**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН**

**Казахская академия транспорта и коммуникаций имени М.Тынышпаева**

**Достанова С.Х.**

# ИНЖЕНЕРНАЯ МЕХАНИКА II
## (лекции для бакалавров строительных специальностей)

**АЛМАТЫ, 2008**

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение……4
Лекция 1. Кинематика точки. …… 7
Лекция 2. Кинематика твердого тела. Поступательное и вращательное
движения. Угловая скорость и угловое ускорение……..……17
Лекция 3. Основы динамики точки.
Основные понятия и законы динамики…….22
Аксиомы классической механики……..24
Дифференциальные уравнения движения точки……..26
Основные задачи динамики……27
Основные виды прямолинейного движения точки……...30
Лекция 4. Общие теоремы динамики точки……..31
Теорема об изменении количества движения точки…….31
Общие теоремы динамики системы и твердого тела……37
Лекция 5. Статически неопределимые системы
при растяжении – сжатии……44
Лекция 6. Статически неопределимые стержневые системы.
Температурные и монтажные усилия……54
Лекция 7. Кручение.
Кручение стержней круглого поперечного сечения…….…..58
Потенциальная энергия при кручении……..64
Статически неопределимые задачи при кручении…….…..65
Лекция 8. Сложное сопротивление. Косой изгиб…….68
Лекция 9. Нулевая линия. Расчет на прочность……72
Лекция 10. Внецентренное сжатие или растяжение……78
Нулевая линия…….…….80
Расчет на прочность…….……...81
Лекция 11. Ядро сечения при внецентренном сжатии…….84
Лекция 12. Расчет статически определимых рам……..……..….89
Лекция 13. Определение перемещений в статически
определимых рамах……..……..94
Лекция 14. Расчет трехшарнирной рамы……..…..100
Лекция 15. Определение перемещений матричным методом.
Матрица податливости системы……...104
Алгебра матриц. Общие сведения.
Простейшие операции над матрицами……108
Литература……..114

# ВВЕДЕНИЕ

Инженерная механика является одной из основных технических дисциплин, формирующих мышление будущего инженера, поэтому дисциплина «Инженерная механика II» является обязательным предметом для бакалавров высших учебных заведений, обучающихся по специальности 050729 – «Строительство» и включается в учебные планы в качестве базовой дисциплины. Эта дисциплина состоит из основ теоретической механики и сопротивления материалов. В разделе теоретической механики рассматриваются две части: в кинематике рассматриваются общие геометрические свойства движения тел, а в динамике изучаются законы движения материальных тел под действием сил. В сопротивлении материалов рассматривается расчет упругих стержневых систем при внешних воздействиях.

Роль и значение теоретической механики состоит не только в том, что она является научной базой многих областей современной техники, но и в том, что ее законы и методы позволяют научить и объяснить целый ряд важных явлений и способствует дальнейшему росту и развитию различных направлений инженерных наук. Целью сопротивления материалов является изучение прочности и надежности элементов конструкций, разработка моделей и методов расчета на прочность. Сопротивление материалов связывает теоретические науки с конкретными инженерными решениями.

Инженерная механика является одной из древнейших наук, возникновение и развитие которой обусловлены потребностями строительной практики. Начиная с эпохи Возрождения (XIV - XVI), создаются основы динамики, заложенные знаменитыми учеными, такими, как Г.Галилей и И.Ньютон. XVIII век характеризовался разработкой общих принципов классической механики и важнейшими исследованиями по механике твердого тела, гидромеханике, небесной механике. Появление железной дороги способствовало бурному развитию инженерных прикладных наук, в частности, строительной науки. Многие выдающиеся ученые – Л.Эйлер, Ж.Даламбер, Ж.Лагранж, М.В.Остроградский, А.М.Ляпунов, С.П.Тимошенко, Н.М.Беляев, В.И. Феодосьев и многие другие посвятили свой труд созданию курсов инженерной механики, которые являются научной основой важнейших областей строительной отрасли. Реальным подтверждением все возрастающего значения инженерной механики являются выдающиеся достижения во многих областях техники, особенно в создании космических кораблей, спутников, современных зданий и сооружений. Велики и ответственны задачи механики, которые были и остаются научной основой развития современной строительной науки. Изучение в лекционном курсе теоретических основ механики и современных прогрессивных методов расчета дают возможности для создания современных эффективных конструкций. Необходимо отметить большой

вклад казахстанских ученых в развитие инженерной механики. Проблемы строительной механики, а именно совершенствование теории и методов расчета рассматривались в трудах Т.Ж.Жунусова, Ш.М.Айталиева, Т.Д.Абаканова, А.А.Кусаинова, А.Ш. Боженова, К.А.Турсунова, Т.Н.Тер-Эммануильян.

Методическая направленность дисциплины предполагает**:**

- системное изучение основ теоретической механики, сопротивления материалов;

- обучение теоретическим и практическим основам решения инженерных задач при расчете элементов транспортных конструкций.

Целью преподавания дисциплины является:

получение студентами теоретических знаний о свойствах движения тел без учета их инертности и действующих на них сил, законы движения материальных тел с учетом инертности под действием сил, изучение деформации упругих тел под действием внешних сил и элементарных расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и сооружений.

Для практической деятельности инженеру необходимо выработать навыки создания простых и ясных моделей явлений и реальных объектов, отбрасывая второстепенные факторы. Методы теоретической механики (механики абсолютно твердого тела) дают возможность использовать основные законы механики и математический аппарат для исследования поведения системы при внешних воздействиях. Современный этап развития технических наук можно характеризовать, как переход от расчета к модели. Создаются математические модели элементов конструкций, отражающие их функциональное назначение, работоспособность, условия прочности. Знание основ теоретической механики, закладывает основу для выбора расчетной схемы и соответствующих аналитических зависимостей, что называется построением физико-математической модели работы элемента или части конструкции. Правильно и грамотно построенные расчетные схемы позволяют ответить на многие важные инженерные вопросы: дать оценку прочности существующей конструкции, подобрать необходимые размеры элементов конструкции, обеспечивающие их прочность и экономичность, выбрать оптимальную конструкцию.

Задачей изучения дисциплины является применение теоретических знаний для решения практических задач, возникающих при проектировании элементов конструкций и сооружений. Все разделы данной книги тесно связаны между собой и играют чрезвычайно большую роль в формировании мышления современного инженера.

Данный курс инженерной механики II рассчитан на изучение основ теоретической механики: кинематика точки, простые движения твердого тела и основы динамики точек, основы динамики твердого тела, а также основ сопротивления материалов: расчет статически неопределимых систем при растяжении-сжатии; кручение; сложное сопротивление: косой изгиб; внецентренное сжатие (изгиб с растяжением) и расчет статически определимых рам с использованием алгебры матриц.

Основным содержанием сопротивления материалов является разработка моделей прочностной надежности элементов конструкций. С помощью таких моделей инженер может выбрать материал и необходимые размеры элементов конструкций, оценить сопротивление конструкционных материалов внешним воздействиям.

Любое инженерное сооружение – здание, мост, тоннель, дорожные конструкции и др. – помимо элементов, обеспечивающих функциональное назначение данного объекта, обязательно имеет несущие элементы конструкции, составляющие «силовой каркас» и предназначенные для восприятия нагрузок и различных силовых воздействий на конструкцию. Несущие элементы конструкции должны проектироваться и создаваться так, чтобы они были прочными, т.е. могли воспринимать все силовые воздействия, не разрушаясь в течение длительного времени, тем самым сохранять безопасность для определенного периода эксплуатации.

Решающее влияние на инженерную механику оказывает быстрое развитие и совершенствование технических средств, а именно использование современных персональных компьютеров. Расчет элементов конструкций предполагает применение компьютерных программ и алгоритмов, которые в основном используют матричные методы, поэтому в данном лекционном материале представлены простейшие матричные действия и основные сведения из алгебры матриц. В связи с этим более полно изложен расчет статически определимых рам, где использована матричная форма при определении перемещений.

В книге приведены примеры и даны контрольные вопросы для более полного усвоения тем. Данной книгой могут пользоваться студенты строительных и других технических специальностей, в зависимости от конкретной программы можно использовать те лекции или те темы, которые могут оказаться им полезными.

Автор надеется, что книга окажется полезной для студентов, аспирантов и магистрантов строительных специальностей при изучении проблем прочности и надежности элементов строительных конструкций.

Автор выражает благодарность рецензентам, кафедре «Транспортные конструкции и сооружения» КазАТК им. М.Тынышпаева за ценные замечания и ответственному редактору за помощь при подготовке рукописи к печати.

## Лекция 1

### Кинематика точки.

Большой вклад в развитие основ кинематики внесли такие ученые, как Ж. Даламбер (1717-1783), А Ампер (1775-1836), Ж. Понселе (1788-1867), М. Шаль (1793-1880), Л. Эйлер (1707-1783), А. Резаль (1828-1896) и др. Как самостоятельная наука кинематика оформилась лишь в половине XIX века.

Кинематика изучает движения материальных точек, не останавливаясь на причинах, вызывающих эти движения. Под движением понимаем изменение с течением времени положения данного тела по отношению к другим телам, поэтому всякое движение материального тела или состояние его покоя можно представить лишь по отношению к другим телам. Таким образом, движение имеет относительный характер. Для определения положения движущегося тела (точки) с тем телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают систему координат, которая называется системой отсчета. Характер движения материальной точки зависит от выбора системы отсчета. Если координаты всех точек тела в выбранной системе отсчета остаются все время постоянными, то тело по отношению к этой системе отсчета находится в покое. Если координаты каких–нибудь точек тела с течением времени изменяются, то тело по отношению к данной системе отсчета (а, следовательно, и по отношению к телу, с которым эта система связана) находится в движении. Движение тел происходит во времени, геометрическое пространство, по отношению к которому изучается движение материальной тел, определяется системой декартовых координат.

Итак, кинематикой называется та часть механики, в которой изучаются зависимости между величинами, характеризующими состояние систем, но не рассматриваются причины вызывающие изменение состояние движения. Установление математических способов задания движения точек или тел является одной из важных задач кинематики.

Основная задача кинематики состоит в том, чтобы, зная закон движения данного тела (или точки), определить все кинематические величины, характеризующие как движение тела в целом, так и движение каждой из его точек в отдельности (траектории, скорости, ускорения и т.п.). Для решения этой задачи необходимо, чтобы непосредственно был задан закон движения данного тела, или же закон движения какого-нибудь другого тела, кинематически связанного с данным.

### Кинематика точки. Декартовы координаты.

С неподвижной системой отсчёта связываем декартовую ортогональную систему координат (правую, рисунок 1.1). Рассмотрим

движение материальной точки $M(x,y,z)$ по отношению к системе ортогональных осей Oxyz (координатный способ задания движения) [1-3]. Геометрическое место последовательных положений материальной точки в этом пространстве называется траекторией точки. Положение точки в пространстве можно задать ее координатами x,y,z, которые при движении точки меняются со временем, т.е.

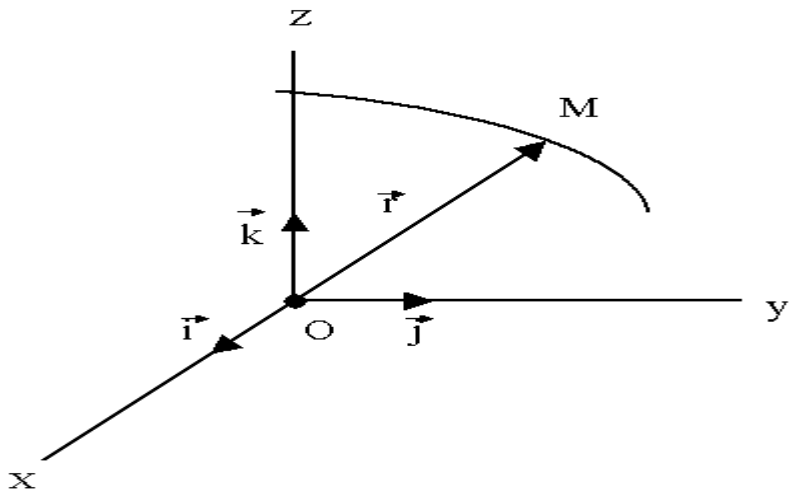



Рисунок 1.1

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$ – параметрические уравнения траектории,

где $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ - единичные векторы (орты), эти уравнения определяют закон движения материальной точки и представляют собой параметрические уравнения траектории точки. В непрерывном движении материальной точки функции $f_i$ непрерывные вместе с производными первого и второго порядка, т.е. $f_i(t)$ - непрерывны и 2 раза дифференцируемы; 2-е производные – непрерывны.

Непрерывная последовательность точек среды (пространства), занимаемая точкой М, представляет траекторию точки М (рисунок 1.2). Если траекторией является прямая линия, то движение точки называется прямолинейным, а если кривая, то криволинейным. Чтобы знать положение точки на траектории, в любой момент времени надо знать зависимость

s=f (t)

Это уравнение выражает закон движения точки М вдоль траектории. Чтобы задать движение точки естественным способом, надо задать:

1. Траекторию точки;
2. Начало отсчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета;
3. Закон движения точки вдоль траектории в виде s=f (t).

Исключая время:

$y = F_1(x); z = F_2(x)$

или:

$\Phi_1(x, y, z) = 0; \Phi_2(x, y, z) = 0$

**Скорость и ускорение точки**

Одной из основных кинематических характеристик движения точки является векторная величина, называемая скоростью. Рассматривая два близких положения материальной точки M и M', соответствующих моментам t и t + Δt, вектор $\overline{MM'}$, соединяющий эти точки, называется вектором перемещения точки за промежуток времени Δt (рисунок 1.2) [1-3]. Положение движущейся материальной точки M можно определить вектором **r** = $\overline{OM}$, изменяющимся с течением времени по величине и направлению, вектор r называется радиусом вектором точки.

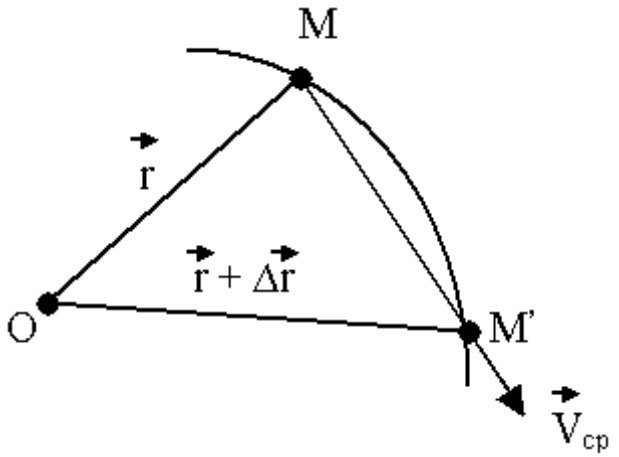



Рисунок 1.2

т. M ⟶t; т. M'⟶ t + Δt

(Δt - конечное).

Радиусы – векторы во времени изменяются, т.е.

при t ⟶$\vec{r}$, t + Δt ⟶$\vec{r}$+ Δ$\vec{r}$,

вектор перемещения точки можно представить через значение радиус-вектора точки в моменты времени t и t+ Δt : Δ$\vec{r}$ = $\overrightarrow{MM'}$

Введём понятие скорости:

Для средней скорости точки за время Δt получается следующее выражение (рисунок 1.2):

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

(Направление по секущей MM').

Для истинной скорости точки необходимо взять предел отношения, т.е скорость точки может быть определена как производная радиуса -вектора точки в момент времени t ($\Delta t \to 0$), то есть

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Т.к. предельным направлением секущей ММ' является касательная, то вектор скорости точки в данный момент направлен по касательной к траектории точки в сторону движения (направление по касательной к траектории точки).

Очевидно:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}$$

Величину скорости точки можно выразить через ее проекции на ортогональные оси , т.е. проекции $\vec{V}$:

$$\vec{V}_x = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}; \vec{V}_y = \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y}; \vec{V}_z = \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z}$$

.

Модуль (длина) вектора скорости:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Скорость точки М в момент времени t равна производной по времени от радиуса – вектора точки и направлена по касательной к траектории. Можно выразить скорость через дифференциал дуги траектории точки ds. Выбрав положительное направление отсчета дуги, можно определить, что при возрастании s производная $\frac{ds}{dt}$ будет положительной. Если условиться, что скорость V положительна в направлении возрастания дуги s, тогда

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}$$

Размерность скорости – длина/время, в качестве единиц измерения обычно применяются м/сек или км/час. Наиболее простым среди всех возможных движений точки является такое движение, при котором в любой момент времени

$\vec{V} = \frac{ds}{dt}$ = a =const.

Такое движение называется равномерным. Тогда уравнение записывается в виде:

ds =a dt,

и тогда после интегрирования получим

s= at +const

Это уравнение представляет закон изменения пути со временем.

Теперь введем понятие ускорение. Ускорением называется величина, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления скорости точки.

По аналогии рассматриваем два близких положения материальной точки M и M', соответствующих моментам t и t + Δt [1-3]. Каждое положение определяется своим вектором скорости: $\vec{V}$(t) и $\vec{V}$(t + Δt), построим векторы скоростей (рисунок 1.3). Изменение вектора скорости за промежуток времени Δt представляет следующую разность: $\Delta\vec{V} = \vec{V}$(t + Δt) - $\vec{V}$(t) (рисунок 1.3).

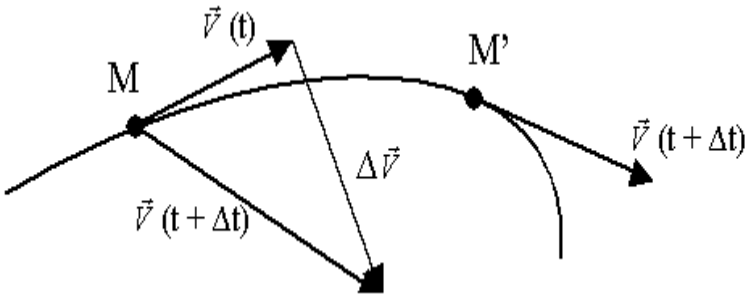



Рисунок 1.3

Совмещая начало векторов $\vec{V}$(t) и $\vec{V}$(t + Δt) в точке M => $\Delta\vec{V}$ за Δt.
Для среднего ускорения получаем:

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

(направление в сторону вогнутости траектории)
Истинное ускорение точки в момент времени t получается как предел этого отношения при Δt $\longrightarrow$0, то есть

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Проекция производной от вектора на какую-нибудь неподвижную ось равна производной от проекции дифференцируемого вектора на ту же ось, т.е.:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}$$

Ускорение точки в некоторый момент времени равно производной по времени от вектора скорости, или второй производной по времени от радиуса – вектора точки в этот момент времени.

При прямолинейном движении вектор ускорения $\vec{a}(t)$ направлен вдоль прямой, по которой движется точка. Если траекторией точки является

плоская кривая, то вектор ускорения $\vec{a}(t)$ лежит в плоскости этой кривой и направлен в сторону ее вогнутости. В общем случае вектор ускорения $\vec{a}(t)$ лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой.

В механике применяются не только декартовы координаты, например, часто используют обобщённые (криволинейные) координаты. Они бывают удобней, т.к. позволяют определить конфигурацию рассматриваемой системы. Часто их называют позиционными. Криволинейными они называются потому, что линии, вдоль которых меняется только одна координата, обычно бывают кривыми.

Рассмотрим частный случай криволинейных координат – полярные координаты точки на плоскости: применим далее к задаче движение точек в центральном силовом поле (рисунок 1.4) [1].

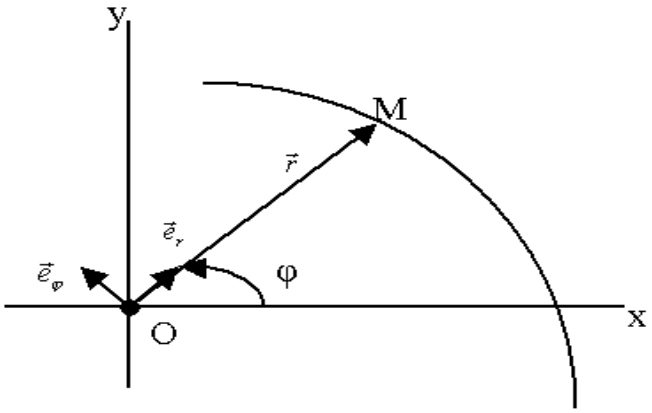



Рисунок 1.4

(x, y) – декартовы координаты.
(r, $\varphi$) – полярные координаты.
Угол $\varphi$=> от оси Ox против часовой стрелки имеет положительное направление

Формулы преобразования:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, где $r \geq 0$; $0 \leq \varphi < 2\pi$

(можно рассматривать и $\varphi \to \infty$).
Если r = const – концентрические окружности с центром в точке O.
Если $\varphi$= const – прямолинейные лучи из точки O.

Введём два орта:

$\vec{e}_r$ - радиального направления
$\vec{e}_\varphi$ - трансверсального направления

$\vec{e}_r \perp \vec{e}_\varphi$.

Найдём производные $\vec{e}_r$ по углу $\varphi$(рисунок 1.5):

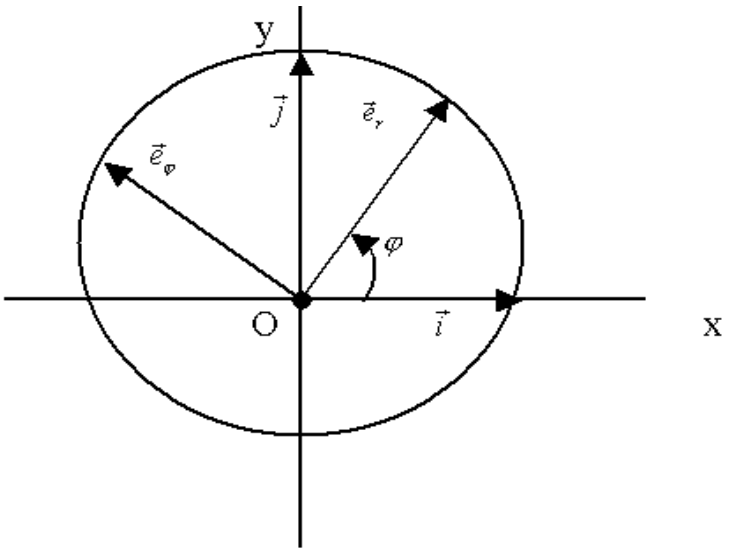



Рисунок 1.5

$\vec{\ell}_r = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$ (так как r = 1)

при $\varphi + \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi = \vec{e}_\varphi$$

т. е.

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi$$

Далее:

$$\frac{d^2\vec{e}_r}{d\varphi^2} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{i}\cos\varphi - \vec{j}\sin\varphi = -\vec{e}_r$$

при $\varphi + \frac{\pi}{2}$, т.е $\frac{d^2\vec{e}_r}{d\varphi^2} = -\vec{e}_r$

При каждом дифференцировании по φ происходит поворот на угол $\frac{\pi}{2}$.

Выведем формулы проекции скорости и ускорения точки М на направления касательных к координатным линиям в полярных координатах [1].

Так как $\vec{r} = \vec{e}_r r$, то

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e}_r\frac{dr}{dt} + \frac{d\vec{e}_r}{dt}r.$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \vec{e}_\varphi\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \vec{V} = \vec{e}_r\frac{dr}{dt} + \vec{e}_\varphi r\frac{d\varphi}{dt}$$

Очевидно:

$$\begin{cases} V_r = \dfrac{dr}{dt} - \text{ проекция на радиальное направление;} \\ V_\varphi = r\dfrac{d\varphi}{dt} - \text{ проекция на трансверсальное направление.} \end{cases}$$

Для ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{e}_r \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{d\vec{e}_r}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + \vec{e}_\varphi \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \vec{e}_\varphi r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} r \frac{d\varphi}{dt}.$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\vec{e}_r \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \vec{e}_r(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \vec{e}_\varphi(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}).$$

Очевидно:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - \text{ проекция на радиальное направление} \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} - \text{ проекция на трансверсальное направление} \end{cases}$$

Размерность ускорения – длина / (время)$^2$, в качестве единицы измерения обычно применяется м / сек$^2$.

При прямолинейном движении вектор $\vec{a}$ направлен вдоль прямой, по которой движется точка. Если траекторией является плоская кривая, то вектор ускорения $\vec{a}$ лежит в плоскости этой кривой и направлен в сторону ее вогнутости. В общем случае вектор ускорения $\vec{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой.

**Пример 1.**

Пусть точка М совершает движение в плоскости Oxy по закону

$x=R\cos\omega t, \quad y=R\sin\omega t,$

где R , ω – постоянные величины. Определить траекторию и скорость точки.
Решение. Уравнение траектории задано в параметрическом виде [4]. Исключив t , получаем

$x^2 + y^2 = R^2,$

т.е. траекторией является окружность. Проекции скорости получим, дифференцируя уравнения, определяющие координаты как функции времени:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -R\omega\sin\omega t, \qquad V_y = R\omega\cos\omega t$$

Величина скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = R\omega$

**Пример 2.**

Пусть точка М совершает движение по закону

x=R sinωt,  y=R cosωt, z=ut

где R , ω, t – постоянные величины. Определить траекторию, скорость и ускорение точки [4].

Решение. Возводя первые два уравнения в квадрат, и складывая, получаем

$x^2 + y^2 = R^2$,

т.е. траектория лежит на круглом цилиндре радиуса R, ось которого направлена вдоль оси Oz.

Определяя из последнего уравнения t и подставляя в первое, находим:

$$x = R\sin(\frac{\omega}{u} z)$$

Траекторией точки будет линия пересечения синусоидальной поверхности, образующие которой параллельны оси ОУ (синусоидальный гофр) с цилиндрической поверхностью радиуса R. Эта кривая называется винтовой линией.

Проекции скорости получим, дифференцируя уравнения, определяющие координаты как функции времени:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = R\omega\cos\omega t, \quad V_y = -R\omega\sin\omega t, \quad V_z = u$$

Величина скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{R^2\omega^2 + u^2}$ .

Стоящие под знаком радикала величины постоянны. Следовательно, движение происходит с постоянной по модулю скоростью, направленной по касательной к траектории.

Вычисляем по формуле проекции ускорения и полное ускорение:

$$a_x = -R\omega^2\sin\omega t, \quad a_y = -R\omega^2\cos\omega t, \quad a_z = 0$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2$$

Итак, движение происходит с постоянным по модулю ускорением. Для определения направления ускорения имеем формулы:

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a} = -\sin\omega t = -\frac{x}{R},$$

$$\cos\beta_1 = \frac{a_y}{a} = -\cos\omega t = -\frac{y}{R},$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a} = 0$$

Т.к. $\frac{x}{R} = \cos\alpha, \qquad \frac{y}{R} = \cos\beta,$

где α ,β - углы, образованные с осями Ох, Оу радиусом R, проведенным от оси цилиндра к движущейся точке. Так как косинусы углов $\alpha_1$ ,$\beta_1$ отличаются от углов α ,β только знаками, то отсюда следует, что ускорение точки все время направлено по радиусу цилиндра к его оси.

**Контрольные вопросы:**

1. Что изучает кинематика?
2. Дайте определение скорости точки.
3. Напишите формулы проекций ускорения на оси полярной системы координат.
4. Указать закон движения точки по окружности.
5. Указать закон движения точки по винтовой линии.

## Лекция 2.

### Кинематика твердого тела. Поступательное и вращательное движения. Угловая скорость и угловое ускорение.

Абсолютно твердым телом называют такую систему материальных точек, расстояние между любыми двумя точками которой остаются неизменными. Абсолютно твердое тело либо заполняет некоторую область пространства, либо состоит из нескольких отдельных точек. Перемещения абсолютно твердого тела в пространстве могут быть либо свободными, либо стесненными некоторыми условиями, например, перемещения твердого тела будут стеснены, если закрепить одну точку. Если закрепить две точки твердого тела, то возможными движениями такого тела будут лишь вращения вокруг неподвижной прямой, проходящей через закрепленные точки. Эту прямую называют осью вращения. Если закрепить еще одну точку, не лежащую на оси вращения, то тело будет неподвижным. Следовательно, три точки, не лежащие на одной прямой, полностью определяют положение твердого тела, и для определения движения твердого тела достаточно знать закон движения трех точек твердого тела, не лежащих на одной прямой.

Твердое тело испытывает перемещение, когда оно переходит из одного положения в другое. Вектор, соединяющий два различных положения твердого тела, характеризует ее перемещение. Этот вектор называется вектором перемещения твердого тела. В общем случае перемещения различных точек твердого тела отличаются друг от друга, как по величине, так и по направлению.

Задачи кинематики твердого тела распадаются на две части:

1. задание движения и изучение кинематических характеристик движения всего тела в целом;
2. изучение движения каждой точки в отдельности.

Частными видами движения абсолютно твёрдого тела являются поступательное, вращательное и плоскопараллельное.

### Поступательное движение

Может оказаться, что векторы перемещений различных точек твердого тела равны по величине и параллельны. В таком случае твердое тело совершает поступательное перемещение. Движение, состоящее из последовательности поступательных перемещений твердого тела, называется поступательным движением, т.е. поступательным движением абсолютно твёрдого тела будем называть такое движение, при котором отрезок прямой, соединяющей две любые точки тела, остаётся параллельным неподвижной прямой (рисунок 2.1). Если с твердым телом жестко связать систему прямоугольных осей, то при поступательном перемещении эти оси будут оставаться параллельными своему первоначальному положению [2].

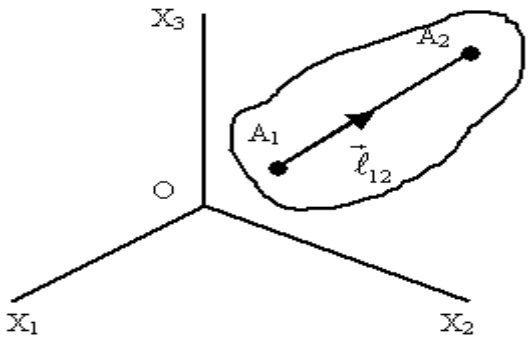



Рисунок 2.1

В поступательном движении все точки тела в каждый момент времени имеет одну и ту же скорость и одно и то же ускорение.

Пусть:

$\overrightarrow{OA_1} = \vec{R}_1$

$\overrightarrow{OA_2} = \vec{R}_2$

Тогда:

$\vec{R}_1 + \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{R}_2$

Положим:

$\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{\ell}_{12}\rho_{12}.$

Так как $\overrightarrow{A_1A_2}$ перемещается параллельно первоначальному направлению, то:

$$\frac{d\vec{\ell}_{12}}{dt} = 0$$

Тогда:

$$\frac{d\vec{R}_1}{dt} + \rho_{12}\frac{d\ell_{12}}{dt} = \frac{d\vec{R}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{R}_1}{dt} = \frac{d\vec{R}_2}{dt} \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{V}_2$$

(Аналогично из формулы Эйлера при $\vec{\omega} = 0: \vec{V} = \vec{V}' + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$)

Очевидно и наоборот, если скорости всех точек равны между собой в каждый момент времени, то тело движется поступательно. Беря от обоих частей производные по времени, получаем, что ускорения точек A и $A_1$ тела в любой момент времени тоже одинаковы по модулю и по направлению, т.е. $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$.

Пусть:

$$\frac{d\vec{R}_1}{dt} = \frac{d\vec{R}_2}{dt} \Rightarrow \vec{R}_1 = \vec{R}_2 + \vec{C}_1,$$

где $\vec{C}_1$- вектор постоянной длины и неизвестного направления относительно неподвижной системы, т.е. при $\vec{C}_1$ = const тело движется поступательно. Отсюда следует, что поступательное движение тела определяется движением какой-нибудь одной его точки, следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематики точки.

Примерами поступательного движения являются кузов автомобиля на прямом горизонтальном участке дороги, кабина лифта, кабины колеса обозрения и т.д.

**Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.**

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными. Проходящая через неподвижные точки прямая называется осью вращения.

Рассмотрим твердое тело, у которого неподвижно закреплены две точки (рисунок 2.2). Пусть две точки $A_1$ и $A_2$ неподвижны. Очевидно, что все точки прямой $A_1A_2$ неподвижны. Такое твердое тело может только вращаться вокруг неподвижной оси, причем всякая его точка описывает окружность в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Радиус окружности равен расстоянию точки от оси вращения. Положение точки можно определить углом θ (двугранный угол) между двумя плоскостями, проходящими через ось вращения, одна из которых неподвижна и проходит через ось вращения, а вторая вращается вместе с точкой. Введем неподвижную систему $X_1$, $X_2$, $X_3$: $X_3$ по $A_1A_2$ [1]. Положение тела определяется точками $A_1$, $A_2$, P, а из трех координат точки P только одна независимая, так как имеются два уравнения связи. Можно взять угол $\theta$ (рисунок 2.2).

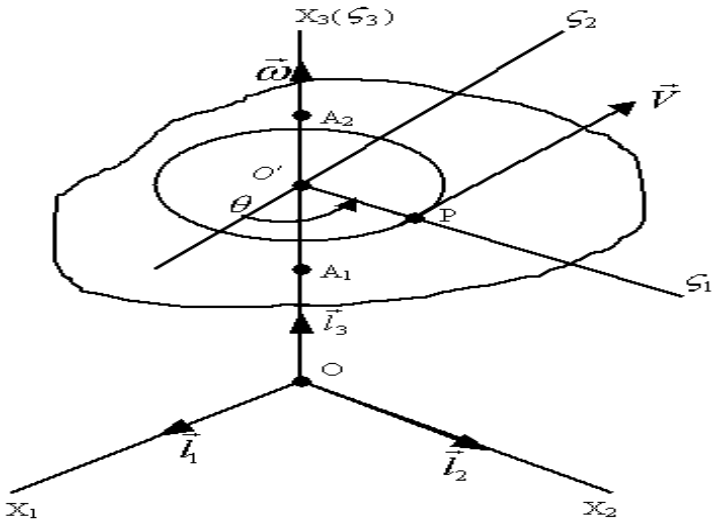



Рисунок 2.2

Поясним: введём подвижную систему $O'\varsigma_3$ по $Ox_3$. Обозначим угол между осями через θ, т.е.

$$(Ox_1, \hat{} O\varsigma_1) = \theta.$$

Тогда таблица косинусов:

| | $\varsigma_1$ | $\varsigma_2$ | $\varsigma_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\cos\theta$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ | 0 |
| $x_2$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ | $\cos\theta$ | 0 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 |

Угловая скорость тела в данный момент времени численно равна производной от угла поворота во времени, т.е. угловые скорости относительно осей $Ox_1$, $Ox_2$, $Ox_3$ определяются следующими выражениями:

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3} \cdot \dot{\alpha}_{i2} = 0$$

$$\omega_2 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{i3} = 0$$

$$\omega_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2} \cdot \dot{\alpha}_{i1} = (-\sin\theta)(-\sin\theta) \cdot \dot{\theta} + \cos\theta\cos\theta \cdot \dot{\theta} + 0 = \dot{\theta}$$

Величина ω называется угловой скоростью вращения. Она определяет скорость изменения угла между плоскостью, проходящей через ось вращения и точку Р, и неподвижной плоскостью, также проходящей через ось вращения. Таким образом, вращение твердого тела определяется, также как и скользящий вектор, тремя элементами: осью вращения, величиной вращения (величиной угловой скорости) и стороной вращения. Знак ω определяет направление вращения тела. Когда вращение происходит против хода часовой стрелки, ω >0, а когда по ходу часовой стрелки, то ω<0. Размерность угловой скорости радиан / время, в качестве единицы измерения обычно применяется - 1/сек.

Распределение скоростей.

Угловое ускорение ε характеризует изменение угловой скорости тела с течением времени и равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

$$\varepsilon = \frac{d\varpi}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Размерность углового ускорения будет 1/ время$^2$, в качестве единицы измерения обычно берут 1/сек$^2$.

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение называется ускоренным, а если убывает – замедленным. Вращение будет ускоренным, когда величины ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным, - когда разные.

Численная величина скорости точки P в ее круговом движении равна:

$$\vec{\omega} = \vec{\ell}_3 \frac{d\theta}{dt}; \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\ell}_3 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\omega = \dot{\theta}$$

$$\vec{V} = [\vec{\omega} \times \vec{r}] \Rightarrow V = \omega \cdot r \Rightarrow$$ Так как движется в плоскости.

Линейная скорость точки вращающегося твердого тела V численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения R. Направлена линейная скорость V по касательной к описываемой точкой P окружности или перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения и точку P.

Распределение ускорений:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \omega^2 \vec{l}$$

$$\vec{l} = -\vec{r}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{вр.} = \dot{\omega} r \\ a_{ц.} = \omega^2 r \end{array}\right\} \quad a = \sqrt{a^2_{вр.} + a^2_{ц}}$$

Направление двух компонент ускорения во вращательном движении тела: касательное ускорение $\alpha_{вр}$ направлено по касательной к траектории, а нормальное ускорение $\alpha_{ц}$, всегда направлено по радиусу R к оси вращения.

Полное ускорение точки P будет равно

$$a = \sqrt{a^2_{вр} + a^2_{ц}} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

**Контрольные вопросы:**

1. Какое движение твёрдого тела называется поступательным?
2. Сколькими параметрами определяется положение тела при вращении вокруг неподвижной оси?
3. Напишите формулы компонент ускорения во вращательном движении тела.
4. Дайте определение угловой скорости вращения.
5. Как определяется линейная скорость точки вращающегося твердого тела.

## Лекция 3.

## Основы динамики точки.

### Основные понятия и законы динамики

Динамикой называется раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил, этим она отличается от кинематики, которая изучает движение независимо от причин, его вызывающих.

Древние ученые имели смутное представление о законах движения. Аристотель (384-322 гг. до н.э.) не знал еще законов инерции, считая, что с прекращением действия силы тела прекращают двигаться. Только после долгих наблюдений над происходящими в природе движениями один из законов динамики был раскрыт Галилеем, установившем, что всякое тело пребывает в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока внешние силы не выведут его из этого состояния. Закон инерции Галилея является обобщением опытных фактов, накопленных человечеством, поэтому основоположником динамики считается великий ученый Г.Галилей (1564-1642). Он впервые ввел в механику понятие скорости и ускорения движущейся точки при неравномерном прямолинейном движении и установил законы падения тел в пустоте. Начатая Галилеем работа по созданию динамики была завершена великим английским ученым Ньютоном (1643-1727), который сформулировал основные законы классической механики и на основе этих законов дал систематическое изложение динамики. На основе законов Галилея-Ньютона в дальнейшем доказывались теоремы и устанавливались принципы механики, составляющие содержание классической механики (применение законов классической механики ограничено, т.к. эти законы не согласуются с опытом при изучении тел, скорость которых одного порядка со скоростью света). Академик М.В.Остроградский (1801-1862) обобщил принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа) и применил его к решению многих задач механики. В XIX и XX столетиях большое значение для развития динамики внесли труды известных ученых, таких как А.М.Ляпунов, Н.Е.Жуковский, С.А.Чаплыгин, К.Э.Циолковский, А.Н.Крылов и др.В динамике, в отличие от кинематики, при изучении движения тел принимают во внимание и действующие силы, и инертность самих материальных тел. Инертность представляет собой свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил. Если, например, при действии одинаковых сил изменение скорости первого тела происходит медленнее, чем второго, то говорят, что первое тело является более инертным и наоборот. Большая или меньшая степень инертности данного тела зависит от количества заключенного в нем вещества (материи). Величина, зависящая от количества вещества данного тела и определяющая меру его инертности, называется массой тела.

В механике не рассматривается происхождение сил, а изучается только их действие. В дальнейшем рассматривается движение таких тел, размерами которых можно пренебречь и положение которых может быть определено как положение геометрической точки. такие тела или частицы материи, называют материальными точками. в теоретической механике все тела рассматриваются как совокупности взаимодействующих материальных точек. механической системой материальных точек или тел называется такая их совокупность, в которой положение или движение каждой точки (или тела) зависит от положения и движения всех остальных. одновременно с изменением положения каждая частица может вращаться и деформироваться, но в дальнейшем будет изучаться только изменение ее положения, не интересуясь вращением и деформацией. подобной материальной точкой является центр тяжести твердого тела, т.е. центр тяжести твердого тела движется как материальная точка, на которую действуют все силы, приложенные к данному телу.

Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы. Внутренними называются силы, действующие на точки системы со стороны других точек или тел этой же системы. На движущееся тело наряду с постоянными силами (например, силы тяжести) могут действовать переменные силы, модули и направления которых при движении тела изменяются.

Всякое движение происходит только во времени. Моменты времени, к которым относятся координаты и расстояния, а также промежутки времени, становятся определенными, лишь, когда выбрана определенная система отсчета. В основе динамики лежат законы, впервые сформулированные Ньютоном и названные им аксиомами, или законами движения [5].

**Первый закон Ньютона**: изолированная от внешних воздействий материальная точка (тело) сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Под телом подразумевается материальная точка, а сила определяется как причина, изменяющая равномерное и прямолинейное движение материальной точки.

**Второй закон** устанавливает, как изменяется скорость точки при действии на нее какой-нибудь силы. Он гласит: произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.

Математически этот закон можно представить в виде:

$$\frac{d}{dt}(mv) = F,$$

где v – скорость движущейся точки, m – ее масса, mv – количество движения. Считая массу материальной точки постоянной величиной, второму закону Ньютона можно придать и другую математическую формулировку:

$$m\frac{dv}{dt} = F \text{, или}$$

$$m\bar{a} = \bar{F} \text{,} \quad (3.1)$$

где $\bar{a}$ - ускорение, которое получает точка. Масса является характеристикой инертного свойства материальной точки, т.е. способности ее под действием заданной силы получать определенное ускорение. Уравнение (3.1) является основным законом движения материальной точки.

**Третий закон** устанавливает характер механического взаимодействия между материальными телами. Для двух материальных точек он гласит: две материальные точки действуют друг от друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

В динамике изучаются механические движения материальных объектов под действием сил. Простейшим материальным объектом является материальная точка.

**Материальная точка** это модель материального тела любой формы, размерами которого можно пренебречь и принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Более сложные материальные объекты – **механические системы** и **твердые тела**, состоят из набора материальных точек.

Движение материальных объектов всегда происходит в пространстве относительно определенной системы отсчета и во времени. Пространство считается трехмерным эвклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нем материальных объектов.

Время в классической механике не связано с пространством и движением материальных объектов. Во всех системах отсчета движущихся друг относительно друга оно протекает одинаково.

Законы Ньютона можно представить в виде следующих аксиом классической механики [5].

**Аксиомы классической механики**

**Первая аксиома или закон инерции**. Материальная точка, на которую не действуют силы или действует равновесная система сил, обладает способностью сохранять свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчета.

Материальная точка, на которую действует равновесная система сил, называется **изолированной материальной точкой.**

Равномерное и прямолинейное движение точки называется **движением по инерции**.

**Вторая аксиома или основной закон динамики.** Ускорение материальной точки относительно инерционной системы отсчета пропорционально приложенной к точке силе и направлено по этой силе, т.е. $m \cdot \bar{a} = \overline{F}$.

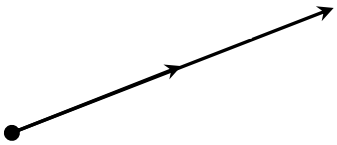


Рисунок 3.1

Положительный коэффициент пропорциональности ***m***, характеризует инертные свойства материальной точки и называется массой точки.

Масса не зависит от характеристик движения точки и от природы сил. Масса считается постоянной величиной и зависит только от самой материальной точки. В отличие от классической механики доказано, что масса тела увеличивается с возрастанием скорости его движения, т.е. масса и энергия взаимно связаны.

Сила, приложенная к материальной точке, всегда имеет материальный источник в виде других материальных тел, которые действуют на точку путем контакта при непосредственном соприкосновении с ней или на расстоянии через посредство силовых полей.

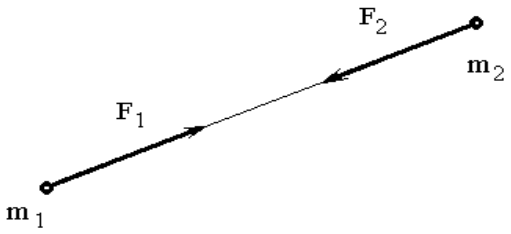



Рисунок 3.2

**Третья аксиома или закон о равенстве сил действия и противодействия.** Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине и противоположны по направлению. $\overline{F_1} = -\overline{F_2}$

**Четвертая аксиома или закон независимого действия сил.** При одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки относительно инерционной системы отсчета от действия каждой отдельной силы не зависит от наличия других, приложенных к точке, сил и

полное ускорение равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.

$$m \cdot \bar{a}_i = \bar{F}_i \qquad \bar{a} = \sum_i \bar{a}_i$$

Аксиомы классической механики хорошо согласуются с результатами опытов.

**Системы единиц**

| | СГС | *Cu* | Техническая |
|---|---|---|---|
| [L]-длины | см | м | м |
| [M]-массы | г | кг | Т.е.м. |
| [T]-время | сек | сек | сек |
| [F]-силы | дина | Н | кГ |
| [v]-скорости | см/сек | м/сек | м/сек |
| [a]-ускорения | см/сек$^2$ | м/сек$^2$ | м/сек$^2$ |

1 кГ = 9.8 Н, 36 км/час = 10 м/сек, 1 Т.е.м. = 9.8 кг

## Дифференциальные уравнения движения точки.

Дифференциальные уравнения криволинейного движения точки в проекциях на оси прямоугольной системы координат:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z \tag{3.2}$$

Используя вектор ускорения, основное уравнение динамики $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$ можно записать так $m \cdot \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}$ или так $m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$

Проецируя уравнение $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$ на оси координат, получаем

$$m \cdot a_x = F_x \qquad m \cdot a_y = F_y \qquad m \cdot a_z = F_z,$$

так как $a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}$, то

$$m \cdot \ddot{x} = F_x \qquad m \cdot \ddot{y} = F_y \qquad m \cdot \ddot{z} = F_z$$

**Частные случаи:**

А) Точка движется в плоскости. Выбираем в плоскости координаты *xOy* и получаем $m \cdot \ddot{x} = F_x \qquad m \cdot \ddot{y} = F_y \qquad F_z \equiv 0$

Б) Точка движется по прямой. Выбираем на прямой координату *Ox* и получаем $m \cdot \ddot{x} = F_x \qquad F_y \equiv 0 \qquad F_z \equiv 0$

Основное уравнение динамики $m \cdot \bar{a} = \overline{F}$ можно спроецировать на естественные подвижные оси.

$$m \cdot a_\tau = F_\tau \qquad m \cdot a_n = F_n \qquad m \cdot a_b = F_b$$

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad a_b \equiv 0$$

Эта форма уравнений удобна для исследования некоторых случаев полета снарядов и ракет.

## Основные задачи динамики

**Первая или прямая задача [5].**

Известна масса точки и закон ее движения, необходимо найти действующую на точку силу.

***m*** – масса, $x = f_1(t) \qquad y = f_2(t) \qquad z = f_3(t)$

Вычисляем вторые производные по времени от координат точки, умножаем их на массу и получаем проекции силы на оси координат

$$F_x = m \cdot \ddot{x} = m \cdot f_1''(t) \qquad F_y = m \cdot \ddot{y} = m \cdot f_2''(t) \qquad F_z = m \cdot \ddot{z} = m \cdot f_3''(t)$$

Зная проекции силы на оси координат, определяем модуль силы и ее направляющие косинусы:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad \cos\alpha = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$

**Пример 1:** Движение точки в плоскости *xOy* определяется уравнениями [4]:

$x(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t)$; $y(t) = b \cdot \sin(\omega \cdot t)$; $a, b, \omega - const$; $t$ – время.

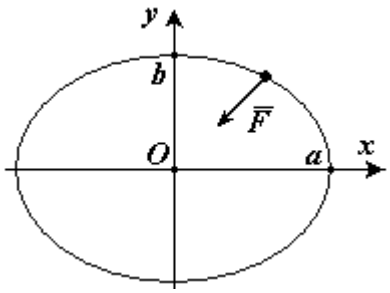



Рисунок 3.3

Решение:

$F_x = m \cdot x = -m \cdot a \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$;

$F_y = m \cdot y = -m \cdot \omega^2 \cdot b \cdot \sin(\omega \cdot t)$;

$F_x = -m \cdot \omega^2 \cdot x$; $F_y = -m \cdot \omega^2 \cdot y$.

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ - Уравнение траектории в координатной форме (эллипс).

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$

$\overline{F} = -m \cdot \omega^2 \cdot \bar{r}$; $\cos(\overline{F}, x) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}$, $\cos(\overline{F}, y) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}$

**Пример 2:** Точка, имеющая массу $m$, движется из состояния покоя по окружности радиуса $R$ с постоянным касательным ускорением $a_\tau$. Определить действующую на точку силу в момент, когда она пройдет по траектории расстояние $s_1 = R\sqrt{2}$ [4, 6].

Решение: Применяя дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси, имеем:

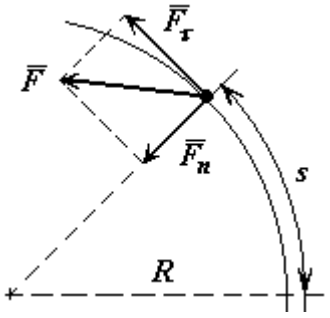



Рисунок 3.4

$F_\tau = m \cdot a_\tau$; $F_n = m \cdot \frac{v^2}{R}$; $F_b = 0$;

Так как $a_\tau = const$, то $v_\tau = a_\tau \cdot t$, $s = \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}$

$F_\tau = m \cdot a_\tau$; $F_n = m \cdot \frac{(a_\tau \cdot t)^2}{R}$; $F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = m \cdot a_\tau \cdot \sqrt{1 + \frac{a_\tau^2 \cdot t^4}{R^2}}$

$s_1 = \frac{a_\tau \cdot t_1^2}{2} = R\sqrt{2}$; следовательно $t_1^2 = \frac{2R\sqrt{2}}{a_\tau}$;

$\frac{a_\tau^2 \cdot t_1^4}{R^2} = a_\tau^2 \cdot \frac{8 \cdot R^2}{a_\tau^2 \cdot R^2} = 8$; следовательно $F(t_1) = m \cdot a_\tau \cdot \sqrt{1+8} = 3 \cdot m \cdot a_\tau$

$$F(t_1) = 3 \cdot m \cdot a_\tau$$

**Вторая или обратная задача:**

Известна масса точки и действующая на точку сила, необходимо определить закон движение этой точки.

Рассмотрим решение этой задачи в декартовой системе координат. Сила зависит от времени, координат точки, ее скорости и других причин.

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \qquad m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),$$

$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение одного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные. Для случая системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка имеется шесть произвольных постоянных: $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$

Каждая из координат $x, y, z$ движущейся точки после интегрирования системы уравнений зависит от времени и всех шести произвольных постоянных, т.е.

$$x = f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$y = f_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$z = f_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

В каждой конкретной задаче эти произвольные постоянные определяются из начальных условий, т.е.к этим уравнениям необходимо добавить начальные условия (в начальный момент $t_0$ начальное положение и начальная скорость):

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \quad z(t_0) = z_0$$

$$\dot{x}(t_0) = v_{x0}, \quad \dot{y}(t_0) = v_{y0} \quad \dot{z}(t_0) = v_{z0}$$

Используя эти начальные условия можно получить шесть алгебраических уравнений для определения шести произвольных постоянных $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

## Основные виды прямолинейного движения точки

Одним их простейших видов движения материальной точки является прямолинейное движение. Рассмотрим материальную точку M (x,y,z) с массой m, на которую действует сила F, определенная в неподвижной системе осей Oxyz. Предположим, что в каждый момент времени проекции силы на неподвижные оси координат $F_y(t,y,\dot{y})=0$, $F_z(t,z,\dot{z})=0$, т.е. точка находится на оси x и ее скорость направлена вдоль этой оси.

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки вдоль оси Ox имеет вид:

$m \cdot \ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x})$, Начальные условия $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_{x0}$.

**Наиболее важные случаи.**

1. Сила постоянна. $F_x = const$ $m \cdot \ddot{x} = const$ $\ddot{x} = const$

Имеем равнопеременное движение (движение с постоянным ускорением)

2. Сила зависит от времени. $F_x = F_x(t)$ $m \cdot \ddot{x} = F_x(t)$

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \cdot \int_0^t F_x(t)dt \qquad \ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot \int_0^t (\int_0^t F_x(t)dt)dt$$

3. Сила зависит от координаты или скорости.

Силу, зависящую от координаты x $F_x(x)$, создают упругие тела при их деформации (например, сжатая или растянутая пружина). $F_x = F_x(t)$

Сила, зависящая от скорости движения $F_x(\dot{x})$, это сила сопротивления (воздуха, воды и т.д.). В этих случаях решение задачи упрощается.

**Контрольные вопросы:**

1. Какие уравнения динамики называются естественными уравнениями движения материальной точки?

2.Какие основные задачи динамики точки?

3.Из каких условий определяются постоянные при интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки?

4. Какую систему отсчета называют инерциальной?

5. К какому телу приложена сила инерции материальной точки и каковы ее модуль и направление?

6. При каком движении материальной точки равна нулю ее касательная сила инерции и при каком нормальная?

## Лекция 4.

### Общие теоремы динамики точки

Для решения многих задач динамики вместо метода интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более удобным пользоваться общими теоремами, являющимися следствиями основного закона динамики. Значение общих теорем состоит в том, что они устанавливают характерные зависимости между основными динамическими характеристиками движения материальных тел и открывают новые возможности исследования механических движений, широко применяемые в инженерной практике. Основными динамическими характеристиками движения точки являются количество движения и кинетическая энергия.

Количеством движения точки называется векторная величина mv, равная произведению массы точки на вектор ее скорости. Направлен вектор mv также, как скорость точки, т.е. по касательной к ее траектории.

Кинетической энергией (или живой силой) точки называется скалярная величина $mv^2/2$, равная половине произведения массы точки на квадрат е скорости.

Необходимость введения двух динамических характеристик объясняется тем, что одной характеристикой нельзя охватить все особенности движения точки [5].

**Импульс силы**

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие импульс силы. Элементарным импульсом силы называется векторная величина dS , равная произведению вектора силы F на элементарный промежуток времени dt:

$dS=Fdt$

Направлен элементарный импульс по линии действия силы. Импульс S любой силы F за конечный промежуток времени $t_1$ вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов:

$$S = \int_0^{t_1} F dt$$

Импульс силы за любой промежуток времени $t_1$ равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от нуля до $t_1$.

### Теорема об изменении количества движения точки

Изучим движение материальной точки M относительно системы Oxyz под действием силы F(x,y,z). Пусть v – скорость точки, ведем в рассмотрение вектор F=mv, называемый количеством движения точки. Проекция этого вектора на оси x,y,z имеют вид:

$F_x = mx^{/}$ , $F_y = my^{/}$, $F_z = mz^{/}$.

Запишем уравнения движения материальной точки в виде:

$$\frac{d}{dt}(mx^{/}) = X, \qquad \frac{d}{dt}(my^{/}) = Y, \qquad \frac{d}{dt}(mz^{/}) = Z,$$

или эти скалярные уравнения эквивалентны одному векторному

$$\frac{d}{dt}(mv) = F. \tag{4.1}$$

Так как масса точки постоянна, а ее ускорение выражается через производную от скорости, то уравнение, выражающее основной закон динамики, можно представить в виде:

$$\frac{d(mv)}{dt} = \sum F_r$$

Производная по времени от количества движения точки равна геометрической сумме действующих на точку сил.

$$mv_x - mv_{o_x} = S_x$$

Теорему об изменении количества движения точки в конечном виде: изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.

$$mv_x - mv_{o_x} = S_x, \quad mv_y - mv_{o_y} = S_y, \quad mv_z - mv_z = S_z,$$

единицей измерения количества движения в СИ является $1кг \cdot м^2 / с = 1Н \cdot м \cdot с$ .

**Теорема об изменении кинетической энергии точки.**

Когда механическое движение превращается в другую форму движения материи, в качестве меры механического движения выступает кинетическая энергия материальной точки или механической системы. Кинетическая энергия материальной точки массой m , движущейся со скоростью v, равна половине произведения массы этой точки на квадрат скорости ее движения. Изменение величины $\frac{mv^2}{2}$ связано с работой приложенных к телу сил, поэтому работа является количественной мерой превращения механического движения в какую-либо другую форму движения, т.е.

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}d\bar{r} \tag{4.2}$$

$$T_1 - T_o = A \tag{4.3}$$

Изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении, т.е. $A = \sum A_i^E$ .

**Теорема об изменении момента количества движения точки.**

Момент вектора mv относительно данного центра O или оси z обозначается $m_o(mv)$ и называется соответственно моментом количества движения или кинетическим моментом точки относительно этого центра (оси).

$$\frac{dK_{o_x}}{dt} = M_x(\overline{F}), \quad \frac{dK_{oy}}{dt} = M_e(\overline{F}), \quad \frac{dK_{oz}}{dt} = M_z(\overline{F}) \tag{4.4}$$

$$\frac{d\overline{K}_o}{dt} = \overline{M}_o(\overline{F}_o) \tag{4.5}$$

Производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь неподвижного центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.

**Работа силы. Мощность.**

Одна из основных характеристик силы, оценивающих действие силы на тело при некотором его перемещении.

Элементарная работа силы скалярная величина равная произведению элементарного перемещения на проекцию силы на это перемещение (Рисунок 4.1).

$dA = F_\tau \cdot ds$ . $dA = F \cdot ds \cdot cos(\varphi)$ ,

$\varphi$ - *угол между* $\overline{F}$ *и* $\overline{ds}$

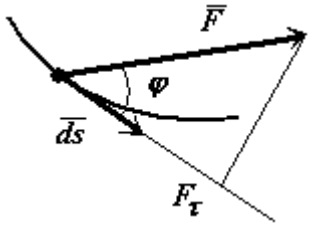



Рисунок 4.1

Единицей измерения работы в СИ является $- 1Н \cdot м = 1Дж$

При $F_\tau > 0,$ $dA > 0$ при $F_\tau < 0,$ $dA < 0$

Частные случаи: $\varphi = 0^0$, $dA = F \cdot ds$

$\varphi = 90^0$, $dA = 0$

$$\varphi = 180^0, \quad dA = -F \cdot ds$$

Элементарное перемещение равно дифференциалу от радиуса вектора точки приложения силы.

Элементарная работа силы равна скалярному произведению силы на элементарное перемещение или на дифференциал от радиуса вектора точки приложения силы.

$$dA = \overline{F} \cdot \overline{ds} = \overline{F} \cdot \overline{dr}$$

Элементарная работа силы равна скалярному произведению элементарного импульса силы на скорость точки.

$$dA = \overline{F} \cdot \overline{dr} = \overline{F} \cdot \bar{v} \cdot dt = \overline{dS} \cdot \bar{v}$$

Если сила $\overline{F}$ задана своими проекциями ( $F_x \quad F_y \quad F_z$ ) на оси координат и элементарное перемещение задано своими проекциями ( $\mathrm{d}x \quad \mathrm{d}y \quad \mathrm{d}z$ ) на оси координат, то элементарная работа силы равна:

$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$ (аналитическое выражение элементарной работы).

Работа силы на любом конечном перемещении $M_0M$ равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.

$$A = \int_{M_0}^{M} dA = \int_{M_0}^{M} \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_{M_0}^{M} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz)$$

Мощностью силы называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. В общем случае мощность равна первой производной по времени от работы.

$$W = \frac{dA}{dt}, \qquad W = \frac{\overline{F} \cdot \bar{v} \cdot dt}{dt} = \overline{F} \cdot \bar{v}$$

Мощность равна скалярному произведению силы на скорость.

Единицей измерения мощности в СИ является $- \; 1Дж / с = 1Вт$

В технике за единицу силы принимается $1л.с. = 736Вт = 75 \frac{кГ \cdot м}{с}$ .

**Пример 1. Работа силы тяжести.**

Пусть точка М, на которую действует сила тяжести Р, перемещается из положения $\mathrm{M}_0(x_0, y_0, z_0)$ в положение $\mathrm{M}_1(x_1, y_1, z_1)$ (Рисунок 4.2) [6]. Выберем оси координат так, чтобы ось Oz была направлена вертикально вверх.

Тогда, $P_x = 0$, $P_y = 0$, $P_z = P$ и

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{z_0}^{z_1} (-P)dz = P \cdot (z_0 - z_1)$$

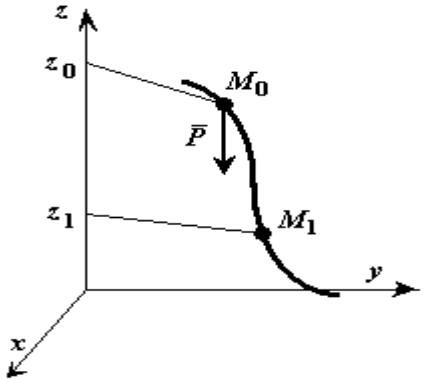



Рисунок 4.2

Работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения. Работа положительна, если начальная точка выше конечной, и отрицательна, если начальная точка ниже конечной.

**Пример 2. Работа силы упругости.**

Рассмотрим материальную точку закрепленную на упругом элементе жесткости с, которая совершает колебания вдоль оси х (Рисунок 4.3) [6]. Сила упругости (или восстанавливающая сила) $F_x = -c \cdot x$. Пусть точка М, на которую действует только сила упругости, перемещается из положения $M_0(x_0)$ в положение $M_1(x_1)$. ( $F_y = 0$, $F_z = 0$).

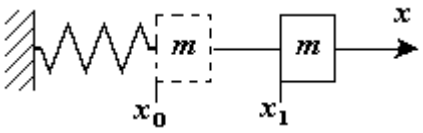



Рисунок 4.3

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{x_0}^{x_1} (-c \cdot x)dx = \frac{c}{2} \cdot (x_0^2 - x_1^2)$$

Работа силы упругости равна половине произведения жесткости упругого элемента на разность квадратов начального и конечного удлинения (или сжатия) упругого элемента.

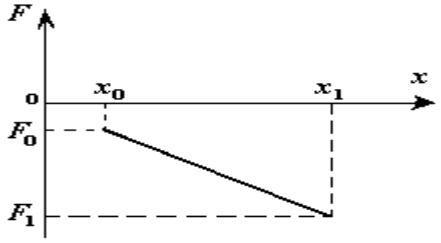



Рисунок 4.4

Работа силы упругости равна площади фигуры (трапеции) расположенной под кривой (Рисунок 4.4)

$$F_x(x).\ \ A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2}\cdot(x_0^2 - x_1^2) = -\frac{(F_1 + F_0)}{2}\cdot(x_1 - x_0)$$

**Пример 3. Работа и мощность пары сил.**

Пусть пара сил приложена к вращающемуся вокруг неподвижной оси телу (Рисунок 4.5) [6]. Элементарная работа пары сил равна $dA = 2\cdot F\cdot ds = 2\cdot F\cdot R\cdot d\varphi$. Полная работа пары сил равна $A = 2\cdot F\cdot R\cdot\varphi = M\cdot\varphi$

$\varphi$ - угол поворота тела, $M$ - момент пары сил.

Мощность пары сил равна

$$W = \frac{dA}{dt} = M\cdot\omega$$

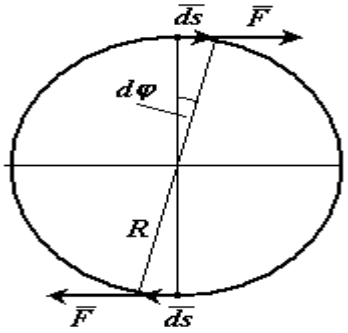



Рисунок 4.5

По аналогии с материальной точкой можно рассматривать систему, состоящую из отдельных материальных точек.

**Общие теоремы динамики системы и твердого тела**

**Количество движения системы.**

Количеством движения системы материальных точек $\overline{Q}$ называется векторная сумма количеств движений отдельных точек системы.

$$\overline{Q} = \sum m_i \cdot \overline{v_i}$$

Единицей измерения количества движения в СИ является $1кг \cdot м/с = 1Н \cdot с$

Количество движения системы можно выразить через массу системы и скорость центра масс. $\overline{Q} = M \cdot \overline{v_C}$

**Теорема об изменении количества движения системы.**

Эта теорема существует в трех различных формах.

Теорема. Производная по времени от количества движения системы равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему.

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_i^{(e)}, \qquad (4.6)$$

Доказательство: Теорема об изменении количества движения для $i-ой$ точки имеет вид:

$$\frac{d(m_i \cdot \overline{v}_i)}{dt} = \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Сложим все $n$ уравнений и получим:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F_i^{(e)}},$$

что и требовалось доказать.

В проекциях на оси координат это утверждение выглядит так:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{ix}^{(e)}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{iy}^{(e)}, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{iz}^{(e)}. \qquad (4.7)$$

Теорема. (в дифференциальной форме)**.** Дифференциал от количества движения системы равен сумме элементарных импульсов всех внешних сил, действующих на систему.

Умножим левую и правую части уравнения (4.7) на $dt$ и получим

$$d\overline{Q} = \sum \overline{F_i^{(e)}} \cdot dt, \qquad (4.8)$$

В проекциях на оси координат это утверждение выглядит так:

$$dQ_x = \sum F_{ix}^{(e)} \cdot dt\,, \qquad dQ_y = \sum F_{iy}^{(e)} \cdot dt\,, \qquad dQ_z = \sum F_{iz}^{(e)} \cdot dt\,.$$

Теорема (в интегральной форме). Изменение количества движения системы за какой-либо промежуток времени равно векторной сумме элементарных импульсов всех внешних сил, действующих на систему за этот же промежуток времени.

Интегрируя обе части уравнения (**) по времени в пределах от нуля до $t$ получаем:

$$\overline{Q} - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_i^{(e)}$$

В проекциях на оси координат это утверждение выглядит так:

$$Q_x - Q_{0x} = \sum S_{ix}^{(e)}\,, \qquad Q_y - Q_{0y} = \sum S_{iy}^{(e)}\,, \qquad Q_z - Q_{0z} = \sum S_{iz}^{(e)}\,.$$

**Законы сохранения количества движения.**

1. Если главный вектор всех внешних сил системы равен нулю ( $\sum \overline{F}_i^{(e)} = 0$), то количество движения системы постоянно по величине и направлению. $\overline{Q} = const$

2. Если проекция главного вектора всех внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю ( $\sum \overline{F}_{ix}^{(e)} = 0$), то проекция количества движения системы на эту ось является постоянной величиной. $Q_x = const$

**Теорема о движении центра масс.**

Теорема. Центр масс системы движется так же, как и материальная точка, масса которой равна массе всей системы, если на точку действуют все внешние силы, приложенные к рассматриваемой механической системе.

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_i^{(e)} \qquad \overline{Q} = M \cdot \overline{v_C}\,, \text{ следовательно} \qquad M \cdot \overline{a_C} = \sum \overline{F}_i^{(e)}$$

**Момент количества движения системы.**

Моментом количества движения системы материальных точек $\overline{K_0}$ относительно некоторого центра $O$ называется векторная сумма моментов

количества движения отдельных точек этой системы относительно того же центра $O$ $\overline{K_0} = \sum \overline{k_0} = \sum \overline{r_i} \times m_i \cdot \overline{v_i}$

Моментом количества движения системы материальных точек $\overline{K_z}$ относительно какой-либо оси $Oz$, проходящей через центр $O$, называется проекция вектора количества движения $\overline{K_0}$ на эту ось $K_z = K_0 \cdot \cos(\gamma)$.

**Момент количества движения твердого тела относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела.**

Вычислим момент количества движения твердого тела относительно оси вращения (Рисунок 4.6) [5].

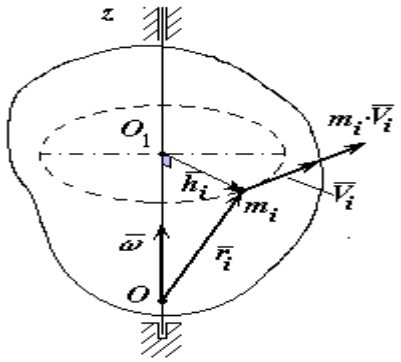



Рисунок 4.6

$$K_z = \sum M_z(m_i \cdot \overline{v_i})$$

$$v_i = h_i \cdot \omega$$

$$M_z(m_i \cdot \overline{v_i}) = h_i \cdot m_i \cdot v_i = m_i \cdot h_i^2 \cdot \omega$$

$$K_z = \omega \cdot \sum m_i \cdot h_i^2 = \omega \cdot J_z$$

Момент количества движения твердого тела относительно оси вращения при вращательном движении равен произведению угловой скорости тела на его момент инерции относительно оси вращения. $K_z = \omega \cdot J_z$

**Теорема об изменении момента количества движения системы.**

Теорема. Производная по времени от момента количества движения системы, взятого относительно какого-нибудь центра, равна векторной

сумме моментов внешних сил, действующих на систему относительно того же центра.

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{L}_0^{(e)} \qquad (4.9)$$

Доказательство: Теорема об изменении момента количества движения для $i-ой$ точки имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(\overline{M}_0(m_i \cdot \overline{v}_i)) = \overline{M}_0(\overline{F}_i^{(e)}) + \overline{M}_0(\overline{F}_i^{(i)}), \quad (i = 1,\ldots,n)$$

Сложим все $n$ уравнений и получим:

$$\frac{d}{dt}\sum \overline{M}_0(m_i \cdot \overline{v}_i) = \sum \overline{M}_0(\overline{F}_i^{(e)}) \text{ или } \frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{L}_0^{(e)},$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Производная по времени от момента количества движения системы, взятого относительно какой-либо оси, равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему относительно той же оси.

Для доказательства достаточно спроектировать векторное уравнение (4.9) на эту ось. Для оси $Oz$ это будет выглядеть так:.

$$\frac{d\overline{K}_z}{dt} = \overline{L}_z^{(e)} \qquad (4.10)$$

Теорема об изменении момента количества движения системы относительно центра масс (без доказательства).

Для осей движущихся поступательно вместе с центром масс системы, теорема об изменении момента количества движения системы относительно центра масс сохраняет тот же вид, что и относительно неподвижного центра.

**Законы сохранения момента количества движения.**

1. Если главный момент внешних сил системы относительно точки $O$ равен нулю ($\overline{L}_0^{(e)} = 0$), то момент количества движения системы относительно точки $O$ постоянен по величине и направлению. $\overline{K_0} = const$

2. Если сумма моментов всех внешних сил системы относительно какой-либо оси равна нулю ($L_x^{(e)} = 0$), то момент количества движения системы относительно этой оси является постоянной величиной. $K_x = const$

**Кинетическая энергия системы.**

Кинетической энергией системы называют сумму кинетических энергий всех точек системы.

$$T = \sum \frac{m_i \cdot v_i^2}{2}$$

**Теорема Кенига.** Кинетическая энергия системы в абсолютном движении складывается из кинетической энергии центра масс, если в нем сосредоточить всю массу системы, и кинетической энергии системы при ее движении относительно центра масс.

$$T = M \cdot \frac{v_C^2}{2} + T_C^{(r)}$$

Доказательство: Рассмотрим движение механической системы относительно двух систем координат (Рисунок 4.7). Одна система неподвижна, другая, с началом в центре масс системы, перемещается относительно первой поступательно.

$\overline{\rho_j}$, $\overline{v_j}$ - радиус-вектор и абсолютная скорость $j-ой$ точки соответственно;

$\overline{\rho_C}$, $\overline{v_C}$ - радиус-вектор и абсолютная скорость центра масс системы соответственно;

$\overline{r_j}$, $\overline{v_{j(r)}}$ - радиус-вектор $j-ой$ точки относительно центра масс и относительная скорость этой точки соответственно.

$\overline{\rho_j} = \overline{\rho_C} + \overline{r_j}$, $\overline{v_j} = \overline{v_C} + \overline{v_{j(r)}}$ (так как переносное движение поступательное)

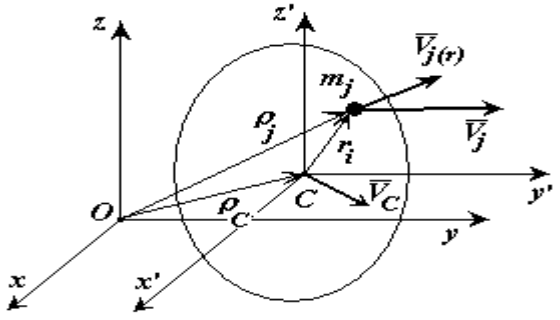



Рисунок 4.7

$$T = \sum \frac{m_j \cdot v_j^2}{2} = \sum \frac{m_j \cdot v_C^2}{2} + \sum \frac{2 \cdot m_j \cdot v_C \cdot v_j}{2} + \sum \frac{m_j \cdot v_{j(r)}^2}{2} =$$

$$M \cdot \frac{v_C^2}{2} + 2 \cdot v_C \cdot \sum \frac{m_j \cdot v_j}{2} + \sum \frac{m_j \cdot v_{j(r)}^2}{2}$$

Так как $\sum m_j \cdot v_j = 0$, то

$$T = M \cdot \frac{v_C^2}{2} + \sum \frac{m_j \cdot v_{j(r)}^2}{2} \quad \text{или} \quad T = M \cdot \frac{v_C^2}{2} + T_C^{(r)}$$

**Кинетическая энергия твердого тела.**

1. Поступательное движение тела.

   Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении вычисляется так же, как и для одной точки, у которой масса равна массе этого тела.

   $T = M \cdot \frac{v^2}{2}$, $v$ - скорость любой точки твердого тела

2. Вращение тела вокруг неподвижной оси.

   Кинетическая энергия твердого тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.

   $T = J_z \cdot \frac{\omega^2}{2}$, $\omega$ - угловая скорость вращения твердого тела.

3.Плоское движение тела.

   Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении складывается из кинетической энергии тела вместе с центром масс и кинетической энергии тела от вращения вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения.

$$T = M \cdot \frac{v_C^2}{2} + J_z \cdot \frac{\omega^2}{2},$$

$v_C$ - скорость центра масс твердого тела, $\omega$ - угловая скорость вращения твердого тела.

**Теорема об изменении кинетической энергии системы.**

Эта теорема существует в двух формах.

**Теорема.** Дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему.

$$dT = dA = \sum \overline{F}_i^{(e)} \cdot d\overline{r}_i + \sum \overline{F}_i^{(i)} \cdot d\overline{r}_i$$

Доказательство: Теорема об изменении кинетической энергии для $i-ой$ точки имеет вид:

$$d\left(\frac{m \cdot v_i^2}{2}\right) = dA_i^{(e)} + dA_i^{(i)}, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Сложим все $n$ уравнений и получим:

$$\sum d\left(\frac{m \cdot v_i^2}{2}\right) = \sum dA_i^{(e)} + \sum dA_i^{(i)}$$

или $$d\left(\sum \frac{m \cdot v_i^2}{2}\right) = dT = \sum dA_i^{(e)} + \sum dA_i^{(i)}$$

или $$dT = \sum \overline{F}_i^{(e)} \cdot d\overline{r}_i + \sum \overline{F}_i^{(i)} \cdot d\overline{r}_i$$

что и требовалось доказать.

**Теорема.** Изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из одного положения в другое равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему, на соответствующих перемещениях точек системы при том же перемещении системы.

$$T - T_0 = \sum A_i^{(e)} + \sum A_i^{(i)}$$

**Контрольные вопросы:**

1. Какие две меры механического движения и соответствующие им измерители действия сил?

2. Как определяется работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении?

3. Как записывается выражение элементарной работы силы через проекции силы на оси координат?

4. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки?

5. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы?

6. Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения точки.

7. Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения механической системы.

8. Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела в различных случаях его движения?

9. Сформулируйте закон сохранения количества движения.

10. Сформулируйте теорему о движении центра масс.

11. Сформулируйте понятие о моменте количества движения системы.

12. Сформулируйте понятие о моменте количества движения твердого тела относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела.

13.Сформулируйте теорему Кенига о кинетической энергии механической системы в общем случае ее движения?

## Лекция 5

### Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии

Если в заданной системе все внутренние усилия определяются при помощи уравнений равновесия (уравнений статики), то такая система называется статически определимой.

В отличие от них статически неопределимой системой называется такая система, в которой внутренние усилия нельзя определить при помощи одних лишь уравнений статики. Для определения внутренних усилий необходимо помимо уравнений статики еще дополнительные уравнения. Число дополнительных уравнений характеризует степень статической неопределимости. Степень статической неопределимости характеризует количество лишних связей для равновесия системы и равна разности между числом неизвестных и числом независимых уравнений статики. Реальные системы имеют высокую степень статической неопределимости, т.е. в них количество лишних связей доходит до бесконечности, тем самым они обладают большой прочностью и жесткостью. Для практических расчетов расчетную схему берут с конечным числом степени свободы. Для составления дополнительных уравнений необходимо учитывать характер деформации системы (уравнения перемещений). Эти уравнения имеют кинематический характер и называются уравнениями совместности деформаций. Рассматривая деформации системы, всегда можно найти столько дополнительных уравнений, сколько нужно, чтобы полное число уравнений вместе с условиями статики равнялось числу неизвестных. Всякая конструкция деформируется так, что не происходит разрывов стержней, разъединения их друг от друга, или не предусмотренных схемой сооружения

перемещений одной части конструкции относительно другой. В этом заключается совместность деформаций элементов системы.

Усилия в элементах статически определимой системы возникают только от действия внешней нагрузки. В элементах статически неопределимой системы усилия могут возникать и при отсутствии внешней нагрузки, причиной могут быть – изменение температуры, смещение опорных закреплений, неточности изготовления отдельных элементов конструкций.

Статически неопределимые системы обладают следующими особенностями [7-10]:

1. недостающие для определения усилий уравнения могут быть получены только при помощи изучения совместности деформаций данной системы;
2. распределение усилий между элементами статически неопределимой системы зависит от соотношения между площадями, модулями упругости и длинами этих элементов;
3. чем больше жесткость данного элемента, т.е. меньше его длина и больше площадь, и модуль упругости, тем сравнительно большую долю усилия он воспринимает на себя.

Дополнительные уравнения составляются на основании одного общего принципа – условие совместности деформаций. Общий метод расчета статически неопределимых систем состоит из следующего:

1. Определение степени статической неопределимости. Указать неизвестные усилия.
2. Записать уравнения статики для них.
3. Составить дополнительные уравнения (уравнения совместности деформаций).
4. Решать совместно эту систему уравнений. Определив неизвестные усилия, сделать необходимый расчет на прочность или жесткость.

Степень статической неопределимости обозначается «n». Для плоской стержневой системы величину n можно определить по следующей формуле:

$$n = 2Ш + C_0 - 3C \qquad (5.1)$$

где С - количество стержней, из которых состоит система;
Ш – количество простых шарниров, соединяющие стержни;
$C_0$ – количество опорных связей.

В заделке количество опорных связей равно 3, в шарнирно неподвижной опоре – 2, в шарнирно подвижной опоре – 1.

Для фермы, где соединение в узлах представляют собой идеальные шарниры, степень статической неопределимости можно определить по следующей формуле:

$$n = C + C_0 - 2У \qquad (5.2)$$

где С - количество стержней, из которых состоит ферма;
У – количество узлов (под узлом понимаем точку, где соединяются стержни);

$C_0$ – количество опорных связей.

На рисунке 5.1 представлен жесткий брус AF, поддерживаемый в равновесии стержнями и шарнирно неподвижной опорой в точке А. Определим степень статической неопределимости, используя формулу (5.1). Для равновесия бруса необходимо наличие шарнира в точке А и одного из стержней, поэтому на рисунке 5.1а) – один раз статически неопределимая система (n=1); на рисунке 5.1 b) – дважды статически неопределимая система (n=2); на рисунке 5.1 c) – три раза статически неопределимая система (n=3). Пунктирными линиями показаны положения жесткого бруса в результате деформаций стержней, т.е. под действием внешней нагрузки Р жесткий брус может только поворачиваться относительно шарнира А, при этом стержни растягиваются или сжимаются в зависимости от принятой схемы деформации. На рисунке 5.1 показано, что жесткий брус, как твердое тело, может только поворачиваться относительно шарнира А (выбрано по часовой стрелке). Для зарисовки возможной схемы перемещений необходимо учитывать только те перемещения, которые не противоречат наложенным связям. На рисунке 5.1а) – два стержня растягиваются; на рисунке 5.1 b) – три стержня сжимаются; на рисунке 5.1 c) – верхний стержень – растягивается, три нижних сжимаются. Если в результате решения усилия получатся со знаком плюс, то выбранные направления усилий верны, если со знаком минус, то необходимо поменять направления усилий на противоположные.

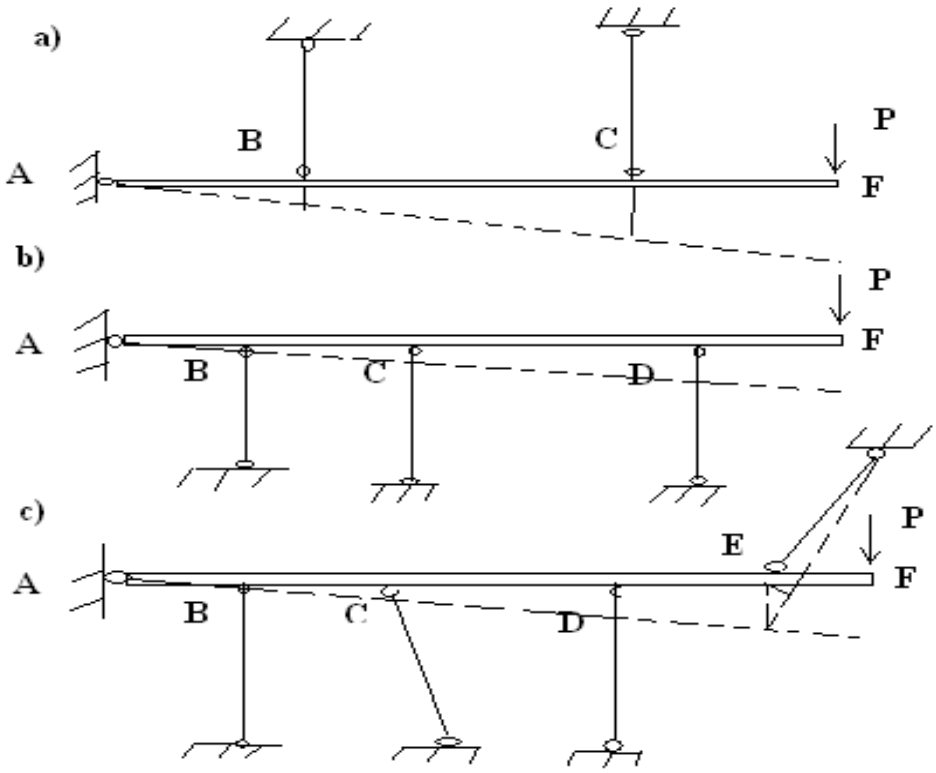



Рисунок 5.1

Рассмотрим в качестве примера стержень, защемленный обоими концами и нагруженный силой P (рисунок 5.2a). Эта система - один раз статически неопределима (n=1), т.к. для равновесия достаточна одна заделка, например B, заделка A – лишняя для равновесия стержня [16-22]. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Под действием силы P в заделках A,B возникают неизвестные реакции R1, R2. Неизвестные усилия вызывают деформации растяжение или сжатие, поэтому направлены вдоль оси стержня, выберем их направления, как указано на рисунке 5.2b.

Согласно выбранным направлениям неизвестных реакций и заданному направлению внешней силы P уравнения равновесия записываем в виде суммы проекций всех сил на вертикальное направление, т.е. в виде:

$$R1+R2-P=0$$

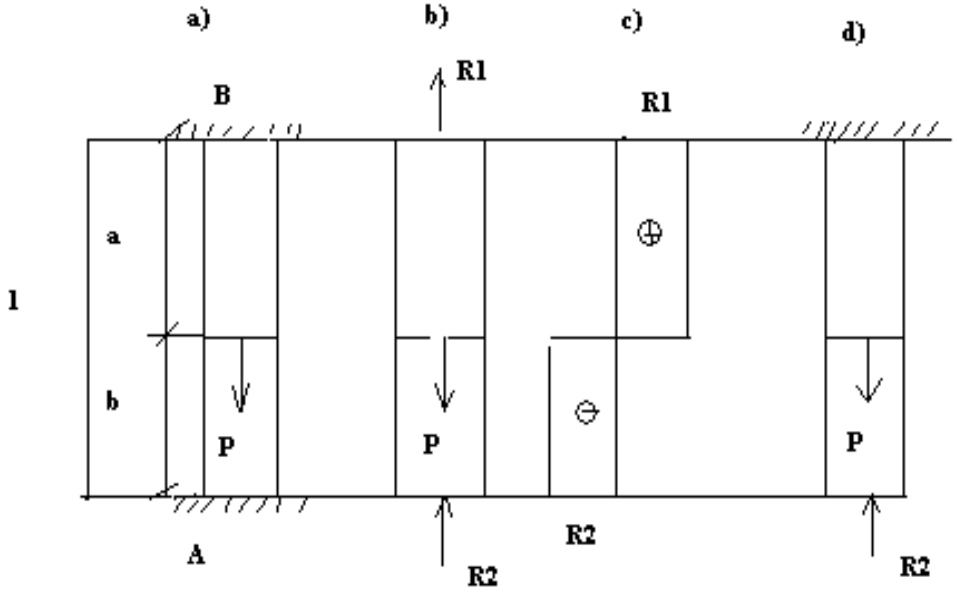



Рисунок 5.2

Это уравнение содержит два неизвестных, поэтому необходимо составить еще одно дополнительное уравнение нестатического характера. Это дополнительное уравнение имеет кинематический смысл, т.е. составляется на основании того, что перемещение в заделке равно нулю, например в заделке A. Отбросим нижнюю заделку и заменим ее влияние на стержень реакцией $R_2$ (рисунок 5.2b). Используем принцип независимости действия сил, т.е. рассмотрим действие каждой силы в отдельности, и полное перемещение представим в виде суммы деформаций от каждой силы в отдельности.

На рисунке 5.2c показана эпюра продольных сил, на нижнем участке при сжатии продольные силы – отрицательные, на верхнем – положительные. Рассмотрим действие каждой силы в отдельности. Под действием силы P

деформируется только верхний участок длиной a, в результате сечение, где приложена нагрузка, перемещается вниз на величину Pa/EA , где EA – жесткость при растяжении или сжатии. Нижний участок стержня длиной b при этом не деформируется, а перемещается вниз, как жесткое тело на такую же величину, на какую перемещается сечение, где приложена сила P. На эту же величину перемещается вниз и нижний конец стержня A.

По аналогии рассмотрим действие только силы $R_2$, а сила P отсутствует. Под действием силы $R_2$, (рисунок 5.2d) деформируется весь стержень, в результате нижний конец стержня перемещается вверх на величину $- R_2 l /EA$ , где l – длина стержня. Знак минус означает, что происходит деформация сжатия. Итак полное перемещение нижнего конца стержня складывается из двух слагаемых и приравнивается нулю, так как в сечении A заделка. Это уравнение имеет следующий вид:

$$Pa/EA- R_2 l /EA=0$$

Отсюда определяется неизвестная реакция $R_2$, т.е. получаем

$$R_2 = Pa/l$$

Подставляя это значение в уравнение статики, получаем значение реакции верхнего конца стержня:

$$R_1 =Pb/l$$

После определения реакций $R_1$, $R_2$ можно указать ординаты эпюры продольной силы. Дальнейший расчет ничем не отличается от расчета статически определимой системы, т.е. можно сделать проверочные или проектные расчеты.

Необходимо отметить, что при расчете статически неопределимых систем (так же, как и статически определимых систем) направление неизвестных реакций можно принять произвольно. Если решение получится со знаком плюс, то принятое направление неизвестного верное; если решение получится со знаком минус, то истинное направление неизвестного будет противоположно выбранному. В данном примере обе неизвестные реакции получились положительные, что означает: реакции $R_1$ , $R_2$ действительно направлены вверх.

Рассмотрим следующий пример [11-14].

Плоская статически неопределимая стержневая система нагружена в соответствии с заданной расчетной схемой (рис.5.3). Стержни изготовлены из разных материалов, нормативные коэффициенты и механические характеристики которых приведены в таблице 1.

Заданная система – один раз статически неопределима (n=1). Отбросим 3 связи, заменив их действие неизвестными значениями продольных сил в

стержнях системы (рисунок 5.4). Выбранные направления неизвестных продольных сил положительны, т.к. вызывают в стержнях растяжение. Составим для них уравнения статики в виде суммы проекций всех сил на направление осей x, y. Уравнения статики содержат три неизвестных, поэтому для решения задачи необходимо составить одно дополнительное уравнение, исходя из рассмотрения деформаций системы (Рисунок 5.5). Пусть точка, соединяющая стержни, т.е.узел А сместится и займет новое положение $A^{/}$. Деформации стержней $\Delta l_1$ , $\Delta l_2$ , $\Delta$ $l_3$ связаны между собой геометрическими зависимостями (Рисунок 5.5) [15-19].

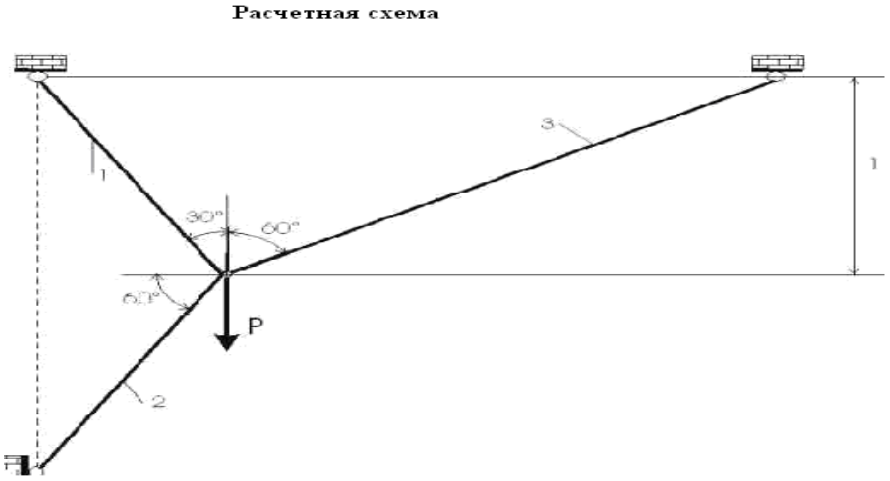



Рисунок 5.3

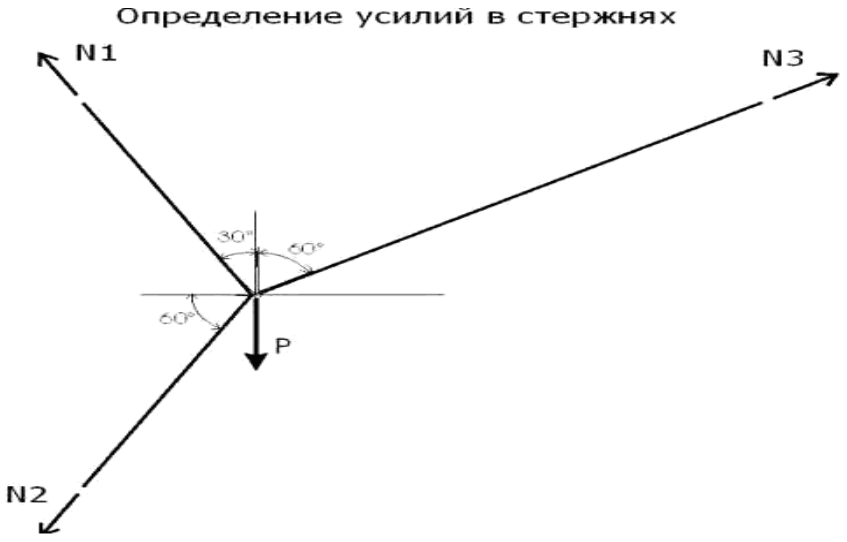



Рисунок 5.4

$$\sum x : -(N1 + N2)\cos 60° + N3\cos 30° = 0$$

$$\sum y : N1\cos 30° - N2\cos 30° + N3\cos 60° - P = 0$$

Систему (рис.5.4) следует дополнить одним уравнением совместности деформаций. Для этого найдем удлинение всех стержней после деформации.

Т.к. в нашем случае $\alpha+\beta=90°$, то для упрощения вывода уравнения совместности оси x, y направлены вдоль ортогональных стержней 1 и 3. Обозначим через $\Delta x, \Delta y$ проекции вектора перемещения узла AA' на оси x, y. Тогда из рис.5.5 получаем:

$$\Delta l1 = \Delta y$$
$$\Delta l3 = \Delta x$$
$$-\Delta l2 = \Delta x\cos 30° + \Delta y\cos 60°$$

Выразим удлинения $\Delta l_i$ через усилия в стержнях $\Delta l_i = \dfrac{N_i l_i}{E_i A_i}$.

Заданы соотношения площадей, т.е. принимаем: A1=A; A2=2A; A3=3A, здесь A – неизвестная пока площадь.

В таблице 1представлены механические характеристики для различных материалов стержней. Соотношения модулей упругости для трех стержней возьмем равными: E1=2.0E; E2=E; E3=0.7E, где E=$1.0\cdot10^5$ МПа. Длины стержней определяются из рис.5.3 : $l1 = l2 = \dfrac{l}{\cos 30°} \approx 1.16$ м; $l3 = \dfrac{l}{\cos 60°} \approx 2$ м.

Сила P=40кН.

После соответствующих преобразований, имеем

$$-\frac{N2}{2\cos 30°} = \frac{N3\cos 30°}{0.7\cdot 3\cos 60°} + \frac{N1\cos 60°}{2\cos 30°}$$

**Таблица 1**

| Номер стержня | Материал стержня | Модуль упругости $E\cdot10^{-5}$ | Предел прочности $\sigma_b$ | Нормативный коэффициент запаса прочности $[n_b]$ |
|---|---|---|---|---|
| | | МПа | | |
| 1 | Сталь 3 | 2,0 | 400 | 3,7 |
| 2 | Сплав Л68 | 1,0 | 320 | 4,0 |
| 3 | Сплав Д16Т | 0,7 | 450 | 3,8 |
| 4 | Текстолит ПТК | 0,1 | 200 | 5,0 |

**Составление уравнения совместности деформации**

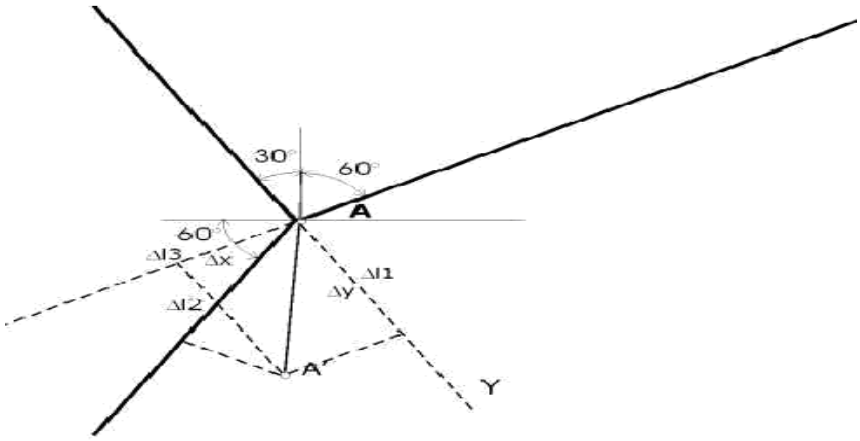



**Рисунок 5.5**

**Обозначим номера стержней соответственно:**

N1 := 1

N2 := 2

N3 := 3

**Решение системы уравнений**

$$N1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + N3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - N2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 40 = 0$$

$$\frac{-N2}{2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{N3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{0.7\cdot 3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \frac{N1\cdot\cos\left(\cdot\right.}{2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right.}$$

Решаем совместно уравнения статики и уравнение совместности деформации. В результате получаем значения продольных сил в трех стержнях.

**N1=25,41кН , N2= -18,45кН , N3=4.02кН**

**Определение площадей поперечных сечений стержней**

$$A_i = \frac{N_i}{[\sigma_i]}; [\sigma_i] = \frac{\sigma_{bi}}{[n_{bi}]}; (i = 1,2,3)$$

$$[\sigma_1] = \frac{400}{3.7} = 108.1 \text{ МПа}$$

$$[\sigma_2] = \frac{320}{4} = 80 \text{ МПа}$$

$$[\sigma_3] = \frac{450}{3.8} = 118.4 \text{ МПа}$$

$$A1 = A \geq \frac{25.415 \cdot 10^3}{108.1 \cdot 10^6} = 0.2351 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$$

$$A2 = 2A \geq \frac{18.451 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 0.2306 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \Rightarrow A \geq 0.1153 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$$

$$A3 = 3A \geq \frac{4.021 \cdot 10^3}{118.4 \cdot 10^6} = 0.034 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \Rightarrow A \geq 0.0113 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$$

За допускаемое значение А принимаем максимальное из всех полученных $A = 0.2351 \cdot 10^{-3}$ м$^2$.

В стержне №1 напряжение равно допускаемому.

## Нахождение действительных площадей стержней

$A1 = A = 0.2351 \cdot 10^{-3}$ м$^2$; $A2 = 2A = 0.4702 \cdot 10^{-3}$ м$^2$; $A3 = 3A = 0.7053 \cdot 10^{-3}$ м$^2$.

## Определение коэффициентов запаса прочности стержней

$$n_i = \frac{\sigma_{bi} \cdot F_i}{N_i}$$

$$n1 = \frac{400 \cdot 10^6 \cdot 0.2351 \cdot 10^{-3}}{25.415 \cdot 10^3} = 3.7 = [n_{b1}]$$

$$n2 = \frac{320 \cdot 10^6 \cdot 0.4702 \cdot 10^{-3}}{18.451 \cdot 10^3} = 8.2 > [n_{b2}] = 4.0$$

$$n3 = \frac{450 \cdot 10^6 \cdot 0.7053 \cdot 10^{-3}}{4.021 \cdot 10^3} = 78.9 > [n_{b3}] = 3.8$$

## Вычисление удлинения стержней

$$\Delta l1 := \frac{25.415 \cdot 10^3 \cdot 1.16}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0.2351 \cdot 10^{-3}} \qquad \Delta l1 = 6.27 \times 10^{-4}$$

$$\Delta l2 := \frac{-18.451 \cdot 10^3 \cdot 1.16}{1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0.4702 \cdot 10^{-3}} \qquad \Delta l2 = -4.552 \times 10^{-4}$$

$$\Delta l3 := \frac{4.021 \cdot 10^3 \cdot 2}{0.7 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0.7053 \cdot 10^{-3}} \qquad \Delta l3 = 1.629 \times 10^{-4}$$

До сих пор мы рассматривали условие прочности по допускаемым напряжениям. Это условие, бесспорно, обеспечивало прочность, но не исчерпывало всех возможностей конструкции. В зависимости от геометрических характеристик конструкции только некоторые стержни оказывались напряженными до величины допускаемого напряжения и следовательно имели условленный запас прочности. Остальные стержни оставались недонапряженными и имели излишний запас прочности. В статически неопределимых стержневых системах при увеличении внешней нагрузки напряжения во всех стержнях сначала увеличиваются пропорционально нагрузке. Так как напряжения неравномерно распределены по стержням, то в одном из стержней после достижения условия $\sigma > [\sigma]$ возникает текучесть и тогда напряжение в этом стержне $\sigma = \sigma_т$ , где $\sigma_т$ - предел текучести . При этом напряжения в других стержнях меньше $\sigma_т$ . В процессе дальнейшего увеличения нагрузки напряжения в стержнях, где $\sigma < \sigma_т$ увеличиваются до значения $\sigma_т$ , а напряжения в стержне, где $\sigma = \sigma_т$ сохраняется постоянным. Состояние, когда во всех стержнях $\sigma = \sigma_т$ называется предельным, соответствующим исчерпанию ее грузоподъемности или исчерпанию несущей способности. Соответствующую нагрузку называют предельной нагрузкой [21-25]. Для ее определения составляется одно уравнение статики, где все неизвестные усилия в стержнях выражаются через предел текучести $\sigma_т$. Разделив эту величину предельной нагрузки на нормативный коэффициент запаса несущей способности [n] получают допускаемую нагрузку по несущей способности $[P] = P_{пр} / [n]$, где $[n]>1$.

Рассмотрим расчет по предельному состоянию на примере, расчетная схема которого представлена на рисунке 5.3. Полагаем, что под действием силы $P=P_{пр}$ возникает предельное состояние, т.е. во всех стержнях напряжения равны пределу текучести $\sigma_т$. Предельные усилия в стержнях определяются по следующим формулам:

$$N_1 = (\sigma_т)1 \cdot A1;\ N_2 = (\sigma_т)_2 \cdot A2;\ \ N_3 = (\sigma_т)_3 \cdot A3$$

Подставляя эти усилия во второе уравнение равновесия, для предельной нагрузки получаем:

$$P_{пр} = (\sigma_т)1 \cdot A1 \cdot \cos 30^o - (\sigma_т)_2 \cdot A2 \cdot \cos 30^o + (\sigma_т)_3 \cdot A3 \cdot \cos 60^o$$

**Контрольные вопросы:**

1. Какие системы называются статически неопределимыми?
2. Как определяется степень статической неопределимости?
3. Что означают уравнения совместности деформаций? Каков их смысл?

4. Влияет ли температура на усилия в статически неопределимой системе?
5. Влияет ли жесткость стержней на усилия в статически неопределимой системе?
6. Какое состояние системы называется предельным?
7. В чем заключается расчет на прочность?
8. В чем заключается расчет на жесткость?
9. Когда используется принцип независимости действия сил?
10. Как определяется допускаемая нагрузка и допускаемое напряжение?
11. Из какого уравнения определяется предельная нагрузка?
12. Чему равны напряжения в стержнях системы в состоянии предельного равновесия?

## Лекция 6

### Статически неопределимые стержневые системы. Температурные и монтажные усилия

В статически неопределимой системе усилия возникают от действия только температуры, т.е. при отсутствии внешних сил. Довольно значительные напряжения этого типа образуются в рельсах, сваренных в одну непрерывную линию. При изменении температуры рельсов по отношению к той, при которой была произведена сварка, в них возникают растягивающие, либо сжимающие напряжения. Эту задачу можно схематизировать в виде стержня, защемленного двумя концами [8].

Рассмотрим пример определения напряжений, возникающих в результате изменения температуры элементов сооружения. Пусть стержень при некоторой температуре $t^0_1$ заделан обоими концами в неподатливые стены (Рисунок 6.1). Затем температура повысилась до $t^0_2$ градусов, так что изменение температуры составило интервал $\Delta t^0 = t^0_2 - t^0_1$. Если бы один конец стержня был свободен, то в результате нагрева длина стержня увеличилась бы и напряжения в ней не возникали. Но так как стены неподатливы, то стержень, стремясь удлиниться, и, не имея этой возможности, будет испытывать сжатие. В результате в стержне возникают продольные силы и напряжения. Удлинение стержня должно быть равно нулю. Именно, отсутствие удлинения является причиной возникновения напряжений.

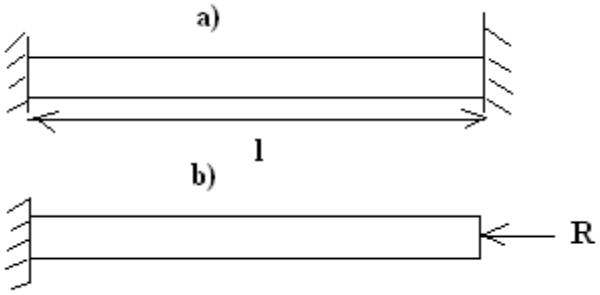



Рисунок 6.1

Отбросив одну заделку, например правую, заменим ее действие неизвестной силой R (рисунок 6.1 b). Если бы этой силы не было, то согласно закону линейного расширения стержень удлинился бы на величину

$\Delta l_t = \alpha l \Delta t^0$, где α - коэффициент линейного расширения материала стержня. В действительности стержень не удлиняется. Следовательно, сила R , сжимая стержень, уменьшает его длину на величину $\Delta l_R$, равную величине $\Delta l_t$. Таким образом,

$\Delta l_R = \Delta l_t$

Это и будет условием совместности деформации, оно указывает на то, что и после повышения или понижения температуры длина стержня не изменилась, т.е. он не оторвался от неподвижных опор.

По закону Гука

$$\Delta l_R = \frac{Rl}{EA}$$

Следовательно, на основании равенства перемещений, можно записать

$$\alpha l \Delta t^0 = \frac{Rl}{EA}$$

Откуда

$$R = EA\alpha\Delta t^0$$

Возникающие в поперечных сечениях стержня нормальные сжимающие напряжения определяются из выражения

$$\sigma = \frac{R}{A} = E\alpha\Delta t^0$$

Если бы помимо температуры на стержень действовали и внешние силы, то согласно принципу независимости действия сил необходимо в равенстве перемещений учесть слагаемые, соответствующие перемещениям от каждой внешней силы в отдельности.

Рассмотрим другой случай, когда элементы статически неопределимой системы могут быть изготовлены с неточностями (Рисунок 6.2) [9-14]. При сборке систем это приводит к перераспределению усилий (иногда нежелательному). Например, рассмотрим следующий пример. Пусть

нагрузка P передается через жесткую балку на три железобетонные колонны с одинаковым поперечным сечением площадью A. При сборке системы было обнаружено, что средняя колонна изготовлена короче крайних на величину Δ. Определить усилия и напряжения в колоннах.

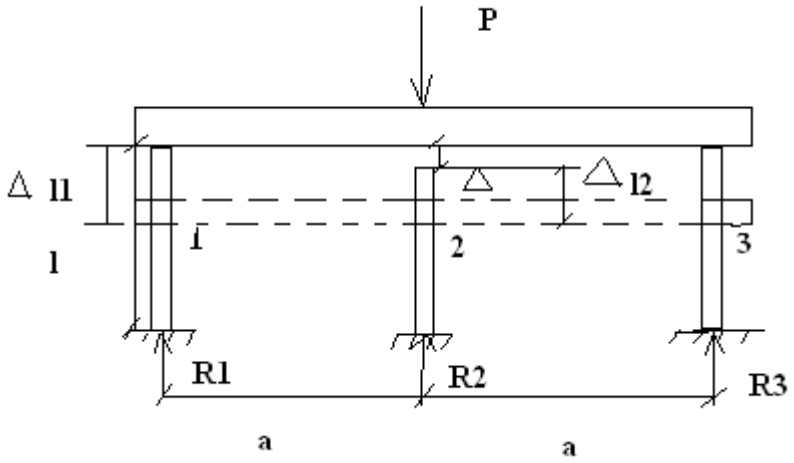



Рисунок 6.2

Вначале необходимо проверить, устраняется ли зазор после приложения нагрузки. На крайние колонны передается нагрузка P/2, продольная сила в них равна N = P/2, при этом колонны укоротятся на длину $\delta = \frac{Nl}{EA}$. Если Δ<δ, то зазор при нагружении будет перекрыт и внешняя нагрузка будет восприниматься тремя колоннами. Обозначим усилия в них соответственно $N_1$ , $N_2$ , $N_3$ (Рисунок 6.2). Для данной системы можно составить два независимых статических уравнений равновесия, где неизвестными являются три усилия в колоннах. Поэтому система является один раз статически неопределимой.

Составим два уравнения равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальное направление и сумму моментов всех сил относительно точки, совпадающей со второй заделкой. Эти уравнения имеют вид:

$$\sum Y = N_1 + N_2 + N_3 - P = 0$$

$$\sum M = N_1 a - N_3 a = 0,$$

отсюда следует, что $N_1 = N_3$, из первого уравнения следует, что $P = 2N_1 + N_2$

Составим теперь дополнительное уравнение, рассматривая деформированное состояние системы. При нагружении сначала будут деформироваться крайние колонны, после исчезновения зазора будут деформироваться три колонны, поэтому уравнение совместности деформации записывается в виде:

$\Delta = \Delta l_1 \; - \; \Delta l_2$,

Используя закон Гука, это уравнение можно записать

$$\Delta = \frac{N_1 l}{EA} - \frac{N_2 l}{EA} \qquad \text{или } N_1 - N_2 = \Delta EA/l$$

Решая это уравнение совместно с уравнением статики, определяем неизвестные продольные усилия в трех колоннах. После этого определяются нормальные напряжения в сечениях колонн.

Иногда в статически неопределимых конструкциях приходится одновременно учитывать влияние температуры и неточности изготовления. Решение таких задач возможно двумя путями: первый путь – это одновременный учет всех факторов. В этом случае в уравнение совместности деформаций должны быть включены члены, отражающие влияние всех факторов (нагрузки, температуры, неточности изготовления). Полученные в результате усилия и напряжения будут окончательными.

Второй путь расчета заключается в раздельном учете усилий и напряжений, вызванных нагрузкой, температурой и неточностью изготовления. Решается несколько отдельных задач, в каждой из которых учитывается только один фактор. Окончательные усилия и напряжения определяются путем алгебраического суммирования этих величин. Это возможно только при малых деформациях, при больших деформациях это не действительно.

Для последнего примера помимо неточности изготовления рассмотрим также температурное влияние. Пусть температура стержней во время эксплуатации повысилась на $\Delta t$ . Уравнения равновесия сохранят свой вид. В уравнении совместности деформаций с учетом влияния температуры деформации каждого стержня будут состоять из следующих слагаемых:

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 l}{EA} + \alpha_1 \cdot l \cdot \Delta t, \qquad \Delta l_2 = -\frac{N_2 l}{EA} + \alpha_2 \cdot l \cdot \Delta t,$$

где $\alpha_1$, $\alpha_2$ – коэффициенты линейного расширения первого и второго стержня. Знак минус в первом слагаемом справа означает деформацию сжатия, т.е. укорочение.

**Контрольные вопросы:**

1. Влияют ли неточности изготовления при сборке систем, температура на усилия в статически определимой системе?
2. В каких системах возникают температурные усилия?
3. Как влияет жесткость отдельных элементов в статически неопределимой системе на перераспределение усилий?

4. Какие гипотезы и законы используются при определении перемещений?
5. Какие уравнения используются при расчете статически неопределимых систем?

## Лекция № 7

### Кручение

### Кручение стержней круглого поперечного сечения

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении стержня возникает лишь один силовой фактор — крутящий момент $M_z$. Крутящий момент по определению равен сумме моментов внутренних сил относительно продольной оси стержня Oz. Нормальные силы, параллельные оси Oz, вклада в крутящий момент не вносят. С силами, лежащими в плоскости поперечного сечения стержня (интенсивности этих сил — касательные напряжения $\tau_{xz}$ и $\tau_{yz}$) $M_z$ связывает вытекающее из его определения уравнение равновесия статики (Рисунок 7.1)

$$M_x = \int_F (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dF$$

Условимся считать $M_z$ положительным, если со стороны отброшенной части стержня видим его направленным против часовой стрелки (Рисунок 7.2) [8-11]. Это правило проиллюстрировано на рисунке 7.1, где крутящий момент $M_z$ принят положительным. Используя метод сечений, численно крутящий момент равен сумме моментов внешних сил, приложенных к отсеченной части стержня, относительно оси Oz.

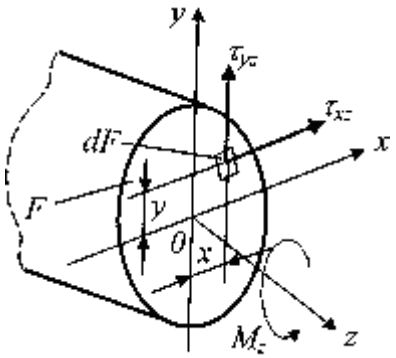



**Рисунок 7. 1.** Связь крутящего момента с касательными напряжениями

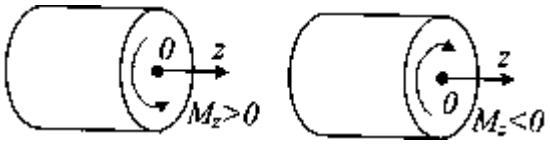



**Рисунок 7.2.** Иллюстрация положительного и отрицательного крутящего момента

Рассмотрим кручение призматических стержней кругового поперечного сечения. Исследование деформаций упругого стержня с нанесенной на его поверхности ортогональной сеткой рисок (Рисунок 7.3) позволяет сформулировать следующие предпосылки теории кручения этого стержня [12]:

1. поперечные сечения остаются плоскими (выполняется гипотеза Бернулли);
2. расстояния между поперечными сечениями не изменяются, следовательно $\varepsilon_z = 0$;
3. контуры поперечных сечений и их радиусы не деформируются. Это означает, что поперечные сечения ведут себя как жесткие круговые пластинки, поворачивающиеся при деформировании относительно оси стержня Oz. Отсюда следует, что любые деформации в плоскости пластинки равны нулю, в том числе и $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$;
4. материал стержня подчиняется закону Гука. Учитывая, что $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, из обобщенного закона Гука в форме получаем, что нормальные напряжения $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ . Это означает, что в поперечных сечениях, стержня возникают лишь касательные напряжения $\tau$, а вследствие закона парности касательных напряжений, равные им напряжения действуют и в

сопряженных продольных сечениях. Следовательно, напряженное состояние стержня — чистый сдвиг.

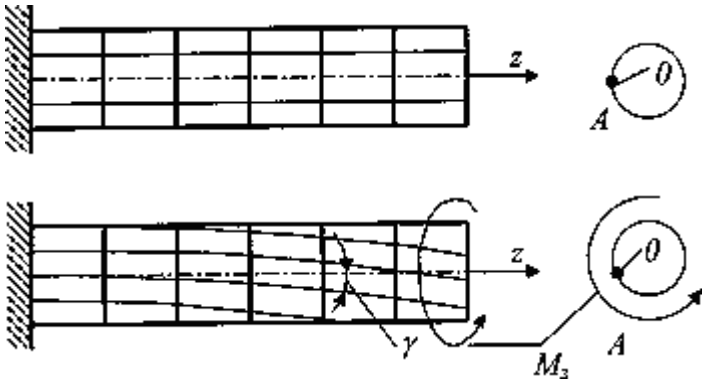



**Рисунок 7.3.** Иллюстрация кручения: а) исходное и б) деформированное состояния

Выведем формулу для касательных напряжений при кручении призматического стержня кругового поперечного сечения. Как видно, поворот правого торцевого сечения относительно неподвижного левого на угол $\varphi$(назовем его углом закручивания стержня) вызывает поворот продольных волокон на угол $\gamma$(угол сдвига), поскольку на величину $\gamma$ искажаются углы ортогональной сетки продольных и поперечных рисок модели.

Двумя смежными сечениями вырежем элемент стержня длиной dz и, поскольку нас интересуют деформации элемента, левое сечение его будем считать неподвижным (Рисунок 7.4). При повороте правого сечения на угол $d\varphi$в соответствии с гипотезой о недеформируемости радиусов, правый конец волокна АВ (отстоящий от оси элемента на величину полярного радиуса $\rho$) будет перемещаться по дуге $BB_1$, вызывая поворот волокна на угол сдвига

$$\gamma = BB_1 / AB = \frac{\rho d\varphi}{dz} .$$

Обратим внимание на то, что в соответствии с рисунком 7.5 и рисунком 7.6, сдвиг $\gamma$и связанное с ним касательное напряжение $\tau$ перпендикулярны радиусу $\rho$. Определим касательное напряжение $\tau$, воспользовавшись законом Гука для чистого сдвига:

$$\tau = G_\gamma = G\rho\frac{d\varphi}{dz} . \quad (7.1)$$

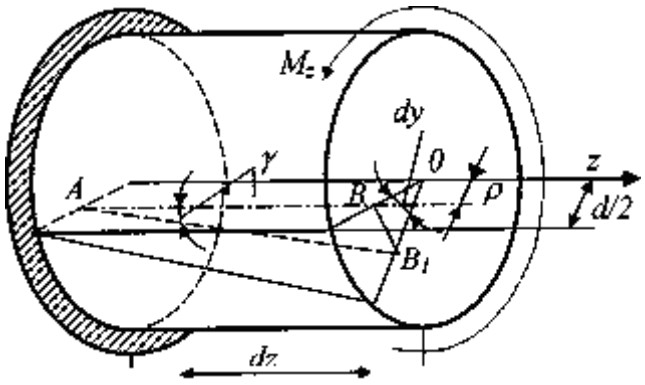
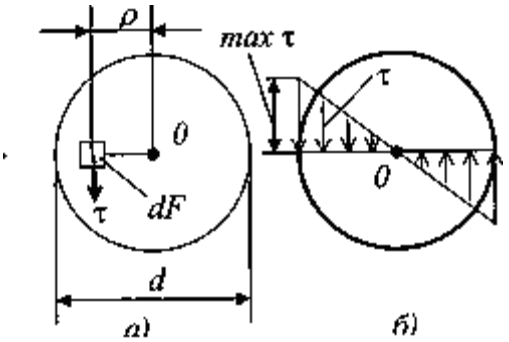



**Рисунок 7.4.** Расчетная модель определения касательных напряжений




а)

**Рисунок 7.5.** Распределение касательных напряжений при кручении:

В (7.1) $d\varphi/dz$ — погонный угол закручивания стержня, который остается пока неизвестным. Для его нахождения обратимся к условию статики, записав его в более удобной для данного случая форме (Рисунок 7.5, а)

$$M_x = \int_F \int \tau \rho dF \quad . \qquad (7.2)$$

Подставляя (7.1) в (7.2) и учитывая, что

$$\int_F \rho^2 dF = J_p$$

где $J_p$—; полярный момент инерции поперечного сечения (для круга с диаметром d $I_p = \frac{\pi d^4}{32} \cong 0{,}1 d^4$), получаем

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p} \qquad (7.3)$$

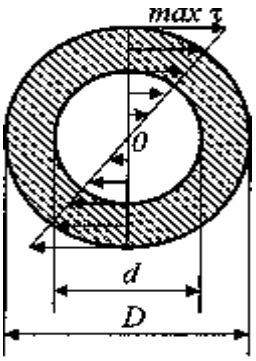
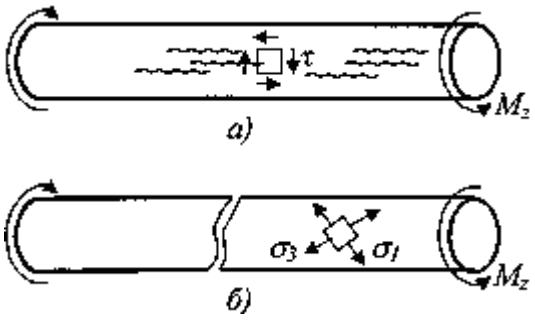



**Рисунок 7.6.** Распределение напряжений для кольцевого сечения




а) разрушение дерева, б) разрушение чугуна

**Рисунок 7.7.** Распределение исходных касательных и главных напряжений:

Подставляя выражение (7.3) в (7.1), получаем формулу для касательных напряжений при кручении призматического стержня кругового поперечного сечения

$$\tau = \frac{M_z}{J_p} \rho \qquad (7.4)$$

Как видно из (7.4), сдвиги и касательные напряжения пропорциональны расстояний от оси стержня. Обратим внимание на структурные аналогии формул для нормальных напряжений чистого изгиба и касательных напряжений кручения.

Мерой деформации стержня при кручении является погонный угол закручивания стержня, определяемый по (7.3). Поскольку величина $DJ_p$ стоит в знаменателе формулы и при заданной нагрузке ($M_z$ через нее выражается) $d\varphi/dz$ тем меньше, чем больше $DJ_p$, последнюю называют жесткостью поперечного сечения при кручении.

Пользуясь (7.3) для определения угла закручивания элемента длиной dz

$$d\varphi = \frac{M_z}{GJp}\, dz \quad ,$$

найдем полный угол закручивания стержня длиной l

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z dz}{GJ_p} \qquad (7.5)$$

В случае, если по длине стержня $M_z$ и $DJ_p$ постоянны, получаем

$$\varphi = \frac{M_z l}{GJ_p} \quad ,$$

когда эти величины кусочно-постоянны, то:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_{zk} l_k}{(GJ_p)_k} \qquad (7.6)$$

Отметим, что полученные формулы по структуре аналогичны формулам для деформаций при растяжении стержня.

Наибольшие касательные напряжения возникают у внешней поверхности стержня, т. е. при $\rho_{\max} = d/2$

$$\max \tau = \frac{M_z}{J_p}\, \rho_{\max} = \frac{M_z}{2J_{p/d}} = \frac{M_z}{W_p} \,,$$

где $W_p$ — момент сопротивления при кручении или полярный момент сопротивления

$$W_p = \pi d^3 / 16$$

Полярный момент сопротивления, стоящий в знаменателе для максимальных касательных напряжений, очевидно, является геометрической характеристикой сечения, а условие прочности стержня при кручении принимает вид

$$\max\ \tau = \frac{\max\ M_z}{W_p} \le |\tau| \quad , \qquad (7.7)$$

где $[\tau]$— допускаемое напряжение на кручение.

Как показали эксперименты и точное решение этой задачи в теории упругости, все гипотезы, сформулированные ранее для стержня со сплошным круговым сечением, остаются справедливыми и для стержня кольцевого поперечного сечения (Рисунок 7.7). Поэтому все выведенные ранее формулы пригодны для расчета стержня кольцевого сечения с той лишь разницей, что полярный момент инерции определяется как разность моментов инерции кругов с диаметрами D и d

$$J_p = \pi D^4 / 32 - \pi d^4 / 32 = \frac{\pi D^4}{32}(1-\beta^4) \ ,$$

где $\beta = d / D$, а момент сопротивления определяется по формуле

$$W_p = J_p / \rho_{\max} = J_p / 0{,}5D = \frac{\pi D^3}{16}(1-\beta^4) \ .$$

Учитывая линейный характер изменения касательных напряжений по радиусу (Рисунок 7.7) и связанное с этим лучшее использование материала, кольцевое сечение следует признать наиболее рациональным при кручении стержня. Коэффициент использования материала тем выше, чем меньше относительная толщина трубы.

Как отмечено ранее, напряженное состояние при кручении стержня — чистый сдвиг, являющийся частным случаем плоского напряженного состояния. На площадках, совпадающих с плоскостью поперечного сечения и на парных им площадках продольных сечений возникают экстремальные касательные напряжения max - min $\tau$, а главные напряжения $\sigma_{1,3} = \pm\tau$ действуют на площадках, наклоненных.к оси стержня под углами $\pm 45^0$; главное напряжение $\sigma_2 = 0$.

Особенности напряженного состояния при кручении нашли отражение в характере разрушения стержней. Так, разрушение стержня из дерева, плохо работающего на скалывание вдоль волокон, происходит от продольных трещин (Рисунок 7.7, а). Разрушение стержня из хрупкого металла (например, чугуна) происходит по винтовой линии, наклоненной к образующим под углом 45°, т. е. по траектории главного напряжения $\sigma_3$ (Рисунок 7.7 б).

## ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

При кручении внешние моменты совершают работу вследствие поворота сечений, к которым они приложены. Эта работа расходуется на

создание запаса потенциальной энергии деформации, численно равной работе внутренних сил.

Аналогично тому, как это было сделано при растяжении, можно доказать, что работа статически приложенного внешнего скручивающего момента равна половине произведения конечного значения момента на окончательный угол закручивания**:**

$$W = -M\varphi/2. \qquad (7.8)$$

Работа внутренних сил, отрицательная по знаку, и численно равная ей потенциальная энергия при кручении вычисляются аналогично тому, как вычислялась работа внутренних сил при растяжении (сжатии).Элементарная работа внутренних сил

$$dW_i = -Md\varphi/2, \qquad (7.9)$$

где T — крутящий момент; dφ— угол закручивания элемента длиной dz**.**
Но по формуле (7.5)

$$d\varphi = Mdz/(GI_p).$$

Следовательно,

$$dW_i = -M^2dz/(2GI_p). \qquad (7.10)$$

Полную работу внутренних сил получим, интегрируя выражение для элементарной работы по всей длине l стержня:

$$W_i = -\frac{1}{2}\int \frac{M^2 dz}{GI_\rho} \qquad (7.11)$$

Для вычисления потенциальной энергии, равной по значению работе внутренних сил и обратной по знаку, имеем

$$U = -W_i = \frac{1}{2}\int \frac{M^2 dz}{GI_\rho} \qquad (7.12)$$

Если крутящий момент и жесткость стержня не меняются по длине, то

$$U = M^2l/(2GI_p). \qquad (7.13)$$

**Статически неопределимые задачи при кручении**

При расчете статически неопределимых задач при кручении для определения опорных реакций и внутренних сил необходимо помимо уравнений равновесия записать дополнительные уравнения нестатического характера, так называемые уравнения совместности деформаций.

Рассмотрим вал круглого поперечного сечения с защемлениями на обоих концах (Рисунок 7.8). Расчетная схема представляет ось вала с сосредоточенными внешними крутящими моментами.

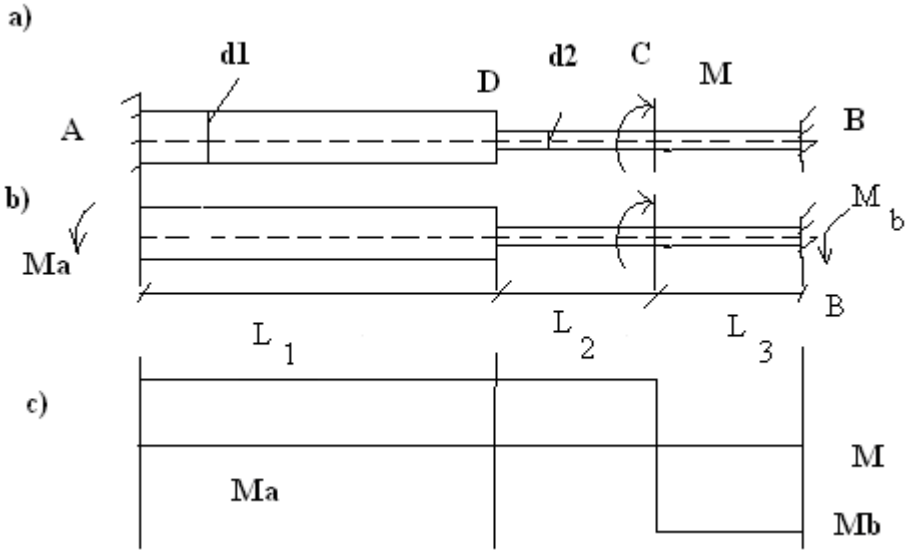



Рисунок 7.8

Данная задача статически неопределима, т.к. две неизвестные реакции в заделках А, В нельзя определить из одного уравнения равновесия. Для решения задачи необходимо составить дополнительное уравнение нестатического характера. Отбросим левую заделку, заменив ее влияние неизвестной реакцией – моментом $M_a$ (рисунок 7.8 б). Рассматривая систему как статически определимую, можно построить эпюру крутящих моментов (рисунок 7.8 с). На участке от сечения А до сечения С ординаты эпюры крутящих моментов равны значению $M_a$, а на участке от сечения С до В ординаты эпюры крутящих моментов равны значению $M_b$.

Уравнение статики записывается в виде суммы всех крутящих моментов и имеет вид:

$$\sum M = M - M_a - M_b = 0$$

Отсюда можно записать:

$$M_a = M - M_b \text{ или } M_b = M - M_a$$

Дополнительное уравнение составляется из условия, что угол поворота в левой заделке равен нулю. Углы поворота на участках AD, DC, CB определяются по формуле

$$\varphi = \frac{M_z l}{G J_p},$$

где $M_z$ - крутящий момент на участке.

Полный угол поворота сечения А определяется как сумма углов поворотов от каждого момента $M_a$ и М в отдельности, т.е.:

$$\varphi_a = \varphi_{AD} + \varphi_{DC} + \varphi_{CB} = 0$$

$$\varphi_{AD} = \frac{M_A L_1}{(GI_p)_1}, \quad \varphi_{DC} = \frac{M_A L_2}{(GI_p)_2}, \quad \varphi_{CB} = -\frac{M_B L_3}{(GI_p)_3},$$

$$(GI_p)_1 = \frac{G \cdot \pi d_1^{\,4}}{32}, \quad (GI_p)_1 = \frac{G \cdot \pi d_2^{\,4}}{32}, \quad (GI_p)_1 = \frac{G \cdot \pi d_3^{\,4}}{32}$$

Решая совместно уравнение статики и уравнение совместности деформации, определяем неизвестные значения моментов в заделках.

$$M_A = \frac{M \; L_3}{(GI_p)_3 K}, \quad M_B = M - M_A,$$

$$K = \frac{L_1}{(GI_p)_1} + \frac{L_2}{(GI_p)_2} + \frac{L_3}{(GI_p)_3}$$

**Контрольные вопросы?**

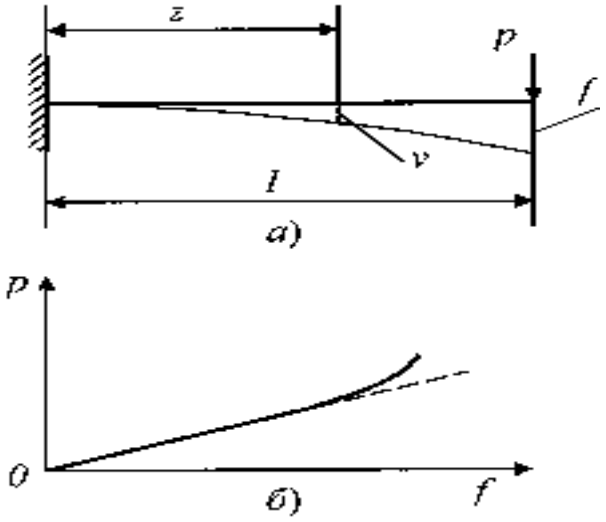
1. Какие напряжения возникают при чистом кручении?
2. Как распределяются касательные напряжения в сечении при кручении?
3. От чего зависит момент сопротивления сечения при кручении?
4. В чем заключается расчет на жесткость при кручении?
5. Смысл уравнений совместности деформаций при расчете статически неопределимых систем при кручении?
6. Выражение потенциальной энергии деформации при кручении? Влияние жесткости и внешней нагрузки?
7. Как определяются углы поворота при кручении?
8. Какой метод используется при построении эпюры крутящих моментов?

## Лекция 8

### Сложное сопротивление. Косой изгиб

Ранее мы рассматривали простые виды деформации. В действительности элементы конструкций одновременно подвергаются нескольким видам деформаций. Вид деформации является сложным, когда в поперечном сечении стержня возникают два и более силовых факторов. Сложный вид деформации можно рассматривать как сумму простых видов, изученных ранее (растяжение, изгиб, кручение), если применим принцип независимости действия сил (частный случай принципа суперпозиции или наложения, применяемый в механике деформируемого твердого тела). Напомним формулировку принципа независимости действия сил: напряжение (деформация) от группы сил равно сумме напряжений (деформаций) от каждой силы в отдельности. Он справедлив, если функция и аргумент связаны линейной зависимостью [8-12]. В задачах механики материалов и

конструкций он становится неприменимым, если: 1. напряжения в какой-либо части конструкции от одной из сил или группы сил превышают предел пропорциональности $\sigma_{пц}$;2. деформации или перемещения становятся настолько большими, что нарушается линейная зависимость между ними и нагрузкой. Например, дифференциальное уравнение изгиба стержня является нелинейным и вытекающая из него зависимость прогиба $f$ от нагрузки $P$ для консольной балки, изображенной на рис. 8.1, *а*, также является нелинейной (рис. 8.1, *б*). Однако, если прогибы балки невелики ($f<<l$) настолько, что $(dv/dz)^2<<1$ (так как $dv/dz \sim f/l$), то дифференциальное уравнение изгиба становится линейным (как видно из рис. 8.1, *б*, начальный участок зависимости $P$ от $f$, описываемый этим уравнением, также является линейным).




а) расчетная схема б) линейное и нелинейное сопротивления

Рис.8.1. Модели изгиба балки:

Известно, что косой изгиб имеет место, когда силы, его вызывающие, не лежат в одной из главных плоскостей инерции. Однако, если разложить внешние силы по главным осям инерции *Ox* и *Oy,* то получим две системы сил $P_{1x}$, $P_{2x}$, …, $P_{nx}$ и $P_{1y}$, $P_{2y}$,..., $P_{ny}$, каждая из которых вызывает прямой изгиб с изгибающими моментами соответственно $M_y$ и $M_x$ (рис. 8.2). Применяя принцип независимости действия сил, нормальные напряжения $\sigma$(рис. 8.3) определим как алгебраическую сумму напряжений от $M_x$ и $M_y$:

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{My} = \pm\frac{M_x}{J_x}y \pm \frac{M_y}{J_y}x \quad . \tag{8.1}$$

Чтобы не связывать себя формальными правилами знаков, слагаемые будем определять по модулю, а знаки ставить по смыслу. Прогибы балки определим как геометрическую сумму прогибов от прямых изгибов (рис. 8.2)

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \,. \qquad (8.2)$$

Таким образом, расчет на косой изгиб с применением принципа независимости действия сил сводится к расчету на два прямых изгиба с последующим алгебраическим суммированием напряжений и геометрическим суммированием прогибов.

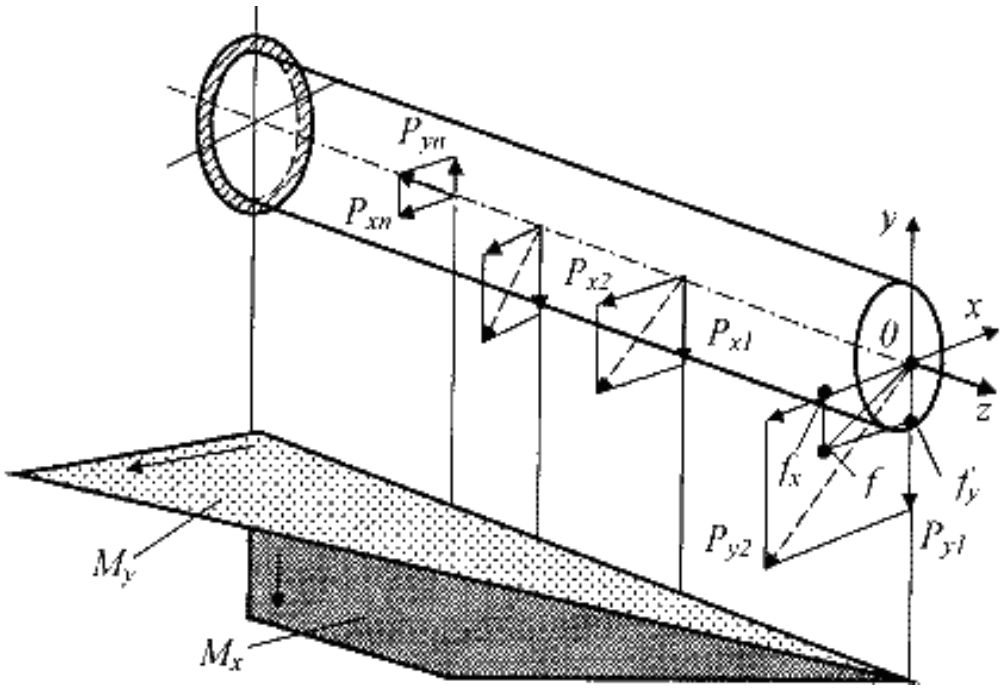



Рис. 8.2. Расчетная модель косого изгиба бруса

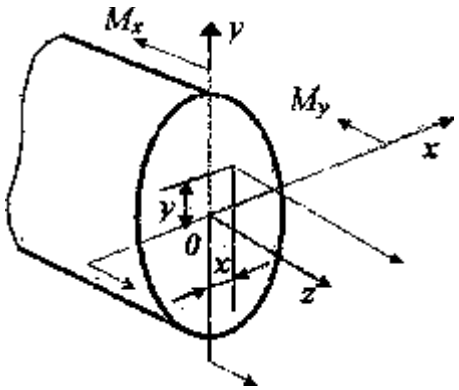



Рис. 8.3. Связь нормального напряжения с внутренними изгибающими моментами

В случае поперечных сечений, имеющих две оси симметрии и выступающие угловые точки (рис. 8.4) с равными по модулю и

максимальными одноименными координатами $|x_A| = x_B = x_C = |x_D| = x_{\max}$ и $|y_A| = y_B = y_C = |y_D| = y_{\max}$ напряжения в этих точках будут равны

$$\sigma_{A,B,C,D} = \pm\frac{M_x}{J_x} y_{\max} \pm \frac{M_y}{J_y} x_{\max} = \pm\frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} . \qquad (8.3)$$

Слагаемые в этом выражении рекомендуется определять по модулю, а знаки ставить по смыслу. Например, на рис. 8.5 верхний ряд знаков «+» и «— » соответствует напряжениям от $M_x$, а нижний ряд — от $M_y$, и напряжения в этих точках будут равны

$$\sigma_A = -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}, \quad \sigma_B = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y},$$
$$\sigma_C = \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}, \quad \sigma_D = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}, \qquad (8.4)$$

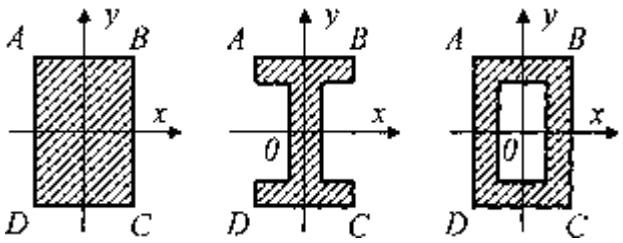



Рис. 8.4. Симметричные варианты сечений

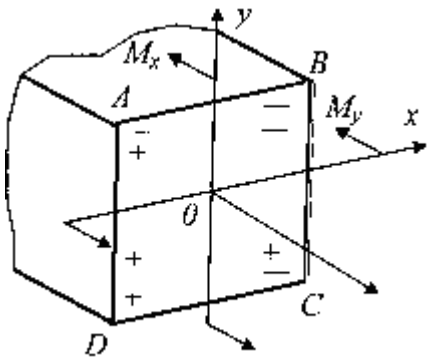



Рис. 8.5. Расстановка знаков от действия моментов

Условие прочности для балок из пластичного материала с указанным типом сечений запишется в виде

$$\max \sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma] \quad . \tag{8.5}$$

В правой части (8.5) в знаменателе стоят моменты сопротивления сечения относительно осей x,y. В остальных случаях для определения max σ (или min $\sigma$ и max $|\sigma_c|$ для хрупкого материала) необходимо по общей формуле проверить напряжения во всех опасных точках.

Есть и другой путь: положив $\sigma = 0$, получим уравнение нейтральной линии. Так как напряжения в точках поперечного сечения будут пропорциональными расстояниям от нейтральной линии, то *max* $\sigma$ будут возникать в наиболее удаленных от нее точках.

Контрольные вопросы:

1. Что такое главные центральные оси сечения и главные плоскости изгиба?
2. Чем различается изгиб в главной и неглавной плоскостях?
3. Какая геометрическая характеристика сечения определяет прочность по нормальным напряжениям при изгибе?
4. Как находятся опасные точки при косом изгибе?
5. Как определяется положение нулевой линии при косом изгибе?
6. Как определяется момент сопротивления сечения?

## Лекция 9

### Нулевая линия. Расчет на прочность.

Как было ранее сказано, косой изгиб возникает в том случае, когда внешние силы, перпендикулярные оси стержня, не лежат в плоскости, проходящей через главную ось его поперечного сечения (рис. 9.1). В этом случае возникающий в поперечном сечении изгибающий момент можно разложить на два изгибающих момента, действующих в плоскостях, проходящих через главные оси сечения. Таким образом, косой изгиб можно рассматривать как сочетание двух плоских изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях.

При косом изгибе нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения будут равны алгебраической сумме напряжений от изгиба в обеих плоскостях.

Рассмотрим, например, точку *C* опорного сечения (Рисунок 9.1), имеющую координаты *x* и *y,* относительно главных осей [8-12]. В этом сечении:

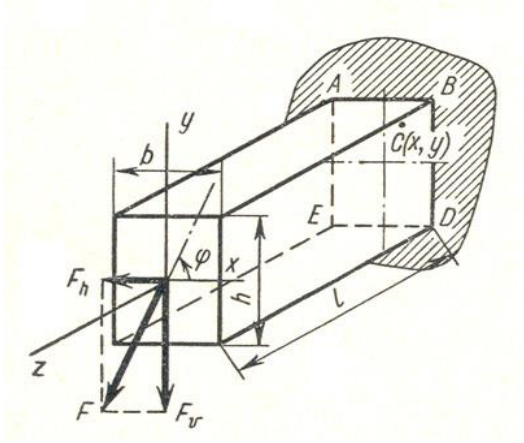
а) изгибающий момент, возникающий при изгибе стержня в вертикальной плоскости с нейтральной осью *x,*

$$M_x=F_v l=Fl\sin\varphi; \qquad (9.1)$$

б) изгибающий момент, возникающий при изгибе стержня в горизонтальной плоскости с нейтральной осью *y,*

$$M_y=F_h l=Fl\cos\varphi. \qquad (9.2)$$

Здесь $F_v$ и $F_h$ – вертикальная и горизонтальная составляющие силы *F; l* – длина балки; $\varphi$ – угол наклона силовой плоскости относительно оси *x.*




9.1. Косой изгиб.

При изгибе в вертикальной плоскости в верхней половине балки (в том числе и в точке *C*) возникают растягивающие напряжения, в нижней половине балки – сжимающие, так как выпуклая сторона балки будет наверху.

Напряжения в точке *C* определяем последующей формуле, уже известной из теории плоского изгиба:

$$\sigma_1=M_x\, y/I_x \qquad (9.3)$$

где *y* — расстояние от нейтральной оси *x* до точки *C; $I_x$* — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси *x.*

Вследствие изгиба в горизонтальной плоскости в правой половине балки, а следовательно, и в точке *C* возникают растягивающие напряжения, а в левой половине балки – сжимающие, так как выпуклая сторона балки при

изгибе в горизонтальной плоскости будет справа. В этом легко убедиться, изогнув гибкую линейку в горизонтальной плоскости.

Напряжения в точке *C* при этом будут определяться по аналогичной формуле (9.3):

$$\sigma_2 = M_y\, x / I_y$$

где $x$ – расстояние от оси $y$ (нейтральной оси при изгибе в горизонтальной плоскости) до точки *C;* $I_y$ – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси *y.* Суммарное напряжение в точке С

$$\sigma = M_x\, y / I_x + M_y\, x / I_y \qquad (9.4)$$

Эта формула справедлива и при любой другой форме сечения балки.

Если, сечение имеет выступающие угловые точки, для которых $x_{max}$ и $y_{max}$ достигаются одновременно (прямоугольник, двутавр), то наибольшие по значению напряжения возникают в этих точках:

$$\sigma = \pm M_x / W_x \pm M_y / W_y \qquad (9.5)$$

где $W_x = 2I_x/h$ – момент сопротивления сечения относительно оси $x$; $W_y = 2I_y / b$ – момент сопротивления сечения относительно оси $y$.

Очевидно, что опасными будут те угловые точки сечения, где суммируются напряжения одного знака.

Для случая, изображенного на рис. 9.2, такими точками будут точки *B* и *E,* при этом точка *B* находится в растянутой зоне, а точка *E* — в сжатой. Поэтому напряжения в точках *B* и *E* равны:

$$\sigma_B = M_x / W_x + M_y / W_y; \quad \sigma_E = -M_x / W_x - M_y / W_y. \qquad (9.6)$$

Для сечения произвольного очертания, не имеющего выступающих угловых точек, необходимо предварительно найти «опасные» точки, т. е. те точки сечения, в которых будут действовать наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения (рис. 9.2).

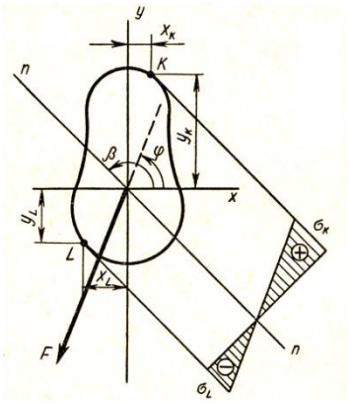



Рисунок 9.2. Положение нулевой линии при косом изгибе.

Это производится следующим образом. Вначале определяется положение нулевой линии при косом изгибе, т. е. определяется геометрическое место точек сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю. Другими словами, определяется линия, разделяющая растянутую и сжатую части сечения. Пусть это будет линия *nn.*

При изгибе напряжения возрастают по мере удаления от нулевой линии.

Это видно из того, что уравнение (9.4) представляет собой уравнение плоскости, проходящей через нулевую линию. Ордината, замеренная по нормали от поперечного сечения до этой плоскости, численно равна напряжению в данной точке. Она будет наибольшей для той точки, которая дальше всех отстоит от нулевой линии.

Учитывая это, заключаем, что точками, в которых следует проверять напряжения, будут точки, наиболее удаленные от нулевой линии, т. е. точки *K* и *L*. При материале, одинаково работающем на растяжение и сжатие, опасной является та из указанных точек, в которой возникает большее (по модулю) напряжение.

Уравнение нулевой линии получим, приравняв правую часть формулы (9.4) нулю:

$$M_x\, y_0 / I_x + M_y\, x_0 / I_y = 0$$

Или

$$M_x( y_0 / I_x + K\, x_0 / I_y) = 0 \qquad (9.7)$$

где в соответствии с формулой (9.7)

$$K = M_y / M_x = ctg\varphi, \qquad (9.8)$$

а $x_0$ *и* $y_0$ – текущие координаты точек нулевой линии.

Так как $M_x \neq 0$ , то

$$y_0/I_x + Kx_0/I_y=0 \qquad (9.9)$$

Это и есть уравнение нулевой линии.

Как видим, это уравнение прямой линии, проходящей через начало координат. Разделив обе части уравнения на $x_0$, получим

$$y_0/(x_0 I_x)+K/I_y=0. \qquad (9.10)$$

Но отношение $y_0/x_0 = tg\beta$ – тангенс угла наклона нулевой линии к оси $x$, т.е. ее угловой коэффициент. Следовательно, $tg\beta/ I_x + K/I_y=0$ или

$$k= tg\beta= - KI_x/I_y= - I_x/(I_y\, ctg\beta). \qquad (9.11)$$

Как видно из этого уравнения, при $I_x \neq I_y$ угол $\beta$ не равен углу $\varphi$, т. е. нулевая линия не перпендикулярна силовой линии, как это имело место при плоском (простом) изгибе. Только в частном случае, когда $I_x=I_y$ (круг, квадрат и т. п.), имеем

$$tg\beta = - ctg\varphi = - tg\,(90° - \varphi)= tg(\varphi - 90°), \text{ т.е. } \beta = \varphi - 90°.$$

Следовательно, в этом частном случае ($I_x=I_y$) нулевая линия перпендикулярна силовой линии, т. е. имеет место плоский изгиб.

Следует отметить, что нулевая и силовая линии размещаются в смежных квадрантах.

Если, например, силовая линия проходит через I и III квадранты ($0<\varphi<90°$), то в соответствии с формулой (9.7) получим для $\beta$ значение меньше 90° и притом со знаком минус. Это означает, что угол $\beta$ следует отложить от оси $x$ по часовой стрелке, т. е. нулевая линия пройдет через IV и II квадранты.

Определив положение нулевой линии, и найдя наиболее удаленные от нулевой линии точки поперечного сечения (опасные точки), можно произвести проверку прочности сечения.

Если материал балки по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, то проверку прочности следует производить для обеих точек, наиболее удаленных от нулевой линии (точки $K$ и $L$ на рис. 9.2).

В указанном случае, считая, что стержень представляет консоль, как на рис. 9. 1, условия прочности запишутся в виде

$$\sigma_K = + M_x y_K/I_x + M_y x_K/I_y \leq [\sigma_p] \qquad (9.12)$$

$$\sigma_L = - M_x y_L/I_x - M_y x_L/I_y \leq [\sigma_c] \qquad (9.13)$$

При равенстве $[\sigma_p] = [\sigma_c]$, т.е. для пластичных материалов, расчет, как уже указывалось, выполняется для одной точки, например в случае, представленном на рис. 9.3, для, точки *K,* так как $\sigma_K > \sigma_L$.
Для сечений типа прямоугольника, двутавра и т. п. условие прочности получим на основании формулы (9.2):

$$\sigma = M_x / W_x + M_y / W_y \le [\sigma] \qquad (9.14)$$

В случае хрупкого материала, например чугуна, в формулу (9.10) следует подставить допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma_p]$.

Определение требуемых размеров поперечного сечения выполняют, используя (в зависимости от формы сечения) формулы (9.8), (9.9) или (9.10), при этом обычно расчет приходится выполнять способом повторных попыток.

Приняв какие-либо размеры сечения, проверяют, удовлетворяются ли условия прочности: формулы (9.8), (9.9) или (9.10). Если расхождение между рабочими и допускаемыми напряжениями значительно, принимают другие размеры сечения и повторяют расчет. Указанные попытки производят до тех пор, пока расхождение между $\sigma_{max}$ и $[\sigma]$ не будет превышать 5–10 %. При подборе сечений прокатных балок используют таблицы сортамента.

Подбор круглого сечения производится по формуле простого (плоского) изгиба по суммарному изгибающему моменту

$$M_{\text{ńóě}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}\,, \qquad (9.15)$$

поскольку для круга нулевая линия перпендикулярна линии действия $M_{сум}$ .

Представляет определенный практический интерес задача о выборе такой формы поперечного сечения, при которой расход материала при косом изгибе будет минимальным. Нетрудно показать, что для прямоугольного сечения (см. рис. 9.2) минимальный расход материала (минимальная площадь сечения) получится при условии $h/b = M_x / M_y$.

Однако прямоугольное сечение не является наивыгоднейшим при косом изгибе. Наиболее выгодными являются коробчатые, тонкостенные сечения.

Контрольные вопросы:

1. Условия прочности при косом изгибе?
2. Как определяется полный изгибающий момент при косом изгибе?

3. Дать определение сложной деформации?
4. Где используется принцип независимости действия сил при сложной деформации, когда он применим?
5. Как определяется положение нулевой линии?
6. Как определить положение опасных точек при косом изгибе?

## Лекция № 10

**Внецентренное сжатие или растяжение.**

Для инженерной практики очень важным видом деформации является совместное действие изгиба и сжатия или растяжения. Например, если на балку одновременно действуют поперечные и продольные силы, первые вызывают поперечный изгиб, а вторые – растяжение или сжатие. Вторым важным случаем сложения деформаций от изгиба и от продольных сил является так называемое внецентренное сжатие или растяжение, вызываемое одними продольными силами. Этот вид деформации получается при действии на стержень двух равных и прямопротивоположных сил *P*, направленных по прямой *AA*, параллельной оси стержня (Рис.10.1 а) [8-12]. Расстояние точки *A* от центра тяжести сечения *OA=e* называется эксцентриситетом. Рассмотрим сначала случай внецентренного сжатия, как имеющий большее практическое значение.

Дальнейшей задачей явится нахождение наибольших напряжений в материале стержня и проверка прочности. Для решения этой задачи приложим в точках *O* по две равные и противоположные силы *P* (Рис. 10.1 б). Это не нарушит равновесия стержня в целом и не изменит напряжений в его сечениях. Силы *P*, зачеркнутые один раз, вызовут осевое сжатие, а пары сил *P*, зачеркнутые дважды, вызовут чистый изгиб моментами $M_0 = Pe$. Расчетная схема стержня показана на Рис.10.1 в. Так как плоскость действия изгибающих пар *OA* может не совпадать ни с одной из главных плоскостей инерции стержня, то в общем случае имеет место комбинация продольного сжатия и чистого косого изгиба. Так как при осевом сжатии и чистом изгибе напряжения во всех сечениях одинаковы, то проверку прочности можно произвести для любого сечения, хотя бы С—С (Рис.10.1 б, в). Отбросим верхнюю часть стержня и оставим нижнюю (Рис.10.1 г). Пусть оси *Oy* и *Oz* будут главными осями инерции сечения.

Координаты точки *A*, — точки пересечения линии действия сил *P* с плоскостью сечения, — пусть будут $y_P$ и $z_P$. Условимся выбирать положительные направления осей *Oy* и *Oz* таким образом, чтобы точка *A* оказалась в первом квадранте. Тогда $y_P$ и $z_P$ будут положительны.

Для того чтобы отыскать наиболее опасную точку в выбранном сечении, найдем нормальное напряжение $\sigma$ в любой точке *B* с координатами *z* и *y*.

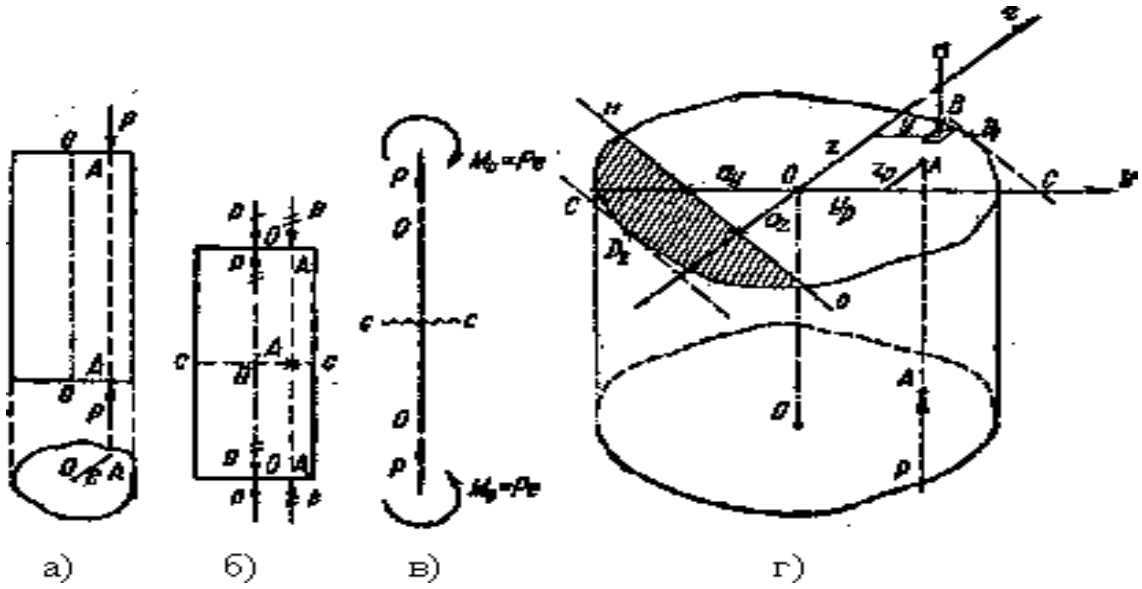



**Рис.10.1.** а) расчетная схема б) преобразование нагрузок в) приведенная расчетная схема г) механизм исследования напряжений

Напряжения в сечении С — С будут складываться из напряжений осевого сжатия силой *P* и напряжений от чистого косого изгиба парами с моментом *Pe*, где $e = OA$. Сжимающие напряжения от осевых сил *P* в любой точке равны P/A, где A— площадь поперечного сечения стержня; что касается косого изгиба, то заменим его действием изгибающих моментов в главных плоскостях. Изгиб в плоскости *x Oy* вокруг нейтральной оси *Oz* будет вызываться моментом $Py_P$ и даст в точке *B* нормальное сжимающее напряжение

$$\frac{Py_p \cdot y}{J_z}$$

Точно так же нормальное напряжение в точке *B* от изгиба в главной плоскости *x Oz*, вызванное моментом $Pz_P$, будет сжимающим и выразится формулой $\frac{Pz_p \cdot z}{J_y}$.

Суммируя напряжения от осевого сжатия и двух плоских изгибов и считая сжимающие напряжения отрицательными, получаем следующую формулу для напряжения в точке *B*:

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{Py_p y}{J_z} - \frac{Pz_p z}{J_y} = -P\left(\frac{1}{A} + \frac{y_p y}{J_z} + \frac{z_p z}{J_y}\right) \quad (10.1)$$

Эта формула годится для вычисления напряжений в любой точке любого сечения стержня, стоит только вместо *y* и *z* подставить координаты

точки относительно главных осей с их знаками. В случае внецентренного растяжения знаки всех составляющих нормального напряжения в точке *B* изменятся на обратные. Поэтому для того, чтобы получать правильный знак напряжений как при внецентренном сжатии, так и при внецентренном растяжении, нужно, кроме знаков координат *y* и *z*, учитывать также и знак силы *P*; при растяжении перед выражением

$$P\left(\frac{1}{A}+\frac{y_p y}{J_z}+\frac{z_p z}{J_y}\right)$$

должен стоять знак плюс, при сжатии — минус. Полученной формуле можно придать несколько иной вид; вынесем за скобку множитель $\frac{P}{F}$; получим:

$$\sigma=-\frac{P}{F}\left[1+\frac{y_p y}{i_z^2}+\frac{z_p z}{i_y^2}\right] \quad (10.2)$$

Здесь $i_z$ и $i_y$ — радиусы инерции сечения относительно главных осей (вспомним, что $J_z=i_z^2\cdot F$ и $J_y=i_y^2\cdot F$).

## Нулевая линия

Для отыскания точек с наибольшими напряжениями следует так выбирать *y* и *z*, чтобы $\sigma$ достигло наибольшей величины. Переменными в формулах (10.1) и (10.2) являются два последних слагаемых, отражающих влияние изгиба. А так как при изгибе наибольшие напряжения получаются в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси (нулевой линии), то здесь, как и при косом изгибе, надо отыскать положение нейтральной оси. Обозначим координаты точек этой линии через $y_0$ и $z_0$; так как в точках нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю, то после подстановки в формулу (10.2) значений $y_0$ и $z_0$ получаем:

$$0=-\frac{P}{A}\left[1+\frac{y_p y_0}{i_z^2}+\frac{z_p z_0}{i_y^2}\right],$$

или

$$1+\frac{y_p y_0}{i_z^2}+\frac{z_p z_0}{i_y^2}=0 \quad (10.3)$$

Это и будет уравнение нейтральной (нулевой линии) оси. Очевидно, мы получили уравнение прямой, не проходящей через центр тяжести сечения. Чтобы построить эту прямую, проще всего вычислить отрезки, отсекаемые ею на осях координат. Обозначим эти отрезки $a_y$ и $a_z$. Чтобы найти отрезок $a_y$, отсекаемый на оси *Oy*, надо в уравнении (10.3) положить

$$z_0 = 0;\ y_0 = a_y;$$

тогда мы получаем:

$$1 + \frac{y_P a_y}{i_z^2} = 0 \quad \text{и} \quad a_y = -\frac{i_z^2}{y_P}; \qquad (10.4)$$

подобным же образом, полагая

$$y_0 = 0;\ z_0 = a_z,$$

получаем:

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_P} \qquad (10.5)$$

Если величины $y_P$ и $z_P$ положительны, то отрезки $a_y$ и $a_z$ будут отрицательны, т. е. нейтральная ось будет расположена по другую сторону центра тяжести сечения, чем точка *A* (Рис.10.3 г). Нейтральная ось делит сечение на две части — сжатую и растянутую; на Рис.10.3 г растянутая часть сечения заштрихована. Проводя к контуру сечения касательные, параллельные нейтральной оси, получаем две точки $D_1$ и $D_2$, в которых будут наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения. Измеряя координаты *y* и *z* этих точек и подставляя их значения в формулу (10.1), вычисляем величины наибольших напряжений в точках $D_1$ и $D_2$:

$$\sigma_{(1,2)} = -P\left[\frac{1}{A} + \frac{y_P y_{(1,2)}}{J_z} + \frac{z_P z_{(1,2)}}{J_y}\right]$$

## Расчет на прочность

Если материал стержня одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности получает такой вид:

$$|\sigma_{max}| = P\left[\frac{1}{A} + \frac{y_P y_1}{J_z} + \frac{z_P z_1}{J_y}\right] \le [\sigma]$$

Для поперечных сечений с выступающими углами, у которых обе главные оси инерции являются осями симметрии (прямоугольник, двутавр и др.) $y_1 = y_{max}$ и $z_1 = z_{max}$, поэтому формула упрощается, и мы имеем:

$$|\sigma_{max}| = P\left[\frac{1}{A} + \frac{y_P}{W_z} + \frac{z_P}{W_y}\right] \le [\sigma]$$

Если же материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то необходимо проверить прочность стержня, как в растянутой, так и в сжатой зонах [8-10]. Однако может случиться, что и для таких материалов будет достаточно одной проверки прочности. Из формул (10.4) и (10.5) видно, что положение точки *A* приложения силы и положение нейтральной оси связаны: чем ближе подходит точка *A* к центру сечения, тем меньше величины $y_P$ и $z_P$ и тем больше отрезки $a_y$ и $a_z$. Таким образом, с приближением точки *A* к центру тяжести сечения нейтральная ось удаляется от него, и наоборот. Поэтому при некоторых положениях точки *A* нейтральная ось будет проходить *вне* сечения и все сечение будет работать на напряжения одного знака. Очевидно в этом случае всегда достаточно проверить прочность материала в точке $D_1$. Разберем практически важный случай, когда к стержню прямоугольного сечения (Рис. 10.2) приложена внецентренная сила *P* в точке *A*, лежащей на главной оси сечения *Oy*. Эксцентриситет *OA* равен *e*, размеры сечения *b* и *d*. Применяя полученные выше формулы, имеем:

$$y_p = +e;\ z_p = 0$$

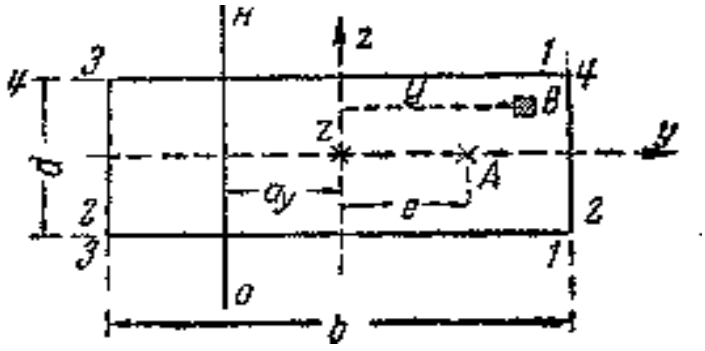



**Рис.10.2.** Расчетная схема бруса прямоугольного сечения.

Напряжение в любой точке *B* равно

$$\sigma = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{y_P y F}{J_z}\right) = \frac{P}{bd}\left(1 + \frac{12ey}{b^2}\right),$$

так как

$$\frac{A}{J_z} = \frac{12bd}{b^3 d} = \frac{12}{b^2}$$

Напряжения во всех точках линии, параллельной оси *Oz*, одинаковы. Положение нейтральной оси определяется отрезками

$$a_y = -\frac{i_z^2}{e} = -\frac{b^2}{12e}; \; a_z = \infty$$

Нейтральная ось параллельна оси *Oz*; точки с наибольшими растягивающими и сжимающими напряжениями расположены на сторонах 1—1 и 3—3.

Значения $\sigma_{max}$ и $\sigma_{min}$ получатся, если подставить вместо *y* его значения $\pm\frac{b}{2}$. Тогда

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{P}{bd}\left[1 \pm \frac{6e}{b}\right]$$

**Контрольные вопросы:**

1. Как находятся опасные точки при внецентренном растяжении (сжатии)?
2. Как влияет эксцентриситет приложенной нагрузки на нормальные напряжения?
3. Как строится нулевая линия при внецентренном растяжении?
4. Как определяется положение нулевой линии при внецентренном сжатии?
5. Условие прочности при внецентренном растяжении?
6. Какие геометрические характеристики сечения влияют на нормальные напряжения при внецентренном растяжении?

## Лекция № 11.

## Ядро сечения при внецентренном сжатии

При конструировании стержней из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (бетон), весьма желательно добиться того, чтобы все сечение работало лишь на сжатие. Этого можно достигнуть, не давая точке приложения силы *P* слишком далеко отходить от центра тяжести сечения, ограничивая величину эксцентриситета [8-12].

Конструктору желательно заранее знать, какой эксцентриситет при выбранном типе сечения можно допустить, не рискуя вызвать в сечениях стержня напряжений разных знаков. Здесь вводится понятие о так называемом ядре сечения. Этим термином обозначается некоторая область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой можно располагать точку приложения силы P, не вызывая в сечении напряжений разного знака. Пока точка *A* располагается внутри ядра, нейтральная ось не пересекает контура сечения, все оно лежит по *одну* сторону от нейтральной оси и, стало быть, работает лишь на сжатие. При удалении точки *A* от центра тяжести сечения нейтральная ось будет приближаться к контуру; граница ядра определится тем, что при расположении точки *A* на этой границе нейтральная ось подойдет вплотную к сечению, коснется его (рисунок 11.1).

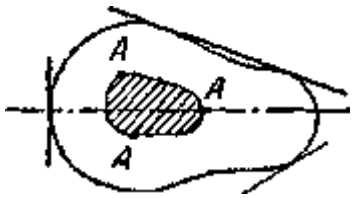



**Рис.11.1** Комбинации положения сжимающей силы и нейтральной линии

Таким образом, если мы будем перемещать точку *A* так, чтобы нейтральная ось катилась по контуру сечения, не пересекая его, то точка А обойдет по границе ядра сечения. Если контур сечения имеет «впадины», то нейтральная ось будет катиться по огибающей контура. Чтобы получить очертание ядра, необходимо дать нейтральной оси несколько положений, касательных к контуру сечения, определить для этих положений отрезки $a_y$ и $a_z$ и вычислить координаты $y_P$ и $z_P$ точки приложения силы по формулам, вытекающим из известных зависимостей:

$$y_P = -\frac{i_z^2}{a_y};\ z_P = -\frac{i_y^2}{a_z}$$

это и будут координаты точек контура ядра $y_я$ и $z_я$.

При многоугольной форме контура сечения (Рис.11.2), совмещая последовательно нейтральную ось с каждой из сторон многоугольника, мы по отрезкам $a_y$ и $a_z$ определим координаты $y_я$ и $z_я$ точек границы ядра, соответствующих этим сторонам. При переходе от одной стороны контура сечения к другой нейтральная ось будет вращаться вокруг вершины, разделяющей эти стороны; точка приложения силы будет перемещаться по границе ядра между полученными уже точками. Установим, как должна перемещаться сила *P*, чтобы нейтральная ось проходила все время через одну и ту же точку *B* ($y_B$, $z_B$) — вращалась бы около нее. Подставляя координаты этой точки нейтральной оси в известное уравнение нейтральной оси (линии), получим [8-15]:

$$1+\frac{y_P y_B}{i_z^2}+\frac{z_P z_B}{i_y^2}=0$$

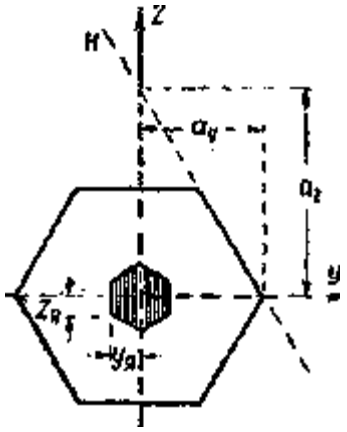



**Рис. 11.2.** Ядро сечения для многоугольной формы поперечного сечения

Таким образом координаты $y_P$ и $z_P$ точки $A$ приложения силы *P* связаны линейно. При вращении нейтральной оси около постоянной точки В точка А приложения силы движется по прямой. Обратно, перемещение силы *P* по прямой связано с вращением нейтральной оси около постоянной точки. На Рис.11.3 изображены три положения точки приложения силы на этой прямой и соответственно три положения нейтральной оси. Таким образом, при многоугольной форме контура сечения очертание ядра между точками, соответствующими сторонам многоугольника, будет состоять из отрезков прямых линий.

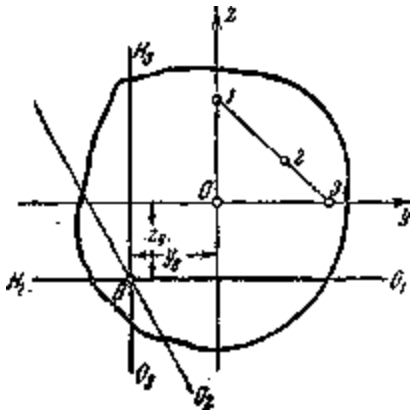


**Рис. 11.3.** Динамика построения ядра сечения

Если контур сечения целиком или частично ограничен кривыми линиями, то построение границы ядра можно вести по точкам. Рассмотрим несколько простых примеров построения ядра сечения. При выполнении этого построения для прямоугольного поперечного сечения воспользуемся полученными формулами. Для определения границ ядра сечения при движении точки *A* по оси *Oy* найдем то значение $e = e_0$, при котором нейтральная ось займет положение $H_1O_1$ (Рисунок 11.4). Имеем:

$$a_y = -\frac{b}{2} = -\frac{b^2}{12e_0},$$

откуда

$$e_0 = \frac{b}{6}$$

Таким образом, границы ядра по оси *Oy* будут отстоять от центра сечения на 1/6 величины *b* (Рис.11.4, точки 1 и 3); по оси *Oz* границы ядра определятся расстояниями $\frac{d}{6}$ (точки 2 и 4).

Для получения очертания ядра целиком изобразим положения нейтральной оси $H_1O_1$ и $H_2O_2$, соответствующие граничным точкам 1 и 2. При перемещении силы из точки 1 в точку 2 по границе ядра нейтральная ось должна перейти из положения $H_1O_1$ в положение $H_2O_2$, все время касаясь сечения, т. е. поворачиваясь вокруг точки *D*.

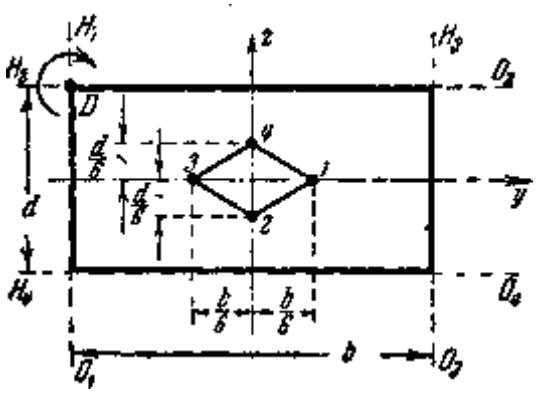


**Рис. 11.4.** Построение ядра для прямоугольного сечения.

Для этого сила должна двигаться по прямой 1 — 2. Точно так же можно доказать, что остальными границами ядра будут линии 2—3, 3—4 и 4—1. Таким образом, для прямоугольного сечения ядро будет ромбом с диагоналями, равными одной трети соответствующей стороны сечения. Поэтому прямоугольное сечение при расположении силы по главной оси работает на напряжения одного знака, если точка приложения силы не выходит за пределы средней трети стороны сечения.

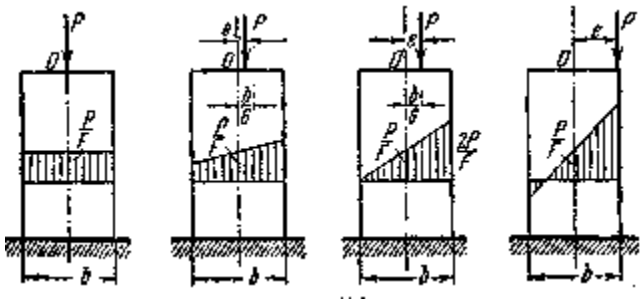


**Рис. 11.5.** Динамика изменения напряжений при изменении эксцентриситета.

Эпюры распределения нормальных напряжений по прямоугольному сечению при эксцентриситете, равном нулю, меньшем, равном и большем одной шестой ширины сечения, изображены на Рис.11.5. Отметим, что при всех положениях силы *P* напряжение в центре тяжести сечения (точка *O*) одинаково и равно P/A и что сила *P* не имеет эксцентриситета по второй главной оси. Для круглого сечения радиуса *r* очертание ядра будет по симметрии кругом радиуса $r_0$. Возьмем какое-либо положение нейтральной оси, касательное к контуру. Ось *Oy* расположим перпендикулярно к этой касательной. Тогда:

$$a_y = r; \qquad a_z = \infty;$$

$$z_g = r_0 = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{\frac{\pi r^4}{4}}{\frac{\pi r^2}{r}} = -\frac{r}{4}$$

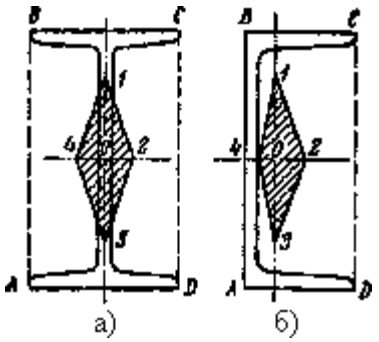



**Рис. 11.6.** Ядро сечения для двутавра — а) и швеллера — б)

Таким образом, ядро представляет собой круг с радиусом, вчетверо меньшим, чем радиус сечения. Для двутавра нейтральная ось при обходе контура не будет пересекать площади поперечного сечения, если будет касаться прямоугольного контура *ABCD,* описанного около двутавра (Рис.11.6а). Следовательно, очертание ядра для двутавра имеет форму ромба, как и для прямоугольника, но с другими размерами. Для швеллера, как и для двутавра, точки 1, 2, 3, 4 контура ядра (Рис.11.6 б) соответствуют совпадению нейтральной оси со сторонами прямоугольника *ABCD*.

# Контрольные вопросы:

1. Каким свойством обладают точки, принадлежащие ядру сечения, и как оно строится?
2. Влияет ли эксцентриситет приложенной нагрузки на форму ядра сечения?
3. Зависит ли форма ядра сечения от размеров сечения?
4. Форма ядра сечения для прямоугольного сечения?
5. Как определяется форма ядра сечения для двутавра?
6. Построение ядра сечения для швеллера?
7. Как определяется ядро сечения для сечения произвольной формы?
8. Форма ядра сечения для круглого сечения?

## *Лекция 12.*

### *Расчет статически определимых рам*

Системы с нулевой степенью свободы называются статически определимыми. В статически определимых системах усилия можно определить методом сечений с применением уравнений равновесия статики. Поскольку уравнения равновесия – линейные, для определения внутренних усилий можно пользоваться принципом независимости действия сил. Уравнения равновесия можно записать в различных формах, поэтому разнообразны методы определения усилий: метод сечений, метод вырезания узлов, метод замены стержней и т.п. Деформации элементов, осадка опор и другие факторы геометрического характера в уравнения равновесия не входят и поэтому не влияют на значения внутренних усилий в статически определимых системах. При отсутствии нагрузки в статически определимых системах внутренние усилия равны нулю.

При определении внутренних усилий в балке используют метод сечений и правило знаков, известные из сопротивления материалов. Метод сечений заключается в следующем: рассекаем балку в интересующем сечении на две части и рассматриваем равновесие одной из частей (правой или левой) в отдельности [8-12].

Поперечная сила Q положительна, если на левом торце правой балки она направлена снизу вверх, а на правом торце левой части сверху вниз, т.е. вызывает поворот сечений по часовой стрелке (Рисунок 12.1).

Изгибающий момент M положителен, когда на левом торце правой части балки он направлен по часовой стрелке, а на правом торце левой части – против часовой стрелки (Рисунок 12.1).

Продольная сила считается положительной, когда она вызывает деформацию растяжение (Рисунок 12.1).

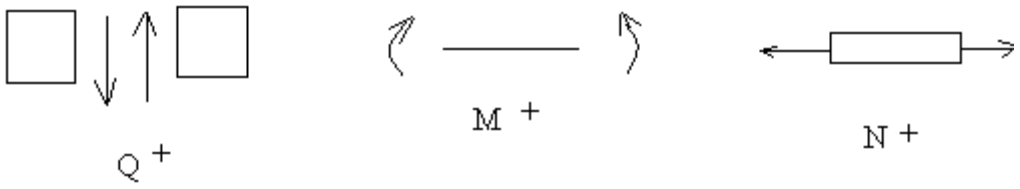



Рисунок 12.1. Правило знаков для внутренних усилий

Порядок расчета следующий [9,25]:

1. Из уравнения равновесия всей системы определяются опорные реакции.

2. Для определения внутренних усилий на каждом участке используем метод сечений. Разделяя на каждом участке систему на две части, из уравнения равновесия левой или правой части находятся искомые усилия.
3. При построении эпюры поперечных сил и продольных сил положительные значения ординат откладывают вверх от оси эпюры, а отрицательные – вниз. При построении эпюры изгибающих моментов положительные значения откладывают вниз от оси эпюры, отрицательные – вверх; в результате этого эпюры изгибающих моментов строятся на растянутых волокнах.

Используя метод сечений, поперечная сила Q равна (по величине и знаку) сумме проекций всех внешних сил, приложенных к левой части на нормаль к ее оси, проведенную в рассматриваемом поперечном сечении, или сумме проекций всех внешних сил, взятой с обратным знаком, приложенных к правой части балки:

$$Q = \sum (Y)^{лев} = -\sum (Y)^{пр} \qquad (12.1)$$

Изгибающий момент M равен (по числовой величине и знаку) сумме моментов относительно оси z (проходящей через центр тяжести рассматриваемого поперечного сечения балки перпендикулярно плоскости действия внешних сил) всех внешних сил, или сумме моментов, взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части балки:

$$M = \sum (M)^{лев} = -\sum (M)^{пр} \qquad (12.2)$$

при этом моменты внешних сил положительны, когда они действуют по часовой стрелке.

Продольная сила N равна (по числовой величине и знаку) сумме проекций всех внешних сил, приложенных к левой части балки, на ее ось или сумме проекций (на ту же ось), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части балки:

$$N = \sum (X)^{лев} = -\sum (X)^{пр} \qquad (12.3)$$

при этом проекции внешних сил на ось балки положительны, когда они действуют справа налево.

Рассмотрим расчет статически определимой рамы.
Задана плоская рама (Рисунок 12.2), находящаяся под действием сосредоточенных сил. Система состоит из трех стержней, соединенных между собой жестко, и связана с землей тремя опорами в точках A,C,B.

Степень статической неопределимости n=0, три указанные связи достаточны для равновесия системы.

В начале необходимо определить всю внешнюю нагрузку, к которой относятся помимо активной нагрузки и реакции опор. Так как система статически определимая, то реакции определяются из уравнений равновесия для внешних сил. При трех шарнирно подвижных опорах рекомендуются для

упрощения составлять уравнения статики в виде суммы моментов относительно точек пересечения двух других реакций; при наличии шарнирно неподвижной опоры одно уравнение статики записывается в виде суммы моментов всех сил относительно неподвижной опоры, а остальные – в виде суммы моментов относительно точек пересечения двух других реакций или в виде суммы проекций всех сил на координатные оси.

Опорные реакции $R_a$ , $R_b$ , $R_c$ определяются из трех уравнений статики:

$\sum M_D=0$, точка D является точкой пересечения прямых AD и DC;
$\sum M_K=0$, точка К является точкой пересечения прямых СК и КВ;
$\sum X=0$

Из этих уравнений определяются три неизвестные реакции:

$$P_1a + P_2(a+b+c+d) + P_3h/2 - R_b(a+b+c+d)=0,$$
$$R_a(a+b+c+d) - P_1(b+c+d) - P_2d - P_3h/2=0,$$
$$P_3 - R_c=0$$

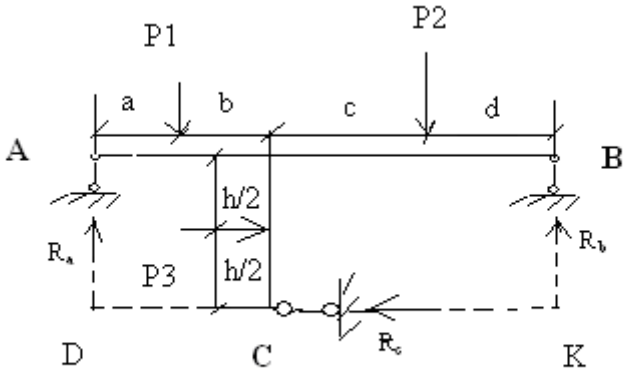



Рисунок 12.2

При построении эпюр внутренних усилий используется метод сечений [8-12]. Рама разбивается на участки, рассматривая равновесие левой или правой части на каждом участке, аналитически определяются выражения для трех внутренних усилий: изгибающий момент, поперечная и продольная силы. На рисунке 12.2 рама состоит из трех стержней, на каждом стержне можно выделить по два участка, т.е. всего количество участков равно 6.

При построении эпюр внутренних сил используют следующие правила [8-12]:

1. Если на участке нет внешней распределенной нагрузки (q=0), то эпюра поперечных сил Q на этом участке ограничена прямыми, параллельными оси *x*, а эпюра изгибающих моментов представляет наклонные прямые;

2.В сечениях, где приложена пара сил, эпюра изгибающих моментов имеет скачок на величину момента этой пары;

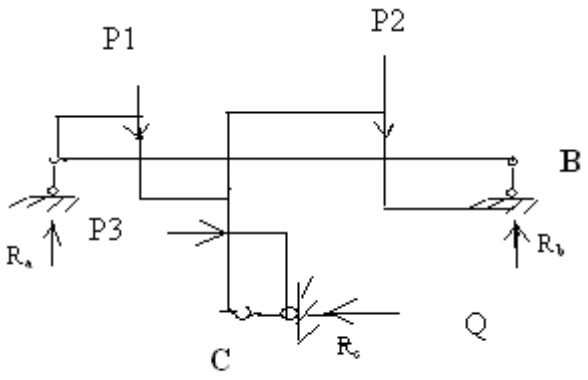
3.В сечениях, где приложены сосредоточенные поперечные силы, эпюра Q имеет скачки на величину этих сил, а эпюра изгибающих моментов имеет изменение угла наклона (изломы) смежных участков эпюры;
4.На участках, загруженных сплошной равномерно распределенной нагрузкой, эпюра изгибающих моментов ограничена параболической кривой, а эпюра Q – наклонной прямой;
5.Каждая ордината эпюры поперечных сил $Q = \frac{dM}{dx}$ геометрически представляет собой тангенс образуемого с осью *x* угла наклона касательной к эпюре M в соответствующей точке;
6.Если на некотором участке:

а) Q>0, т.е. tgα>0, то момент возрастает;
б) Q<0, т.е. tgα<0, то момент убывает;
в) Q переходит через нуль, меняя знак с + на - , то M=$M_{max}$;
г) Q=0, т.е. tgα=0, то M= const.

7.Если на участке с равномерно распределенной нагрузкой поперечная сила в некотором сечении равна нулю, то в этом сечении изгибающий момент имеет экстремальное значение (максимум или минимум).

На рисунке 12.3 представлены эпюры поперечной силы и изгибающего момента для заданной рамы. Продольные силы равны нулю, т.е. стержни рамы работают на поперечный изгиб.

а)




в)

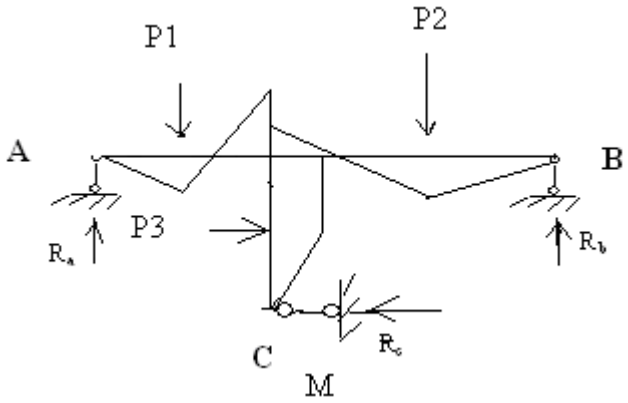


Рисунок 12.3. Эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента М.

Проверка правильности построения эпюр внутренних усилий

1. В узлах рамы должны удовлетворяться уравнения равновесия, т.е. вырезая каждый узел рамы в отдельности, продольные и поперечные силы в узлах должны удовлетворять следующим уравнениям статики: сумма проекций всех сил в узле (включая внешние) на направление оси *x* и *y* равно нулю, т.е.

$$\sum X=0; \quad \sum У=0$$

2. Реакции опор должны удовлетворять уравнениям равновесия для внешних сил.
3. В узлах рамы сумма моментов должна быть равна нулю.

**Контрольные вопросы:**

1. Какие усилия возникают в сечениях плоской рамы?
2. Каким методом определяются усилия в статически определимой раме?
3. Как определяются реакции связей в статически определимой раме?
4. При какой нагрузке эпюра изгибающих моментов представляет собой параболическую зависимость?
5. При какой нагрузке эпюра поперечных сил представляет собой наклонную прямую?
6. Когда в эпюре изгибающих моментов возникает экстремум?
7. Когда в эпюре изгибающих моментов возникает скачок?
8. Когда в эпюре поперечных сил возникает скачок?

## Лекция 13.

### Определение перемещений в статически определимых рамах

Для определения перемещений в статически определимой раме необходимо использовать интегралы Мора для различных видов деформаций, которые основаны на следующих теоремах и выражениях потенциальной энергии деформации [8-15].

При растяжении (сжатии) потенциальная энергия деформации упругой системы определяется следующим интегралом:

$$A = \sum \frac{1}{2} \int \frac{N^2 dx}{EA}$$

где N – продольная сила;
EA- жесткость при растяжении (сжатии), E – модуль упругости материала, A – площадь поперечного сечения стержня.

При кручении потенциальная энергия деформации упругой системы определяется следующим интегралом:

$$A = \sum \frac{1}{2} \int \frac{M_{кр}{}^2 dx}{GI_p}$$

где $M_{кр}$ – крутящий момент;
$GI_p$ - жесткость при кручении, G – модуль сдвига, $I_p$ – полярный момент инерции сечения.

При изгибе потенциальная энергия деформации упругой системы определяется следующим интегралом:

$$A = \sum \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dx}{EI}$$

где M–изгибающий момент;
EI- жесткость при изгибе, I – осевой момент инерции сечения.

При сдвиге потенциальная энергия деформации упругой системы определяется следующим интегралом:

$$A = \sum \frac{1}{2} \eta \int \frac{Q^2 dx}{GA}$$

где Q –поперечная сила;

GA- жесткость при сдвиге, G – модуль сдвига материала стержня, A – площадь поперечного сечения, η – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения.

Если одновременно осуществляются деформации растяжение, сжатие, кручение, изгиб и сдвиг, то, используя принцип независимости действия сил, полная потенциальная энергия деформации упругой системы будет равна сумме указанных интегралов. Рассмотрим следующие теоремы, необходимые для вывода формул для перемещений упругой системы.

## Теорема о взаимности работ

Рассмотрим 2 состояния балки (Рисунок 13.1).

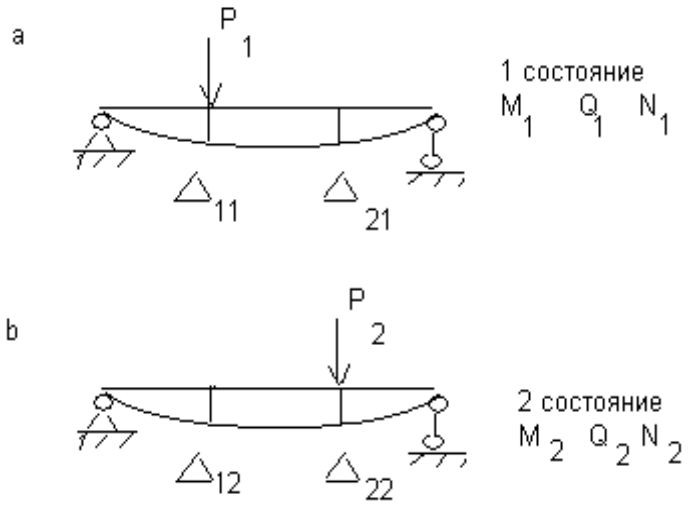



Рисунок 13.1

Работа сил 1 состояния на перемещениях по их направлению, вызванных силами 2 состояния, равна работе сил 2-го состояния на перемещениях по их направлению, вызванных силами 1 состояния, т.е.

$P_1\Delta_{12} = P_2\Delta_{21}$,
$A_{12} = A_{21}$

## Теорема о взаимности перемещений

Рассмотрим 2 состояния (Рисунок 13.2), вызванных действием единичных сил.

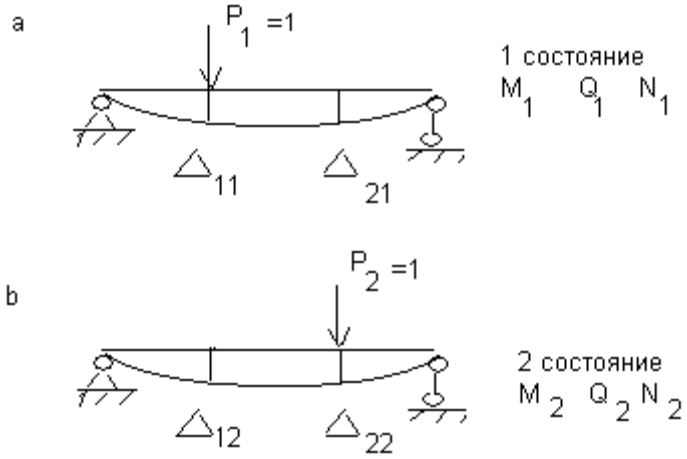



Рисунок 13.2

Перемещения от единичных сил обозначаются δ, тогда согласно теореме о взаимности работ (полагая $P_1 = P_2 = 1$), получаем следующее:

$$\delta_{12} = \delta_{21} ,$$

Для 2-х единичных состояний упругой системы перемещение по направлению 1-ой единичной силы, вызванное 2-ой единичной силой, равно перемещению по направлению 2-ой единичной силы, вызванное 1-ой единичной силой. Для элементов конструкций часто пренебрегают крутящими моментами, в основном наибольшее влияние на напряженно-деформированное состояние в них оказывают изгибающие моменты, продольные и поперечные силы.

На основании этих теорем получается следующая формула для определения перемещений в i – ом направлении, вызванное внешним воздействием «p»:

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{\overline{M}_i M_p dx}{EI} + \sum \int \frac{\overline{N}_i N_p dx}{EA} + \sum \int \eta \frac{\overline{Q}_i Q_p}{GA}$$

В правой части с черточкой обозначены соответственно изгибающий момент, продольная и поперечная силы в единичном состоянии, а $M_p$ , $Q_p$ , $N_p$ - соответственно изгибающий момент, поперечная и продольная силы, вызванные внешним воздействием «P».

При использовании этой формулы, необходимо в интересующем «i» направлении приложить единичные воздействия ($\overline{M}_i$, $\overline{N}_i$, $\overline{Q}_i$) и построить соответствующие единичные эпюры внутренних усилий, обозначенных с черточкой наверху. При определении .вертикальных смещений в качестве единичной силы необходимо приложить единичную вертикальную силу в интересующем сечении, при горизонтальном смещении – соответственно горизонтальную единичную силу; при определении угла поворота в сечении «i» необходимо в этом сечении приложить единичную пару сил.

Правило Верещагина

$$\Delta_{ip} = \sum\int \frac{\overline{M}_i M_p dx}{EI} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Omega_i \cdot \eta_i}{EI}$$

$\Omega_i$ площадь грузовой эпюры, $\eta_i$ – ордината под центром тяжести грузовой эпюры, взятая в единичной эпюре

Пример

Определить внутренние усилия при плоском изгибе для статически определимой рамы, представленной на рисунке 13.3. Сделать статические проверки. Определить горизонтальное смещение жесткого узла.

Дано:

H =4м; l =3м; P =30кН; q – 20кН/м; EI=const

Решение:

Определяем реакции опор $R_A$ , $R_B$ , $H_A$. Составляем уравнения статики:

$\sum M_A = 0$; $R_B = 50$кН

$\sum M_B = 0$; $R_A = 10$кН

$\sum X = 0$ ; $H_A = -30$кН

Для проверки полученных реакций составляем сумму проекций всех сил на вертикальную ось и сумму моментов относительно середины ригеля, т.е.:

$\sum У = 0$; $\sum M_C = 0$.

Внутренние усилия определяем на каждом участке, используя метод сечений. Эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил представлены на рисунке 13.3 b,c,d). Для определения горизонтального перемещения жесткого узла D строим единичную эпюру изгибающих моментов от горизонтальной единичной силы, приложенной в узле D, т.е. эпюру $M_1$ (рисунок 13.3 e). Используя интегралы Мора, определяется горизонтальной перемещение узла D.

$$\Delta_{ip} = \sum\int \frac{\overline{M}_i M_p dx}{EI} + \sum\int \frac{\overline{N}_i N_p dx}{EA} + \sum\int \eta \frac{\overline{Q}_i Q_p}{GA}$$

Пренебрегая растяжением и сдвигом, формула упрощается и имеет вид:

$$\Delta_D = \sum \int \frac{M_1 M dx}{EI}$$

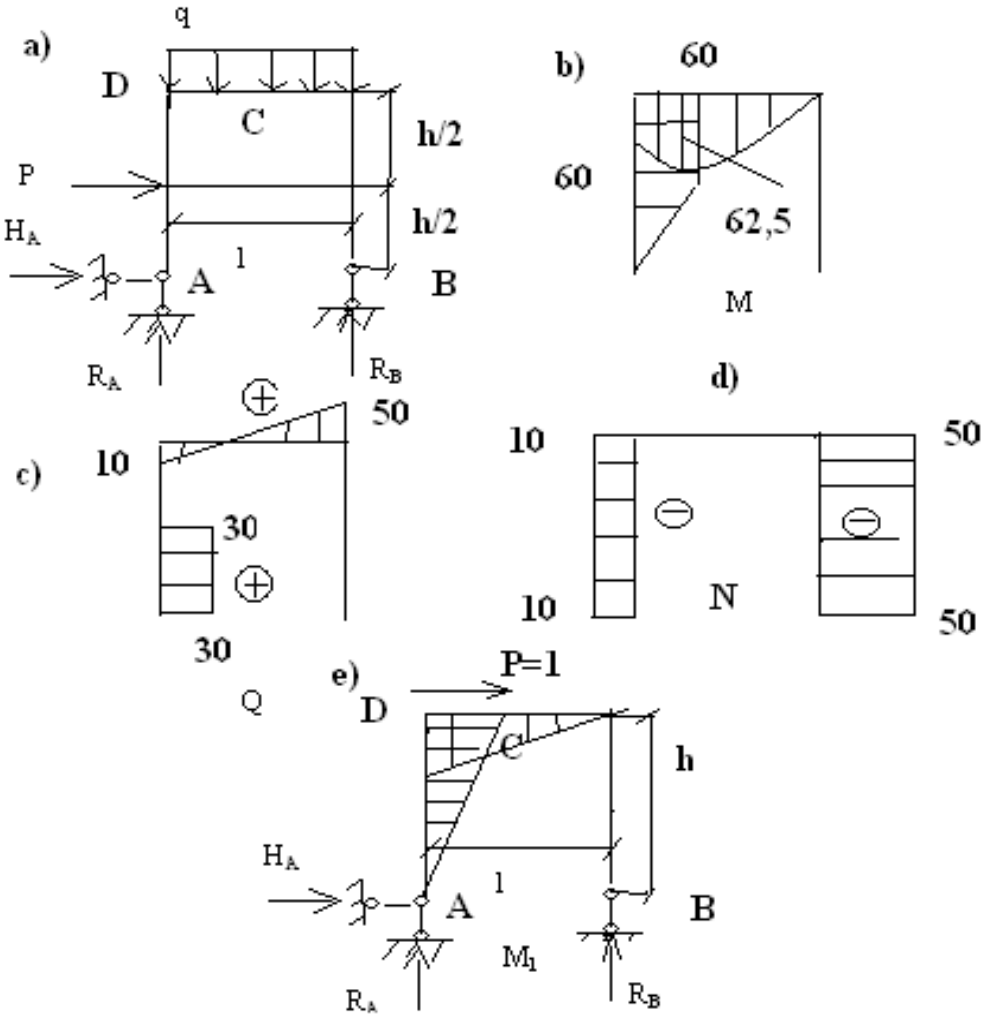



Рисунок 13.3

**Проверки правильности построенных эпюр внутренних усилий**

1. В эпюре изгибающих моментов М в узлах удовлетворяется равновесие моментов: в узле *Д* со стороны стойки действует момент почасовой стрелке, равный 60кНм, со стороны ригеля действует момент против часовой стрелки и равный 60кНм; в правом узле моменты со стороны стойки и ригеля равны нулю, т.е. равновесие в узлах удовлетворяется.
2. Реакции в опорах удовлетворяют равновесию всех внешних сил.

3. Равновесие в узлах для продольных и поперечных сил удовлетворяется.

**Контрольные вопросы:**

1. Как влияет жесткость элементов на значения перемещений?
2. При определении перемещений как используется принцип независимости действия сил? Критерии его применимости?
3. Какой силовой фактор значителен при определении перемещений при изгибе?
4. Какой силовой фактор значителен при определении перемещений при сдвиге?
5. Какой силовой фактор значителен при определении перемещений при растяжении-сжатии?
6. Как используют интегралы Мора для определения линейных перемещений сечений плоской рамы?
7. Как определяется потенциальная энергия деформации при растяжении-сжатии?
8. Как определяется потенциальная энергия деформации при изгибе?
9. Как определяется потенциальная энергия деформации при сдвиге?
10. Как определяется потенциальная энергия деформации при кручении?
11. Теорема о взаимности работ?
12. Теорема о взаимности перемещений?
13. Как используют интегралы Мора для определения угловых смещений сечений плоской рамы?

## Лекция 14.

### Расчет трехшарнирной рамы

Трехшарнирной системой называется система, состоящая из двух дисков, соединенных между собой шарниром и с землей двумя шарнирно неподвижными опорами. Трехшарнирная система геометрически неизменяема и статически определима относительно реакций связей между дисками.

В зависимости оттого, что представляет собой диск, входящий в систему, различают следующие виды трехшарнирных систем (рисунок 14.1):

1. Трехшарнирная рама (если диски представляют собой стержни);
2. Трехшарнирную арку (если диски представляют собой кривые стержни);
3. Трехшарнирную ферму (если каждый диск представляет собой ферму).

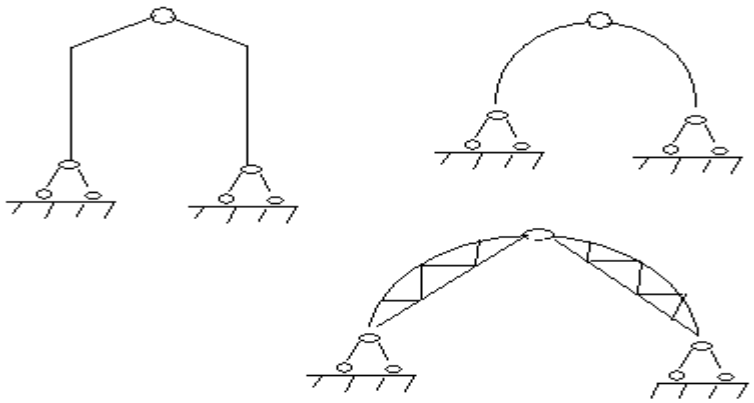


Рисунок 14.1

Расчет трехшарнирных систем начинается с определения опорных реакций. В шарнирно неподвижных опорах имеют место две реакции неизвестной величины и направления. Каждую из них разлагают на две составляющие, удобнее всего раскладывать на вертикальные и горизонтальные составляющие. Вертикальные составляющие называют

балочными и обозначают R, а горизонтальные составляющие называют распорами и обозначают H. Общее количество составляющих реакций четыре и они определяются из четырех уравнений статики, т.к. система статически определима. Наличие в системе промежуточного шарнира позволяет приравнять нулю момент сил, лежащих по одну сторону от него (справа и слева). Если правую опору обозначить A, левую B, а промежуточный шарнир C, то уравнения равновесия для опорных реакций удобно записать в виде:

$$\sum M_A=0; \quad \sum M_B=0; \quad \sum M^{лев}_c=0; \quad \sum M^{прав}_c=0$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, определяются 4 неизвестных реакций. После определения опорных реакций расчет трехшарнирных систем, как и балочных систем, сводится к определению внутренних усилий. Правило знаков для внутренних усилий следующее:

1. Изгибающий момент в заданном сечении равен сумме моментов сил, расположенных по одну сторону от этого сечения относительно центра того же сечения. При построении эпюр моменты откладываются со стороны растянутого волокна и считаются положительным.

2. Поперечная сила в сечении равна сумме проекций сил, расположенных по одну сторону от сечения, на ось, перпендикулярную к оси стержня в данном сечении. Поперечная сила принимается положительной, когда указанная сумма проекций сил вращает соответствующую часть стержня по часовой стрелке.

3. Продольная сила в сечении равна сумме проекций сил, действующих по одну сторону от сечения на направление оси стержня в данном сечении. При растяжении стержня продольная сила считается положительной, при сжатии – отрицательной.

В качестве примера рассмотрим следующую трехшарнирную раму (Рисунок 14.2). Построим эпюры внутренних сил. Для этого необходимо вначале определить реакции опор, а затем, используя метод сечений, определить аналитические выражения для внутренних сил на каждом участке и по ним строить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

1. Определение реакций связей. Выбираем направления неизвестных реакций, как указано на рисунке 14.2. Согласно выбранным направлениям реакций получаем следующие уравнения статики:

$$\sum M_B = R_A \cdot 8 + q \cdot 10 \cdot 1 + H_A \cdot 4 = 0,$$

$$\sum M_A = -R_B \cdot 8 + q \cdot 10 \cdot 5 - H_B \cdot 4 = 0,$$

$$\sum (M^{лев})_C = = R_A \cdot 4 - q \cdot 10 \cdot 5 + H_A \cdot 10 = 0,$$

$$\sum (M^{прав})_C = - R_B \cdot 6 + H_A \cdot 6 = 0$$

Решая систему алгебраических уравнений, получаем следующие значения неизвестных реакций:

$R_A$= -75q/16, $R_B$ =75q/16, $H_A$ =55q/8, $H_B$ =25q/8,

отсюда следует, что истинное направление реакции $R_A$ противоположно выбранному направлению (знак минус), т.е. эта реакция направлена вниз, остальные реакции направлены, как указано на рисунке 14.2.

2. Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

Определяем аналитические выражения внутренних усилий на следующих участках:

По левой стойке:

рассматривая произвольное сечение на расстоянии «x» от опоры A, получаем

$M= H_A \cdot x - q \cdot x^2/2 = 55q/8 \cdot x - q\, x^2/2,$

$Q= H_A - q \cdot x = 55q/8 - qx,$

$N = R_A = 75q/16.$

$0 \le x \le 10$

Эпюра изгибающих моментов по левой стойке представляет собой параболу,

Эпюра поперечных сил – прямую линию,

Эпюра продольных сил – прямоугольник.

По ригелю:

рассматривая произвольное сечение на расстоянии «x» влево от узла 2, получаем

$M = - H_B \cdot 6 + R_B \cdot x,$

$Q = 75q/16,$

$N= -25q/8$

$0 \le x \le 8$

Эпюра изгибающих моментов по ригелю представляет собой прямую линию,

Эпюра поперечных сил – прямоугольник,

Эпюра продольных сил – прямоугольник.

По правой стойке:

рассматривая произвольное сечение на расстоянии «x» от опоры B, получаем

$M= 25q/8 \cdot x,$

$Q = 25q/8,$

$N= -75q/16$

$0 \le x \le 6$

Эпюра изгибающих моментов по левой стойке представляет собой прямую линию,

Эпюра поперечных сил – прямоугольник,

Эпюра продольных сил – прямоугольник.

Эпюры внутренних усилий представлены на рисунке 14.2 (в-д).

**Проверка правильности построенных эпюр внутренних усилий**

4. В эпюре изгибающих моментов М в узлах удовлетворяется равновесие моментов: в правом узле трехшарнирной рамы со стороны стойки действует момент почасовой стрелке, равный 175q/8 кНм, со стороны ригеля действует момент против часовой стрелки и равный также 175q/8 кНм; в правом узле моменты со стороны стойки и ригеля равны между собой 150q/8 и противоположно направлены, т.е. равновесие в узлах удовлетворяется, в шарнире С момент равен нулю.

5. Реакции в опорах удовлетворяют уравнениям равновесия для всех внешних сил.

6. Равновесие в узлах для продольных и поперечных сил удовлетворяется.

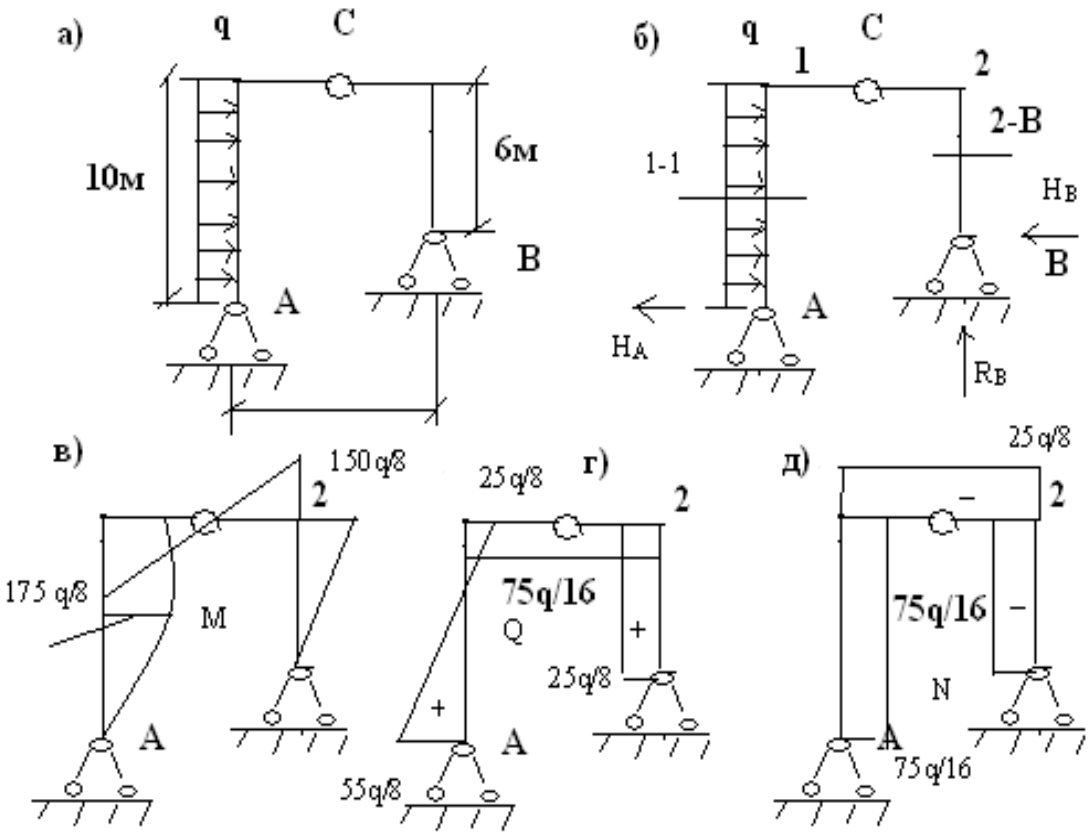



Рисунок 14.2

**Контрольные вопросы:**

1. Какие системы относятся к трехшарнирным?
2. Какие усилия возникают в трехшарнирной раме? Какой метод используют при определении усилий?
3. Какие усилия возникают в трехшарнирной ферме?
4. Как определяются реакции связей?

5. Какие усилия возникают в трехшарнирной арке?
6. Как проверяется правильность построения эпюр внутренних усилий в трехшарнирной раме?
7. Как используется метод сечений для определения внутренних усилий в трехшарнирной раме?

## Лекция 15

### Определение перемещений матричным методом. Матрица податливости системы.

Используя интегралы Мора, горизонтальное, вертикальное или угловое перемещения произвольного сечения D определяется по следующей формуле:

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{\overline{M}_i M_p dx}{EI} + \sum \int \frac{\overline{N}_i N_p dx}{EF} + \sum \int \eta \frac{\overline{Q}_i Q_p dx}{GF},$$

где $M_p$, $Q_p$, $N_p$ – эпюры изгибающего момента, поперечных и продольных сил от заданной внешней нагрузки, а с черточкой эти же эпюры от единичного воздействия.

Изгибающий момент M в произвольном сечении равен (по числовой величине и знаку) сумме моментов всех внешних сил, приложенных слева от рассматриваемого сечения, или сумме моментов, взятой с обратным знаком,всех внешних сил, приложенных к правой части сечения:

$$M = \sum (M)^{лев} = -\sum (M)^{пр}$$

Пренебрегая растяжением и сдвигом, формула для определения перемещений упрощается и имеет следующий вид:

$$\Delta_D = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_p dx}{EI} = \sum_i \frac{\omega_i \cdot y_i}{EI},$$

где $\omega_i$ - площадь грузовой эпюры $M_p$, $y_i$ - ордината под центром тяжести грузовой эпюры, взятая в единичной эпюре $\overline{M_1}$.

Определение перемещений при изгибе можно провести, используя алгебру матриц. Согласно принципу независимости действия сил, от каждого

воздействия можно определить перемещение и тогда полное перемещение равно сумме этих перемещений.

Пусть требуется определить перемещение Δ в направлении «i» в некотором сечении от заданного воздействия P (под P можно понимать одновременное действие сосредоточенных сил и распределенных нагрузок). Порядок расчета следующий:

1. Вначале необходимо разделить систему на участки и зафиксировать необходимое количество точек.

2. Затем необходимо построить эпюру изгибающих моментов от внешнего воздействия P, построенную эпюру обозначим $M_p$. Составим матрицу $L_p$, элементами которой являются ординаты эпюры $M_p$ в зафиксированных точках. Эпюру $M_p$ называют грузовой эпюрой.

3. В интересующим направлении «i» необходимо приложить единичное воздействие и построить эпюру изгибающих моментов, построенную эпюру обозначим $M_i$. Составим матрицу $L_1$, элементами которой являются ординаты эпюры $M_i$ в зафиксированных точках. Эпюру $M_i$ называют единичной эпюрой и в дальнейшем обозначают с черточкой наверху. Если необходимо определить перемещения в нескольких точках, то строят несколько единичных эпюр изгибающих моментов и составляют единичную матрицу ( $\overline{M}_i, \quad i = 1,2,.....n$), элементами которой являются ординаты единичных эпюр.

4. Далее необходимо составить матрицу податливости системы, которая обозначается B, она состоит из матриц податливости на каждом участке. Матрица податливости всей системы B имеет квазидиагональный вид, т.е. по главной диагонали стоят матрицы податливости отдельных участков, а по обе стороны от главной диагонали стоят нули. Элементами матрицы податливости отдельного участка являются перемещения от единичных воздействий, которые определяются с помощью интегралов Мора. Их значения зависят от длин и жесткости участков. Итак, матрица податливости всей системы «B» имеет следующий вид:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & B_s \end{pmatrix}, \qquad (15.1)$$

где s – количество участков, на которые разбита система. В качестве одного участка можно рассматривать отдельно взятый стержень. Матрица

податливости $B_i$ на i-м участке в зависимости от вида деформации, количества точек и вида внешней нагрузки может иметь различные виды. Например, при изгибе, если обозначить жесткость участка через EI, а длину через l, то матрицу B можно записать в следующем виде:

а) Если на участке фиксируется одна точка, то

$$B = \frac{l}{6EI} \tag{15.2}$$

б) Если на участке фиксируются две точки, то

$$B = \frac{l}{6EI}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{15.3}$$

в) Если на участке фиксируется три точки, то при распределенной нагрузке постоянной интенсивности, матрица податливости имеет вид:

$$B = \frac{l}{6EI}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15.4}$$

г) Если на участке фиксируются три точки, то при сосредоточенной силе в середине участка матрица податливости имеет вид:

$$B = \frac{l}{6EI}\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 2 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \tag{15.5}$$

д) Если на участке фиксируются две точки, то при распределенной нагрузке матрица B имеет вид:

$$B = \frac{l}{6EI}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{15.6}$$

5. Перемещение определяется с помощью следующих матричных действий

$$C = L_1' B, \qquad \vec{\Delta} = C L_p, \tag{15.7}$$

где $L_1$ - матрица, элементами которой являются ординаты единичных эпюр изгибающих моментов в зафиксированных точках ( $\overline{M}_i$, $i = 1,2,.....n$ ),

$L_1'$ - транспонированная матрица, которая получается из прямой матрицы $L_1$ путем замены строк на столбцы,

$L_p$ - матрица, элементами которой являются ординаты грузовой эпюры $M_p$ в зафиксированных точках, т.е. ординаты эпюры изгибающих моментов в заданой системе от внешнего воздействия Р.

При определении перемещения в горизонтальном направлении единичная эпюра строится от единичной горизонтальной силы; при определении перемещения в вертикальном направлении единичная эпюра строится от единичной вертикальной силы; при определении углового смещения единичная эпюра строится от единичного момента.

Рассмотрим следующий пример.

В заданной раме (рисунок 15.1) найти полное линейное и угловое перемещение сечения С (свободный конец рамы). Изгибная жесткость на всех участках рамы постоянная и равна EI= $2 \cdot 10^4$ кНм$^2$.

Дано: h =5м; l =3м; a =2м; P =30кН, EI-const.

Решение.

Применим для решения метод Мора-Верещагина. Чтобы найти полное перемещение точки С, определим его горизонтальную и вертикальную составляющие. Наряду с заданным состоянием рассмотрим три вспомогательных единичных состояний (Рисунок 15.1 б, в, г). При определении перемещений будем учитывать только изгибающий момент, влиянием же продольной и поперечной сил пренебрегаем.

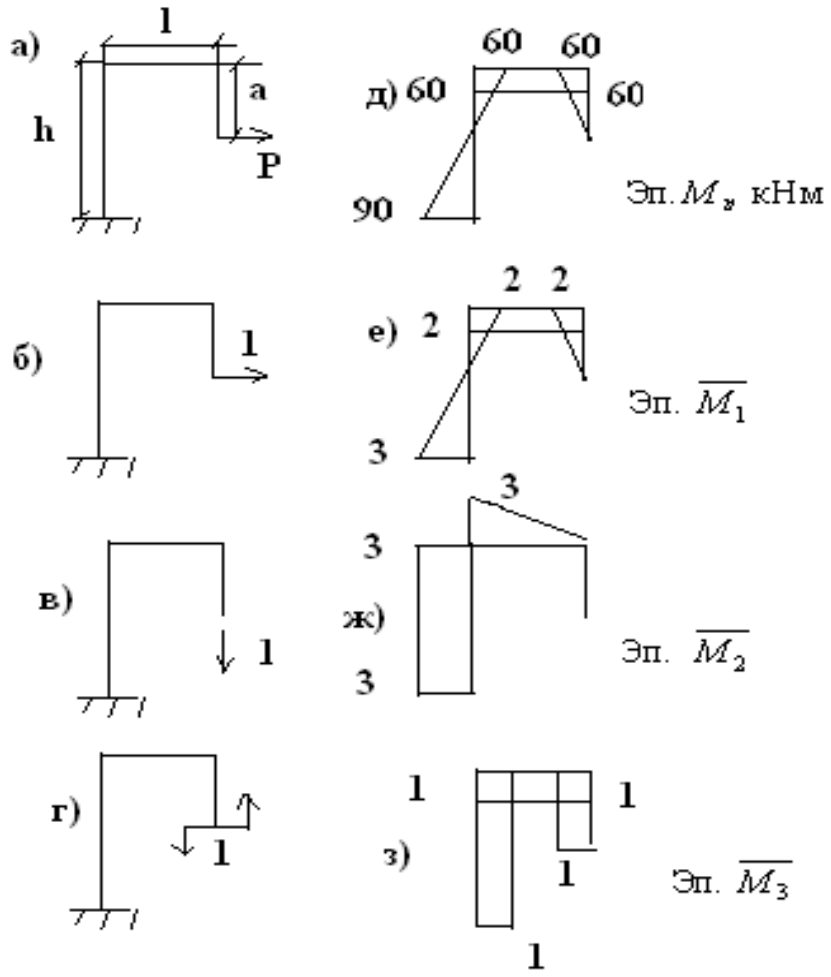



Рисунок 15.1

Перемножим по известным правилам (метод Верещагина) эпюру $M_p$ на каждую их единичных эпюр $\overline{M_1}$ ; $\overline{M_2}$ ; $\overline{M_3}$. В результате получаем следующие перемещения:

$\Delta^1_c$ – горизонтальное перемещение свободного конца рамы;
$\Delta^2_c$ – вертикальное перемещение свободного конца рамы;
$\Delta_c$ – полное перемещение свободного конца рамы;
$\theta_c$ – угловое смещение свободного конца рамы в радианах.

$$\Delta_C^1 = \frac{1}{EI}\left[\frac{60\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 + 60\cdot 3\cdot 2 + \frac{90\cdot 5}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 2\right) + \frac{60\cdot 5}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{1}{3}\cdot 3\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{EI}\left[80 + 360 + 300 + 50\right] = \frac{790}{2\cdot 10^4} = 3{,}95\cdot 10^{-2}\, m = 39{,}5mm$$

$$\Delta_C^2 = \frac{1}{EI}\left[-60\cdot 3\cdot 1{,}5 + \frac{90\cdot 5}{2}\cdot 3 - \frac{60\cdot 5}{5}\cdot 3\right] =$$

$$= \frac{1}{EI}\left[-270 + 675 - 450\right] = -\frac{45}{2\cdot 10^4} = -2{,}25\cdot 10^{-3}\, m = -2{,}25mm$$

$$\Delta_C = \sqrt{(\Delta_C^1)^2 + (\Delta_C^2)^2} = \sqrt{(39{,}5)^2 + (2{,}25)^2} = 39{,}56mm$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI}\left[\frac{60\cdot 2}{2}\cdot 1 + 60\cdot 3\cdot 1 - \frac{90\cdot 5}{2}\cdot 1 + \frac{60\cdot 5}{2}\cdot 1\right] =$$

$$= \frac{1}{EI}\left[60 + 180 - 225 + 150\right] = \frac{145}{2\cdot 10^4} = 7{,}25\cdot 10^{-2}\ \text{đŕä}.$$

Итак, полное поступательное смещение точки С равно

$\Delta_C$ =39,56мм,

а угловое смещение равно

$\theta_C$ =7,25· $10^{-2}$ рад.

## Алгебра матриц. Общие сведения. Простейшие операции над матрицами.

Современная инженерная механика тесно связана с линейной алгеброй и операциями над матрицами [26-27]. Матрицы являются удобным вычислительным аппаратом, и их использование тесно связано с вычислительными средствами дискретного действия. В инженерной механике широко используется система линейных уравнений, описывающая равновесное состояние. Для решения этой системы можно использовать численные методы, которые легко реализуются современными вычислительными средствами с применением теории матриц.

Матрицей называется упорядоченный массив чисел, который понимается как единое целое. Числа, из которых состоит матрица, называются ее элементами. Если элемент равен нулю, то на соответствующее место ставится нуль или оставляется пустое место. Количество строк матрицы обозначим n , а количество столбцов m . Порядком матрицы

называется объединение двух чисел знаком x, т.е. - n x m. В общем случае матрица может быть записана в виде:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2m} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nm} \end{vmatrix} \qquad (15.8)$$

Если число строк равно числу столбцов, то матрицу называют квадратной. Если элементами матрицы являются матрицы, то такая матрица называется квазиматрицей или блочной матрицей. Диагональ квадратной матрицы, проходящая из левого верхнего угла в правый нижний угол, называется главной диагональю. Если элементы квадратной матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны, то матрица называется симметричной. Если в матрице отличны от нуля только элементы, стоящие по главной диагонали, то матрица называется диагональной. Если блочная матрица состоит из блоков, стоящих на диагонали, то такая матрица называется квазидиагональной. Матрицей, транспонированной по отношению к A, называется матрица $A^T$, столбцами которой являются строки матрицы A. Для квадратной матрицы можно ввести понятие единичной матрицы, которая обозначается E. В единичной матрице по главной диагонали стоят числа, равные 1, а по обе стороны от диагонали стоят нули.

Покажем простейшие операции над матрицами: умножение, сложение, обращение матриц (образование обратной матрицы).

**Перемножение матриц**

Перемножать можно только такие матрицы, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы; при этом матрица произведения будет иметь число строк, равное числу строк первой матрицы, и число столбцов, равное числу столбцов второй матрицы. Для умножения матрицы на матрицу необходимо первую матрицу умножить на первый столбец и результат поставить на место первого столбца матрицы произведения, далее произвести аналогичную операцию со вторым столбцом и т.д. Например:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{vmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} & a_{11}b_{14}+a_{12}b_{24} \\ a_{21}b_{11}+a_{212}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} & a_{21}b_{14}+a_{22}b_{24} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} & a_{31}b_{14}+a_{32}b_{24} \end{vmatrix}$$

**Сложение (вычитание матриц)**

Складываются (вычитаются) матрицы с одинаковым порядком, т.е. число строк и число столбцов должны быть одинаковыми, при сложении двух матриц, например, матриц A,B складываются соответствующие элементы двух матриц $a_{ij}$, т.е.

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

$$A\pm B=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\pm\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} \\ a_{31}\pm b_{31} & a_{32}\pm b_{32} \end{vmatrix}$$

**Обращение матриц**

Понятие деления чисел можно ввести с помощью обратного числа, т.е.

$$\frac{a}{b}=b\frac{1}{a}=ba^{-1}, \quad aa^{-1}=1$$

Аналогично можно ввести понятие обратной матрицы для квадратных матриц

$AA^{-1}=A^{-1}A=BA=E$, где $B=A^{-1}$

Для составления обратной матрицы используем понятия алгебраические дополнения и определитель матрицы, т.е. элементами матрицы B являются алгебраические дополнения матрицы A, т.е.

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & . & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & . & . & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad b_{ij} = \tilde{a}_{ij}, \quad \tilde{a}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} A_{ij}}{D},$$

где D – определитель матрицы А (детерминант),
а $A_{ij}$ – определитель матрицы А, у которой удалены «j» строка и « i» столбец.

Определитель (детерминант) матрицы А можно получить путем суммирования произведения элементов любой строки, например, первой строки на соответствующие миноры матрицы А.

Для примера, схема которого показана на рисунке 15.1, определим перемещение в матричной форме. На рисунке 15.2 показана дискретная форма заданной рамы. Для этого система разделена на отдельные участки и на каждом участке выделены точки, общее количество участков равно 3, общее количество точек равно 6.

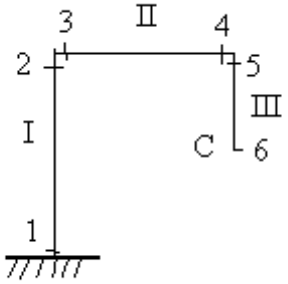



Рисунок 15.2. Нумерация участков и точек

Для определения поступательных и углового перемещений точки С в матричной форме необходимо составить следующие исходные матрицы:

Грузовая матрица $L_p$, элементами которой являются ординаты грузовой эпюры в фиксированных точках:

$$L_p = \begin{vmatrix} -90 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Единичная матрица, элементами которой являются ординаты единичных эпюр в фиксированных точках:

$$L_1 = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Матрица податливости всей системы B, элементы которой представляют матрицы податливости указанных трех участков.

$$B_1 = \frac{5}{6EI}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \frac{3}{6EI}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \frac{2}{6EI}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{6EI}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица $L^T_1$ имеет вид:

$$L_1^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Используя следующие матричные действия, получаем вектор перемещений, компоненты которого определяют горизонтальное, вертикальное и угловое смещение точки С:

$$\Delta_c = L_1^T B L_p = \begin{pmatrix} 39{,}5 \\ -2{,}25 \\ 7{,}25 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

**Контрольные вопросы:**

1. Что означает матрица податливости и как она строится?
2. Влияет ли жесткость элементов на матрицу податливости системы?
3. Влияют ли условия закрепления на формирование матрицы податливости элемента?
4. Правило Верещагина. В чем его суть и простота вычислений?
5. Какие действия над матрицами можно осуществлять?
6. Как образуется транспонированная матрица?
7. Как получается обратная матрица?
8. Обратная матрица. Алгебраические дополнения.
9. Определитель матрицы. Минор.
10. Как определяются перемещения в матричной форме?
11. Как составляются единичные матрицы изгибающих моментов?
12. Как строится грузовая эпюра изгибающих моментов?

## ЛИТЕРАТУРА


1.Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. Москва, «Высшая школа», 1998, 478с.

2. Березкин Е.Н. Лекции по теоретической механике. Москва, Изд. МГУ, 1977, 314с.

3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под редакцией А.А.Яблонского. Москва, «Высшая школа», 1978,530 с.

4. Веселовский И.Н. Сборник задач по теоретической механике. Москва, изд. Гостехлит., 1975, 500 с.

5. Яблонский А.А. Теоретическая механика. Москва, «Высшая школа», 1978, с.586.

6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. Москва, «Наука», 1986 ,247с.

7. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин В.П.. Сопротивление материалов. Москва, «Высшая школа», 2004, 560с.

8. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. Москва, «Высшая школа», 1989, 654 с.

9.Кисилев В.А. Строительная механика. Москва, Стройиздат, 1986, 520с.

10. Ицкович Г.М. Сопротивление материалов. Москва, Высшая школа, 2001, 368 с.

11. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. Москва, Высшая школа, 2001, 286 с.

12. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Москва, изд. МГТУ, им. Н.Э.Баумана, 1999, 592 с.

13. Шалашилин В.И., Горшков А.В., Трошин В.Н. Сопротивление материалов. Москва, изд. МАИ, 2000, 616 с.

14. Сопротивление материалов. Под. ред. Г.С.Писаренко. Киев, Виша школа, 1986, 775 с.

15. Васильев В.З. Краткий курс сопротивление материалов с основами теории упругости. Санкт – Петербург, издание «Иван Феодоров», 2001, 286 с.

16. Сборник задач по сопротивлению материалов. Ч.1-3, под ред. Ю.П. Каптелина. Москва, изд.. «ЛИИЖТ» 1984, 145 с.

17. Лихарев К.К.,.Сухова Н.А. Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов», Москва, «Машиностроение» 1980, 224с.

18. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов. Киев, «Наукова думка», 1975, 480с.

19. Любощиц М.И., Ицкович Г.М. Справочник по сопротивлению материалов.

Минск, «Высшая школа», 1969, 360с.

20. Афанасьев А.М., Марьин В.А. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов. Москва, «Наука», 1975, 287с.

21. Достанова С.Х., Исаханов Е.А., Токпанова К.Е. Руководство к решению задач по инженерной механике. Алматы, КазАТК, 2006, 228с.

22. Достанова С.Х. Строительная механика (лекции для студентов спец. «Строительство»), Алматы, КазАТК, 2005, 110с.

23. Биттибаев С.М., Шегенова Ж.Б., Достанова С.Х. Методические указания к самостоятельным работам по курсу сопротивление материалов. Алматы, издание «АлИИТ», 1988, 82с.

24. Шегенова Ж.Б. Методические указания по выполнению контрольных работ по сопротивлению материалов. Алматы, 1988, 23с.

25. Лившиц Я.В., Семенов П.И. Сборник упражнений по строительной механике. Киев, Гослитиздат, Строительство, 1962, 335с.

26. Алгоритмизация и программирование. Под ред. Савельева А.Е. Москва, Высшая школа, т.3, 1987, 128 с.

27. Минин Л.С., Хроматов В.Е., Самсонов Ю.П. Расчетные и тестовые задания по сопротивлению материалов. Москва, Высшая школа, 2003, 224с.