Задача № 10. Найти сумму функционального ряда

$$10.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n-1}$$

$$10.3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) x^{n+2}$$

$$10.5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$10.7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(n-1)}$$

$$10.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$10.2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}$$

$$10.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-1}{x}\right)^{n-1} x^{2n-1}}{4^n (2n-1)}$$

$$10.6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{x^n}$$

$$10.8. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$10.10. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{16^n (2n+1)}$$

$$\begin{array}{ll}
10.11. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} & 10.12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) x^n \\
10.13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} & 10.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} \\
10.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)} & 10.16. \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{n} \right] x^{2n} \\
10.17. \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right] x^{n-1} & 10.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)x^{n+1}} \\
10.19. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} & 10.20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n(n-1)} \\
10.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)} & 10.22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) x^n \\
10.23. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} & 10.24. \sum_{n=1}^{\infty} \left[2^n + \frac{(-1)^n}{n} \right] x^n \\
10.25. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-2)(2n-1)} & 10.26. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} \\
10.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^{n+1} x}{n(n+1)} & 10.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \lg^n x}{n(n+1)} \\
10.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)x^{n+1}} & 10.30. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+(-1)^n}{n(n-1)} x^n
\end{array}$$

Задача № 11. Найти сумму функционального ряда

$$\begin{array}{ll}
11.1. \sum_{n=0}^{\infty} (4n^2 + 9n + 5) x^{n+1} & 11.2. \sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 7n + 4) x^n \\
11.3. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n + 1) x^{n+3} & 11.4. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 4n + 3) x^{n+2} \\
11.5. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 5n + 3) x^n & 11.6. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 5n + 3) x^{n+1} \\
11.7. \sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 8n + 5) x^{n+2} & 11.8. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 8n + 5) x^n \\
11.9. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 7n + 5) x^{n+1} & 11.10. \sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 7n + 5) x^n \\
11.11. \sum_{n=0}^{\infty} n(2n-1) x^{n+2} & 11.12. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n + 1) x^n
\end{array}$$

$$11.13. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n - 1)x^n$$

$$11.15. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 7n + 4)x^n$$

$$11.17. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 2n + 1)x^n$$

$$11.19. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n + 2)x^{n+2}$$

$$11.21. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 5n + 4)x^{n+2}$$

$$11.23. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n - 1)x^{n+1}$$

$$11.25. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n - 2)x^{n+1}$$

$$11.27. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 6n + 5)x^{n+1}$$

$$11.29. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + n + 1)x^{n+1}$$

$$11.14. \sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 5n + 4)x^{n+1}$$

$$11.16. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n - 2)x^{n+1}$$

$$11.18. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n - 1)x^{n+1}$$

$$11.20. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 4n + 3)x^{n+1}$$

$$11.22. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - 2n + 1)x^n$$

$$11.24. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n + 2)x^n$$

$$11.26. \sum_{n=0}^{\infty} (4n^2 + 6n + 5)x^n$$

$$11.28. \sum_{n=0}^{\infty} n(2n+1)x^{n+2}$$

$$11.30. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + n - 1)x^n$$

Задача № 12. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$12.1. \int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx$$

$$12.2. \int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx$$

$$12.3. \int_0^1 \cos x^2 dx$$

$$12.4. \int_0^{0,5} \frac{dx}{4\sqrt[4]{1+x^4}}$$

$$12.5. \int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$$

$$12.6. \int_0^1 \frac{\ln(1+x/5)}{x} dx$$

$$12.7. \int_0^{1,5} \frac{dx}{3\sqrt[3]{27+x^3}}$$

$$12.8. \int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx$$

$$12.9. \int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx$$

$$12.10. \int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx$$

$$12.11. \int_0^1 \frac{dx}{4\sqrt[4]{16+x^4}}$$

$$12.12. \int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$$

$$12.13. \int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x} dx$$

$$12.14. \int_0^2 \frac{dx}{3\sqrt[3]{64+x^3}}$$

$$12.15. \int_0^{0,3} e^{-2x^2} dx$$

$$12.16. \int_0^{0,4} \sin(5x/2)^2 dx$$

$$12.17. \int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx$$

$$12.19. \int_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x} dx$$

$$12.21. \int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1254+x^3}}$$

$$12.23. \int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx$$

$$12.25. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$$

$$12.27. \int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$$

$$12.29. \int_0^{0,5} e^{-3x^2/25} dx$$

$$12.18. \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$$

$$12.20. \int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$$

$$12.22. \int_0^{0,4} e^{-3x^2/4} dx$$

$$12.24. \int_0^{0,4} \cos(5x/2)^2 dx$$

$$12.26. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$$

$$12.28. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$$

$$12.30. \int_0^1 \sin x^2 dx$$

Решение типового варианта индивидуального задания №4

Задача №1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 70n - 24}$.

Решение: Выведем формулу частичной суммы ряда S_n . Для этого разложим общий член ряда $\frac{14}{49n^2 - 70n - 24}$ на сумму простых дробей. Сначала представим квадратный трехчлен в виде произведения простых множителей: $D = 70^2 + 49 \cdot 24 \cdot 4 = 49(100 + 96) = 49 \cdot 196 = (7 \cdot 14)^2 = 98^2$

$$n_{1,2} = \frac{70 \pm 98}{98} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{28}{98} = -\frac{2}{7} \\ \frac{168}{98} = \frac{12}{7} \end{array} \right. \Rightarrow 49n^2 - 70n - 24 = 49 \left(n + \frac{2}{7} \right) \left(n - \frac{12}{7} \right) = (7n+2)(7n-12)$$

Теперь общий член ряда представим в виде суммы простых дробей с неопределенными коэффициентами

$$\frac{14}{49n^2 - 70n - 24} = \frac{A}{7n+2} + \frac{B}{7n-12} = \frac{A(7n-12) + B(7n+2)}{(7n+2)(7n-12)}.$$

Найдем числа A и B , сравнив коэффициенты при одинаковых степенях n

$$\left. \begin{array}{l} n \mid 7A + 7B = 0 \\ n^0 \mid -12A + 2B = 14 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -B \\ 12B + 2B = 14 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -B \\ 14B = 14 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{Итак, } \frac{14}{49n^2 - 70n - 24} = \frac{1}{7n-12} - \frac{1}{7n+2}$$

Выведем формулу частичной суммы ряда S_n :

$$S_n = \frac{1}{-5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \frac{1}{23} + \frac{1}{16} - \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{7n-33} - \frac{1}{7n-19} + \frac{1}{7n-26} - \frac{1}{7n-12} +$$

$$+ \frac{1}{7n-19} - \frac{1}{7n-5} + \frac{1}{7n-12} - \frac{1}{7n+2} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{7n-5} - \frac{1}{7n+2}$$

По определению сумма ряда $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{7n-5} - \frac{1}{7n+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

Ответ: $S = \frac{3}{10}$.

Задача №2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}$

Решение: Преобразуем общий член ряда следующим образом:

$$\frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4n-n+8}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4(n+2)}{n(n+1)(n+2)} - \frac{n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Выведем частичную сумму ряда:

$$S_n = 4 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) - \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) =$$

$$= 4 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) =$$

$$= 4 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = 4 - \frac{4}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} = 3\frac{1}{2} - \frac{4}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

Значит, сумма ряда S по определению равна: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3\frac{1}{2} - \frac{4}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = 3\frac{1}{2}$

Ответ: $S = 3\frac{1}{2}$.

Задача №3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n}2^n}$

Решение: Используем признак Даламбера, вычисляя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, у нас

$$a_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n}2^n}, \quad a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{\sqrt{(n+1)}2^{n+1}}. \text{ Получим}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)\sqrt{n}2^n}{\sqrt{(n+1)}2^{n+1}(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} \cdot \frac{\sqrt{n}2^n}{\sqrt{(n+1)}2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow$$

ряд сходится.

Задача №4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+3}{2n+5} \right)^n$

Решение: Применим радикальный признак Коши, вычисляя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, у нас:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\arcsin \frac{n+3}{2n+5}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{n+3}{2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1+\frac{3}{n}}{2+\frac{5}{n}} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} < 1 \Rightarrow \text{ряд}$$

сходится.

Задача №5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \ln(n+5) \ln \ln(n+5)}$

Решение: Применим интегральный признак Коши, исследуя на сходимость несобственный интеграл первого рода:

$$\int_1^a \frac{dx}{(x+5) \ln(x+5) \ln \ln(x+5)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{d \ln \ln(x+5)}{\ln \ln(x+5)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \ln \ln \ln(x+5) \Big|_1^a =$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} (\ln \ln \ln(a+5) - \ln \ln \ln 6) = \infty$$

Следовательно, интеграл расходится, а значит, расходится и данный ряд.

Задача №6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

Решение: К данному знакочередующемуся ряду применим признак Лейбница.

1) Докажем, что последовательность $\left\{ n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right\}$ убывающая. Начнем с

очевидного неравенства: $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$, если мы умножим правую часть неравенства на выражение, большее 1, то только его «усилим», т.е. очевидно, что

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) > \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \Rightarrow \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n+1} > \ln \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) > n \ln \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \Rightarrow a_n > a_{n+1}$$

требовалось доказать.

2) Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$. Для этого, используя правило

Лопиталя, найдем предел функции. Таким образом, признак Лейбница выполнен, значит знакочередующийся ряд сходится. Уточним характер сходимости ряда. Ряд из абсолютных величин исходного можно сравнить с

расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \ln e = 1 \text{ ряды ведут себя одинаково}$$

т.е. данный ряд как и гармонический, расходится, следовательно, исходный знакочередующийся ряд сходится условно.

Задача №7. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{x^2}{5^n}$

Решение: Применим радикальный признак Коши при нахождение области сходимости ряда.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{x^n}{5^n}\right|} &= \frac{|x|}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{|x|}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n = \frac{|x|}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{n+1}} = \\ &= \frac{|x|}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1} = \frac{|x|}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1} = \frac{|x|}{5} e^{-1} < 1 \Rightarrow |x| < 5e \Rightarrow -5e < x < 5e \end{aligned}$$

Исследуем ряд на границе области сходимости, т.е. при $x=5e$ и при $x=-5e$.

При $x=5e$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{(5e)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} e^n$ применим к

данному ряду признак Даламбера, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^{n^2}}{e^{n+1}} &= e \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n+2}\right)^{(n+1)^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \\ &= e \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{1}{n+2} \cdot (n+1)^2} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^n = e \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{(n+1)^2}{n+2}} \cdot e^n = e \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n+2}} = \end{aligned}$$

$= e \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1} = e \cdot e^0 = e > 1 \Rightarrow$ ряд расходится. При $x=-5e$ получим ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} e^n$ знакочередующийся вида $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Применяя к нему

признак Лейбница, найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} e^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{n^2} e^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{-1}{n+1} \cdot n^2} \cdot e^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n^2}{n+1}} \cdot e^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^2 - n^2 - n^2}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-n^2}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1} = e > 1 \Rightarrow \text{ряд сходится.} \end{aligned}$$

Ответ: Область сходимости исходного ряда: $-5e < x < 5e$.

Задача №8. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n3^n}$

Решение: Применим признак Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n (x-5)^{n+1} n 3^n}{(n+1) 3^{n+1} (-1)^{n-1} (x-5)^n} \right| = \frac{|x-5|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x-5|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{|x-5|}{3} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x-5| < 3 \Rightarrow -3 < x-5 < 3 \Rightarrow 2 < x < 8$$

При $x = 2$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический ряд сходится. $(2n-1)$ – нечетно при любом n т.е. $(-1)^{2n-1} = -1$.

Значит $x = 2 \notin$ области сходимости. При $x = 8$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ –

знакочередующийся ряд, по признаку Лейбница: 1) $a_n = \frac{1}{n}$; $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$ –

убывающая последовательность. 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

сходится условно, т.к. ряд из абсолютных величин исходного является гармоническим, следовательно, расходящимся рядом; значит, $x = 8 \in$ области сходимости ряда.

Ответ: $2 < x \leq 8$.

Задача №9. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$.

Решение: Применим признак Даламбера $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(x+3)^{n+1} n^n}{(n+1)^{n+1} n! (x+3)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)(x+3)^n (x+3) \cdot n^n}{(n+1)^n (n+1) n! (x+3)^n} = (x+3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$(x+3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n}{n+1} \right)^{(n+1) \frac{n}{n+1}} \quad n+1 = (x+3)e^{-1} = \frac{x+3}{e} < 1 \quad |x+3| < e \quad -e < x+3 < e$$

Ответ: $-e-3 < x < e-3$.

Задача №10. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)}$.

Решение: Разложим дробь $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$ следующим образом

$$\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{A}{2n+2} + \frac{B}{2n+3} \quad 2An + 3A + 2Bn + 2B = 1$$

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ 3A + 2B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + 2B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Рассмотрим суммы $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$ и $S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+3}$. Распишем S_1 следующим образом $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$. Продифференцируем по членно и получим $x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \dots = \frac{x}{1-x}$. Последнее выражение есть

геометрическая прогрессия, где $b_1 = x, q = x^2$. Тогда

$$S_1 = \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = -\int_0^x \frac{1-t-1}{1-t} dt = -\int_0^x dt + \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -t + \ln|1-t| \Big|_0^x = \ln|1-x| - x.$$

$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+3} = \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7} + \frac{x^8}{9} + \frac{x^{10}}{11} + \dots + \frac{x^{2n+2}}{2n+3}$ умножим почленно на x и получим

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \dots + \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

продифференцируем почленно и получим $x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + \dots = \frac{x^2}{1-x^2}$. Это есть геометрическая прогрессия.

Следовательно

$$S_2 = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt = -\frac{1}{x} \int_0^x \frac{1-t^2-1}{1-t^2} dt = -\frac{1}{x} \left(\int_0^x dt - \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| - t \right) \Big|_0^x = \frac{1}{2x} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| - 1.$$

Следовательно, сумма данного ряда $S = S_1 + S_2$

$$\text{Ответ: } S = \ln|1-x| - x + \frac{1}{2x} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| - 1$$

Задача №11. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5)x^{n+1}$.

Решение: В начале необходимо найти область сходимости по признаку Даламбера. Область сходимости данного ряда $(-1; 1)$. Разложим этот ряд следующим образом

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5)x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n+1} + 9 \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n+1} + 5 \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = S_1 + 9S_2 + 5S_3.$$

Рассмотрим вначале $S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$ и распишем ее $S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ Это есть

геометрическая прогрессия с $b_1 = x, q = x$, значить $S_3 = \frac{x}{1-x}$. Теперь рассмотрим

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n+1} = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \dots = x^2(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots).$$

Проинтегрируем почленно выражение в скобках $(1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$ -это есть геометрическая прогрессия с

$$b_1 = x, q = x \quad \text{тогда} \quad S_2 = x^2 \left(\frac{x}{1-x} \right)' = x^2 \frac{(1-x) + x}{(1-x)^2} = \frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n+1} = x^2 + 4x^3 + 9x^4 + 16x^5 + 25x^6 + \dots = x^2(1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \dots).$$

Проинтегрируем почленно выражение в скобках $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots = x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots)$. Снова проинтегрируем

почленно выражение в скобках и получили $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$ геометрическая прогрессия $b_1 = x, q = x$. Следовательно,

$$S_1 = x^2 \left(x \left(\frac{x}{1-x} \right)^1 \right) = x^2 \left(x \frac{1-x+x}{(1-x)^2} \right) = x^2 \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = x^2 \frac{(1-x)^2 + x2(1-x)}{(1-x)^4} = x^2 \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \\ = \frac{x^3}{(1-x)^3}. \text{ Найдем теперь сумму ряда } S = \frac{x^2}{(1-x)^3} + \frac{9x^2}{(1-x)^3} + \frac{5x}{(1-x)} = \frac{x^2 + 9x^2(1-x) + 5x(1-x)^2}{(1-x)^3}.$$

Задача №12. Вычислить с помощью рядов интеграл $\int_0^{0.1} \cos(10x^2) dx$.

Решение: Применим формулу разложения функции в ряд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\int_0^{0.1} \left(10x^2 - \frac{100x^4}{2!} + \frac{10^4 x^8}{4!} - \frac{10^6 x^{12}}{6!} + \dots \right) dx = \left(\frac{10x^3}{3} - \frac{100x^5}{10} + \frac{10000x^9}{24 \cdot 8} - \frac{10^6}{24 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 12} x^{13} + \dots \right) \Bigg|_0^{0.1} = \\ \frac{1}{30} - \frac{1}{100} + \frac{1}{24 \cdot 8 \cdot 10^3} \approx 0,023$$

Библиографический список

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Том I, II. — Москва: «Дрофа», 2004.
2. Ильин В. А., Куркина А. В. Высшая математика. Москва: «Проспект», 2005.
3. Данко П. Е., Попова А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика упражнениях и задачах. Том I, II. — Москва: «Высшая школа», 1999.
4. Сборник задач по курсу высшей математике под редакцией Крючковича Г.И. — Москва: «Высшая математика», 1973.
5. Бронштейн И. И., Семендяев К. А. Справочник по математике. — Москва: «Наука», 1981.

Содержание

Предисловие.....	3
Индивидуальное задание №1.....	5
Решение типового варианта индивидуального задания №1.....	21
Индивидуальное задание №2.....	31
Решение типового варианта индивидуального задания №2.....	42
Индивидуальное задание №3.....	53
Решение типового варианта индивидуального задания №3.....	69
Индивидуальное задание №4.....	84
Решение типового варианта индивидуального задания №4.....	94
Библиографический список	101

издание

Хваенович
сан Жубаевич

КА-1, 2 СРС

Л. Т. Касжанова
Д. Ш. Тажиева

ить 9.12.2019 г.
-х 1/16. Бумага типогр. № 1.
каз № 862. Цена договорная.

sev university
нга и коммуникаций
управление
Сатпаева, 22