

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный исследовательский технический
университет имени К. И. Сатпаева

Е. Т. Божанов, Г. А. Тулешева, А. М. Ибраимкулов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Часть 2

Рекомендовано Научно-методическим советом университета
в качестве учебного пособия

Алматы 2016

УДК 510:53.085.1 (075.8)

ББК 22.1:22.311 я73

Б 76

Рецензенты:

Уалиев Г.У., зав.каф. "Механика" КазНПУ им. Абая,
д-р физ.-мат.наук, академик НАН РК, проф.

Отарбаев Ж.О., директор "Института дистанционного образования"
КазННТУ им. К.И.Сатпаева, д-р. техн. наук, проф.

Маймаков Т.П., ректор вуза "УНАТ", д-р хим.наук, проф.

Печатается по плану издания Министерства образования и науки
Республики Казахстан на 2016 год.

Божанов Е.Т

Б 76 Моделирование физических процессов. Часть 2: Учеб. Пособие /
Е. Т. Божанов., Г. А. Тулешева, А. М. Ибраимкулов. – Алматы:
КазННТУ им. К.И. Сатпаева, 2016.– 88 с.

ISBN 978–601–228–951–0

ч.2.–2016.–88 с.

ISBN 978–601–228–953–4

В данном учебном пособии излагаются некоторые вопросы нелинейной теории тонкостенных пространственных конструкций при сложных статических и динамических нагрузках в условиях высоких и низких температур. При возведении оболочек находят применение новые конструкционные материалы. Это потребовало развития новых областей теории оболочек. Оболочки и другие тонкостенные конструкции находят все более широкое применение в различных отраслях нанотехнологий.

Данное учебное пособие содержит большое число задач. Учебное пособие будет полезно научным работникам и студентам технических университетов.

УДК 510:53.085.1 (075.8)

ББК 22.1:22.311 я73

ISBN 978–601–228–953–4 (ч.2)

ISBN 978–601–228–951–0

© Божанов Е.Т., Тулешева Г. А.,

Ибраимкулов А. М., 2016

© КазННТУ, 2016

ВВЕДЕНИЕ

Развивая идеи ученых В. З. Власова «Общая теория оболочек и её применение в технике», В. В. Новожилова «Теория нелинейных тонких оболочек», А. А. Гольден-Вейзера «Теория упругих тонких оболочек», Х. М. Муштари и К. З. Галимова «Нелинейная теория оболочек», А. С. Вольмира «Гибкие пластинки оболочек», Е. Т. Божанова и Ж. С. Ержанова «Исследование устойчивости упругих тел, гибких пластин и оболочек и их приложения» авторами рассмотрены выпучивания тонких трубчатых конструкций под действием критической внешней активной нагрузки, лежащих на основаниях Винклера и Пастернака, изложены некоторые вопросы нелинейной теории тонкостенных пространственных конструкций при сложных динамических нагрузках в условиях высоких и низких температур, приведены расчеты внутреннего трения в элементах тонкостенных конструкций под действием динамических импульсов в инженерной практике, использованы методы математического и вариационного анализа при моделировании явлений демпфирования.

Приведены расчеты тонкостенных конструкций из материалов реального мира за пределом теории упругости в условиях эксплуатации, в краевых задачах, применительно к торцам поперечного сечения конструкций. В настоящее время оболочки и другие тонкостенные конструкции находят широкое применение в различных отраслях нанотехнологий.

Особое внимание уделено построению и обоснованию математических моделей Б-2 и Б-5 применительно к физико-техническим процессам, их численной реализации и подбору метода решения уравнений возмущенного состояния материальной среды под действием динамических нагрузок, когда скорость движения остаточной деформации отлична от нуля. При определении коэффициентов основных сил в

поперечном сечении конструкции рассмотрена система стержней за пределом упругости.

При рассмотрении данной модели под действием динамических нагрузок (движущейся жидкости, газа, теплового и ветрового источника, сдвига неоднородной среды и др.), следуя исследованиям (работ по динамике оболочек и по динамике сооружения работ) Бресс, Гогенемзер и Прагер, С. А. Бернштейна, К. С. Завриева, А. Н. Крылова, С. П. Тимошенко, Я. Г. Пановко и И. И. Губанова, А. П. Филиппова, Тодхунтер и Пирсона, Бюлер, К. Е. Китаева, И. И. Казей, использовалось уравнение равновесия.

ГЛАВА 1. УПРУГИЕ ОБОЛОЧКИ, ТРУБЧАТЫЕ НЕУПРУГИЕ КОНСТРУКЦИИ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Некоторые сведения из теории поверхностей

Определение 1. Оболочкой называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми (толщина) мало по сравнению с другими размерами.

Определение 2. Поверхность, равностоящая от наружной и внутренней поверхностей оболочек, носит название средней поверхности.

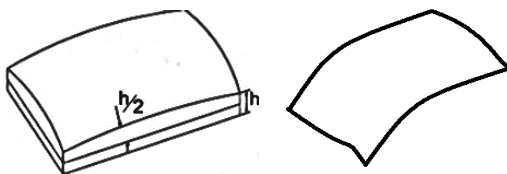


Рис. 1. Оболочки с постоянной толщиной

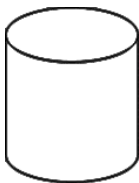
Замечание 1. Если в дальнейшем будем рассматривать оболочки постоянной толщины h , то геометрия оболочки будет полностью определена заданной формой срединной поверхности, толщиной оболочки и граничным контуром.

Определение 3. Нормальным сечением в некоторой точке M называется сечение плоскостью, содержащей нормаль к поверхности в этой точке. Сечение это является некоторой кривой линией на поверхности оболочки (рис. 1).

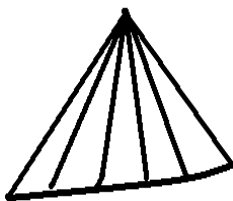
Замечание 2. Из дифференциальной геометрии известно, что в любой точке M поверхности можно указать два ортогональных (взаимно перпендикулярных) направления, для которых нормаль к поверхности, проведенная в соседней точке, пересекает нормаль в точке M , такие направления называют главными (рис. 2).

Уравнение поверхности в общем виде: $F(x, y, z) = 0$.

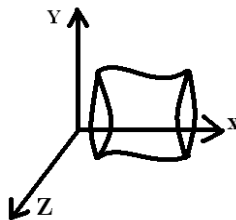
Ниже на рисунках показаны цилиндрическая и коническая поверхности, а также поверхность вращения:



Цилиндрическая поверхность



Коническая поверхность



Поверхность вращения

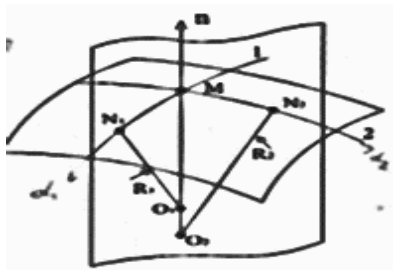
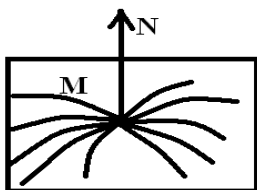


Рис. 2. Нормальное сечение оболочки

Определение 4. Если провести вдоль этих направлений линии на поверхности, то можно получить два семейства ортогональных линий, называемых линиями главной кривизны.

Определение 5. Если R_1 и R_2 – расстояния от центра кривизны до точки М, то они называются главными радиусами кривизны поверхности в точке М вдоль линии 1 и 2 (рис.2).

Определение 6. Обратные величины главным

$$k_1 = \frac{1}{R_1}, k_2 = \frac{1}{R_2}$$

радиусам кривизны называются главными кривизнами поверхности в точке М.

Замечание 3. Пусть дана некоторая оболочка. Положение точки на поверхности оболочки может быть определено пересечением двух линий на поверхности как двух криволинейных координат (α, β) , за которое обычно принимают линии главной кривизны недеформированной поверхности оболочки (рис. 3).

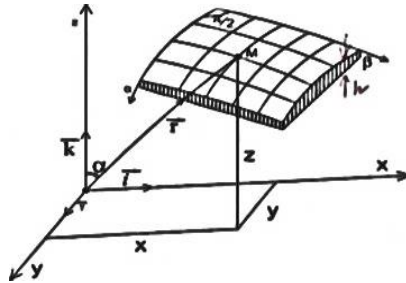


Рис.3. Связь между радиус-вектором точки $\vec{r}(\alpha, \beta)$ с декартовой системой координат

1.2. Общие понятия о первой квадратичной форме и коэффициентах первой квадратичной формы оболочки

Определение 7. В зависимости от выбора параметров (α, β) определяется система криволинейных координат

$$(x=x(\alpha, \beta), y=y(\alpha, \beta), z=z(\alpha, \beta)),$$

или

$$\vec{r}(\alpha, \beta) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.1)$$

где $\vec{r}(\alpha, \beta)$ радиус-вектор точки поверхности.

Замечание 4. Для того чтобы получить общие геометрические характеристики произвольной поверхности необходимо рассмотреть бесконечно малый элемент, выделенный около некоторой точки М четырьмя координатными линиями (рис. 4).

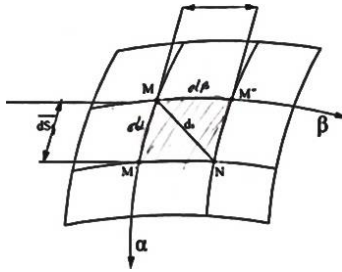


Рис.4. Бесконечно малый элемент оболочки с четырьмя координатными линиями

Здесь dS – линейный бесконечно малый элемент в ортогональной системе координат; dS_1 и dS_2 – линейные элементы, соответствующие приращениям криволинейных координат α и β .

Замечание 5. Если приращения $d\alpha$ и $d\beta$ бесконечно малые, то

$$dS_1 = A d\alpha, \quad dS_2 = B d\beta, \\ dS^2 = dS_1^2 + dS_2^2$$

Определение 7. Некоторые коэффициенты A и B как коэффициенты искажения, преобразующие приращения криволинейных координат в линейные отрезки называют коэффициентами первой квадратичной формы, а выражение (1.2) называется первой квадратичной формой:

$$dS^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2. \quad (1.2)$$

Задача. Как определить эти коэффициенты A и B ? (см.рис.4)

$$d\vec{r} = dS = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} d\beta,$$

Решение. $r = r(\alpha, \beta)$. Так как,

то

$$dS^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha^2 + 2 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right) d\alpha d\beta + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right)^2 d\beta^2.$$

Здесь векторы $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}$ в каждой точке поверхности касательны соответственно к линиям α и β .

Замечание 6. Если α и β перпендикулярны, то $(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}) d\alpha d\beta = 0$, тогда

$$dS^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha^2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right)^2 d\beta^2. \quad (1.3)$$

Сравнивая (1.2) и (1.3) получим:

$$A = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}, \quad B = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}, \quad (1.4)$$

На основании (1.1) из (1.4) получим:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\alpha, \beta) &= x(\alpha, \beta) \vec{i} + y(\alpha, \beta) \vec{j} + z(\alpha, \beta) \vec{k} \\ \left\{ \begin{aligned} A &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2}, \\ B &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right)^2} \end{aligned} \right. \quad \begin{array}{l} \text{— коэффициенты 1-ой} \\ \text{квадратичной формы.} \end{array} \end{aligned}$$

1.3. Оболочки, применяемые в технике в зависимости от Гауссовой кривизны

Замечание 7. В технике широко применяются оболочки, образованные вращением произвольной кривой относительно некоторой оси OZ (рис. 5).

Здесь главными линиями кривизны являются меридианы и параллели, образующие так называемую географическую сетку. Задать положение этих линий можно различным образом.

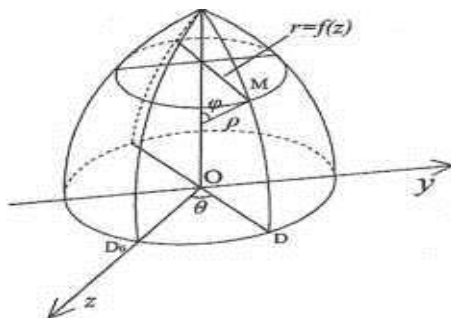


Рис.5. Оболочка, образованная вращением произвольной кривой относительно оси OZ

Если кривизны координатных линий α и β обозначить k_1 и k_2 , а радиусы кривизны через R_1 и R_2 , то $k = k_1 k_2$ называется Гауссовой кривизной поверхности оболочки. В строительной механике и практике применяют в основном поверхности, которые можно классифицировать по их гауссовой кривизне класса А и В.

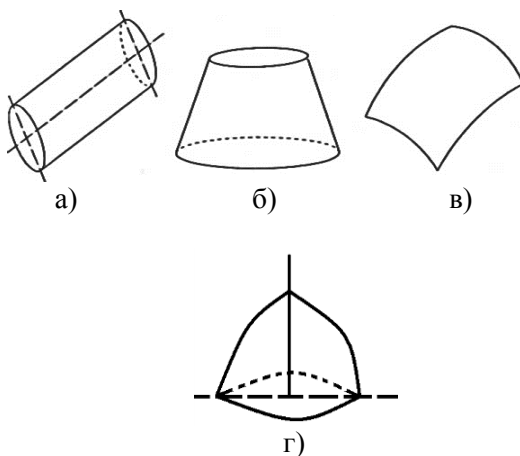


Рис.6. Класс А – оболочки нулевой гауссовой кривизны

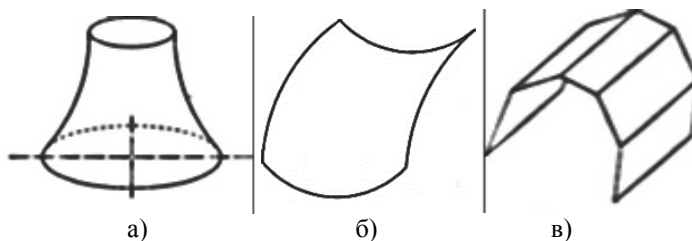


Рис.7. Класс В – оболочки двоякой кривизны с положительной гауссовой кривизной выпуклые и с отрицательной гауссовой кривизной вогнуто-выпуклые

Определение 8. Класс (А) объединяет оболочки нулевой гауссовой кривизны, т. е. оболочки, у которых кривизна в направлении одной из координат равна нулю. К этому классу относятся цилиндрические и конические поверхности (рис. 6).

Определение 9. Классу (В) относятся разнообразные поверхности двоякой кривизны, с положительной гауссовой кривизной (выпуклые) с отрицательной гауссовой кривизной (вогнуто-выпуклые) (рис. 7).

1.4. Уравнения равновесия по классической теории упругих оболочек; уравнения равновесия по нелинейной теории геометрии деформации и их упрощения; геометрические уравнения упругих оболочек по нелинейной теории и их линеаризация. Физические уравнения. Уравнения равновесия по классической теории упругих оболочек

Постановка задачи. Исходя из теории оболочек (относительно средней линии поверхности) уравнения равновесия бесконечного малого элемента поперечного сечения составляются при следующих гипотезах:

- гипотеза 1 плоских сечений Кирхгофа-Лева: нормаль к срединной поверхности до деформации остается нормалью к срединной поверхности после деформации. Учитывается только поворот срединной поверхности и линейных элементов (Лев А. «Математическая теория упругости». –М.: 1935, Вольтер А. С. «Устойчивость упругих систем». –М.: Физматгиз, 1963).

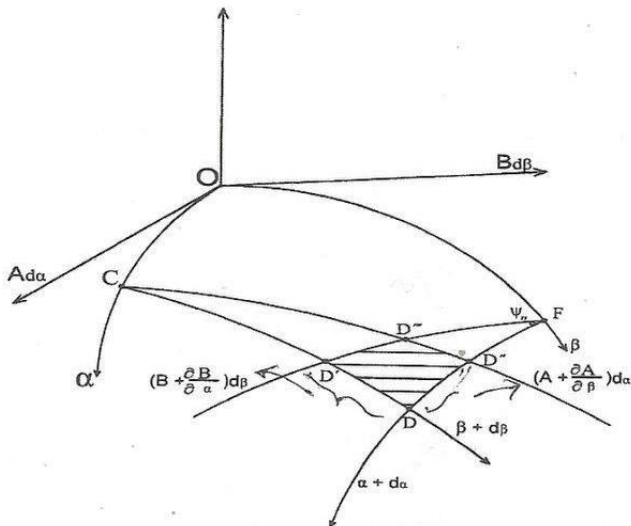


Рис.8.

Здесь

$$\alpha + d\alpha = \text{const}, \quad \beta + d\beta = \text{const},$$

$$DD' = \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha d\beta; \quad DD'' = \frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha d\beta.$$

На грани OF нормальное усилие: $N_1 B d\beta$.

На грани OD нормальное усилие (рис.8)

$$N_1 B d\beta + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} B d\alpha d\beta + N_1 \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} B d\alpha d\beta - \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} B d\alpha d\beta.$$

- гипотеза 2 типа Тимошенко С. П.: уравнения равновесия составляются с учетом измерения срединной поверхности оболочки, учитывая не только повороты, но и удлинения линейных элементов (рис.9).

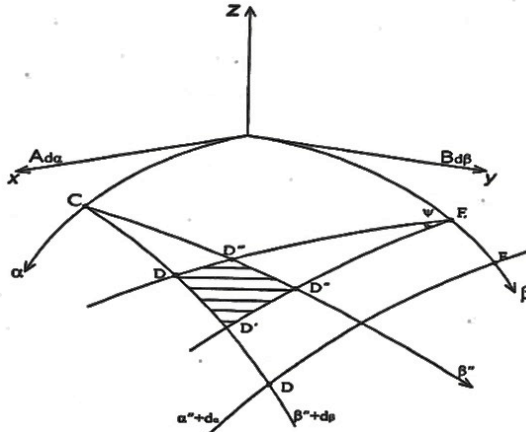


Рис.9.

Укажем интенсивности нагрузок в криволинейной системе координат.

Для составления уравнения гибких оболочек по классической теории рассмотрим криволинейную систему координат и интенсивности нагрузки:

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad z = z(\alpha, \beta), \quad r = r(\alpha, \beta) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Рассмотрим поперечное сечение оболочки

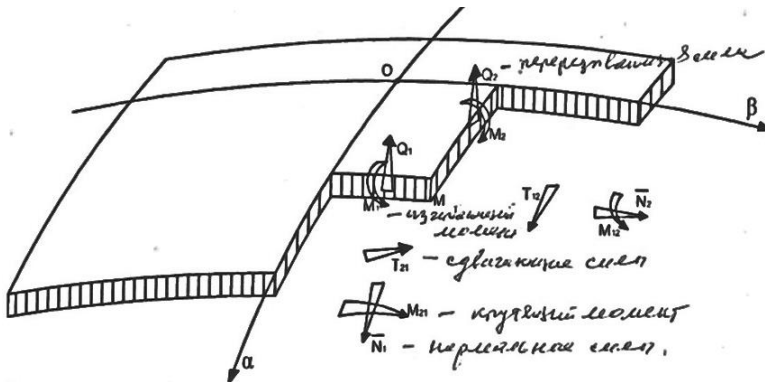


Рис.10.

Нормальные силы:

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz,$$

$$N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz,$$

Сдвигающие силы – проекции векторов усилий:

$$T_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} (1 + k_1) dz,$$

$$T_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} (1 + k_2) dz,$$

изгибающие моменты, перерезывающие силы:

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) z dz,$$

$$M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) z dz,$$

$$M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) z dz,$$

$$M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) z dz,$$

крутящие силы:

$$Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{z1} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz,$$

$$Q_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{z2} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz,$$

теперь на основании рисунков: 8, 9, 10 составим выражения для компонентов всех усилий, действующих на гранях элемента оболочки в табл. 1.

Таблица 1

Грани	Нормальные силы	Сдвигающие силы	Изгибающие силы	Крутящие силы	Поперечные силы
OC	$N_i A_i d\alpha$	$T_{iz} A_i d\alpha$	$M_{iz} A_i d\alpha$	$M_{i1} A_i d\alpha$	$Q_i A_i d\alpha$
FD	$N_i A_i d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial}(N_i A_i) d\alpha d\beta$	$T_{iz} A_i d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial}(T_{iz} A_i) d\alpha d\beta$	$M_{iz} A_i d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial}(M_{iz} A_i) d\alpha d\beta$	$M_{i1} A_i d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial}(M_{i1} A_i) d\alpha d\beta$	$Q_i A_i d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial}(Q_i A_i) d\alpha d\beta$
OF	$N_i A_i d\beta$	$T_{iz} A_i d\beta$	$M_{iz} A_i d\beta$	$M_{i1} A_i d\beta$	$Q_i A_i d\beta$
CD	$N_i A_i d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial}(N_i A_i) d\alpha d\beta$	$T_{iz} A_i d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial}(T_{iz} A_i) d\alpha d\beta$	$M_{iz} A_i d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial}(M_{iz} A_i) d\alpha d\beta$	$M_{i1} A_i d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial}(M_{i1} A_i) d\alpha d\beta$	$Q_i A_i d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial}(Q_i A_i) d\alpha d\beta$

Остаточные напряжения на поверхности слоя оболочки супер элемента:

- элемент оболочки, нагруженный составляющими остаточных напряжений;
- схема выбора координат для цилиндрической оболочки.

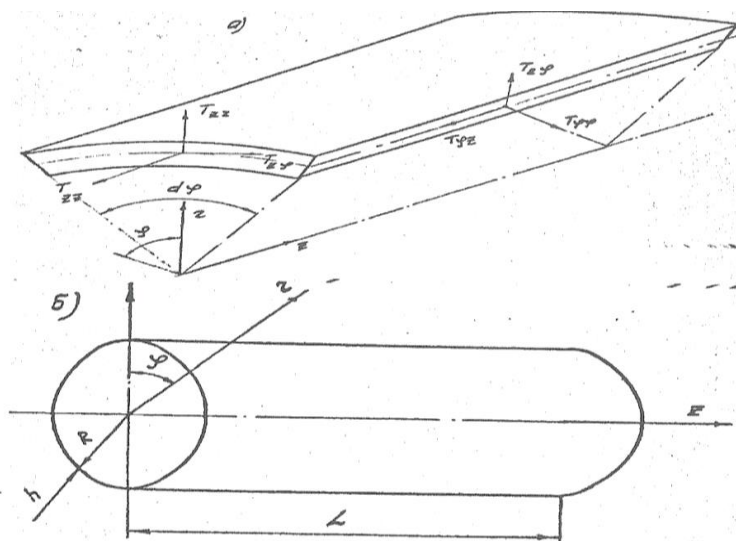


Рис.11.

Таким образом, в классической теории согласно табл.1 уравнения равновесия имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 N_1) - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1^2 T) + Q_1 k_1 A_1 A_2 + A_1 A_2 p_1 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 N_2) - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \beta} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2^2 T) + Q_2 k_2 A_1 A_2 + A_1 A_2 p_2 = 0, \\ -(k_1 N_1 + k_2 N_2) + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 Q_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 Q_2) \right] + p_3 = 0, \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2^2 M) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_2 M_2) - M_1 \frac{\partial A_1}{\partial \beta} - Q_2 A_1 A_2 = 0, \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_1^2 M) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 M_1) - M_2 \frac{\partial A_2}{\partial \beta} - Q_1 A_1 A_2 = 0; \end{array} \right.$$

здесь $T = T_{12} = T_{21}$; $M = M_{12} = M_{21}$.

Без вывода на основании монографии Божанова Е. Т. и Ержанова Ж. С. составим аналогии.

Уравнения равновесия по нелинейной теории:

I-ое упрощение В. В. Новожилова.

Аналогично, если удлинения, сдвиги малы по сравнению с единицей, причем учитываются удлинения, сдвиг и поворот срединной поверхности, то получим I-ое упрощение В. В. Новожилова:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [T_{11}^* A_2 (1 + \varepsilon_{22})] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [T_{21}^* A_1 (1 + \varepsilon_{11})] + T_{12}^* \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[(1 + \varepsilon_{11}) A_1 - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega \right] - \\ & - T_{22}^* \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (1 + \varepsilon_{22}) A_2 - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \omega \right] + T_{11}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega - T_{21}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} \omega - N_1^* A_1 A_2 (k_{12}^* \omega - k_{11}^*) + \\ & + N_2^* A_1 A_2 (k_{11}^* \omega - k_{12}^*) + X_1 A_1 A_2 (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 A_2 (X \omega_1 - X K_{12}) = 0; \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [N_1^* A_2 (1 + \varepsilon_{22})] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [N_2^* A_1 (1 + \varepsilon_{11})] + T_{11}^* A_1 A_2 (k_{12} \omega - k_{11}^*) - A_1 A_2 k_{12}^* (T_{12}^* + T_{21}^*) + \\ & A_1 A_2 T_{22}^* (k_{21}^* \omega) k_{22}^* + A_1 A_2 (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) X - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 A_2 (X_1 \omega_1 + X_2 \omega_2) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [M_{11}^* A_2 (1 + \varepsilon_{22})] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [M_{21}^* A_1 (1 + \varepsilon_{11})] + M_{22}^* \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (1 + \varepsilon_{22}) A_1 - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega \right] + M_{12}^* \\ & \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (1 + \varepsilon_{11}) A_1 - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} \omega \right] + M_{21}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega - M_{11}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega + A_1 A_2 (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь T_{ik}^* – проекции векторов усилий; M_{ik}^* – проекции векторов моментов усилий; N_{ik}^* – проекции векторов перерезывающих усилий; σ_{ik}, σ_{iz} – составляющие напряжения $\sigma_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_2}$ по направлениям единичных векторов k_1, k_2, k_3 срединной поверхности деформации S .

Итак, уравнения равновесия упругих оболочек по нелинейной теории и их линейаризация по Новожилову состоит из упрощения формулы (1.5).

II-ое упрощение В. В. Новожилова:

Аналогично, если удлинения, сдвиги малы по сравнению с единицей, причем учитываются удлинения и поворот срединной поверхности, то получим II-ое упрощение В. В. Новожилова.

Тогда:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2^* T_{11}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1^* T_{21}^*) + T_{12}^* \frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2} - T_{22}^* \frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 (N_1^* K_{11}^* + N_2^* K_{12}^* + \chi) = 0. \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2^* N_1^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1^* N_2^*) - (T_{11}^* K_{11}^* + T_{22}^* + T_{12}^* K_{12}^* - \chi_3) = 0. \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2^* M_{11}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1^* M_{21}^*) + M_{12}^* \frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2} - M_{22}^* \frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 (L_1^* + N_1^*) = 0. \end{aligned}$$

$$T_{12}^* + T_{21}^* + M_{12}^* K_{22}^* + M_{21}^* K_{22}^* - K_{12}^* (M_{11}^* + M_{22}^*) = 0. \quad (1.6)$$

Здесь L_j^* – проекции векторов координат (1.6) на деформированную срединную поверхность.

III-е упрощение В. В. Новожилова:

Если удлинения, сдвиги малы по сравнению с единицей, причем учитывается только поворот срединной поверхности, то получим III-е упрощение В. В. Новожилова.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(A_2 T_{11}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(A_1 T_{21}^*) + T_{12}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} - T_{22}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 (N_1^* K_{11}^* + N_2^* K_{12}^* + \chi_1^*) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(A_2 N_1^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(A_1 N_2^*) - (T_{11}^* K_{11}^* + T_{22}^* + T_{12}^* K_{12}^* + T_{21}^* K_{12}^* - \chi_3) A_1 A_2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(A_2 M_{21}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} M_{12}^* - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22}^* + A_1 A_2 (L_1^* + N_1^*) &= 0, \\ T_{12}^* + T_{21}^* + M_{12}^* K_{11}^* + M_{21}^* K_{21}^* - K_{12}^* (M_{11}^* + M_{22}^*) &= 0. \end{aligned}$$

Геометрические уравнения упругих оболочек по нелинейной теории и их линеаризации. Физические уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\omega}{R_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right)^2, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \nu}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\omega}{R_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right)^2, \\ \gamma = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\nu}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

В декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 \omega + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial \nu}{\partial y} + k_2 \omega + \frac{\omega}{R_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}. \end{aligned}$$

В цилиндрической системе координат (r, θ, z) :

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{t} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2,$$

$$\gamma = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \theta},$$

в частности:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{w}{R_l} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right),$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial w}{r \partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}.$$

Условия на поверхности:

$$x_v = \delta_r \cos \alpha + \delta_{r\theta} \cos \beta + \delta_{rz} \cos \gamma;$$

$$y_v = \delta_{r\theta} \cos \alpha + \delta_\theta \cos \beta + \delta_{\theta z} \cos \gamma;$$

$$z_v = \delta_z \cos \alpha + \delta_{r\theta} \cos \beta + \delta_{rz} \cos \gamma;$$

$$\alpha = (r, v); \quad \beta = (y, v); \quad \gamma = (z, v); \quad p_v = \{x_v, y_v, z_v\}.$$

p_v – полное напряжение на площадке с внешней нормалью v .

Физические уравнения для ортотропного тела:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E_r} (\delta_r - \nu_{r\theta} \delta_\theta + \nu_{rz} \delta_z), \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E_\theta} (-\nu \delta_r - \delta_\theta + \nu_{\theta z} \delta_z), \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E_z} (-\nu_x \delta_r - \nu_{r\theta} \delta_\theta + \delta_z), \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{\delta_{r\theta}}{G_{r\theta}}; \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\delta_{\theta z}}{G_{\theta z}}; \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\delta_{rz}}{G_{rz}}, \end{cases}$$

где E_r, E_θ, E_z – модуль упругости, $G_{r\theta}, G_\theta, G_{rz}$ – модули сдвига, $\nu_{r\theta}, \nu_{r\theta}, \nu_{\theta z}, \nu_{rz}, \nu_{z\theta}$ – коэффициенты Пуассона.

В частности для изотропного тела

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 - \nu\varepsilon_2), N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 - \nu\varepsilon_1);$$

$$T = T_{12} = T_{21} = G\gamma h; M_1 = D(\varsigma_1 - \nu\varsigma_2); M_2 = D(\varsigma_2 - \nu\varsigma_1);$$

$$M = M_{12} = M_{21} = D(1-\nu)\chi, \quad D = \frac{h}{12(1-\nu^2)};$$

$$\varsigma_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\nu}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \frac{\partial A_1}{\partial \beta};$$

$$\varsigma_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\nu}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial A_1}{\partial \alpha};$$

$$\chi = \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A_2} \left(\frac{\nu}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{A_1} \left(\frac{u}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right].$$

Разработка и обоснование модели Б-5. Некоторые приложения теории оболочек при моделировании физико-технических процессов. Модель Б-5.

Рассмотрим задачи моментальной теории оболочек, позволяющей рассчитать конструкции с учетом их изгиба, когда незначительные изгибающие моменты вызывают в оболочке большие напряжения. При этом в сечении одновременно возникают изгибающий момент, продольная сила, как следствие изгибающего момента, и поперечная сила (рис. 12, 13) [3].

$N_{кр}$ – продольная сила, которая при изгибе дает нормальную составляющую – $N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \chi^2}$, играет роль поперечной нагрузки, Q_x, Q_y – поперечные силы, $M_{ик}, M_{иу}$ – изгибающие моменты. В промежуточных процессах объемная вязкость отсутствует.

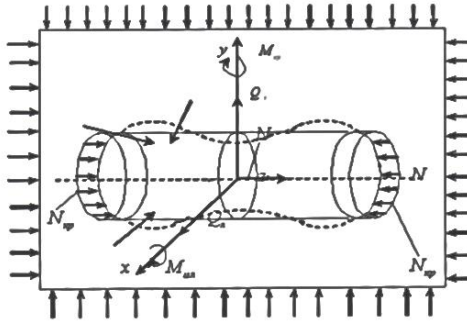


Рис.12. Модель действия критической нагрузки $N_{\text{ед}}$

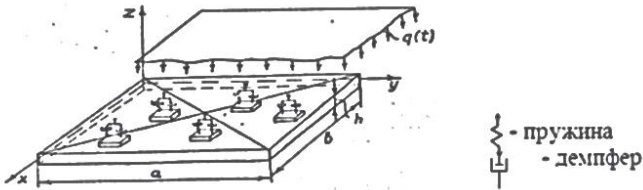


Рис.13. Модель заполнителя как упругая кристаллическая среда

В качестве примера возьмем цилиндрическую оболочку с заполнителем. Заполнителем является упругая среда, однородная и кристаллическая. При этом, следует отметить, что адиабатические изменения объема $-dQ$, так же как и очень медленные изотермические изменения объема $-dT$, обусловлены наложенным гидростатическим давлением, без наличия объемной вязкости в промежуточных процессах в условиях эксплуатации (рис.14).

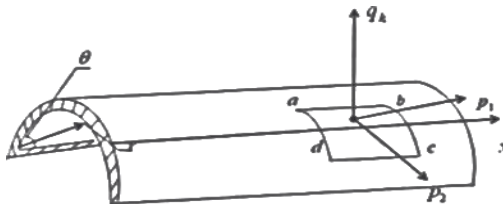


Рис. 14.

Если в качестве системы координат возьмем x, θ , то общее уравнение равновесия заполнителя для такой цилиндрической оболочки в указанной системе координат имеет вид при $A_1 = 1, A_2 = r = \text{const}, R_1 = \infty, R_2 = r$:

$$\left. \begin{aligned} r \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} + r p_1 &= 0; \\ r \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + Q_2 + r p_2 &= 0; \\ r \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - N_2 + r q_k &= 0; \\ r \frac{\partial M_{21}}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - r Q_2 &= 0; \\ \frac{1}{r} M_{21} + T_{12} - T_{12} &= 0; \end{aligned} \right\}$$

Геометрические изменения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{W}{r}, \gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \chi_1 &= -\frac{\partial W}{\partial x^2}, \chi_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right), \\ \chi &= \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \right), \psi = \frac{1}{2} \left(v - \frac{\partial V}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \right\}$$

где ψ – угол поворота касательной к поперечному сечению оболочки при деформации.

Физические изменения:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) \right]; \\ N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T = T_{12} = T_{21} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial \nu}{\partial x} \right]; \\
 M_1 &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{r^2} \left(-\frac{\partial \nu}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]; \\
 M_2 &= -D \left[\frac{1}{r^2} \left(-\frac{\partial \nu}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]; \\
 M = M_{12} = M_{21} &= -D(1-\nu) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial x} \right).
 \end{aligned}$$

Давление на стенки, как нагрузку q_k в указанной системе координат, определим по формам критической деформации поперечного сечения при эксплуатации:

$$q_k = f\left(\frac{r}{L}\right),$$

где L – длина заполнителя. Предположим, что связь между осевой сжимающей нагрузкой, действующей по торцам цилиндрической оболочки с заполнителем и деформацией, выражается формулой:

$$\bar{e} = e\left(\frac{r}{h}\right)^{5/2}, \quad q_{\text{ед}} = \frac{Eh}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{r}\right)^3,$$

где e – сближение торцов оболочки – укорочение длины L , h – толщина стенки оболочки, начальное искривление поверхности незначительное, поперечное сечение заполнителя до начала эксплуатации представляет собой круг $\left(\frac{r}{L} = 1\right)$.

Состояние произвольного поперечного изгиба вследствие симметрии нагрузки постоянны по окружности, сдвигающие силы, крутящие моменты и перерезывающая сила Q_2 будут равны нулю на границах торца [4].

Произведем расчет цилиндрических оболочек с заполнителем из упругого, однородного и кристаллического материала в условиях эксплуатации. Следует отметить, что изгибное состояние цилиндрической оболочки возникает не

только от действия поперечной нагрузки, но и в результате постоянных сил сжатия N_1 . При выпучивании эти силы дают нормальную составляющую $-N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, которая участвует в системе уравнений:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{2} N_2 = q_k, \quad \frac{\partial M}{\partial x} - Q = 0, \quad (1.7)$$

где

$$N_2 = Eh \frac{W}{r}, \quad M_1 = -D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (1.8)$$

Из системы (1.7) с учетом (1.8) и нормальной составляющей $-N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ имеем

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Eh \frac{w}{r} = q_k.$$

Теперь определим значение этой составляющей нормальной силы [12] (Н. В. Колкунов), рассмотрев однородную часть дифференциального уравнения:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Eh \frac{w}{r} = 0, \quad (1.9)$$

$$\text{решение ищем в виде: } w = A \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (1.10)$$

где L – рабочая длина оболочки, m – число полуволн, образующихся при потере устойчивости.

Подставляя (1.10) в (1.9) и приравнявая к нулю множитель при $\sin \frac{m\pi x}{L}$, получаем выражение для критического усилия:

$$N_{\text{кр}} = Dh \left(\frac{m^2 \pi^2}{hL^2} + \frac{E}{r^2 D} \frac{L^2}{m^2 \pi^2} \right). \quad (1.11)$$

Исследуя выражение (1.11) на минимум, получаем значение m , соответствующее минимальному значению критической силы:

$$m = \frac{L}{m} \sqrt{\frac{Eh}{r^2 D}},$$

$$\frac{\partial N_{кр}}{\partial m} = 0. \quad (1.12)$$

С учетом (1.12) получим:

$$N_{кр} = \frac{Eh^2}{r\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad (1.13)$$

$N_{кр}$ определим при $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$ разделяя окружность на полуволны.

Тогда уравнение устойчивости цилиндрической оболочки с заполнителем при действии осевого давления $N_{кр}$ и при действии неравномерного внешнего давления q_k по формам критической деформации поперечного сечения имеет вид:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_{\epsilon\delta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Eh \frac{w}{r^2} = q_k,$$

$$N_{\epsilon\delta} > \frac{Eh^2}{r\sqrt{3(1-\nu^2)}} \text{ и } N_{\epsilon\delta} < \frac{Eh^2}{r\sqrt{3(1-\nu^2)}}.$$

Некоторые классы внутренних нагрузок по критическим деформациям:

1. Если критическая деформация возрастает от 0,1 до 0,15 %, то это есть действие поперечной нагрузки;
2. Если критическая деформация падает от 1,2 до 0,8 %, то это есть действие объемных сил;
3. Если критическая деформация падает от 0,5 до 0,4 %, то это есть действие осевых сил;
4. Если критическая деформация имеет прямоугольный, треугольный, трапециевидный и синусоидальный вид, то на стенки нефтегазопровода соответственно действуют внутренние поперечные неравномерные прямоугольные, треугольные, трапециевидные и синусоидальные нагрузки.

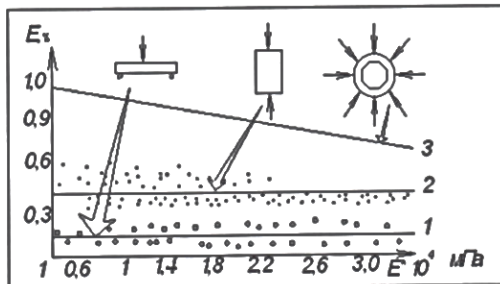


Рис.15.

Некоторые приложения дифференциального уравнения оболочек при моделировании физико-технических процессов модели Б-2 как стационарного объекта с запаздывающим аргументом под действием как активных, так и реактивных нагрузок типа Винклера с позиции моделирования упругого сопротивления в условиях эксплуатации:

рассмотрим задачи моментной теории оболочек, позволяющих рассчитывать конструкции с учетом их изгиба, когда незначительные изгибающие моменты в оболочке имеют большие напряжения [5].

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(A_2^* T_{11}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(A_1^* T_{21}^*) + T_{12}^* \frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_1} - T_{22}^* \frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 (N_1^* K_{11}^* + N_2^* K_{12}^* + \chi_1^*) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(A_2^* N_1^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(A_1^* N_2^*) - (T_{11}^* K_{11}^* + T_{22}^* + T_{12}^* K_{12}^* - \chi_3) A_1^* A_2^* &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(A_2^* M_{11}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(A_1^* M_{21}^*) + M_{12}^* \frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2} - M_{22}^* \frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_1} + A_1^* A_2^* (L_1^* + N_1^*) &= 0, \\ T_{12}^* + T_{21}^* + M_{12}^* K_{22}^* + M_{21}^* K_{22}^* - K_{12}^* (M_{11}^* + M_{22}^*) &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\text{Здесь } T_{ik}^* = \int_{-h/2}^{h/2} \delta_{ik}^* dz, M_{ik}^* = \int_{-h/2}^{h/2} \delta_{ik}^* dz, N_{ik}^* = \int_{-h/2}^{h/2} \delta_{iz}^* dz. \quad (1.15)$$

T_{ik}^* – проекции векторов усилий, M_{ik}^* – проекции векторов моментных усилий, N_{ik}^* – проекции векторов перерезывающих усилий, $\delta_{ik} \delta_{iz}$ – составляющие напряжения $\delta_{\alpha_1} \delta_{\alpha_2}$ по

направлениям единичных векторов k_1, k_2, k_3 срединной поверхности до деформации, k_{ij}^* – кривизна координатных линий.

В частности:

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_{-b/2}^{b/2} \delta_1 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz, & N_2 &= \int_{-b/2}^{b/2} \delta_2 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz, \\ T_{12} &= \int_{-b/2}^{b/2} \delta_{12} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz, & T_{21} &= \int_{-b/2}^{b/2} \delta_{21} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz, \\ M_1 &= \int_{-b/2}^{b/2} \delta_1 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) z dz, & M_2 &= \int_{-b/2}^{b/2} \delta_2 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) z dz, \\ M_{12} &= \int_{-b/2}^{b/2} \delta_{12} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) z dz, & M_{21} &= \int_{-b/2}^{b/2} \delta_{21} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) z dz, \\ Q_1 &= \int_{-b/2}^{b/2} \delta_{z1} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz, & Q_2 &= \int_{-b/2}^{b/2} \delta_{z2} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz, \end{aligned}$$

В качестве примера возьмем цилиндрическую оболочку с заполнителем, среда – упругая, однородная и кристаллическая [6]. При этом следует отметить, что адиабатические изменения объема dQ , также как и очень медленные изотермические изменения объема dT , обусловлены наложенным гидростатическим давлением без объемной вязкости в промежуточных процессах в условиях эксплуатации.

Если в качестве системы координат возьмем x, θ (рис.16),

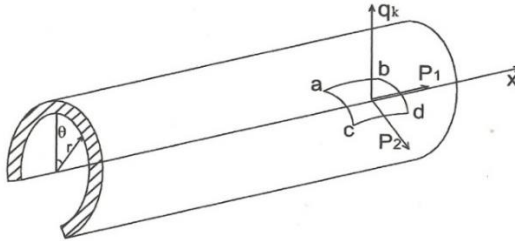


Рис.16.

то уравнения равновесия заполнителя цилиндрической оболочки в указанной системе координат, при $A_1 = 1, A_2 = r = \text{const}, R_1 = \infty, R_2 = r$ из (1.14) имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} r \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} + r p_1 = 0, \\ r \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + Qr + r p_2 = 0, \\ r \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - N_2 + r q_k = 0, \\ r \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - r Q_2 = 0, \\ \frac{1}{r} M_{21} + T_{12} - T_{21} = 0. \end{array} \right.$$

Если геометрические уравнения в указанной системе координат определим из уравнения (1.14):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \nu}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2; \\ \gamma = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\nu}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta}; \end{aligned}$$

то получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial \theta} + \frac{w}{r}, \gamma = \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \beta}, \\ \zeta_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \zeta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\nu}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ \zeta &= \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial x} \right), \psi = \frac{1}{r} \left(\nu - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

где ψ – угол поворота касательной к поперечному сечению оболочки при деформации.

Физические уравнения определяются также как (1.14) в указанной системе координат:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} \right) \right], \\
 N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right], \\
 T = T_{12} = T_{21} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right], \\
 M_1 &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{r} \left(-\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\
 M = M_{12} = M_{21} &= -D(1-\nu) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial x} \right).
 \end{aligned}$$

Теперь для определения давления q_k в указанной системе координат по формулам критической деформации поперечного сечения заполнителя при эксплуатации сформулируем ряд предположений [7].

Предположение 1. Связь между осевой сжимающей нагрузкой, действующей по торцам цилиндрической оболочки с заполнителем и деформацией, представляет собой начальное искривление поверхности; поперечное сечение заполнителя до начала эксплуатации есть круг при $\frac{r}{L} = 1$ и есть функция.

$$q_k = f_i \left(e \frac{h}{r} \right) f \left(\frac{r}{L} \right),$$

где h – толщина стенки корпуса оболочки, L – длина заполнителя, e – сближение торцов оболочки – укорочение длины L .

Предположение 2. При переходе от одного равновесного состояния к другому при одних и тех же нагрузках начальное напряжение остается чисто упругим независимо от причин

возникновения. При этом оно является функцией от $\frac{h}{2}$, зависящей от максимальной касательной нагрузки:

$$\delta_{окр,кр} = f_1^* \left(n, \frac{h}{2} \right),$$

где n – собственное число волн искажения поперечного сечения цилиндрической оболочки с заполнителем.

Например, для цилиндрической оболочки из кристаллического материала критическое значение окружного остаточного напряжения подсчитано формулой:

$$\delta_{окр,кр} = 0,01 \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{h}{r} n \right)^2 \right] E \frac{1 + \nu^2}{1 - \nu^2}, \quad (1.16)$$

при этом, расчет по формуле (1.16) показал, что:

при $n=2$, поперечное сечение имело эллипсоидальную форму, а значение $\delta_{окр,кр} = 520 \text{ МПа}$;

при $n=3$, поперечное сечение имело трехгранную форму, а значение $\delta_{окр,кр} = 230 \text{ МПа}$;

при $n=4$, поперечное сечение имело четырехгранную форму, а значение $\delta_{окр,кр} = 130 \text{ МПа}$.

Следовательно, при $\frac{h}{R} = \text{const}$, давление на стенки со стороны заполнителя можно определять по формам критической деформации поперечного сечения заполнителя:

$$q_{k1} = \frac{8}{3} q_0 \frac{r}{L}; \quad q_{k2} = 2 q_0 \frac{r}{L}; \quad q_{k3} = \frac{4}{3} q_0 \frac{r}{L}; \quad q_{k4} = q_0 \gamma H; \quad \gamma = 27 \cdot 10^{-2};$$

$$q_0 = \frac{P}{2Q} = \xi_{kp} - \text{по нелинейной теории};$$

$$q_0 = \frac{0,85E}{L(1-\nu)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}} - \text{по эксперименту}.$$

Анализ критических нагрузок по формам критической деформации поперечного сечения проведен в работах кафедры математики КазНИТУ.

Предположение 3. Уравнения равновесия цилиндрической оболочки с заполнителем в начальный момент $t = \tau_0$ до эксплуатации под действием давления на стенки по формулам (1.14) на основании формулы (1.15) будут:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{1}{r} N_2 = -q_k; \quad \frac{\partial M}{\partial x} - Q_1 = 0,$$

где $N_1 = Eh \frac{w}{r}$; $M_1 = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$; $K = \frac{Eh}{R^2}$ – жесткость.

Если решение дифференциального уравнения $D \frac{d^4 W}{dx^4} + KW = 0$ ищем в виде $W = A \sin \frac{m\pi x}{L}$, то получим выражение для определения K – жесткости. Затем, исследуя выражение жесткости на минимум $\frac{\partial K}{\partial m} = 0$, получим $K = \frac{Eh}{R^2}$.

Тогда уравнения равновесия цилиндрической оболочки с заполнителем в начальный момент $t = \tau_0$ до начала эксплуатации будут:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial Q_1}{\partial \xi} - \frac{1}{2} N_2 = -q_k; \quad \frac{\partial M_1}{\partial \xi} - Q_1 = 0,$$

$$N_2 = Eh \frac{w}{r}; \quad M_1 = -D \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}.$$

Из системы (1.14) с учетом (1.15) получим:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + Eh \frac{w}{R^2} = q_k + p_0 e^{i\omega t},$$

где p_0 – комплексная амплитуда силы, w^* – комплексная жесткость, D – цилиндрическая жесткость, E – модуль Юнга, q_k – давление на стенки в указанной системе координат по

формам критической деформации поперечного сечения заполнителя при эксплуатации [2]:

$$q_k = f\left(\frac{r}{L}\right) q_0 f(\xi).$$

Пример для транспонированных задач.

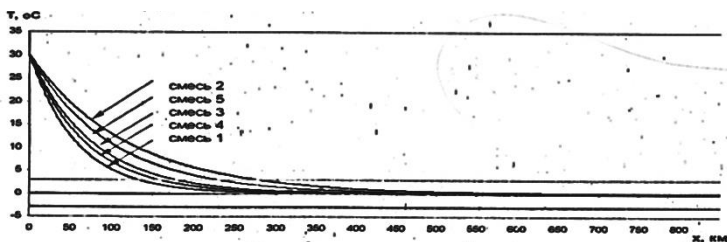


Рис.17. Распределение температуры нефтесмесей по трассе трубопровода

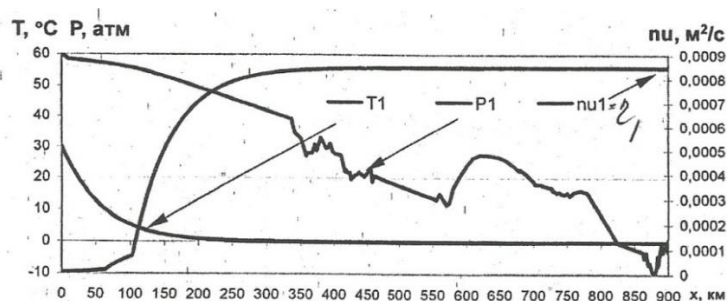


Рис.18. Распределение температуры, вязкости и давления по трассе трубопровода, транспортирующей смесь 1 (объем перекачки 900м³/ч)

В момент времени τ нагрузка со стороны заполнителя на стенки оболочки находится в точке ξ , с δ – окрестностью. Она неподвижна в течение малого промежутка времени $\Delta t = \frac{\Delta \xi}{v}$, v – скорость распространения (движения). При этом $v = v_0 e^{-\rho x}$, ρ – плотность заполнителя. После истечения времени $\Delta \tau$ нагрузка со стороны заполнителя исчезает, тотчас появляясь на

соседнем участке $\Delta\xi$ без наличия объемной вязкости в промежуточных процессах.

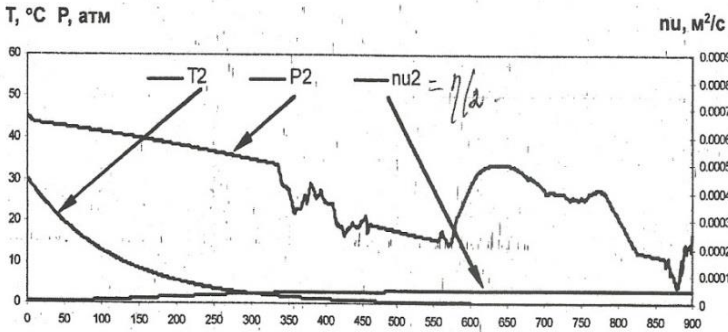


Рис.19. Распределение температуры, вязкости и давления по трассе трубопровода, транспортирующего смесь 1 (объем перекачки 900м³/ч)

Задачи такого рода для простейших законов теплопроводности решались ранее академиками А. А. Дороницыным [8] и А. Ф. Чудновским [9]. В отличие от подходов этих авторов метод частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений дает возможность получить аналитическое решение практически для любого закона изменения коэффициента теплопроводности.

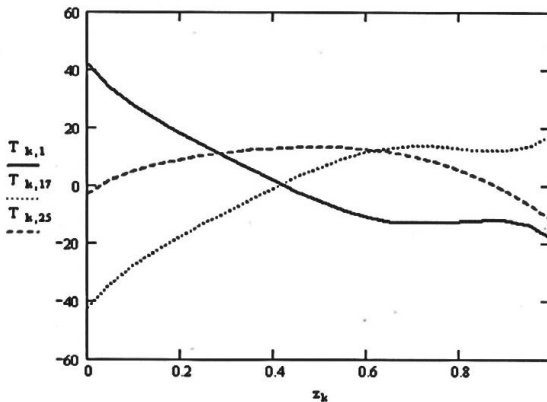


Рис.20. Температурные поля в атмосфере в моменты времени

$$t_1, t_{17}, t_{25}$$

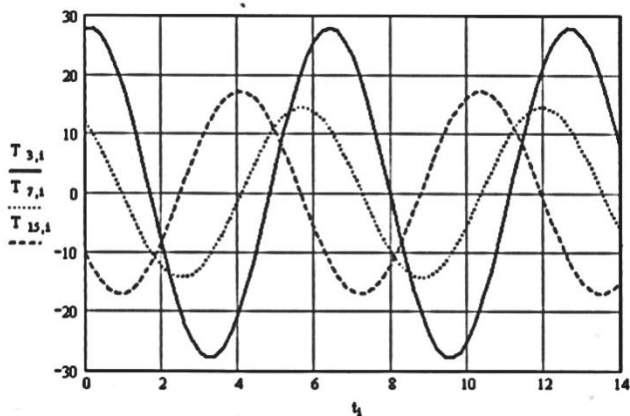


Рис.21. Температурные волны на высоте Z_3

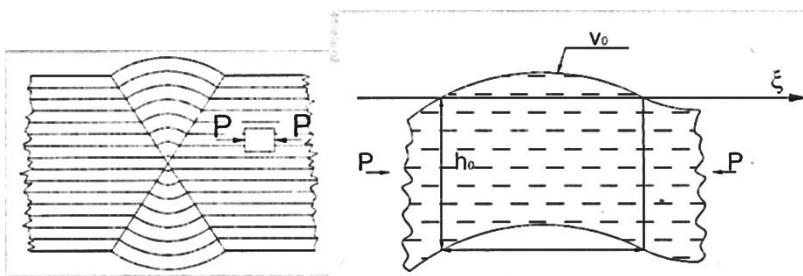


Рис.22. Появление кинетической неустойчивости заполнителя



Рис.23. Вязкое выпучивание заполнителя

Предположение 4. Если ввести коэффициент нагрузки K , который учитывал бы способность заполнителя расслабляться

под нагрузкой, то $K = \frac{N}{N_{kp}}$, где N – действующая сжимающая

сила, N_{kp} – критическая сжимающая нагрузка, вызывающая какую-либо из форм потери устойчивости. Указанные нами предположения не противоречат методам определения давления нефти на внутреннюю поверхность трубы по формуле Блазкуса и определение начального касательного напряжения

$$\tau_0 = 0,027 \rho w_{cp}^2 \left(\frac{\mu}{\rho w_{cp} d} \right)^{\frac{1}{4}}$$

является обобщением их в условиях

эксплуатации задачи Филиппа Бресса для окружной критической нагрузки $\delta_{окр.кр}$ под действием начального касательного напряжения.

Рассмотрим случай нагружения со стороны заполнителя, распределенной нагрузки интенсивностью q н/м на участке $0 < \xi < 0,9$ для одного участка [10]. Разработана и обоснована модель Б-2 на основании основных уравнений и их линеаризации в теории упругих оболочек.

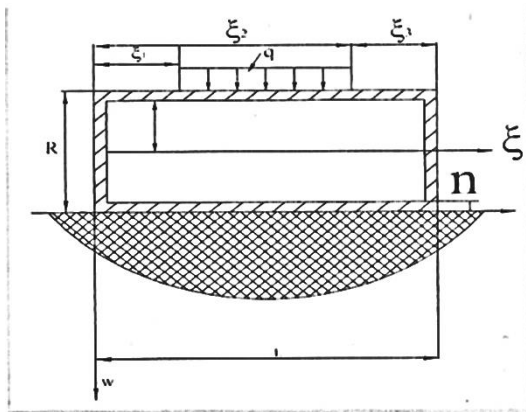


Рис. 24. Схема нагружения распределенной нагрузкой

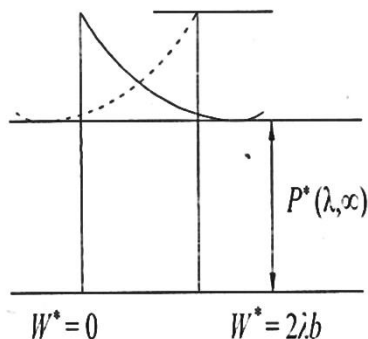


Рис.25. Контактное сжатие, соответствующее допущению, что прогиб является контактным для $W^* > 0$

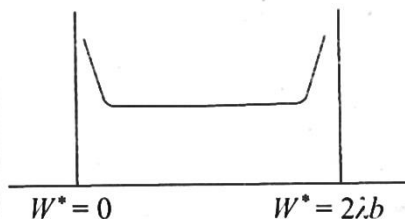


Рис.26. Набросок действительного распределения сжатия в пределах ширины заполнителя

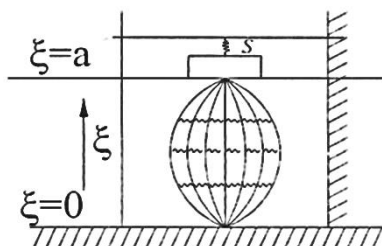


Рис. 27. Потеря устойчивости Эйлера стержня в большом прогибе в поперечном сечении

Гипотеза плоских сечений Кирхгофа-Леви: нормаль к срединной поверхности до и после деформации остается нормалью к срединной поверхности, учитывается только поворот срединной поверхности и линейных элементов [11].

Здесь

$$\alpha + d\alpha = \text{const}, \quad \beta + d\beta = \text{const}, \quad DD' = \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha d\beta; \quad DD'' = \frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha d\beta.$$

На грани OF нормальное усилие: $N_1 B d\beta$

На грани CD нормальное усилие

$$N_1 B d\beta + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} B d\alpha d\beta + N_1 \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} d\alpha d\beta - \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha d\beta,$$

Длины сторон элемента на уровне срединной поверхности.

Гипотеза типа С. П. Тимошенко: уравнения равновесия составляются с учетом изменения срединной поверхности оболочки, причем учитываются не только повороты, но и удлинения линейных элементов.

Для составления уравнения гибких оболочек по классической теории рассмотрим криволинейную систему координат $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$, $z = z(\alpha, \beta)$,

$\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и интенсивности нагрузки:

Нормальные силы:

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta_1 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz, \quad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta_2 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz.$$

Сдвигающие силы – проекции векторов усилий:

$$T_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta_{12} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz,$$

Изгибающие моменты перерезывающей силы:

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta_1 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) z dz, \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta_2 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) z dz,$$

Крутящие силы: $Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta_{z1} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz.$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2^* N_1^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1^* N_2^*) - (T_{11}^* K_{11}^* + T_{22}^* + T_{12}^* K_{12}^* - \chi_3) A_1^* A_2^* &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2^* M_{11}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1^* M_{21}^*) + M_{12}^* \frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2} - M_{22}^* \frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_1} + A_1^* A_2^* (L_1^* + N_1^*) &= 0, \\ T_{12}^* + T_{21}^* + M_{12}^* K_{22}^* + M_{21}^* K_{22}^* - K_{12}^* (M_{11}^* + M_{22}^*) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь L_j^* – проекции векторов координат на деформированной срединной поверхности. При этом использованы научные исследования ученых: Ж. С. Ержанова, Е. Т. Божанова, Т. О. Мендыбаева, А. И. Цейтмен, А. А. Кусаинова, А. М. Ибраимкулова, Б. С. Турусбековой, С. Б. Ёубёкiр, А. Фрейденталь, Х. Гейрингер, Ж. О. Отарбаева, С. Н. Бугановой, Б. Т. Жумагулова, А.У. Евсеевой, О. О. Евсеева, А. А. Карсакбаева, Е. М. Хайруллина, А. Б. Скаковой, А. Б. Беккулиевой, Г. А. Тулешевой, О. С. Сатыбалдиева.

Выведены уравнения равновесия трубчатой конструкции с заполнителем под действием движущей динамической силы $F^*(\xi, t)$ как стационарного объекта с запаздывающим аргументом с позиции моделирования упругого сопротивления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4w &= F(\xi, t)(\sin 2\beta\xi - 2)(48e^{\beta\xi} + 2 - 375\sin 2\beta\xi)t, \\ F(\xi, t) &= \begin{cases} \frac{8}{3}q_0\xi; \quad \frac{8}{3}q_0\xi \sin w\xi & 0,6 \leq \xi \leq 1 \\ 2q_0(1-\xi); \quad 2q_0(1-\xi) \sin w\xi & 0,3 \leq \xi \leq 0,6 \\ \frac{4}{3}q_0\left(1-\xi + \frac{\xi^2}{2}\right); \quad \frac{4}{3}q_0\left(1-\xi + \frac{\xi^2}{2}\right) \sin w\xi & 0,1 \leq \xi \leq 0,3. \end{cases} \end{aligned}$$

ГЛАВА 2. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОБОЛОЧЕК И ТРУБЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Об изменении гибкости эквивалентной чередующей одиночной полосы под действием статической активной силы, лежащей на основании типа Винклера. Модель Б-2

Рассмотрим эквивалентную среду в виде трехслойной цилиндрической оболочки длиной L , толщиной h , внутренним радиусом R , находящейся на основании типа Винклера под действием активных сил по формам критической деформации поперечного сечения:

$$f_k = f_k \left(l \frac{h}{2} \right) f \left(\frac{R}{L} \right),$$

где l – сближение торцов поперечного сечения.

При этом, окружное напряжение зависит от максимальной нагрузки:

$$\sigma_{окр.кр} = f_k^* \left(n, \frac{h}{2} \right),$$

где n – собственное число волн искажения формы поперечного сечения, f – активная сила по формам критической деформации поперечного сечения будет:

$$q_k = \lambda_k \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}}, \quad \lambda_k = \left\{ \frac{8}{3}, 2, \frac{4}{3} \right\}.$$

Тогда уравнение равновесия под действием статических нагрузок на отдельных участках сопряжения имеет вид:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{K}{EJ} W = \pm \frac{q_k}{EJ} \{1; L - x; \sin \alpha x\}. \quad (2.1)$$

Или по методу академика А. Н. Крылова, при замене

$$z = \sqrt[4]{\frac{K}{4D}}x$$

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + 4W = \pm \frac{q_k}{4K} \{1; 1 - z; \sin \alpha z\}. \quad (2.2)$$

При решении дифференциального уравнения (2.1) и (2.2) общее решение однородной части может быть следующим:

1 случай. $\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{K}{EJ} W_0 = 0,$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \frac{K}{EJ} = 0, \quad \lambda_m = \sqrt[4]{\frac{K}{EJ}} \left(\cos \frac{\pi + 2m\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2m\pi}{4} \right).$$

Общее решение однородной части

$$W_0(x) = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x), \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{K}{EJ}}.$$

2 случай. $\frac{d^4 W}{dz^4} + 4W = 0,$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4 = \lambda^4 + (1+i)(1-i)(-1+i)(-1-i) = 0.$$

Общее решение однородной части

$$W_0(z) = e^z (C_1 \cos z + C_2 \sin z) + e^{-z} (C_3 \cos z + C_4 \sin z).$$

Рассмотрим выпучивание и колебание эквивалентной полосы при заданных граничных условиях. При этом нужно учесть, что в смежных сечениях, до и после места сопряжения неравномерных поперечных нагрузок должны быть одинаковыми:

- линейные перемещения – W ;
- угловые перемещения – $\frac{dW}{dx}$;
- изгибающие моменты – $M = -EJ \frac{d^2 W}{dx^2}$;

- перерезывающие силы $-Q = -EJ \frac{d^3W}{dx^3}$;

Задача 1.1. Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{d^4W}{dx^4} + \frac{K}{EJ}W = -\frac{q_k}{EJ}, \quad (2.3)$$

граничные условия на торцах (левый край – свободный, правый – скользяще-заделанный):

$$\left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3W}{dx^3} \right|_{x=0} = 0, \quad (2.4)$$

$$W|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (2.5)$$

Решение. Общее решение уравнения (2.3) запишем в виде

$$W(x) = W_0(x) + W_1(x),$$

где $W_0(x)$ – общее решение однородной части,

$W_1(x)$ – частное решение определено как:

$$W_1(x) = -\frac{q_k}{K}.$$

Тогда

$$W(x) = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) - \frac{q_k}{K}, \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{K}{EJ}}. \quad (2.6)$$

На основании формулы (2.6) определим угловые перемещения, изгибающие моменты и перерезывающие силы без множителя EJ :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= e^{\beta x} \beta (D_1 \cos \beta x + D_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} \beta (D_3 \cos \beta x - D_4 \sin \beta x), \\ D_1 &= C_1 + C_2; \quad D_2 = C_2 - C_1; \quad D_3 = C_4 - C_3; \quad D_4 = C_3 + C_4; \\ \frac{d^2W}{dx^2} &= e^{\beta x} \beta^2 (E_1 \cos \beta x + E_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} \beta^2 (E_3 \cos \beta x + E_4 \sin \beta x), \\ E_1 &= D_1 + D_2; \quad E_2 = D_2 - D_1; \quad E_3 = D_4 - D_3; \quad E_4 = D_3 + D_4; \end{aligned}$$

$$\frac{d^3 W}{dx^3} = e^{\beta x} \beta^3 (A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} \beta^3 (A_3 \cos \beta x - A_4 \sin \beta x),$$

$$A_1 = E_1 + E_2; \quad A_2 = E_2 - E_1; \quad A_3 = E_4 - E_3; \quad A_4 = E_3 + E_4.$$

На основании формул (2.4) – (2.5) получим систему алгебраических уравнений относительно независимых произвольных постоянных интегрирования:

$$(ch\beta L \cos \beta L)C_1 + (sh\beta L \sin \beta L - e^{-\beta L} \cos \beta L)C_2 = \frac{q_k}{2K}, \quad (2.7)$$

$$(sh\beta L \cos \beta L - ch\beta L \sin \beta L)C_1 + [(\cos \beta L + \sin \beta L)ch\beta L + e^{-\beta L} \sin \beta L]C_2 = 0,$$

$$C_3 = -C_1 - 2C_2, C_4 = -C_2.$$

Система (2.7) имеет единственное решение:

$$C_1 = \frac{q_k}{2K\Delta} [(\cos \beta L + \sin \beta L)ch\beta L + e^{-\beta L} \sin \beta L],$$

$$C_2 = \frac{q_k}{2K\Delta} [(\cos \beta L - \sin \beta L)ch\beta L + 2 \cos \beta L sh\beta L + e^{-\beta L} \sin \beta L],$$

$$C_3 = C_1 - 2C_2, \quad C_4 = -C_2.$$

$$\Delta = \cos^2 \beta L ch^2 \beta L - \sin^2 \beta L sh\beta L ch\beta L + \sin \beta L \cos \beta L + e^{-\beta L} \cos^2 \beta L sh\beta L \quad (2.8)$$

Поставляя (2.8) в (2.6) имеем:

$$W(x) = \frac{q_k}{2K\Delta} [2(\cos \beta L ch\beta L + e^{-\beta L})ch\beta L \cos \beta x + 2 \sin \beta L ch\beta L sh\beta x \cos \beta x +$$

$$+ 2 \cos \beta L sh\beta L + e^{-\beta x} \cos \beta x + (ch\beta L \sin \beta L - sh\beta L \cos \beta L)sh\beta x \sin \beta x] - \frac{q_k}{K}$$

Задача 2.1. Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2 D} W = -\frac{q_k}{D} (L - x), \quad (2.9)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad K = \frac{Eh}{R^2},$$

где граничные условия на торцах (левый край шарнирно-закрепленный, правый – скользяще-заделанный), т.е.:

$$W(x)|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad (2.10)$$

$$W(x)|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (2.11)$$

Решение. Общее решение уравнения (2.9) представим в виде

$$W(x) = W_0(x) + W_1(x),$$

где $W_0(x)$ – общее решение однородной части, $W_1(x)$ – частное решение определено как:

$$W_1(x) = -\frac{q_k R^2}{Eh} (L - x)$$

Тогда линейные перемещения, угловые перемещения, изгибающие моменты и перерезывающие силы без множителя:

$$W(x) = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{q_k R^2}{Eh} (L - x), \quad (2.12)$$

$$\frac{dW}{dx} = e^{\beta x} \beta (D_1 \cos \beta x + D_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} \beta (D_3 \cos \beta x - D_4 \sin \beta x) - \frac{q_k R^2}{Eh}, \quad (2.13)$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = e^{\beta x} \beta^2 (E_1 \cos \beta x + E_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} \beta^2 (E_3 \cos \beta x + E_4 \sin \beta x), \quad (2.14)$$

$$\frac{d^3 W}{dx^3} = e^{\beta x} \beta^3 (A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} \beta^3 (A_3 \cos \beta x - A_4 \sin \beta x), \quad (2.15)$$

$$A_1 = E_1 + E_2; \quad A_2 = E_2 - E_1; \quad A_3 = E_4 - E_3; \quad A_4 = E_3 + E_4.$$

На основании формул (2.12) – (2.15) из граничных условий (2.10), (2.11) получим систему алгебраических уравнений

относительно неизвестных произвольных постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} (sh\beta L \cos \beta L)C_1 + (sh\beta L \sin \beta L)C_2 &= \frac{q_k R^2}{2Eh} e^{-\beta L}, \\ (ch\beta L \cos \beta L - sh\beta L \sin \beta L)C_1 + (\cos \beta L sh\beta L - \sin \beta L ch\beta L)C_2 &= \\ &= \frac{q_k R^2}{2Eh} \left(\frac{1}{\beta} - L \cos \beta L e^{-\beta L} \right), \\ C_3 &= -C_1 - \frac{q_k R^2}{2Eh} L, \quad C_4 = -C_2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

Система (2.16) имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{q_k R^2}{2Eh\Delta} [e^{-\beta L} \cos \beta L (\cos \beta L sh\beta L + \\ &+ \sin \beta L ch\beta L + L \sin \beta L sh\beta L) - \beta L sh\beta L], \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{q_k R^2}{2Eh\Delta} [e^{-\beta L} \cos \beta L (\sin \beta L sh\beta L - \\ &- \cos \beta L ch\beta L - L \cos \beta L sh\beta L) + \sin \beta L sh\beta L], \\ C_3 &= -C_1 - \frac{q_k R^2}{Eh} L, \quad C_4 = -C_2, \quad \Delta = sh^2 \beta L, \end{aligned} \quad (2.18)$$

Подставляя (2.17) – (2.18) в (2.12) имеем

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{q_k R^2}{Eh\Delta} \{ [e^{-\beta L} \cos \beta L (\cos \beta L sh\beta L + \sin \beta L ch\beta L + L \sin \beta L sh\beta L) - \\ &- \frac{1}{\beta} \sin \beta L sh\beta L] \cos \beta x + [e^{-\beta L} \cos \beta L (\sin \beta L sh\beta L - \cos \beta L ch\beta L - L \cos \beta L sh\beta L) + \\ &+ \frac{1}{\beta} \cos \beta L sh\beta L] \sin \beta x - \frac{q_k R^2}{Eh} (x + L e^{-\beta x} \cos \beta x - L), \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{K}{D}}. \end{aligned}$$

Задача 3.1. Уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^4 W}{dz^4} + 4W &= -\frac{q_k}{4K} \sin \omega z, \\ z &= \sqrt[4]{\frac{K}{4D}} x, \quad \omega = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

где граничные условия на торцах (левый край свободный, правый – скользяще-заделанный), т.е.:

$$\left. \frac{d^2 W}{dz^2} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3 W}{dz^3} \right|_{z=0} = 0, \quad (2.19)$$

$$W(z) \Big|_{z=L} = 0, \quad \left. \frac{dW}{dz} \right|_{z=L} = 0. \quad (2.20)$$

Решение. Общее решение уравнения (2.3) представим в виде $W(z) = W_0(z) + W_1(z)$,

где $W_0(z)$ – общее решение однородной части, $W_1(z)$ – частное решение определено как

$$W_1(z) = \frac{q_k}{4K(\omega^4 + 4)} \sin \omega z$$

Тогда линейные перемещения, угловые перемещения, изгибающие моменты и перерезывающие силы без множителя:

$$W(x) = e^z (C_1 \cos z + C_2 \sin z) + e^{-z} (C_3 \cos z + C_4 \sin z) + \frac{q_k \sin \omega z}{4K(\omega^4 + 4)}, \quad (2.21)$$

$$\frac{dW}{dx} = e^z (D_1 \cos z + D_2 \sin z) + e^{-z} (D_3 \cos z - D_4 \sin z) + \frac{q_k \sin \omega z}{4K(\omega^4 + 4)}, \quad (2.22)$$

$$D_1 = C_1 + C_2; \quad D_2 = C_2 - C_1; \quad D_3 = C_4 - C_3; \quad D_4 = C_3 + C_4, \quad (2.23)$$

$$\frac{d^2 W}{dz^2} = e^z (E_1 \cos z + E_2 \sin z) + e^{-z} (E_3 \cos z + E_4 \sin z) - \frac{q_k \sin \omega z}{4K(\omega^4 + 4)}, \quad (2.24)$$

$$E_1 = D_1 + D_2; \quad E_2 = D_2 - D_1; \quad E_3 = D_4 - D_3; \quad E_4 = D_3 + D_4, \quad (2.25)$$

$$\frac{d^3 W}{dz^3} = e^z (A_1 \cos z + A_2 \sin z) + e^{-z} (A_3 \cos z - A_4 \sin z) - \frac{q_k \sin \omega z}{4K(\omega^4 + 4)}, \quad (2.26)$$

$$A_1 = E_1 + E_2; \quad A_2 = E_2 - E_1; \quad A_3 = E_4 - E_3; \quad A_4 = E_3 + E_4. \quad (2.27)$$

На основании формул (2.21) – (2.27) из граничных условий (2.19), (2.20) получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных произвольных постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} & (\cos LshL - \sin LchL)C_1 + [(\cos L + \sin L)chL + e^{-L} \sin L]C_2 = \\ & = \frac{q_k}{16K(\omega^4 + 4)} [\omega^2 e^{-L} (\cos L + \sin L) - 2 \cos \omega L], \\ & (\cos LchL)C_1 + (\sin LshL - \cos Le^L)C_2 = \frac{q_k}{16K(\omega^4 + 4)} (\omega^3 \cos Le^{-L} - 2 \sin \omega L), \\ & C_3 = -C_1 - 2C_2 - \frac{q_k \omega^3}{8K(\omega^4 + 4)}, \quad C_4 = -C_2, \quad (2.28) \end{aligned}$$

Система (2.28) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{q_k}{16K(\omega^4 + 4)\Delta} \{ [\omega^3 (\cos L + \sin L) (\sin LshL - \cos LhL) + 2(\omega \cos L \cos \omega L + \\ & + \sin L \sin \omega L)] e^{-L} - \omega^3 (\cos^2 L + \sin 2L) e^{-2L} + 2[(\cos L + \sin L) chL \sin \omega L - \\ & - \omega \sin LshL \cos \omega L] \}, \\ C_2 &= \frac{q_k}{16K(\omega^4 + 4)\Delta} [2(\sin LchL - \cos LshL) + 2\omega \cos LchL \cos \omega L - \\ & - (\cos^2 Le^{-L} + \sin 2LchL)\omega^3 e^{-L}], \\ C_3 &= C_1 - 2C_2 + \frac{q_k \omega^3}{16K(\omega^4 + 4)}, \quad C_4 = -C_2, \quad \Delta = -[\cos^2 LchL + \sin^2 LchL + \\ & + e^{-L} \cos^2 LshL]. \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения в (2.21) имеем

$$\begin{aligned}
 W(z) = & \frac{q_k}{4K(\omega^4 + 4)\Delta} \{ [\omega^3(\cos L + \sin L)(\sin LshL - \cos LchL) + \\
 & 2(\omega \cos L \cos \omega L + \sin L \sin \omega L)]e^{-L} - \omega^3(\cos^2 L + \sin 2L)e^{-2L} + \\
 & + 2[(\cos L + \sin L)chL \sin \omega L - \omega \sin LshL \cos \omega L] \cdot \\
 & \cdot \cos zshz + [2(\sin LchL - \cos LshL) + 2\omega \cos LchL \cos \omega L - \\
 & - (\cos^2 L e^{-L} + \sin 2LchL)\omega^3 e^{-L}] \cdot \\
 & \cdot (\sin zshz - e^{-z} \cos z) \} + \frac{q_k}{4K(\omega^4 + 4)} (\omega^3 e^{-z} \cos z + 2 \sin \omega z). \\
 \Delta = & -(chL + \cos L \sin L + e^{-L} \cos^2 LshL).
 \end{aligned}$$

Численное решение задачи 1.1 показывает, что изменение гибкости с начальной симметричной волнистостью средней линии эквивалентного слоя соответствует прямой Ясинского, когда $0 \leq x \leq 1$.

2.2. Приложение теории оболочек при составлении математической модели Б-5

Математическую модель Б-5 опишем уравнением:

$$EJ \frac{d^4 W}{dx^4} - N_1 \frac{d^2 W}{dx^2} + kW = q_k \{1; L - x; \sin \omega x\},$$

или

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{N_1}{EJ} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{k}{EJ} W = \frac{q_k}{EJ} \{1; L - x; \sin \omega x\},$$

здесь для изотропного тела

$$k = \frac{Eh}{k^2}; \quad N_1 = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} = k \frac{Rh}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)};$$

$Eh = D$ – круговое цилиндрическое тело, k – жесткость.

Тогда для математической модели Б-5

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{N_1}{EJ} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{k}{D} W = \frac{q_k}{D} \{1; L - x; \sin \omega x\}, \quad (2.29)$$

решение ищем в виде: $W = W_0(x) + W_1(x)$,

$W(x)$ – какое-нибудь частное решение, а $W_0(x)$ – общее решение

однородной части
$$\frac{d^4 W_0}{dx^4} - \frac{N_1}{EJ} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{k}{D} W_0(x) = 0. \quad (2.30)$$

Если $W_0(x) = e^{\lambda x}$, то

$$\lambda^4 - \frac{N_1}{D} \lambda^2 + \frac{k}{EJ} = 0 \text{ – характеристическое уравнение}$$

или
$$\left(\lambda^2 - \frac{N_1}{2D}\right)^2 = \frac{N_1^2 - 4kD}{4(EJ)^2}.$$

Исследование правой части характеристического уравнения для изотропного тела:

$$N_1^2 - 4kD = k \left[\frac{R^2 h^2 k}{3(1 - \nu^2)} - 4D \right].$$

Откуда:

$$N_1^2 - 4kD = 0, \text{ если } k=12D,$$

$$N_1^2 - 4kD > 0, \text{ если } k>12D,$$

$$N_1^2 - 4kD < 0, \text{ если } k<12D. \quad (2.31)$$

Теперь, в зависимости от формы активной критической деформации поперечного сечения трубчатой конструкции можем найти какое-нибудь частное решение $W_1(x) = \left\{ \frac{q_k}{k}, \frac{q_k}{k} (L - x) \right\}$, тогда

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{N_1}{D} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{k}{D} W = \frac{q_k}{D} \{1; L - x\}.$$

Замечание 1. Значение критической нагрузки – N_1 , жесткости – k , цилиндрической жесткости D для изотропного тела, определяются из однородного уравнения (2.30) при $W_0(x) = A \sin \frac{\pi x}{L}$, исследуя их значения на минимум.

Устойчивость нефтегазопровода под действием собственного веса и равномерного осевого давления,

находящейся на упруго-вязком основании модель типа Винклера, проиллюстрирована на рис. 28, 29.

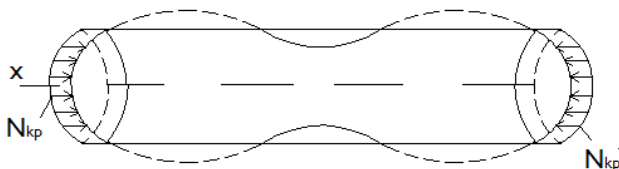


Рис.28. Труба под действием собственного веса и равномерного осевого давления $N_{кр}$

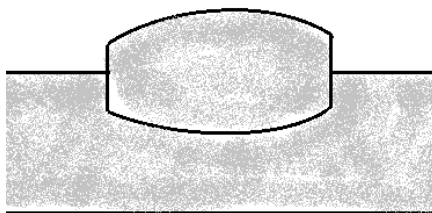


Рис.29. Модель Винклера

Устойчивость нефтегазопровода под действием собственного веса и равномерного осевого давления, находящейся на упруго-вязком основании (модель типа Пастернака), проиллюстрирована на рис. 30, 31.

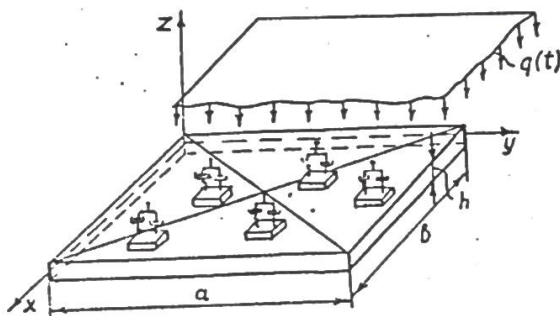


Рис. 30. Модель Пастернака

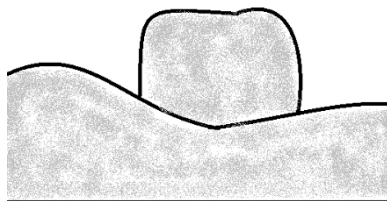


Рис. 31. Мембранная модель

Исследование устойчивости, изгиба, колебаний конструкций под действием неравномерного поперечного и равномерного осевого давления $N_{кр}$, находящейся на упруго вязком основании типа Винклера–модели Б-5, проведем на примере трубчатой конструкции.

Рассмотрим трубчатую конструкцию в виде трехслойной цилиндрической оболочки длиной l , радиусом R , толщиной h , под действием активной силы $-q_k$ и при действии равномерного осевого давления $N_{кр}$, находящейся на упруго-вязком основании типа Винклера. При этом критическая нагрузка $N_{кр}$ определяется из условия равновесия внутренних усилий в момент потери устойчивости поперечного сечения, когда появляется новая форма равновесия, отличная от первоначальной круговой. Следует учитывать, что это изгибное состояние возникает не от действия поперечной силы, а в результате постоянных сил сжатия N_1 , рис.32 и 33.

Положение равновесия

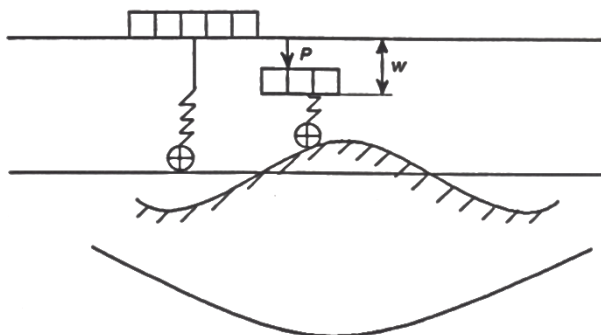


Рис. 32. Мембранная модель Соколова

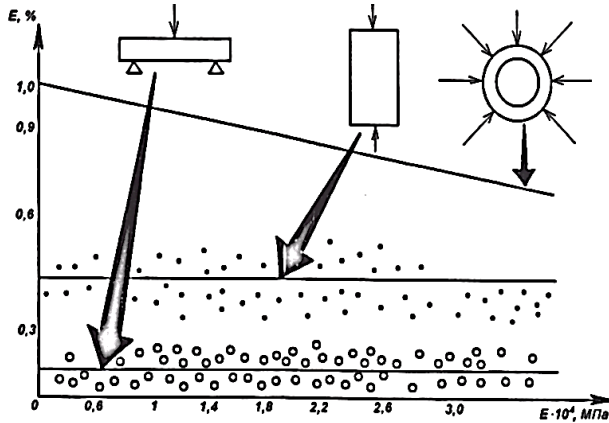


Рис. 33. Воздействие поперечной, продольной и объемной силы

Если перепишем характеристическое уравнение (2.30) в виде:

$$(\lambda^2 - \frac{N_1}{2EJ})^2 = \frac{N_1^2 - 4kJ}{4(EJ)^2},$$

то возможны следующие случаи:

I-й случай. Все корни действительны: при этом, два корня равные, т.е.

$$N_1^2 - 4kJ = 0,$$

$$(\lambda^2 - \frac{N_1}{2EJ})(\lambda^2 - \frac{N_1}{2EJ}) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \lambda_1 \Rightarrow e^\alpha; \lambda^2 - \frac{N_1}{2EJ} \lambda_1 = e^\alpha; \lambda_2 = e^{-\alpha};$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{N_1}{2EJ}};$$

при $\beta = 0$ (поперечное сечение есть окружность); $\alpha = \sqrt{3}$ – для вычисления.

Следовательно, общее решение однородной части имеет вид:

$$W_0(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x}.$$

Модель Б-5 работает по аналогии модели Б-1 при вынужденном колебании трубчатой конструкции из полуфабрикатов с металлической матрицей (твердой);

II-й случай. Все корни действительные и различные, т.е.

$$N_1^2 - 4kD > 0,$$

тогда $\lambda^2 - \frac{N_1}{2EJ} = \pm \frac{\sqrt{N_1^2 - 4kEJ}}{4EJ}$, откуда корни

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\alpha \pm \beta}.$$

Следовательно, общее решение однородной части имеет вид

$$W_0(x) = C_1 e^{\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_3 e^{\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha+\beta}x},$$

$$\alpha = \frac{N_1}{2EJ}; \beta = \frac{\sqrt{N_1^2 - 4kEJ}}{2EJ},$$

где $\alpha = 9$; $\beta = \pm 6\sqrt{2}$ – для вычисления.

Модель Б-5 работает по аналогии с моделью Б-1, представляющую собой трубчатую конструкцию из полуфабрикатов с мягкой матрицей; из композиционных материалов типа легкого сплава – высокопрочного волокна армирующим волокном могут быть «усы»; бетона, армированного различными короткими металлическими волокнами и кремнебетона [17].

III-й случай. Все корни комплексные, т.е. $N_1^2 - 4kD < 0$,

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \pm i \sin \frac{\varphi}{2} \right); \lambda_{3,4} = \sqrt{r} \left(-\cos \frac{\varphi}{2} \pm i \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}; \beta = \arctg \sqrt{\frac{4kEJ}{N_1^2} - 1};$$

$\alpha = \sqrt{3}$; $\beta = \arctg \sqrt{5}$ – для вычисления.

Следовательно, общее решение одномерной части имеет вид

$$W_0 = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\alpha x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x).$$

Модель Б-5 работает по аналогии модели Б-2 трубчатой конструкции из эластомеров со стеклотканью ортогонального армирования твердой матрицы; из эластомеров со стеклотканью ортогонального армирования мягкой матрицы; из упрочненных дисперсными частицами композиционных материалов; из углеродных трубок, вспененных пористыми углеродами и из полиамидных, графитовых волокон, скрепленных эпоксидными смолами и др.

Таким образом, в общем случае, общее решение дифференциального уравнения (2.29) имеет вид:

$$W(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x} + \frac{q_k}{k} \{1; L - x\},$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{N_1}{2EJ}}, \quad (\text{I})$$

$$W(x) = C_1 e^{\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_3 e^{\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha+\beta}x} \pm \frac{q_k}{k} \frac{4\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2)} \alpha, \quad (\text{II})$$

$$W = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\alpha x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \pm \frac{q_k}{k} \frac{4\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2)} \alpha, \quad (\text{III})$$

Выбор методологии при математическом моделировании физико-технических процессов:

1. Достоверность, актуальность детализированных информационных показателей.

2. Функционирование модели из научно-технического прогресса технологии и науки.

3. Синтез на точность, устойчивость, надежность.

4. Научная новизна.

$$a) e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, 2w_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{xx} & \overline{\ell_{xy}} & \overline{\ell_{xz}} \\ \ell_{yx} & \ell_{yy} & \overline{\ell_{ez}} \\ \ell_{zx} & \overline{\ell_{zy}} & \ell_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$
Тензор перемещения

$\downarrow$
девиатор
деформации

$\downarrow$
тензор
жесткого
вращения

$$\text{б)} E_{xx} = \ell_{xx} + \frac{1}{2} \left[e_{xx}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xy} + w_z \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xz} - w_y \right)^2 \right].$$

Выбор уравнения равновесия тела в малой окрестности точки

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + F_{xi} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}^1}{\partial x_j} + \sigma_{jk}^0,$$

$$\frac{\partial w_{ik}}{\partial x_j} + \sigma_{ik}^0 \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_j} - e_{jk} \frac{\partial \sigma_{ik}^1}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

выбор условий на поверхности граничных условий

$$\text{а)} \sigma_{xx}^0 \cos(\hat{n}, x) + \sigma_{xy}^0 \cos(\hat{n}, y) + \sigma_{xz}^0 \cos(\hat{n}, z) = 0,$$

$$\text{б)} (\sigma_{xx}^1 - w_z^1 \sigma_{xy}^0 + w_y^1 \sigma_{xz}^0) \cos(\hat{n}, x) + (\sigma_{xy}^1 - w_z^1 \sigma_{yy}^0 + w_y^1 \sigma_{yz}^0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma_\xi - f_\xi^0}{\alpha} \right)^n$$

$$\text{с)} f_i^0 = \sigma_{ij}^0 \quad \text{или} \quad \Delta f_i = (\sigma_{ij}^1 + \sigma_{xj}^0 w_{ik} + \sigma_{ij}^0 e - \sigma_{ik}^0 e_{jk}) u_i.$$

Выбор гипотез для гибких тел

- Гипотеза Кирхгофа
- Гипотеза сдвига срединной линии
- Гипотеза типа Тимошенко, Айнола, Галимова, Григолюк и др.

• Гипотеза по упрощениям В. В. Новожилова.
Не геометрически нелинейной деформации.

Выбор активных $\overline{q_k}$ и реактивных сил $\overline{P_k}$

$$а) q_k = \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \lambda_k \left(\frac{h}{R}\right) 5/2 \frac{R}{L} \left(\frac{H}{L}\right),$$

$$б) q_k = \frac{2}{3} \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1+\frac{1}{3}\gamma^2} \left(\frac{h}{R}\right) 5/2 \frac{R}{L}, \text{ (Био)}$$

$$в) q_k = \frac{2}{3} \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1+\frac{1}{3}\gamma^2} \left(\frac{h}{R}\right) 5/2 \frac{R}{L}, \text{ (Гузъ)}$$

$$г) q_k = \frac{2}{3} \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1+\frac{1}{3}\gamma^2} \left(\frac{h}{R}\right) 5/2 \frac{R}{L}, \text{ (В.В.Новожилов)}$$

$$д) q_k = \frac{2}{3} \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{2\left[1+\frac{1}{3}\gamma^2\left(1-\frac{4\gamma}{\gamma}\right)\right]} \left(\frac{h}{R}\right) 5/2 \frac{R}{L}, \text{ (А.Ю.)}$$

$$P_k = \pm k w \pm \eta \frac{\partial w}{\partial x} \pm N_{e\partial} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \pm 2A \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$$

Выбор модели для трубчатой инструкции с заполнителем:
эластомер, пластики, естественные материалы и т.д.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q_k}{A} \left\{ 1; \sin x; \left[\xi, 1 - \xi; 1 - \xi + \frac{\xi^k}{2} \right] \sin w \xi \right\} \text{ модель Б-1}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{k}{A} w = \frac{q_k}{k} \{ \dots \} \quad \text{модель Б-2}$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial w}{\partial x} = q_k \{ \dots \} \quad \text{модель Б-3}$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial w}{\partial x} = k w = q_k \{ \dots \} \quad \text{модель Б-4}$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \pm N_{e\partial} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = k w = q_k \{ \dots \} \quad \text{модель Б-5}$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \pm 2A \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = k w = q_k \{ \dots \} \quad \text{модель Б-6}$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2A \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \eta \frac{\partial w}{\partial x} = q_k \{ \dots \} \quad \text{модель Б-7}$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2A \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \eta \frac{\partial w}{\partial x} + kw = q_k \{ \dots \} \quad \text{модель Б-8}$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2A \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \pm N_{e\partial} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q_k \{ \dots \} \quad \text{модель Б-9}$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2A \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \pm N_{e\partial} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kw = q_k \{ \dots \} \quad \text{модель Б-10}$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2A \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \pm N_{e\partial} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial w}{\partial x} = q_k \{ \dots \} \quad \text{модель Б-11}$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2A \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \pm N_{e\partial} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial w}{\partial x} + kw = q_k \{ \dots \} \quad \text{модель Б-12}$$

В общем случае

$$\alpha_0(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \alpha_1(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \alpha_2(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha_3(x) \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha_4(x) w = \lambda_k f_1 \cdot (E_{ij}, G_{ij}, \eta_{ij}) f_2 \left(\frac{h}{R}; \frac{R}{L} \right) \sin wx.$$

Здесь λ_l – форма поперечного сечения, E_j – модуль упругости, G_{ij} – модуль сдвига, $\lambda_{ik,jm}$ и $v_{i,em}$ – коэффициенты взаимного влияния из допущений о существовании упругого потенциала для любого анизотропного материала, $\frac{h}{R}$ – характеристика числа волн в поперечном сечении по толщине материала, тонкой, средней толщины.

$\frac{R}{L}$ – характеристика числа волн в продольном направлении по длине короткой, средней длины и длинной конструкции.

$\alpha_0(x)$ – коэффициент, связанный с изгибом и гибкостью поперечного сечения конструкции, коэффициент изгиба.

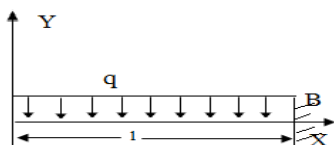
$\alpha_1(x)$ – коэффициент, связанный с континуумом Коссера, состоящий из матрицы и наполнителя материала, коэффициент перерезывающей силы.

$\alpha_2(x)$ – коэффициент, связанный с продольным критическим усилием, приводящий так же к изгибу упругого материала.

$\alpha_3(x)$ – коэффициент, связанный с внутренним трением, тангенциальных и угловых усилий для упруго – вязкого материала.

$\alpha_4(x)$ – коэффициент из матрицы жесткости, связанный с кольцевым сжимающим усилием, приводящий к поперечной нагрузке, коэффициент нормальных механических сил.

Пример 1. Выяснить смысл и размерность произвольных постоянных дифференциального уравнения изогнутой оси балки, начальных параметров, входящих в уравнение упругой линии, также по методу начальных параметров прогиба угла поворота конечного сечения балки, изображенного на рисунке.



Решение. Представив приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси в виде, не требующем составления выражения для $M(x)$, имеем:

$$Efy^* = M(x), \quad EJy''' = Q(x), \quad EJy^{IV} = q(x),$$

интегрируя последнее уравнение четыре раза, получим

$$1) EJy''' = \int_0^x q(x)dx + c_1.$$

$$2) EJy'' = \int_0^x dx \int_0^x q(x)dx + c_1x + c_1.$$

$$3) EJy' = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x q(x)dx + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3.$$

$$4) EJy = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x q(x)dx + \frac{c_1x^3}{6} + \frac{c_2x^2}{2} + c_3x + c_4.$$

Значения, входящих в эти уравнения произвольных постоянных, определяются из условий в начале координат при $x = 0$. Используя предыдущие равенства получим:

$$C_1 = EJy'''(x = 0) = Q(x = 0) = P_0,$$

$$C_2 = EJy''(x = 0) = M_0.$$

Кроме того, при $x = 0$, $C_3 = EJy'(x = 0) = EJQ$ и $C_4 = EJy(x = 0) = EJf$.

Таким образом, произвольные постоянные интегрирования являются начальными параметрами, т.е. геометрическими и силовыми факторами при $x = 0$, f_0 – прогиб, а P_0 и M_0 – соответственно сила и момент в начале координат.

Уравнение изогнутой оси через начальные параметры запишется так:

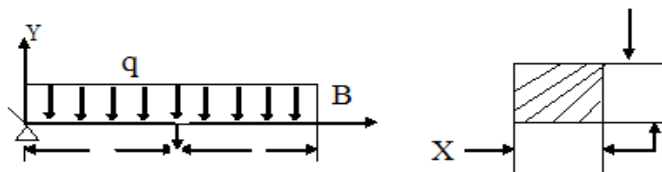
$$y = f_0 + \theta_0 x + \frac{I}{EJ} \left[\frac{M_0 x^2}{2} + \frac{P_0 x^3}{6} \right] \int_0^x \int_0^x \int_0^x q(x) dx^4.$$

В случае равномерно распределенной нагрузки $q(x) = q_0 = \text{const}$, последний член уравнения после четырехкратного интегрирования получит значение $\frac{q_0 x^4}{24}$, а уравнение примет вид

$$y = f_0 + \theta_0 x + \frac{I}{EJ} \left[\frac{M_0 x^2}{2} + \frac{P_0 x^3}{6} + \frac{q_0 x^4}{24} \right].$$

Воспользуемся им для определения перемещений в заданной балке. В начале координат (точка А) нет ни силы, ни момента, т.е. $P_0 = 0$ и $M_0 = 0$, а нагрузка $q_0 = -q$ (направлена в сторону отрицательной оси y).

Пример 2: Пользуясь методом начальных параметров, определить величину наибольшего прогиба и углы поворота опорных сечений деревянной балки, изображенной на рисунке.



Сечение балки – прямоугольник со сторонами $b = 15$ см и $h = 20$ см, пролет $l = 3a = 6$ м. Интенсивность нагрузки, приложенной на длине $2a$, меньше семи и равно 0,3 т/м.

Решение. Опорные реакции: $A = 4/3 qa$, $B = 2/3 qa$. Начало координат примем в точке А.

Для балки, разделенной на два или более участков, при нагружении ее силами, парами и равномерно распределенной

нагрузкой общее уравнение изогнутой оси может быть написано в виде:

$$y = f_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left(\frac{M_0 x^2}{2!} + \frac{P_0 x^3}{3!} + \frac{q_0 x^4}{4!} \right) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{M_0 (x-a_m)^2}{2!} + \frac{P_0 (x-a_m)^3}{3!} + \frac{q_0 (x-a_m)^4}{4!} \right).$$

В рассматриваемой балке начальные параметры (точка А):

$$f_0 = 0, M_0 = 0, P_0 = A = \frac{4}{3qa},$$

нагрузки: $q_0 = -q, M = 0, P_i = 0, q_i = q(a_q - 2a),$

Уравнение упругой линии примет вид:

$$y = \theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left(\frac{4}{3} \frac{qax^3}{6} - \frac{qx^4}{24} \right) + \frac{q(x-2a)}{24EJ}.$$

Значение начального параметра θ_0 найдем из условия равенства нулю прогиба на опоре В ($y = 0$ при $x = 3a$). Подставляя $x = 3a$, получим

$$0 = \theta_0 3a + \frac{1}{EJ} \left[\frac{2}{9} qa(3a)^3 - \frac{q}{24} (3a)^4 + \frac{qa^4}{24} \right], \quad \text{откуда} \quad \theta_0 = -\frac{8}{9} \frac{qa^3}{EJ}.$$

Окончательный вид уравнений прогибов и углов поворота:

$$y = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{8}{9} qa^3 x + \frac{2}{9} qax^3 - \frac{qx^4}{24} \right) + \frac{q(x-2a)}{24EJ}. \quad (a)$$

$$y' = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{8}{9} qa^3 + \frac{2}{9} qax^3 - \frac{qx^3}{6} \right) + \frac{q(x-2a)}{6EJ}. \quad (б)$$

Для отыскания наибольшего прогиба надо найти абсциссу x , при которой $y = y_{\max}$, т.е. $y' = 0$. В балках рассматриваемого типа наибольший прогиб располагается около середины пролета, поэтому рассматриваем только часть уравнения (б), относящуюся к первому участку:

$$\frac{qx^3}{6} - \frac{2}{9} qax^2 + \frac{8}{9} qa^3 = 0.$$

Решая уравнение методом последовательного подбора, найдем $x = 1,445a$. Подставляя x в уравнение (а), для первого участка получим:

$$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{15 \cdot 20^3}{12} = 10\,000 \text{ см}^4, EJ = 1 \cdot 10^5 \cdot 10^4 = 10^9 \text{ кгсм}^2,$$

следовательно,

$$f_{\max} = -\frac{0.8qa^4}{EJ} = -\frac{0.8 \cdot 0.3 \cdot 2^4 \cdot 10^9}{1 \cdot 10^9} = -3.84 \text{ см.}$$

Углы поворота опорных сечений:

$$A = y(x=0), B = y(x=3a).$$

Из (б) имеем:

$$A = -\frac{8qa^3}{9EJ} = \frac{8 \cdot 0.3 \cdot 2^3 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^9} = -0,0213,$$

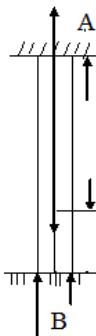
$$B = \frac{7qa^3}{9EJ} = \frac{7 \cdot 0.3 \cdot 2^3 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^9} = 0,0187.$$

Пример 3: Определить допускаемую нагрузку $P_{\max}$ для стержня, изображенного на рисунке, если площадь поперечного сечения стержня равна 100 см^2 и допускаемое напряжение для материала $[\sigma] = 1800 \text{ кг/см}^2$.

Решение: Задача статически неопределима. Решив ее обычным методом, получаем следующее выражение для опорных реакций:

$$A = P \frac{b}{a+b} \text{ и } B = P \frac{a}{a+b}.$$

Так как, $a > b$, $B > A$, то эти значения опорных реакций соответствуют упругой стадии работы стержня.



При увеличении нагрузки P , первыми до предела текучести дойдут напряжения в поперечных сечениях нижней части стержня (так как $B > A$). После достижения предела текучести дальнейший рост напряжений в нижней части стержня не возможен. Таким образом, $B_{max} = F\sigma_t$. Дальнейшее увеличение нагрузки приведет к увеличению напряжений в верхней части стержня до предела текучести. Тогда,

$$A_{max} = F\sigma_t.$$

Дальнейший рост нагрузки невозможен, т. к. весь материал стержня течет. Из условия равновесия найдем соответствующее значение нагрузки

$$P_{mzx}^T = A_{max}^T + B_{max}^T = F\sigma_t + F\sigma_T = 2F\sigma_T.$$

Введем коэффициент запаса k . Тогда допускаемая нагрузка будет равна

$$P_{max} = \frac{P_{max}^T}{k} = \frac{2F\sigma_T}{k} = 2F(\sigma).$$

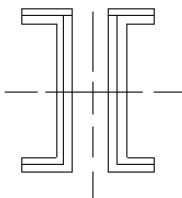
Так как допускаемое напряжение $[\sigma] = \sigma_T/k$. В нашем случае

$$Z_{max} = 2 * 100 * 1800 = 360\,000 \text{ кг} = 360 \text{ т}.$$

Пример 4. Проверить прочность центрально растянутого элемента конструкции, выполненного из двух швеллеров №20. Ослабление сечения заклепочными отверстиями диаметром 20 мм

показано на рисунке. Элемент растянут, усилие от постоянной нагрузки 18 т и от временной нагрузки 28 т.

Решение. В соответствии с методом РПС (расчетных предельных состояний) проверка прочности центрально растянутых стальных элементов производится: только по первому предельному состоянию. При этом условие прочности имеет вид $\frac{N_1^H n_1 + N_2^H n_2}{F_n} \leq R \cdot m$,



где N_1^H – нормативное усилие от постоянной нагрузки, N_2^H – нормативное усилие от временной нагрузки, n_1 – коэффициент перегрузки для постоянной нагрузки, n_2 – коэффициент перегрузки для временной нагрузки, F_n – поперечное сечение нетто, R – расчетное сопротивление, m – коэффициент условия работы. В нашем случае $N_1^H = 18000$ кг, $N_2^H = 28000$ кг. Согласно СНиП, значения коэффициентов перегрузки могут быть приняты следующими: $n_1 = 1$ и $n_2 = 1,4$. Из сортамента имеем для швеллера №20: площадь сечения $F = 23,4$ см², толщина полки $t = 9$ мм и толщина стенки $d = 5,2$ мм.

Тогда $F_n = 2 \cdot 23,4 - 4 \cdot 2 \cdot 0,9 - 4 \cdot 2 \cdot 0,52 = 35,4$ см².

Расчетное сопротивление R – есть произведение нормативного сопротивления R^H на коэффициент однородности для стальных элементов, на коэффициент перехода и в некоторых случаях на коэффициент условий работы. В нашем случае коэффициент условий работ учтен отдельно. Значение $R = 2100$ кг/см², коэффициент работы принят $m = 0,8$. Тогда

$$\frac{N_1^H n_1 + N_2^H n_2}{F_n} = \frac{18000 \cdot 1,1 + 28000 \cdot 1,4}{35,4} = 1665 \text{ кг/см}^2$$

$$R \cdot m = 2100 \cdot 0,8 = 1680 \text{ кг/см}^2.$$

Так как $1665 < 1680$, то условие прочности удовлетворено.

ГЛАВА 3. РАСЧЕТ ВЫПУЧИВАНИЯ ТРУБЧАТОЙ КОНСТРУКЦИИ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ИЗ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАК АКТИВНЫХ, ТАК И РЕАКТИВНЫХ СИЛ, А ТАКЖЕ ПОПЕРЕЧНОЙ $N_{kp} = -N_1 \frac{d^2 w}{dx^2}$ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Исследуем гибкость полимерной трубы со стеклотканью ортогонального армирования твердой матрицы. Рассмотрим трубчатую конструкцию, наполненную полимерными материалами твердой матрицы со стеклотканью ортогонального армирования толщиной $-h$, внутренним радиусом $-R$, длиной $-L$, под действием активной силы: $q_k = \gamma_k f_k \left(\frac{h}{R}, \frac{R}{L} \right)$.

Тогда уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{N_1}{D} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{K}{D} W = \frac{q_k}{D}. \quad (3.1)$$

В качестве примера рассмотрим гибкость полимерной трубы со стеклотканью ортогонального армирования при граничных условиях:

$$\left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad W|_{x=0} = 0, \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=L} = 0; \quad \left. \frac{d^3 W}{dx^3} \right|_{x=L} = 0. \quad (3.3)$$

1 – случай. При граничных условиях (3.2) – (3.3) определим угловые перемещения:

$$\frac{dW}{dx} = \alpha C_1 e^{\alpha x} - \alpha C_2 e^{-\alpha x} + (1 + \alpha x) C_3 e^{\alpha x} + (1 - \alpha x) C_4 e^{-\alpha x},$$

изгибающие моменты без множителя EJ :

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = \alpha^2 C_1 e^{\alpha x} - \alpha^2 C_2 e^{-\alpha x} + (2 + \alpha x) \alpha C_3 e^{\alpha x} - (2 - \alpha x) \alpha C_4 e^{-\alpha x},$$

перерезывающие силы без множителя EJ :

$$\frac{d^3W}{dx^3} = \alpha^3 C_1 e^{\alpha x} - \alpha^3 C_2 e^{-\alpha x} + (3 + \alpha x) \alpha^2 C_3 e^{\alpha x} - (3 - \alpha x) \alpha^2 C_4 e^{-\alpha x}.$$

Для определения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 воспользуемся граничными условиями (3.2) – (3.3), в результате имеем систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= -\frac{P_k}{K}, \\ \alpha C_1 - \alpha C_2 + C_3 + C_4 &= 0, \\ \alpha e^{\alpha L} C_1 + \alpha e^{-\alpha L} C_2 + (2 + \alpha L) e^{\alpha L} C_3 - (2 - \alpha L) e^{-\alpha L} C_4 &= 0, \\ \alpha e^{\alpha L} C_1 - \alpha e^{-\alpha L} C_2 + (3 + \alpha L) e^{\alpha L} C_3 - (3 - \alpha L) e^{-\alpha L} C_4 &= 0. \end{aligned} \right\} (3.4)$$

Система (3.4) имеет единственное решение. Решая систему (3.4) определим C_1, C_2, C_3, C_4 , затем подставляя их значения в формулу получим частное решение I – случая.

Задача 4.1. Найти изгиб трубчатой конструкции под действием активных сил по формам критической деформации поперечного сечения и нормальной критической силы, которая при изгибе дает поперечную силу $-N_{kp} \frac{d^2 w}{dx^2}$ из изотропного материала.

Напишем дифференциальное уравнение равновесия:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{N_{kp}}{D} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{k}{D} W = \frac{P_k}{D}, \quad (3.5)$$

при граничных условиях:

$$\frac{dW}{dx} /_{x=0} = 0; \quad W /_{x=0} = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2} /_{x=L} = 0; \quad \frac{d^3 W}{dx^3} /_{x=L} = 0. \quad (3.7)$$

Так как материал трубчатой конструкции с заполнителем из изотропного материала, то

$$k = \frac{Eh}{R^2}, \quad N_{kp} = N_1 = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}},$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad N_1^2 - 4kD = 0.$$

Решение. Общее решение (3.5) ищем в виде

$W(x) = W_1(x) + W_2(x)$, где $W_1(x)$ – есть общее решение однородной части

$$\frac{d^4 W_1(x)}{dx^4} - \frac{N_{kp}}{D} \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} + \frac{k}{D} W_1(x) = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \frac{N_{kp}}{D} \lambda^2 + \frac{k}{D} = 0,$$

$$\left(\lambda^2 - \frac{N_1}{2D} \right)^2 = \frac{N_1 - 4kD}{4D^2}.$$

Здесь возможны следующие случаи:

I – случай: $N_1^2 - 4kD = 0$.

Тогда,

$$\left(\lambda^2 - \frac{N_1}{2D} \right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\lambda^2 - \frac{N_1}{2D} \right) \left(\lambda^2 - \frac{N_1}{2D} \right) = 0,$$

$$\lambda^2 = \frac{N_1}{2D}; \quad \lambda^2 = \frac{N_1}{2D}.$$

Для вычисления используем $\alpha = \sqrt{3}$.

Два корня кратные, следовательно

$$\lambda_1 = e^\alpha, \quad \lambda_2 = e^{-\alpha}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{N_{kp}}{2D}},$$

$$W_1(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 x e^{\alpha x} + C_4 x e^{-\alpha x}.$$

Все корни действительные: две различные, две одинаковые.

II-й случай: $N_1^2 - 4kD > 0$.

Тогда,

$$\lambda^2 - \frac{N_1}{2D} = \pm \frac{\sqrt{N_1 - 4kD}}{2D}, \quad \alpha = \frac{N_1}{2D}, \quad \beta = \frac{\sqrt{N_1 - 4kD}}{2D}.$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\alpha \pm \beta}, \lambda_1 = \sqrt{\alpha + \beta}, \lambda_2 = \sqrt{\alpha - \beta}, \lambda_3 = -\sqrt{\alpha + \beta}, \lambda_4 = -\sqrt{\alpha - \beta}.$$

$$W_1(x) = C_1 e^{\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_3 e^{\sqrt{\alpha-\beta}x} + C_4 x e^{-\sqrt{\alpha-\beta}x}.$$

Для вычисления $\alpha = 9; \beta = \pm 6\sqrt{2}$

III – случай: $N_1^2 - 4kD < 0$,

тогда,

$$\lambda^2 = \frac{N_1}{2D} \pm \frac{\sqrt{4kD - N_1^2}}{2D} i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha} = \arctg \sqrt{\frac{4kD}{N_1^2}} - 1$$

$$\lambda_1 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad \lambda_2 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

для вычисления $\alpha = \sqrt{3}; \beta = \arctg \sqrt{5}$

$$\lambda_3 = \sqrt{r} \left(-\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad \lambda_4 = \sqrt{r} \left(-\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$W_1(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\alpha x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x).$$

В данной задаче рассмотрим I – случай, т.е.

$$W_1(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 x e^{\alpha x} + C_4 x e^{-\alpha x}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{N_{kp}}{D}}$$

Какое-нибудь частное решение имеет вид: $W_1(x) = \frac{Pk}{k}$

$$W(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 x e^{\alpha x} + C_4 x e^{-\alpha x} + \frac{Pk}{k},$$

$$\frac{dW}{dx} = \alpha e^{\alpha x} C_1 - \alpha e^{-\alpha x} C_2 + (1 + \alpha x) e^{\alpha x} C_3 + (1 - \alpha x) e^{-\alpha x} C_4,$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = \alpha^2 e^{\alpha x} C_1 + \alpha^2 e^{-\alpha x} C_2 + (2 + \alpha x) \alpha e^{\alpha x} C_3 - (2 - \alpha x) \alpha e^{-\alpha x} C_4,$$

$$\frac{d^3W}{dx^3} = \alpha^3 e^{\alpha x} C_1 - \alpha^3 e^{-\alpha x} C_2 + (3 + \alpha x) \alpha^2 e^{\alpha x} C_3 - (3 - \alpha x) \alpha^2 e^{-\alpha x} C_4.$$

Чтобы найти C_1, C_2, C_3, C_4 воспользуемся граничными условиями:

$$\text{Из условия: } W|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = -\frac{P_k}{k}.$$

$$\text{Из условия: } \frac{dW}{dx} \Big|_{x=0} = 0; \Rightarrow \alpha C_1 - \alpha C_2 + C_3 + C_4 = 0,$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} \Big|_{x=L}=0; \Rightarrow \alpha e^{\alpha L} C_1 - \alpha e^{-\alpha L} C_2 + (2 + \alpha L) e^{\alpha L} C_3 - (2 - \alpha L) e^{-\alpha L} C_4 = 0,$$

$$\frac{d^3W}{dx^3} \Big|_{x=L}=0; \Rightarrow \alpha e^{\alpha L} C_1 - \alpha e^{-\alpha L} C_2 + (3 + \alpha L) e^{\alpha L} C_3 - (3 - \alpha L) e^{-\alpha L} C_4 = 0.$$

Систему алгебраических уравнений решаем по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ \alpha & -\alpha 1 & 1 \\ \alpha e^{\alpha L} & \alpha e^{-\alpha L} (2 + \alpha) e^{\alpha L} & -(2 - \alpha) e^{\alpha L} \\ \alpha e^{\alpha L} & -\alpha e^{\alpha L} (3 + \alpha) e^{\alpha L} & -(3 - \alpha) e^{\alpha L} \end{vmatrix}$$

$$= 4\alpha \begin{vmatrix} 2\alpha L & \alpha L \alpha L (2 - \alpha L) e^{-\alpha L} + \alpha L \\ 3\alpha L & \alpha L \alpha L (3 - \alpha L) e^{-\alpha L} + \alpha L \end{vmatrix},$$

$$\Delta = 4\alpha [\alpha L e^{-\alpha L} (\alpha L \alpha L + \alpha L \alpha L - 2\alpha L \alpha L) + 2\alpha L^2 \alpha L - \alpha L \alpha L \alpha L (\alpha L - 3) \alpha L \alpha L],$$

$$\Delta_1 = \frac{P_k}{k} \alpha \begin{vmatrix} (2 + \alpha L) e^{\alpha L} & -e^{-\alpha L} (1 - \alpha L) & e^{\alpha L} \\ (3 + \alpha L) e^{\alpha L} & -e^{-\alpha L} (4 - \alpha L) & e^{\alpha L} \end{vmatrix} = \frac{P_k}{k} \alpha \{ (4 - \alpha L) [2 + \alpha L - e^{-2\alpha L}] + (1 - \alpha L) [1 - (3 + \alpha L) e^{2\alpha L}] \},$$

$$\Delta_2 = -\frac{P_k}{k} \alpha e^{\alpha L} \begin{vmatrix} (1 + \alpha L) & (2 - \alpha L) e^{-\alpha L} & +e^{\alpha L} \\ (2 + \alpha L) & (3 - \alpha L) e^{-\alpha L} & +e^{\alpha L} \end{vmatrix} = -\frac{P_k}{k} \alpha (1 + \alpha L) (3 - \alpha L + e^{2\alpha L}) - (2 + \alpha L) (2 - \alpha L + e^{2\alpha L}),$$

$$\Delta_3 = \frac{2P_k}{k} \alpha^2 e^{-\alpha L} \left| \begin{matrix} ch\alpha L & (1 - \alpha L) \\ sh\alpha L & 4 - \alpha L \end{matrix} \right| = \frac{2P_k}{k} \alpha^2 e^{-\alpha L} [(4 - \alpha L)ch\alpha L - (1 - \alpha L)sh\alpha L],$$

$$\Delta_4 = \frac{2P_k}{k} \alpha^2 [(3 + \alpha L)e^{\alpha L} - e^{\alpha L}]ch\alpha L - [(2 + \alpha L)e^{\alpha L} + e^{-\alpha L}]sh\alpha L\},$$

После преобразований имеем:

$$\Delta_1 = \frac{P_k}{k} \alpha [9 + \alpha L - \alpha^2 L^2 - (7 - 3\alpha L - \alpha^2 L^2)ch2\alpha L + (1 + \alpha L + \alpha^2 L^2) \cdot \cdot sh2\alpha L],$$

$$\Delta_2 = \frac{P_k}{k} \alpha [1 - 2\alpha L - 3\alpha^2 L^2 + (1 + \alpha L)ch2\alpha L + sh2\alpha L],$$

$$\Delta_3 = \frac{2P_k}{k} \alpha^2 [(4 - \alpha L)ch\alpha L - (1 - \alpha L)sh\alpha L](ch\alpha L - sh\alpha L),$$

$$\Delta_4 = \frac{2P_k}{k} \alpha^2 [1 + \alpha L + sh\alpha Lch\alpha L + ch^2\alpha L].$$

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; C_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}; C_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}.$$

Подставляя полученные значения в общее решение уравнения получим:

$$W(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 x e^{\alpha x} + C_4 x e^{-\alpha x} + \frac{P_k}{k} = \frac{1}{\Delta} [\Delta_1 e^{\alpha x} + \Delta_2 e^{-\alpha x} + \Delta_3 x e^{\alpha x} + \Delta_4 x e^{-\alpha x}] = + \frac{P_k}{k} = \frac{1}{\Delta} [(\Delta_1 + \Delta_2)e^{\alpha x} + (\Delta_3 + \Delta_4)x e^{-\alpha x}] + \frac{P_k}{k},$$

$$\text{где } \Delta = 4\alpha[\alpha L e^{-\alpha L}(ch\alpha L + sh\alpha L - 2\alpha L sh\alpha L) + 2ch^2\alpha L - \alpha L sh^2\alpha L + +(\alpha L - 3)sh\alpha Lch\alpha L].$$

Задача 4.2. Если воспользуемся условием на бесконечности, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\alpha x} = \infty, \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{R}{L} = 0.$$

$$W(x) = \frac{q_k}{\Delta k} \alpha [1 - 2\alpha L - 3\alpha^2 L^2 + \alpha(3 + 2\alpha L + e^{-2\alpha L})x] e^{-\alpha x} + \frac{q_k}{k},$$

$$\Delta = \alpha[4 + (4\alpha^2 L^2 - 2\alpha L + 1)e^{-2\alpha L}],$$

$$P_1 = \frac{8}{3}q_0; P_2 = 2q_0; P_3 = 4/3q_0,$$

$$q_0 = \frac{0,85E}{2(1-v^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \left(\frac{R}{L}\right).$$

Для $\alpha = \sqrt{3}$, $k = 12D$

Рассмотрим 2-й случай. Пусть композиционная оболочка трубчатой конструкции изготовлена методом непрерывной намотки армированной ленты по ортогональным линиям. Имеем порог из двух кусков оболочки и армированного между ними заполнитель твердой матрицы.

Тогда, линейные перемещения, изгибающие моменты, перерезывающие силы, определяются без множителя EJ :

$$W(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 e^{\beta x} + C_4 e^{-\beta x} + \frac{R^2}{Eh} q_k, \quad (3.8)$$

$$\frac{dW}{dx} = \alpha(C_1 e^{\alpha x} - C_2 e^{-\alpha x}) + \beta(C_3 e^{\beta x} - C_4 e^{-\beta x}),$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = \alpha^2(C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}) + \beta^2(C_3 e^{\beta x} + C_4 e^{-\beta x}),$$

$$\frac{d^3 W}{dx^3} = \alpha^3(C_1 e^{\alpha x} - C_2 e^{-\alpha x}) + \beta^3(C_3 e^{\beta x} - C_4 e^{-\beta x}), \quad (3.9)$$

$$\alpha = \sqrt{4\alpha + 2\sqrt{3}\alpha}, \quad \beta = \sqrt{4\alpha - 2\sqrt{3}\alpha}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{Kh}.$$

Подставляя (3.8) – (3.9) в граничные условия (3.6) – (3.7) имеем систему алгебраических уравнений:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = -\frac{R^2}{Eh} q_k,$$

$$\alpha C_1 - \alpha C_2 + \beta C_3 - \beta C_4 = 0,$$

$$\alpha^2 e^{\alpha L} C_1 + \alpha^2 e^{-\alpha L} C_2 + \beta^2 e^{\beta L} C_3 + \beta^2 e^{-\beta L} C_4 = 0,$$

$$\alpha^3 e^{\alpha L} C_1 - \alpha^3 e^{-\alpha L} C_2 + \beta^3 e^{\beta L} C_3 + \beta^3 e^{-\beta L} C_4. \quad (3.10)$$

Система (3.10) имеет единственное решение.

Если принять за активную нагрузку:

$$q_1 = 8/3q_0; \quad q_2 = 2q_0; \quad q_3 = 4/3q_0;$$

$$q_0 = \frac{0,85E}{2(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \left(\frac{R}{L}\right),$$

то изменение гибкости трубчатой конструкции, наполненных полимерными материалами твердой матрицы со стеклотканью ортогонального армирования составом: связующая эпоксидная смола ЭД-5, наполнитель стеклосетка РС-1 и полиэфирная смола, наполнитель сетка СЭО и алюминиевый порошок.

λ – безмерная величина, характеризующая влияние поперечного Эйлера стержня и способа закрепления.

Задача 4.3. Найти изгиб цилиндрической оболочки с заполнителем в условиях эксплуатации при несимметричном выпучивании, если заполнителем является упругая, однородная (анизотропная), кристаллическая среда под действием критических сил по линеаризованным уравнениям.

Решить дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{N_{kp}}{EJ} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{k}{EJ} W = \frac{q_k}{EJ}. \quad (3.11)$$

Решение (3.11) ищем в виде:

$$W(x) = W_0(x) + W_1(x).$$

Если воспользуемся условием на бесконечности, то

$$W(x) = \frac{R^2 q_k}{D} \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[(\sqrt{3} - 1) e^{\alpha L} sh \beta L + e^{(\alpha - \beta)L} - 7 + 4\sqrt{3} \right] e^{-\alpha x} + \right. \\ \left. \left[7 + 4\sqrt{3} + e^{-(\alpha - \beta)L} - (\sqrt{3} + 1) e^{\beta L} sh \alpha L \right] e^{-\beta x} \right\},$$

$$\Delta = 14 + ch(\alpha + \beta)L - 3ch(\alpha - \beta)L,$$

$$\alpha = \sqrt{4\alpha + \sqrt{3}\alpha}, \quad \beta = \sqrt{4\alpha - 2\sqrt{3}\alpha},$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rh}, \quad D = EJ = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$q_1 = 8/3q_0, \quad q_2 = 2q_0, \quad q_3 = 4/3q_0,$$

$$q_0 = \frac{0,85E}{2(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \left(\frac{R}{L}\right).$$

Задача 4.4. Найти изгиб трубчатой конструкции под действием активных сил по формам критической деформации поперечного сечения и нормальной критической силы, которая при изгибе дает поперечную силу $-N_{kp} \frac{d^2w}{dx^2}$ из изотропного материала.

Напишем дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{d^4W}{dx^4} - \frac{N_{kp}}{D} \frac{d^2W}{dx^2} + \frac{k}{D} W = \frac{P_k}{D} (L - x). \quad (3.12)$$

Общее решение (3.12) имеет вид

$$W(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 x e^{\alpha x} + C_4 x e^{-\alpha x} + \frac{P_k}{k} (L - x),$$

$$\frac{dW}{dx} = \alpha e^{\alpha x} C_1 - \alpha e^{-\alpha x} C_2 + (1 + \alpha x) e^{\alpha x} C_3 + (1 - \alpha x) e^{-\alpha x} C_4 - \frac{P_k}{k},$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \alpha^2 e^{\alpha x} C_1 + \alpha^2 e^{-\alpha x} C_2 + (2 + \alpha x) \alpha e^{\alpha x} C_3 - (2 - \alpha x) \alpha e^{-\alpha x} C_4,$$

$$\frac{d^3W}{dx^3} = \alpha^3 e^{\alpha x} C_1 - \alpha^3 e^{-\alpha x} C_2 + (3 + \alpha x) \alpha^2 e^{\alpha x} C_3 - (3 - \alpha x) \alpha^2 e^{-\alpha x} C_4,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\alpha x} = \infty, \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{R}{L} = 0.$$

$$W(x) = \frac{P_k}{2\Delta k} \{ (1 + 2\alpha L) e^{-\alpha x} - \alpha [L(1 + \alpha) - (2 + \alpha L)(2 + 2L - \alpha L)] x e^{-\alpha x} + 2L - x \}$$

$$\Delta = \alpha [4 + (4\alpha^2 L^2 - 2\alpha L + 1) e^{-2\alpha L}],$$

$$P_1 = 8/3q_0; \quad P_2 = 2q_0; \quad P_3 = 4/3q_0,$$

$$= \frac{0,85E}{2(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \left(\frac{R}{L}\right) = q_0 \text{const.}$$

Рассмотрим 3-й случай. Пусть связь между осевой сжимающей нагрузкой N_1 , действующей по торцам трубчатой конструкции с заполнителем и деформацией, выражается формулами:

$$\ddot{e} = e\left(\frac{r}{h}\right)^{5/2}, \quad q_{kp} = \frac{E}{4(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{r}\right)^3,$$

где e – сближение торцов – укорочение длины L .

Тогда, в реальных условиях можно будет изменять деформацию ортогонального армирования и определять форму критической деформации поперечного сечения; если в течение отведенного времени для измерения предельное состояние не наступило, то материал полимерной трубы со стеклотканью ортогонального армирования представляет собой тип – семейство «кельвары» с жесткостью углеродных волокон с полимерным связующим; в промежуточных процессах произошло самоуравновешивание систем состояния.

Следовательно, линейные перемещения, изгибающие моменты, перерезывающие силы определяются (без множителя EJ):

$$W(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\alpha x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{q_k}{K} \quad (3.13)$$

$$\sqrt[4]{\frac{k}{p}} < l_2, \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{K}{D}}, \quad \beta = \arctg \sqrt{\frac{4KD}{N_1^2} - 1}, \quad (3.14)$$

$$\frac{dW}{dx} = e^{\alpha x}(A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x) + e^{-\alpha x}(A_3 \cos \beta x + A_4 \sin \beta x),$$

$$A_1 = \alpha C_1 + \beta C_2, A_2 = \alpha C_2 - \beta C_1, A_3 = \beta C_4 - \alpha C_3, A_4 = \alpha C_4 + \beta C_3,$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} = e^{\alpha x}(B_1 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x) + e^{-\alpha x}(B_3 \cos \beta x + B_4 \sin \beta x). \quad (3.15)$$

$$B_1 = (\alpha^2 - \beta^2)C_1 + 2\alpha\beta C_2, \quad B_2 = (\alpha^2 - \beta^2)C_2 - 2\alpha\beta C_1,$$

$$B_3 = (\alpha^2 - \beta^2)C_3 - 2\alpha\beta C_4, \quad B_4 = (\alpha^2 - \beta^2)C_4 + 2\alpha\beta C_3.$$

$$\frac{d^3W}{dx^3} = e^{\alpha x}(D_1 \cos \beta x + D_2 \sin \beta x) + e^{-\alpha x}(D_3 \cos \beta x + D_4 \sin \beta x), \quad (3.16)$$

$$D_1 = \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)C_1 + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)C_2D_2 = \beta(\beta^2 - 3\alpha^2)C_1 + \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)C_2 ,$$

$$D_3 = \alpha(3\beta^2 - \alpha^2)C_3 + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)C_4, D_4 = \beta(\beta^2 - 3\alpha^2)C_3 + \alpha(3\beta^2 - \alpha^2)C_4. (3.17)$$

Подставляя (3.14) – (3.17) в граничные условия (3.2) – (3.3) имеем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \{(\alpha^2 \sinh \alpha L - \beta^2 \sinh \alpha L + \alpha^2 e^{-\alpha L})\beta \cos \beta L - \alpha[\beta^2 \cosh \alpha L - (\alpha^2 + \beta^2)e^{-\alpha L}] \cdot \\ & \sin \beta L\}C_1 + \beta[(\alpha^2 - \beta^2)\sin \beta L \sinh \alpha L + 2\alpha\beta \cos \beta L \cosh \alpha L]C_2 = \frac{q_k}{2K}(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha \sin \beta L - \beta \cos \beta L)e^{-\alpha L}, \\ & \left[\alpha\beta(\alpha^2 \sinh \alpha L - \beta^2 \cosh \alpha L - 2\alpha^2 e^{-\alpha L}) \cos \beta L + \right. \\ & \left. + (\beta^4 \sinh \alpha L - 3\alpha^2 \beta^2 \cosh \alpha L + \alpha^4 e^{-\alpha L}) \sin \beta L \right] C_1 \left[\beta(3\alpha^2 - \beta^2) \cos \beta L \sinh \alpha L + \right. \\ & \left. + \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) \sin \beta L \cosh \alpha L \right] \beta C_2 = \\ & \frac{q_k}{2K}(\alpha^2 + \beta^2)[2\alpha\beta \cos \beta L - (\alpha^2 - \beta^2) \sin \beta L]e^{-\alpha L}, \\ & C_1 + C_3 = \frac{q_k}{K}, \quad 2\frac{\alpha}{\beta}C_1 + C_2 + C_4 = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{q_k}{K}. \end{aligned} (3.18)$$

Система (3.18) имеет единственное решение.

Задача 4.5. Рассмотрим задачу, когда $N_1^2 - 4kD < 0$ (3-й случай)

$$-\frac{N_{kp}}{D} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{k}{D} W = \frac{P_k \frac{d^4 W}{dx^4}}{D}.$$

Общее решение:

$$W(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\alpha x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{P_k}{K},$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{K}{D}}, \quad \beta = \arctg \sqrt{\frac{4KD}{N_1^2} - 1},$$

$$\alpha = \sqrt{3}, \quad \beta = \arctg \sqrt{5}.$$

Граничные условия:

$$\frac{dW}{dx} /_{x=0} = 0; \quad W /_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2} /_{x=L} = 0; \quad \frac{d^3 W}{dx^3} /_{x=L} = 0,$$

при условии на бесконечности: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\alpha x} = \infty, \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{R}{L} = 0$.

Систему алгебраических уравнений решаем по формулам Крамера:

$$\Delta^* = \frac{1}{4} \{ 2\beta^4(4\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha^2\beta^4 \cos^2 \beta L - 2\alpha^4\beta^2 \sin^2 \beta L + \\ + 2\alpha^3\beta(\alpha^2 + \beta^2) \sin 2\beta L \} + \frac{1}{8} \{ 2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 \cos^2 \beta L - (4\alpha^6\beta^4 + \\ + 10\alpha^4\beta^2 + \alpha^2\beta^4 - \beta^6) \sin^2 \beta L + \alpha\beta(\beta^4 + \alpha^2\beta^2 - 12\alpha^4) \sin 2\beta L \} e^{-2\alpha L}.$$

$$\Delta_1^* = -\frac{p_k}{4k} \beta^3 (\alpha^2 + \beta^2)^2 e^{-2\alpha L},$$

$$\Delta_2^* = \frac{p_k}{4k} (\alpha^2 + \beta^2) e^{-2\alpha L} [2\alpha^2 \beta^2 (3\alpha^2 + \beta^2) \cos^2 \beta L - \alpha(\alpha^2 - \\ - \beta^2) \cdot (2\alpha^2 + \beta^2) \sin^2 \beta L + \beta(\alpha^4 + 4\alpha^2 \beta^2 + \beta^4) \sin \beta L \cos \beta L,$$

$$C_1 = \frac{\Delta_1^*}{\Delta^*}; C_2 = \frac{\Delta_2^*}{\Delta^*}; C_3 = -\frac{\Delta_1^*}{\Delta^*} - \frac{p_k}{k}; C_4 = -\frac{1}{\beta} \left(2\alpha \frac{\Delta_1^*}{\Delta^*} + \beta \frac{\Delta_2^*}{\Delta^*} + \alpha \frac{p_k}{k} \right).$$

$$W(x) = -\frac{p_k}{4\Delta^* k} (\alpha^2 + \beta^2) e^{-2\alpha L} \{ [2\alpha^2 \beta^2 (3\alpha^2 + \beta^2) \cos^2 \beta L - \\ - \alpha(\alpha^2 - \beta^2)(2\alpha^2 + \beta^2) \sin^2 \beta L + \beta(\alpha^4 + 4\alpha^2 \beta^2 + \\ + \beta^4 + \beta^4) \sin \beta L \cos \beta L] \sin \beta x - \beta^2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2) (\beta \cos \beta x + \\ + 2\alpha \sin \beta x) \} e^{-\alpha x} - \frac{p_k}{k\beta} (\beta \cos \beta x + \alpha \sin \beta x) e^{-\alpha x}.$$

Задача 4.6. Рассмотрим задачу, когда $N_1^2 - 4kD < 0$ (3-й случай).

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{N_{kp}}{D} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{k}{D} W = \frac{p_k}{D}.$$

Общее решение

$$W(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\alpha x} (C_3 \cos \beta x + \\ + C_4 \sin \beta x) + \frac{p_k}{K},$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{K}{D}}, \quad \beta = \arctg \sqrt{\frac{4KD}{N_1^2} - 1}.$$

Граничные условия:

$$\frac{dW}{dx} /_{x=0} = 0; \quad W /_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} /_{x=L} = 0; \quad \frac{d^3W}{dx^3} /_{x=L} = 0.$$

Решение:

$$A_1 = \alpha C_1 + \beta C_2, \quad A_2 = \alpha C_2 - \beta C_1, \quad A_3 = \alpha C_4 - \beta C_3, \\ A_4 = \alpha C_4 + \beta C_3,$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} = e^{\alpha x} (B_1 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x) + e^{-\alpha x} (B_3 \cos \beta x + B_4 \sin \beta x)$$

$$B_1 = (\alpha^2 - \beta^2)C_1 + 2\alpha\beta C_2, \quad B_2 = (\alpha^2 - \beta^2)C_2 - 2\alpha\beta C_1,$$

$$B_3 = (\alpha^2 - \beta^2)C_3 - 2\alpha\beta C_4, \quad B_4 = (\alpha^2 - \beta^2)C_4 - 2\alpha\beta C_3.$$

$$\frac{d^3W}{dx^3} = e^{\alpha x} (D_1 \cos \beta x + D_2 \sin \beta x) + e^{-\alpha x} (D_3 \cos \beta x + D_4 \sin \beta x),$$

$$D_1 = \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)C_1 + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)C_2;$$

$$D_2 = \beta(\beta^2 - 3\alpha^2)C_1 + \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)C_2,$$

$$D_3 = \alpha(3\beta^2 - \alpha^2)C_3 + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)C_4,$$

$$D_4 = \beta(\beta^2 - 3\alpha^2)C_3 + \alpha(3\beta^2 - \alpha^2)C_4.$$

Чтобы найти C_1, C_2, C_3, C_4 воспользуемся граничными условиями:

$$W /_{x=0} = 0 \Rightarrow C_3 = -C_1 - \frac{p_k}{k},$$

$$\frac{dW}{dx} /_{x=0} = 0; \Rightarrow C_4 = -\frac{1}{\beta} \left(2\alpha C_1 + \beta C_2 + \alpha \frac{p_k}{k} \right),$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} /_{x=L} = 0; \Rightarrow (\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha L - \beta^2 \operatorname{sh} \alpha L + \alpha^2 e^{-\beta L}) \beta \cos \beta L - \\ \alpha [\beta^2 \operatorname{ch} \alpha L - (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha L}] \sin \beta L \} C_1 + \beta [(\alpha^2 - \beta^2) e^{-\alpha L}] \sin \beta L \operatorname{sh} \alpha L + \\ + 2\alpha \beta \cos \beta L \operatorname{ch} \alpha L \} C_2 = \frac{p_k}{k} (\alpha^2 + \beta^2) (\alpha \sin \beta L - \beta \cos \beta L) e^{-\alpha L}$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} /_{x=L} = 0; \Rightarrow [2\alpha \cos \beta L (\alpha^2 \operatorname{sh} \alpha L - \beta^2 \operatorname{ch} \alpha L - 2\alpha^2 e^{-\alpha L}) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2 \sin \beta L}{\beta} (\beta^4 \operatorname{sha} L - 3\alpha^2 \beta^2 \operatorname{cha} L + \alpha^4 e^{-\alpha L}) C_1 + [2\beta(3\alpha^2 - \\
 & \quad \beta^2) \cos \beta L \operatorname{sha} L + 2\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) \sin \beta L \operatorname{cha} L] C_2 \\
 & \quad = \frac{p_k(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta k} [2\alpha \beta \cos \beta L + \\
 & \quad \quad + (\beta^2 - \alpha^2) \sin \beta L] e^{-\alpha L}. \\
 & \quad C_3 = -C_1 - \frac{p_k}{k}, \\
 & \quad C_4 = -2 \frac{\alpha}{\beta} C_1 - C_2 - \frac{\alpha}{\beta} \frac{p_k}{k}. \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Из системы (3.29) определим C_1, C_2, C_3, C_4 методом Крамера:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} \alpha_{11} C_1 + \alpha_{12} C_2 &= b_1 \\ \alpha_{21} C_1 + \alpha_{22} C_2 &= b_2 \end{aligned} \right\} \\
 \Delta &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21}, \quad \Delta_1 = b_1 \alpha_{22} - b_2 \alpha_{21}, \\
 \Delta_2 &= b_2 \alpha_{11} - b_1 \alpha_{21}. \\
 \Delta &= \beta^2 \{ 2\alpha^2 \beta^2 \operatorname{ch}^2 \alpha L - \beta^2 (3\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{sh}^2 \alpha L + \alpha^2 (\alpha^2 - \\
 & \quad \beta^2) \cdot \operatorname{sha} L \operatorname{cha} L + \alpha^2 [(3\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{sha} L + 4\alpha^2 \operatorname{cha} L] e^{-\alpha L} \} \cos^2 \beta L - \\
 & \quad \{ \alpha^2 \beta^2 (\alpha^2 - 3\beta^2) \operatorname{ch}^2 \alpha L + \beta^4 (\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{sh}^2 \alpha L - 3\alpha^2 \beta^2 (\alpha^2 - \\
 & \quad \beta^2) \operatorname{sha} L \operatorname{cha} L + \alpha^2 [\alpha^2 (\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{sha} L - (\alpha^2 - 3\beta^2) (\alpha^2 + \\
 & \quad \beta^2) \operatorname{cha} L] e^{-\alpha L} \} \sin^2 \beta L - \alpha \beta [2\alpha^2 \beta^2 \operatorname{cha} L + \alpha^2 [(\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{sha} L - \\
 & \quad (5\alpha^4 - \beta^4) e^{-\alpha L}] \sin \beta L \cos \beta L \operatorname{sha} L + \alpha \beta [\alpha^2 (\alpha^2 + 3\beta^2) \operatorname{cha} L - \\
 & \quad \beta^2 [(\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{sha} L - \alpha^2 (\alpha^2 + 3\beta^2) e^{-\alpha L}] \sin \beta L \cos \beta L \operatorname{cha} L. \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= \frac{p_k}{2k} (\alpha^2 + \beta^2) \beta e^{-\alpha L} \left\{ \alpha^2 (\alpha^2 \sin^2 \beta L - \beta^2 \cos^2 \beta L) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\alpha \beta}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \sin 2\beta L \right\} \\
 & \quad (\operatorname{cha} L + \operatorname{sha} L) + \beta^2 (\beta^2 - 2\alpha^2) \operatorname{sh} \beta L - 3\alpha^2 \beta^2 \operatorname{cha} L \}. \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 &= \frac{p_k}{2k} (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha L} \{ 2\alpha \beta^2 (\alpha^2 \operatorname{cha} L - \beta^2 \operatorname{sh} \beta L + \alpha^2 e^{-\alpha L}) \cos^2 \beta L + \\
 & \quad \alpha (\alpha^2 - \beta^2) [\beta^2 \operatorname{cha} L - (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha L}] \sin^2 \beta L - \beta [\alpha^2 (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \\
 & \quad \operatorname{cha} L - \beta^2 (\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{sha} L - \alpha^2 (\alpha^2 + 3\beta^2) e^{-\alpha L}] \sin \beta L \cos \beta L \}. \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; C_3 = -\frac{\Delta_1}{\Delta} - \frac{p_k}{k}; C_4 = -\frac{1}{\beta} \left(2\alpha \frac{\Delta_1}{\Delta} + \beta \frac{\Delta_2}{\Delta} + \alpha \frac{p_k}{k} \right).$$

$$W(x) = \frac{2}{\Delta} \left[\Delta_1 \left(\cos \beta x \operatorname{sh} \alpha x - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta x e^{-\alpha x} \right) + \Delta_2 \sin \beta x \operatorname{sh} \alpha x \right] - \frac{p_k}{k} (\cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta x) e^{-\alpha x}. \quad (3.23)$$

Подставляя значения $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ из формул (3.20) – (3.22), в данное решение (3.23) можно провести некоторые преобразования для приложения.

3.1. Об устойчивости нефтегазовой трубы под действием силы и равномерного осевого давления $N_{кр}$, находящейся на упруго-вязком основании типа Пастернака

Модели Б-3 и Б-4.

Рассмотрим нефтегазовую трубу в виде трехслойной цилиндрической оболочки длиной – l , радиусом – R , толщиной – h , под действием собственного веса q [1] и при действии равномерного осевого давления $N_{кр}$, находящейся на упруго-вязком основании типа Пастернака [1] – [4], [5] – [10]. При этом критическая нагрузка $N_{кр}$ определяется из условия равновесия внутренних усилий в момент потери устойчивости поперечного сечения, когда появляется новая форма равновесия, отличная от первоначальной – прямолинейной. Следует учитывать, что это изгибное состояние возникает не от действия собственного веса, а в результате постоянных сил сжатия N_1 . При выпучивании эти силы дают нормальную составляющую – $N_1 \frac{d^2 w}{dx^2}$, которая играет роль поперечной нагрузки (поперечный изгиб) при рассмотрении критических деформаций (рис. 37–39), где q – усредненный объемный вес вышележащих слоев, h – глубина, на которой лежит магистральная труба.

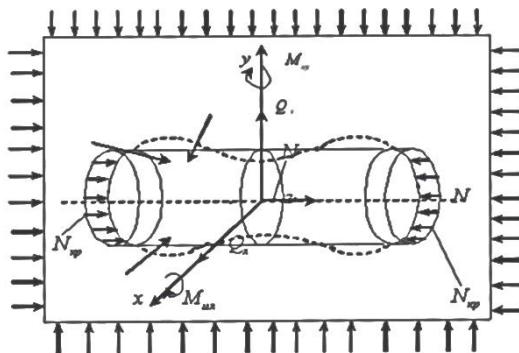


Рис.34

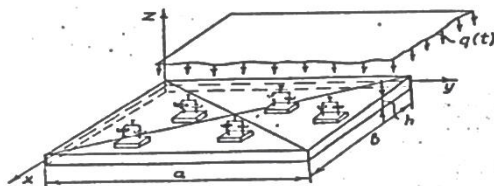


Рис. 35

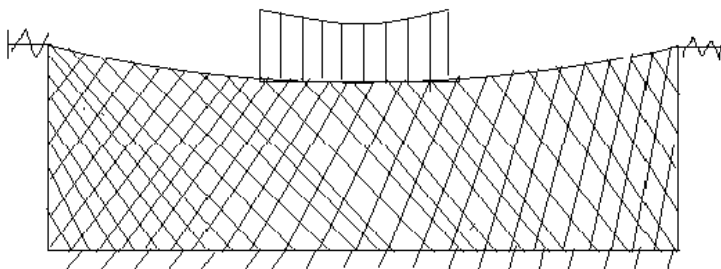


Рис.36

На рис.34 принимается, что амортизированная масса трубы значительно меньше массы самого массива вышележащих слоев, толщина – h , цилиндрическая жесткость – EJ трубы есть величина переменная.

Таким образом, уравнение равновесия трубы имеет вид:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - N_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda \frac{dw}{dx} = -q, \quad (3.24)$$

или

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{N_1}{EJ} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\lambda}{EJ} \frac{dw}{dx} = -\frac{q}{EJ}. \quad (3.24a)$$

Если решение однородной части дифференциального уравнения (3.24) ищем в форме, соответствующей принятому характеру выпучивания стальной трубы, то:

$$w(x) = A \sin \frac{m\pi x}{e}, \quad (3.25)$$

где m – число полуволн, e – длина трубы.

Подставляя (3.25) в левую часть (3.24a) и приравнявая множители при $\sin \frac{m\pi x}{e}$, получим:

$$K = -\frac{m^4 \pi^4}{e^4 EJ},$$

$$N_1 = EJh \left(\frac{m^2 \pi^2}{he^2} + \frac{E}{R^2 EJ} \frac{e^2}{m^2 \pi^2} \right).$$

Исследуя это выражение на минимум, получим:

$$m = \frac{e}{\pi} \sqrt[4]{\frac{Eh}{R^2 EJ}}.$$

$$N_{kp} = N_1 = \frac{Eh^2}{R \sqrt{3(1-\nu^2)}},$$

$$\lambda = -\frac{EJ}{R} \sqrt[4]{\frac{E^3 h^3}{R^2 (EJ)^3}}.$$

Этой модели легко сообщить свойство распределять нагрузку, если пружины соединить поверху горизонтальной нерастяжимой нитью с горизонтальной постоянной проекцией T . Тогда данная модель превращается в мембранную модель, как амортизатор относительно нижней точки рессора с соответствующими вышеуказанными усилиями (рис.37, 38).

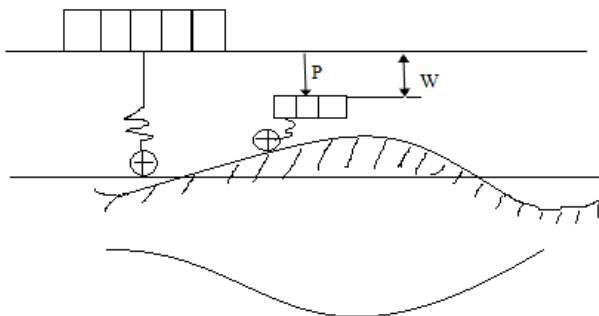


Рис.37

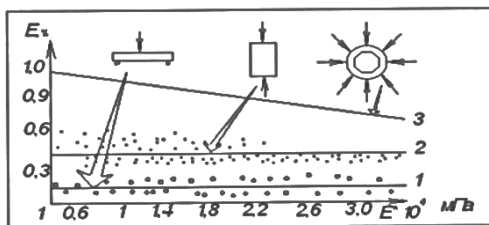


Рис.38

Рассмотрим случай (модель Б-6):

$$EJ = \frac{d^4 w}{dx^4} + \lambda \left(1 + \frac{N_1}{EJ} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{EJ} \frac{dw}{dx} = -q$$

или

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{\lambda}{EJ} \left(1 + \frac{N_1}{EJ} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{(EJ)^2} \frac{dw}{dx} = -\frac{q}{EJ}.$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде:

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x),$$

где $w_0(x)$ – есть общее решение однородной части

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{\lambda}{EJ} \left(1 + \frac{N_1}{EJ} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{(EJ)^2} \frac{dw}{dx} = 0,$$

а $w_1(x)$ – какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения

Решение ищем в виде

$$w_0(x) = e^{kx},$$

и составляем характеристическое уравнение:

$$k \left[k^3 + \frac{\lambda}{EJ} \left(\lambda + \frac{N_1}{EJ} \right) k + \frac{\lambda^2}{(EJ)^2} \right] = 0. \quad (3.27)$$

Предположим, что $\lambda = -N_1$, тогда корни характеристического уравнения имеют вид:

$$k_1 = 0; k_2 = \frac{N_1}{EJ}; \quad k_3 = \alpha + \beta; \quad k_4 = \alpha - \beta,$$

где

$$\alpha = -\frac{N_1}{2EJ}; \quad \beta = \frac{1}{2EJ} \sqrt{N_1^2 + 4N_1EJ}.$$

Итак, общее решение однородного уравнения (3.27) имеет вид

$$w_0(x) = c_1 + c_2 e^{-2\alpha x} + e^{(\alpha+\beta)x} c_3 + e^{(\alpha-\beta)x} c_4.$$

Частное решение (3.27) ищем методом вариации произвольных постоянных

$$w^*(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x) + c_4(x)y_4(x).$$

И составляем систему

$$\begin{cases} y_1(x)c_1'(x) + y_2(x)c_2'(x) + y_3(x)c_3'(x) + y_4(x)c_4'(x) = 0, \\ y_1'(x)c_1'(x) + y_2'(x)c_2'(x) + y_3'(x)c_3'(x) + y_4'(x)c_4'(x) = 0, \\ y_1''(x)c_1'(x) + y_2''(x)c_2'(x) + y_3''(x)c_3'(x) + y_4''(x)c_4'(x) = 0, \\ y_1'''(x)c_1'(x) + y_2'''(x)c_2'(x) + y_3'''(x)c_3'(x) + y_4'''(x)c_4'(x) = -\frac{q}{EJ}, \end{cases} \quad (3.28)$$

$$y_1(x) = 1; y_2(x) = e^{-2\alpha x}; y_3(x) = e^{(\alpha+\beta)x}; y_4(x) = e^{(\alpha-\beta)x}.$$

Откуда

$$\begin{cases} 1c_1'(x) + e^{-2\alpha x}c_2'(x) + e^{(\alpha+\beta)x}c_3'(x) + e^{(\alpha-\beta)x}c_4'(x) = 0, \\ -2\alpha e^{-2\alpha x}c_2'(x) + (\alpha + \beta)e^{(\alpha+\beta)x}c_3'(x) + (\alpha - \beta)e^{(\alpha-\beta)x}c_4'(x) = 0, \\ 4\alpha^2 e^{-2\alpha x}c_2'(x) + (\alpha + \beta)^2 e^{(\alpha+\beta)x}c_3'(x) + (\alpha - \beta)^2 e^{(\alpha-\beta)x}c_4'(x) = 0, \\ -8\alpha^3 e^{-2\alpha x}c_2'(x) + (\alpha + \beta)^3 e^{(\alpha+\beta)x}c_3'(x) + (\alpha - \beta)^3 e^{(\alpha-\beta)x}c_4'(x) = -\frac{q}{EJ}. \end{cases} \quad (3.29)$$

Решая систему (3.29) относительно $c_1'(x)$, $c_2'(x)$, $c_3'(x)$, $c_4'(x)$, а затем, интегрируя относительно переменной x , имеем:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\frac{q}{2EJ\alpha(\alpha^2-\beta^2)}x + \overline{c_1}, \\ c_2(x) &= \frac{q}{4EJ\alpha^2(9\alpha^2-\beta^2)}e^{2\alpha x} + \overline{c_2}, \\ c_3(x) &= \frac{q}{2EJ(\alpha+\beta)^2 3(\alpha+\beta)}e^{-(\alpha+\beta)x} + \overline{c_3}, \\ c_4(x) &= \frac{q}{2EJ(\alpha-\beta)^2 3(\alpha-\beta)}e^{-(\alpha-\beta)x} + \overline{c_4}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\beta = \frac{1}{2EJ}\sqrt{N_1^2 + 4N_1EJ}.$$

Здесь произвольные постоянные c_1 , c_2 , c_3 , c_4 определяются из четырех граничных условий, причем на каждом крае выработки поставлены два граничных условия в зависимости от конкретного случая.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты работы имеют многочисленные приложения в различных областях науки и техники. Авторами:

разработана механико-математическая модель устойчивости и выпучивания трубчатой конструкции на основе нелинейной теории упругости, находящейся в условиях сложного нагружения со стороны заполнителя;

установлены некоторые критерии корректности нелинейных соотношений в уравнениях равновесия, в физических уравнениях, в геометрических уравнениях и кинематических условиях;

определены внутренние неравномерные поперечные силы при критических деформациях. Затем, методами микромеханики и гипотезы типа Тимошенко решена поставленная задача;

установлены некоторые критерии корректности нелинейных соотношений при рассмотрении устойчивости и начального прогиба вследствие неустойчивости поперечного сечения полосы под действием статических, динамических и сейсмических нагрузок, исходя из задачи Коши с переменными коэффициентами;

разработана методика определения прогиба в продольном направлении (симметричной, антисимметричной, кососимметричной и т.д.), учитывающая зависимость корректирующих коэффициентов от составных частот поперечного сечения, от волнового числа колебаний в продольном направлении и от стрелы прогиб;

разработана методика решения геометрически нелинейных задач устойчивости, содержащих в уравнениях нечетные частные производные высших порядков параболического типа, и составлены механико-математические модели трубы с комбинированием реакции различных моделей основания Б-1 – Б-8;

установлены критерии корректности комбинированного метода при определении прогибов в конечных деформациях относительно тензора деформации и напряжений;

установлено влияние внутреннего давления заполнителя на стенки трубопроводов как следствие стационарного векторного поля, зависящее от теплового расширения и внутреннего давления жидкости в линейно-упругой области.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Божанов Е.Т., Ержанов Ж.С. Исследование проблем устойчивости упругих тел, гибких пластин и оболочек и их приложения. – Алматы: Ғылым, 2001. – С.88–90.
2. Божанов Е. Т. Разработка теоретических основ стабилизирующих технологий. – Алматы: Ғылым, 1996. – С.204–205.
3. Божанов Е. Т., Дюсенбаев И. Н. Методика экспериментальных исследований на прочность магистральных трубопроводов на стенде, полигоне и промышленных испытаниях участка нефтяных труб. – Алматы: Сб. науч. тр. АГТУ, 1996. – С.564–569.
4. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. – М.: Физматгиз, 1962. – 432с.
5. Григолок Э.И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – С.223–225.
6. Ержанов Ж.С., Божанов Е. Т. Устойчивость упругих тел, нелинейных пластин и оболочек. – Алматы: Ғылым, 1997. – С.115–117.
7. Божанов Е. Т., Мендыбаев Т. О. О проблемах теоретической взаимно связи остаточных напряжений стабилизирующей технологии механической обработки с оптимальной точностью. – Алма-Ата: Тез.докл. междунауч. конф. по механике горных пород, посвященной 75-летию академика Ж. С. Ержанова, 1997. – 106с.
8. Божанов Е.Т., Мендыбаев Т.О. Установление аналитической зависимости прочности с сцепления покрытия от остаточных напряжений. – Актау: Сб. науч. тр. Актауского Государственного университета, 1996. – 153 с.
11. Almorh B.O., Brush D.O. Buckingof a finite-lengthsyndricalshellundera circumferentialbandofpressure//SpaceScience, 1961. –P.573–574.
12. Божанов Е. Т., Иманбеков И. А. Механика и математическая модель расчета долговечности магистральных труб. – Алматы: Ғылым, 2004. – 165с.
13. Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Тулешева Г. А. Анализ численных результатов устойчивости выработок в толще горных породпод действием поперечных и осевых сил. – Актобе, 2007. – 143с.

14. *Победра Б. Е.* Проблемы прочности композиционных материалов.–Киев: Знание, 1986. –С.56–57.

15. *Партон В. З.* Механика разрушения, от теории к практике.–М.: Наука, 1990. –С.112–114.

16. *Божанов Е. Т., Буганова С. Н., Отарбаев Ж. О.* К вопросу выпучивания выработки, трубчатых конструкции с заполнителем с позиции не линейной теории. – Алматы: Мат.V-й междуна. науч.конференции, 2009. Т. № 24. – С.34–37.

17. *Айталиев Ш. М., Кусаинов А. А., Божанов Е. Т., Секеев К. М.* К обоснованию расчета магистральных газотрубопроводов. – Алматы: Тр. II-й междуна. науч.-практ. конф. Транспорт Евразия. Т. №2, 2002. –С.115–117.

18. *Айталиев Ш. М., Божанов Е. Т., Нысаналиев А. Н.* Трубопроводный транспорт Казахстана: проблемы, перспективы, научное сопровождение.–Алматы: Тр. I междуна. науч.- практ. конф. Транспорт Евразии: взгляд в XXI, 2000. – С.213–215.

19. *Рахимбекова З. М.* Нелинейные стержневые системы за пределом упругости. –Алматы: Ғылым, 2002. – 405с.

20. *Божанов Е. Т., Ибраимкулов А. М.* Статика деформируемых систем под действием статических нагрузок. – Алматы: Междуна. науч.-практ. конф. «Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий», 2006. –С. 67–75.

21. *Божанов Е. Т., Ибраимкулов А. М.* Динамика деформируемых систем под действием динамических нагрузок. –Алматы: Междуна. науч.-практ. конф. «Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий», 2006. –С. 89–97.

22. *Божанов Е.Т., Сатыбалдиев О.С., Альмухамбетов К. К., Турусбекова Б. С.* Об устойчивости выработки в массиве горных пород под действием собственного веса, находящейся наупруго-вязкомоснованиитипа Келвина-Фойхта.–Алматы:Сб. мат. междуна. конф. «Теоретические и экспериментальные исследования строительных конструкций», 2007. –С.115–121.

23. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – М.: Наука, 1948. –С.186–189.

24. Герасимов В. И., Герасимов Е. В. Метод координат моментов для определения перемещения блок и рам.–М.: Вестник АТИРПиХ, 1993. –С.28–31.

25. Иилинский А. Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последствия и релаксации.–М.: Прикладная математика и механика, 1940. –С.79–92.

26. Naghdi P. M. Foundationsofelastieshelltheories – inprogressin-solidmechanics. – Amsterdam, North-Holland, 1963.Vol, IV, p.1–90.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Введение	3
Глава 1.	Упругие оболочки, трубчатые неупругие конструкции, применяемые при моделировании физико-технических процессов	5
1.1.	Некоторые сведения из теории поверхностей.....	5
1.2.	Общие понятия о первой квадратичной форме и коэффициентах первой квадратичной формы оболочки	7
1.3.	Оболочки, применяемые в технике в зависимости от Гауссовой кривизны	9
1.4.	Уравнения равновесия по классической теории упругих оболочек; уравнения равновесия по нелинейной теории геометрии деформации и их упрощения; геометрические уравнения упругих оболочек по нелинейной теории и их линеаризация. Физические уравнения. Уравнения равновесия по классической теории упругих оболочек	11
Глава 2.	Некоторые приложения дифференциального уравнения оболочек и трубчатых конструкций при моделировании физико-технических процессов.....	39
2.1.	Об изменении гибкости эквивалентной чередующей одиночной полосы под действием статической активной силы, лежащей на основании типа Винклера. Модель Б-2	39
2.2.	Приложение теории оболочек при составлении математической модели Б-5	47
Глава 3.	Расчет выпучивания трубчатой конструкции с заполнителем из кристаллического материала под действием как активных, так и реактивных сил, а также поперечной $N_{kp} = -N_1 \frac{d^2 w}{dx^2}$ при различных граничных условиях	63
3.1.	Об устойчивости нефтегазовой трубы под действием силы и равномерного осевого давления N_{kp} , находящейся на упруго-вязком основании типа Пастернака	77
	Заключение	83
	Библиографический список	84

Учебное издание

Ескерген Токшылыкович Божанов
Гульнара Алиповна Тулешева
Ауезхан Молдагизович Ибраимкулов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие
Часть 2

Нач. ОПНП РУ ДСО
Редактор
Компьютерная верстка

З. А. Губайдулина
Г. М. Дюсенбаева
А. С. Сайбулатова

Подписано в печать 12.08.2016г.

Тираж 300 экз. Формат 60 x 84 x 1/16. Бумага типогр. №1.
Уч.-изд. л. 5,7. Усл. п.л. 5,3. Заказ №734. Цена договорная.

Издание Казахского национального исследовательского
технического университета имени К.И. Сатпаева
Департамент по связям с общественностью КазНТУ
г. Алматы, ул. Сатпаева, 22

ISBN 978-601-228-953-4



9 786012 289534