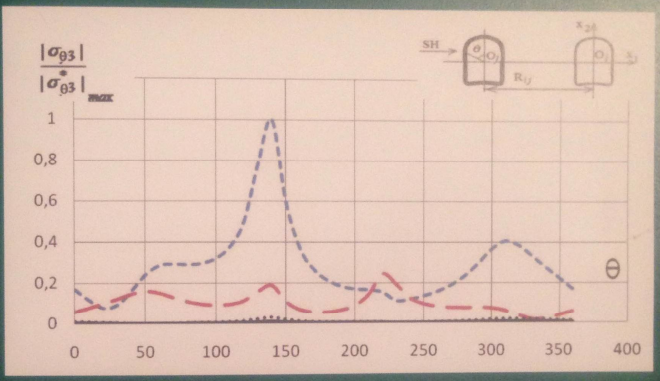
Атымтаева Л.Б., Масанов Ж.К.,
Мырзахметова Г.С., Ягалиева Б.Е.



ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ

МОНОГРАФИЯ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахстанско-Британский технический университет

Атымтаева Л.Б., Масанов Ж.К., Мырзахметова Г.С., Ягалиева Б.Е.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ

монография

Алматы 2014

УДК 624.01/07(035.3)
ББК 38.654.1

Рецензенты:
Ж.О. Отарбаев - д.т.н., профессор, КазНТУ им. К.И. Сатпаева,
И.Н. Дюсембаев - д.т.н., профессор КазНТУ им. К.И. Сатпаева.

Динамические задачи механики подземных сооружений. Монография / **Л.Б.Атымтаева, Ж.К.Масанов, Г.С.Мырзахметова, Б.Е.Ягалиева** – Алматы: КБТУ, 2014. - 204 с. Ил. 36. Табл. 14. Библиогр. – 157 назв.

ISBN 978-601-269-062-0

В монографии рассматривается теоретическое исследование и численная реализация динамических задач механики подземных сооружений в анизотропных слоистых средах, представленных разноориентированными одиночными и парными горизонтальными полостями произвольного профиля глубокого и неглубокого заложения, при распространении упругих волн; при этом получен динамический анализ напряженно-деформированных характеристик в зависимости от геометрических и физико-механических параметров среды, падающих волн и полостей. Монография предназначена для узкого круга специалистов в области механики деформируемого твердого тела, механики подземных сооружений, механики сплошных сред.

УДК 624.01/07(035.3)
ББК 38.654.1

ISBN 978-601-269-062-0

Атымтаева Л.Б., Масанов Ж.К.,
Мырзахметова Г.С., Ягалиева Б.Е.,2014
© КБТУ, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 5
1 Динамическое состояние одиночной штрекообразной полости в транстропном массиве при стационарной дифракции упругих волн 23
1.1 Круговая полость глубокого заложения. Основные уравнения и соотношения 23
1.2 Решение первой основной задачи - контур одиночной круговой полости свободен от нагрузок 34
1.3 Решение второй основной задачи - круговой контур полости закреплен недеформируемой обделкой 44
1.4 Некруговая полость глубокого заложения. Основные уравнения и соотношения 47
1.5 Решение первой основной задачи – контур некруговой полости свободен от нагрузок 54
1.6 Решение второй основной задачи - контур некруговой полости подкреплен абсолютно жесткой крепью 62
1.7 Анализ динамического напряженно-деформированного состояния одиночной полости глубокого заложения в транстропном наклонно-слоистом массиве при стацинарной дифракции упругих волн 64
Заключение по первому разделу 82
2 Обобщенная плоская деформация полости в анизотропном слоистом массиве при дифракции упругих волн 84
2.1 Круговая диагональная полость глубокого заложения. Основные уравнения и соотношения 84
2.2 Решение первой основной задачи для диагональной круговой полости, свободной от нагрузок 92
2.3 Решение второй основной задачи для кругового контура диагональной полости, подкрепленной недеформируемой обделкой 100
2.4 Некруговая полость глубокого заложения в условиях обобщенной плоской деформации 103
2.5 Решение первой основной задачи для некруговой диагональной полости глубокого заложения при обобщенной плоской деформации 106
2.6 Решение второй основной задачи для некруговой диагональной полости глубокого заложения при обобщенной плоской деформации 114

2.7 Анализ напряженно-деформированного состояния одиночной диагональной выработки в транстропно 116
Заключение по второму разделу 122
3 Стационарная дифракция упругих волн в многосвязном анизотропном массиве 124
3.1 Основные уравнения и соотношения 124
3.2 Решение первой основной задачи - контур штрекообразных полостей неподкреплен 128
3.3 Решение второй основной задачи - контур штрекообразных полостей закреплен недеформируемой крепью 144
3.4 Анализ динамического НДС штрекообразных полостей в транстропном массиве при стационарной дифракции упругих продольно-поперечных волн 148
Заключение по третьему разделу 160
4 Обобщенная плоская деформация полостей в анизотропном слоистом массиве при дифракции упругих волн растяжения-сжатия и сдвигов 161
4.1 Основные уравнения и соотношения 161
4.2 Решение первой основной задачи для серии неподкрепленных диагональных полостей 165
4.3 Решение второй основной задачи для серии диагональных полостей, подкрепленных недеформируемой обделкой 179
4.4 Анализ разноориентированных выработок в анизотропном слоистом массиве при стационарной дифракции упругих волн 182
Заключение по четвертому разделу 187
Заключение 188
Список использованных источников 189

Введение

Актуальность проблемы. Землетрясение наряду с наводнением, селевым потоком, циклоном является стихийным бедствием, которого нельзя ни оповестить, ни предотвратить. Вредное воздействие землетрясения, можно ослабить, если воспользоваться достижениями современной теории и практики сейсмостойкого строительства. Однако эти достижения главным образом относятся к сейсмостойкому строительству наземных сооружений. По-существу, основное усилие современной инженерной сейсмологии направлено на обеспечение сейсмостойкости наземных сооружений. В теории сейсмостойкости подземных сооружений еще не полностью сформулирована общая постановка задачи, не классифицированы основные задачи и не выделены особенности их решения. Между тем в больших городах, расположенных в сейсмоактивных районах, подземное пространство насыщено водопроводными, газопроводными, канализационными коммуникациями, гаражами и другими сооружениями. Строятся и расширяются подземные станции и тоннели метрополитенов.

При землетрясениях в зависимости от интенсивности сейсмического воздействия подземные сооружения получают повреждения разной степени от незначительного сотрясения до заметных деформаций и полного разрушения. Возвращаясь к фактам прошлого столетия можно отметить, что разрушительное Таншанское землетрясение 1976 года в КНР сопровождалось многочисленными обрушениями горных пород в подземных выработках угольных шахт, оказавшихся в зоне его влияния. Землетясение в Японии 1985 года прервало движение поездов Токийского метрополитена. При Мексиканском землетрясении 1985 года пострадала одна из станций метрополитена; здесь обнаружился волноводный эффект распространения сейсмических волн в грунтовом основании города, когда наибольшие разрушения в северной его части оказались приуроченными к древней системе водопроводов и дренажных каналов, позднее засыпанных рыхлым грунтом. Боливийское землетрясение 1987 года вывело из строя трансболивийский трубопровод почти по всей его 500-километровой длине. Землетрясения 21 века в Чили (2009), на Суматре и в Китае (2004) сопровождались осадкой грунта и разрушением подземных выработок с повреждением крепи стволов, околоствольных выработок, штреков и квершлагов шахт, причем в различной степени – в зависимости от мест сопряжения и расположения выработок относительно простирания слоев пород.

Толща осадочных пород имеет сложное строение, определяемое прежде всего ее слоистостью и складчатой структурой. При этом элементы залегания слоев толщи непосредственно в окрестности сооружения могут быть произвольными – даже в пренебрежении их кривизной и представлении окрестной толщи системой плоскопараллельных слоев. Кроме того, направление распространения сейсмических волн относительно этого сооружения также произвольно. В этих условиях задача сейсмостойкости подземных сооружений в самой постановке моделирования толщи весомой средой, является пространственной задачей. Причем независимо от того, рассматривается ли горизонтальная, вертикальная или камерообразная выработка.

В зонах сейсмической активности имеются многие месторождения полезных ископаемых; они разрабатываются преимущественно подземным способом, при котором проходится и закрепляются разветвленная сеть капитальных, подготовительных, очистных и др. горизонтальных и вертикальных выработок. В горных районах, подверженных сейсмическим воздействиям, строятся и интенсивно эксплуатируются различные тоннели: автомобильные, железнодорожные и гидротехнические. Одним словом, в пределах сейсмически активной территории страны наряду с наземными сооружениями размещен и функционирует большой объем подземных сооружений самого различного назначения – от городских коммуникационных тоннелей и трубопроводов до широкой сети подземных горных выработок.

Подземные сооружения в сейсмически активных районах должны удовлетворять требованиям сейсмостойкости. Но такое проектирование представляет сложную задачу. Она объясняется тем, что сейсмические нагрузки относятся к категории таких динамических воздействий, точное предсказание величины и характера которых заранее невозможно в силу сложного неоднородного строения породной толщи. При этих условиях решающее значение имеет анализ экспериментальных данных и натурных наблюдений о поведении подземных сооружений во время землетрясений.

Тоннели, подземные трубопроводы, равно как и горные выработки шахт и рудников типа штреков, квершлагов и диагональных выработок, представляют собой протяженные подземные сооружения. Соответствующий анализ поведения подземных сооружений стал выполняться, начиная с 1906 года – землетрясение в Сан-Франциско (США) и в 1923 году – в Канто (Япония). В советской литературе эти сведения обобщены Ш.Г.

Напетваридзе [1]. Анализ последствий Ташкентского землетрясения в 1966 г., оказанных на водо-газопроводы, были выполнены Т.Р. Рашидовым, В.А. Крыженковым [2].

По природным и техногенным условиям и характеру проявления сейсмических воздействий на подземные сооружения различного назначения целесообразно выделить два класса сооружений: мелкого и глубокого заложения. Соответственно этим классам постановка вопросов теории сейсмостойкости и подход к их решению имеют свои специфические особенности.

Выделение сооружений мелкого заложения в особый класс связано главным образом с тем, что расчет их на сейсмостойкость необходимо вести на воздействие не только объемных сейсмических волн, но и поверхностных. При этом нередко появляется необходимость учета волн, отраженных от дневной поверхности. Здесь возникает ряд задач, обусловленных динамическим взаимодействием подземных и наземных сооружений. Так, глубина заложения тоннелей метрополитенов подбирается с точки зрения не только необходимой их прочности и устойчивости, но и допустимой величины уровня вибраций в зданиях и сооружениях, расположенных вблизи этих тоннелей. Уточнение сейсмичности сооружений мелкого заложения в зависимости от глубины их расположения играет важную роль для районов, характеризующихся малой глубиной гипоцентров землетрясений.

К сооружениям глубокого заложения относится сложный комплекс шахт и рудников – капитальные, подготовительные и очистные горные выработки, а также транспортные и гидротехнические тоннели глубокого заложения, полости-газохранилища, выщелачиваемые в соляных отложениях и др.

При исследовании сейсмостойкости таких объектов в силу их достаточного заглубления в породный массив не возникает надобности в расчетах на воздействие поверхностных и отраженных от дневной поверхности сейсмических волн, а также на динамическое взаимодействие подземных и наземных сооружений. Влияние землетрясений, промышленных взрывов на напряженное состояние сооружений глубокого заложения связано лишь с непосредственным воздействием продольных и поперечных волн.

Трудности решения вопросов теории сейсмостойкости подземного сооружения глубокого заложения связаны, во-первых, со статической их нагруженностью, большой по величине и в значительной мере неопределенной; во-вторых, со сложной структурой породного массива, его слоистостью, складчатостью,

тектонической трещиноватостью и неоднородностью распределения вещественного состава, которая во многом предопределяет закономерности деформирования и разрушения горных пород в окрестности сооружения; в-третьих, с разнообразием грузонесущих элементов сооружения, определяемых методами поддержания кровли, конструкцией и материалом горной крепи, опорными целиками, формой поперечного профиля выработки, режимом проходки и крепления.

В этих условиях основная идея исследований состоит в возможно более полном учете последствий наложения динамического поля напряжений, обусловленного распространением волн, на статическое поле напряжений, которое образовалось в породном массиве вблизи подземного сооружения в процессе его проходки, крепления и эксплуатации ко времени динамического воздействия. При этом последовательно определяются статическая и динамическая нагрузки на конструктивные элементы сооружения. Решения первого этапа этой задачи об определении статического поля напряжений в породном массиве вокруг сооружения и статического давления, воспринимаемого его конструктивными элементами затруднений не вызывает. Существует большое количество работ, преимущественно отечественных авторов, относящихся к соответствующим вопросам механики горных пород и горного давления и позволяющих достаточно полно определить статические напряжения и давление. Основные трудности возникают на втором этапе, при определении динамической нагрузки и расчете конструкции на сейсмостойкость.

Благодаря работам, главным образом, советских ученых С.Г. Авершина, Н.С Адигамова, Ю.Н. Айвазова, Ш.М. Айталиева, М.Т. Алимжанова, Л.А. Алексеевой, Б.З. Амусина, Б.Д. Аннина, И.Б. Баклашова, С.А. Батугина, Н.С. Булычева, Ю.А. Векслера, А.Н. Гузя, В.Т. Глушко, А.Н. Динника, И.Я. Дормана, Б.Ж.Жумабаева, Ж.М.Жумабаева, А.Н. Зорина, Ж.С. Ержанова, Л.В. Ершова, А.Г. Ибраева, В.Ю. Изаксона, А.А. Ильюшина, С.А. Калоерова, Т.Д. Каримбаева, С.А. Космодамианского, М.В. Курлени, В.Д. Кубенко, С.В. Кузнецова, С.Г. Лехницкого, Ю.М. Либермана, А.М. Линькова, Ж.К. Масанова, М.М. Мирсаидова, Я.Н. Мубаракова, Б.М. Мардонова, С.Г. Монахенко, Л.В. Никитина, О.Н.Нуржумаева, П.И. Перлина, А.Г. Протосени, Ю.Н. Работнова, Т.Р. Рашидова, Л.А. Розина, М.И. Розовского, Я.И. Рудаева, К.В. Руппенейта, Б.А. Рычкова, Г.Н. Савина, В.С. Сажина, В.Н. Скубы, В.Я. Степанова, А.Н. Тюреходжаева, Н.Я. Тер-Эммануильяна, И.Н. Шапошникова, Е.И. Шемякина, В.Я. Степанова, Л.В. Шульмана, Г.Х. Хожметова, А.Б. Фадеева, Н.Н.

Фотиевой, Н.Я. Ялымова и др. были созданы теоретические основы исследования взаимодействия подземных конструкций различного назначения и глубины заложения с окружающим массивом.

На практике часто приходится иметь дело с проектированием параллельно протяженных подземных сооружений, таких как, например, ветки метрополитена, горизонтальные выработки, трубопроводы и др., строительство которых сопряжено с определенными особенностями, возникающими в результате взаимовлияния сооружений друг на друга, особенно критически проявляющимся во время сейсмической и динамической активности окружающей сооружения среды, являющейся, в общем случае, анизотропной. В качестве анизотропного массива рассматривается мелкослоистый транстропный массив, наклонная к горизонту плоскость изотропии которого отражает наличие плоскости напластования пород в их естественном залегании. Мелкослоистый массив, когда толщина слоев на порядок меньше характерного линейного размера поперечного сечения выработки и механические свойства слоев переходят от одного слоя к другому почти непрерывно, уподобляется анизотропному породному образцу [3].

Различные проявления горного давления, наблюдаемые в подземных сооружениях, во многом предопределяются наклоном слоев, окружающих пород. Так, максимальные смещения точек поперечного контура подземного сооружения перпендикулярны к слоям, причем величина их в два-пять раз превосходит смещения по напластованию, что связано с расслоением толщи пород в зоне влияния подземного сооружения. Подобная малость сцепления породных слоев друг с другом может быть отражена в расчетной модели породного массива путем представления зон контактирования слоев двоякопериодической системой прямых коллинеарных щелей, расположенных в плоскости вкрест простирания слоев. При этом пренебрегая кривизной слоев, их толща в окрестности сооружения может быть рассмотрена как некоторая пачка плоскопараллельных тел. В подобной модели соотношение размеров щелей и перемычек между щелями может выступать в качестве меры неполноты сцепления слоев, которой и определяется склонность последних к расслоению. Такой подход к исследованию слоистого породного массива требует решения задачи о плоскости, ослабленной двоякопериодической системой щелей и ее приведения к сплошной – эквивалентной по жесткости. Сначала решение может быть получено методом малого параметра, затем находится строгое решение смешанной задачи для бесконечно

связной области физических щелей, берега которых в процессе нагружения плоскости могут полностью или частично контактировать.

В предположении, что мощность слоя, по крайней мере, на порядок меньше характерного поперечного размера подземного сооружения, модель допускает приведение указанной плоскости со щелями к эквивалентной по жесткости сплошной трансверсально-изотропной среде и эффективное ее использование при исследовании напряженного и деформированного состояния подземных сооружений. С другой стороны, результаты статических и динамических испытаний породных образцов, представляющих осадочный чехол, четко обнаруживают трансверсальную изотропию упругих свойств, ориентированную согласно осям приведенной анизотропии изложенной выше модели слоистого породного массива.

Эта двуединость упругой анизотропии породного слоя, представляемая поведением образца, его материала под нагружением и зонами контактирования со смежными слоями (коллинеарными щелями), позволяет формулировать расчетную модель реального массива осадочных горных пород в окрестности подземного сооружения как трансверсально-изотропное тело с наклонной (в общем) плоскостью изотропии.

Вычисление параметров упругой анизотропии пород с влиянием двоякопериодической системы коллинеарных щелей и соответствующих ей приведенных параметров модели слоистого массива можно сформировать в расчетную анизотропную модель.

Динамические воздействия на подземные сооружения представляют собой дифракцию волн, распространяющихся, отражающихся и преломляющихся на объектах подземного строительства. Задачи дифракции упругих волн на выработках, полостях и других типах неоднородностей входят в состав классических задач динамики деформируемых твердых тел, а их решение требует привлечение сложного математического аппарата. Последнее обстоятельство наряду с другими не позволило на протяжении длительного времени исследовать широкие классы задач с оценкой динамической напряженности вблизи неоднородностей и основные достижения получены в основном в трех традиционных направлениях. Первое направление связано с построением точных аналитических решений отдельных весьма немногочисленных задач в большинстве случаев без анализа динамической напряженности вблизи неоднородностей. Второе направление состоит в сведении весьма широких классов задач дифракции упругих волн к системам многомерных сингулярных и регулярных интегральных уравнений с

последующим доказательством существования и единственности решения. Третье направление связано с развитием асимптотических методов решения задач дифракции упругих волн, в большинстве случаев не позволяющих определить динамическую напряженность вблизи границ раздела свойств (вблизи неоднородностей).

Одной из основных целей при исследовании задач дифракции упругих волн на неоднородностях является получение не только формального математического решения, а такого, с помощью которого можно было бы эффективно определить дифракционные поля деформаций и напряжений вблизи неоднородностей. В указанных трех традиционных направлениях отмеченная цель не была достигнута. В последние десятилетия в связи с развитием научно-технического прогресса, развитием средств ЭВМ успешно развиваются два направления, по которым проводятся исследования задач дифракции упругих волн на неоднородностях с целью определения динамической напряженности вблизи неоднородностей.

Первое направление связано с развитием численных методов при соответствующей дискретизации задач с применением ЭВМ на всех этапах решения задачи. Развитие этого направления в силу универсальности его алгоритмов, в настоящее время, обеспечивает возможность исследования весьма широких классов задач. Однако результаты исследований по данному направлению зависят от возможностей ЭВМ и предполагают пересмотр постановки задач и перепроектирования алгоритмов при смене краевых условий и других исходных данных. Более приемлемым и успешным все же считается второе направление, которое связано на первом этапе решения задач с применением аналитических методов (метода разделения переменных и его обобщений, методов теории возмущений, методов сведения к интегральным уравнениям после неполного разделения переменных и т.д.) и на заключительных этапах решения – с применением ЭВМ. В этом направлении уже исследован широкий класс задач, опубликованы монографии [4, 5]. В этом же направлении ведутся научные исследования, рассматриваемые в данной работе.

Вопросами распространения волн в сплошных средах занимались многие авторы. Так, в работе Г.И. Петрашень [6], рассматривается анизотропная среда, в которой изучаются вопросы, связанные с общей теорией плоских волн, с распространением волновых фронтов любой природы, с явлениями отражения-преломления волн на границе раздела сред. Работа французских авторов Э. Дьелесан, Д. Руайе [7] посвящена рассмотрению принципов и устройств акустической обработки информации. Здесь приводятся сведения о

кристаллографии, изучаются вопросы статической и динамической теории упругости применительно к кристаллам. Затрагиваются вопросы о специфике распространения волн с горизонтальной поляризацией (SH-волн) в сплошных анизотропных и изотропных средах, а также распространение продольных и поперечных волн.

Оценка динамического воздействия на напряженно-деформированное состояние подземных сооружений характеризуется разными подходами.

Подход, учитывающий дифракцию, преломление и отражение сейсмических волн на подземных сооружениях и конструкциях в массиве с изотропными свойствами предложен в работах Ж.С. Ержанова, Ш.М. Айталиева, Л.А. Алексеевой [8, 9, 10, 11, 12, 13]. Здесь подробно рассмотрены аналитические и численные методы решения динамических стационарных и нестационарных задач распространения волн расширения-сжатия (PP) и сдвига (SV-, SH-) в упругом и водонасыщенном породных массивах, содержащих тоннели и трубопроводы различного профиля глубокого и неглубокого заложения. При анализе напряженно-деформированного состояния тоннелей сложного профиля от воздействия нестационарных динамических нагрузок применяется метод граничных интегральных уравнений, метод граничных элементов.

Дифракция упругих волн на полостях и неоднородностях исследуется в работах А.Н. Гузя, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко, А.С. Космодамианского, Н.А. Шульги, В.Г. Головчана, Й. Пао, Я. Мау, Л. Менте, Банаф, Голдсмит и др. [4, 5, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. Авторами разработана методика решения и приведены численные примеры дифракции волн на препятствиях в изотропной среде. Так, в работе А.Н. Гузя, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко [4] рассмотрен целый класс задач дифракции упругих волн различной природы на препятствиях различной формы, аналитически получены выражения для расчетов напряженно-деформированного состояния изотропных сред, ослабленных полостями и включениями. Задачи преимущественно распространяются на область машиностроения. Работы Й. Пао, Я. Мау, Л. Менте, Банафа, Голдсмита [19, 20, 21] были одними из первых в области распространения волн в средах с полостями. Свойства среды считались изотропными. В работах А.С. Космодамианского, Н.А. Шульги, В.Г. Головчана, В.Д. Кубенко [14, 15, 16, 17, 18] учитываются многосвязность сред, препятствия некруговой формы, но рассматриваемая среда обладает изотропными свойствами.

В работах А.С. Космодамианского, В.И. Сторожева, Л.Б. Ободовского [23, 24] учитывается анизотропия среды при рассмотрении вопросов дифракции волн различной природы (PP, SV-, SH-)на неоднородностях и полостях. Здесь обобщены результаты, полученные в работах А.Н. Гузя и др. [16], на среды, имеющие анизотропные свойства, разработана методика решения динамических задач в ортотропной среде. Результаты преимущественно применяются в области машиностроения. В исследованиях проблем дифракции волн на препятствиях в анизотропной среде не учитывается изменение угла наклона плоскости изотропии, рассматриваются частные случаи горизонтальной и вертикальной слоистости среды.

Квазистатический подход, предложенный Ш.Г. Напетваридзе [1] и развитый Н.Н. Фотиевой [22], обобщен на анизотропный породный массив в работе Ж.С. Ержанова. Ш.М. Айталиева, Ж.К. Масанова [3]. Здесь в качестве окружающей породной толщи берется трансверсально-изотропный массив с наклонной плоскостью изотропии, вычисляются параметры упругой анизотропии породного образца, показывается вклад двоякопериодической системы коллинеарных щелей и соответствующих ей приведенных параметров модели слоистого массива в расчетную анизотропию. Рассматриваемые типы волн – длинные сейсмические волны растяжения-сжатия и сдвига. При исследовании учитываются также скорости распространения волн растяжения-сжатия в анизотропном массиве, когда фронт волны имеет разное направление относительно элементов залегания слоев. Проводится анализ квазистатического напряженно-деформированного состояния закрепленных и незакрепленных штреков, квершлагов, диагональных выработок при различных граничных условиях. Аналитические методы приведены с учетом теории функций комплексного переменного. Для численного решения используется метод конечных элементов.

Останавливаясь на моделях породного массива, проведем обзор работ, касающихся исследований напряженно-деформированного состояния подземных сооружений. Коснемся лишь тех работ, где рассматриваются осадочные горные породы, характеризуемые слоисто-складчатой и трещиноватой структурой.

Впервые целесообразность учета упругой анизотропии пород указана С.Г.Лехницким [25] и Г.Н.Савиным [26, 27], рассматривавшими лишь горизонтальную слоистость: массив моделировался трансторопным телом, плоскость изотропии которого совпадает с плоскостью напластования слоев. Затем А.С.Космодамианским [28, 29] решены плоские задачи об упругом

распределении напряжений возле горизонтальных одиночной и парной выработок в трансверсально-изотропном массиве с горизонтальной плоскостью изотропии. Анизотропные (транстропные) модели мелкослоистого массива с наклонной плоскостью изотропии, впервые использованные Ж.С.Ержановым, Ш.М.Айталиевым и их учениками [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39], позволили учесть не только наклонную слоистость массива, но и подразделять протяженные горизонтальные горные выработки на штреки, квершлаги и диагональные выработки, различным образом ориентированные относительно линии простирания слоев. Для того чтобы учесть несплошность сцепления слоев по контактным поверхностям Ж.С.Ержановым, М.Т.Тусуповым [41] предложена модель массива как однородного сплошного транстропного тела, эквивалентные по жесткости упругие свойства которого найдены в функции от геометрических и физических характеристик среды с физическими щелями. Причем берега щелей под действием внешних сил могут быть частично взаимодействующими и коллинеарное сближение щелей не ограничивается решением задачи, следовательно, модель тем совершеннее, чем более сближены щели. Она является более общей, чем ранее предложенные этими авторами и К.К.Кайдаровым модели [36, 42]. Здесь следует напомнить, что основной массив является изотропным. Затем в работе [31] Ш.М. Айталиевым и Ж.К.Масановым этот подход был распространен на анизотропный массив с системой коллинеарных щелей, моделирующей пористость зон контактирования слоев реальной транстропной породной толщи. Определены эффективные упругие характеристики эквивалентного по жесткости транстропного тела через упругие и геометрические параметры основной толщи и системы щелей. Последняя модель слоистого породного массива является самой представительной из всех выше изложенных, ибо из нее можно получить, как частные случаи, известные для систем щелей с невзаимодействующими берегами.

Исследование напряженного состояния подземного сооружения некруговой несимметричной формы имеет свои сложности и несмотря на кажущуюся простоту классической постановки подобных задач, ее решение наталкивается на большие трудности. Точное решение задачи Т.Л.Мартынович [44], как показали Космодамианский, С.Г.Лехницкий и В.Н.Ложкин [46] остается дискуссионным и для его обоснования требуется выполнить дополнительно тонкие исследования В.Александров [47]. Замкнутое решение И.Т.Минчева [48] для ослабленного несимметричными выработками массива из напластованных пород, по-видимому, обладает также подобным

недостатком, поэтому приходится обращаться к приближенным численным и аналитическим методам. Так, в работах Ш.М.Айталиева, М.К.Каюпова, В.К.Косенюка [49, 50] к решению первой основной задачи плоской теории упругости анизотропного тела с отверстием произвольной формы применен метод граничных элементов. Весьма эффективным в теории упругости анизотропного тела оказывается метод малого параметра С.Г.Лехницкого [51,52], развитый в последующем А.С.Космодамианским [53,54] (см. также труд Г.Н.Савина [54]).

В перечисленных выше работах в основном рассматривались плоские задачи теории упругости анизотропного тела для бесконечной среды с отверстиями как неподкрепленными, так и подкрепленными жесткими (недеформируемыми) кольцами или ядрами в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния.

В.А.Швецовым решена контактная задача для анизотропной среды с эллиптическими отверстиями, подкрепленными упругими анизотропными кольцами [56, 57, 58]. А.С.Космодамианским и Н.М.Нескородевым [59, 60] разработана методика решения плоской периодической задачи для анизотропной среды с некруговыми отверстиями, подкрепленными кольцами. В основу ее положены методы теории аналитических функций и разложения функций по полиномам Фабера. С.А.Калоеров [61] исследовал распределение напряжений в полуплоскости с эллиптическими отверстиями и упругими кольцами. А.С.Космодамианским совместно с С.А.Калоеровым [62] предложен общий метод решения контактных плоских задач для анизотропной многосвязной области с некруговыми отверстиями, не имеющими какой-либо оси симметрии и закрепленными также анизотропными подкреплениями, форма внутренних контуров которых не совпадает с формой внешнего контура. Здесь использована теория преобразования областей, разработанная Л.В.Конторовичем [63], методы малого параметра и разложения функций по полиномам Фабера. Эти методы применимы для расчета напряжений в системе "крепь -массив" при плоской постановке и в случае возможности отображения внешности контуров на внешность единичного круга.

Метод малого параметра С.Г.Лехницкого, А.С.Космодамианского, С.А.Калоерова [51, 61] систематически использован в работах Ержанова Ж.С., Айталиева Ш.М., Масанова Ж.К. [3].

Динамические задачи применительно к расчету сейсмостойкости подземных сооружений в массиве складчатого строения рассматривались преимущественно в плоской постановке.

В последнее время развернулись последовательные и систематические исследования по сейсмостойкости подземных сооружений, разнообразны подходы, применяемые при теоретическом анализе. В отношении как хронологии, так и формулирования научных школ одним из первых следует назвать динамическую теорию подземных трубопроводов А.А.Ильюшина-Т.Р.Рашидова [64, 65], разработанной в начале 70-х годов. Она в дальнейшем теоретически развита и экспериментально обоснована в работах Г.Х.Хожметова [66], Я.Н.Мубаракова [67], А.А. Ишанходжаева [68], С.Ф. Проскуриной [69] и др. Основу этой теории составляет предположение о деформируемости линейных элементов сооружений по схеме бруса, подвергающегося растяжению, изгибу и кручению, стыкующихся с жесткими сложными узлами. Я.Н.Мубараковым в работе [67] рассмотрена сейсмодинамика оболочечных пространственных конструкций как подземных сооружений во взаимодействии с окружающим грунтом с учетом заданных сейсмических воздействий произвольного направления. В последние годы Л.В.Никитиным и А.Н.Тюреходжаевым [70] исследованы конечный трубопровод в грунте под действием сейсмических волн.

Систематические исследования динамического воздействия на подземные сооружения с учетом стационарной дифракции сейсмических волн, многократных преломлений - отражений на конструктивных элементах для однородной изотропной упругой и многокомпонентной (водонасыщенной) породной среды начаты в работах Л.А.Алексеевой, Ш.М.Айталиева, Ж.С.Ержанова, Н.Б.Жанбырбаева, В.В.Шершнева, Ш.А.Дильдабаева [8, 12, 71, 72, 73, 74, 75, 76] , Ю.Н.Новичковым, П.Гутьересом, С.Джунисбековым в работе [77] рассматривали колебания бесконечного подземного трубопровода в поперечном поле плоской гармонической волны. Выводы статьи М.В.Степаненко [78] др. посвященной действию нестационарных упругих волн на жесткие тела и системы тел, при определенных условиях могут быть применимы к расчету сети подземных конструкций. Дифракция упругих волн на отверстиях сплошной изотропной и анизотропной упругой среды рассматривалась в известных монографиях А.Н.Гузя, В.Д.Кубенко, М.А.Черевко [4], А.С.Космодамианского, В.И.Сторожева [5], Б.М.Марданова [79] и др. Сейсмодинамические влияния подвижных нагрузок внутри тоннеля на дневную поверхность изучались в работах М.А.Дашевского [80], С.А.Курнавина [81], Л.А.Алексеева, В.Украинца [82].

В обобщающей статье Ш.М. Айталиева [83] говорится об основных достижениях Казахстанской школы механиков за последние

40 лет. Здесь описываются основные направления в исследованиях механики горных пород, в том числе вопросы дифракции и динамики подземных сооружений.

Из зарубежных исследователей, помимо Й.Пао [19, 84] , Я.Мау, Л.Менте [20], можно указать на основополагающие теоретические работы по дифракции упругих волн К.Чао [85]. В монографии Ш.Окамото [86] дано описание сейсмостойкости подземных конструкций. Комплексные теоретико-экспериментальные разработки ведутся С.Сакураи [87, 88].

В последние годы появилось много работ, посвященных проблеме дифракции волн на препятствиях в средах с разными свойствами.

Так, в работах китайских авторов Я. Ху, Ф. Хан, Д. Луи, [89, 90] исследуются проблемы рассеяния волн на неоднородностях и полостях, при этом используется аппарат теории функций комплексного переменного, а также метод граничных интегральных уравнений. Окружающие объект среды берутся изотропными [89] или ортотропными [90].

В работах авторов Г. Ванг, Д.Луи [90] описываются исследования распространения и рассеивания SH-волн на множественных круговых полостях в полупространстве. В них рассматривается изотропная среда, метод мультиполярной системы координат, используются методы рассевающих функций и методы движения координат, проблема рассеивания и распространения сдвиговых волн в полупространстве преобразуется в проблему распространения волн в пространстве. Бесконечная система линейных уравнений решается методом редукции.

Многосвязность изотропной среды учитывается в работах Дж. Лианга, Х. Жанг, В. Ли [92, 93]. В работе исследуются решения в рядах по нахождению перемещений на дневной поверхности в присутствии подземных парных тоннелей в изотропной среде, находящихся под воздействием SV-волн[92], и PP-волн[93]. Решения ищутся в рядах Фурье-Бесселя. Численно показываются результаты влияния подземных тоннелей на смещения дневной поверхности.

В статье Гаи Бинг Дженга [94] говорится об использовании комплексного функционального метода для решения проблем дифракции упругих волн и нахождения динамических напряжений, рассмотрены случаи односвязной, многосвязной изотропной среды и проблемы трещин.

В статье Лиу Дианкуи и Лиу Хонгвей [95] рассматриваются специальные функции Грина для исследования цилиндрической

полости в изотропной полуплоскости при дифракции SH-волн. С помощью формул Графа, интегральных уравнений Фредгольма полуплоскость преобразуется в плоскость.

В работах Ху Пинга, Х. Тан-даи, Х.Тонг-чан [96] исследуется рассеяние волны сжатия (PP-) в водонасыщенной изотропной среде. В качестве модели авторы берут модель Биота и получают амплитудные уравнения относительно потенциальных функций рассеивания и отражения волн, которые решаются численно и анализируются.

В работе Ким Д., Конагаи К. [97] исследуется метод снижения сейсмических разрушений в тоннеле путем подкрепления тоннеля мягкими и тонкими обделками. Показано, что тоннели в толще пород с мягкими и тонкими обделками имеют только одну степень свободы, позволяющую оценить изоляционный эффект с ограниченным числом ключевых параметров.

В работах Ли В., Манугиан М., Чен С. [98] исследуется проблемы динамического состояния жестко встроенного основания при наличии подземного жестко закрепленного тоннеля и распространения SH-волн сдвига в изотропной среде. С помощью точных аналитических решений для двухмерных SH-волн вблизи тоннеля и жесткого основания анализируются смещения и напряжения основания при динамических воздействиях. Исследуемые амплитуды смещений показывают сложную волновую картину.

В работах Гао Гунг-юн, Ли Жи-уил, Киу-Чанг исследуются эффекты от распространения волны Релея, основанные на аналитических соотношениях Лэмба и упругой теории рассеяния волн. Исследуются рассеяние волн Релея от множественных нерегулярных препятствий в изотропной среде.

В статье Малежика М.П., Чернышенко И. С., Шеремет Г.П. [100] исследуется дифракция волн напряжений на свободной и подкрепленной полости в ортотропной фотоупругой пластине. Экспериментально показывается распределение напряжений при дифракции квазипродольных и квазипоперечных волн.

Для исследования дифракции волн на неоднородностях произвольной формы в работе А.М. Назаренко, Б.Е. Панченко [101] используется метод сингулярных интегральных уравнений, разработана методика решения для неоднородностей в изотропной среде.

Исследованию волновых процессов в массиве с полостью, обладающего усложненными свойствами, посвящена работа С.А. Тусуповой [102]. Здесь рассматривается распространение упругих волн сдвига, а также сферических, цилиндрических и термоупругих

волн в упругой среде диссипативной структуры с начальными напряжениями. Показано влияние параметров среды, релаксации напряжений на напряженно-деформированное состояние приконтурной зоны полости.

Подход к решению задач отражения упругих гармонических волн от выпуклой цилиндрической полости произвольного сечения с использованием лучевых рядов Дебая отражен в работе Ю.Н. Подильчука, Ю.К. Рубцова, П.Н. Сороки [103].

В работе Глушкова О.В. [104] предложен метод решения плоской динамической задачи для упругого ортотропного тела. На основе построения фундаментальных решений для уравнений движения в перемещениях в пространстве, преобразования Лапласа по времени и метода граничных элементов решение краевой задачи сводится к конечной системе линейных алгебраических уравнений.

Задача о возбуждении колебаний однородного и неоднородного слоев рассматривается авторами Гетман И.П., Румянцевым А.Н., Устиновым Ю.А. в работе [105]. Здесь предлагается прием сведения краевой задачи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, основанный на использовании условий обобщенной ортогональности. Числовые расчеты проводились для симметричных колебаний однородного и кусочно-однородного слоев с отверстиями.

В работе В.Г. Житняя, А.С. Космодамианского, В.И. Черник [106] приводится решение проблемы дифракции плоской волны на подкрепленной круговой полости в изотропном массиве.

В статье Miura Kimihisa, Ohyoshi Tadashi [107] проводился анализ отражения волн на основе модифицированного слоистого элемента. В случае отражения и прохождения упругих волн при их наклонном набегании на градиентно неоднородный слой рассматривались проблемы, связанные с оценкой модифицированных функций Бесселя мнимого порядка, зависящего от параметра неоднородности. Для преодоления этих трудностей был представлен анализ, основанный на применении нового модифицированного слоистого элемента вместо ранее развитого элемента. Такой элемент дал возможность выразить фундаментальные решения через элементарные функции и провести вычисления без модифицированных функций Бесселя при любых значениях параметров неоднородности. Можно отметить, численные результаты с применением только одного нового элемента находились в хорошем соответствии с численными результатами, полученными по многослойной модели с многими однородными элементами.

В статье И.О. Осипова [108] проводится исследование решения динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред с

четырьмя упругими постоянными без каких-либо ограничений на упругие постоянные. Предлагался новый подход к построению комплексных решений уравнений движения; получены и исследованы решения, выражающиеся плоские волны и волны от точечного источника типа мгновенного импульса, а также комплексные решения общего типа.

В работах Н.И. Остросаблина [109] получен простейший вид матрицы модулей упругости анизотропного материала, проводящего чисто продольные и поперечные волны при любом направлении волновой нормали. Дано представление общего решения уравнений в смещениях через три функции, удовлетворяющие независимым волновым уравнениям. В случае плоской деформации было получено комплексное представление, совпадающее с формулой Колосова-Мусхелишвили для изотропного материала. Приведенные в работе формулы определяли также анизотропный материал с модулем Юнга, одинаковым для всех направлений, как в изотропной среде.

В статьях Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А.В. Ехлаков [110] рассмотрена краевая задача дифракции упругих волн на трещине, расположенной в плоскости склейки двух упругих полупространств, задача сводилась к системе интегральных уравнений, решаемой вариационно-разностным методом, модифицированным для случая пространственных интерфейсных трещин. Были проанализированы отраженные и преломленные волновые поля. Приводились численные результаты, показывающие влияние формы трещины, угла падения, частоты, соотношения упругих свойств материалов на коэффициент отражения, диаграмму направленности и перераспределения энергии, обобщенный коэффициент отражения.

В работах Н.Я. Кирпичникова, Л.А. Свиркина, В.Б. Филиппова [111] исследовалась задача рассеяния плоской упругой волны горизонтальной поляризации (СХ-волны) от малого неоднородного цилиндрического включения, помещенного в слое, лежащем на свободном от напряжений полупространстве. Предполагалось, что падающая плоская волна поляризована параллельно оси цилиндра. Показано, что неоднородность будет излучать как точечный источник, интенсивность которого пропорциональна площади неоднородности и скачкам квадратов поперечных скоростей в слое и неоднородности.

Метод А.А. Гусенковой потенциальных функций для решения задач дифракции упругой гармонической волны на дефекте, расположенном вдоль отрезка вещественной оси в однородной изотропной среде рассмотрен в работе [112]. Здесь предложены

некоторые обобщения метода на случай анизотропной трехмерной динамической задачи теории упругости.

Изложенный выше обзор публикаций по теории динамической и сейсмической устойчивости подземных сооружений не претендует на полноту, в нем дано краткое содержание тех работ, которые касаются тематики диссертационного исследования. Достаточно обстоятельный анализ состояния теории в разное время содержится в трудах [1, 3, 8, 22, 87, 65, 66, 114, 115, 116, 117]

Указанные работы в основном относятся к однородным изотропным и ортотропным средам и задачам плоской деформации.

Таким образом, проведенный обзор литературы по изучению напряженного и деформированного состояния подземных сооружений при динамических и сейсмических воздействиях указывает на преимущественное применение однородной изотропной модели массива. Она, адекватно отражая реальные свойства массива в целом - в осредненном смысле, не позволяет в расчетных схемах отражать такие существенные характеристики породной толщи, как складчатость, слоистость, трещиноватость, и, самое главное, - разную ориентацию продольных осей протяженных сооружений по отношению к поверхностям напластования слоев. В зависимости от ориентации продольных осей горизонтальные горные выработки подразделяются на штреки - выработки, пройденные вдоль линии простирания слоев, квершлаги - выработки, пройденные вкрест линии простирания слоев и диагональные выработки, занимающие промежуточное положение между штреками и квершлагами. Многочисленные натурные наблюдения за перемещениями контуров и давлением на их крепи показывают существенные их отличия не только в количественном, но и качественном отношении: наибольшие перемещения и давление на крепь наблюдаются вкрест простирания слоев е штреках. Тем не менее, расчетные схемы разноориентированных горизонтальных выработок принимаются одинаковыми, хотя они находятся в принципиально разных условиях деформации. Поэтому в данной диссертации в качестве складчатого массива принимается анизотропная (транстропная) его модель, которая содержит в себе, как частный случай, все характерные особенности изотропной модели. Математические основы анизотропной модели особенно сложны по сравнению с изотропной, но эта сложность компенсируется тем преимуществом, что анизотропная модель открывает возможность рассмотрения новых классов задач, находящихся в условиях обобщенной плоской задачи. Мнение некоторых исследователей о незначительности вклада упругой

анизотропии породных образцов на напряженное состояние вокруг выработок, по нашему мнению, преждевременно и еще требуется накопление материалов и проведение дополнительных исследований на основе современных методов механики деформируемых тел. Решение задач стационарной дифракции является актуальным направлением, так как еще не до конца изучены динамические воздействия упругих волн, в совокупности с рассмотрением анизотропных сред их распространения.

В данной монографии делается попытка разработать методические основы расчета и провести систематические исследования динамического напряженно-деформированного состояния разноориентированных подземных сооружений, моделируемых полостями произвольного профиля и глубины заложения в слоистой толще горных пород складчатого строения при распространении стационарных волн сжатия-растяжения и сдвигов.

Работа является составной частью плановых научно-исследовательских работ лаборатории механики деформируемого твердого тела Института механики и машиноведения имени У.А. Джолдасбекова РГП ИМИМ КН МОН РК в соответствии с НИР «Проблемы геомеханики, механики деформируемых твердых тел и горных пород, разработка методов расчета подземных сооружений нефтегазовой и горнорудной отраслей», подтемы «Разработать и развить методы исследования состояния крупно- и маломасштабных неоднородных горных пород с различными сооружениями» ПФИ «Актуальные проблемы физики, математики, механики и информатики» (Ф.0508) на 2006-2009, 2009-2011 гг. (регистр.: №0109РК00668).

Разработанные программные комплексы для массовых многовариантных вычислений и анализа динамического напряженно-деформированного состояния полостей произвольного поперечного сечения в анизотропном слоистом массиве в наиболее общих условиях обобщенной плоской деформации при стационарной дифракции упругих волн позволяют выявить новые закономерности и эффекты в распределении динамических напряжений и перемещений для оптимального проектирования различных подземных сооружений произвольной ориентации в наклонно-слоистых средах.

1 ДИНАМИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ОДИНОЧНОЙ ШТРЕКООБРАЗНОЙ ПОЛОСТИ В ТРАНСТРОПНОМ МАССИВЕ ПРИ СТАЦИОНАРНОЙ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН

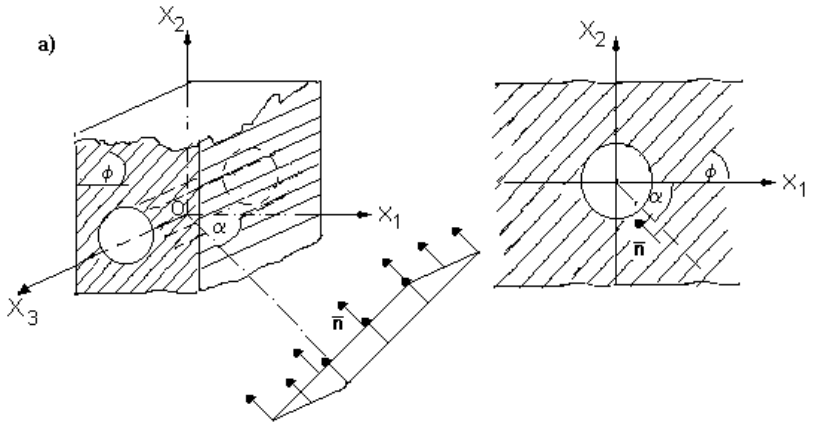
1.1 Круговая полость глубокого заложения. Основные уравнения и соотношения

Используемое во многих теоретических разработках представление о породном массиве как об изотропном теле является сильной идеализацией. Реальный породный массив – не изотропен. Слоистость, сланцеватость, системная трещиноватость и вообще любая направленная дефектность породной толщи создают деформативную и прочностную анизотропию. Мелкослоистый массив, когда толщина слоев на порядок меньше характерного линейного размера поперечного сечения выработки и механические свойства слоев переходят от одного слоя к другому почти непрерывно, уподобляется анизотропному породному образцу. Характеристики анизотропии снимаются из опытов непосредственно над образцом. Упругий трансверсально-изотропный (транстропный) массив использован в работах [33, 34, 35, 36]. Породный массив с системой трещин моделируется также анизотропным телом, приведенные характеристики которого содержат помимо параметров анизотропии породного образца еще и данные о густоте и раскрытии трещин [3,37,41,42]. При выборе модели транстропного массива учитывается также особенности влияния степени анизотропии, трещиноватости массива. Природная, конструкционная и деформационная анизотропия физико-механических свойств присуща в определенной мере большинству материалов, в том числе горным породам с учетом способа их напластования и залегания. Учет анизотропии при исследовании динамических процессов деформирования обуславливает более адекватные представления о качественном характере напряженного состояния упругих тел и их волноводных свойствах, позволяет получить более достоверные количественные оценки.

Представительность такого породного массива, который вполне может служить моделью анизотропной среды, оправдывает рассмотрение трансверсально-изотропного (транстропного) тела, наклонная к горизонту плоскость изотропии которого отражает наличие плоскости напластования пород в их естественном залегании. Предполагается, что в таком транстропном массиве пройдена протяженная горизонтальная горная выработка, моделируемая одиночной полостью.

В отличие от изотропного массива при рассмотрении горизонтальной выработки (цилиндрической полости) в транстропном массиве с наклонной к горизонту плоскостью изотропии необходимо различать ориентацию ее продольной оси относительно элементов залегания пород. Горизонтальная выработка (полость), пройденная параллельно линии простирания пород, называется штреком.

В данном разделе исследуется стационарное динамическое упругое напряженно-деформированное состояние одиночной круговой полости с радиусом R в случае рассмотрения неподкрепленного (при решении первой основной задачи) и жестко закрепленного (при решении второй основной задачи) контура при дифракции гармонических волн растяжения-сжатия и сдвига в направлении вкрест простирания плоскости изотропии транстропного массива (рис.1). Волны распространяются под произвольным углом α к горизонту, причем рассматриваются, в отдельности, случай продольных и поперечных волн, когда транстропный массив находится в условиях плоской деформации, и случай сдвиговых волн, когда в массиве представлена антиплоская деформация.



φ – угол наклона плоскости изотропии; α – угол падения волны

$\vec{n}$ – единичный вектор в направлении распространения упругих волн

а) общий вид; б) плоскость поперечного сечения

Рисунок 1 – Схема распространения гармонических волн в транстропном массиве с круговой полостью вкрест простирания наклонной плоской изотропии

Запишем основные физические уравнения – уравнения обобщенного закона Гука - для транстропного (трансверсально-изотропного) массива с наклонной под углом φ к горизонту плоскостью изотропии относительно декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ (см. рис.1), где ось Ox_2 направлена вертикально вверх, а оси Ox_1 и Ox_3 – соответственно горизонтально вкрест и по простиранию плоскости изотропии [3,117]:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = b_{11}\varepsilon_{11} + b_{12}\varepsilon_{22} + b_{13}\varepsilon_{33} + b_{16}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} = b_{12}\varepsilon_{11} + b_{22}\varepsilon_{22} + b_{23}\varepsilon_{33} + b_{26}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{33} = b_{13}\varepsilon_{11} + b_{23}\varepsilon_{22} + b_{33}\varepsilon_{33} + b_{36}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{23} = b_{44}\varepsilon_{23} + b_{45}\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{12} = b_{16}\varepsilon_{11} + b_{26}\varepsilon_{22} + b_{36}\varepsilon_{33} + b_{66}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{13} = b_{45}\varepsilon_{23} + b_{55}\varepsilon_{13}, \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $b_{ij}(i, j = 1,2,3,4,5,6)$ - коэффициенты упругости, зависящие от упругих постоянных среды и угла φ :

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_{11}^0 \cos^4\varphi + 2(b_{13}^0 + 2b_{55}^0)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + b_{33}^0 \sin^4\varphi, \\ b_{13} &= b_{12}^0 \cos^2\varphi + b_{13}^0 \sin^2\varphi, \\ b_{12} &= b_{13}^0 + [b_{11}^0 + b_{33}^0 - 2(b_{13}^0 + 2b_{55}^0)]\sin^2\varphi\cos^2\varphi, \\ b_{16} &= [b_{11}^0 \cos^2\varphi - b_{33}^0 \sin^2\varphi - (b_{13}^0 + 2b_{55}^0)\cos 2\varphi]\cos\varphi\sin\varphi, \\ b_{33} &= b_{22}^0, \qquad b_{23} = b_{13}^0 \cos^2\varphi + b_{12}^0 \sin^2\varphi, \\ b_{26} &= [b_{11}^0 \sin^2\varphi - b_{33}^0 \cos^2\varphi + (b_{13}^0 + 2b_{55}^0)\cos 2\varphi]\cos\varphi\sin\varphi \\ b_{22} &= b_{11}^0 \sin^4\varphi + 2(b_{13}^0 + 2b_{55}^0)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + b_{33}^0 \cos^4\varphi, \\ b_{36} &= [b_{12}^0 - b_{13}^0]\cos\varphi\sin\varphi, \\ b_{44} &= b_{44}^0 \cos^2\varphi + b_{66}^0 \sin^2\varphi, \quad b_{45} = (b_{66}^0 - b_{44}^0)\sin\varphi\cos\varphi, \\ b_{55} &= b_{44}^0 \sin^2\varphi + b_{66}^0 \cos^2\varphi, \\ b_{66} &= b_{55}^0 + [b_{11}^0 + b_{33}^0 - 2(b_{13}^0 + 2b_{55}^0)]\sin^2\varphi\cos^2\varphi \end{aligned} \tag{1.2}$$

Причем

$$b_{11}^0 = b_{22}^0 = \frac{E_1(e_1 - \nu_2^2)}{(1+\nu_1)[e_1(1-\nu_1) - 2\nu_2^2]}, \quad b_{12}^0 = \frac{E_1(\nu_1 e_1 + \nu_2^2)}{(1+\nu_1)[e_1(1-\nu_1) - 2\nu_2^2]},$$

$$b_{13}^0 = \frac{E_1 \nu_2}{e_1(1-\nu_1) - 2\nu_2^2}, \quad b_{33}^0 = \frac{E_1(1-\nu_1)}{e_1(1-\nu_1) - 2\nu_2^2},$$
$$b_{44}^0 = b_{55}^0 = G_2, \quad b_{66}^0 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}, \quad e_1 = \frac{E_1}{E_2}. \tag{1.3}$$

Здесь E_1 и E_2 – модули упругости в плоскости изотропии и перпендикулярно к ней; ν_1 и ν_2 - коэффициенты Пуассона в плоскости изотропии и перпендикулярно к ней при сжатии-растяжении в этой плоскости; G_2 – модуль сдвига для плоскостей, нормальных плоскости изотропии, φ - угол наклона плоскости изотропии к горизонту. В случае изотропной среды упругие постоянные можно взять осредненными, т.е.

$$E_1 = E_2 = E = \frac{E_1 + E_2}{2}, \ \nu_1 = \nu_2 = \nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}, \ G_2 = G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Следует отметить, что величины E_1 , E_2, ν_1 и ν_2 можно найти непосредственно из опытов на одноосное сжатие породных образцов параллельно и перпендикулярно слоистости. Можно вычислить значение модуля сдвига

$$G_2 = \frac{\sin^2 2\psi}{4\left[\frac{1}{E_\psi} - \frac{1}{E_1}\cos^4\psi - \frac{1}{E_2}\sin^4\psi + \frac{\nu_2}{2E_1}\sin^2 2\psi\right]}. \tag{1.4}$$

определив модуль упругости E_ψ при сжатии породного образца под углом ψ к плоскости изотропии, из соотношения

$$E_\psi = \frac{1}{\frac{1}{E_1}\cos^4\psi + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{G_2} - \frac{2\nu_2}{E_1}\right)\sin^2 2\psi + \frac{1}{E_2}\sin^4\psi} \tag{1.5}$$

Зная значения упругих постоянных E_1 , E_2, ν_1 , ν_2 и G_2 , можно найти степень анизотропии, которая в данном случае количественно не полностью характеризуется упругими постоянными массива, а допускает лишь качественную оценку отклонений от теоретических

соотношений. Полный анализ деформации транстропного массива нуждается в параметрах анизотропии вида [3]

$$\widetilde{k}=\sqrt{\frac{\frac{E_1}{E_2}-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}},\quad \widetilde{n}=\sqrt{2\widetilde{k}+\frac{\frac{E_1}{G_2}-2\nu_2(1+\nu_1)}{1-\nu_1^2}},\quad \widetilde{l}=\sqrt{\frac{E_1}{2(1+\nu_1)G_2}}. \qquad (1.6)$$

А степень упругой анизотропии массива оценивается отклонением численных значений указанных параметров от параметров изотропного массива: $\widetilde{k}$ =1, $\widetilde{n}$ =2, $\widetilde{l}$ =1.

В таблице 1 приведены опытные данные о комплектах упругих постоянных и параметрах упругой анизотропии образцов некоторых пород; размерность величин E_1 , E_2, G_2 – кг/см^2.

Таблица 1 *– Упругие постоянные и параметры упругой анизотропии образцов некоторых пород [3]*

Порода	Упругие постоянные породных образцов					Параметры упругой анизотропии		
	E_1*10^{-5} кг/см^2	E_1*10^{-5} кг/см^2	G_2*10^{-5}кг/см^2	ν_1	ν_2	$\widetilde{k}$	$\widetilde{n}$	$\widetilde{l}$
Алевролит	6,210	5,680	2,290	0,215	0,260	1,04	2,06	1,06
Алевролит	1,074	0,523	0,120	0,413	0,198	1,56	3,64	1,78
Песчаник	2,987	3,411	0,215	0,134	0,150	0,93	3,96	2,47
Песчаник	1,520	0,960	0,490	0,210	0,280	1,26	2,25	1,13

Напряженно-деформированное состояние горизонтальных выработок предопределяется наклоном складчатых слоев пород. Так, наибольшие смещения точек контура штрека перпендикулярны к слоям в два -пять раз превосходит значения смещений по напластованию, что связано с расслоением породной толщи в зоне влияния подземного сооружения. Существующие расчетные схемы горных и тоннельных выработок представляют реальный горный массив как, однородную изотропную или анизотропную среду, моделирующую лишь горизонтальную слоистость. Это не позволяет

оценить пространственное расположение поверхностей напластования пород на проявление горного давления в выработках.

Слоистый массив вблизи подземных выработок склонен к расслоениям из-за малости сцепления слоев друг с другом. Этот момент может быть отражен в расчетной модели путем представления зон контактирования слоев двоякопериодической системой прямых коллинеарных щелей, расположенных в плоскости вкрест простирания слоев. В подобной модели соотношение размеров плоскопараллельных щелей и перемычек между ними может выступать в качестве меры неполноты сцепления слоев, которой и определяется склонность последних к расслоению. Такой подход требует решения задач о плоскости, ослабленной двоякопериодической системой щелей и задачи приведения ее к сплошной анизотропной (транстропной) среде, эквивалентной по жесткости [3,37].

В дальнейшем нам предстоит выяснить, насколько степень несплошности сцепления породных слоев сказывается на напряженном и деформированном состоянии породного массива вокруг горных выработок, моделируемых в виде полостей. Для этого можно рассмотреть в качестве исходных данных для слоев упругие постоянные, полученные на образцах донбасского алевролита, анизотропного и изотропного. Опытные данные о комплектах упругих постоянных и параметрах упругой анизотропии образцов некоторых пород можно найти в таблице 2; размерность величин E_1 , E_2, G_2 – кг/см^2. Значения приведенных параметров, подсчитанные по формулам, выведенным в работах [3,37], а соответствующие им параметры анизотропии сведены в таблицу 2, из которой можно определить влияние степени несплошности сцепления породных слоев на значения упругих постоянных [3]. В таблице 2 размерность $E_1^э, E_2^э$, $G_2^э$, дана в кг/см^2, $\omega/a = \infty$ соответствует плоскости без щелей.

Опишем уравнения движения в отсутствии массовых сил следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \partial_1\sigma_{11} + \partial_2\sigma_{12} + \partial_3\sigma_{13} = \rho^0\partial_t^2 u_1, \\ \partial_1\sigma_{12} + \partial_2\sigma_{22} + \partial_3\sigma_{23} = \rho^0\partial_t^2 u_2, \\ \partial_1\sigma_{13} + \partial_2\sigma_{23} + \partial_3\sigma_{33} = \rho^0\partial_t^2 u_3, \end{cases} \qquad (1.7)$$

где ∂_i (i=1,2,3)= $\partial/\partial x_i$; $\partial_t = \partial/\partial t$; ρ^0 - плотность массива.

Таблица 2 *– Значения упругих постоянных и приведенных параметров анизотропии для алевролита анизотропного и изотропного*

$\frac{\omega}{a}$	**Приведенные параметры**					**Параметры анизотропии**		
	$E_1^э \cdot 10^{-5}$	$E_2^э \cdot 10^{-5}$	$G_{2'} \cdot 10^{-5}$	$\nu_1^э$	$\nu_2^э$	$k^э$	$n^э$	$l^э$
Алевролит анизотропный								
∞	1,074	0,523	0,120	0,413	0,198	1,56	3,64	1,78
6,0	1,074	0,426	0,097	0,413	0,198	1,73	4,02	1,98
4,0	1,074	0,311	0,073	0,413	0,198	2,03	4,59	2,28
3,0	1,074	0,214	0,056	0,413	0,198	2,45	5,22	2,60
2,5	1,074	0,148	0,045	0,413	0,198	2,95	5,82	2,90
Алевролит изотропный								
∞	0,620	0,620	0,258	0,200	0,200	1,00	2,00	1,00
6,0	0,620	0,524	0,228	0,200	0,200	1,09	2,12	1,06
4,0	0,620	0,431	0,196	0,200	0,200	1,21	2,28	1,15
3,0	0,620	0,332	0,156	0,200	0,200	1,38	2,53	1,29
2,5	0,620	0,255	0,126	0,200	0,200	1,58	2,79	1,43

При использовании физических уравнений состояния (1.1) и кинематических соотношений Коши они преобразуются к уравнениям в перемещениях, которые можно записать в операторном виде [5,118]:

$$\begin{cases} A_{11}^{(0)}u_1 + A_{12}^{(0)}u_2 + A_{11}^{(2)}\partial_3^2 u_1 + A_{12}^{(2)}\partial_3^2 u_2 + A_{13}^{(1)}\partial_3 u_3 = 0, \\ A_{21}^{(0)}u_1 + A_{22}^{(0)}u_2 + A_{21}^{(2)}\partial_3^2 u_1 + A_{22}^{(2)}\partial_3^2 u_2 + A_{23}^{(1)}\partial_3 u_3 = 0. \\ A_{31}^{(1)}\partial_3 u_1 + A_{32}^{(1)}\partial_3 u_2 + A_{33}^{(0)}u_3 + A_{33}^{(2)}\partial_3^2 u_3 = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

Здесь $A_{ij}^{(k)}$ (*i,j=1,2,3; k=0,1,2*) – операторы, причем

$$
\begin{aligned}
&A_{11}^{(0)} = b_{11}\partial_1^2 + 2b_{16}\partial_1\partial_2 + b_{66}\partial_2^2 + \omega_1^2,\\
&A_{21}^{(0)} = A_{12}^{(0)} = b_{16}\partial_1^2 + (b_{12} + b_{66})\partial_1\partial_2 + b_{26}\partial_2^2,\\
&A_{22}^{(0)} = b_{66}\partial_1^2 + 2b_{26}\partial_1\partial_2 + b_{22}\partial_2^2 + \omega_1^2,\\
&A_{33}^{(0)} = b_{55}\partial_1^2 + 2b_{45}\partial_1\partial_2 + b_{44}\partial_2^2 + \omega_1^2,\\
&A_{13}^{(1)} = A_{31}^{(1)} = (b_{13} + b_{55})\partial_1 + (b_{45} + b_{36})\partial_2,\\
&A_{32}^{(1)} = A_{23}^{(1)} = (b_{36} + b_{45})\partial_1 + (b_{44} + b_{23})\partial_2,\\
&A_{11}^{(2)} = b_{55}, \quad A_{12}^{(2)} = A_{21}^{(2)} = b_{45},\\
&A_{22}^{(2)} = b_{44}, \quad A_{33}^{(2)} = b_{33},\\
&\omega_1^2 = \rho^0\omega^2, \quad \omega \text{ - круговая частота.}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Горизонтальная круговая полость радиуса R проведена вдоль оси Ox_3 и имеет поперечное сечение с контуром Γ, описываемым функцией

$$z = \tilde{\omega}(\zeta) = R\zeta, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \zeta = \rho e^{i\theta} \tag{1.10}$$

Предполагается, что в транстропном массиве в плоскости поперечного сечения полости вдоль направления, задаваемого единичным вектором $\vec{n}=(n_1, n_2)$, падает стационарная упругая волна. Фронт волны параллелен оси полости Ox_3, сама волна поляризована в плоскости поперечного сечения выработок в случае рассмотрения PP-, SV-волн и параллельно оси Ox_3 в случае SH-волн. Вид волны может быть представлен следующим выражением

$$\overline{u} = \overline{u}^* e^{-i\omega t} \tag{1.11}$$

где $\overline{u}^*$ - амплитуда волны, описываемая выражениями

$$\overline{u}^* = \overline{U}^* \exp[i\overline{k}\ (n_1x_1 + n_2x_2)] = \overline{U}^* \exp[i\,(k_1x_1 + k_2x_2)] \tag{1.12}$$

Здесь ω - частота волны, $\overline{k}$ - волновой вектор, n_1, n_2 – направляющие косинусы угла падения волны α - угла между осью Ox_1 и вектором $\vec{n}$ (см. рис. 1).

В случае падения продольных и поперечных волн (PP-, SV-) можно рассмотреть состояние плоской деформации, в этом случае дифракционное поле характеризуется составляющими перемещений в

плоскости поперечного сечения полости, т.е. $\overline{u}_p = (u_1, u_2)$. Краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (1.7) с учетом, что все составляющие перемещений, кроме (u_1, u_2), равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x_1,x_2) в плоскости поперечного сечения полости. Тогда для заглубленной одиночной полости в уравнениях (1.8) ненулевыми остаются лишь члены

$$\begin{cases} A_{11}^{(0)} u_1 + A_{12}^{(0)} u_2 = 0, \\ A_{21}^{(0)} u_1 + A_{22}^{(0)} u_2 = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

или

$$\begin{cases} (b_{11}\partial_1^2 + 2b_{16}\partial_1\partial_2 + b_{66}\partial_2^2 + \omega_1^2)u_1 + (b_{16}\partial_1^2 + (b_{12}+b_{66})\partial_1\partial_2 + b_{26}\partial_2^2)u_2 = 0 \\ (b_{16}\partial_1^2 + (b_{12}+b_{66})\partial_1\partial_2 + b_{26}\partial_2^2)u_1 + (b_{66}\partial_1^2 + 2b_{26}\partial_1\partial_2 + b_{22}\partial_2^2 + \omega_1^2)u_2 = 0 \end{cases}$$

В случае дифракции продольно-поперечных волн дифференциальные уравнения вида (1.13) удобней представить в матричной форме, а именно[119,120]:

$$(B_0\partial_1^2 + B_1\partial_1\partial_2 + B_2\partial_2^2 + B_3)\overline{u}_p = 0, \tag{1.13*}$$

где

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{16} \\ b_{16} & b_{66} \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 2b_{16} & b_{12}+b_{66} \\ b_{12}+b_{66} & 2b_{26} \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} b_{66} & b_{26} \\ b_{26} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 \end{pmatrix}, \ \overline{u}_p = \{u_1, u_2\}$$

При падении сдвиговых SH-волн рассматривается антиплоская деформация полости, а дифракционное поле, в этом случае, характеризуется амплитудными составляющими перемещений $u_3(x_1,x_2)$ в осевом направлении. В данном случае краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (1.7) с учетом, что все составляющие перемещений, кроме u_3 , равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек

(x_1, x_2) в плоскости поперечного сечения полости. Тогда в уравнениях (1.8) ненулевым остается лишь член [121,122]

$$A_{33}^{(0)} u_3 = 0,$$

т.е.

$$\{\partial_1^2 + 2(b_{45}/b_{55})\partial_1\partial_2 + (b_{44}/b_{55})\partial_2^2 + \omega_0^2\}\, u_3(x_1, x_2) = 0\,, \tag{1.14}$$

Коэффициенты b_{ij} (i,j=1,6) в (1.13),(1.14)– упругие коэффициенты, определяемые формулами (1.2), $\omega_0^2 = \omega_1^2 \rho R^2 / b_{55}$, $u_1(x_1,x_2)$, $u_2(x_1,x_2)$, $u_3(x_1,x_2)$ –амплитудные составляющие перемещений в отраженной волне, отнесенные к радиусу R полости, определяющему форму контура.

Волновой вектор $\bar{k}$ находится из следующих соображений. Обозначим через функцию Ψ гармоническую волну:

$$\Psi = U_a^* \exp[ik\,((n_1 x_1 + n_2 x_2) - Vt)], \tag{1.15}$$

Здесь V-скорость волны. Из кинематических уравнений Коши можно получить соотношения для деформаций через функцию Ψ в виде

$$\varepsilon_{11} = ikn_1(\partial_\Psi u_1)\cdot\Psi\,,\ \varepsilon_{22} = ikn_2(\partial_\Psi u_2)\cdot\Psi\,,\ \varepsilon_{33} = ikn_3(\partial_\Psi u_3)\cdot\Psi\,,$$
$$\varepsilon_{12} = ik(n_2\partial_\Psi u_1 + n_1\partial_\Psi u_2)\cdot\Psi\,, \varepsilon_{13} = ik(n_3\partial_\Psi u_1 + n_1\partial_\Psi u_3)\cdot\Psi\,,$$
$$\varepsilon_{23} = ik(n_3\partial_\Psi u_2 + n_2\partial_\Psi u_3)\cdot\Psi$$

Теперь, подставляя данные формулы в уравнения движения (1.7), можно получить следующую систему уравнений, рассматривая выражения при старших степенях функции Ψ (Ψ^2):

$$\begin{aligned}
&(A-\rho V^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\Psi} + B\frac{\partial^2 u_2}{\partial\Psi} + C\frac{\partial^2 u_3}{\partial\Psi} = 0\\
&B\frac{\partial^2 u_1}{\partial\Psi} + (E-\rho V^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial\Psi} + F\frac{\partial^2 u_3}{\partial\Psi} = 0\\
&C\frac{\partial^2 u_1}{\partial\Psi} + F\frac{\partial^2 u_2}{\partial\Psi} + (Q-\rho V^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial\Psi} = 0
\end{aligned} \tag{1.16}$$

где

$$A = b_{11}n_1^2 + 2b_{16}n_1n_2 + b_{66}n_2^2 + b_{55}n_3^2;$$
$$B = b_{16}n_1^2 + (b_{12} + b_{16})n_1n_2 + b_{26}n_2^2 + b_{45}n_3^2;$$
$$C = (b_{13} + b_{55})n_1n_3 + (b_{36} + b_{45})n_2n_3;$$
$$E = b_{66}n_1^2 + 2b_{26}n_1n_2 + b_{22}n_2^2 + b_{44}n_3^2;$$
$$F = (b_{36} + b_{45})n_1n_3 + (b_{23} + b_{44})n_2n_3;$$
$$Q = b_{55}n_1^2 + 2b_{45}n_1n_2 + b_{44}n_2^2 + b_{33}n_3^2.$$

Нетривиальное решение однородной системы (1.16) имеет место, если ее определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} A-\rho V^2 & B & C \\ B & E-\rho V^2 & F \\ C & F & Q-\rho V^2 \end{vmatrix} = 0$$

Три собственных значения уравнения, полученного раскрытием этого определителя, представляют значения скоростей сейсмических волн вдоль направления $\vec{n}$. Это означает, что в трансверсально-изотропном теле в любом заданном направлении $\vec{n}$ распространяются три волны соответственно трем взаимно ортогональным векторам перемещения. Любое произвольное перемещение, поперечное перемещению со скоростью V_1, разлагается на две составляющие, распространяющиеся со скоростями V_2 и V_3 соответственно.

Учитывая то, что транстропный массив находится в условиях плоской деформации (в случае распространения PP-, SV- волн) и в условиях антиплоской деформации (распространение SH-волн), выражения для скоростей, а соответственно, и для волновых чисел, можно представить в виде[123]:

$$(Q-\rho V^2)((A-\rho V^2)(E-\rho V^2) - B^2) = 0$$

Отсюда, для случая SH-волн

$$V_3 = V_{SH} = \sqrt{\frac{Q}{\rho}},\ k_{SH} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{Q}}, \qquad (1.17a)$$

Для случая PP-, SV- волн

$$V_1 = V_{PP} = \sqrt{\frac{(E+A)+\sqrt{(E-A)^2+4B^2}}{2\rho}},$$

$$V_2 = V_{SV} = \sqrt{\frac{(E+A)-\sqrt{(E-A)^2+4B^2}}{2\rho}},$$

$$k_{PP} = \omega\sqrt{\frac{2\rho}{(E+A)+\sqrt{(E-A)^2+4B^2}}},$$

$$k_{SV} = \omega\sqrt{\frac{2\rho}{(E+A)-\sqrt{(E-A)^2+4B^2}}} \qquad (1.17б)$$

Теперь решим первую и вторую основные краевые задачи теории упругости, т.е. рассмотрим случаи, когда контур полости неподкреплен (свободен от нагрузок) и закреплен недеформируемой крепью, соответственно.

1.2 Решение первой основной задачи - контур одиночной круговой полости свободен от нагрузок

Предположим, что контур заглубленной круговой полости с радиусом R свободен от воздействия внешних нагрузок. Тогда граничные условия на контуре Γ запишутся в виде:

$$(\sigma_{nn}+\sigma^*_{nn})_\Gamma = 0,\ (\sigma_{n\tilde{\theta}}+\sigma^*_{n\tilde{\theta}})_\Gamma = 0,\quad (\sigma_{\tilde{\theta}3}+\sigma^*_{\tilde{\theta}3})_\Gamma = 0 \qquad (1.18)$$

Здесь σ^*_{nn}, $\sigma^*_{n\tilde{\theta}}$ - нормальные и касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1,n_2), обусловленные падающей волной растяжения-сжатия, в плоскости поперечного сечения полости; $\sigma^*_{\tilde{\theta}3}$ - касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1,n_2), обусловленные падающей SH-волной сдвига; σ_{nn}, $\sigma_{n\tilde{\theta}}$, $\sigma_{\tilde{\theta}3}$ - соответствующие амплитудные составляющие напряжений в отраженной волне.

Для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (1.13*) введем аффинное преобразование [124] вида

$$\{x_1^{(i)}\} = \{\xi_1^{(i)}\},\ \{x_2^{(i)}\} = -\mathrm{M}_1\{\xi_1^{(i)}\} + \mathrm{M}_2\{\xi_2^{(i)}\},\qquad i = 1,2$$

$$\{x_1^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \end{Bmatrix},\ \{x_2^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \end{Bmatrix},\ \{\xi_1^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \end{Bmatrix},\ \{\xi_2^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \xi_2^{(1)} \\ \xi_2^{(2)} \end{Bmatrix} \qquad (1.19)$$

где $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 + i\mathrm{M}_2$ - корень характеристического уравнения второй степени (причем $\mathrm{M}_2 > 0$ - положительно определенная симметрическая матрица):

$$B_0\mathrm{M}^2 + B_1\mathrm{M} + B_2 = 0,$$

т.е.

$$\mathrm{M}_1 = -\frac{1}{2}B_0^{-1}B_1,\quad \mathrm{M}_2 = \frac{1}{2}[4B_0^{-1}B_2 - (B_0^{-1}B_1)^2]^{1/2}. \qquad (1.20)$$

Тогда выполняется следующее преобразование

$$(B_0\{\partial_1^{(i)2}\} + B_1\{\partial_1^{(i)}\partial_2^{(i)}\} + B_2\{\partial_2^{(i)2}\}) = B_0[(E\{\partial_1^{(i)}\} - \mathrm{M}_1\{\partial_2^{(i)}\}) - i\mathrm{M}_2\{\partial_2^{(i)}\}]*$$
$$*[(E\{\partial_1^{(i)}\} - \mathrm{M}_1\{\partial_2^{(i)}\}) + i\mathrm{M}_2\{\partial_2^{(i)}\}] =$$
$$= \left[\{\frac{\partial}{\partial\xi_1^{(i)}}\} - i\{\frac{\partial}{\partial\xi_2^{(i)}}\}\right]\cdot\left[\{\frac{\partial}{\partial\xi_1^{(i)}}\} + i\{\frac{\partial}{\partial\xi_2^{(i)}}\}\right] = \{\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^{(i)2}}\} + \{\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^{(i)2}}\} \equiv \{\nabla^{(i)2}_{\xi_1\xi_2}\},$$

где $\nabla^{(i)2}_{\xi_1\xi_2}$ - вектор оператора Лапласа по векторам- переменным $\xi_1^{(i)}$ и $\xi_2^{(i)}$, $i = 1,2$.

Таким образом, дифференциальное уравнение (1.13*) сводится к уравнению Гельмгольца в координатах ($\xi_1^{(i)}$, $\xi_2^{(i)}$)

$$(E\{\nabla^{(i)2}_{\xi_1\xi_2}\} + B_0^{-1}B_3)\{u_i(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})\} = 0 \qquad (1.21)$$

Аналогично, для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (1.14) в случае распространения сдвиговых волн и антиплоской деформации введем аффинное преобразование [125] вида

$$x_1^{(3)} = \xi_1^{(3)},\ x_2^{(3)} = -\mu_1\xi_1^{(3)} + \mu_2\xi_2^{(3)}, \qquad (1.22)$$

где $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ (причем $\mu_2 > 0$) - корень характеристического уравнения второй степени

$$b_{55}\mu^2 + 2b_{45}\mu + b_{44} = 0,$$

т.е.

$$\mu_1 = -\frac{b_{45}}{b_{55}}, \quad \mu_3 = \frac{\sqrt{b_{44}b_{55} - b_{45}^2}}{b_{55}}. \tag{1.23}$$

Тогда выполняется следующее преобразование

$$(b_{55}\partial_1^2 + 2b_{45}\partial_1\partial_2 + b_{44}\partial_2^2) = b_{55}[(\partial_1 - \mu_1\partial_2) - i\mu_2\partial_2]*$$
$$*[(\partial_1 - \mu_1\partial_2) + i\mu_2\partial_2] =$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial\xi_1^{(3)}} - i\frac{\partial}{\partial\xi_2^{(3)}}\right]\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1^{(3)}} + i\frac{\partial}{\partial\xi_2^{(3)}}\right] = \frac{\partial^2}{\partial\xi_1^{(3)2}} + \frac{\partial^2}{\partial\xi_2^{(3)2}} \equiv \nabla^2_{\xi_1^{(3)},\xi_2^{(3)}},$$

где $\nabla^2_{\xi_1^{(3)},\xi_2^{(3)}}$ - оператор Лапласа по переменным $\xi_1^{(3)}$ и $\xi_2^{(3)}$.

Дифференциальное уравнение (1.14) сводится к уравнению Гельмгольца в координатах [126,127] ($\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}$)

$$(\nabla^2_{\xi_1^{(3)},\xi_2^{(3)}} + \omega_0^2)u_3(\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}) = 0 \tag{1.24}$$

В общем случае, точки $O^{(i)}$, $i = 1,2,3$, являющиеся центрами локальных координатных систем $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}), i = 1,2,3$, при преобразовании (1.22) и (1.19) перейдут в точки $O_\xi^{(i)}$, $i = 1,2,3$. Их будем рассматривать как начало систем координат ($\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}$), $i = 1,2,3$ с осями, ориентированными по осям координат ($\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}$) и полярных координат ($r^{(i)}, \kappa^{(i)}$) с отчетом полярного угла $\kappa^{(i)}$ от оси $O^{(i)}\,\xi_1^{(i)}$.

Уравнения Гельмгольца вида (1.21) для перемещений $\overline{u}_p = \{u_1, u_2\}$ при распространении продольно-поперечных волн, в частном случае, когда упругие коэффициенты b_{16}=0, b_{26}=0, можно разделить, тогда получим 2 уравнения:

$$(\nabla^2_{\xi_1^{(1)}\xi_2^{(1)}} + \omega_1^2 / b_{11})u_1(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}) = 0\,,\ (\nabla^2_{\xi_1^{(2)}\xi_2^{(2)}} + \omega_1^2 / b_{66})u_2(\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}) = 0 \qquad (1.25)$$

Равенство нулю коэффициентов b_{16} и b_{26} приводит к ситуации, когда угол наклона плоскости изотропии φ становится равным $\pm\pi/2$, т.е. имеет случай горизонтального и вертикального расположения плоскости изотропии.

Решения уравнений в перемещениях $\overline{u} = \{u_i\} = \{u_1, u_2, u_3\}$ (1.25) и (1.24), в соответствии с принципом обобщенной суперпозиции, можно представить в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов $A_n^{(i)}, i = 1,2,3$ и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода [4,5,128]:

$$u_i = \sum_{(n)} A_n^{(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{in\kappa^{(i)}}\,,\ n = \overline{-\infty, +\infty}\,,\ i = 1,2,3 \qquad (1.26)$$

где

$$\omega_0^{(1)} = \omega_1 / \sqrt{b_{11}}\,,\ \omega_0^{(2)} = \omega_1 / \sqrt{b_{66}}\,,\ \omega_0^{(3)} = \omega_0$$

В выражениях (1.26) в качестве цилиндрической функции была взята функция Ханкеля 1-го рода, поскольку зависимость от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$, и решения поставленной задачи характеризуют волну, уходящую на бесконечность.

Соответствующие представлению перемещений $\overline{u} = \{u_i\}_{i=1}^3$, в виде (1.26) выражения для составляющих напряжений могут быть найдены из следующих соображений.

Так, в случае плоской деформации (распространения упругих волн растяжения-сжатия) уравнения обобщенного закона Гука (1.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = b_{11}\varepsilon_{11} + b_{12}\varepsilon_{22} + b_{16}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} = b_{12}\varepsilon_{11} + b_{22}\varepsilon_{22} + b_{26}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{12} = b_{16}\varepsilon_{11} + b_{26}\varepsilon_{22} + b_{66}\varepsilon_{12} \end{cases} \qquad (1.27)$$

А для случая антиплоской деформации, когда ненулевыми остаются лишь напряжения σ_{13}, σ_{23}, выражения (1.1) перепишутся в виде:

$$\begin{cases} \sigma_{23} = b_{44}\varepsilon_{23} + b_{45}\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{13} = b_{45}\varepsilon_{23} + b_{55}\varepsilon_{13}, \end{cases} \tag{1.28}$$

Применяя вышеизложенные преобразования, а также соотношения для перемещений (1.26), получим следующие выражения [129]:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{11}, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12}$$

$$\sigma_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)} A_n^{(i)}\omega_0^{(i)}[G_j^{(i)}H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(i)}r^{(i)})e^{i(n-1)\kappa^{(i)}} - \overline{G}_j^{(i)}H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(i)}r^{(i)})e^{i(n+1)\kappa^{(i)}}],$$

$$(j = \overline{1,3}) \tag{1.29}$$

$$\sigma_{k3} = \frac{1}{2}\sum_{(n)} A_n^{(3)}\omega_0^{(3)}[G_k^{(3)}H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(3)}r^{(3)})e^{i(n-1)\kappa^{(3)}} - \overline{G}_k^{(3)}H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(3)}r^{(3)})e^{i(n+1)\kappa^{(3)}}],$$

$$(k = \overline{1,2})$$

$$\begin{Bmatrix} G_j^{(1)} \\ j = \overline{1,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{16} \end{Bmatrix} + i\cdot(g_1^{(1)}\begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{16} \end{Bmatrix} + g_1^{(2)}\begin{Bmatrix} b_{16} \\ b_{26} \\ b_{66} \end{Bmatrix}),$$

$$\begin{Bmatrix} G_j^{(2)} \\ j = \overline{1,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{16} \\ b_{26} \\ b_{66} \end{Bmatrix} + i\cdot(g_2^{(1)}\begin{Bmatrix} b_{16} \\ b_{26} \\ b_{66} \end{Bmatrix} + g_2^{(2)}\begin{Bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{26} \end{Bmatrix}), \tag{1.29*}$$

$$\begin{Bmatrix} G_k^{(3)} \\ k = \overline{1,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{55} \\ b_{45} \end{Bmatrix} + i\cdot\mu_2^{-1}\cdot(\begin{Bmatrix} b_{45} \\ b_{44} \end{Bmatrix} + \mu_1\begin{Bmatrix} b_{55} \\ b_{45} \end{Bmatrix}),$$

где

$$\{g_i^{(1)}\} = diag(\mathrm{M}_2^{-1}\mathrm{M}_1), \quad \{g_i^{(2)}\} = diag(\mathrm{M}_2^{-1}), \quad i = 1,2$$

Здесь термин «*diag*» означает вектор из элементов главной диагонали соответствующей матрицы.

Теперь, используя выражение (1.19), (1.22) из (1.10) можно найти соотношение для точек, лежащих на контуре Γ:

$$\{r^{(i)}e^{i\kappa^{(i)}}\} = \{\eta_{10}^{(i)}\}\{e^{i\theta^{(i)}}\} + \{\eta_{20}^{(i)}\}\{e^{-i\theta^{(i)}}\} \tag{1.30}$$

где

$$\{\eta_{10}^{(i)}\} = a_0\{R^{(i)}\rho^{(i)}\}, \qquad \{\eta_{20}^{(i)}\} = b_0\{R^{(i)}\rho^{(i)}\} \tag{1.31}$$

$$a_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{M}_2^{-1}(\mathrm{M}_2 + i\mathrm{M}_1 + E), & \textit{если индекс } i = 1,2 \\ \dfrac{\mu_2 + i\mu_1 + 1}{2\mu_2}, & \textit{если индекс } i = 3 \end{cases},$$

$$b_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{M}_2^{-1}(\mathrm{M}_2 + i\mathrm{M}_1 - E), & \textit{если индекс } i = 1,2 \\ \dfrac{\mu_2 + i\mu_1 - 1}{2\mu_2}, & \textit{если индекс } i = 3 \end{cases}$$

Для представления комплексных потенциалов в выражениях (1.26), (1.29) на контуре круговой полости сформулируем и применим теорему сложения цилиндрических функций.

Пусть имеются две различные полярные системы координат (r_q, κ_q) и (r_k, κ_k) (рис.2), у которых полярные оси одинаково направлены. Координаты полюса O_k в q-й системе координат будут R_{kq}, κ_{kq}, так что выполняется [128]

$$z_q = R_{kq}e^{i\kappa_{kq}} + z_k .$$

Тогда выполняются соотношения

$$\begin{aligned} g_n(\alpha r_q)e^{in\kappa_q} &= \sum_{(p)} g_{n-p}(\alpha R_{kq})e^{i(n-p)\kappa_{kq}} J_p(\alpha r_k)e^{ip\kappa_k}, \quad r_k < R_{kq} \\ g_n(\alpha r_q)e^{in\kappa_q} &= \sum_{(p)} J_{n-p}(\alpha R_{kq})e^{i(n-p)\kappa_{kq}} g_p(\alpha r_k)e^{ip\kappa_k}, \quad r_k > R_{kq} \end{aligned} \tag{1.32}$$

Здесь символом «*g*» обозначена одна из цилиндрических функций.

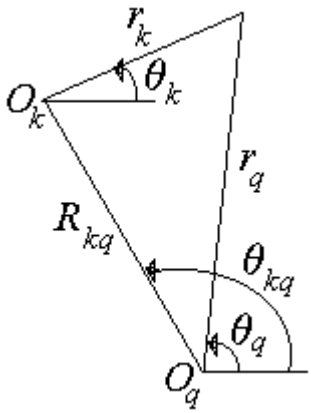


Рисунок 2 – Теорема сложения цилиндрических функций

Теперь, чтобы применить теорему сложения цилиндрических функций и «метод возмущения формы» [4,5] для соотношений (1.22), (1.19), (1.20), необходимо выполнение условия

$$|\eta_{10}^{(i)}| > |\eta_{20}^{(i)}| \tag{1.33}$$

Оно выполнено, поскольку матрица $M_2 > 0$ (положительно определенная), а параметр μ_3 больше нуля, т.е. $|a_0| > |b_0|$, из чего следует выполнение формулы (1.33).

Теперь можно записать представления комплексных потенциалов для точек на контуре Γ [130]:

$$H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{in\kappa^{(i)}} = \sum_{(p)} Q_{np}^{(i)} e^{ip\theta^{(i)}}, \; i = 1,2,3 \tag{1.34}$$

где

$$Q_{np}^{(i)} = \delta_{np} H_{\frac{n-p}{2}}^{(1)}(\omega_0 |\eta_{10}^{(i)}|) \tilde{\eta}_{10}^{(i)\frac{n+p}{2}} J_{\frac{n-p}{2}}(\omega_0 |\eta_{20}^{(i)}|) \tilde{\eta}_{20}^{(i)\frac{n+p}{2}} \tag{1.35}$$

Здесь

$$\widetilde{\eta}_{ko}^{(i)} = \eta_{k0}^{(i)} \,|\, \eta_{k0}^{(i)} \,|^{-1},\ k = 1,2;$$
$$\delta_{np} = 1,\ \textit{если } n + p - \textit{четное число},\qquad (1.36)$$
$$\delta_{np} = 0,\ \textit{если } n + p - \textit{нечетное число}.$$

Теперь перемещения u_i на контуре Γ представимы выражением

$$(u_i)_\Gamma = \sum_{(n,p)} A_n^{(i)} Q_{np}^{(i)} e^{ip\theta^{(i)}},\ i = 1,2,3 \qquad (1.37)$$

Для удобства использования граничных условий нам понадобятся выражения для нормальных и касательных напряжений на площадке с нормалью $(n_1,n_2)=(\cos\widetilde{\theta}\,,\sin\widetilde{\theta}\,)$, которые могут быть получены из следующих соотношений:

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = 0{,}5\cdot(\sigma_{11}+\sigma_{22}) + 0{,}5\cdot(\sigma_{11}-\sigma_{22})\cos 2\widetilde{\theta} + \sigma_{12}\sin 2\widetilde{\theta}, \\ \sigma_{n\widetilde{\theta}} = 0{,}5\cdot(\sigma_{22}-\sigma_{11})\sin 2\widetilde{\theta} + \sigma_{12}\cos 2\widetilde{\theta} \end{cases} \qquad (1.38а)$$

$$\sigma_{\widetilde{\theta}3} = \sigma_{13}\cos\widetilde{\theta} + \sigma_{23}\sin\widetilde{\theta} \qquad (1.38б)$$

где

$$e^{i\widetilde{\theta}^{(i)}} = (\widetilde{\omega}' \,|\, \widetilde{\omega}' \,|^{-1}) e^{i\theta^{(i)}}, \qquad (1.39)$$

$$(|\,\widetilde{\omega}'\,|)_\Gamma = |\,(R\zeta)'\,|_\Gamma = |\,R\,|. \qquad (1.40)$$

Для удобства вычислений контурных выражений граничные условия (1.18) можно переопределить в виде:

$$(|\,\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{nn} + |\,\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{nn}^*)_\Gamma = 0,\ (|\,\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{n\widetilde{\theta}} + |\,\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{n\widetilde{\theta}}^*)_\Gamma = 0\ ,$$
$$(|\,\widetilde{\omega}'|\,\sigma_{\widetilde{\theta}3} + |\,\widetilde{\omega}'|\,\sigma_{\widetilde{\theta}3}^*)_\Gamma = 0 \qquad (1.41)$$

Теперь можно определить контурные представления для напряжений, используя соотношения (1.29), (1.37), (1.38а), (1.38б), [130]:

$$(|\widetilde{\omega}'|^2\sigma_{nn})_\Gamma=\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n,p)}A_n^{(i)}\lambda_{np}^{(i)}e^{ip\theta^{(i)}},\ (|\widetilde{\omega}'|^2\sigma_{n\widetilde{\theta}})_\Gamma=\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n,p)}A_n^{(i)}\vartheta_{np}^{(i)}e^{ip\theta^{(i)}},$$
$$(|\widetilde{\omega}'|\sigma_{\widetilde{\theta}3})_\Gamma=\sum_{(n,p)}A_n^{(3)}\lambda_{npl}^{(3)}e^{ip\theta_l^{(3)}} \qquad (1.42)$$

где

$$\lambda_{np}^{(i)}=\frac{\omega_0^{(i)}R^2}{8}\{\overline{E}_1^{(i)}Q_{n-1,p-2}^{(i)}+E_1^{(i)}Q_{n-1,p+2}^{(i)}-\overline{I}_1^{(i)}Q_{n+1,p-2}^{(i)}-I_1^{(i)}Q_{n+1,p+2}^{(i)})+$$
$$+2(E_3^{(i)}Q_{n-1,p}^{(i)}-I_3^{(i)}Q_{n+1,p}^{(i)})\}$$
$$\vartheta_{np}^{(i)}=\frac{\omega_0^{(i)}R^2}{8}\{\overline{C}_1^{(i)}Q_{n-1,p-2}^{(i)}+C_1^{(i)}Q_{n-1,p+2}^{(i)}-\overline{D}_1^{(i)}Q_{n+1,p-2}^{(i)}-D_1^{(i)}Q_{n+1,p+2}^{(i)}\} \qquad (1.43)$$

$$E_1^{(i)}=(G_1^{(i)}-G_2^{(i)})+2i\,G_3^{(i)},\ I_1^{(i)}=(\overline{G}_1^{(i)}-\overline{G}_2^{(i)})+2i\,\overline{G}_3^{(i)},$$
$$E_3^{(i)}=(G_1^{(i)}+G_2^{(i)}),\ I_3^{(i)}=(\overline{G}_1^{(i)}+\overline{G}_2^{(i)}),i=1,2 \qquad (1.44)$$
$$C_1^{(i)}=2G_3^{(i)}+i\,(G_2^{(i)}-G_1^{(i)}),\ D_1^{(i)}=2\overline{G}_3^{(i)}+i\,(\overline{G}_2^{(i)}-\overline{G}_1^{(i)}),i=1,2$$

$$\lambda_{np}^{(3)}=\frac{\omega_0^{(3)}R}{4}(\overline{E}_1^{(3)}Q_{n-1,p-1}^{(3)}+E_1^{(3)}Q_{n-1,p+1}^{(3)}-\overline{I}_1^{(3)}Q_{n+1,p-1}^{(3)}-I_1^{(3)}Q_{n+1,p+1}^{(3)}), \qquad (1.45)$$

$$E_1^{(3)}=G_1^{(3)}+i\,G_2^{(3)},\ I_1^{(3)}=\overline{G}_1^{(3)}+i\,\overline{G}_2^{(3)} \qquad (1.46)$$

Выражения для перемещений и напряжений на контуре круговой полости в падающей волне $(u_i^*)_\Gamma\,(i=\overline{1,3})=(u_{PP},u_{SV},u_{SH})_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\sigma_{nn}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\sigma_{n\widetilde{\theta}}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|\sigma_{\widetilde{\theta}3}^*)_\Gamma$, можно найти, применяя формулы разложений экспоненциальных функций в гармонические ряды. Рассмотрим отдельно выражения для падающих волн вида PP-, SV-, SH.

Согласно (1.12)

$$(u_i^*)_\Gamma=(U_i^*e^{i\,(k_1^{(i)}x_1+k_2^{(i)}x_2)})_\Gamma,\ (i=\overline{1,3}) \qquad (1.47)$$

Используя соотношение (1.10), рассмотрим разложение на контуре Γ круговой полости:

$$(i(k_1^{(i)}x_1+k_2^{(i)}x_2))_\Gamma=iR(k_1^{(i)}\cos\theta_l+k_2^{(i)}\sin\theta_l)=iR\,k_{12}^{(i)}\sin(\theta_l+\delta_1^{(i)}),(i=\overline{1,3}).$$

Теперь, воспользовавшись формулой Якоби-Ангера [126]

$$e^{it\sin\varphi} = \sum_{(n)} J_n(t) e^{in\varphi} ,$$

где $J_n(t)$ – функция Бесселя, запишем разложение экспоненциальной функции на контуре полости в виде:

$$(e^{i\,(k_1^{(i)}x_1 + k_2^{(i)}x_2)})_{\Gamma} = e^{iR_l k_{12}^{(i)} \sin(\theta_l + \delta_1^{(i)})} = \sum_{(p)} J_p(R_l k_{12}^{(i)}) e^{ip(\theta_l + \delta_1^{(i)})} .$$

Здесь через $e^{i\,\delta_1^{(i)}}$ обозначено выражение

$$e^{i\,\delta_1^{(i)}} = (k_2^{(i)} + ik_1^{(i)})/k_{12}^{(i)}, \quad k_{12}^{(i)} = (k_1^{(i)2} + k_3^{(i)2})^{1/2}. \tag{1.48}$$

Обозначим через $Q_p^{(i)}$ соотношение

$$Q_p^{(i)} = J_p(R\,k_{12}^{(i)}) e^{ip\delta_1^{(i)}} ; \tag{1.49}$$

тогда

$$(u_i^*)_{\Gamma} = U_i^* \sum_{(p)} Q_p^{(i)} e^{i\,p\theta} . \tag{1.50}$$

Разложения для $(|\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{nn}^*)_{\Gamma}$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{n\widetilde{\gamma}}^*)_{\Gamma}$, $(|\widetilde{\omega}'|\,\sigma_{n3}^*)_{\Gamma}$ получаем, используя соотношения (1.29), (1.38а), (1.38б), (1.50) [123], т.е.

$$(|\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{nn}^*)_{\Gamma} = i\frac{R^2}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(p)} U_i^* \alpha_p^{(i)} e^{i\,p\theta}, \quad (|\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{n\widetilde{\theta}}^*)_{\Gamma} = i\frac{R^2}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(p)} U_i^* \beta_p^{(i)} e^{i\,p\theta},$$
$$(|\widetilde{\omega}'|\,\sigma_{\widetilde{\theta}3}^*)_{\Gamma} = (1/2)R\;U_3^* \sum_{(p)} \alpha_p^{(3)} e^{i\,p\theta} \tag{1.51}$$

где

$$\alpha_p^{(i)} = \overline{\chi}_1^{*(i)} Q_{p-2}^{(i)} + \chi_1^{*(i)} Q_{p+2}^{(i)} + 2\,\mathrm{Re}(\widetilde{\chi}_1^{*(i)}) \cdot Q_p^{(i)}, \quad i = 1,2$$
$$\alpha_p^{(3)} = \chi_1^{*(3)} Q_{p-1}^{(3)} + \widetilde{\chi}_1^{*(3)} Q_{p+1}^{(3)},$$
$$\beta_p^{(i)} = -i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) \cdot (Q_{p-2}^{(i)} - Q_{p+2}^{(i)}), \quad i = 1,2$$

$$
\begin{aligned}
&\chi_1^{*(1)} = (b_{11} - b_{12})k_1^{(1)} + (b_{16} - b_{26})k_2^{(1)} + 2i \cdot (b_{16}k_1^{(1)} + b_{66}k_2^{(1)}) \\
&\chi_1^{*(2)} = (b_{16} - b_{26})k_1^{(2)} + (b_{12} - b_{22})k_2^{(2)} + 2i \cdot (b_{66}k_1^{(2)} + b_{26}k_2^{(2)}) \\
&\widetilde{\chi}_1^{*(1)} = (b_{11} + b_{12})k_1^{(1)} + (b_{16} + b_{26})k_2^{(1)} + 2i \cdot (b_{16}k_1^{(1)} + b_{66}k_2^{(1)}) \\
&\widetilde{\chi}_1^{*(2)} = (b_{16} + b_{26})k_1^{(2)} + (b_{12} + b_{22})k_2^{(2)} + 2i \cdot (b_{66}k_1^{(2)} + b_{26}k_2^{(2)}) \\
&\chi_2^{*(1)} = 2(b_{16}k_1^{(1)} + b_{66}k_2^{(1)}) + i \cdot [(b_{12} - b_{11})k_1^{(1)} + (b_{26} - b_{16})k_2^{(1)}] \\
&\chi_2^{*(2)} = 2(b_{66}k_1^{(2)} + b_{26}k_2^{(2)}) + i \cdot [(b_{26} - b_{16})k_1^{(2)} + (b_{22} - b_{12})k_2^{(2)}] \\
&\chi_1^{*(3)} = (b_{45}k_2^{(3)} + b_{55}k_1^{(3)}) - i(b_{44}k_2^{(3)} + b_{45}k_1^{(3)}), \\
&\widetilde{\chi}_1^{*(3)} = (b_{45}k_2^{(3)} + b_{55}k_1^{(3)}) + i(b_{44}k_2^{(3)} + b_{45}k_1^{(3)}), \\
&\chi_2^{*(3)} = (b_{44}k_2^{(3)} + b_{45}k_1^{(3)}) + i(b_{45}k_2^{(3)} + b_{55}k_1^{(3)}), \\
&\widetilde{\chi}_2^{*(3)} = (b_{44}k_2^{(3)} + b_{45}k_1^{(3)}) - i(b_{45}k_2^{(3)} + b_{55}k_1^{(3)}),
\end{aligned}
\tag{1.52}
$$

Теперь для удовлетворения граничным условиям (1.41) применим метод приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $e^{ip\theta}$. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_n^{(i)}$ вида

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)} A_n^{(i)} \lambda_{np}^{(i)} = -i\frac{R^2}{4}\sum_{i=1}^{2} U_i^* \alpha_p^{(i)} \\
&\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)} A_n^{(i)} \vartheta_{np}^{(i)} = -i\frac{R^2}{4}\sum_{i=1}^{2} U_i^* \beta_p^{(i)} \\
&\sum_{(n)} A_n^{(3)} \lambda_{np}^{(3)} = -(i/2) R\ U_3^* \alpha_p^{(3)}
\end{aligned}
\tag{1.53}
$$

Данная система решается методом редукции. В силу того, что в настоящий момент не существует строгого обоснования подобного подхода к решению бесконечных систем, поэтому сходимость решения показывается численно.

1.3 Решение второй основной задачи – круговой контур полости закреплен недеформируемой обделкой

Часто для оптимизации и улучшения эксплуатационных свойств выработок и других подземных сооружений их подкрепляют различными обделками. Способы и формы подкрепления зависят от горно-геологического строения и физико-механических свойств горных массивов, в которых проведены подземные сооружения. Поэтому актуальными являются динамические контактные задачи для полостей (выработок и т.п.) с подкреплением в транстропном массиве.

Решим задачу о динамическом напряженном состоянии круговой полости глубокого заложения, подкрепленной недеформируемой обделкой (вторую основную задачу) при воздействии стационарных упругих продольно-поперечных и сдвиговых волн произвольной ориентации.

Поскольку контакт между недеформируемой обделкой и упругим транстропным массивом жесткий и непрерывный, то граничные условия на контуре круговой выработки Γ при $r=R$ могут быть записаны в виде

$$(u_i + u_i^*)_\Gamma = 0\,, \qquad i = 1,2,3 \tag{1.54}$$

Для решения второй основной задачи необходимо также проинтегрировать дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка (1.13*), (1.14) с граничными условиями (1.54). Вводя аффинное преобразование вида (1.19) для случая продольно-поперечных волн и (1.22) - для сдвиговых волн, можно дифференциальные уравнения (1.13*), (1.14) свести к виду уравнений Гельмгольца (1.24), (1.25) в координатах $(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}), i = 1,2,3$.

Решения уравнений (1.24), (1.25) в перемещениях ui , $i = 1,2,3$ в соответствии с принципом обобщенной суперпозиции, могут быть представлены в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов B_n и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода [131,126]

$$u_i = \sum_{(n)} B_n^{(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)})\, e^{in\kappa^{(i)}}\,,\ n = \overline{-\infty,+\infty}\,,\ i = 1,2,3 \tag{1.55}$$

где

$$\omega_0^{(1)} = \omega_1 / \sqrt{b_{11}}\,,\ \omega_0^{(2)} = \omega_1 / \sqrt{b_{66}}\,,\ \omega_0^{(3)} = \omega_0$$

Здесь в качестве цилиндрической функции была также взята функция Ханкеля 1-го рода, поскольку решения поставленной задачи характеризуют волну, уходящую и затухающую на бесконечности, а зависимость от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$.

Соответствующие представлению перемещения ui в виде (1.55) выражения для составляющих напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, σ_{13}, σ_{23} будут представлены в следующем виде:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{11}, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12}$$

$$\sigma_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)} A_n^{(i)}\omega_0^{(i)}[G_j^{(i)}H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(i)}r^{(i)})e^{i(n-1)\kappa^{(i)}} - \overline{G}_j^{(i)}H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(i)}r^{(i)})e^{i(n+1)\kappa^{(i)}}], (j=\overline{1,3}) \qquad (1.56)$$

$$\sigma_{k3} = \frac{1}{2}\sum_{(n)} A_n^{(3)}\omega_0^{(3)}[G_k^{(3)}H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(3)}r^{(3)})e^{i(n-1)\kappa^{(3)}} - \overline{G}_k^{(3)}H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(3)}r^{(3)})e^{i(n+1)\kappa^{(3)}}], (k=\overline{1,2})$$

где значения $G_j^{(i)}$, $i, j = 1,2,3$ определяются соотношениями (1.29*).

Для вычисления неизвестных коэффициентов B_n, пользуясь выражениями для точек, лежащих на контуре круговой полости Γ, (1.30), (1.31), а также условием (1.33), применяя теорему сложения цилиндрических функций, соотношение (1.55) на контуре Γ можно представить в виде:

$$(u_i)_\Gamma = \sum_{(n,p)} B_n^{(i)} Q_{np}^{(i)} e^{ip\theta^{(i)}} \quad , \; i = 1,2,3 \qquad (1.57)$$

где комплексные функции $Q_{np}^{(i)}$ вычисляются по формуле (1.35), (1.36).

Представления для перемещений на контуре в падающей волне $(u_i^*)_\Gamma$ $(i=\overline{1,3})$ также находятся с помощью формул разложений экспоненциальных функций в гармонические ряды:

$$(u_i^*)_\Gamma = U_i^* \sum_{(p)} Q_p^{(i)} e^{ip\theta} \; . \qquad (1.58)$$

где

$$Q_p^{(i)} = J_p(R\, k_{12}^{(i)}) e^{ip\delta_i^{(i)}} \qquad (1.59)$$

Теперь для удовлетворения граничным условиям (1.54) применим метод приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $e^{ip\theta}$. Из полученных равенств после соответствующих подстановок можно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $B_n^{(i)}$ в виде

$$\sum_{(n,p)} B_n^{(i)} Q_{np}^{(i)} = -U_i^* \sum_{(p)} Q_p^{(i)} \; , \; i = 1,2,3 \qquad (1.60)$$

которая решается методом редукции. Численной реализацией можно показать сходимость решений бесконечной системы уравнений по

мере удовлетворения условиям на контуре круговой полости и определения коэффициентов при неизвестных в уравнениях.

Далее для вычисления нормальных и касательных напряжений на контуре круговой полости можно также использовать выражения (1.29), (1.38а), (1.38б), (1.56), (1.57), с помощью которых получаются следующие выражения:

$$(|\widetilde{\omega}'|^2\sigma_{nn})_\Gamma=\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n,p)}B_n^{(i)}\lambda_{np}^{(i)}e^{ip\theta^{(i)}},\ (|\widetilde{\omega}'|^2\sigma_{n\theta})_\Gamma=\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n,p)}B_n^{(i)}\vartheta_{np}^{(i)}e^{ip\theta^{(i)}},$$
$$(|\widetilde{\omega}'|\sigma_{\theta 3})_\Gamma=\sum_{(n,p)}B_n^{(3)}\lambda_{npl}^{(3)}e^{ip\theta_j^{(3)}} \qquad (1.61)$$

где комплексные функции $\lambda_{np}^{(i)}$, $\vartheta_{np}^{(i)}$ определятся из соотношений (1.43) – (1.46).

Выражения для нормальных и касательных напряжений в падающей волне $(|\widetilde{\omega}'|^2\sigma_{nn}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\sigma_{n\theta}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|\sigma_{\theta 3}^*)_\Gamma$ определятся из (1.51), (1.52).

1.4 Некруговая полость глубокого заложения. Основные уравнения и соотношения

Многие капитальные и подготовительные подземные выработки, перегонные тоннели метрополитенов, гидротехнические и транспортные тоннели имеют некруговой профиль различного вида (рис.3). Это связано, прежде всего, с горно-геологическими условиями проявлений горного давления, типом и материалом крепежных конструкций, назначением сооружения и условиями его эксплуатации. Широко распространено в практике строительства придавать верхней части горных выработок сводообразную форму, так как при интенсивном проявлении вертикального горного давления необходимо обеспечивать ее устойчивость. Выработки с плоской подошвой и пониженным обратным сводом удобны для размещения проходческого и крепежного оборудования. С целью сокращения сроков строительства даже напорным гидротехническим тоннелям нередко придают подковообразный профиль. Силовой фактор - одно из условий, регламентирующих применение некруговых профилей подземных сооружений.

Влияние формы поперечного сечения незакрепленной выработки на ее устойчивость в условиях статического напряженного состояния массива, вызванного его собственным весом, а также при действии длинных сейсмических волн сжатия-растяжения и сдвигов для

штреков, квершлагов и диагональных выработок, описано в работах [3, 116].

Таким образом, представляет теоретический интерес и имеет практическое приложение исследование влияния стационарных упругих волн на транспортные тоннели, горные выработки и другие подземные сооружения некругового поперечного сечения глубокого заложения, как с неподкрепленным, так и подкрепленным недеформируемой обделкой контуром, проведенных в транстропном наклонно-слоистом массиве.

В данном разделе рассматривается одиночная горизонтальная некруговая полость, проведенная в транстропном массиве вдоль простирания плоскости изотропии.

Поставленные динамические задачи решаются в рядах с применением конформных преобразований областей, «метода возмущения формы» и метода разделения переменных [3, 116, 125].

Предположим вначале, что форма поперечного сечения горизонтальной полости, проведенной по простиранию наклонной плоскости изотропии массива, имеет ось симметрии и контур, описываемый параметрическими уравнениями вида

$$x_1 = R_1(\cos\theta + \varepsilon\sum_{k=2}^{5} a_k \cos k\theta)\,,$$

$$x_2 = R_1(c\sin\theta - \varepsilon\sum_{k=2}^{5} a_k \sin k\theta)\,, \qquad (1.62)$$

где ε -малый параметр геометрической природы, характеризующий в совокупности с параметрами c и a_k степень отклонения рассматриваемой поперечной формы выработок от эллиптической, r_1 – также коэффициент, определяющий форму выработок. Здесь $c=b/a$, a и b –полуоси эллипса. полярный угол θ при обходе контура профиля по часовой стрелке отсчитывается от оси симметрии профиля и меняется от 0 до 360^o. Такое задание контура удовлетворительно описывает поперечные профили, приведенные на рис.3(а-з).

Функция, конформно отображающая бесконечную анизотропную область с отверстием, контур которого задан уравнениями вида (1.62), на внешность единичного круга, имеет вид

$$x_1 + ix_2 = \tilde{\omega}(\zeta) = R\left[\frac{1+c}{2}\zeta + \frac{1-c}{2}\frac{1}{\zeta} + \varepsilon\chi(\zeta)\right], \qquad (1.63)$$

где

$$\chi(\zeta) = \sum_{k=2}^{5} a_k \frac{1}{\zeta^k}, \quad a_2 = 1. \tag{1.64}$$

Здесь $\zeta = \rho e^{i\theta}$, $\rho \geq 1$; на контуре $\rho = 1$, $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$. Семейства концентрических окружностей $\rho = const$ и лучей $\theta = const$ вне единичного круга в плоскости ζ образуют ортогональную систему ρ, θ в плоскости Ox_1x_2.

Отметим, что функция (1.63), конформно отображающая внешность указанных на рис.3 (а-з) профилей на внешность единичного круга, имеет вид

$$\widetilde{\omega}(\zeta) = R(\zeta + \sum_{m=1}^{N} d_m \zeta^{-m}) \tag{1.65}$$

Здесь коэффициенты d_m являются действительными числами (см. таблицу 6 для профилей а-з). В общем случае, когда контур полости имеет несимметричный профиль (см. рис.3 -и-н), функция, конформно отображающая внешность несимметричных профилей на внешность единичного круга будет также иметь вид (1.65) с той лишь разницей, что коэффициенты d_m будут являться комплексными числами [129,130], т.е. будут представимы в виде $d_m = d_{1m} + id_{2m}$.

В табл. 3 приведены коэффициенты d_m отображающих функций (1.65) для указанных на рис.3 профилей.

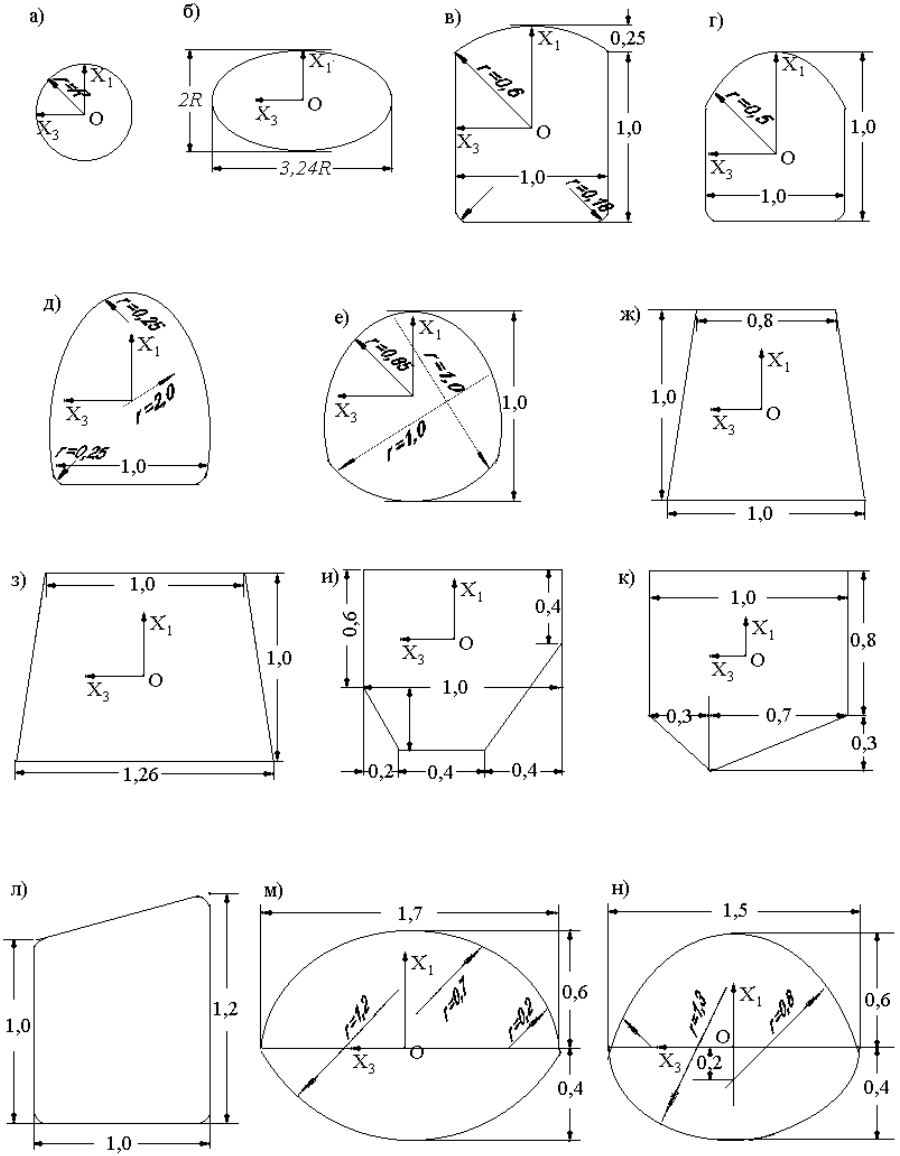
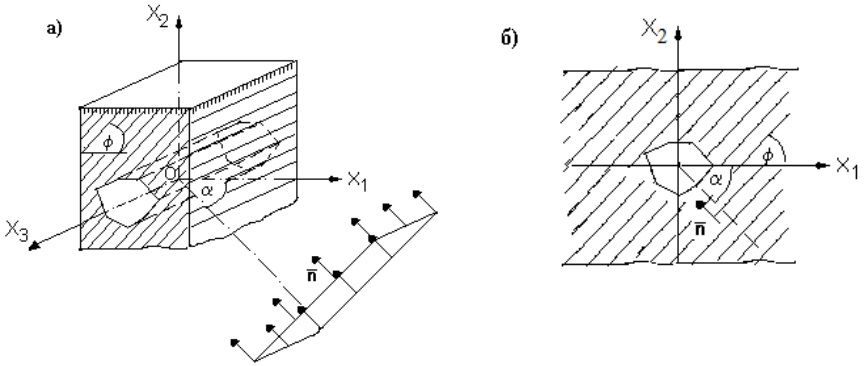


Рисунок 3 – Различные формы поперечного профиля горизонтальных выработок

Так же как и в случае круговой полости, в данном случае полости с некруговым контуром мелкослоистый массив горных пород моделируется упругим транстропным телом с плоскостью изотропии, совпадающей с наклонной к горизонту под углом φ плоскостью мелких слоев (рис.4).



φ – угол наклона плоскости изотропии; α – угол падения волны, $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении распространения упругой волны
а) общий вид; б) плоскость поперечного сечения

Рисунок 4 – Схема распространения упругих волн в транстропном массиве с некруговой полостью вкрест простирания наклонной плоской изотропии

Уравнения обобщенного закона Гука относительно декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ (рис.4), где ось Ox_2 направлена вертикально вверх, а оси Ox_1 и Ox_3 – соответственно горизонтально вкрест и по простиранию плоскости изотропии, запишутся в таком же виде как и выражения (1.1) с коэффициентами упругости $b_{ij}(i,j=1,2,3,4,5,6)$ (1.2), зависящими от упругих характеристик E_1, E_2, ν_1, ν_2, G_2 и угла φ.

Уравнения движения в отсутствии массовых сил в операторном виде описываются соотношениями (1.8), причем выражения для операторов берутся из соотношений (1.9).

Горизонтальная полость некругового сечения проведена вдоль оси Ox3 и имеет поперечное сечение с контуром Г, описываемым функцией (1.65).

Предполагается, что на поверхность полости в плоскости поперечного сечения вдоль направления, задаваемого единичным

вектором $\vec{n}$ =(n1, n2), падает плоская, поляризованная в плоскости поперечного сечения полости (случай PP-, SV- волн) и поляризованная вдоль оси Ox_3 (случай SH-волн) стационарная волна вида (1.11), где амплитуда волны также описывается выражением (1.12) (рис.4). Волновые числа k_{PP} , k_{SV} , k_{SH} находятся из соотношений (1.17).

Так же как и в случае круговой полости, дифракционное поле при падении волн растяжения-сжатия (PP-, SV-) берется в состоянии плоской деформации, и характеризуется составляющими перемещений в плоскости поперечного сечения выработок $\overline{u} = (u_1, u_2)$. Краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (1.7) с учетом, что все составляющие перемещений, кроме (u_1, u_2), равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x_1, x_2) в плоскости поперечного сечения полости. Тогда для полости глубокого заложения в случае дифракции упругих продольных и поперечных волн дифференциальные уравнения удобней представить в матричной форме вида (1.13*).

При падении SH-волн, также как и в случае круговой полости, рассматривается антиплоская деформация, а дифракционное поле характеризуется амплитудными составляющими перемещений $u_3(x_1,x_2)$ в осевом направлении. Краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (1.7) с учетом, что все составляющие перемещений, кроме u_3 , равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x_1, x_2) в плоскости поперечного сечения полости. Дифференциальное уравнение в этом случае представляет собой выражение вида (1.14), с коэффициентами из (1.2).

Ниже теоретически решаются первая и вторая основные задачи о динамическом напряженном состоянии глубоко заложенной горизонтальной некруговой полости в транстропном массиве, когда контур ее не закреплен (§1.5), закреплен недеформируемой обделкой (§1.6), а также приводится анализ закономерностей распределения динамических напряжений вблизи контуров выработок от воздействия упругих волн при различных исходных физических и геометрических параметрах.

Таблица 3 *– Значения коэффициентов отображающей функции внешности единичного круга на внешность произвольного контура полости*

Профиль	d_{1m}, при m, равном				i d_{2m}, при m, равном				R
	1	2	3	4	1	2	3	4	
а	0	0	0	0	0	0	0	0	r
б	-0,2500	0	0	0	- “ -	- “ -	- “ -	- “ -	1,3333b
в	0,0893	0,0477	-0,1137	0,0371	- “ -	- “ -	- “ -	- “ -	0,6406b
г	0,0067	0,0274	-0,0537	0,0203	- “ -	- “ -	- “ -	- “ -	0,5247b
д	0,1922	0,1117	-0,0334	0,0174	- “ -	- “ -	- “ -	- “ -	0,4315b
е	0	0,0850	-0,0819	0,0425	- “ -	- “ -	- “ -	- “ -	0,5446b
ж	0,0167	0,0580	-0,1405	-0,0109	- “ -	- “ -	- “ -	- “ -	0,5706b
з	-0,1547	0,0322	-0,1602	-0,0228	- “ -	- “ -	- “ -	- “ -	0,7298b
и	0,1023	0,04331	-0,06289	0,01931	0,06640	0,09691	0,00883	-0,02819	
к	0,00772	0,03647	-0,08897	-0,02508	0,02862	0,05874	-0,03037	-0,04549	
л	-0,07145	-0,06012	-0,13838	0	0,07634	-0,01603	0,03656	0	
м	-0,25170	0,07450	0,00120	-0,00810	0	0	0	0	
н	-0,20810	0,05470	0,00200	-0,00570	- “ -	- “ -	- “ -	- “ -	

1.5 Решение первой основной задачи - контур некруговой полости свободен от нагрузок

Предположим, что контур некруговой полости с радиусом R глубокого заложения свободен от воздействия внешних нагрузок. Тогда граничные условия на контуре Г запишутся в виде, аналогичном (1.18):

$$(\sigma_{nn}+\sigma_{nn}^{*})_{\Gamma}=0\,,\ (\sigma_{n\theta}+\sigma_{n\theta}^{*})_{\Gamma}=0\,,\ (\sigma_{\theta 3}+\sigma_{\theta 3}^{*})_{\Gamma}=0 \qquad (1.66)$$

Здесь σ_{nn}^{*}, $\sigma_{n\theta}^{*}$ - нормальные и касательные напряжения на площадке с нормалью (n1, n2), обусловленные падающей волной растяжения-сжатия, в плоскости поперечного сечения некруговой полости; $\sigma_{\theta 3}^{*}$ - касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1,n_2), обусловленные падающей сдвиговой волной (SH-); σ_{nn}, $\sigma_{n\theta}$, $\sigma_{\theta 3}$ - соответствующие амплитудные составляющие напряжений в отраженной волне.

Для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка вида (1.13*) и (1.14) вводятся аффинные преобразования [124] вида (1.19), (1.22). Величины $\mathrm{M}=\mathrm{M}_1+i\mathrm{M}_2\,(\mathrm{M}_2>0)$, $\mu=\mu_1+i\mu_2\,(\mu_2>0)$ - корни характеристических уравнений второй степени, причем,

$$\mathrm{M}_1=-\frac{1}{2}B_0^{-1}B_1,\quad \mathrm{M}_2=\frac{1}{2}[4B_0^{-1}B_2-(B_0^{-1}B_1)^2]^{1/2}. \qquad (1.67)$$

$$\mu_1=-\frac{b_{45}}{b_{55}},\quad \mu_3=\frac{\sqrt{b_{44}b_{55}-b_{45}^2}}{b_{55}}. \qquad (1.68)$$

Аффинные преобразования позволяют свести уравнения (1.13*) и (1.14) к уравнениям Гельмгольца вида (1.21), (1.24). С помощью рассмотрения частных случаев вертикальной и горизонтальной слоистости при распространении волн растяжения-сжатия (PP-,SV-) можно разделить уравнения (1.21) на два уравнения вида (1.25).

В общем случае, точки $O^{(i)}$, $i=1,2,3$, являющиеся центрами локальных координатных систем $(x_1^{(i)},x_2^{(i)}),i=1,2,3$, при преобразовании (1.19) и (1.22) перейдут в точки $O_{\xi}^{(i)}$, $i=1,2,3$. Их можно рассматривать как начало систем координат ($\xi_1^{(i)}$, $\xi_2^{(i)}$), $i=1,2,3$

с осями, ориентированными по осям координат ($\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}$) и полярных координат ($r^{(i)}, \kappa^{(i)}$) с отчетом полярного угла $\kappa^{(i)}$ от оси $O^{(i)}\ \xi_1^{(i)}$.

Решения уравнений в перемещениях $\bar{u} = \{u_i\} = \{u_1, u_2, u_3\}$ вида (1.25) и (1.24), в соответствии с принципом обобщенной суперпозиции можно представить в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов $A_n^{'(i)}, i = 1,2,3$ и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода [5,124, 125]

$$u_i = \sum_{(n)} A_n^{'(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{in\kappa^{(i)}}\ ,\ n = \overline{-\infty, +\infty}\ ,\ i = 1,2,3 \qquad (1.69)$$

где

$$\omega_0^{(1)} = \omega_1 / \sqrt{b_{11}}\ ,\ \omega_0^{(2)} = \omega_1 / \sqrt{b_{66}}\ ,\ \omega_0^{(3)} = \omega_0$$

Соответствующие представлению перемещений $\bar{u} = \{u_i\}_{i=1}^3$ в виде (1.69) выражения для составляющих напряжений могут быть найдены из следующих формул:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{11},\quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22},\quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12}$$

$$\sigma_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)} A_n^{'(i)}\omega_0^{(i)}[G_j^{(i)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa^{(i)}} - \overline{G}_j^{(i)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa^{(i)}}],$$

$$(j = \overline{1,3}) \qquad (1.70)$$

$$\sigma_{k3} = \frac{1}{2}\sum_{(n)} A_n^{'(3)}\omega_0^{(3)}[G_k^{(3)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r^{(3)}) e^{i(n-1)\kappa^{(3)}} - \overline{G}_k^{(3)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r^{(3)}) e^{i(n+1)\kappa^{(3)}}],$$

$$(k = \overline{1,2})$$

где значения $G_j^{(i)}$, $i, j = 1,2,3$ определяются соотношениями (1.29*).

Теперь, используя выражения (1.19), (1.22) из (1.65) можно найти соотношение для точек, лежащих на контуре Γ:

$$\{r^{(i)} e^{i\kappa^{(i)}}\} = \{\eta_{10}^{(i)}\}\{e^{i\theta^{(i)}}\} + \{\eta_{20}^{(i)}\}\{e^{-i\theta^{(i)}}\} + \sum_{m=1}^{N}\{\eta_{2m}^{(i)}\}\{e^{im\theta^{(i)}}\} + \{\eta_{1m}^{(i)}\}\{e^{-im\theta^{(i)}}\} \qquad (1.71)$$

где

$$\{\eta_{10}^{(i)}\} = a_0\{R^{(i)}\rho^{(i)}\}\ ,\qquad \{\eta_{20}^{(i)}\} = b_0\{R^{(i)}\rho^{(i)}\}\ ,$$

$$\{\eta_{1m}^{(i)}\} = a_0\{R^{(i)} d_m (\rho^{(i)})^{-m}\},\ \{\eta_{2m}^{(i)}\} = b_0\{R^{(i)} \overline{d}_m (\rho^{(i)})^{-m}\}, \tag{1.72}$$

$i = 1,2,3,\ m = \overline{1,N}$

$$a_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{M}_2^{-1}(\mathrm{M}_2 + i\mathrm{M}_1 + E), & \text{если индекс } i = 1,2 \\ \dfrac{\mu_2 + i\mu_1 + 1}{2\mu_2}, & \text{если индекс } i = 3 \end{cases},$$

$$b_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{M}_2^{-1}(\mathrm{M}_2 + i\mathrm{M}_1 - E), & \text{если индекс } i = 1,2 \\ \dfrac{\mu_2 + i\mu_1 - 1}{2\mu_2}, & \text{если индекс } i = 3 \end{cases} \tag{1.73}$$

Для представления комплексных потенциалов в выражениях (1.69), (1.70) на некруговом контуре полости необходимо использовать «метод возмущения формы» [11] и теорему сложения цилиндрических функций (1.32) [35]. Чтобы применить теорему сложения цилиндрических функций требуется выполнение условий:

$$|\eta_{10}^{(i)}| > |\eta_{20}^{(i)}| \tag{1.74а}$$

$$|\eta_{20}^{(i)}|\,|\eta_{21}^{(i)}|\,|x...x|\,|\eta_{2N}^{(i)}|\,|\eta_{11}^{(i)}|\,|x...x|\,|\eta_{1N}^{(i)}| < |\eta_{10}^{(i)}| \tag{1.74б}$$

Первое условие (1.74а) выполнено, поскольку матрица $\mathrm{M}_2 > 0$ (положительно определенная), а параметр μ_3 больше нуля, т.е. $|a_0| > |b_0|$, отсюда $|\eta_{10}^{(i)}| > |\eta_{20}^{(i)}|$.

Второе условие (1.74б) выполнено, так как рассматриваемая задача является внешней, т.е. параметр $\rho > 1$, отсюда процесс - сходящийся и имеет место соотношение

$$|\eta_{20}^{(i)}|\,|b_0^N a_0^N d_1 \overline{d}_1 x...x d_N \overline{d}_N|\cdot\rho^{\,2(-1-2-3-...-N)} < |a_0 R\ |\cdot\rho$$

Выполнение условий (1.74а) и (1.74б) позволяет последовательно применить теорему сложения цилиндрических функций, которые можно записать для точек, лежащих на контуре Γ в

виде [125,126] (гладкость границы контура дает нам возможность это сделать):

$$H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{im\kappa^{(i)}} = \sum_{(p)} Q_{np}^{\gamma(i)} e^{ip\theta^{(i)}}, \; i = 1,2,3 \tag{1.75}$$

где

$$\begin{aligned} Q_{np}^{\gamma(i)} &= \sum_{(\nu_{N1})} \cdots \sum_{(\nu_1)} \cdot \sum_{(\tilde{\nu}_{N1})} \cdots \sum_{(\tilde{\nu}_1)} \delta_{np\tau_1} H^{(1)}_{\frac{n+p-\tau_1}{2}}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{10}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{10}^{(i)\frac{(n+p-\tau_1)}{2}} \times \\ &\times J_{\frac{n-p+\tau_2}{2}}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{20}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{20}^{(i)\frac{(n-p+\tau_2)}{2}} \prod_{j=1}^{N} J_{(\nu_j - \tilde{\nu}_j)}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{2j}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{2j}^{(i)(\nu_j - \tilde{\nu}_j)} \times \\ &\times J_{\tilde{\nu}_j}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{1j}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{1j}^{(i)\tilde{\nu}_j} \end{aligned} \tag{1.76}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\tilde{\eta}_{kj}^{(i)} = \eta_{kj}^{(i)} \mid \eta_{kj}^{(i)} \mid^{-1}, \; k = 1,2; \; j = 0,...,N, \\ &\tau_1 = \sum_{m=1}^{N} [(m+1)\nu_m - 2m\tilde{\nu}_m], \; \tau_2 = \sum_{m=1}^{N} [(m-1)\nu_m - 2m\tilde{\nu}_m] \\ &\delta_{np\tau_1} = 1, \textit{ если } n + p - \tau_1 - \textit{четное число}, \\ &\delta_{np\tau_1} = 0, \textit{ если } n + p - \tau_1 - \textit{нечетное число}. \end{aligned} \tag{1.77}$$

Теперь перемещения u_i , $i = 1,2,3$ на контуре Γ представимы выражением

$$(u_i)_\Gamma = \sum_{(n,p)} A_n^{\gamma(i)} Q_{np}^{\gamma(i)} e^{ip\theta^{(i)}}, \; i = 1,2,3 \tag{1.78}$$

Для удобства использования граничных условий нам понадобятся выражения (1.38а,б) для нормальных и касательных напряжений на площадке с нормалью $(n_1,n_2)=(\cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta})$, где

$$e^{i\tilde{\theta}^{(i)}} = (\tilde{\omega}' \mid \tilde{\omega}' \mid^{-1}) e^{i\theta^{(i)}}, \tag{1.79}$$

$$|\widetilde{\omega}'|=|R|\cdot|[\rho^2+0{,}5*\sum_{m,k=1}^{N_*}\rho^{-m-k}mk(\overline{d}_m d_k e^{i(m-k)\theta}+\overline{d}_k d_m e^{i(k-m)\theta})-$$
$$-\sum_{m=1}^{N}m\rho^{-m+1}(\overline{d}_m e^{i(m+1)\theta}+d_m e^{-i(m+1)\theta})]^{1/2}|$$
$$(|\widetilde{\omega}'|)_{\Gamma}=|R|\cdot|[1+0{,}5*\sum_{m,k=1}^{N}mk(\overline{d}_m d_k e^{i(m-k)\theta}+\overline{d}_k d_m e^{i(k-m)\theta})- \quad (1.80)$$
$$-\sum_{m=1}^{N}m(\overline{d}_m e^{i(m+1)\theta}+d_m e^{-i(m+1)\theta})]^{1/2}|$$

Граничные условия (1.66) можно переопределить в виде (1.41).

Теперь можно найти контурные представления для напряжений, используя соотношения (1.78), (1.70), (1.69), (1.38а), (1.38б), [124, 125]:

$$(|\widetilde{\omega}'|^2\sigma_{nn})_{\Gamma}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n,p)}A_n^{'(i)}\lambda_{np}^{'(i)}e^{ip\theta^{(i)}},$$
$$(|\widetilde{\omega}'|^2\sigma_{n\widetilde{\theta}})_{\Gamma}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n,p)}A_n^{'(i)}\vartheta_{np}^{'(i)}e^{ip\theta^{(i)}}, \quad (1.81)$$
$$(|\widetilde{\omega}'|\sigma_{\widetilde{\theta}3})_{\Gamma}=\sum_{(n,p)}A_n^{'(3)}\lambda_{npl}^{'(3)}e^{ip\theta_l^{(3)}}$$

где

$$\lambda_{np}^{(i)}=\frac{\omega_0^{(i)}R^2}{8}\{\overline{E}_1^{(i)}Q_{n-1,p-2}^{(i)}+E_1^{(i)}Q_{n-1,p+2}^{(i)}-\overline{I}_1^{(i)}Q_{n+1,p-2}^{(i)}-I_1^{(i)}Q_{n+1,p+2}^{(i)})$$
$$+2(E_3^{(i)}Q_{n-1,p}^{(i)}-I_3^{(i)}Q_{n+1,p}^{(i)})-2\sum_{m=1}^{N}m[\overline{d}_m(E_3^{(i)}Q_{n-1,p-m-1}^{(i)}+E_1^{(i)}Q_{n-1,p-m+1}^{(i)}-$$
$$-I_3^{(i)}Q_{n+1,p-m-1}^{(i)}-I_1^{(i)}Q_{n+1,p-m+1}^{(i)})+d_m(E_3^{(i)}Q_{n-1,p+m+1}^{(i)}+\overline{E}_1^{(i)}Q_{n-1,p+m-1}^{(i)}$$
$$-I_3^{(i)}Q_{n+1,p+m+1}^{(i)}-\overline{I}_1^{(i)}Q_{n+1,p+m-1}^{(i)})]+\sum_{m,k=1}^{N}mk[\overline{d}_m\overline{d}_k(E_1^{(i)}Q_{n-1,p-m-k}^{(i)}- \quad (1.82а)$$
$$-I_1^{(i)}Q_{n+1,p-m-k}^{(i)})+d_m d_k(\overline{E}_1^{(i)}Q_{n-1,p+m+k}^{(i)}-\overline{I}_1^{(i)}Q_{n+1,p+m+k}^{(i)})+$$
$$+\overline{d}_m d_k(\overline{E}_2^{(i)}Q_{n-1,p-m+k}^{(i)}-\overline{I}_2^{(i)}Q_{n+1,p-m+k}^{(i)})+d_m\overline{d}_k(E_2^{(i)}Q_{n-1,p+m-k}^{(i)}$$
$$-I_2^{(i)}Q_{n+1,p+m-k}^{(i)})]\}$$

$$\vartheta_{np}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R^2}{8}\{\overline{C}_1^{(i)} Q_{n-1,p-2}^{(i)} + C_1^{(i)} Q_{n-1,p+2}^{(i)} - \overline{D}_1^{(i)} Q_{n+1,p-2}^{(i)} - D_1^{(i)} Q_{n+1,p+2}^{(i)}$$

$$-2\sum_{m=1}^{N} m[\overline{d}_m (C_1^{(i)} Q_{n-1,p-m+1}^{(i)} - D_1^{(i)} Q_{n+1,p-m+1}^{(i)}) + d_m (\overline{C}_1^{(i)} Q_{n-1,p+m-1}^{(i)} -$$

$$-\overline{D}_1^{(i)} Q_{n+1,p+m-1}^{(i)})] + \sum_{m,k=1}^{N} [\overline{d}_m \overline{d}_k (C_1^{(i)} Q_{n-1,p-m-k}^{(i)} - D_1^{(i)} Q_{n+1,p-m-k}^{(i)}) + \quad (1.82б)$$

$$+ d_m d_k (\overline{C}_1^{(i)} Q_{n-1,p+m+k}^{(i)} - \overline{D}_1^{(i)} Q_{n+1,p+m+k}^{(i)}) + \overline{d}_m d_k (-C_2^{(i)} Q_{n-1,p-m+k}^{(i)} +$$

$$+ D_2^{(i)} Q_{n+1,p-m+k}^{(i)}) + d_m \overline{d}_k (C_2^{(i)} Q_{n-1,p+m-k}^{(i)} - D_2^{(i)} Q_{n+1,p+m-k}^{(i)})]\}$$

$$E_1^{(i)} = (G_1^{(i)} - G_2^{(i)}) + 2i\, G_3^{(i)},\ I_1^{(i)} = (\overline{G}_1^{(i)} - \overline{G}_2^{(i)}) + 2i\, \overline{G}_3^{(i)},$$
$$E_2^{(i)} = (G_1^{(i)} + G_2^{(i)}) + 2i\, G_3^{(i)},\ I_2^{(i)} = (\overline{G}_1^{(i)} + \overline{G}_2^{(i)}) + 2i\, \overline{G}_3^{(i)}, \quad (1.83а)$$
$$E_3^{(i)} = (G_1^{(i)} + G_2^{(i)}),\ I_3^{(i)} = (\overline{G}_1^{(i)} + \overline{G}_2^{(i)}).$$
$$i = 1,2$$

$$C_1^{(i)} = 2G_3^{(i)} + i\,(G_2^{(i)} - G_1^{(i)}),\ D_1^{(i)} = 2\overline{G}_3^{(i)} + i\,(\overline{G}_2^{(i)} - \overline{G}_1^{(i)}),$$
$$C_2^{(i)} = i \cdot (G_2^{(i)} - G_1^{(i)}),\ D_2^{(i)} = i \cdot (\overline{G}_2^{(i)} - \overline{G}_1^{(i)}), \quad (1.83б)$$
$$i = 1,2$$

$$\lambda_{npl}^{(3)} = \frac{\omega_0^{(3)} R_l}{4}\{(\overline{E}_1^{(3)} Q_{n-1,p-1,l}^{(3)} + E_1^{(3)} Q_{n-1,p+1,l}^{(3)} - \overline{I}_1^{(3)} Q_{n+1,p-1,l}^{(3)}$$

$$-I_1^{(3)} Q_{n+1,p+1,l}^{(3)}) + \sum_{m=1}^{N} m(-\overline{d}_{ml} E_1^{(3)} Q_{n-1,p-m,l}^{(3)} - d_{ml} \overline{E}_1^{(3)} Q_{n-1,p+m,l}^{(3)} + \quad (1.84)$$

$$+ \overline{d}_{ml} I_1^{(3)} Q_{n+1,p-m,l}^{(3)} + d_{ml} \overline{I}_1^{(3)} Q_{n+1,p+m,l}^{(3)})\}$$

$$E_1^{(3)} = G_1^{(3)} + i\, G_2^{(3)},\ I_1^{(3)} = \overline{G}_1^{(3)} + i\, \overline{G}_2^{(3)}$$
$$E_2^{(3)} = G_2^{(3)} + i\, G_1^{(3)},\ I_2^{(3)} = \overline{G}_2^{(3)} + i\, \overline{G}_1^{(3)} \quad (1.85)$$

$$(|\widetilde{\omega}'|^2)_{\Gamma_i} = |R|^2 \cdot |1 + 0{,}5 * \sum_{m,k=1}^{N} mk(\overline{d}_m d_k e^{i(m-k)\theta} + \overline{d}_k d_m e^{i(k-m)\theta}) -$$
$$- \sum_{m=1}^{N} m(\overline{d}_m e^{i(m+1)\theta} + d_m e^{-i(m+1)\theta})| \quad (1.86)$$

Выражения для перемещений и напряжений на контуре полости в падающей волне $(u_i^*)_\Gamma\,(i=\overline{1,3})=(u_{PP},u_{SV},u_{SH})_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{nn}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{n\theta}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|\,\sigma_{\theta 3}^*)_\Gamma$, можно найти, применяя формулы разложений экспоненциальных функций в гармонические ряды:

$$(u_i^*)_\Gamma = U_i^*\sum_{(p)} Q_p^{(i)} e^{ip\theta} \tag{1.87}$$

$$(|\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{nn}^*)_\Gamma = i\frac{R^2}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(p)} U_i^*\alpha_p^{(i)} e^{ip\theta},$$

$$(|\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{n\widetilde{\theta}}^*)_\Gamma = i\frac{R^2}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(p)} U_i^*\beta_p^{(i)} e^{ip\theta}, \tag{1.88}$$

$$(|\widetilde{\omega}'|\,\sigma_{\widetilde{\theta}3}^*)_\Gamma = (i/2)R\;U_3^*\sum_{(p)}\alpha_p^{(3)} e^{ip\theta}$$

где

$$Q_p^{(i)} = \sum_{(\nu_1)}\cdots\sum_{(\nu_{N_l})}\sum_{(\widetilde{\nu}_1)}\cdots\sum_{(\widetilde{\nu}_{N_l})}[J_{p-\widetilde{\delta}}(Rk_{12}^{(i)})e^{i(p-\widetilde{\delta})\delta_1}\times\prod_{m=1}^{N}\{J_{\nu_m}(R\,d_{1m}k_{12}^{(i)})e^{i\nu_m\delta_2}\times$$
$$\times J_{\widetilde{\nu}_m}(R\,d_{2m}k_{12}^{(i)})e^{i\widetilde{\nu}_m\delta_1}\}, \qquad \widetilde{\delta}=\sum_{m=1}^{N} m(\nu_m+\widetilde{\nu}_m), \tag{1.89}$$

В случае симметрических контуров выработок выражения для $Q_p^{(i)}$ запишутся как

$$Q_p^{(i)} = \sum_{(\nu_1)}\cdots\sum_{(\nu_{N_l})}[J_{p-\widetilde{\delta}}(Rk_{12}^{(i)})e^{i(p-\widetilde{\delta})\delta_1}\times\prod_{m=1}^{N}\{J_{\nu_m}(R_l d_{1m}k_{12}^{(i)})e^{i\nu_m\delta_2}\}], \quad \widetilde{\delta}=\sum_{m=1}^{N} m\nu_m, \tag{1.89*}$$

$$\alpha_{pl}^{(i)} = \overline{\chi}_1^{*(i)}Q_{p-2,l}^{(i)} + \chi_1^{*(i)}Q_{p+2,l}^{(i)} + 2\,\mathrm{Re}(\widetilde{\chi}_1^{*(i)})\cdot Q_{pl}^{(i)}, +2\sum_{m=1}^{N_l} m[-\overline{d}_{ml}(\mathrm{Re}(\widetilde{\chi}_1^{*(i)})Q_{p-m-1,l}^{(i)} +$$
$$+\chi_1^{*(i)}Q_{p-m+1,l}^{(i)}) - d_{ml}(\mathrm{Re}(\widetilde{\chi}_1^{*(i)})Q_{p+m+1,l}^{(i)} + \overline{\chi}_1^{*(i)}Q_{p+m-1,l}^{(i)})] +$$
$$+\sum_{m,k=1}^{N_l} mk[\overline{d}_{ml}\overline{d}_{kl}\cdot\chi_1^{*(i)}Q_{p-m-k,l}^{(i)} + d_{ml}d_{kl}\cdot\overline{\chi}_1^{*(i)}Q_{p+m+k,l}^{(i)} + \overline{d}_{ml}d_{kl}\cdot\overline{\widetilde{\chi}}_1^{*(i)}Q_{p-m+k,l}^{(i)} + \tag{1.90}$$
$$+d_{ml}\overline{d}_{kl}\cdot\widetilde{\chi}_1^{*(i)}Q_{p+m-k,l}^{(i)}], \quad i=1,2$$
$$\alpha_{pl}^{(3)} = \chi_1^{*(3)}Q_{p-1,l}^{(3)} + \widetilde{\chi}_1^{*(3)}Q_{p+1,l}^{(3)} - \sum_{m=1}^{N_l} m(\overline{d}_m\cdot\widetilde{\chi}_1^{*(3)}Q_{p-m,l}^{(3)} + d_m\cdot\chi_1^{*(3)}Q_{p+m,l}^{(3)})$$

$$\beta_p^{(i)} = -i\cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)})\cdot(Q_{p-2}^{(i)} - Q_{p+2}^{(i)}) - 2\sum_{m=1}^{N} m[\overline{d}_m \cdot \chi_2^{*(i)} Q_{p-m+1}^{(i)} +$$
$$+ d_m \cdot \overline{\chi}_2^{*(i)} Q_{p+m-1}^{(i)}] + \sum_{m,k=1}^{N} mk[\overline{d}_m \overline{d}_k \cdot \chi_2^{*(i)} Q_{p-m-k}^{(i)} + \qquad (1.91)$$
$$+ d_m d_k \cdot \overline{\chi}_2^{*(i)} Q_{p+m+k}^{(i)} - \overline{d}_m d_k \cdot i\cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) Q_{p-m+k}^{(i)} +$$
$$+ d_m \overline{d}_k \cdot i\cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) Q_{p+m-k}^{(i)}] \quad i = 1,2$$

$$\chi_1^{*(1)} = (b_{11} - b_{12})k_1^{(1)} + (b_{16} - b_{26})k_2^{(1)} + 2i\cdot(b_{16}k_1^{(1)} + b_{66}k_2^{(1)})$$
$$\chi_1^{*(2)} = (b_{16} - b_{26})k_1^{(2)} + (b_{12} - b_{22})k_2^{(2)} + 2i\cdot(b_{66}k_1^{(2)} + b_{26}k_2^{(2)})$$
$$\widetilde{\chi}_1^{*(1)} = (b_{11} + b_{12})k_1^{(1)} + (b_{16} + b_{26})k_2^{(1)} + 2i\cdot(b_{16}k_1^{(1)} + b_{66}k_2^{(1)})$$
$$\widetilde{\chi}_1^{*(2)} = (b_{16} + b_{26})k_1^{(2)} + (b_{12} + b_{22})k_2^{(2)} + 2i\cdot(b_{66}k_1^{(2)} + b_{26}k_2^{(2)})$$
$$\chi_2^{*(1)} = 2(b_{16}k_1^{(1)} + b_{66}k_2^{(1)}) + i\cdot[(b_{12} - b_{11})k_1^{(1)} + (b_{26} - b_{16})k_2^{(1)}]$$
$$\chi_2^{*(2)} = 2(b_{66}k_1^{(2)} + b_{26}k_2^{(2)}) + i\cdot[(b_{26} - b_{16})k_1^{(2)} + (b_{22} - b_{12})k_2^{(2)}]$$
$$\chi_1^{*(3)} = (b_{45}k_2^{(3)} + b_{55}k_1^{(3)}) - i(b_{44}k_2^{(3)} + b_{45}k_1^{(3)}),$$
$$\widetilde{\chi}_1^{*(3)} = (b_{45}k_2^{(3)} + b_{55}k_1^{(3)}) + i(b_{44}k_2^{(3)} + b_{45}k_1^{(3)}),$$
$$\chi_2^{*(3)} = (b_{44}k_2^{(3)} + b_{45}k_1^{(3)}) + i(b_{45}k_2^{(3)} + b_{55}k_1^{(3)}), \qquad (1.92)$$
$$\widetilde{\chi}_2^{*(3)} = (b_{44}k_2^{(3)} + b_{45}k_1^{(3)}) - i(b_{45}k_2^{(3)} + b_{55}k_1^{(3)}),$$
$$e^{i\delta_1} = (k_2^{(i)} + ik_1^{(i)})k_{12}^{(i)-1},\ e^{i\delta_2} = (-k_2^{(i)} + ik_1^{(i)})k_{12}^{(i)-1}, \qquad (1.93)$$
$$e^{i\delta_3} = (k_1^{(i)} + ik_2^{(i)})k_{12}^{(i)-1},\ k_{12}^{(i)} = (k_1^{(i)2} + k_2^{(i)2})^{1/2}.$$

Теперь для удовлетворения граничным условиям (1.41) применим метод приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $e^{ip\theta_i}$. в результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_n^{\gamma(i)}$ вида

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)} A_n^{\gamma(i)} \lambda_{np}^{\gamma(i)} = -i\frac{R^2}{4}\sum_{i=1}^{2} U_i^* \alpha_p^{(i)}$$
$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)} A_n^{\gamma(i)} \vartheta_{np}^{\gamma(i)} = -i\frac{R^2}{4}\sum_{i=1}^{2} U_i^* \beta_p^{(i)} \qquad (1.94)$$
$$\sum_{(n)} A_n^{\gamma(3)} \lambda_{np}^{\gamma(3)} = -(i/2)R\ U_3^* \alpha_p^{(3)}$$

Так же как и в случае круговой полости, в данном случае некругового контура полученная система решается методом редукции. Сходимость системы может быть показана численной реализацией.

1.6 Решение второй основной задачи – контур некруговой полости подкреплен абсолютно жесткой крепью

На форму контура и связанное с ним напряженное состояние часто влияют различного рода обделки, форма которых также зависит от горно-геологического строения и физико-механических свойств слагающих горных массивов. Рассмотрение глубоко заложенных полостей с подкреплением произвольного профиля для решения динамических контактных задач в транстропном массиве позволяет производить их оптимальное проектирование и соответствующее улучшение эксплуатационных качеств.

Решим задачу о динамическом напряженном состоянии некруговой полости глубокого заложения, подкрепленной жесткой обделкой (вторую основную задачу) при стационарной дифракции упругих волн произвольной ориентации.

Граничные условия на контуре Γ жестко закрепленной полости запишутся в виде

$$(u_i + u_i^*)_\Gamma = 0\,, \qquad i = 1,2,3 \tag{1.95}$$

Так же как и в §1.5, для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка вида (1.13*) и (1.14) с граничными и начальными условиями (1.95) вводится аффинное преобразование вида (1.19) при распространении продольно-поперечных волн, и вида (1.22) – при дифракции сдвиговых SH-волн, которое позволяет свести дифференциальные уравнения (1.13*) и (1.14) к виду уравнения Гельмгольца (1.24), (1.25) в новых координатах $(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$ с учетом введенного частного случая вертикальной и горизонтальной слоистости.

Далее в соответствии с принципом обобщенной суперпозиции упругие перемещения u_i, являясь решениями уравнения (1.24), (1.25), выражаются в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов $B_n^{(i)}, i = 1,2,3$ и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода [5,124, 125]

$$u_i = \sum_{(n)} B_n^{\gamma(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)})\, e^{in\kappa^{(i)}},\ n = \overline{-\infty,+\infty},\ i = 1,2,3 \qquad (1.96)$$

где

$$\omega_0^{(1)} = \omega_1 / \sqrt{b_{11}},\ \omega_0^{(2)} = \omega_1 / \sqrt{b_{66}},\ \omega_0^{(3)} = \omega_0$$

Выражения для составляющих напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$, соответствующие представлению перемещения u_i в виде (1.96) могут быть записаны в следующем виде:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{11},\quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22},\quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12}$$
$$\sigma_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)} B_n^{\gamma(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{(i)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa^{(i)}} - \overline{G}_j^{(i)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa^{(i)}}],(j = \overline{1,3}) \qquad (1.97)$$
$$\sigma_{k3} = \frac{1}{2}\sum_{(n)} B_n^{\gamma(3)} \omega_0^{(3)} [G_k^{(3)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r^{(3)}) e^{i(n-1)\kappa^{(3)}} - \overline{G}_k^{(3)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r^{(3)}) e^{i(n+1)\kappa^{(3)}}],(k = \overline{1,2})$$

где значения $G_j^{(i)}$, $i, j = 1,2,3$ определяются соотношениями (1.29*).

Пользуясь выражениями (1.71), (1.72), (1.73) для точек, лежащих на контуре Γ, а также условием (1.74а), (1.74б), применяя теорему сложения цилиндрических функций, перемещения (1.96) на контуре преобразуются к виду:

$$(u_i)_\Gamma = \sum_{(n,p)} B_n^{\gamma(i)} Q_{np}^{\gamma(i)}\, e^{ip\theta^{(i)}},\ i = 1,2,3 \qquad (1.98)$$

где комплексные функции $Q_{np}^{\gamma(i)}$ вычисляются по формулам (1.76), (1.77).

Представления для перемещений на контуре некруговой полости в падающей волне $(u_i^*)_\Gamma\ (i = \overline{1,3}) = (u_{PP}, u_{SV}, u_{SH})_\Gamma$ находятся путем разложения экспоненциальных функций в гармонические ряды и получения выражений вида (1.87) с комплексными функциями вида (1.89) для контуров общего вида, (1.89*) - для симметрических контуров.

Для удовлетворения краевым условиям (1.95) применим метод приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $e^{ip\theta_i}$. С помощью данного метода после соответствующих подстановок можно

получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $B_n^{\prime(i)}$ вида

$$\sum_{(n,p)} B_n^{\prime(i)} Q_{np}^{(i)} = -U_i^* \sum_{(p)} Q_p^{(i)}, \; i = 1,2,3 \tag{1.99}$$

Система решается методом редукции, численно определяется ее сходимость.

Далее для вычисления контурных нормальных и касательных напряжений на некруговой полости применяются преобразования (1.97), (1.98), с помощью которых получаются следующие выражения:

$$(|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn})_\Gamma = \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n,p)} B_n^{\prime(i)} \lambda_{np}^{\prime(i)} e^{ip\theta^{(i)}}, \; (|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\widetilde{\theta}})_\Gamma = \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n,p)} B_n^{\prime(i)} \vartheta_{np}^{\prime(i)} e^{ip\theta^{(i)}},$$
$$(|\widetilde{\omega}'| \sigma_{\widetilde{\theta}3})_\Gamma = \sum_{(n,p)} B_n^{\prime(3)} \lambda_{npl}^{\prime(3)} e^{ip\theta_j^{(3)}} \tag{1.100}$$

где комплексные функции $\lambda_{np}^{\prime(i)}$, $\vartheta_{np}^{\prime(i)}$ определятся из соотношений (1.82а), (1.82б), (1.83а), (1.83б), (1.84), (1.85), (1.86).

Формулы для нормальных и касательных напряжений в падающей волне $(|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\widetilde{\theta}}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'| \sigma_{\widetilde{\theta}3}^*)_\Gamma$ определятся соотношениями (1.88) с комплексными функциями (1.90), (1.91), (1.92), (1.93).

1.7 Анализ динамического напряженно-деформированного состояния одиночной полости глубокого заложения в транстропном наклонно-слоистом массиве при стационарной дифракции упругих волн

Вначале проведем динамический анализ напряженного и деформированного состояния одиночной круговой штрекообразной полости в транстропном массиве, с наклонной под углом φ плоскостью изотропии [132]. В качестве анизотропного массива рассматривается алевролит со следующими упругими характеристиками пород, согласно таблице 1: E_1=1,074*10^5 кг/см^2, E_2=0,523*10^5 кг/см^2, G_2=0,12*10^5 кг/см^2, ν_1 =0,413, ν_2 =0,198. Упругая волна распространяется под углом α от 0 до 180 с диапазоном

частот от 1 до 100 Гц (берется наиболее часто встречающийся диапазон частот в реальном измерении). Изменение угла наклона плоскости изотропии φ рассматривается всевозможное, т.е. от 0 до 180 .

В соответствии с теоретическим решением для количественного и качественного анализа напряженно-деформированного состояния круговой полости разработан алгоритм и составлен пакет прикладных программ в среде Matlab7.0.

Результаты расчета контурных нормальных и касательных напряжений $(\sigma_{nn})_\Gamma$, $(\sigma_{n\theta})_\Gamma$, $(\sigma_{\theta 3})_\Gamma$ получены на базе решения методом редукции бесконечных систем линейных алгебраических уравнений вида (1.53), (1.60) в которых удерживалось не более 20 уравнений. Это позволило удовлетворить граничным условиям с погрешностью менее 1% для амплитуд напряжений $(\sigma_{nn})_\Gamma$, $(\sigma_{n\theta})_\Gamma$, $(\sigma_{\theta 3})_\Gamma$ по отношению к соответствующим амплитудным значениям напряжений в падающей волне в случае решения первой основной задачи и для смещений в отраженной волне по отношению к максимальным смещениям в падающей. Отсечение членов ряда происходило по мере удовлетворения граничным условиям и по мере анализа коэффициентов при неизвестных в уравнениях (1.53), (1.60) (см.таблицу 3)[131,132]. В таблице 3 показана целесообразность выбора метода редукции при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Здесь приведены значения коэффициентов для разного количества уравнений (5, 15, 20). Числовые результаты получены при следующих параметрах среды и падающих волн: угол падения волны $\alpha = 0°$, угол наклона плоскости изотропии $\varphi = 0°$, частота волны ω =15 Гц. Таблица показывает оптимальность выбора количества уравнений, судя по тенденции уменьшения значений коэффициентов до порядка 10^{-5}. В таблице также показаны значения коэффициентов в случае изотропной среды (здесь в расчет брались осредненные упругие коэффициенты, E_1=0,799*10^5 кг/см^2, E_2=0,799*10^5 кг/см^2, G_2=0,306*10^5 кг/см^2, ν_1 =0,306, ν_2 =0,306). Можно отметить, что количество коэффициентов в случае изотропной среды, достаточно брать в размере пяти.

Таблица 4 *– Точность выполнения граничных условий на контурекруговой выработки при разном порядке системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_n (в процентах)*

Значения угла θ, град	Точность выполнения граничных условий на контуре (в %) при $\alpha = 0°$, $\varphi = 0°$ и порядке уравнений N, равном			
	Изот. среда	Анизотропная среда		
	5	5	15	20
0	0,0000	3,71989	0,00999	0,00001
15	0,0000	0,64211	0,00087	0,00011
30	0,0000	0,00403	0	0,00004
45	0,0000	0,16916	0,00018	0
60	0,0000	0,24892	0,01074	0,00001
75	0,0000	1,22937	0,00018	0,00001
90	0,0000	0,10792	0,0001	0,00001
105	0,0000	0,14434	0,00007	0,00001
120	0,0000	0,00059	0,00004	0,00001
135	0,0000	0,13081	0,00008	0
150	0,0000	0,37023	0,00012	0,00001
165	0,0000	0,21091	0,00026	0,00001
180	0,0000	3,71989	0,00999	0,00001

Составленная программа тестировалась на результатах подобной задачи дифракции SH-волн на круговой полости в ортотропном массиве, исследуемой А.С. Космодамианским и В.И. Сторожевым [5,23], и на результатах задачи для круговой выработки в изотропном массиве при дифракции продольно-поперечных и сдвиговых волн, исследуемой Ж.С. Ержановым, Ш.М. Айталиевым, Л.А. Алексеевой [8].

В случае ортотропной среды значения контурных касательных напряжений $(\sigma_{\theta 3})_\Gamma$, отнесенных к $(b_{55} * \omega)$, рассматривались в зависимости от различных значений параметра $\widetilde{\kappa} = b_{44} / b_{55}$, характеризующего анизотропию тела. Предполагалось, что на круговую полость единичного радиуса вдоль положительного направления оси Ox_1 падает плоская SH-волна сдвига. На рис. 5

изображены графики, полученные на основе проведенных расчетов при аналогичных исходных параметрах. Расчеты показали, что расхождение в полученных численных результатах как качественной, так и количественной картины составляет не более 1 %.

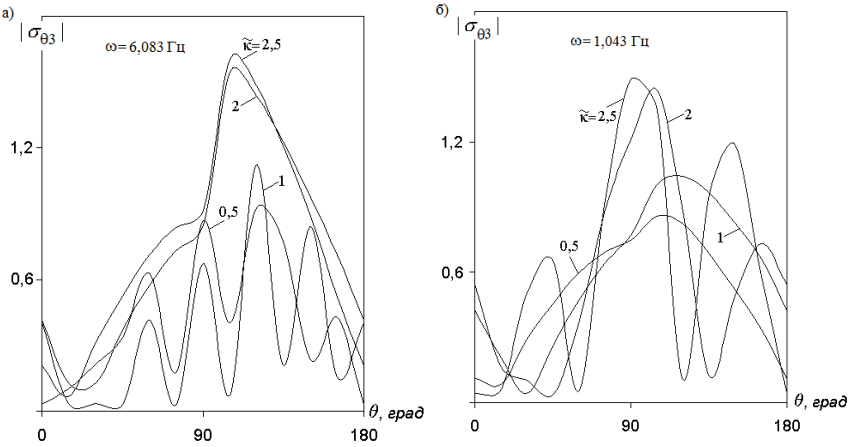
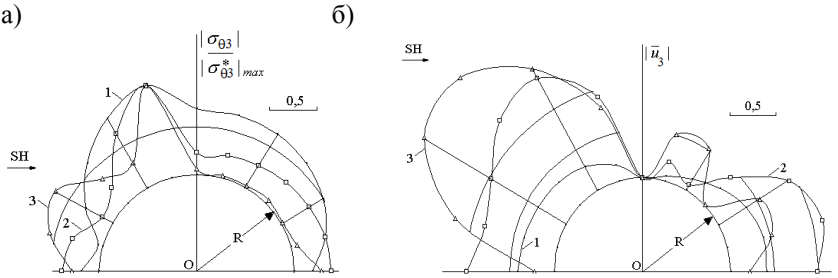


Рисунок 5 – Амплитуды касательных напряжений $|\sigma_{\theta 3}|$ на контуре круговой полости при дифракции SH-волн сдвига в зависимости от коэффициента анизотропии $\tilde{\kappa}$ и разных частот ω при угле падения волны $\alpha = 0°$ (тестовая задача): а) при ω =6,083 Гц; б) при ω =1,043 Гц

На рисунках 6, 7 приведены эпюры распределения касательных напряжений и продольных перемещений на контуре круговой выработки в случае изотропной среды. Расхождение в полученных значениях составляет также не более 1%.

На рисунке 8 приведены значения контурных нормальных и касательных напряжений $(\sigma_{nn})_\Gamma$, $(\sigma_{n\theta})_\Gamma$, $(\sigma_{\theta 3})_\Gamma$ и перемещений при падении на полость под углом $\alpha = 0°$ упругих продольно-поперечных и сдвиговых волн (PP-, SV, SH – волн). На графиках и эпюрах показано влияние угла наклона плоскости изотропии φ на амплитудные характеристики напряжений и перемещений в отраженной волне, отнесенные к максимальным характеристикам в падающей волне. Частота упругой волны берется ω =15 Гц. Она характерна для сейсмических волн, выбор ее обусловлен тем, что при частотах в районе от 10 до 25 Гц наблюдается максимальная концентрация напряжений.

При этом при построении графиков фиксировался угол падения волны ($\alpha = 0°$) и изменялся лишь угол наклона плоскости изотропии φ . Таким образом, достаточно было изменять разницу между углом падения волны α и углом наклона плоскости изотропии φ . Если менять углы φ и α , а разность
между ними оставлять постоянной, мы получим идентичные результаты на контуре круговой полости поворотом на соответствующий угол (см. таблицу 5 для случая падения SH-волн).



ω =15 Гц (кривая 1), 50 Гц (2), 100 Гц (3)

Рисунок 6 – Амплитуды касательных напряжений (а) и продольных перемещений (б) на контуре выработки при дифракции SH-волн сдвига в изотропной среде для разных частот ω при угле падения волны $\alpha = 0°$ (тестовая задача)

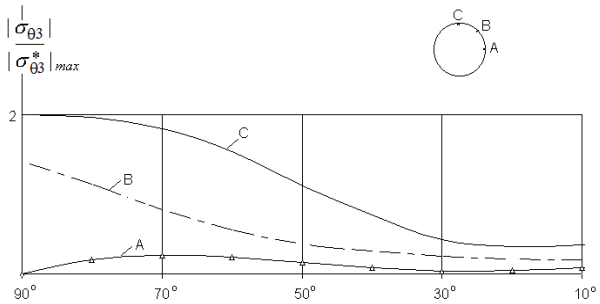
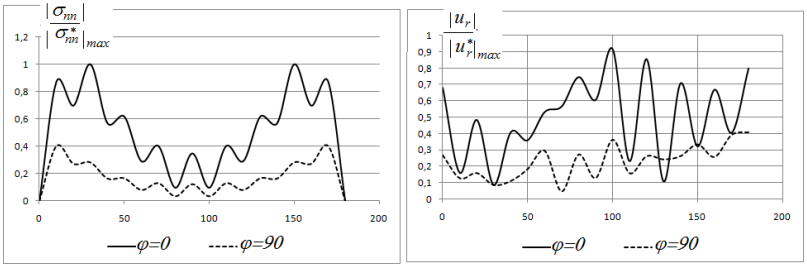
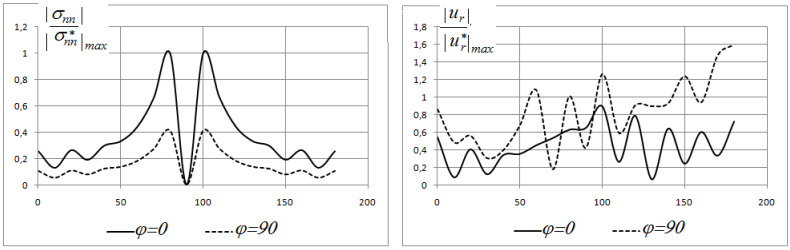


Рисунок 7 – Зависимость касательных напряжений от угла падения SH-волны сдвига в фиксированных точках полости (A, B, C)

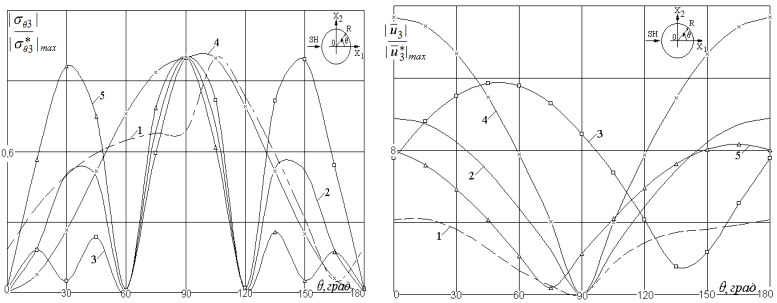
а)



б)



в)



изотропная среда (кривая 1), φ = 0° (2), 45° (3), 90° (4), 135° (5).

Рисунок 8 – Амплитуды касательных напряжений и перемещений на контуре круговой полости при дифракции упругих волн для разных углов наклона плоскости изотропии при ω =15 Гц и α = 0° : а) при падении PP-волн; б) при падении SV-волн; в) при падении SH-волн

Таблица 5 *– Амплитуды касательных напряжений на контуре круговой выработки при различных значениях разности между углом падения SH-волны* α *и углом наклона плоскости изотропии* φ *(тестовая задача)*

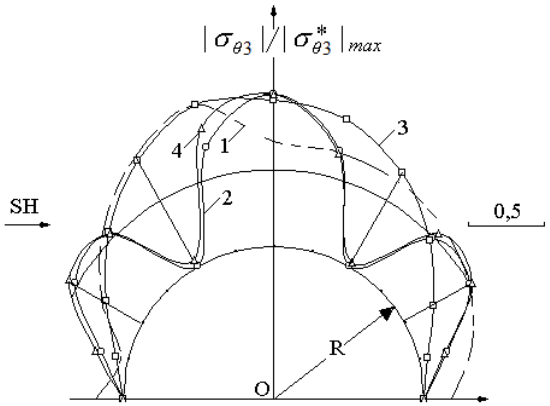
Угол θ, град	Значения $\lvert\sigma_{\theta 3}\rvert$ /max$\{\lvert\sigma^{*}_{\theta 3}\rvert\}$, при разности α - φ = 0° и φ равном					Значения $\lvert\sigma_{\theta 3}\rvert$ /max$\{\lvert\sigma^{*}_{\theta 3}\rvert\}$, при разности α - φ = 45° и φ равном				
	0°	45°	90°	135°	180°	0°	45°	90°	135°	180°
0	0	0,7009	1	0,7009	0	0,2970	0,8882	0,9508	0,4530	0,3059
15	0,2621	0,4941	0,9659	0,8612	0,2554	0,0433	0,7384	1	0,6668	0,0449
30	0,5042	0,2550	0,8659	0,9635	0,4954	0,2115	0,5382	0,9809	0,8370	0,2211
45	0,7106	0	0,7069	1	0,7033	0,4502	0,3013	0,8942	0,9511	0,4738
60	0,8679	0,2538	0,4998	0,9678	0,8639	0,6573	0,0441	0,7451	1	0,6951
75	0,9665	0,4898	0,2587	0,8688	0,9653	0,8195	0,2161	0,5440	0,9796	0,8692
90	1	0,6923	0	0,7097	1	0,92633	0,4616	0,3048	0,8908	0,9836
105	0,9997	0,8688	0,2587	0,4898	0,9332	1	0,6756	0,0433	0,7098	1
120	0,8946	0,9678	0,4998	0,2538	0,8381	0,9759	0,8437	0,2126	0,5184	0,9788
135	0,7284	1	0,7069	0	0,6861	0,8846	0,9543	0,4551	0,2913	0,8916
150	0,5131	0,9635	0,8659	0,2550	0,4869	0,7331	1	0,6686	0,0428	0,7435
165	0,2645	0,8612	0,9659	0,4941	0,2531	0,5324	0,9775	0,8373	0,2109	0,5440
180	0	0,7009	1	0,7009	0	0,2970	0,8882	0,9508	0,4530	0,3059

Заметим, что изменение угла наклона плоскости изотропии пород φ существенно влияет на качественную и количественную картину распределения напряжений и перемещений на контуре выработки (см. рис.8). Можно отметить, что наблюдается определенная симметрия значений контурных напряжений в зависимости от значений угла наклона плоскости изотропии φ. Так, амплитудные значения касательных напряжений $|\sigma_{\theta 3}|$ для угла φ в диапазоне от $0°$ до $90°$ равны значениям касательных напряжений $|\sigma_{\pi-\theta,3}|$ для φ от $90°$ до $180°$. На рис.8 показано также распределение касательных напряжений в случае изотропной среды (пунктирная линия). С увеличением угла наклона плоскости изотропии растут значения перемещений. Из рисунков заметно, что максимальная концентрация перемещений наблюдается при угле наклона плоскости изотропии $\varphi = 90°$, в случае падения SH-волн, в случае падения волн растяжения-сжатия при увеличении угла наклона плоскости изотропии наблюдается снижение степени концентрации перемещений.

роанализируем закономерности распределения динамических контурных напряжений и перемещений на круговой полости в зависимости от величин частот падающих продольно-поперечных и сдвиговых волн.

Эпюры контурных напряжений и перемещений для разных частот падающей волны (ω =15, 50, 100 Гц), когда угол падения волны $\alpha = 0°$, угол наклона плоскости изотропии принимает значения $\varphi = 0°$ показаны на рис.9. Диапазон частот $1 \div 50$ Гц характерен для сейсмических воздействий от землетрясений, $50 \div 100$ Гц - от промышленных взрывов.

Видно, что наибольшая концентрация перемещений наблюдается в кровле и в боках со стороны падения волны (зоне «света») при частоте ω =15 Гц. В зоне «тени» величины перемещений меньше по сравнению с перемещениями в зоне «света». С увеличением частоты значения перемещений имеют тенденцию к уменьшению. Аналогичная картина наблюдается и при распространении волн PP-, SV-типа.



Изотропная среда- ω =15Гц (кривая 1),
анизотропная среда - ω =15 Гц (2), 50 Гц (3), 100 Гц (4)

Рисунок 9 – Амплитуды касательных напряжений на контуре выработки в зависимости от частот падающей SH-волны при угле падения волны $\alpha = 0°$ *и угле наклона плоскости изотропии* $\varphi = 0°$

На рисунке 10 приведено совокупная качественная картина распределения перемещений от воздействия разных типов волн.

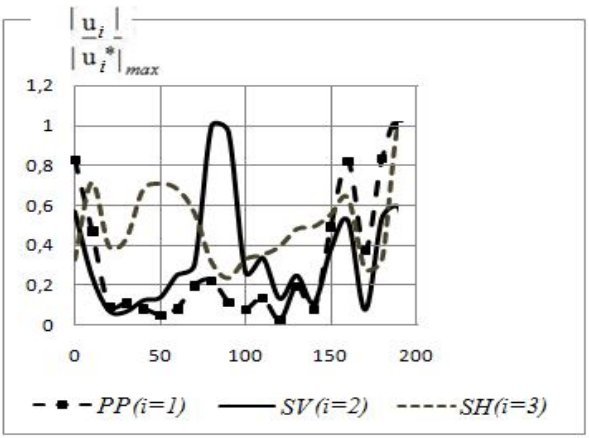
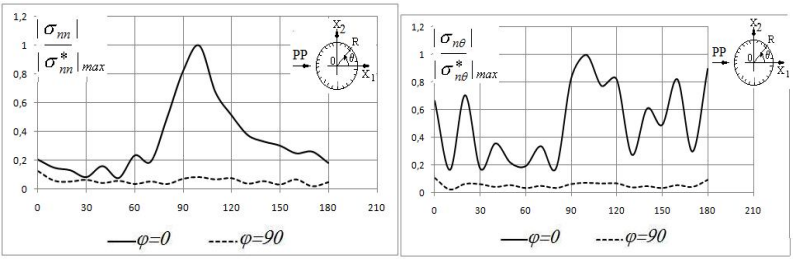


Рисунок 10 – Зависимость контурных перемещений от воздействия разных типов волн

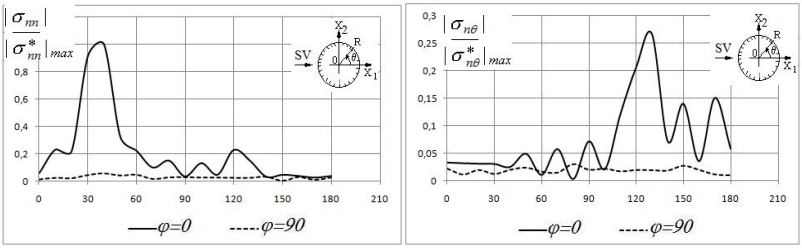
Так же как и для первой основной задачи, в случае анализа решений второй основной задачи, в качестве породного массива, окружающего полость возьмем алевролит с упругими характеристиками из таблицы 1 [131]; упругая волна распространяется под углом $\alpha = 0°$; изменение частот берется в диапазоне от 1 до 100 Гц, изменение угла наклона плоскости изотропии φ - от $0°$ до $180°$. В соответствии с полученным решением, был подробно разработан алгоритм и составлен пакет прикладных программ в среде Matlab7.0 для расчета значений напряжений вблизи полости круглого поперечного сечения. В рядах по цилиндрическим функциям (1.53), (1.60) удерживалось не более 20 членов по положительным и отрицательным индексам, что позволило удовлетворить граничным нулевым условиям с погрешностью менее 1% для перемещений u_i по отношению к амплитудным значениям перемещений в падающей волне.

На рис.11 приведены расчетные значения нормальных $(\sigma_{nn})_\Gamma$ и касательных напряжений $(\sigma_{n\theta})_\Gamma$, $(\sigma_{\theta 3})_\Gamma$ на контуре круговой полости. На графике показано влияние угла наклона плоскости изотропии пород φ на амплитудные характеристики контурных напряжений, отнесенные к соответствующим максимальным контурным напряжениям в падающей волне при частоте волны ω =15 Гц, характерной для сейсмических волн. При этом фиксировался угол падения волны ($\alpha = 0°$) и изменялся лишь угол наклона плоскости изотропии φ. Как было сказано выше, это достаточно для того, чтобы рассмотреть различные вариации сочетаний углов φ и α. Изменение угла наклона плоскости изотропии пород φ существенно влияет на характер и величину распределения напряжений на контуре выработки. Так, наибольшие касательные напряжения наблюдаются между кровлей и боком выработки со стороны падения SH-волны (зоны «света») при различных углах φ. Максимальная концентрация касательных напряжений имеет место при $\varphi = 45°$ и $135°$ - в случае распространения SH-волн, при горизонтальной слоистости массива - в случае дифракции продольных (PP-) и поперечных (SV-) волн. Причем для углов $0° \le \varphi \le 90°$ значения касательных напряжений $|\sigma_{\theta 3}|$ равны значениям касательных напряжений $|\sigma_{\pi-\theta,3}|$ при $90° \le \varphi \le 180°$. Можно отметить также, что распределения контурных напряжений имеют волновой характер.

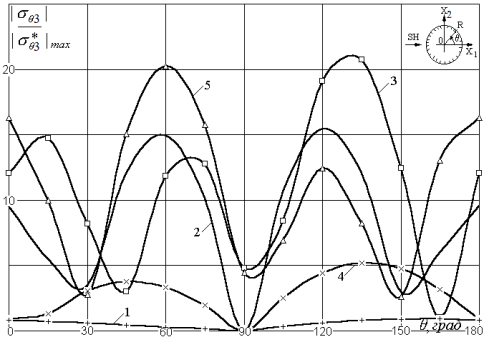
а)



б)



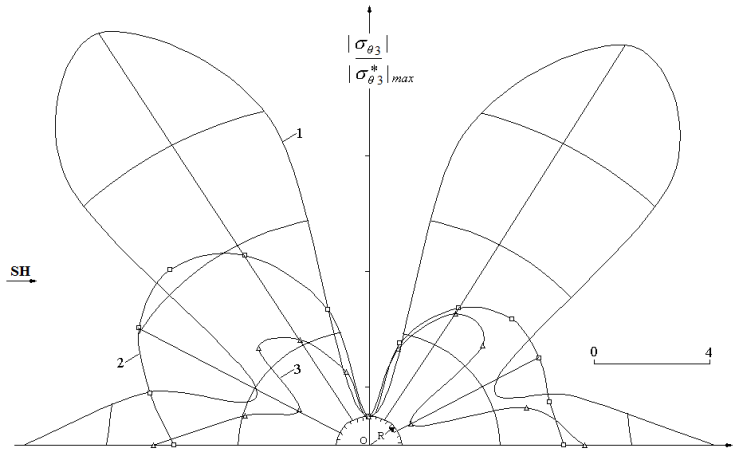
в)



изотропная среда (кривая 1), φ = 0° *(2),* 45° *(3),* 90° *(4),* 135° *(5).*

Рисунок 11 – Амплитуды контактных напряжений между жесткой обделкой выработки и транстропным массивом при дифракции упругих (PP-, SV-, SH-) волн для разных углов наклона плоскости изотропии, когда ω =15 *Гц,* α = 0°

Проанализируем закономерности распределения динамических контурных напряжений в зависимости от величин частот падающей волны. На рисунке 12 приведены эпюры контурных напряжений для разных частот падающей волны(ω =15, 50, 100 Гц), когда угол падения волны $\alpha = 0°$, угол наклона плоскости изотропии $\varphi = 0°$.



ω =15 Гц (кривая 1), 50 Гц (2), 100 Гц (3)

Рисунок 12 – Амплитуды контактных касательных напряжений между жесткой обделкой выработки и транстропным массивом при дифракции SH-волн для разных частот падающей волны, когда $\varphi = 0$, $\alpha = 0$

Видно, что наибольшая концентрация напряжений наблюдается в кровле и в боках со стороны падения волны (зоне «света») при частоте ω =15 Гц. В зоне «тени» величины напряжений меньше по сравнению с напряжениями в зоне «света». С увеличением частоты значения напряжений имеют тенденцию к уменьшению. Аналогичная картина наблюдается для всех типов волн – растяжения-сжатия (PP-) и сдвигов (SV-, SH-).

Приведем результаты анализа некруговой выработки в случае дифракции сдвиговых SH-волн. Некруговая выработка имеет форму трапециевидного однопутевого штрека (рис.3ж) в транстропном массиве (алевролите) [125]; упругие характеристики пород принимаются следующими: E_1=1,074*10^5 кг/см^2, E_2=0,523*10^5 кг/см^2, G_2=0,12*10^5 кг/см^2, ν_1=0,413, ν_2=0,198 (см. таблицу 1); геометрические коэффициенты R, d_i (i=*1,...,4*) следующие (см. таблицу 3): d_1=*0.0167*, d_2=*0.0580*, d_3=*-0.1405*, d_4=*-0.0109*, R=*0.5706B*; угол

падения волны α меняется в диапазоне от $0°$ до $360°$; изменение частот берется в диапазоне от 1 до 100 Гц, угол наклона плоскости изотропии φ изменяется в диапазоне от $0°$ до $180°$.

В соответствии с теоретическим решением для количественного и качественного анализа напряженного состояния выработки некругового профиля был также разработан алгоритм и составлен прикладной пакет программ в среде MatLab 7.0.Результаты расчета касательных напряжений на контуре выработки получены на базе решения системы вида (1.94),(1.99) в которой удерживалось не более 23 уравнений. Это позволило удовлетворить граничным условиям с погрешностью менее 1% для касательных напряжений в отраженной волне по отношению к максимальным амплитудным значениям напряжений в падающей волне в случае певой основной задачи и амплитудных значений продольных перемещений в отраженной волне по отношению к максимальным продольным перемещениям в падающей волне в случае решения второй основной задачи. Отсечение членов ряда происходило по мере удовлетворения граничным условиям.

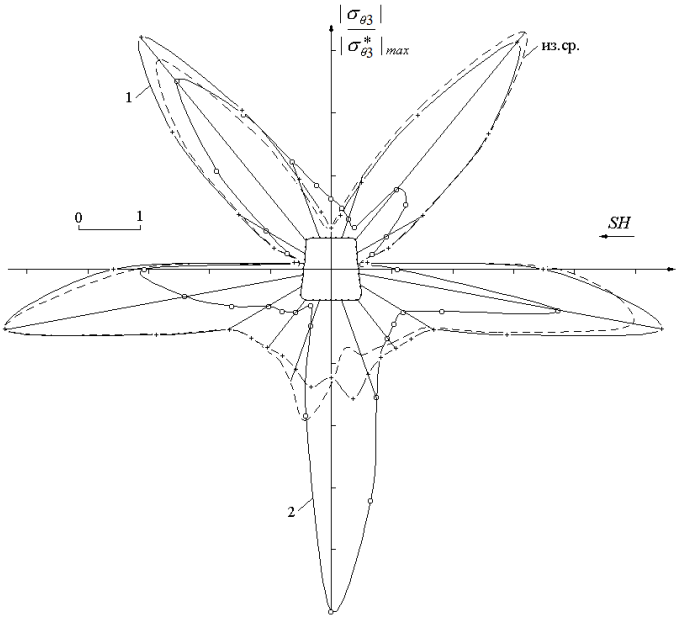
Целесообразность выбора метода редукции при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений была показана в таблице 4. Аналогичные результаты выполнены в случае некруговой выработки.

На рис.13, 14 приведены значения касательных контурных напряжений при падении на поверхность выработки под углом $\alpha = 180°$ плоской SH – волны. На графике показано влияние угла наклона плоскости изотропии φ на амплитудные характеристики напряжений в отраженной волне, отнесенные к максимальным напряжениям в падающей волне. Частота волны ω бралась равной 15 Гц.

Заметно, что изменение угла наклона плоскости изотропии существенно влияет на распределение напряжений на контуре выработки. Максимальные напряжения наблюдаются на расширяющихся углах и на основании трапециевидной выработки. На рисунках показано также распределение напряжений в случае изотропной среды (пунктирная линия). Упругие характеристики изотропной среды рассматривались осредненными, т.е. $E_1 = E_2 = 0{,}7985 * 10^5$ кг/см^2, $G_2 = 0{,}3071 * 10^5$ кг/см^2, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$. Хотелось бы отметить, что при изменении угла φ значительно меняется сама картина распределения касательных напряжений. Так, при

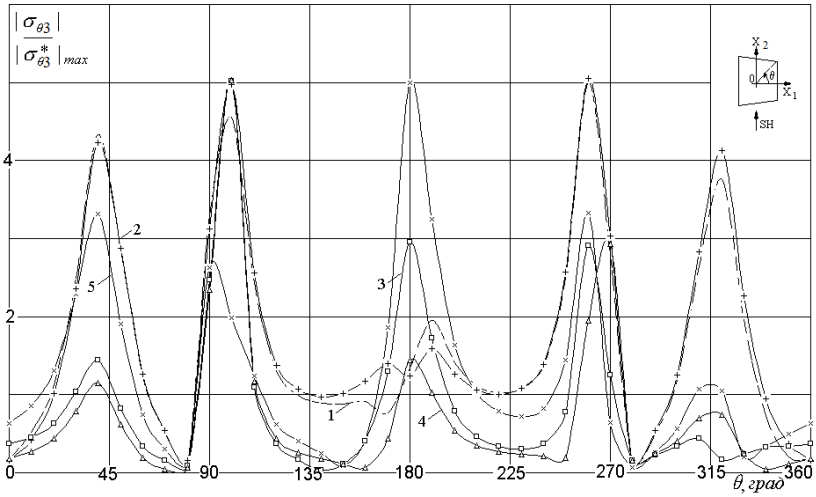
горизонтальной слоистости ($\varphi = 0°$) максимальные напряжения наблюдаются в угловых точках кровли и боков выработки (см. рис.13), тогда как при вертикальной слоистости ($\varphi = 90°$) максимума напряжения достигают в ее основании.

В таблице 6 даны значения концентрации касательных напряжений на контуре выработки при различных углах наклона плоскости изотропии φ и углах падения волны α .



изотропная среда (пунктирная линия), $\varphi = 0°$ *(кривая 1),* $90°$ *(2).*

Рисунок 13 – Амплитуды касательных напряжений $|\sigma_{\theta 2}|$ *на контуре выработки при дифракции SH-волн для разных углов наклона плоскости изотропии, когда частота* ω *=15 Гц, угол падения волны* $\alpha = 180°$



Изотроп.ср.(пунктир), кривая (1) $\varphi = 0°$ *, (2),* $30°$ *(3),* $60°$ *(4),* $90°$ *(5).*

Рисунок 14 – Амплитуды касательных напряжений на контуре выработки при дифракции SH-волн для разных углов наклона плоскости изотропии

Проанализируем закономерности распределения динамических напряжений на контуре выработки в зависимости от величин частот падающей волны сдвига, а также от изменения углов φ и α . На рис. 15 приведены эпюры контурных касательных напряжений для разных частот падающей волны (ω =15, 50, 100 Гц), когда угол падения волны $\alpha = 0°$, угол наклона плоскости изотропии принимает значения $\varphi = 0°$. Как видно частота падающей волны также влияет на значения контурных касательных напряжений.

Так, при разных частотах максимальные напряжения наблюдаются в разных точках контура. При частоте в 15 Гц (сейсмической частоте), своего максимума контурные напряжения достигают в угловых точках кровли и боках выработки, при частоте от 50 Гц и выше наибольшие напряжения характерны для точек основания выработки, а сама картина распределения напряжений несимметрична.

Для анализа решения второй основной задачи также трапециевидный однопутевый штрек (рис.3ж), закрепленный абсолютно жестко, в транстропном массиве (алевролите) от действия SH-волн сдвига; упругие характеристики пород принимаются такими

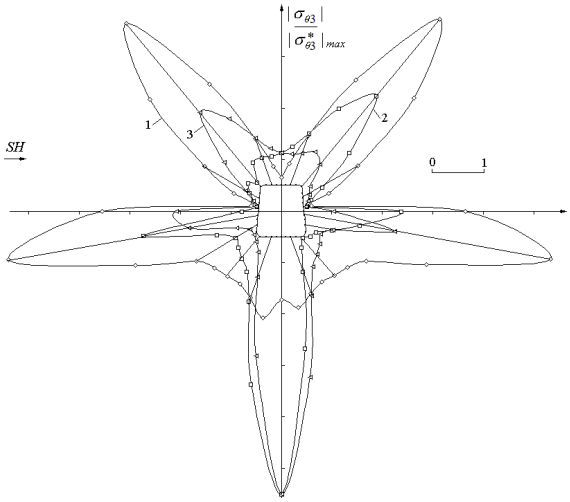
же. (см. таблицу 1); геометрические коэффициенты R, d_i ($i=1,...,4$) берутся из таблицы 3, угол падения волны α меняется в диапазоне от $0°$ до $360°$; изменение частот берется в диапазоне от 1 до 100 Гц, угол наклона плоскости изотропии φ изменяется в диапазоне от $0°$ до $180°$.

Таблица 6 *– Амплитуды касательных напряжений на контуре выработки при различных углах* α *и* φ *, частота* ω *=15 Гц*

Угол θ, град	$\lvert\sigma_{\theta 3}\rvert / \max\{\lvert\sigma^*_{\theta 3}\rvert\}$, при $\alpha = 60°$ и φ, равном				$\lvert\sigma_{\theta 3}\rvert / \max\{\lvert\sigma^*_{\theta 3}\rvert\}$, при $\alpha = 30°$ и φ, равном			
	0°	30°	60°	90°	0°	30°	60°	90°
0	0,086	0,154	0,164	0,063	0,5567	0,1365	0,0578	0,1742
40	1,0895	0,4874	0,5454	0,2299	0,6680	1,1429	0,2027	0,5366
80	0,0600	0,1612	0,1001	0,1623	0,1258	0,0728	0,1613	0,1360
120	0,4696	0,1892	0,2876	0,1939	0,4305	0,4707	0,0870	0,2844
160	0,1535	0,2769	0,1515	0,0893	1,2255	0,0882	0,1373	0,1634
200	0,4207	0,2560	0,3581	0,1087	0,6210	0,4986	0,0783	0,3769
240	0,2467	0,2092	0,0189	0,2245	0,2403	0,2217	0,1855	0,0602
280	0,1628	0,1236	0,1625	0,1295	0,0473	0,1628	0,0751	0,1621
320	0,9592	0,3747	0,2252	0,1835	2,1380	0,8951	0,1891	0,2122
360	0,0859	0,1536	0,1639	0,0630	0,5567	0,1365	0,0578	0,1742

В соответствии с теоретическим решением для количественного и качественного анализа напряженного состояния выработки некругового профиля, подкрепленной недеформируемой обделкой, разработан алгоритм и составлен пакет прикладных программ в среде MatLab 7.0.

На рис. 16 приведены значения касательных напряжений при падении на поверхность выработки под углом α = 45° плоской SH – волны. На графике показано влияние угла наклона плоскости изотропии φ на амплитудные характеристики напряжений, отнесенные к максимальным напряжениям в падающей волне.



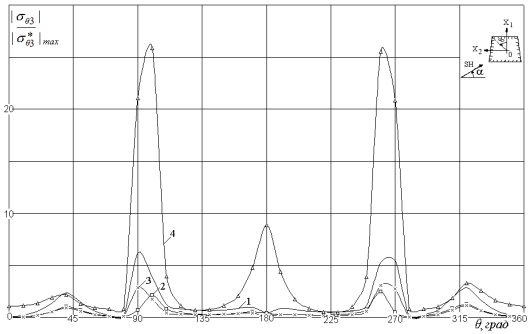
ω =15 Гц (кривая 1), 50 Гц (2), 100 Гц (3)

Рисунок 15 – Амплитуды касательных контурных напряжений в отраженной волне при дифракции SH-волн для разных частот ω, угол наклона плоскости изотропии $\varphi = 0°$, угол падения волны $\alpha = 0°$

Частота волны ω бралась равной 15 Гц. Заметно, что изменение угла наклона плоскости изотропии существенно влияет на распределение напряжений на контуре выработки. Так, максимальное распределение напряжений наблюдается, когда угол между углом падения волны α и углом наклона плоскости изотропии φ составляет $90°$.

В таблице 7 даны значения концентрации касательных напряжений на контуре выработки при различных углах наклона плоскости изотропии φ и углах падения волны α.

Влияние частоты на напряженно-деформированное состояние некруговой выработки продемонстрировано в таблице 8. При этом заметно, что с увеличением частоты картина распределения контурных динамических напряжений существенно меняется. Можно отметить, что с увеличением частоты значения максимальных напряжений имеют тенденцию к уменьшению.



$\varphi = 0°$ *(кривая 1),* $45°$ *(2),* $90°$ *(3),* $135°$ *(4).*

Рисунок 16 – Амплитуды контурных касательных напряжений выработки с недеформируемой обделкой при дифракции SH-волн для разных углов наклона плоскости изотропии

***Таблица 7** – Амплитуды контурных касательных напряжений выработки для различных углов α и φ, частота ω =15 Гц*

Угол θ, град	$\lvert\sigma_{\theta 3}\rvert/\max\{\lvert\sigma^*_{\theta 3}\rvert\}$ при $\alpha = 0°$ и φ, равном			$\lvert\sigma_{\theta 3}\rvert/\max\{\lvert\sigma^*_{\theta 3}\rvert\}$ при $\alpha = 45°$ и φ, равном			$\lvert\sigma_{\theta 3}\rvert/\max\{\lvert\sigma^*_{\theta 3}\rvert\}$ при $\alpha = 90°$ и φ, равном		
	0°	45°	90°	0°	45°	90°	0°	45°	90°
0	0,036	0,155	0,255	0,055	0,053	0,023	0,113	0,126	0,047
40	6,406	1,613	9,504	2,351	1,047	0,948	1,037	0,970	0,736
80	0,120	0,240	1,631	0,172	0,081	0,100	0,474	0,150	0,093
120	1,915	0,659	3,625	0,812	0,421	0,310	0,774	0,439	0,365
160	1,951	0,694	2,544	0,862	0,401	0,372	0,493	0,567	0,274
200	1,921	0,354	3,216	0,761	0,278	0,283	0,112	0,299	0,215
240	1,909	0,719	2,721	0,643	0,378	0,291	0,771	0,324	0,289
280	0,124	0,187	1,895	0,126	0,069	0,056	0,437	0,057	0,096
320	6,448	1,977	9,071	2,861	1,284	1,164	1,563	1,633	0,969
360	0,036	0,155	0,255	0,055	0,053	0,023	0,113	0,126	0,047

Таблица 8 *– Амплитуды касательных напряжений на контуре выработки при различных углах α и φ и частот ω*

Угол θ, град	$\lvert\sigma_{\theta 3}\rvert/\max\{\lvert\sigma^{*}_{\theta 3}\rvert\}$ при $\alpha=0°$, $\varphi=0°$ и ω (Гц), равном			$\lvert\sigma_{\theta 3}\rvert/\max\{\lvert\sigma^{*}_{\theta 3}\rvert\}$ при $\alpha=0°$, $\varphi=90°$ и ω (Гц), равном			$\lvert\sigma_{\theta 3}\rvert/\max\{\lvert\sigma^{*}_{\theta 3}\rvert\}$ при $\alpha=0°$, $\varphi=135°$ и ω (Гц), равном		
	15	50	100	15	50	100	15	50	100
0	0,036	0,571	0,830	0,255	0,425	0,990	0,283	0,604	0,120
40	6,406	0,287	2,747	9,504	10,74	6,861	1,893	1,398	1,621
80	0,120	0,447	0,326	1,631	1,064	1,584	0,198	0,514	0,199
120	1,915	0,498	0,819	3,625	4,275	1,608	0,643	0,400	0,739
160	1,951	1,265	1,037	2,544	3,037	0,483	1,103	0,984	0,712
200	1,921	0,618	1,706	3,216	3,110	3,109	0,496	1,081	0,324
240	1,909	0,674	0,544	2,721	3,977	2,287	0,655	0,480	0,667
280	0,124	0,246	0,400	1,895	1,067	1,438	0,126	0,323	0,215
320	6,448	2,303	1,332	9,071	11,17	1,178	2,791	1,400	2,126
360	0,036	0,571	0,830	0,255	0,425	0,990	0,283	0,604	0,120

Заключение по первому разделу

1. На основе аналитических методов (метода теории функций комплексного переменного и метода «возмущения формы», метода разделения переменных) проведен расчет упругого динамического состояния одиночной полости глубокого заложения в транстропном наклонно-слоистом массиве при стационарной дифракции упругих продольно-поперечных (PP-, SV-) и сдвиговых (SH-)волн.

2. Разработан алгоритм и пакет прикладных программ для численной реализации полученных аналитических соотношений в среде MatLab7.0.

3. Исследовано поведение распределения упругих динамических нормальных и касательных напряжений и перемещений

на контуре одиночной полости в зависимости от различных физических параметров среды и падающей гармонической волны. решены две основные задачи. установлено, что при анализе напряженно-деформированного состояния выработки достаточно оставлять фиксированным угол падения волны, а изменять лишь угол наклона плоскости изотропии, т.е. рассматривать различные варианты изменения разности между этими углами.

4. На распределение нормальных и касательных напряжений и перемещений существенно влияет изменение угла наклона плоскости изотропии, причем наблюдается определенная симметрия значений касательных напряжений относительно вертикальной оси при изменении углов наклона плоскости изотропии φ от $0°$ до $90°$ и φ от $90°$ до $180°$. Существует тенденция увеличения концентрации перемещений и напряжений с увеличением угла φ в случае распространения SH-волн, тогда как при дифракции продольных (PP-)и поперечных (SV-) волн наибольшая концентрация напряжений наблюдается при горизонтальной слоистости.

5. Напряженно-деформированного состояния полости существенно зависит от частоты падающей волны, причем с увеличением частоты наблюдается уменьшение распределения перемещений. Со стороны падения волны (в зоне «света») значения перемещений большие, чем в зоне «тени». Концентрация динамических касательных напряжений (в случае второй основной задачи) также имеют тенденцию к уменьшению с увеличением частоты (максимальные наблюдаются при сейсмической частоте в 15 Гц).

6. Исследован характер распределения контурных динамических касательных напряжений в случае некруговой формы выработки. Так, для однопутевого трапециевидного штрека наблюдается увеличение концентрации напряжений в угловых точках, причем на углах основания больше, чем на углах кровли. В случае увеличения частот наблюдается тенденция уменьшения напряжений и перемещений в угловых точках контура выработки.

2 ОБОБЩЕННАЯ ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПОЛОСТИ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОИСТОМ МАССИВЕ ПРИ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН

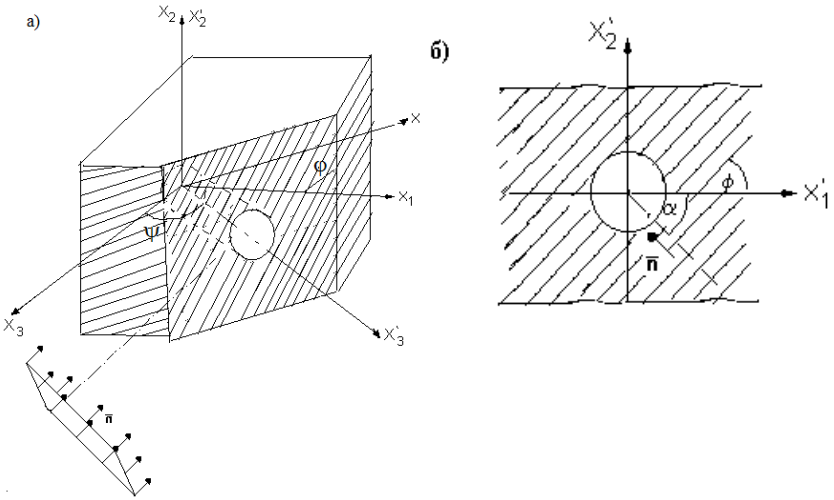
2.1 Круговая диагональная полость глубокого заложения. Основные уравнения и соотношения

Подземные сооружения, продольная ось которых составляет произвольный угол с линией простирания плоскости изотропии массива, находят широкое применение в системе подготовительных и капитальных горных выработок. Так, околоствольные обходные выработки шахт и рудников пересекают наклонные слои горных пород в разном направлении: трассы транспортных тоннелей обычно произвольно ориентированы относительно элементов залегания поверхностей напластования горных пород.

Диагональные выработки по своему определению содержат в себе как предельные случаи штреки и квершлаги. Детальный анализ напряженного состояния подобных горных выработок дает основу для оценки устойчивости и прочности штреков и квершлагов при отклонении их продольной оси от должного положения относительно элементов залегания породных слоев. Расчетная схема диагональной выработки является наиболее обобщенной схемой для определения динамических напряжений в массиве вокруг подземных сооружений, ибо далеко не всегда распространение волн строго направлено вдоль или поперек продольной оси подземного сооружения.

Выпишем уравнения обобщенного закона Гука (1.1) для массива с диагональной полостью в системе координат $Ox_1'x_3'x_3'$, у которой ось Ox_3' составляет угол ψ с осью Ox_3 в первоначальной декартовой системе координат, направления осей Ox_1' и Ox_1 также отличаются на угол ψ, а ось Ox_2' совпадает с осью Ox_2 (см. рис. 17). Подобное возможно, если провести горизонтальный поворот осей на угол ψ вокруг оси Ox_2. Предположим, что заданные внешние объемные силы не меняются вдоль продольной оси диагональной цилиндрической полости. В силу трансверсальности изотропии упругих свойств массив поперечное сечение диагональной полости получает искривление. Однородность механических свойств массива в совокупности с предположением о бесконечной протяженности полости обуславливает одинаковость искривления поперечных сечений диагональных полостей на всем их протяжении. Следовательно, можно предположить, что все характеристики напряженно-деформированного состояния диагональной полости зависят от

координат (x_1', x_2') в плоскости ее поперечного сечения, т.е. $u_1' = u_1'(x_1', x_2')$ $u_2' = u_2'(x_1', x_2')$, $u_3' = u_3'(x_1', x_2')$, а $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1', x_2')$, $i, j = 1,2,3$, что аналогично условиям плоской деформации. Подобного рода деформацию в теории упругости анизотропного тела называют обобщенной плоской.



φ – угол наклона плоскости изотропии; α – угол падения волны; ψ – угол отклонения оси диагональной выработки; $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении распространения упругой волны
а) общий вид; б) плоскость поперечного сечения

Рисунок 17 – Схема распространения плоской гармонической волны в транстропном массиве с круговой полостью глубокого заложения при обобщенной плоской деформации

При этих условиях уравнения обобщенного закона Гука для массива с наклонной плоскостью изотропии, содержащей диагональную круговую полость, имеют вид:

$$\begin{cases}\sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{23} + c_{14}\varepsilon_{12} + c_{15}\varepsilon_{13},\\ \sigma_{22} = c_{12}\varepsilon_{11} + c_{22}\varepsilon_{22} + c_{23}\varepsilon_{23} + c_{24}\varepsilon_{12} + c_{25}\varepsilon_{13},\\ \sigma_{23} = c_{13}\varepsilon_{11} + c_{23}\varepsilon_{22} + c_{33}\varepsilon_{23} + c_{34}\varepsilon_{12} + c_{35}\varepsilon_{13},\\ \sigma_{12} = c_{14}\varepsilon_{11} + c_{24}\varepsilon_{22} + c_{34}\varepsilon_{23} + c_{44}\varepsilon_{12} + c_{45}\varepsilon_{13},\\ \sigma_{13} = c_{15}\varepsilon_{11} + c_{25}\varepsilon_{22} + c_{35}\varepsilon_{23} + c_{45}\varepsilon_{12} + c_{55}\varepsilon_{13},\end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь коэффициенты упругости $c_{ij} = c_{ji}$ зависят, кроме пяти приведенных постоянных E_1 , E_2 , ν_1 , ν_2 , G_2 , от угла наклона φ плоскости изотропии к горизонту и угла отклонения ψ оси выработок от линии простирания этой плоскости. Указанные коэффициенты являются приведенными вдоль продольной оси диагональной полости [3], т.е.

$$c_{ij} = b'_{ij} - \frac{b'_{i2}b'_{j2}}{b'_{22}} \ . \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned}
&b'_{11} = b_{11}\cos^4\psi + 2(b_{13} + 2b_{55})\sin^2\psi\cos^2\psi + b_{33}\sin^4\psi,\\
&b'_{12} = b'_{21} = b_{12}\cos^2\psi + b_{23}\sin^2\psi,\\
&b'_{13} = b'_{31} = [(b_{16} - 2b_{45})\cos^2\psi + b_{36}\sin^2\psi]\sin\psi,\\
&b'_{14} = b'_{41} = [b_{16}\cos^2\psi + (b_{36} + 2b_{45})\sin^2\psi]\cos\psi\\
&b'_{15} = b'_{51} = [(b_{11} - 2b_{55} - b_{13})\cos^2\psi + (b_{13} + 2b_{55} - b_{33})\sin^2\psi]\cos\psi\sin\psi,\\
&b'_{22} = b_{22}, \quad b'_{23} = b_{26}\sin\psi, \quad b'_{24} = b_{26}\cos\psi, \quad b_{25} = (b_{12} - b_{23})\cos\psi\sin\psi,\\
&b'_{33} = b_{44}\cos^2\psi + b_{66}\sin^2\psi,\\
&b'_{34} = (b_{66} - b_{44})\sin\psi\cos\psi,\\
&b'_{35} = [b_{45}\cos^2\psi + (b_{16} - b_{45} - b_{36})\sin^2\psi]\cos\psi,\\
&b'_{44} = b_{44}\sin^2\psi + b_{66}\cos^2\psi,\\
&b'_{45} = [b_{45}\sin^2\psi + (b_{16} - b_{45} - b_{36})\cos^2\psi]\sin\psi,\\
&b'_{55} = b_{55} + [b_{11} + b_{33} - 2(b_{13} + 2b_{55})]\sin^2\psi\cos^2\psi.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Исходные коэффициенты b_{ij}, входящие в (2.1), (2.2) берутся из (1.1).

При использовании физических уравнений состояния (1.1) и кинематических соотношений Коши уравнения движения в случае

обобщенной плоской деформации могут быть представлены в операторном виде:

$$\begin{cases} A_{11}^{(0)}u_1 + A_{12}^{(0)}u_2 + A_{13}^{(0)}u_3 + A_{11}^{(2)}\partial_3^2 u_1 + A_{12}^{(2)}\partial_3^2 u_2 + A_{11}^{(1)}\partial_3 u_1 + A_{12}^{(1)}\partial_3 u_2 + \\ \qquad + A_{13}^{(1)}\partial_3 u_3 = 0, \\ A_{21}^{(0)}u_1 + A_{22}^{(0)}u_2 + A_{23}^{(0)}u_3 + A_{21}^{(2)}\partial_3^2 u_1 + A_{22}^{(2)}\partial_3^2 u_2 + A_{21}^{(1)}\partial_3 u_1 + A_{22}^{(1)}\partial_3 u_2 + \\ \qquad + A_{23}^{(1)}\partial_3 u_3 = 0. \\ A_{31}^{(0)}u_1 + A_{32}^{(0)}u_2 + A_{33}^{(0)}u_3 + A_{31}^{(1)}\partial_3 u_1 + A_{32}^{(1)}\partial_3 u_2 = 0, \end{cases} \qquad (2.4)$$

Здесь $A_{ij}^{(k)}$ (*i,j=1,2,3; k=0,1,2*) – операторы, причем

$$\begin{aligned} A_{11}^{(0)} &= c_{11}\partial_1^2 + 2c_{14}\partial_1\partial_2 + c_{44}\partial_2^2 + \omega_1^2, \\ A_{21}^{(0)} &= A_{12}^{(0)} = c_{14}\partial_1^2 + (c_{12}+c_{44})\partial_1\partial_2 + c_{24}\partial_2^2, \\ A_{31}^{(0)} &= A_{13}^{(0)} = c_{15}\partial_1^2 + (c_{13}+c_{45})\partial_1\partial_2 + c_{34}\partial_2^2 \\ A_{22}^{(0)} &= c_{44}\partial_1^2 + 2c_{24}\partial_1\partial_2 + c_{22}\partial_2^2 + \omega_1^2, \\ A_{23}^{(0)} &= A_{32}^{(0)} = c_{45}\partial_1^2 + (c_{25}+c_{34})\partial_1\partial_2 + c_{23}\partial_2^2 \\ A_{33}^{(0)} &= c_{55}\partial_1^2 + 2c_{35}\partial_1\partial_2 + c_{33}\partial_2^2 + \omega_1^2, \\ A_{11}^{(1)} &= 2(c_{15}\partial_1 + c_{45}\partial_2), \\ A_{22}^{(1)} &= 2(c_{34}\partial_1 + c_{23}\partial_2), \\ A_{12}^{(1)} &= A_{21}^{(1)} = (c_{13}+c_{45})\partial_1 + (c_{34}+c_{25})\partial_2, \\ A_{13}^{(1)} &= A_{31}^{(1)} = c_{55}\partial_1 + c_{35}\partial_2, \\ A_{32}^{(1)} &= A_{23}^{(1)} = c_{35}\partial_1 + c_{33}\partial_2, \\ A_{11}^{(2)} &= c_{55}, \quad A_{12}^{(2)} = A_{21}^{(2)} = c_{35}, \\ A_{22}^{(2)} &= c_{33} \end{aligned} \qquad (2.5)$$

$\omega_1^2 = \rho^0\omega^2$, ω - круговая частота.

Горизонтальная круговая полость радиуса *R* проведена вдоль оси Ox'_3 и имеет поперечное сечение с контуром *Γ*, описываемым функцией (1.10).

Предполагается, что в транстропном массиве в плоскости поперечного сечения полости вдоль направления, задаваемого единичным вектором $\vec{n}=(n_1, n_2)$, падает стационарная упругая волна. Фронт волны параллелен оси диагональной полости, сама волна поляризована в плоскости поперечного сечения полости в случае

рассмотрения PP-, SV- продольно-поперечных волн, и параллельно оси диагональной полости в случае дифракции SH-волны сдвига. Вид волны может быть представлен следующим выражением

$$\overline{u} = \overline{u}^* e^{-i\omega t} \tag{2.6}$$

где $\overline{u}^*$ - амплитуда волны, описываемая выражениями

$$\overline{u}^* = \overline{U}^* \exp[i\overline{k}\ (n_1 x_1 + n_2 x_2)] = \overline{U}^* \exp[i\,(k_1 x_1 + k_2 x_2)] \tag{2.7}$$

Здесь ω - частота волны, $\overline{k}$ - волновой вектор, n_1, n_2 – направляющие косинусы угла падения волны α - угла между осью Ox_1 и вектором $\vec{n}$ (см. рис. 28).

В случае обобщенной плоской деформации дифракционное поле характеризуется составляющими перемещений $\overline{u}_p = \{u_1, u_2, u_3\}$, зависящих от координат в плоскости поперечного сечения полости. Краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (2.4) с учетом, что характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x'_1,x'_2) в плоскости поперечного сечения полости. Тогда для диагональной круговой полости в уравнениях (2.4) ненулевыми остаются лишь члены[133]

$$\begin{cases} A_{11}^{(0)} u_1 + A_{12}^{(0)} u_2 + A_{13}^{(0)} u_3 = 0, \\ A_{21}^{(0)} u_1 + A_{22}^{(0)} u_2 + A_{23}^{(0)} u_3 = 0. \\ A_{31}^{(0)} u_1 + A_{32}^{(0)} u_2 + A_{33}^{(0)} u_3 = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

Так как в случае обобщенной плоской деформации выполняются аналогичные условия, как и при плоской деформации, то можно принять , что осуществимо разделение волн на квазипродольные и квазипоперечные, причем PP-, SV- волны распространяются в плоскости поперечного сечения полости, а SH-волна является горизонтально поляризованной и ее амплитудные смещения происходят вдоль оси круговой полости. Тогда в случае падения волн растяжения-сжатия (PP-, SV-) в рассмотрение берется дифракционное поле, которое характеризуется составляющими перемещений в плоскости поперечного сечения полости $\overline{u}_p = (u_1, u_2)$. Краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (2.8) с учетом, что все составляющие перемещений, кроме (u_1, u_2), равны нулю, а

характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x'_1, x'_2). Тогда в уравнениях (2.8) ненулевыми остаются лишь члены

$$\begin{cases} A_{11}^{(0)} u_1 + A_{12}^{(0)} u_2 = 0, \\ A_{21}^{(0)} u_1 + A_{22}^{(0)} u_2 = 0. \\ A_{31}^{(0)} u_1 + A_{32}^{(0)} u_2 = 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

Так как коэффициенты в дифференциальных уравнениях в частных производных вида (2.5), входящие в операторный вид уравнений движений (2.9), являются постоянными, не зависящими друг от друга, можно, применив некоторые преобразования, упростить формулы (2.9) к следующему виду

$$\begin{cases} (A_{11}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{31}^{(0)}) u_1 + (A_{12}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)}) u_2 = 0, \\ (A_{21}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)}) u_1 + (A_{22}^{(0)} + A_{32}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)}) u_2 = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Если ввести обозначения

$$A_{11}^{'(0)} = A_{11}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{31}^{(0)};\ A_{12}^{'(0)} = A_{21}^{'(0)} = A_{12}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)};\ A_{22}^{'(0)} = A_{22}^{(0)} + A_{32}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)}. \tag{2.11}$$

можно получить соотношения, аналогичные выражениям типа (1.13).

Так же, как и в предыдущих разделах, выражения (2.10) удобней представить в матричной форме:

$$(B_0^{'} \partial_1^2 + B_1^{'} \partial_1 \partial_2 + B_2^{'} \partial_2^2 + B_3^{'}) \overline{u}_p = 0, \tag{2.10*}$$

где

$$B_0^{'} = \begin{pmatrix} c_{11}^{'} & c_{16}^{'} \\ c_{16}^{'} & c_{66}^{'} \end{pmatrix},\ B_1^{'} = \begin{pmatrix} 2c_{16}^{'} & c_{12}^{'} + c_{66}^{'} \\ c_{12}^{'} + c_{66}^{'} & 2c_{26}^{'} \end{pmatrix},\ B_2^{'} = \begin{pmatrix} c_{66}^{'} & c_{26}^{'} \\ c_{26}^{'} & c_{22}^{'} \end{pmatrix},$$

$$B_3^{'} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 \end{pmatrix},\ \overline{u}_p = \{u_1, u_2\}$$

Здесь

$$c_{11}^{'} = c_{11} + c_{55}^2;\ c_{16}^{'} = c_{14} + c_{55} \cdot c_{35};\ c_{66}^{'} = c_{44} + c_{35}^2;\ c_{12}^{'} = c_{12} + c_{55} \cdot c_{33};$$
$$c_{26}^{'} = c_{24} + c_{33} \cdot c_{35};\ c_{22}^{'} = c_{22} + c_{33}^2. \tag{2.12}$$

Коэффициенты c_{ij}, $i, j = \overline{1,6}$ берутся из соотношений (2.2).

При падении SH-волн сдвига рассматривается антиплоская деформация полости (условия обобщенной плоской деформации и особенности распространения сдвиговых волн позволяют применить случай антиплоской деформации), а дифракционное поле, в этом случае, характеризуется амплитудными составляющими перемещений $u_3(x'_1,x'_2)$ в осевом направлении. Краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (2.8) с учетом, что все составляющие перемещений, кроме u_3 , равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x'_1,x'_2). Тогда в уравнениях (2.9) ненулевыми остаются

$$\begin{cases} A_{13}^{(0)} u_3 = 0, \\ A_{23}^{(0)} u_3 = 0, \\ A_{33}^{(0)} u_3 = 0 \end{cases} \qquad (2.13)$$

Складывая почленно левые и правые части системы, можно прийти к выражению

$$A_{33}^{'(0)} u_3 = 0,$$

или

$$\{c'_{55}\partial_1^2 + 2c'_{45}\partial_1\partial_2 + c'_{44}\partial_2^2 + \omega_0^2\}\, u_3(x_1, x_2) = 0\,, \qquad (2.14)$$

где коэффициентами c'_{55}, c'_{45}, c'_{44} для проведения аналогии обозначены выражения вида

$$c'_{55} = c_{15} + c_{45} + c_{55}\,;\; c'_{45} = \frac{1}{2}(c_{13} + c_{45} + c_{25} + c_{34} + 2c_{35})\,;\; c'_{44} = c_{34} + c_{23} + c_{33} \qquad .(2.15)$$

Аналогично, упругие коэффициенты c_{ij}, $i, j = \overline{1,6}$ берутся из соотношений (2.2), $\omega_0^2 = \omega_1^2 \rho R^2$, $u_1(x'_1,x'_2)$, $u_2(x'_1,x'_2)$, $u_3(x'_1,x'_2)$ – амплитудные составляющие перемещений в отраженной волне, отнесенные к линейному размеру (радиусу) полости R.

Волновые числа k_{PP}, k_{SV}, k_{SH} находятся аналогично рассуждениям в первом разделе. Имея функцию гармонической волны в виде (1.15) из кинематических уравнений Коши и уравнений движения, подставляя в них функцию (1.15), можно получить уравнения вида (1.16), в которых коэффициенты A, B, C, E, F,Q определятся в случае обобщенной плоской деформации как:

$$
\begin{aligned}
A &= c_{11}n_1^2 + 2c_{14}n_1n_2 + c_{44}n_2^2;\\
B &= c_{14}n_1^2 + (c_{12} + c_{44})n_1n_2 + c_{24}n_2^2;\\
C &= c_{15}n_1^2 + (c_{13} + c_{45})n_1n_2 + c_{34}n_2^2;\\
E &= c_{44}n_1^2 + 2c_{24}n_1n_2 + c_{22}n_2^2;\\
F &= c_{45}n_1^2 + (c_{34} + c_{25})n_1n_2 + c_{23}n_2^2;\\
Q &= c_{55}n_1^2 + 2c_{35}n_1n_2 + c_{33}n_2^2.
\end{aligned}
$$

Нетривиальное решение однородной системы типа (1.16) имеет место, если ее определитель равен нулю, т.е.

$$
\begin{vmatrix}
A-\rho V^2 & B & C\\
B & E-\rho V^2 & F\\
C & F & Q-\rho V^2
\end{vmatrix} = 0
$$

Три собственных значения уравнения, полученного раскрытием этого определителя, представляют значения скоростей сейсмических волн вдоль направления $\vec{n}$. Это означает, что в трансверсально-изотропном теле в любом заданном направлении $\vec{n}$ распространяются три волны соответственно трем взаимно ортогональным векторам перемещения. Любое произвольное перемещение, поперечное перемещению со скоростью V_1, разлагается на две составляющие, распространяющиеся со скоростями V_2 и V_3 соответственно.

Учитывая то, что транстропный массив находится в условиях обобщенной плоской деформации (в случае распространения PP-, SV-волн) и в условиях антиплоской деформации (распространение SH-волн), выражения для скоростей, а соответственно, и для волновых чисел, можно представить в виде:

$$(Q-\rho V^2)((A-\rho V^2)(E-\rho V^2)-B^2) = 0$$

Отсюда, для случая SH-волн

$$V_3 = V_{SH} = \sqrt{\frac{Q}{\rho}}\,,\ k_{SH} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{Q}}\,, \tag{2.16а}$$

Для случая PP-, SV- волн

$$V_1 = V_{PP} = \sqrt{\frac{(E+A)+\sqrt{(E-A)^2+4B^2}}{2\rho}}\,,$$

$$V_2 = V_{SV} = \sqrt{\frac{(E+A)-\sqrt{(E-A)^2+4B^2}}{2\rho}}\,,$$

$$k_{PP} = \omega\sqrt{\frac{2\rho}{(E+A)+\sqrt{(E-A)^2+4B^2}}}\,,$$

$$k_{SV} = \omega\sqrt{\frac{2\rho}{(E+A)-\sqrt{(E-A)^2+4B^2}}}\,. \tag{2.16б}$$

Теперь требуется решить первую и вторую основные краевые задачи, т.е. рассмотреть случаи, когда контур диагональной круговой полости неподкреплен (свободен от нагрузок) и закреплен недеформируемой крепью.

2.2 Решение первой основной задачи - контур диагональной круговой полости свободен от нагрузок

Предположим, что контур диагональной круговой полости с радиусом R глубокого заложения свободен от воздействия внешних нагрузок. Тогда граничные и начальные условия на контуре полости Γ запишутся в виде:

$$(\sigma_{nn}+\sigma^*_{nn})_\Gamma = 0\,,\ (\sigma_{n\tilde{\theta}}+\sigma^*_{n\tilde{\theta}})_\Gamma = 0\,,\qquad (\sigma_{\tilde{\theta}3}+\sigma^*_{\tilde{\theta}3})_\Gamma = 0 \tag{2.17}$$

Здесь σ^*_{nn}, $\sigma^*_{n\tilde{\theta}}$ - нормальные и касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1,n_2), обусловленные падающей волной растяжения-сжатия, в плоскости поперечного сечения полости; $\sigma^*_{\tilde{\theta}3}$ - касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1,n_2),

обусловленные падающей SH-волной сдвига; σ_{nn}, $\sigma_{n\tilde{\theta}}$, $\sigma_{\tilde{\theta}3}$ - соответствующие амплитудные составляющие напряжений в отраженной волне.

Для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (2.10*), как и в случае плоской деформации, введем аффинное преобразование [133] вида

$$\{x_1^{(i)}\} = \{\xi_1^{(i)}\},\ \{x_2^{(i)}\} = -\mathrm{M}_1'\{\xi_1^{(i)}\} + \mathrm{M}_2'\{\xi_2'^{(i)}\},\ i = 1,2$$

$$\{x_1^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \end{Bmatrix},\ \{x_2^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \end{Bmatrix},\ \{\xi_1^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \end{Bmatrix},\ \{\xi_2^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \xi_2^{(1)} \\ \xi_2^{(2)} \end{Bmatrix} \qquad (2.18)$$

где $\mathrm{M}' = \mathrm{M}_1' + i\mathrm{M}_2'$ - корень характеристического уравнения второй степени (причем $\mathrm{M}_2' > 0$ - положительно определенная симметрическая матрица):

$$B_0'\mathrm{M}'^2 + B_1'\mathrm{M}' + B_2' = 0,$$

т.е.

$$\mathrm{M}_1' = -\frac{1}{2}B_0'^{-1}B_1',\quad \mathrm{M}_2' = \frac{1}{2}[4B_0'^{-1}B_2' - (B_0'^{-1}B_1')^2]^{1/2}. \qquad (2.19)$$

Тогда выполняется следующее преобразование

$$(B_0'\{\partial_1^{(i)2}\} + B_1'\{\partial_1^{(i)}\partial_2^{(i)}\} + B_2'\{\partial_2^{(i)2}\}) = B_0'[(E\{\partial_1^{(i)}\} - \mathrm{M}_1'\{\partial_2^{(i)}\}) - i\mathrm{M}_2'\{\partial_2^{(i)}\}]*$$
$$*[(E\{\partial_1^{(i)}\} - \mathrm{M}_1'\{\partial_2^{(i)}\}) + i\mathrm{M}_2'\{\partial_2^{(i)}\}] =$$
$$= \left[\{\frac{\partial}{\partial\xi_1^{(i)}}\} - i\{\frac{\partial}{\partial\xi_2^{(i)}}\}\right]\cdot\left[\{\frac{\partial}{\partial\xi_1^{(i)}}\} + i\{\frac{\partial}{\partial\xi_2^{(i)}}\}\right] = \{\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^{(i)2}}\} + \{\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^{(i)2}}\} \equiv \{\nabla^{(i)2}_{\xi_1\xi_2}\},$$

где $\nabla^{(i)2}_{\xi_1\xi_2}$ - вектор оператора Лапласа по векторам- переменным $\xi_1^{(i)}$ и $\xi_2^{(i)}$, $i = 1,2$.

Таким образом, дифференциальное уравнение (2.10*) сводится к уравнению Гельмгольца в координатах ($\xi_1^{(i)}$, $\xi_2^{(i)}$) вида

$$(E\{\nabla^{(i)2}_{\xi_1\xi_2}\} + B_0'^{-1}B_3')\{u_i(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})\} = 0 \qquad (2.20)$$

Аналогично, для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (2.14) введем аффинное преобразование [133] вида

$$x_1^{(3)} = \xi_1^{(3)},\ x_2^{(3)} = -\mu_1^{'}\xi_1^{(3)} + \mu_2^{'}\xi_2^{(3)},$$
(2.21)

где $\mu^{'} = \mu_1^{'} + i\mu_2^{'}$ (причем $\mu_2^{'} > 0$)- корень характеристического уравнения второй степени эллиптического типа

$$c_{55}^{'}\mu^{'2} + 2c_{45}^{'}\mu^{'} + c_{44}^{'} = 0,$$

т.е.

$$\mu_1^{'} = -\frac{c_{45}^{'}}{c_{55}^{'}},\quad \mu_2^{'} = \frac{\sqrt{c_{44}^{'}c_{55}^{'} - c_{45}^{'2}}}{c_{55}^{'}}. \qquad (2.22)$$

Теперь с помощью несложных преобразований, как было проделано в предыдущих разделах, можно свести уравнение (2.14) к уравнению Гельмгольца в координатах ($\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}$)

$$(\nabla^2_{\xi_1^{'}\xi_2^{'}} + \omega_0^2)u_3(\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}) = 0 \qquad (2.23)$$

В общем случае, точки $O^{(i)}$, $i = 1,2,3$, являющиеся центрами локальных координатных систем $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}), i = 1,2,3$, при преобразовании (2.18) и (2.21) перейдут в точки $O_{\xi}^{(i)}$, $i = 1,2,3$. Их будем рассматривать как начало систем координат ($\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}$), $i = 1,2,3$ с осями, ориентированными по осям координат ($\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}$) и полярных координат ($r^{(i)}, \kappa^{(i)}$) с отчетом полярного угла $\kappa^{(i)}$ от оси $O^{(i)}\ \xi_1^{(i)}$.

Так же как и в случае плоской деформации, уравнения Гельмгольца вида (2.20) для перемещений $\overline{u}_p = \{u_1, u_2\}$ при распространении продольно-поперечных волн, в частном случае, когда упругие коэффициенты $c_{16}^{'}$=0, $c_{26}^{'}$=0, т.е. имеется горизонтальная и

вертикальная слоистость массива, можно разделить, тогда получим 2 уравнения:

$$(\nabla^2_{\xi_1^{(1)}\xi_2^{(1)}} + \omega_1^2 / c_{11}^{'})u_1(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}) = 0\,,\ (\nabla^2_{\xi_1^{(2)}\xi_2^{(2)}} + \omega_1^2 / c_{66}^{'})u_2(\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}) = 0 \qquad (2.24)$$

Теперь в соответствии с принципом обобщенной суперпозиции представим решения (2.23), (2.24) в перемещениях $\overline{u} = \{u_i\} = \{u_1, u_2, u_3\}$ в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов $X_n^{(i)}$, $i = 1,2,3$ и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода [5,133]:

$$u_i = \sum_{(n)} X_n^{(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{in\kappa^{(i)}}\ ,\ n = \overline{-\infty, +\infty}\ ,\ i = 1,2,3 \qquad (2.25)$$

где

$$\omega_0^{(1)} = \omega_1 / \sqrt{c_{11}^{'}}\ ,\ \omega_0^{(2)} = \omega_1 / \sqrt{c_{66}^{'}}\ ,\ \omega_0^{(3)} = \omega_0$$

Найдем соответствующие представлению перемещений $\overline{u} = \{u_i\}_{i=1}^3$, в виде (2.25) выражения для составляющих напряжений.

В случае обобщенной плоской деформации (распространения упругих волн растяжения-сжатия) уравнения обобщенного закона Гука (2.1) можно переписать в следующем виде (считается, что учитываются только компоненты напряжения и перемещений в плоскости поперечного сечения диагональной полости, т.е. σ_{23} , σ_{13}, ε_{23}, ε_{13} равны нулю):

$$\begin{cases} \sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{14}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} = c_{12}\varepsilon_{11} + c_{22}\varepsilon_{22} + c_{24}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{12} = c_{14}\varepsilon_{11} + c_{24}\varepsilon_{22} + c_{44}\varepsilon_{12}, \end{cases}$$

А для случая антиплоской деформации, когда ненулевыми остаются лишь напряжения σ_{13}, σ_{23}, выражения (2.1) перепишутся в виде:

$$\begin{cases} \sigma_{23} = c_{33}\varepsilon_{23} + c_{35}\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{13} = c_{35}\varepsilon_{23} + c_{55}\varepsilon_{13}, \end{cases}$$

Применяя вышеизложенные формулы, а также соотношения для перемещений (2.25), получим следующие выражения:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{11}, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12}$$

$$\sigma_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)} X_n^{(i)}\omega_0^{(i)}[G_j^{'(i)}H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(i)}r^{(i)})e^{i(n-1)\kappa^{(i)}} - \overline{G}_j^{'(i)}H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(i)}r^{(i)})e^{i(n+1)\kappa^{(i)}}], (j=\overline{1,3}) \quad (2.26)$$

$$\sigma_{k3} = \frac{1}{2}\sum_{(n)} X_n^{(3)}\omega_0^{(3)}[G_k^{'(3)}H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(3)}r^{(3)})e^{i(n-1)\kappa^{(3)}} - \overline{G}_k^{'(3)}H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(3)}r^{(3)})e^{i(n+1)\kappa^{(3)}}], (k=\overline{1,2})$$

где

$$\left\{\begin{matrix} G_j^{'(1)} \\ j=\overline{1,3} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{14} \end{matrix}\right\} + i\cdot(g_1^{(1)}\left\{\begin{matrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{14} \end{matrix}\right\} + g_1^{(2)}\left\{\begin{matrix} c_{14} \\ c_{24} \\ c_{44} \end{matrix}\right\}),$$

$$\left\{\begin{matrix} G_j^{'(2)} \\ j=\overline{1,3} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} c_{14} \\ c_{24} \\ c_{44} \end{matrix}\right\} + i\cdot(g_2^{(1)}\left\{\begin{matrix} c_{14} \\ c_{24} \\ c_{44} \end{matrix}\right\} + g_2^{(2)}\left\{\begin{matrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{24} \end{matrix}\right\}), \quad (2.27)$$

$$\left\{\begin{matrix} G_k^{'(3)} \\ k=\overline{1,2} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} c_{55} \\ c_{35} \end{matrix}\right\} + i\cdot\mu_2^{-1}\cdot(\left\{\begin{matrix} c_{35} \\ c_{33} \end{matrix}\right\} + \mu_1\left\{\begin{matrix} c_{55} \\ c_{35} \end{matrix}\right\}),$$

и

$$\{g_i^{(1)}\} = diag(\mathrm{M}_2^{'-1}\mathrm{M}_1^{'}), \quad \{g_i^{(2)}\} = diag(\mathrm{M}_2^{'-1}), \; i=1,2$$

Здесь термин «*diag*» означает вектор из элементов главной диагонали соответствующей матрицы.

Теперь, используя выражение (2.18),(2.21) и (1.10) можно найти соотношение для точек, лежащих на круговом контуре Γ диагональной полости:

$$\{r^{(i)}e^{i\kappa^{(i)}}\} = \{\eta_{10}^{(i)}\}\{e^{i\theta^{(i)}}\} + \{\eta_{20}^{(i)}\}\{e^{-i\theta^{(i)}}\} \quad (2.28)$$

где

$$\{\eta_{10}^{'(i)}\} = a_0^{'}\{R^{(i)}\rho^{(i)}\}, \qquad \{\eta_{20}^{'(i)}\} = b_0^{'}\{R^{(i)}\rho^{(i)}\} \quad (2.29)$$

$$a_0^{'} = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{M}_2^{'-1}(\mathrm{M}_2^{'} + i\mathrm{M}_1^{'} + E), & \textit{если индекс } i = 1,2 \\ \frac{\mu_2^{'} + i\mu_1^{'} + 1}{2\mu_2^{'}}, & \textit{если индекс } i = 3 \end{cases},$$

$$b_0^{'} = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{M}_2^{'-1}(\mathrm{M}_2^{'} + i\mathrm{M}_1^{'} - E), & \textit{если индекс } i = 1,2 \\ \frac{\mu_2^{'} + i\mu_1^{'} - 1}{2\mu_2^{'}}, & \textit{если индекс } i = 3 \end{cases}$$

Для представления комплексных выражений в (2.25), (2.26) на контуре диагональной круговой полости используем теорему сложения цилиндрических функций, сформулированную в первом разделе, проверяя выполнение условия вида

$$|\eta_{10}^{'(i)}| > |\eta_{20}^{'(i)}| \tag{2.30}$$

Это условие выполнено, поскольку матрица $\mathrm{M}_2^{'} > 0$ является положительно определенной, и параметр $\mu_2^{'}$ больше нуля, т.е. выполнено $|a_0'| > |b_0'|$, из чего следует верность условия (2.30).

Теперь можно записать представления комплексных потенциалов для точек на контуре круговой полости Γ [36]:

$$H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{in\kappa^{(i)}} = \sum_{(p)} Q_{np}^{(i)} e^{ip\theta^{(i)}}, \; i = 1,2,3 \tag{2.31}$$

где

$$Q_{np}^{(i)} = \delta_{np} H_{\frac{n-p}{2}}^{(1)}(\omega_0 |\eta_{10}^{'(i)}|) \widetilde{\eta}_{10}^{'(i)^{(n-p)/2}} J_{\frac{n-p}{2}}(\omega_0 |\eta_{20}^{'(i)}|) \widetilde{\eta}_{20}^{'(i)^{(n-p)/2}} \tag{2.32}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\widetilde{\eta}_{ko}^{'(i)} = \eta_{k0}^{'(i)} |\eta_{k0}^{'(i)}|^{-1}, \; k = 1,2; \\ &\delta_{np} = 1, \textit{ если } n + p - \textit{четное число}, \\ &\delta_{np} = 0, \textit{ если } n + p - \textit{нечетное число}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Теперь перемещения u_i на контуре Γ представимы выражением

$$(u_i)_\Gamma = \sum_{(n,p)} X_n^{(i)} Q_{np}^{(i)} e^{ip\theta^{(i)}} \quad , \; i = 1,2,3 \tag{2.34}$$

Представления для нормальных и тангенсальных напряжений получим, используя выражения (1.38а), (1.38б) с контурной функцией (1.39), (1.40). Граничные условия (2.17) могут быть переопределены в виде

$$\begin{aligned} &(|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn} + |\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn}^*)_\Gamma = 0 \,, \; (|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\tilde{\theta}} + |\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\tilde{\theta}}^*)_\Gamma = 0 \;, \\ &(|\widetilde{\omega}'| \sigma_{\tilde{\theta}3} + |\widetilde{\omega}'| \sigma_{\tilde{\theta}3}^*)_\Gamma = 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Теперь контурные представления для нормальных и тангенсальных напряжений могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} &(|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn})_\Gamma = \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n,p)} X_n^{(i)} \lambda_{np}^{(i)} e^{ip\theta^{(i)}} \,, \\ &(|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\tilde{\theta}})_\Gamma = \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n,p)} X_n^{(i)} \vartheta_{np}^{(i)} e^{ip\theta^{(i)}} \,, \\ &(|\widetilde{\omega}'| \sigma_{\tilde{\theta}3})_\Gamma = \sum_{(n,p)} X_n^{(3)} \lambda_{npl}^{(3)} e^{ip\theta_l^{(3)}} \end{aligned} \tag{2.36}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{np}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R^2}{8} \{ &\overline{E}_1'^{(i)} Q_{n-1,p-2}^{(i)} + E_1'^{(i)} Q_{n-1,p+2}^{(i)} - \overline{I}_1'^{(i)} Q_{n+1,p-2}^{(i)} - I_1'^{(i)} Q_{n+1,p+2}^{(i)}) + \\ &+ 2(E_3'^{(i)} Q_{n-1,p}^{(i)} - I_3'^{(i)} Q_{n+1,p}^{(i)})\} \\ \vartheta_{np}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R^2}{8} \{ &\overline{C}_1'^{(i)} Q_{n-1,p-2}^{(i)} + C_1'^{(i)} Q_{n-1,p+2}^{(i)} - \overline{D}_1'^{(i)} Q_{n+1,p-2}^{(i)} - D_1'^{(i)} Q_{n+1,p+2}^{(i)}\} \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} &E_1'^{(i)} = (G_1'^{(i)} - G_2'^{(i)}) + 2i\, G_3'^{(i)}, \; I_1'^{(i)} = (\overline{G}_1'^{(i)} - \overline{G}_2'^{(i)}) + 2i\, \overline{G}_3'^{(i)}, \\ &E_3'^{(i)} = (G_1'^{(i)} + G_2'^{(i)}), \; I_3'^{(i)} = (\overline{G}_1'^{(i)} + \overline{G}_2'^{(i)}), i = 1,2 \\ &C_1'^{(i)} = 2G_3'^{(i)} + i\,(G_2'^{(i)} - G_1'^{(i)}), \; D_1'^{(i)} = 2\overline{G}_3'^{(i)} + i\,(\overline{G}_2'^{(i)} - \overline{G}_1'^{(i)}), i = 1,2 \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\lambda_{np}^{(3)} = \frac{\omega_0^{(3)} R}{4} (\overline{E}_1'^{(3)} Q_{n-1,p-1}^{(3)} + E_1'^{(3)} Q_{n-1,p+1}^{(3)} - \overline{I}_1'^{(3)} Q_{n+1,p-1}^{(3)} - I_1'^{(3)} Q_{n+1,p+1}^{(3)}) \,, \tag{2.39}$$

$$E_1^{(3)} = G_1^{'(3)} + i\, G_2^{'(3)},\ I_1^{(3)} = \overline{G}_1^{'(3)} + i\, \overline{G}_2^{'(3)} \tag{2.40}$$

Выражения для перемещений и напряжений на контуре круговой полости в падающей волне $(u_i^*)_\Gamma\,(i=\overline{1,3}) = (u_{PP}, u_{SV}, u_{SH})_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\ \sigma_{nn}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\ \sigma_{n\tilde{\theta}}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|\,\sigma_{\tilde{\theta}3}^*)_\Gamma$, можно найти, применяя формулы разложений экспоненциальных функций в гармонические ряды, по той же схеме, как и в первом разделе, в случае плоской деформации круговой полости. Используя формулу Якоби-Ангера, получим контурные разложения цилиндрических функций. Таким образом,

$$(u_i^*)_\Gamma = U_i^* \sum_{(p)} Q_p^{(i)} e^{ip\theta}\ . \tag{2.41}$$

где

$$Q_p^{(i)} = J_p(R\,k_{12}^{(i)}) e^{ip\delta_i^{(1)}}; \tag{2.42}$$

$$e^{i\delta_i^{(1)}} = (k_2^{(i)} + ik_1^{(i)})/k_{12}^{(i)},\quad k_{12}^{(i)} = (k_1^{(i)2} + k_3^{(i)2})^{1/2}. \tag{2.43}$$

Волновые числа $k_j^{(i)}$ определятся из выражений (2.16а), (2.16б).

Контурные выражения для нормальных и тангенсальных напряжений в падающей волне определятся из формул:

$$\begin{aligned}
(|\widetilde{\omega}'|^2\ \sigma_{nn}^*)_\Gamma &= i\frac{R^2}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(p)} U_i^* \alpha_p^{(i)} e^{ip\theta},\\
(|\widetilde{\omega}'|^2\ \sigma_{n\tilde{\theta}}^*)_\Gamma &= i\frac{R^2}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(p)} U_i^* \beta_p^{(i)} e^{ip\theta},\\
(|\widetilde{\omega}'|\,\sigma_{\tilde{\theta}3}^*)_\Gamma &= (1/2)R\ U_3^* \sum_{(p)} \alpha_p^{(3)} e^{ip\theta}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_p^{(i)} &= \overline{\chi}_1^{'*(i)} Q_{p-2}^{(i)} + \chi_1^{'*(i)} Q_{p+2}^{(i)} + 2\,\mathrm{Re}(\widetilde{\chi}_1^{'*(i)}) \cdot Q_p^{(i)},\quad i = 1,2\\
\alpha_p^{(3)} &= \chi_1^{'*(3)} Q_{p-1}^{(3)} + \widetilde{\chi}_1^{'*(3)} Q_{p+1}^{(3)},\\
\beta_p^{(i)} &= -i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) \cdot (Q_{p-2}^{(i)} - Q_{p+2}^{(i)}),\quad i = 1,2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\chi_1^{*(1)} = (c_{11} - c_{12})k_1^{(1)} + (c_{14} - c_{24})k_2^{(1)} + 2i \cdot (c_{14}k_1^{(1)} + c_{44}k_2^{(1)}) \\
&\chi_1^{*(2)} = (c_{14} - c_{24})k_1^{(2)} + (c_{12} - c_{22})k_2^{(2)} + 2i \cdot (c_{44}k_1^{(2)} + c_{24}k_2^{(2)}) \\
&\widetilde{\chi}_1^{*(1)} = (c_{11} + c_{12})k_1^{(1)} + (c_{14} + c_{24})k_2^{(1)} + 2i \cdot (c_{14}k_1^{(1)} + c_{44}k_2^{(1)}) \\
&\widetilde{\chi}_1^{*(2)} = (c_{14} + c_{24})k_1^{(2)} + (c_{12} + c_{22})k_2^{(2)} + 2i \cdot (c_{44}k_1^{(2)} + c_{24}k_2^{(2)}) \\
&\chi_2^{*(1)} = 2(c_{14}k_1^{(1)} + c_{44}k_2^{(1)}) + i \cdot [(c_{12} - c_{11})k_1^{(1)} + (c_{24} - c_{14})k_2^{(1)}] \\
&\chi_2^{*(2)} = 2(c_{44}k_1^{(2)} + c_{24}k_2^{(2)}) + i \cdot [(c_{24} - c_{14})k_1^{(2)} + (c_{22} - c_{12})k_2^{(2)}] \\
&\chi_1^{*(3)} = (c_{35}k_2^{(3)} + c_{55}k_1^{(3)}) - i(c_{33}k_2^{(3)} + c_{35}k_1^{(3)}), \\
&\widetilde{\chi}_1^{*(3)} = (c_{35}k_2^{(3)} + c_{55}k_1^{(3)}) + i(c_{33}k_2^{(3)} + c_{35}k_1^{(3)}), \\
&\chi_2^{*(3)} = (c_{33}k_2^{(3)} + c_{35}k_1^{(3)}) + i(c_{35}k_2^{(3)} + c_{55}k_1^{(3)}), \\
&\widetilde{\chi}_2^{*(3)} = (c_{33}k_2^{(3)} + c_{35}k_1^{(3)}) - i(c_{35}k_2^{(3)} + c_{55}k_1^{(3)}),
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Теперь для удовлетворения граничным условиям (2.35) применим метод приравнивания коэффициентов при одинаковых гармонических коэффициентах $e^{ip\theta}$. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $X_n^{(i)}$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)} X_n^{(i)} \lambda_{np}^{(i)} = -i\frac{R^2}{4}\sum_{i=1}^{2} U_i^* \alpha_p^{(i)} \\
&\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)} X_n^{(i)} \vartheta_{np}^{(i)} = -i\frac{R^2}{4}\sum_{i=1}^{2} U_i^* \beta_p^{(i)} \\
&\sum_{(n)} X_n^{(3)} \lambda_{np}^{(3)} = -(½) R\ U_3^* \alpha_p^{(3)}
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

Данная система решается методом редукции. Сходимость системы показывается численно в течение анализа.

2.3 Решение второй основной задачи - круговой контур диагональной полости подкреплен недеформируемой обделкой

Рассмотрим динамическую контактную задачу о напряженном состоянии заглубленной диагональной круговой полости, подкрепленной абсолютно жесткой крепью, в транстропном наклонно-слоистом массиве, находящемся в условиях обобщенной плоской деформации, при стационарной дифракции упругих волн.

Поскольку контакт между недеформируемой обделкой и упругим транстропным массивом жесткий и непрерывный, то граничные

условия на контуре диагональной полости Γ при $r=R$ можно записать в виде

$$(u_i + u_i^*)_\Gamma = 0\,, \quad i = 1,2,3 \tag{2.47}$$

Для решения второй основной задачи также необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка вида (2.10*), (2.14) с граничными условиями (2.47). Для получения адекватного решения, введем аффинное преобразование вида (2.18) для случая распространения продольно-поперечных волн (PP-, SV-), и вида (2.21) – для случая сдвиговых волн (SH-), тогда соответствующие дифференциальные уравнения (2.10*), (2.14) могут быть сведены к уравнению Гельмгольца вида (2.24), с учетом частного случая слоистости среды, и вида (2.23) в координатах $(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$, $i = 1,2,3$.

Решения уравнений Гельмгольца ищутся в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов $Y_n^{(i)}$, $i = 1,2,3$ и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода [5, 133]

$$u_i = \sum_{(n)} Y_n^{(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{in\kappa^{(i)}}\,, \; n = \overline{-\infty,+\infty}\,, \; i = 1,2,3 \tag{2.48}$$

с величинами

$$\omega_0^{(1)} = \omega_1 / \sqrt{c_{11}^{'}}\,, \; \omega_0^{(2)} = \omega_1 / \sqrt{c_{66}^{'}}\,, \; \omega_0^{(3)} = \omega_0$$

Соответствующие представлению перемещения u_i $i = 1,2,3$ в виде (2.48) выражения для составляющих напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, σ_{13}, σ_{23} будут представлены в следующем виде:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{11}, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12}$$

$$\sigma_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)} Y_n^{(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{'(i)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa^{(i)}} - \overline{G}_j^{'(i)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa^{(i)}}], (j = \overline{1,3}) \tag{2.49}$$

$$\sigma_{k3} = \frac{1}{2}\sum_{(n)} Y_n^{(3)} \omega_0^{(3)} [G_k^{'(3)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r^{(3)}) e^{i(n-1)\kappa^{(3)}} - \overline{G}_k^{'(3)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r^{(3)}) e^{i(n+1)\kappa^{(3)}}], (k = \overline{1,2})$$

где значения $G_j^{'(i)}$, $i, j = 1,2,3$ определяются соотношениями (2.27).

Для вычисления неизвестных коэффициентов $Y_n^{(i)}, i=1,2,3$, пользуясь выражениями для точек, лежащих на контуре диагональной круговой полости Γ, (2.28), (2.29), а также условием (2.30), применяя теорему сложения цилиндрических функций, соотношение (2.48) на контуре Γ можно представить в виде:

$$(u_i)_\Gamma = \sum_{(n,p)} Y_n^{(i)} Q_{np}^{(i)} e^{ip\theta^{(i)}} \quad , \; i=1,2,3 \tag{2.50}$$

где комплексные выражения $Q_{np}^{(i)} \quad i=1,2,3$ берутся из формул (2.32), (2.33).

Представления для перемещений на контуре в падающей волне $(u_i^*)_\Gamma \; (i=\overline{1,3})$ находятся из выражений (2.41), где комплексные функции $Q_p^{(i)}$ находятся из соотношений (2.42), (2.43).

Теперь для удовлетворения граничным условиям (2.47) применим метод приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $e^{ip\theta}$. Из полученных равенств после соответствующих подстановок можно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $Y_n^{(i)}$ в виде

$$\sum_{(n,p)} Y_n^{(i)} Q_{np}^{(i)} = -U_i^* \sum_{(p)} Q_p^{(i)} \; , \; i=1,2,3 \tag{2.51}$$

которая решается методом редукции. Численной реализацией может быть показана сходимость решений системы уравнений по мере удовлетворения граничным условиям на контуре диагональной круговой полости.

Далее для вычисления контурных нормальных и тангенсальных напряжений вблизи диагональной полости применяются преобразования (2.49), (2.27), с помощью которых получаются следующие выражения:

$$(|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn})_\Gamma = \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n,p)} Y_n^{(i)} \lambda_{np}^{(i)} e^{ip\theta^{(i)}} \quad , \quad (|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\tilde{\theta}})_\Gamma = \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n,p)} Y_n^{(i)} \vartheta_{np}^{(i)} e^{ip\theta^{(i)}} \quad ,$$
$$(|\widetilde{\omega}'| \sigma_{\tilde{\theta}3})_\Gamma = \sum_{(n,p)} Y_n^{(3)} \lambda_{npl}^{(3)} e^{ip\theta_l^{(3)}} \tag{2.52}$$

где комплексные функции $\lambda_{np}^{(i)}$, $\vartheta_{np}^{(i)}$ определятся из соотношений (2.37), (2.38), (2.39), (2.40).

Формулы для нормальных и тангенсальных напряжений в падающей волне $(|\widetilde{\omega}'|^2\sigma^*_{nn})_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\sigma^*_{n\tilde{\theta}})_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|\sigma^*_{\tilde{\theta}3})_\Gamma$ определятся соотношениями (2.44), (2.45).

2.4 Некруговая полость глубокого заложения в условиях обобщенной плоской деформации

Анизотропная (транстропная) модель складчато-слоистого массива с наклонными плоскопараллельными слоями вблизи подземного сооружения дает возможность подразделять горизонтальные выработки, в зависимости от пространственной ориентации, на штреки (пройденные вдоль простирания слоев), квершлаги (пройденные вкрест протяженности слоев) и так называемые диагональные выработки, которые занимают промежуточное положение между штреками и квершлагами. Такие подземные сооружения находят применение в системе подготовительных и капитальных горных выработок. Так, околоствольные обходные выработки шахт и рудников пересекают наклонение слои горных пород в разном направлении: трассы транстропных тоннелей обычно произвольно ориентированы относительно элементов налегания поверхностей напластования горных пород.

Если мощность каждого слоя породного массива, по крайней мере, на порядок меньше характерного поперечного размера протяженной горной выработки, такой массив может быть представлен трансверсально-изотропным (транстропным) телом с плоскостью изотропии, совпадающей с плоскостью простирания слоев. В подобном породном массиве неоднородности(полости), моделирующие подземные сооружения, в большинстве случаев, имеют горизонтальную протяженность.

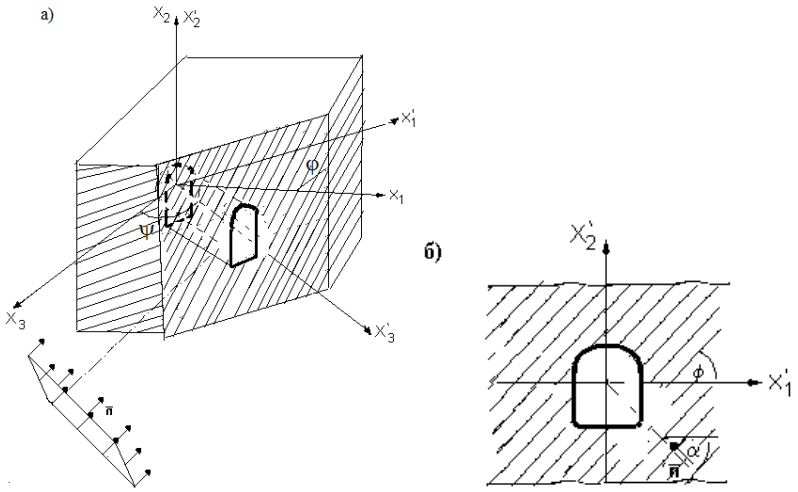
В случае диагональных выработок в рассмотрение может быть взята модель обобщенной плоской деформации. Некруговой профиль выработки (полости) влияет на напряженно-деформированное состояние массива вблизи диагональной полости, а обобщенная плоская деформация вносит свой вклад при расчете состояния подземного сооружения. Профиль сооружения может носить гладкий контур, тогда он легко может быть смоделирован типами контуров, приведенных на рис. 3. При этом отображающая функция, позволяющая с помощью конформных преобразований отобразить внешность некругового контура на внешность круга, представляет собой выражение вида

$$z = \widetilde{\omega}(\zeta) = R(\zeta + \sum_{m=1}^{N} d_m \zeta^{-m}), \quad z = x_1 + i x_2, \quad \zeta = \rho e^{i\theta} \tag{2.53}$$

Здесь коэффициенты d_m могут быть действительными числами (см. таблицу 3 для профилей а-з), тогда они описывают симметричные гладкие контура, в случае комплексных коэффициентов d_m , когда $d_m = d_{1m} + i d_{2m}$, могут быть описаны несимметричные контуры выработок (полостей) [133,134], (см. рис.3и - 3н).

Так же как и в случае круговой диагональной полости, в данном случае исследований некруговой полости, мелкослоистый массив горных пород моделируется упругим транстропным телом с плоскостью изотропии, совпадающей с наклонной к горизонту под углом φ плоскостью мелких слоев, находящийся в условиях обобщенной плоской деформации, когда модель однородного массива позволяет предположить одинаковость искривления поперечных сечений диагональных полостей на всем их протяжении (рис.18).

Уравнения обобщенного закона Гука относительно декартовой системы координат $Ox_1'x_3'x_3'$ (рис.18), где ось Ox_2' направлена вертикально вверх, а оси Ox_1' и Ox_3' составляют угол ψ с соответствующими осями декартовой системы координат $Ox_1 x_3 x_3$, в которой Ox_1 и Ox_3 направлены горизонтально вкрест и по простиранию плоскости изотропии, запишутся в виде аналогичном (2.1) с коэффициентами упругости $c_{ij}(i, j = 1,2,3,4,5,6)$ (2.2), зависящими от упругих характеристик $b_{ij}(i, j = 1,2,3,4,5,6)$ из (1.2), которые, в свою очередь зависят от пяти упругих постоянных транстропного массива E_1, E_2, ν_1 , ν_2 , G_2 и угла φ .



φ – угол наклона плоскости изотропии; α – угол падения волны; ψ – угол отклонения оси диагональной выработки; $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении распространения упругой волны

Рисунок 18 – Схема распространения гармонической волны в транстропном массиве с некруговой диагональной полостью глубокого заложения при обобщенной плоской деформации: а) общий вид; б) плоскость поперечного сечения

Уравнения движения в отсутствии массовых сил в операторном виде описываются соотношениями (2.4), причем выражения для операторов берутся из соотношений (2.5).

Горизонтальная диагональная полость некругового поперечного сечения проведена вдоль оси Ox_3' и имеет поперечное сечение с контуром Γ, описываемым функцией (2.53).

Предполагается, что на поверхность диагональной полости некругового поперечного сечения вдоль направления, задаваемого единичным вектором $\vec{n}=(n_1, n_2)$, падает упругая, поляризованная в плоскости поперечного сечения полости (случай PP-, SV- волн) и поляризованная вдоль оси Ox_3' (случай SH-волн) стационарная волна вида (2.6), где амплитуда волны также описывается выражением (2.7) (рис.18). Волновые числа k_{PP}, k_{SV}, k_{SH} находятся из соотношений (2.16а), (2.16б).

Так же, как и в случае круговой диагональной полости, дифракционное поле при падении волн растяжения-сжатия (PP-, SV-) берется в состоянии обобщенной плоской деформации и характеризуется составляющими перемещений в плоскости поперечного сечения полости $\overline{u} = (u_1, u_2)$. Краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (2.4) с учетом, что все составляющие перемещений, кроме (u_1, u_2), равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x'_1, x'_2). Тогда для некруговой диагональной полости глубокого заложения в случае дифракции упругих продольных и поперечных волн дифференциальные уравнения удобней представить в матричной форме вида (2.10*).

При падении SH-волн, так же как и в случае круговой диагональной полости, рассматривается антиплоская деформация, а дифракционное поле характеризуется амплитудными составляющими перемещений $u_3(x_1,x_2)$ в осевом направлении. Краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (2.4) с учетом, что все составляющие перемещений, кроме u_3 , равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x'_1, x'_2). Дифференциальное уравнение в этом случае представляет собой выражение вида (2.14), с коэффициентами (2.15).

Ниже рассматривается постановка и находится решение первой и второй основных задач по определению динамического напряженно-деформированного состояния глубоко заложенной диагональной некруговой полости в трансторопном массиве, когда контур ее не закреплен (§2.5), закреплен недеформируемой обделкой (§2.6), а также приводится анализ закономерностей распределения динамических напряжений и перемещений вблизи некруговой полости от воздействия упругих волн при различных исходных физических и геометрических параметрах.

2.5 Решение первой основной задачи для некруговой диагональной полости глубокого заложения при обобщенной плоской деформации

Предположим, что контур заглубленной некруговой диагональной полости с радиусом R свободен от воздействия внешних нагрузок. Тогда граничные условия на контуре Γ запишутся в виде, аналогичном (2.17):

$$(\sigma_{nn}+\sigma^{*}_{nn})_{\Gamma}=0\,,\qquad (\sigma_{n\tilde{\theta}}+\sigma^{*}_{n\tilde{\theta}})_{\Gamma}=0\,,$$

$$(\sigma_{\tilde{\theta}3}+\sigma^{*}_{\tilde{\theta}3})_{\Gamma}=0 \quad (2.54)$$

Здесь σ^{*}_{nn}, $\sigma^{*}_{n\tilde{\theta}}$ - нормальные и касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1,n_2), обусловленные падающей волной растяжения-сжатия, в плоскости поперечного сечения некруговой диагональной полости; $\sigma^{*}_{\tilde{\theta}3}$ - касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1,n_2), обусловленные падающей сдвиговой волной (SH-); σ_{nn}, $\sigma_{n\tilde{\theta}}$, $\sigma_{\tilde{\theta}3}$ - соответствующие амплитудные составляющие напряжений в отраженной волне.

Для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка вида (2.10*) и (2.14) вводятся аффинные преобразования [133] вида (2.18), (2.21). Величины $\mathrm{M}' = \mathrm{M}'_1 + i\mathrm{M}'_2 \quad (\mathrm{M}'_2 > 0)$, $\mu' = \mu'_1 + i\mu'_2 \quad (\mu'_2 > 0)$ - корни характеристических уравнений второй степени, которые определяются выражениями (2.19),(2.22).

Следуя основной идеи наших преобразований, данные аффинные преобразования позволяют свести уравнения (2.10*) и (2.14) к уравнениям Гельмгольца вида (2.24), (2.23), с учетом частных случае горизонтальной и вертикальной слоистости при исследовании волн растяжения-сжатия и вертикального сдвига.

В общем случае, точки $O^{(i)}$, $i=1,2,3$, являющиеся центрами локальных координатных систем $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}), i=1,2,3$, при преобразовании (2.18) и (2.21) перейдут в точки $O_{\xi}^{(i)}$, $i=1,2,3$. Их можно рассматривать как начало систем координат $(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$, $i=1,2,3$ с осями, ориентированными по осям координат $(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$ и полярных координат $(r^{(i)}, \kappa^{(i)})$ с отчетом полярного угла $\kappa^{(i)}$ от оси $O^{(i)}\,\xi_1^{(i)}$.

Решения уравнений в перемещениях $\overline{u} = \{u_i\} = \{u_1, u_2, u_3\}$ вида (2.24) и (2.23), в соответствии с принципом обобщенной суперпозиции можно представить в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов $X_n^{(i)}, i=1,2,3$ и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода [133,134]

$$u_i = \sum_{(n)} X_n^{'(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{in\kappa^{(i)}} \ , \ n = \overline{-\infty,+\infty} \ , \ i = 1,2,3 \tag{2.55}$$

$$\omega_0^{(1)} = \omega_1 / \sqrt{c_{11}^{'}} \ , \ \omega_0^{(2)} = \omega_1 / \sqrt{c_{66}^{'}} \ , \ \omega_0^{(3)} = \omega_0$$

Соответствующие представлению перемещений $\overline{u} = \{u_i\}_{i=1}^3$ в виде (2.55) выражения для составляющих напряжений могут быть найдены из следующих формул:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{11}, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12}$$

$$\sigma_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n)} X_n^{'(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{(i)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa^{(i)}} - \overline{G}_j^{(i)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa^{(i)}}],$$

$$(j = \overline{1,3}) \tag{2.56}$$

$$\sigma_{k3} = \frac{1}{2} \sum_{(n)} X_n^{'(3)} \omega_0^{(3)} [G_k^{(3)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r^{(3)}) e^{i(n-1)\kappa^{(3)}} - \overline{G}_k^{(3)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r^{(3)}) e^{i(n+1)\kappa^{(3)}}],$$

$$(k = \overline{1,2})$$

где значения $G_j^{'(i)}$, $i, j = 1,2,3$ определяются соотношениями (2.27).

Теперь, используя аффинные преобразования и выражения для отображающей функции можно найти соотношение для точек, лежащих на контуре Γ в виде, аналогичном (1.71). Для наглядности выпишем еще раз это выражение

$$r^{(i)} e^{i\kappa^{(i)}} = \eta_{10}^{(i)} e^{i\theta^{(i)}} + \eta_{20}^{(i)} e^{-i\theta^{(i)}} + \sum_{m=1}^{N} \eta_{2m}^{(i)} e^{im\theta^{(i)}} + \eta_{1m}^{(i)} e^{-im\theta^{(i)}} \tag{2.57}$$

где

$$\{\eta_{10}^{'(i)}\} = a_0^{'}\{R^{(i)} \rho^{(i)}\} \ , \ \{\eta_{20}^{'(i)}\} = b_0^{'}\{R^{(i)} \rho^{(i)}\} \ , \ \{\eta_{1m}^{'(i)}\} = a_0^{'}\{R^{(i)} d_m(\rho^{(i)})^{-m}\} \ ,$$

$$\{\eta_{2m}^{'(i)}\} = b_0^{'}\{R^{(i)} \overline{d}_m(\rho^{(i)})^{-m}\} \ , \ i = 1,2,3 \ , \ m = \overline{1,N} \tag{2.58}$$

$$a_0^{'} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathrm{M}_2^{'-1}(\mathrm{M}_2^{'} + i\mathrm{M}_1^{'} + E), & \textit{если индекс } i = 1,2 \\ \frac{\mu_2^{'} + i\mu_1^{'} + 1}{2\mu_2^{'}}, & \textit{если индекс } i = 3 \end{cases}$$

$$b_0^{'} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathrm{M}_2^{'-1} (\mathrm{M}_2^{'} + i\mathrm{M}_1^{'} - E), & \textit{если индекс } i = 1,2 \\ \frac{\mu_2^{'} + i\mu_1^{'} - 1}{2\mu_2^{'}}, & \textit{если индекс } i = 3 \end{cases} \tag{2.59}$$

Для представления комплексных потенциалов в выражениях (2.55), (2.56) на некруговом контуре диагональной полости необходимо использовать «метод возмущения формы» [5] и теорему сложения цилиндрических функций (1.32) [133]. Чтобы применить теорему сложения цилиндрических функций требуется выполнение условий вида (1.74а), (1.74б). В данном случае они запишутся как:

$$|\eta_{10}^{'(i)}| > |\eta_{20}^{'(i)}| \tag{2.60а}$$

$$|\eta_{20}^{'(i)}||\eta_{21}^{'(i)}|x...x|\eta_{2N}^{'(i)}||\eta_{11}^{'(i)}|x...x|\eta_{1N}^{'(i)}| < |\eta_{10}^{'(i)}| \tag{2.60б}$$

Условие (2.60а) выполнено, поскольку матрица $\mathrm{M}_2^{'}>0$ (положительно определенная), а параметр $\mu_2^{'}$ больше нуля, т.е. $|a'_0| > |b'_0|$, отсюда $|\eta_{10}^{'(i)}| > |\eta_{20}^{'(i)}|$.

Условие (2.60б) выполнено, так как рассматриваемая задача является внешней, т.е. параметр $\rho > 1$, отсюда процесс - сходящийся и имеет место соотношение

$$|\eta_{20}^{'(i)}||b_0^{'N} a_0^{'N} d_1 \overline{d}_1 x...x d_N \overline{d}_N| \cdot \rho^{2(-1-2-3-...-N)} < |a_0^{'} R| \cdot \rho$$

Выполнение условий (2.60) позволяет последовательно применить теорему сложения цилиндрических функций, которые можно записать для точек, лежащих на контуре Γ в следующем виде [134, 135] с учетом применения гладкого контура (выражения аналогичны (1.75), (1.76)):

$$H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{in\kappa^{(i)}} = \sum_{(p)} Q_{np}^{\eta(i)} e^{ip\theta^{(i)}}, \ i = 1,2,3 \tag{2.61}$$

где

$$Q_{np}^{''(i)} = \sum_{(v_{N1})}\cdots\sum_{(v_1)}\cdot\sum_{(\tilde{v}_{N1})}\cdots\sum_{(\tilde{v}_1)}\delta_{np\tau_1} H^{(1)}_{\frac{n+p-\tau_1}{2}}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{10}^{'(i)} \mid)\tilde{\eta}_{10}^{'(i)\frac{(n+p-\tau_1)}{2}} \times$$

$$\times J_{\frac{n-p+\tau_2}{2}}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{20}^{'(i)} \mid)\tilde{\eta}_{20}^{'(i)\frac{(n-p+\tau_2)}{2}} \times \qquad (2.62)$$

$$\times \prod_{j=1}^{N} J_{(v_j-\tilde{v}_j)}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{2j}^{'(i)} \mid)\tilde{\eta}_{2j}^{'(i)(v_j-\tilde{v}_j)} x\, J_{\tilde{v}_j}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{1j}^{'(i)} \mid)\tilde{\eta}_{1j}^{'(i)\tilde{v}_j}$$

Здесь

$$\tilde{\eta}_{ko}^{'(i)} = \eta_{k0}^{'(i)} \mid \eta_{k0}^{'(i)} \mid^{-1}, k = 1,2;\ j = 0,...,N\ ,$$

$$\tau_1 = \sum_{m=1}^{N}[(m+1)v_m - 2m\tilde{v}_m], \tau_2 = \sum_{m=1}^{N}[(m-1)v_m - 2m\tilde{v}_m] \qquad (2.63)$$

$$\delta_{np\tau_i} = 1, \textit{если } n+p-\tau_1 - \textit{четное число},$$

$$\delta_{np\tau_i} = 0, \textit{если } n+p-\tau_1 - \textit{нечетное число}.$$

Теперь перемещения $u_i,\ \ i = 1,2,3$ на контуре Γ диагональной полости представимы выражением

$$(u_i)_\Gamma = \sum_{(n,p)} X_n^{'(i)} Q_{np}^{''(i)}\, e^{ip\theta^{(i)}},\ i = 1,2,3 \qquad (2.64)$$

Для удобства использования граничных условий нам понадобятся выражения (1.38а,б) для нормальных и тангенсальных напряжений на площадке с нормалью $(n_1,n_2)=(\cos\tilde{\theta}\ ,\sin\tilde{\theta}\ )$, где

$$e^{i\tilde{\theta}^{(i)}} = (\tilde{\omega}' \mid \tilde{\omega}' \mid^{-1})e^{i\theta^{(i)}}, \qquad (2.65)$$

$$\mid \tilde{\omega}' \mid = \mid R \mid \cdot \mid [\rho^2 + 0{,}5 * \sum_{m,k=1}^{N} \rho^{-m-k} mk(\bar{d}_m d_k e^{i(m-k)\theta} + \bar{d}_k d_m e^{i(k-m)\theta}) -$$

$$- \sum_{m=1}^{N} m\rho^{-m+1}(\bar{d}_m e^{i(m+1)\theta} + d_m e^{-i(m+1)\theta})]^{1/2} \mid$$

$$(\mid \tilde{\omega}' \mid)_\Gamma = \mid R \mid \cdot \mid [1 + 0{,}5 * \sum_{m,k=1}^{N} mk(\bar{d}_m d_k e^{i(m-k)\theta} + \bar{d}_k d_m e^{i(k-m)\theta}) - \qquad (2.66)$$

$$- \sum_{m=1}^{N} m(\bar{d}_m e^{i(m+1)\theta} + d_m e^{-i(m+1)\theta})]^{1/2} \mid$$

Граничные условия (2.54) можно переопределить в виде (2.35).

Теперь можно найти контурные представления для напряжений, используя соотношения (2.56), (2.57), (2.62), (2.64), а также (2.65),(2.66) [133]. Представим их в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&(|\,\widetilde{\omega}'\,|^2\,\sigma_{nn})_{\Gamma} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{(n,p)} X_n^{'(i)}\,\lambda_{np}^{''(i)}\,e^{ip\theta^{(i)}}\,,\\
&(|\,\widetilde{\omega}'\,|^2\,\sigma_{n\tilde{\theta}})_{\Gamma} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{(n,p)} X_n^{'(i)}\,\vartheta_{np}^{''(i)}\,e^{ip\theta^{(i)}}\,,\\
&(|\,\widetilde{\omega}'\,|\,\sigma_{\tilde{\theta}3})_{\Gamma} = \sum_{(n,p)} X_n^{'(3)}\,\lambda_{npl}^{''(3)}\,e^{ip\theta_j^{(3)}}
\end{aligned}
\qquad (2.67)
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{np}^{''(i)} = \frac{\omega_0^{(i)}R^2}{8}\{\overline{E}_1^{'(i)}Q_{n-1,p-2}^{''(i)} + E_1^{'(i)}Q_{n-1,p+2}^{''(i)} - \overline{I}_1^{'(i)}Q_{n+1,p-2}^{''(i)} - I_1^{'(i)}Q_{n+1,p+2}^{''(i)})\\
&+2(E_3^{'(i)}Q_{n-1,p}^{''(i)} - I_3^{'(i)}Q_{n+1,p}^{''(i)}) - 2\sum_{m=1}^{N} m[\overline{d}_m(E_3^{'(i)}Q_{n-1,p-m-1}^{''(i)} + E_1^{'(i)}Q_{n-1,p-m+1}^{''(i)} -\\
&-I_3^{'(i)}Q_{n+1,p-m-1}^{''(i)} - I_1^{'(i)}Q_{n+1,p-m+1}^{''(i)}) + d_m(E_3^{'(i)}Q_{n-1,p+m+1}^{''(i)} + \overline{E}_1^{'(i)}Q_{n-1,p+m-1}^{''(i)} - I_3^{'(i)}Q_{n+1,p+m+1}^{''(i)} -\\
&-\overline{I}_1^{'(i)}Q_{n+1,p+m-1}^{''(i)})] + \sum_{m,k=1}^{N} mk[\overline{d}_m\overline{d}_k(E_1^{'(i)}Q_{n-1,p-m-k}^{''(i)} - I_1^{'(i)}Q_{n+1,p-m-k}^{''(i)}) +\\
&+d_m d_k(\overline{E}_1^{'(i)}Q_{n-1,p+m+k}^{''(i)} - \overline{I}_1^{'(i)}Q_{n+1,p+m+k}^{''(i)}) + \overline{d}_m d_k(\overline{E}_2^{'(i)}Q_{n-1,p-m+k}^{''(i)} -\\
&-\overline{I}_2^{'(i)}Q_{n+1,p-m+k}^{''(i)}) + d_m\overline{d}_k(E_2^{'(i)}Q_{n-1,p+m-k}^{''(i)} - I_2^{'(i)}Q_{n+1,p+m-k}^{''(i)})]\}
\end{aligned}
\qquad (2.68а)
$$

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_{np}^{''(i)} = \frac{\omega_0^{(i)}R^2}{8}\{\overline{C}_1^{'(i)}Q_{n-1,p-2}^{''(i)} + C_1^{'(i)}Q_{n-1,p+2}^{''(i)} - \overline{D}_1^{'(i)}Q_{n+1,p-2}^{''(i)} - D_1^{'(i)}Q_{n+1,p+2}^{''(i)}\\
&-2\sum_{m=1}^{N} m[\overline{d}_m(C_1^{'(i)}Q_{n-1,p-m+1}^{''(i)} - D_1^{'(i)}Q_{n+1,p-m+1}^{''(i)}) + d_m(\overline{C}_1^{'(i)}Q_{n-1,p+m-1}^{''(i)} - \overline{D}_1^{'(i)}Q_{n+1,p+m-1}^{''(i)})] +\\
&+\sum_{m,k=1}^{N}[\overline{d}_m\overline{d}_k(C_1^{'(i)}Q_{n-1,p-m-k}^{''(i)} - D_1^{'(i)}Q_{n+1,p-m-k}^{''(i)}) + d_m d_k(\overline{C}_1^{'(i)}Q_{n-1,p+m+k}^{''(i)} - \overline{D}_1^{'(i)}Q_{n+1,p+m+k}^{''(i)}) +\\
&+\overline{d}_m d_k(-C_2^{'(i)}Q_{n-1,p-m+k}^{''(i)} + D_2^{'(i)}Q_{n+1,p-m+k}^{''(i)}) + d_m\overline{d}_k(C_2^{'(i)}Q_{n-1,p+m-k}^{''(i)} - D_2^{'(i)}Q_{n+1,p+m-k}^{''(i)})]\}
\end{aligned}
\qquad (2.68б)
$$

$$
\begin{aligned}
&E_1^{'(i)} = (G_1^{'(i)} - G_2^{'(i)}) + 2i\,G_3^{'(i)},\ I_1^{'(i)} = (\overline{G}_1^{'(i)} - \overline{G}_2^{'(i)}) + 2i\,\overline{G}_3^{'(i)},\\
&E_2^{'(i)} = (G_1^{'(i)} + G_2^{'(i)}) + 2i\,G_3^{'(i)},\ I_2^{'(i)} = (\overline{G}_1^{'(i)} + \overline{G}_2^{'(i)}) + 2i\,\overline{G}_3^{'(i)},\\
&E_3^{'(i)} = (G_1^{'(i)} + G_2^{'(i)}),\ I_3^{'(i)} = (\overline{G}_1^{'(i)} + \overline{G}_2^{'(i)}).\quad i = 1,2
\end{aligned}
\qquad (2.69а)
$$

$$
\begin{aligned}
&C_1^{'(i)} = 2G_3^{'(i)} + i\,(G_2^{'(i)} - G_1^{'(i)}),\ D_1^{'(i)} = 2\overline{G}_3^{'(i)} + i\,(\overline{G}_2^{'(i)} - \overline{G}_1^{'(i)}),\\
&C_2^{'(i)} = i\cdot(G_2^{'(i)} - G_1^{'(i)}),\ D_2^{'(i)} = i\cdot(\overline{G}_2^{'(i)} - \overline{G}_1^{'(i)}),\quad i = 1,2
\end{aligned}
\qquad (2.69б)
$$

$$\lambda_{np}^{''(3)} = \frac{\omega_0^{(3)} R_l}{4}\{(\overline{E}_1^{'(3)} Q_{n-1,p-1,l}^{''(3)} + E_1^{'(3)} Q_{n-1,p+1,l}^{''(3)} - \overline{I}_1^{'(3)} Q_{n+1,p-1,l}^{''(3)} - I_1^{'(3)} Q_{n+1,p+1,l}^{''(3)}) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{N} m(-\overline{d}_m E_1^{'(3)} Q_{n-1,p-m}^{''(3)} - d_m \overline{E}_1^{'(3)} Q_{n-1,p+m}^{''(3)} + \overline{d}_m I_1^{'(3)} Q_{n+1,p-m}^{''(3)} + d_m \overline{I}_1^{'(3)} Q_{n+1,p+m}^{''(3)})\} \tag{2.70}$$

$$E_1^{'(3)} = G_1^{'(3)} + i\, G_2^{'(3)},\ I_1^{'(3)} = \overline{G}_1^{'(3)} + i\, \overline{G}_2^{'(3)}$$
$$E_2^{'(3)} = G_2^{'(3)} + i\, G_1^{'(3)},\ I_2^{'(3)} = \overline{G}_2^{'(3)} + i\, \overline{G}_1^{'(3)} \tag{2.71}$$

$$(|\widetilde{\omega}'|^2)_\Gamma = |R|^2 \cdot |1 + 0{,}5 * \sum_{m,k=1}^{N} mk(\overline{d}_m d_k e^{i(m-k)\theta} + \overline{d}_k d_m e^{i(k-m)\theta}) -$$
$$- \sum_{m=1}^{N} m(\overline{d}_m e^{i(m+1)\theta} + d_m e^{-i(m+1)\theta})| \tag{2.72}$$

Выражения для перемещений и напряжений на контуре диагональной полости в падающей волне $(u_i^*)_\Gamma\,(i=\overline{1,3}) = (u_{PP}, u_{SV}, u_{SH})_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{nn}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{n\tilde{\theta}}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|\,\sigma_{\tilde{\theta}3}^*)_\Gamma$, можно найти, применяя формулы разложений экспоненциальных функций в гармонические ряды (аналогично рядам (1.87), (1.88), (1.89), но с другими коэффициентами):

$$(u_i^*)_\Gamma = U_i^* \sum_{(p)} Q_p^{''(i)} e^{ip\theta} \tag{2.73}$$

$$(|\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{nn}^*)_\Gamma = i\frac{R^2}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(p)} U_i^* \alpha_p^{''(i)} e^{ip\theta},\ (|\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{n\tilde{\theta}}^*)_\Gamma = i\frac{R^2}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(p)} U_i^* \beta_p^{''(i)} e^{ip\theta},$$
$$(|\widetilde{\omega}'|\,\sigma_{\tilde{\theta}3}^*)_\Gamma = (i/2) R\ U_3^* \sum_{(p)} \alpha_p^{''(3)} e^{ip\theta} \tag{2.74}$$

где

$$Q_p^{''(i)} = \sum_{(\nu_l)} \ldots \sum_{(\nu_{\nu_l})} \sum_{(\tilde{\nu}_l)} \ldots \sum_{(\tilde{\nu}_{\nu_l})} [J_{p-\tilde{\delta}}(Rk_{12}^{(i)}) e^{i(p-\tilde{\delta})\delta_1} \times \prod_{m=1}^{N} \{J_{\nu_m}(R\, d_{1m} k_{12}^{(i)}) e^{i\nu_m\delta_2} \times$$
$$\times J_{\tilde{\nu}_m}(R\, d_{2m} k_{12}^{(i)}) e^{i\tilde{\nu}_m\delta_1}\}, \qquad \tilde{\delta} = \sum_{m=1}^{N} m(\nu_m + \tilde{\nu}_m), \tag{2.75}$$

В случае симметрических контуров выработок выражения для $Q_p^{''(i)}$ запишутся как

$$Q_p^{''(i)} = \sum_{(\nu_1)} \dots \sum_{(\nu_{N_l})} [J_{p-\tilde{\delta}}(Rk_{12}^{(i)}) e^{i(p-\tilde{\delta})\delta_1} \times \prod_{m=1}^{N} \{J_{\nu_m}(R_l d_{1m} k_{12}^{(i)}) e^{i\nu_m \delta_2}\}], \quad \tilde{\delta} = \sum_{m=1}^{N} m\nu_m, \qquad (2.75^*)$$

$$e^{i\delta_1} = (k_2^{(i)} + ik_1^{(i)}) k_{12}^{(i)-1}, \; e^{i\delta_2} = (-k_2^{(i)} + ik_1^{(i)}) k_{12}^{(i)-1},$$
$$e^{i\delta_3} = (k_1^{(i)} + ik_2^{(i)}) k_{12}^{(i)-1}, \; k_{12}^{(i)} = (k_1^{(i)2} + k_2^{(i)2})^{1/2}. \qquad (2.76)$$

$$\alpha_{pl}^{''(i)} = \overline{\chi}_1^{'*(i)} Q_{p-2,l}^{''(i)} + \chi_1^{'*(i)} Q_{p+2,l}^{''(i)} + 2\,\mathrm{Re}(\tilde{\chi}_1^{'*(i)}) \cdot Q_{pl}^{''(i)}, + 2\sum_{m=1}^{N_l} m[-\overline{d}_{ml}(\mathrm{Re}(\tilde{\chi}_1^{'*(i)}) Q_{p-m-1,l}^{''(i)} +$$
$$+ \chi_1^{'*(i)} Q_{p-m+1,l}^{''(i)}) - d_{ml}(\mathrm{Re}(\tilde{\chi}_1^{'*(i)}) Q_{p+m+1,l}^{''(i)} + \overline{\chi}_1^{'*(i)} Q_{p+m-1,l}^{''(i)})] +$$
$$+ \sum_{m,k=1}^{N_l} mk[\overline{d}_{ml}\overline{d}_{kl} \cdot \chi_1^{'*(i)} Q_{p-m-k,l}^{''(i)} + d_{ml} d_{kl} \cdot \overline{\chi}_1^{'*(i)} Q_{p+m+k,l}^{''(i)} + \overline{d}_{ml} d_{kl} \cdot \overline{\tilde{\chi}}_1^{'*(i)} Q_{p-m+k,l}^{''(i)} + \qquad (2.77)$$
$$+ d_{ml}\overline{d}_{kl} \cdot \tilde{\chi}_1^{'*(i)} Q_{p+m-k,l}^{''(i)}], \quad i = 1,2$$
$$\alpha_{pl}^{''(3)} = \chi_1^{'*(3)} Q_{p-1,l}^{''(3)} + \tilde{\chi}_1^{'*(3)} Q_{p+1,l}^{''(3)} - \sum_{m=1}^{N_l} m(\overline{d}_m \cdot \tilde{\chi}_1^{'*(3)} Q_{p-m,l}^{''(3)} + d_m \cdot \chi_1^{'*(3)} Q_{p+m,l}^{''(3)})$$

$$\beta_p^{''(i)} = -i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{'*(i)}) \cdot (Q_{p-2}^{''(i)} - Q_{p+2}^{''(i)}) - 2\sum_{m=1}^{N} m[\overline{d}_m \cdot \chi_2^{'*(i)} Q_{p-m+1}^{''(i)} +$$
$$+ d_m \cdot \overline{\chi}_2^{'*(i)} Q_{p+m-1}^{''(i)}] + \sum_{m,k=1}^{N} mk[\overline{d}_m \overline{d}_k \cdot \chi_2^{'*(i)} Q_{p-m-k}^{''(i)} + \qquad (2.78)$$
$$+ d_m d_k \cdot \overline{\chi}_2^{'*(i)} Q_{p+m+k}^{''(i)} - \overline{d}_m d_k \cdot i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{'*(i)}) Q_{p-m+k}^{''(i)} +$$
$$+ d_m \overline{d}_k \cdot i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{'*(i)}) Q_{p+m-k}^{''(i)}] \quad i = 1,2$$

Здесь коэффициенты $\chi_j^{'*(i)}$, $\tilde{\chi}_j^{'*(i)}$ $i = 1,2,3$ $j = 1,2$ определяются из соотношений (2.45).

Теперь для удовлетворения граничным условиям (2.54), в переопределенном виде (2.35) применим метод приравнивания гармонических коэффициентов при одинаковых степенях $e^{ip\theta}$. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $X_n^{'(i)}$ вида

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{(n)} X_n^{'(i)} \lambda_{np}^{''(i)} = -i \frac{R^2}{4} \sum_{i=1}^{2} U_i^* \alpha_p^{''(i)}$$
$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{(n)} X_n^{'(i)} \vartheta_{np}^{''(i)} = -i \frac{R^2}{4} \sum_{i=1}^{2} U_i^* \beta_p^{''(i)} \qquad (2.79)$$

$$\sum_{(n)} X_n^{'(3)} \lambda_{np}^{''(3)} = -(½) R\ U_3^* \alpha_p^{''(3)}$$

Так же как и в случае круговой полости, в данном случае некругового контура диагональной полости полученная система решается методом редукции. Сходимость системы исследуется численно.

2.6 Решение второй основной задачи для некруговой диагональной полости глубокого заложения при обобщенной плоской деформации

Тоннели, выработки и другие объекты подземного строительства часто подкрепляют различного рода обделками. Эти сооружения могут быть расположены под разным углом по отношению к напластованию слоев массива. Сейсмические и другие виды воздействий могут влиять на устойчивость этих сооружений. Поэтому учет, в совокупности, подкрепления подземных сооружений, их формы и способов расположения в массиве предопределяют решение динамических контактных задач для определения напряженно-деформированного состояния диагональных некруговых полостей в трансторопном слоистом массиве при дифракции упругих волн. Решение второй основной задачи теории упругости, когда контур полости закреплен недеформируемой крепью, может служить одним из примеров исследования подобных динамических задач.

Рассмотрим задачу о динамическом напряженном состоянии некруговой диагональной полости глубокого заложения, подкрепленной жесткой обделкой при стационарной дифракции упругих волн произвольной ориентации.

Граничные условия на контуре Γ жестко закрепленной некруговой полости запишутся в виде

$$(u_i + u_i^*)_{\Gamma_i} = 0, \quad i = 1,2,3 \tag{2.80}$$

Так же как и в §2.5, для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка вида (2.10*) и (2.14) с граничными условиями (2.80) вводится аффинное преобразование вида (2.18) при распространении продольно-поперечных волн, и вида (2.21) – при дифракции сдвиговых SH-волн, которое позволяет свести дифференциальные уравнения (2.10*) и (2.14) к виду уравнения Гельмгольца (2.24), (2.23), соответственно, в новых координатах ($\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}$), $i = 1,2,3$ с учетом введенного частного

случая вертикальной и горизонтальной слоистости для случая дифракции волн растяжения-сжатия.

Далее в соответствии с принципом обобщенной суперпозиции упругие перемещения u_i , являясь решениями уравнения (2.24), (2.23), выражаются в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов $Y_n^{'(i)}$, $i = 1,2,3$ и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода [4,5,133]

$$u_i = \sum_{(n)} Y_n^{'(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{in\kappa^{(i)}} \ , \ n = \overline{-\infty,+\infty} \ , \ i = 1,2,3 \qquad (2.81)$$

Выражения для составляющих напряжений σ_{11}, σ_{22} , σ_{12} , σ_{13}, σ_{23} , соответствующие представлению перемещения u_i в виде (2.81) могут быть записаны в следующем виде, аналогичном (2.26):

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{11}, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12}$$

$$\sigma_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n)} Y_n^{'(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{(i)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa^{(i)}} - \overline{G}_j^{(i)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa^{(i)}}], (j = \overline{1,3}) \qquad (2.82)$$

$$\sigma_{k3} = \frac{1}{2} \sum_{(n)} Y_n^{'(3)} \omega_0^{(3)} [G_k^{(3)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r^{(3)}) e^{i(n-1)\kappa^{(3)}} - \overline{G}_k^{(3)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r^{(3)}) e^{i(n+1)\kappa^{(3)}}], (k = \overline{1,2})$$

где значения $G_j^{'(i)}$, $i, j = 1,2,3$ определяются соотношениями (2.27).

Пользуясь выражениями (2.57), (2.58), (2.59) для точек, лежащих на контуре *Г*, а также условием (2.60а), (2.60б), применяя теорему сложения цилиндрических функций, перемещения (2.81) на контуре некруговой диагональной полости преобразуются к виду:

$$(u_i)_\Gamma = \sum_{(n,p)} Y_n^{'(i)} Q_{np}^{''(i)} e^{ip\theta^{(i)}} \ , \ i = 1,2,3 \qquad (2.83)$$

где комплексные функции $Q_{np}^{''(i)}$ вычисляются по формулам (2.62) с коэффициентами из (2.63).

Представления для перемещений на контуре некруговой диагональной полости в падающей волне $(u_i^*)_\Gamma \ (i = \overline{1,3}) = (u_{PP}, u_{SV}, u_{SH})_\Gamma$ находятся путем разложения экспоненциальных функций в гармонические ряды и получения выражений вида (2.73) с комплексными функциями вида (2.75) для контуров общего вида, (2.75*) - для симметрических контуров.

Для удовлетворения краевым условиям (2.80) применим метод приравнивания гармонических коэффициентов при одинаковых степенях $e^{ip\theta_i}$. С помощью данного метода после соответствующих подстановок можно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $Y_n^{'(i)}$ вида

$$\sum_{(n,p)} Y_n^{'(i)} Q_{np}^{''(i)} = -U_i^* \sum_{(p)} Q_p^{''(i)}, \; i = 1,2,3 \tag{2.84}$$

Система решается методом редукции, численно определяется ее сходимость.

Далее для вычисления контурных нормальных и касательных напряжений на некруговой диагональной полости можно использовать формулы (2.67) с заменой коэффициентов:

$$\begin{aligned}
(|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn})_\Gamma &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n,p)} Y_n^{'(i)} \lambda_{np}^{''(i)} e^{ip\theta^{(i)}}, \\
(|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\tilde{\theta}})_\Gamma &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n,p)} Y_n^{'(i)} \vartheta_{np}^{''(i)} e^{ip\theta^{(i)}}, \\
(|\widetilde{\omega}'| \sigma_{\tilde{\theta}3})_\Gamma &= \sum_{(n,p)} Y_n^{'(3)} \lambda_{npl}^{''(3)} e^{ip\theta_l^{(3)}}
\end{aligned} \tag{2.85}$$

где комплексные функции $\lambda_{np}^{''(i)}$, $\vartheta_{np}^{''(i)}$ определятся из соотношений (2.68а), (2.68б), (2.69а), (2.69б), (2.70), (2.71), (2.71).

Формулы для нормальных и касательных напряжений в падающей волне $(|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\tilde{\theta}}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'| \sigma_{\tilde{\theta}3}^*)_\Gamma$ определятся соотношениями (2.74) с комплексными функциями (2.75) - (2.78).

2.7 Анализ напряженно-деформированного состояния одиночной диагональной выработки в транстропном массиве

Проведем динамический анализ напряженного и деформированного состояния одиночной круговой диагональной полости в транстропном массиве, с наклонной под углом φ плоскостью изотропии [130,131]. В качестве анизотропного массива возьмем алевролит со упругими характеристиками пород, согласно таблице 1. Упругая волна распространяется под углом α от 0 до

180 с диапазоном частот от 1 до 100 Гц (берется наиболее часто встречающийся диапазон частот в реальном измерении). Изменение угла наклона плоскости изотропии φ рассматривается всевозможное, т.е. от 0 до 180 .

В соответствии с теоретическим решением для количественного и качественного анализа напряженно-деформированного состояния одиночной диагональной полости разработан алгоритм и составлен пакет прикладных программ в среде Matlab7.0.

Результаты расчета контурных нормальных и касательных напряжений $(\sigma_{nn})_\Gamma$, $(\sigma_{n\theta})_\Gamma$, $(\sigma_{\theta 3})_\Gamma$ получены на базе решения методом редукции бесконечных систем линейных алгебраических уравнений вида (2.46), (2.51) в случае круговой и (2.79), (2.84) в случае некруговой полости, в которых удерживалось не более 20 уравнений. Это позволило удовлетворить граничным условиям с погрешностью менее 1% для амплитуд напряжений $(\sigma_{nn})_\Gamma$, $(\sigma_{n\theta})_\Gamma$, $(\sigma_{\theta 3})_\Gamma$ по отношению к соответствующим амплитудным значениям напряжений в падающей волне в случае решения первой основной задачи и для смещений в отраженной волне по отношению к максимальным смещениям в падающей при решении второй основной задачи. Отсечение членов ряда происходило по мере удовлетворения граничным условиям и по мере анализа коэффициентов при неизвестных в системах уравнений. Так же как и в разделе 1 может быть показана сходимость, причем количество уравнений 20 считается оптимальным.

Тестирование полученных результатов происходило на известных решениях штрекообразных выработок.

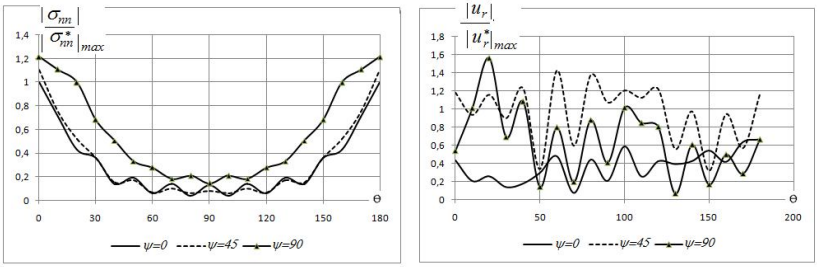
На рисунке 19 показана зависимость напряженно-деформированных характеристик неподкрепленной круговой диагональной выработки от угла ее расположения в массиве ψ для продольных (PP-) и поперечных (SV-) волн при вертикальной слоистости массива ($\varphi = 90°, \alpha = 0°, \omega = 15$ Гц).

Как видно из графиков, имеется тенденция увеличения распределения перемещений и напряжений с увеличением угла отклонения оси диагольной выработки от плоскости простирания плоскости изотропии. Характер изменения напряжений и перемещений имеет идентичные волновые эффекты. Следует также отметить, что незакрепленная диагональная выработка обладает геометрической симметрией и симметрией упругих свойств массива относительно вертикальной и горизонтальной осей ее поперечного

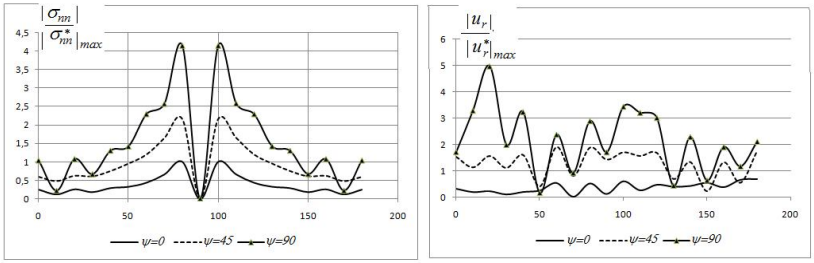
контура, но деформативной и силовой симметрией относительно тех же осей выработка, в общем случае, не обладает – она имеет место только при воздействии волн растяжения-сжатия (PP-).

В таблицах 9-12 приведены зависимости напряжений и перемещений жестко закрепленной диагональной выработки от угла падения волн растяжения-сжатия (табл.9-10) и сдвигов (табл. 11-12) в случае разных углов отклонения осей выработки от вертикальной плоскости простирания изотропии массива.

а)



б)



а) PP-волна; б) SV-волна.

Рисунок 19 – Зависимость напряжений и перемещений диагональной круговой выработки от способов ее ориентации в массиве при разных типах волн

Можно отметить рост концентрации напряжений с увеличением угла отклонения оси от плоскости изотропии при падении PP-волны (см. табл.9), причем изменение угла падения волны также существенно влияет на картину распределения напряжений. Критический случай наблюдается при анализе квершлага ($\psi = 90°$), здесь отмечается резкий всплеск напряжений при увеличении угла падения волны.

При распространении SV-волны наблюдается резкое уменьшение распределения напряжений при увеличении угла падения волны и одновременно угла отклонения оси выработки от плоскости

простирания изотропии. Наиболее критическое состояние наблюдается для квершлага.

Таблица 9 *– Зависимости напряжений на контуре жестко закрепленной диагональной выработки от разных α - углов падения PP-волн и ψ - углов отклонения оси выработки от плоскости простирания изотропии*

Угол θ, град	$\lvert\sigma_{nn}\rvert/\max\lvert\sigma^*_{nn}\rvert$ при $\psi = 0°$ и α равном			$\lvert\sigma_{nn}\rvert/\max\lvert\sigma^*_{nn}\rvert$ при $\psi = 45°$ и α равном			$\lvert\sigma_{nn}\rvert/\max\lvert\sigma^*_{nn}\rvert$ при $\psi = 90°$ и α равном		
	0°	45°	90°	0°	45°	90°	0°	45°	90°
0	0,394	2,387	14,272	0,302	3,078	12,736	1,427	3,62E5	1,56E6
30	0,371	0,120	7,499	0,214	2,650	2,953	2,060	2,82E4	8,82E4
60	0,274	2,344	10,737	0,208	2,666	12,277	1,747	7,66E5	3,27E6
90	0,437	1,271	12,881	0,320	1,757	5,444	1,012	1,11E6	4,75E6
120	0,228	4,732	12,894	0,300	4,724	35,616	1,495	1,88E6	8,02E6
150	0,602	4,930	15,305	0,361	3,629	11,104	0,838	7,15E5	3,04E6
180	1,000	1,007	6,280	1,138	2,177	13,491	3,198	1,40E5	6,02E5

Таблица 10 *– Зависимости перемещений на контуре жестко закрепленной диагональной выработки от разных α - углов падения PP-волн и ψ - углов отклонения оси выработки от плоскости простирания изотропии*

Угол θ, град	$\lvert u_r\rvert/\max\{\lvert u^*_r\rvert\}$ при $\psi = 0°$ и α равном			$\lvert u_r\rvert/\max\{\lvert u^*_r\rvert\}$ при $\psi = 45°$ и α равном			$\lvert u_r\rvert/\max\{\lvert u^*_r\rvert\}$ при $\psi = 90°$ и α равном		
	0°	45°	90°	0°	45°	90°	0°	45°	90°
0	1,000	0,100	0,040	1,045	0,239	0,005	0,876	0,355	0,006
30	0,215	0,032	0,054	0,286	0,045	0,116	0,306	0,262	0,101
60	0,086	0,008	0,154	0,182	0,002	0,187	0,259	0,099	0,155
90	0,040	0,109	0,902	0,072	0,129	1,035	0,014	0,373	0,979
120	0,086	0,415	0,279	0,182	0,425	0,375	0,259	0,593	0,527
150	0,215	0,310	0,017	0,286	0,480	0,034	0,306	0,630	0,105

180	1,000	0,208	0,132	1,045	0,217	0,151	0,876	0,212	0,215

Таблица 11 *– Зависимости напряжений на контуре жестко закрепленной диагональной выработки от разных α – углов падения SV-волн и ψ – углов отклонения оси выработки от плоскости простирания изотропии*

Угол θ, град	$\lvert\sigma_{nn}\rvert/\max\lvert\sigma^*_{nn}\rvert$ при $\psi=0°$ и α равном			$\lvert\sigma_{nn}\rvert/\max\lvert\sigma^*_{nn}\rvert$ при $\psi=45°$ и α равном			$\lvert\sigma_{nn}\rvert/\max\lvert\sigma^*_{nn}\rvert$ при $\psi=90°$ и α равном		
	0°	45°	90°	0°	45°	90°	0°	45°	90°
0	0,755	0,169	2,0E-7	0,658	0,005	2,4E-7	8,25E4	1,74E4	7,7E-7
30	0,397	0,101	4E-8	0,166	0,007	8E-8	4,66E3	2,66E2	1,7E-7
60	0,568	0,127	1E-8	0,642	0,006	4E-8	1,73E5	3,60E4	7,9E-7
90	0,681	0,120	4E-8	0,252	0,010	3E-8	2,51E5	5,28E4	1,02E-6
120	0,682	0,149	1E-8	1,795	0,008	7E-8	4,24E5	8,88E4	1,55E-6
150	0,810	0,235	5E-8	0,575	0,026	7E-8	1,61E5	3,33E4	6,1E-7
180	0,332	0,080	2,3E-7	0,670	0,013	3E-7	3,18E4	7,25E3	4,7E-7

Таблица 12 *– Зависимости перемещений на контуре жестко закрепленной диагональной выработки от разных α – углов падения SV-волн и ψ – углов отклонения оси выработки от плоскости простирания изотропии*

Угол θ, град	$\lvert u_r\rvert/\max\{\lvert u^*_r\rvert\}$ при $\psi=0°$ и α равном			$\lvert u_r\rvert/\max\{\lvert u^*_r\rvert\}$ при $\psi=45°$ и α равном			$\lvert u_r\rvert/\max\{\lvert u^*_r\rvert\}$ при $\psi=90°$ и α равном		
	0°	45°	90°	0°	45°	90°	0°	45°	90°
0	0,044	3,64E2	1,644	0,005	2,37E2	1,610	0,007	2,93E2	1,897
30	0,060	7,14E1	0,290	0,129	1,48E2	0,322	0,113	5,08E2	0,376
60	0,170	2,23E2	0,160	0,207	2,44E2	0,112	0,172	2,29E2	0,137
90	1,000	2,48E2	0,043	1,148	1,94E2	0,128	1,086	6,35E2	0,146
120	0,309	1,11E3	0,160	0,416	2,04E3	0,113	0,584	1,79E3	0,137
150	0,019	7,96E2	0,289	0,038	5,88E2	0,322	0,117	1,06E3	0,376

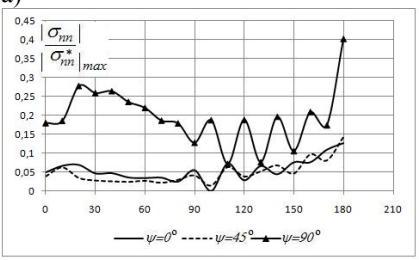
180	0,146	5,09E2	1,644	0,167	5,59E2	1,610	0,238	5,24E2	1,897

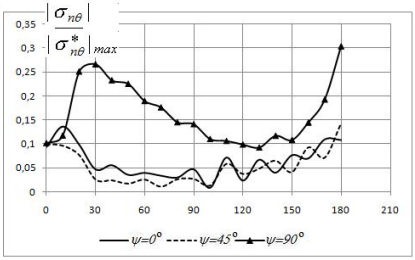
В случае анализа перемещений наблюдается обратная картина (табл.10). При увеличении угла отклонения и угла падения PP-волн можно отметить спад распределений перемещений. Максимальные перемещения наблюдаются при штрекообразной полости. В случае падения SV-волн отмечается всплеск перемещений при угле падения волны $\alpha = 45°$. Для $\alpha = 90°$ можно заметить симметрию распределения перемещений относительно вертикальной оси.

На рисунке 20 приведены графики распределения напряжений на контуре закрепленной абсолютно недеформируемой обделкой круговой диагональной выработки от разных типов волн (растяжения – сжатия и сдвигов) в зависимости от угла отклонения оси выработки от плоскости простирания изотропии. Слоистость массива вертикальная, угол падения волны берется $\alpha = 0°$,частота $\omega = 15$ Гц (сейсмическая).

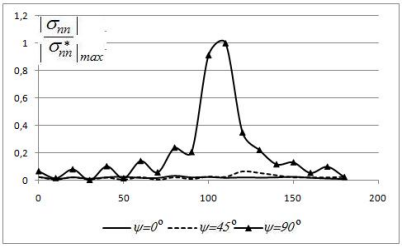
На рисунке 21 показано влияние частот падающих волн на картину распределения напряжений вблизи подкрепленной штрекообразной выработки при угле падения $\alpha = 0°$. Можно отметить тенденцию уменьшения напряжений при увеличении значений частот. Наибольшие напряжения наблюдаются при сейсмической частоте в 15 Гц.

а)





б)



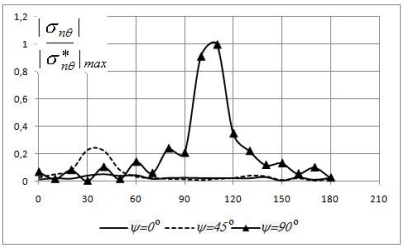


Рисунок 20 – Зависимости контурных напряжений круговой диагональной выработки, подкрепленной жесткой крепью, от значений угла отклонений ее оси от плоскости простирания изотропии ψ .

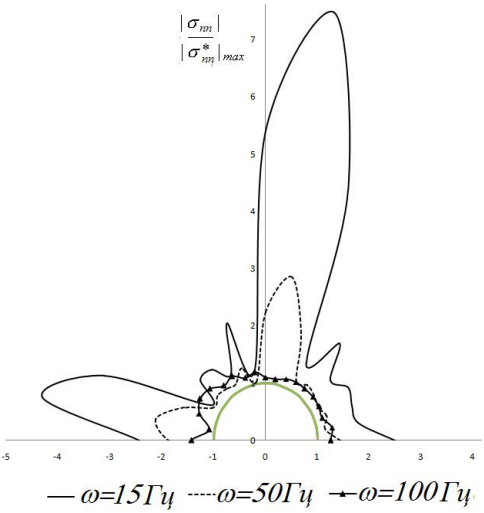


Рисунок 21 – Эпюры распределения нормальных напряжений на контуре штрекообразной диагональной выработки в зависимости от частот падающих продольных (PP-) волн

Заключение по второму разделу

1. При помощи методов обобщенной плоской деформации, а также аналитической теории цилиндрических функций, построено решение основных задач механики деформируемого твердого тела для определения напряженно-деформированного состояния диагональной глубоко заложенной полости произвольного профиля в транстропном наклонно-слоистом массиве при стационарной дифракции волн растяжения-сжатия и сдвигов.

2. На основе полученных решений разработан пакет прикладных программ для численного анализа в среде MatLab7.0 с обобщающим набором исходных данных и результатов.

3. Изучено поведение диагональной выработки кругового поперечного сечения от воздействия упругих волн разного типа (продольных PP- и поперечных SV-) при разных способах проходки выработки (штрек, квершлаг, диагональная-орт). Как выяснилось, в случае неподкрепленной выработки имеет место геометрическая симметрия и симметрия упругих свойств массива относительно

вертикальной и горизонтальной осей ее поперечного контура, но деформативной и силовой симметрии относительно тех же осей, в общем случае, не наблюдается. Симметрия имеет место только при воздействии волн растяжения-сжатия (РР-)

4. При исследовании НДС диагональной выработки отмечается, что имеется тенденция увеличения распределения перемещений и напряжений с увеличением угла отклонения оси диагольной выработки от плоскости простирания плоскости изотропии. Характер изменения напряжений и перемещений имеет волновые эффекты.

5. Показано, что в совокупности изменение угла падения волн и угла отклонения оси выработки от плоскости простирания изотропии существенно влияет на напряженно-деформированные характеристики массива вблизи полости. В случае падения упругих продольно-поперечных волн наблюдаются критические состояния выработки в случае штрека и квершлага, причем отмечается резкий всплеск напряжений при увеличении угла падения волны.

6. Напряженно-деформированного состояния диагональной полости существенно зависит от частоты падающей волны, причем с увеличением частоты наблюдается уменьшение напряженно-деформированных характеристик. Максимальные распределения напряжений и перемещений наблюдаются при сейсмической частоте в 15 Гц.

3 СТАЦИОНАРНАЯ ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН В МНОГОСВЯЗНОМ АНИЗОТРОПНОМ МАССИВЕ

3.1 Основные уравнения и соотношения

На практике часто приходится иметь дело с проектированием параллельно протяженных подземных сооружений, таких как, например, ветки метрополитена, горизонтальные выработки, трубопроводы, тоннели и др., строительство которых сопряжено с определенными особенностями, возникающими в результате взаимовлияния сооружений друг на друга, особенно критически проявляющимся во время сейсмической и динамической активности окружающей сооружения среды, являющейся, в общем случае, анизотропной. Сложность расчетов возникает даже в случае рассмотрения в качестве анизотропной - транстропной среды с наклонной плоскостью изотропии. Форма сооружений, способы их расположения друг относительно друга существенно влияют на их состояние, в особенности, необходимо учитывать сближенность сооружений, так как именно в районе перемычки между сооружениями происходят наибольшие концентрации напряжений, а также имеет место значительное изменение деформативных свойств.

В данном разделе рассматриваются задачи стационарной дифракции упругих волн растяжения-сжатия и сдвигов на полостях круговой и, в общем случае, некруговой форм, заглубленных в транстропном массиве с наклонной плоскостью изотропии. При выполнении определенных требований и преобразований можно применить все подходы, используемые в предыдущих разделах к исследованию серии полостей в транстропном массиве произвольной ориентации друг относительно друга, разных размеров и форм при воздействии плоской гармонической волны, распадающейся на продольно-поперечные и сдвиговые волны [135,136,137].

Различая ориентацию полостей в транстропном массиве, уточним, что в данном разделе речь идет о серии штрекообразных полостей глубокого заложения, в общем случае, произвольной формы и способов расположения друг относительно друга, пройденных параллельно линии простирания пород.

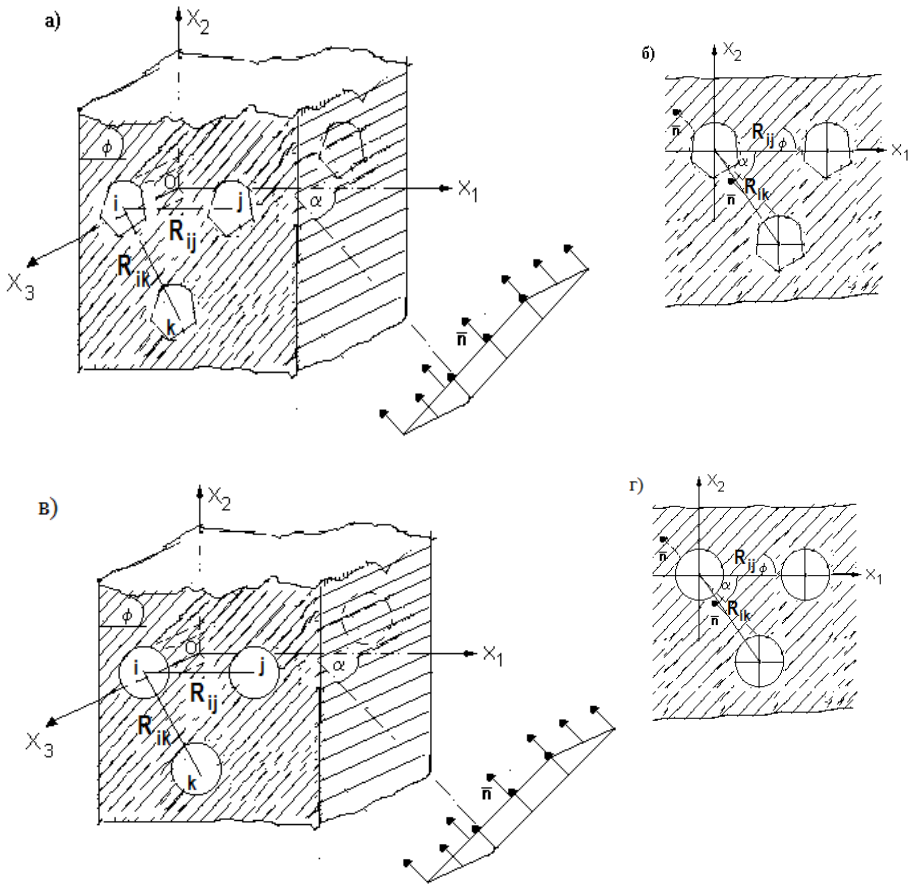
Таким образом, исследуется стационарное динамическое упругое напряженно-деформированное состояние штрекообразных полостей произвольного профиля в случае рассмотрения неподкрепленных (решение первой основной задачи) и жестко закрепленных недеформируемой крепью (решение второй основной задачи) контуров при дифракции упругих волн в направлении вкрест простирания

плоскости изотропии транстропного массива (рис.22). Допустим существование L параллельных цилиндрических полостей с некоторым линейным размером R_l , $l=\overline{1,L}$ (в случае круговых полостей R_l – радиус полостей). Упругие волны растяжения-сжатия и сдвигов распространяются под произвольным углом α к горизонту, причем предполагается, что имеет место разделение волн на продольно-поперечные (PP-, SV-) в плоскости поперечного сечения полостей (случай плоской деформации) и сдвиговые (SH-), поляризованные вдоль осей полостей (случай антиплоской деформации). Модель транстропного массива позволяет нам разделять волны[138].

Уравнения обобщенного закона Гука для транстропного (трансверсально-изотропного) массива с наклонной под углом φ к горизонту плоскостью изотропии относительно декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ (см. рис.22), где ось Ox_2 направлена вертикально вверх, а оси Ox_1 и Ox_3 – соответственно горизонтально вкрест и по простиранию плоскости изотропии могут быть записаны в виде (1.1) [139,140], где $b_{ij}(i,j=1,2,3,4,5,6)$ - коэффициенты упругости, зависящие от упругих постоянных среды и угла φ (1.2), (1.3).

Уравнения движения в отсутствии массовых сил могут быть описаны соотношениями (1.7). При использовании физических уравнений состояния (1.1) и кинематических соотношений Коши они преобразуются к уравнениям в перемещениях, которые можно записать в операторном виде (1.8) [141], с операторами $A_{ij}^{(k)}$ из (1.9).

Предположим, что S_l ($l=\overline{1,L}$) области поперечного сечения полостей, а $S_0=\Re^2-\bigcup_{l=1}^{L}S_l$ область поперечного сечения многосвязной среды (транстропного массива). С центром каждой полости свяжем локальную безразмерную координатную систему (x_{1l}, x_{2l}) ($l=\overline{1,L}$), (x_{10}, x_{20})=($x_1/R, x_2/R$), R- некоторый линейный размер (например, максимальное значение величины перемычки между полостями). Горизонтальные полости проведены вдоль оси Ox_3 и имеют поперечное сечение с контуром Γ_l .



φ – угол наклона плоскости изотропии; α – угол падения волны

некруговые полости – а) общий вид – б) плоскость поперечного сечения; круговые полости – в) общий вид; г) плоскость поперечного сечения

Рисунок 22 – Схема распространения плоской гармонической волны в транстропном массиве с некруговыми и круговыми полостями глубокого заложения вкрест простирания наклонной плоской изотропии

Будем считать, что внешность единичного круга с помощью функции $\widetilde{\omega}(\zeta_l)$ отображается на внешность контура Γ_l границы области S_l ($l=\overline{1,L}$):

$$z_l=\widetilde{\omega}(\zeta_l)=R_l(\zeta_l+\sum_{m=1}^{Nl}d_{ml}\zeta_l^{-m}),\ z_l=x_{1l}+ix_{2l},\quad \zeta_l=\rho_l e^{i\theta l},\ d_{ml}=d_{1ml}+id_{2ml} \quad (3.1)$$

Здесь коэффициенты d_{ml}, в общем случае, берутся комплексными, что соответствует несимметричным контурам полостей, в случае действительных коэффициентов, имеет место симметричный контур полостей, если все коэффициенты d_{ml}=0, имеет место случай круговых контуров. Примеры разных профилей контуров показаны на рис.14. Хотелось бы отметить, все контуры , изображенные на рисунке 3, имеют гладкий профиль, который может быть описан функцией вида (3.1). В случае круговых контуров отображающая функция значительно упрощается и имеет вид

$$z_l=\widetilde{\omega}(\zeta_l)=R_l\zeta_l,\ z_l=x_{1l}+ix_{2l},\quad \zeta_l=\rho_l e^{i\theta l} \quad (3.1^*)$$

Теперь предположим, что в транстропном массиве в плоскости поперечного сечения полостей вдоль направления, задаваемого единичным вектором $\vec{n}=(n_1, n_2)$, падает стационарная упругая волна. Фронт волны параллелен оси полостей Ox_3, сама волна поляризована в плоскости поперечного сечения полостей в случае рассмотрения PP-, SV-волн и параллельно оси Ox_3 в случае распространения SH-волн. Гармоническая волна имеет вид, описанный в первом разделе (1.11) с амплитудой (1.12), где ω - частота волны, $\overline{k}$ - волновой вектор, получаемый из выражений (1.17а), (1.17б), n_1, n_2 – направляющие косинусы угла падения волны α - угла между осью Ox_1 и вектором $\vec{n}$ (см. рис. 22).

В случае падения продольных и поперечных волн (PP-, SV-) можно рассмотреть состояние плоской деформации, в этом случае дифракционное поле характеризуется составляющими перемещений в плоскости поперечного сечения полостей, т.е. $\overline{u}_p=(u_1,u_2)$. Краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (1.7) с учетом, что все составляющие перемещений, кроме (u_1, u_2), равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x_1,x_2) в плоскости поперечного

сечения полостей. Тогда для заглубленных параллельных полостей в уравнениях (1.8) ненулевыми остаются выражения вида (1.13), которые удобно представить в матричном виде (1.13*) [141,142].

При падении сдвиговых SH-волн рассматривается антиплоская деформация полостей, т.е. дифракционное поле, в этом случае, характеризуется амплитудными составляющими перемещений $u_3(x_1,x_2)$ в осевом направлении. В данном случае краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (1.7) с учетом, что все составляющие перемещений, кроме u_3 , равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x_1, x_2) в плоскости поперечного сечения полостей. Тогда в уравнениях (1.8) ненулевым остается дифференциальное уравнение вида (1.14), где коэффициенты b_{ij} (i,j=1,6) – упругие коэффициенты, определяемые формулами (1.2), $\omega_0^2 = \omega_1^2 \rho R^2 / b_{55}$, $u_1(x_1,x_2)$, $u_2(x_1,x_2)$, $u_3(x_1,x_2)$ – амплитудные составляющие перемещений в отраженной волне, отнесенные к некоторому линейному размеру R .

Переходя к постановке задачи, необходимо определиться с граничными условиями. В этой связи требуется решить первую и вторую основные краевые задачи теории упругости, т.е. рассмотреть случаи, когда контур полостей неподкреплен (свободен от нагрузок) – первая основная задача и закреплен недеформируемой крепью - вторая основная задача. В случае разных граничных условий на контурах полостей можно решить смешанную задачу, которая позволит выявить новые эффекты в напряженно-деформированном состоянии полостей в трансторопном массиве [143].

3.2 Решение первой основной задачи - контур штрекообразных полостей неподкреплен

Предположим, что контур глубоко заложенных горизонтальных полостей свободен от воздействия внешних нагрузок. Тогда граничные условия на каждом l-ом контуре полости Γl запишутся в виде:

$$(\sigma_{nn} + \sigma^*_{nn})_{\Gamma l} = 0\,, \qquad (\sigma_{n\tilde{\theta}} + \sigma^*_{n\tilde{\theta}})_{\Gamma l} = 0\,, \qquad (\sigma_{\tilde{\theta}3} + \sigma^*_{\tilde{\theta}3})_{\Gamma l} = 0 \quad (3.2)$$

Здесь σ^*_{nn} , $\sigma^*_{n\tilde{\theta}}$ - нормальные и касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1,n_2), обусловленные падающей волной растяжения-сжатия, в плоскости поперечного сечения полостей; $\sigma^*_{\tilde{\theta}3}$ - касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1,n_2), обусловленные падающей SH-волной сдвига; σ_{nn} , $\sigma_{n\tilde{\theta}}$, $\sigma_{\tilde{\theta}3}$ -

соответствующие амплитудные составляющие напряжений в отраженной волне.

Для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка вида (1.13*) введем аффинное преобразование [143] вида

$$\{x_1^{(i)}\} = \{\xi_1^{(i)}\},\ \{x_2^{(i)}\} = -\mathrm{M}_1\{\xi_1^{(i)}\} + \mathrm{M}_2\{\xi_2^{(i)}\},\quad i = 1,2 \tag{3.3}$$

где

$$\{x_1^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \end{Bmatrix},\ \{x_2^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \end{Bmatrix},\ \{\xi_1^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \end{Bmatrix},\ \{\xi_2^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \xi_2^{(1)} \\ \xi_2^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{3.3*}$$

где $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 + i\mathrm{M}_2$ (причем $\mathrm{M}_2 > 0$ - положительно определенная симметрическая матрица) - корень характеристического уравнения второй степени вида:

$$B_0\mathrm{M}^2 + B_1\mathrm{M} + B_2 = 0,$$

т.е.

$$\mathrm{M}_1 = -\frac{1}{2}B_0^{-1}B_1,\quad \mathrm{M}_2 = \frac{1}{2}[4B_0^{-1}B_2 - (B_0^{-1}B_1)^2]^{1/2}. \tag{3.4}$$

Тогда выполняется следующее преобразование

$$(B_0\{\partial_1^{(i)2}\} + B_1\{\partial_1^{(i)}\partial_2^{(i)}\} + B_2\{\partial_2^{(i)2}\}) = B_0[(E\{\partial_1^{(i)}\} - \mathrm{M}_1\{\partial_2^{(i)}\}) - i\mathrm{M}_2\{\partial_2^{(i)}\}]*$$
$$*[(E\{\partial_1^{(i)}\} - \mathrm{M}_1\{\partial_2^{(i)}\}) + i\mathrm{M}_2\{\partial_2^{(i)}\}] =$$
$$= \left[\{\frac{\partial}{\partial\xi_1^{(i)}}\} - i\{\frac{\partial}{\partial\xi_2^{(i)}}\}\right]\cdot\left[\{\frac{\partial}{\partial\xi_1^{(i)}}\} + i\{\frac{\partial}{\partial\xi_2^{(i)}}\}\right] = \{\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^{(i)2}}\} + \{\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^{(i)2}}\} \equiv \{\nabla^{(i)2}_{\xi_1\xi_2}\},$$

где $\nabla^{(i)2}_{\xi_1\xi_2}$ - вектор оператора Лапласа по векторам- переменным $\xi_1^{(i)}$ и $\xi_2^{(i)}$, $i = 1,2$ в области S_0.

Таким образом, дифференциальное уравнение (1.13*) сводится к уравнению Гельмгольца в координатах ($\xi_1^{(i)}$, $\xi_2^{(i)}$)

$$(E\{\nabla^{(i)2}_{\xi_1\xi_2}\} + B_0^{-1}B_3)\{u_i(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})\} = 0 \tag{3.5}$$

Аналогично, для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (1.14) в случае распространения сдвиговых волн и антиплоской деформации введем аффинное преобразование [142] вида

$$x_1^{(3)} = \xi_1^{(3)},\ x_2^{(3)} = -\mu_1\xi_1^{(3)} + \mu_2\xi_2^{(3)}, \tag{3.6}$$

где $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ (причем $\mu_2 > 0$)- корень характеристического уравнения второй степени

$$b_{55}\mu^2 + 2b_{45}\mu + b_{44} = 0,$$

т.е.

$$\mu_1 = -\frac{b_{45}}{b_{55}},\quad \mu_3 = \frac{\sqrt{b_{44}b_{55} - b_{45}^2}}{b_{55}}. \tag{3.7}$$

Тогда выполняется следующее преобразование

$$(b_{55}\partial_1^2 + 2b_{45}\partial_1\partial_2 + b_{44}\partial_2^2) = b_{55}[(\partial_1 - \mu_1\partial_2) - i\mu_2\partial_2]^*$$
$$*[(\partial_1 - \mu_1\partial_2) + i\mu_2\partial_2] =$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial\xi_1^{(3)}} - i\frac{\partial}{\partial\xi_2^{(3)}}\right]\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1^{(3)}} + i\frac{\partial}{\partial\xi_2^{(3)}}\right] = \frac{\partial^2}{\partial\xi_1^{(3)2}} + \frac{\partial^2}{\partial\xi_2^{(3)2}} \equiv \nabla^2_{\xi_1^*\xi_2^*},$$

где $\nabla^2_{\xi_1^*\xi_2^*}$ - оператор Лапласа по переменным $\xi_1^{(3)}$ и $\xi_2^{(3)}$ в области поперечного сечения полостей S_0 .

Дифференциальное уравнение (1.14) сводится к уравнению Гельмгольца в координатах ($\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}$)

$$(\nabla^2_{\xi_1^*\xi_2^*} + \omega_0^2)u_3(\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}) = 0 \tag{3.8}$$

В общем случае, точки $O_l^{(i)}$, $i = 1,2,3$, являющиеся центрами локальных координатных систем $(x_{1l}^{(i)}, x_{2l}^{(i)}), i = 1,2,3$, в областях S_l ($l = \overline{1,L}$) при преобразовании (3.3) и (3.6) перейдут в точки $O_{\xi l}^{(i)}$, $i = 1,2,3$. Их будем рассматривать как начало локальных декартовых

систем ($\xi_{1l}^{(i)}, \xi_{2l}^{(i)}$), $i = 1,2,3$ с осями, ориентированными по осям координат ($\xi_{1l}^{(i)}, \xi_{2l}^{(i)}$) и полярных координат ($r_l^{(i)}, \kappa_l^{(i)}$) с отчетом полярного угла $\kappa_l^{(i)}$ от оси $O_l^{(i)}\ \xi_{1l}^{(i)}$.

Уравнения Гельмгольца вида (3.5) для перемещений $\overline{u}_p = \{u_1, u_2\}$ при распространении продольно-поперечных волн, в частном случае, когда упругие коэффициенты b_{16}=0, b_{26}=0, можно разделить, тогда получим 2 уравнения:

$$(\nabla^2_{\xi_l^{(1)}\xi_2^{(1)}} + \omega_1^2 / b_{11}) u_1(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}) = 0\ ,\ (\nabla^2_{\xi_l^{(2)}\xi_2^{(2)}} + \omega_1^2 / b_{66}) u_2(\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}) = 0 \qquad (3.9)$$

Равенство нулю коэффициентов b_{16} и b_{26} приводит к ситуации, когда угол наклона плоскости изотропии φ становится равным $\pm\pi/2$, т.е. имеет случай горизонтальной и вертикальной слоистости массива.

Решения уравнений в перемещениях $\overline{u} = \{u_i\} = \{u_1, u_2, u_3\}$ (3.8) и (3.9), в соответствии с принципом обобщенной суперпозиции, можно представить в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов $A_{nl}^{(i)}, i = 1,2,3$ и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода [5,143]:

$$u_i = \sum_{l=1}^{L} \sum_{(n)} A_{nl}^{(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}}\ ,\ \ n = \overline{-\infty, +\infty}\ ,\ i = 1,2,3 \qquad (3.10)$$

где

$$\omega_0^{(1)} = \omega_1 / \sqrt{b_{11}}\ ,\ \omega_0^{(2)} = \omega_1 / \sqrt{b_{66}}\ ,\ \omega_0^{(3)} = \omega_0$$

Применяя теоремы сложения цилиндрических функций [5,143] (1.32), можно получить представления для $\overline{u} = \{u_i\}, i = 1,2,3$ в любой из координатных систем ($r_l^{(i)}, \kappa_l^{(i)}$):

$$u_i = \sum_{(n)} A_{nl}^{(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}} + s_{nl}^{(i)} J_n(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}}\ \mathbf{,\ (} r_l^{(i)} < R_{lq}^{(i)} \mathbf{),}$$

$$i = 1,2,3\ \ ,\ l = \overline{1, L} \qquad (3.10^*)$$

где

$$s_{nl}^{(i)} = \sum_{\substack{q=1,\\ q\neq l}}^{L} \sum_{(p)} A_{pq}^{(i)} H_{p-n}^{(1)}(\omega_0^{(i)} R_{lq}^{(i)}) e^{i(p-n)\kappa_{lq}^{(i)}} \qquad (3.11)$$

($R_{lq}^{(i)}, \kappa_{lq}^{(i)}$) – координаты точки $O_{\xi l}^{(i)}$ в системе координат ($r_q^{(i)}, \kappa_q^{(i)}$)

В выражениях (3.10) в качестве цилиндрической функции была взята функция Ханкеля 1-го рода, поскольку зависимость от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$, и решения поставленной задачи характеризуют волну, уходящую на бесконечность.

Соответствующие представлению перемещений $\overline{u} = \{u_i\}_{i=1}^{3}$, в виде (3.10) выражения для составляющих напряжений могут быть найдены из следующих соображений.

Так, в случае плоской деформации (распространения упругих волн растяжения-сжатия) уравнения обобщенного закона Гука (1.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = b_{11}\varepsilon_{11} + b_{12}\varepsilon_{22} + b_{16}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} = b_{12}\varepsilon_{11} + b_{22}\varepsilon_{22} + b_{26}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{12} = b_{16}\varepsilon_{11} + b_{26}\varepsilon_{22} + b_{66}\varepsilon_{12} \end{cases}$$

А для случая антиплоской деформации, когда ненулевыми остаются лишь напряжения σ_{13}, σ_{23}, выражения (1.1) перепишутся в виде:

$$\begin{cases} \sigma_{23} = b_{44}\varepsilon_{23} + b_{45}\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{13} = b_{45}\varepsilon_{23} + b_{55}\varepsilon_{13}, \end{cases}$$

Применяя вышеизложенные преобразования, а также соотношения для перемещений (3.10*), получим следующие выражения:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{11}, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12}$$

$$\sigma_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n)} A_{nl}^{(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{(i)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(i)}} - \overline{G}_j^{(i)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(i)}}] +$$

$$+ s_{nl}^{(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{(i)} J_{n-1}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(i)}} - \overline{G}_j^{(i)} J_{n+1}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(i)}}], (j = \overline{1,3})$$

$$\sigma_{k3} = \frac{1}{2}\sum_{(n)} A_{nl}^{(3)}\omega_0^{(3)}[G_k^{(3)}H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(3)}r_l^{(3)})e^{i(n-1)\kappa_l^{(3)}} - \overline{G}_k^{(3)}H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(3)}r_l^{(3)})e^{i(n+1)\kappa_l^{(3)}}] +$$

$$+ s_{nl}^{(3)}\omega_0^{(3)}[G_k^{(3)}J_{n-1}(\omega_0^{(3)}r_l^{(3)})e^{i(n-1)\kappa_l^{(3)}} - \overline{G}_k^{(3)}J_{n+1}(\omega_0^{(3)}r_l^{(3)})e^{i(n+1)\kappa_l^{(3)}}], (k=\overline{1,2}) \quad (3.12)$$

где

$$\left\{\begin{matrix} G_j^{(1)} \\ j=\overline{1,3} \end{matrix}\right\} = \begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{16} \end{Bmatrix} + i\cdot(g_1^{(1)}\begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{16} \end{Bmatrix} + g_1^{(2)}\begin{Bmatrix} b_{16} \\ b_{26} \\ b_{66} \end{Bmatrix}),$$

$$\left\{\begin{matrix} G_j^{(2)} \\ j=\overline{1,3} \end{matrix}\right\} = \begin{Bmatrix} b_{16} \\ b_{26} \\ b_{66} \end{Bmatrix} + i\cdot(g_2^{(1)}\begin{Bmatrix} b_{16} \\ b_{26} \\ b_{66} \end{Bmatrix} + g_2^{(2)}\begin{Bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{26} \end{Bmatrix}), \quad (3.12^*)$$

$$\left\{\begin{matrix} G_k^{(3)} \\ k=\overline{1,2} \end{matrix}\right\} = \begin{Bmatrix} b_{55} \\ b_{45} \end{Bmatrix} + i\cdot\mu_2^{-1}\cdot(\begin{Bmatrix} b_{45} \\ b_{44} \end{Bmatrix} + \mu_1\begin{Bmatrix} b_{55} \\ b_{45} \end{Bmatrix}),$$

$$\{g_i^{(1)}\} = diag(\mathrm{M}_2^{-1}\mathrm{M}_1),\ \{g_i^{(2)}\} = diag(\mathrm{M}_2^{-1}),\ i=1,2,\ l=\overline{1,L}$$

Здесь термин «*diag*» означает вектор из элементов главной диагонали соответствующей матрицы.

Теперь, используя выражение (3.6), (3.3) из (3.1) можно найти соотношение для точек, лежащих на контурах Γ_l некруговых полостей:

$$r_l^{(i)}e^{i\kappa_l^{(i)}} = \eta_{10l}^{(i)}e^{i\theta_l^{(i)}} + \eta_{20l}^{(i)}e^{-i\theta_l^{(i)}} + \sum_{m=1}^{Nl}\eta_{2ml}^{(i)}e^{im\theta_l^{(i)}} + \eta_{1ml}^{(i)}e^{-im\theta_l^{(i)}} \quad (3.13)$$

где

$$\{\eta_{10l}^{(i)}\} = a_0\{R_l^{(i)}\rho_l^{(i)}\},\quad \{\eta_{20l}^{(i)}\} = b_0\{R_l^{(i)}\rho_l^{(i)}\},\ \{\eta_{1ml}^{(i)}\} = a_0\{R_l^{(i)}d_{ml}(\rho_l^{(i)})^{-m}\},$$
$$\{\eta_{2ml}^{(i)}\} = b_0\{R_l^{(i)}\overline{d}_{ml}(\rho_l^{(i)})^{-m}\},\ i=1,2,3,\ m=\overline{1,N},\ l=\overline{1,L} \quad (3.14)$$

$$a_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{M}_2^{-1}(\mathrm{M}_2 + i\mathrm{M}_1 + E), & \text{если индекс } i=1,2 \\ \frac{\mu_2 + i\mu_1 + 1}{2\mu_2}, & \text{если индекс } i=3 \end{cases},$$

$$b_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{M}_2^{-1}(\mathrm{M}_2 + i\mathrm{M}_1 - E), & \textit{если индекс } i = 1,2 \\ \frac{\mu_2 + i\mu_1 - 1}{2\mu_2}, & \textit{если индекс } i = 3 \end{cases} \qquad (3.15)$$

В случае круговых полостей все d_{ml}=0 и формулы для контура значительно упрощаются, т.е. можно записать

$$r_l^{(i)} e^{i\kappa_l^{(i)}} = \eta_{10l}^{(i)} e^{i\theta_l^{(i)}} + \eta_{20l}^{(i)} e^{-i\theta_l^{(i)}} \qquad (3.13^*)$$

В случае симметричных контуров полостей в формуле (3.14) коэффициенты $d_{ml} = \overline{d}_{ml}$.

Для представления комплексных потенциалов в выражениях (3.10), (3.12) на контурах горизонтальных полостей необходимо применить теорему сложения цилиндрических функций и «метод возмущения формы», которые требуют выполнения следующих условий:

$$|\eta_{10l}^{(i)}| > |\eta_{20l}^{(i)}| \qquad (3.16а)$$

$$|\eta_{20l}^{(i)}||\eta_{21l}^{(i)}|x...x|\eta_{2Nll}^{(i)}||\eta_{11l}^{(i)}|x...x|\eta_{1Nll}^{(i)}| < |\eta_{10l}^{(i)}| \qquad (3.16б)$$

Так же, как это делается в первом разделе, можно показать выполнение этих условий. А именно, условие (3.16а) выполнено, поскольку матрица M_2>0 (положительно определенная), и параметр μ_3 больше нуля, т.е. $|a_0| > |b_0|$, отсюда $|\eta_{10l}^{(i)}| > |\eta_{20l}^{(i)}|$.

Второе условие (3.16б) выполнено, так как рассматриваемая задача является внешней, т.е. параметр $\rho > 1$, отсюда процесс - сходящийся и имеет место соотношение

$$|\eta_{20l}^{(i)}||b_0^N a_0^N d_{l1}\overline{d}_{l1}x...xd_{Nl}\overline{d}_{Nl}| \cdot \rho_l^{2(-1-2-3-...-Nl)} < |a_0 R_l| \cdot \rho_l$$

В случае рассмотрения круговых полостей потребуется лишь выполнение первого условия – (3.16а), в случае симметричных контуров – выполнение условий очевидно.

Теперь, последовательно применяя теорему сложения цилиндрических функций, можно записать представления

комплексных потенциалов для точек на контурах некруговых полостей Γ_l [134,143]:

$$H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}} = \sum_{(p)} Q_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}}, \quad J_n(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}} = \sum_{(p)} P_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}} \tag{3.17}$$

где

$$\begin{aligned} Q_{npl}^{(i)} = & \sum_{(\nu N_l)} \dots \sum_{(\nu 1)} \cdot \sum_{(\tilde{\nu} N_l)} \dots \sum_{(\tilde{\nu} 1)} \delta_{np\tau l} H^{(1)}_{\frac{n+p-\tau_1}{2}} (\omega_0^{(i)} \mid \eta_{10l}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{10l}^{(i)\frac{(n+p-\tau_1)}{2}} \; x \\ & x \, J_{\frac{n-p+\tau_2}{2}} (\omega_0^{(i)} \mid \eta_{20l}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{20l}^{(i)\frac{(n-p+\tau_2)}{2}} \; x \\ & x \prod_{j=1}^{Nl} J_{(\nu_j - \tilde{\nu}_j)} (\omega_0^{(i)} \mid \eta_{2jl}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{2jl}^{(i)(\nu_j - \tilde{\nu}_j)} x \, J_{\tilde{\nu}_j} (\omega_0^{(i)} \mid \eta_{1jl}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{1jl}^{(i)\tilde{\nu}_j} \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} P_{npl}^{(i)} = & \sum_{(\nu N_l)} \dots \sum_{(\nu 1)} \cdot \sum_{(\tilde{\nu} N_l)} \dots \sum_{(\tilde{\nu} 1)} \delta_{np\tau l} J_{\frac{n+p-\tau_1}{2}} (\omega_0^{(i)} \mid \eta_{10l}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{10l}^{(i)\frac{(n+p-\tau_1)}{2}} \; x \\ & x \, J_{\frac{n-p+\tau_2}{2}} (\omega_0^{(i)} \mid \eta_{20l}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{20l}^{(i)\frac{(n-p+\tau_2)}{2}} \; x \\ & x \prod_{j=1}^{Nl} J_{(\nu_j - \tilde{\nu}_j)} (\omega_0^{(i)} \mid \eta_{2jl}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{2jl}^{(i)(\nu_j - \tilde{\nu}_j)} x \, J_{\tilde{\nu}_j} (\omega_0^{(i)} \mid \eta_{1jl}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{1jl}^{(i)\tilde{\nu}_j} \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} & \tilde{\eta}_{kol}^{(i)} = \eta_{k0l}^{(i)} \mid \eta_{k0l}^{(i)} \mid^{-1}, k = 1,2; \; j = 0,\dots,N_l, l = \overline{1,L} \\ & \tau_1 = \sum_{m=1}^{Nl} [(m+1)\nu_m - 2m\tilde{\nu}_m], \; \tau_2 = \sum_{m=1}^{Nl} [(m-1)\nu_m - 2m\tilde{\nu}_m] \\ & \delta_{np\tau 1} = 1, \textit{ если } n + p - \tau_1 - \textit{четное число}, \\ & \delta_{np\tau 1} = 0, \textit{ если } n + p - \tau_1 - \textit{нечетное число}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

В случае круговых полостей выражения (3.18), (3.19) значительно упрощаются и выглядят так:

$$Q_{npl}^{(i)} = \delta_{npl} H^{(1)}_{\frac{n+p}{2}} (\omega_0 \mid \eta_{10l}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{10l}^{(i)(n+p)/2} J_{\frac{n-p}{2}} (\omega_0 \mid \eta_{20l}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{20l}^{(i)(n-p)/2},$$

$$P_{npl}^{(i)} = \delta_{npl} J_{\frac{n+p}{2}}(\omega_0 \mid \eta_{10l}^{(i)} \mid)\tilde{\eta}_{10l}^{(i)^{(n+p)/2}} J_{\frac{n-p}{2}}(\omega_0 \mid \eta_{20l}^{(i)} \mid)\tilde{\eta}_{20l}^{(i)^{(n-p)/2}} \qquad (3.18^*)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\tilde{\eta}_{kol}^{(i)} = \eta_{k0l}^{(i)} \mid \eta_{k0l}^{(i)} \mid^{-1}, k = 1,2; \\
&\delta_{np} = 1, \textit{если } n + p - \textit{четное число}, \\
&\delta_{np} = 0, \textit{если } n + p - \textit{нечетное число}.
\end{aligned} \qquad (3.19^*)$$

В случае симметричных контуров выражения для комплексных функций аналогичны (3.18), (3.19).

Теперь перемещения u_i на контуре Γ_l полостей представимы выражением

$$(u_i)_{\Gamma l} = \sum_{(n,p)} (A_{nl}^{(i)} Q_{npl}^{(i)} + s_{nl}^{(i)} P_{npl}^{(i)}) e^{ip\theta_l^{(i)}}, \; i = 1,2,3, \; l = \overline{1,L} \qquad (3.20)$$

Для удобства использования граничных условий нам понадобятся выражения для нормальных и касательных напряжений на площадке с нормалью $(n_1,n_2)=(\cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta})$, которые могут быть получены из соотношений (1.38а), (1.38б). Контурные функции полостей могут быть найдены из выражений:

$$e^{i\tilde{\theta}_l^{(i)}} = (\tilde{\omega}'_l \mid \tilde{\omega}'_l \mid^{-1}) e^{i\theta_l^{(i)}}, \qquad (3.21)$$

Здесь для некруговых контуров полостей вычисляется

$$\begin{aligned}
\mid \tilde{\omega}' \mid = \mid R_l \mid \cdot [\rho_l^2 + 0{,}5 * \sum_{m,k=1}^{Nl} \rho_l^{-m-k} mk(\bar{d}_{ml} d_{kl} e^{i(m-k)\theta_l} + \bar{d}_{kl} d_{ml} e^{i(k-m)\theta_l}) - \\
- \sum_{m=1}^{Nl} m\rho_l^{-m+1}(\bar{d}_{ml} e^{i(m+1)\theta_l} + d_{ml} e^{-i(m+1)\theta_l})]^{1/2} \mid \\
(\mid \tilde{\omega}' \mid)_{\Gamma l} = \mid R_l \mid \cdot [1 + 0{,}5 * \sum_{m,k=1}^{Nl} mk(\bar{d}_{ml} d_{kl} e^{i(m-k)\theta_l} + \bar{d}_{kl} d_{ml} e^{i(k-m)\theta_l}) - \\
- \sum_{m=1}^{Nl} m(\bar{d}_{ml} e^{i(m+1)\theta_l} + d_{ml} e^{-i(m+1)\theta_l})]^{1/2} \mid
\end{aligned} \qquad (3.22)$$

В случае круговых полостей контурная функция выглядит так:

$$(|\widetilde{\omega}'_l|)_{\Gamma l} = |(R_l\zeta_l)'|_{\Gamma l} = |R_l|. \qquad (3.22^*)$$

Для симметричных контуров полостей контурная функция может быть записана следующим образом:

$$(|\widetilde{\omega}'|)_{\Gamma l} = |R_l| \cdot |[1 + 0{,}5\sum_{m,k=1}^{Nl} mkd_{ml}d_{kl}(e^{i(m-k)\theta_l} + e^{i(k-m)\theta_l}) - \\ - \sum_{m=1}^{Nl} md_{ml}(e^{i(m+1)\theta l} + e^{-i(m+1)\theta l})]^{1/2}| \qquad (3.22^{**})$$

Для удобства вычислений контурных выражений граничные условия (3.2) можно переопределить в виде:

$$(|\widetilde{\omega}_l'|^2\,\sigma_{nn} + |\widetilde{\omega}_l'|^2\,\sigma_{nn}^*)_{\Gamma l} = 0\,,\ (|\widetilde{\omega}_l'|^2\,\sigma_{n\tilde{\theta}} + |\widetilde{\omega}_l'|^2\,\sigma_{n\tilde{\theta}}^*)_{\Gamma l} = 0\,,$$
$$(|\widetilde{\omega}_l'|\,\sigma_{\tilde{\theta}3} + |\widetilde{\omega}_l'|\,\sigma_{\tilde{\theta}3}^*)_{\Gamma l} = 0 \qquad (3.23)$$

Теперь можно определить контурные представления для напряжений, используя соотношения (3.18), (3.20), (3.23), (1.38а), (1.38б), [139,140]:

$$(|\widetilde{\omega}'_l|^2\,\sigma_{nn})_{\Gamma l} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{(n,p)}(A_{nl}^{(i)}\lambda_{npl}^{(i)}e^{ip\theta_l^{(i)}} + s_{nl}^{(i)}\psi_{npl}^{(i)}e^{ip\theta_l^{(i)}})$$
$$(|\widetilde{\omega}'_l|^2\,\sigma_{n\tilde{\theta}})_{\Gamma l} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{(n,p)}(A_{nl}^{(i)}\vartheta_{npl}^{(i)}e^{ip\theta_l^{(i)}} + s_{nl}^{(i)}\tau_{npl}^{(i)}e^{ip\theta_l^{(i)}}) \qquad (3.24)$$
$$(|\widetilde{\omega}'_l|\,\sigma_{\tilde{\theta}3})_{\Gamma l} = \sum_{(n,p)}(A_{nl}^{(3)}\lambda_{npl}^{(3)}e^{ip\theta_l^{(3)}} + s_{nl}^{(3)}\psi_{npl}^{(3)}e^{ip\theta_l^{(3)}})$$

где

$$\lambda_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8}\{\overline{E}_1^{(i)} Q_{n-1,p-2,l}^{(i)} + E_1^{(i)} Q_{n-1,p+2,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{I}_1^{(i)} Q_{n+1,p-2,l}^{(i)} - I_1^{(i)} Q_{n+1,p+2,l}^{(i)}) + 2(E_3^{(i)} Q_{n-1,p,l}^{(i)} - I_3^{(i)} Q_{n+1,p,l}^{(i)}) -$$
$$- 2\sum_{m=1}^{Nl} m[\overline{d}_{ml}(E_3^{(i)} Q_{n-1,p-m-1,l}^{(i)} + E_1^{(i)} Q_{n-1,p-m+1,l}^{(i)} - I_3^{(i)} Q_{n+1,p-m-1,l}^{(i)} -$$
$$- I_1^{(i)} Q_{n+1,p-m+1,l}^{(i)}) + d_{ml}(E_3^{(i)} Q_{n-1,p+m+1,l}^{(i)} + \overline{E}_1^{(i)} Q_{n-1,p+m-1,l}^{(i)} - I_3^{(i)} Q_{n+1,p+m+1,l}^{(i)} - \quad (3.25а)$$
$$- \overline{I}_1^{(i)} Q_{n+1,p+m-1,l}^{(i)})] + \sum_{m,k=1}^{Nl} mk[\overline{d}_{ml}\overline{d}_{kl}(E_1^{(i)} Q_{n-1,p-m-k,l}^{(i)} - I_1^{(i)} Q_{n+1,p-m-k,l}^{(i)}) +$$
$$+ d_{ml} d_{kl}(\overline{E}_1^{(i)} Q_{n-1,p+m+k,l}^{(i)} - \overline{I}_1^{(i)} Q_{n+1,p+m+k,l}^{(i)}) + \overline{d}_{ml} d_{kl}(\overline{E}_2^{(i)} Q_{n-1,p-m+k,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{I}_2^{(i)} Q_{n+1,p-m+k,l}^{(i)}) + d_{ml}\overline{d}_{kl}(E_2^{(i)} Q_{n-1,p+m-k,l}^{(i)} - I_2^{(i)} Q_{n+1,p+m-k,l}^{(i)})]\}$$

$$\psi_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8}\{\overline{E}_1^{(i)} P_{n-1,p-2,l}^{(i)} + E_1^{(i)} P_{n-1,p+2,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{I}_1^{(i)} P_{n+1,p-2,l}^{(i)} - I_1^{(i)} P_{n+1,p+2,l}^{(i)}) + 2(E_3^{(i)} P_{n-1,p,l}^{(i)} - I_3^{(i)} P_{n+1,p,l}^{(i)}) -$$
$$- 2\sum_{m=1}^{Nl} m[\overline{d}_{ml}(E_3^{(i)} P_{n-1,p-m-1,l}^{(i)} + E_1^{(i)} P_{n-1,p-m+1,l}^{(i)} - I_3^{(i)} P_{n+1,p-m-1,l}^{(i)} -$$
$$- I_1^{(i)} P_{n+1,p-m+1,l}^{(i)}) + d_{ml}(E_3^{(i)} P_{n-1,p+m+1,l}^{(i)} + \overline{E}_1^{(i)} P_{n-1,p+m-1,l}^{(i)} - I_3^{(i)} P_{n+1,p+m+1,l}^{(i)} - \quad (3.25б)$$
$$- \overline{I}_1^{(i)} P_{n+1,p+m-1,l}^{(i)})] + \sum_{m,k=1}^{Nl} mk[\overline{d}_{ml}\overline{d}_{kl}(E_1^{(i)} P_{n-1,p-m-k,l}^{(i)} - I_1^{(i)} P_{n+1,p-m-k,l}^{(i)}) +$$
$$+ d_{ml} d_{kl}(\overline{E}_1^{(i)} P_{n-1,p+m+k,l}^{(i)} - \overline{I}_1^{(i)} P_{n+1,p+m+k,l}^{(i)}) + \overline{d}_{ml} d_{kl}(\overline{E}_2^{(i)} P_{n-1,p-m+k,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{I}_2^{(i)} P_{n+1,p-m+k,l}^{(i)}) + d_{ml}\overline{d}_{kl}(E_2^{(i)} P_{n-1,p+m-k,l}^{(i)} - I_2^{(i)} P_{n+1,p+m-k,l}^{(i)})]\}$$

$$\vartheta_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8}\{\overline{C}_1^{(i)} Q_{n-1,p-2,l}^{(i)} + C_1^{(i)} Q_{n-1,p+2,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{D}_1^{(i)} Q_{n+1,p-2,l}^{(i)} - D_1^{(i)} Q_{n+1,p+2,l}^{(i)} - 2\sum_{m=1}^{Nl} m[\overline{d}_{ml}(C_1^{(i)} Q_{n-1,p-m+1,l}^{(i)} -$$
$$- D_1^{(i)} Q_{n+1,p-m+1,l}^{(i)}) + d_{ml}(\overline{C}_1^{(i)} Q_{n-1,p+m-1,l}^{(i)} - \overline{D}_1^{(i)} Q_{n+1,p+m-1,l}^{(i)})] + \quad (3.25в)$$
$$\sum_{m,k=1}^{Nl} [\overline{d}_{ml}\overline{d}_{kl}(C_1^{(i)} Q_{n-1,p-m-k,l}^{(i)} - D_1^{(i)} Q_{n+1,p-m-k,l}^{(i)}) + d_{ml} d_{kl}(\overline{C}_1^{(i)} Q_{n-1,p+m+k,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{D}_1^{(i)} Q_{n+1,p+m+k,l}^{(i)}) + \overline{d}_{ml} d_{kl}(-C_2^{(i)} Q_{n-1,p-m+k,l}^{(i)} + D_2^{(i)} Q_{n+1,p-m+k,l}^{(i)}) +$$
$$+ d_{ml}\overline{d}_{kl}(C_2^{(i)} Q_{n-1,p+m-k,l}^{(i)} - D_2^{(i)} Q_{n+1,p+m-k,l}^{(i)})]\}$$

$$\tau_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8}\{\overline{C}_1^{(i)} P_{n-1,p-2,l}^{(i)} + C_1^{(i)} P_{n-1,p+2,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{D}_1^{(i)} P_{n+1,p-2,l}^{(i)} - D_1^{(i)} P_{n+1,p+2,l}^{(i)} - 2\sum_{m=1}^{Nl} m[\overline{d}_{ml}(C_1^{(i)} P_{n-1,p-m+1,l}^{(i)} -$$
$$- D_1^{(i)} P_{n+1,p-m+1,l}^{(i)}) + d_{ml}(\overline{C}_1^{(i)} P_{n-1,p+m-1,l}^{(i)} - \overline{D}_1^{(i)} P_{n+1,p+m-1,l}^{(i)})] +$$
$$\sum_{m,k=1}^{Nl}[\overline{d}_{ml}\overline{d}_{kl}(C_1^{(i)} P_{n-1,p-m-k,l}^{(i)} - D_1^{(i)} P_{n+1,p-m-k,l}^{(i)}) + d_{ml} d_{kl}(\overline{C}_1^{(i)} P_{n-1,p+m+k,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{D}_1^{(i)} P_{n+1,p+m+k,l}^{(i)}) + \overline{d}_{ml} d_{kl}(-C_2^{(i)} P_{n-1,p-m+k,l}^{(i)} + D_2^{(i)} P_{n+1,p-m+k,l}^{(i)}) +$$
$$+ d_{ml}\overline{d}_{kl}(C_2^{(i)} P_{n-1,p+m-k,l}^{(i)} - D_2^{(i)} P_{n+1,p+m-k,l}^{(i)})]\} \qquad (3.25г)$$

$$E_1^{(i)} = (G_1^{(i)} - G_2^{(i)}) + 2i\, G_3^{(i)},\ I_1^{(i)} = (\overline{G}_1^{(i)} - \overline{G}_2^{(i)}) + 2i\, \overline{G}_3^{(i)},$$
$$E_2^{(i)} = (G_1^{(i)} + G_2^{(i)}) + 2i\, G_3^{(i)},\ I_2^{(i)} = (\overline{G}_1^{(i)} + \overline{G}_2^{(i)}) + 2i\, \overline{G}_3^{(i)}, \qquad (3.25д)$$
$$E_3^{(i)} = (G_1^{(i)} + G_2^{(i)}),\ I_3^{(i)} = (\overline{G}_1^{(i)} + \overline{G}_2^{(i)}).$$
$$i = 1,2$$

$$C_1^{(i)} = 2G_3^{(i)} + i\,(G_2^{(i)} - G_1^{(i)}),\ D_1^{(i)} = 2\overline{G}_3^{(i)} + i\,(\overline{G}_2^{(i)} - \overline{G}_1^{(i)}),$$
$$C_2^{(i)} = i\cdot(G_2^{(i)} - G_1^{(i)}),\ D_2^{(i)} = i\cdot(\overline{G}_2^{(i)} - \overline{G}_1^{(i)}), \qquad (3.25е)$$
$$i = 1,2$$

$$\lambda_{npl}^{(3)} = \frac{\omega_0^{(3)} R_l}{4}\{(\overline{E}_1^{(3)} Q_{n-1,p-1,l}^{(3)} + E_1^{(3)} Q_{n-1,p+1,l}^{(3)} -$$
$$- \overline{I}_1^{(3)} Q_{n+1,p-1,l}^{(3)} - I_1^{(3)} Q_{n+1,p+1,l}^{(3)}) + \sum_{m=1}^{Nl} m(-\overline{d}_{ml} E_1^{(3)} Q_{n-1,p-m,l}^{(3)} - \qquad (3.25ж)$$
$$- d_{ml}\overline{E}_1^{(3)} Q_{n-1,p+m,l}^{(3)} + \overline{d}_{ml} I_1^{(3)} Q_{n+1,p-m,l}^{(3)} + d_{ml}\overline{I}_1^{(3)} Q_{n+1,p+m,l}^{(3)})\}$$

$$\psi_{npl}^{(3)} = \frac{\omega_0^{(3)} R_l}{4}\{(\overline{E}_1^{(3)} P_{n-1,p-1,l}^{(3)} + E_1^{(3)} P_{n-1,p+1,l}^{(3)} -$$
$$- \overline{I}_1^{(3)} P_{n+1,p-1,l}^{(3)} - I_1^{(3)} P_{n+1,p+1,l}^{(3)}) + \sum_{m=1}^{Nl} m(-\overline{d}_{ml} E_1^{(3)} P_{n-1,p-m,l}^{(3)} -$$
$$- d_{ml}\overline{E}_1^{(3)} P_{n-1,p+m,l}^{(3)} + \overline{d}_{ml} I_1^{(3)} P_{n+1,p-m,l}^{(3)} + d_{ml}\overline{I}_1^{(3)} P_{n+1,p+m,l}^{(3)})\} \qquad (3.25з)$$

$$E_1^{(3)} = G_1^{(3)} + i\, G_2^{(3)},\ I_1^{(3)} = \overline{G}_1^{(3)} + i\, \overline{G}_2^{(3)}$$
$$E_2^{(3)} = G_2^{(3)} + i\, G_1^{(3)},\ I_2^{(3)} = \overline{G}_2^{(3)} + i\, \overline{G}_1^{(3)} \qquad (3.25и)$$

В случае круговых полостей имеем

$$\lambda_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8}\{\overline{E}_1^{(i)} Q_{n-1,p-2}^{(i)} + E_1^{(i)} Q_{n-1,p+2}^{(i)} - \overline{I}_1^{(i)} Q_{n+1,p-2}^{(i)} - I_1^{(i)} Q_{n+1,p+2}^{(i)}) + $$
$$+ 2(E_3^{(i)} Q_{n-1,p}^{(i)} - I_3^{(i)} Q_{n+1,p}^{(i)})\}$$

$$\psi_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8}\{\overline{E}_1^{(i)} P_{n-1,p-2}^{(i)} + E_1^{(i)} P_{n-1,p+2}^{(i)} -$$
$$- \overline{I}_1^{(i)} P_{n+1,p-2}^{(i)} - I_1^{(i)} P_{n+1,p+2}^{(i)}) + 2(E_3^{(i)} P_{n-1,p}^{(i)} - I_3^{(i)} P_{n+1,p}^{(i)})\}$$

$$\vartheta_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8}\{\overline{C}_1^{(i)} Q_{n-1,p-2}^{(i)} + C_1^{(i)} Q_{n-1,p+2}^{(i)} - \overline{D}_1^{(i)} Q_{n+1,p-2}^{(i)} - D_1^{(i)} Q_{n+1,p+2}^{(i)}\} \qquad (3.25*)$$

$$\tau_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8}\{\overline{C}_1^{(i)} P_{n-1,p-2}^{(i)} + C_1^{(i)} P_{n-1,p+2}^{(i)} - \overline{D}_1^{(i)} P_{n+1,p-2}^{(i)} - D_1^{(i)} P_{n+1,p+2}^{(i)}\}$$

$$\lambda_{npl}^{(3)} = \frac{\omega_0^{(3)} R_l}{4}(\overline{E}_1^{(3)} Q_{n-1,p-1}^{(3)} + E_1^{(3)} Q_{n-1,p+1}^{(3)} - \overline{I}_1^{(3)} Q_{n+1,p-1}^{(3)} - I_1^{(3)} Q_{n+1,p+1}^{(3)})$$
$$\psi_{npl}^{(3)} = \frac{\omega_0^{(3)} R_l}{4}(\overline{E}_1^{(3)} P_{n-1,p-1}^{(3)} + E_1^{(3)} P_{n-1,p+1}^{(3)} - \overline{I}_1^{(3)} P_{n+1,p-1}^{(3)} - I_1^{(3)} P_{n+1,p+1}^{(3)})$$

В случае симметричных контуров в формулах (3.25) необходимо приравнять $d_{ml} = \overline{d}_{ml}$.

Выражения для перемещений и напряжений на контуре полостей в падающей волне $(u_i^*)_\Gamma\ (i = \overline{1,3}) = (u_{PP}, u_{SV}, u_{SH})_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\, \sigma_{nn}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\, \sigma_{n\widetilde{\theta}}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|\, \sigma_{\widetilde{\theta}3}^*)_\Gamma$, можно найти, применяя формулы разложений экспоненциальных функций в гармонические ряды.

Согласно (1.12)

$$(u_i^*)_{\Gamma_l} = (U_i^* e^{i\,(k_1^{(i)} x_1 + k_2^{(i)} x_2)})_{\Gamma_l},\ (i = \overline{1,3}),\ l = \overline{1,L} \qquad (3.26)$$

Используя соотношение (1.10), рассмотрим разложение на контуре Γ_l круговых полостей:

$$(i(k_1^{(i)}x_1 + k_2^{(i)}x_2))_{\Gamma l} = iR(k_1^{(i)}\cos\theta_l + k_2^{(i)}\sin\theta_l) = iR\,k_{12}^{(i)}\sin(\theta_l + \delta_1^{(i)}),\ (i = \overline{1,3}).$$

Теперь, воспользовавшись формулой Якоби-Ангера [143]

$$e^{it\sin\varphi} = \sum_{(n)} J_n(t)e^{in\varphi},$$

где $J_n(t)$ – функция Бесселя, запишем разложение экспоненциальной функции на контуре круговых полостей в виде:

$$(e^{i(k_1^{(i)}x_1 + k_2^{(i)}x_2)})_{\Gamma l} = e^{iR_l k_{12}^{(i)}\sin(\theta_l + \delta_1^{(i)})} = \sum_{(p)} J_p(R_l k_{12}^{(i)})e^{ip(\theta_l + \delta_1^{(i)})}.$$

Здесь через $e^{i\delta_1^{(i)}}$ обозначено выражение

$$e^{i\delta_1^{(i)}} = (k_2^{(i)} + ik_1^{(i)})/k_{12}^{(i)},\quad k_{12}^{(i)} = (k_1^{(i)2} + k_3^{(i)2})^{1/2}. \tag{3.27}$$

Обозначим через $Q_{pl}^{(i)}$ соотношение

$$Q_{pl}^{(i)} = J_p(R_l k_{12}^{(i)})e^{ip\delta_1^{(i)}}, \tag{3.28*}$$

которое является комплексной контурной функцией в случае круговых полостей. Теперь можно записать

$$(u_i^*)_{\Gamma l} = U_i^* \sum_{(p)} Q_{pl}^{(i)} e^{ip\theta_l}. \tag{3.29}$$

В случае некруговых полостей общего вида с помощью «метода возмущения формы» и переразложения цилиндрических функций на контурах можно получить выражения комплексных контурных функций для представления перемещений в падающей волне

$$Q_{pl}^{(i)} = \sum_{(\nu_1)} \dots \sum_{(\nu_{N_l})} \sum_{(\tilde{\nu}_1)} \dots \sum_{(\tilde{\nu}_{N_l})} [J_{p-\tilde{\delta}}(R_l k_{12}^{(i)}) e^{i(p-\tilde{\delta})\delta_1} \times$$

$$\times \prod_{m=1}^{N_l} \{J_{\nu_m}(R_l d_{1ml} k_{12}^{(i)}) e^{i\nu_m \delta_2} \times J_{\tilde{\nu}_m}(R_l d_{2ml} k_{12}^{(i)}) e^{i\tilde{\nu}_m \delta_3}\}], \qquad (3.28)$$

$$\tilde{\delta} = \sum_{m=1}^{N_l} m(\nu_m + \tilde{\nu}_m),$$

В случае симметричных гладких контуров полостей имеем

$$Q_{pl}^{(i)} = \sum_{(\nu_1)} \dots \sum_{(\nu_{N_l})} [J_{p-\tilde{\delta}}(R_l k_{12}^{(i)}) e^{i(p-\tilde{\delta})\delta_1} \times$$

$$\times \prod_{m=1}^{N_l} \{J_{\nu_m}(R_l d_{1ml} k_{12}^{(i)}) e^{i\nu_m \delta_2}\}], \quad \tilde{\delta} = \sum_{m=1}^{N_l} m\nu_m, \qquad (3.28^{**})$$

Разложения для $(|\tilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn}^*)_{\Gamma_l}$, $(|\tilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\tilde{\theta}}^*)_{\Gamma_l}$, $(|\tilde{\omega}'| \sigma_{\tilde{\theta}3}^*)_{\Gamma_l}$ получаем, используя соотношения (3.12), (1.38а), (1.38б), (3.29), т.е.

$$(|\tilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn}^*)_{\Gamma_l} = i\frac{R_l^2}{4} \sum_{i=1}^{2} \sum_{(p)} U_i^* \alpha_{pl}^{(i)} e^{ip\theta_l}, \quad (|\tilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\tilde{\theta}}^*)_{\Gamma_l} = i\frac{R_l^2}{4} \sum_{i=1}^{2} \sum_{(p)} U_i^* \beta_{pl}^{(i)} e^{ip\theta_l},$$

$$(|\tilde{\omega}'| \sigma_{\tilde{\theta}3}^*)_{\Gamma_l} = (½) R_l U_3^* \sum_{(p)} \alpha_{pl}^{(3)} e^{ip\theta_l} \qquad (3.30)$$

где в случае некруговых полостей общего вида выражения для $\alpha_{pl}^{(i)}$, $\alpha_{pl}^{(3)}$, $\beta_{pl}^{(i)}$, $i = 1,2$ следующие:

$$\alpha_{pl}^{(i)} = \overline{\chi}_1^{*(i)} Q_{p-2,l}^{(i)} + \chi_1^{*(i)} Q_{p+2,l}^{(i)} + 2\,\mathrm{Re}(\tilde{\chi}_1^{*(i)}) \cdot Q_{pl}^{(i)},+$$

$$+ 2\sum_{m=1}^{N_l} m[-\overline{d}_{ml}(\mathrm{Re}(\tilde{\chi}_1^{*(i)}) Q_{p-m-1,l}^{(i)} + \chi_1^{*(i)} Q_{p-m+1,l}^{(i)}) -$$

$$- d_{ml}(\mathrm{Re}(\tilde{\chi}_1^{*(i)}) Q_{p+m+1,l}^{(i)} + \overline{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m-1,l}^{(i)})] + \qquad (3.31a)$$

$$+ \sum_{m,k=1}^{N_l} mk[\overline{d}_{ml}\overline{d}_{kl} \cdot \chi_1^{*(i)} Q_{p-m-k,l}^{(i)} + d_{ml} d_{kl} \cdot \overline{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m+k,l}^{(i)} +$$

$$+ \overline{d}_{ml} d_{kl} \cdot \overline{\tilde{\chi}}_1^{*(i)} Q_{p-m+k,l}^{(i)} + d_{ml}\overline{d}_{kl} \cdot \tilde{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m-k,l}^{(i)}], \quad i = 1,2$$

$$\beta_{pl}^{(i)} = -i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) \cdot (Q_{p-2,l}^{(i)} - Q_{p+2,l}^{(i)}) - 2\sum_{m=1}^{Nl} m[\overline{d}_{ml} \cdot \chi_2^{*(i)} Q_{p-m+1,l}^{(i)} +$$
$$+ d_{ml} \cdot \overline{\chi}_2^{*(i)} Q_{p+m-1,l}^{(i)}] + \sum_{m,k=1}^{Nl} mk[\overline{d}_{ml}\overline{d}_{kl} \cdot \chi_2^{*(i)} Q_{p-m-k,l}^{(i)} + \quad (3.31б)$$
$$+ d_{ml}d_{kl} \cdot \overline{\chi}_2^{*(i)} Q_{p+m+k,l}^{(i)} - \overline{d}_{ml}d_{kl} \cdot i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) Q_{p-m+k,l}^{(i)} +$$
$$+ d_{ml}\overline{d}_{kl} \cdot i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) Q_{p+m-k,l}^{(i)}] \quad i = 1,2$$

$$\alpha_{pl}^{(3)} = \chi_1^{*(3)} Q_{p-1,l}^{(3)} + \widetilde{\chi}_1^{*(3)} Q_{p+1,l}^{(3)} - \sum_{m=1}^{Nl} m(\overline{d}_{ml} \cdot \widetilde{\chi}_1^{*(3)} Q_{p-m,l}^{(3)} + d_{ml} \cdot \chi_1^{*(3)} Q_{p+m,l}^{(3)}) \quad (3.31в)$$

Для круговых полостей $\alpha_{pl}^{(i)}$, $\alpha_{pl}^{(3)}$, $\beta_{pl}^{(i)}$, $i = 1,2$ могут быть выражены, как:

$$\alpha_{pl}^{(i)} = \overline{\chi}_1^{*(i)} Q_{p-2,l}^{(i)} + \chi_1^{*(i)} Q_{p+2,l}^{(i)} + 2\,\mathrm{Re}(\widetilde{\chi}_1^{*(i)}) \cdot Q_{pl}^{(i)}, \quad i = 1,2 \quad (3.31а^*)$$

$$\beta_{pl}^{(i)} = -i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) \cdot (Q_{p-2,l}^{(i)} - Q_{p+2,l}^{(i)}), \quad i = 1,2 \quad (3.31б^*)$$

$$\alpha_{pl}^{(3)} = \chi_1^{*(3)} Q_{p-1,l}^{(3)} + \widetilde{\chi}_1^{*(3)} Q_{p+1,l}^{(3)} \quad (3.31в^*)$$

Для симметричных контуров $\alpha_{pl}^{(i)}$, $\alpha_{pl}^{(3)}$, $\beta_{pl}^{(i)}$, $i = 1,2$ запишутся

$$\alpha_{pl}^{(i)} = \overline{\chi}_1^{*(i)} Q_{p-2,l}^{(i)} + \chi_1^{*(i)} Q_{p+2,l}^{(i)} + 2\,\mathrm{Re}(\widetilde{\chi}_1^{*(i)}) \cdot Q_{pl}^{(i)},+$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{Nl} - d_{ml} m[\mathrm{Re}(\widetilde{\chi}_1^{*(i)}) Q_{p-m-1,l}^{(i)} + \chi_1^{*(i)} Q_{p-m+1,l}^{(i)} +$$
$$+ \mathrm{Re}(\widetilde{\chi}_1^{*(i)}) Q_{p+m+1,l}^{(i)} + \overline{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m-1,l}^{(i)}] + \quad (3.31а^{**})$$
$$+ \sum_{m,k=1}^{Nl} mkd_{ml}d_{kl}[\cdot \chi_1^{*(i)} Q_{p-m-k,l}^{(i)} + \cdot \overline{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m+k,l}^{(i)} +$$
$$+ \cdot \overline{\widetilde{\chi}}_1^{*(i)} Q_{p-m+k,l}^{(i)} + \cdot \widetilde{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m-k,l}^{(i)}], \quad i = 1,2$$

$$\beta_{pl}^{(i)} = -i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) \cdot (Q_{p-2,l}^{(i)} - Q_{p+2,l}^{(i)}) - 2\sum_{m=1}^{Nl} md_{ml}[\cdot \chi_2^{*(i)} Q_{p-m+1,l}^{(i)} +$$
$$+ \overline{\chi}_2^{*(i)} Q_{p+m-1,l}^{(i)}] + \sum_{m,k=1}^{Nl} mkd_{ml}d_{kl}[\chi_2^{*(i)} Q_{p-m-k,l}^{(i)} + \qquad (3.31б^{**})$$
$$+ \overline{\chi}_2^{*(i)} Q_{p+m+k,l}^{(i)} - \cdot i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) Q_{p-m+k,l}^{(i)} +$$
$$+ \cdot i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) Q_{p+m-k,l}^{(i)}] \quad i = 1,2$$

$$\alpha_{pl}^{(3)} = \chi_1^{*(3)} Q_{p-1,l}^{(3)} + \widetilde{\chi}_1^{*(3)} Q_{p+1,l}^{(3)} - \sum_{m=1}^{Nl} md_{ml}(\cdot \widetilde{\chi}_1^{*(3)} Q_{p-m,l}^{(3)} + \chi_1^{*(3)} Q_{p+m,l}^{(3)}) \qquad (3.31в^{**})$$

$$\begin{aligned}
\chi_1^{*(1)} &= (b_{11} - b_{12})k_1^{(1)} + (b_{16} - b_{26})k_2^{(1)} + 2i \cdot (b_{16}k_1^{(1)} + b_{66}k_2^{(1)}) \\
\chi_1^{*(2)} &= (b_{16} - b_{26})k_1^{(2)} + (b_{12} - b_{22})k_2^{(2)} + 2i \cdot (b_{66}k_1^{(2)} + b_{26}k_2^{(2)}) \\
\widetilde{\chi}_1^{*(1)} &= (b_{11} + b_{12})k_1^{(1)} + (b_{16} + b_{26})k_2^{(1)} + 2i \cdot (b_{16}k_1^{(1)} + b_{66}k_2^{(1)}) \\
\widetilde{\chi}_1^{*(2)} &= (b_{16} + b_{26})k_1^{(2)} + (b_{12} + b_{22})k_2^{(2)} + 2i \cdot (b_{66}k_1^{(2)} + b_{26}k_2^{(2)}) \\
\chi_2^{*(1)} &= 2(b_{16}k_1^{(1)} + b_{66}k_2^{(1)}) + i \cdot [(b_{12} - b_{11})k_1^{(1)} + (b_{26} - b_{16})k_2^{(1)}] \\
\chi_2^{*(2)} &= 2(b_{66}k_1^{(2)} + b_{26}k_2^{(2)}) + i \cdot [(b_{26} - b_{16})k_1^{(2)} + (b_{22} - b_{12})k_2^{(2)}]
\end{aligned} \qquad (3.32а)$$

$$\begin{aligned}
\chi_1^{*(3)} &= (b_{45}k_2^{(3)} + b_{55}k_1^{(3)}) - i(b_{44}k_2^{(3)} + b_{45}k_1^{(3)}), \\
\widetilde{\chi}_1^{*(3)} &= (b_{45}k_2^{(3)} + b_{55}k_1^{(3)}) + i(b_{44}k_2^{(3)} + b_{45}k_1^{(3)}), \\
\chi_2^{*(3)} &= (b_{44}k_2^{(3)} + b_{45}k_1^{(3)}) + i(b_{45}k_2^{(3)} + b_{55}k_1^{(3)}), \\
\widetilde{\chi}_2^{*(3)} &= (b_{44}k_2^{(3)} + b_{45}k_1^{(3)}) - i(b_{45}k_2^{(3)} + b_{55}k_1^{(3)}),
\end{aligned} \qquad (3.32б)$$

Теперь для удовлетворения граничным условиям (3.23) применим метод приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $e^{ip\theta}$. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_{nl}^{(i)}$, $s_{nl}^{(i)}$ вида

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)}(A_{nl}^{(i)}\lambda_{npl}^{(i)} + s_{nl}^{(i)}\psi_{npl}^{(i)}) = -i\frac{R_l^2}{4}\sum_{i=1}^{2}U_i^*\alpha_{pl}^{(i)} \\
&\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)}(A_{nl}^{(i)}\vartheta_{npl}^{(i)} + s_{nl}^{(i)}\tau_{npl}^{(i)}) = -i\frac{R_l^2}{4}\sum_{i=1}^{2}U_i^*\beta_{pl}^{(i)} \qquad (3.33) \\
&\sum_{(n)}(A_{nl}^{(3)}\lambda_{npl}^{(3)} + s_{nl}^{(3)}\psi_{npl}^{(3)}) = -(\tfrac{i}{2})R_l U_3^*\alpha_{pl}^{(3)}
\end{aligned}$$

Данная система решается методом редукции. В силу того, что в настоящий момент не существует строгого обоснования подобного подхода к решению бесконечных систем, поэтому сходимость решения показывается численно.

3.3 Решение второй основной задачи – контур штрекообразных полостей закреплен недеформируемой крепью

При подкреплении параллельно протяженных сооружений необходимо учитывать взаимовлияние сооружений. При выборе формы обделок и способов их подкрепления учитывают также горно-геологическое строение и физико-механические свойства массива. Учет всех параметров в совокупности позволяет решать динамические контактные задачи о взаимодействии сооружения и окружающей породной толщи посредством различного рода обделок.

В данном разделе решается задача о динамическом напряженном состоянии параллельных горизонтальных штрекообразных полостей глубокого заложения, подкрепленных абсолютно жесткой обделкой, (вторая основная задача) при стационарной дифракции упругих продольно-поперечных и сдвиговых волн произвольной ориентации.

Поскольку контакт между недеформируемой обделкой и упругим транстропным массивом жесткий и непрерывный, то граничные условия на контуре полостей Γ_l могут быть записаны в виде

$$(u_i + u_i^*)_{\Gamma l} = 0\,, \quad i = 1,2,3\,,\ l = \overline{1,L} \tag{3.34}$$

Для решения второй основной задачи необходимо также проинтегрировать дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка (1.13*), (1.14) с граничными условиями (3.34). Вводя аффинное преобразование вида (3.3) для случая продольно-поперечных волн и (3.6) - для сдвиговых волн, можно дифференциальные уравнения типа (1.13*), (1.14) свести к виду уравнений Гельмгольца (3.8), (3.9) в координатах $(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}), i = 1,2,3$ [144].

Решения уравнений (3.8), (3.9) в перемещениях u_i , $i = 1,2,3$ в соответствии с принципом обобщенной суперпозиции, могут быть представлены в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов $B_{nl}^{(i)}$, $t_{nl}^{(i)}$ и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода [5,143]

$$u_i = \sum_{(n)} B_{nl}^{(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}} + t_{nl}^{(i)} J_n(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}}, \ (r_l^{(i)} < R_{lq}^{(i)}),$$

$$i = 1,2,3 \ , \ l = \overline{1,L} \tag{3.35}$$

где

$$t_{nl}^{(i)} = \sum_{\substack{q=1,\\ q\neq l}}^{L} \sum_{(p)} B_{pq}^{(i)} H_{p-n}^{(1)}(\omega_0^{(i)} R_{lq}^{(i)}) e^{i(p-n)\kappa_{lq}^{(i)}} \tag{3.36}$$

($R_{lq}^{(i)}$, $\kappa_{lq}^{(i)}$) – координаты точки $O_{\xi l}^{(i)}$ в системе координат ($r_q^{(i)}$, $\kappa_q^{(i)}$)

Здесь также в качестве цилиндрической функции была также взята функция Ханкеля 1-го рода и функция Бесселя, поскольку решения поставленной задачи характеризуют волну, уходящую и затухающую на бесконечности, а зависимость от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$.

Соответствующие представлению перемещения u_i в виде (3.35) выражения для составляющих напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, σ_{13}, σ_{23} будут представлены в следующем виде:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{11}, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12}$$

$$\sigma_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n)} B_{nl}^{(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{(i)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(i)}} - \overline{G}_j^{(i)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(i)}}] +$$

$$+ t_{nl}^{(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{(i)} J_{n-1}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(i)}} - \overline{G}_j^{(i)} J_{n+1}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(i)}}], (j = \overline{1,3})$$

$$\sigma_{k3} = \frac{1}{2} \sum_{(n)} B_{nl}^{(3)} \omega_0^{(3)} [G_k^{(3)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(3)}} - \overline{G}_k^{(3)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(3)}}] +$$

$$+ t_{nl}^{(3)} \omega_0^{(3)} [G_k^{(3)} J_{n-1}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(3)}} - \overline{G}_k^{(3)} J_{n+1}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(3)}}], (k = \overline{1,2}) \tag{3.37}$$

где значения $G_j^{(i)}$, $i, j = 1,2,3$ определяются соотношениями (3.12*).

Для вычисления неизвестных коэффициентов $B_{nl}^{(i)}$, $t_{nl}^{(i)}$, пользуясь выражениями для точек, лежащих на контурах полостей Γ_l, (3.13), (3.14), а также условием (3.16а,б), применяя теорему сложения цилиндрических функций, соотношение (3.35) на контурах Γ_l можно представить в виде:

$$(u_i)_{\Gamma_l} = \sum_{(n,p)} (B_{nl}^{(i)} Q_{npl}^{(i)} + t_{nl}^{(i)} P_{npl}^{(i)}) e^{ip\theta_l^{(i)}}, \; i = 1,2,3, \; l = \overline{1,L} \tag{3.38}$$

где комплексные функции $Q_{npl}^{(i)}$, $P_{npl}^{(i)}$ вычисляются по формуле (3.18), (3.19).

Представления для перемещений на контурах полостей в падающей волне $(u_i^*)_{\Gamma_l} (i = \overline{1,3})$ также находятся с помощью формул разложений экспоненциальных функций в гармонические ряды:

$$(u_i^*)_{\Gamma_l} = U_i^* \sum_{(p)} Q_{pl}^{(i)} e^{ip\theta_l} \tag{3.39}$$

где коэффициенты $Q_{pl}^{(i)}$ вычисляются из выражений (3.28).

Теперь для удовлетворения граничным условиям (3.34) применим метод приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $e^{ip\theta}$. Из полученных равенств после соответствующих подстановок можно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $B_{nl}^{(i)}$, $t_{nl}^{(i)}$ в виде

$$\sum_{(n)} (B_{nl}^{(i)} Q_{npl}^{(i)} + t_{nl}^{(i)} P_{npl}^{(i)}) = -U_i^* Q_{pl}^{(i)}, \; i = 1,2,3, \; p = \overline{-\infty,+\infty} \tag{3.40}$$

которая решается методом редукции. Численной реализацией можно показать сходимость решений бесконечной системы уравнений по мере удовлетворения условиям на контуре круговой полости и определения коэффициентов при неизвестных в уравнениях.

Далее для вычисления нормальных и касательных напряжений на контурах полостей можно записать выражения, аналогичные (3.24), в виде:

$$\begin{aligned}
(|\widetilde{\omega}'_l|^2 \, \sigma_{nn})_{\Gamma_l} &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n,p)} (B_{nl}^{(i)} \lambda_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}} + t_{nl}^{(i)} \psi_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}}) \\
(|\widetilde{\omega}'_l|^2 \, \sigma_{n\tilde{\theta}})_{\Gamma_l} &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n,p)} (B_{nl}^{(i)} \vartheta_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}} + t_{nl}^{(i)} \tau_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}}) \\
(|\widetilde{\omega}'_l| \, \sigma_{\tilde{\theta}\tilde{3}})_{\Gamma_l} &= \sum_{(n,p)} (B_{nl}^{(3)} \lambda_{npl}^{(3)} e^{ip\theta_l^{(3)}} + t_{nl}^{(3)} \psi_{npl}^{(3)} e^{ip\theta_l^{(3)}})
\end{aligned} \tag{3.24}$$

где комплексные функции $\lambda_{np}^{(i)}$, $\vartheta_{np}^{(i)}$, $\psi_{npl}^{(i)}$, $\tau_{npl}^{(i)}$ определятся из соотношений (3.25).

Выражения для нормальных и касательных напряжений в падающей волне $(|\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{nn}^{*})_{\Gamma_l}$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\,\sigma_{n\theta}^{*})_{\Gamma_l}$, $(|\widetilde{\omega}'|\,\sigma_{\theta 3}^{*})_{\Gamma_l}$ определятся из (3.30), (3.31).

3.4 Анализ динамического НДС штрекообразных полостей в транстропном массиве при стационарной дифракции упругих продольно-поперечных волн

Динамический анализ штрекообразных выработок проведем в соответствии с принятыми в предыдущих разделах исходными данными [144,145,146,147,148,149,150]. В качестве анизотропного массива рассмотрим алевролит со следующими упругими характеристиками пород, согласно таблице 1: E_1=1,074*10^5 кг/см^2, E_2=0,523*10^5 кг/см^2, G_2=0,12*10^5 кг/см^2, ν_1=0,413, ν_2=0,198. Упругая волна распространяется под углом α от 0 до 180 с диапазоном частот от 1 до 100 Гц (берется наиболее часто встречающийся диапазон частот в реальном измерении). Изменение угла наклона плоскости изотропии φ рассматривается от 0 до 180 .

В соответствии с теоретическим решением для количественного и качественного анализа напряженно-деформированного состояния полостей разработан алгоритм и составлен пакет прикладных программ в среде Matlab7.0.

Результаты расчета контурных нормальных и касательных напряжений $(\sigma_{nn})_\Gamma$, $(\sigma_{n\theta})_\Gamma$, $(\sigma_{\theta 3})_\Gamma$ получены на базе решения методом редукции бесконечных систем линейных алгебраических уравнений вида (3.33), (3.40) в которых удерживалось не более 20 уравнений. Это позволило удовлетворить граничным условиям с погрешностью менее 1% для амплитуд контурных напряжений $(\sigma_{nn})_\Gamma$, $(\sigma_{n\theta})_\Gamma$, $(\sigma_{\theta 3})_\Gamma$ по отношению к соответствующим амплитудным значениям напряжений в падающей волне в случае решения первой основной задачи и для смещений в отраженной волне по отношению к максимальным смещениям в падающей. Отсечение членов ряда происходило по мере удовлетворения граничным условиям и по мере анализа коэффициентов при неизвестных в уравнениях. В таблице 13 приведены расчетные данные, демонстрирующие снижение порядка коэффициентов при неизвестных в уравнениях для разного порядка системы уравнений (N=5, 16, 20). Как видно из таблицы, оптимальным является решение при порядке системы уравнений 20, что дает выполнение граничных условий с точностью менее 0,001%.

Программа тестировалась на результатах для одиночной выработки, полученной в работе [118]. При увеличении длины перемычки между выработками на расстояние более (10-15)R

количественная и качественная картины, аналогичны данным для одиночной выработки, с расхождением менее, чем 1%. Таким образом, при величине длины перемычки между выработками в (10-15)R исследуемое напряженно-деформированное состояние характерно для одиночных выработок. На рисунке 23 показаны зависимости напряжений в некоторых точках контура от величины перемычки между выработками. Заметно, что при расстоянии более 15R значения напряжений выравниваются и равны значениям напряжений для одиночных выработок.

На рис. 24 приведены значения продольных перемещений u3 и касательных напряжений $|\sigma_{\theta 3}|$ на контурах двух неподкрепленных круговых выработок при падении на выработки под углом $\alpha = 0$ плоской SH – волны. На графике показано влияние угла наклона плоскости изотропии φ на амплитудные характеристики продольных перемещений u_3, отнесенных к максимальным перемещениям в падающей волне, на левой (рис. 3а) и правой выработках (рис.3в). На рисунках 3б и 3г продемонстрировано распределение касательных напряжений в отраженной волне, отнесенных к максимальным касательным напряжениям в падающей волне. Частота волны бралась ω =15 Гц. При проведении исследований фиксировался угол падения волны ($\alpha = 0$) и изменялся лишь угол наклона плоскости изотропии φ . Можно отметить относительную симметрию картины распределения продольных перемещений относительно расположения плоскости изотропии на левой и правой выработках. В случае распределения касательных напряжений $|\sigma_{\theta 3}|$ наблюдается значительное увеличение смещений в зоне перемычки между выработками и в боках штреков. При угле наклона плоскости изотропии $\varphi = 45°$ наблюдается максимальное распределение напряжений, причем на левой полости, находящейся в зоне «света» больше, чем на правой.

Таблица 13 *– Изменения абсолютных значений коэффициентов при неизвестных в системе линейных алгебраических уравнений*

№ коэф. п/п	Количество членов ряда			
	5	**10**	**16**	**20**
1	0.02647570	0.02700843	0.02824359	0.02965132
2	0.02647570	0.02308683	0.02403759	0.02511908
3	0.02269046	0.03159750	0.03276581	0.03409846
4	0.03113278	0.00961931	0.00993730	0.01030289
5	0.0950076	0.03742866	0.03852858	0.03981045
6		0.02191877	0.02248702	0.02316288
7		0.01417395	0.01449486	0.01488762
8		0.03971806	0.04049279	0.04147892
9		0.04441195	0.04514457	0.04612846
10		0.03522424	0.03570295	0.03639526
11			0.02271227	0.02310111
12			0.01227595	0.01245963
13			0.00581455	0.00588955
14			0.00246242	0.00248930
15			0.00094574	0.00095425
16			0.00032563	0.00033533
17				0.00010892
18				0.00003293
19				0.00000932
20				0.00000258

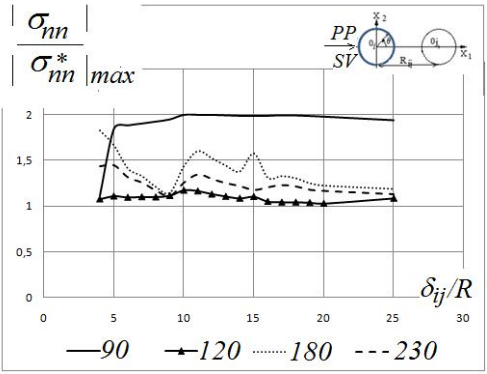


Рисунок 23 – Значения напряжений в некоторых точках контура в зависимости от величны перемычки между выработками

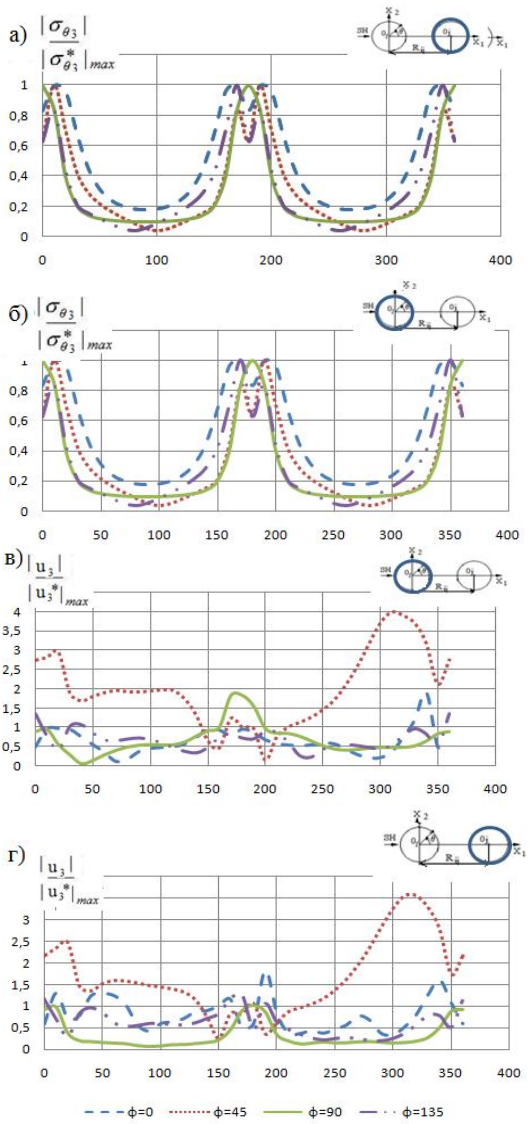


Рисунок 24 – Амплитуды касательных напряжений (а, б) и продольных перемещений (в,г) на контурах выработок при дифракции SH – волн сдвига в анизотропной среде для разных углов наклона плоскости изотропии

На рис.25 показаны эпюры перемещений для разных частот падающих продольных и поперечных волн (ω =15, 50, 100 Гц), когда угол падения волны α =0, угол наклона плоскости изотропии принимает значения φ =0, расстояние между выработками составляет 4 радиуса выработок.

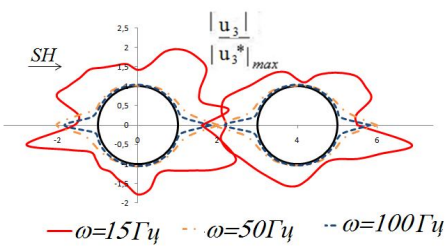
Диапазон частот $(1 \div 50)$Гц характерен для сейсмических воздействий от землетрясений, $(50 \div 100)$ Гц - от промышленных взрывов.

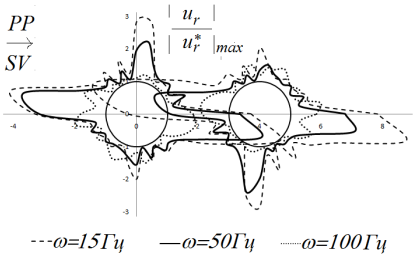
Заметно, что наибольшая концентрация перемещений наблюдается в кровле и в боках со стороны падения волны (зоне «света») и на перемычке между выработками при частоте ω =15 Гц. На правой выработке (в зоне «тени») наблюдается меньшая концентрация перемещений по сравнению с левой выработкой. С увеличением частоты значения перемещений имеют тенденцию к уменьшению.

На рисунке 26 приведены зависимости перемещений от угла падения волн растяжения-сжатия и сдвигов в случае незакрепленных выработок кругового профиля. Можно отметить, что угол падения существенно влияет на деформативную картину, которая носит волновой характер.

При анализе выработок, подкрепленных абсолютно жестко, также рассматриваются влияния углов наклона плоскости изотропии, частоты, на концентрации контурных напряжений и перемещений при падении продольных и поперечных волн.

а)





б)

Рисунок 25 – Влияние частоты падающих продольных и поперечных волн на динамическое состояние неподкрепленных круговых полостей

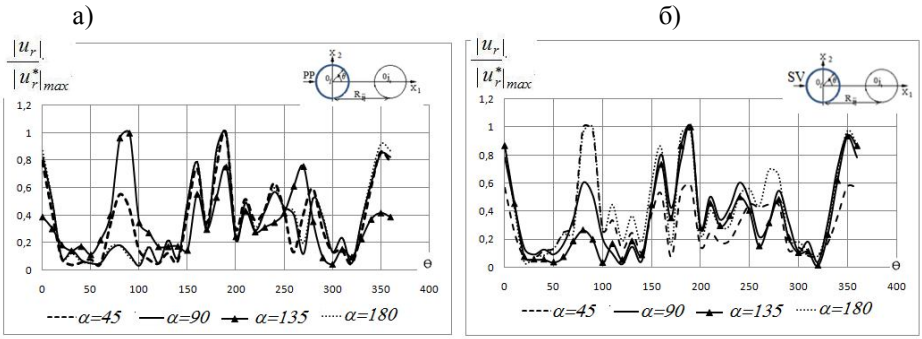


Рисунок 26 – Зависимость радиальных перемещений от угла падения продольных PP-(а) и поперечных SV-(б) волн

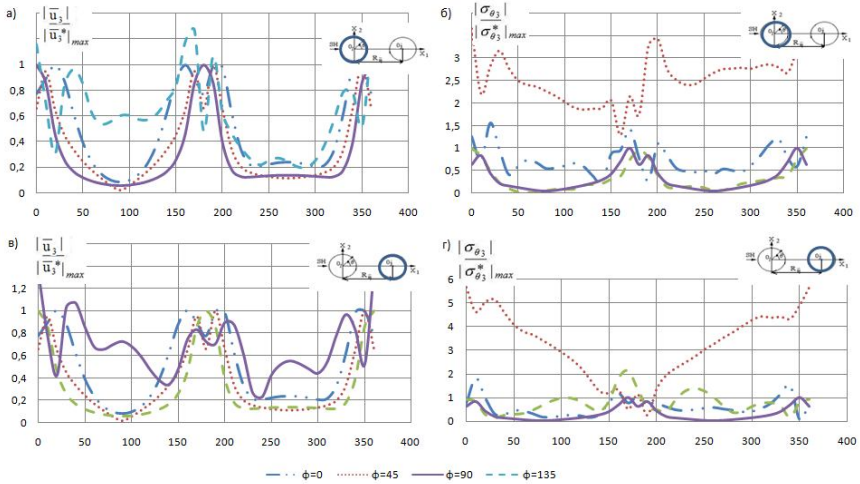


Рисунок 27 – Амплитуды продольных перемещений (а,в) и касательных напряжений (б,г) на контурах жестко закрепленных выработок при дифракции SH – волн сдвига с анизотропной среде для разных углов наклона плоскости изотропии

На рисунке 27 приведены закономерности распределения контурных напряжений и перемещений на двух выработках, подкрепленных недеформируемой крепью и расположенных на расстоянии 4 радиусов друг от друга, в зависимости от угла наклона плоскости изотропии при падении под углом $\alpha = 0°$ sh-волн сдвига с

частотой 15 гц. можно отметить симметрию картины распределения напряжений относительно расположения плоскости изотропии на левой и правой выработках. в случае распределения продольных перемещений наблюдается значительное увеличение смещений в зоне перемычки между выработками при угле наклона плоскости изотропии $\varphi = 45°$, причем на левой выработке, находящейся в зоне «света» больше, чем на правой.

На рисунке 28 показаны зависимости контурных касательных напряжений на двух выработках, подкрепленных недеформируемой крепью, от частот падающей SH-волны сдвига, когда угол падения волны α =0, угол наклона плоскости изотропии φ =0.

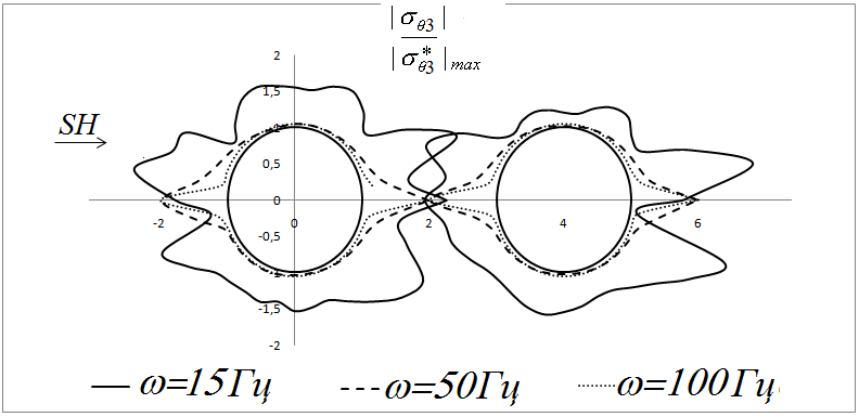


Рисунок 28 – Влияние частот падающей волны на контурные касательные напряжения при падении SH-волны

Видно, что наибольшая концентрация напряжений наблюдается в кровле и в боках со стороны падения волны (зоне «света») при частоте ω =15 Гц. В зоне «тени» величины напряжений меньше по сравнению с напряжениями в зоне «света». С увеличением частоты значения напряжений имеют тенденцию к уменьшению.

Особое место в исследованиях занимает анализ напряженно-деформированных характеристик массива с двоякопериодической системой коллинеарных щелей, моделирующих трещиноватость среды. Как было указано выше, детальные исследования таких сред проводились в работах [3, 41,42,43]. В данной работе проводится динамический анализ трещиноватых сред с помощью моделирования

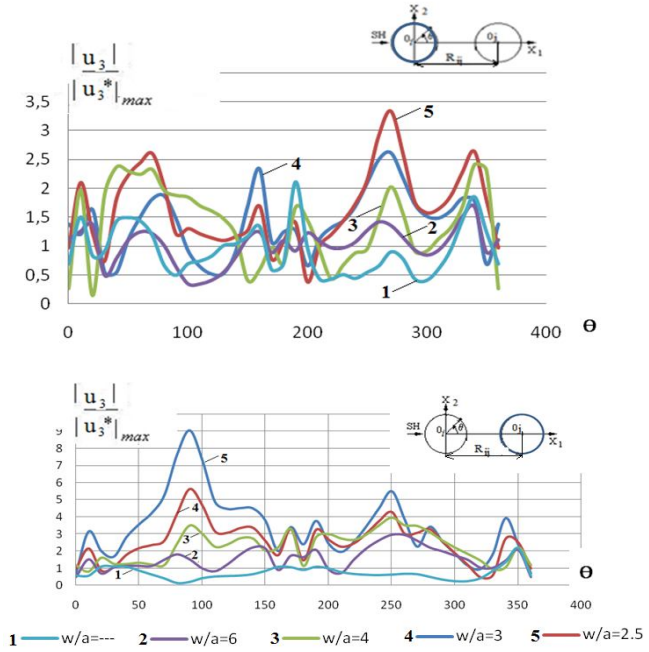
анизотропной среды и варьирования параметров анизотропии, согласно таблице 2.

Можно показать зависимость напряжений и перемещений от степени анизотропии при динамических воздействиях волн. В качестве примера приведем анализ контурных напряжений и перемещений при падении SH-волн сдвига [146] на парные круговые выработки глубокого заложения. На рисунке 29 приведены графики распределения контурных продольных перемещений на неподкрепленных круговых выработках в зависимости от степени несплошности сцепления массива (степени анизотропии) w / a , где $w = w_1 + iw_2$ - период щелей, $2a$ -длина трещины, при дифракции SH-волн с частотой в 15 Гц.

Как видно из графиков, с уменьшением степени несплошности сцепления наклонных слоев можно отметить рост концентрации продольных перемещений, что характеризует рост деформативности массива при уменьшении сцепления слоев. Максимальная концентрация продольных перемещений наблюдается при степени несплошности сцепления слоев (степени анизотропии) w/a равной 3.

Для исследования выработок некругового профиля приведем несколько примеров эпюр выработок разной формы при разных углах падения SH-волны и угла наклона плоскости изотропии (рис. 30-31). Как видно из рисунка 30, наибольшие концентрации перемещений и напряжений наблюдаются в основании и в кровле подковообразных выработок, тогда как в боках значительное снижение концентрации. Можно видеть всплеск распределении напряжений и в особенности-перемещений в зоне «света» со стороны падения волны. На перемычке левая выработка (в зоне «света») имеет больше смещения, чем правая. В распределении касательных напряжений наблюдается относительная равномерность, что связано с особенностями решения первой основной задачи. Можно также отметить, что угол наклона плоскости изотропии значительно меняет картину напряженно-деформированного состояния (рис.30 в-г).

а)



б)

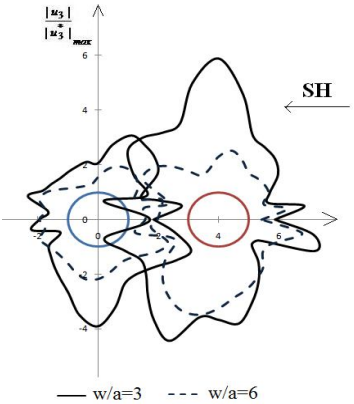


Рисунок 29 – Графики и эпюры распределения контурных продольных перемещений на неподкрепленных круговых выработках при угле наклона плоскости изотропии φ = 0 (а), φ = 180(б).

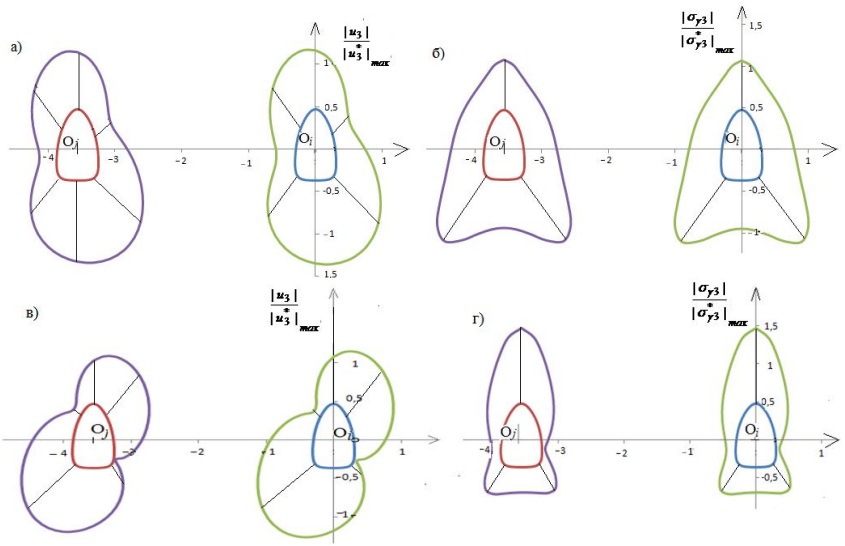


Рисунок 30 – Эпюры упругих продольных перемещений (а,в) и касательных напряжений (б,г) на контурах подковообразных выработок при дифракции SH- волн в анизотропной среде при φ=0, α=0, (а,б) и φ=45, α=45(в,г), ω=15 Гц

Заметно, симметричное распределение продольных перемещений относительно простирания плоскости изотропии. Более того, наблюдается уклон всплеска в распределении перемещений в зону «света». В напряжениях значительная концентрация видна в кровле выработок по сравнению с основанием. На рисунке 31 показана картина напряженно-деформированного состояния сводчатых выработок. Здесь наблюдается на перемычке со стороны левой выработки наибольшее распределение продольных перемещений, в касательных напряжениях виден всплеск в угловых точках основания, причем со стороны падения волны больше.

Влияние угла наклона плоскости изотропии и частот падающей волны на некруговые выработки можно наблюдать из эпюр и графиков на рисунках 32-33. Наименьшая концентрация напряжений наблюдается при угле наклона плоскости изотропии φ=90°. Наибольшая концентрация напряжений на подкрепленных абсолютно жесткой крепью сводчатых выработках наблюдается при сейсмической частоте в (10-15) Гц .

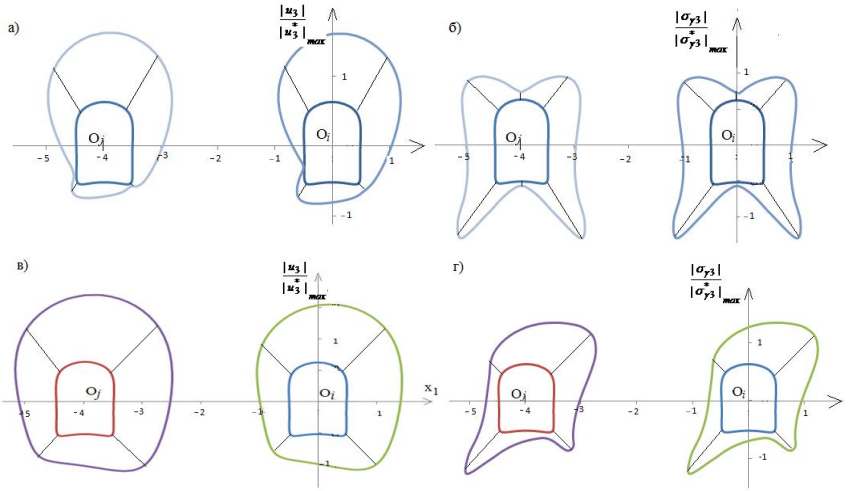


Рисунок 31 – Эпюры упругих продольных перемещений (а,в) и касательных напряжений (б,г) на контурах сводчатых выработок при дифракции SH – волн в анизотропной среде при φ=0, α=0, (а,б) и φ=45, α=45(в,г), ω=15 Гц

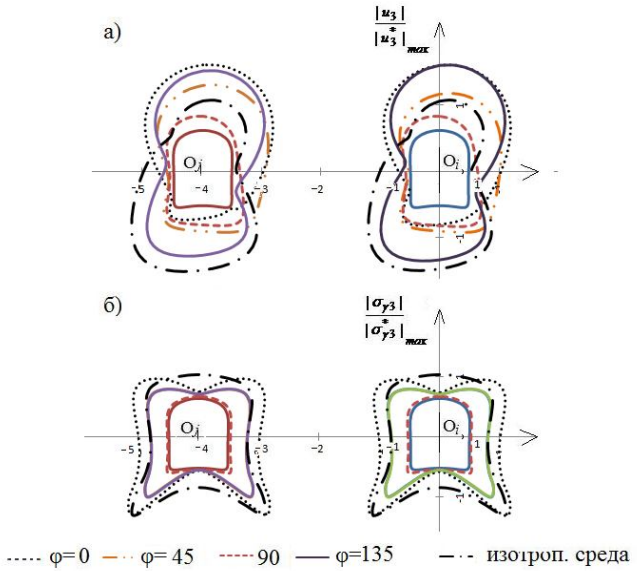


Рисунок 32 – Зависимость касательных напряжений и перемещений при дифракции SH – волны на поверхности сводчатых выработок от углов наклона плоскости изотропии при угле падения $\alpha = 0$ *и частоте ω =15 Гц*

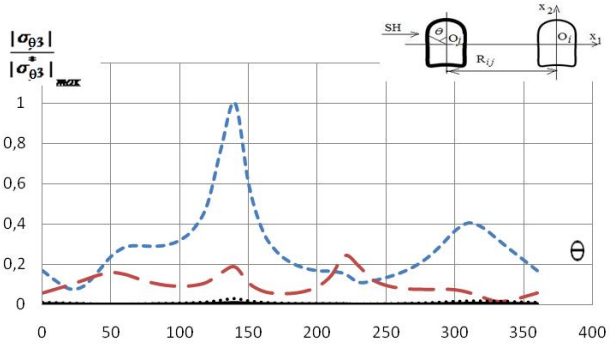


Рисунок 33 – Амплитуда касательных напряжений на контуре левой сводчатой выработки в зависимости от частот падающей SH – волны сдвига при угле падения волны α=0 и угле наклона плоскости изотропии $\varphi = 45°$

Заключение по третьему разделу

1. Используя строгий математический аппарат (методы конформных отображений, методы функций комплексного переменного, методы возмущения формы, теорию цилиндрических функций), были выведены соотношения для решения основных задач теории упругости по определению напряженно-деформированного состояния серии штрекообразных полостей в транстропном массиве с наклонной плоскостью изотропии при дифракции упругих волн. На основе полученных решений разработаны алгоритмы и пакет прикладных программ.

2. Исследовано взаимовлияние параллельно протяженных выработок кругового и некругового поперечного сечения при динамическом воздействии волн растяжения-сжатия и сдвигов. Показано, что при увеличении длины перемычки между выработками на расстояние более (10-15)R количественная и качественная картины, аналогичны данным для одиночной выработки, с расхождением менее, чем 1%.

3. Изучено влияние физико-механических параметров массива и падающих волн на НДС двух глубоко заложенных выработок в случае из неподкрепленности и закрепления их абсолютно жесткой крепью. Показано существенное влияние угла наклона плоскости изотропии, причем при падении сдвиговых волн наблюдается максимальное распределение напяжений и перемещений при угле $\varphi = 45°$ в зоне «света», больше, чем в «тени».

4. НДС выработок существенно зависит и от частоты падающих волн, причем с увеличением частоты наблюдается тенденция уменьшения напряженно-деформированных характеристик.

5. Показано влияние трещиноватости среды на НДС выработок, причем с увеличением степени несплошности слоев значительно количественно меняются деформативные свойства массива, тогда как на картину распределения напряжений изменение степени анизотропии влияет только качественно.

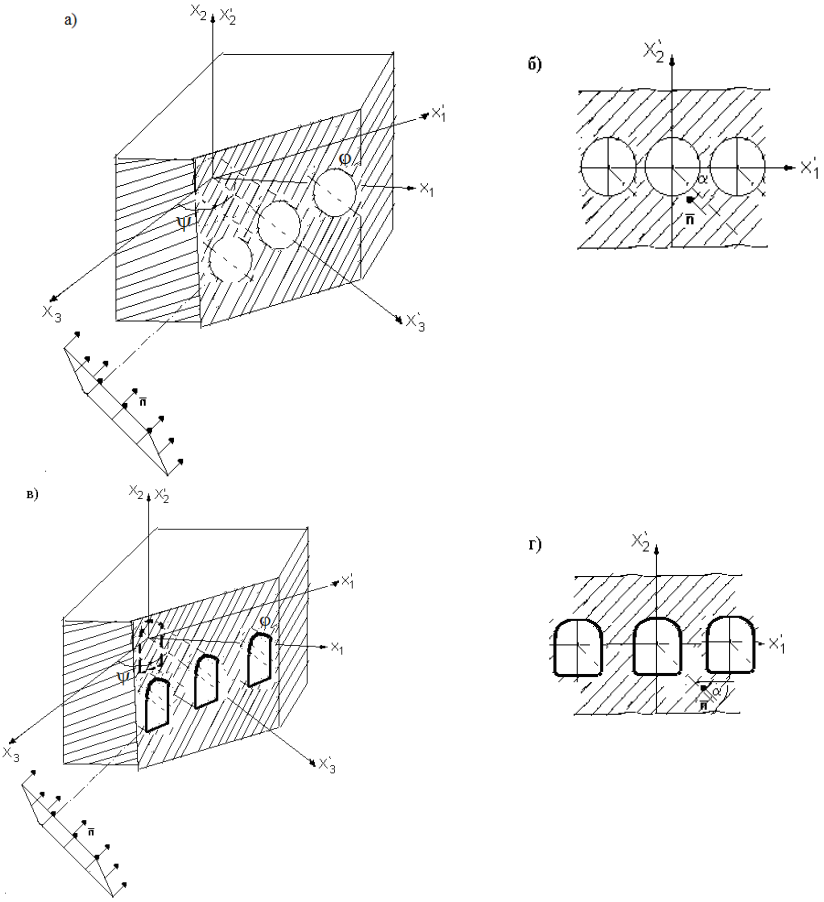
6. Исследовано влияние формы поперечного сечения выработок на их механическое состояние. Рассмотрены формы подковообразных и сводчатых выработок, показано существенное влияние на распределение напряжений и перемещений углов падения волн и их частот и углов наклона плоскости изотропии массива.

4 ОБОБЩЕННАЯ ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПОЛОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОИСТОМ МАССИВЕ ПРИ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН РАСТЯЖЕНИЯ-СЖАТИЯ И СДВИГОВ

4.1 Основные уравнения и соотношения

Предположим, что в транстропном массиве проведены горизонтальные диагональные полости, в общем случае, произвольно ориентированные относительно плоскости простирания слоев массива. Также, как и во втором разделе, можно преобразовать уравнения обобщенного закона Гука (1.1) для массива с диагональными полостями в системе координат $Ox_1'x_3'x_3'$, у которой ось Ox_3' составляет угол ψ с осью Ox_3 в первоначальной декартовой системе координат, направления осей Ox_1' и Ox_1 также отличаются на угол ψ, а ось Ox_2' совпадает с осью Ox_2 (см. рис. 34). Подобное возможно, если провести горизонтальный поворот осей на угол ψ вокруг оси Ox_2. Предположим, что заданные внешние объемные силы не меняются вдоль продольной оси диагональных цилиндрических полостей. В силу трансверсальности изотропии упругих свойств массив поперечное сечение диагональных полостей получает искривление. Однородность механических свойств массива в совокупности с предположением о бесконечной протяженности полостей обуславливает одинаковость искривления поперечных сечений диагональных полостей на всем их протяжении. Следовательно, можно предположить, что все характеристики напряженно-деформированного состояния диагональных полостей зависят от координат (x_1', x_2') в плоскости их поперечного сечения, т.е. $u_1' = u_1'(x_1', x_2)$ $u_2' = u_2'(x_1', x_2)$, $u_3' = u_3'(x_1', x_2)$, а $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1', x_2')$, $i, j = 1,2,3$, что аналогично условиям плоской деформации. Подобного рода деформация относится к, так называемой, обобщенной плоской.

При этих условиях уравнения обобщенного закона Гука для массива с наклонной плоскостью изотропии, содержащей диагональные полости, имеют вид (2.1), где коэффициенты упругости $c_{ij} = c_{ji}$ зависят, кроме пяти приведенных постоянных E, E_2, ν_1, ν_2, G_2, от угла наклона φ плоскости изотропии к горизонту и угла отклонения ψ оси выработок от линии простирания этой плоскости.



φ – угол наклона плоскости изотропии; α – угол падения волны; ψ – угол отклонения оси диагональной выработки; $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении распространения упругой волны

Рисунок 34 – Схема распространения плоской гармонической волны в трансторопном массиве с круговой полостью глубокого заложения при обобщенной плоской деформации: круговые полости а) общий вид; б) плоскость поперечного сечения; некруговые полости в) общий вид; г) плоскость поперечного сечения;

Указанные коэффициенты являются приведенными вдоль продольной оси диагональной полости, и могут выражаться формулами (2.2) , где $b_{ij}^{'}$ берутся из соотношений (2.3), а исходные коэффициенты b_{ij} берутся из (1.1).

При использовании физических уравнений состояния (1.1) и кинематических соотношений Коши уравнения движения в случае обобщенной плоской деформации могут быть представлены в операторном виде (2.4) с операторами $A_{ij}^{(k)}$ (*i,j=1,2,3; k=0,1,2*) из (2.5).

Так же, как и в предыдущем разделе, предположим, что S_l ($l=\overline{1,L}$) области поперечного сечения полостей, а $S_0=\Re^2-\bigcup_{l=1}^{L}S_l$ область поперечного сечения многосвязной среды (транстропного массива). С центром каждой полости свяжем локальную безразмерную координатную систему (x_{1l}, x_{2l}) ($l=\overline{1,L}$), (x_{10}, x_{20})=(x_1/R, x_2/R), *R*-некоторый линейный размер (например, максимальное значение величины перемычки между полостями). Горизонтальные полости проведены вдоль оси Ox_3 и имеют поперечное сечение с контуром Γ_l .

Предположим, что внешность единичного круга с помощью функции $\tilde{\omega}(\zeta_l)$ из (3.1) отображается на внешность контура Γ_l границы области S_l ($l=\overline{1,L}$). Здесь коэффициенты d_{ml}, в общем случае, берутся комплексными, что соответствует несимметричным контурам полостей, в случае действительных коэффициентов, имеет место симметричный контур полостей, если все коэффициенты d_{ml}=0, имеет место случай круговых контуров. Примеры разных профилей контуров показаны на рис.14. Заметим, что все контуры, изображенные на рисунке 14, имеют гладкий профиль, который может быть описан функцией вида (3.1). В случае круговых контуров отображающая функция значительно упрощается и имеет вид (3.1*).

Теперь предположим, что в транстропном массиве в плоскости поперечного сечения полостей вдоль направления, задаваемого единичным вектором $\vec{n}$=(n_1, n_2), падает стационарная упругая волна. Фронт волны параллелен оси полостей Ox_3, сама волна поляризована в плоскости поперечного сечения полостей в случае рассмотрения PP-, SV-волн и параллельно оси Ox_3 в случае распространения SH-волн. Гармоническая волна имеет вид, описанный во втором разделе (2.6) с амплитудой (2.7), где ω - частота волны, $\overline{k}$ - волновой вектор, получаемый из выражений (2.16а), (2.16б), n_1, n_2 – направляющие

косинусы угла падения волны α - угла между осью Ox'_1 и вектором $\vec{n}$ (см. рис. 34).

В случае обобщенной плоской деформации дифракционное поле характеризуется составляющими перемещений $\overline{u}_p = \{u_1, u_2, u_3\}$, зависящих от координат в плоскости поперечного сечения полостей. Так как в случае одиночных полостей имеют место те же условия, что и для серии полостей, можно использовать предположения, принятые для одиночных полостей, и в данном случае. А именно то, что краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (2.4) с учетом, что характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x'_1,x'_2) в плоскости поперечного сечения полости. Тогда для диагональных полостей в уравнениях (2.4) ненулевыми остаются лишь члены вида (2.8).

Так как в случае обобщенной плоской деформации выполняются аналогичные условия, как и при плоской деформации, то можно принять, что осуществимо разделение волн на квазипродольные и квазипоперечные, причем PP-, SV- волны распространяются в плоскости поперечного сечения полости, а SH-волна является горизонтально поляризованной и ее амплитудные смещения происходят вдоль оси круговой полости. Тогда в случае падения волн растяжения-сжатия (PP-, SV-) в рассмотрение берется дифракционное поле, которое характеризуется составляющими перемещений в плоскости поперечного сечения полости $\overline{u}_p = (u_1, u_2)$. Краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (2.8) с учетом, что все составляющие перемещений, кроме (u_1, u_2), равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x'_1,x'_2). Тогда в уравнениях вида (2.8) ненулевыми остаются лишь члены вида (2.9).

Так как коэффициенты в дифференциальных уравнениях в частных производных вида (2.5), входящие в операторный вид уравнений движений (2.9), являются постоянными, не зависящими друг от друга, можно, применив некоторые преобразования, упростить формулы (2.9) к виду (2.10). Вводя обозначения (2.11), можно получить соотношения, аналогичные соотношениям для случая плоской деформации (1.13) [133].

Так же, как и в предыдущих разделах, выражения (2.10) удобней представить в матричной форме вида (2.10*) с матричными коэффициентами, причем коэффициенты c'_{ij} можно представить в виде (2.12), а c_{ij}, $i, j = \overline{1,6}$ рассчитать из формул (2.2).

При падении SH-волн сдвига, так же как и в случае одиночных диагональных полостей, рассматривается антиплоская деформация полостей (условия обобщенной плоской деформации и особенности распространения сдвиговых волн позволяют применить случай антиплоской деформации), а дифракционное поле, в этом случае, характеризуется амплитудными составляющими перемещений $u_3(x'_1,x'_2)$ в осевом направлении. Краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (2.8) с учетом, что все составляющие перемещений, кроме u_3 , равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x'_1,x'_2). Тогда в уравнениях (2.9) ненулевыми остаются уравнения вида (2.13), в которых, складывая почленно левые и правые части, можно прийти к выражениям вида (2.14), которые идентичны соотношениям случая распространения SH-волн в среде с штрекообразными полостями. Коэффициентами c'_{55}, c'_{45}, c'_{44} для проведения аналогии обозначены выражения вида (2.15). Упругие коэффициенты c_{ij}, $i,j=\overline{1,6}$ берутся из соотношений (2.2), $\omega_0^2 = \omega_1^2 \rho R^2$, $u_1(x'_1,x'_2)$, $u_2(x'_1,x'_2)$, $u_3(x'_1,x'_2)$ –амплитудные составляющие перемещений в отраженной волне, отнесенные к линейному размеру полостей R.

Для постановки задачи потребуем решения основных задач теории упругости: первой основной задачи, т.е. случая, когда контур диагональных круговых полостей неподкреплен (свободен от нагрузок), и второй основной краевой задачи, когда контур полостей закреплен недеформируемой крепью.

4.2 Решение первой основной задачи для серии неподкрепленных диагональных полостей

Предположим, что контур глубоко заложенных диагональных полостей свободен от воздействия внешних нагрузок. Тогда граничные условия на контурах полостей Γ_l запишутся в виде:

$$(\sigma_{nn}+\sigma^*_{nn})_{\Gamma l}=0\,,\quad (\sigma_{n\tilde{\theta}}+\sigma^*_{n\tilde{\theta}})_{\Gamma l}=0\,,\qquad (\sigma_{\tilde{\theta}3}+\sigma^*_{\tilde{\theta}3})_{\Gamma l}=0 \tag{4.1}$$

Здесь σ^*_{nn}, $\sigma^*_{n\tilde{\theta}}$ - нормальные и касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1,n_2), обусловленные падающей волной растяжения-сжатия, в плоскости поперечного сечения полости; $\sigma^*_{\tilde{\theta}3}$ - касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1,n_2),

обусловленные падающей SH-волной сдвига; σ_{nn}, $\sigma_{n\bar{\theta}}$, $\sigma_{\bar{\theta}3}$ - соответствующие амплитудные составляющие напряжений в отраженной волне.

Для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка вида (2.10*), как и в случае плоской деформации, введем аффинное преобразование [133] вида (2.18), в случае дифракции SH-волн для интегрирования дифференциального уравнения вида (2.14) введем аффинное преобразование вида (2.21). Эти аффинные преобразования позволяют свести дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка к уравнениям Гельмгольца вида (2.20) и (2.23), соответственно.

В общем случае, точки $O_l^{(i)}$, $i=1,2,3$, являющиеся центрами локальных координатных систем $(x_{1l}^{(i)}, x_{2l}^{(i)}), i=1,2,3$, в областях S_l ($l=\overline{1,L}$) при преобразовании вида (2.18) и (2.21) перейдут в точки $O_{\bar{z}l}^{(i)}$, $i=1,2,3$. Их будем рассматривать как начало локальных декартовых систем ($\xi_{1l}^{(i)}, \xi_{2l}^{(i)}$), $i=1,2,3$ с осями, ориентированными по осям координат ($\xi_{1l}^{(i)}, \xi_{2l}^{(i)}$) и полярных координат ($r_l^{(i)}, \kappa_l^{(i)}$) с отчетом полярного угла $\kappa_l^{(i)}$ от оси $O_l^{(i)}\,\xi_{1l}^{(i)}$.

Так же как и в случае плоской деформации, уравнения Гельмгольца вида (2.20) для перемещений $\overline{u}_p=\{u_1,u_2\}$ при распространении продольно-поперечных волн, в частном случае, когда упругие коэффициенты $c_{16}^{'}=0$, $c_{26}^{'}=0$, т.е. имеется горизонтальная и вертикальная слоистость массива, можно разделить, тогда получим 2 уравнения вида (2.24).

Теперь в соответствии с принципом обобщенной суперпозиции можно представить решения уравнений Гельмгольца в перемещениях $\overline{u}=\{u_i\}=\{u_1,u_2,u_3\}$ в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов $X_{nl}^{(i)}, i=1,2,3$ и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода [5,133]:

$$u_i=\sum_{l=1}^{L}\sum_{(n)}X_{nl}^{(i)}H_n^{(1)}\left(\omega_0^{(i)}r_l^{(i)}\right)e^{ink_l^{(i)}},\quad n=\overline{-\infty,+\infty},\ i=1,2,3 \tag{4.2}$$

где

$$\omega_0^{(1)} = \omega_1 / \sqrt{c_{11}^{'}}\ ,\ \omega_0^{(2)} = \omega_1 / \sqrt{c_{66}^{'}}\ ,\ \omega_0^{(3)} = \omega_0$$

Применяя теоремы сложения цилиндрических функций [5,133] (1.32), можно получить представления для $\overline{u} = \{u_i\}, i = 1,2,3$ в любой из координатных систем ($r_l^{(i)}, \kappa_l^{(i)}$):

$$u_i = \sum_{(n)} X_{nl}^{(i)} H_n^{(1)}\left(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}\right) e^{ink_l^{(i)}} + s_{nl}^{'(i)} J_n\left(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}\right) e^{ink_l^{(i)}}\ \mathbf{,\ (} r_l^{(i)} < R_{lq}^{(i)} \mathbf{),}$$

$$i = 1,2,3\ \ ,\ l = \overline{1,L} \qquad (4.2^*)$$

где

$$s_{nl}^{'(i)} = \sum_{\substack{q=1,\\ q\neq l}}^{L} \sum_{(p)} X_{pq}^{(i)} H_{p-n}^{(1)}(\omega_0^{(i)} R_{lq}^{(i)}) e^{i(p-n)\kappa_{lq}^{(i)}} \qquad (4.3)$$

($R_{lq}^{(i)}, \kappa_{lq}^{(i)}$) – координаты точки $O_{\xi l}^{(i)}$ в системе координат ($r_q^{(i)}, \kappa_q^{(i)}$)

Найдем соответствующие представлению перемещений $\overline{u} = \{u_i\}_{i=1}^3$, в виде (4.2*) выражения для составляющих напряжений.

Применяя соотношения для преобразования напряжений, используя обобщенный закон Гука вида (2.1), а также соотношения для перемещений вида (4.2), получим следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{11},\quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22},\quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12}$$

$$\sigma_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)} X_{nl}^{(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{(i)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(i)}} - \overline{G}_j^{(i)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(i)}}] +$$

$$+ s_{nl}^{'(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{(i)} J_{n-1}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(i)}} - \overline{G}_j^{(i)} J_{n+1}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(i)}}], (j = \overline{1,3})$$

$$\sigma_{k3} = \frac{1}{2}\sum_{(n)} X_{nl}^{(3)} \omega_0^{(3)} [G_k^{(3)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(3)}} - \overline{G}_k^{(3)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(3)}}] + \qquad (4.4)$$

$$+ s_{nl}^{'(3)} \omega_0^{(3)} [G_k^{(3)} J_{n-1}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(3)}} - \overline{G}_k^{(3)} J_{n+1}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(3)}}], (k = \overline{1,2})$$

где

$$\begin{Bmatrix} G_j^{'(1)} \\ j=\overline{1,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{14} \end{Bmatrix} + i\cdot(g_1^{(1)} \begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{14} \end{Bmatrix} + g_1^{(2)} \begin{Bmatrix} c_{14} \\ c_{24} \\ c_{44} \end{Bmatrix}),$$

$$\begin{Bmatrix} G_j^{'(2)} \\ j=\overline{1,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{14} \\ c_{24} \\ c_{44} \end{Bmatrix} + i\cdot(g_2^{(1)} \begin{Bmatrix} c_{14} \\ c_{24} \\ c_{44} \end{Bmatrix} + g_2^{(2)} \begin{Bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{24} \end{Bmatrix}), \qquad (4.5)$$

$$\begin{Bmatrix} G_k^{'(3)} \\ k=\overline{1,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{55} \\ c_{35} \end{Bmatrix} + i\cdot\mu_2^{-1}\cdot(\begin{Bmatrix} c_{35} \\ c_{33} \end{Bmatrix} + \mu_1 \begin{Bmatrix} c_{55} \\ c_{35} \end{Bmatrix}),$$

$$\{g_i^{(1)}\} = diag(\mathrm{M}_2^{'-1}\mathrm{M}_1^{'}), \quad \{g_i^{(2)}\} = diag(\mathrm{M}_2^{'-1}),\ i=1,2$$

Здесь термин «*diag*» означает вектор из элементов главной диагонали соответствующей матрицы.

Теперь, используя выражение (2.18),(2.21) и (3.1), (3.1*) можно найти соотношение для точек, лежащих на круговом и некруговом контуре Γ_l диагональных полостей:

- в случае некруговых полостей

$$r_l^{(i)} e^{i\kappa_l^{(i)}} = \eta_{10l}^{(i)} e^{i\theta_l^{(i)}} + \eta_{20l}^{(i)} e^{-i\theta_l^{(i)}} + \sum_{m=1}^{Nl} \eta_{2ml}^{(i)} e^{im\theta_l^{(i)}} + \eta_{1ml}^{(i)} e^{-im\theta_l^{(i)}} \qquad (4.6)$$

- в случае круговых полостей

$$r_l^{(i)} e^{i\kappa_l^{(i)}} = \eta_{10l}^{(i)} e^{i\theta_l^{(i)}} + \eta_{20l}^{(i)} e^{-i\theta_l^{(i)}} \qquad (4.6^*)$$

Здесь

$$\{\eta_{10l}^{(i)}\} = a_0\{R_l^{(i)}\rho_l^{(i)}\}, \qquad \{\eta_{20l}^{(i)}\} = b_0\{R_l^{(i)}\rho_l^{(i)}\},$$
$$\{\eta_{1ml}^{(i)}\} = a_0\{R_l^{(i)} d_{ml}(\rho_l^{(i)})^{-m}\},\ \{\eta_{2ml}^{(i)}\} = b_0\{R_l^{(i)}\overline{d}_{ml}(\rho_l^{(i)})^{-m}\},\ i=1,2,3,$$
$$m=\overline{1,N}\ , l=\overline{1,L} \qquad (4.7)$$

$$a_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{M}_2^{-1}(\mathrm{M}_2 + i\mathrm{M}_1 + E), & \text{если индекс } i=1,2 \\ \dfrac{\mu_2 + i\mu_1 + 1}{2\mu_2}, & \text{если индекс } i=3 \end{cases},$$

$$b_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{M}_2^{-1}(\mathrm{M}_2 + i\mathrm{M}_1 - E), & \textit{если индекс } i = 1,2 \\ \dfrac{\mu_2 + i\mu_1 - 1}{2\mu_2}, & \textit{если индекс } i = 3 \end{cases} \qquad (4.8)$$

При рассмотрении симметричных контуров имеет место соотношение $d_{ml} = \overline{d}_{ml}$.

Для представления комплексных потенциалов в выражениях (4.2*), (4.4) на контурах горизонтальных диагональных полостей необходимо применить теорему сложения цилиндрических функций и «метод возмущения формы», которые требуют выполнения следующих условий:

$$|\eta_{10l}^{(i)}| > |\eta_{20l}^{(i)}| \qquad (4.9а)$$

$$|\eta_{20l}^{(i)}||\eta_{21l}^{(i)}|x...x|\eta_{2N_l l}^{(i)}||\eta_{11l}^{(i)}|x...x|\eta_{1N_l l}^{(i)}| < |\eta_{10l}^{(i)}| \qquad (4.9б)$$

Выполнение этих условий показывается следующим путем. Условие (4.9а) выполнено, поскольку матрица $\mathrm{M}_2 > 0$ (положительно определенная), и параметр μ_3 больше нуля, т.е. $|a_0| > |b_0|$, отсюда $|\eta_{10l}^{(i)}| > |\eta_{20l}^{(i)}|$.

Второе условие (4.9б) выполнено, так как рассматриваемая задача является внешней, т.е. параметр $\rho > 1$, отсюда процесс - сходящийся и имеет место соотношение

$$|\eta_{20l}^{(i)}||b_0^N a_0^N d_{l1}\overline{d}_{l1}x...xd_{Nl}\overline{d}_{Nl}|\cdot\rho_l^{2(-1-2-3-...-N_l)} < |a_0 R_l|\cdot\rho_l$$

В случае рассмотрения круговых полостей потребуется лишь выполнение первого условия – (4.9а), в случае симметричных контуров – выполнение условий показывается аналогично вышеприведенным рассуждениям.

Теперь, последовательно применяя теорему сложения цилиндрических функций, можно записать представления комплексных потенциалов для точек на контурах круговых и некруговых диагональных полостей Γ_l [133,134]:

$$H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}} = \sum_{(p)} Q_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}},$$

$$J_n(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}} = \sum_{(p)} P_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}} \qquad (4.10)$$

где

- в случае круговых полостей выполнено

$$Q_{npl}^{(i)} = \delta_{npl} H^{(1)}_{\frac{n+p}{2}}(\omega_0 \mid \eta_{10l}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{10l}^{(i)\,(n+p)/2} J_{\frac{n-p}{2}}(\omega_0 \mid \eta_{20l}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{20l}^{(i)\,(n-p)/2},$$

$$P_{npl}^{(i)} = \delta_{npl} J_{\frac{n+p}{2}}(\omega_0 \mid \eta_{10l}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{10l}^{(i)\,(n+p)/2} J_{\frac{n-p}{2}}(\omega_0 \mid \eta_{20l}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{20l}^{(i)\,(n-p)/2} \qquad (4.11^*)$$

Здесь

$\tilde{\eta}_{kol}^{(i)} = \eta_{k0l}^{(i)} \mid \eta_{k0l}^{(i)} \mid^{-1}, k = 1,2;$

$\delta_{np} = 1$, *если* $n + p$ – *четное число*, $\qquad (4.12^*)$

$\delta_{np} = 0$, *если* $n + p$ – *нечетное число*.

- в случае некруговых несимметричных гладких контуров

$$Q_{npl}^{(i)} = \sum_{(\nu N_l)} \cdots \sum_{(\nu 1)} \cdot \sum_{(\tilde{\nu} N_l)} \cdots \sum_{(\tilde{\nu} 1)} \delta_{np\tau l} H^{(1)}_{\frac{n+p-\tau_1}{2}}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{10l}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{10l}^{(i)\,\frac{(n+p-\tau_1)}{2}} x$$

$$x\, J_{\frac{n-p+\tau_2}{2}}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{20l}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{20l}^{(i)\,\frac{(n-p+\tau_2)}{2}} x \qquad (4.11)$$

$$x \prod_{j=1}^{Nl} J_{(\nu_j - \tilde{\nu}_j)}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{2jl}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{2jl}^{(i)\,(\nu_j - \tilde{\nu}_j)} x\, J_{\tilde{\nu}_j}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{1jl}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{1jl}^{(i)\,\tilde{\nu}j}$$

$$P_{npl}^{(i)} = \sum_{(\nu N_l)} \cdots \sum_{(\nu 1)} \cdot \sum_{(\tilde{\nu} N_l)} \cdots \sum_{(\tilde{\nu} 1)} \delta_{np\tau l} J_{\frac{n+p-\tau_1}{2}}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{10l}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{10l}^{(i)\,\frac{(n+p-\tau_1)}{2}} x$$

$$x\, J_{\frac{n-p+\tau_2}{2}}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{20l}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{20l}^{(i)\,\frac{(n-p+\tau_2)}{2}} x$$

$$x \prod_{j=1}^{Nl} J_{(\nu_j - \tilde{\nu}_j)}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{2jl}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{2jl}^{(i)\,(\nu_j - \tilde{\nu}_j)} x\, J_{\tilde{\nu}_j}(\omega_0^{(i)} \mid \eta_{1jl}^{(i)} \mid) \tilde{\eta}_{1jl}^{(i)\,\tilde{\nu}j}$$

Здесь

$$\widetilde{\eta}_{kol}^{(i)} = \eta_{k0l}^{(i)} \mid \eta_{k0l}^{(i)} \mid^{-1},\ k = 1,2;\ j = 0,...,N_l, l = \overline{1,L}$$
$$\tau_1 = \sum_{m=1}^{N_l}[(m+1)v_m - 2m\widetilde{v}_m],\ \tau_2 = \sum_{m=1}^{N_l}[(m-1)v_m - 2m\widetilde{v}_m] \qquad (4.12)$$
$$\delta_{np\tau 1} = 1,\ \textit{если}\ n + p - \tau_1 - \textit{четное число},$$
$$\delta_{np\tau 1} = 0,\ \textit{если}\ n + p - \tau_1 - \textit{нечетное число}.$$

Теперь перемещения u_i на контуре Γ_l полостей представимы выражением

$$(u_i)_{\tilde{A}_l} = \sum_{(n,p)} (X_{nl}^{(i)} Q_{npl}^{(i)} + s_{nl}^{'(i)} P_{npl}^{(i)}) e^{ip\theta_l^{(i)}},\ i = 1,2,3,\ l = \overline{1,L} \qquad (4.13)$$

Представления для нормальных и тангенсальных напряжений получим, используя выражения (1.38а), (1.38б) с контурной функцией (3.22) – в случае некруговых полостей общего вида, (3.22**) – для симметричных профилей полостей и (3.22*) – для круговых полостей. Граничные условия (4.1) могут быть переопределены в виде

$$(|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn} + |\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn}^*)_\Gamma = 0,\ (|\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\tilde{\theta}} + |\widetilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\tilde{\theta}}^*)_\Gamma = 0,$$
$$(|\widetilde{\omega}'| \sigma_{\tilde{\theta}3} + |\widetilde{\omega}'| \sigma_{\tilde{\theta}3}^*)_\Gamma = 0 \qquad (4.14)$$

Теперь можно определить контурные представления для напряжений, используя соотношения (4.13), (4.4), (3.22), (1.38а), (1.38б) [134]:

$$(|\tilde{\omega}'_l|^2 \sigma_{nn})_{\tilde{A}_l} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n,p)} (X_{nl}^{(i)} \lambda_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}} + s_{nl}^{'(i)} \psi_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}})$$
$$(|\tilde{\omega}'_l|^2 \sigma_{n\tilde{\theta}})_{\tilde{A}_l} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n,p)} (X_{nl}^{(i)} \vartheta_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}} + s_{nl}^{'(i)} \tau_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}}) \qquad (4.15)$$
$$(|\tilde{\omega}'_l| \sigma_{\tilde{\theta}3})_{\tilde{A}_l} = \sum_{(n,p)} (X_{nl}^{(3)} \lambda_{npl}^{(3)} e^{ip\theta_l^{(3)}} + s_{nl}^{'(3)} \psi_{npl}^{(3)} e^{ip\theta_l^{(3)}})$$

где

- в случае некруговых полостей имеют место следующие соотношения:

$$\lambda_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8} \{\overline{E}_1^{(i)} Q_{n-1,p-2,l}^{(i)} + E_1^{(i)} Q_{n-1,p+2,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{I}_1^{(i)} Q_{n+1,p-2,l}^{(i)} - I_1^{(i)} Q_{n+1,p+2,l}^{(i)}) + 2(E_3^{(i)} Q_{n-1,p,l}^{(i)} - I_3^{(i)} Q_{n+1,p,l}^{(i)}) -$$
$$- 2\sum_{m=1}^{N_l} m[\overline{d}_{ml}(E_3^{(i)} Q_{n-1,p-m-1,l}^{(i)} + E_1^{(i)} Q_{n-1,p-m+1,l}^{(i)} - I_3^{(i)} Q_{n+1,p-m-1,l}^{(i)} -$$
$$- I_1^{(i)} Q_{n+1,p-m+1,l}^{(i)}) + d_{ml}(E_3^{(i)} Q_{n-1,p+m+1,l}^{(i)} + \overline{E}_1^{(i)} Q_{n-1,p+m-1,l}^{(i)} - I_3^{(i)} Q_{n+1,p+m+1,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{I}_1^{(i)} Q_{n+1,p+m-1,l}^{(i)})] + \sum_{m,k=1}^{N_l} mk[\overline{d}_{ml}\overline{d}_{kl}(E_1^{(i)} Q_{n-1,p-m-k,l}^{(i)} - I_1^{(i)} Q_{n+1,p-m-k,l}^{(i)}) +$$
$$+ d_{ml} d_{kl}(\overline{E}_1^{(i)} Q_{n-1,p+m+k,l}^{(i)} - \overline{I}_1^{(i)} Q_{n+1,p+m+k,l}^{(i)}) + \overline{d}_{ml} d_{kl}(\overline{E}_2^{(i)} Q_{n-1,p-m+k,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{I}_2^{(i)} Q_{n+1,p-m+k,l}^{(i)}) + d_{ml}\overline{d}_{kl}(E_2^{(i)} Q_{n-1,p+m-k,l}^{(i)} - I_2^{(i)} Q_{n+1,p+m-k,l}^{(i)})]\} \qquad (4.16а)$$

$$\psi_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8} \{\overline{E}_1^{(i)} P_{n-1,p-2,l}^{(i)} + E_1^{(i)} P_{n-1,p+2,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{I}_1^{(i)} P_{n+1,p-2,l}^{(i)} - I_1^{(i)} P_{n+1,p+2,l}^{(i)}) + 2(E_3^{(i)} P_{n-1,p,l}^{(i)} - I_3^{(i)} P_{n+1,p,l}^{(i)}) -$$
$$- 2\sum_{m=1}^{N_l} m[\overline{d}_{ml}(E_3^{(i)} P_{n-1,p-m-1,l}^{(i)} + E_1^{(i)} P_{n-1,p-m+1,l}^{(i)} - I_3^{(i)} P_{n+1,p-m-1,l}^{(i)} -$$
$$- I_1^{(i)} P_{n+1,p-m+1,l}^{(i)}) + d_{ml}(E_3^{(i)} P_{n-1,p+m+1,l}^{(i)} + \overline{E}_1^{(i)} P_{n-1,p+m-1,l}^{(i)} - I_3^{(i)} P_{n+1,p+m+1,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{I}_1^{(i)} P_{n+1,p+m-1,l}^{(i)})] + \sum_{m,k=1}^{N_l} mk[\overline{d}_{ml}\overline{d}_{kl}(E_1^{(i)} P_{n-1,p-m-k,l}^{(i)} - I_1^{(i)} P_{n+1,p-m-k,l}^{(i)}) +$$
$$+ d_{ml} d_{kl}(\overline{E}_1^{(i)} P_{n-1,p+m+k,l}^{(i)} - \overline{I}_1^{(i)} P_{n+1,p+m+k,l}^{(i)}) + \overline{d}_{ml} d_{kl}(\overline{E}_2^{(i)} P_{n-1,p-m+k,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{I}_2^{(i)} P_{n+1,p-m+k,l}^{(i)}) + d_{ml}\overline{d}_{kl}(E_2^{(i)} P_{n-1,p+m-k,l}^{(i)} - I_2^{(i)} P_{n+1,p+m-k,l}^{(i)})]\} \qquad (4.16б)$$

$$\vartheta_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8} \{\overline{C}_1^{(i)} Q_{n-1,p-2,l}^{(i)} + C_1^{(i)} Q_{n-1,p+2,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{D}_1^{(i)} Q_{n+1,p-2,l}^{(i)} - D_1^{(i)} Q_{n+1,p+2,l}^{(i)} - 2\sum_{m=1}^{N_l} m[\overline{d}_{ml}(C_1^{(i)} Q_{n-1,p-m+1,l}^{(i)} -$$
$$- D_1^{(i)} Q_{n+1,p-m+1,l}^{(i)}) + d_{ml}(\overline{C}_1^{(i)} Q_{n-1,p+m-1,l}^{(i)} - \overline{D}_1^{(i)} Q_{n+1,p+m-1,l}^{(i)})] +$$
$$\sum_{m,k=1}^{N_l} [\overline{d}_{ml}\overline{d}_{kl}(C_1^{(i)} Q_{n-1,p-m-k,l}^{(i)} - D_1^{(i)} Q_{n+1,p-m-k,l}^{(i)}) + d_{ml} d_{kl}(\overline{C}_1^{(i)} Q_{n-1,p+m+k,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{D}_1^{(i)} Q_{n+1,p+m+k,l}^{(i)}) + \overline{d}_{ml} d_{kl}(-C_2^{(i)} Q_{n-1,p-m+k,l}^{(i)} + D_2^{(i)} Q_{n+1,p-m+k,l}^{(i)}) +$$
$$+ d_{ml}\overline{d}_{kl}(C_2^{(i)} Q_{n-1,p+m-k,l}^{(i)} - D_2^{(i)} Q_{n+1,p+m-k,l}^{(i)})]\} \qquad (4.16в)$$

$$\tau_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8} \{\overline{C}_1^{(i)} P_{n-1,p-2,l}^{(i)} + C_1^{(i)} P_{n-1,p+2,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{D}_1^{(i)} P_{n+1,p-2,l}^{(i)} - D_1^{(i)} P_{n+1,p+2,l}^{(i)} - 2\sum_{m=1}^{N_l} m[\overline{d}_{ml}(C_1^{(i)} P_{n-1,p-m+1,l}^{(i)} -$$
$$- D_1^{(i)} P_{n+1,p-m+1,l}^{(i)}) + d_{ml}(\overline{C}_1^{(i)} P_{n-1,p+m-1,l}^{(i)} - \overline{D}_1^{(i)} P_{n+1,p+m-1,l}^{(i)})] +$$
$$\sum_{m,k=1}^{N_l} [\overline{d}_{ml} \overline{d}_{kl}(C_1^{(i)} P_{n-1,p-m-k,l}^{(i)} - D_1^{(i)} P_{n+1,p-m-k,l}^{(i)}) + d_{ml} d_{kl}(\overline{C}_1^{(i)} P_{n-1,p+m+k,l}^{(i)} -$$
$$- \overline{D}_1^{(i)} P_{n+1,p+m+k,l}^{(i)}) + \overline{d}_{ml} d_{kl}(-C_2^{(i)} P_{n-1,p-m+k,l}^{(i)} + D_2^{(i)} P_{n+1,p-m+k,l}^{(i)}) +$$
$$+ d_{ml} \overline{d}_{kl}(C_2^{(i)} P_{n-1,p+m-k,l}^{(i)} - D_2^{(i)} P_{n+1,p+m-k,l}^{(i)})]\} \qquad (4.16г)$$

$$E_1^{(i)} = (G_1^{(i)} - G_2^{(i)}) + 2i\, G_3^{(i)},\ I_1^{(i)} = (\overline{G}_1^{(i)} - \overline{G}_2^{(i)}) + 2i\, \overline{G}_3^{(i)},$$
$$E_2^{(i)} = (G_1^{(i)} + G_2^{(i)}) + 2i\, G_3^{(i)},\ I_2^{(i)} = (\overline{G}_1^{(i)} + \overline{G}_2^{(i)}) + 2i\, \overline{G}_3^{(i)}, \qquad (4.16д)$$
$$E_3^{(i)} = (G_1^{(i)} + G_2^{(i)}),\ I_3^{(i)} = (\overline{G}_1^{(i)} + \overline{G}_2^{(i)}).$$
$$i = 1,2$$

$$C_1^{(i)} = 2G_3^{(i)} + i\,(G_2^{(i)} - G_1^{(i)}),\ D_1^{(i)} = 2\overline{G}_3^{(i)} + i\,(\overline{G}_2^{(i)} - \overline{G}_1^{(i)}),$$
$$C_2^{(i)} = i \cdot (G_2^{(i)} - G_1^{(i)}),\ D_2^{(i)} = i \cdot (\overline{G}_2^{(i)} - \overline{G}_1^{(i)}), \qquad (4.16е)$$
$$i = 1,2$$

$$\lambda_{npl}^{(3)} = \frac{\omega_0^{(3)} R_l}{4} \{(\overline{E}_1^{(3)} Q_{n-1,p-1,l}^{(3)} + E_1^{(3)} Q_{n-1,p+1,l}^{(3)} -$$
$$- \overline{I}_1^{(3)} Q_{n+1,p-1,l}^{(3)} - I_1^{(3)} Q_{n+1,p+1,l}^{(3)}) + \sum_{m=1}^{N_l} m(-\overline{d}_{ml} E_1^{(3)} Q_{n-1,p-m,l}^{(3)} - \qquad (4.16ж)$$
$$- d_{ml} \overline{E}_1^{(3)} Q_{n-1,p+m,l}^{(3)} + \overline{d}_{ml} I_1^{(3)} Q_{n+1,p-m,l}^{(3)} + d_{ml} \overline{I}_1^{(3)} Q_{n+1,p+m,l}^{(3)})\}$$

$$\psi_{npl}^{(3)} = \frac{\omega_0^{(3)} R_l}{4} \{(\overline{E}_1^{(3)} P_{n-1,p-1,l}^{(3)} + E_1^{(3)} P_{n-1,p+1,l}^{(3)} -$$
$$- \overline{I}_1^{(3)} P_{n+1,p-1,l}^{(3)} - I_1^{(3)} P_{n+1,p+1,l}^{(3)}) + \sum_{m=1}^{N_l} m(-\overline{d}_{ml} E_1^{(3)} P_{n-1,p-m,l}^{(3)} - \qquad (4.16з)$$
$$- d_{ml} \overline{E}_1^{(3)} P_{n-1,p+m,l}^{(3)} + \overline{d}_{ml} I_1^{(3)} P_{n+1,p-m,l}^{(3)} + d_{ml} \overline{I}_1^{(3)} P_{n+1,p+m,l}^{(3)})\}$$

$$E_1^{(3)} = G_1^{(3)} + i\, G_2^{(3)},\ I_1^{(3)} = \overline{G}_1^{(3)} + i\, \overline{G}_2^{(3)}$$
$$E_2^{(3)} = G_2^{(3)} + i\, G_1^{(3)},\ I_2^{(3)} = \overline{G}_2^{(3)} + i\, \overline{G}_1^{(3)} \qquad (4.16и)$$

- в случае круговых полостей имеем

$$\lambda_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8}\{\overline{E}_1^{(i)} Q_{n-1,\,p-2}^{(i)} + E_1^{(i)} Q_{n-1,\,p+2}^{(i)} - \overline{I}_1^{(i)} Q_{n+1,\,p-2}^{(i)} - I_1^{(i)} Q_{n+1,\,p+2}^{(i)}) +$$
$$+ 2(E_3^{(i)} Q_{n-1,\,p}^{(i)} - I_3^{(i)} Q_{n+1,\,p}^{(i)})\}$$

$$\psi_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8}\{\overline{E}_1^{(i)} P_{n-1,\,p-2}^{(i)} + E_1^{(i)} P_{n-1,\,p+2}^{(i)} -$$
$$- \overline{I}_1^{(i)} P_{n+1,\,p-2}^{(i)} - I_1^{(i)} P_{n+1,\,p+2}^{(i)}) + 2(E_3^{(i)} P_{n-1,\,p}^{(i)} - I_3^{(i)} P_{n+1,\,p}^{(i)})\}$$

$$\vartheta_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8}\{\overline{C}_1^{(i)} Q_{n-1,\,p-2}^{(i)} + C_1^{(i)} Q_{n-1,\,p+2}^{(i)} - \overline{D}_1^{(i)} Q_{n+1,\,p-2}^{(i)} - D_1^{(i)} Q_{n+1,\,p+2}^{(i)}\} \quad (4.16^*)$$

$$\tau_{npl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8}\{\overline{C}_1^{(i)} P_{n-1,\,p-2}^{(i)} + C_1^{(i)} P_{n-1,\,p+2}^{(i)} - \overline{D}_1^{(i)} P_{n+1,\,p-2}^{(i)} - D_1^{(i)} P_{n+1,\,p+2}^{(i)}\}$$

$$\lambda_{npl}^{(3)} = \frac{\omega_0^{(3)} R_l}{4}(\overline{E}_1^{(3)} Q_{n-1,\,p-1}^{(3)} + E_1^{(3)} Q_{n-1,\,p+1}^{(3)} - \overline{I}_1^{(3)} Q_{n+1,\,p-1}^{(3)} - I_1^{(3)} Q_{n+1,\,p+1}^{(3)})$$

$$\psi_{npl}^{(3)} = \frac{\omega_0^{(3)} R_l}{4}(\overline{E}_1^{(3)} P_{n-1,\,p-1}^{(3)} + E_1^{(3)} P_{n-1,\,p+1}^{(3)} - \overline{I}_1^{(3)} P_{n+1,\,p-1}^{(3)} - I_1^{(3)} P_{n+1,\,p+1}^{(3)})$$

В случае симметричных контуров в формулах (4.16) необходимо приравнять $d_{ml} = \overline{d}_{ml}$.

Выражения для перемещений и напряжений на контуре диагональных полостей в падающей волне $(u_i^*)_\Gamma\ \ (i = \overline{1,3}) = (u_{PP}, u_{SV}, u_{SH})_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\, \sigma_{nm}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\, \sigma_{n\widetilde{\theta}}^*)_\Gamma$, $(|\widetilde{\omega}'|\, \sigma_{\widetilde{\theta}3}^*)_\Gamma$, можно найти, применяя формулы разложений

экспоненциальных функций в гармонические ряды, по той же схеме, как и в предыдущих разделах, в случае плоской деформации полостей:

$$(u_i^*)_{\Gamma_l} = U_i^* \sum_{(p)} Q_{pl}^{(i)} e^{ip\theta_l} \tag{4.17}$$

Используя формулу Якоби-Ангера, получим контурные разложения цилиндрических функций в виде (2.41), где

- в случае круговых полостей

$$Q_{pl}^{(i)} = J_p(R_l k_{12}^{(i)}) e^{ip\delta_1^{(i)}}, \tag{4.18*}$$

$$e^{i\delta_1^{(i)}} = (k_2^{(i)} + ik_1^{(i)})/k_{12}^{(i)}, \quad k_{12}^{(i)} = (k_1^{(i)2} + k_3^{(i)2})^{1/2}.$$

- в случае некруговых полостей общего вида с помощью «метода возмущения формы» и переразложения цилиндрических функций на контурах можно получить выражения комплексных контурных функций для представления перемещений в падающей волне

$$Q_{pl}^{(i)} = \sum_{(\nu 1)} \cdots \sum_{(\nu N_l)} \sum_{(\tilde{\nu} 1)} \cdots \sum_{(\tilde{\nu} N_l)} [J_{p-\tilde{\delta}}(R_l k_{12}^{(i)}) e^{i(p-\tilde{\delta})\delta 1} \times$$
$$\times \prod_{m=1}^{Nl} \{J_{\nu_m}(R_l d_{1ml} k_{12}^{(i)}) e^{i\nu_m m\delta 2} \times J_{\tilde{\nu}_m}(R_l d_{2ml} k_{12}^{(i)}) e^{i\tilde{\nu}_m m\delta 3}\}], \quad \tilde{\delta} = \sum_{m=1}^{Nl} m(\nu_m + \tilde{\nu}_m), \tag{4.18*}$$

$$e^{i\delta 1} = (k_2^{(i)} + ik_1^{(i)}) k_{12}^{(i)-1}, \; e^{i\delta 2} = (-k_2^{(i)} + ik_1^{(i)}) k_{12}^{(i)-1},$$

$$e^{i\delta 3} = (k_1^{(i)} + ik_2^{(i)}) k_{12}^{(i)-1}, \; k_{12}^{(i)} = (k_1^{(i)2} + k_2^{(i)2})^{1/2}.$$

- в случае симметричных гладких контуров диагональных полостей имеем

$$Q_{pl}^{(i)} = \sum_{(\nu 1)} \cdots \sum_{(\nu N_l)} [J_{p-\tilde{\delta}}(R_l k_{12}^{(i)}) e^{i(p-\tilde{\delta})\delta 1} \times$$
$$\times \prod_{m=1}^{Nl} \{J_{\nu_m}(R_l d_{1ml} k_{12}^{(i)}) e^{i\nu_m m\delta 2}\}], \quad \tilde{\delta} = \sum_{m=1}^{Nl} m\nu_m,$$

$$e^{i\delta 1} = (k_2^{(i)} + ik_1^{(i)})k_{12}^{(i)-1},\ e^{i\delta 2} = (-k_2^{(i)} + ik_1^{(i)})k_{12}^{(i)-1},$$
$$e^{i\delta 3} = (k_1^{(i)} + ik_2^{(i)})k_{12}^{(i)-1},\ k_{12}^{(i)} = (k_1^{(i)2} + k_2^{(i)2})^{1/2}. \qquad (4.18^{**})$$

Волновые числа $k_j^{(i)}$ определятся из выражений (2.16а), (2.16б).

Контурные выражения для нормальных и тангенсальных напряжений в падающей волне определятся из формул:

$$(|\widetilde{\omega}'|^2\ \sigma_{nn}^*)_{\Gamma l} = i\frac{R_l^2}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(p)} U_i^*\alpha_{pl}^{(i)}e^{ip\theta l},$$
$$(|\widetilde{\omega}'|^2\ \sigma_{n\widetilde{\theta}}^*)_{\Gamma l} = i\frac{R_l^2}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{(p)} U_i^*\beta_{pl}^{(i)}e^{ip\theta l},$$
$$(|\widetilde{\omega}'|\,\sigma_{\widetilde{\theta}3}^*)_{\Gamma l} = (i/2)R_l U_3^*\sum_{(p)}\alpha_{pl}^{(3)}e^{ip\theta l} \qquad (4.19)$$

где в случае некруговых диагональных полостей общего вида выражения для $\alpha_{pl}^{(i)}$, $\alpha_{pl}^{(3)}$, $\beta_{pl}^{(i)}$, $i = 1,2$ следующие:

$$\begin{aligned}\alpha_{pl}^{(i)} &= \overline{\chi}_1^{*(i)}Q_{p-2,l}^{(i)} + \chi_1^{*(i)}Q_{p+2,l}^{(i)} + 2\,\mathrm{Re}(\widetilde{\chi}_1^{*(i)})\cdot Q_{pl}^{(i)},+\\ &+ 2\sum_{m=1}^{N_l} m[-\overline{d}_{ml}(\mathrm{Re}(\widetilde{\chi}_1^{*(i)})Q_{p-m-1,l}^{(i)} + \chi_1^{*(i)}Q_{p-m+1,l}^{(i)}) -\\ &- d_{ml}(\mathrm{Re}(\widetilde{\chi}_1^{*(i)})Q_{p+m+1,l}^{(i)} + \overline{\chi}_1^{*(i)}Q_{p+m-1,l}^{(i)})] + \qquad (4.20a)\\ &+ \sum_{m,k=1}^{N_l} mk[\overline{d}_{ml}\overline{d}_{kl}\cdot\chi_1^{*(i)}Q_{p-m-k,l}^{(i)} + d_{ml}d_{kl}\cdot\overline{\chi}_1^{*(i)}Q_{p+m+k,l}^{(i)} +\\ &+ \overline{d}_{ml}d_{kl}\cdot\widetilde{\overline{\chi}}_1^{*(i)}Q_{p-m+k,l}^{(i)} + d_{ml}\overline{d}_{kl}\cdot\widetilde{\chi}_1^{*(i)}Q_{p+m-k,l}^{(i)}],\quad i = 1,2\end{aligned}$$

$$\beta_{pl}^{(i)} = -i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) \cdot (Q_{p-2,l}^{(i)} - Q_{p+2,l}^{(i)}) - 2\sum_{m=1}^{N_l} m[\bar{d}_{ml} \cdot \chi_2^{*(i)} Q_{p-m+1,l}^{(i)} +$$
$$+ d_{ml} \cdot \bar{\chi}_2^{*(i)} Q_{p+m-1,l}^{(i)}] + \sum_{m,k=1}^{N_l} mk[\bar{d}_{ml}\bar{d}_{kl} \cdot \chi_2^{*(i)} Q_{p-m-k,l}^{(i)} + \quad (4.20б)$$
$$+ d_{ml}d_{kl} \cdot \bar{\chi}_2^{*(i)} Q_{p+m+k,l}^{(i)} - \bar{d}_{ml}d_{kl} \cdot i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) Q_{p-m+k,l}^{(i)} +$$
$$+ d_{ml}\bar{d}_{kl} \cdot i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) Q_{p+m-k,l}^{(i)}] \quad i = 1,2$$

$$\alpha_{pl}^{(3)} = \chi_1^{*(3)} Q_{p-1,l}^{(3)} + \tilde{\chi}_1^{*(3)} Q_{p+1,l}^{(3)} - \sum_{m=1}^{N_l} m(\bar{d}_{ml} \cdot \tilde{\chi}_1^{*(3)} Q_{p-m,l}^{(3)} + d_{ml} \cdot \chi_1^{*(3)} Q_{p+m,l}^{(3)}) \quad (4.20в)$$

Для круговых полостей $\alpha_{pl}^{(i)}$, $\alpha_{pl}^{(3)}$, $\beta_{pl}^{(i)}$, $i = 1,2$ могут быть выражены, как:

$$\alpha_{pl}^{(i)} = \bar{\chi}_1^{*(i)} Q_{p-2,l}^{(i)} + \chi_1^{*(i)} Q_{p+2,l}^{(i)} + 2\,\mathrm{Re}(\tilde{\chi}_1^{*(i)}) \cdot Q_{pl}^{(i)}, \quad i = 1,2 \quad (4.20а^*)$$

$$\beta_{pl}^{(i)} = -i \cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)}) \cdot (Q_{p-2,l}^{(i)} - Q_{p+2,l}^{(i)}), \quad i = 1,2 \quad (4.20б^*)$$

$$\alpha_{pl}^{(3)} = \chi_1^{*(3)} Q_{p-1,l}^{(3)} + \tilde{\chi}_1^{*(3)} Q_{p+1,l}^{(3)} \quad (4.20в^*)$$

Для симметричных контуров $\alpha_{pl}^{(i)}$, $\alpha_{pl}^{(3)}$, $\beta_{pl}^{(i)}$, $i = 1,2$ запишутся

$$\alpha_{pl}^{(i)} = \bar{\chi}_1^{*(i)} Q_{p-2,l}^{(i)} + \chi_1^{*(i)} Q_{p+2,l}^{(i)} + 2\,\mathrm{Re}(\tilde{\chi}_1^{*(i)}) \cdot Q_{pl}^{(i)},+$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{N_l} - d_{ml} m[\mathrm{Re}(\tilde{\chi}_1^{*(i)}) Q_{p-m-1,l}^{(i)} + \chi_1^{*(i)} Q_{p-m+1,l}^{(i)} +$$
$$+ \mathrm{Re}(\tilde{\chi}_1^{*(i)}) Q_{p+m+1,l}^{(i)} + \bar{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m-1,l}^{(i)}] + \quad (4.20а^{**})$$
$$+ \sum_{m,k=1}^{N_l} mkd_{ml}d_{kl}[\cdot \chi_1^{*(i)} Q_{p-m-k,l}^{(i)} + \cdot \bar{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m+k,l}^{(i)} +$$
$$+ \cdot \bar{\tilde{\chi}}_1^{*(i)} Q_{p-m+k,l}^{(i)} + \cdot \tilde{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m-k,l}^{(i)}], \quad i = 1,2$$

$$\beta_{pl}^{(i)} = -i\cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)})\cdot(Q_{p-2,l}^{(i)} - Q_{p+2,l}^{(i)}) - 2\sum_{m=1}^{N_l} md_{ml}[\cdot\chi_2^{*(i)}Q_{p-m+1,l}^{(i)} +$$
$$+ \overline{\chi}_2^{*(i)}Q_{p+m-1,l}^{(i)}] + \sum_{m,k=1}^{N_l} mkd_{ml}d_{kl}[\chi_2^{*(i)}Q_{p-m-k,l}^{(i)} + \quad (4.20б^{**})$$
$$+ \overline{\chi}_2^{*(i)}Q_{p+m+k,l}^{(i)} - \cdot i\cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)})Q_{p-m+k,l}^{(i)} +$$
$$+ \cdot i\cdot \mathrm{Im}(\chi_2^{*(i)})Q_{p+m-k,l}^{(i)}] \quad i = 1,2$$

$$\alpha_{pl}^{(3)} = \chi_1^{*(3)}Q_{p-1,l}^{(3)} + \widetilde{\chi}_1^{*(3)}Q_{p+1,l}^{(3)} - \sum_{m=1}^{N_l} md_{ml}(\cdot\widetilde{\chi}_1^{*(3)}Q_{p-m,l}^{(3)} + \chi_1^{*(3)}Q_{p+m,l}^{(3)}) \quad (4.20в^{**})$$

$$\begin{aligned}
\chi_1^{'*(1)} &= (c_{11}-c_{12})k_1^{(1)} + (c_{14}-c_{24})k_2^{(1)} + 2i\cdot(c_{14}k_1^{(1)} + c_{44}k_2^{(1)})\\
\chi_1^{'*(2)} &= (c_{14}-c_{24})k_1^{(2)} + (c_{12}-c_{22})k_2^{(2)} + 2i\cdot(c_{44}k_1^{(2)} + c_{24}k_2^{(2)})\\
\widetilde{\chi}_1^{'*(1)} &= (c_{11}+c_{12})k_1^{(1)} + (c_{14}+c_{24})k_2^{(1)} + 2i\cdot(c_{14}k_1^{(1)} + c_{44}k_2^{(1)})\\
\widetilde{\chi}_1^{'*(2)} &= (c_{14}+c_{24})k_1^{(2)} + (c_{12}+c_{22})k_2^{(2)} + 2i\cdot(c_{44}k_1^{(2)} + c_{24}k_2^{(2)})\\
\chi_2^{'*(1)} &= 2(c_{14}k_1^{(1)} + c_{44}k_2^{(1)}) + i\cdot[(c_{12}-c_{11})k_1^{(1)} + (c_{24}-c_{14})k_2^{(1)}]\\
\chi_2^{'*(2)} &= 2(c_{44}k_1^{(2)} + c_{24}k_2^{(2)}) + i\cdot[(c_{24}-c_{14})k_1^{(2)} + (c_{22}-c_{12})k_2^{(2)}]\\
\chi_1^{'*(3)} &= (c_{35}k_2^{(3)} + c_{55}k_1^{(3)}) - i(c_{33}k_2^{(3)} + c_{35}k_1^{(3)}),\\
\widetilde{\chi}_1^{'*(3)} &= (c_{35}k_2^{(3)} + c_{55}k_1^{(3)}) + i(c_{33}k_2^{(3)} + c_{35}k_1^{(3)}),\\
\chi_2^{'*(3)} &= (c_{33}k_2^{(3)} + c_{35}k_1^{(3)}) + i(c_{35}k_2^{(3)} + c_{55}k_1^{(3)}),\\
\widetilde{\chi}_2^{'*(3)} &= (c_{33}k_2^{(3)} + c_{35}k_1^{(3)}) - i(c_{35}k_2^{(3)} + c_{55}k_1^{(3)}),
\end{aligned} \quad (4.21)$$

Теперь для удовлетворения граничным условиям (4.14) применим метод приравнивания коэффициентов при одинаковых гармонических коэффициентах $e^{ip\theta}$. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $X_{nl}^{(i)}$, $s_{nl}^{'(i)}$ вида

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)}(X_{nl}^{(i)}\lambda_{npl}^{(i)} + s_{nl}^{'(i)}\psi_{npl}^{(i)}) = -i\frac{R_l^2}{4}\sum_{i=1}^{2}U_i^*\alpha_{pl}^{(i)}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{(n)}(X_{nl}^{(i)}\vartheta_{npl}^{(i)}+s_{nl}^{'(i)}\tau_{npl}^{(i)})=-i\frac{R_l^2}{4}\sum_{i=1}^{2}U_i^*\beta_{pl}^{(i)} \qquad (4.22)$$

$$\sum_{(n)}(X_{nl}^{(3)}\lambda_{npl}^{(3)}+s_{nl}^{'(3)}\psi_{npl}^{(3)})=-(i/2)R_l U_3^*\alpha_{pl}^{(3)}$$

Данная система решается методом редукции. Сходимость системы показывается численно в течение анализа.

4.3 Решение второй основной задачи для серии диагональных полостей, подкрепленных недеформируемой обделкой

Рассмотрим динамическую контактную задачу о напряженном состоянии заглубленных диагональных полостей, подкрепленных абсолютно жесткой крепью, в транстропном наклонно-слоистом массиве, находящемся в условиях обобщенной плоской деформации, при стационарной дифракции упругих волн.

Поскольку контакт между недеформируемой обделкой и упругим транстропным массивом жесткий и непрерывный, то граничные условия на контуре диагональных полостей Γ_l можно записать в виде

$$(u_i+u_i^*)_{\Gamma l}=0\,,\quad i=1,2,3\,,\ l=\overline{1,L} \qquad (4.23)$$

Для решения второй основной задачи также необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка вида (2.10*), (2.14) с граничными условиями (4.23). Для получения адекватного решения, введем аффинное преобразование вида (2.18) для случая распространения продольно-поперечных волн (PP-, SV-), и вида (2.21) – для случая сдвиговых волн (SH-), тогда соответствующие дифференциальные уравнения (2.10*), (2.14) могут быть сведены к уравнению Гельмгольца вида (2.24), с учетом частного случая слоистости среды, и вида (2.23) в координатах $(\xi_1^{(i)}\,,\xi_2^{(i)}),i=1,2,3$.

Решения уравнений Гельмгольца ищутся в перемещениях и в силу принципа обобщенной суперпозиции могут быть представлены в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов $Y_{nl}^{(i)}\,,t_{nl}^{'(i)}\,,i=1,2,3\,,\ l=\overline{1,L}$ и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода и функции Бесселя [4,5,133,134]:

$$u_i = \sum_{(n)} Y_{nl}^{(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}} + t_{nl}^{'(i)} J_n(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}}, \ (r_l^{(i)} < R_{lq}^{(i)}),$$

$$i = 1,2,3 \quad , \ l = \overline{1,L} \tag{4.24}$$

где

$$t_{nl}^{'(i)} = \sum_{\substack{q=\overline{1,(p)} \\ q \neq l}}^{L} \sum Y_{pq}^{(i)} H_{p-n}^{(1)}(\omega_0^{(i)} R_{lq}^{(i)}) e^{i(p-n)\kappa_{lq}^{(i)}} \tag{4.25}$$

($R_{lq}^{(i)}, \kappa_{lq}^{(i)}$) – координаты точки $O_{\xi l}^{(i)}$ в системе координат ($r_q^{(i)}, \kappa_q^{(i)}$)

Соответствующие представлению перемещения u_i $i = 1,2,3$ в виде (4.24) выражения для составляющих напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, σ_{13}, σ_{23} будут представлены в следующем виде:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{11}, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12}$$

$$\sigma_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n)} Y_{nl}^{(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{(i)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(i)}} - \overline{G}_j^{(i)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(i)}}] + \tag{4.26}$$

$$+ t_{nl}^{'(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{(i)} J_{n-1}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(i)}} - \overline{G}_j^{(i)} J_{n+1}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(i)}}], (j = \overline{1,3})$$

$$\sigma_{k3} = \frac{1}{2} \sum_{(n)} Y_{nl}^{(3)} \omega_0^{(3)} [G_k^{(3)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(3)}} - \overline{G}_k^{(3)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(3)}}] +$$

$$+ t_{nl}^{'(3)} \omega_0^{(3)} [G_k^{(3)} J_{n-1}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(3)}} - \overline{G}_k^{(3)} J_{n+1}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(3)}}], (k = \overline{1,2})$$

где значения $G_j^{'(i)}$, $i, j = 1,2,3$ определяются соотношениями (4.5).

Для вычисления неизвестных коэффициентов $Y_{nl}^{(i)}, t_{nl}^{'(i)}, i = 1,2,3$, пользуясь выражениями для точек, лежащих на контуре диагональных полостей Γ_l (4.6), (4.6*), (4.7), а также условиями (4.9а,б), применяя теорему сложения цилиндрических функций, соотношение (4.24) на контуре Γ_l можно представить в виде:

$$(u_i)_{\Gamma l} = \sum_{(n,p)} (Y_{nl}^{(i)} Q_{npl}^{(i)} + t_{nl}^{'(i)} P_{npl}^{(i)}) e^{ip\theta_l^{(i)}} \ , \ i = 1,2,3 \ , \ l = \overline{1,L} \qquad (4.27)$$

где комплексные функции $Q_{npl}^{(i)}$, $P_{npl}^{(i)}$ вычисляются по формуле (4.11), с коэффициентами (4.12) в случае несимметричных некруговых контуров полостей и (4.11*) с коэффициентами (4.12*) – для круговых полостей.

Представления для перемещений на контуре в падающей волне $(u_i^*)_{\Gamma l} (i = \overline{1,3})$ находятся из соотношений (4.17), где комплексные функции $Q_p^{(i)}$ находятся из соотношений (4.18), (4.18*), (4.18**) для несимметричных некруговых, круговых и симметричных некруговых гладких контуров полостей соответственно.

Теперь для удовлетворения граничным условиям (4.23) применим метод приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $e^{ip\theta}$. Из полученных равенств после соответствующих подстановок можно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $Y_{nl}^{(i)}$, $l = \overline{1,L}$ в виде

$$\sum_{(n)} (Y_{nl}^{(i)} Q_{npl}^{(i)} + t_{nl}^{'(i)} P_{npl}^{(i)}) = -U_i^* Q_{pl}^{(i)} \ , \ i = 1,2,3 \ , \ p = \overline{-\infty,+\infty} \qquad (4.28)$$

которая решается методом редукции. Численной реализацией может быть показана сходимость решений системы уравнений по мере удовлетворения граничным условиям на контуре диагональных полостей.

Далее для вычисления контурных нормальных и тангенсальных напряжений вблизи диагональных полостей применяются преобразования (4.14), (4.4), (3.22), (1.38а), (1.38б), (4.27), с помощью которых получаются следующие выражения:

$$(|\widetilde{\omega}'_l|^2 \sigma_{nn})_{\Gamma l} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n,p)} (Y_{nl}^{(i)} \lambda_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}} + t_{nl}^{'(i)} \psi_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}})$$

$$(|\widetilde{\omega}'_l|^2 \sigma_{n\widetilde{\theta}})_{\Gamma l} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{(n,p)} (Y_{nl}^{(i)} \vartheta_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}} + t_{nl}^{'(i)} \tau_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}}) \qquad (4.29)$$

$$(|\widetilde{\omega}'_l|\sigma_{\widetilde{\theta}3})_{\Gamma l} = \sum_{(n,p)}(Y_{nl}^{(3)}\lambda_{npl}^{(3)}e^{ip\theta_l^{(3)}} + t_{nl}^{'(3)}\psi_{npl}^{(3)}e^{ip\theta_l^{(3)}})$$

где комплексные функции $\lambda_{np}^{(i)}$, $\vartheta_{np}^{(i)}$, $\psi_{npl}^{(i)}$, $\tau_{npl}^{(i)}$ определятся из соотношений (4.16а-и) в случае несимметричных контуров полостей, (4.16*) – для круговых полостей, при симметричных контурах в выражениях (4.16а-и) коэффициенты $d_{ml} = \overline{d}_{ml}$.

Формулы для нормальных и тангенсальных напряжений в падающей волне $(|\widetilde{\omega}'|^2\sigma_{nn}^*)_{\Gamma l}$, $(|\widetilde{\omega}'|^2\sigma_{n\theta}^*)_{\Gamma l}$, $(|\widetilde{\omega}'|\sigma_{\theta 3}^*)_{\Gamma l}$ определятся соотношениями (4.20а-в) – для несимметричных гладких контуров, (4.20а-в*) – для круговых полостей, (4.20а-в**) – для симметричных профилей.

4.4 Анализ разноориентированных выработок в анизотропном слоистом массиве при стационарной дифракции упругих волн

Динамический анализ диагональных круговых выработок также проводится в соответствии с принятыми в предыдущих разделах исходными данными [133, 150]. В качестве анизотропного массива берется алевролит с упругими характеристиками пород, согласно таблице 1. Упругие волны распространяются под углом α от 0 до 180 с диапазоном частот от 1 до 100 Гц (берется наиболее часто встречающийся диапазон частот в реальном измерении). Изменение угла наклона плоскости изотропии φ рассматривается от 0 до 90.

В соответствии с теоретическим решением для количественного и качественного анализа напряженно-деформированного состояния диагональных полостей в условиях обобщенной плоской деформации разработан алгоритм и составлен пакет прикладных программ в среде Matlab7.0.

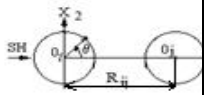
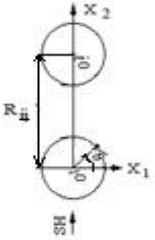
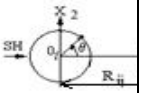
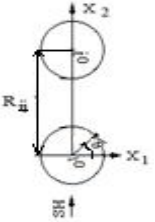
Результаты расчета контурных нормальных и касательных напряжений $(\sigma_{nn})_\Gamma$, $(\sigma_{n\theta})_\Gamma$, $(\sigma_{\theta 3})_\Gamma$ получены на базе решения методом редукции бесконечных систем линейных алгебраических уравнений вида (4.22), (4.28) в которых удерживалось не более 20 уравнений. Это позволило удовлетворить граничным условиям с погрешностью менее 1% для амплитуд контурных напряжений $(\sigma_{nn})_\Gamma$, $(\sigma_{n\theta})_\Gamma$, $(\sigma_{\theta 3})_\Gamma$ по отношению к соответствующим

амплитудным значениям напряжений в падающей волне в случае решения первой основной задачи и для смещений в отраженной волне по отношению к максимальным смещениям в падающей. Отсечение членов ряда происходило по мере удовлетворения граничным условиям и по мере анализа коэффициентов при неизвестных в уравнениях. В предыдущих разделах было показано основание для численной сходимости, для текущих исследований имеются аналогичные данные.

Программа тестировалась на результатах для одиночной диагональной выработки и парных выработок, полученных в предыдущих разделах. Аналогично, при увеличении длины перемычки между выработками на расстояние более (10-15)R количественная и качественная картины повторяли состояния одиночных диагональных выработок.

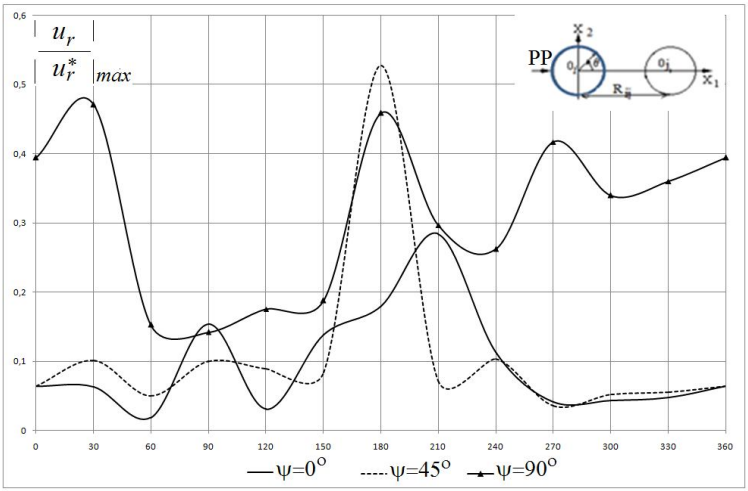
Были также получены зависимости картины перемещений и напряжений от расположения выработок относительно плоскости простирания изотропии. Так, для глубоко заложенных выработок наблюдается определенная симметрия расчетных показателей, когда угол наклона плоскости изотропии совпадает с углом падения волны, а расположение выработок со-направлено с фронтом падения волны. Это позволяет заключить, что концентрация касательных напряжений и продольных перемещений не зависит от способа расположения выработок при определенных физико-механических параметрах среды и падающих волн, что характерно для глубоко заложенных выработок, когда свободная дневная поверхность не оказывает влияния на напряженно-деформированное состояние подземных объектов. В таблице 14 приведены значения концентрации контурных касательных напряжений при решении первой основной задачи при идентичных способах распространения волны, угла наклона плоскости изотропии и расположения диагональных выработок.

Таблица 14 *– Значения концентрации напряжений на контурах выработок, когда их расположение одинаково относительно простирания плоскости изотропии* φ, *угол падения волны* α *сонаправлен с углом* φ

θ, в град.	Левая выработка 	Нижняя выработка 	Правая выработка 	Верхняя выработка 
	$(\sigma_{nn})_{\Gamma l}$ для $\varphi = 0$, $\alpha = 0$	$(\sigma_{nn})_{\Gamma l}$ для φ =90, α =90	$(\sigma_{nn})_{\Gamma l}$ для $\varphi = 0$, $\alpha = 0$	$(\sigma_{nn})_{\Gamma l}$ для φ =90, α =90
0	8,252	1,757	8,252	1,757
30	6,737	2,369	6,737	2,369
60	2,369	6,737	2,369	6,737
90	1,757	8,252	1,757	8,252
120	2,369	6,737	2,369	6,737
150	6,737	2,369	6,737	2,369
180	8,252	1,757	8,252	1,757

На рисунках 35, 36 продемонстрированы графики и эпюры распределения перемещений и напряжений на контурах неподкрепленных взаимовлияющих диагональных выработок в транстропном массиве при вертикальной слоистости в зависимости от угла отклонения осей выработок от плоскости простирания изотропии при падении продольных волн растяжения-сжатия (угол падения α =0), величина перемычки между выработками равна 4R (4 радиуса выработок).

а)



б)

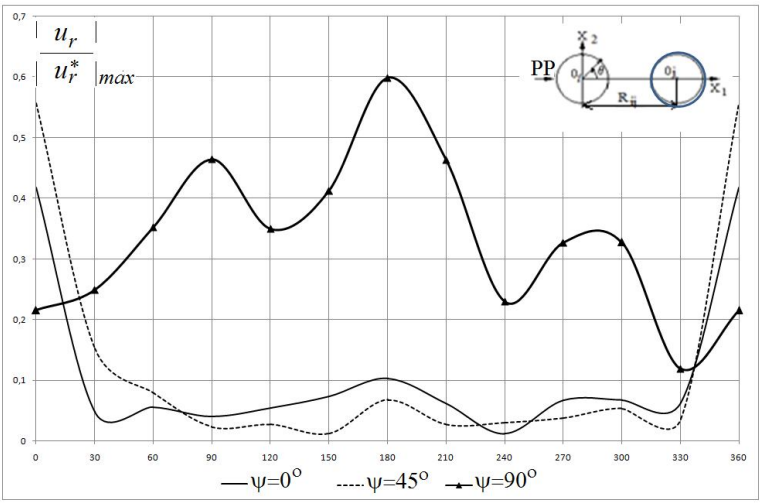


Рисунок 35 – Влияние углов отклонения осей выработок от плоскости простирания изотропии на картину распределения контурных радиальных перемещений двух круговых выработок

На рисунке 35а показано распределение радиальных перемещений на левой выработке, на рисунке 35б – перемещения на правой выработке. На рисунке 36 изображены эпюры распределения перемещений и напряжений на контурах этих же выработок при угле падения волны α =45.

Можно отметить не только влияние способов расположения выработок в массиве, но и значительное взаимовлияние выработок друг на друга. Так, увеличение угла отклонения ψ ведет к увеличению концентрации перемещений и напряжений, причем в зоне «света» и на перемычке наблюдаются значительные всплески значений перемещений.

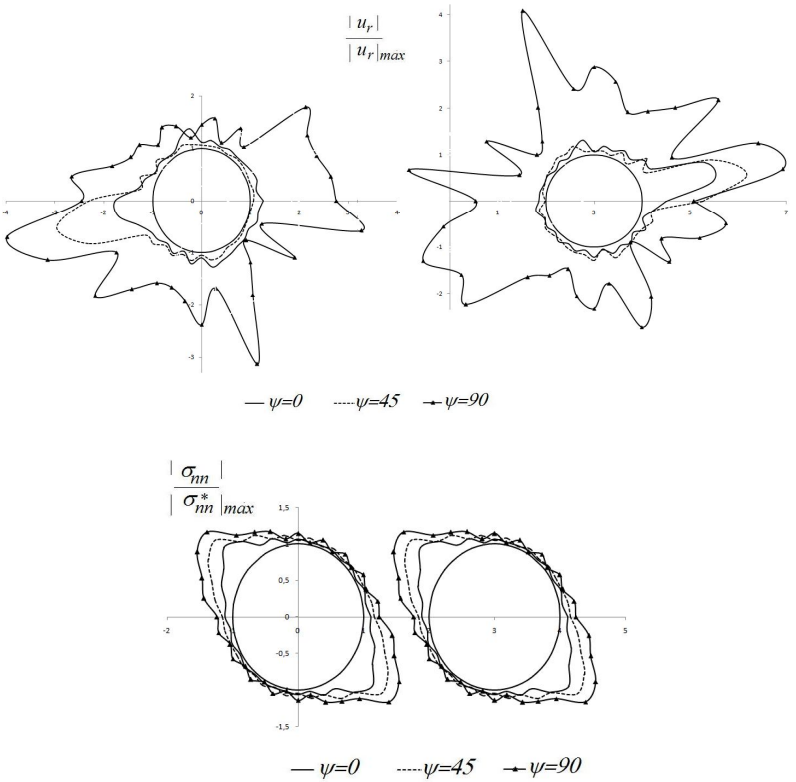


Рисунок 36 – Взаимовлияние двух круговых выработок в случае изменения способов их расположения в наклонно-слоистом массиве (угла ψ) при угле падения волны α = 45 и вертикальной слоистости массива

Заключение по четвертому разделу

1. Путем аналитических методов исследования проведен расчет напряженно-деформированного состояния диагональных полостей произвольного профиля глубокого заложения в транстропном наклонно-слоистом массиве при стационарной дифракции упругих волн растяжения-сжатия и сдвигов с разработкой алгоритмов и пакета функционально-ориентированных программ.

2. Показано, что с помощью преобразований физических уравнений закона Гука для обобщенной плоской деформации и цилиндрических функций, метода конформных и аффинных отображений в многосвязной среде, метода разделения переменных можно получить дифференциальные уравнения Гельмгольца, которые имеют решения в цилиндрических функциях и, в дальнейшем, сводятся к бесконечной системе алгебраических уравнений, решаемых методом редукции.

3. Исследовано взаимовлияние параллельно протяженных диагональных выработок кругового поперечного сечения при динамическом воздействии упругих продольных (PP-) и поперечных (SV-, SH-)волн. Показано, что при изменении способов расположения выработок в массиве, но сохранении при этом их расположения относительно слоев массива и угла падения волн, получаем идентичные контурные числовые результаты, что подтверждает независимость выработок от глубины.

4. Изучено влияние физико-механических параметров массива и падающих волн, а также ориентации выработок относительно наклонных слоев массива на НДС двух глубоко заложенных диагональных выработок круглого сечения. Показано существенной влияние как угла падения волны,угла наклона плоскости изотропии, так и ориентации диагональных выработок. Причем увеличение угла отклонения ψ ведет к увеличению концентрации перемещений и напряжений, при этом в зоне «света» и на перемычке наблюдаются значительные всплески значений перемещений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены систематические теоретические исследования по определению упругого динамического напряженно-деформированного состояния одиночных и парных полостей кругового и некругового сечения глубокого и мелкого заложения, находящихся в условиях антиплоской, плоской и обобщенной плоской деформации, в транстропном массиве с наклонной плоскостью изотропии при стационарной дифракции упругих волн растяжения-сжатия и сдвигов.

Основные результаты выполненных исследований заключаются в следующем:

– сформулирована постановка задач определения динамического напряженно-деформированного состояния анизотропного слоистого массива с разноориентированными полостями произвольного профиля и глубины заложения при стационарной дифракции упругих волн разного типа и предложен аналитический способ их решения;

– исследован класс задач расчета НДС одиночных полостей произвольного профиля глубокого заложения при стационарной дифракции упругих волн для случая плоской, антиплоской деформации. Показано существенное влияние механических параметров среды – угла наклона плоскости изотропии, параметров падающих волн - типа волн, угла падения, амплитуды и частоты волн, геометрии полости – ее формы и размера, на состояние массива вблизи одиночной полости при разных граничных условиях;

- предложено обобщение исследований и анализа напряженно-деформированного состояния разноориентированных одиночных полостей некругового и кругового профиля при обобщенной плоской и антиплоской деформации и стационарной дифракции упругих волн разного типа;

- исследовано взаимовлияние разноориентированных глубоко заложенных полостей разного профиля в анизотропном слоистом массиве при стационарной дифракции волн;

- решен класс задач транстропного слоистого полупространства с мелко заложенными полостями произвольной формы при стационарной дифракции сдвиговых волн на случай антиплоской и обобщенной плоской деформации. Проведен качественный и количественный анализ напряженно-деформированных характеристик в зависимости от глубины заложения полостей, их ориентации, формы, а также физико-механических параметров массива и волн;

- разработан универсальный пакет прикладных программ в среде MatLab для расчета и анализа НДС разноориентированных полостей произвольной общей формы и глубины заложения в транстропном наклонно-слоистом массиве, который может быть использован при формировании проектной документации по строительству и эксплуатации подземных сооружений в сейсмически активных зонах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Напетваридзе Ш.Г. Сейсмостойкость гидротехнических сооружений в сейсмических условиях. – М., Госстройиздат, 1959. - С.

2 Рашидов Т.Р., Крыженков В.А. Воздействия Ташкентского землетрясения и его афтершоков на подземные сооружения различного назначения //В кн.: Ташкентское землетрясение 26 апреля 1966 года. – Ташкент, «ФАН», УзССР, 1971. - С.

3 Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. - Алма-Ата, Наука, 1980.- 213 с.

4 Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Киев, Наукова думка, 1978. - 310 с.

5 Космодамианский А.С., Сторожев В.И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. Киев, Наукова думка, 1985. - 178 с.

6 Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л., Наука, 1980. - 280 с.

7 Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М., Наука, 1982. – 424 с.

8 Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. – Алма-Ата: Наука, 1989. – 240 с.

9 Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Влияние свободной поверхности на тоннель мелкого заложения при действии подвижных нагрузок //Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1986. №5. С.60-63.

10 Алексеева Л.А. О колебаниях упругой полуплоскости, ослабленной круговым отверстием //Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1984. №1. - С.1-5.

11 Алексеева Л.А. Стационарная дифракция волн на круговом отверстии в упругой полуплоскости //Прикладная математика и механика. 1985. Т.49, вып.2. - С. 299-306.

12 Алексеева Л.А. Дифракция волн на системе протяженных подземных выработок неглубокого заложения //Вестник АН КазССР. 1987. - №2. - С.46-52.

13 Алексеева Л.А. Стационарные колебания упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью при действии периодической нагрузки //Прикладная математика и механика. - 1987. - Т.51, вып.5. - С.836-843.

14 Космодамианский А.С. Распределение напряжений в изотропных многосвязных средах. (Учебное пособие). - Донецк, ДГУ, 1972. - 267 с.
15 Шульга Н.А., Колодий В.И. Дифракция SH-волн на некруговой цилиндрической полости //Прикладная механика, 1984. - Т.17, №3.
16 Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наукова думка, 1972 .
17 Головчан В.Т. Колебания полуплоскости с круговыми отверстиями //Прикладная механика, 1970. - Т.6. №1. - С.
18 Кубенко В.Д. Динамическая концентрация напряжений около квадратного отверстия //Прикладная механика, 1966. - Т.2. - №12. - С.
19 Пао Й. Динамическая концентрация напряжений в упругой пластинке //Прикладная механика (Труды американского общества инженеров-механиков): сборник переводов. - 1962, №2. - С.147-154.
20 Мау.Я., Менте Л. Динамические напряжения и смещения вблизи цилиндрической поверхности разрыва от плоской гармонической волны сдвига //Прикладная механика (Труды американского общества инженеров-механиков): сборник переводов. 1963. - №4. – С.
21 Банаф, Голдсмит. Дифракция стационарных упругих волн на препятствиях произвольной формы //Прикладная механика (Труды американского общества инженеров-механиков): сборник переводов. 1963. Т30. - №4. - С.126-134.
22 Фотиева Н.Н. Расчет крепи подземных сооружений в сейсмически активных районах. М., 1980. – 222 с.
23 Космодамианский А.С., Ободовский Л.Б., Сторожев В.И. Дифракция упругих волн на анизотропных цилиндрических включениях в многосвязных средах //Доклады АН УССР, серия А, 1980. - №10. – С.38-41.
24 Космодамианский А.С., Ободовский Л.Б., Сторожев В.И. Дифракция сдвиговых волн в анизотропном многосвязном теле с одной плоскостью упругой симметрии //Доклады АН УССР, серия А, 1983. - №4. – С.48-51.
25 Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропии тела. - М.: Наука, 1977. -367с.
26 Савин Г.Н. Некоторые задачи теории упругости анизотропной среды // ДАН СССР, 1939, т. ХХП, № 3.

27 Савин Г.Н. Влияние крепления на распределение напряжений возле узких подземных выработок //Записки Институтагорной механики АН УССР, 1947, №5.
28 Космодамианский А.С. Определение напряженного состояния массива вблизи горизонтальных горных выработок //Исследование горного давления. М.: Госгортехиздат. I960.
29 Космодамианский А.С. Приближенный метод определения напряженного состояния анизотропного массива с двумя одинаковыми эллиптическими выработками //Исследование горного давления. – М.: Госгортехиздат. 1960с.
30 Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Напряженное и деформированное состояние диагональной выработки произвольного поперечного сечения //Проблемные вопросы механики горных пород. -Алма-Ата: Наука, 1972. - С.125-145.
31 Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Расчет горного давления в разноориентированных горизонтальных выработках //Горное давление в капитальных и подготовительных выработках. - Новосибирск: Наука, 1973. - С.21-26.
32 Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Аубакиров С.Б. Приближенный расчет устойчивости неоднородно-слоистых пород вблизи штрека несимметричного профиля //Проблемы механики подземный сооружений. - Тула, ТулПТИ, 1982.
33 Ержанов Ж.С, Синяев А.Я. Напряжение в анизотропном массиве, ослабленном вертикальной выработкой круглого сечения //Вестник АН КазССР, 1963, №10. - С.76-82.
34 Ержанов Ж.С, Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Синяев А.Я. Напряженное состояние одиночных выработок в наклонно-слоистом массиве //Вопросы механики горных пород. - Алма-Ата: Наука, 1967. - С3-23.
35 Ержанов Ж.С, Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Синяев А.Я. Определение напряженного состояния анизотропного упруго-наследственного массива вокруг одиночных выработок //Проблемы реологии горных пород. - Киев: Наукова думка, 1970.
36 Ержанов Ж.С., Синяев А.Я. Напряжения в анизотропном массиве, ослабленном вертикальной выработкой круглого сечения //Вестник АН КазССР, 1963. - №10. - С.19-24.
37 Ержанов Ж.С, Кайдаров К.К., Тусупов М.Т. Горный массив с несплошным сцеплением слоев (плоская задача) //Механические процессы в горном массиве. - Алма-Ата: Наука,1969. - С.3-19.
38 Масанов Ж.К. Расчет напряжений и перемещений породного контура квершлага сводчатого профиля //Труды Института

математики и механики АН КазССР. Т.П. - Алма-Ата: Наука, 1971. - С.3-23.
39 Масанов Ж.К. О распределении давления на упругую крепь выработки, заложенной в наклонно-слоистом массиве //Проблемы механики горных пород. - Новосибирск: Наука,1971. - С.150-151.
40 Масанов Ж.К., Баймаханов И.Б. Об одном алгоритме построения матрицы жесткости системы метода конечных элементов для трехмерной теории упругости //Изв. АН КазССР. Серия физ.-мат. 1977, № 3. - С.24-31.
41 Ержанов Ж.С., Тусупов М.К. Модель сжимаемого слоистого горного массива //Проблемные вопросы механики горных пород. - Алма-Ата: Наука, 1972, - С.3-26.
42 Ержанов Ж.С. Модель горного массива с двоякопериодической системой физических щелей //Механика деформируемых тел к конструкций. - М: Машиностроение, 1975. - С.183-188.
43 Ержанов Ж.С., Кайдаров К.К. О вязко-упругом поведении массива с двоякопериодической системой щелей //Изв. АН КазССР. Серия физ.-мат. 1970, № 3. - С17-23.
44 Мартынович Т.Л. Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием //Механика твердого тела. 1976, № 2. - С.64-69.
45 Мартынович Т.Л. К обоснованию решения плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием //Механика твердого тела, 1979, № 6. - С.146-152.
46 Космодамианский А.С., Лехницкий С.Г., Ложкин В.Н. О работе Т.Л.Мартыновича «Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием» //Механика твердого тела, 1979, № 6. - С.145-146.
47 Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы //Под ред. Смирнова А.Ф. – М.: Стройиздат, 1983. - 488с.
48 Минчев И.Т. Механика на напластените среди. - София: Державна из-во Техника, 1969. - 267с.
49 Айталиев Ш.М., Каюпов М.А. Метод граничного элемента для решения плоской задачи теории упругости анизотропного тела //Известия АН КазССР, Серия физ,-мат., 1980, - №5. - С.7-12.
50 Косенюк В.К. Решение плоской задачи теории упругости для ортотропных тел при помощи численной реализации метода интегральных уравнений //Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1980, № 6. - С.80-85.

51 Лехницкий С.Г. Теоретическое исследование напряжений в упругом анизотропном массиве вблизи подземной выработки эллиптического сечения //Труды ВНИМИ, № 45. - Л.: 1962.
52 Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - М.: Гостехиздат, 1957. - 355с.
53 Космодамианский А.С. Приближенный метод определения напряженного состояния анизотропного массива с двумя одинаковыми эллиптическими выработками //Исследование горного давления. – М.: Госгортехиздат. 1960с.
54 Космодамианский А.С. Анизотропные многосвязные среды. Киев-Донецк: Вища школа. 1970. - 233с.
55 Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. - Киев: Наукова думка, 1968. - 888с.
56 Швецов В.А. Распределение напряжений в упругой анизотропной среде с эллиптическими отверстиями, подкрепленными упругими кольцами //Прикладная механика. 1966, т.2. вып.8.
57 Швецов В.А. Упругое равновесие анизотропной пластинки с конечным числом эллиптических отверстий, подкрепленных упругими кольцами //Прикладная механика. 1966, т.2.вып.8.
58 Швецов В.А. Упругое равновесие анизотропной пластинки с подкрепленным эллиптическим отверстием //Некоторые задачи, теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. Саратов: Саратов ун-т, 1969, вып.4.
59 Космодамианский А.С., Нескородев Н.М. Двоякопериодическая задача для анизотропной пластинки с криволинейными отверстиями, подкрепленными упругими кольцами //Прикладная механика, 1974, т.10, вып.П. - С.12-19.
60 Космодамианский А.С., Нескородев Н.М. Двоякопериодическая задача для анизотропной пластинки с эллиптическими отверстиями, подкрепленными упругими кольцами // Сопротивление материалов и теория сооружений. - Киев: Буд1вальник: 1975, вып.13. - С.3-10.
61 Калоеров С.А. Напряженное состояние полуплоскости с эллиптическим упругим кольцом //Теоретическая и прикладная механика. Харьков, Харьков.ун-т, 1972, вып.3.
62 Космодамианский А.С, Калоеров С.А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. - Киев-Донецк: Вища школа, 1983. - 160с.
63 Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. - М.-Л.: Физматгиз, 1962. - 695с.

64 Ильюшин А.Л., Рашидов Т.Р. Упрощенные уравнения сейсмодинамики сложных систем подземных сооружений //Известия АН УзССР. Серия техн.наук. 1970, № 2.
65 Ильюшин А.А., Рашидов Т.Р. О действии сейсмической волны на подземный трубопровод //Известия АН УзССР. Серия техн.наук, 1971, №l.
66 Рашидов Т.Р., Хожметов Г.Х. Сейсмостойкость подземных трубопроводов. - Ташкент; ФАН, 1986,-152с.
67 Мубараков Я.Н. Сейсмодинамика подземных сооружений типа оболочек. - Ташкент; ФАН. 1987. - 192с.
68 Ишанходжаев А.А. Сейсмостойкость тоннельных конструкций метрополитена мелкого заложения. Автореф.дис. докт. техн. наук. - Л.: 1991. - 48с.
69 Проскурина С.Ф. Уравнения сейсмодинамики сложных систем сооружений с произвольной и неортогональной стыковкой труб в сложных узлах //Известия АН УзССР. Серия техн.наук. 1973, №3.
70 Никитин Д.В., Тюреходжаев А.Н. Действие сейсмической волны в грунте на подземный трубопровод //Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1987, № 1. - С.98-106.
71 Алексеева Л.А., Шершнев В.В. Сейсмонапряженное состояние бетонной крепи подземного сооружения в грунтах //Результаты комплексных исследований в сейсмоактивных районах Казахстана. - Алма-Ата: Наука, 1984. - С.155-163.
72 Алексеева Л.А. Влияние угла падения и контактных условий на напряженное состояние бетонной крепи тоннеля при дифракции стационарных волн //Известия АН КазССР. Серия физ.-мат. 1986, №1. – С.59-63.
73 Дильдабаев Ш.А. Нестационарная дифракция упругих волн на горных выработках. Автореф.дис. канд.физ.-мат.наук. - Алма-Ата. 1988. - 20с.
74 Ескалиев М.Е., Каюпов М.А., Масанов Ж.К. О решении упругопластической задачи для анизотропной среды с отверстием методом граничного элемента //Известия АН КазССР. Сер.физ.-мат. 1983, № 10 - С.15-20.
75 Шершнев В.В. Дифракция стационарных волн на полостях в двухкомпонентных жидконасыщенных средах. Автореферат дисс. ... канд.физ.-мат.наук. Алма-Ата, 1985. - 23с.
76 Айталиев Ш.М., Баничук Н.Б., Каюпов М.А. Оптимальное проектирование протяженных подземных сооружений. - Алма-Ата: Наука, 1986. - 240 с.

77 Новичков Ю.Н., Гутьеррес П., Джунисбеков С. Колебания подземного трубопровода в поле плоской гармонической волны //Прикладная механика, 1988, №3.
78 Абдукадыров С.А., Курманалиев К.К., Степаненко М.В. Динамические напряжения на контурах жестких включений в горном массиве //Физ.-техн.пробл.разраб.полезн.ископ. 1988, №5. – С. 58-65.
79 Ципенюк И.Ф., Проскурина С.Ф., Марданов Б.М., Мубараков Я.Н., Каюмов А.К. Сейсмические воздействия на здания и заглубленные сооружения. Ташкент: ФАН, 1986. - 296с.
80 Дашевский М.А. Излучение упругих волн при движении пульсирующей нагрузки вдоль тоннеля, проложенного в грунте //Строительная механика и расчет сооружений. 1971, № 5. - С.10-13.
81 Курнавин С.А. Колебания обделок тоннелей метрополитенов и окружающего грунтового массива. Автореф.дис.канд.техн.наук. - М.: ЦНИИС Минстроя СССР, 1986. - 15с.
82 Алексеева Л.А., Украинец В.Н., Жанабаев Б.А. Реакция кругового тоннеля мелкого заложения на движущуюся периодическую нагрузку // Известия АН КазССР, Серия физ.-мат. 1991, №3. - С.66-71.
83 Aitaliev Sh. M. Development of the mechanics of underground and special structures in Kazakhstan over the last 40 years. // International Applied Mechanics, Vol. 40, No. 10, 2004.-P. 1065-1091.
84 Pao Y.H., May C.C. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration. - Y.Russols, 1973. - 694 P.
85 Pao Y.H, Chao C.C. Diffraction of flexural wave by a cavity in a elastic plate //AIAA, Journal , 1964, v. 2, p, 145-152.
86 Okamoto C, Kato K., Hamada M. Behavior of Submerged Tunnels During Earthquake. Proc. of the 5 WORK, Rome, 1973.
87 Gloda G., Sakurai S. Bach analysis procedures for the interpretation of field measurements in geomechanics //Int. J. for Numerical and Analytical methods in Geomechanics; 1987, Y-11, pp. 555-582.
88 Sakurai S., Kitamura Y. Vibrations of tunnel to adjacent blasting operation //The Construction Engineering Research Institute Foundation //Report, If 18, June, p. 221-238.
89 Xu Y., Han F. Scattering of SH-waves by multiple semi-cylindrical canyons. //Dizhen gongcheng yu gongcheng zhendong – 1992. – Vol.12. - №2, p.12-18.
90 Lui D., Han F. Application of the method of complex function to scattering of SH-wave in anisotropic media //18-th International

Congress Theoretical and Applied Mechanics, Haifa, Aug.22-28, 1992. – Haifa, 1992. – P.95.

91 Guoqing Wang, Dianku Liu. Scattering of SH-wave by multiple circular cavities in half space. // Journal "Earthquake Engineering and Engineering Vibration", Vol.1 No.1, June 2002, Article ID: 1671-3664(2002)01-0036-09, P. 36-44.

92 Jianwen Liang, Hao Zhang and Vincent W Lee. A series solution for surface motion amplification due to underground twin tunnels: incident SV waves. // Journal "Earthquake Engineering and Engineering Vibration", Vol. 2, No 2, December 2003, DOI: 10.1007/s11803-003-0012-x. - P.289-298.

93 Jianwen Liang, Hao Zhang and Vincent W Lee. A series solution for surface motion amplification due to underground group cavities: Incident P waves. // Acta Seismologica Sinica, Vol. 17, No 3, DOI: 10.1007/s11589-004-0052-y. – P.296-307.

94 Gai Bing-zheng. On the diffraction of elastic wave and dynamic stress concentration. //CNKI:SUN:LXJZ.0.1987-04-001

95 Liu Diankui Liu Hongwei. Scattering and dynamic stress concentration of SH-wave by interface circular hole // CNKI:ISSN:0459-1879.0.1998-05-009

96 Xu Ping ,Xia Tang-dai , Han Tong-chun. Scattering of elastic wave by a cylindrical shell deeply embedded in saturated soils // Acta Seismologica Sinica. - Mar., 2006 Article ID: 1000-9116(2006)02-0191-08, Vol.19 No.2.- P.191-198

97 D. S. Kim, and K. Konagai. Seismic isolation effect of a tunnel covered with coating material. //Aseismic design. Available online 11 April 2001.

98 V. W. Lee, M. E. Manoogian and S. Chen. Antiplane SH-deformations near a surface rigid foundation above a subsurface rigid circular tunnel. // Earthquake Engineering and Engineering Vibration, Vol.1, No 1, P.27-35, DOI: 10.1007/s11803-002-0004-2.

99 Gao Guang-yun, Li Zhi-yi1, Qiu Chang. Scattering of Rayleigh wave from irregular obstacles in elastic half-space // CNKI:SUN:YTGC.0.2005-04-002

100 M. P. Malezhik, I. S. Chernyshenko, and G. P. Sheremet. Diffraction of stress waves by a free or reinforced hole in an orthotropic plate. // International Applied Mechanics, Vol. 43, No. 7, 2007 P. 767-771 (Translated from Prikladnaya Mekhanika, Vol. 43, No. 7, P. 73–78, July 2007. Original article submitted June 4, 2006)

101 Назаренко А.М., Панченко Б.Е. Дифракция волн сдвига на цилиндрических неоднородностях произвольного поперечного сечения //Динамика и прочность машин, 1991. - №52. - С.38-45.
102 Тусупова С.А. Распространение упругих и термоупругих волн в массиве вокруг сферической и цилиндрической полостей с усложненными механическими свойствами //Автореферат диссертации.1993. - С.
103 Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К., Сорока П.Н. Отражение гармонических упругих волн от выпуклой цилиндрической полости произвольного сечения //Теоретическая и прикладная механика, Киев, 1991. - №22. - С.10-16.
104 Глушков О.В. Дифракция нестационарных волн на криволинейных полостях в ортотропном массиве //Теоретическая и прикладная механика, Киев, 1991. - №22. - С.96-102.
105 Гетман И.П., Румянцев А.Н., Устинов Ю.А. О динамической концентрации напряжений в упругом слое, ослабленном цилиндрической полостью //Известия РАН, Механика твердого тела, 1992. - №2. - С.72-76.
106 Житняя В.Г., Космодамианский А.С., Черник В.И. Дифракция плоской волны на подкрепленной круглой полости в массиве //Прикладная механика, Киев, 1992. - Т.28, №3. - С.19-22.
107 Miura Kimihisa, Ohyoshi Tadashi. Рациональный двумерный анализ SH-волн, отраженных от градиентно неоднородного слоя. Rational two dimensional analysis of reflecting SH waves from an gradient inhomogeneous layer //Nihon kikai gakkai ronbunshu. A N Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A. - 1998. - 64, 628. - С. 3007-3013. - Яп.; рез. англ.
108 Осипов И. О. К комплексным решениям в потенциалах динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред //Изв. РАН. Мех. тверд. тела. - 2002. - № 3. - С. 78-89. - Рус.
109 Остросаблин Н. И. Упругий анизотропный материал с чисто продольными и поперечными волнами //Прикл. мех. и техн. физ. - 2003. - 44, № 2. - С. 143-151. - Рус.
110 Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Ехлаков А. В. Пространственное рассеяние волн на интерфейсных трещинах //Современные проблемы механики сплошной среды: Труды 6 Международной конференции, Ростов-на-Дону, 12-14июня , 2000. Т. 2. - Ростов н/Д, 2001. - С. 57-59. - Рус.; рез. англ.
111 Кирпичникова Н. Я., Свиркина Л. А., Филиппов В. Б. Рассеяние плоских упругих волн от малой неоднородности, помещенной в

упругий слой // Зап. науч. семин. ПОМИ. - 2001. - 275. - С. 72-84, 311. - Рус.; рез. англ.
112 Гусенкова А. А. Метод потенциальных функций в динамических задачах теории упругости // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. - 2001. - 13. - С. 161-170. - Рус.
113 Дорман И.Я. Сейсмостойкость транспортных тоннелей. - М.: Транспорт. 1986. - 176с.
114 Ишанходжаев А.А., Корниенко В.П., Рашидов Т.Р. Анализ воздействия Исфаро-Баткентского землетрясения на подземные сооружения угольных шахт г.Шураб //Динамика оснований, фундаментов и подземных сооружений (книга П). - Ташкент: ФАН, 1977.
115 Рашидов Т.Р. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений» - Ташкент: ФАН, 1973.-180с.
116 Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Устойчивость горизонтальных выработок в наклонно-слоистом массиве. - Алма-Ата, Наука КазССР, 1971. -160 с.
117 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б. Динамика транспортных тоннелей произвольного профиля в анизотропном массиве. // В кн. «Проектирование, строительство и эксплуатация транспортно-коммуникационных сооружений», Межвузовский сборник научных трудов, КазАТК, Алматы.- Вып.4, 1999 . - С.90-95.
118 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б. Антиплоская деформация транстропного массива с полостью произвольного профиля при стационарной дифракции волн сдвига. //Доклады НАН РК, Алматы, 2000, №5.–С. 39-44.
119 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С.Напряженно-деформированное состояние транстропного массива с полостью некругового профиля при распространении упругих волн // Тезисы докладов международной научной конференции «Проблемы теоретической и прикладной механики» (1-2 марта 2006 г., Алматы). - С.50.
120 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С. Напряженно-деформированное состояние транстропного массива с полостью некругового профиля при распространении упругих волн //Вестник КазНУ(спец.выпуск). Серия «Математика, механика, информатика», №2, 2006. - С.10-14.
121 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Жолдасова Ш.А., Жоламанова З.Х. Упругое, упругопластическое состояние полостей в анизотропном массиве. // Труды 1-го Центрально-Азиатского геотехнического симпозиума «Геотехнические проблемы

строительства архитектуры и геоэкологии на рубеже 21 века», Астана, 25-28 мая 2000 г. – Т.1. – С.240-242.
122 Атымтаева Л.Б., Масанов Ж.К. Динамические напряжения в анизотропном массиве с полостью. // Материалы международной научно-практической конференции «Проблемы вычислительной математики и информационных технологий», Алматы, 25-26 марта 1999. – С. 66-67.
123 Атымтаева Л.Б. К вопросу определения напряженно-деформированного состояния выработок глубокого заложения в анизотропном массиве при дифракции упругих продольно-поперечных волн.// Материалы III Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения», 17-19 июня 2009 года, том 1. - С.157-161.
124 Атымтаева Л.Б. Исследование динамики анизотропного многосвязного массива при стационарной дифракции упругих волн при решении первой основной задачи //Известия НАН РК, №2, 2010. - С.105-113.
125 Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Атымтаева Л.Б. Дифракция стационарных SH-волн на горизонтальных горных выработках произвольного профиля в транстропном массиве //«Проблемы прикладной и теоретической механики», сборник научных трудов, №38, Донецк, 2002. - С.169-175.
126 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б.Стационарная дифракция упругих волн на полости кругового сечения в транстропном массиве //Труды международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения», Алматы, 2005. - С. 96-100.
127 Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б. Динамическое напряженно-деформированное состояние выработки произвольного поперечного профиля и глубины заложения в упругом транстропном массиве при антиплоской деформации //«Известия Тульского государственного университета», секция «Геомеханика. Механика подземных сооружений», 2006. - С.11-15.
128 Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть 1,2. М., Издательство иностранной литературы, 1949. - С.
129 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б. Актуальные проблемы динамики анизотропных сред с неоднородностями // «Механика и Машиноведение», 2007. - С.79-85.
130 Атымтаева Л.Б. Решение первой основной задачи для выработки глубокого заложения в анизотропном массиве при стационарной

дифракции упругих продольно-поперечных волн //Proceedings of the International Scientific-Technical Conference dedicated to the 20-th anniversary of National Engineering Academy of Republic of Kazakhstan, Aktobe, May 21-22, 2010, Part 1. - P. 29-34.

131 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б. Стационарная динамика транспортного тоннеля с жесткой обделкой в анизотропном массиве при антиплоской деформации. // В кн. «Вестник КазАТК», Алматы, 2000. - №1. – С.47-52.

132 Атымтаева Л.Б. Анализ динамического напряженного состояния транстропного массива с выработкой произвольного профиля глубокого заложения при воздействии SH-волн сдвига. // Депонирована в КазгосИНТИ, №8846-Ка00, 30.10.2000. – 7 с.

133 Атымтаева Л.Б. Обобщенно-плоская деформация многосвязного транстропного массива при дифракции упругих волн // «Механика и моделирование процессов технологии», №1, 2010. - С.131-138.

134 Masanov Zh., Atymtayeva L., Yagaliyeva B., Myrzakhmetova G.Stationary diffraction of elastic SH-waves onto mutually influencing cavities of arbitrary structure and deep lying in transtropic massif //Proceedings of the 3rd IASME / WSEAS International Conference on CONTINUUM MECHANICS (CM'08), Cambridge, UK, February 23-25, 2008, ISBN: 978-960-6766-38-1, ISSN: 1790-2769. - P. 5-9.

135 Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б. Стационарная дифракция упругих SH-волн сдвига в многосвязной анизотропной среде в условиях антиплоской деформации //«Известия Тульского государственного университета», секция «Геомеханика. Механика подземных сооружений» , 2007. - С. 3-9

136 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Г.С. Мырзахметова, Б.Е. Ягалиева Динамическое напряженно-деформированное состояние анизотропного массива с двумя неподкрепленными штрекообразными параллельными выработками произвольного профиля глубокого заложения при стационарной дифракции упругих SH-волн сдвига // Труды международной научно-технической конференции"Вторые Ержановские чтения", Актобе, 19-21 июня 2007. - С.207-211.

137 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Г.С. Мырзахметова, Б.Е. Ягалиева К решению второй основной задачи по определению напряженно-деформированного состояния транстропного массива с двумя штрекообразными выработками произвольного профиля глубокого заложения, подкрепленными абсолютно жесткой крепью, при стационарной дифракции упругих SH-волн сдвига //

Труды международной научно-технической конференции "Вторые Ержановские чтения", Актобе, 19-21 июня 2007.- С. 45-49.

138 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С., Ягалиева Б.Е.Динамика анизотропных сред с взаимовлияющими полостями произвольного профиля глубокого заложения //Материалы Республиканской научно-практической конференции, посвященной 70 –летию геомеханика, профессора Байтелиева Т.Б., 15-16 мая 2008, Туркестан. - С.135-140.

139 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С., Ягалиева Б.Е.Теоретические аспекты исследования динамического напряженного состояния анизотропного массива с полостями неглубокого заложения // «Механика и машиноведение» (спец.выпуск), №4, 2008. - С.101-106.

140 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С., Ягалиева Б.Е. Теоретические аспекты исследования динамического напряженного состояния анизотропного массива с полостями неглубокого заложения //Тезисы докладов III Международной научной конференции «Современные проблемы механики», Алматы, Казахстан, 24-25 июня 2008 года, посвященная 70-летию со дня рождения профессора Масанова Ж.К. - С.87.

141 Атымтаева Л.Б. К решению задачи о стационарной дифракции сдвиговых волн на полостях в анизотропном массиве //Труды Международной научно-практической конференции «Информационно-инновационные технологии: Интеграция науки, образования и бизнеса», посвященная 75 -летию КазНТУ имени К.И. Сатпаева, Алматы, 27-28 ноября 2008 г., - С.158-163.

142 Атымтаева Л.Б. К решению задачи о стационарной дифракции сдвиговых волн на полостях в анизотропном массиве //Вестник КазНТУ, №6/1(70), 2008. - С.37-43.

143 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С.Исследование напряженного состояния горного массива с двумя глубоко заложенными горизонтальными круговыми выработками при дифракции упругих SH-волн сдвига //Материалы III Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения», 17-19 июня 2009 года, том 2. - С.301-304.

144 Атымтаева Л.Б. К анализу динамического напряженно-деформированного состояния при дифракции SH-волн сдвига на полостях в анизотропном массиве //Материалы Международной научно-практической конференции «Проблемы инновационного

развития нефтегазовой индустрии», 3-4 апреля 2008 года, КБТУ, Алматы. - С.174-178.
145 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С., Ягалиева Б.Е.Анализ динамического состояния взаимовлияющих неподкрепленных круговых выработок в анизотропном массиве при стационарной дифракции SH-волн //Известия НАН РК, №2, 2010. - С.127-131.
146 Атымтаева Л.Б. К анализу динамики анизотропного многосвязного массива с усложненными свойствами при стационарной дифракции упругих волн //Вестник КазНТУ. - №3, 2010. - С.243-248.
147 Атымтаева Л.Б. Анализ динамического состояния взаимовлияющих круговых выработок глубокого заложения с жесткой обделкой в анизотропном массиве с несплошным сцеплением слоев при стационарной дифракции сдвиговых волн //Вестник КазНТУ.- №4, 2010. - С.233-238.
148 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С.Анализ динамического состояния взаимовлияющих круговых выработок в анизотропном массиве при стационарной дифракции SH-волн // «Механика и моделирование процессов технологии», №1, 2010. - С.147-151.
149 Атымтаева Л.Б. Исследование динамики анизотропного многосвязного массива при стационарной дифракции упругих волн при решении второй основной задачи // Вестник НАН РК - №4, 2010. - С.21-24.
150 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б. , Мырзахметова Г.С., Ягалиева Б.Е.Анализ динамического напряженного состояния взаимовлияющих круговых выработок с жесткой обделкой в анизотропном массиве при стационарной дифракции SH-волн //Вестник НАН РК - №4, 2010. - С.18-21.
151 Атымтаева Л.Б. К анализу динамики анизотропного многосвязного полупространства при стационарной дифракции упругих волн при решении первой основной задачи //Известия НАН РК, №3, 2010. - С.107-112.
152 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Ягалиева Б.Е. , Мырзахметова Г.С., Актанова Б.Анализ динамического состояния взаимовлияющих круговых выработок мелкого заложения с жесткой обделкой в анизотропном массиве при стационарной дифракции сдвиговых волн //Известия НАН РК - №3 2010. - С. 113-117.

153 Atymtayeva L., Masanov Zh., Yagaliyeva B., Myrzakhmetova G. Dynamics of transtropic elastic continuums with non-homogeneities //Proceedings of World Congress on Engineering 2010, the 2010 International Conference of Mechanical Engineering, London, UK, 30 June-2 July, 2010. - P. 1024-1027.
154 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б.,Мырзахметова Г.С.Исследование дифракции SH-сдвиговых волн на круговой полости неглубокого заложения в транстропном массиве с несплошным сцеплением наклонных слоев //Материалы Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления», 19 - 20 ноября 2009. - С.603-608.
155 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Ягалиева Б.Е.Анизотропты тау жыныстарындағы жер бетіне жақын қазбалардың динамикалық кернеулік деформациялық күйін зерттеу //Материалы Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления», 19 - 20 ноября 2009. - С.600-603
156 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Ягалиева Б.Е.Влияние физико-механических параметров транстропной среды и падающих волн на НДС выработок неглубокого заложения с абсолютно-жесткой обделкой.// Proceedings of the International Scientific-Technical Conference dedicated to the 20-th anniversary of National Engineering Academy of Republic of Kazakhstan, Aktobe, May 21-22, 2010, Part 1. - P. 106-109.
157 Атымтаева Л.Б. Бірінші негізгі есепті шешу арқылы анизотропиялық тау жынысында жер бетіне жақын орналасқан қазбалардың динамикалық кернеулік деформациялық күйін зерттеу //Вестник КазНПУ имени Абая, 2010. - С.14-17.

Учебное издание

Атымтаева Л.Б., Масанов Ж.К., Мырзахметова Г.С., Ягалиева Б.Е.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ

монография

Редактор Далабаева А.К.
Технический редактор Серикбайкызы У.С.
Компьютерная верстка Ескали Г.Б.

Подписано в печать 31.07.2014 г.
Тираж 500 экз. Формат 60x84 1/16. Бумага офсет.
Объем 12.75 п.л. Заказ №80.

Издание Казахстанско-Британского технического университета
Издательский центр КБТУ
Алматы, Толе би, 59