

**БОЖАНОВ Е.Т.
ОТАРБАЕВ Ж.О.
БУГАНОВА С.Н.**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Алматы, 2015

**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ**

**Қ.И.СӘТБАЕВ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ
ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ**

ХАЛЫҚАРАЛЫҚ БІЛІМ БЕРУ КОРПОРАЦИЯСЫ

Е.Т. Божанов, Ж.О. Отарбаев, С.Н. Буганова

**ГЕОМЕХАНИКАЛЫҚ ҮДЕРІСТІҢ
МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУІ**
Монография

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН**

**КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ К.И. САТПАЕВА**

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ КОРПОРАЦИЯ

Е.Т. Божанов, Ж.О. Отарбаев, С.Н. Буганова

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**
Монография

**MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
REPUBLIC OF KAZAKHSTAN**

**THE KAZAKH NATIONAL TECHNICAL
UNIVERSITY OF NAME K.I. SATPAYEVA**

THE INTERNATIONAL EDUCATIONAL CORPORATION

Bozhanov E.T., Otarbayev Zh.O., Buganova S.N.

**MATHEMATICAL MODELING
OF GEOMECHANICAL PROCESSES**
Monograph

УДК 539.3:624.044(035.3)

ББК 22.251

Б76

Рекомендовано Ученым Советом КазНТУ им.К. Сатпаева, протокол №9 от 31 марта 2015 г.

Рецензенты:

Достанова С.Х., доктор технических наук, профессор Международной образовательной корпорации (Кампус Казахской головной архитектурно-строительной академии);

Кабетенов Т., доктор технических наук, профессор Казахского национального технического университета имени К.И. Сатпаева

Байгурин Ж.Г., доктор технических наук, профессор Казахского национального технического университета имени К.И. Сатпаева

Б76 Божанов Е.Т. Математическое моделирование геомеханических процессов: Монография/ Е.Т. Божанов, Ж.О. Отарбаев, С.Н. Буганова. - Алматы, 2015. – 145 с. Библ.132 наим.

ISBN 978-601-228-800-1

В монографии представлены результаты научных исследований по комплексному анализу механико-математических моделей устойчивости и выпучивания одиночной выработки, состоящей из трех типов крепления в зависимости от формы изменения поперечного сечения под действием неравномерных поперечных сил. Рассмотрена методика оценки напряженно-деформированного состояния и устойчивости выработки при эксплуатационных нагрузках.

Монография предназначена для научных работников и специалистов проектных и производственных организаций, а также преподавателей, докторантов, магистрантов и студентов технических специальностей.

УДК 539.3:624.044(035.3)

ББК 22.251

ISBN 978-601-228-800-1

© Божанов Е.Т.,
Отарбаев Ж.О.,
Буганова С.Н., 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

	ПРЕДИСЛОВИЕ.....	6
	ВВЕДЕНИЕ.....	8
Глава 1	МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК С МНОГОСЛОЙНЫМИ КРЕПЯМИ.....	10
	1.1. Современное состояние вопроса исследования устойчивости горных выработок.....	10
	1.2. Условия неразрывности конечных деформаций. Линеаризация уравнений равновесия и устойчивости.....	12
	1.3. Вариационные уравнения нелинейной теории и их линеаризации в задачах устойчивости.....	24
	1.4. О больших прогибах выработки в массиве горных пород с учетом произвольности элементов поперечного сечения.....	36
	1.5. Научные основы прогноза и предупреждения неустойчивости выработок под действием поперечных и осевых сил.....	38
Глава 2	УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫРАБОТКИ ГОРНЫХ ПОРОД ПО КРИТИЧЕСКИМ ДЕФОРМАЦИЯМ. ПРОЦЕДУРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫРАБОТКИ НА ОСНОВАНИИ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ.....	42
	2.1. Теоретико-проектные расчеты напряженно-деформированного состояния и устойчивости выработки произвольного сечения в условиях эксплуатации.....	42
	2.2. Определение устойчивости, выпучивания и колебания выработки в «новом начале» как стационарного объекта с запаздывающим аргументом.....	47
	2.3. Расчет изменения кривизны рыхленного массива выработки под действием активной синусоидальной силы в зависимости от граничных условий на торцах.....	50
	2.4. Расчет колебаний рыхленного массива выработки под действием динамической нагрузки.....	55
Глава 3	ТЕОРЕТИКО-ПРОЕКТНЫЕ РАСЧЕТЫ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ВЫРАБОТКИ.....	64
	3.1. Напряженно-деформированное состояние и устойчивость в слоистых горных массивах ослабленных выработками прямоугольного сечения и прямоугольной формы критической деформации.....	64
	3.2. Научные основы прогноза и предупреждения неустойчивости выработок под действием неравномерных поперечных сил по критическим деформациям треугольной эпюры.....	69
	3.3. Анализ численных результатов устойчивости выработок в	

	толще горных пород под действием поперечных и осевых сил...	79
	3.4. Численные моделирование разработки рудных месторождений в толще горных пород по критическим деформациям прямоугольной эпюры.....	86
	3.5. Об устойчивости весомой выработки в толще горных пород под действием неравномерного поперечного давления со стороны несущего слоя трапецевидной эпюры.....	89
	3.6. Численные методы моделирования разработки рудных месторождений в толще горных пород по критическим деформациям трапецевидной эпюры.....	92
Глава 4	ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕРАВНОМЕРНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ СО СТОРОНЫ ВЫРАБОТКИ В УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ.....	96
	4.1. Решение задач о выпучивании выработки в массиве горных пород под действием неравномерных поперечных сил по критическим деформациям.....	96
	4.2. Расчеты выпучивания выработки в массиве горных пород, находящейся на упруго-вязком основании типа Пастернака под действием поперечной силы.....	118
	4.3. Расчеты выпучивания выработки в массиве горных пород, находящейся на упруго-вязком основании типа Винклера под действием неравномерного осевого давления $N_{кр}$ и поперечной силы.....	124
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	134
	ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ.....	136
	ЛИТЕРАТУРА.....	137

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие горнодобывающей промышленности, в целом, способствует развитию экономики Республики Казахстан, поэтому необходимость поддержания устойчивости горного массива и сохранения контуров существующих горных выработок является важной научно-технической задачей.

Большую актуальность приобретают исследования направленные на наиболее полный учет всех свойств слоя массива, их анизотропии и неоднородности свойств материала по толщине слоя и переменной жесткости, изучение процессов деформирования горных массивов и связанные с ними, разработка достаточно простых и достоверных методик оценки устойчивости и напряженно-деформируемого состояния выработки в массиве горных пород.

Вопрос применения теоретических выкладок на практике является одним из самых сложных, так как при создании механико-математической модели наиболее точный и полный учет всех свойств слоя массива, учет анизотропии и неоднородности свойств материалов по толщине слоя и переменной жесткости может быть осуществлен на основе решения нелинейных уравнений трехмерной теории упругости. Применение высокопроизводительных вычислительных машин, создание эффективного, аналитического и системного математического обеспечения позволяют применить пространственные подходы к расчету тонкостенных слоистых гибких тел.

Эффективность разработки месторождений полезных ископаемых и безопасность работ горняков во многом зависят от соответствия принимаемых технологических решений конкретным горно-геологическим ситуациям и от степени учета закономерностей геомеханических процессов в массиве.

Изучение геомеханических условий отработки месторождений полезных ископаемых является одной из сложных задач механики горных пород. Этот вопрос особенно актуален для рудных месторождений, размещенных в горно-складчатых областях, где существующие структурно-геологические и петрографические неоднородности массивов руды и пород месторождений формируют весьма сложную геомеханическую ситуацию.

Массивы пород горно-складчатых областей имеют исключительно сложное геологическое строение и определение их физико-механических свойств очень затруднительно. Обычно изучение физико-механических свойств и состояний массива пород проводят в два этапа. На первом этапе исследуют керны разведочных скважин, определяя практически все необходимые физико-механические свойства пород. Затем, в процессе проведения участковых разведочных, подготовительных и нарезных выработок, а так же керна бурения промышленной разведки, устанавливают физико-механические свойства пород и пространственную периодичность изменчивости её механических параметров.

Существующие отечественные и зарубежные нормативные документы по оценке устойчивости и напряженно-деформируемого состояния выработки в массиве горных пород базируются на стандартных методиках расчета с приме-

нением методов макромеханики на основе специальных гипотез крепей и с применением методов микромеханики на действие статических нагрузок. В то же время, применение методов микромеханики на основе геометрической нелинейной теории при сложном нагружении по критическим деформациям на действие динамических и сейсмических нагрузок свидетельствуют о необходимости совершенствования самой модели теории горного давления применительно к условиям эксплуатации.

В связи с чем, исследование устойчивости и колебаний выработки в массиве горных пород при разработке рудных месторождений с составлением математической модели и разработкой инженерной методики расчета является актуальной и имеющей народнохозяйственное значение задачей.

Данная монография предназначена для научных работников и специалистов проектных и производственных организаций, а также преподавателей, докторантов, магистрантов и студентов технических специальностей.

ВВЕДЕНИЕ

Объектом исследования являлась одиночная выработка в массиве горных пород при разработке рудных месторождений, а предметом - прочность, устойчивость, прогибы и колебания выработки как изгиб всей конструкции.

Необходимость проведения аналитического исследования напряженно-деформированного состояния, устойчивости и колебаний выработки произвольного сечения по критическим деформациям потребовала решения следующих задач:

- построение механико-математических моделей расчета устойчивости выработки в условиях эксплуатации;

- на основании геометрической нелинейной теории М.А.Био нахождение толщины второй зоны выработки, где происходит формирование новых поверхностей;

- исходя из общей задачи Коши, при граничных условиях механики деформируемого твердого тела и по аналогии теории горного давления и тонкостенных конструкций построение механико-математической модели выработки под действием статических и динамических нагрузок (включая и сейсмические);

- установление контакта выработки с рыхленным и нетронутым массивом методом прямых и обратных интегральных преобразований Фурье;

- на основании метода академика А.Н.Крылова, рассматривая модель стационарного объекта с запаздывающим аргументом, получение фундаментальных функции выпучивания и колебания для одного участка, затем сопряжения трех участков выработки в условиях эксплуатации;

- разработка инженерной методики оценки напряженно-деформированного состояния и устойчивости горной выработки при эксплуатационных нагрузках.

Методическую основу приведенных исследований составили методы:

- аналитический и численный, использующий математический аппарат плоской и пространственной задач;

- методы микромеханики в составной среде;

- методы макромеханики с однородным анизотропным телом с эффективными механическими и геомеханическими характеристиками, определенными экспериментально;

- метод равенства грузовых площадок при равномерном и неравномерном давлении;

- метод равенства внешних и внутренних сил при равномерном и неравномерном давлении;

- метод определения устойчивости по предельному состоянию;

- метод достоверности и надежности разработанных механико-математических моделей эффективного освоения и управления недропользованием.

Разработанные механико-математические модели, составленные программные комплексы и формулы для определения напряженно-

деформированного состояния и устойчивости рыхленного массива в зависимости от изменения формы критической деформации и физико-механических свойств обрабатываемого материала дают возможность прогнозировать и управлять геомеханическими процессами в массиве горных пород при разработке рудных месторождений, а также разработанная на этой основе методика инженерного расчета могут быть использованы инженерно техническими работниками проектных и научно-исследовательских организаций при проектировании выработок различного вида и назначения, решения конкретных программных задач при разработке рудных месторождений.

При ряде упрощающих предположений полученные результаты согласуются с существующими точными решениями, полученными другими авторами, а разработанные механико-математические модели напряженно-деформированного состояния, основные положения и алгоритмы решения преобразуются в известные соотношения для цилиндрических оболочек с тремя зонами возмущения.

Монография является составной частью плановых научно-исследовательских работ кафедры «Математика» КазНТУ имени К.И. Сатпаева, проведенных в 2001-2010 годах.

Глава 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК С МНОГОСЛОЙНЫМИ КРЕПЯМИ

1.1. Современное состояние вопроса исследования устойчивости горных выработок

При создании механико-математических моделей выработки горного массива как трехслойной цилиндрической оболочки для каждой модели в принципе может быть подобран материал (из резины, пенопласта, стеклотекстолита), наиболее полно соответствующий ее назначению, полю действующих нагрузок, НДС и условиям эксплуатации. В таких цилиндрических моделях удачно сочетаются простота, компактность, разработанность, всесторонне достаточная исследованность основополагающих теоретико-аналитических, расчетно-аналитических и расчетно-проектных формул, уравнений и положений масштабных уровней.

Изучение геомеханических условий обработки месторождений полезных ископаемых является одной из сложных задач механики горных пород. Этот вопрос особенно актуален для месторождений рудных металлов, размещенных в горно-складчатых областях, где существенные структурно-геологические и петрографические неоднородности массивов руды и пород месторождений формируют весьма сложную геомеханическую ситуацию. Породные массивы горно-складчатых областей имеют исключительно сложное геологическое строение и определение физико-механических свойств очень затруднительны. Обычно изучение физико-механических свойств и состояний массива пород проводят в два этапа [1]:

- исследуют керны разведочных скважин, определяя практически все необходимые физико-механические свойства пород;
- в процессе проведения участковых разведочных, подготовительных и нарезных выработок, а так же кернавого бурения промышленной разведки устанавливают физико-механические свойства пород и пространственную периодичность изменчивости механических параметров пород.

В монографии выработки в толще горных пород представлены в виде многослойных, анизотропных оболочек типа Тимошенко в нелинейной постановке с конечными деформациями, где физико-механические свойства пород соответствуют физико-механическим свойствам многослойных анизотропных оболочек.

Оболочкой называют трехмерные тела, ограниченные двумя поверхностями, линейные размеры которых значительно превышают расстояние между ними. Это расстояние называется толщиной оболочки. Обозначим толщину оболочки через h и будем считать её постоянной.

Под теорией оболочек типа Тимошенко будем понимать теории, которые приводят в общем случае к решению гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных десятого порядка. Число публикаций по

данной проблеме чрезвычайно велико и достаточно полные сведения приведены в обзорных работах [2], [3], [4], [5].

Будем полагать, что материал каждого слоя оболочки в процессе деформации остается упругим и подчиняется обобщенному закону Гука для анизотропного тела. Учет анизотропии материала является одним из существенных моментов, поскольку в нашей модели [6] анизотропные свойства цилиндрической оболочки обладают анизотропными свойствами естественного несущего слоя и не несущего слоя горного массива.

Отнесем срединную поверхность S недеформированной оболочки к ортогональной системе координат α_1, α_2 с коэффициентами Ляме A_1 и A_2 . После деформации S преобразуется в новую поверхность S_* , точки которой будем определять теми же криволинейными координатами α_1 и α_2 , но не ортогональными. Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S_* обозначим через A_1^*, A_2^* и λ^* , где λ^* - угол между α_1 и α_2 на S . Нормальные кривизны k_{11} и k_{12} поверхности S в направлениях α_1 и α_2 и кручение этой поверхности k_{12} определяется через коэффициенты второй квадратичной формы b_{ij} по формулам: $k_{ij} = -b_{ij} : A_i A_j$. Вместо нормальной кривизны и кручения поверхности S_* введем величины, пропорциональные им: $k_{ij}^* = -b_{ij}^* : A_i A_j$, где b_{ij}^* - коэффициенты второй квадратичной формы этой поверхности. Компоненты тангенциальной деформации ε_{ij} и изгибной деформации определяются формулами Х.М.Муштари [26]:

$$A_i^* = A_i (1 + 2\varepsilon_{ij})^{1/2}, \quad A_1^* A_2^* \cos \lambda^* = 2A_1 A_2 \varepsilon_{12}, \quad x_{ij} = k_{ij}^* - k_{ij} \quad (1.1)$$

Здесь и далее все индексы принимают значения 1 и 2.

Введем обозначения: u_1 и u_2 - перемещения в направлениях осей α_1 и α_2 ; w - прогиб; l_{ij} , ω_i , E_1 и E_3 - углы поворота координат оболочки в процессе деформации:

$$l_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_{11} w, \quad l_{12} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_{12} w, \quad (1.2)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - k_{11} u_1 - k_{12} u_2, \quad E_1 = l_{12} \omega_2 - (1 + l_{22}) \omega_1, \quad E_2 = (1 + l_{11})(1 + l_{22}) - l_{12} l_{21},$$

Пользуясь обозначениями (1.1) для компонентов конечных тангенциальных деформаций поверхности можем получить формулы [26].

$$2\varepsilon_{ij} = l_{ik} + l_{ki} + l_{i1} l_{k1} + l_{i2} l_{k2} + \omega_i \omega_k \quad (1.3)$$

Компоненты конечных изгибов при произвольных деформациях можно вывести также как в монографии [7], но нужно воспользоваться тождествами:

$$\begin{aligned} E_1 l_{12} - E_2 (1 + l_{11}) &= (1 + 2\varepsilon_{11}) \omega_2 - 2\varepsilon_{12} \omega_1 = F_{12}, \\ \omega_1 E_1 - (1 + l_{11}) E_3 &= 2\varepsilon_{12} l_{12} - (1 + 2\varepsilon_{11})(1 + l_{22}) = G_{12}, \\ \omega_1 E_2 - E_3 l_{12} &= (1 + 2\varepsilon_{11}) l_{21} - 2\varepsilon_{12} (1 + l_{11}) = H_{12} \end{aligned} \quad (1.4)$$

При этих обозначениях выражения кривизны координатных линий после деформации будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
k_{11}^* J^{1/2} &= -A_1^{-1} \left(E_1 \frac{\partial l_{11}}{\partial \alpha_1} + E_2 \frac{\partial l_{12}}{\partial \alpha_1} + E_3 \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{F_{12}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - k_{11} G_{12} - k_{12} H_{12}, \\
k_{12}^* J^{1/2} &= -A_1^{-1} \left(E_1 \frac{\partial l_{21}}{\partial \alpha_1} + E_2 \frac{\partial l_{22}}{\partial \alpha_1} + E_3 \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{F_{21}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - k_{11} H_{21} - k_{12} G_{21}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь J - инвариант, связанный с относительным изменением площади поверхности ΔS соотношением $J = (1 + \Delta S)^2$, где $J = 1 + 2J_1 + 4J_4$, $J_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$, $J_4 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2$

Формулы (1.5) несколько упрощаются для малых деформаций, т.е. при пренебрежении удлинениями и сдвигом по сравнению с единицей, так как тогда можно положить $J = 1$, $F_{12} = \omega_2$, $G_{12} = -1 - l_{22}$, $H_{12} = l_{21}$. Если допустимо пренебрежение квадратами удлинений и квадратом сдвига по сравнению с единицей, то такую теорию назовем квадратичной. В этом случае величина $\Delta s \ll 1$ и ею можно пренебречь по сравнению с единицей. Следовательно, в формулах (1.5) можно положить $J=1$. Это упрощение допустимо также при произвольных деформациях, так как при этом можно пренебречь относительным изменением объема Δ по сравнению с единицей для всех материалов. Тогда при принятии гипотезы Кирхгоффа-Лява это приводит к равенству $J = 1$.

1.2 Условия неразрывности конечных деформаций.

Линеаризация уравнений устойчивости нелинейной теории

Символы Кристоффеля деформированной поверхности $\tilde{A}_{jk}^{*i}$ выражаются формулами

$$\begin{aligned}
J \tilde{A}_{11}^{*1} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\varepsilon_{12}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1^{*2}}{\partial \alpha_2} - \frac{4\varepsilon_{12}}{A_2} \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}}{\partial \alpha_1} + (1 + 2\varepsilon_{22}) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \alpha_1}, \\
J \tilde{A}_{11}^{*2} &= \frac{2A_1 \varepsilon_{12}}{A_2} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{2A_1^{*2}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{A_1^*}{A_1 A_2} \right)^2 \frac{\partial A_1^{*2}}{\partial \alpha_2}, \\
J \tilde{A}_{12}^{*2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_1^*}{A_1 A_2} \right)^2 \frac{\partial A_2^{*2}}{\partial \alpha_1} - \frac{\varepsilon_{12}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1^{*2}}{\partial \alpha_2}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь A_1^* , A_2^* вносятся из (1.1). Приращение символов Кристоффеля при деформации

$A_{jk}^i = \tilde{A}_{jk}^{*i} - \tilde{A}_{jk}^i$ определяются из формул:

$$\begin{aligned}
JA_{11}^1 &= A_2^{-1} \varepsilon_{12} \left(A_1^{-1} \frac{\partial A_1^{*2}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}}{\partial \alpha_1} \right) + (1 + 2\varepsilon_{22}) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \alpha_1}, \\
JA_2^2 A_{11}^2 &= A_1 \left(J \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - 2A_2 \varepsilon_{12} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \alpha_1} \right) + (1 + 2\varepsilon_{11}) \left(2A_1 \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_1^{*2}}{\partial \alpha_2} \right), \\
JA_{12}^2 &= (1 + 2\varepsilon_{11}) \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \alpha_1} - \frac{\varepsilon_{12}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1^{*2}}{\partial \alpha_2} + \frac{4\varepsilon_{12}^2}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Подставляя (1.6) в формулу Гаусса для s . [8]

$$A_1 A_2 (k_{11}^* k_{22}^* - k_{12}^{*2}) J^{1/2} = J \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_2 J^{1/2} \tilde{A}_{11}^{*2}}{A_1 (1 + 2\varepsilon_{11})} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2 J^{1/2} \tilde{A}_{12}^{*2}}{A_1 (1 + 2\varepsilon_{11})} \right) \right]$$

и воспользовавшись той же формулой для s , получим одно из условий неразрывности конечных деформаций оболочки

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \left[(k_{11}^* k_{22}^* - k_{12}^{*2}) J^{1/2} + k_{12}^2 - k_{11} k_{22} \right] = J \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2 J^{1/2}} \left[2 \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{2 A_1} \frac{\partial A_1^{*2}}{\partial \alpha_2} - \right. \right. \\ \left. - A_2 \varepsilon_{12} \frac{\partial \ln(1 + 2\varepsilon_{11})}{\partial \alpha_1} + J^{1/2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1 J^{1/2}} \left[\frac{1}{2 A_2} \frac{\partial A_2^{*2}}{\partial \alpha_1} - \right. \\ \left. - 2 \varepsilon_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - A_1 \varepsilon_{12} \frac{\partial \ln(1 + 2\varepsilon_{11})}{\partial \alpha_2} - J^{1/2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Другая форма этого условия получится перестановкой индексов 1 и 2. Положив в (1.6) $J = 1$, $k_{ij}^* = k_{ij} + \chi_{ij}$, получим окончательную формулу. Третья метрическая форма получится, если произвести симметризацию (1.8).

В работе [9] формула Гауссовой кривизны, выведенная Бибербахом, взята с опечаткой в виде:

$$A_1 A_2 (k_{11}^* k_{22}^* - k_{12}^{*2}) J^{1/2} = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_2 J \tilde{A}_{11}^{*2}}{A_1 (1 + 2\varepsilon_{11})} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2 J \tilde{A}_{12}^{*2}}{A_1 (1 + 2\varepsilon_{11})} \right)$$

и на основании чего были допущены неточности при выводе уравнения неразрывности деформации (1.8).

Вычитая из уравнений Кодаци для s

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1 A_2 k_{12}^*}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1^2 k_{11}^*}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 k_{12}^* \left(\tilde{A}_{11}^{*2} - \tilde{A}_{12}^{*2} \right) + \\ + A_1^2 k_{11}^* \tilde{A}_{12}^{*2} - A_2^2 k_{22}^* \tilde{A}_{11}^{*2} = 0 \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix} \end{aligned}$$

соответствующие уравнения для s , и воспользовавшись (1.1) и (1.6) получим еще два условия неразрывности конечных деформаций оболочки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2 \chi_{12}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1^2 \chi_{11}}{\partial \alpha_2} + \chi_{12} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \chi_{22} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 A_{12}^1 k_{11}^* - A_2 k_{12}^* (A_{11}^1 - A_{12}^2) - \\ - A_1^{-1} A_2^2 k_{22}^* A_{11}^2 = 0 \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Смешанные компоненты второго метрического тензора b_k^{*i} поверхности s определяются формулами:

$$J b_1^{*1} = 2\varepsilon_{12} k_{12}^* - (1 + 2\varepsilon_{22}) k_{11}^*, \quad J b_2^{*1} A_1 A_2^{-1} = 2\varepsilon_{12} k_{22}^* - (1 + 2\varepsilon_{22}) k_{12}^* \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix} \quad (1.10)$$

При исследовании устойчивости оболочки используются нелинейные уравнения равновесия. Они составляются с учетом изменения срединной поверхно-

сти оболочки под действием нагрузки. Обычно учитываются только повороты линейных элементов срединной поверхности оболочки [10], [11]. В некоторых случаях, например, для цилиндрических оболочек приходится учитывать так же удлинения [12]. Уравнения равновесия оболочки произвольной формы с учетом поворотов и удлинений линейных элементов ее срединной поверхности выведены в Муштари-Галимова. Такого рода уравнения с учетом сдвига срединной поверхности приведены в [13]. В работе Галимова К.З. были получены общие уравнения равновесия оболочки произвольной формы с учетом поворотов, удлинений и сдвигов при больших деформациях и изгибах, отнесенные к ортогональным координатам срединной поверхности с недеформированной оболочки в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_2 T^{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 T^{21}}{\partial \alpha_2} + T^{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T^{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \\ & + A_1^2 A_2 \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^2 A_{ik}^1 A_i^{-1} A_k^{-1} T^{ik} - A_i^{-1} b_i^{*1} N^i \right) + A_1 A_2 \mathfrak{N}^1 = 0 \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix} \\ & \frac{\partial A_2 N^1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 N^2}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 T^{ij} k_{ij}^* - \mathfrak{N}^3 \right) = 0; \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_2 M^{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M^{21}}{\partial \alpha_2} + M^{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - M^{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \\ & + A_1^2 A_2 \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 A_{ik}^1 (A_i A_k)^{-1} M^{ik} + A_1 A_2 (L^1 - N^1) = 0 \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$T^{12} - T^{21} + \sum A_i^{-1} (A_2 b_i^{*2} M^{i1} - A_1 b_i^{*1} M^{i2}) = 0, \quad (1.13)$$

где A_{jk}^i, b_k^{*j} следует подставить из (1.7) и (1.10); T^{ik}, M^{ik} - усилия и моменты, а N^i - перерезывающие усилия, определяемые по обычным формулам

$$\begin{aligned} T^{ik} &= A_i A_k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} \sum_{j=1}^2 \frac{\sigma_*^{ij}}{H_i H_j} (\sigma_j^k - z_* b_j^{*k}) \partial z_*, \\ M^{ik} &= A_i A_k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} \sum_{j=1}^2 \frac{\sigma_*^{ij}}{H_i H_j} (\sigma_j^k - z_* b_j^{*k}) z_* \partial z_*, \\ N^i &= A_i \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} \frac{\sigma_*^{k3}}{H_k} \partial z_*, \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь суммирование по i и k не производится; H_1, H_2 — коэффициенты Ляме недеформированной оболочки, $\delta_*^{ij}, \delta_*^{k3}$ - обобщенные напряжения В.В. Новожилова. Формулировка геометрических и смешанных граничных условий в компонентах деформаций дана в работе [27]. Здесь они не приводятся.

Следовательно, на наш взгляд уравнения (1.11) – (1.13) есть наиболее общие уравнения равновесия оболочки при больших деформациях и изгибах при использовании гипотезы Кирхгофа-Лява.

Тем не менее, в литературе существуют многочисленные варианты общих уравнений равновесия гибких оболочек, причем каждый раз авторы претендуют на предложения новых уравнений, которые, вообще говоря, либо являются частными случаями известных уравнений, либо совпадают с ними, либо отличаются от них только тем, что записаны в другой координатной системе.

В виду этого мы решили более подробно остановиться на некоторых из них и линеаризировать их в смысле Новожилова. Для чего запишем систему (1.11)-(1.13) относительно координатной системы, отнесенной к ортогональным координатам срединной поверхности деформированной оболочки

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_2^* T_{11}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1^* T_{21}^*}{\partial \alpha_2} + T_{12}^* \frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2} - T_{22}^* \frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_1} + \\ & + A_1^{*2} A_2^* \sum_{i=1}^2 \left[A_i^{*-1} \left(\sum_{k=1}^2 B_{ik}^1 A_k^{*-1} T_{ik}^* - b_i^{*1} N_i^* \right) + A_1^* A_2^* \sin \aleph^* X_1^* \right] = 0 \quad \vec{1,2} \leftarrow \\ & \frac{\partial A_2^* N_1^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1^* N_2^*}{\partial \alpha_2} - A_1^* A_2^* \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 T_{ij}^* k_{ij}^* - \sin \aleph^* X_3^* \right) = 0; \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_2^* M_{11}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1^* M_{21}^*}{\partial \alpha_2} + M_{12}^* \frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2} - M_{22}^* \frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_1} + \\ & + A_1^{*2} A_2^* \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 B_{ik}^1 (A_i^k A_k^*)^{-1} M_{ik}^* + A_1^* A_2^* (\sin \chi^* L_1^* - N_1^*) = 0 \quad \vec{1,2} \leftarrow \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$T_{12}^* - T_{21}^* + \sum_{i=1}^2 2 A_i^{*-1} (A_2^* b_i^{*2} M_{i1}^* - A_1^* b_i^{*1} M_{i2}^*) = 0, \quad (1.17)$$

где $B_{ik}^j = \Gamma_{ik}^{*j} - \overline{\Gamma_{ik}^j}$, $\overline{\Gamma_{ik}^j}$ - символы Кристоффеля для деформированной оболочки, отнесенные к ортогональным криволинейным координатам срединной поверхности s_* , L_i^* , - проекции векторов координат на деформированной срединной поверхности. Здесь для проекций векторов усилий и моментов введены обозначения В.В. Новожилова.

$$T_{ik}^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{ik}^* \partial z_*, \quad M_{ik}^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}^{*z} \partial z_* \quad N_i^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{iz}^* \partial z_* \quad (1.18)$$

где $\bar{\delta}_{ik}$, $\bar{\delta}_{iz}$ - составляющие напряжения $\bar{\delta}_{\alpha_1}$, $\bar{\delta}_{\alpha_2}$ по направлениям единичных векторов k_1 , k_2 , k_3 срединной поверхности по деформации s .

Сделаем следующие предположения относительно системы (1.1)-(1.7).

- 1). Удлинения, сдвиги малы по сравнению с единицей, причем будем учитывать удлинения, сдвиг и поворот срединной поверхности;
- 2). Удлинения, сдвиги малы по сравнению с единицей, учитываем удлинения и поворот срединной поверхности;

3). Удлинения, сдвиги малы по сравнению с единицей, учитываем только поворот срединной поверхности;

4). Удлинения, сдвиги и углы поворотов малы по сравнению с единицей, учитываем только поворот срединной поверхности.

Если воспользуемся первым предложением, то имеем:

$$\begin{aligned} J = 1, F_{12} = \omega_2, G_{12} = -1 - l_{22}, H_{12} = l_{21}, \cos \chi^* = 2\varepsilon_{12} = \omega, \\ \sin \chi^* = 1, A_i^* = A_i(1 + \varepsilon_{ij}), b_1^{*1} = k_{12}^* \omega - k_{11}^*, \frac{A_2^*}{A_1^*} b_1^{*2} = k_{11}^* \omega - k_{12}^*, \\ B_{11}^1 = \frac{\omega}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, B_{12}^2 = -\frac{\omega}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, B_{22}^1 = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial A_1 \omega}{\partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

где k_{ij}^* будут определяться формулами работы Муштари-Галимова. Тогда подставляя (1.19) в (1.15)-(1.17) и отнеся поверхностные силы к двум возможным случаям: поверхностная нагрузка консервативная и она же следящая, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [T_{11}^* A_2 (1 + \varepsilon_{22})] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [T_{21}^* A_1 (1 + \varepsilon_{11})] + T_{12}^* \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (1 + \varepsilon_{11}) A_1 - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega - \\ & - T_{22}^* \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (1 + \varepsilon_{22}) A_2 - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \omega \right] + T_{11}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega - T_{21}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} \omega - \\ & - N_1^* A_1 A_2 (k_{12}^* \omega - k_{11}^*) + N_2^* A_1 A_2 (k_{11}^* \omega - k_{21}^*) + \\ & + X_1 A_1 A_2 (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 A_2 (X \omega_1 - X_2 k_{12}) = 0, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix} \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [N_1^* A_2 (1 + \varepsilon_{22})] + [N_2^* A_1 (1 + \varepsilon_{11})] + T_{11}^* A_1 A_2 (k_{12}^* \omega - k_{11}^*) - \\ & - k_2^* A_1 A_2 (T_{12}^* + T_{21}^*) + T_{22}^* A_1 A_2 (k_{21}^* \omega - k_{22}^*) + \\ & + A_1 A_2 (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 A_2 (X_1 \omega_1 - X_2 \omega_2) = 0, \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [M_{11}^* A_2 (1 + \varepsilon_{22})] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [M_{21}^* A_1 (1 + \varepsilon_{11})] - M_{22}^* \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (1 + \varepsilon_{22}) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega \right] + \\ & + M_{12}^* \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (1 + \varepsilon_{11}) A_1 - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \omega \right] + M_{21}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega - M_{11}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega + \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} & + A_1 A_2 (L_1^* - N_1^*) (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = 0, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix} \\ & - (M_{11}^* - M_{22}^*) k_{12}^* - M_{12}^* (k_{12}^* \omega - k_{11}^*) + M_{21}^* (k_{21}^* \omega - k_{22}^*) + (T_{12}^* - T_{21}^*) = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Эта система уравнений полностью совпадает с уравнениями равновесия оболочки, предложенными В.М.Даревским [68]; если в (1.21) не будем учитывать момент внешних сил как величину третьего порядка малости и положим $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i$. Если воспользуемся вторым предположением, то имеем:

$$\begin{aligned} J = 1, F_{12} = w_2, G_{12} = -1 - l_{22}, H_{12} = l_{21}, \cos \chi^* = 2\varepsilon_{12} = \omega = 0, \\ \sin \chi^* = 1, A_i^* = A_i(1 + \varepsilon_{ij}), b_1^{*1} = -k_{11}^*, \frac{A_2^*}{A_1^*} b_1^{*2} = -k_{12}^*, B_{11}^* = B_{12}^* = B_{22}^* = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Тогда, подставляя (1.23) в (1.15) и (1.17) или полагая $w=0$ в (1.20)- (1.22), получим:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [T_{11}^* A_2^*] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [T_{21}^* A_1^*] + T_{12}^* \frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2} - T_{22}^* \frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 (N_1^* k_{11}^* + N_2^* k_{12}^* + \chi_1^*) = 0, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [N_1^* A_2^*] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [N_2^* A_1^*] - (T_{11}^* k_{11}^* + T_{22}^* k_{22}^* + T_{12}^* k_{12}^* + T_{21}^* k_{21}^* - \chi_3^*) A_1 A_2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [M_{11}^* A_2^*] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [M_{21}^* A_1^*] + M_{12}^* \frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2} - M_{22}^* \frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_1} \omega + A_1 A_2 (L_1^* + N_1^*) = 0, \quad (1.25)$$

$$T_{12}^* + T_{21}^* + M_{12}^* k_{11}^* + M_{21}^* k_{22}^* - k_{12}^* (M_{11}^* - M_{22}^*) = 0. \quad (1.26)$$

Система (1.24)-(1.26) есть уравнения равновесия оболочки в координатной системе на s_* , выведенные К.З.Галимовым и Х.М.Муштари [26].

Если воспользуемся третьим предположением, то имеем:

$$\begin{aligned} J = 1, F_{12} = w_2, G_{12} = -1 - l_{22}, H_{12} = l_{21}, \cos \chi^* = \omega = 0, \\ \sin \chi^* = 1, A_i^* = A_i, b_1^{*1} = -k_{11}^*, \frac{A_2^*}{A_1^*} b_1^{*2} = -k_{12}^*, B_{11}^1 = B_{12}^2 = B_{22}^1 = 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Тогда, подставляя (1.27) в (1.15) и (1.17) или в (1.20)-(1.22), получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [T_{11}^* A_2] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [T_{21}^* A_1] + T_{12}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T_{22}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 (N_1^* k_{11}^* + N_2^* k_{12}^* + \chi_1^*) = 0, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [N_1^* A_2] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [N_2^* A_1] - (T_{11}^* k_{11}^* + T_{22}^* k_{22}^* + T_{12}^* k_{12}^* + T_{21}^* k_{21}^* - \chi_3^*) A_1 A_2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [M_{21}^* A_2] + \frac{\partial M_{12}^*}{\partial \alpha_2} - M_{22}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 (L_1^* - N_1^*) = 0, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad (1.29)$$

$$T_{12}^* - T_{21}^* + M_{12}^* k_{11}^* - M_{21}^* k_{22}^* - k_{12}^* (M_{11}^* - M_{22}^*) = 0. \quad (1.30)$$

Система (1.24)-(1.26) есть уравнения равновесия оболочки в координатной системе на S_* , приведенные в работах А. Лява, А.С. Вальмира.

Пусть срединная поверхность S недеформированной оболочки задана криволинейными координатами α, β а,р, причем $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ ее линии кривизны.

Тогда из (1.28)-(1.30) для малых деформаций имеем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BT_{11}^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AT_{21}^*) + T_{12}^* \frac{\partial A}{\partial \beta} - T_{22}^* \frac{\partial B}{\partial \alpha} + ABK_1 N_1^* + ABX_1^* = 0, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix} \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial BN_1^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial AN_2^*}{\partial \beta} - AB(K_1 T_{11}^* + K_2 T_{22}^* - X_3^*) = 0;$$

$$\frac{\partial BM_{11}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial AM_{21}^*}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{12}^* - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{22}^* - AB(N_1^* - L_1^*) = 0, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix} \quad (1.32)$$

$$T_{12}^* - T_{21}^* + M_{12}^* K_1 - M_{21}^* K_2 = 0. \quad (1.33)$$

Если использовать приведенные уравнения равновесия оболочки (1.15)-(1.17) для исследования устойчивости и принять, как обычно делается, что потеря устойчивости обусловлена только действием тангенциальных усилий T_{ij}^* , то в них можно отбросить компоненты деформации в коэффициентах при моментах и перерезывающих усилиях N_1^* , N_2^* . Если с помощью двух последних уравнений исключим N_1^* , N_2^* в первых трех уравнениях, то получим систему трех уравнений, для которых перемещения, деформации, повороты, усилия и моменты представим в виде:

$$u_i = u_i^0 + \alpha u_i^1, \quad l_{ij} = l_{ij}^0 + l_{ij}^1 \alpha, \quad \omega_i = \omega_i^0 + \alpha \omega_i^1, \dots \quad (1.34)$$

$$T_{ij}^* = T_{ij}^0 + \alpha T_{ij}^1, \quad M_{ij}^* = M_{ij}^0 + \alpha M_{ij}^1, \quad K_{ij}^* = K_{ij}^0 + \alpha K_{ij}^1,$$

Здесь первые слагаемые соответствуют так называемому основному напряженному состоянию, а вторые являются дополнительными величинами. Будем далее пренебрегать всеми величинами, содержащими множитель α , степень которых выше первой. Тогда уравнения возмущенного состояния тонкой оболочки в системе координат на s_* будут такими:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} T_{11}'^* A_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} T_{21}'^* A_1 + T_{12}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} A_2 - T_{22}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} M_{21}'^* A_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} M_{11}'^* A_2 - \right. \\ & \left. - M_{22}'^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12}'^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} T_{11}^0 A_2 \varepsilon_{22}' + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} T_{21}^0 A_2 \varepsilon_{11}' + T_{12}^0 \left(\frac{\partial A_1 \varepsilon_{11}'}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega' \right) - \\ & - T_{22}^0 \left(\frac{\partial A_2 \varepsilon_{22}'}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} \omega' \right) + T_{11}^0 \frac{\partial A_1 \omega'}{\partial \alpha_2} - T_{21}^0 \frac{\partial A_2 \omega'}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} T_{11}'^* A_2 \varepsilon_{22}^0 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} T_{21}'^* A_1 \varepsilon_{11}^0 + \\ & + T_{12}'^* \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \varepsilon_{11}^0 - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \omega^0 \right) - T_{22}'^* \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \varepsilon_{22}^0 - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \omega^0 \right) + T_{11}'^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega^0 - T_{21}'^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega^0 = \\ & = -A_1 A_2 \left(\Delta X_1' + \frac{1}{R} \Delta L_1' \right), \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_{11}' \frac{A_1 A_2}{R_1} + T_{22}' \frac{A_1 A_2}{R_2} + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} M_{21}'^* A_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} M_{11}' A_2 - M_{21}' \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12}'^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} M_{12}'^* A_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} M_{22}' A_1 - M_{11}' \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M_{21}'^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) - \\
& - A_1 A_2 \left(T_{11}^0 K_{11}' + T_{12}^0 K_{12}' + T_{21}^0 K_{21}' + T_{22}^0 K_{22}' \right) - \\
& - A_1 A_2 \left(T_{11}' K_{11}^0 + T_{12}' K_{12}^0 + T_{21}' K_{21}^0 + T_{22}' K_{22}^0 \right) + A_1 A_2 \Delta X_3' = 0. \quad (1.35)
\end{aligned}$$

$$(B_{11}^1)' = (A_{11}^1)' + 2\varepsilon_{11}' \frac{\partial \varepsilon_{11}^0}{\partial \alpha_1} - (1 + 2\varepsilon_{11}^0) \frac{\partial \varepsilon_{11}'}{\partial \alpha_1}, \quad (B_{12}^2)' =$$

$$= (A_{12}^2)' - (1 + 2\varepsilon_{22}^0) \frac{\partial \varepsilon_{22}'}{\partial \alpha_1} + \varepsilon_{22}' \frac{\partial \varepsilon_{22}^0}{\partial \alpha_1},$$

$$(B_{11}^2)' = (A_{11}^2)' + \frac{4A_1}{A_2^2} (\varepsilon_{11}' \varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{11}^0 \varepsilon_{22}') + \frac{A_1^2}{A_2^2} \left[\frac{\partial \varepsilon_{11}'}{\partial \alpha_2} - \varepsilon_{22}' \frac{\partial \varepsilon_{11}^0}{\partial \alpha_2} + 2\varepsilon_{22}' \frac{\partial \varepsilon_{11}^0}{\partial \alpha_2} \right],$$

$$(A_{11}^1)' = \frac{J'}{J^{02}} \left\{ \left[A_2^{-1} \varepsilon_{12}^0 \left[\frac{\partial A_1^2 (1 + 2\varepsilon_{11}^0)}{\partial \alpha_2} - 4 \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}^0}{\partial \alpha_1} \right] + (1 + 2\varepsilon_{22}^0) \frac{\partial \varepsilon_{11}^0}{\partial \alpha_1} \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{J^0} \left\{ A_2^{-1} A_1^{-1} \left[2\varepsilon_{12}^0 \frac{\partial A_1^2 \varepsilon_{11}'}{\partial \alpha_2} + \varepsilon_{12}' \frac{\partial A_1^2 (1 + 2\varepsilon_{11}^0)}{\partial \alpha_2} \right] - \right.$$

$$\left. - 4A_2^{-1} \left[\varepsilon_{12}^0 \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}'}{\partial \alpha_1} + \varepsilon_{12}' \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}^0}{\partial \alpha_1} \right] + (1 + 2\varepsilon_{22}^0) \frac{\partial \varepsilon_{11}'}{\partial \alpha_1} + 2\varepsilon_{11}' \frac{\partial \varepsilon_{11}^0}{\partial \alpha_1} \right\},$$

$$(A_{12}^1)' = \frac{J'}{J^{02}} \left[(1 + 2\varepsilon_{11}^0) \frac{\partial \varepsilon_{22}^0}{\partial \alpha_1} - \frac{\varepsilon_{12}^0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1^2 (1 + 2\varepsilon_{11}^0)}{\partial \alpha_2} + 4 \frac{\varepsilon_{12}^{02} \partial A_2}{A_2 \partial \alpha_1} \right] +$$

$$+ \frac{1}{J^0} \left\{ (1 + 2\varepsilon_{11}^0) \frac{\partial \varepsilon_{22}'}{\partial \alpha_1} + 2\varepsilon_{22}' \frac{\partial \varepsilon_{22}^0}{\partial \alpha_1} - \right.$$

$$\left. A_2^{-1} A_1^{-1} \left[\varepsilon_{12}' \frac{\partial A_1^2 (1 + 2\varepsilon_{11}^0)}{\partial \alpha_2} + 2\varepsilon_{12}^0 \frac{\partial A_1^2 \varepsilon_{11}'}{\partial \alpha_2} + \right] + 8A_2^{-1} \varepsilon_{12}^0 \varepsilon_{12}' \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right\},$$

$$\begin{aligned}
(A_{11}^2)' &= \frac{J'}{J^{02}} \{ (1 + 2\varepsilon_{11}^0) [2A_1 \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}^0}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_1^2 (1 + 2\varepsilon_{11}^0)}{\partial \alpha_2} - 4] - \\
&- 2A_1 A_2^{-1} \varepsilon_{12}^0 \frac{\partial \varepsilon_{11}^0}{\partial \alpha_1} \} + \frac{1}{J^0} \{ 2A_1 [(1 + 2\varepsilon_{11}^0) + \\
&+ \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}'}{\partial \alpha_1} + 2\varepsilon_{11}' \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}^0}{\partial \alpha_1}] - (1 + 2\varepsilon_{11}^0) \frac{\partial A_2 \varepsilon_2'}{\partial \alpha_2} - \\
&- \varepsilon_{11}') \frac{\partial A_1^2 (1 + 2\varepsilon_{11}^0)}{\partial \alpha_2} - 2A_1 A_2^{-1} \left(\varepsilon_{12}' \frac{\partial \varepsilon_{11}^0}{\partial \alpha_1} + \varepsilon_{12}^0 \frac{\partial \varepsilon_{11}'}{\partial \alpha_1} \right) \}, \overset{\rightarrow}{1}, \overset{\leftarrow}{2}
\end{aligned} \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}' &= \ell_{11}' + \ell_{11}^0 \ell_{11}' + \ell_{12}^0 \ell_{12}' + \omega_1^0 \omega_1', \\
2\varepsilon_{12}' &= \ell_{12}' + \ell_{21}' + \ell_{11}^0 \ell_{21}' + \ell_{12}^0 \ell_{22}' + \ell_{12}' \ell_{22}^0 + \omega_1^0 \omega_2' + \omega_1' \omega_2^0, \\
j' &= 2(\varepsilon_{11}' + \varepsilon_{22}' + 2\varepsilon_{11}' \varepsilon_{22}^0 + 2\varepsilon_{11}^0 \varepsilon_{22}' - 4\varepsilon_{12}^0 \varepsilon_{12}'), \\
E_1' &= \ell_{12}^0 \omega_2^1 + \ell_{12}' \omega_2^0 - (1 + \ell_{22}^0) \omega_1' - \ell_{22}^0 \omega_1', \\
E_3' &= (1 + \ell_{11}^0) \ell_{22}' + (1 + \ell_{22}^0) \ell_{11}' - \ell_{12}' \ell_{21}^0 - \ell_{12}^0 \ell_{21}', \\
F_{12}' &= (1 + \varepsilon_{11}^0) \omega_2' + 2\varepsilon_{11}' \omega_2^0 - 2\varepsilon_{12}^0 \omega_1' - 2\varepsilon_{12}' \omega_1^0, \\
G_{12}' &= 2\varepsilon_{12}^0 \ell_{12}' + 2\varepsilon_{12}' \ell_{12}^0 - (1 + 2\varepsilon_{11}) \ell_{22}^0 - 2\ell_{11} (1 + \ell_{22}^0), \\
H_{12}' &= (1 + \varepsilon_{11}^0) \ell_{12}' + 2\varepsilon_{11}' \ell_{21}^0 - 2\varepsilon_{12}' (1 + 2\varepsilon_{11}^0) \ell_{22}^0 - 2\varepsilon_{12}^0 \ell_{11}',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{11}^{*'} &= \frac{j'}{2J^0 J^{0\frac{1}{2}}} [A_1^{-1} \left(E_1^0 \frac{\partial \ell_{11}^0}{\partial \alpha_1} + E_2^0 \frac{\partial \ell_{12}^0}{\partial \alpha_1} + E_3^0 \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{F_{12}^0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + K_{11} G_{12}^0 + K_{12} H_{12}^0] \\
&- \frac{1}{J^{0\frac{1}{2}}} [A_1^{-1} \left(E_1^0 \frac{\partial \ell_{11}'}{\partial \alpha_1} + E_1' \frac{\partial \ell_{11}^0}{\partial \alpha_1} + E_2' \frac{\partial \ell_{12}^0}{\partial \alpha_1} + E_3^0 \frac{\partial \omega_1'}{\partial \alpha_1} + E_3' \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \alpha_1} \right) + \\
&+ \frac{F_{12}'}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + K_{11} G_{12}' + K_{12} H_{12}'] , \\
K_{12}^{*'} &= \frac{j'}{2J^0 J^{0\frac{1}{2}}} [A_1^{-1} \left(E_1^0 \frac{\partial \ell_{21}^0}{\partial \alpha_1} + E_2^0 \frac{\partial \ell_{22}^0}{\partial \alpha_1} + E_3^0 \frac{\partial \omega_2^0}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{F_{21}^0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + K_{12} G_{21}^0 + K_{11} H_{21}^0] - \\
&- \frac{1}{J^{0\frac{1}{2}}} [A_1^{-1} \left(E_1^0 \frac{\partial \ell_{21}'}{\partial \alpha_1} + E_2^0 \frac{\partial \ell_{22}^0}{\partial \alpha_1} + E_3^0 \frac{\partial \omega_2^0}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{F_{21}^0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + K_{12} G_{21}^0 + K_{11} H_{21}^0] -
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{J^{0/2}}[A_1^{-1}(E_1^0 \frac{\partial \ell'_{21}}{\partial \alpha_1} + E_1' \frac{\partial \ell_{21}^0}{\partial \alpha_1} + E_2^0 \frac{\partial \ell_{22}^0}{\partial \alpha_1} + E_3^0 \frac{\partial \omega'_2}{\partial \alpha_1} + E_3' \frac{\partial \omega_2^0}{\partial \alpha_1}) - \frac{F'_{21}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} + K_{12} G'_{21} + K_{11} H'_{21}] \overset{\rightarrow}{1,2} \underset{\leftarrow}{} \quad (1.37)$$

Величины $\varepsilon_{ij}^0, E_i^0, E_3^0, F_{12}^0, G_{12}^0, H_{12}^0, K_{ij}^0, (A_{ij}^K)^0, T_{ij}^0, \dots, \dots$ определяются формулами (1.3)-(1.6). Если воспользуемся первым предположением 3, то из (1.35)-

$$(1.37) \text{ получим: } \frac{\partial}{\partial \alpha_1} T_{11}'^* A_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} T_{21}'^* A_1 + T_{12}'^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T_{22}'^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} -$$

$$- \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} M_{21}'^* A_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} M_{11}'^* A_2 - M_{22}'^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + T_{12}'^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} T_{11}^0 A_2 \varepsilon'_{22} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} T_{21}^0 A_2 \varepsilon'_{11} + T_{12}^0 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \varepsilon'_{11} - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \omega' \right) -$$

$$- T_{22}^0 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \varepsilon'_{22} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \omega' \right) + T_{11}^0 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \omega' - T_{21}^0 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \omega' + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} T_{11}'^* A_2 \varepsilon_{22}^0 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} T_{21}'^* A_1 \varepsilon_{11}^0 + T_{12}'^* \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \varepsilon_{11}^0 - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \omega' \right) - T_{22}'^* \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \varepsilon_{22}^0 - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \omega' \right) +$$

$$T_{11}'^* \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \omega^0 - T_{21}'^* \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \omega^0 + A_1 A_2 \left(\Delta X'_1 + \frac{1}{R} \Delta L'_1 \right), \quad \overset{\rightarrow}{1,2} \underset{\leftarrow}{} \quad (1.38)$$

$$T_{11}'^* \frac{A_1 A_2}{R_1} + T_{22}'^* \frac{A_1 A_2}{R_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} M_{21}'^* A_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} M_{11}'^* A_2 - M_{21}'^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12}'^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} M_{12}'^* A_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} M_{22}'^* A_1 - M_{11}'^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M_{21}'^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) - A_1 A_2 \times$$

$$\times \left(T_{11}^0 K_{11}'^* + T_{12}^0 K_{12}'^* + T_{21}^0 K_{21}'^* + T_{22}^0 K_{22}'^* \right) - A_1 A_2 \left(T_{11}'^* K_{11}^0 + T_{12}'^* K_{12}^0 + T_{22}'^* K_{22}^0 \right) + A_1 A_2 \Delta X'_3 \quad (1.38)$$

Вводим для тангенциальных усилий, определяемых ε_{ij} обозначения T_{i,S_i}^* и, используя формулы (1.3), на основании закона Гука будем иметь:

$$\begin{aligned}
T_{11}'^* &= T_1' = T_1' + \frac{Eh}{1-\nu^2} (l_{11}^0 l_{11}' + l_{12}^0 l_{12}' + \varpi_1^0 \varpi_1' + \nu l_{22}^0 l_{22}' + \nu l_{21}^0 l_{21}' + \nu \varpi_2^0 \varpi_2'), \\
T_{12}'^* &= S_1' = S_1' + \frac{Eh}{2(1+\nu)} (l_{11}^0 l_{21}' + l_{11}^0 l_{21}' + l_{22}^0 l_{12}' + \varpi_1^0 \varpi_2' + \varpi_1^0 \varpi_2') \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad 1, 2
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Если в уравнениях (1.38) коэффициенты при силовых факторах определим с точностью до первых степеней величин порядка деформаций и отнесем поверхностную нагрузку к двум возможным случаям: когда она консервативна и когда она следящая, то, учтя (1.39), получим уравнения равновесия возмущенного состояния оболочки в виде [13]:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \alpha_1} T_1' A_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} S_2' A_1 + S_1' \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T_2' \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} M_{21}' A_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} M_{11}' A_2 - M_{22}' \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12}' \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + \\
& + A_2 \varepsilon_2' \frac{\partial T_1^0}{\partial \alpha_1} + A_1 \varepsilon_1' \frac{\partial S^0}{\partial \alpha_2} + 2S^0 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \varepsilon_1' A_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega' \right) + T_1' \left(A_2 \frac{\partial \varepsilon_2^0}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega^0 \right) - T_2' \left(A_2' \frac{\partial \varepsilon_2^0}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega^0 \right) + \\
& + 2S' \left(A_1 \frac{\partial \varepsilon_1^0}{\partial \alpha_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega^0 \right) + \frac{Eh}{1-\nu^2} A_2 [\varepsilon_1' \frac{\partial \varepsilon_1^0}{\partial \alpha_1} + \nu \varepsilon_2' \frac{\partial \varepsilon_2^0}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (l_{12}^0 l_{12}' + \omega_1^0 \omega_1' + \nu l_{21}^0 l_{21}' + \nu \omega_2^0 \omega_2')] + \\
& + \frac{Eh}{(1+\nu)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (l_{12}^0 l_{12}' - l_{21}^0 l_{21}' + \omega_1^0 \omega_1' - \omega_2^0 \omega_2') + \frac{Eh}{2(1+\nu)} A_1 \left[l_{21}^0 \frac{\partial \varepsilon_1^0}{\partial \alpha_2} + l_{12}^0 \frac{\partial \varepsilon_2^0}{\partial \alpha_2} (l_{21}^0 \varepsilon_1' + \varepsilon_2' l_{12}^0 + \omega_1^0 \omega_1' + \omega_2^0 \omega_2') \right] + \\
& + \frac{Eh}{(1+\nu)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (l_{21}^0 \varepsilon_1' + \varepsilon_2' l_{12}^0 + \omega_2^0 \omega_1' + \omega_1^0 \omega_2') + q_1 A_1 A_2 (\varepsilon_1' + \varepsilon_2') + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 A_2 (q_3 \omega_1' - q_2 l_{21}') = 0, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad 1, 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_1' \frac{A_1 A_2}{R_1} + T_2' \frac{A_1 A_2}{R_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} M_{21}' A_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} M_{11}' A_2 - M_{22}' \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12}' \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} M_{11}' A_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} M_{22}' A_1 - M_{11}' \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M_{21}' \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + T_1^0 A_1 A_2 \left(\chi_1' + \frac{\varepsilon_2'}{R_1} \right) + \\
& + (S_1^0 + S_2^0) A_1 A_2 \tau' + T_2^0 A_1 A_2 \left(\chi_1^0 + \frac{\varepsilon_2^0}{R_1} \right) + (S_1' + S_2') A_1 A_2 \tau^0 + T_1' A_1 A_2 \left(\chi_1^0 + \frac{\varepsilon_2^0}{R_1} \right) + \\
& + T_2' A_1 A_2 \left(\chi_2^0 + \frac{\varepsilon_1^0}{R_2} \right) + \frac{Eh}{1-\nu^2} A_1 A_2 \left[\frac{1}{R_1} (\varepsilon_1^0 \varepsilon_1' + l_{12}^0 l_{12}' + \omega_1^0 \omega_1' + \nu \varepsilon_1^0 \varepsilon_1' + \nu l_{12}^0 l_{12}' + \right. \\
& \left. + \nu \omega_1^0 \omega_1') \right] + q_3 A_1 A_2 (\varepsilon_1' + \varepsilon_2') - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 A_2 (q_1 \omega_1' + q_2 \omega_2') = 0.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

В уравнениях (1.40) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega, \chi_1, \chi_2, \tau$ - обычные обозначения для компонент тангенциальной и изгибной деформаций срединной оболочки В.В.Новожилова, В.М.Даревского. Если поверхностная нагрузка, будучи по направлению следя-

щей или консервативной, изменяет свою интенсивность так, что на деформированный элемент поверхности $A_1 A_2 \alpha_1 \alpha_2$ приходится такая же величина нагрузки, то в уравнениях (1.40) будут отсутствовать члены $q_1 A_1 A_2 (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)$, $q_2 A_1 A_2 (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)$, $q_3 A_1 A_2 (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)$. Здесь вместо обозначений X_1, X_2, X_3 введены обозначения q_1, q_2, q_3 .

Если воспользуемся вторым предположением 3, то в уравнениях (40) надо отбросить величины, умноженные на ω^1 и ω^0 . Так как в этом случае $\omega^1 = \omega^0 = 0$, то из (1.40) имеем уравнения равновесия оболочки в виде Муштари-Галимова.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} T'_1 A_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} S'_2 A_1 + S'_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T'_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} M'_{21} A_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} M'_{11} A_2 - M'_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M'_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + \\ & + A_2 \varepsilon'_2 \frac{\partial T_1^0}{\partial \alpha_1} + A_1 \varepsilon'_1 \frac{\partial S^0}{\partial \alpha_2} + 2S^0 \frac{\partial A_1 \varepsilon'_1}{\partial \alpha_2} + T'_1 A_2 \frac{\partial \varepsilon_2^0}{\partial \alpha_1} - T'_2 A_2 \frac{\partial \varepsilon_1^0}{\partial \alpha_1} + 2S'_1 A_1 \frac{\partial \varepsilon_1^0}{\partial \alpha_2} + \frac{Eh}{1+\nu} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} x \\ & x \left(l_{12}^0 l'_{12} - l_{21}^0 l'_{21} + \omega_1^0 \omega'_1 - \omega_2^0 \omega'_2 \right) + \frac{Eh}{1-\nu^2} A_2 \left[\varepsilon'_1 \frac{\partial \varepsilon_1^0}{\partial \alpha_1} + \nu \varepsilon'_2 \frac{\partial \varepsilon_2^0}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (l_{12}^0 l'_{12} + \omega_1^0 \omega'_1 + \nu l_{21}^0 l'_{21} + \nu \omega_2^0 \omega'_2) \right] + \\ & + \frac{Eh}{2(1+\nu)} A_1 \left[l'_{21} \frac{\partial \varepsilon_1^0}{\partial \alpha_2} + l'_{12} \frac{\partial \varepsilon_2^0}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (l_{21}^0 \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 l_{12}^0 + \omega_1^0 \omega'_2 + \omega_1^0 \omega'_2) \right] + \\ & + \frac{Eh}{(1+\nu)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (l_{21}^0 \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 l_{12}^0 + \omega_1^0 \omega'_2 + \omega_1^0 \omega'_2) + q_1 A_1 A_2 (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 A_2 (q_3 \omega'_1 - q_2 l'_{21}) = 0, \quad \begin{matrix} \vec{1,2} \\ \leftarrow \end{matrix} \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} & T'_1 \frac{A_1 A_2}{R_1} + T'_2 \frac{A_1 A_2}{R_2} + T_1^0 A_1 A_2 \left(\chi'_1 + \frac{\varepsilon'_2}{R_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} M'_{11} A_2 - M'_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M'_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} M'_{12} A_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} M'_{22} A_1 - M'_{11} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M'_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + T_1^0 A_1 A_2 \left(\chi'_1 + \frac{\varepsilon'_2}{R_1} \right) + (S_1^0 + S_2^0) A_1 A_2 \tau' + \\ & + T_2^0 A_1 A_2 \left(\chi'_1 + \frac{\varepsilon'_2}{R_1} \right) + (S'_1 + S'_2) A_1 A_2 \tau^0 + T'_2 A_1 A_2 \left(\chi'_2 + \frac{\varepsilon'_1}{R_2} \right) + \frac{Eh}{1-\nu^2} A_1 A_2 \left[\frac{1}{R_1} (\varepsilon_2^0 \varepsilon'_2 + l_{21}^0 l'_{21} + \omega_2^0 \omega'_2) \right] + \\ & + \frac{Eh}{1-\nu^2} A_1 A_2 \left[\frac{1}{R_1} (\nu \varepsilon_2^0 \varepsilon'_2 + \nu \omega_1^0 \omega'_1) \right] + q_3 A_1 A_2 (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 A_2 (q_1 \omega'_1 + q_2 \omega'_2) = 0. \end{aligned}$$

Если воспользуемся третьим предположением 3, то из (1.41) получим [10] и [11]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_2 T'_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S'}{\partial \alpha_2} + S' \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T'_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial A_2 M'_{11}}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{\partial A_1 H'}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H' - M'_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) = \\ & = A_1 A_2 \left(\Delta X'_1 + \frac{1}{R_1} \Delta L'_1 \right), \quad \begin{matrix} \vec{1,2} \\ \leftarrow \end{matrix} \end{aligned}$$

(1.42)

$$\begin{aligned} & \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial A_2 M'_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 H'}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H' - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M'_{22} + L'_1 \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} x \right. \\ & \left. \left[\frac{\partial A_1 M'_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 H'}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H' - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M'_{11} + L'_2 \right] \right\} = -\Delta X'_3 \end{aligned}$$

где

$$S = T'_{12} - \frac{M'_{21}}{R_2} = T'_{21} - \frac{M'_{12}}{R_1}, \quad H' = \frac{1}{2}(M'_{12} + M'_{21}) \quad (1.43)$$

1.3. Вариационные уравнения нелинейной теории и их линеаризации в задачах устойчивости

В литературе встречаются уравнения равновесия гибких оболочек, выведенные из принципа начала возможных перемещений. При этом предполагают, линейный закон распределения перемещений по толщине оболочки и выражают деформации в виде (1.3).

Такое предположение можно считать вполне разумным с физической точки зрения.

Остановимся на некоторых уравнениях равновесия и уравнениях возмущенного состояния оболочки, выведенных из принципа начала возможных перемещений и попытаемся получить их из уравнений равновесия и из уравнений возмущенного состояния гибких оболочек, приведенных в 3 и 4.

Если перепишем уравнения равновесия оболочки (1.31) - (1.33) в системе координат на срединной поверхности S недеформированной оболочки, учитывая только повороты линейных элементов, то внутренние усилия и моменты определяются формулами [15]:

$$\begin{aligned} T_{11}^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{11}(1 + ZK_2)dz, & T_{22}^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{22}(1 + ZK_1)dz, \\ T_{12}^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{12}(1 + ZK_1)dz, & T_{21}^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{21}(1 + ZK_2)dz, \\ N_1^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{13}(1 + ZK_2)dz, & N_2^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{23}(1 + ZK_1)dz, \\ M_{11}^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{11}(1 + ZK_2)zdz, & M_{22}^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{22}(1 + ZK_1)zdz, \\ M_{12}^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{12}(1 + ZK_1)zdz, & M_{21}^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{21}^1(1 + ZK_2)zdz. \end{aligned} \quad (1.44)$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11} &= (1+l_{11})\sigma_{11} + \left(\frac{1}{2}l_{12} - \omega_3\right)\sigma_{12} + \left(\frac{1}{2}l_{13} + \omega_2\right)\sigma_{13}, \\
\bar{\sigma}_{12} &= \left(\frac{1}{2}l_{12} - \omega_3\right)\sigma_{11} + (1+l_{22})\sigma_{12} + \left(\frac{1}{2}l_{23} - \omega_1\right)\sigma_{13}, \\
\bar{\sigma}_{13} &= \left(\frac{1}{2}l_{13} - \omega_2\right)\sigma_{11} + \left(\frac{1}{2}l_{23} + \omega_1\right)\sigma_{12} + (1+l_{33})\sigma_{13}, \\
\bar{\sigma}_{21} &= (1+l_{11})\sigma_{21} + \left(\frac{1}{2}l_{12} - \omega_3\right)\sigma_{22} + \left(\frac{1}{2}l_{13} + \omega_2\right)\sigma_{23}, \\
\bar{\sigma}_{22} &= \left(\frac{1}{2}l_{12} + \omega_3\right)\sigma_{21} + (1+l_{22})\sigma_{22} + \left(\frac{1}{2}l_{23} - \omega_1\right)\sigma_{23}, \\
\bar{\sigma}_{23} &= \left(\frac{1}{2}l_{13} - \omega_2\right)\sigma_{21} + \left(\frac{1}{2}l_{23} + \omega_1\right)\sigma_{22} + (1+l_{33})\sigma_{23},
\end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \frac{1}{1+K_{1z}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u_2 + K_1 \varpi \right), \quad l_{33} = \frac{\partial \varpi}{\partial z}, \\
l_{12} &= \frac{1}{1+K_{1z}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u_1 \right) + \frac{1}{1+K_{2z}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_1}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u_2 \right), \\
l_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{1+K_{1z}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} - K_1 u_1 \right), \quad 2\omega_1 = -\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{1+K_{1z}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \varpi}{\partial \beta} - K_2 u_2 \right), \\
2\omega_2 &= \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{1}{1+K_{1z}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} - K_1 u_1 \right), \\
2\omega_3 &= \frac{1}{1+K_{1z}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u_1 \right) - \frac{1}{1+K_{1z}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u_1}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u_2 \right) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} 1,2 \\ 1,2 \end{matrix}
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Здесь и далее символ $\begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} 1,2$ означает, что остальные формулы получаются из приведенных перестановкой индексов 1 и 2, α и β , A и B.

Подставляя (1.46) в выражениях (1.45) имеем

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{K=1}^3 (\delta_{Kj} + \bar{l}_{Kj}) \bar{\sigma}_{iK}, \quad \bar{\sigma}_{i3} = \sum_{K=1}^3 (\delta_{K3} + \bar{l}_{K3}) \bar{\sigma}_{iK}, \tag{1.47}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{l}_{11} &= \frac{A}{H_1} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{u_2}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + K_1 \varpi \right), \quad \bar{l}_{12} = \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha} - \frac{u_1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right), \quad \bar{l}_{31} = \frac{\partial u_1}{\partial z}, \\
\bar{l}_{13} &= \frac{A}{H_1} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} - K_1 u_1 \right), \quad \bar{l}_{31} = \frac{\partial \varpi}{\partial z}, \quad H_1 = A(1+K_{1z}).
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Представим компоненты u_i , ϖ вектора перемещений u линейным законом по толщине оболочки

$$u_1 = v_1 + z\psi_1, \quad u_2 = v_2 + z\psi_2, \quad \varpi = \varpi(\alpha, \beta) \quad (1.49)$$

Подставляя (1.49) в (1.48) имеем:

$$\bar{l}_{ij} = \hat{l}_{ij} + zK_{ij}, \quad \bar{l}_{13} = \hat{l}_{13} + zK_{13}, \quad \bar{l}_{31} = \psi_1, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix} \quad (1.50)$$

где

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \chi_{ij} - K_i \hat{\ell}_{ij}, \quad K_{13} = -(K_1 \psi_1 + K_1 \ell_{13}), \quad \hat{l}_{11} = \frac{1}{A} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_2}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + K_1 \varpi, \\ \hat{l}_{12} &= \frac{1}{A} \left(\frac{\partial v_2}{\partial \alpha} - \frac{v_1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right), \quad \hat{l}_{13} = \frac{1}{A} \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} - K_1 v_1, \quad \chi_{11} = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + \frac{\psi_2}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right), \\ \chi_{12} &= \frac{1}{A} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} - \frac{\psi_1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix} \quad (1.51)$$

На основании (1.49)-(1.50) из (1.44)-(1.46) получим:

$$\begin{aligned} T_{11}^* &= T_{11} + \hat{l}_{11} T_{11} + \hat{l}_{21} T_{12} + \psi_1 N_1 + K_{11} M_{11} + K_{21} M_{12}, \\ T_{22}^* &= T_{12} + \hat{l}_{22} T_{12} + \hat{l}_{12} T_{11} + \psi_2 N_1 + K_{22} M_{12} + K_{12} M_{11}, \\ N_1^* &= N_1 + \hat{l}_{13} T_{21} + \hat{l}_{23} T_{22} + K_{13} M_{21} + K_{23} M_{22}, \\ M_{11}^* &= M_{11} + \hat{l}_{11} M_{11} + \hat{l}_{21} M_{12}, \quad M_{12}^* = M_{12} + \hat{l}_{22} M_{12} + \hat{l}_{12} M_{11} \end{aligned} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix} \quad (1.52)$$

Подставляя (1.52) в уравнения равновесия оболочки (1.31)-(1.33) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} [B(T_{11} + S_{11})] + \frac{\partial}{\partial \beta} [A(T_{12} + S_{12})] - \frac{\partial B}{\partial \alpha} (T_{22} + S_{22}) + B[K_1(N_1 + S_{13}) + X_1] &= 0, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} [B(N_1 + S_{13})] + \frac{\partial}{\partial \beta} [A(N_2 + S_{23})] - AB[K_1(T_{11} + S_{11}) + K_2(T_{22} + S_{22}) + X_3] &= 0, \\ \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} [B(M_{11} + \tilde{M}_{11})] + \frac{\partial}{\partial \beta} [A(M_{21} + \tilde{M}_{12})] + \frac{\partial A}{\partial \beta} (M_{12} + \tilde{M}_{12}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} (M_{22} + \tilde{M}_{22}) \right\} \\ + L_1 - N_1 + K_1 \hat{l}_{13} M_{11} + K_2 \hat{l}_{23} M_{12} + K_1 \psi_1 M_{11} + K_2 \psi_2 M_{12} - \hat{l}_{13} T_{11} - \hat{l}_{23} T_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$\text{где } S_{sp} = T_{sp} \hat{\ell}_{ip} + M_{si} K_{ip} + N_s \psi_p, \quad \tilde{M}_{sp} = M_{si} \hat{\ell}_{ip} \quad (1.54)$$

В выражении (1.52) усилия и моменты T_{ij} , M_{ij} , N_i определяются по обычным формулам работы [16]. Уравнения равновесия оболочки (1.53)-(1.54) мало отличаются от выведенных уравнений равновесия оболочки в работе [17], в ко-

торой первые три уравнения совпадают точно, а два последних отличаются членами, которые учитывают работу перерезывающих сил на перемещениях ℓ_{ij} и

$$N_{33} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{33}(1 + zk_1)(1 + zk_2)dz.$$

Если вместо $N_1^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{13}(1 + zk_2)dz$, $N_2^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{23}(1 + zk_1)dz$, взять

$$N_1^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{31}(1 + zk_2)dz = N_1 + \hat{\ell}_{11}N_1 + \hat{\ell}_{21}N_2 + \psi_1 N_{33} + k_1 \ell_{13}M_{11} + k_1 \ell_{23}M_{21},$$

$$N_2^* = N_2 + \hat{\ell}_{22}N_2 + \hat{\ell}_{12}N_1 + \psi_2 N_{33} + k_2 \ell_{23}M_{22} + k_2 \ell_{13}M_{12},$$

то получим полностью уравнения равновесия оболочек [17].

Если будем пренебрегать проекциями составляющих напряжений σ_{13} , σ_{23} на оси α и β при повороте на углы $\frac{1}{2}l_{13} + w_2$ и $\frac{1}{2}l_{23} - w_1$, а так же $\sigma_{33} \approx 0$, то на основании закона Гука и предположений (1.49) из (1.44) – (1.46) получим:

$$\ell_{11} = \hat{\ell}_{11} + zk_1,$$

$$\ell_{12} = \hat{\ell}_{12} + z\tau, \quad \frac{1}{2}\ell_{12} + w_3 = \left(\frac{1}{2}\hat{\ell}_{12} + \hat{w}_3 \right) + z\tau_1,$$

$$\frac{1}{2}\ell_{12} - w_3 = \left(\frac{1}{2}\hat{\ell}_{12} - \hat{w}_3 \right) + z\tau_2,$$

$$\frac{1}{2}\ell_{13} + w_2 = \psi_1, \quad \frac{1}{2}\ell_{23} - w_1 = \psi_2,$$

$$\ell_{13} - w_2 = \frac{1}{2}\hat{\ell}_{13} - \hat{w}_2,$$

$$\frac{1}{2}\ell_{23} + w_1 = \frac{1}{2}\hat{\ell}_{23} + \hat{w}_1, \quad \tau_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \hat{w}_1,$$

$$\tau_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \hat{w}_2,$$

$$\tau = \tau_1 + \frac{\hat{\ell}_{11}}{R_1} = \tau_2 + \frac{\hat{\ell}_{12}}{R_2}$$

(1.55)

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Ez}{1-v^2} (k_1 + vk_2) z \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \frac{\hat{\ell}_{11} + v\hat{\ell}_{22}}{R_2} + \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} (k_1 + vk_2) = \\
&= \frac{h^2}{12R_2} \bar{T}_{11} + \bar{M}_{11}, \quad T_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{E}{(1-v^2)} (\hat{\ell}_{11} + v\hat{\ell}_{22}) + \frac{Ez}{1-v^2} (k_2 + vk_1) \right] \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz = \\
&= \frac{Eh}{(1-v^2)} (\hat{\ell}_{22} + v\hat{\ell}_{11}) + \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \frac{(k_2 + vk_1)}{R_1} = \bar{T}_{22} + \frac{\bar{M}_{22}}{R_1}.
\end{aligned}$$

Аналогично определим остальные:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \bar{T}_{11} + \frac{\bar{M}_{11}}{R_2}, \quad T_{12} = \bar{T}_{12} + \frac{\bar{M}_{12}}{R_2}, \quad M_{11} = \frac{h^2}{12R_2} \bar{T}_{11} + \bar{M}_{11}, \\
M_{12} &= \frac{h^2}{12R_2} \bar{T}_{12} + \bar{M}_{12}, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix}
\end{aligned} \tag{1.56}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{11} &= \frac{E}{(1-v^2)} (l_{11}^{\$} + vl_{22}^{\$}), \quad \bar{T}_{12} = \frac{Eh}{2(1+v)} l_{12}^{\$} = \bar{S}, \\
\bar{M}_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} (k_1 + vk_2), \quad \bar{M}_{12} = \frac{Eh^3}{12(1+v)} \tau = \bar{H}, \\
k_{11} &= k_1, \quad k_2 = k_{22}, \quad \tau = \frac{1}{2} (k_{12} + k_{21}). \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1,2 \\ \leftarrow \end{matrix}
\end{aligned} \tag{1.57}$$

$$\begin{aligned}
T_{11}^* &= (1 + \hat{\ell}_{11}) \bar{T}_{11} + (1 + \hat{\ell}_{11}) \frac{\bar{M}_{11}}{R_2} + k_1 \left(\frac{h^2}{12R^2} \bar{T}_{11} + \bar{M}_{11} \right) + \\
&+ \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} - \hat{\omega}_3 \right) \bar{S} + \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} - \hat{\omega}_3 \right) \frac{\bar{H}}{R_2} + \left(\frac{h^2}{12R^2} \bar{S} + \bar{H} \right) \tau_2, \quad T_{22}^* = \\
&= \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \hat{\omega}_3 \right) \bar{S} + \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \hat{\omega}_3 \right) \frac{\bar{H}}{R_1} + \left(\frac{h^2}{12R_1} \bar{S} + \bar{H} \right) \tau_1 + \\
&+ (1 + \hat{\ell}_{22}) \bar{T}_{22} + (1 + \hat{\ell}_{22}) \frac{\bar{M}_{22}}{R_1} + \left(\frac{h^2}{12R_1} \bar{T}_{22} + \bar{M}_{22} \right) k_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{12}^* &= \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \hat{\omega}_3 \right) \bar{T}_{11} + \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \hat{\omega}_3 \right) \frac{\bar{M}_{11}}{R_2} + \\
&+ \left(\frac{h^2}{12R^2} \bar{T}_{11} + \bar{M}_{11} \right) \tau_2 + (1 + \hat{\ell}_{22}) \bar{S} + (1 + \hat{\ell}_{22}) \frac{\bar{H}}{R_2} + \left(\frac{h^2}{12R^2} \bar{S} + \bar{H} \right) k_2, \\
T_{21}^* &= (1 + \hat{\ell}_{11}) \frac{\bar{H}}{R_1} + \left(\frac{h^2}{12R_1} \bar{S} + \bar{H} \right) k_1 + \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} - \hat{\omega}_3 \right) \bar{T}_{22} + \\
&+ \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \hat{\omega}_3 \right) \frac{\bar{M}_{22}}{R_1} + \left(\frac{h^2}{12R_1} \bar{T}_{22} + \bar{M}_{22} \right) \tau_2, \\
N_1^* &= \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{13} - \hat{\omega}_2 \right) \bar{T}_{11} + \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{13} - \hat{\omega}_2 \right) \frac{\bar{M}_{11}}{R_2} + \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{23} - \hat{\omega}_1 \right) \frac{H}{R_2} + \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{23} + \hat{\omega}_1 \right) S, \\
N_2^* &= \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{13} - \hat{\omega}_2 \right) \bar{S} + \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{13} - \hat{\omega}_2 \right) \frac{H}{R_1} + \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{23} + \hat{\omega}_1 \right) \frac{\bar{M}_{22}}{R_1} + \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{23} + \hat{\omega}_1 \right) \bar{T}_{22} \\
X_1^* &= \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{13} + \hat{\omega}_2 \right) X_3, \quad X_1^* = \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{23} - \hat{\omega}_1 \right) X_3 X_1^* = -X_3 = P.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Подставляя (1.58) в первые три уравнения (1.31)-(1.33) получим уравнения равновесия оболочки в координатной системе на срединной поверхности S, выведенные L.J.Hart-Smit:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \alpha_1} T_1' A_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} s_2' A_1 + S_1' \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T_2' \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\
&- \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} M_{21}' A_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} M_{11}' A_2 - M_{22}' \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12}' \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + \\
&+ A_2 \varepsilon_2' \frac{\partial T_1^0}{\partial \alpha_1} + A_1 \varepsilon_1' \frac{\partial S^0}{\partial \alpha_2} + 2S^0 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \varepsilon_1' - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega' \right) - \\
&- T_1' \left(A_2 \frac{\partial \varepsilon_2^0}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varpi^0 \right) - T_2' \left(A_2' \frac{\partial \varepsilon_2^0}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A \varpi^0}{\partial \alpha_2} \right) + \\
&+ 2S' \left(A_1 \frac{\partial \varepsilon_1^0}{\partial \alpha_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varpi^0 \right) - \frac{Eh}{1-\nu^2} A_2 [\varepsilon_1' \frac{\partial \varepsilon_1^0}{\partial \alpha_1} + \nu \varepsilon_2' \frac{\partial \varepsilon_2^0}{\partial \alpha_1} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (l_{12}^0 l_{12}' + \varpi_1^0 \varpi_1' + \nu l_{21}^0 l_{21}' + \nu \varpi_2^0 \varpi_2')] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Eh}{1+\nu} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (l_{12}^0 l_{12}' + l_{21}^0 l_{21}' + \varpi_1^0 \varpi_1' - \varpi_2^0 \varpi_2') + \\
& + \frac{Eh}{2(1+\nu)} A_1 l_{21}' \frac{\partial \varepsilon_1^0}{\partial \alpha_1} + l_{12}' \frac{\partial \varepsilon_2^0}{\partial \alpha_2} (\varepsilon_1' l_{21}^0 + \varepsilon_2' l_{12}^0 + \varpi_1' \varpi_1^0 + \varpi_1^0 \varpi_2') + \\
& \frac{Eh}{1+\nu} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot (\varepsilon_1' l_{21}^0 + \varepsilon_2' l_{12}^0 + \varpi_1' \varpi_1^0 + \varpi_1^0 \varpi_2') + q_1 A_1 A_2 (\varepsilon_1' + \varepsilon_2') + \\
& + \binom{0}{l} A_1 A_2 (q_3 \varpi_1' - q_2 l_{21}') = 0, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1, 2 \\ \leftarrow \end{matrix} \\
& \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[A_2 \bar{T}_{11} (1 + \hat{\ell}_{11}) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{A_2 \bar{M}_{11}}{R_2} (1 + \hat{\ell}_{11}) + A_2 \left(\frac{h^2 \bar{T}_{11}}{12 R_2} + \bar{M}_{11} \right) k_1 \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[A_2 \bar{S} \times \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} - \hat{\omega}_3 \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{A_2 \bar{H}}{R_2} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} - \hat{\omega}_3 \right) + A_2 \left(\frac{\bar{S} h^2}{12 R_2} + \bar{H} \right) \tau_2 \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[A_1 \bar{S} (1 + \hat{\ell}_{11}) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{A_1 \bar{H}}{R_1} (1 + \hat{\ell}_{11}) + A_1 \left(\frac{\bar{S} h^2}{12 R_1} + \bar{H} \right) k_1 \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[A_1 \bar{T}_{22} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} - \hat{\omega}_3 \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{A_1 \bar{M}_{22}}{R_1} \times \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} - \hat{\omega}_3 \right) + A_1 \left(\frac{h^2 \bar{T}_{22}}{12 R_1} + \bar{M}_{22} \right) k_2 \right] + A_1 A_{2\omega} X \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{13} + \hat{\omega}_2 \right) + \\
& + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \bar{T}_{11} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \hat{\omega}_3 \right) + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left[\frac{\bar{M}_{11}}{R_2} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \hat{\omega}_3 \right) + \left(\frac{\bar{T}_{11} h^2}{12 R_2} + \bar{M}_{11} \right) \tau_1 \right] + \\
& + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \bar{S} (1 + \hat{\ell}_{22}) + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \times \left[\frac{H}{R_2} (1 + \hat{\ell}_{22}) + \left(\frac{\bar{S} h^2}{12 R_1} + \bar{H} \right) k_2 \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[A_2 \bar{T}_{11} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \hat{\omega}_3 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{A_2 \bar{M}_{11}}{R_2} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \hat{\omega}_3 \right) + A_2 \left(\frac{\bar{T}_{11} h^2}{12 R_2} + \bar{M}_{11} \right) \tau_1 \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[A_2 \bar{S} \times (1 + \hat{\ell}_{22}) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{A_2 \bar{H}}{R_2} (1 + \hat{\ell}_{22}) + A_2 \left(\frac{\bar{S} h^2}{12 R_2} + \bar{H} \right) k_2 \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[A_1 \bar{S} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \hat{\omega}_3 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{A_1 \bar{H}}{R_1} \times \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \hat{\omega}_3 \right) + A_1 \left(\frac{\bar{S} h^2}{12 R_1} + \bar{H} \right) \tau_1 \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[A_2 \bar{T}_{22} (1 + \hat{\ell}_{22}) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{A_1 \bar{M}_{22}}{R_1} (1 + \hat{\ell}_{22}) + A_1 \left(\frac{\bar{T}_{22} h^2}{12 R_1} + \bar{M}_{22} \right) k_2 \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +A_2 \frac{A_1}{R_1} \bar{T}_{11} \left(\frac{1}{2} \ell_{13} - \omega_3 \right) + \frac{A_2}{R_2} \frac{A_1}{R_1} \bar{M}_{11} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{13} - \hat{\omega}_2 \right) + A_2 \frac{A_1}{R_1} \bar{S} \times \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{23} + \hat{\omega}_1 \right) + \\
& + \frac{A_2}{R_2} \frac{A_1}{R_1} H \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{23} + \hat{\omega}_1 \right) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \bar{S} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \hat{\omega}_3 \right) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left[\frac{\bar{H}}{R_1} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \omega_3 \right) + \left(\frac{sh^2}{12R_1} + H \right) \tau_1 \right] - \\
& - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \bar{T}_{22} (1 + \hat{\ell}_{22}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left[\frac{\bar{M}_{22}}{R_1} (1 + \hat{\ell}_{22}) + \left(\frac{\bar{T}_{22} h^2}{12R_1} + \bar{M}_{22} \right) k_2 \right] = 0, \\
& + A_1 A_2 P \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{23} - \hat{\omega}_1 \right) + A_1 \frac{A_2}{R_2} \bar{S} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{13} - \hat{\omega}_2 \right) + \frac{A_1}{R_1} \frac{A_2}{R_2} \bar{H} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{13} - \hat{\omega}_2 \right) + \\
& + A_1 \frac{A_2}{R_2} \bar{T}_{22} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{23} + \hat{\omega}_1 \right) + \frac{A_1}{R_1} \frac{A_2}{R_2} \bar{M}_{22} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{23} + \hat{\omega}_1 \right) + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \bar{S} (1 + \hat{\ell}_{11}) + \\
& + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left[\frac{\bar{H}}{R_1} (1 + \hat{\ell}_{11}) + \left(\frac{\bar{S} h^2}{12R_1} + \bar{H} \right) k_1 \right] + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \bar{T}_{22} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} - \hat{\omega}_3 \right) + \\
& + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left[\frac{\bar{M}_{22}}{R_1} \left(\frac{1}{2} \bar{\ell}_{12} - \bar{\omega}_3 \right) + \left(\frac{\bar{T}_{22} h^2}{12R_1} + \bar{M}_{22} \right) \tau_2 \right] - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_{21}} \bar{T}_{11} (1 + \bar{\ell}_{11}) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left[\frac{\bar{M}_{22}}{R_1} (1 + \ell_{11}) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\bar{T}_{11} h_2}{12R_1} + \bar{M}_{11} \right) k_1 \right] - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \bar{S} \times \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} - \hat{\omega}_3 \right) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left[\frac{\bar{H}}{R_2} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} - \hat{\omega}_3 \right) + \left(\frac{\bar{S} h^2}{12R_2} + \bar{H} \right) \tau_1 \right] = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[A_2 \bar{T}_{11} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{13} - \omega_2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{A_2 \bar{M}_{11}}{R_2} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{13} - \hat{\omega}_2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[A_2 \bar{S} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{23} + \hat{\omega}_1 \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{A_2 \bar{H}}{R_2} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{23} + \hat{\omega}_1 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[A_1 \bar{S} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{13} - \hat{\omega}_2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{A_1 \bar{H}}{R_1} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{13} - \hat{\omega}_2 \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[A_1 \bar{T}_{22} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{23} + \hat{\omega}_1 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{A_1 \bar{M}_{22}}{R_1} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{23} + \hat{\omega}_1 \right) \right] + A_1 A_2 P - A_2 \frac{A_1}{R_1} \bar{T}_{11} (1 + \hat{\ell}_{11}) - \\
& - A_2 \frac{A_1}{R_1} \left[\frac{\bar{M}_{11}}{R_2} (1 + \hat{\ell}_{11}) + \left(\frac{\bar{T}_{11} h_2}{12R_1} + \bar{M}_{11} \right) k_1 \right] - A_2 \frac{A_1}{R_1} \bar{S} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} - \hat{\omega}_3 \right) - A_2 \frac{A_1}{R_1} \left[\frac{\bar{H}}{R_2} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} - \hat{\omega}_3 \right) \right] \\
& - A_2 \frac{A_1}{R_1} \left[\left(\frac{\bar{S} h^2}{12R_2} + \bar{H} \right) \tau_2 \right] - A_1 \frac{A_2}{R_2} \bar{S} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \hat{\omega}_3 \right) - A_1 \frac{A_2}{R_2} \left[\frac{\bar{H}}{R_2} \left(\frac{1}{2} \hat{\ell}_{12} + \hat{\omega}_3 \right) + \left(\frac{\bar{S} h^2}{12R_1} + \bar{H} \right) \tau_1 \right] - \\
& - A_1 \frac{A_2}{R_2} \bar{T}_{22} (1 + \bar{\ell}_{22}) - A_1 \frac{A_2}{R_2} \left[\frac{\bar{M}_{22}}{R_1} (1 + \hat{\ell}_{22}) + \left(\frac{\bar{T}_{22} h_2}{12R_1} + \bar{H}_{22} \right) k_2 \right] = 0.
\end{aligned}$$

.59)

Если перепишем уравнения возмущенного состояния оболочки (1.42) в системе координат на срединной поверхности S недеформированной оболочки, то внутренние усилия и моменты определяются формулами:

$$\begin{aligned}
T'_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{11}^1 (1 + zk_2) dz, \quad T'_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{22}^1 (1 + zk_1) dz, \quad S' = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} \left[(\bar{\sigma}_{21}^1 + \bar{\sigma}_{12}^1) + (\bar{\sigma}_{21}^1 - \bar{\sigma}_{12}^1) \right] (1 + zk_2) dz - \\
&- \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} \left[(\bar{\sigma}_{21}^1 + \bar{\sigma}_{12}^1) + (\bar{\sigma}_{21}^1 - \bar{\sigma}_{12}^1) \right] (1 + zk_1) zk_2 dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} \left[(\bar{\sigma}_{21}^1 + \bar{\sigma}_{12}^1) + (\bar{\sigma}_{21}^1 - \bar{\sigma}_{12}^1) \right] (1 + zk_1) dz - \\
&- \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} \left[(\bar{\sigma}_{21}^1 + \bar{\sigma}_{12}^1) + (\bar{\sigma}_{21}^1 - \bar{\sigma}_{12}^1) \right] (1 + zk_2) zk_1 dz, \\
M'_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{11}^1 z (1 + zk_2) dz, \quad M'_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{22}^1 z (1 + zk_1) dz, \\
2H' &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} \left[(\bar{\sigma}_{21}^1 + \bar{\sigma}_{12}^1) + (\bar{\sigma}_{21}^1 - \bar{\sigma}_{12}^1) \right] z (1 + zk_1) dz + \\
&+ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} \left[(\bar{\sigma}_{21}^1 + \bar{\sigma}_{12}^1) + (\bar{\sigma}_{21}^1 - \bar{\sigma}_{12}^1) \right] (1 + zk_2) dz,
\end{aligned} \tag{1.60}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11}^1 &= \sigma_{11}^1 + \sigma_{11}^0 l_{11}^1 + \sigma_{12}^0 \left(\frac{1}{2} l_{12}^1 - w_3^1 \right) + \sigma_{11}^1 l_{11}^0 + \sigma_{12}^1 \left(\frac{1}{2} l_{12}^0 - w_3^0 \right), \\
\bar{\sigma}_{22}^1 &= \sigma_{22}^1 + \sigma_{22}^0 l_{22}^1 + \sigma_{12}^0 \left(\frac{1}{2} l_{12}^1 + w_3^1 \right) + \sigma_{22}^1 l_{22}^0 + \sigma_{12}^1 \left(\frac{1}{2} l_{12}^0 + w_3^0 \right), \\
\bar{\sigma}_{12}^1 &= \sigma_{12}^1 + \sigma_{12}^0 l_{22}^1 + \sigma_{11}^0 \left(\frac{1}{2} l_{12}^1 + w_3^1 \right) + \sigma_{12}^1 l_{22}^0 + \sigma_{11}^1 \left(\frac{1}{2} l_{12}^0 + w_3^0 \right), \\
\bar{\sigma}_{21}^1 &= \sigma_{12}^1 + \sigma_{12}^0 l_{11}^1 + \sigma_{22}^0 \left(\frac{1}{2} l_{12}^1 - w_3^1 \right) + \sigma_{12}^1 l_{11}^0 + \sigma_{22}^1 \left(\frac{1}{2} l_{12}^0 - w_3^0 \right),
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Обычно при выводе линеаризированных уравнений для дополнительных перемещений u_1, u_2, u_3 в уравнениях (1.61) не учитывается выражение, имеющее

в качестве коэффициентов l_{ij}^0, w_j^0 . Строго говоря, это упрощение делается без обоснования. Тогда из (1.61) получим:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11}^1 &= \sigma_{11}^1 + \sigma_{11}^0 l_{11}^1 + \sigma_{12}^0 \left(\frac{1}{2} l_{12}^1 - w_3^1 \right), \\
\bar{\sigma}_{22}^1 &= \sigma_{22}^1 + \sigma_{22}^0 l_{22}^1 + \sigma_{12}^0 \left(\frac{1}{2} l_{12}^1 + w_3^1 \right), \\
\bar{\sigma}_{12}^1 &= \sigma_{12}^1 + \sigma_{12}^0 l_{22}^1 + \sigma_{11}^0 \left(\frac{1}{2} l_{12}^1 + w_3^1 \right), \\
\bar{\sigma}_{21}^1 &= \sigma_{12}^1 + \sigma_{12}^0 l_{11}^1 + \sigma_{22}^0 \left(\frac{1}{2} l_{12}^1 - w_3^1 \right),
\end{aligned} \tag{1.62}$$

На основании (1.60), (1.62) из уравнения возмущенного состояния оболочки (1.42) имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A_2 T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} + S \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + k_1 \left(\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial \alpha_1} + M_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + 2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{k_2}{k_1} H \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) - \\
& - \Phi_3 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + (\Phi_5 - \Phi_9) \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 \Phi}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 (\Phi_7 + \Phi_{11})}{\partial \alpha_2} - k_1 \left(A_1 A_2 \Phi_{13} + \Phi_4 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - (\Phi_6 - \Phi_{10}) \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) - \\
& - k_1 \left(\frac{\partial A_2 \Phi}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 (\Phi_8 + \Phi_{12})}{\partial \alpha_2} \right) = -A_1 A_2 \Delta X_1, \\
&\frac{\partial A_1 T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 S}{\partial \alpha_1} + S \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - T_{11} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_2 \left(\frac{\partial A_1 M_{22}}{\partial \alpha_2} - M_{11} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + 2 \frac{k_1}{k_2} H \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) - \\
& - \Phi_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + (\Phi_7 - \Phi_{11}) \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 \Phi_3}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 (\Phi_5 - \Phi_9)}{\partial \alpha_1} - \\
& - k_2 \left(A_1 A_2 \Phi_{14} + \Phi_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - (\Phi_8 - \Phi_{12}) \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) - \\
& - k_2 \left(-\frac{\partial A_1 \Phi_4}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 (\Phi_6 + \Phi_{10})}{\partial \alpha_1} \right) = -A_1 A_2 \Delta X, \\
&A_1 A_2 (k_1 T_{11} + k_2 T_{22}) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + H \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - H_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \chi \left(\frac{\partial A_1 M_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + H \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - M_{11} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + A_1 A_2 (k_1 \Phi_1 + k_2 \Phi_2) [A_1 A_2 \Phi_{13} \\
& + \Phi_4 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - (\Phi_6 - \Phi_{10}) \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 \Phi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 (\Phi_8 + \Phi_{12})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left(A_1 A_2 \Phi_{14} + \Phi_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) +
\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{A_2}\left((\Phi_8+\Phi_{12})\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial A_1\Phi_4}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_2(\Phi_6-\Phi_{10})}{\partial\alpha_1}\right)=-A_1A_2\Delta X_3. \quad (1.63)$$

где

$$\Phi_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_1^0(1+zk_2)dz, \quad \Phi_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_1^0(1+zk_2)zdz,$$

$$\Phi_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_2^0(1+zk_1)dz, \quad \Phi_4 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_2^0(1+zk_1)zdz,$$

$$\Phi_5 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_3^0(1+zk_2)dz, \quad \Phi_6 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_3^0(1+zk_2)zdz,$$

$$\Phi_7 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_3^0(1+zk_1)dz, \quad \Phi_8 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_3^0(1+zk_1)zdz,$$

$$\Phi_9 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_4^0(1+zk_2)dz, \quad \Phi_{10} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_4^0(1+zk_2)zdz,$$

$$\Phi_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_4^0(1+zk_1)dz, \quad \Phi_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_4^0(1+zk_1)zdz,$$

$$\Phi_{13} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_5^0(1+zk_1)(1+zk_2)dz, \quad \Phi_{14} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_6^0(1+zk_1)(1+zk_2)dz,$$

$$\Phi_1^0 = \sigma_{11}^0 \ell'_{11} + \sigma_{12}^0 \left(\frac{1}{2} \ell'_{12} - w'_3 \right), \quad \Phi_2^0 = \sigma_{22}^0 \ell'_{22} + \sigma_{12}^0 \left(\frac{1}{2} \ell'_{12} + w'_3 \right),$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3^0 &= \frac{1}{2} [\sigma_{11}^0 \left(\frac{1}{2} \ell'_{12} + w'_3 \right) + \sigma_{22}^0 + \left(\frac{1}{2} \ell'_{12} - w'_3 \right) + \sigma_{12}^0 (\ell'_{11} + \ell'_{22})], \\
\Phi_4^0 &= \frac{1}{2} [\sigma_{11}^0 \left(-w'_3 - \frac{1}{2} \ell'_{12} \right) + \sigma_{22}^0 \left(\frac{1}{2} \ell'_{12} - w'_3 \right) + \sigma_{12}^0 (\ell'_{11} - \ell'_{22})], \\
\Phi_5^0 &= -\sigma_{11}^0 w'_0 + \sigma_{12}^0 w'_1, \quad \Phi_6^0 = -\sigma_{12}^0 w'_2 + \sigma_{22}^0 w'_1
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Уравнения возмущенного состояния (1.63) и (1.64) совпадают с уравнениями возмущенного состояния оболочки с начальными напряжениями, выведенными в работе [19].

Если воспользуемся четвертым предположением (1.3), то выше указанные формулы (1.63) и (1.64) допускают дальнейшее упрощение и формулы (64) могут быть заменены выражениями:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^0 &= -w'_3 \sigma_{12}^0, \quad \Phi_2^0 = -w'_3 \sigma_{12}^0, \quad \Phi_3^0 = \frac{1}{2} w'_3 (\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0), \quad \Phi_4^0 = -\frac{1}{2} w'_3 (\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0), \\
\Phi_5^0 &= -\sigma_{11}^0 w'_3 + \sigma_{12}^0 w'_1, \quad \Phi_6^0 = -\sigma_{12}^0 w'_2 + \sigma_{22}^0 w'_1.
\end{aligned} \tag{1.65}$$

В случае гибких тел, каковыми являются оболочки, при малой деформации и малых углах поворота вторые существенно превосходят первые, т.е. ℓ_{ij} являются малыми того же или более высокого порядка, что w_j^2 . Это позволяет предположить, что оболочки будучи в своей плоскости массивным телом, не допускает относительных, значительных поворотов своих элементов вокруг оси Z. Тогда полагая $w'_3 = 0$ из (1.65) и (1.64) получим:

$$\Phi_1^0 = \Phi_2^0 = \Phi_3^0 = \Phi_4^0 = 0. \tag{1.66}$$

На основании (1.66) уравнения возмущенного состояния оболочки (1.63) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A_2 T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} + S \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + k_1 \left(\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial \alpha_1} - M_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + 2 \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{k_2}{k_1} H \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) - \\
&- A_1 A_2 k_1 \bar{\Phi}_1 = -A_1 A_2 \Delta X_1, \quad 1, 2 \\
&A_1 A_2 (k_1 T_{11} + k_2 T_{22}) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial \alpha_1} + 2 \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + H \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - M_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) - \\
&- \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial A_1 M_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + H \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - M_{11} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \bar{\Phi}_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \bar{\Phi}_2 = -A_1 A_2 \Delta X_3
\end{aligned} \tag{1.67}$$

$$\Phi_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (-\sigma_{11}^0 w_2' + \sigma_{12}^0 w_1') (1 + zk_1)(1 + zk_2) dz,$$

где

$$\Phi_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (-\sigma_{12}^0 w_2' + \sigma_{22}^0 w_1') (1 + zk_1)(1 + zk_2) dz.$$

В работе [20] содержатся еще члены $\Phi_9, \Phi_{10}, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{13}, \Phi_{14}$ при таких же предположениях.

1.4. О больших прогибах выработки в массиве горных пород с учетом произвольности элементов поперечного сечения

Эффективность разработки месторождений полезных ископаемых и безопасность работ горняков во многом зависят от соответствия принимаемых технологических решений конкретным горно-геологическим ситуациям, от степени учета закономерностей геомеханических процессов в массиве. Для описания этих процессов необходимы обоснование геомеханических особенностей массивов пород горно-складчатых областей и механико-математические модели выработки.

Изучение геомеханических условий отработки месторождений полезных ископаемых является одной из сложных задач механики горных пород. Этот вопрос особенно актуален для месторождений рудных металлов, размещенных в горно-складчатых областях, где существенные структурно-геологические и петрографические неоднородности массивов руды и пород месторождений формируют весьма сложную геомеханическую ситуацию.

Породные массивы горно-складчатых областей имеют исключительно сложное геологическое строение и определение физико-механических свойств очень затруднительны. Обычного изучения физико-механических свойств и состояний массива пород проводят в два этапа:

- исследуют керны разведочных скважин, определяя практически все необходимые физико-механические свойства пород;
- в процессе проведения участковых разведочных, подготовительных и нарезных выработок, а так же керна бурения промышленной разведки устанавливают физико-механические свойства пород и пространственная периодичность изменчивости механических параметров пород.

В данной монографии выработка в толще горных пород представлена в виде многослойных анизотропных оболочек типа Тимошенко в нелинейной постановке с конечными деформациями, где физико-механические свойства

пород соответствуют физико-механическим свойствам многослойных анизотропных оболочек.

Оболочкой называют трехмерные тела, ограниченные двумя поверхностями, линейные размеры которых значительно превышают расстояние между ними. Это расстояние называется толщиной оболочки. Обозначим толщину оболочки через h , и будем считать её постоянной. Под теорией оболочек типа Тимошенко будем понимать теории, которые приводят в общем случае к решению гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных десятого порядка.

Будем полагать, что материал каждого слоя оболочки в процессе деформации остается упругим, и подчиняется обобщенному закону Гука для анизотропного тела. Учет анизотропии материала является одним из существенных моментов, поскольку в нашей модели анизотропные свойства цилиндрической оболочки обладают анизотропными свойствами естественного несущего слоя и не несущего слоя горного массива.

Механико-математическая модель процедуры определения НДС и больших прогибов выработки в массиве складчатых горных пород при конечных деформациях имеет вид:

Модель – В

- Изучение геомеханических условий отработки месторождений рудных ископаемых и линеаризация внешних усилий по критическим деформациям;
- разработка процедуры определения устойчивости и колебаний выработки на основе нелинейной теории механики горных пород, находящейся в условиях сложного нагружения;
- установление некоторых критериев корректировании нелинейных соотношений при определении тензоров конечных деформации, условиях неразрывности конечных деформаций, линеаризации уравнений равновесия, линеаризации уравнений устойчивости и при составлении вариационных уравнений;
- сформулировать обратную задачу геомеханики: по изменению НДС, искажение формы поперечного сечения, изменение формы критической деформации поперечного сечения определяет неравномерные внешние силы по критическим деформациям;
- установление критериев корректности комбинированного метода при больших прогибах и конечных деформациях выработки.

В качестве примера рассмотрим большие прогибы выработки в массиве горных пород при конечных деформациях; при свободных опираниях; при шарнирных опираниях; при жестком защемлении.

Расчеты, проведенные на ЭВМ для случая осевого сжатия, показали, что точное удовлетворение граничным условиями к уравнению совместности деформаций приводит к некоторому снижению нижней критической нагрузки по сравнению с известными решениями для тех же параметров прогиба. Удержание 7 членов приведет к снижению нижнего критического напряжения

$\overline{\sigma}_k = \sigma_n / \sigma_8$ (σ_n - нижнее критическое напряжение, σ_8 - классическое значение верхнего критического напряжения). Аналогично

$$W = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.68)$$

При расчете необходимо использовать критерии корректности нелинейных соотношении при больших прогибах.

1.5. Научные основы прогноза и предупреждения неустойчивости выработок под действием поперечных и осевых сил

Развивая идеи авторов работ [21]-[24] о том, что:

- выработку в толще горных пород можно представить в виде трехслойной цилиндрической оболочки с внутренним радиусом R , внешним радиусом r , толщиной $h = h_1 + \Delta h$, длиной l с не жесткой матрицей заполнителя;
- действие внешних сил можно определить из формы изменения поперечного сечения критических деформаций заполнителя при $n=2$, $n=3$, $n=4$ овальную, треугольную, трапециевидную. При этом

$$E = (2 - 3)10^{-4} \text{ МПа}, \nu = (0,26 - 0,33);$$

$$E = (3 - 6)10^{-4} \text{ МПа}, \nu = (0,25 - 0,31);$$

$$E = (6 - 10)10^{-4} \text{ МПа}, \nu = (0,3 - 0,35);$$

- выработку в поперечном сечении, с точки зрения характера действия энергии деформации, можно разделить на три зоны, в продольном направлении также можно разделить на три зоны, но уже, с точки зрения её устойчивости. Первая, которая остается и после потери устойчивости в начальном безмоментном состоянии; вторая, где накапливается деформация после потери устойчивости; третья – зона прощелкивания: упругопластическая, непосредственно примыкающих к несущему слою, зона разрыхленных грунтов и нетронутой толщи, где определяют $\Delta h = h_1$ в данной работе рассматривается устойчивость выработки при осевом сжатии и нормальном давлении. Тогда уравнения возмущенного состояния выработки кругового сечения с учетом начальной деформации в первом предположении на основании формул будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1'}{\partial x} + \frac{\partial S_2'}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial T_2'}{\partial S} + \frac{\partial S_1'}{\partial x} = 0, \\ - (1 + \varepsilon_1^0) \frac{T_2'}{R} + \frac{\partial^2 M_{11}'}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}'}{\partial x \partial S} + \frac{\partial^2 M_{22}'}{\partial S^2} - P_1 \partial \ell'_{11} + \\ + RP \partial \ell'_{22} + \frac{1}{R} (RP + VK \varepsilon_2^0) \varepsilon_1' - \frac{k}{R} \varepsilon_2^0 \varepsilon_{21}' = 0. \end{aligned}$$

Здесь усилия до потери устойчивости определены:

$$T_1^0 = P_1 \langle 0, T_2^0 = -RP, S_1^0 = S_2^0 = 0.$$

Критические значения осевого и окружного усилия связаны $P_l = \lambda_l R$. Тогда докритические деформации на основании закона Гука определяются выражениями:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{P_1 + VRP}{\kappa(1 - \nu^2)} = const, \quad \varepsilon_1^0 = \frac{RP + VP_1}{\kappa(1 - \nu^2)} = const,$$

$$\varepsilon_{12}^0 = \varepsilon_{21}^0 = w_1^0 = w^0 = 0.$$

и безразмерная критическая нагрузка по формуле:

$$P_1^* = \frac{P}{E} = \frac{h}{R} \frac{m(1-\nu) \left\{ \varepsilon^2 \left[\delta^2 - 1 - \frac{\delta}{m} + (1+\nu^2) \frac{m}{\delta} + \frac{(1-\nu^2)m^2}{\delta^2} \right] + \frac{1}{\delta^2} \right\}}{(1-\nu)\delta + (1-\nu)(\nu_1 - 1)m + \frac{(1-\nu)^2 + (\nu_1 - 1)}{\delta} + \frac{[(1-3\nu)(\nu_2 - 1) + 2(1-\nu)^2]m}{\delta^2} - \frac{1-\nu}{m}} \quad (1.69)$$

где

$$\delta = \frac{m^2 + n^2}{m}; \quad \varepsilon = \frac{h}{R\sqrt{12(1-\nu^2)}}; \quad m = \frac{i\pi R}{l}.$$

При этом δ определим из условия минимума $\frac{\partial P^*}{\partial \delta} = 0$ в виде

$$\begin{aligned} & (1-\nu)\varepsilon^2\delta^6 + 2(1-\nu)\varepsilon^2[(\lambda_1 - 1)m - m^{-1}]\delta^5 + \varepsilon^2[(1-\nu)(4-3\nu) - (1-4\nu)(\lambda_1 - 1) + (1-\nu)m^{-2}]\delta^4 + \\ & + 2\varepsilon^2\{2(1-3\nu)(\lambda_1 - 1) + 4(1-\nu)^2 - (1-\nu)(1-\nu^2) - [(1-\nu)^2 + \nu(\lambda_1 - 1)]m^{-2}\}m\delta^3 - \\ & - \{\varepsilon^2[3(1-\nu^2)(1-\nu) + (1-\nu^2)(1-\nu)(\lambda_1 - 1)]m^2 + \varepsilon^2[(\lambda_1 - 1)(3-8\nu) + 7(1-\nu)^2 - (1-\nu)(1-\nu^2)] + \\ & + 3(1-\nu)\}\delta^2 - 2\{\varepsilon^2[(1-\nu^2)(1-\nu)(\lambda_1 - 1)m^2 + (1-3\nu)(\lambda_1 - 1) + (1-\nu)^3]m + \\ & + (1-\nu)[(\lambda_1 - 1)m - m^{-1}]\}\delta + \varepsilon^2[(1-\nu)^2(1-3\nu^2) + (1-3\nu)(1-\nu^2)(\lambda_1 - 1) - \\ & - \nu(1-\nu^2)(\lambda_1 - 1)]m^2 - \nu(\lambda_1 - 1) - (1-\nu^2) = 0. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Если в уравнениях возмущенного состояния выработки кругового сечения не будем учитывать начальные деформации, то безразмерная критическая нагрузка окружного усилия будет определяться выражением:

$$P_2^* = \frac{h}{R} \frac{m \left\{ \varepsilon^2 \left[\delta^2 - 1 - \frac{\delta}{m} + (1+\nu^2) \frac{m}{\delta} + \frac{(1-\nu^2)m^2}{\delta^2} \right] + \frac{1}{\delta^2} \right\}}{\delta + (\nu_1 - 1)m + \frac{1-\nu}{\delta} - \frac{1}{m}} \quad (1.71)$$

При этом δ определяется из следующего уравнения:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \delta^6 + 2\varepsilon^2 [(\lambda_1 - 1)m - m^{-1}] \delta^5 + \varepsilon^2 [(4 - 3\nu) - (\lambda_1 - 1) + m^{-2}] \delta^4 - \\ & - 2\varepsilon^2 [(1 - \nu)^2 m + (1 - \nu)m^{-1}] \delta^3 - \{\varepsilon^2 m^2 [3(1 - \nu^2) + (1 - \nu^2)(\lambda_1 - 1) - \nu(1 + \nu)m^{-2}] + 3\} \delta^2 + \\ & + 2\{\varepsilon^2 (1 - \nu^2)m [1 - (\lambda_1 - 1)m^2] - (\lambda_1 - 1)m + m^{-1}\} \delta - (1 - \nu)[\varepsilon^2 (1 - \nu^2)m^2 + 1] = 0. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Поступая совершенно аналогично, решим эту же самую задачу на основании уравнений возмущенного состояния, когда не учитываются сдвиг срединной поверхности и начальные деформации:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T_1'}{\partial X} + \frac{\partial S_2'}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial S_1'}{\partial X} + \frac{\partial T_2'}{\partial S} = 0, \\ & -\frac{T_2'}{R} + \frac{\partial}{\partial} \left(\frac{\partial}{\partial S} M_{21}' + \frac{\partial}{\partial X} M_{11}' \right) + \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial}{\partial X} M_{12}' + \frac{\partial}{\partial S} M_{22}' \right) - P_1 \partial \ell_{11}' - P_{1R} \partial \ell_{22}' = 0. \end{aligned}$$

При этом имеет место, следующее уравнение для определения критической нагрузки окружного усилия:

$$P_3^* = \frac{h}{R} \frac{m \left\{ \varepsilon^2 \left[\delta^2 - 1 - \frac{\delta}{m} + (1 + \nu^2) \frac{m}{\delta} + \frac{(1 - \nu^2)m^2}{\delta^2} \right] + \frac{1}{\delta^2} \right\}}{\delta + (\lambda_1 - 1)m + \frac{\nu}{\delta} + \frac{(1 + \nu)m}{\delta} - \frac{1}{m}}. \quad (1.73)$$

где δ определяется из выражения:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \delta^6 + 2\varepsilon^2 [(\lambda_1 - 1)m - m^{-1}] \delta^5 + \varepsilon^2 [(1 - 3\nu) - (\lambda_1 - 1) + m^{-2}] \delta^4 + \\ & + 2\varepsilon^2 [(1 + 2\nu - \nu^2)m - \nu m^{-1}] \delta^3 - \{\varepsilon^2 m^2 [3(1 - \nu^2) + (1 - \nu^2)(\lambda_1 - 1) + (2 + 2\nu - \nu^2)m^{-2}] + 3\} \delta^2 - \\ & - 2\{\varepsilon^2 (1 + \nu)m [\nu + (1 - \nu)(\lambda_1 - 1)m^2] + (\lambda_1 - 1)m + m^{-1}\} \delta + \varepsilon^2 (1 + \nu)^2 m^2 + \nu = 0. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Если за уравнение возмущенного значения выработки возьмем второе упрощение В.В. Новожилова при средней длине, то имеем:

$$\begin{aligned} & T_{11}' = k \left[\frac{\partial U}{\partial X} + \nu \left(\frac{\partial \nu}{\partial S} + \frac{w}{R} \right) \right], \quad T_2' = k \left(\frac{\partial \nu}{\partial S} + \frac{w}{R} + \nu \frac{\partial U}{\partial X} \right), \\ & S_1' = S_2' = \frac{k(1 - \nu)}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial S} + \frac{\partial \nu}{\partial X} \right), \quad M_{11}' = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} \right), \quad \varepsilon_1' = \frac{\partial U}{\partial X}, \end{aligned}$$

$$M'_{22} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), M'_{12} = M'_{21} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s},$$

$$\varepsilon'_1 = \frac{\partial U}{s x} + \frac{w}{R}, x'_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, x'_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, x'_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}.$$

Тогда для определения критической нагрузки окружного усилия получены уравнения

$$P_4^* = \frac{h}{R} \frac{m \left(\delta^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{\delta^2} \right)}{\delta + (\lambda_1 - 1)m}. \quad (1.75)$$

где δ определяется из выражения:

$$\varepsilon^2 \delta^5 + 2(\lambda_1 - 1) \varepsilon^2 m \delta^4 - 3\delta - 2(\lambda_1 - 1)m = 0. \quad (1.76)$$

Глава 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫРАБОТКИ ГОРНЫХ ПОРОД ПО КРИТИЧЕСКИМ ДЕФОРМАЦИЯМ. ПРОЦЕДУРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫРАБОТКИ НА ОСНОВАНИИ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

2.1. Теоретико-проектные расчеты напряженно-деформированного состояния и устойчивости выработки произвольного сечения в условиях эксплуатации

Задачей исследования являются аналитико-числовые решения устойчивости и выпучивания выработки в массиве горных пород, находящейся на упругом основании типа Винклера под действием неравномерной поперечной силы (Рисунок 2.1 – 2.2).

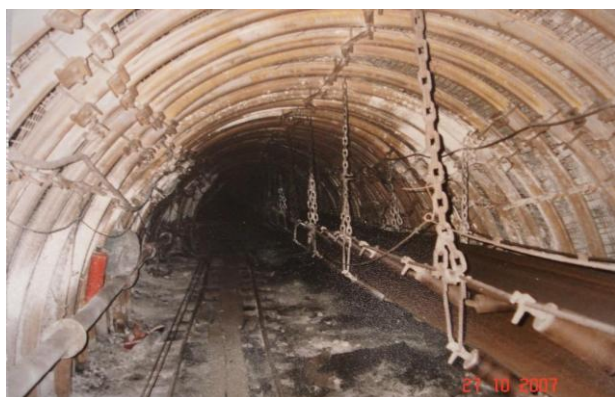


Рисунок 2.1 - Одиночная выработка в массиве горных пород

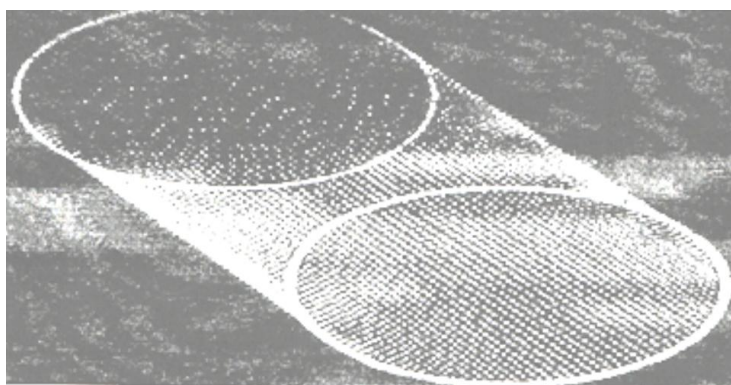


Рисунок 2.2 - Одиночная выработка в виде трехслойной цилиндрической оболочки как модель выработки в условиях эксплуатации

Предпосылкой решения данной задачи является разработка методики решения в области нелинейной теории упругости и математической теории упругости с применением интегральных преобразований.

Рассмотрение теории горного давления до настоящего времени в основном шло в двух направлениях:

Первое направление - применение методов макромеханики на основе специальных гипотез сводообразования. Во всех гипотезах, представленных на рисунках 2.3 -2.6 на выработку действует равномерное распределение напряжений по площади поперечных сечений и поперечная сила в продольном направлении, осевые силы пренебрегаются.

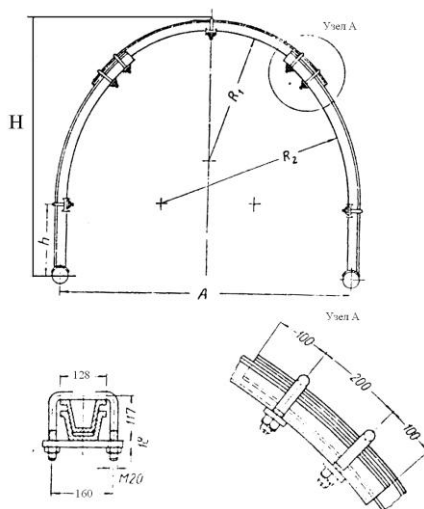


Рисунок 2.3 - Арочная металлическая крепь из спецпрофиля

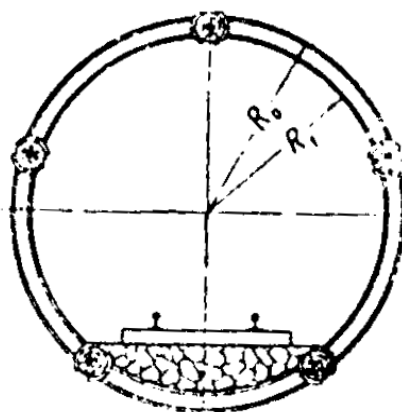


Рисунок 2.4 - Кольцевая арочно-шарнирная металлическая крепь.

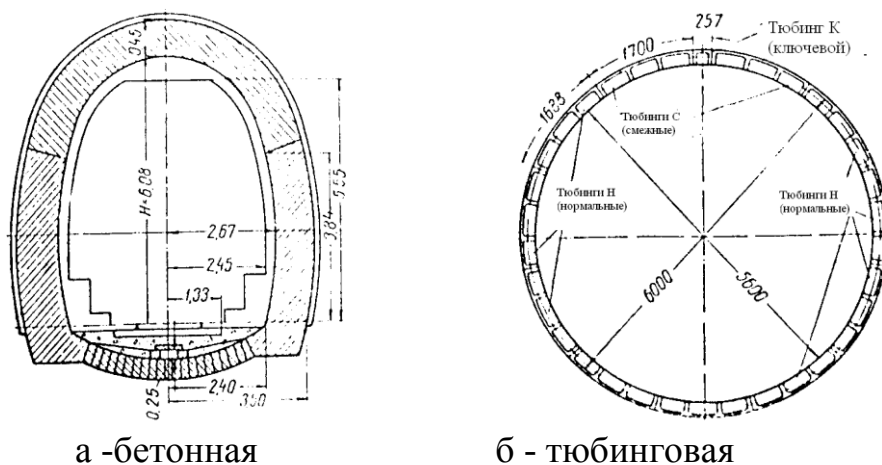


Рисунок 2.5 - Типы жесткой монолитной крепи.

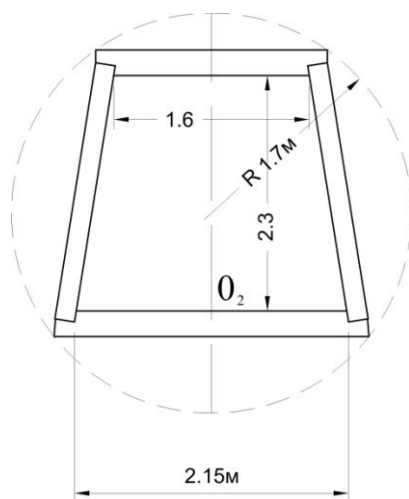


Рисунок 2.6 - Трапецевидная выработка, закрепленная деревянными рамками.

Основоположники: профессора и академики М.М. Протодяконов, В.Д. Слесарев, Л.М. Цимбаревич, Л.Д. Шевяков и другие.

II – направление – применение методов микромеханики на основе теории Ишлинского И.А:

- а) Уравнения равновесия, когда удлинения, сдвиги и углы повода малы с единицей, но граничные условия нелинейные.
- б) Условия совместности деформаций, на основе классической теории.
- в) Закон связывающий напряжения, на основе классической теории.

При этом расчетная схема к определению давления на крепь горизонтальной выработки рассчитывается в соответствии с рисунком 2.7.

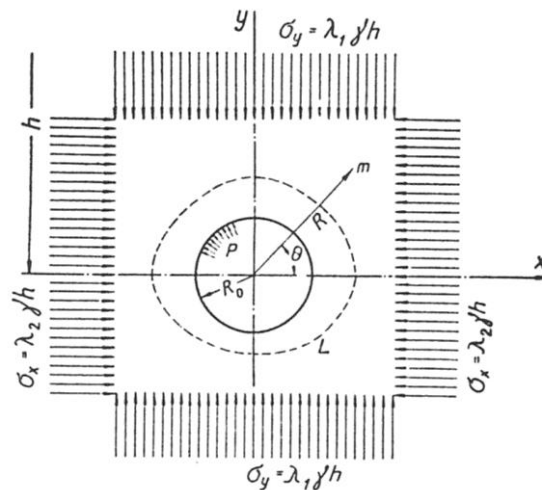


Рисунок 2.7 - Расчетная схема к определению давления на крепь горизонтальной выработки.

На выработку действует не только поперечная по длине, объемная по поперечному сечению сила, но действует осевая сила. По данному направлению можно составить конфигурации области пластических (неупругих) деформаций, линии равных нормальных напряжений, линии скольжения в области неупругих деформаций эпюры НДС выработки произвольного сечения и т.д. Основовоположники: Динник А.Н., Левина Ц.О., Михлин С.Г., Шерман Д.И., Савин Г.Н. и другие.

III – направление - на выработку действует объемная, поперечная и осевая силы сложной комбинации как статическая неравномерная, динамическая и квазисейсмическая, как со стороны разработки, так и со стороны нетронутого массива. Толщина рыхленного (упруго-высоковязкого) слоя определяется по выведенной формуле синус гиперболической функцией. Применяются методы микромеханики на основе геометрической нелинейной теории при сложном нагружении по критическим деформациям (рисунки 2.8 – 2.12).

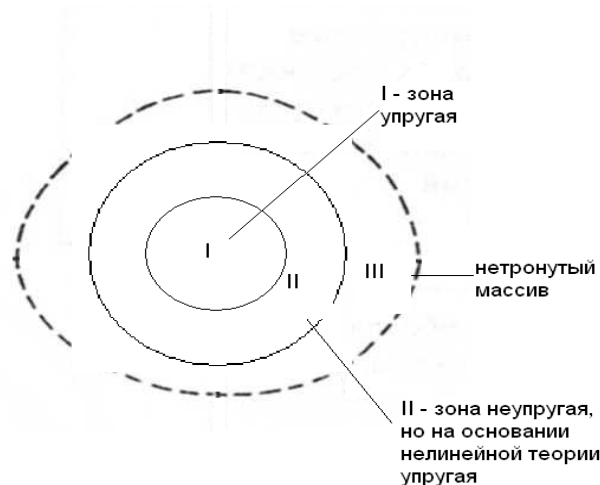


Рисунок 2.8 – Расчетная схема вычисления устойчивости выработки по третьему направлению

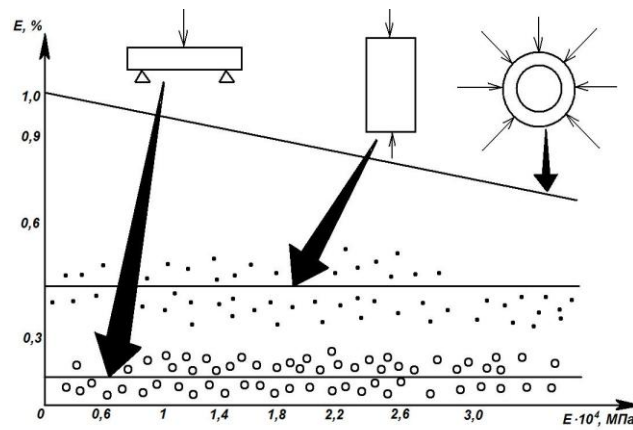
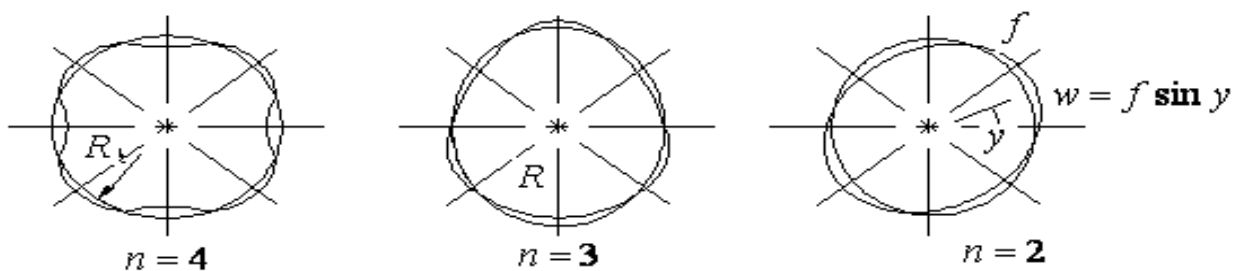


Рисунок 2.9 – Некоторые классы внутренних нагрузок по критическим деформациям

1. Если критическая деформация возрастает от 0,1% до 0,15%, то это есть действие поперечной нагрузки;
2. Если критическая деформация падает от 1,2% до 0,8%, то это есть действие объемных сил;
3. Если критическая деформация падает от 0,5 % до 0,4%, то это есть действие осевых сил.
4. Если критическая деформация имеет прямоугольный, треугольный, трапециевидный и синусоидальный вид, то на стенки выработки соответственно действуют внутренние поперечные неравномерные нагрузки

Эти результаты согласуются с результатами работ ученых Ю.В.Немеровского, А.А.Трымова, Ю.В.Векслера и других. Отличием является то, что форму критической деформации заполнителя сопоставляем с формой поперечного сечения выработки определяем внутреннюю нагрузку со стороны первой зоны.



Рассматривается случай нагружения выработки со стороны заполнителя, лежащей на упругом основании, распределенной нагрузки интенсивностью q , н/м на участке $0 < \xi < 0,9$ для одного участка.

Тогда неоднородная часть задачи будет

$$F(\xi, t) = q_0 \delta(0) - q(\xi),$$

где

$q(\xi) = \int_{-b}^b P(\xi, W) dW$, $\delta(0)$ - дельта функция Дирака, $P(\xi, W)$ - неравномерно распределенные поперечные нагрузки, направленные в сторону, противоположную направлению действия реакции $P(\xi)$. В данном случае не представляется возможным алгебраически сложить интенсивности действия нагрузок $q(\xi)$ и $P(\xi)$ так как $q(\xi)$ является критической нагрузкой функции прогибов, искажения формы поперечного сечения выработки прямоугольной, треугольной и трапециевидной эпюры.

2.2. Определение устойчивости, выпучивания и колебания выработки в «новом начале» как стационарного объекта с запаздывающим аргументом

Рассмотрим одиночную выработку в условиях разработки с внешним радиусом – R , длиной L и толщиной рыхленного массива – h [1], состоящих из трех типов крепления элементов: I - тип с поперечным сечением прямоугольной формы выработка типа тубинговых, II – тип с поперечным сечением – треугольной формы, выработка типа с обратным сводом, III – тип с поперечным сечением трапециевидной формы, с толщиной крепи: $h + \Delta h$, с радиусом рудного материала (заполнитель) – r .
Если за длину части выработки примем

$$\xi = \lambda \frac{r}{L} \quad (2.1)$$

как модель стационарного объекта с запаздыванием $x = \xi - t$, то I – тип выработки с крепью имеет характеристики: $0,6 \leq \xi \leq 0,9$, $2\lambda r$ - малая с плотностью распределения рыхленной зоны:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{2\pi\sigma} e^{-\frac{(\xi-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.2)$$

где $\sigma = 0,4$, $a = 0,2$.

II – тип выработки с крепью имеет характеристики: $0,3 \leq \xi \leq 0,6$, $2\lambda r$ - средняя с плотностью распределения рыхленной зоны:

$$\rho_2 = \frac{\rho_0}{2\pi\sigma} e^{-\frac{(\xi-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.3)$$

где $\sigma = 0,3$, $a = 0,35$.

III – тип выработки с крепью имеет вид $0,1 \leq \xi \leq 0,3$ $2\lambda r$ – большая, с плотностью распределения рыхленной зоны:

$$\rho_3 = \frac{\rho_0}{2\pi\sigma} e^{-\frac{(\xi-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.4)$$

где $\sigma = 0,3$, $a = 0,35\sigma = 0,2$; $a = 0,75$;

При такой постановке задачи коррекцию потоков, со стороны разработки, действующих на рыхлый массив (вторая зона) можно избрать:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (2.5)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - pq = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

где $\bar{V}(u,v)$ вектор скорости p – давление, ρ – плотность, μ – динамическая вязкость, u, v – соответственно горизонтальная и вертикальная составляющие скорости.

Для трех участков одиночной выработки (составной части с видами крепи) критическая нагрузка будет:

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= \frac{8}{3} q_0 \xi, \quad \lambda_b - \text{большая}, \quad 0,6 \leq \xi \leq 0,9 \\ f_2(\xi) &= 2q_0(1-\xi), \quad \lambda_b - \text{средняя}, \quad 0,3 \leq \xi \leq 0,6 \\ f_3(\xi) &= \frac{4}{3} q_0 \left(1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} \right), \quad \lambda_b - \text{малая}, \quad 0,6 \leq \xi \leq 0,9 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\text{где } q_0 = \frac{0,85E_j}{(1-\nu^2)^{3/4}}, \quad \lambda_b = 2h\sqrt{\frac{h}{2}}, \quad (2.10)$$

E_j – модуль Юнга рудного материала, первой зоны одиночной выработки, ν – коэффициент Пуассона.

Полученные выражения удовлетворяют условиям сопряжения трёх участков. Эти условия заключаются в том, что в смежных сечениях до и после места сопряжения участков, были бы одинаковы по методу академика А.Н.Крылова

[69], угловые перемещения, линейные перемещения, изгибающие моменты и перерезывающие силы. В удовлетворении указанных условий легко убедиться, сравнивая значения функции $\nu(\xi)\nu(\xi)$ как фундаментальной функции А.Н.Крылова (общее решение дифференциального уравнения изгиба, выпучивания одиночной выработки) и ее первых трех производных до и после мест сопряжения участков.

Условия контакта выработки с рыхленным массивом определим прямым и обратным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} W(x) e^{-i\lambda x} dx, \\ P(\lambda, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) e^{-i\lambda x} dx, \\ Q(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) e^{-i\lambda x} dx \end{aligned} \quad (2.11)$$

Теперь можно будет рассмотреть:

Изгиб (выпучивание) всей конструкции, в виде

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} - \frac{N_{kp}}{D} \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \frac{\eta}{D} \frac{dW}{d\xi} + \frac{K}{D} W = F(\xi, t) \quad (2.12)$$

$$F(\xi, t) = f_k(\xi) \int_0^\xi [V_n(\xi - t) - f(t)] dt \quad (2.13)$$

Колебание в виде

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} - \frac{N_{kp}}{D} \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \frac{\eta}{D} \frac{dW}{d\xi} + \frac{K}{D} W = F(\xi, t) \sin\left(\frac{m\pi}{2} \xi\right), \quad \xi = \lambda \frac{r}{L} \quad (2.14)$$

При расчете основ выпучивания, колебания можно принять за сложную динамическую нагрузку поперечного давления в виде

$F(x, t) = f_k(\xi) \int_0^\xi [V_n(\xi - t) - f(t)] dt$ с неравномерными поперечными нагрузками прямоугольной, треугольной, трапецевидной и синусоидальной эпюры, с соответствующими краевыми, начальными и граничными условиями.

Линеаризация и упрощение уравнения вынужденного выпучивания и колебаний возможны при решении конкретных задач.

Таким образом, как показывает анализ создание механико-математической модели определения устойчивости, выпучивания и колебания выработки как стационарного объекта с запаздывающим аргументом дает возможность науч-

но-технического обеспечения прогноза и управления геомеханическими процессами в массиве горных пород при разработке рудных месторождений. При этом отличие предлагаемого направления от имеющихся:

а) Форма критической деформации I – зоны определяется на основе нелинейной теории.

б) По формам критической деформации I – зоны определяется искажение формы поперечного сечения обрабатываемого материала.

в) По формам искажения формы поперечного сечения выработки определяется форма действия неравномерного поперечного сечения с произвольной эпюрой. Реакции основания несущих слоев представим в виде Винклера и Пастернака с учетом искажения поперечного сечения. В зависимости от вида неравномерной поперечной силы произвольной эпюры (прямоугольная, треугольная, трапециевидная и т.д.) определим выпучивание выработки в продольном направлении.

При этом искажение формы поперечного сечения приводит к неравномерному выпучиванию в продольном направлении с заданной неровностью поперечного сечения, т.е. эта задача с начальной неровностью: симметричной или кососимметричной волнистостью.

г) На основании 1 – ой задачи (основная задача) и 2-ой задачи (обратная задача) нелинейной теории упругости в геомеханике, определяются устойчивость и выпучивание выработки в массиве горных пород, находящейся на упругом основании, различных типов.

д) Если реакции оснований несущих слоев различные (типа Винклера, Пастернака, Фойгта-Максвелла и т.д.), то уравнения равновесия выпучивания в продольном направлении выработки также различные. Каждый из случаев влечет за собой непредсказуемые действия, которые называют «неизвестными статистическими, динамическими и сейсмическими силами».

е) В зависимости от решения в задачах делается предположение $\varepsilon_{ij} \leq 1$; $\varphi_{ij} \leq 1$, но углы поворота произвольные.

2.3. Расчет изменения кривизны рыхленного массива выработки под действием активной синусоидальной силы в зависимости от граничных условий на торцах

Рассмотрим подземную трубчатую конструкцию из упругого однородного кристаллического материала как модель одиночной выработки в толще горных пород рудных месторождений горизонтальной и наклонной залежи под действием внешних сил синусоидальной эпюры по критическим деформациям [1]-[2]:

$$f_k = f_k(l \frac{h}{r}) f(\frac{R}{r}) \sin \frac{m\pi}{L} x \quad (2.15)$$

где l – сближение торцов крепей, h – толщина рыхленного массива, R – внутренний радиус, пористость приближается к единице.

Воздушное сопротивление внутренней зоны выработки в условиях эксплуатации изменяется в широких пределах в зависимости от вида неравномерных поперечных нагрузок на рыхленный массив и от формы вида крепей. При этом, окружное напряжение зависит от максимальной нагрузки:

$$\sigma_{окр.крит} = f_k^* \left(n, \frac{h}{R} \right) \quad (2.16)$$

где n – собственное число волн искажения формы поперечного сечения, следовательно прочность выработки зависит от геометрических параметров и линейных размеров $\frac{h}{R}$

Изучение геомеханических условий отработки месторождений полезных ископаемых, геологические и петрографические неоднородности массивов руды и пород месторождений представим как изучение физико-механических свойств первой и второй зоны выработки методом микромеханики. При этом, впереди в условиях эксплуатации имеем зону повышенного НДС с коэффициентом интенсивности k :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{k}{\sqrt{2\pi\gamma}} \begin{cases} f_x(W_0) \\ f_y(W_0) \\ f_z(W_0) \end{cases} \quad (2.17)$$

где $W_0 = f_0 \sin \frac{m\pi}{L} x$ – начальная неправильность, f_0 – стрела начальной неправильности, m – число полуволн в продольном направлении.

Уравнение равновесия при отсутствии реактивных сил и заполнителя трубчатой конструкции имеет вид:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} = \lambda_k \frac{q_k}{D} \sin \omega x, \quad (2.18)$$

где

$$q_k = \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{\frac{2}{4}}} \left(\frac{H}{L} \right) \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^2, \quad \lambda_k = \left\{ \frac{8}{3}; 2; \frac{4}{3} \right\}, \quad D = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \quad (2.19)$$

То обстоятельство, что в смежных сечениях, до и после места сопряжения неравномерных поперечных нагрузок участков крепей выработки, были бы одинаковыми:

- линейные перемещения – W ;
- угловые перемещения – $\frac{dW}{dx}$;
- изгибающие моменты – $M = EJ \frac{d^2W}{dx^2}$;
- перерезывающие силы – $Q = \frac{dM}{dx}$.

Из уравнения равновесия определим:

$$\frac{d^3W}{dx^3} = \lambda_k \frac{q_k}{D} \left[-\frac{1}{\omega} \cos \omega x + C_1 \right] \quad (2.20)$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \lambda_k \frac{q_k}{D} \left[-\frac{1}{\omega^2} \sin \omega x + C_1 x + C_2 \right] \quad (2.21)$$

$$\frac{dW}{dx} = \lambda_k \frac{q_k}{D} \left[\frac{1}{\omega^3} \cos \omega x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \right] \quad (2.22)$$

$$W = \lambda_k \frac{q_k}{D} \left[\frac{1}{\omega^4} \sin \omega x + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 \right] \quad (2.23)$$

Теперь рассмотрим различные граничные условия.

1.1 Оба края на торцах шарнирно-закрепленные, т.е.

$$\begin{aligned} W(x)|_{x=0} &= 0; \quad \frac{d^2W}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0, \\ W(x)|_{x=L} &= 0; \quad \frac{d^2W}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

На основании формул (2.21), (2.23) из граничных условий (2.24) определим произвольные постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$C_1 = \frac{1}{L\omega^2} \sin \omega L; \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{6 + \omega^2 L^2}{6L\omega^4}, \quad C_4 = 0. \quad (2.25)$$

$$W = \lambda_k \frac{q_k}{D} \left[\frac{1}{\omega^4} \sin \omega x + \frac{\sin \omega L}{6L\omega^2} x^3 - \frac{6 + \omega^2 L^2}{6L\omega^4} x \right] \quad (2.26)$$

1.2 Оба края на торцах скользяще заделанные, то есть:

$$\begin{aligned} W(x)|_{x=0} &= 0; \quad \frac{dW}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \\ W(x)|_{x=L} &= 0; \quad \frac{dW}{dx} \Big|_{x=L} = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Из граничных условий (2.27) определим произвольные постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\begin{aligned} C_1 &= 12 \left[\frac{\sin \omega L}{L^3 \omega} - \frac{\cos \omega L}{2L^2} - \frac{1}{L^2} \right]; \\ C_2 &= 12 \left[\frac{1}{L^3 \omega} - \frac{\sin \omega L}{L^2 \omega^4} + \frac{\cos \omega L}{3\omega^3 L^2} \right]; \quad C_3 = -\frac{1}{\omega^3}; \quad C_4 = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} W &= \lambda_k \frac{q_k}{D} \left[\frac{1}{\omega^4} \sin \omega x + 2 \left(\frac{\sin \omega L}{L^3 \omega} - \frac{\cos \omega L}{2L^2} - \frac{1}{L^2} \right) x^3 + \right. \\ &\quad \left. 6 \left[\frac{1}{L^3 \omega} - \frac{\sin \omega L}{L^2 \omega^4} + \frac{\cos \omega L}{3\omega^3 L^2} \right] x^2 - \frac{1}{\omega^3} x + C_4 \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

На торцах левый край свободный, а правый край скользяще-заделанный, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=0} &= 0, \quad \frac{d^3 W}{dx^3} \Big|_{x=0} = 0, \\ W(x)|_{x=L} &= 0; \quad \frac{dW}{dx} \Big|_{x=L} = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Определим произвольные постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{\omega}; C_2 = 0; C_3 = -\frac{1}{\omega^3} \cos \omega L - \frac{L^2}{2\omega}; \\
C_4 &= \frac{L \cos \omega L}{\omega^3} - \frac{\sin \omega L}{\omega^4} + \frac{L^3}{3\omega}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Подставляя (2.31) в (2.23) получим:

$$W = \lambda_k \frac{q_k}{D} \left[\frac{1}{\omega^4} \sin \omega x + \frac{x^3}{6\omega} + \left(-\frac{1}{\omega^3} \cos \omega L - \frac{L^2}{2\omega} \right) x + \frac{L \cos \omega L}{\omega^3} - \frac{\sin \omega L}{\omega^4} + \frac{L^3}{3\omega} \right] \tag{2.32}$$

На торцах левый край шарнирно-закрепленный, а правый край скользяще-заделанный, т.е.

$$\begin{aligned}
W(x)|_{x=0} &= 0, \quad \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0, \\
W(x)|_{x=L} &= 0; \quad \frac{dW}{dx} \Big|_{x=L} = 0.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Определим произвольные постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$C_1 = 6 \left(\frac{1}{L^2 \omega^3} - \frac{\sin \omega L}{L^3 \omega^4} \right); C_2 = 0; C_3 = -\frac{1}{\omega^3}; C_4 = 0. \tag{2.34}$$

$$W = \lambda_k \frac{q_k}{D} \left[\frac{1}{\omega^4} \sin \omega x + \left(\frac{1}{L^2 \omega^3} - \frac{\sin \omega L}{L^3 \omega^4} \right) x^3 - \frac{1}{\omega^3} x \right] \tag{2.35}$$

На торцах левый край скользяще-заделанный, а правый край шарнирно-закрепленный, т.е.

$$\begin{aligned}
W(x)|_{x=0} &= 0, \quad \frac{dW}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \\
W(x)|_{x=L} &= 0; \quad \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Определим произвольные постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\begin{aligned} C_1 &= -3\left(\frac{1}{L^2\omega^2} - \frac{(2+L^2\omega^2)\sin\omega L}{2L^2\omega^4}\right); \\ C_2 &= 3\left(\frac{1}{L\omega^2} - \frac{(6+L^2\omega^2)\sin\omega L}{6L^2\omega^4}\right); C_3 = -\frac{1}{\omega^3}; C_4 = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} W &= \lambda_k \frac{q_k}{D} \left[\frac{1}{\omega^4} \sin\omega x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L^2\omega^3} - \frac{(2+L^2\omega^2)\sin\omega L}{2L^3\omega^4} \right) x^3 + \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\left(\frac{1}{L\omega^2} - \frac{(6+L^2\omega^2)\sin\omega L}{6L^2\omega^4}\right)x^2}{2} - \frac{1}{\omega^3} x \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{q_k}{D} &= \lambda_k \frac{10, 2\sqrt[4]{1-\nu^2}}{h^3} \left(\frac{H}{L} \right) \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}}, \\ \lambda_k &= \left\{ \frac{8}{3}; 2; \frac{4}{3} \right\}, \quad \omega = \frac{m\pi}{L} \end{aligned} \quad (2.39)$$

С помощью программирования в системе Матлаб были получены результаты вышеприведенных задач.

2.4. Расчет колебаний рыхленного массива выработки под действием динамической нагрузки

Рассмотрим как модель одиночной выработки трубчатую конструкцию из эластомера длиной L , толщиной h , внутренним радиусом R без заполнителя [121]-[122]. Воздушное сопротивление изменяется в широких пределах и определяется по эмпирической формуле $\mu \approx 1,4 f\left(\frac{h}{R}, \rho_c\right)$, ρ_c - плотность материала при заданной нагрузке.

Условие равновесия запишем в виде

$$EJ \frac{d^4 W}{dx^4} = f(x) \quad (2.40)$$

$$x = \xi - t, \quad \xi = \lambda_b \left(\frac{R}{L} \right) \quad (2.41)$$

Тогда

$$\frac{d^4 W}{dx^4} = F(\xi, t) \quad (2.42)$$

Предположим: $F(\xi, t) = q_k(\xi)t$ и за бесконечно малый промежуток времени

$\Delta\tau = \frac{\Delta\xi}{v}$ динамическая нагрузка неподвижна. После истечения времени $\Delta\tau$ нагрузка исчезает, тотчас появляясь на соседнем участке $\Delta\xi$ со скоростью $v = v_0 \pm \alpha t$.

При таких предположениях имеем:

$$F(\xi, t) = \begin{cases} f_1(\xi) = \frac{4}{3}q_0(1 - \xi + \frac{\xi^2}{2}), & 0,1 \leq \xi \leq 0,3 \\ f_2(\xi) = 2q_0(1 - \xi), & 0,3 \leq \xi \leq 0,6 \\ f_3(\xi) = \frac{8}{3}q_0\xi & 0,6 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (2.43)$$

Данная модель называется стационарным объектом с запаздывающим аргументом. Для предполагаемой модели сделаем предположение, принятое в [123].

Теперь в качестве второго приближения, рассмотрим случай:

$$q_k = \lambda_k \frac{0,85}{(1 - v^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}}, \quad \lambda_k = \left\{ \frac{8}{3}; 2; \frac{4}{3} \right\} \quad (2.44)$$

1.1 На торцах (короткая часть) левый край скользяще-заделанный, а правый край – свободный, т.е.

$$\begin{aligned} W|_{\xi=0,6} &= 0, & \frac{dW}{d\xi}|_{\xi=0,6} &= 0, \\ \frac{d^2 W}{d\xi^2}|_{\xi=1} &= 0; & \frac{d^3 W}{dx^3}|_{\xi=1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Из граничных условий (2.45) определим:

$$\frac{d^3W}{d\xi^3} = \frac{8}{3} \left[\frac{\xi^2}{2} + C_1 \right] q_0 \quad (2.46)$$

$$\frac{d^2W}{d\xi^2} = \frac{8}{3} \left[\frac{\xi^3}{6} + C_1\xi + C_2 \right] q_0 \quad (2.47)$$

$$\frac{dW}{d\xi} = \frac{8}{3} \left[\frac{\xi^4}{24} + C_1 \frac{\xi^2}{2} + C_2\xi + C_3 \right] q_0 \quad (2.48)$$

$$W(\xi) = \frac{8}{3} \left[\frac{\xi^5}{120} + C_1 \frac{\xi^3}{6} + \frac{C_2\xi^2}{2} + C_3\xi + C_4 \right] q_0 \quad (2.49)$$

На основании формул (2.46)-(2.49) из граничных условий (2.45) определим произвольные постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{3}, C_3 = -0,1154, C_4 = -0,15176 \quad (2.50)$$

$$W(\xi) = \frac{q_0}{45} \left[\xi^5 - 10\xi^3 + 20\xi^2 - 13,848\xi - 18,2112 \right] \quad (2.51)$$

1.2 На торцах (средняя часть) левый край скользяще-заделанный, а правый край – свободный, т.е.

$$\begin{aligned} W|_{\xi=0,3} = 0, \quad \frac{dW}{d\xi}|_{\xi=0,3} = 0, \\ \frac{d^2W}{d\xi^2}|_{\xi=0,6} = 0; \quad \frac{d^3W}{d\xi^3}|_{\xi=0,6} = 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Из граничных условий (2.52) определим:

$$\frac{d^3W}{d\xi^3} = q_0 \left[2\xi - \xi^2 + 2C_1 \right] \quad (2.53)$$

$$\frac{d^2W}{d\xi^2} = \frac{q_0}{3} \left[3\xi^2 - \xi^3 + 6C_1\xi + 6C_2 \right] \quad (2.54)$$

$$\frac{dW}{d\xi} = \frac{q_0}{12} \left[4\xi^3 - \xi^4 + 12C_1\xi^2 + 24C_2\xi + 24C_3 \right] \quad (2.55)$$

$$W(\xi) = \frac{8q_0}{3} \left[\frac{1}{120} \xi^4 - \xi^5 + \frac{1}{6} C_1\xi^3 + \frac{1}{2} C_2\xi^2 + C_3\xi + C_4 \right] \quad (2.56)$$

На основании формул (2.53)-(2.56) из граничных условий (2.52) определим произвольные постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$C_1 = -0,42; C_2 = 0,108; C_3 = -0,0176625, C_4 = -0,0017615 \quad (2.57)$$

$$W(\xi) = \frac{q_0}{60} \left[\frac{1}{120} \xi^4 - \xi^5 - 8,4\xi^3 + 6,48\xi^2 - 2,1195\xi - 2,1138 \right] \quad (2.58)$$

1.3 На торцах (длинная часть) левый край скользяще-заделанный, а правый край – свободный, т.е.

$$\begin{aligned} W|_{\xi=0,1} = 0, \quad \frac{dW}{d\xi} \Big|_{\xi=0,1} = 0, \\ \frac{d^2W}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0,3} = 0; \quad \frac{d^3W}{d\xi^3} \Big|_{\xi=0,3} = 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Из граничных условий (2.59) определим:

$$\frac{d^3W}{d\xi^3} = \frac{4}{3} q_0 \left[\xi - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} + C_1 \right] \quad (2.60)$$

$$\frac{d^2W}{d\xi^2} = \frac{4}{3} q_0 \left[\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^4}{24} + C_1\xi + C_2 \right] \quad (2.61)$$

$$\frac{dW}{d\xi} = \frac{4}{3} q_0 \left[\frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^4}{24} + \frac{\xi^5}{120} + C_1 \frac{\xi^2}{2} + C_2\xi + C_3 \right] \quad (2.62)$$

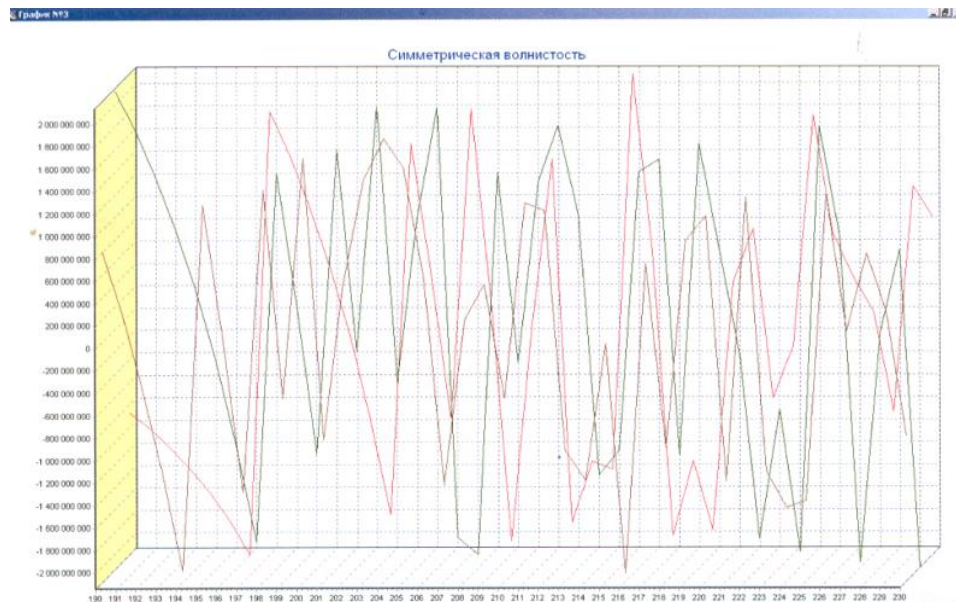
$$W(\xi) = \frac{1}{540} q_0 \left[30\xi^4 - 6\xi^5 + \xi^6 + 120C_1\xi^3 + 360C_2\xi^2 + 720C_3\xi + 720C_4 \right] \quad (2.63)$$

На основании формул (2.60)-(2.63) из граничных условий (2.59) определим произвольные постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 :

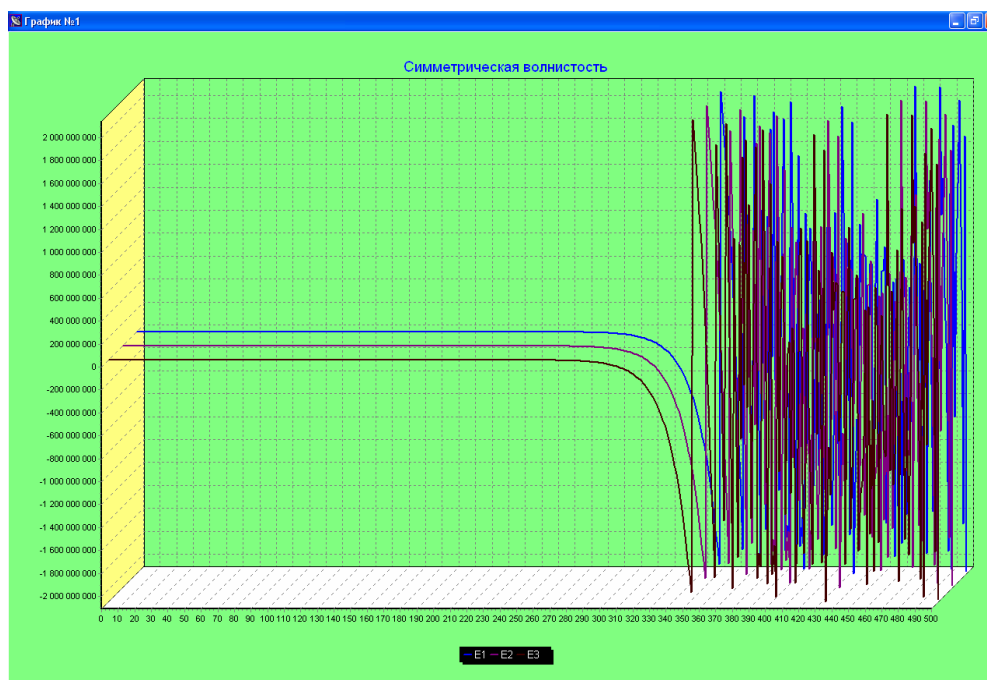
$$C_1 = -0,2595; C_2 = 0,037; C_3 = -0,002294/3, C_4 = -0,001998/9 \quad (2.64)$$

$$W(\xi) = \frac{1}{540} q_0 \left[\xi^6 - 6\xi^5 + 30\xi^4 - 31,14C_1\xi^3 + 0,1332\xi^2 + 0,55\xi + -0,1598 \right] \quad (2.65)$$

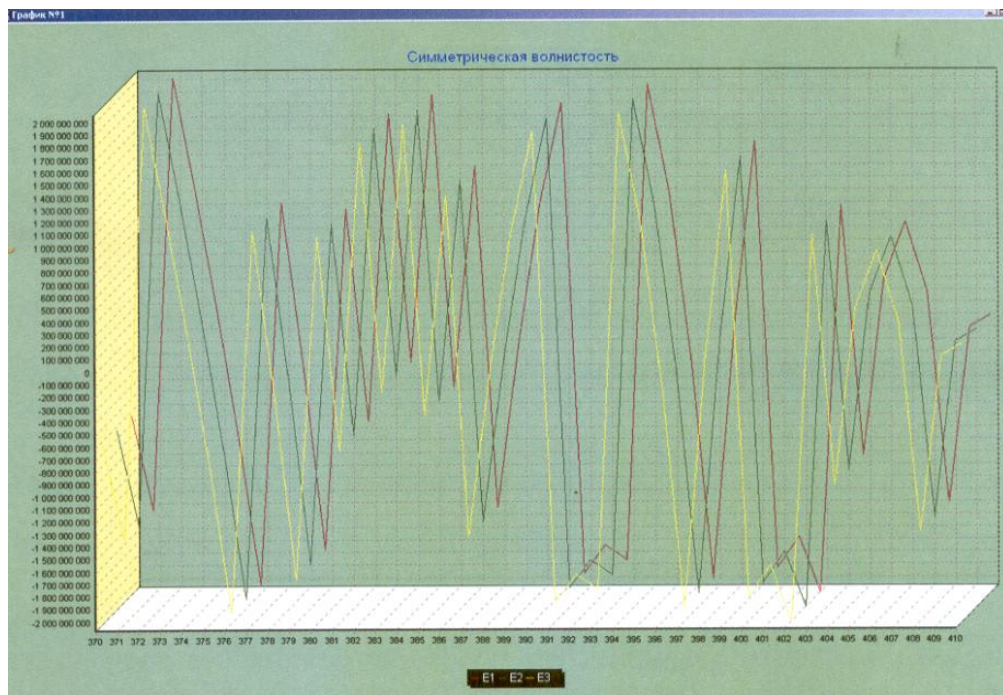
Ниже приведены колебания рыхленного массива в зависимости от внешней динамической нагрузки при заданных граничных условиях.



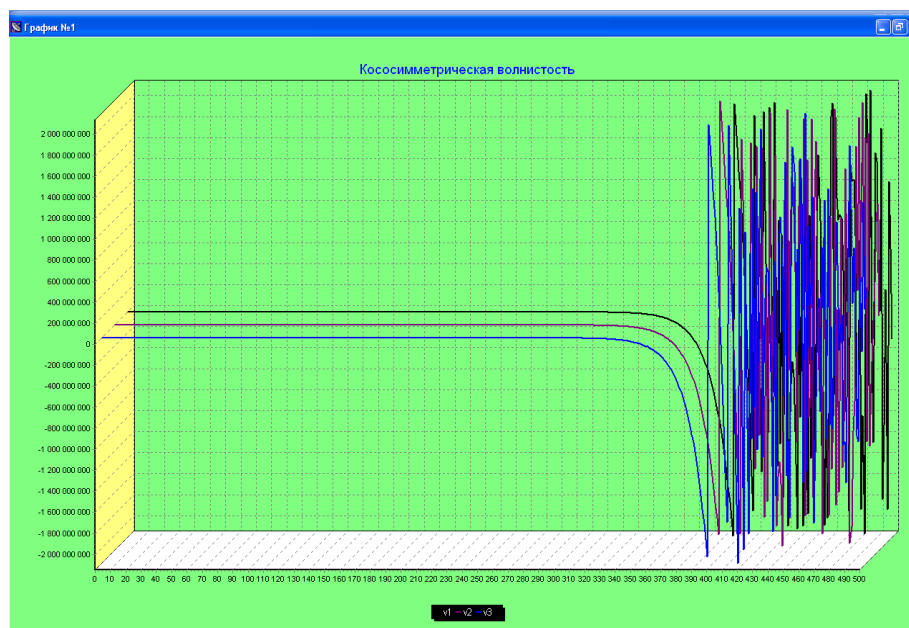
Колебание рыхленного массива в зависимости от внешней динамической нагрузки (к 1.1)



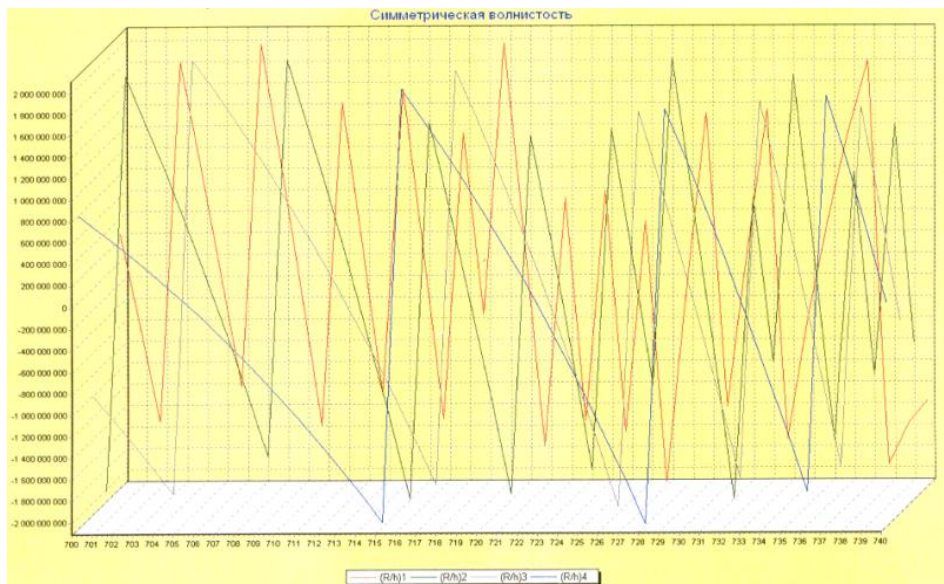
Колебание рыхленного массива в сопряжении, когда $0,1 \leq \xi \leq 1$



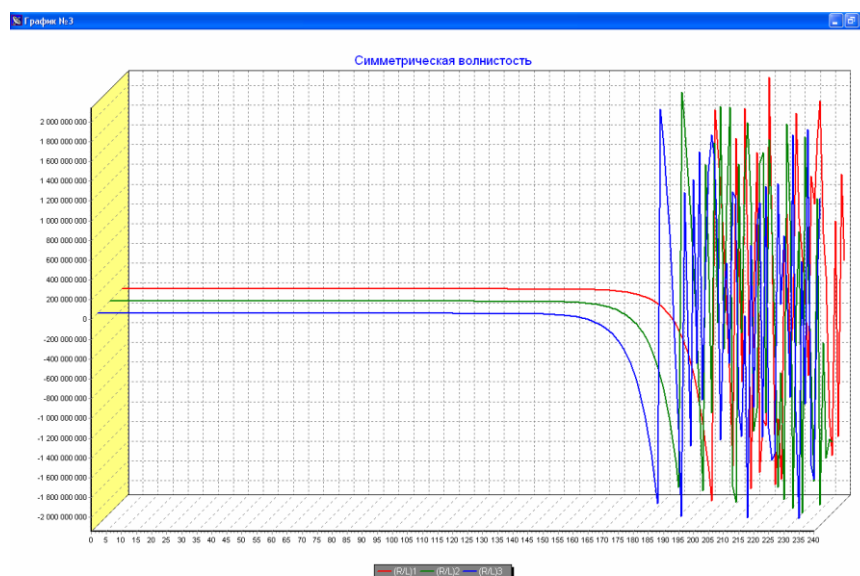
Колебание рыхленного массива в зависимости от внешней динамической нагрузки ($\kappa 1.2$)



Колебание рыхленного массива в сопряжении, когда $0 \leq \xi \leq 1$



Колебание рыхленного массива в зависимости от внешней динамической нагрузки ($\kappa 1.3$)



Колебание рыхленного массива в сопряжении, когда $0,1 \leq \xi \leq 1$

1.4 Если на выработку действует активная сила синусоидального типа

$q_k = \frac{8}{3} q_0 \xi \sin \omega \xi$, $0,6 \leq \xi \leq 1$, то уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} = \frac{8}{3} q_0 \xi \sin \omega \xi \quad (2.66)$$

Тогда из граничных условий (2.45) получим:

$$\begin{aligned}
 W(\xi) = & \frac{8}{3} q_0 \left[\frac{4}{\omega^5} \cos \omega \xi + \frac{1}{\omega^4} \xi \sin \omega \xi + \frac{1}{6\omega^2} (\omega \cos \omega - \sin \omega) \xi^3 + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\omega} \sin \omega + \frac{2 - \omega^2}{\omega^2} \cos \omega \right) \xi^2 + \left(\frac{3}{4} \sin \frac{3}{5} \omega - \frac{3}{5\omega^2} \cos \frac{3}{5} \omega - \right. \\
 & \left. \frac{39\omega^2 - 60}{50\omega^2} \cos \omega - \frac{60\omega - 9}{50\omega^2} \sin \omega \right) \xi + \frac{9\omega^2 - 100}{25\omega^2} \cos \frac{3}{5} \omega - \\
 & \left. - \frac{3(4 + 3\omega^4)}{20\omega^4} \sin \frac{3}{5} \omega + \frac{9(17\omega^2 - 30)}{250\omega^2} \cos \omega + \frac{9(5\omega - 1)}{125\omega^2} \sin \omega \right], \\
 \omega = & \frac{m\pi}{L}
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

1.5 Если на выработку действует активная сила синусоидального типа

$q_k = 2q_0(1 - \xi) \sin \omega \xi$, $0,3 \leq \xi \leq 0,6$, то уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} = 2q_0(1 - \xi) \sin \omega \xi \tag{2.68}$$

Тогда из граничных условий (2.52) получим

$$\begin{aligned}
 W(\xi) = & 2q_0 \left[\frac{1}{\omega^4} \sin \omega \xi + \frac{4}{\omega^5} \cos \omega \xi - \frac{1}{\omega^4} \xi \sin \omega \xi + \right. \\
 & + \frac{1}{6\omega^2} \left(\frac{1}{\omega^2} \sin \frac{3}{5} \omega + \frac{2}{5\omega} \cos \frac{3}{5} \omega \right) \xi^3 - \frac{1}{10\omega^2} \left(\sin \frac{3}{5} \omega + \frac{6\omega^2 + 50}{5\omega} \cos \frac{3}{5} \omega \right) \xi^2 + \\
 & + \left(\frac{13\omega^2 + 150}{225\omega^2} \cos \frac{3}{5} \omega + \frac{1}{90\omega^2} \sin \frac{3}{5} \omega - \frac{2}{\omega^2} \cos \frac{\omega}{3} + \right. \\
 & + \frac{3}{\omega^4} \sin \frac{\omega}{3} \left. \right) \xi + \frac{2\omega^2 - 4}{\omega^5} \cos \frac{\omega}{3} - \frac{3}{\omega^4} \sin \frac{\omega}{3} + \\
 & \left. + \frac{1}{180\omega^2} \sin \frac{3\omega}{5} - \frac{17\omega^2 + 225}{2025\omega^2} \cos \frac{3}{5} \omega \right], \quad \omega = \frac{m\pi}{L}
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

1.6 Если на выработку действует активная сила синусоидального типа

$q_k = \frac{4}{3} q_0 (1 - \xi + \frac{\xi^2}{2}) \sin \omega \xi$, $0,1 \leq \xi \leq 0,3$, то уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} = \frac{4}{3} q_0 (1 - \xi + \frac{\xi^2}{2}) \sin \omega \xi \tag{2.70}$$

Тогда из граничных условий (2.59) получим

$$\begin{aligned}
W(\xi) = & \frac{4}{3} q_0 \left[\frac{\omega^2 - 2\omega - 6}{\omega^6} \sin \omega \xi - \frac{2}{\omega^6} \cos \omega \xi + \frac{\omega - 1}{\omega^5} \xi \sin \omega \xi + \right. \\
& + \frac{3}{\omega^5} \xi \cos \omega \xi + \frac{1}{2\omega^4} \xi^2 \sin \omega \xi + \left[\frac{6\omega - 1}{6\omega^2} \sin \frac{\omega}{3} + \frac{14\omega^2 - 21\omega - 81}{54\omega^2} \cos \frac{\omega}{3} \right] \xi^3 + \\
& + \left[\frac{2\omega^2 + 9\omega - 18}{9\omega^4} \sin \frac{\omega}{3} - \frac{14\omega^2 - 21\omega + 18}{54\omega^4} \cos \frac{\omega}{3} \right] \xi^2 + \left(\frac{1,1\omega + 1}{\omega^5} \sin \frac{\omega}{10} - \right. \\
& - \frac{1,12\omega^2 - 2,1\omega - 3}{\omega^5} \cos \frac{\omega}{10} - \frac{0,67\omega^2 + 1,755\omega + 3,6}{9\omega^2} \sin \frac{\omega}{3} + \\
& + \frac{1,19\omega^2 - 1,785\omega + 3,015}{27\omega^2} \cos \frac{\omega}{3} \Big] \xi - \frac{1,26\omega^2 - 2\omega - 6}{\omega^6} \sin \frac{\omega}{10} - \\
& - \frac{0,112\omega^2 - 0,21\omega + 2}{\omega^6} \cos \frac{\omega}{10} - \frac{0,42\omega^2 - 0,087\omega - 0,38}{9\omega^4} \sin \frac{\omega}{3} - \\
& \left. - \frac{0,056\omega^2 - 0,084\omega + 0,171}{27\omega^3} \cos \frac{\omega}{3} \right], \quad \omega = \frac{m\pi}{L}
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Глава 3. ТЕОРЕТИКО-ПРОЕКТНЫЕ РАСЧЕТЫ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ВЫРАБОТКИ

3.1. Напряженно-деформированное состояние и устойчивость в слоистых горных массивах ослабленных выработками прямоугольного сечения и прямоугольной формы критической деформации

Рассмотрим НДС в слоистых горных массивах, ослабленных выработками с прямоугольными критическими деформациями. Предположим такие соотношения между поперечными и продольными размерами выработки, которые позволяют исходить из решения плоской задачи нелинейной теории упругости. Кроме того, будем считать, что по высоте сечения выработки, напряжения меняются незначительно и возможна упрощенная схема нагрузки с заменой массы упругой среды равномерно распределенной нагрузкой приложенной из бесконечности:

$$\begin{aligned} S_{11}^{(1)} &= -\bar{P}_1, & S_{22}^{(1)} &= -q_1, & S_{12}^{(1)} &= 0, \\ S_{11}^{(2)} &= -\bar{P}_2, & S_{22}^{(2)} &= -q_2, & S_{12}^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

Предполагается, что каждый из слоев, а так же вмещающая их порода представляют собой изотропные упругие тела со своими механическими характеристиками и на линиях контакта осуществляется полное сцепление.

Для решения задачи используем уравнения устойчивости Био М.Б. и Новожилова В.В. Попутно рассмотрим явления внутренней неустойчивости первого и второго родов. Эти интересные явления, впервые отмеченные в работах М.Б. Био, были детально изучены в работах А.Н. Гузя. Использование граничных условий и условий прилипания между слоями сводится характеристическому уравнению для определения критической нагрузки, при предложении, что все слои после деформации так же остаются упругими и работают совместно без скольжения. Если для каждого слоя ввести некоторый функционал, пропорциональной дополнительной энергии деформации, содержащий физические характеристики данного слоя, то можно составить рекуррентные уравнения, связывающие шесть смещений на трех поверхностях раздела. Тогда для n слоев имеются $2(n-1)$ рекуррентных уравнений, т.е. по два уравнения для каждой поверхности раздела. Добавляя граничные условия, получим $2n+2$ уравнений для $2n+2$ неизвестных. Данная система разрешима относительно смещений поверхностей раздела и поэтому, приравнявая к нулю детерминант этой системы, получим характеристическое уравнение для определения критической силы.

Рассматривается устойчивость многослойной полосы выработки, когда удлинения, сдвиги и углы поворота малы по сравнению с единицей, что соответствует второй системе упрощения. В качестве примера рассмотрим устойчи-

вость несжимаемой двухслойной полосы под действием равномерно распределенных нагрузок по осям ОХ и ОУ в соответствии с рисунком 3.1. Упругие свойства каждого слоя суть такие, что направления упругой симметрии одинаковы для обоих слоев и параллельны главным направлениям начального напряжения. На поверхностях раздела, предположим, имеет место идеальное прилипание. Упругие коэффициенты в первом слое обозначены через N_1 и Q_1 , а начальные напряжения сжатия через: $S_{11}^{(1)} = -\bar{P}_1$, $S_{22}^{(1)} = -\bar{q}_1$, $S_{12}^{(1)} = 0$. Для второго слоя тогда имеем N_2 , Q_2 и $S_{11}^{(2)} = -\bar{P}_2$, $S_{22}^{(2)} = -\bar{q}_2$, $S_{12}^{(2)} = 0$. Далее через $u_1^{(1)}, v_1^{(1)}$ и $\tau_1^{(1)}, q_1^{(1)}$ обозначим смещения и силы на верхней части первого слоя, а также величины в нижней части первого слоя – через $u_2^{(1)}, v_2^{(1)}$ и $\tau_2^{(1)}, q_2^{(1)}$. Аналогичные выражения для второго слоя будут $u_2^{(2)}, v_2^{(2)}$ и $\tau_2^{(2)}, q_2^{(2)}$ и $u_3^{(2)}, v_3^{(2)}$ и $\tau_3^{(2)}, q_3^{(2)}$. Условие идеального прилипания на поверхности раздела имеет вид

$$u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, v_2^{(1)} = v_2^{(2)}, \text{ и } \tau_2^{(1)} = \tau_2^{(2)}, q_2^{(1)} = q_2^{(2)} \quad (3.2)$$

Известно, что закон составления уравнений возмущенного состояния уравнений возмущенного состояния различен, к тому же он имеет различную форму в зависимости от предположений относительно величин деформаций.

В качестве уравнений устойчивости принимаем уравнения М.Б.Био[61]:

$$\frac{\partial s_{11}^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial s_{12}^{(j)}}{\partial y} - (\bar{P}_j - \bar{q}_j) \frac{\partial w_z^{(j)}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial s_{12}^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial s_{22}^{(j)}}{\partial y} + (\bar{P}_j - \bar{q}_j) \frac{\partial w_z^{(j)}}{\partial x} = 0, \quad (3.3)$$

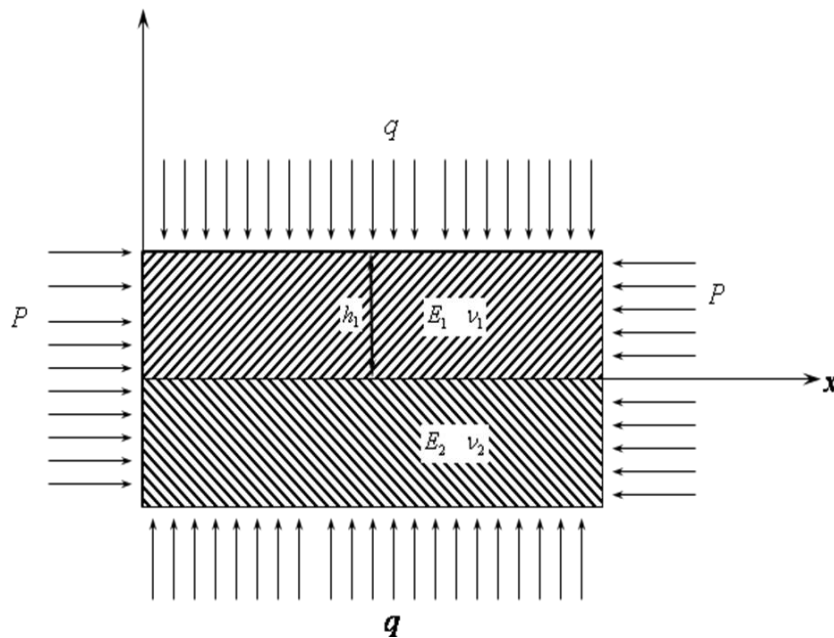


Рисунок 3.1 – Схема приложения нагрузок на двухслойную полосу выработки

Подбор физико-механических свойств отработанного материала и зоны рыхленного массива очень затруднителен. Тем не менее, в процессе проведения

участковых разведочных, подготовительных и нарезных выработок, а так же из исследования керна разведочных скважин можно определить E_1, E_2, ν_1, ν_2 . Ниже приводятся данные: когда толщины рыхленного массива $\hat{h}_1$ составляет 7,5% от толщины отрабатываемого материала, а диаметр выработки составляет 0,002% от длины выработки.

Согласно установленным нормативным правилам нагрузка задается статическими силами, приложенными по формам колебаний в местах сосредоточения масс. На этой стадии расчета неравномерной нагрузки рассчитывается по статике деформируемых систем под действием особых сочетаний статических нагрузок по формулам:

$$C_0 \frac{d^4 W}{dx^4} + C_1 \frac{d^3 W}{dx^3} + C_2 \frac{d^2 W}{dx^2} + C_3 \frac{dW}{dx} + C_4 W = q \quad (3.4)$$

в зависимости от краевых условий:

$$\frac{d^3 W}{dx^3} = \mu_{xy} = M = C_3 \frac{dW}{dx} + C_4 W = 0 \quad (3.5)$$

Здесь $\mu_{xy} = -2B \frac{d^2 W}{dx^2}$ - реакция моментного напряжения со стороны континуума Коссера, B - новая константа материала основания, имеющая размерность силы, гораздо меньшее E , $M = EI \frac{d^2 W}{dx^2}$ - изгибающий момент, $C_3 \frac{dW}{dx} = \beta \alpha$, $\alpha = \frac{dW}{dx}$ - тангенс угла наклона изгибающих моментов и поперечных изгибающих сил, $\beta = \sqrt[4]{\frac{D}{C_4}}$, D - жидкость с цилиндрической поверхностью.

Данная модель дает возможность учесть такие факторы, как динамическое воздействие выработки с грунтом, пространственный характер деформирования выработки, взаимодействие блоков $3k$ и дислокационных зон в $3k$ в виде «всплывания и перемещения».

В общем случае для решения данной задачи по критическим деформациям должны быть

$$D \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} - \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \right] + Eh \frac{W(x,t)}{R^2} = F(x,t) \quad (3.6)$$

или

$$D \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} - \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \right] + Eh \frac{W(x,t)}{R^2} = F(x,t) \quad (3.7)$$

при краевых условиях:

$$F(x,t) = \frac{\partial^3 W(x,t)}{\partial t^3} - g(t)W(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} - \alpha_0 \left. \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} + \beta_0 W(x,t) \Big|_{t=0} = \gamma_0, \\
& \left. \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \right|_{t=1} - \alpha_1 \left. \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \right|_{t=1} + \beta_1 W(x,t) \Big|_{t=1} = \gamma_1, \\
& \left. \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \right|_{t=1} - \alpha_2 \left. \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \right|_{t=1} + \beta_2 W(x,t) \Big|_{t=1} = \gamma_2
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где $g(t)$, $f(t)$ могут иметь конечное число точек разрыва 1-го рода и $g(t) \leq 0$ на всем отрезке $[0;1]$.

Если мы примем следующие критерии корректности поставленной задачи:

$$1. W(0,t) = 0, W(e,t) = 0, \tag{3.9}$$

$$W(x,0) = f(x) - \text{начальная неправильность} \tag{3.10}$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x) - \text{начальное условие.} \tag{3.11}$$

$$2. W(x,t) \Big|_S = \psi(M) \quad - \text{задача Дирихле, где } S - \text{площадь поперечного сечения}$$

$$3. \left. \frac{\partial W(x,t)}{\partial \nu} \right|_S = \chi(M) - \text{задача Неймана.} \tag{3.12}$$

$$4. W(x,t) \Big|_S = \psi(M), \quad (x,t) \in D_1, \quad \left. \frac{\partial W(x,t)}{\partial \nu} \right|_S = \chi(M), \quad (x,t) \in D_2 \tag{3.13}$$

$(D): D_1 \cup D_2$ - задача Дирихле-Неймана, то

$$W(x,t) \Big|_{x=0} = 0; W(x,t) \Big|_{x=0} = \min (\text{локальный}),$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) = 0. \tag{3.14}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial A}{\partial \sigma_{ij}} - \text{компоненты тензора деформации} \tag{3.15}$$

$$A(\sigma) = \int_0^\sigma \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} - \text{дополнительная работа деформации} \tag{3.16}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} - \text{компоненты тензора напряжений.} \quad (3.17)$$

Здесь i - номер уравнения, j - номер системы, $W(x,t)$ - прогиб, ε_{ij} - компоненты тензора деформации, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, A – произвольная функция, ε_j - компоненты деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, $\bar{\varepsilon} \neq 0$ - хотя бы один из компонентов $\bar{\varepsilon}_{ij} \neq 0$, $\bar{\sigma} \neq 0$, хотя бы из $\sigma_{ij} \neq 0$.

Итак, нелинейные соотношения упругости в выработке удовлетворяют трем требованиям (3.6-3.8) и из вогнутости $W(x,t)$ в малой окрестности следует «вогнутость» $W(x,t)$ той его конечной окрестности, а из вогнутости в конечной его окрестности следует критическая вогнутость для всей конечной области. В частности, найти функцию W , удовлетворяющую уравнения Лапласа в области, ограниченной поверхностями (в цилиндрических координатах), $r = R_1, r = R_2, z = 0, z = H, R_2 - R_1 = h$ и удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$W|_{r=R_1} = W_1 = \text{const}; \quad W|_{r=R_2} = W_2 = \text{const}.$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \text{ тогда } W = W_1 + \frac{\ln \left| \frac{2}{R_1} \right|}{\ln \left| \frac{R_2}{R_1} \right|} (W_2 - W_1) = \frac{W_2 \ln \left| \frac{2}{R_1} \right| - W_1 \ln \left| \frac{2}{R_2} \right|}{\ln \left| \frac{R_2}{R_1} \right|}.$$

Рассмотрим формы начальных неправильностей, вызванных после потери устойчивости поперечного сечения:

Максимальное касательное напряжение, возникающее в материале отработки вследствие прогиба

$$\sigma_{xz} = \frac{Gm^3 h_1 k f_k}{L h_1 (1 + km^2)} \frac{1}{\frac{2 B h_1^2 m^2 \pi^2}{N L^2 (1 + km^2)} - 1} \quad (3.18)$$

где G - модуль сдвига первой зоны, h - толщина первой зоны выработки, h_1 - толщины рыхленной зоны,

$$k = \frac{B h \pi^2}{G L^2}, \quad B = \frac{E h_1}{1 - \mu^2} \quad (3.19)$$

а $W_1(x)$ - какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - N_1 \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{E h}{R^2} = -\frac{q_1}{EI} \quad (3.20)$$

где

$$-\frac{q_1}{EI} = -\frac{q}{EI} + \frac{4}{3} \frac{1}{EI} \frac{0.85E}{(1-V^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{l}\right) \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \quad (3.21)$$

Решение (3.20) ищем в виде

$$W_0(x) = e^{kx} \quad (3.22)$$

и составим характеристическое уравнение

$$k^4 - \frac{N_1}{EI} k^2 + \frac{Eh}{k^2 EI} = 0 \quad (3.23)$$

f_k - стрела прогиба начального кососимметричного прогиба, f_0 - стрела прогиба начальной неправильности.

Максимальное напряжение отрыва, возникающее в первой зоне выработки, вследствие начальной симметричного прогиба волнистостью имеет вид:

$$\sigma_z = \frac{E_c f_c}{v_2 h} \left[\frac{1}{N} \left[D \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{Eh^2}{v^2 L m^2 \pi^2} - 1 \right] \right] \quad (3.24)$$

где v_2 - коэффициент Пуассона рыхленного массива, m - волновое число.

Удельные моменты:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(1 - \frac{\nu h^2}{\beta} \Delta^2 \right) \chi, \\ H_x &= -D \gamma \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \chi, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где D - цилиндрическая жесткость, β - коэффициент поперечного сдвига выработки, $\alpha^2 = \frac{1-A}{Ah^2}$, γ - параметр, характеризующий структуру выработки, χ - функция перемещения, определяемая

$$\chi = AW(x, t) \quad (3.26)$$

Таким образом, только лишь после некоторых критериев корректности задачи можно рассмотреть большие прогибы выработки с учетом произвольности элементов поперечного сечения при конечных деформациях.

3.2. Научные основы прогноза и предупреждения неустойчивости выработок под действием неравномерных поперечных сил по критическим деформациям треугольной эпюры

Выработку в толще горных пород можно представить в виде трехслойной цилиндрической оболочки с внутренним радиусом R , внешним радиусом r , толщиной $h + \Delta h$, длиной l с нежесткой матрицей заполнителя;

- действие внешних сил можно определить из формы изменения поперечного сечения при критической деформации заполнителя при $n=2$, $n=3$, $n=4$ овальную, треугольную, трапециевидную.

- выработку в поперечном сечении, с точки зрения характера действия энергии деформации, можно разделить на три зоны, в продольном направлении также можно разделить на три зоны, но уже, с точки зрения ее устойчивости. Первая, которая остается и после потери устойчивости, в начальном безмоментном состоянии; вторая, где накапливается деформация после потери устойчивости; третья – зона прощелкивания: упругопластическая, непосредственно примыкающих к несущему слою, зона разрыхленных грунтов и нетронутой толщи, где определяют $\Delta h = h_1$.

Изгибающие моменты M_1, M_2, M_{12}, M_{21} - определим из нормальных и касательных напряжений линейно распределяя по высоте сечения оболочки из принятой гипотезы о прямых нормалях;

Поперечные силы Q_1, Q_2 получаем, суммируя по высоте сечения соответствующие касательные напряжения.

Положительными будем считать изгибающие и крутящие моменты, вызывающие у наружной поверхности оболочки положительные нормальные и касательные напряжения.

Наши исследования при граничных условиях свободного края кругового сечения при $x=0$:

$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{W}{b} = 0$, где b - ширина пояса загрузки,

$W = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ при $x = L$, дали следующие выводы:

- характер эпюр окружных остаточных напряжений определяются условиями снятием неравномерных припусков, неодинаковой текстурой, изменениями формы зерен и их размеров, а так же нарушениями целостности материала поверхностного слоя. На эпюру этих нарушений оказывают влияние так же фазовые превращения, происходящие в материале поверхностного слоя с течением времени. Поскольку поле остаточных напряжений дискретное, то полученное равновесное состояние сохраняется.

- Научные основы прогноза и предупреждения неустойчивости выработок под действием неравномерных поперечных сил по критическим деформациям трапециевидной эпюры:

Рассмотрим одиночную выработку трехслойной цилиндрической оболочки с вязко-упругим твердым заполнителем длиной - l , радиусом - R , толщиной - h под действием линейно изменяющегося по длине внешнего давления трапециевидной эпюры внешней нагрузки. Тогда, при рассмотрении данной модели под действием статических нагрузок, особого сочетания, уравнение равновесия напишем в виде:

$$EI \frac{d^4 W}{dx^4} - N_1 \frac{d^2 W}{dx^2} + kW = -q + \frac{4}{3} \frac{0,85E}{(1-V^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{l} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \quad (3.27)$$

где $D = ES$ - цилиндрическая жесткость, k - коэффициент сопротивления, $-N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ - поперечная нагрузка при критических деформациях горных пород.

Граничные условия возьмем в виде

$$\frac{d^3 W}{dx^3} = \mu_{xy} = M = N_1 \frac{dW}{dx} + kW = 0 \quad (3.28)$$

Здесь $\mu_{xy} = -2B \frac{d^2 W}{dx^2}$ - реакция моментного напряжения со стороны континуума

Коссера, B - новая константа материала не несущего слоя, $M = EI \frac{dW}{dx^2}$ - изгибающий момент.

Если решение однородной части дифференциального уравнения (3.27) ищем в форме, соответствующей принятому характеру выпучивания выработки, например

$$W(x) = A \sin \frac{m\pi x}{e} \quad (3.29),$$

то

$$N_1 = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-V^2)}} \quad (3.30),$$

$$k = -\frac{Eh}{R^2} \quad (3.31).$$

Здесь m - число полуволн, которое определяется как:

$$m = \frac{e}{\pi} \sqrt[4]{\frac{Eh}{R^2 ES}}$$

Итак, рассмотрим случай

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{N_1}{EI} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{Eh}{R^2} = -\frac{q}{EI} + \frac{4}{3} \frac{1}{EI} \frac{0.85E}{(1-V^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{l} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \quad (3.32)$$

Решение линейно-неоднородного дифференциального уравнения (3.33) ищем в виде

$$W(x) = W_0(x) + W_1(x), \quad (3.34)$$

где $W_0(x)$ есть общее решение однородной части

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{N_1}{EI} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{Eh}{R^2} = 0, \quad (3.35)$$

а $W_1(x)$ - какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - N_1 \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{Eh}{R^2} = -\frac{q_1}{EI}, \quad (3.36)$$

где

$$-\frac{q_1}{EI} = -\frac{q}{EI} + \frac{4}{3} \frac{1}{EI} \frac{0.85E}{(1-V^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{l}\right) \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}. \quad (3.37)$$

Решение (3.35) ищем в виде

$$W_0(x) = e^{kx}. \quad (3.38)$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^4 - \frac{N_1}{EI} k^2 + \frac{Eh}{k^2 EI} = 0 \quad (3.39)$$

Если $N_1^2 - 4\bar{k}EI > 0$, где $\bar{k} = \frac{Eh}{k^2}$, то корни характеристического уравнения

будут действительными:

$$k_1 = \sqrt{\alpha + \beta}; k_2 = -\sqrt{\alpha + \beta}; k_3 = \sqrt{\alpha - \beta}; k_4 = -\sqrt{\alpha - \beta}; \quad (3.40)$$

где

$$\alpha = -\frac{N_1}{2EI}; \quad \beta = \frac{1}{2EI} \sqrt{N_1^2 + 4\bar{k}EI} \quad (3.41)$$

Итак, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$W_0(x) = C_1 e^{\sqrt{\alpha + \beta}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha + \beta}x} + C_3 e^{\sqrt{\alpha - \beta}x} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha - \beta}x} \quad (3.42)$$

Частные решение неоднородного уравнения находим методом вариации произвольных постоянных:

$$W_1(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_3(x)y_3(x) + C_4(x)y_4(x) \quad (3.43)$$

и составим систему

$$y_1(x)C_1'(x) + y_2(x)C_2'(x) + y_3(x)C_3'(x) + y_4(x)C_4'(x) = 0,$$

$$y_1'(x)C_1'(x) + y_2'(x)C_2'(x) + y_3'(x)C_3'(x) + y_4'(x)C_4'(x) = 0,$$

$$y_1''(x)C_1'(x) + y_2''(x)C_2'(x) + y_3''(x)C_3'(x) + y_4''(x)C_4'(x) = 0,$$

$$y_1'''(x)C_1'(x) + y_2'''(x)C_2'(x) + y_3'''(x)C_3'(x) + y_4'''(x)C_4'(x) = -\frac{q_1}{EI} \quad (3.44)$$

где

$$y_1(x) = e^{\sqrt{\alpha + \beta}x}; y_2(x) = e^{-\sqrt{\alpha + \beta}x}; y_3(x) = e^{\sqrt{\alpha - \beta}x}; y_4(x) = e^{-\sqrt{\alpha - \beta}x} \quad (3.45)$$

Разрешая систему (3.44) с учетом (3.45) относительно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $C_3'(x)$, $C_4'(x)$, а затем проинтегрируя относительно переменной x имеем:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{q_1}{EI(\alpha^2 - \beta^2)} e^{-\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_1, \\ C_2(x) &= \frac{q_1}{EI(\alpha^2 - \beta^2)} e^{\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_2, \\ C_3(x) &= \frac{q_1}{EI(\alpha - \beta)^2} e^{-\sqrt{\alpha-\beta}x} + C_3, \\ C_4(x) &= \frac{q_1}{EI(\alpha - \beta)^2} e^{\sqrt{\alpha-\beta}x} + C_4. \end{aligned} \quad (3.46)$$

На основании (3.46) из (3.43) получим:

$$W(x) = C_1 e^{\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_3 e^{\sqrt{\alpha-\beta}x} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha-\beta}x} - \frac{4\beta q_1}{EI(\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2)} \quad (3.47)$$

где

$$\alpha = -\frac{N_1}{2EI}; \quad \beta = \frac{1}{2EI} \sqrt{N_1 + 4KEI} \quad (3.48)$$

Для изотропного материала

$$K = -\frac{Eh}{R^2}; \quad N_1 = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-V^2)}} \quad (3.49)$$

Здесь произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из четырех граничных условий (3.46). При этом на каждом крае выработки могут быть поставлены два граничных условия в зависимости от конкретного случая постановки задачи горного дела задачи Коши.

Если $N_1^2 - 4KEI < 0$, то корни характеристического уравнения будут комплексно - сопряженными

$$K_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i; \quad K_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2 i \quad (3.50)$$

Тогда общее решение однородной части будет

$$W_0(x) = e^{\alpha_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x) + e^{\alpha_2 x} (C_3 \cos \beta_2 x + C_4 \sin \beta_2 x), \quad (3.51)$$

а частное решение неоднородного уравнение ищется так же методом вариации произвольных постоянных аналогично выше. Данная модель работает как модель весомой выработки, находящегося на упругом основании типа Винклера. Поперечное сечение выработки представим в виде тонкой круговой трехслойной пластинки радиусом $-r$, имеющая центральное круговое отверстие радиуса $-k$, подверженной действию равномерно распределенных по обеим границам сжимающих усилий одинаковой величины. Для выработки, в общем случае не-

симметричного строения по толщине, принимается гипотеза ломаной линии [44, 45]

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \eta_3, \quad \vartheta = \frac{\eta_1\eta_3 + \eta_2^2}{\eta_1\eta_3}; \quad \gamma = \frac{\eta_2}{\eta_3} \quad (3.52)$$

Здесь $h = h_1 + h_2 + h_3$ – полная толщина поперечного сечения выработки. Нижними индексами 1 и 2 обозначены несущие слои, а индексом 3 – заполнитель, E_k и ν_k соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона k -го слоя; G – модуль сдвига материала отработки, ν – общий приведенный коэффициент Пуассона, E – осредненный модуль упругости, γ_k – безразмерная жесткость, в ботки.

Уравнения возмущенного состояния кругового сечения с учетом начальной деформации в первом предположении на основании формул [27] будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^|}{\partial x} + \frac{\partial S_2^|}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial T_2^|}{\partial S} + \frac{\partial S_1^|}{\partial x} = 0, \\ -(1 + \varepsilon_1^0) \frac{T_2^|}{R} + \frac{\partial^2 M_{11}^|}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}^|}{\partial x \partial S} + \frac{\partial^2 M_{22}^|}{\partial S^2} - P_1 \partial \ell_{11}^| + RP \partial \ell_{22}^| + \\ + \frac{1}{R} (RP + VK \varepsilon_2^0) \varepsilon_1^| - \frac{k}{R} \varepsilon_0^2 \varepsilon_{21}^| = 0 \end{aligned}$$

Здесь усилия до потери устойчивости определены как

$$T_1^0 = P_1 \langle 0, T_2^0 = -RP, S_1^0 = S_2^0 = 0.$$

Критические значения осевого и окружного усилия связаны $-P_1 = \lambda_1 R$. Тогда докритические деформации на основании закона Гука определяются выражениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 = \frac{P_1 + VRP}{k(1-\nu^2)} = const, \quad \varepsilon_1^0 = \frac{RP + VP_1}{k(1-\nu^2)} = const, \\ \varepsilon_{12}^0 = \varepsilon_{21}^0 = w_1^0 = w_2^0 = w^0 = 0. \end{aligned}$$

И безразмерная критическая нагрузка - по формуле

$$P_1^* = \frac{P}{E} = \frac{h}{R} \frac{m(1-\nu) \left\{ \varepsilon^2 \left[\delta^2 - 1 - \frac{\delta}{m} + (1+\nu^2) \frac{m}{\delta} + \frac{(1-\nu^2)m^2}{\delta^2} \right] + \frac{1}{\delta^2} \right\}}{(1-\nu)\delta + (1-\nu)(\nu_1-1)m + \frac{(1-\nu)^2 + (\nu_1-1)}{\delta} + \frac{[(1-3\nu)(\nu_2-1) + 2(1-\nu)^2]m}{\delta^2} - \frac{1-\nu}{m}}. \quad (3.53)$$

где

$$\delta = \frac{m^2 + n^2}{m}; \varepsilon = \frac{h}{R\sqrt{12(1-\nu^2)}}; m = \frac{i\pi R}{\ell}.$$

При этом δ определим из условия минимума $\frac{\partial P^*}{\partial \delta} = 0$ в виде

$$\begin{aligned} & (1-\nu)\varepsilon^2\delta^6 + 2(1-\nu)\varepsilon^2[(\lambda_1-1)m - m^{-1}]\delta^5 + \\ & + \varepsilon^2[(1-\nu)(4-3\nu) - (1-4\nu)(\lambda_1-1) + (1-\nu)m^{-2}]\delta^4 + \\ & + 2\varepsilon^2\{2(1-3\nu)(\lambda_1-1) + 4(1-\nu)^2 - (1-\nu)(1-\nu^2) - \\ & - [(1-\nu)^2 + \nu(\lambda_1-1)]m^{-2}\}m\delta^3 - \\ & - \{\varepsilon^2[3(1-\nu^2)(1-\nu) + (1-\nu^2)(1-\nu)(\lambda_1-1)]m^2 + \\ & + \varepsilon^2[(\lambda_1-1)(3-8\nu) + 7(1-\nu)^2 - (1-\nu)(1-\nu^2)] + \\ & + 3(1-\nu)\} \delta^2 - \\ & - 2\{\varepsilon^2[(1-\nu^2)(1-\nu)(\lambda_1-1)m^2 + (1-3\nu)(\lambda_1-1) + (1-\nu)^3]m + \\ & + (1-\nu)[(\lambda_1-1)m - m^{-1}]\} \delta + \\ & + \varepsilon^2[(1-\nu)^2(1-3\nu^2) + (1-3\nu)(1-\nu^2)(\lambda_1-1) - \\ & - \nu(1-\nu^2)(\lambda_1-1)]m^2 - \nu(\lambda_1-1) - (1-\nu^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Если в уравнениях возмущенного состояния выработки кругового сечения не будем учитывать начальные деформации, то безразмерная критическая нагрузка окружного усилия определится выражением:

$$P_2^* = \frac{h}{R} \frac{m \left\{ \varepsilon^2 \left[\delta^2 - 1 - \frac{\delta}{m} + (1+\nu^2) \frac{(1-\nu^2)m^2}{\delta^2} \right] + \frac{1}{\delta^2} \right\}}{\delta + (\nu_1-1)m + \frac{1-\nu}{\delta} - \frac{1}{m}} \quad (3.55)$$

При этом δ определяется из следующего уравнения:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2\delta^6 + 2\varepsilon^2[(\lambda_1-1)m - m^{-1}]\delta^5 + \varepsilon^2[(4-3\nu) - (\lambda_1-1) + m^{-2}]\delta^4 - \\ & - 2\varepsilon^2[(1-\nu^2)m + (1-\nu)m^{-1}]\delta^3 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \varepsilon^2 m^2 \left[3(1-\nu^2) + (1-\nu^2)(\lambda_1 - 1) - \nu(1+\nu)m^{-2} \right] + 3 \right\} \delta^2 + \\
& + 2 \left\{ \varepsilon^2 (1-\nu^2)m \left[1 - (\lambda_1 - 1)m^2 \right] - (\lambda_1 - 1)m + m^{-1} \right\} \delta - \\
& - (1-\nu) \left[\varepsilon^2 (1-\nu^2)m^2 + 1 \right] = 0.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Поступая совершенно аналогично, мы решим эту же задачу на основании уравнений возмущенного состояния, когда не учитываются сдвиг срединной поверхности и начальные деформации:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_1^I}{\partial X} + \frac{\partial S_2^I}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial S_1^I}{\partial X} + \frac{\partial T_2^I}{\partial S} = 0 \\
& - \frac{T_0^I}{R} + \frac{\partial}{\partial} \left(\frac{\partial}{\partial S} M_{21}^I + \frac{\partial}{\partial X} M_{11}^I \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial}{\partial X} M_{12}^I + \frac{\partial}{\partial S} M_{22}^I \right) - P_1 \partial \ell_{11}^I - P_1 R \partial \ell_{22}^I = 0.
\end{aligned}$$

при этом имеет место следующее уравнение для определения критической нагрузки окружного усилия:

$$P_3^* = \frac{h}{R} \cdot \frac{m \left\{ \varepsilon^2 \left[\delta^2 - 1 - \frac{\delta}{m} + (1+\nu^2) \frac{m}{\delta} + \frac{(1-\nu^2)m^2}{\delta^2} \right] + \frac{1}{\delta^2} \right\}}{\delta + (\lambda_1 - 1)m - \frac{\nu}{\delta} + \frac{(1+\nu)m}{\delta} - \frac{1}{m}}, \tag{3.57}$$

где δ определяется из выражения

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \delta^6 + 2\varepsilon^2 \left[(\lambda_1 - 1)m - m^{-1} \right] \delta^5 + \\
& + \varepsilon^2 \left[(1-3\nu) - (\lambda_1 - 1) + m^{-2} \right] \delta^4 + 2\varepsilon^2 \left[(1+2\nu-\nu^2)m - \nu m^{-1} \right] \delta^3 - \\
& - \left\{ \varepsilon^2 m^2 \left[3(1-\nu^2) + (1+\nu^2)(\lambda_1 - 1) + (2+2\nu-\nu^2)m^{-2} \right] + 3 \right\} \delta^2 - \\
& - 2 \left\{ \varepsilon^2 (1+\nu)m \left[\nu + (1-\nu)(\lambda_1 - 1)m^2 \right] + (\lambda_1 - 1)m - m^{-1} \right\} \delta + \\
& + \varepsilon^2 (1+\nu)^2 m^2 + \nu = 0
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Если за уравнения возмущенного значения выработки возьмем второе упрощение [78] при средней длине, то имеем:

$$\begin{aligned}
T_{11}^I &= k \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial \nu}{\partial s} + \frac{w}{R} \right) \right], T_2^I = k \left(\frac{\partial \nu}{\partial s} + \frac{w}{R} + \nu \frac{\partial U}{\partial x} \right), \\
S_1^I &= S_2^I = \frac{k(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial \nu}{\partial x} \right), M_{11}^I = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right), \varepsilon_1^I = \frac{\partial U}{\partial x}, \\
M_{22}^I &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), M_{12}^I = M_{21}^I = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}, \varepsilon_1^I = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{w}{R},
\end{aligned}
\tag{3.59}$$

$$\chi_{11}^I = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \chi_{22}^I = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \chi_{12}^I = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}.$$

Тогда для определения критической нагрузки окружного усилия получены уравнения:

$$\begin{aligned}
P_1^* &= \frac{h}{R} \frac{m(\delta^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{\delta^2})}{\delta + (\lambda_1 - 1)m}; \\
\varepsilon^2 \delta^5 + 2(\lambda_1 - 1)\varepsilon^2 m \delta^4 - 3\delta - 2(\lambda_1 - 1)m &= 0
\end{aligned}
\tag{3.60}$$

- при увеличении значения сдвига от $(2,4-4)10^{-4}$ МПА его влияние на параметр критической нагрузки $P_{кр}$ значительно меньше, но зависит от граничных условий на торцах поперечного сечения выработки, III – случай;
- при заземленной и скользящей границах радиальная нагрузка существенно влияет на критическую нагрузку и преобразует картину изменения критической силы с увеличением размера относительного отверстия;
- параметр, характеризующий жесткость несущих слоев, вносит изменения в величины критических усилий при осевом сжатии, когда окружное усилие значительно меньше;
- изменение относительной толщины $\frac{h}{R}$ (0,0005–0,001) I – случай; (0,001–0,005) II – случай, (0,005–0,01) III – случай, зависит от относительной жесткости m_j ;
- учет начальных деформации увеличивает абсолютную величину критической нагрузки окружного усилия, не более чем на 0,3%;
- учет сдвига срединной поверхности уменьшает абсолютную величину окружного усилия не более чем на 0,9%;
- учет величин остаточных деформации увеличивает абсолютную величину критической нагрузки окружного усилия не более чем на 6%, но значительно уменьшает критическую нагрузку осевого усилия.
- увеличение конусности при постоянном значении нижнего радиуса приводит к росту зоны сжимающих окружных напряжений и приводит к уменьшению по абсолютной величине всех компонентов напряжений на поверхности контакта, за исключением касательных напряжений, что является обоснованием необхо-

димости разработки методов расчета конструкции, на базе двухсторонней оценки подходов механики деформируемого твердого тела;

Далее решаем вторую задачу (обратная задача), первую зоны выработки, как оболочка с упругим заполнителем, представим в виде круговой цилиндрической оболочки при действии линейно изменяющегося по длине внешнего давления (случай треугольной эпюры). Анализ первой основной задачи показывает, что при треугольной форме деформации, когда критическая деформация падает от 1,2 до 0,8% под действием объемных сил и возрастает от 0,1 до 0,15% под действием поперечной нагрузки, модуль упругости изменяется в пределах $E = (0,6 - 3,0)10^{-4}$ МПа за внешнюю поперечную нагрузку можно принять действие внешнего давления линейно изменяющейся по длине (случай треугольной эпюры внешней нагрузки). В инженерных расчетах можно принять формулы:

$$q_B = \frac{2 \cdot 0,85E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \quad (3.61)$$

где ν - коэффициент Пуассона, E - модуль упругости, h - толщина, L, R - длина и радиус первой зоны выработки, как критическое значение внешнего давления треугольной эпюры.

Критическое значение внешнего давления, линейно изменяющегося по длине пояса загрузки и в срединной части выработки будет

$$q_B = \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{L}{b} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}. \quad (3.62)$$

Эти формулы выведены из условия равенства грузовых площадей.

Полученные результаты показывают, что форма заполнителя существенно влияет на поле перемещений. В исследованных вариантах конусность заполнителя позволяет почти в 2 раза снизить значение осевых перемещений на нижней торцевой поверхности заполнителя. Таким образом, это конструктивное решение позволяет регулировать кинематику перемещений нижнего торца при эксплуатационных перегрузках.

Интересно отметить, что при малой конусности система становится более жесткой по сравнению с составной конструкцией, имеющей цилиндрический заполнитель. Однако при дальнейшем увеличении конусности радиальная податливость составной конструкции начинает расти. Изменение знаков перемещений обусловлены появлением изгибных эффектов в составных конструкциях с заполнителем в виде полых конусов.

Во всех случаях можно видеть, что основное напряжение сосредоточено в окрестности закрепленной торцевой поверхности цилиндрической оболочки. При этом максимальные значения сжимающих напряжений являются наибольшими для цилиндрического заполнителя. Однако уровень сжимающих напряжений на порядок превышает уровень растягивающих напряже-

ний, что не позволяет на приведенном рисунке оценить фактический уровень радиальных напряжений растяжения.

Степень концентрации осевых напряжений в окрестности закрепленной поверхности увеличивается по мере повышения конусности заполнителя составной конструкции. Такой же эффект увеличения степени концентрации напряжений по мере повышения конусности заполнителя составной конструкции можно видеть на контактной поверхности и для касательных напряжений.

Увеличение конусности при постоянном значении нижнего радиуса приводит к росту зоны сжимающих окружных напряжений. Распределения окружных и осевых напряжений в заполнителе на поверхности контакта заполнителя с оболочкой совпадают с характером распределения радиальных напряжений.

3.3. Анализ численных результатов устойчивости выработок в толще горных пород под действием поперечных и осевых сил

Выработку в толще горных пород представим в виде трехслойной цилиндрической оболочки с внутренним радиусом – k , внешнем радиусом – r , толщиной – h , длиной – s нежесткой матрицей заполнителя под действием поперечных и осевых сил. Поперечное сечение выработки представим в виде тонкой круговой трехслойной пластинки радиусом – r , имеющая центральное круговое отверстие радиуса – k , подверженной действию равномерно распределенных по обеим границам сжимающих усилий одинаковой величины. Для выработки, в общем случае несимметричного строения по толщине, принимается гипотеза ломаной линии Э. И. Григолюка [35]

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \eta_3, \quad \vartheta = \frac{\eta_1\eta_3 + \eta_2^2}{\eta_1\eta_3}; \quad \gamma = \frac{\eta_2}{\eta_3} \quad (3.63)$$

Здесь $h = h_1 + h_2 + h_3$ – полная толщина поперечного сечения выработки. Нижними индексами 1 и 2 обозначены несущие слои, а индексом 3 – заполнитель, E_k и ν_k соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона k -го слоя; G – модуль сдвига материала отработки, ν – общий приведенный коэффициент Пуассона, E – осредненный модуль упругости, γ_k – безразмерная жесткость, в

$\gamma_k = \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \frac{1}{\frac{Eh}{1 - \nu^2}}$, η_1, η_2, η_3 – параметры поперечного сдвига по толщине отработки.

Осесимметричное выпучивание круговой кольцевой трехслойной пластины с центральным круговым отверстием впервые исследовал А. И. Динник [98]. В осесимметричной постановке устойчивость трехслойных круговых сплошных пластин с жестким средним слоем изучали Григолюк Э. И., Чулков П.П., Корнев В.М. Кольцевую трехслойную пластинку, нагруженную радиально растяги-

вающими усилиями, равномерно распределенными по внутреннему контуру, рассматривали Б.Г. Газимов и Е.В. Облезлов. В данной работе рассматривается устойчивость выработки при осевом сжатии и нормальном давлении на основе результатов работы [27]. Проблемы устойчивости указанных объектов нуждается в дальнейшем изучении для выработки. Тогда уравнения возмущенного состояния кругового сечения с учетом начальной деформации в первом предположении на основании формул [27] будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^|}{\partial x} + \frac{\partial S_2^|}{\partial S} = 0, \frac{\partial T_2^|}{\partial S} + \frac{\partial S_1^|}{\partial x} = 0, \\ - (1 + \varepsilon_1^0) \frac{T_2^|}{R} + \frac{\partial^2 M_{11}^|}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}^|}{\partial x \partial S} + \frac{\partial^2 M_{22}^|}{\partial S^2} - \\ - P_1 \partial \ell_{11}^| + RP \partial \ell_{22}^| + \frac{1}{R} (RP + VK \varepsilon_2^0) \varepsilon_1^| - \frac{k}{R} \varepsilon_0^2 \varepsilon_{21}^| = 0 \end{aligned}$$

Здесь усилия до потери устойчивости определены

$$T_1^0 = P_1 \langle 0, T_2^0 = -RP, S_1^0 = S_2^0 = 0.$$

Критические значения осевого и окружного усилия связаны $-P_1 = \lambda_1 R$. Тогда докритические деформации на основании закона Гука определяются выражениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 = \frac{P_1 + VRP}{k(1-\nu^2)} = const, \varepsilon_1^0 = \frac{RP + VP_1}{k(1-\nu^2)} = const, \\ \varepsilon_{12}^0 = \varepsilon_{21}^0 = w_1^0 = w_2^0 = w^0 = 0. \end{aligned}$$

И безразмерная критическая нагрузки по формуле

$$P_1^* = \frac{P}{E} = \frac{h}{R} \frac{m(1-\nu) \left\{ \varepsilon^2 \left[\delta^2 - 1 - \frac{\delta}{m} + (1+\nu^2) \frac{m}{\delta} + \frac{(1-\nu^2)m^2}{\delta^2} \right] + \frac{1}{\delta^2} \right\}}{(1-\nu)\delta + (1-\nu)(\nu_1-1)m + \frac{(1-\nu)^2 + (\nu_1-1)}{\delta} + \frac{[(1-3\nu)(\nu_2-1) + 2(1-\nu)^2]m}{\delta^2} - \frac{1-\nu}{m}}. \quad (3.64)$$

где

$$\delta = \frac{m^2 + n^2}{m}; \varepsilon = \frac{h}{R\sqrt{12(1-\nu^2)}}; m = \frac{i\pi R}{\ell}.$$

При этом δ определим из условия минимума $\frac{\partial P^*}{\partial \delta} = 0$ в виде

$$\begin{aligned} (1-\nu)\varepsilon^2\delta^6 + 2(1-\nu)\varepsilon^2[(\lambda_1-1)m - m^{-1}]\delta^5 + \\ + \varepsilon^2[(1-\nu)(4-3\nu) - (1-4\nu)(\lambda_1-1) + (1-\nu)m^{-2}]\delta^4 + \\ + 2\varepsilon^2\{2(1-3\nu)(\lambda_1-1) + 4(1-\nu)^2 - (1-\nu)(1-\nu^2) - \\ - [(1-\nu)^2 + \nu(\lambda_1-1)]m^{-2}\}m\delta^3 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\{\varepsilon^2[3(1-\nu^2)(1-\nu) + (1-\nu^2)(1-\nu)(\lambda_1-1)]m^2 + \\
& + \varepsilon^2[(\lambda_1-1)(3-8\nu) + 7(1-\nu)^2 - (1-\nu)(1-\nu^2)] + 3(1-\nu)\} \\
& \delta^2 - 2\{\varepsilon^2[(1-\nu^2)(1-\nu)(\lambda_1-1)m^2 + (1-3\nu)(\lambda_1-1) + (1-\nu)^3]m + \\
& + (1-\nu)[(\lambda_1-1)m - m^{-1}]\}\delta + \varepsilon^2[(1-\nu)^2(1-3\nu^2) + (1-3\nu)(1-\nu^2)(\lambda_1-1) - \\
& - \nu(1-\nu^2)(\lambda_1-1)]m^2 - \nu(\lambda_1-1) - (1-\nu)^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Если в уравнениях возмущенного состояния выработки кругового сечения не будем учитывать начальные деформации, то безразмерная критическая нагрузка окружного усилия будет определиться выражением.

$$P_2^* = \frac{h}{R} \cdot \frac{m \left\{ \varepsilon^2 \left[\delta^2 - 1 - \frac{\delta}{m} + (1+\nu^2) \frac{(1-\nu^2)m^2}{\delta^2} \right] + \frac{1}{\delta^2} \right\}}{\delta + (\nu_1-1)m + \frac{1-\nu}{\delta} - \frac{1}{m}} \tag{3.66}$$

При этом δ определяется из следующего уравнения:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \delta^6 + 2\varepsilon^2[(\lambda_1-1)m - m^{-1}]\delta^5 + \varepsilon^2[(4-3\nu) - (\lambda_1-1) + m^{-2}]\delta^4 - \\
& - 2\varepsilon^2[(1-\nu^2)m + (1-\nu)m^{-1}]\delta^3 - \{\varepsilon^2 m^2[3(1-\nu^2) + (1-\nu^2)(\lambda_1-1) - \nu(1+\nu)m^{-2}] + 3\}\delta^2 + \\
& + 2\{\varepsilon^2(1-\nu^2)m[1 - (\lambda_1-1)m^2] - (\lambda_1-1)m + m^{-1}\}\delta - (1-\nu)[\varepsilon^2(1-\nu^2)m^2 + 1] = 0.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Поступая совершенно аналогично, мы решим эту же задачу на основании уравнений возмущенного состояния, когда не учитываются сдвиг срединной поверхности и начальные деформации:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_1^I}{\partial X} + \frac{\partial S_2^I}{\partial S} = 0, \frac{\partial S_1^I}{\partial X} + \frac{\partial T_2^I}{\partial S} = 0 \\
& -\frac{T_0^I}{R} + \frac{\partial}{\partial} \left(\frac{\partial}{\partial S} M_{21}^I + \frac{\partial}{\partial X} M_{11}^I \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial}{\partial X} M_{12}^I + \frac{\partial}{\partial S} M_{22}^I \right) - P_1 \partial \ell_{11}^I - P_1 R \partial \ell_{22}^I = 0.
\end{aligned}$$

При этом имеет место следующее уравнение для определения критической нагрузки окружного усилия:

$$P_3^* = \frac{h}{R} \cdot \frac{m \left\{ \varepsilon^2 \left[\delta^2 - 1 - \frac{\delta}{m} + (1+\nu^2) \frac{m}{\delta} + \frac{(1-\nu^2)m^2}{\delta^2} \right] + \frac{1}{\delta^2} \right\}}{\delta + (\lambda_1-1)m - \frac{\nu}{\delta} + \frac{(1+\nu)m}{\delta} - \frac{1}{m}} \tag{3.68}$$

где δ определяется из выражения

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \delta^6 + 2\varepsilon^2 [(\lambda_1 - 1)m - m^{-1}] \delta^5 + \varepsilon^2 [(1 - 3\nu) - (\lambda_1 - 1) + m^{-2}] \delta^4 + \\
& + 2\varepsilon^2 [(1 + 2\nu - \nu^2)m - \nu m^{-1}] \delta^3 - \\
& - \left\{ \varepsilon^2 m^2 [3(1 - \nu^2) + (1 + \nu^2)(\lambda_1 - 1) + (2 + 2\nu - \nu^2)m^{-2}] + 3 \right\} \delta^2 - \\
& - 2 \left\{ \varepsilon^2 (1 + \nu)m [\nu + (1 - \nu)(\lambda_1 - 1)m^2] + (\lambda_1 - 1)m - m^{-1} \right\} \delta + \\
& + \varepsilon^2 (1 + \nu)^2 m^2 + \nu = 0
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Если за уравнения возмущенного значения выработки возьмем второе упрощение В.В. Новожилова [27] при средней длины, то имеем:

$$\begin{aligned}
T_{11}^| &= k \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial \nu}{\partial s} + \frac{w}{R} \right) \right], T_2^| = k \left(\frac{\partial \nu}{\partial s} + \frac{w}{R} + \nu \frac{\partial U}{\partial x} \right), \\
S_1^| &= S_2^| = \frac{k(1 - \nu)}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial \nu}{\partial x} \right), \\
M_{11}^| &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right), \varepsilon_1^| = \frac{\partial U}{\partial x}, \\
M_{22}^| &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\
M_{12}^| &= M_{12}^| = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}, \varepsilon_1^| = \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{w}{R}, \\
x_{11}^| &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; x_{22}^| = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; x_{12}^| = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Тогда для определения критической нагрузки окружного усилия получены уравнены:

$$\begin{aligned}
P_1^* &= \frac{h}{R} \frac{m(\delta^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{\delta^2})}{\delta + (\lambda_1 - 1)m}; \\
\varepsilon^2 \delta^5 &+ 2(\lambda_1 - 1)\varepsilon^2 m \delta^4 - 3\delta - 2(\lambda_1 - 1)m = 0
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Принимая за R – условный радиус выработки, h – толщину рыхленного слоя, ℓ - длину выработки уравнения с (3.64)–(3.65); (3.66)–(3.67) и (3.68)–(3.69) вычислены на ЭВМ. При следующих данных: $x = \frac{R}{\ell} = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6;$

0,7; 0,8; 0,9; $0,1 < \frac{R}{\ell} < 0,3$ – длинная, $0,3 < \frac{R}{\ell} < 0,5$ – средний длины, $0,5 < \frac{R}{\ell} < 0,9$ – короткая выработки; $\lambda_1 = 0,5$; $\lambda_2 = 0,9$; $\nu_1 = [0,25 - 0,33]$. Рисунки 8-13.

Результаты расчетов показывают:

- Параметр сдвига отработанного слоя выработки существенно влияет на критическую нагрузку при его изменении в диапазоне $(0,1-1,4)10^{-4}$ МПА, который примерно соответствует интервалу значений сдвига встречающихся на практике выработки, I – случай.

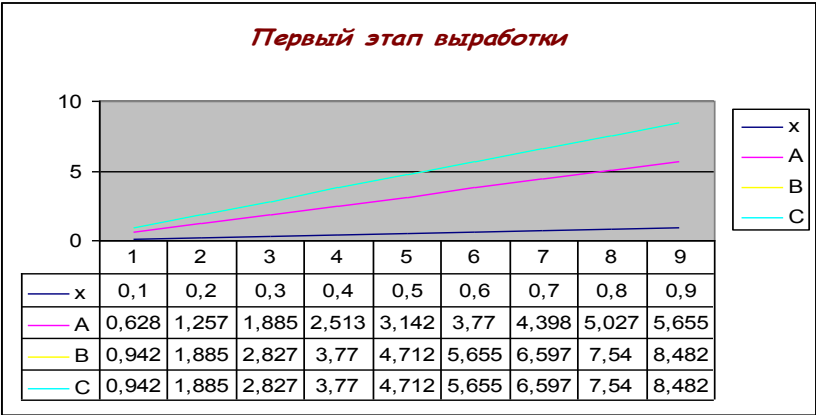


Рисунок 3.2. - Зависимость между $x = \frac{R}{L}$ и параметром сдвига заполнителя критической нагрузки



Рисунок 3.3. - Зависимость между $x = \frac{R}{L}$ и параметром относительной жесткости критической нагрузки

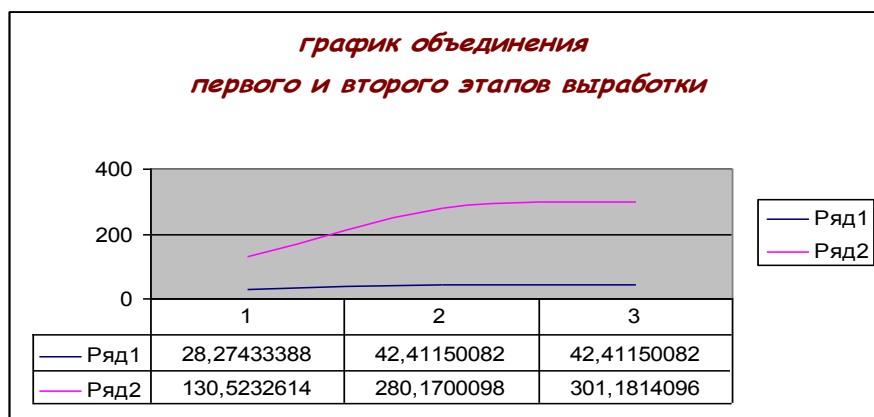


Рисунок 3.4. - Зависимость между безразмерным параметром критической силы ξ и безразмерной длиной $\frac{R}{L}$

ТРЕТИЙ ЭТАП

Объединение графиков построенных по (3.66)–(3.67) и (3.68).

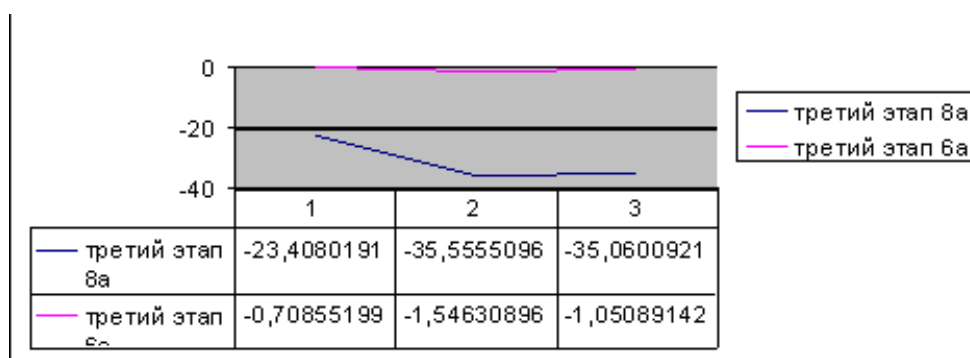


Рисунок 3.5. - Учет остаточных деформации без учета сдвига и начальных деформации.

Построение графика по формулам (3.64)-(3.65)

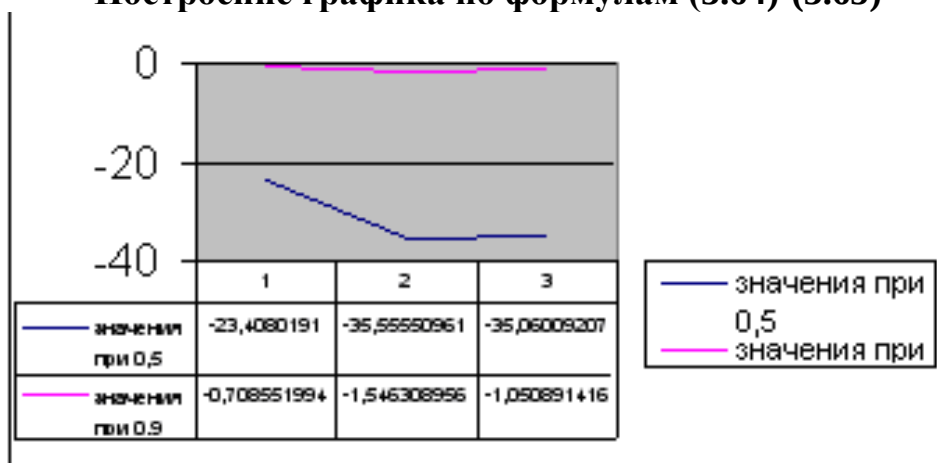


Рисунок 3.6 - Учет сдвига срединной поверхности

График, построенный по формулам (3.62)-(3.63)

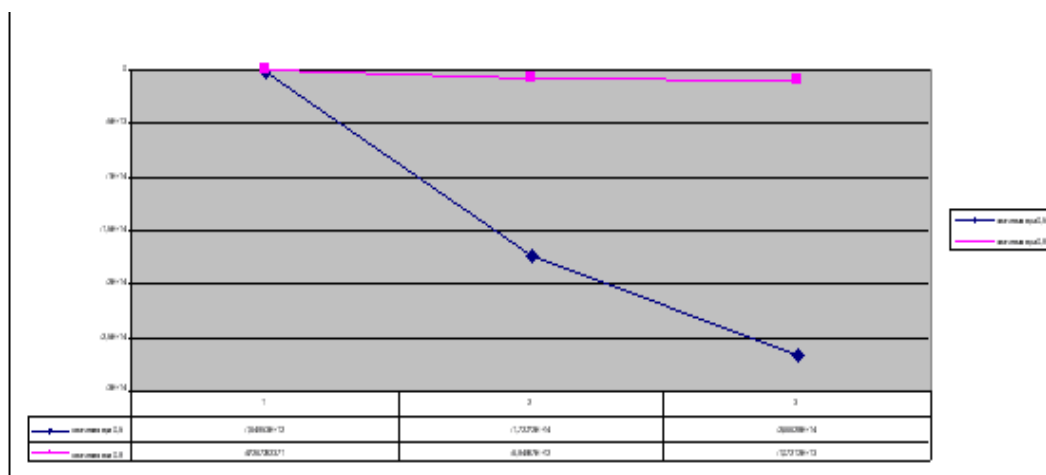


Рисунок 3.7 - Учет начальных деформации и сдвига срединной поверхности

- при увеличении значения сдвига от $(2,4-4)10^{-4}$ МПА его влияние на параметр критической нагрузки $P_{кр}$ значительно меньше, но зависит от граничных условий на торцах поперечного сечения выработки, III – случай;
- при защемленной и скользящей границах радиальная нагрузка существенно влияет на критическую нагрузку и преобразует картину изменения критической силы с увеличением размера относительного отверстия;
- параметр, характеризующий жесткость несущих слоев, вносит изменения в величины критических усилий при осевом сжатии, когда окружное усилие значительно меньше;
- изменение относительной толщины $\frac{h}{R}$ (0,0005–0,001) I – случай; (0,001–0,005) II – случай, (0,005–0,01) III – случай, зависит от относительной жесткости m_j ;
- учет начальных деформации увеличивает абсолютную величину критической нагрузки окружного усилия, не более чем на 0,3%;
- учет сдвига срединной поверхности уменьшает абсолютную величину окружного усилия не более чем на 0,9%;
- учет величин остаточных деформации увеличивает абсолютную величину критической нагрузки окружного усилия не более чем на 6%, но значительно уменьшает критическую нагрузку осевого усилия.

3.4. Численные моделирование разработки рудных месторождений в толще горных пород по критическим деформациям прямоугольной эпюры

Выработку в толще горных пород можно представить в виде трехслойной цилиндрической оболочки с внутренним радиусом R , внешним радиусом r , толщиной $h = h_1 + \Delta h$, длиной l с нежесткой матрицей заполнителя;

- действие внешних сил можно определить из формы изменения поперечного сечения критических деформаций заполнителя при $n=2$, $n=3$, $n=4$ овальную, треугольную, трапециевидную. При этом

$$E = (2 - 3)10^{-4} \text{ МПа}, \nu = (0,26 - 0,33);$$

$$E = (3 - 6)10^{-4} \text{ МПа}, \nu = (0,25 - 0,31);$$

$$E = (6 - 10)10^{-4} \text{ МПа}, \nu = (0,3 - 0,35);$$

- выработку в поперечном сечении, с точки зрения характера действия энергии деформации, можно разделить на три зоны, в продольном направлении также можно разделить на три зоны, но уже, с точки зрения её устойчивости. Первая, которая остается и после потери устойчивости в начальном безмоментном состоянии; вторая, где накапливается деформация после потери устойчивости; третья – зона прощелкивания: упругопластическая, непосредственно примыкающих к несущему слою, зона разрыхленных грунтов и нетронутой толще, где определяют $\Delta h = h_1$ в данной работе рассматривается устойчивость выработки в толще горных пород под действием неравномерной поперечной нагрузки по критическим деформациям.

Для решения данной постановки задачи рассматриваем две задачи:

1-ая задача. (основная задача). Методами микромеханики, в которых слой считается составной средой, состоящей из отдельных компонентов анизотропного материала со своими механическими и физическими характеристиками, на основе нелинейной (квадратичный вариант) теории тонких оболочек и гипотезы типа Тимошенко определим напряженно-деформированное состояние (НДС) первой зоны выработки и изменения формы критической деформации под действием сложной произвольной внешней силы;

2-ая задача. (обратная задача). Анализируя НДС и изменение формы критической деформации определим внешние неравномерные поперечные силы. Затем на основании внешней неравномерной поперечной силы методами макромеханики, в которых слой считается однородным, анизотропным телом в первой зоне слоистого материала выработки с эффективными механическими и физическими геомеханическими характеристиками определенными экспериментально, рассмотрим устойчивость выработки.

Рассмотрим выработку в толще горных пород в виде трехслойной цилиндрической оболочки, защемленной между ненесущими слоями свободно опертой по краям торца (поперечного сечения). Тогда, в нашем случае, в цилиндрических системах координат будет:

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + F_r &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{\varphi r}}{r} + F_\varphi &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0,
\end{aligned} \tag{3.72}$$

физические и геометрические уравнения возьмем как в работе [26].

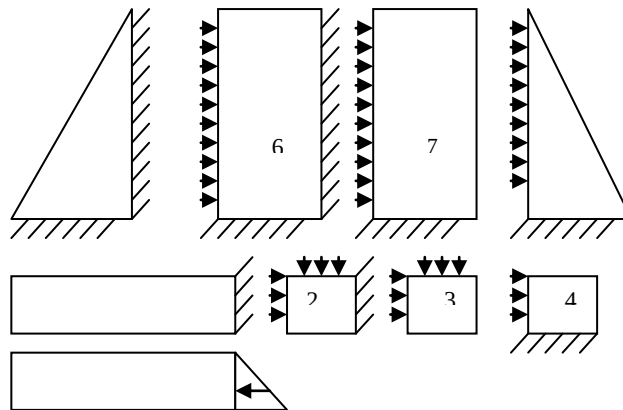
Возможны различные граничные условия на внутренней, внешней и торцевых поверхностях цилиндрической поверхности:

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= F_1(r), \sigma_{rz} = \Phi_1(r) \text{ или } u = w = 0 \text{ при } z = 0; \\
\sigma_z &= F_2(r), \sigma_{rz} = \Phi_2(r) \text{ или } u = w = 0 \text{ при } z = l; \\
\sigma_z &= F_3(r), \sigma_{rz} = \Phi_3(r) \text{ или } u = w = 0 \text{ при } f(r, z) = C_B \\
\sigma_z &= F_4(r), \sigma_{rz} = \Phi_4(r) \text{ или } u = w = 0 \text{ при } f(r, z) = C_H;
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Решения уравнения (109) с учетом физического уравнения в перемещениях с граничными уравнениями (110) однозначно определяет перемещение и усилия выработки. Отличием является то, что характер деформирования выработки будет иметь форму прямоугольника, а внешняя поперечная сила, по критическим деформациям имеет форму прямоугольной эпюры.

Далее решаем вторую основную задачу (обратная задача) первую зону выработки представим в виде круговой цилиндрической оболочки при действии неравномерных поперечных сил прямоугольной эпюры.

Анализ первой основной задачи показывает, что при прямоугольной форме деформации, когда критическая деформация возрастает от 0,1 до 0,15% под действием поперечной нагрузки и падает от 0,5 до 0,4 % под действием осевых сил, модуль упругости изменяется в пределах $E = (0,6 - 3,0)10^{-4}$ МПа за внешнюю поперечную нагрузку можно принять действие внешнего давления, равномерно распределенного по всей длине.



исунок 3.8. - Разбиение на суперэлементы микромеханики

Для обеспечения устойчивости выработки, при действии равномерной нагрузки для критического значения силы в инженерных расчетах можно принять формулу

$$q_B = \frac{0,85Eh}{L(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2} \quad (3.74)$$

где ν - коэффициент Пуассона, E - модуль упругости, h - толщина, L, R - длина и радиус первой зоны выработки, как критическое значение внешнего давления.

Полная критическая нагрузка, действующая на выработку будет:

$$Q_B = \frac{2\pi R \cdot 0,85Eh}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2} \quad (3.75)$$

Критическое значение внешнего давления, линейно изменяющегося по длине пояса загрузки и в срединной части выработки будут:

$$q_B = \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{L}{b} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}, \quad (3.76)$$

$$q_B = \frac{8}{3} \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}. \quad (3.77)$$

Эти формулы выведены из условия равенства грузовых площадей.

Таблица 1- Численные результаты критической нагрузки по формулам (3.76) и (3.77)

E	h	$\frac{h}{R}$	$\frac{R}{L}$
$(2-5)10^{-4}$	1, 2	0, 0 0 1	[0,1-0,9]
	1, 4	0, 0 0 5	
М П А	1, 6	0, 0 1	
	2, 0	0, 0 3	
	2, 8	0, 0 5	

Полученные числовые результаты показывают, что увеличение конусности при постоянном значении нижнего радиуса приводит к уменьшению по абсолютной величине всех компонентов напряжений на поверхности контакта ($r=R$), за исключением касательных напряжений, которые являются критическими для адгезионного слоя – контактной поверхности оболочки и заполнителя.

3.5. Об устойчивости весомой выработки в толще горных пород под действием неравномерного поперечного давления со стороны не несущего слоя трапецевидной эпюры

Рассмотрим одиночную выработку трехслойной цилиндрической оболочки с вязко-упругим твердым заполнителем длиной - l , радиусом - R , толщиной - h под действием линейно изменяющегося по длине внешнего давления трапецевидной эпюры внешней нагрузки. Тогда, при рассмотрении данной модели под действием статических нагрузок, особого сочетания, уравнение равновесия напишем в виде:

$$EI \frac{d^4 W}{dx^4} - N_1 \frac{d^2 W}{dx^2} + kW = -q + \frac{4}{3} \frac{0,85E}{(1-V^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{l} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \quad (3.78)$$

где $D = ES$ - цилиндрическая жесткость, k - коэффициент сопротивления, $-N_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ - поперечная нагрузка при критических деформациях горных пород. Граничные условия возьмем в виде:

$$\frac{d^3 W}{dx^3} = \mu_{xy} = M = N_1 \frac{dW}{dx} + kW = 0 \quad (3.79)$$

Здесь $\mu_{xy} = -2B \frac{d^2 W}{dx^2}$ - реакция моментного напряжения со стороны континуума Коссера, B - новая константа материала не несущего слоя, $M = EI \frac{dW}{dx^2}$ - изгибающий момент.

Если решение однородной части дифференциального уравнения (3.78) ищем в форме, соответствующей принятому характеру выпучивания выработки, например

$$W(x) = A \sin \frac{m\pi x}{e} \quad (3.80)$$

То

$$N_1 = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-V^2)}} \quad (3.81)$$

$$k = -\frac{Eh}{R^2} \quad (3.82)$$

Здесь m - число полуволн, которое определяется из (3.78) путем подстановки в (3.80), исследуя полученное выражение на минимум.

$$m = \frac{e}{\pi} \sqrt[4]{\frac{Eh}{R^2 ES}}$$

Итак, рассмотрим случай

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{N_1}{EI} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{Eh}{R^2} = -\frac{q}{EI} + \frac{4}{3} \frac{1}{EI} \frac{0.85E}{(1-V^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{l}\right) \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \quad (3.83)$$

Решение линейно-неоднородного дифференциального уравнения (3.83) ищем в виде

$$W(x) = W_0(x) + W_1(x) \quad (3.84)$$

где $W_0(x)$ есть общее решение однородной части

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{N_1}{EI} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{Eh}{R^2} = 0 \quad (3.85)$$

а $W_1(x)$ - какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - N_1 \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{Eh}{R^2} = -\frac{q_1}{EI} \quad (3.86)$$

где

$$-\frac{q_1}{EI} = -\frac{q}{EI} + \frac{4}{3} \frac{1}{EI} \frac{0.85E}{(1-V^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{l}\right) \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \quad (3.87)$$

Решение (3.85) ищем в виде

$$W_0(x) = e^{kx} \quad (3.88)$$

и составим характеристическое уравнение

$$k^4 - \frac{N_1}{EI} k^2 + \frac{Eh}{k^2 EI} = 0 \quad (3.89)$$

Если $N_1^2 - 4\bar{k}EI > 0$, где $\bar{k} = \frac{Eh}{k^2}$, то корни характеристического уравнения будут действительными: $k_1 = \sqrt{\alpha + \beta}$; $k_2 = -\sqrt{\alpha + \beta}$; $k_3 = \sqrt{\alpha - \beta}$; $k_4 = -\sqrt{\alpha - \beta}$; (3.90)

где

$$\alpha = -\frac{N_1}{2EI}; \quad \beta = \frac{1}{2EI} \sqrt{N_1^2 + 4\bar{k}EI} \quad (3.91)$$

Итак, общее решение однородного уравнения (3.85) имеет вид:

$$W_0(x) = C_1 e^{\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_3 e^{\sqrt{\alpha-\beta}x} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha-\beta}x} \quad (3.92)$$

Частные решение неоднородного уравнения ищем методом вариации произвольных постоянных:

$$W_1(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_3(x)y_3(x) + C_4(x)y_4(x) \quad (3.93)$$

и составим систему

$$\begin{aligned} y_1(x)C_1'(x) + y_2(x)C_2'(x) + y_3(x)C_3'(x) + y_4(x)C_4'(x) &= 0, \\ y_1'(x)C_1(x) + y_2'(x)C_2(x) + y_3'(x)C_3(x) + y_4'(x)C_4(x) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_1''(x)C_1'(x) + y_2''(x)C_2'(x) + y_3''(x)C_3'(x) + y_4''(x)C_4'(x) = 0, \\
& y_1'''(x)C_1'(x) + y_2'''(x)C_2'(x) + y_3'''(x)C_3'(x) + y_4'''(x)C_4'(x) = -\frac{q_1}{EI}
\end{aligned} \tag{3.94}$$

где

$$y_1(x) = e^{\sqrt{\alpha+\beta}x}; \quad y_2(x) = e^{-\sqrt{\alpha+\beta}x}, \quad y_3(x) = e^{\sqrt{\alpha-\beta}x}; \quad y_4(x) = e^{-\sqrt{\alpha-\beta}x} \tag{3.95}$$

Разрешая систему (3.94) с учетом (3.95) относительно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $C_3'(x)$, $C_4'(x)$, а затем, проинтегрируя относительно переменной x , имеем

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= \frac{q_1}{EI(\alpha^2 - \beta^2)} e^{-\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_1, \\
C_2(x) &= \frac{q_1}{EI(\alpha^2 - \beta^2)} e^{\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_2, \\
C_3(x) &= \frac{q_1}{EI(\alpha - \beta)^2} e^{-\sqrt{\alpha-\beta}x} + C_3, \\
C_4(x) &= \frac{q_1}{EI(\alpha - \beta)^2} e^{\sqrt{\alpha-\beta}x} + C_4.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

$$\begin{aligned}
W(x) &= C_1 e^{\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_3 e^{\sqrt{\alpha-\beta}x} + \\
&+ C_4 e^{-\sqrt{\alpha-\beta}x} - \frac{4\beta q_1}{EI(\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2)}
\end{aligned} \tag{3.97}$$

где

$$\alpha = -\frac{N_1}{2EI}; \quad \beta = \frac{1}{2EI} \sqrt{N_1 + 4KEI} \tag{3.98}$$

Для изотропного материала

$$K = -\frac{Eh}{R^2}; \quad N_1 = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-V^2)}} \tag{3.99}$$

Здесь произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из четырех граничных условий (3.79). При этом на каждом крае выработки могут быть поставлены два граничных условия в зависимости от конкретного случая постановки задачи горного дела задачи Коши.

Если $N_1^2 - 4KEI < 0$, то корни характеристического уравнения будут комплексно - сопряженными

$$K_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i; \quad K_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2 i \tag{3.100}$$

Тогда общее решение однородной части будет

$$W_0(x) = e^{\alpha_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x) + e^{\alpha_2 x} (C_3 \cos \beta_2 x + C_4 \sin \beta_2 x) \tag{3.101}$$

а частное решение неоднородного уравнения находится методом вариации произвольных постоянных. Данная модель работает как модель весомой выработки, находящейся на упругом основании типа Винклера.

3.6. Численные методы моделирования разработки рудных месторождений в толще горных пород по критическим деформациям трапециевидной эпюры

Задана выработка в толщине горных пород в виде трехслойной цилиндрической оболочки с внутренним радиусом R , внешним радиусом r , толщиной $h = h_1 + \Delta h$, длиной l с не жесткой матрицей заполнителя;

- действие внешних сил можно определить из формы изменения поперечного сечения критических деформации заполнителя при $n = 2, n = 3, n = 4$ овальную, треугольную и трапециевидную. При этом $E = (2 - 3)10^{-4} \text{ МПа}$, $V = (0,26 - 0,33)$;

$$E = (3 - 6)10^{-4} \text{ МПа}; V = (0,25 - 0,31);$$

$$E = (6 - 10)10^{-4} \text{ МПа}; V = (0,3 - 0,35)10^{-4} \text{ МПа};$$

- выработку в поперечном сечении с точки зрения характера действия энергии деформации можно разделить на три зоны [5], в продольном направлении так же можно разделить на три зоны, но уже с точки зрения ее устойчивости. Первая, которая лишается и после потери устойчивости в начальном безмоментном состоянии, вторая, где накапливается деформация после потери устойчивости; третья-зона прищелкивания: упруго-пластическая, непосредственно примыкающих к несущему слою, зоны разрыхленных грунтов и нетронутой толщи, где определяют $\Delta h = h_1$ [6], в данной работе рассматривается устойчивость, выработки в толще горных пород под действием неравномерной поперечной нагрузки по критическим деформациям.

Для решения данной постановки задачи рассмотрим две задачи:

1-ая задача (основания задача). Методами микромеханики, в которых слой считается составной средой, состоящей из отдельных компонентов анизотропного материала со своими механическими и физическими характеристиками, на основе нелинейной

(квадратичный вариант) теории тонких оболочек и гипотезы типа Тимошенко определим напряженно деформированное состояние (НДС) первой зоны выработки и изменение формы критической деформации под действием слонинной произвольной внешней силы;

2-задача (обратная задача). Анализируя НДС и изменение формы критической деформации [22] определим внешние неравномерные поперечные силы. Затем на основании внешней неравномерной поперечной силы методами макромеханики, в которых с ней считается однородным, анизотропным телом в первом зоне слоистого материала выработки с эффективными механическими и физическими геомеханическими характеристиками определенными экспериментально, рассмотрим устойчивость выработки.

Рассмотрим выработки в толще горных пород в виде трехсменной цилиндрической оболочки, зацепленной между несущими слоями свободно опертой по краям торца

(поперечного сияния).

Тогда, в нашем случае в цилиндрических системах координат будет:

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + F_r &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{\varphi z}}{r} + F_\varphi &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.102}$$

Возможные различные граничные условия на внутренней, внешней и торцевых поверхностях цилиндрической поверхности:

$$\sigma_z = F_1(r), \sigma_{rz} = \Phi_1(r) \text{ или } U = W = 0 \text{ при } z = 0$$

$$\sigma_z = F_2(r), \sigma_{rz} = \Phi_2(r) \text{ или } U = W = 0 \text{ при } z = \varphi$$

$$\sigma_z = F_3(r), \sigma_{rz} = \Phi_3(z) \text{ или } U = W = 0 \text{ при } f(r, z) = C_B,$$

$$\sigma_z = F_4(r), \sigma_{rz} = \Phi_4(z) \text{ или } U = W = 0 \text{ при } f(r, z) = C_H \tag{3.103}$$

Решения уравнения (3.102) с учетом физического уравнения в перемещениях с граничными уравнениями (3.103) однозначно определяет перемещение и усилия выработки так же, как в работе [28]. Отличием является то, что характер деформирования выработки будет иметь форму трапециевидной, а внешняя поперечная сила, по критическим деформациям имеет форму трапециевидной эпюры.

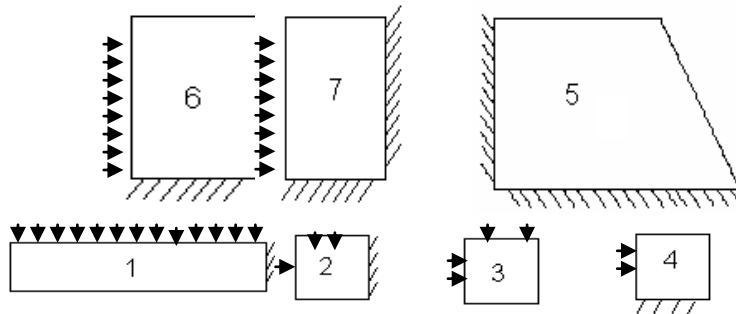


Рисунок 3.9. - Разбиение на элементы микромеханики.

Результаты качественно согласуются с результатами работ [21]-[23] и [28] на контактной поверхности в зависимости от длины выработки в толще горных пород.

Далее решаем вторую основную задачу (обратная задача) первую зону выработки представим в виде круговой цилиндрической оболочки при действии неравномерных поперечных сил трапециевидной эпюры.

Далее решаем вторую задачу (обратная задача), первую зону выработки, как оболочка с упругим заполнителем, представим в виде круговой цилиндрической оболочки при Действии линейно изменяющегося по длине внешнего давления (случай трапециевидной эпюры) внешней нагрузки.

Анализ первой основной задачи показывает, что при трапецевидной форме деформации, когда критическая деформация возрастает от 0,1 до 0,15 % под действием поперечной нагрузки, падает: от 0,5 до 0,4 % под действием осевых сил, от 1,2% до 0,8% под действием объемных сил, модуль упругости изменяется в пределах $E = (0,6 - 3,0)10^{-4}$ МПА за внешнюю поперечную нагрузку можно принять действие внешнего давления, линейно изменяющегося по длине (случай трапецевидной эпюры внешней нагрузки). В инженерных расчетах принять формулы:

$$q_B = \frac{4}{3} \frac{0,85E}{L(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L}\right) \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \quad (3.104)$$

где ν - коэффициент Пуассона, E - модуль упругости, h - толщина, L, R - длина и радиус первой зоны выработки, как критическое значение внешнего давления трапецевидной эпюры. Критическое значение внешнего давления, линейно изменяющегося по длине пояса загрузки и в срединной части выработки будут:

$$q_B = \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L}\right) \left(\frac{L}{b}\right) \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}, \quad (3.105)$$

$$q_B = \frac{8}{3} \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L}\right) \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}. \quad (3.106)$$

Эти формулы выведены из условия равенства грузовых площадей.

Таблица 2- Численные результаты критической нагрузки по формулам (3.105) и (3.106) показывают:

		L	1200	1600	2000	2600	3000
		$\frac{R}{L}$	0,01500	0,01125	0,00900	0,00692	0,00600
h	$\frac{h}{R}$	[0,1-0,9]					
1,2	0,067		44,668	33,501	26,801	20,616	17,867
1,4	0,078		65,669	49,252	39,402	30,309	26,268
1,6	0,089		91,694	68,771	55,017	42,320	36,678

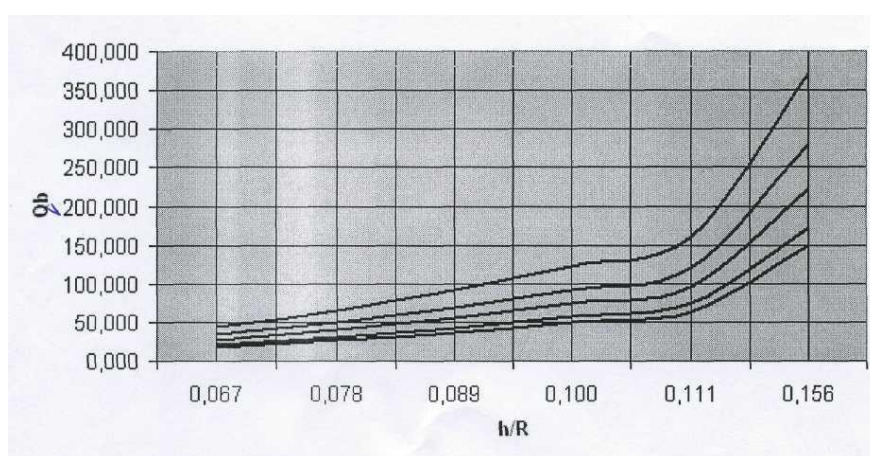
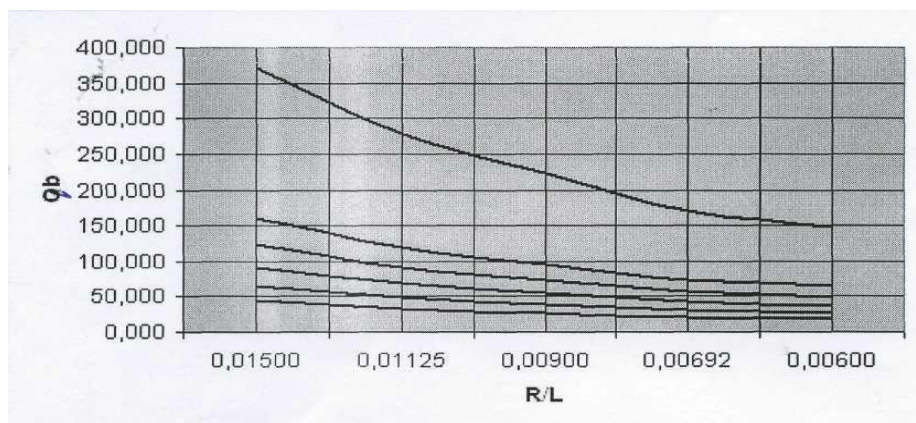


Рисунок 3.10 - Численные результаты критической нагрузки

Глава 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕРАВНОМЕРНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ СО СТОРОНЫ ВЫРАБОТКИ В УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ

4.1. Решение задач о выпучивании выработки в массиве горных пород под действием неравномерных поперечных сил по критическим деформациям

С математической точки зрения такие задачи, относятся к колебанию цилиндрических оболочек после потери устойчивости поперечного сечения, с начальной симметричной или кососимметричной волнистостью, при различных краевых условиях на торцах для статической нагрузки, можно записать в виде:

$$a_0(x) \frac{d^4 W}{dx^4} + a_1(x) \frac{d^3 W}{dx^3} + a_2(x) \frac{d^2 W}{dx^2} + a_3(x) \frac{dW}{dx} + a_4(x) W = f(x), \quad (4.1)$$

где $W = W(x, t)$, для динамической нагрузки:

$$a_0(x) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + a_1(x) \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + a_2(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} +$$

$$+ a_3(x) \frac{\partial W}{\partial x} + a_4(x) W - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = P(x, t)$$

$$a_0(x, t) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + a_1(x, t) \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + a_2(x, t) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_3(x, t) \frac{\partial W}{\partial x} +$$

$$+ a_4(x, t) W - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \begin{cases} f(x) \cdot \varphi(t) \\ f(x) t \\ f(x) \sin \frac{n\pi}{l} t \end{cases} \quad (4.3)$$

для сейсмической нагрузки при различных краевых условиях на торцах. Для решения данной задачи разобьем ее на несколько задач:

1. Об устойчивости выработки, находящейся на упругом основании типа Винклера:

$$D = \frac{d^4 W}{dx^4} = -q_k \quad (4.4)$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, где q_k – критическая сила, под действием которой поперечное сечение теряет устойчивость. Общее решение имеет вид:

$$W = -\frac{q_k}{24EJ} x^4 + \frac{1}{6} a_1 x^3 + \frac{1}{2} a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \quad (4.5)$$

2.

$$EJ \frac{d^4 W}{dx^4} + KW = -q_k, \quad (4.6)$$

Общее решение имеет вид:

$$W(x) = C_1 \ell^{\beta x} \cos \beta x + C_2 \ell^{\beta x} \sin \beta x + C_3 \ell^{-\beta x} \cos \beta x + C_4 \ell^{-\beta x} \sin \beta x - \frac{q_k \ell^{-\beta x}}{20 E J \beta^4} \times (4.7)$$

$$\times (5 \sin 2 \beta x + 5 \sin \beta x \cos \beta x - 1),$$

где $\beta^4 = \frac{K}{EJ}$, K – коэффициент сопротивления среды, для изотропного материала, методом методом минимизации определяется в виде $K = -\frac{Eh}{R^2}$.

3. Об устойчивости выработки, находящейся на основании типа Пастернака:

$$EJ \frac{d^4 W}{dx^4} + \eta \frac{dW}{dx} = -q_k, \quad (4.8)$$

где η – коэффициент вязкости или сдвига Пастернака. Общее решение имеет вид:

$$W(x) = C_1 + C_2 e^{-bx} + C_3 e^{\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + C_4 e^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx + \frac{q_k}{3 E J b^3} (1 - e^{-bx}) x +$$

$$+ \frac{q_k}{6 \sqrt{3} E J b^4} [(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1) \cos \sqrt{3} bx - (\sqrt{3} - 1) \sin \sqrt{3} bx], \quad (4.9)$$

$$b = \sqrt[4]{\frac{E^3 L^3}{R^2 (EJ)^3}}$$

Для изотропного материала методом минимизации определяется

$$\eta = -\frac{EJ}{R} \sqrt[4]{\frac{E^3 L^3}{R^2 (EJ)^3}}.$$

4. Об устойчивости выработки, находящейся на основании типа Кельвина-Фойгта:

$$EJ \frac{d^4 W}{dx^4} + \eta \frac{dW}{dx} + KW = q_k, \quad (4.10)$$

Общее решение имеет вид:

$$W(x) = e^{\alpha_2 x} (C_3 \cos \beta_2 x + C_4 \sin \beta_2 x) +$$

$$e^{\alpha_1 x} (C_3 \cos) \beta_1 x + C_2 \sin \beta_2 x) + \frac{q R^2}{Eh} (\ell - x) \quad (4.11)$$

Здесь, к сожалению, в граничных условиях напряжения σ_y антисимметричны по y , а граничные значения σ_{xy} – симметричны по y . Однако парность касательных напряжений не сохранена. Так как, расчет трехслойных оболочек нагруженный внешней сосредоточенной силой q может быть сведен к определению силы, действующей на круговое кольцо согласно рисунка 4.1, то изгибающий момент M_u силы, действующий в различных сечениях упругого кольца определяется:

$$M_u(\varphi) = 0,5qR\left(\frac{2}{\pi} - \cos\varphi\right), \quad (4.12)$$

где φ - полярный угол, отсчитываемый от горизонтального диаметра. Следовательно, вертикальный прогиб:

$$\Delta y = -0,149 \frac{qR^3}{EJ}. \quad (4.13)$$

Максимальный прогиб в горизонтальном направлении:

$$\Delta x = \left(\frac{4-\pi}{2\pi}\right) \frac{qR^3}{EJ}, \quad (4.14)$$

где EJ – жесткость на изгиб; J – момент инерции продольного сечения.

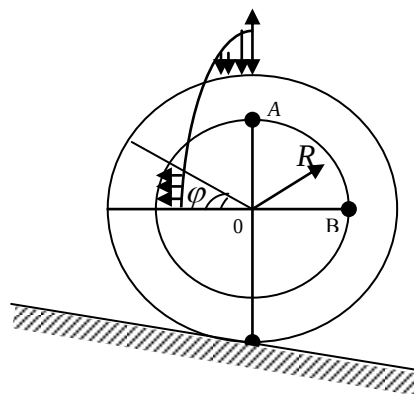


Рисунок 4.1 – Схема действия на круговое кольцо

Перемещения в точках А и В имеют разные знаки, по абсолютной величине примерно одинаковы, следовательно размеры выработки в направлении действия силы несколько уменьшаются, а в направлении горизонтальной оси несколько увеличиваются, т.е. имеет место неравномерное распределение изгибающих моментов по сечению. По существу, в момент потери устойчивости, когда появляется новая форма равновесия, сейсмичная от первоначальной, за счет потери устойчивости поперечного сечения, выработка потерпит качественный скачок: из безмоментного становится изгибным моментным.

Тогда в разрезе общей задачи можно поставить еще задачи:

- Об устойчивости выработки под действием собственного веса и равномерного осевого давления $N_{кр}$, находящейся на упруго-вязком основании типа Винклера:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{N_1}{EJ} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{Eh}{R^2} = -\frac{q_k}{EJ}, \quad (4.15)$$

Общее решение имеет вид:

$$W(x) = C_1 e^{\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_3 e^{\sqrt{\alpha-\beta}x} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha-\beta}x} - \frac{4\beta q_k}{EJ(\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2)}, \quad (4.16)$$

где $\alpha = -\frac{N_1}{2EJ}$; $\beta = \frac{1}{2EJ}\sqrt{N_1 + 4KEJ}$. Для изотропного материала $N_{kp} = N_1$ методом минимизации имеем $N_{kp} = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$.

- Об устойчивости выработки под действием собственного веса и равномерного осевого давления N_{kp} , находящейся на упруго-вязком основании типа Пастернака:

$$EJ \frac{d^4 W}{dx^4} - N_1 \frac{d^2 W}{dx^2} + \lambda \frac{dW}{dx} = -q_k, \quad (4.17)$$

Общее решение имеет вид:

$$W(x) = C_1 + C_2 e^{-2\alpha x} + C_3 e^{(\alpha+\beta)x} + C_4 e^{(\alpha-\beta)x} - \frac{q_k}{4EJ} \left[\frac{1}{\alpha^2(9\alpha^2-\beta^2)} + \frac{2}{\beta(\alpha+\beta)^2(3\alpha+\beta)} - \frac{2}{\beta(\alpha-\beta)^2(3\alpha-\beta)} - \frac{2x}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)} \right], \quad (4.18)$$

где $\alpha = -\frac{N_1}{2EJ}$; $\beta = \frac{1}{2EJ}\sqrt{N_1 + 4N_1 E J}$.

В литературе имеется еще одна модель [19].

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - C \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + W = -\frac{q_k}{KG}, \quad (4.19)$$

где $C = \frac{2B\beta}{EJ}$, $\xi = \frac{x}{\beta}$, $\beta = \sqrt[4]{\frac{EJ}{KG}}$, b – ширина основания балки. Общее решение имеет вид:

$$W(\xi) = e^{a_1 \xi} (C_1 \cos b_1 \xi + C_2 \sin b_1 \xi) + e^{-a_2 \xi} (C_3 \cos b_2 \xi + C_4 \sin b_2 \xi) + \frac{q_k}{Kb}, \quad (4.20)$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 – действительные и мнимые части корней $(a_1 \pm b_1 i), (a_2 \pm b_2 i)$ характеристического уравнения.

Следовательно, после объединения всех моделей поставленную общую задачу представим в виде модели:

$$EJ \frac{d^4 W}{dx^4} + 2B \frac{d^3 W}{dx^3} - N_{kp} \frac{d^2 W}{dx^2} + \eta \frac{dW}{dx} + KW = q_k \quad (4.21)$$

Теперь предстоит задача об определении q_k . Для этого рассмотрим следующие этапы.

II-этап. Определить НДС, граничные условия начальных неправильностей, искажение формы поперечного сечения, толщину второй зоны выработки.

1 случай. Первую зону выработки представим в виде бесконечной полосы высотой $2R$ с нежесткой матрицей заполнителя. Тогда в поперечном сечении имеем: Упругое равновесие

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (4.22)$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (\text{условие сплошности}) \quad (4.23)$$

$$\sigma_{|y|_{y=0}} = f(x), \quad \sigma_{xy|_{y=0}} = g(x) \quad (4.24)$$

где f и g – заданные функции; Критерии корректности

$$W|_0 = 0, \quad W|_0 = \min \quad (\text{локальный}) \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial \ell_j} \left(\frac{\partial W}{\partial \ell_j} \right) = 0, \quad \ell_{ij} = \frac{\partial A}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4.26)$$

где A – дополнительная работа деформации, ℓ_j – компоненты деформации, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, $W(x, i) = f(x)$ – начальная неправильность.

2 случай. Первую зону выработки представим в виде бесконечного упругого слоя под действием приложенных к его граничным плоскостям ($z = \pm h$) внешних усилий. Тогда в поперечном сечении имеем уравнение равновесия в виде:

$$\begin{aligned} GU &= -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\hat{O}_1; \\ GV &= -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\hat{O}_2; \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} GW &= -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\hat{O}_3; \\ 2G \frac{\partial F}{\partial x} &+ (1-\nu)\Phi_3; \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) - \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_y &= 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} + 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) - \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{xy} &= (1-2\nu) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} \right) + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial y}; \\ \sigma_z &= 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} + 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) - \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} \right) \\ \sigma_{yx} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \sigma_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \\ \Phi &= (1-2\nu)\Phi_3 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - \left(x \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + y \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + z \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

где $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3$ – гармонические функции, G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, при граничных условиях:

$$W|_{z=h} = W_h(r, \varphi), \quad \sigma_{xz}|_{z=h} = \sigma_{xh}(r, \varphi), \quad \sigma_{yz}|_{z=h} = \sigma_{yh}(r, \varphi) \quad (4.30)$$

$$W|_{\substack{z=0 \\ r < R}} = W_0(r, \varphi), \quad \sigma_z|_{z=0} = \sigma_0(r, \varphi), \quad (4.31)$$

$$\sigma_{xz}|_{z=0} = \sigma_{z_0}(r, \varphi), \quad \sigma_{yz}|_{z=0} = \sigma_{y_0}(r, \varphi), \quad (4.32)$$

Функция n , удовлетворяющая уравнению Лапласа в области ограниченной поверхностями в цилиндрических координатах $z=0$; $z=e$, $R_2 - R_1 = h$ должны удовлетворять условиям

$$W|_{z=R_1} = W_1, \quad W|_{z=R_2} = W_2, \quad \frac{\partial W}{\partial z}|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z}|_{z=l} = 0, \quad (4.33)$$

$$W = W_1 + \frac{\ell n \left| \frac{2}{R_2} \right|}{\ell n \left| \frac{R_2}{R_1} \right|} - (W_2 - W_1) \quad (4.34)$$

3 случай. Первую зону выработки представим в виде полупространства с кривой линией раздела краевых условий при задании на всей границе напряжений, ослабленной выработки. Тогда имеем уравнения равновесия в виде:

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial r} - G \left(\frac{\partial \omega_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial z} \right) = 0, \quad (\lambda + 2G) \frac{\partial e}{r \partial \varphi} - G \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) = 0, \\ (\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial z} - G \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r\omega_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \text{где } \omega_\varphi = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r}, \quad \omega_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rV)}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right], \quad (4.35)$$

$\omega_r = \frac{\partial W}{r \partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial z}$, $\ell = \frac{\partial(rU)}{r \partial r} + \frac{\partial V}{r \partial \varphi} + \frac{\partial W}{\partial z}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\lambda = \frac{E}{1-2\nu}$. ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига;

$$\sigma_{2z}|_{z=0} = \sigma(r), \quad \sigma_z|_{\substack{z=0 \\ z < R}} = \sigma(r), \quad U_z|_{\substack{z=0 \\ z < R}} = W(r) \quad (4.36)$$

Определение формы критической деформации первой зоны выработки из случаев 1, 2 и 3 дает возможность решить поставленную задачу о выпучивании выработки в массиве горных пород с учетом начальных неправильностей.

Учет влияния начальных неправильностей, в форме срединной поверхности второй зоны выработки, можно определить из работы [25] по аналогии:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right],$$

$$D \left(1 - \frac{Eh^2}{\beta} \nabla^2 \right) \nabla^2 \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 W_0}{2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right) = q_k, \quad (4.37)$$

где функция перемещения χ связана с прогибом W зависимостью:

$$\nabla^2 W = \nabla^2 \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \chi. \quad (4.38)$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость, E – приведенный модуль упругости, β – коэффициент поперечного сдвига заполнителя, W – дополнительный прогиб, W_0 – начальный прогиб срединной поверхности, h – суммарная толщина, q_k – критическая нагрузка поперечного сечения, q – равномерно распределенная нагрузка.

В нашем случае возможны следующие предположения:

$$\text{А) } W_0 = fW, \text{ где } f - \text{const} \quad (4.39)$$

$$\text{В) } \chi = AW = q_k \quad (4.40)$$

Задавая возмущения поперечного сечения выработки в виде: [7], [20].

$$\left. \begin{aligned} U &= f_1 \sin \frac{mx}{R} \sin \frac{ns}{R}, \\ V &= f_2 \cos \frac{mx}{R} \cos \frac{ns}{R}, \\ W &= f \cos \frac{mx}{R} \sin ns \end{aligned} \right\}, \quad (4.41)$$

где f_1, f_2, f – стрела прогиба формулы поперечного сечения выработки в результате искажения, n – число полных волн искаженной поверхности вдоль окружности, m – волновое число вдоль длины выработки, выбирая аппроксимирующее выражение для прогиба W в виде:

$$W = f \left(\sin \frac{\pi y}{R} + \sin^2 \frac{\pi x}{R} \right) \quad (4.42)$$

найдем стрелу прогиба:

$$f = \frac{6\sigma_\theta^*(1-\mu^2)h}{E \left[\frac{4(\pi R)^4}{L^4} + n^4 \right]} \left(\frac{R}{h} \right)^3 \quad (4.43)$$

$Y(x)\sigma_\theta^* = q_k \frac{R}{h}$. При этом, если $n = 2$ получается овальная форма (прямоугольная),

$n = 3$ – конусообразная (треугольная), $n = 4$ – трапециевидная форма.

Толщина второй зоны выработки определяется по формуле из работы [21]:

$$\frac{h}{shh} = 1 - \frac{q_{kp}}{\mu}, \quad (4.44)$$

при этом $W_0 = fW$ и $q_k = \frac{Gm^3 h_1 f_k}{Lh(1+km^2)} \left[\frac{2\beta h_1 m^2 \pi^2}{NL^2(1+km^2)} - 1 \right]^{-1}$,

$$q_k = \frac{Ef_c}{\nu h} \left[\frac{1}{N} \left(D \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{Eh^2}{\nu_3 h m^2 \pi^2} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (4.45)$$

здесь N – усилие, находящийся на единицу ширины, h_1 – толщина 1-ой зонь выработки, h_3 – толщина второй зоны, h – общая толщина, m – число полувольт $K = \frac{Bh\pi^2}{GL^2}$, $B = \frac{Eh_3}{1-\mu^2}$, f_0 – стрела начальной неправильности, f_k – стрела начального кососимметричного прогиба, f_c – стрела начального симметричного прогиба.

III-этап. Установление устойчивости выработки под действием неравномерных поперечных сил прямоугольной, треугольной и трапецевидной эпюры.

- Выработку в толще горных пород можно представить в виде многослойной анизотропной оболочки типа Тимошенко в нелинейной постановке с конечными деформациями, исходя их анализа керн разведочных скважин или нарезных выработок.

- Расчеты, приведенные с помощью компьютерных программ для случая осевого сжатия выработки в массиве горных пород при конечных деформациях, показали, что точное удовлетворение граничными условиями уравнения совместности деформации приводит к некоторому снижению критической нагрузки по сравнению с известными решениями для тех же параметров прогиба. Удержание более 7 (семь) членов параметров прогиба при конечных деформациях требует необходимости использовать критерии корректности нелинейных соотношений при больших прогибах.

В случае, когда неравномерное поперечное давление, в вышеуказанных случаях, критические значения по нелинейной теории отличается от величины критических значений расчетных формул от 3% до 6%. Изменение относительности толщины рыхленного массива зависит так же от относительной жесткости обрабатываемого материала.

IV-этап. Выпучивание выработки в массиве горных пород под действием неравномерных поперечных сил по критическим деформациям с начальной неправильностью.

На основании предположении II-этапа записать уравнение возмущенного состояния второй зоны выработки из рассмотренных моделей и вместо критической силы q_k взять одно из значений в зависимости от граничных условия и постановки задач.

V-этап. Анализ численных результатов и построение графика изменения прогиба $W(x)$ срединной поверхности второго слоя (рыхленного) выработки в зависимости от физико-механического свойства обрабатываемого материала.

VI-этап. Математическая постановка задачи и ее внедрение в учебный процесс.

1) Найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения 4-го порядка моделей Б-1-Б-7 при следующих граничных условиях:

- А) $w = 0, \frac{d^2W}{dx^2} = 0$ при $x = 0; x = \ell$ – шарнирно закрепленный край;
- В) $w = 0, \frac{dW}{dx} = 0$ при $x = 0; x = \ell$ – скользящий заделанный край;
- С) $\frac{d^2W}{dx^2} = 0; \frac{d^3W}{dx^3} = 0$ при $x = 0; x = \ell$ – свободный край;
- Д) $w = 0, \frac{dW}{dx} = 0$ при $x = 0; x = \ell$ – смешанный край;

2) Составить пакет программных документов для численного решения поставленной задачи (частное решение) моделей Б-1-Б-7.

$$W(x) = q_k f(x) \quad (4.46)$$

При $q_k = \gamma gh = \text{const}$, где $g = (2,7 - 3,2)10^{-2} \text{ МПа}$. $\gamma = [0,3 - 0,9]$, $P = (750 - 1000) \text{ М}$, где g – усредненный объемный вес вышележащих несущих слоев, H – глубина выработки, γ – коэффициент бокового давления.

Если от $E = (5 - 6)10^4$ до $(10 - 12)10^4 \text{ МПа}$, то массив крепких пород; если от $E = (2,3)10^4$ до $(5,6)10^4 \text{ МПа}$, то массив средней прочности, такие как Текели (Казахстан), Сумсар (Кыргызстан), Хайдархан (Кыргызстан). Для крепких пород: Трудовое (Россия), Учкашкан (Россия), Монблан (Франция);

3) Сравнить полученные числовые результаты с численными результатами аналогичных программных документов по формуле

$$W(x) = q_k f(x) \quad (4.47)$$

$$\text{где } q_k = \frac{0,85Eh}{L(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad q_k = \frac{2 \cdot 0,85E}{L(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{R}{L}\right) \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}}, \quad q_k = \frac{4}{3} \cdot \frac{0,85E}{L(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{R}{L}\right) \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}}.$$

$$\frac{1 + \frac{h}{shh}}{h^{\frac{5}{2}}} = \frac{1,85E}{L(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}} \nu R^{\frac{3}{2}}} \text{ прямоугольный эпюры} \quad (4.48)$$

$$\frac{1 - \frac{h}{shh}}{h^{\frac{5}{2}}} = \frac{2 \cdot 0,85E}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}} \nu R^{\frac{5}{2}}} \frac{R}{L} \text{ треугольный эпюры} \quad (4.49)$$

$$\frac{1 + \frac{h}{shh}}{h^{\frac{5}{2}}} = \frac{4}{3} \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}} \nu R^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{R}{L} \text{ трапецевидной эпюры} \quad (4.50)$$

4) Составить программу при заданных данных (из задачи №1 и №2).

5) Составить программу для определения толщины рыхленного массива.

6) Решение первой (основной) и второй (обратной) задачи геомеханики применительно к выработкам методом интегральных преобразований.

Краткое обоснование моделей Б-1 и Б-2. 1-случай Модель Б-1.

Рассмотрим одиночную выработку в виде трехслойной цилиндрической оболочки длиной – l , толщиной – h , радиусом – R , под действием собственного веса – q .

В общем случае толщина – h и цилиндрическая жесткость EJ есть переменная величина. Тогда уравнение равновесия будет

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = -q . \quad (4.51)$$

Данное дифференциальное уравнение рассмотрено в курсе сопротивления материалов для изотропной балки.

Дифференциальное уравнение круглой цилиндрической оболочки (трубы) из изотропного материала с постоянной толщиной будет:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = -q , \quad (4.52)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} . \quad (4.53)$$

Общее решение будет

$$W_{\text{ед}} = -\frac{Q}{24EJ} x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 . \quad (4.54)$$

Здесь произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из четырех граничных условий. Причем на каждом крае выработки могут быть поставлены два граничных условия.

2-случай Модуль Б-2. Теперь рассмотрим выработку под действием собственного веса, находящейся на упругом основании типа Винклера

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = -q , \quad (4.55)$$

где k – коэффициент сопротивления среды.

Перепишем (4.55) в виде

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{k}{EJ} W = -\frac{q}{EJ} \quad (4.56)$$

Решение (4.56) как линейно неоднородного уравнения 4-го порядка запишем в виде

$$W(x) = W_0(x) + W_1(x) , \quad (4.57)$$

где $W_0(x)$ - общее решение однородной части

$$\frac{d^4 W_0}{dx^4} + \frac{k}{EJ} W_0 = 0 , \quad (4.58)$$

а $W_1(x)$ - какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения. Общее решение однородной части ищем в виде

$$W_0(x) = e^{\lambda x} \quad (4.59)$$

и составим характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \frac{k}{EJ} = 0 . \quad (4.60)$$

Откуда, на основании формулы решения двучленного уравнения получим

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}} \left(\cos \frac{\pi + 2m\pi}{4} + \sin \frac{\pi + 2m\pi}{4} \right) \quad (4.61)$$

$m=0,1,2,3$. Тогда общее решение однородного уравнения будет

$$W_0(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\alpha x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x), \quad (4.62)$$

где $\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}$. Частное решение $W_1(x)$ ищем методом вариации произвольно постоянных и составим систему уравнений:

$$\begin{aligned} e^{\beta x} \cos \beta x \cdot C_1'(x) + e^{\beta x} \sin \beta x \cdot C_2'(x) + e^{-\beta x} \cos \beta x \cdot C_3'(x) + e^{-\beta x} \sin \beta x \cdot C_4'(x) &= 0, \\ e^{\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \beta \cdot C_1'(x) + e^{\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \beta \cdot C_2'(x) - \\ - e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \beta \cdot C_3'(x) + e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \beta \cdot C_4'(x) &= 0, \\ (-2\beta^2) e^{\beta x} \sin \beta x \cdot C_1'(x) + (2\beta^2) e^{\beta x} \cos \beta x \cdot C_2'(x) + \\ + (2\beta^2) e^{-\beta x} \sin \beta x \cdot C_3'(x) + (-2\beta^2) e^{\beta x} \cos \beta x \cdot C_4'(x) &= 0, \\ (-2\beta^3) e^{\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \cdot C_1'(x) + (2\beta^3) e^{\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \cdot C_2'(x) + \\ + (2\beta^3) e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \cdot C_3'(x) + (2\beta^3) e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \cdot C_4'(x) &= -\frac{q}{EJ} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения будет

$$\begin{aligned} W(x) = C_1 e^{\beta x} \cos \beta x + C_2 e^{\beta x} \sin \beta x + C_3 e^{-\beta x} \cos \beta x + C_4 e^{-\beta x} \sin \beta x - \\ - \frac{q e^{-\beta x}}{20 E J \beta^4} [5 \sin 2 \beta x + 5 \sin \beta x \cos \beta x] - 1, \end{aligned} \quad (4.64)$$

где

$$\beta^4 = \frac{k}{EJ} \quad (4.65)$$

$$D \frac{d^4 W}{dx^4} + E h \frac{W}{R^2} = -q. \quad (4.66)$$

Общее решение:

$$W(x) = W_0(x) + W_1(x) \quad (4.67)$$

Общее решение однородной части:

$$W_0(x) = e^{\beta x} (D_1 \cos \beta x + D_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (D_3 \cos \beta x + D_4 \sin \beta x) \quad (4.68)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{Rh}} \cdot \sqrt[4]{3(1-v^2)} \quad (4.69)$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$W_1(x) = \frac{\gamma R^2}{E h} (e - x) \quad (4.70)$$

Тогда внутренние усилия в виде:

$$M_1 = -2D\beta^2 [e^{\beta x} (D_2 \cos \beta x - D_1 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (D_4 \cos \beta x + D_3 \sin \beta x)],$$

$$Q_1 = -2D\beta^2 \left\{ e^{\beta x} \left[(D_2 - D_1) \cos \beta x - (D_1 + D_2) \sin \beta x \right] + e^{-\beta x} \left[(D_4 + D_3) \cos \beta x + (-D_3 + D_4) \sin \beta x \right] \right\},$$

$$N_2 = \gamma(e-x)R - \frac{Eh}{k} \left[e^{\beta x} (D_1 \cos \beta x + D_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (D_3 \cos \beta x + D_4 \sin \beta x) \right]. \quad (4.71)$$

Если рассмотрим отдельно однородное дифференциальное уравнение $\frac{d^4 W_0}{dx^4} + \frac{k}{EJ} W_0 = 0$, решение его ищем в форме, соответствующей принятому характеру выпучивания выработки, например, $W(x) = A \sin \frac{m\pi x}{e}$, подставляя последнее выражение в уравнение (4.71) и приравнявая нулю, множители при $\sin \frac{m\pi x}{e}$ получим

$$k = -\frac{m^4 \pi^4}{e^4 D} = -\frac{\pi^4}{e^4 D} M_{kp} = \frac{\pi^4}{e^4 D} \left(\frac{e}{\pi} \sqrt[4]{\frac{Eh}{R^2 D}} \right)^4 = -\frac{Eh}{R^2}. \quad (4.72)$$

Итак,

$$k = -\frac{Eh}{R^2} \quad (4.73)$$

Во многих исследованиях [86-89] и др. для составления уравнения равновесия оболочки постоянной толщины принимают дифференциальное уравнение вида

$$D \frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} W = 0 \quad (4.74)$$

Это есть частный случай уравнения равновесия выработки, когда слой отработки есть изотропный с постоянной толщиной. При этом частное решение берут из эксперимента.

В качестве примера рассмотрим выпучивание горизонтальной выработки под действием собственного веса.

$$q_1 = 0; \quad q_2 = q \sin \alpha; \quad q_3 = -q \cos \alpha \quad (4.75)$$

где q – вес элемента выработки единичной площади. Тогда уравнения равновесия выработки:

$$W(x) = -\frac{q}{q_4 EJ} x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (4.76)$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 определим из граничных условий:

$$\begin{aligned} W \Big|_{x=0} &= 0, & \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= 0 \\ W \Big|_{x=l} &= 0, & \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \quad (4.77)$$

После преобразований получим:

$$W(x) = -\frac{q}{24EJ} [x^4 - 2lx^3 + e^3 x] \quad (4.78)$$

Далее, будем считать, что при отработке первой зоны выработки пусть впереди имеем зону повышенного напряженно-деформированного состояния.

Однако переход от устойчивого положения к возмущенному состоянию происходит как сближение первой зоны ко второй зоне в виде симметричной волнистости.

Тогда общее решение выпучивания выработки по аналогии работы [89] имеет вид:

$$W(x) = C_1 e^{\beta x} \cos \beta x + C_2 e^{\beta x} \sin \beta x + C_3 e^{-\beta x} \cos \beta x + C_4 e^{-\beta x} \sin \beta x - \frac{q_k e^{-\beta x}}{24 EJ \beta^4} (5 \sin 2\beta x + 5 \sin \beta x \cos \beta x - 1), \quad (4.79)$$

где

$$\beta^4 = \frac{k}{EJ}, \quad (4.80)$$

q_k - критическая нагрузка, при граничных условиях:

$$W = 0, \quad \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad x = l \quad (4.81)$$

Математически это означает, найти частное решение выпучивания выработки, когда торцевое поперечное сечение шарнирно закреплено. Ниже приводится решение.

$$W(x)|_{x=0} = C_1 + C_3 + \frac{q_k}{24 EJ \beta^2} = 0 \Rightarrow C_1 + C_3 = -\frac{q_k}{24 EJ \beta^2} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= C_1 [\beta e^{\beta x} \cos \beta x - \beta e^{\beta x} \sin \beta x] + C_2 [\beta e^{\beta x} \sin \beta x + \beta e^{\beta x} \cos \beta x] + C_3 [-e^{-\beta x} \beta \cos \beta x - e^{-\beta x} \beta \sin \beta x] + \\ &+ C_4 [-\beta e^{-\beta x} \sin \beta x + \beta e^{-\beta x} \cos \beta x] - \frac{q_k}{24 EJ \beta^4} [-\beta e^{-\beta x} (7,5 \sin 2\beta x - 1) + e^{-\beta x} \cdot 15 \beta \cos 2\beta x] = \\ &= \beta e^{\beta x} (C_1 + C_2) \cos \beta x + \beta e^{\beta x} (C_2 - C_1) \sin \beta x + \beta e^{-\beta x} (C_4 - C_3) \cos \beta x - \beta e^{-\beta x} (C_3 + C_4) \sin \beta x - \\ &- \frac{q_k}{24 EJ \beta^3} [15 \cos 2\beta x - 7,5 \sin 2\beta x + 1] e^{-\beta x} \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= [(C_1 + C_2) \cos \beta x + (C_2 - C_1) \sin \beta x] \beta e^{\beta x} + [(C_4 - C_3) \cos \beta x - (C_3 + C_4) \sin \beta x] \beta e^{-\beta x} - \\ &- \frac{q_k e^{-\beta x}}{24 EJ \beta^3} [15 \cos 2\beta x - 7,5 \sin 2\beta x + 1] \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = \frac{2}{3} \frac{q_k}{EJ \beta^4} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= [-(\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2) \sin \beta x + (C_2 - C_1) \cos \beta x] \beta^2 e^{\beta x} + [(C_1 + C_2) \cos \beta x + (C_2 - C_1) \sin \beta x] \beta^2 e^{-\beta x} + \\ &+ [-(C_4 - C_3) \sin \beta x - (C_3 + C_4) \cos \beta x] \beta^2 e^{-\beta x} - [(C_4 - C_3) \cos \beta x - (C_3 + C_4) \sin \beta x] \beta^2 e^{-\beta x} + \\ &+ \frac{q_k e^{-\beta x}}{24 EJ \beta^2} [15 \cos 2\beta x - 7,5 \sin 2\beta x + 1] - \frac{q_k e^{-\beta x}}{24 EJ \beta^2} [-30 \sin 2\beta x - 15 \cos 2\beta x] = \\ &= (-2C_1 \sin \beta x + 2C_2 \cos \beta x) \beta^2 e^{\beta x} + (2C_3 \sin \beta x - 2C_4 \cos \beta x) \beta^2 e^{-\beta x} + \frac{q_k e^{-\beta x}}{24 EJ \beta^2} \cdot \\ &\cdot [30 \cos 2\beta x + 22,5 \sin 2\beta x + 1] \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = & 2(\tilde{N}_2 \cos \beta x - C_1 \sin \beta x) \beta^2 e^{\beta x} + 2(C_3 \sin \beta x - C_4 \cos \beta x) \beta^2 e^{-\beta x} + \\ & + \frac{q_k e^{-\beta x}}{24EJ \beta^2} [30 \cos 2\beta x + 22,5 \sin 2\beta x + 1] \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 - C_4 = -\frac{31q_k}{48EJ \beta^4} \quad (4.86)$$

Аналогично: $W(x)|_{x=l} = 0$;

$$[C_1 \cos \beta l + C_2 \sin \beta l] \beta e^{\beta l} + [C_3 \cos \beta l + C_4 \sin \beta l] \beta e^{-\beta l} = \frac{q_k e^{-\beta l}}{24EJ \beta^3} [7,5 \sin 2\beta l - 1] \quad (4.87)$$

В частности, когда $\frac{R}{L} \rightarrow 0$ и $\frac{R}{L} < 0,25$, то выработку можно рассматривать как бесконечную, т.е. длинную. Следовательно, при условии

$$C_1 \cos \beta l + C_2 \sin \beta l = 0 \quad (4.88)$$

найдем граничное условие $\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$;

$$\begin{aligned} & [(C_1 + C_2) \cos \beta l + (C_2 - C_1) \sin \beta l] \beta e^{\beta l} + [(C_4 - C_3) \cos \beta l - (C_3 + C_4) \sin \beta l] \beta e^{-\beta l} = \\ & = \frac{q_k e^{-\beta l}}{24EJ \beta^3} [15 \cos 2\beta l - 7,5 \sin 2\beta l + 1] \end{aligned}$$

$$\text{В частности } (C_1 + C_2) \cos \beta l + (C_2 - C_1) \sin \beta l = 0 \quad (4.89)$$

Тогда найдем граничное условие по аналогии: $\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0$;

$$\begin{aligned} & (\tilde{N}_2 \cos \beta l - C_1 \sin \beta l) \beta^2 e^{\beta l} + (C_3 \sin \beta l - C_4 \cos \beta l) \beta^2 e^{-\beta l} = \\ & = -\frac{q_k e^{-\beta l}}{24EJ \beta^2} [30 \cos 2\beta l + 22,5 \sin 2\beta l + 1] \end{aligned} \quad (4.90)$$

В частности

$$C_2 \cos \beta l - C_1 \sin \beta l = 0 \quad (4.91)$$

тогда найдем граничное условие. В случае шарнирно закрепленного края имеем:

$$W|_{x=0} = 0, \quad C_1 + C_2 = -\frac{q_k}{24EJ \beta^4} \quad (4.92)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0; \quad C_2 - C_4 = -\frac{31q_k}{48EJ \beta^4} \quad (4.93)$$

$$W|_{x=l} = 0; \quad C_3 \cos \beta l + C_4 \sin \beta l = \frac{q_k (7,5 \sin 2\beta l - 1)}{24EJ \beta^4} \quad (4.94)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0; \quad C_3 \sin \beta l - C_4 \cos \beta l = -\frac{q_k (30 \cos 2\beta l + 22,5 \sin 2\beta l + 1)}{24EJ \beta^4} \quad (4.95)$$

$$\text{или } W|_{x=0}=0, \quad C_1 + C_3 = -\frac{q_k}{24EJ\beta^4} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=l}=0; \quad C_2 - C_4 = -\frac{31q_k}{48EJ\beta^4}$$

$$W|_{x=l}=0; \quad C_3 \cos \beta l + C_4 \sin \beta l = \frac{q_k (7,5 \sin 2\beta l - 1)}{24EJ\beta^4}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=l}=0; \quad C_3 \sin \beta l - C_4 \cos \beta l = -\frac{q_k (30 \cos 2\beta l + 22,5 \sin 2\beta l + 1)}{24EJ\beta^4} \quad (4.96)$$

$$\text{Откуда: } \begin{cases} C_3 \cos \beta l + C_4 \sin \beta l = a_1 \\ C_3 \sin \beta l - C_4 \cos \beta l = a_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_1 = \frac{q_k (7,5 \sin 2\beta l - 1)}{24EJ\beta^4} \\ a_2 = -\frac{q_k (30 \cos 2\beta l + 22,5 \sin 2\beta l + 1)}{24EJ\beta^4} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \cos \beta l & \sin \beta l \\ \sin \beta l & \cos \beta l \end{vmatrix} = -1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & \sin \beta l \\ a_2 & -\cos \beta l \end{vmatrix} = -a_1 \cos \beta l - a_2 \sin \beta l$$

$$D = -1$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} \cos \beta l & 1 \\ \sin \beta l & 2 \end{vmatrix} = -a_2 \cos \beta l - a_1 \sin \beta l$$

Откуда

$$\begin{cases} C_3 = a_1 \cos \beta l + a_2 \sin \beta l \\ C_4 = a_1 \sin \beta l - a_2 \cos \beta l \end{cases} \quad (4.97)$$

$$\begin{cases} C_1 = -a_1 \cos \beta l - a_2 \sin \beta l - \frac{q_k}{24EJ\beta^4} \\ C_2 = a_1 \sin \beta l - a_2 \cos \beta l - \frac{31q_k}{48EJ\beta^4} \end{cases} \quad (4.98)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{q_k}{24EJ\beta^4} (7,5 \sin 2\beta l - 1), \quad a_2 = -\frac{q_k}{24EJ\beta^4} (30 \cos 2\beta l + 22,5 \sin 2\beta l + 1)$$

Имеем:

$$C_3 = \frac{q_k}{24EJ\beta^4} (7,5 \sin 2\beta l \cos \beta l - 30 \cos 2\beta l \sin \beta l - 22,5 \sin 2\beta l \sin \beta l - \cos \beta l - \sin \beta l);$$

$$\tilde{N}_4 = \frac{q_k}{24EJ\beta^4} (7,5 \sin 2\beta l \sin \beta l + 30 \cos 2\beta l \cos \beta l + 22,5 \sin 2\beta l \cos \beta l + \cos \beta l - \sin \beta l); \quad (4.99)$$

$$C_1 = -\frac{q_k}{24EJ\beta^4} (7,5 \sin 2\beta l \cos \beta l - 30 \cos 2\beta l \sin \beta l - 22,5 \sin 2\beta l \sin \beta l - \cos \beta l - \sin \beta l + 1);$$

$$C_2 = \frac{q_k}{24EJ\beta^4} (7,5 \sin 2\beta l \sin \beta l + 30 \cos 2\beta l \cos \beta l + 22,5 \sin 2\beta l \cos \beta l + \cos \beta l - \sin \beta l - 15,5).$$

Применение интегрального преобразования Фурье к уравнениям равновесия и сплошности приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно преобразованного напряжения.

$$\overline{\sigma}_y : \overline{\sigma}_y^{IV} - 2\lambda^2 \overline{\sigma}_y'' + \lambda^4 \overline{\sigma}_y = 0 \quad (4.100)$$

$$\overline{\sigma}_x = -\frac{1}{\lambda^2} \overline{\sigma}_y'', \quad \overline{\sigma}_{xy} = \frac{1}{i\lambda} \overline{\sigma}_y' \quad (4.101)$$

В первом предположении начнем рассмотрение случая, когда граничные значения напряжения σ_y симметричны по координате y , а граничные значения τ_{xy} антисимметричны по y . Это означает, что в противоположных точках границ полосы ($x = x_0$, $y = \pm R$) напряжения имеют одинаковую величину, причем нормальные напряжения имеют противоположные направления, в то время как касательные напряжения направлены в одну сторону.

Разумеется, надо предположить, что приложенные к полосе внешние усилия

$$\begin{aligned}\sigma_y|_{y=\pm R} &= f(x) \\ \tau_{xy}|_{y=\pm R} &= \pm g(x)\end{aligned}\quad (4.102)$$

уравновешиваются: это в данном случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 0 \quad (4.103)$$

Переходя к решению задачи, возьмем общий интеграл уравнения в форме функции, четной по координате y ,

$$\overline{\sigma_y} = A(\lambda)ch\lambda y + B(\lambda)\lambda ysh\lambda y \quad (4.104)$$

и, рассматривая верхнюю половину полосы ($0 \leq y \leq R$), определим величины A и B из преобразованных по Фурье граничных условий

$$\overline{\sigma_y}|_{y=R} = \overline{f}(\lambda), \quad \overline{\tau_{xy}}|_{y=R} = \overline{g}(\lambda) \quad (4.105)$$

Так как

$$\overline{\tau_{xy}} = \frac{1}{i} [Ash\lambda y + B(\lambda ych\lambda y + sh\lambda y)], \quad (4.106)$$

то для известных A и B получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}Ach\mu + B\mu sh\mu &= \overline{f}, \\ Ash\mu + B(\mu ch\mu + sh\mu) &= \overline{g},\end{aligned}\quad (4.107)$$

из которой находим

$$\begin{aligned}A &= 2 \frac{\overline{f}(\mu ch\mu + sh\mu) - \overline{g}i\mu sh\mu}{sh2\mu + 2\mu}, \\ B &= 2 \frac{-\overline{f}sh\mu + \overline{g}ich\mu}{sh2\mu + 2\mu},\end{aligned}\quad (4.108)$$

где введено обозначение

$$\mu = \lambda b \quad (4.109)$$

Таким образом, полное решение поставленной задачи дается формулами

$$\sigma_x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Ach\lambda y + B(\lambda ysh\lambda y + 2ch\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A \operatorname{sh} \lambda y + B(\lambda y \operatorname{ch} \lambda y + \operatorname{sh} \lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A \operatorname{ch} \lambda y + B \lambda y \operatorname{sh} \lambda y] \lambda y e^{-i\lambda x} d\lambda.\end{aligned}\quad (4.110)$$

Исследуем теперь сходимость входящих в полученное решение интегралов в точке $\lambda = 0$, где знаменатель в формулах (4.108) обращается в нуль (сходимость при $\lambda \rightarrow \pm\infty$ очевидна).

Нетрудно видеть, что условием сходимости при $\lambda = 0$ будут требования ограниченности величин $A(0)$ и $B(0)$, что в свою очередь приводит к условию

$$\bar{g}(0) = 0. \quad (4.111)$$

Но так как $\bar{g}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\lambda x} dx$, то последнее условие выполнено, ибо оно совпадает с условием статики. Аналогичным образом может быть получено точное решение соответствующей антисимметричной задачи, когда граничные значения напряжения σ_y антисимметричны, а значения τ_{xy} симметричны по координате y . Условия статики в этом случае имеют вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} [x f(x) - b g(x)] dx = 0 \quad (4.112)$$

и могут быть записаны еще в следующей форме:

$$\bar{f}(0) = 0, \quad \left. \frac{d\bar{f}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = i b \bar{g}(0). \quad (4.113)$$

Так как в рассматриваемом случае напряжение σ_y является нечетной функцией переменной y , то общий интеграл уравнения следует выбрать в таком виде:

$$\bar{\sigma}_y = C(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y + D(\lambda) \lambda y \operatorname{ch} \lambda y, \quad (4.114)$$

причем достаточно рассмотреть только область $(0 \leq y \leq R)$. Составляя выражение для преобразованного касательного напряжения

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{i} [C \operatorname{ch} \lambda y + D(\lambda y \operatorname{sh} \lambda y + \operatorname{ch} \lambda y)] \quad (4.115)$$

и подставляя (4.114) – (4.115) в преобразованные граничные условия, мы приходим к следующей системе уравнений относительно неизвестных величин C и D :

$$\begin{aligned}C \operatorname{sh} \mu + D \mu \operatorname{ch} \mu &= \bar{f}, \\ C \operatorname{ch} \mu + D(\mu \operatorname{sh} \mu + \operatorname{ch} \mu) &= i \bar{g}, \\ \mu &= \lambda b\end{aligned}\quad (4.116)$$

решая которую, найдем

$$\begin{aligned}C &= 2 \frac{\bar{f}(\mu \operatorname{sh} \mu + \operatorname{ch} \mu) - \bar{g} i \mu \operatorname{ch} \mu}{\operatorname{sh} 2\mu - 2\mu}, \\ D &= 2 \frac{-\bar{f} \operatorname{ch} \mu + \bar{g} i \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu}.\end{aligned}\quad (4.117)$$

Окончательные значения искомых напряжений будут

$$\sigma_x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Csh\lambda y + D(\lambda ych\lambda y + 2sh\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Cch\lambda y + D(\lambda ysh\lambda y + ch\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad (4.118)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Csh\lambda y + D\lambda ych\lambda y] e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Полученные данные выпучивания выработки в зависимости от формы поперечного сечения ε (прямоугольной, треугольной и трапециевидной) с симметричной и кососимметричной волнистостью приведены на рисунках 4.2 – 4.10.

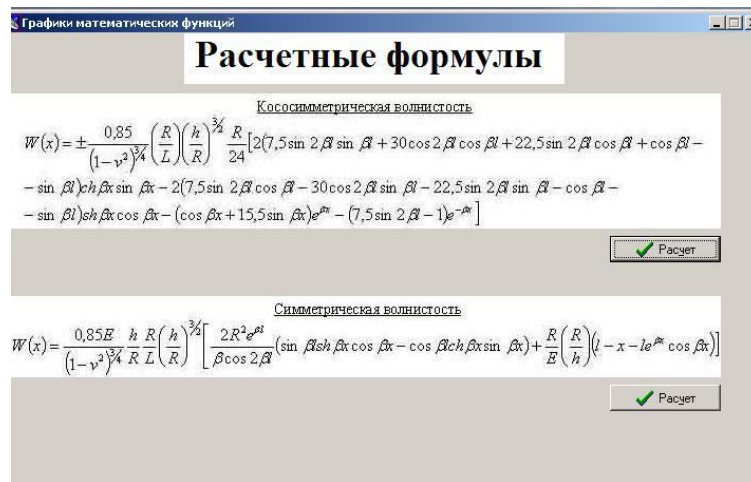


Рисунок 4.2 – Основная форма

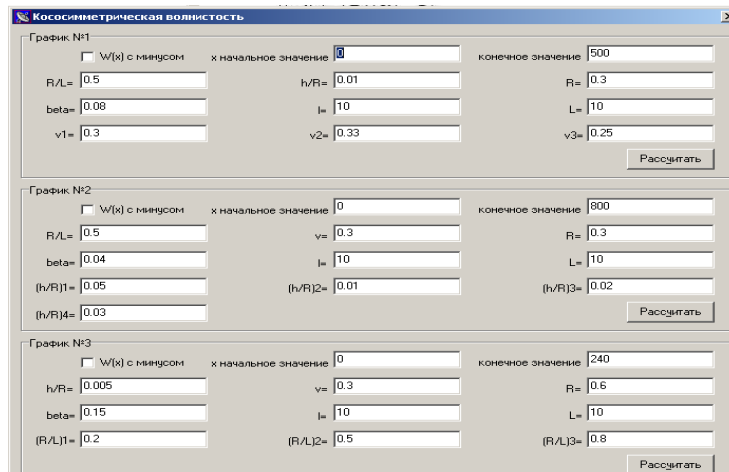


Рисунок 4.3 – Расчетная форма (кососимметрическая волнистость)

Симметричная волнистость

График №1
☐ W(x) с маятником
 x начальное значение: 370
 x конечное значение: 410
 R/L= 0.5
 h/R= 0.01
 R= 0.3
 ν= 0.3
 beta= 0.08
 I= 10
 L= 10
 R/h= 100
 E1= 3
 E2= 6
 E3= 10
 Рассчитать

График №2
☐ W(x) с маятником
 x начальное значение: 0
 x конечное значение: 900
 R/L= 0.5
 h/R= 0.02
 R= 0.3
 ν= 0.3
 beta= 0.04
 I= 10
 L= 10
 E= 3
 (R/h)1= 200
 (R/h)2= 100
 (R/h)3= 50
 (R/h)4= 33
 Рассчитать

График №3
☐ W(x) с маятником
 x начальное значение: 0
 x конечное значение: 240
 E= 6
 h/R= 0.005
 R= 0.6
 ν= 0.3
 beta= 0.15
 I= 10
 L= 10
 R/h= 200
 (R/L)1= 0.2
 (R/L)2= 0.5
 (R/L)3= 0.8
 Рассчитать

Рисунок 4.4 – Расчетная форма (симметричная волнистость)

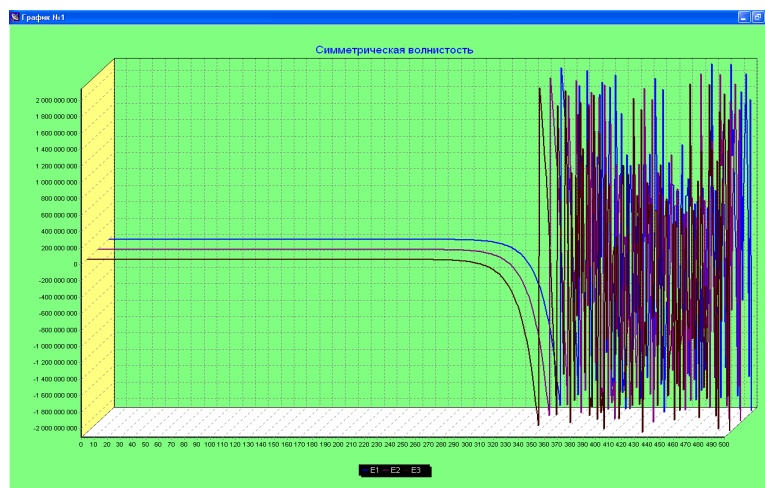


Рисунок 4.5 – Выпучивание выработки в короткой части, лежащей на основании типа Фойхта, $0,6 \leq \xi \leq 0,9$

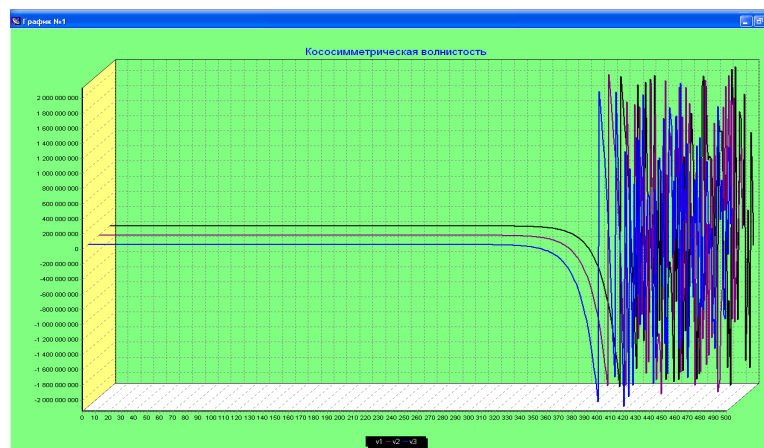


Рисунок 4.6 - Выпучивание выработки для средней части, лежащей на основании типа Фойгта, $0,3 \leq \xi \leq 0,6$

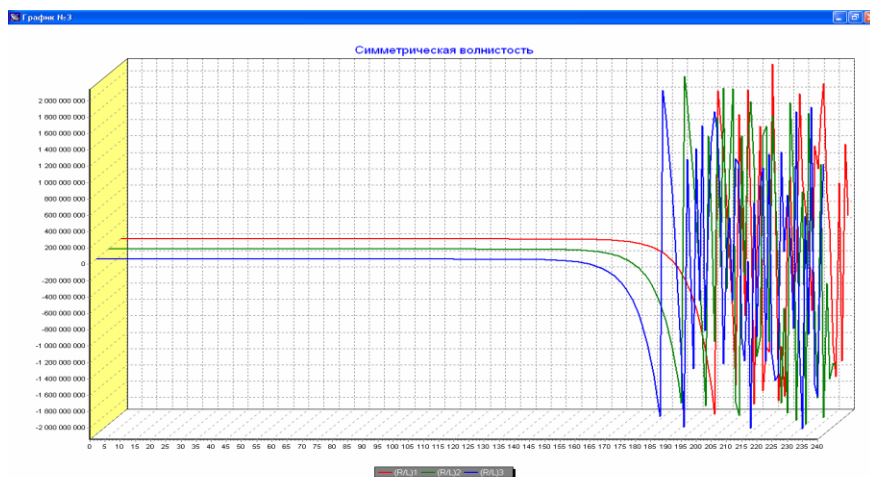


Рисунок 4.7 - Выпучивание выработки для длинной части, лежащей на основании типа Фойхта, $0,1 \leq \xi \leq 0,3$

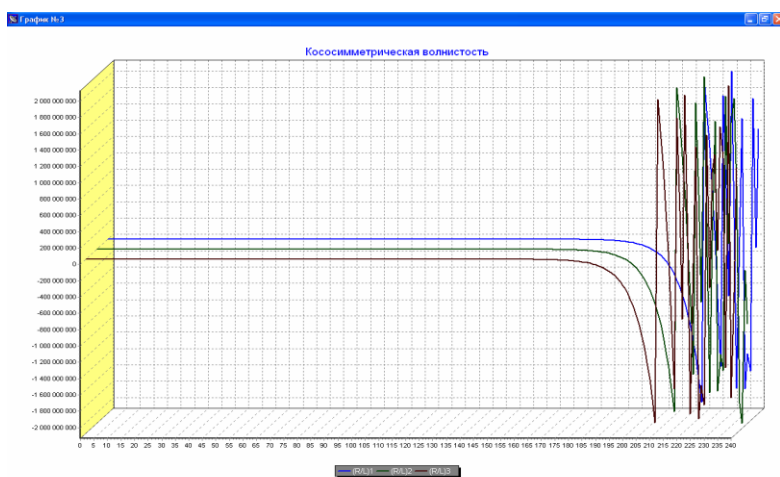


Рисунок 4.8 - Выпучивание выработки, лежащей на основании типа Винклера и Пастернака, $0,1 \leq \xi \leq 0,3$

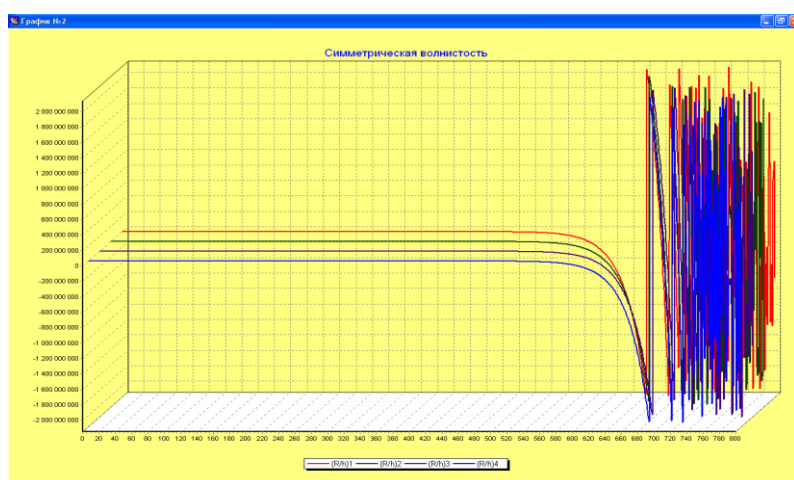


Рисунок 4.9 - Выпучивание выработки, лежащей на основании типа Винклера и Пастернака, $0,3 \leq \xi \leq 0,6$

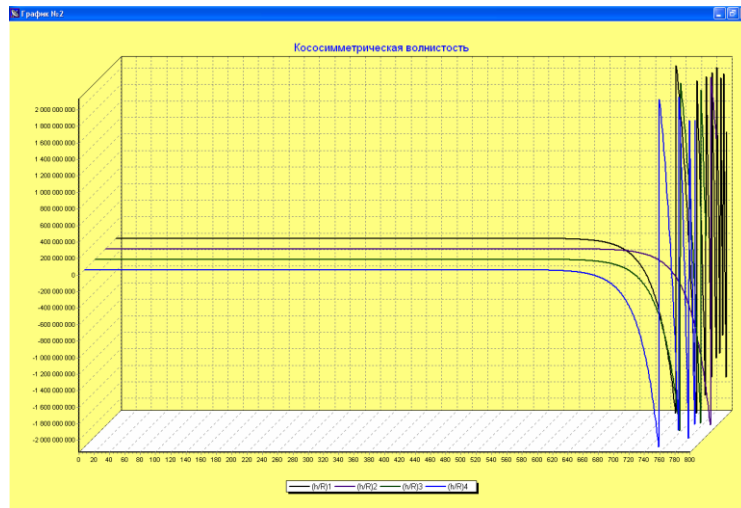


Рисунок 4.10 - Выпучивание выработки, лежащей на основании типа Винклера и Пастернака, $0,6 \leq \xi \leq 0,9$

Анализ первой основной задачи показывает:

- при прямоугольной форме деформации, когда критическая деформация возрастает от 0,1 до 0,15% под действием поперечной нагрузки и падает от 0,5 до 0,4 % под действием осевых сил, а модуль упругости изменяется в пределах $E = (0,6 - 3,0)10^{-4}$ МПа, за внешнюю поперечную нагрузку можно принять действие внешнего давления, равномерно распределенного по всей длине.

Для обеспечения устойчивости выработки, при действии равномерной нагрузки для критического значения силы в инженерных расчетах можно принять формулу

$$q_B = \frac{0,85Eh}{L(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2} \quad (4.119)$$

где ν - коэффициент Пуассона, E - модуль упругости, h - толщина, L, R - длина и радиус первой зоны выработки.

Полная критическая нагрузка, действующая на выработку будет:

$$Q_B = \frac{2\pi R \cdot 0,85Eh}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2} \quad (4.120)$$

Критическое значение внешнего давления, линейно изменяющегося по длине пояса загрузки и в срединной части выработки будет:

$$q_B = \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{L}{b} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}, \quad (4.121)$$

$$q_B = \frac{8}{3} \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}. \quad (4.122)$$

- при треугольной форме деформации, когда критическая деформация падает от 1,2 до 0,8% под действием объемных сил и возрастает от 0,1 до 0,15% под действием поперечной нагрузки, а модуль упругости изменяется в пределах $E = (0,6 - 3,0)10^{-4}$ МПа, за внешнюю поперечную нагрузку можно принять действие внешнего давления линейно изменяющейся по длине (случай треугольной эпюры внешней нагрузки). В инженерных расчетах можно принять формулы:

$$q_B = \frac{2 \cdot 0,85E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \quad (4.123)$$

Критическое значение внешнего давления, линейно изменяющегося по длине пояса загрузки и в срединной части выработки будет

$$q_B = \frac{8}{3} \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}, \quad (4.124)$$

$$q_B = \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{L}{b} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}. \quad (4.125)$$

- при трапецевидной форме деформации, когда критическая деформация возрастает от 0,1 до 0,15 % под действием поперечной нагрузки, падает от 0,5 до 0,4 % под действием осевых сил и от 1,2% до 0,8% под действием объемных сил, а модуль упругости изменяется в пределах $E = (0,6 - 3,0)10^{-4}$ МПа, за внешнюю поперечную нагрузку можно принять действие внешнего давления, линейно изменяющегося по длине (случай трапецевидной эпюры внешней нагрузки). В инженерных расчетах принять формулы:

$$q_B = \frac{4}{3} \frac{0,85E}{L(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \quad (4.126)$$

Критическое значение внешнего давления, линейно изменяющегося по длине пояса загрузки и в срединной части выработки будут:

$$q_B = \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{L}{b} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}, \quad (4.127)$$

$$q_B = \frac{8}{3} \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \quad (4.128)$$

Эти формулы выведены из условия равенства грузовых площадей.

4.2. Расчеты выпучивания выработки в массиве горных пород, находящейся на упруго-вязком основании типа Пастернака под действием поперечной силы

Предполагаем, что материал каждого слоя в процессе деформации остается упругим, что прогиб в продольном направлении симметричный или косо-симметричный в зависимости корректирующих коэффициентов от составных частот поперечного сечения, от волнового числа в продольном направлении и стрелы прогиба, что амплитуда прогиба слоя имеет тот же порядок величины, что и толщина второй зоны выработки, а выпучивание во второй зоне и появление новой поверхности аналогично синклинали и антиклинали видам зарождающихся складок. Так же будем считать, что при отработке первой зоны выработки впереди имеем зону повышенного напряженно-деформированного состояния. Переход от устойчивого положения к возмущенному состоянию происходит как сближение первой зоны со второй зоной.

Рассмотрим устойчивость выработки, находящейся на основании типа Кельвина-Фойхта. Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \frac{\eta}{EJ} \lambda + \frac{K}{EJ} = 0, \quad (4.129)$$

где K - коэффициент сопротивления среды, η - коэффициент Пастернака, для изотропного тела

$$K = -\frac{Eh}{R^2}, \quad \eta = \frac{EJ}{R} \sqrt[4]{\frac{E^3 h^3}{R^2 (EJ)^3}}. \quad (4.130)$$

Получено общее решение колебания

$$W(x) = \ell^{\alpha_2 x} (C_3 \cos \beta_2 x + C_4 \sin \beta_2 x) + \ell^{\alpha_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x) + \frac{qR^2}{Eh} (l - x) \quad (4.131)$$

По реальным граничным условиям:

А) $W = 0, \frac{d^2 W}{dx^2} = 0$ при $x = 0; x = l$; шарнирно-закрепленный край;

В) $W = 0, \frac{dW}{dx} = 0$ при $x = 0; x = l$; скользящее заделанный край; (4.132)

С) $\frac{d^2 W}{dx^2} = 0, \frac{d^3 W}{dx^3} = 0$ при $x = 0; x = l$; свободный край

найти выпучивание выработки затруднительно, так как в граничных условиях напряжения σ_y симметричны по координате y , а граничные значения σ_{xy} антисимметричны по y . При этом сохраняется парность касательных напряжений, а в рассматриваемом случае напряжения σ_y антисимметричны, σ_{xy} тоже антисимметричны по координате y . Парность касательных напряжений не сохраняется.

Поэтому для удобства выкладок разобьем поставленную задачу на две: выпучивание выработки в толще горных пород, находящейся на основании типа

Винклера и выпучивание выработки в толще горных пород, находящейся на основании типа Пастернака.

Начнем рассмотрение со второго случая при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} W(0) = 0, \quad \frac{d^3 W}{dx^3} \Big|_{x=0} = 0 \\ W(l) = 0, \quad \frac{d^3 W}{dx^3} \Big|_{x=l} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.133)$$

Рассмотрим общее решение выпучивания выработки с начальной симметричной волнистостью в виде (4.129).

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{\eta}{EJ} \frac{dW}{dx} = -\frac{q_k}{EJ} \quad (4.134)$$

$$\begin{aligned} W(x) = C_1 + C_2 \ell^{-bx} + C_3 \ell^{\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + C_4 \ell^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx + \frac{q_k}{3EJb^3} (1 - \ell^{-bx})x + \\ + \frac{q_k}{6\sqrt{3}EJb^4} [(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1) \cos \sqrt{3}bx - (\sqrt{3}-1) \sin \sqrt{3}bx] \end{aligned} \quad (4.135)$$

и с кососимметричной волнистостью в виде

$$W(x) = C_1 + C_2 \ell^{-bx} + C_3 \ell^{\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + C_4 \ell^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx + \frac{q_k R^2}{Eh} (l - x) \quad (4.136)$$

где

$$b = \sqrt[3]{\frac{\eta}{EJ}}. \quad (4.137)$$

Сначала, рассмотрим выпучивания выработки с кососимметричной волнистостью (4.136), при граничных условиях (4.133). Предположим условие на бесконечности для $W(x)$ и $W'(x)$, как для реальной механики, тогда

$$\begin{aligned} W(x) = C_1 + C_2 \ell^{-bx} + \frac{q_k R^2}{Eh} (l - x), \quad W'(x) = -b C_2 \ell^{-bx} + \frac{q_k R^2}{Eh} \\ W'''(x) = -b^3 C_2 \ell^{-bx} - b^3 \ell^{\frac{b}{2}x} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx \right) \end{aligned} \quad (4.138)$$

Из граничных условий имеем:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 \frac{qR^2}{Eh} l = 0, \\ C_2 + C_3 = 0, \\ bC_2 \ell^{-bl} + \frac{qR^2}{Eh} = 0, \\ C_2 \ell^{-bl} + \ell^{\frac{b}{2}l} (C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bl + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bl) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Преобразуем:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -C_2 - \frac{qR^2}{Eh} l \\ C_2 &= -\frac{qR^2}{Eh} \frac{\ell^{bl}}{b} \\ C_3 &= \frac{qR^2}{Eh} \frac{\ell^{bl}}{b} \\ C_4 &= -\frac{\ell^{-\frac{3b}{2}l}}{\sin \frac{\sqrt{3}}{2} bl} C_2 - \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{3}}{2} bl C_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (4.139)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{qR^2}{Eh} \frac{\ell^{bl}}{b} - \frac{qR^2}{Eh} l = \frac{qR^2}{Eh} \left[\frac{\ell^{bl}}{b} - l \right] = \frac{qR^2}{Ehb} (\ell^{bl} - bl); \quad C_2 = -\frac{qR^2}{Eh} \frac{\ell^{bl}}{b}; \quad C_3 = \frac{qR^2}{Eh} \frac{\ell^{bl}}{b} \\ C_4 &= -\frac{qR^2 \ell^{bl}}{Ehb} \left[\frac{-\ell^{-\frac{3b}{2}l} + \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{3}}{2} bl \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bl}{\sin \frac{\sqrt{3}}{2} bl} \right] = -\frac{qR^2 \ell^{bl} (\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bl - \ell^{-\frac{3b}{2}l})}{Ehb \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bl} \end{aligned} \quad (4.140)$$

Итак

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{q_e R^2}{Ehb} (\ell^{bl} - bl) - \frac{q_k R^2}{Eh} \frac{\ell^{bl}}{b} \ell^{-bx} + \frac{qR^2}{Eh} \frac{\ell^{bl}}{b} \ell^{\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx - \\ &- \frac{qR^2}{Eh \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bl} (\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bl - \ell^{-\frac{3}{2}bl}) \ell^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx + \frac{q_k R^2}{Eh} (l - x) = \\ &= \frac{q_k R^2}{Ehb} \ell^{bl} \left[1 - \ell^{-bx} + \ell^{\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx - \frac{b}{\sin \frac{\sqrt{3}}{2} bl} (\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bl - \ell^{-\frac{3}{2}bl}) \ell^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx - \frac{b}{\ell^{bl}} x \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Итак: } W(x) = \frac{q_e R^2}{Ehb} \ell^{bl} \left[1 - \ell^{-bx} - \frac{b}{\ell^{bl}} x + \ell^{\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx - \frac{b}{\sin \frac{\sqrt{3}}{2} bl} (\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bl - \ell^{-\frac{3}{2}bl}) \ell^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx \right],$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{\eta}{EJ}}. \quad (4.141)$$

Далее, для определения НДС и критической силы по критическим деформациям трапецевидной формы применим метод интегральных преобразований в геомеханике.

- Граничные условия, очевидно, в этом случае имеют вид

$$\sigma_{rz}(0) = \sigma(r) \quad (4.142)$$

$$u_z(0)_{/z < R} = W(r), \quad \sigma_z(0)_{/z > R} = \sigma(r), \quad (4.143)$$

где r, φ, z – цилиндрические координаты;

- Уравнения равновесия выработки в перемещениях

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial l}{\partial r} - G \left(\frac{\partial \omega_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} \right) = 0,$$

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial l}{r \partial \omega} - G \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) = 0, \quad (4.144)$$

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial l}{\partial z} - G \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(r\omega_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial\omega_r}{\partial\varphi} \right) = 0.$$

где

$$\omega_\varphi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial\omega}{\partial z}, \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial\varphi} \right) = 0, \quad l = \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{r\partial\varphi} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4.145)$$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига, $\lambda = \frac{E}{\nu}$. Интегрируем методом интегрального преобразования (4.143) - (4.145) с применением через некоторые типы особых гармонических функций. Затем определим НДС и форму критической деформации в поперечном сечении первой зоны выработки.

Решение. Для сведения рассматриваемой задачи к краевым задачам теории потенциала используем представление упругих смещений и напряжений через гармонические функции Папковича - Нейбера.

$$\begin{aligned} 2GU_r &= -\frac{\partial f}{\partial r} - z \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad 2GU_z = (3-4\nu)\Phi - \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad \sigma_z = 2(1-\nu) \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \\ \sigma_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-2\nu)\Phi - \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right], \quad \sigma_z = 2\nu \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \\ \sigma_\varphi &= 2\nu \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{z}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.146)$$

ν - коэффициент Пуассона. Теперь для гармонической функции

$$\psi = (1-2\nu)\Phi - \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (4.147)$$

Из граничного условия (4.142) найдем

$$\psi|_{z=0} = \int_{-\infty}^r \sigma(\rho) d\rho. \quad (4.148)$$

Так, что функция ψ может считаться найденной в результате решения задачи Дирихле для полупространства.

Исключая далее с помощью (4.147) одну из двух функций Папковича-Нейбера (например, f), находим, что гармоническая функция ϕ должна удовлетворять условия на границе полупространства:

$$\Phi \Big|_{\substack{z=0 \\ z < R}} = \frac{G}{1-\nu} W(r) - \frac{1}{2(1-\nu)} \psi \Big|_{\substack{z=0 \\ z < R}}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ r > R}} = \sigma(r) - \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ r > R}} \quad (4.149)$$

После определения функций ψ и ϕ можно разыскать и f , находя $\frac{\partial f}{\partial z}$ и интегрируя по z от ∞ до z . Если же функция f не стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$, то достаточно найти ее производную $\frac{\partial f}{\partial r} = \int_{-\infty}^z \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z} dz$, так как f вообще определена с точностью до постоянного слагаемого. Последний интеграл сходится, так как перемещена u_r , следовательно, и величина $\frac{\partial f}{\partial r}$ стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$.

Числовые результаты выпучивания выработки в массиве горных пород под действием неравномерных поперечных сил по критическим деформациям

треугольной формы с начальной кососимметричной волнистостью, находящейся на упругом основании типа Пастернака.

Решение данной задачи по аналогии по критическим деформациям прямоугольной формы при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} W(0) = 0, \frac{d^3 W}{dx^3} \Big|_{x=0} &= 0, \\ W(l) = 0, \frac{d^3 W}{dx^3} \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.150)$$

дает частное решение

$$W(x) = \frac{k^2}{Ehb} \cdot l^{bl} \cdot \frac{2 \cdot 0,85E}{L \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3/4}} \left(\frac{R}{L}\right) \cdot \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}} \times \\ \times \left[1 - e^{-bx} + e^{\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx - \frac{b}{e^{bl}} x - \frac{b}{\sin \frac{\sqrt{3}}{2} bl} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bl - e^{-\frac{3}{2}bl} \right) e^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx \right], \quad (4.151)$$

где $b = \sqrt[3]{\frac{\eta}{EI}}$.

Для удобства выкладок разобьем поставленную задачу на две: выпучивание выработки в толще горных пород, находящейся на основании типа Винклера и выпучивание выработки в толще горных пород, находящейся на основании типа Пастернака.

Начнем рассмотрение со второго случая при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} W(0) = 0, \frac{d^3 W}{dx^3} \Big|_{x=0} &= 0 \\ W(l) = 0, \frac{d^3 W}{dx^3} \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.152)$$

Рассмотрим общее решение выпучивания выработки с начальной симметричной волнистостью в виде

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{\eta}{EJ} \frac{dW}{dx} = -\frac{q_k}{EJ}, \quad (4.153)$$

$$W(x) = C_1 + C_2 \ell^{-bx} + C_3 \ell^{\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + C_4 \ell^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx + \frac{q_k}{3EJb^3} (1 - \ell^{-bx})x + \\ + \frac{q_k}{6\sqrt{3}EJb^4} \left[(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1) \cos \sqrt{3} bx - (\sqrt{3} - 1) \sin \sqrt{3} bx \right] \quad (4.154)$$

и с кососимметричной волнистостью в виде

$$W(x) = C_1 + C_2 \ell^{-bx} + C_3 \ell^{\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + C_4 \ell^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx + \frac{q_k R^2}{Eh} (l - x), \quad b = \sqrt[3]{\frac{\eta}{EJ}} \quad (4.155)$$

Сначала, рассмотрим выпучивания с кососимметричной волнистостью (4.154), при граничных условиях (4.152).

$$C_4 = -\frac{qR^2 \ell^{bl}}{Ehb} \left[\frac{-\ell^{-\frac{3b}{2}l} + \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{3}}{2} bl \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bl}{\sin \frac{\sqrt{3}}{2} bl} \right] = -\frac{qR^2 \ell^{bl} (\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bl - \ell^{-\frac{3b}{2}l})}{Ehb \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bl}$$

Тогда:

$$W(x) = \frac{q_k R^2}{Ehb} \ell^{bl} \left[1 - \ell^{-bx} - \frac{b}{\ell^{bl}} x + \ell^{\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx - \right. \\ \left. - \frac{b}{\sin \frac{\sqrt{3}}{2} bl} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bl - \ell^{-\frac{3}{2}bl} \right) \ell^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx \right]. \quad (4.156)$$

- граничные условия, очевидно, в этом случае имеют вид

$$\sigma_{rz}(0) = \sigma(r), \quad u_z(0)_{/z < R} = W(r), \quad \sigma_z(0)_{/z > R} = \sigma(r), \quad (4.157)$$

где r, φ, z – цилиндрические координаты;

- уравнения равновесия выработки в перемещениях

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial l}{\partial r} - G \left(\frac{\partial \omega_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} \right) = 0, \\ (\lambda + 2G) \frac{\partial l}{r \partial \omega} - G \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \frac{\partial \omega_r}{\partial r} \right) = 0, \quad (4.158) \\ (\lambda + 2G) \frac{\partial l}{\partial z} - G \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(r\omega_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \right) = 0.$$

где

$$\omega_\varphi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad l = \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.159)$$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига, $\lambda = \frac{E}{\nu}$.

Интегрируем методом интегрального преобразования (4.157) - (4.159) с применением через некоторые типы особых гармонических функций. Затем определим НДС и форму критической деформации в поперечном сечении первой зоны поперечного сечения.

Решение. Для сведения рассматриваемой задачи к краевым задачам теории потенциала используем представление упругих смещений и напряжений через гармонические функции Папковича-Нейбера.

$$2GU_r = -\frac{\partial f}{\partial r} - z \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad 2GU_z = (3-4\nu)\Phi - \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \sigma_z = 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-2\nu)\Phi - \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right], \quad (4.160) \\ \sigma_z = 2\nu \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_\varphi = 2\nu \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{z}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

ν - коэффициент Пуассона. Теперь для гармонической функции

$$\psi = (1-2\nu)\Phi - \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (4.161)$$

Из граничного условия найдем

$$\psi|_{z=0} = \int_{-\infty}^r \sigma(\rho) d\rho, \quad (4.162)$$

так, что функция ψ может считаться найденной в результате решения задачи Дирихле для полупространства.

Исключая далее одну из двух функций Папковича – Нейбера (например, f), находим, что гармоническая функция ϕ должна удовлетворять условия на границе полупространства:

$$\Phi \Big|_{\substack{z=0 \\ z < R}} = \frac{G}{1-\nu} W(r) - \frac{1}{2(1-\nu)} \psi \Big|_{\substack{z=0 \\ z < R}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ r > R}} = \sigma(r) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ r > R}}. \quad (4.163)$$

4.3. Расчеты выпучивания выработки в массиве горных пород, находящейся на упруго-вязком основании типа Винклера под действием неравномерного осевого давления N_{kr} и поперечной силы

Будем предполагать, что материал каждого слоя оболочки в процессе деформации остается упругим и подчиняется обобщенному закону Гука для анизотропного тела. Учет анизотропии материала такие, что они позволяют по абсолютному значению сопротивления руд или по отношению сопротивления руд к сопротивлению вмещающих пород оценивать форму критической деформации поперечного сечения и возможную мощность предполагаемых рудных зон.

Кроме того, будем считать, что при обработке первой зоны выработки пусть впереди имеем зону повышенного напряженно-деформированного состояния. Однако переход от устойчивого положения к возмущенному состоянию происходит как сближение первой зоны ко второй зоне в виде с начальной симметричной волнистостью (начальная неправильность).

Тогда общее решение выпучивания выработки по [84] имеет вид:

$$W(x) = C_1 e^{\beta x} \cos \beta x + C_2 e^{\beta x} \sin \beta x + C_3 e^{-\beta x} \cos \beta x + C_4 e^{-\beta x} \sin \beta x - \frac{q_k e^{-\beta x}}{24EJ\beta^4} (5 \sin 2\beta x + 5 \sin \beta x \cos \beta x - 1)$$

где

$$\beta^4 = \frac{k}{EJ}. \quad (4.164)$$

Во многих исследованиях, когда слой отработки есть изотропный материал, за частное решение неоднородного дифференциального уравнения

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + Eh \frac{w}{R^2} - q \quad (4.165)$$

берут в виде

$$W_1(x) = \frac{\gamma R^2}{Eh} (l - x). \quad (4.166)$$

Следовательно, общее решение выпучивания выработки и внутренние усилия имеют вид:

$$W(x) = C_1 e^{\beta x} \cos \beta x + C_2 e^{\beta x} \sin \beta x + C_3 e^{-\beta x} \cos \beta x + C_4 e^{-\beta x} \sin \beta x + \frac{q_k K^2}{Eh} (l - x) \quad (4.167)$$

$$M_1 = -2D\beta^2 \left[e^{\beta x} (C_2 \cos \beta x - C_1 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_4 \cos \beta x + C_3 \sin \beta x) \right];$$

$$Q_1 = -2D\beta^2 \left\{ e^{\beta x} [(C_2 - C_1) \cos \beta x - (C_1 + C_2) \sin \beta x] + e^{-\beta x} [(C_4 + C_3) \cos \beta x + (-C_3 + C_4) \sin \beta x] \right\};$$

$$N_2 = q_k (l - x) R - \frac{Eh}{K} \left[e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \right] \quad (4.168)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{Rh}} \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)} \quad (4.169)$$

Граничные условия в виде:

$$\begin{aligned} W(x) = 0, \quad \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, \\ W(x) = 0, \quad \frac{dW}{dx} = 0 \quad \text{при } x = l. \end{aligned} \quad (4.170)$$

В работе [123] приведено общее решение уравнения равновесия выработки на основании формулы

$$D \frac{d^4 W}{dx^4} = -q_k, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.171)$$

в виде

$$W(x) = -\frac{q_k}{EJ} x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \quad (4.172)$$

Граничные условия взяты в виде:

$$W(x) = 0, \quad \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = l. \quad (4.173)$$

Тогда выпучивание горизонтальной выработки имеет вид

$$W(x) = -\frac{q_k}{EJ} [x^2 - 2lx^3 + l^3 x] \quad (4.174)$$

Мы рассмотрим общее решение выпучивания выработки вида (4.165) при граничных условиях (4.170) с начальной симметричной волнистостью.

$$W(x)|_{x=0} = C_1 + C_3 + \frac{q^2 R}{Eh} l = 0 \Rightarrow C_1 + C_3 = -\frac{qR^2}{Eh} \quad (4.175)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = [(C_1 + C_2) \cos \beta x + (C_2 - C_1) \sin \beta x] \beta e^{\beta x} + [(C_4 - C_3) \cos \beta x - (C_3 + C_4) \sin \beta x] \beta e^{-\beta x} - \frac{qR^2}{Eh}$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad (C_1 + C_2 - C_3 + C_4) \beta = \frac{qR^2}{Eh}. \quad (4.175)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 2(C_2 \cos \beta x - C_1 \sin \beta x) \beta^2 e^{\beta x} + 2(C_3 \sin \beta x - C_4 \cos \beta x) \beta^2 e^{-\beta x}$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad (C_2 - C_4) \beta = 0. \quad (4.176)$$

Аналогично:

$$W(x)|_{x=l} = 0; \quad [C_1 \cos \beta l + C_2 \sin \beta l] e^{\beta l} + [C_3 \cos \beta l - C_4 \sin \beta l] e^{-\beta l} = 0. \quad (4.177)$$

В частности, при условии $C_1 \cos \beta l + C_2 \sin \beta l = 0$ имеем

$$C_3 \cos \beta l + C_4 \sin \beta l = 0 \quad (4.178)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=l} &= 0; \\ [(C_1 + C_2) \cos \beta l + (C_2 - C_1) \sin \beta l] \beta e^{\beta l} + \\ + [(C_4 - C_3) \cos \beta l - (C_4 + C_3) \sin \beta l] \beta e^{-\beta l} - \frac{qR^2}{Eh} \end{aligned} \quad (4.179)$$

В частности, при условии

$$(C_1 + C_2) \cos \beta l + (C_2 - C_1) \sin \beta l = 0$$

имеем:

$$C_3 \sin \beta l - C_4 \cos \beta l = -\frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \quad (4.180)$$

Таким образом, когда при $x=0$ - выработка шарнирно-закреплена, когда $x=l$ - выработка скользяще-заделана, имеем граничные условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = -\frac{qR^2}{Eh} l, \\ C_2 - C_4 = 0, \\ C_3 \cos \beta l + C_4 \sin \beta l = 0, \\ C_3 \sin \beta l - C_4 \cos \beta l = -\frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \end{cases} \quad (4.181)$$

$$C_3 \cos \beta l + C_4 \sin \beta l = 0$$

$$C_4 \cos \beta l - C_3 \cos \beta l - C_3 \sin \beta l - C_4 \sin \beta l = \frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l}$$

$$C_4 \cos \beta l - C_3 \sin \beta l = \frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l}$$

$$\begin{cases} C_3 \cos \beta l - C_4 \sin \beta l = 0, \\ C_3 \sin \beta l - C_4 \cos \beta l = -\frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \cos \beta l & -\sin \beta l \\ \sin \beta l & -\cos \beta l \end{vmatrix} = -\cos^2 \beta l + \sin^2 \beta l =$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} \cos \beta l & 0 \\ \sin \beta l & \frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \end{vmatrix} = \frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \cos \beta l$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & -\sin \beta l \\ \frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} & -\cos \beta l \end{vmatrix} = \frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \sin \beta l$$

Итак,

$$\begin{cases} C_3 = -\frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \frac{\sin \beta l}{\cos 2\beta l} \\ C_4 = -\frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \frac{\cos \beta l}{\cos 2\beta l} \end{cases} \quad (4.182)$$

$\cos 2\beta l \neq 0$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \frac{\sin \beta l}{\cos 2\beta l} - \frac{qR^2}{Eh} l, \\ C_2 = -\frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \frac{\cos \beta l}{\cos 2\beta l} \end{cases}$$

$$W(x) = \left[\frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \frac{\sin \beta l}{\cos 2\beta l} - \frac{qR^2}{Eh} l \right] e^{\beta x} \cos \beta x - \frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \frac{\cos \beta l}{\cos 2\beta l} e^{\beta x} \sin \beta x$$

$$- \frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \frac{\sin \beta l}{\cos 2\beta l} e^{-\beta x} \cos \beta x - \frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \frac{\cos \beta l}{\cos 2\beta l} e^{-\beta x} \sin \beta x + \frac{qR^2}{Eh} (l - x) \quad (4.183)$$

где $\beta^4 = \frac{K}{EJ}$.

$$W(x) = \frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \frac{\sin \beta l}{\cos 2\beta l} (e^{\beta x} - e^{-\beta x}) \cos \beta x - \frac{qR^2}{\beta} e^{\beta l} \frac{\cos \beta l}{\cos 2\beta l} (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \sin \beta x +$$

$$\frac{qR^2}{Eh} [l - x - l e^{\beta x} \cos \beta x] = q_k \left[\frac{2R^2 e^{\beta l}}{\beta \cos 2\beta l} (\sin \beta l \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x - \cos \beta l \operatorname{ch} \beta x \sin \beta x) + \frac{R^2}{Eh} (l - x - l e^{\beta x} \cos \beta x) \right]$$

Упругое равновесие под действием заданных усилий на ее границах возьмем в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (4.184)$$

и условия сплошности

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (4.185)$$

при граничных условиях

$$\sigma_y|_{y=0} = f(x), \quad \sigma_{xy}|_{y=0} = g(x) \quad (4.186)$$

где f и g – заданные функции;

- общее решение согласно Папковичу-Нейберу, представим

$$2GU - \frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\Phi_1$$

$$2GV = -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\Phi_2 \quad (4.187)$$

где U, V – перемещения,

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2$$

ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига;

- интегрируем методом интегрального преобразования для второй основной задачи для бесконечной полосы, затем определим НДС и форму критической деформации в поперечном сечении первой зоны выработки.

Решение. Пользуясь производительностью одной из гармонических функций, положим, $\Phi_1 = 0$ и запишем соотношения (4.200) в форме

$$\begin{aligned} 2GU - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \\ 2GV = \kappa \Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.188)$$

где

$$k = 3 - 4\nu \quad (4.189)$$

Тогда поставленная задача состоит в нахождении двух гармонических функций Φ_0 и Φ_2 , удовлетворяющих следующим краевым условиям на границах полосы $y=0$, $y=R$:

$$\begin{aligned} U|_{y=0} = U_0(x), \quad U|_{y=R} = U_R(x), \\ V|_{y=0} = V_0(x), \quad V|_{y=R} = V_R(x) \end{aligned} \quad (4.190)$$

где U_0, V_0, U_R, V_R - заданные функции. Представляя гармонические функции Φ_0 и Φ_2 в виде интегралов Фурье

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda)ch\lambda y + B(\lambda)sh\lambda y] e^{-i\lambda x} \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [C(\lambda)ch\lambda y + D(\lambda)sh\lambda y] e^{-i\lambda x} d\lambda, \end{aligned} \quad (4.191)$$

Получим следующие выражения для упругих перемещений:

$$\begin{aligned} 2GU &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Ach\lambda y + Bsh\lambda y + \lambda y(Cch\lambda y + Dsh\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ 2GV &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [-(Ash\lambda y + Bch\lambda y) + C(\chi ch\lambda y - \lambda ysh\lambda y) + D(\chi sh\lambda y - \lambda ych\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \end{aligned} \quad (4.192)$$

Подставляя далее (4.192) в граничные условия (4.190) и разлагая правые части последних в интегралы Фурье, мы приходим к следующей системе уравнений относительно A, B, C, D :

$$\begin{aligned} iA &= 2G\bar{u}_0, \quad \chi C - B = 2G\bar{v}_0, \\ Ach\mu + Bsh\mu + \mu(Cch\mu + Dsh\mu) &= \frac{2G}{i} \bar{u}_b \\ (\chi ch\mu - \mu sh\mu)C + (\chi sh\mu - \mu ch\mu)D - (Ash\mu + Bch\mu) &= 2G\bar{v}_b, \end{aligned} \quad (4.193)_-$$

где черта, как обычно, означает преобразование Фурье и положено $\mu = \lambda b$. Исключая теперь величины A и B с помощью соотношений

$$A = -2Gi\bar{u}_0, \quad B = \chi C - 2G\bar{v}_0, \quad (4.194)$$

приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными величинами C и D

$$\begin{aligned} (\chi sh\mu - \mu ch\mu)C + \mu sh\mu D &= 2G(\bar{v}_0 sh\mu + ich\mu\bar{u}_0 - i\bar{u}_b) = \phi_1(\mu), \\ -\mu shC + (\chi sh\mu - \mu ch\mu)D &= 2G(\bar{v}_b - \bar{v}_0 ch\mu - i\bar{u}_0 sh\mu) = \phi_2(\mu). \end{aligned} \quad (4.195)$$

Определив из (4.195) значения C и D

$$\begin{aligned} C &= \frac{(\chi sh\mu - \mu ch\mu)\phi_1 - \mu sh\mu\phi_2}{\chi^2 sh^2\mu - \mu^2}, \\ D &= \frac{\mu sh\mu\phi_1 + (\chi sh\mu + \mu ch\mu)\phi_2}{\chi^2 sh^2\mu - \mu^2} \end{aligned} \quad (4.196)$$

И подставив их в (4.193) и (4.190) получим окончательное решение задачи. Перемещение u и v даются формулами (4.188), а напряжения $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y$ выражаются через введенные функции Φ_0, Φ_1, Φ_2 с помощью следующих зависимостей

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[2(1-\nu)\Phi_1 - \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \right] + 2\nu \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \left(x \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} + x \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + y \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} \right] + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y} + (1-2\nu) \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \right), \\ \sigma_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu)\Phi_2 - \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} \right] + 2\nu \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \left(x \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (4.197)$$

так что для получения напряжений в рассматриваемой задаче достаточно положить $\Phi_1 = 0$. Из корней $z = \pm\sigma + i\tau$ уравнений

$$shz - \frac{z}{3-4\nu} = 0, \quad shz + \frac{z}{3-4\nu} = 0, \quad (4.198)$$

необходимых при вычислении, нужно брать те значения, которые соответствуют постановке задачи.

Заметим, что уравнение $\chi shz - z = 0$ относится к случаю задачи, симметричной относительно средней линии $y = \frac{b}{2}$, а уравнение $\chi shz + z = 0 - k$ соответствующему антисимметричному случаю.

Рассмотренная задача относилась к случаю плоской деформации. Для плоского напряженного состояния во всех формулах следует величину ν заменить на

$\frac{\nu}{1+\nu}$. В частности, будем иметь

$$shz \pm \frac{1+\nu}{3-\nu} z = 0 \quad (4.199)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) - \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_y &= 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} + 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) - \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{xy} &= (1-2\nu) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} \right) + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.200)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} + 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) - \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_{yz} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \sigma_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \\ \Phi &= (1-2\nu) \Phi_3 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - \left(x \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + y \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + z \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.201)$$

где G - модуль сдвига, ν - коэффициент Пуассона. Граничные условия

$$\sigma_z|_{z=\pm h} = \sigma_{\pm h}(r, \varphi), \quad \sigma_{rz}|_{z=\pm h} = \sigma_x(r, \varphi)|_{z=\pm h}, \quad \sigma_{yz}|_{z=\pm h} = \sigma_y(r, \varphi)|_{z=\pm h}. \quad (4.202)$$

(r, φ, z) - цилиндрические координаты;

- функция W , удовлетворяющая уравнению Лапласа в области, ограниченной поверхностями $r = R_1$, $r = R_2$, $z = 0$, $z = l$, $R_2 - R_1 = h$ должна удовлетворять граничным условиям:

$$\frac{W}{r=R_1} = W_1, \quad \frac{W}{r=R_2} = W_r, \quad \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad W = W_1 + \frac{\ln \left| \frac{r}{R_1} \right|}{\ln \left| \frac{R_2}{R_1} \right|} (W_2 - W_1)$$

В данной задаче положим

$$\frac{\Phi}{z = \pm h} = 0. \quad (4.203)$$

Тогда найдем отдельные краевые условия для функций Φ_1 и Φ_2 .

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=\pm h} = \frac{1}{2(1-\nu)} \sigma_{\frac{x}{z=\pm h}}, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=\pm h} = \frac{1}{2(1-\nu)} \sigma_{\frac{y}{z=\pm h}}. \quad (4.204)$$

Далее вводя вместо Φ_0 еще одну гармоническую функцию

$$\Phi_4 = (1-2\nu) \Phi_3 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}. \quad (4.205)$$

Имеем:

$$\left(\Phi_4 - z \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) \Big|_{z=\pm h} = \frac{1}{2(1-\nu)} (x \sigma_{zx} + y \sigma_{yz}) \Big|_{z=\pm h} = f(r, \varphi) \Big|_{1, z=\pm h} \quad (4.206)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} \right) \Big|_{z=\pm h} + \left(x \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \right) \Big|_{z=\pm h} = f|_{z=\pm h} \quad (4.207)$$

Распределяя неизвестную поперечную силу q по окружности малого радиуса ε и осуществляя предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ найдем:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{3qz^3}{2\pi(\sqrt{r^2 + z^2})^5}, & \sigma_{zx} &= -\frac{3qz^2x}{2\pi(\sqrt{r^2 + z^2})^5}, \\ \sigma_{yz} &= -\frac{3qyz^2}{2\pi(\sqrt{r^2 + z^2})^5}, & \Phi &= \frac{qz^2}{2\pi(\sqrt{r^2 + z^2})^3}. \end{aligned} \quad (4.208)$$

Тогда по критическим деформациям с начальной симметричной волнистостью получены результаты рисунка 4.11, с кососимметричной волнистостью – рисунка 4.12.

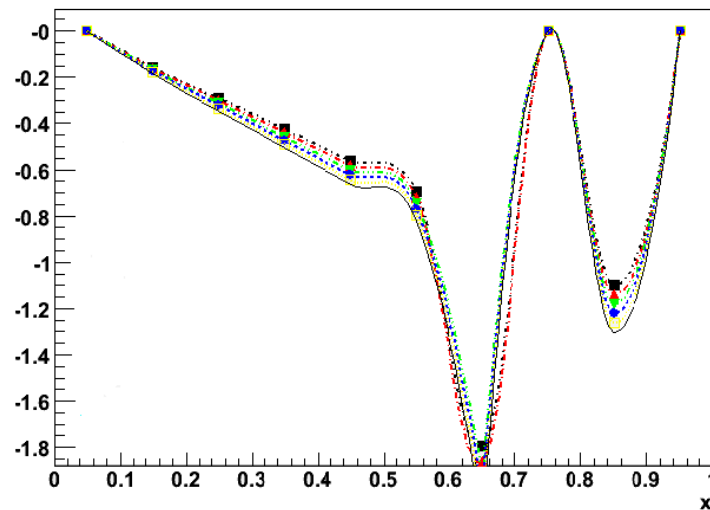


Рисунок 4.11 – Симметричная волнистость по всей длине выработки
 $E=3 \cdot 10^{-5}$, $\beta=0,04$, $h=750$, $R=0,1$, $l=1$

Прогиб W , безразмерное

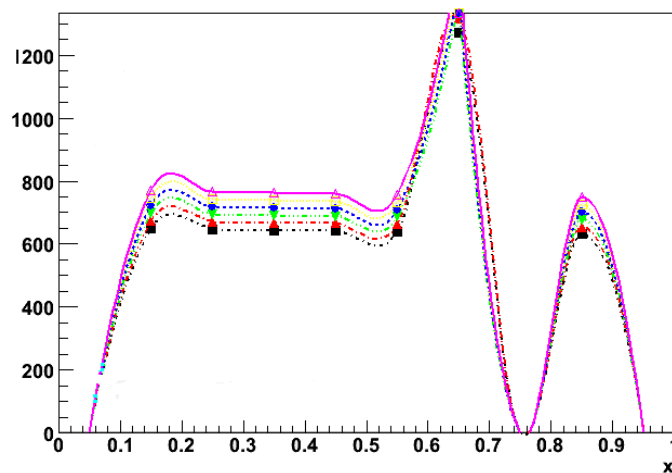


Рисунок 4.12 – Кососимметричная волнистость по всей длине выработки
 $E=3 \cdot 10^{-5}$, $\beta=0,04$, $h=750$, $R=0,1$, $l=1$

Полученные результаты показывают:

Если массив средней прочности, то разница между критической нагрузкой прямоугольной эпюры составляет до 6%, а между треугольной эпюры до 1,5%.

Если массив крепких пород, то разница между критической нагрузкой прямоугольной и треугольной эпюры составляет до 20%.

Толщина рыхленного массива зависит от радиуса обрабатываемого материала физико-механических свойств самого массива. При этом: когда $0,001 < \frac{h}{R} < 0,008$, то разница между критической нагрузкой прямоугольной эпюры и треугольной эпюры составляет до 1%. Когда $0,01 < \frac{h}{R} < 0,03$, то разница между критической нагрузкой прямоугольной эпюры и треугольной эпюры составляет до 8%, .

Изменение безразмерной критической нагрузки с увеличением длины выработки зависит от начальной неправильности поперечного сечения этой выработки (учет начальных деформаций, остаточных напряжений, учет сдвига срединной поверхности, граничных условий и т.д.). при этом:

- для короткой выработки разница между критической нагрузкой прямоугольной эпюры и треугольной эпюры составляет до 23%;
- для выработки средней длины разница между критической нагрузкой прямоугольной эпюры и треугольной эпюры составляет до 20%;
- для длинной выработки разница между q_1 и q_2 составляет до 2,2%, а между q_2 и q_3 - до 1,1%.

Числовые результаты устойчивости выработки, когда толщина рыхлого массива составляет 7,5 % от толщины обрабатываемого материала, а диаметр выработки составляет 0,002% от длины выработки, показывают: что безразмерная критическая нагрузка падает с увеличением длины выработки, а толщина рыхлого массива зависит от толщины обрабатываемого материала и его физико-механических свойств E_1, E_2, ν_1, ν_2 .

Параметр сдвига отработанного слоя выработки существенно влияет на критическую нагрузку при его изменении в диапазоне $(0,1-1,4)10^{-4}$ МПА, который примерно соответствует интервалу значений встречающихся на практике выработки.

При увеличении значений сдвига от $(2,4-4)10^{-4}$ МПА его влияние на параметр практической нагрузки $R_{кр}$ значительно меньше, но зависит от граничных условий на торцах поперечного сечения выработки.

При защемленной и скользящей границах радиальная нагрузка существенно влияет на критическую нагрузку и преобразует картину изменения критической силы с увеличением размера относительно отверстия;

Параметр, характеризующий жесткость несущих слоев, вносит изменения в величины критических усилий при осевом сжатии, когда окружное усилие значительно меньше.

Изменение относительной толщины $\frac{h}{R}$ (0,0005-0,001) 1-случай; (0,001-0,005) 2-случай; (0,005-0,01) 3-случай, зависит от относительной жесткости m_j .

Учет начальных деформаций увеличивает абсолютную величину критической нагрузки у окружного усилия, не более чем на 0,3%.

Учет сдвига срединной поверхности уменьшает абсолютную величину критической нагрузки у окружного усилия на 0,9%;

Учет величин остаточных деформации увеличивает абсолютную величину критической нагрузки окружного усилия не чем на 6%, но значительно уменьшает критическую нагрузку осевого усилия;

Когда критическая деформация возрастает от 0,1 до 0,15% под действием поперечной нагрузки и падает от 0,5 до 0,4% под действием осевых сил, а модуль упругости изменяется в пределах $E = (0,6 - 3,0) \text{ МПа}$, то отбрасываемый материал имеет прямоугольную форму критической деформации, а критическая сила рыхлого массива определяется по формуле

$$q_k = \frac{0,85Eh}{L(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Когда критическая деформация падает от 1,2 до 0,8% под действием объемных сил и возрастает от 0,1 до 0,15% под действием поперечной нагрузки, а модуль упругости изменяется в пределах $E = (0,6 - 3,0) \text{ МПа}$, то отработываемый материал имеет треугольную форму критической деформации, а критическая сила рыхленного массива определяется по формуле:

$$q_k = \frac{2 \cdot 0,85E}{L(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}}$$

Когда критическая деформация возрастает от 0,5 до 0,15% под действием поперечной нагрузки и падает от 0,5 до 0,4% под действием осевых сил, от 1,2 до 0,8% - под действием объемных сил, а модуль упругости изменяется в пределах $E = (0,6 - 3,0) \text{ МПа}$, то отработываемый материал имеет треугольную форму критической деформации, а критическая сила рыхленного массива определяется по формуле:

$$q_k = \frac{4}{3} \frac{0,85E}{L(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}}$$

Численные результаты показывают, что необходимо дополнительно установить «вилку» для устойчивости рыхлого массива, внутри которой заключена истинная величина критической нагрузки q_k , что при разработке рудных месторождений впереди всегда идет перенапряжение за счет ведения взрывных или механических работ, что рыхленный массив между крепями испытывает далее состояние демпфирования, за счет которого меняется равновесное состояние.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выработку в толще горных пород можно представить в виде многослойных анизотропных оболочек типа Тимошенко в нелинейной постановке с конечными деформациями, исходя из анализа керн разведочных скважин или нарезных выработок;

Расчеты, приведенные с помощью компьютерных программ для случая осевого сжатия выработки в массиве горных пород при конечных деформациях, показали, что точное удовлетворение граничными условиями к уравнению совместности деформации приводит к некоторому снижению критической нагрузки по сравнению с известными решениями для тех же параметров прогиба. Удержание более 7 (семь) членов параметров прогиба при конечных деформациях требует необходимости использовать критерии корректности нелинейных соотношений при больших прогибах;

Выведены формулы, для определения критической нагрузки выработки под действием поперечных и осевых сил, с учетом начальной деформации, с учетом сдвига срединной поверхности и без учета их.

Проведен анализ и определена процедура решения задачи на выпучивание выработки в горных пород под действием неравномерных поперечных сил по критическим деформациям находящейся на оснований типа Винклера, Пастернака и Кельвина-Фойгта.

Разработана методика решения геометрических нелинейных задач устойчивости содержащих в уравнении нечетные частные производные высших порядков параболического типа и составлены механико-математические модели выработки с комбинированием методов микромеханики и точечной механики (модели Винклера, Максвелла, Фойгта, Пастернака и т.д.), при различных действиях внешние нагрузки и комбинированных условиях действия.

Предложены формулы для определения безразмерной критической нагрузки при исключении начальных деформаций, при исключении сдвига срединной поверхности и начальных деформаций, при использовании допущения, что удлинения и сдвиги малы по сравнению с единицей и учитываются только удлинения и поворот срединной поверхности.

Получены уравнения возмущенного состояния выработки с начальной симметричной или кососимметричной волнистостью, находящейся на упругом основании типа Винклера.

Применен метод интегральных преобразований математической теории упругости в теории горного давления. На сечении выработки после потери устойчивости поставлены краевые задачи Дирихле, Неймана, и Дирихле-Неймана.

Анализ численных результатов выпучивания выработки в массиве горных пород, находящейся на основании типа Винклера и Пастернака показывает, что построенные кривые соответствуют таким компоновкам выработки, для которых возможна потеря устойчивости структуры выработки и зоны рыхлого массива; уменьшение плотности основания способствует потере устойчивости

выработки; максимум выпучивания смещается в направлениям отработки, приближаясь к единице; с увеличением толщины рыхленного слоя наблюдается переход от внутренней неустойчивости к неустойчивости с длиной полуволны, определяемой длиной самой выработки; при жесткой заделке поперечного сечения выработки в сторону отработки, влияние параметра нагружения зависит от длины выработки и толщины рыхленного массива и если жесткость рыхленного массива меньше жесткости отработки, то при любой жесткости основания типа Винклера происходит потеря устойчивости, определяемой длиной выработки и видом неравномерного поперечного внешнего давления треугольной эпюры.

Разработана методика расчета прогиба в продольном направлении в зависимости от корректирующих коэффициентов, составных частот поперечного сечения, волнового числа в продольном направлении и стрелы прогиба.

Предложены формулы для определения критического значения внешнего давления в случае треугольной эпюры внешней нагрузки и в случае внешней нагрузки линейно изменяющегося по длине пояса нагружения и в срединной части выработки и формулы для определения критической силы рыхленного массива при прямоугольной и треугольной форме критической деформации.

Обоснована необходимость дополнительного установления «вилки» между значениями критических сил, определенных по нелинейной теории и предложенными расчетными формулами. Показано, что изменение безразмерной критической нагрузки с увеличением длины выработки зависит от начальной неправильности поперечного сечения выработки.

Разработана инженерная методика расчета устойчивости и колебаний одиночной выработки в массиве горных пород при эксплуатационных нагрузках.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

В монографии используются следующие сокращения, условные обозначения и единицы:

ВСФ	внутренний силовой фактор;
ВСФ	внешний силовой фактор;
НДС	напряженно-деформированное состояние;
НБС	начальное безмоментное состояние;
УД	упругая деформация;
ИФКД	изменение формы критической деформации;
ИФПС	искажение формы поперечного сечения;
$R_{расч}$	радиус расчетной деформации, м;
$f_{стат}$	прогиб статический, м;
$f_{дин}$	прогиб динамический, м;
E	модуль упругости материала оболочки, МПа;
p	внутреннее давление в оболочке, МПа;
L	длина выработки, м;
h	толщина рыхлого массива, м;
r	радиус рудного материала (заполнитель), м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Носатенко П.Я., Ширшов Ю.Ю. Пространственное напряженно-деформированное состояние перекрестно армированных оболочек вращения при нагреве // Прикладная математика и механика. – 2003. - Т.67, вып.6. -С.965-975.
2. Григолюк Э.И. Коган Е.А. Статистика упругих слоистых оболочек. - М.: Изд-во МГУ, 1999. - 215с.
3. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я. О пространственном подходе к численному решению задач механики тонкостенных конструкций // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1989. -Т.20, №1. - С.151-153.
4. Носатенко П.Я. Численное решение трехмерных задач неосесимметричной деформации слоистых анизотропных оболочек вращения // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1994. - №2. - С.43-51.
5. Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Исследования пространственных эффектов в задачах термонапряженном состоянии анизотропных оболочек // Механика композитных материалов. – 1989. - №3. - С. 487-493.
6. Амандосов А.А., Божанов Е.Т., Шаги-Султан И.З. Модель упругих и вязкоупругих оснований // Материалы отчета научной конференции по математике и механике. – Алматы, 1969. - С. 15-27.
7. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. - М.: Высшая школа, 1975. - 526с.
8. Ильюшин А.А., Огибалов П.М. Упругопластические деформации полных цилиндров. -М.: МГУ, 1960. - 230с.
9. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблад И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебание в условиях высоких температур. -М.: Машиностроение, 1965. - 567с.
10. Болитин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. -М.: Наука, 1993. - 510с.
11. Алимжанов М.Т. Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород. - Алматы: Наука, 1982. -270с.
12. Пикуль В.В. Теория и расчет слоистых конструкций. -М.: Наука, 1985. - 3.96с.
13. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. - Новосибирск: Наука, 2001. - 287с.
14. Подильчук Ю.Н. Трехмерные задачи теории упругости. -Киев: Наукова думка, 1979. -240 с.
15. Лява А.Е. Математическая теория упругости. -М.-Л.: ОНТИ, 1936. -674 с.
16. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. -М.: Гостехиз-дат, 1955. -491с.
17. Купрадзе В.А., Гегелиа Г.Г., Башелейшвили М.И., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи в математической теории упругости и термоупругости. -М.: Наука, 1976. - 663 с.

18. Новацкий В. Теория упругости. -М.: Мир, 1975. - 872 с.
19. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. -М.: Наука, 1966. - 707 с.
20. Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. - М.: Гостехиздат, 1957. -536 с.
21. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Обзорные доклады. -М. -Л., 1965. - Вып. 3. -С. 116-136.
22. Власов В.В. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. -М.: Гостехтеориздат, 1949. 572 с.
23. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. -М.: Гостехиздат, 1951. -120 с.
24. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. -М.: Наука, 1976. - 512с.
25. Лурье А.И. Статика упругих тонкостенных оболочек. -М.: Гостехиздат, 1974. -155 с.
26. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Татиздат, 1957.- 432 с.
27. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. -Ленинград: Изд-во СП, 1962. - 431 с.
28. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки /перевод с англ.; под ред. Г.С. Шапиро. -М.: Физматгиз, 1963. -635 с.
29. Нагди П.И. О теории тонких упругих оболочек // Механика: Сб. переводов иностр. статей. – 1959. -№2. - С 71-81.
30. Рейснер Э. Некоторые проблемы теории оболочек // Упругие оболочки. - М.: Наука, 1962. - С.7-56.
31. Новожилов В.В. О погрешности одной из гипотез теории оболочек // Доклады АН СССР. – 1943. - Т. 38, №5-6. - С 3.86-3.94.
32. Кильчевский Н.А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследования постановки краевых задач теории оболочек // Теория пластин и оболочек: труды II Всесоюзной конференции. –Львов, 1961. - С. 58-69.
33. Базаренко Н.А. Анализ НДС цилиндрической оболочки на основе точного решения трехмерной задачи теории упругости и построение прикладных теории // Труды IV Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. – М.: Наука, 1966. - С. 130-135.
34. Амандосов А.А., Божанов Е.Т. Уточненные уравнения теории гибких пластинок и их линеаризация в задачах. // Проблемные вопросы механики горных пород. - Алматы: Наука, 1975. - С.201-218.
35. Григолюк Э.И., Коган Е.А. Основные математические модели деформирования и прочности многослойных анизотропных оболочек // Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций: Сб.трудов. -М.: Изд-во МГУ, 2000. - С. 56-109

36. Райт Т.В., Колебания пластин и стержней при наличии начальных напряжений // Прикладная механика. 1966.-N1.
37. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. - М.: МГУ, 1976. -368 с.
38. Васильев В.В. Механика конструкций из композитных материалов. -М.: Машиностроение, 1988 - 269 с.
39. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. - М.: Машиностроение, 1988. -287с.
40. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. -Киев: Наукова думка, 1973. -248 с.
41. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга И.А. Теория расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. -Киев: Вища школа, 1986. -3.106 с.
42. Рикардс Р.Б., Тетере Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. -Рига: Зинатне, 1974. -310 с.
43. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. К теории упругих многослойных анизотропных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. -1977. -№5. -С. 87-96.
44. Василенко А.Т., Григоренко Я.М. Решение на основе моделей различного уровня задач и анализ напряженного состояния неоднородных анизотропных оболочек // Прикладная механика. -1993. -Т.29, №10. -С. 77-86.
45. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики неоднородных анизотропных оболочек. -М: Наука, 1992. -396 с.
46. Носатенко П.Я. Численное решение пространственных задач механики слоистых анизотропных оболочек из композитных материалов // Механика в авиации и космонавтике: Сб. -М.: Машиностроение, 1995. -С. 110-127.
47. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. О решении задач статики слоистых оболочек в трехмерной постановке // Вычислительная и прикладная математика. -1981. -Вып.43. -С.123-130.
48. Василенко А.Т. Исследование напряженного состояния цилиндрических оболочек при несимметричных нагрузках // Прикладная механика. – 1975. - №11. - С.105-109.
49. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я. Об эффекте анизотропных в оболочках вращения при несимметричном нагружении // Доклады АН СССР. -1991. - Т.316, №6. - С.1354-1357.
50. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. К расчету напряженного состояния толстостенных неоднородных анизотропных оболочек // Прикладная механика. -1974. -Т.10, №5. - С.86-93.
51. Галимов К.З., Уравнения равновесия теории упругости при конечных перемещениях и их приложение к теории оболочек // Известия казанского филиала. Серия физ.-мат. и тех. наук. -1948.- N1.
52. Галимов К. З. Уравнения равновесия теории упругости при конечных перемещениях // Ученые зап. КГУ. - 1949.
53. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – ОГИЗ. -1948.

54. Г.Кирхгоф. Über die Heichungen des Heichgeuichts eines elastichen Korpers bci nicht ungleich kleinen Verscliiebuiigen seiner Teile, Sitzber. Akad. WLss. Wicn // Math-naturv.-1852. - K1.9 (1852) - S.762-773.
55. Кондо К. Raad memoirs of the unifyns study of basic problems in engineirins and physical sciences by means of geometry. -1954. - Vol. 1.
56. Ю.А.Д. Кеpp и Сам Танг, Неустойчивость прямоугольных упругих тел // Actamech. -1967. -N1. -С.43-63.
57. Cossera E и Ф. Sur la Theorie de l'elasticite, premier Memoire // Annales de la Faculte des sciences de Toneouse. -3.1046. -Tome X.
58. Brilluen Л. Les Jcois de l'elasticite sous forme tensorielle valuable pour des coordennees quebconques // Annales de Physique. - 1925. -Tome III.
59. F.D.Murnagan Finite deformations of an elastik solid // American journal of mathematics. -1937.-Vol. LIX, №2.
60. P. Kannyc, Zur Elastizitats the one endlicher veischiebungen // I Teil, ZAMM Bd.19. - 1939. - N5.
61. Bio M.A. Mechanics of incremental deformations. New-York-London, 1965.
62. Bizeno K.B.и Genki N. On the general theory of elastic stability, Proc. Sci Amsterdam. -1929.-Vol.32, N 4.
63. Бицено К.Б. Граммель Р., Техническая динамика.- М.:Гостехиздат, 1950. - Т.1.
64. В.В.Болотин, Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.,1961.
65. A.D.Kerr. On the instability of elastic solids, Proc.of the Feurth U.S.// National Congress of Applied Mechanics, ASNE. -1962. -S. 647-656.
66. Ржаницин А.Р. Расчет оболочек методом предельного равновесия. - М.:Стройиздат, 1958.
67. Ржаницин А.Р. Строительная механика. -М.: Высшая школа, 1982.
68. Даревский В.М. Нелинейные уравнения теории оболочек и их линеаризация в задачах устойчивости. - М.,1960.
69. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. -М.: Изд-во АН СССР, 1930.
70. Бидерман В.Л. К вопросу о влиянии поперечного гидростатического давления на устойчивость стержней // Механика твердого тела. - 1968. - N4.
71. Абжапарова А.А., Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М. Аналитико-численное решение некоторых проблем научно-технического управления разработки рудных месторождении по критическим деформациям // Актуальные вопросы теории дифференциальных уравнений с частными производными и их приложения: мат.Межд.конф. -Астана, 2008. - С.12.
72. Алимжанов М.Т. Научные основы прогноза и предупреждения неустойчивости стенок глубоких нефтегазовых скважин. // Механика и моделирование процессов технологии: сб.- Алматы, 1996.
73. Алимжанов М.Т. Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород. - Алматы: Наука, 1982.- 270с.

74. Амандосов А.А., Божанов Е.Т. Уточненные уравнения теории гибких пластинок и их линейаризация в задачах. // Проблемные вопросы механики горных пород. - Алматы: Наука, 1975. - С.201-218.
75. Амандосов А.А., Божанов Е.Т., Шаги-Султан И.З. Модель упругих и вязкоупругих оснований // Материалы отчета научной конференции по математике и маханике. -Алматы, 1969. – С.15-27.
76. Божанов Е.Т., Ержанов Ж.С. Исследования проблем устойчивости гибких пластин и оболочек, их приложения. – Алматы: Высшая школа Казахстана, 2001.
77. Буганова С.Н., Отарбаев Ж.О., Божанов Е.Т. Об одной модели определения устойчивости, выпучивания и колебания тонкостенных конструкций в «новом начале», как стационарного объекта с запаздывающим аргументом // Найновите научни постижения: материали за V Межд. науч.-практ.-Т.24 Технологии. – София, 2009. - С.28-32.
78. Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Джунисов А.Т., Буганова С.Н., Сатыбалдиев О.С. Напряженно-деформированное состояние и устойчивость в слоистых горных массивах, ослабленных выработками прямоугольного сечения и прямоугольной формы критической деформации // Теория функций и вычислительные методы: материалы Межд. конф. - Астана, 2007. - С.56-60.
79. Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Отарбаев Ж.О., Буганова С.А. О больших прогибах выработки в массиве горных пород с учетом произвольности элементов поперечного сечения // Теория функций и вычислительные методы: материалы Межд. конф. - Астана, 2007. - С.61-63.
80. Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Буганова С.Н. Численные расчеты выпучивания выработки в массиве горных пород, находящейся на упругом основании типа Винклера под действием неравномерной поперечной силы трапециевидной эпюры //Материалы республиканской научно-практической конференции. - Актау, 2007. -С.103-106.
81. Божанов Е.Т., Буганова С.Н., Маханова Ф.А. Численные расчеты выпучивания выработки в массиве горных пород, находящейся на упругом основании типа Винклера под действием неравномерной поперечной силы треугольной эпюры // Материалы республиканской научно-практической конференции. - Актау, 2007. - С.101-103.
82. Буганова С.Н., Божанов Е.Т. О задачах устойчивости и колебании выработки под действием неравномерных поперечных сил, находящейся на упруго-вязком основании // Актуальные проблемы естественных наук: сборник материалов международной научно-методической конференции. – Алматы: КазГАСА, 2008. - С.85-94.
83. Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Буганова С.Н., Маханова Ф.А. Вспучивание выработки в массиве горных пород, под действием неравномерных поперечных сил по критическим деформациям прямоугольной формы с начальной кососимметричной волнистостью, находящейся на упругом основании типа Винклера / Современные проблемы механики: тезисы III Межд. научн. конф.- Алматы, 2008. -С.34-35.

84. Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Буганова С.Н., Маханова Ф.А. Вспучивание выработки в массиве горных пород под действием неравномерных поперечных сил по критическим деформациям треугольной формы с начальной симметричной волнистостью, под действием $N_{кр}$ находящейся на упругом основании типа Винклера // Актуальные вопросы теории дифференциальных уравнений с частными производными и их приложения: мат. Межд. конференции. - Астана, 2008. - С.29-31.
85. Буганова С.Н., Отарбаев Ж.О., Божанов Е.Т. Численные решения вспучивания выработки в массиве горных пород под действием неравномерных поперечных сил по критическим кососимметричной волнистостью, находящейся на упругом основании типа Пастернака, а также равномерного осевого давления $N_{кр}$. - Алматы: Вестник КазГАСА, 2008. - №2(28). - С.237-243.
86. Ибраимкулов А.М., Шатманов Ж.Ж., Буганова С.Н., Маханова Ф.А. Вспучивание выработки в массиве горных пород под действием неравномерных поперечных сил по критическим деформациям прямоугольной формы с начальной симметричной волнистостью, находящейся на упругом основании типа Винклера / Тезисы докладов III Межд. науч. конф. «Современные проблемы механики», Алматы, 2008, с.60-61.
87. Божанов Е.Т., Отарбаев Ж.О., Буганова С.Н. Численные расчеты вспучивания выработки в массиве горных пород, находящейся на упруго-вязком основании типа Пастернака под действием поперечной силы прямоугольной эпюры // Вестник КазГАСА.- 2008.-№3(29).-С.151-156.
88. Буганова С.Н., Отарбаев Ж.О., Божанов Е.Т. К вопросу устойчивости и колебания выработки в массиве горных пород с позиции нелинейной теории. - Алматы: Вестник КазАТК, 2009. - №3(58). - С.132-137.
89. Буганова С.Н., Отарбаев Ж.О., Божанов Е.Т. К вопросу теоретико-проектных расчетов напряженно-деформированного состояния и устойчивости выработки произвольного сечения в условиях эксплуатации // Наука и образование Южного Казахстана. - 2009.-№2(75).-С.95-99.
90. Буганова С.Н., Отарбаев Ж.О., Божанов Е.Т. Аналитические расчеты вспучивания выработки в массиве горных пород // Механика и моделирование процессов технологии. - 2009. - №1. - С.
91. Айтматов И.Т., Кожагулов К.Ч. Геомеханические особенности массивов пород горно-складчатых областей // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. -Алма-Ата: Изд-во «Гылым», 1992. -№1.
92. Айнола Л.Я., Ниул У. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН Эст. ССР. -1965. -Т.14, №1.
93. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек. -М.: Наука, 1966.
94. Айталиев Ш.М., Кусаинов А.А., Божанов Е.Т., Секеев К.М. К обоснованию расчета магистральных газопроводов // Транспорт Евразии: взгляд в XXI век: труды международной конференции транспорта Евразии. - 2000.

95. Алимжанов М.Т. Научные основы прогноза и предупреждения неустойчивости стенок глубоких нефтегазовых скважин // Механика и моделирование процессов технологии. -Алматы, 1996.
96. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивости и колебания трехслойных оболочек. - М., 1973.
97. Динник А.Н. Об устойчивости сжатой круглой пластинки // Известия Киевского Политехнического института, 3.1061.
98. Божанов Е.Т., Ержанов Ж.С. Исследования проблем устойчивости упругих тел, гибких пластин и оболочек и их приложения. – Алматы, 2001.
99. Елтышев В.А. Напряженно-деформированное состояние оболочных конструкции с наполнителем. - М.: Наука, 1981.
100. Рейснер Э. Некоторые проблемы теории оболочек // Упругие оболочки. - М.: Наука, 1962. - С.7-56.
101. Новожилов В.В. О погрешности одной из гипотез теории оболочек // Доклады АН СССР. – 1943. - Т. 38, №5-6.- С 3.86-3.94.
102. Кильчевский Н.А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследования постановки краевых задач теории оболочек // Теория пластин и оболочек: труды II Всесоюзной конференций. -Львов, 1961. - С. 58-69.
103. Базаренко Н.А. Анализ НДС цилиндрической оболочки на основе точного решения трехмерной задачи теории упругости и построение прикладных теории // Труды IV Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. - М: Наука,1966.- С. 130-135.
104. Амандосов А.А., Божанов Е.Т. Уточненные уравнения теории гибких пластинок и их линеаризация в задачах // Проблемные вопросы механики горных пород. - Алматы: Наука, 1975.- С.201-218.
105. Ершов Л.В. и Калужин А.А. Об устойчивости полосы при сжатии // Изв. АН СССР. -1965. - N 4.
106. Бицено К.Б.и Генки Н. On the general theory of elastic stability. -Proc. Sci Amsterdam. – 1929. - Vol.32, N 4.
107. Бицено К.Б. Граммель Р. Техническая динамика. т.1. П.: Гостехиздат, 1950.
108. Гурса Э. Курс математического анализа том.1, Москва-Ленинград:ОНТИ, 1936.
109. Амандосов А.А., Стамгазин К.М., Секеев К. К вопросу устойчивости упругих тел // Некоторые вопросы дифференциальных уравнений. - Алма-ата :Наука, 1969.
110. Нарайкин О.С., Шимырбаев М.К. Разработка статических моделей гофрированных оболочечных упругих элементов из композиционных материалов // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: сб. -Алматы: Ғылым, 1992. - №2.
111. Паймушин В.Н.Соотношения теории тонких оболочек типа Тимошенко в криволинейных координатах поверхности отсчета // ПММ. -1978. - №4.

112. Айталиев Ш.М., Божанов Е.Т., Нысангалиев А.Н. Трубопроводный транспорт Казахстана: проблемы, перспективы, научное сопровождение // Транспорт Евразии: взгляд в XXI век: труды Международной научно-практической конференции. - Алматы, 2000.
113. Егоров А.К., Мухамбеткалиев К.И. Динамическая устойчивость нефтепроводов с отложениями. - Алматы, 2001.
114. www.rudana.in.ua
115. Григолюк К.И., Гулков П.П. Расчеты элементов авиационных конструкций. - М., 1965.
116. Киричок И.Ф. Динамика тонких упругих оболочек с начальными напряжениями. // Прикладная механика. Т. VI., вып.3, - Киев, 1970 г
117. Кожаметов К.Х., Батырбаев Т.Б. Общие уравнения упругой устойчивости тонких оболочек и пластин с начальными напряжениями. Вестник АН КазССР. - Алматы, 1968.
118. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей. - М.: Гостехиздат, 1946.
119. Галинош А.К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям. Сб. исследования по теории пластин и оболочек. – Казань, 1967.
120. Буганова С.Н. Аналитическое решение проблемы устойчивости и колебаний выработки в массиве горных пород при разработке рудных месторождений с позиции нелинейной теории.// Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Шымкент, 2009.
121. Буганова С.Н., Отарбаев Ж.О., Божанов Е.Т. Об одной модели определения устойчивости, выпучивания и колебания тонкостенных конструкций в «новом начале», как стационарного объекта с запаздывающим аргументом // Найновите научни постижения: материали за V Межд. науч.-практ. -Т.24 Технологии. – София, 2009. - С.28-32.
122. Божанов Е.Т., Трусбекова Б.С., Батырбек Н. Об одной модели выпучивания подземной трубчатой конструкции в условиях эксплуатации как модели стационарного объекта с запаздывающим аргументом // Материалы VI Межд. науч.-практ. конф. -Т.19 Технологии. – София, 2010.
123. Божанов Е.Т., Отарбаев Ж.О., Буганова С.Н. Механико-математическое моделирование нефтепроводов, транспортирующих вязкие нефти методом «горячей» перекачки. //Труды международного форума «Наука и инженерное образование без границ. 13-14 ноября 2009г. - 276-279 стр.
124. Божанов Е.Т., Отарбаев Ж.О., Буганова С.Н. Гибкость рыхленной зоны выработки по главным направлениям мягкой матрицы. //Materialy VII mezinarodni vedecko-prakticka conference “Veda a technologie:krok do budoucnosti – 2011”.Dil 17. Praha. 104 stran. - 9-13стр.
125. Божанов Е.Т., Отарбаев Ж.О., Буганова С.Н. Расчет изменения кривизны и выпучивания рыхленного массива выработки в зависимости от неравномерной поперечной нагрузки и граничных условий на торцах по критическим деформациям. //Вестник КазГАСА.- 2011.-№2(40) - 148-154 стр.
126. Божанов Е.Т., Отарбаев Ж.О., Буганова С.Н. Ибраимкулов А.М. Об изменении гибкости рыхленного массива выработки одиночной выработки под

- действием статической активной силы, лежащей на основании типа Винклера. //Вестник КазГАСА.- 2011.- №2(40) - 154-164 стр.
127. Божанов Е.Т., Отарбаев Ж.О., Буганова С.Н. Об одной расчетной математической модели выработки (Б-3), рассмотренной как модель трубчатой конструкции с заполнителем из упруго-вязких сред рыхленной под действием сейсмических нагрузок. //Вестник КазНТУ- 2011.- №4(86). - 231-237 стр.
128. Божанов Е.Т., Отарбаев Ж.О., Буганова С.Н. Об одной расчетной математической модели (Б-4), рассмотренной как модель трубчатой конструкции с заполнителем из упруго-вязких сред рыхленной зоны. //Вестник КазНТУ- 2011.- №4(86).-154-164 стр.
129. Божанов Е.Т., Отарбаев Ж.О., Буганова С.Н. Расчет колебаний рыхленного массива выработки под действием динамической нагрузки.// Вестник НИА РК- 2011.- №4(42) - 68-74стр.
130. Божанов Е.Т., Отарбаев Ж.О., Буганова С.Н. Расчет изменения кривизны рыхленного массива выработки под действием активной синусоидальной силы в зависимости от граничных условий на торцах. //Вестник НИА РК- 2012.- №1(43). - 55-60стр.
131. Буганова С.Н. Теоретико-расчетная геометрия выработки массива горных пород.//Сборник материалов Международной научно-методической конференции «Прикладные вопросы естественных наук» - Алматы: КазГАСА, 2012. – 235с.- 41-44 стр.
132. Otarbayev Zh.O., Buganova S.N., Bozhanov E.T. To amend the flexibility loosening array single output under dynamic active force $f(x, t)$, lying on the basis of the type Winkler.// Вестник КазГАСА.- 2014.- №1(51). - 154-162стр.



ЕСКЕРГЕН ТОКШИЛЫКОВИЧ БОЖАНОВ

Доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель РК, академик НИА РК, НАН ВШ РК, действительный член Нью-Йоркской академии, почетный работник образования РК.

Известный специалист в области механики деформируемого твердого тела, обладатель золотой медали имени академика Ж.С.Ержанова. Автор свыше 150 научных работ.



ЖАНГЕЛЬДЫ ОТАРБАЕВИЧ ОТАРБАЕВ

Доктор технических наук, профессор, академик НИА РК, НАЕН РК, РАН ВШ РК, директор института дистанционного образования КазНТУ им.К.И. Сатпаева, Почетный работник образования РК. Автор свыше 130 научных работ, пакетов прикладных программ, 5 учебных пособий. Член Национального комитета по теоретической и прикладной механике, обладатель золотых медалей имени академика Ж.С.Ержанова и имени академика Ш.М. Айталиева.



СВЕТЛАНА НИКОЛАЕВНА БУГАНОВА

Кандидат технических наук, ассоциированный профессор, декан факультета общей естественно-научной подготовки Международной образовательной корпорации.

Автор более 50 научных и методических работ.