

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН**

**Казахский национальный технический университет
имени К.И. Сатпаева**

Е.Р. Ким

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ МАССОВОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ**

Рекомендовано Министерством образования и науки
Республики Казахстан в качестве учебного пособия

Алматы 2008

Е.Р. Ким

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ
МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

УДК 519.872
ББК 22.12.165.422
К 40

К40 Ким Е.Р. Математические модели систем массового обслуживания:
Учеб. пособие. – Алматы: КазНТУ, 2008. – 114 с. Ил. 15. Табл. 11.
Библиогр. – 27 назв.

ISBN 978–601–228–018–0

Учебное пособие предназначено для систематического изучения принципов, моделей и методов теории массового обслуживания. Рассматриваются различные виды систем массового обслуживания, такие как системы с отказами, с ожиданием, смешанные системы, с ненадежными приборами и с приоритетами. В каждой главе приводятся задачи и упражнения для закрепления теоретического материала.

Учебное пособие адресовано студентам технических специальностей, магистрантам, инженерам, а также для тех, кто желает самостоятельно выработать практические навыки применения методов теории массового обслуживания.

ББК 22.12.165.422

Рецензенты:

*Г.С. Муханова, зам. дир. Учеб.-метод. департамента КазНТУ
имени К.И. Сатпаева, канд. техн. наук, доц.,
И.Т. Утепбергензов, зав. каф. «Информационные системы»
КазАТК им. М.Тынышпаева, д-р техн. наук, проф.,
С.С. Оспанов, зав. лаб. дистанционного обучения Центра
астрофизических исследований, канд. техн. наук, доц.*

Печатается по плану издания Министерства образования и науки
РК на 2008 г.

ISBN 978–601–228–018–0

© Е.Р. Ким, 2008

ВВЕДЕНИЕ

Ежедневно в производственной деятельности и в быту возникают такие ситуации, в которых появляется потребность в массовом обслуживании. Очень часто обслуживающие организации располагают ограниченными возможностями удовлетворения спроса на обслуживание. Это, как правило, приводит к созданию очереди. Примеры подобных явлений встречаются на каждом шагу: очереди в магазинах, в билетных кассах, на остановках автобусов, задержка ремонта бытовых приборов в ателье, скопление самолетов над аэродромами из-за отсутствия свободных посадочных полос и т. д. Хотя эти примеры взяты из различных областей человеческой деятельности, всем им присущи одинаковые формальные признаки, которые позволяют их описать с помощью одного и того же математического аппарата. Во всех этих ситуациях перед теорией стоит задача достаточно полно описать суть происходящих явлений и установить с необходимой для практики точностью количественную связь между числом приборов обслуживания, характеристиками входящего потока требований (заявок) и качеством обслуживания. При этом под качеством обслуживания понимается, насколько своевременно проведено обслуживание поступивших в систему требований [1–6].

В теории массового обслуживания рассматриваются только случаи, когда моменты поступления требований и продолжительности обслуживания этих требований случайны. Основная задача теории массового обслуживания состоит в определении различных функциональных характеристик системы обслуживания (например, средняя загрузка приборов, средняя длина очереди), с тем чтобы найти её слабые звенья. Имеется задача на экстремум: как достичь данного уровня обслуживания при минимальных потерях, связанных с ожиданием обслуживания требований и с простоем обслуживающих приборов.

Ввиду сложности реальных ситуаций при построении математических моделей массового обслуживания многими факторами приходится пренебрегать, так что полученные решения могут оказаться лишь приближенно оптимальными, а методы их решения эвристическими.

Применение теории массового обслуживания на практике может дать большой экономический эффект. Например, страна будет нести

неоправданно большие материальные расходы, если число заводов по ремонту сельхозтехники слишком мало или, наоборот, слишком велико. В первом случае неисправная техника будет простаивать, а не использоваться по прямому назначению для уборки урожая. Во втором случае простаивать будут некоторые ремонтные заводы. Ответ на вопрос о числе заводов, при котором суммарные затраты, связанные с ремонтом сельхозтехники, будут минимальны, может дать, по крайней мере в принципе, теория массового обслуживания.

Приведем простейший пример системы массового обслуживания. В качестве системы рассмотрим магазин с одним продавцом. В табл. В.1 приведены результаты работы магазина с 9⁰⁰ до 10⁰⁰ часов.

Таблица В.1

№ по- купател я	Момент прихода покупателя, ч.мин	Момент начала обслуживани я, ч.мин	Момент окончани я обслужив ания, ч.мин	Время простоя продавца, мин	Время ожидания покупателя в очереди, мин	Время обслужи- вания покупате ля, мин
1	9.01	9.01	9.03	0	0	2
2	9.04	9.04	9.08	1	0	4
3	9.05	9.08	9.11	0	3	3
4	9.10	9.11	9.16	0	1	5
5	9.15	9.16	9.22	0	1	6
6	9.18	9.22	9.25	0	4	3
7	9.22	9.25	9.29	0	3	4
8	9.34	9.34	9.41	5	0	7
9	9.35	9.41	9.42	0	6	1
10	9.40	9.42	9.51	0	2	9
11	9.48	9.51	9.53	0	3	2
12	9.57	9.57	10.00	4	0	3
Всего				10	23	49

Из табл. В.1 следует, что за час работы этот магазин обслужил 12 покупателей. Несмотря на то, что суммарное время обслуживания покупателей составило только 49 мин (из 60 мин), восемь раз образовывалась очередь. Это самая типичная ситуация массового обслуживания. Она объясняется случайностью моментов прихода покупателей в магазин и времени их обслуживания. Если бы те же покупатели приходили регулярно через каждые 5 мин и время их обслуживания не превышало 5 мин, то никакой очереди, разумеется, не возникало бы. Из табл. В.1 легко находим средние характеристики функционирования данного магазина: среднее время простоя продавца

(0,83 мин), среднее время ожидания покупателя в очереди (1,92 мин), среднее время обслуживания покупателя (4,08 мин).

1. ПРЕДМЕТ, ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

При проектировании современных систем автоматизированного управления (САУ), систем автоматизированного проектирования (САПР), компьютерных систем обработки информации и управления (КСОиУ), информационных систем (ИС), автоматизированных систем научных исследований (АСНИ) и других компьютерных систем возникает необходимость исследовать и проанализировать поведение данных систем. Объектами проектирования являются такие сложные системы, как производственные предприятия, транспортные системы, вычислительные системы и сети и т.п. В этих приложениях анализ процессов функционирования систем связан с исследованием прохождения через систему потока *заявок* (иначе называемых *требованиями* или *транзактами*). Разработчиков подобных сложных систем интересуют прежде всего такие параметры, как производительность (пропускная способность) проектируемой системы, продолжительность обслуживания (задержки) заявок в системе, эффективность используемого в системе оборудования.

Заявками могут быть заказы на производство изделий, задачи, решаемые в вычислительной системе, клиенты в банках, грузы, поступающие на транспортировку и др. Очевидно, что параметры заявок, поступающих в систему, являются случайными величинами и при проектировании могут быть известны лишь их законы распределения и числовые характеристики этих распределений. В качестве математического аппарата применяется *теория массового обслуживания*, а в качестве моделей систем используются *системы массового обслуживания* (СМО).

Типичными выходными параметрами в СМО являются числовые характеристики таких величин, как время обслуживания заявок в системе, длины очередей заявок на входах, время ожидания обслуживания в очередях, загрузка устройств системы, а также вероятность обслуживания в заданные сроки и т. п. [7–10].

1.1. Основные элементы системы массового обслуживания

Каждая система массового обслуживания состоит из обслуживающих устройств, которые называют *каналами* (приборами, линиями) *обслуживания*. Роль каналов могут играть различные приборы,

лица, выполняющие те или иные операции (кассиры, операторы, парикмахеры, продавцы), линии связи, автомашины, краны, ремонтные бригады, железнодорожные пути, бензоколонки и т. д. [3].

Каждая СМО предназначена для обслуживания (выполнения) некоторого *потока заявок* (требований), поступающих на вход системы в случайные моменты времени. Обслуживание заявок также длится не постоянное, заранее известное время, а случайное время, которое зависит от многих случайных, порой неизвестных нам, причин. После обслуживания заявки канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времени их обслуживания приводит к неравномерной загруженности СМО: в некоторые промежутки времени на входе СМО могут скапливаться необслуженные заявки, что приводит к перезагрузке СМО, в некоторые же другие интервалы времени при свободных каналах на входе СМО заявок не будет, что приводит к недогрузке СМО, т. е. к простаиванию ее каналов.

Заявки, скапливающиеся на входе СМО, либо “становятся” в очередь, либо по какой-то причине невозможности дальнейшего пребывания в очереди покидают СМО необслуженными.

Структурная схема типичной системы массового обслуживания приведена на рис. 1.1 [3, 6, 11].

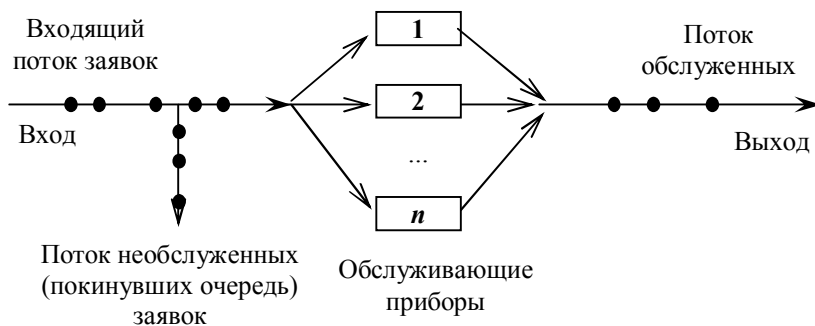


Рис. 1.1. Структурная схема СМО

Таким образом, во всякой СМО можно выделить следующие основные элементы:

- 1) входящий поток заявок;
- 2) очередь;
- 3) каналы обслуживания;
- 4) выходящий поток обслуженных заявок.

Каждая СМО в зависимости от своих параметров: характера потока заявок, числа каналов обслуживания и их производительности, а также от правил организации работы обладает определенной *эффективностью функционирования* (пропускной способностью), позволяющей ей более или менее успешно справляться с потоком заявок [3].

Предметом изучения теории массового обслуживания является СМО.

Цель теории массового обслуживания – выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения высокой эффективности функционирования СМО.

Для достижения этой цели ставятся *задачи теории массового обслуживания*, состоящие в установлении зависимостей эффективности функционирования СМО от ее организации (параметров: характера потока заявок, числа каналов и их производительности и правил работы СМО).

1.2. Входящий поток требований (заявок)

Процесс поступления в СМО потока требований является вероятностным и представляет собой поток однородных или неоднородных событий, которые наступают через случайные промежутки времени. Случайные временные интервалы между наступлениями событий в потоке могут подчиняться различным законам распределения. Но в теории массового обслуживания рассматривается *пуассоновский (простейший)* поток, в котором вероятность поступления в промежуток времени t ровно k требований определяется по формуле Пуассона [1-6, 8-9].

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.1)$$

где $\lambda > 0$ – *интенсивность (плотность, параметр)* потока, т. е. среднее число его требований, поступающих в систему массового обслуживания в единицу времени.

Такой поток можно изобразить как последовательность точек $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ на числовой оси, соответствующих моментам появления событий (рис. 1.2).

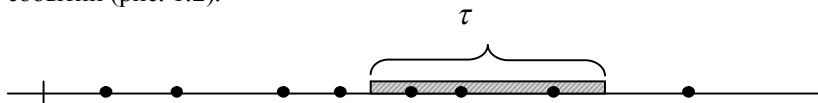




Рис. 1.2. Поток требований

Пуассоновский (простейший) поток требований обладает основными свойствами: *стационарностью, ординарностью и отсутствием последействия* [1–6, 8–9, 12–18].

Стационарность потока означает, что для любой группы из конечного числа непересекающихся отрезков времени вероятность появления в них соответственно $k_1, k_2, \dots, k_n$ требований зависит только от этих величин и от длин указанных промежутков времени, но не зависит от их расположения на оси времени. В частности, вероятность появления k требований в промежутке времени $(T, T + t)$ не зависит от T и является функцией только переменных k и t .

Отсутствие последействия состоит в том, что вероятность поступления k требований в течение промежутка времени $(T, T + t)$ не зависит от того, сколько требований и как поступали до этого промежутка.

Ординарность потока требований выражает собой условие практической невозможности появления двух или нескольких требований в один и тот же момент времени.

Многие реальные потоки требований являются, по крайней мере приближенно, пуассоновскими. Например, поток вызовов, поступающих на автоматическую телефонную станцию (АТС) с 9 до 13 ч, с хорошим приближением можно считать пуассоновским. Но строго говоря, три свойства пуассоновского потока могут не выполняться. Так, с 9 до 10 ч (в начале рабочего дня) поток вызовов на АТС может быть более интенсивным, чем в период с 10 до 11 ч. Здесь нарушается свойство стационарности потока. Некоторые мировые сенсации (например, запуск ракеты с людьми на Марс) могут вызвать цепную реакцию телефонных звонков. Нарушается свойство отсутствия последействия. Наконец, не исключена возможность одновременного поступления двух или более вызовов на АТС для подключения к одному и тому же абоненту. Нарушается свойство ординарности потока.

Важной характеристикой потока является его интенсивность λ , которая определяется как математическое ожидание числа требований, поступающих за единицу времени.

1.3. Время обслуживания

Время обслуживания является важнейшей характеристикой каждого прибора обслуживания системы и определяет его пропускную способность. Время обслуживания – как правило, случайная величина. Оно зависит от многих неконтролируемых факторов. Например, продолжительность ремонта телевизора зависит от вида неисправности, степени износа телевизора, марки телевизора и пр. При этом считают, что продолжительности обслуживания разных требований данным прибором независимые случайные величины с одним и тем же законом распределения. Наиболее часто полагают этот закон распределения *показательным* [6, 9, 18].

В случае показательного закона распределения времени обслуживания τ плотность вероятности имеет вид [1–6, 8–9, 12–18].

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad \mu > 0, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (1.2)$$

а функция распределения

$$F(t) = P(\tau < t) = \int_0^t \mu e^{-\mu t} dt = 1 - e^{-\mu t}. \quad (1.3)$$

При этом для математического ожидания времени обслуживания имеем

$$M\tau = \mu \int_0^{\infty} t e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\mu}. \quad (1.4)$$

И следовательно, параметр μ в выражении (1.4) имеет простой физический смысл: обратная его величина равна среднему времени обслуживания требования прибором.

1.4. Классификация систем массового обслуживания

Каждой из СМО свойственна определенная организация [1–6, 8–9, 12–18].

По числу каналов СМО подразделяют на *одноканальные* (когда имеется один канал) и *многоканальные*, точнее *n-канальные* (когда количество каналов $n \geq 2$). Каждый канал одновременно может обслуживать только одну заявку и, если не оговорено специально, каждая находящаяся под обслуживанием заявка обслуживается только

одним каналом. Многоканальные системы могут состоять из однотипных каналов, либо из разнотипных, отличающихся длительностью обслуживания одной заявки.

По дисциплине обслуживания СМО подразделяют на три класса:

1. СМО с отказами (*нулевым ожиданием*), в которых всякое вновь поступившее требование на обслуживание, застав все приборы уже занятыми, получает отказ и покидает СМО. Чтобы эта заявка все же была обслужена, она снова должна поступить на вход СМО и рассматриваться при этом как заявка, поступившая впервые. Примером СМО с отказами может служить работа АТС: если набранный телефонный номер (заявка, поступившая на вход) занят, то заявка получает отказ, и чтобы дозвониться по этому номеру, следует его набрать ещё раз (заявка поступает на вход как новая).

2. СМО с ожиданием (*неограниченным ожиданием* или *очередью*). В таких системах заявка, поступившая в момент занятости всех каналов, становится в очередь и ожидает освобождения канала, который примет ее к обслуживанию. Каждая заявка, поступившая на вход, в конце концов будет обслужена. Такие системы часто встречаются в торговле, в сфере бытового и медицинского обслуживания, на предприятиях (например, обслуживание станков бригадой рабочих).

3. СМО *смешанного типа* (*ограниченным ожиданием*) занимают промежуточное положение. Это такие системы, в которых на пребывание заявки в очереди накладываются некоторые ограничения.

Эти ограничения могут накладываться на *длину очереди*, т. е. максимально возможное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди. Примером такой системы может служить мастерская по ремонту автомашин с ограниченной по размерам стоянкой для неисправных машин, ожидающих ремонта.

Ограничения ожидания могут касаться *времени пребывания заявки в очереди*, по истечении которого она выходит из очереди и покидает систему, либо касаться *общего времени пребывания заявки в СМО* (т. е. суммарного времени пребывания заявки в очереди и под обслуживанием).

В системах с ожиданием и ограниченным временем ожидания могут быть особенности в дисциплине обслуживания очереди требований. Они сводятся к следующим разновидностям:

– требования принимаются в порядке очередности их поступления в систему (магазины);

– в первую очередь к обслуживанию принимаются те требования, которые имеют большую степень приоритета (больные с острой болью);

– требования принимаются в случайном порядке (система ПВО).

По *ограничению потока заявок* СМО делятся на *замкнутые* и *открытые (разомкнутые)*.

Если поток заявок ограничен и заявки, покинувшие систему, могут в нее возвращаться, то СМО является *замкнутой*, в противном случае – *открытой*. Классическим примером замкнутой СМО служит работа группы наладчиков в цеху. Станки являются источниками заявок на обслуживание, и их количество ограничено, наладчики – каналы обслуживания. После проведения ремонтных работ вышедший из строя станок снова становится источником заявок на обслуживание.

По *количеству этапов обслуживания* СМО делятся на *однофазные* и *многофазные* системы. Если каналы СМО однородны, т. е. выполняют одну и ту же операцию обслуживания, то такие СМО называются *однофазными*. Если каналы обслуживания расположены последовательно и они неоднородны, так как выполняют различные операции обслуживания, то СМО называется многофазной. Примером работы многофазной СМО может служить обслуживание автомобилей на станции технического обслуживания (мойка, диагностирование и т. д.).

1.5. Показатели эффективности обслуживающих систем

Под эффективностью обслуживающей системы понимают характеристику уровня выполнения этой системой тех функций, для которых она предназначена [1-6, 8-9, 12-18]. Выбор показателя эффективности зависит от той задачи, которая поставлена перед исследованием.

Показатели эффективности зависят от трех групп факторов:

- 1) характеристик качества и надежности системы обслуживания;
- 2) экономических показателей, характеризующих работу этой системы (ее стоимости, трудовых затрат обслуживающего персонала, убытков, связанных с несвоевременным обслуживанием, и т. д.);
- 3) особенностей ситуации, в которой эксплуатируется система (параметров потока требований, ограничений на длину очереди и др.).

В зависимости от условий эксплуатации системы и принятого показателя эффективности выбирается математическая модель процесса. При этом выбранные критерии должны быть чувствительными к изменению варьируемых параметров системы массового обслуживания.

Эффективность СМО можно характеризовать большим числом различных количественных показателей. Ниже приводятся наиболее часто применяемые показатели эффективности систем массового обслуживания, объединенных в три основные группы показателей [3].

1. Показатели эффективности использования СМО:

1.1. Относительная пропускная способность СМО Q – отношение среднего числа заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени, к среднему числу поступивших заявок за это же время;

1.2. Абсолютная пропускная способность СМО A – среднее число заявок, которое сможет обслужить СМО в единицу времени;

1.3. Средняя продолжительность периода занятости СМО;

1.4. Коэффициент использования СМО – средняя доля времени, в течение которого СМО занята обслуживанием заявок, и т. п.

2. Показатели качества обслуживания заявок:

2.1. Среднее время ожидания заявки в очереди;

2.2. Среднее время пребывания заявки в СМО;

2.3. Вероятность отказа заявке в обслуживании без ожидания. В СМО с отказами она равна вероятности занятости обслуживанием требованием всех n приборов системы. Чаще всего ее обозначают P_n или $P_{отк}$;

2.4. Вероятность того, что обслуживанием требований в системе занято k приборов равна P_k ;

2.5. Среднее число заявок, находящихся в очереди, $M_{ож}$;

2.6. Среднее число заявок, находящихся в СМО, $M_{сис}$;

2.7. Среднее число занятых приборов $N_з$;

2.8. Среднее число свободных от обслуживания приборов N_0 ;

2.9. Коэффициент занятости приборов $K_з$;

2.10. Коэффициент простоя приборов $K_п$.

3. Показатели эффективности функционирования пары «СМО – потребитель», где под «потребителем» понимают всю совокупность заявок или некий их источник (например, средний доход, приносимый СМО в единицу времени и т. п.).

3.1. Стоимость обслуживания каждого требования в системе $q_{об}$;

3.2. Стоимость потерь, связанных с простаиванием требований в очереди в единицу времени $q_{ож}$;

3.3. Стоимость убытков, связанных с уходом из системы требований q_y ;

3.4. Стоимость эксплуатации каждого прибора системы в единицу времени q_k ;

3.5. Стоимость единицы времени простоя прибора системы $q_{пк}$.

При выборе оптимальных параметров систем массового обслуживания по экономическим показателям можно использовать функцию стоимости потерь в системе (для системы с ожиданием) [9]

$$G_{\Pi} = (q_{ож} M_{ож} + q_{пк} N_0 + q_k N_3) T, \quad (1.5)$$

где T – интервал времени.

Для системы с отказами функция стоимости потерь примет вид [9]

$$G_{\Pi} = (q_k N_3 + q_y P_n \lambda) T, \quad (1.6)$$

а для смешанных систем массового обслуживания имеем [9]

$$G_{\Pi} = (q_{пк} N_0 + q_{ож} M_{ож} + q_y P_n \lambda + q_k N_3) T. \quad (1.7)$$

При решении некоторых задач целесообразно пользоваться критерием экономической эффективности СМО [9]

$$E = P_{обс} \lambda c T - G_{\Pi}, \quad (1.8)$$

где c – экономический эффект, полученный при обслуживании каждого требования; $P_{обс}$ – вероятность обслуживания требования.

Задачи и упражнения

Задача 1.1. В вычислительную систему, состоящую из 2-х компьютеров, поступает поток запросов пользователей. Если оба компьютера заняты, то запросы записываются в буфер.

Что в данной ситуации можно принять за СМО? Что здесь представляют собой каналы обслуживания? Каково их количество? Что представляет собой поток заявок, поступающих на вход СМО и поток обслуженных заявок на выходе?

Решение. В качестве СМО в данной ситуации можно взять вычислительную систему, а каждый компьютер тогда будет представлять собой канал обслуживания. Таким образом, данная СМО является двухканальной. Поток заявок, поступающих на вход СМО, – это поток запросов пользователей, поступающих в вычислительную систему. Поток обслуженных заявок – это поток обработанных запросов.

Задача 1.2. У крупной торговой фирмы имеется n магазинов. Сеть этих магазинов обслуживают m бригад по доставке товаров. Как только в магазине возникает необходимость в каком-нибудь виде товара, руководство магазина заказывает его доставку со склада. Каждая бригада может одновременно обслужить только один магазин. И если в момент поступления заказа все бригады заняты, завоз товара будет отложен до того времени, когда освободится любая из бригад. Если число заказов превысит число бригад, то образуется очередь.

К какому классу относится данная СМО:

- а) по характеру поступления заявок на обслуживание?
- б) по характеру поведения заявки в системе?
- в) по ограничению потока заявок?
- г) по числу каналов обслуживания.

Решение. Заявками на обслуживание в данной задаче являются заказы на доставку товаров со склада в магазины. Заказы поступают в случайные моменты времени, поэтому входящий поток заявок на обслуживание – случайный. Поскольку в течение рабочего дня заказы в среднем поступают равномерно, можно предположить, что интенсивность входящего потока заявок не зависит от времени и является постоянной. Следовательно, входящий поток обладает свойством стационарности. Независимость поступления заказов от того, сколько их уже было сделано, характеризует входящий поток как поток без последствия. И, наконец, малая вероятность одновременного поступления заказов в один и тот же момент времени, говорит о том, что рассматриваемый поток заявок – ординарный.

Таким образом, по характеру входящего потока заявок рассматриваемая СМО относится к классу систем со случайным потоком заявок, а именно с простейшим потоком. Поток обслуживаний – случайный поток с показательным распределением.

По характеру поведения заявки в системе данная СМО относится к системам с очередью, т. к. если число заказов превысит число бригад, то образуется очередь.

По ограничению потока заявок СМО относится к замкнутым СМО, поскольку число магазинов ограничено и равно n .

По числу каналов обслуживания – система многоканальная (*m*-канальная).

В приведенных ниже примерах СМО выделите их основные элементы: входящий поток заявок, каналы обслуживания (если указано, то их количество), выходящий поток заявок

Упражнение 1.1. К серверу подключена сеть из 15 компьютеров, за которыми работают пользователи. Программы пользователей, посылаемые на обработку, снабжены определенным кодом, устанавливающим приоритет обслуживания. Чем выше приоритет программы, тем быстрее программа будет обработана сервером.

Упражнение 1.2. Рассматривается работа справочного бюро железнодорожного вокзала, в которой можно получить информацию о расписании движения поездов, стоимости проезда и т.д. Процесс обслуживания заключается в выдаче устной справки агентом информатором.

Упражнение 1.3. В одном из филиалов банка имеется четыре оператора, обслуживающих клиентов по вкладам. Каждый оператор одновременно может обслужить только одного клиента. Если клиент заходит в филиал, когда операторы заняты обслуживанием, он может не ожидать обслуживания и зайти в другой филиал банка.

Упражнение 1.4. В инструментальной кладовой работают три кладовщика, которые должны обеспечить инструментами требования, поступающие от рабочих.

Упражнение 1.5. В ателье по ремонту одежды на привокзальной площади работают два мастера. Клиенты ограничены временем пребывания на вокзале. По истечении времени пребывания клиент вынужден забрать сданную в ателье одежду, независимо от того, началось обслуживание или она еще находилась в ожидании ремонта.

Упражнение 1.6. На станцию текущего ремонта сельскохозяйственной техники поступают в сутки 3 машины. Станция имеет 2 помещения для технологического ремонта. Во дворе станции имеется небольшая крытая площадка, где одновременно может находиться, ожидая очереди, не более 10 машин. Среднее время ремонта равно 2 суткам.

Упражнение 1.7. В одном из отделов магазина покупателей обслуживают продавец и кассир. В течение рабочего дня в магазин приходят покупатели с интенсивностью 20 чел./ч. Кассир обслуживает 10, чел./ч, а продавец – 8 человек.

Упражнение 1.8. Имеется противокатерная оборона соединения кораблей, состоящая из трех единиц. Катера противника производят атаку с плотностью 2 группы/мин. Группа может состоять с равной вероятностью из одного, двух или трех катеров противника. Время,

необходимое противокатерному средству на обстрел одного катера, равно 1,5 мин.

Упражнение 1.9. На производственный участок поступают детали. Сначала они проходят внешнюю приемку у контролера ОТК. 5 % из них направляются на доработку, после чего поступают вновь на приемку. Детали дважды побывавшие на доработке направляются в брак. После приемки детали поступают на сборку, а затем на термозакалку. Детали, закаливавшиеся менее 10 мин, получают маркировку 2-го сорта, а если кроме этого они были и на доработке – 3-го.

Упражнение 1.10. На заводе имеются два красильных цеха: основной и дополнительный. В основном цехе функционируют 4 красильные установки, а в дополнительном – 2. Производительность всех этих шести установок одна и та же и в среднем равна 5 изд./ч. Из многих цехов завода в случайные моменты времени в основной красильный цех поступают на окраску изделия с интенсивностью 10 изд./ч. Если в момент поступления очередного изделия все четыре красильные установки основного цеха оказываются занятыми, то это изделие поступает в дополнительный цех. Если при этом обе красильные установки дополнительного цеха также оказываются занятыми, то изделие остается не окрашенным.

Упражнение 1.11. В одном из районов большого города работает парикмахерская, которая обслуживает жителей этого района. В парикмахерской имеется 3 мастера. Одни клиенты, застав всех мастеров занятыми обслуживанием, становятся в очередь и ожидают. Другие клиенты, не могут ждать, они спешат и, если все мастера заняты уже обслуживанием, уходят. Клиенты первого вида составляют поток с плотностью 6 клиентов в час, а второго вида – 3 клиента в час. Среднее время обслуживания равно 20 мин.

Упражнение 1.12. Вычислительная система состоит из двух независимо функционирующих ЭВМ. Для обработки одних запросов требуется ЭВМ1, для обработки других – ЭВМ2. Выбор ЭВМ происходит случайным образом: с вероятностью, равной 0.351 запрос обрабатывается на ЭВМ1 и с вероятностью 0.649 – на ЭВМ2. Общее число запросов в течение всего интервала моделирования системы остается постоянным. Запросы вычислительную систему не покидают, а циркулируют в ней, последовательно изменяя свои состояния в моменты перехода от одной фазы обслуживания к другой.

Упражнение 1.13. Вычислительная сеть состоит из трех машин. На каждую из них поступает поток заявок. Половина их решается на месте. 1/4 часть для своего решения требует подключения еще одной

машины, а оставшаяся часть требует все ресурсы сети. Задачи, требующие многомашинной обработки, обслуживаются вне очереди и могут прерывать решение простых задач. Причем, задачи, требующие все ресурсы сети, имеют наивысший приоритет и могут прерывать решение всех задач.

Упражнение 1.14. Станция автотехобслуживания ремонтирует машины трех типов: А, В, С. На СТО работают 2 бригады слесарей. Время ремонта машин является случайной величиной. Стоянка перед СТО имеет 15 мест, и каждая бригада имеет свой бокс на 2 машины, которые обслуживаются одновременно. Машины, не нашедшие места на стоянке, ремонтируются в другом месте.

Упражнение 1.15. На обработку в вычислительную систему, состоящую из двух сопроцессоров и оперативной памяти, поступают задачи А, В, С. Задачи А поступают в систему и занимают для решения первый процессор и пять страниц памяти, задачи В – второй процессор и три страницы памяти, задачи С – оба процессора и 10 страниц памяти. Задачи получают отказ в обслуживании, если во входной очереди для задач А уже стоят 5 задач.

В рассмотренных ниже упражнениях определить классы СМО по следующим основаниям:

- а) по характеру поступления заявок на обслуживание;
- б) по характеру поведения заявки в системе;
- в) по ограничению потока заявок;
- г) по числу каналов обслуживания.

Упражнение 1.16. Вычислительная система состоит из двух процессоров. Если процессор 1 занят, обработка запросов пользователя проводится 2-м процессором. Если и он занят, запросы остаются в очереди перед вторым процессором. Запросы систему не покидают, а циркулируют в ней.

Упражнение 1.17. Мастерская, ремонтирующая компьютеры, имеет n мастеров. Моменты выхода из строя компьютеров случайны. Время ремонта одного компьютера зависит от характера неисправностей, опыта мастера, наличия запасных частей и т. д. Если заявка на ремонт поступает в момент, когда все мастера заняты, то она ожидает обслуживания, поскольку неисправный компьютер владельцу не нужен.

Упражнение 1.18. Автозаправочная станция имеет две колонки. Площадка при станции допускает пребывание в очереди на заправку не более восьми машин одновременно. Если в очереди уже находится 8 машин, очередная машина проезжает мимо.

Упражнение 1.19. Частная компания имеет пять вертолетов для коммерческих перевозок. Эти вертолеты обслуживаются двумя

инженерами техниками. Профилактические осмотры вертолетов осуществляются раз в неделю в порядке очередности. В случае поломки какого-либо вертолета сначала выполняются ремонтные работы по устранению его неполадок, а затем – запланированный профилактический осмотр.

Упражнение 1.20. В мастерской по ремонту фотоаппаратов курортного города работают 4 мастера. Поток клиентов делится на два вида. Поток клиентов, требующих срочного ремонта, задается плотностью 10 человек в день. Если в мастерской имеется 6 заказов, то она не принимает новых. Клиенты ограничены временем пребывания в курортном городе, которое равно в среднем 10 дней. По истечении срока отпуска клиенты вынуждены забирать сданные в ремонт фотоаппараты, независимо от того, началось обслуживание или они еще находились в ожидании ремонта.

Упражнение 1.21. Вычислительная система состоит из центрального процессора и канала ввода-вывода. Запрос, посланный пользователем, попадает на обработку в центральный процессор, предварительно обслужившись в канале. Ответное сообщение, в виде обработанного запроса пользователя проделывает обратный путь через канал ввода-вывода. Так как сообщение, обработанное в процессоре, будет отличаться от посланного сообщения, то и время работы канала по передаче запроса пользователя будет отличным от времени работы канала по передаче ответного сообщения. Запросы систему не покидают, а циркулируют в ней.

Упражнение 1.22. В системе ПВО имеются три пусковые установки и специальные станции слежения, которые осуществляют наблюдение за самолетами, влетевшими в зону обстрела в момент, когда пусковые установки заняты обстрелом самолетов, появившихся в зоне ранее. Как только освобождается одна из установок, станция слежения «передает» ей самолет на обстрел при условии, что самолет ещё находится в зоне обстрела. Определить основные характеристики системы, если интенсивность, с которой каждая установка обстреливает самолет, равна двум самолетам в минуту, а интенсивность в которой самолеты влетают в зону, равна 0,5 самолетам в минуту. Время, в течение которого самолет находится в зоне до начала его обстрела в среднем равно 3 мин.

Упражнение 1.23. Обувная мастерская, имеющая 2 мастеров, осуществляет обычный и срочный (в присутствии заказчика) ремонт. При поступлении заказа на срочный ремонт, обычный прерывается. Поток заказов на срочный ремонт имеет плотность 2 чел./ч. Поток

обычных заказов задается плотностью 7 чел./ч. Время обычного ремонта равно 30 мин. Время срочного ремонта равно 20 мин.

Упражнение 1.24. В небольшом японском кафе предлагаются национальные блюда из живой рыбы. Число столиков в зале ограничено и равно 12. В среднем, кафе посещают семь человек в час. Один повар смог бы приготовить заказ для одного клиента, в среднем за 30 мин. Для того, чтобы ускорить процесс приготовления заказа применяется технология, в которой задействованы все четыре повара, работающих в кафе. После выполнения заказа, принимается заявка от очередного посетителя. Если посетитель застает в кафе все столики занятыми, он направляется в соседнее заведение.

Упражнение 1.25. Готовые изделия поступают партиями по 4 штуки на конвейер, который доставляет их в цех на упаковку. Пока изделия движутся по конвейеру, они могут быть взяты на контроль, который осуществляется при помощи 3 приборов. Время, в течение которого готовые изделия могут быть взяты на контроль, равно 3 мин. Если за это время изделие не будет проверено, то оно поступит в цех упаковки без контроля. Время контроля одного изделия равно 2 мин. Плотность поступления готовых изделий на конвейер равна 5 партиям в мин.

Упражнение 1.26. В упаковочном цехе имеются два упаковочных автомата, первый из которых упаковывает в среднем 40 изделий в час, а второй – 30 изделий в час. В случайные моменты времени на первый автомат поступает для упаковки в среднем 80 изделий в час.

Упражнение 1.27. Аэропорт обслуживает самолеты. Обслуживание ведется двумя специализированными бригадами. Каждый самолет, чтобы пройти техническое обслуживание, вначале осматривается первой бригадой, которая производит регламентные работы двигателей. Вторая бригада проводит регламентные работы по планеру, шасси и др.

2. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТКАЗАМИ

Эти системы распространены достаточно широко. Особенностью их функционирования является то, что всякое требование, поступившее в систему в некоторый момент времени, либо начинает сразу обслуживаться, либо теряется (получает отказ), если в момент его поступления все обслуживающие приборы заняты.

Наиболее характерным примером систем этого типа может служить автоматическая телефонная станция. Здесь заявкой, требованием, поступившим в систему, является обращение клиента на телефонную станцию. Если нужная линия связи уже занята разговором, абонент получает отказ. Автоматическая телефонная станция дает частые гудки, и требование на разговор теряется. Системы с отказами могут быть одноканальными и многоканальными. Например, телефонная станция с одной выходной линией связи является одноканальной системой массового обслуживания. Если таких линий несколько, то линия связи – многоканальная.

2.1. Одноканальная СМО с отказами

Постановка задачи [1–18]. В СМО имеется один обслуживающий прибор. Одновременно прибор способен обслуживать только одно требование. Время обслуживания случайно, и его длительность имеет показательное распределение с параметром μ . Поток требований – пуассоновский с параметром λ . Каждое требование, поступившее в систему, начинает обслуживаться

немедленно, если прибор свободен. Если же прибор занят, то требование теряется, получает отказ.

Одним из примеров одноканальной системы массового обслуживания с отказами может служить автоматическая телефонная станция с одной линией связи.

Состояния одноканальной СМО характеризуются простаиванием или занятостью канала. Тогда СМО может находиться в одном из двух состояний:

s_0 – канал свободен (простаивает);

s_1 – канал занят.

Переход системы из состояния s_0 в состояние s_1 происходит под воздействием входящего потока заявок, а из состояния s_1 в состояние s_0 систему переводит поток обслуживаний: если в данный момент времени система находится в некотором состоянии, то с наступлением первого после данного момента времени события этого потока система тут же «перескакивает» в другое состояние [2, 3]. Плотности вероятностей перехода из состояния s_0 в состояние s_1 и обратно равны соответственно λ и μ [2, 3].

Плотностью вероятности перехода $\lambda_{ij}(t)$ системы из состояния s_i в состояние s_j в момент времени t называется величина

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t; \Delta t)}{\Delta t},$$

где $P_{ij}(t; \Delta t)$ – вероятность того, что система, находившаяся в момент времени в состоянии s_i , за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$, $\Delta t > 0$ (т. е. за время Δt) перейдет из него в состояние s_j . Полагают, что $\lambda_{ii}(t) = 0$ [2, 3].

Размеченный граф состояний одноканальной СМО с отказами имеет вид, приведенный на рис. 2.1.

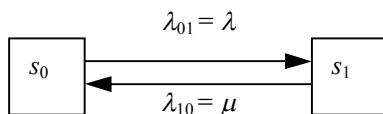


Рис. 2.1. Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Обозначим через $P_0(t)$ и $P_1(t)$ – вероятности событий, состоящих в том, что в момент времени t СМО находится соответственно в состояниях s_0 и s_1 . Эти вероятности называют вероятностями состояний [2, 3, 9]. Очевидно, что вероятности состояний для любого момента времени t удовлетворяют нормировочному условию [2, 3, 9]

$$P_0(t) + P_1(t) = 1, t \geq 0. \quad (2.1)$$

Вероятности состояний $P_0(t)$ и $P_1(t)$ являются основными характеристиками случайного процесса, протекающего в СМО. Так как этот процесс марковский, то вероятностные функции времени $P_0(t)$ и $P_1(t)$ можно найти из системы уравнений Колмогорова, составляемой по следующему правилу [2].

Например, необходимо найти вероятность состояния системы $P_0(t)$, придадим малое приращение Δt и найдем вероятность того, что в момент времени $t + \Delta t$ система будет находиться в состоянии s_0 . Это событие может произойти двумя способами:

– в момент t система уже была в состоянии s_0 , а за время Δt не вышла из этого состояния;

– в момент t система была в состоянии s_1 , а за время Δt перешла из него в состояние s_0 .

Вероятность первого варианта найдем как произведение вероятности $P_0(t)$ того, что система в момент времени t была в состоянии s_0 , на условную вероятность $(1 - \lambda_{01}\Delta t)$ того, что, будучи в состоянии s_0 , система за время Δt не перейдет из него в s_1 . Таким образом, вероятность первого варианта равна $P_0(t)(1 - \lambda_{01}\Delta t)$.

Вероятность второго варианта равна вероятности $P_1(t)$ того, что система в момент времени t была в состоянии s_1 , умноженной на условную вероятность $\lambda_{10}\Delta t$ того, что система за время Δt перейдет в состояние s_0 . Таким образом, вероятность первого варианта равна $P_1(t)\lambda_{10}\Delta t$.

Применяя правило сложения вероятностей, получим

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda_{01}\Delta t) + P_1(t)\lambda_{10}\Delta t.$$

Раскроем скобки в правой части, перенесем $P_0(t)$ в левую и разделим обе части равенства на Δt , получим

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t).$$

Теперь запишем предел при $\Delta t \rightarrow \infty$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t).$$

Левая часть есть не что иное, как производная функции $P_0(t)$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t).$$

Аналогично находим значение вероятности состояния системы $P_1(t)$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu P_1(t) + \lambda P_0(t).$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид [2, 3, 9]

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu P_1(t) + \lambda P_0(t). \end{cases}$$

Для установившегося процесса обслуживания при $t \rightarrow \infty$ получены следующие характеристики [2, 3]:

– вероятность того, что канал свободен, т. е. поступившая заявка будет принята к обслуживанию:

$$P_0 = P_{\text{обс}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \quad (2.2)$$

– вероятность занятости канала, т. е. вероятность отказа заявке:

$$P_{\text{отк}} = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}; \quad (2.3)$$

– относительная пропускная способность

$$Q = P_{\text{обс}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \quad (2.4)$$

– абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda Q = \lambda P_0 = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}; \quad (2.5)$$

– среднее время обслуживания заявки

$$\bar{t}_{\text{обс}} = \frac{1}{\mu}; \quad (2.6)$$

– среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{t}_{\text{сис}} = \frac{1}{\lambda + \mu}; \quad (2.7)$$

– интенсивность выходящего потока обслуженных заявок

$$\nu = A = \lambda P_0 = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}. \quad (2.8)$$

2.2. Многоканальная СМО с отказами

Рассмотрим работу многоканальной СМО с отказами [1–19].

Постановка задачи. Система обслуживания состоит из n обслуживающих приборов ($n > 1$). В систему поступает простейший поток требований интенсивности λ . Если в момент поступления требования имеется хотя бы один свободный прибор, оно немедленно начинает обслуживаться. Если же все приборы заняты, то требование

получает отказ. Каждое требование обслуживается одним прибором, и каждый прибор обслуживает в каждый момент времени не более одного требования. Время обслуживания каждого требования случайно и подчиняется показательному закону распределения с параметром μ .

Задача исследования таких систем впервые возникла в телефонии и была решена в 1909 г. датским ученым А.К. Эрлангом. Являясь сотрудником Копенгагенской телефонной компании, он опубликовал в 1909 году работу «Теория вероятностей и телефонные переговоры», в которой решил ряд задач по теории систем массового обслуживания с отказами [3, 9].

Состояния системы пронумеруем по числу занятых каналов. Для СМО с отказами это означает, что мы нумеруем состояния по числу заявок, находящихся в системе, т. е. под обслуживанием, поскольку каждый канал в любой момент времени либо свободен, либо обслуживает только одну заявку. Таким образом, система может находиться в одном из $n + 1$ состояний:

s_0 – все n каналов свободны;

s_1 – занят только один канал, остальные $n - 1$ каналов свободны;

...

s_k – заняты k каналов, остальные $n - k$ каналов свободны;

...

s_n – заняты все n каналов.

Граф состояний СМО представлен на рис. 2.2.

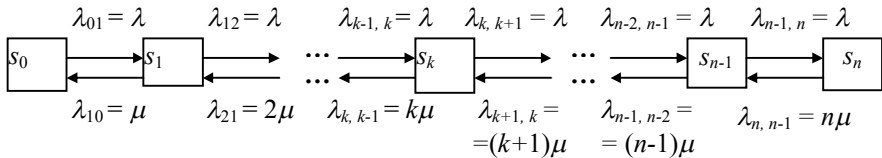


Рис. 2.2. Граф состояний многоканальной СМО с отказами

Пользуясь правилами, приведенными в [2], составим уравнения Колмогорова для вероятностей состояний [2, 3, 9]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_1(t) + \lambda P_0(t) + 2\mu P_2(t), \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{dP_k(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{dP_n(t)}{dt} = -n\mu P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t). \end{array} \right.$$

Для установившегося процесса обслуживания Эрланг получил следующие зависимости [2, 3, 9, 11, 19]:

– вероятность того, что обслуживанием заняты k приборов

$$P_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}}, \quad k = \overline{0, n}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}; \quad (2.9)$$

– вероятность отказа, т. е. вероятность того, что в момент поступления очередного требования на обслуживание все приборы будут заняты

$$P_{\text{отк}} = P_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{\rho^n}{n!} P_0; \quad (2.10)$$

– относительная пропускная способность

$$Q = P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - P_n; \quad (2.11)$$

– абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda Q = \lambda(1 - P_n); \quad (2.12)$$

– среднее число приборов занятых обслуживанием

$$N_3 = \sum_{k=1}^n k P_k = P_0 \sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{(k-1)!} = \frac{A}{\mu} = \rho(1 - P_n); \quad (2.13)$$

– коэффициент загрузки приборов

$$K_3 = \frac{N_3}{n}; \quad (2.14)$$

– среднее число приборов свободных от обслуживания

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k (n-k)}{k!}; \quad (2.15)$$

– коэффициент простоя приборов

$$K_{\Pi} = \frac{N_0}{n}; \quad (2.16)$$

– среднее время пребывания заявки в СМО

$$\bar{t}_{\text{сис}} = \frac{1}{\mu} (1 - P_n) = \frac{1}{\lambda} N_3. \quad (2.17)$$

2.3. Системы с поступлением групповых заявок

На практике часто встречаются такие системы массового обслуживания, в которых требования на обслуживание поступают группами – парами, тройками либо группами со случайным числом заявок в каждой. Придя в систему массового обслуживания, каждое из требований группы либо обслуживается, либо получает отказ, в зависимости от занятости приборов обслуживания. Примером этому может служить прилет в систему ПВО самолетов противника парами, звеньями и т. д. В работе ПВО прикрываемого объекта каждый из

самолетов противника будет обстреливаться зенитными комплексами [9].

Постановка задачи. Имеется n обслуживающих приборов. Поток требований – пуассоновский с параметром λ . Придя в СМО, каждое из требований группы либо обслуживается, либо получает отказ, в зависимости от занятости приборов обслуживания. Время обслуживания каждой заявки в группе случайно, и его длительность имеет показательное распределение с параметром μ . Выбор заявки в группе производится случайно, по закону равной вероятности.

Рассмотрим 2 случая.

Число заявок в группе постоянное. Для этого случая получены следующие рекуррентные зависимости [9]:

$$\begin{aligned} \rho P_0 &= P_1, \\ (1 + \rho)P_1 &= P_2, \\ &\dots\dots\dots \\ (k + \rho)P_k &= (k + 1)P_{k+1} \quad \text{при } k < m, \\ (k + \rho)P_k &= (k + 1)P_{k+1} + \rho P_{k-m} \quad \text{при } k \geq m, \\ &\dots\dots\dots \\ (n + \rho)P_n &= \rho P_{n-m}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

где m – число заявок в группе.

При решении системы (2.18) получены следующие зависимости при $m < n$:

$$P_k = \gamma_k P_0, \tag{2.19}$$

где

$$\gamma_k = \frac{\prod_{r=1}^k [\rho + (r-1)]}{k!} \quad \text{при } k \leq m$$

и

$$\gamma_k = \frac{\prod_{r=1}^k [\rho + (r-1)]}{k!} - \rho \sum_{j=0}^{k-m-1} \frac{\prod_{i=1}^{k-m-j-1} [(\rho + m + j) + i]}{\prod_{s=1}^{k-m-j} (m + j + s)} \gamma_j \quad \text{при } k > m,$$

где $\prod_{1}^0 (x) = 1$.

Значение величины P_0 определяется из нормирующего условия

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1. \quad (2.20)$$

Для случая, когда число заявок в группе больше, чем число приборов, т. е. $m \geq n$ получены следующие характеристики:

$$P_k = \frac{\prod_{m=0}^{k-1} (\rho + m)}{k!} P_0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.21)$$

и

$$P_0 = \left[\frac{\prod_{m=1}^m (\rho + m)}{n!} \right]^{-1}. \quad (2.22)$$

Для рассматриваемой системы с отказами наибольший интерес представляет:

– вероятность отказа в обслуживании

$$P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\sum_{k=0}^n k P_k}{\rho t}. \quad (2.23)$$

Среднее число занятых приборов, коэффициент занятости приборов, среднее число свободных от обслуживания приборов, коэффициент простоя приборов могут быть определены по формулам (2.13)–(2.16).

Число заявок в группе случайное. Дальнейшим обобщением практических задач, связанных с поступлением в систему массового обслуживания потока групповых требований, является случай, когда число требований в группе случайное. Примером СМО могут служить билетные кассы. Каждый покупатель в билетной кассе требует различное случайное количество билетов (например, один покупатель требует два билета, другой четыре, третий один и т. д.) [9].

Постановка задачи. В n -канальную СМО с отказами поступает пуассоновский поток групповых требований случайного состава. Это означает, что если в момент t поступило групповое требование, то с вероятностью a_1 может поступить лишь одно требование в группе, с вероятностью a_2 – два требования и вообще с вероятностью a_r – r требований. При этом должны выполняться условия

$$a_r \geq 0, r = 1, 2, 3, \dots$$

и

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r = 1.$$

Система дифференциальных уравнений, описывающая все состояния, имеет вид [9]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{dP_k(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu)P_k(t) + \lambda \sum_{i=1}^k a_i P_{k-i}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{dP_n(t)}{dt} = -n\mu P_n(t) + \lambda \sum_{s=1}^n P_{n-s} \sum_{i=s}^{\infty} a_i. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Полагая, что существует стационарное решение при $t \rightarrow \infty$, получим систему алгебраических уравнений [9]

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0, \\ \dots\dots\dots, \\ P_{k+1} = \frac{\lambda + k\mu}{(k+1)\mu} P_k - \frac{\lambda}{(k+1)\mu} \sum_{i=1}^k a_i P_{k-i}, \\ \dots\dots\dots, \\ P_n = \frac{\lambda}{n\mu} \sum_{s=1}^n P_{n-s} \sum_{i=s}^{\infty} a_i. \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Значение P_0 определяется из нормирующего условия

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1.$$

Вероятность отказа в обслуживании будет равна

$$P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^n k P_k}{\rho \sum_{k=1}^{\infty} k a_k}. \quad (2.26)$$

2.4. Системы с последовательно расположенными группами приборов

2.4.1. Последовательно расположенные группы однотипных приборов

На практике довольно часто возникают ситуации, в которых необходимо определить вероятность обслуживания заявки (требования) при прохождении ею ряда последовательно расположенных групп приборов. В таких системах заявки, которые не были сразу обслужены приборами первой группы, поступают на приборы второй группы и т. д. Примером сформулированной задачи может служить эшелонированная противотанковая оборона какого-нибудь объекта.

Постановка задачи. В системе имеется i последовательно расположенных групп приборов. В каждой группе имеется r_j приборов. Поток требований – пуассоновский с параметром λ . Время обслуживания заявок, поступающих в систему, является случайной величиной с показательным законом распределения, имеющим параметр μ . Все приборы системы однотипны, т. е. имеют одинаковый закон распределения времени обслуживания [6, 9].

Вероятность того, что приборы получают отказ на приборах первой группы и поступят на приборы второй, определяется по формуле Эрланга

$$P_1 = \frac{\frac{\rho^{r_1}}{r_1!}}{\sum_{k=0}^{r_1} \frac{\rho^k}{k!}}. \quad (2.27)$$

Если и приборы второй группы будут также заняты обслуживанием, то заявки получают отказ. Вероятность этого события равна

$$P_2 = \frac{\rho^{r_1+r_2}}{(r_1+r_2)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!}, \quad (2.28)$$

где r_1 – число приборов в первой группе; r_2 – число приборов во второй группе.

Вероятность прохода заявок необслуженными сквозь всю систему равна

$$P_i = \frac{\rho^{r_1+r_2+\dots+r_i}}{(r_1+r_2+\dots+r_i)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!}. \quad (2.29)$$

Используя формулу (2.27) можно определить:

– вероятность отказа в обслуживании на приборах j -й последовательной группы

$$P_j = \frac{P_j}{P_{j-1}}; \quad (2.30)$$

– вероятность того, что приборы j -й последовательной группы обслужат заявку, которая не была обслужена предыдущими группами

$$P_{\text{обс}_j} = \frac{P_{j-1} - P_j}{P_{j-1}}; \quad (2.31)$$

– коэффициент производительности приборов j -й последовательной группы ($1 \leq j \leq i$)

$$\eta_j = \frac{P_{j-1} - P_j}{1 - P_j}. \quad (2.32)$$

2.4.2. Два последовательно расположенных прибора разной производительности

На практике часто возникают ситуации, в которых необходимо определить вероятность обслуживания заявки при прохождении ею ряда последовательно расположенных приборов или групп приборов разной производительности. Наиболее простой системой массового обслуживания с последовательно расположенными приборами разной производительности являются два последовательно расположенных прибора разной производительности.

Постановка задачи. В СМО имеются два прибора разной производительности. Времена обслуживания каждого из них подчиняются показательному закону с параметрами μ_1 и μ_2 . На первый прибор поступает пуассоновский поток с интенсивностью λ заявок на единицу времени. Заявки, которые не были обслужены первым прибором из-за его занятости, поступают для обслуживания на второй прибор. Если он занят, то заявки считаются необслуженными.

Обозначим вероятности состояний системы [6, 9]:

P_{00} – первый и второй приборы свободны от обслуживания;

P_{10} – первый прибор занят обслуживанием, второй свободен;

P_{01} – первый прибор свободен, второй занят обслуживанием;

P_{11} – оба прибора заняты обслуживанием.

Решение данной задачи приводит к следующей системе дифференциальных уравнений [6, 9]:

$$\begin{cases} \frac{dP_{00}(t)}{dt} = -\lambda P_{00}(t) + \mu_1 P_{10}(t) + \mu_2 P_{01}(t), \\ \frac{dP_{01}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu_2) P_{01}(t) + \mu_1 P_{11}(t), \\ \frac{dP_{10}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu_1) P_{10}(t) + \lambda P_{00}(t) + \mu_2 P_{11}(t), \\ \frac{dP_{11}(t)}{dt} = -(\mu_1 + \mu_2) P_{11}(t) + \lambda P_{01}(t) + \lambda P_{10}(t). \end{cases} \quad (2.33)$$

Полагая, что существует стационарное решение при $t \rightarrow \infty$, получим систему алгебраических уравнений [6, 9]

$$\begin{cases} \lambda P_{00} = \mu_1 P_{10} + \mu_2 P_{01}, \\ (\lambda + \mu_2) P_{01} = \mu_1 P_{11}, \\ (\lambda + \mu_1) P_{10} = \lambda P_{00} + \mu_2 P_{11}, \\ (\mu_1 + \mu_2) P_{11} = \lambda P_{01} + \lambda P_{10}. \end{cases} \quad (2.34)$$

Решение системы (2.34) дает следующие характеристики [6, 9]:

– вероятность отказа в обслуживании

$$P_{\text{іңе}} = P_{11} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2) + \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda + \mu_2} (2\lambda + \mu_1 + \mu_2)}; \quad (2.35)$$

– вероятность того, что все приборы свободны от обслуживания

$$P_{00} = \frac{\mu_1 \mu_2 (2\lambda + \mu_1 + \mu_2)}{\lambda^2 (\lambda + \mu_2)} P_{11}; \quad (2.36)$$

– вероятность того, что занят обслуживанием только первый прибор

$$P_{10} = \frac{\mu_2 (\lambda + \mu_1 + \mu_2)}{\lambda (\lambda + \mu_2)} P_{11}; \quad (2.37)$$

– вероятность того, что занят обслуживанием только второй прибор

$$P_{11} = \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_2} P_{11}. \quad (2.38)$$

Коэффициент загрузки первого прибора равен

$$\eta_1 = \frac{\mu_1 (P_{11} + P_{10})}{\lambda (1 - P_{11})} = \frac{\mu_1 [\lambda (\lambda + \mu_2) + \mu_2 (\lambda + \mu_2 + \mu_1)]}{(\lambda + \mu_2) \left[\lambda (\mu_1 + \mu_2) + \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda + \mu_2} (2\lambda + \mu_1 + \mu_2) \right]}. \quad (2.39)$$

Коэффициент загрузки второго прибора равен

$$\eta_2 = \frac{\mu_2 \lambda (\lambda + \mu_2 + \mu_1)}{(\lambda + \mu_2) \left[\lambda (\mu_1 + \mu_2) + \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda + \mu_2} (2\lambda + \mu_1 + \mu_2) \right]}. \quad (2.40)$$

Отношение коэффициентов загрузки покажет, во сколько раз один прибор работает больше, чем другой и оно равно

$$Q_{12} = \frac{\mu_1 (\lambda + \mu_2)}{\mu_2 (\lambda + \mu_1 + \mu_2)} + \frac{\mu_1}{\lambda}. \quad (2.41)$$

2.5. Системы с накопителем заявок

Автоматизация технологических процессов в машиностроении, приборостроении и во многих областях промышленности, все большее развитие ЭВМ выдвинули ряд интересных задач для систем массового обслуживания, особенность работы которых заключается в том, что заявки поступают вначале не на обслуживающие приборы, а в накопитель. По мере функционирования этих систем через некоторые интервалы времени заявки могут быть взяты из накопителя для обслуживания. Примером такой системы может служить некоторая информационная логическая машина, у которой имеется блок сбора (буферная память) и блок обработки информации. Поступающая в систему информация записывается вначале в буферную память, если в ней имеется место, иначе информация теряется. Из буферной памяти она может поступать в блок обработки, если в нем закончился процесс обработки предшествующего массива информации. Другим примером систем массового обслуживания может служить телеграф. На телеграф поступают в большом количестве телеграммы, которые необходимо доставить адресатам. Если нет свободных почтальонов, то поступившие телеграммы складываются и ожидают, пока не освободится один из почтальонов после доставки адресатам полученных ранее телеграмм [6, 9].

Постановка задачи. СМО состоит из накопителя заявок и прибора обработки этих заявок. Заявки поступают в накопитель в случайные моменты времени, распределенные по пуассоновскому закону с параметром λ . Объем накопителя заявок ограничен и равен n

заявкам. Если поступившая заявка застанет накопитель полностью заполненным, то заявка теряется. Через некоторые случайные моменты времени к накопителю обращается прибор обработки и принимает на обслуживание накопившиеся в нем к этому времени заявки. Время обслуживания этих заявок случайно, и его длительность имеет показательное распределение с параметром μ .

В этом случае вероятность того, что в накопителе при установившемся режиме имеется ровно k требований, определяется по формуле [6]

$$P_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{(\rho+1)^{k+1}}, & \text{при } k < n, \\ \frac{\rho^n}{(\rho+1)^n}, & \text{при } k = n. \end{cases} \quad (2.42)$$

Для рассматриваемой системы с отказами наибольший интерес представляет [6]:

– вероятность отказа в обслуживании

$$P_{\text{отк}} = P_n = \frac{\rho^n}{(\rho+1)^n}; \quad (2.43)$$

– среднее число заявок, находящихся в накопителе

$$M_{\text{нак}} = \sum_{k=1}^n k P_k; \quad (2.44)$$

– коэффициент полезной загрузки накопителя

$$\eta = \frac{m}{n}; \quad (2.45)$$

– среднее время обслуживания одной заявки

$$\bar{t}_{\text{обс}1} = \frac{1}{\mu m}. \quad (2.46)$$

Задачи и упражнения

Задача 2.1. На одну телефонную линию поступает простейший поток вызовов с интенсивностью 1,5 вызова в мин. Производительность телефонной линии 0,5 вызова в мин. Вызов, поступивший в момент занятости телефонной линии, получает отказ. Определить предельные характеристики системы.

Решение. В условиях задачи математической моделью телефонной линии является одноканальная СМО с отказами, имеющая своими параметрами интенсивность входящего потока $\lambda = 1,5$ и интенсивность потока обслуживаний $\mu = 0,5$. Зная интенсивности входящего потока заявок и потока обслуживаний по формуле (2.3) определяем вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{1,5}{1,5 + 0,5} = 0,75,$$

или в процентах $P_{\text{отк}} = 75 \%$, т. е. в установившемся предельном режиме из 100 заявок в среднем 75 получают отказ.

Относительная пропускная способность вычисляется по формуле (2.4)

$$Q = P_{\text{обс}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0,5}{1,5 + 0,5} = 0,25.$$

Абсолютная пропускная способность определяется по формуле (2.5)

$$A = \lambda Q = 1,5 * 0,25 = 0,375.$$

Среднее время обслуживания и среднее время пребывания заявки в системе, вычисленные по формулам (2.6)–(2.7), соответственно равны

$$\bar{t}_{\text{обс}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,5} = 2$$

и

$$\bar{t}_{\text{сис}} = \frac{1}{\lambda + \mu} = \frac{1}{1,5 + 0,5} = 0,5.$$

Задача 2.2. Автоматическая телефонная станция имеет пять линий связей. В минуту поступает 2 вызова, время каждого разговора

равно 1 мин. Предполагается, что требование получает отказ, если в момент его поступления на АТС все пять линий заняты. Необходимо оценить работу АТС.

Решение. Рассматриваемая система массового обслуживания относится к многоканальным системам с отказами. Для данной системы имеем: $n = 5$, $\lambda = 2$, $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обс}} = 1/1 = 1$. Определяем параметр $\rho = \lambda/\mu = 2/1 = 2$.

Вероятность того, что все линии АТС будут свободны может быть определена по формуле (2.10)

$$P_0 = \frac{\frac{2^0}{0!}}{\sum_{k=0}^5 \frac{2^k}{k!}} = \frac{1}{\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!}} = \frac{1}{1 + 2 + 2 + 1,333 + 0,667 + 0,267} = \frac{1}{7,267} = 0,138.$$

Для вероятности того, что телефонный разговор с первого вызова не состоится, согласно формуле (2.11) имеем

$$P_5 = 0,138 * \frac{2^5}{5!} = 0,037.$$

Для проведения следующих расчетов составим табл. 2.1.

Таблица 2.1

Число линий связи	$\frac{\rho^k}{k!}$	P_k	kP_k	$(n-k)P_k$
0	1	0,138	0	0,688
1	2	0,275	0,275	1,101
2	2	0,275	0,550	0,826
3	1,333	0,183	0,549	0,367
4	0,667	0,092	0,368	0,092
5	0,267	0,037	0,185	0
Сумма		1,000	1,927	3,074

По результатам расчетов получено

$$N_3 = \sum_{k=1}^n kP_k = 1,927 \text{ линий.}$$

Значит, коэффициент загрузки линий связей равен

$$K_3 = \frac{N_3}{n} = \frac{1,927}{5} = 0,385.$$

Среднее число свободных линий связей равно

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)P_k = 3,074 \text{ линий},$$

откуда коэффициент простоя линий равен

$$K_{\Pi} = \frac{N_0}{n} = \frac{3,074}{5} = 0,615.$$

Среднее время пребывания заявки в СМО равно

$$\bar{t}_{\text{сис}} = \frac{1}{\lambda} N_3 = \frac{1}{2} * 1,927 \approx 1 \text{ мин.}$$

Задача 2.3. Оценить эффективность некоторой противокатерной обороны соединения кораблей, состоящей из трех единиц, когда катера противника производят атаку с плотностью 1 группа/мин. Группа может состоять с равной вероятностью из одного, двух или трех катеров противника. Время, необходимое противокатерному средству на обстрел одного катера, равно 1 мин.

Решение. Данная система относится к СМО с отказами с поступлением групповых заявок. Число заявок в группе случайно. Для системы имеем: $n=3$, $\lambda = 1$, $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обс}} = 1/1 = 1$. Так как по условию задачи группа с равной вероятностью может состоять из одного, двух или трех катеров противника, то вероятности $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$.

Определяем параметр $\rho = \lambda/\mu = 1/1 = 1$.

Используя систему алгебраических уравнений (2.25), найдем P_k

$$P_1 = P_0.$$

$$P_2 = \frac{1+1}{2}P_1 - \frac{1}{2} \frac{1}{3}P_0,$$

$$P_3 = \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3} \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3} \frac{1}{3}P_0.$$

Используя нормирующее условие $\sum_{k=0}^n P_k = 1$, получим следующие значения вероятностей состояний системы противокатерной обороны:

$$P_0 = 0,29; P_1 = 0,29; P_2 = 0,24; P_3 = 0,18.$$

По формуле (2.26) определим вероятность того, что катер противника будет обстрелян

$$P_{\text{обс}} = \frac{0,29 + 2 * 0,24 + 3 * 0,18}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1} = 0,66.$$

Таким образом, две трети катеров противника будет обстреляно средствами противокатерной обороны.

Определим среднее число средств противокатерной обороны, занятых обстрелом

$$N_3 = \sum_{k=1}^3 kP_k = 1,31.$$

Коэффициент загрузки каждого средства равен

$$K_3 = \frac{N_3}{n} = \frac{1,31}{3} = 0,44.$$

Следовательно, около 44 % всего времени боя средства противокатерной обороны будут заняты обстрелом катеров противника. Остальное время они будут ожидать появления очередных целей.

Задача 2.4. Назначение информационной логической машины – обработка сообщений, которые поступают группами. Поступающие сообщения, застав все каналы обработки информации машины занятыми, теряются. Время обработки одного сообщения равно 0,2 сек. Число сообщений в группе постоянное и равно 3-м сообщениям. Необходимо определить, сколько каналов обработки должна иметь

машина, чтобы при плотности потока 5 сообщ./с вероятность потери информации была не более 5 %. Какой коэффициент полезного действия имеет эта машина?

Решение. Математической моделью информационной логической машины является СМО с отказами с поступлением групповых заявок. Число заявок в группе постоянно и равно $m = 3$. Для системы имеем: $\lambda = 5$, $\mu = 1/t_{\text{обс}} = 1/0,2 = 5$. Определяем параметр $\rho = \lambda/\mu = 5/5 = 1$.

По значениям $\rho = 1$ и числу сообщений в группе $m = 3$ в табл. 8 приложения 5 [9] находим вероятность потери информации в машине при различном числе каналов обработки.

Таблица 2.2

N	8	9	10
$P_{\text{отк}}, \%$	7,2	4,6	2,7

Судя по данным, приведенным в табл. 2.2, машина должна иметь не менее 9 каналов. В этом случае вероятность потери информации не превысит 5 %.

Для определения математического ожидания числа каналов, занятых обработкой информации, составим вспомогательную таблицу, используя данные из табл. 8 приложения 5 [9]. При $\rho = 1$, $n = 9$ каналам, $m = 3$ сообщениям в группе получаем табл. 2.3.

Таким образом, при заданной плотности поступления информации и числе каналов обслуживания $n = 9$ в среднем около трех каналов будут загружены все время обработкой информации, откуда коэффициент загрузки равен

$$K_3 = \frac{N_3}{n} = \frac{2,89}{9} = 0,32.$$

Таблица 2.3

Число каналов обработки, n	Вероятности состояний, P_k	kP_k
1	0,162	0,162
2	0,162	0,324
3	0,162	0,486
4	0,122	0,488
5	0,089	0,445
6	0,062	0,372
7	0,040	0,280
8	0,023	0,184
9	0,016	0,144
Сумма		2,885

Среднее число свободных каналов обработки информации

$$N_0 = 9 - 2,88 = 6,12.$$

Коэффициент простоя каналов обработки равен

$$K_{\Pi} = \frac{N_0}{n} = \frac{6,12}{9} = 0,68.$$

Как видно из задачи, коэффициент простоя каналов большой, однако уменьшить число каналов не представляется возможным, т. к. тогда не будет выполняться условие: вероятность потери требования не должна превышать 5 %.

Задача 2.5. На заводе имеются два красильных цеха: основной и дополнительный. В основном цехе функционируют четыре красильные установки, а в дополнительном – две. Производительность всех этих шести установок одна и та же и в среднем равна 5 изд/ч. Из многих цехов завода в случайные моменты времени в основной красильный цех поступают на окраску изделия с интенсивностью 10 изд/ч. Если в момент поступления очередного изделия все четыре красильные установки основного цеха оказываются занятыми, то это изделие поступает в дополнительный цех. Если при этом обе красильные установки дополнительного цеха также оказываются занятыми, то изделие остаётся неокрашенным.

Решение. Данная система относится к СМО с отказами с последовательно расположенными группами однотипных приборов. Имеем: $\lambda = 10$, $\mu = 5$, $r_1 = 4$, $r_2 = 2$. Определяем параметр $\rho = \lambda/\mu = 10/5 = 2$.

По формулам (2.27) и (2.28) получаем $P_1 = 0,095$, $P_2 = 0,012$. Это означает, что 9,5 % всех поступающих на окраску в основной цех изделий не будут в этом цехе окрашены, а 1,2 % изделий вообще не будут окрашены. Используя эти данные, согласно формуле (2.30), получаем $P_2 = 0,127$. Это означает, что если изделие не было окрашено в основном цехе, то с вероятностью 0,127 оно не будет окрашено также и в дополнительном. Найдем вероятность того, что изделие будет окрашено в дополнительном цехе $P_{\text{окс2}} = 0,875$.

Задача 2.6. В упаковочном цехе имеются два упаковочных автомата, первый из которых упаковывает в среднем 40 изделий в час, а второй – 30 изделий в час. В случайные моменты времени на первый автомат поступает для упаковки в среднем 80 изделий в час. Оценить эффективность системы.

Решение. Данная система относится к СМО с отказами с двумя последовательно расположенными приборами разной производительности. Имеем: $\lambda=80$, $\mu_1=40$, $\mu_2=30$.

По формуле (2.35) находим вероятность отказа $P_{\text{отк}}=0,44$, т. е. чуть ли не половина всех изделий, поступающих в цех на упаковку, оказывается не упакованной.

Если первый упаковочный автомат заменить на новый, для которого, $\mu_1=20$, то в этом случае вероятность отказа $P_{\text{отк}}=0,22$, $P_{01}=0,25$, $P_{10}=0,17$, $P_{00}=0,36$. Следовательно, коэффициент загрузки первого автомата $\eta_1=0,39$, второго $\eta_2=0,47$.

Если поменять местами автоматы, то вероятность отказа $P_{\text{отк}}=0,27$. Такое упорядочение приводит к увеличению на 5 % числа неупакованных изделий.

Задача 2.7. Определить эффективность информационной логической машины, в которую поступает непрерывный поток сообщений с интенсивностью 10 сообщ./мин. Сообщения записываются в буферную память, объем которой равен 5 сообщениям. Обработывающее устройство состоит из одного прибора. Среднее время обслуживания сообщений 12 сек.

Решение. Данная система относится к СМО с накопителем заявок. Имеем: $\lambda=10$, $\mu=1/\bar{t}_{\text{обс}}=60/12=5$, $n=5$. Определяем параметр $\rho=\lambda/\mu=10/5=2$.

Следовательно, по формуле (2.42) имеем

Таблица 2.4

k	0	1	2	3	4	5
P_k	0,33	0,22	0,15	0,1	0,07	0,13

Это означает, что в среднем 13 % сообщений теряются.

Среднее число заявок, находящихся в накопителе равно $m=1,75$.

Коэффициент полезной загрузки накопителя равен 0,35.

Среднее время обслуживания одного сообщения равно 0,11.

Упражнение 2.1. Вычислительная система состоит из трех процессоров. Если первый процессор занят, то запросы пользователя поступают на второй процессор. Если же занят и он, то запросы поступают на обработку в третий процессор. В случае, если занят и третий процессор, то запрос пользователя остается необработанным. Время обработки запросов пользователя в среднем равно 1 минуте. Запросы поступают в систему с интенсивностью 5 запросов в минуту.

Упражнение 2.2. Оценить эффективность противотанковой обороны, состоящей из четырех эшелонов, когда танки противника производят атаку с плотностью 2 группы/мин. Группа может состоять с вероятностью 0,3 из одного, с вероятностью 0,2 из двух, с вероятностью 0,1 из трех и с вероятностью 0,4 из четырех танков противника. Время, необходимое противотанковому эшелону на обстрел одного танка, равно 2 мин.

Упражнение 2.3. В информационную логическую машину, состоящую из 3 каналов обработки информации, поступает поток групповых сообщений с интенсивностью 10 групп/мин. Среднее время обработки одного сообщения равно 6 сек. Число сообщений в группе постоянное и равно 5. Оценить работу информационной логической машины.

Упражнение 2.4. Завод выпускает продукцию в виде некоторых изделий. Производительность завода по выпуску равна 0,5 изд./мин. Прежде чем поступить на упаковку, они проходят функциональный контроль в сборке на специально разработанных стендах. Готовые изделия к стендам подаются транспортером. Каждый из стендов может одновременно контролировать только одно изделие. Стенды могут иметь различную производительность. Чем выше производительность стенда, тем он дороже. Зависимость стоимости стенда от его производительности задана зависимостью $C_{\text{ст}} = 5/\bar{t}_{\text{обс}}$. Чем больше стендов необходимо объединить на контрольном пункте, тем выше стоимость его монтажа и обслуживания. Зависимость стоимости монтажа и обслуживания контрольного пункта от количества стендов n задана функцией

$$C = \frac{5+n^2}{3}.$$

В распоряжении завода имеется пять типов стендов по контролю готовых изделий, которые имеют разную производительность и характеризуются $\bar{t}_{\text{обс}} = 0,5; 1; 2; 5; 10$ изд./мин.

Необходимо определить, сколько и какой производительности нужно поставить стенды на контрольном пункте при минимальных затратах на стенды, монтаж контрольного пункта и обслуживание, чтобы в среднем не менее 95 % готовых изделий было проверено.

Упражнение 2.5. В вычислительную систему поступает поток заданий на обработку с интенсивностью 6 заданий в мин. Время

выполнения заданий вычислительной системой равно в среднем 30 сек. Если задание застает систему занятой, то оно покидает вычислительную систему необработанным. Исследовать, как изменится нагрузка вычислительной системы при изменении входящего потока заявок (задать 3 различных значения интенсивности).

Упражнение 2.6. На выборочном контроле изделий стоят два прибора с разной производительностью. Первый прибор способен проверить изделие за 1 мин, а второй за 3 мин. Поток изделий имеет плотность 2 изд./мин. Первый прибор вышел из строя. Одновременно с его заменой решено повысить процент проверенных изделий не менее, чем до 90 %. Требуется определить, какую производительность должен иметь прибор, поставленный вместо вышедшего из строя, чтобы не менее 90 % изделий подверглось контролю.

Упражнение 2.7. Вычислительная система состоит из двух независимо функционирующих ЭВМ. Запросы пользователя для обработки поступают на первую ЭВМ с интенсивностью 6 запросов в мин. Если первая ЭВМ оказывается занятой, то они поступают на обработку на вторую ЭВМ. Если же вторая оказывается занятой, то запрос считается необработанным. Времена обработки запросов на первой и второй ЭВМ соответственно равны 20 и 30 с. Определить загрузку каждой ЭВМ.

Упражнение 2.8. На вокзале, в мастерской бытового обслуживания работают три мастера. Если клиент заходит в мастерскую, когда все мастера заняты, то он уходит из мастерской не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в мастерскую за 1 ч, равно 25. Среднее время, которое затрачивает мастер на обслуживание одного клиента равно 12 мин. Определить основные характеристики эффективности функционирования данной мастерской.

3. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ

Системы массового обслуживания с ожиданием распространены наиболее широко. Их можно разбить на две большие группы – разомкнутые и замкнутые. Эти системы определяют так же, как системы с ограниченным и неограниченным входящим потоком. К замкнутым относят системы, в которых поступающий поток требований ограничен. Например, мастер, задачей которого является

наладка станков в цехе, должен периодически их обслуживать. Каждый налаженный станок становится в будущем потенциальным источником требований на наладку. В подобных системах общее число циркулирующих требований конечно и чаще всего постоянно.

Если питающий источник обладает бесконечным числом требований, то системы называются разомкнутыми. Примерами подобных систем могут служить магазины, кассы вокзалов, портов и т. д. для этих систем поступающий поток требований можно считать неограниченным.

В разделе рассмотрены некоторые, наиболее часто встречающиеся разновидности систем массового обслуживания с ожиданием. Особенность функционирования каждой из них накладывает свой оттенок на используемый математический аппарат [3, 6, 9, 11, 17, 19].

3.1. Система с неограниченным потоком требований (разомкнутая система)

Постановка задачи. Система обслуживания состоит из n обслуживающих приборов. В систему поступает простейший поток требований интенсивности λ . Если в момент поступления требования имеется хотя бы один свободный прибор, оно немедленно начинает обслуживаться. Если же все приборы заняты, то вновь прибывшее требование становится в очередь за всеми теми требованиями, которые поступили раньше и ещё не начали обслуживаться. Освободившийся прибор немедленно приступает к обслуживанию очередного требования, если только имеется очередь. Каждое требование обслуживается одним прибором, и каждый прибор обслуживает в каждый момент не более одного требования. Время обслуживания каждого требования случайно и подчиняется показательному закону распределения с параметром μ [3, 6, 9, 11].

Система может находиться в одном из состояний:

s_k ($k = 0, 1, \dots, n$) – k каналов заняты и очереди нет,

s_{n+r} ($r = 0, 1, \dots$) – все n каналов заняты и в очереди r заявок.

Размеченный граф состояний многоканальной СМО с ожиданием приведен на рис. 3.1.

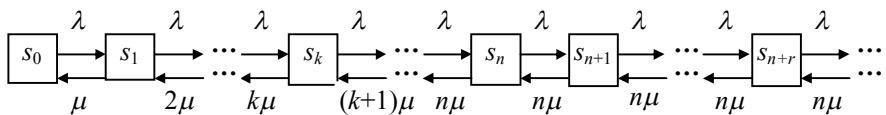


Рис. 3.1. Размеченный граф состояний многоканальной СМО с ожиданием

Для установившегося процесса обслуживания получены следующие расчетные формулы [3, 6, 9, 11, 17, 19]:

– вероятность того, что все обслуживающие приборы свободны

$$P_0^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)}; \quad (3.1)$$

– вероятность того, что занято обслуживанием k приборов

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \text{ при } 1 \leq k < n; \quad (3.2)$$

– вероятность того, что все приборы заняты (вероятность ожидания)

$$\pi = \frac{P_0 \rho^n}{(n-1)!(n-\rho)}; \quad (3.3)$$

– вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием и r требований находится в очереди

$$P_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n! n^r} P_0, \text{ при } r > 0; \quad (3.4)$$

– среднее время ожидания требованием начала обслуживания

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{1}{\mu} \frac{\pi}{n-\rho}; \quad (3.5)$$

– средняя длина очереди

$$M_{\text{ож}} = \frac{\rho P_n}{n \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}; \quad (3.6)$$

– среднее число требований, находящихся в системе (как обслуживаемых, так и стоящих в очереди)

$$M_{\text{сис}} = P_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^k}{(k-1)!} + \frac{P_n n}{1 - \frac{\rho}{n}} + M_{\text{ож}}; \quad (3.7)$$

– экономический показатель для выбора лучшего варианта системы обслуживания при ее проектировании

$$G_{\Pi} = (\lambda q_{\text{ож}} + q_{nk} N_0 + N_3 q_k) \bar{t}_{\text{ож}}, \quad (3.8)$$

где G_{Π} – величина потерь в системе за время $\bar{t}_{\text{ож}}$; $q_{\text{ож}}$ – стоимость потерь, связанных с простаиванием требований в очереди в течение единицы времени; q_{nk} – стоимость единицы времени простоя обслуживающего прибора системы; q_k – стоимость эксплуатации прибора при обслуживании в единицу времени.

3.2. Система с ограниченным потоком требований (замкнутая система)

На практике существует много примеров систем, в которых требования, обслуженные в системе, вновь возвращаются в источник требований и дополняют его. Схема данной СМО представлена на рис. 3.2 [9].

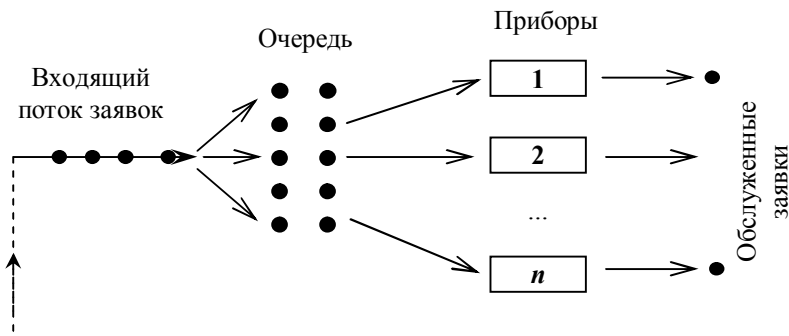


Рис. 3.2. Схема системы с ограниченным потоком требований
(замкнутая система)

Подобные задачи встречаются при эксплуатации машин, которые могут выходить из строя и требовать ремонта или наладки. Как правило, их обслуживают несколько мастеров, наладчиков. После обслуживания машин (ремонта, наладки) они возвращаются в строй и вновь становятся потенциальными источниками появления требований на ремонт, наладку.

Постановка задачи. Система обслуживания состоит из n обслуживающих приборов. В систему поступает простейший поток требований интенсивности λ . Поток поступает из m источников заявок. Каждый из источников может находиться только в одном из двух состояний: активном или пассивном. Все время пребывания поданной источником последней заявки в системе (в очереди или под обслуживанием) источник находится в пассивном состоянии, в котором он не может послать следующей заявки. Как только поданная источником заявка будет обслужена, источник сразу же переходит в активное состояние, в котором он может послать следующую заявку. Время обслуживания каждого требования случайно и подчиняется показательному закону распределения с параметром μ [3, 6, 9, 19].

Одноканальная замкнутая СМО может находиться в одном из состояний:

s_0 – все i источников находятся в активном состоянии, канал свободен, очереди нет;

s_1 – один источник находится в пассивном состоянии, канал обслуживает поданную этим источником заявку, очереди нет;

s_2 – два источника находятся в пассивном состоянии, заявка, поданная одним из них, обслуживается, а заявка, поданная другим источником, стоит в очереди;

...

s_i – все i источников находятся в пассивном состоянии, заявка, поданная одним из них, обслуживается, а $i - 1$ заявок, поданных остальными источниками, стоят в очереди.

Граф состояний одноканальной замкнутой СМО приведен на рис. 3.3.

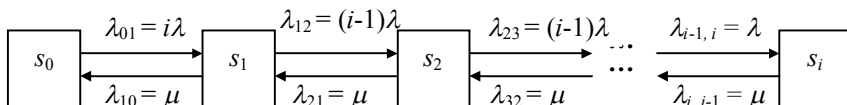


Рис. 3.3. Граф состояний одноканальной замкнутой СМО

Многоканальная замкнутая СМО может находиться в одном из состояний:

s_0 – все i источников находятся в активном состоянии, все n каналов свободны, очереди нет;

s_1 – один источник находится в пассивном состоянии, один канал занят обслуживанием заявки, поданной этим источником, остальные $i - 1$ источников находятся в активном состоянии, $n - 1$ каналов свободны, очереди нет;

s_2 – два источника пребывают в пассивном состоянии, два канала заняты, $i - 2$ источников находятся в активном состоянии, $n - 2$ канала свободны, очереди нет;

...

s_n – все n источников находятся в пассивном состоянии, все n каналов заняты, $i - n$ источников в активном состоянии, очереди нет;

s_{n+1} – $n + 1$ источников в пассивном состоянии, n каналов заняты, одна заявка в очереди, $i - (n + 1)$ источников в активном состоянии;

...

s_i – все i источников в пассивном состоянии, n каналов заняты, $i - n$ заявок в очереди.

Граф состояний системы приведен на рис. 3.4.

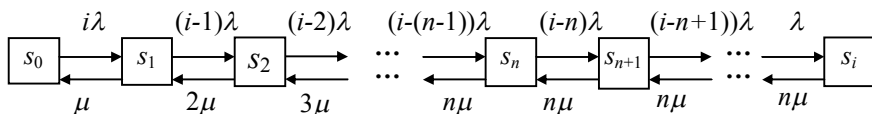


Рис. 3.4. Граф состояний многоканальной замкнутой СМО

Для установившегося процесса обслуживания получены следующие расчетные формулы [3, 6, 9, 19]:

– вероятность того, что все обслуживающие приборы свободны

$$P_0 = \frac{1}{m!} \left[\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!(m-k)!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{k=n+1}^m \frac{m! \rho^k}{n^k (m-k)!} \right]^{-1}; \quad (3.9)$$

– вероятность того, что в системе находится k требований, из них n обслуживается, а $k - n$ ожидают обслуживания

$$P_k = \begin{cases} \frac{m! \rho^k}{k!(m-k)!} P_0, & 1 \leq k \leq n, \\ \frac{m! \rho^k}{n^{k-n} n! (m-k)!} P_0, & n \leq k \leq m; \end{cases} \quad (3.10)$$

– среднее число требований, ожидающих начала обслуживания

$$M_{\text{ож}} = \sum_{k=n+1}^m (k-n) P_k; \quad (3.11)$$

– коэффициент простоя требований, ожидающих обслуживания

$$K_{\text{пт}} = \frac{M_{\text{ож}}}{m}; \quad (3.12)$$

– среднее число требований, находящихся в системе обслуживания

$$M_{\text{сис}} = M_{\text{ож}} + \sum_{k=1}^n \frac{m! \rho^k}{k!(m-k)!} P_0. \quad (3.13)$$

Среднее число свободных от обслуживания приборов и коэффициент простоя приборов обслуживания можно вычислить по ранее приведенным формулам.

3.3. Двухфазные системы массового обслуживания с ожиданием

Примером двухфазной СМО с ожиданием могут служить магазины, в которых прежде чем получить товар, покупатель должен оплатить его стоимость в кассе. Работа подобных систем массового обслуживания будет рассмотрена на примере двухфазных одноканальных систем массового обслуживания с неограниченным и ограниченным потоком заявок.

3.3.1. Системы с неограниченным потоком заявок

Постановка задачи. СМО состоит из двух приборов разной производительности. Время обслуживания приборами заявок подчинено показательному закону распределения с параметрами μ_1 и μ_2 . Поток требований – простейший с параметром λ . Поступившее в систему требование вначале обслуживается первым прибором. Если он уже занят, то требование ожидает своей очереди до тех пор, пока все требования не будут обслужены. После обслуживания первым прибором требования поступают на второй. Если прибор занят, то требование становится в очередь.

В этом случае получены следующие расчетные формулы [6, 9]:

– вероятность того, что оба прибора (обе фазы) свободны от заявок

$$P_{00} = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2), \quad (3.14)$$

где

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}; \quad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}; \quad (3.15)$$

– вероятность того, что в первой фазе находится n_1 требований, а во второй ни одного

$$P_{n_1 0} = \rho_1^{n_1} (1 - \rho_1)(1 - \rho_2); \quad (3.16)$$

– вероятность того, что во второй фазе находится n_2 требований, а в первой ни одного

$$P_{0 n_2} = \rho_2^{n_2} (1 - \rho_1)(1 - \rho_2); \quad (3.17)$$

– вероятность того, что в первой фазе находится n_1 требований, а во второй – n_2 требований

$$P_{n_1 n_2} = \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1 - \rho_1)(1 - \rho_2); \quad (3.18)$$

– среднее число требований, находящихся в системе

$$M_{\text{сис}} = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} + \frac{\rho_2}{1 - \rho_2}; \quad (3.19)$$

– вероятность того, что первая фаза свободна от обслуживания

$$P_{0n} = \rho_2^n (1 - \rho_1); \quad (3.20)$$

– вероятность того, что вторая фаза свободна от обслуживания

$$P_{n0} = \rho_1^n (1 - \rho_2). \quad (3.21)$$

3.3.2. Системы с ограниченным потоком заявок

Постановка задачи. Имеется N источников появления требований на обслуживание двухфазной системы, которая состоит из двух приборов разной производительности. Время обслуживания приборами заявок подчинено показательному закону распределения с параметрами μ_1 и μ_2 . Поток требований – простейший с параметром λ . Поступившее в систему требование вначале обслуживается первым прибором. Если он уже занят, то требование ожидает своей очереди до тех пор, пока все требования не будут обслужены. После обслуживания первым прибором требования поступают на второй. Если прибор занят, то требование становится в очередь.

В этом случае получены следующие расчетные формулы [9]:

– вероятность того, что оба прибора свободны от заявок

$$P_{00} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)}{(\rho_1 - \rho_2) - (\rho_1^{N+2} - \rho_2^{N+2}) + \rho_1 \rho_2 (\rho_1^{N+1} - \rho_2^{N+1})}; \quad (3.22)$$

– вероятность того, что в первой фазе находится n_1 требований, а во второй ни одного

$$P_{n_1 0} = \rho_1^{n_1} P_{00}; \quad (3.23)$$

– вероятность того, что во второй фазе находится n_2 требований, а в первой ни одного

$$P_{0n_2} = \rho_2^{n_2} P_0; \quad (3.24)$$

– вероятность того, что в первой фазе находится n_1 требований, а во второй – n_2 требований

$$P_{n_1 n_2} = \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} P_0; \quad (3.25)$$

– среднее число требований, находящихся в системе

$$M_{\text{сис}} = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \left\{ \frac{\rho_1^2 \left[1 - (N+1)\rho_1^N + N\rho_1^{N+1} \right]}{(1-\rho_1)^2} - \frac{\rho_2^2 \left[1 - (N+1)\rho_2^N + N\rho_2^{N+1} \right]}{(1-\rho_2)^2} \right\} P_{00}; \quad (3.26)$$

– среднее число обслуженных требований первым и вторым прибором

$$M_{\text{обс}} = \frac{(\rho_1 + \rho_2) \left[(\rho_1 - \rho_2) - (\rho_1^{N+1} - \rho_2^{N+1}) + \rho_1 \rho_2 (\rho_1^N - \rho_2^N) \right]}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)(\rho_1 - \rho_2)} P_{00}; \quad (3.27)$$

– среднее число ожидающих требований в системе

$$M_{\text{ож}} = \left\{ \frac{\rho_2^2 (1-\rho_1) \left[1 - N\rho_1^{N-1} + (N-1)\rho_1^N \right]}{(1-\rho_1)^2} + \frac{\rho_1^2 (1-\rho_2) \left[1 - N\rho_2^{N-1} + (N-1)\rho_2^N \right]}{(1-\rho_2)^2} + \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \left[\frac{1 - (N-1)\rho_1^{N-2} + (N-2)\rho_1^{N-1}}{(1-\rho_1)^2} - \frac{1 - (N-1)\rho_2^{N-2} + (N-2)\rho_2^{N-1}}{(1-\rho_2)^2} \right] \right\} P_{00}; \quad (3.28)$$

– вероятность того, что первая фаза свободна от обслуживания

$$P_{0N} = \left(\frac{\rho_2}{1 - \rho_2} \right) P_{00}; \quad (3.29)$$

– вероятность того, что вторая фаза свободна от обслуживания

$$P_{N0} = \left(\frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \right) P_{00}. \quad (3.30)$$

3.4. Система, состоящая из нескольких неодинаковых приборов

Рассмотрим случай, когда система массового обслуживания с ожиданием состоит из приборов разной производительности. Примеров подобных систем можно привести много. В данном подразделе рассмотрим простейший пример системы массового обслуживания, состоящей из двух приборов разной производительности.

Постановка задачи. СМО состоит из двух приборов разной производительности. Предположим, что первый прибор имеет более высокую производительность, чем второй, т. е. $\mu_1 > \mu_2$, где μ_1 и μ_2 – параметры показательного закона распределения времени обслуживания требований соответственно для первого и второго приборов. Поток требований – простейший с параметром λ . каждое требование, поступившее в сферу обслуживания, сразу же начинает обслуживаться свободным прибором. Если оба прибора свободны, то оно попадает на обслуживание в первый прибор с вероятностью φ , а на второй $1 - \varphi$. Если требование застанет оба прибора занятыми, то оно становится в очередь.

Для установившегося процесса обслуживания получены следующие расчетные формулы [6, 9]:

– вероятность состояния системы, при котором оба прибора свободны

$$P_{00} = \frac{1 - \alpha}{1 + \frac{\alpha}{1 + 2\alpha} \frac{1}{\beta} \left[1 + \left(1 + \beta^2 \right) \alpha - \left(1 - \beta^2 \right) \varphi \right]}, \quad (3.31)$$

где

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}; \quad \beta = \frac{\mu_2}{\mu_1};$$

– вероятность того, что первый прибор свободен, а второй занят обслуживанием

$$P_{01} = \frac{\alpha}{1 + 2\alpha} \frac{1 + \beta}{\beta} (\alpha + 1 - \beta) P_{00}; \quad (3.32)$$

– вероятность того, что первый прибор занят обслуживанием, а второй свободен

$$P_{10} = \frac{\alpha}{1 + 2\alpha} (1 + \beta) (\alpha + \varphi) P_{00}; \quad (3.33)$$

– вероятность того, что оба прибора заняты обслуживанием

$$P_{11} = 1 - P_{00} - P_{01} - P_{10}; \quad (3.34)$$

– вероятность того, что в системе находится k требований

$$P_k = \frac{\alpha^k}{1 + 2\alpha} \frac{1 + \beta}{\beta} [1 + (1 + \beta)\alpha - (1 - \beta)\varphi] P_{00}; \quad (3.35)$$

– среднее число требований, находящихся в системе

$$M_{\text{сис}} = \alpha(1 - \beta) \frac{1 + (1 + \beta)\alpha - (1 - \beta)\varphi}{\beta(1 + 2\alpha) + \alpha \left[1 + (1 + \beta^2)\alpha - (1 - \beta^2)\varphi \right]}. \quad (3.36)$$

Задачи и упражнения

Задача 3.1. Морской порт имеет 5 причалов для разгрузки сухогрузных судов. В среднем в течение месяца в порт прибывает с грузами около 20 судов большого тоннажа. На разгрузку судна в среднем тратится на причале 6 рабочих дней. Требуется оценить работу порта. Необходимо также рассмотреть возможность увеличения пропускной способности порта за счет увеличения числа причалов.

Решение.

Данная система относится к СМО с ожиданием. Имеем: $\lambda = 20$, $\mu = 1/t_{\text{обс}} = 30/6 = 5$. Определяем параметр $\rho = \lambda/\mu = 20/5 = 4$.

Вероятность того, что все причалы свободны и ожидают суда под разгрузку

$$P_0 = \frac{1}{1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{4!}} = 0,013 \cdot$$

Вероятность того, что все причалы заняты судами под разгрузку

$$\pi = \frac{4^5 * 0,013}{4!(5-4)} = 0,554,$$

т. е. 56 % времени все причалы полностью заняты разгрузочными работами.

В среднем время ожидания каждым судом начала разгрузки равно

$$t_{\text{ож}} = \frac{0,554 * 6}{5 - 4} = 3,3 \text{ сут.}$$

Среднее число судов, которые находятся в порту, ожидая своей очереди для разгрузки

$$M_{\text{ож}} = \frac{4 * 0,554}{5 \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2} = 11,1 \text{ судна.}$$

Среднее число судов, находящихся в порту

$$M = 11,1 + \frac{0,11 * 5}{1 - \frac{4}{5}} + 1,23 = 15,1 \text{ судна.}$$

Среднее количество простаивающих причалов

$$M_3 = 0,013 \left(\frac{5-0}{0!} + \frac{5-1}{1!} * 4 + \frac{5-2}{2!} * 4^2 + \frac{5-3}{3!} * 4^3 + \frac{5-4}{4!} * 4^4 \right) = 1 \text{ причал.}$$

Коэффициент простоя причалов

$K_n = 1/5 = 0,20$, т. е. каждый причал будет простаивать 20 % времени.

Для уменьшения времени простоя судов решено порт расширить. Расчеты проведем для числа причалов $n=5, 6, 7, 8$. Результаты приведены в табл. 3.1.

Чтобы принять окончательное решение, целесообразно проделать экономический анализ. Пусть простой каждого судна в течение суток обходится государству $q_{ож} = 100$ ед. стоимости. В то же время месячный простой причала порта из-за несвоевременного прихода судов обходится государству $q_{nk}=1000$ ед. стоимости. Стоимость месячной эксплуатации причала $q_k = 1000$ ед. стоимости. Результаты расчетов приведены в табл. 3.2.

Расчеты показывают, что наиболее экономичным вариантом является порт с шестью причалами.

Таблица 3.1

Характеристики	Число причалов			
	5	6	7	8
P_0	0,013	0,017	0,018	0,0182
π	0,555	0,29	0,136	0,058
$-$	3,3	0,87	0,27	0,09
$t_{ож}$ (суток)	11,1	1,74	0,42	0,12
$M_{ож}$ (судов)	12,6	4,42	3,76	3,76
M	1	2	3	3,96
N_0	0,2	0,3	0,43	0,48
$K_{п}$				

Таблица 3.2

Характеристики	Число причалов			
	5	6	7	8
$-$				
$t_{ож}$ (суток)	3,3	0,87	0,27	0,09
$-$	6600	1740	540	180
$\lambda t_{ож} q_{ож}$	0,2	0,3	0,43	0,48
K_n	5000	6000	7000	8000
nq_{nk}	1000	1800	3010	3840
$K_n nq_{nk}$	5000	6000	7000	8000
nq_k				
Сумма издержек	12600	9540	10550	12020

Задача 3.2. Имеется три мастерских по ремонту 10 образцов определенного вида вооружения, которые распределены по различным частям и подразделениям.

Возможны следующие варианты организации обслуживания: 1) использование подвижных мастерских, которые могут быть направлены в то подразделение, где имеется потребность в ремонте; 2) использование полустанционных мощных мастерских с хорошо организованным технологическим потоком, куда будет доставляться неисправная техника.

Поток требований на ремонт равен 1 образцу в месяц. Для первого варианта на ремонт техники в среднем требуется около 6 дней,

для второго варианта – 15 дней. Оценить работу двух вариантов организации обслуживания.

Решение.

Данная система относится к замкнутым системам массового обслуживания.

Рассмотрим первый вариант организации обслуживания.

Имеем: $\lambda = 1$, $\mu = 1/t_{\text{обс}} = 30/6 = 5$.

Определяем параметр $\rho = \lambda/\mu = 1/5 = 0,2$.

Для определения вероятностей состояний составим таблицу вычислений

Таблица 3.3

k	P_k	kP_k	$(k-n)P_k$	$(n-k)P_k$
0	0,1548	0	-	0,4644
1	0,3096	0,3096	-	0,6192
2	0,2786	0,5572	-	0,2786
3	0,1486	0,4558	-	0
4	0,0693	0,2772	0,0693	-
5	0,0277	0,1385	0,0554	-
6	0,0087	0,0522	0,0261	-
7	0,0018	0,0126	0,0072	-
8	0,0004	0,0032	0,0020	-
9	0,0001	0,0009	0,0006	-
10	0	0	0	-
Сумма	0,9996	1,7972	0,1606	1,3622

Из табл. 3.3 следует, что 4-5 дней в месяц мастерские будут свободны. Однако это означает, что не будет случаев, когда неисправная техника вынуждена ожидать своей очереди, чтобы ее привести в исправное состояние. В среднем число образцов, ожидающих ремонта, будет равно (см. сумму 4-го столбца табл. 3.3) $M_{\text{ож}} = 0,16$ образца.

Отсюда средний процент вооружения, ожидающего ремонта равен

$$K_{\text{пт}} = 0,16/10 \cdot 100 \% = 1,6 \%$$

Среднее число свободных от ремонта мастерских равно (см. 5-ый столбец табл. 3.3) $N_0 = 1,36$ мастерской, а коэффициент простоя равен

$$K_{\text{п}} = 1,36/3 \cdot 100 \% = 46 \%$$

Среднее число образцов вооружения, ожидающих ремонта и находящихся на ремонте (см. 3-ый столбец табл. 3.3) $M = 1,79$. Отсюда средний процент небоеспособности вооружения

$$K = 1,79/10 \cdot 100 \% = 17,9 \%$$

Рассмотрим второй вариант организации обслуживания.

$$\text{Имеем: } \lambda = 1, \mu = 1/t_{\text{обс}} = 30/15 = 2.$$

$$\text{Определяем параметр } \rho = \lambda/\mu = 1/2 = 0,5.$$

Необходимые расчеты приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

k	P_k	kP_k	$(k-n)P_k$	$(n-k)P_k$
0	0,010	0	-	0,030
1	0,051	0,051	-	0,102
2	0,115	0,230	-	0,115
3	0,153	0,459	-	0
4	0,178	0,712	0,178	-
5	0,178	0,890	0,356	-
6	0,149	0,794	0,447	-
7	0,099	0,693	0,396	-
8	0,050	0,400	0,250	-
9	0,016	0,144	0,096	-
10	0,003	0,030	0,021	-
Сумма	1,002	4,403	1,744	0,247

Для сравнения результаты расчетов приведены в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Характеристика варианта	P_0	$M_{\text{ож}}$	$K_{\text{пт}}$	N_0	$K_{\text{п}}$	M	K
Подвижная мастерская	0,155	0,16	1,6	1,36	46	1,79	17,9
Полустанционная мастерская	0,01	1,74	17,4	0,25	25	4,4	44

Задача 3.3. В одном из отделов магазина покупателей обслуживают продавец и кассир. В течение рабочего дня в магазин приходят покупатели с интенсивностью 20 чел./ч. Кассир обслуживает 40 чел./ч, а продавец – 25 человек. Требуется оценить работу и загрузку этого магазина.

Решение.

Определяем параметры

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{20}{40} = 0,5; \quad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{20}{25} = 0,8.$$

Вероятность того, что отдел будет свободен от покупателей

$$P_{00} = (1 - 0,5)(1 - 0,8) = 0,1.$$

Это означает, что в среднем 10 % рабочего времени отдел был свободен от покупателей.

Площадь отдела ограничена, поэтому около кассы в очереди могут находиться не более 10 покупателей. Такое же число покупателей может находиться в очереди у продавца. Определим вероятность того случая, когда у кассы не будет покупателей, а у прилавка предельная по размеру очередь

$$P_{0,10} = \rho_2^{10}(1 - \rho_1)(1 - \rho_2) = 0,8^{10}(1 - 0,5)(1 - 0,8) = 0,01.$$

Вероятность того случая, когда у кассы предельная по размер очереди, а у продавца никого не будет, равна

$$P_{10,0} = \rho_1^{10}(1 - \rho_1)(1 - \rho_2) = 0,5^{10}(1 - 0,5)(1 - 0,8) = 0,0001.$$

Однако этих двух вероятностей недостаточно для того, чтобы судить насколько часто отдел магазина будет заполнен покупателями до отказа. Для этого необходимо рассмотреть различные сочетания чисел покупателей у кассы и у продавца, но такие при которых сумма $n_1 + n_2 \leq 20$. В условиях данного примера она очень мала. Об этом можно судить хотя бы по вероятности состояния $P_{10,10} = 0,11 \cdot 10^{-3}$.

Среднее число покупателей в отделе в течение рабочего дня

$$M_{\text{сис}} = \frac{0,5}{1 - 0,5} + \frac{0,8}{1 - 0,8} = 5 \text{ чел.}$$

При этом среднее число стоящих у кассы покупателей будет равно

$$M_1 = \frac{0,5}{1 - 0,5} = 1 \text{ чел.,}$$

а у прилавка продавца

$$M_2 = \frac{0,8}{1 - 0,8} = 4 \text{ чел.}$$

Вероятность простоя кассира будет равна

$$P_{0n} = 0,8(1 - 0,5) = 0,4.$$

Это означает, что 40 % времени кассир не будет занят обслуживанием.

Вероятность простоя продавца

$$P_{n0} = 0,5(1 - 0,8) = 0,1.$$

Это означает, что 10 % времени продавец не будет занят обслуживанием.

Задача 3.4. Аэропорт обслуживает $N = 10$ самолетов. Плотность поступления самолетов на техническое обслуживание равно 1 самолет в сутки. Каждый самолет, чтобы пройти техническое обслуживание, вначале осматривается первой бригадой, а потом – второй. Производительность первой бригады равна 2 самолетам в сутки, второй – 4 самолетам в сутки. Требуется оценить работу бригад по проведению работ по техническому обслуживанию самолетов в аэропорту.

Решение.

Определяем параметры

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{1}{2} = 0,5; \quad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Вероятность того, что обе бригады будут свободны от обслуживания

$$P_{00} = \frac{(0,5 - 0,25)(1 - 0,5)(1 - 0,25)}{(0,5 - 0,25) - (0,5^{12} - 0,25^{12}) + 0,5 * 0,25(0,5^{11} - 0,25^{11})} = 0,375.$$

Среднее число самолетов, находящихся в системе $M_{\text{сис}} = 3$ самолета.

Среднее число самолетов, обслуживаемых обеими бригадами $M_{\text{обс}} = 1,2$ самолета.

Среднее число ожидающих самолетов в системе $M_{\text{ож}} = 2,8$ самолета. Время простоя первой бригады

$$P_{0N} = \frac{0,5}{(1 - 0,5)} * 0,165 = 0,165 \text{ сут.}$$

Время простоя второй бригады

$$P_{N0} = \frac{0,67}{(1-0,67)} * 0,165 = 0,33 \text{ сут.}$$

Анализ результатов показывает, что время простоя второй бригады больше чем первой в два раза и составляет одну треть рабочего времени. На основании этого быть сделаны выводы о том, что вторую бригаду следует привлекать для выполнения других работ либо сократить число ремонтников в ней.

Задача 3.5. В комиссионном магазине два товароведа принимают вещи на комиссию у населения. Они проверяют их состояние, оценивают и выписывают квитанции. В зависимости от количества вещей, их качества и многих других причин на обслуживание каждого клиента товаровед затрачивает случайное время. Однако опыт у товароведов разный, поэтому первый в среднем обслуживает клиентов в полтора раза быстрее, чем второй. Первый товаровед обслуживает в среднем 9 клиентов час, а второй только 6 клиентов. В среднем в час проходят 12 клиентов. Выбор клиентами товароведов равновероятен. Требуется оценить работу приемного пункта комиссионного магазина.

Решение.

Определяем параметры системы $\alpha = \frac{12}{9+6} = 0,8$; $\beta = \frac{6}{9} = 0,67$.

По формулам (3.31)–(3.36) определим следующие характеристики системы:

– вероятность того, что оба прибора будут свободны равна

$$P_{00} = \frac{1-0,8}{1 + \frac{0,8}{1+1,6} \frac{1}{0,67} \left[1 + \left(1 + 0,67^2 \right) 0,8 - \left(1 - 0,67^2 \right) 0,5 \right]} = 0,113;$$

– вероятность того, что первый товаровед свободен, а второй занят обслуживанием

$$P_{01} = \frac{0,8}{1+1,6} \frac{1+0,67}{0,67} (0,8 + 1 - 0,67) 0,113 = 0,11;$$

– вероятность того, что первый товаровед занят обслуживанием, а второй свободен

$$P_{10} = \frac{0,8}{1+1,6}(1+0,67)(0,8+0,5)0,113 = 0,08;$$

– вероятность того, что оба товароведа заняты обслуживанием

$$P_{11} = 1 - 0,113 - 0,11 - 0,08 = 0,697;$$

– среднее число требований, находящихся в системе

$$M_{\text{сис}} = 0,8(1 - 0,67) \frac{1 + (1 + 0,67)0,8 - (1 - 0,67)0,6}{\beta(1 + 2 * 0,8) + 0,8 \left[1 + \left(1 + 0,67^2 \right) 0,8 - \left(1 - 0,67^2 \right) 0,5 \right]} = 0,18$$

клиента.

Упражнение 3.1. В кассе метрополитена, продающей жетоны на проезд, имеется два окна. Время, которое тратит кассир на обслуживание одного пассажира, в среднем равно 0,5 мин. Пассажиры подходят к кассе в среднем по 3 чел./мин.

Определить:

- 1) вероятность того, что оба кассира свободны;
- 2) среднее число занятых кассиров;
- 3) среднее число пассажиров в очереди;
- 4) среднее число пассажиров у касс;
- 5) среднее время, которое пассажир проводит в очереди;
- 6) среднее время, которое пассажир тратит на приобретение жетона.

Упражнение 3.2. Вычислительная система состоит из двух независимо функционирующих ЭВМ. Для обработки одних запросов требуется ЭВМ1, для обработки других – ЭВМ2. Выбор ЭВМ происходит случайным образом: с вероятностью равной 0,35 запрос обрабатывается на ЭВМ1 и с вероятностью 0,65 – на ЭВМ2. Времена обработки запросов на ЭВМ1 и ЭВМ2 равны соответственно 2 и 5 запросов в мин. В среднем в систему поступает 10 запросов в мин. Определить загрузку каждой ЭВМ.

Упражнение 3.3. В кооперативе по ловле рыбы имеется 7 катеров, для ремонта которых используется два дока. Док может одновременно принять для ремонта только один катер. В среднем на ремонт одного катера уходит около 0,25 месяца. Каждый функционирующий катер выходит из строя в среднем 3 раза в месяц. Определить основные характеристики эффективности системы.

Упражнение 3.4. В вычислительную систему, состоящую из двух компьютеров, поступает поток запросов на обработку с интенсивностью 12 запросов в мин. Время обслуживания процессора вычислительной системы запросов пользователя, посланных с терминалов пользователей, равно 10 сек. Общее число запросов равно 20. Запросы вычислительную систему не покидают, а циркулируют в ней. Определите нагрузку вычислительной системы и рассмотрите вопрос об увеличении компьютеров.

Упражнение 3.5. В супермаркете два кассира выбивают чеки. В зависимости от количества товаров на обслуживание каждого клиента кассир затрачивает случайное время. Однако опыт у кассиров разный, поэтому первый в среднем обслуживает клиентов в два раза быстрее, чем второй. Первый кассир обслуживает в среднем 10 клиентов час, а второй только 5 клиентов. В среднем в час проходят 10 клиентов. Выбор клиентами кассиров равновероятен. Требуется оценить работу кассиров супермаркета.

Упражнение 3.6. Станция автотехобслуживания ремонтирует машины, поступающие на СТО с интенсивностью 2 машины в день. На СТО работают 2 бригады слесарей. Ремонт машины занимает в среднем 2 суток. Каждая бригада имеет свой бокс на 2 машины, которые обслуживаются одновременно. Машины, заставшие боксы занятыми, ремонтируются в другом месте.

Упражнение 3.7. В одной из аптек покупателей обслуживают продавец и кассир. В течение рабочего дня в аптеку приходят покупатели с интенсивностью 25 чел./ч. Кассир обслуживает 20 чел./ч, а продавец – 15 человек. Требуется оценить работу и загрузку данной аптеки.

Упражнение 3.8. Аэродром обслуживает 5 вертолетов. Плотность поступления вертолетов на техническое обслуживание равно 2 вертолетам в сутки. Каждый вертолет, чтобы пройти техническое обслуживание, вначале осматривается первой бригадой, а потом – второй. Производительность первой бригады равна 3 вертолетам в сутки, второй – 5 вертолетам в сутки. Требуется оценить работу бригад по проведению работ по техническому обслуживанию вертолетов на аэродроме.

4. СМЕШАННЫЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В третьей главе были рассмотрены так называемые «чистые системы с ожиданием». В этих системах каждая вновь прибывшая заявка, застав все приборы занятыми обслуживанием, становится в очередь и ждет освобождения какого-нибудь канала. Время ожидания заявки в очереди или в системе, а также длину очереди не ограничивают.

Однако на практике встречаются множество систем, в которых имеются различные ограничения на время пребывания заявки в очереди, в системе, на длину очереди и др. Такие системы массового обслуживания называют системами смешанного типа. К ним относятся:

1. Системы, в которых накладываются ограничения на длину очереди, т. е. на максимальное число заявок, находящихся в очереди (примером может служить станция технического обслуживания с ограниченной площадкой для хранения автомашин).

2. Системы, в которых накладываются ограничения на время пребывания заявки в очереди (например, пациент в больнице, зашедший к врачу, уже не уходит до конца обслуживания).

3. Системы, в которых накладываются ограничения на общее время пребывания заявки в системе (например, самолеты-истребители противников находятся в зоне обстрела противовоздушными средствами ограниченное время и покидают ее независимо от того, кончился обстрел или нет).

В данной главе рассматриваются особенности функционирования смешанных систем с различными ограничениями на длину очереди, время пребывания в ней, время пребывания заявки в системе и их вариации [3, 6, 9, 11, 13, 18, 19].

4.1. Одноканальная СМО с ограничением на длину очереди заявок

Постановка задачи. Пусть на вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . В системе массового обслуживания имеется ограниченное число мест, равное m . Если требование застает прибор свободным или хотя бы одно свободное место ожидания, то оно остается в системе, в противном случае происходит потеря требования. Время обслуживания случайно, и его длительность имеет показательное распределение с параметром μ [3, 6, 9].

Занумеруем состояния системы по числу заявок, находящихся в СМО, как в очереди, так и под обслуживанием:

s_0 – канал свободен (следовательно, очереди нет);

s_1 – канал занят и очереди нет, т.е. в СМО находится (под обслуживанием) одна заявка;

s_2 – канал занят и в очереди стоит одна заявка;

...

s_k – канал занят и в очереди $k-1$ заявка;

...

s_{m+1} – канал занят и в очереди m заявок.

Таким образом, СМО может находиться в одном из $m + 2$ состояний, граф которых приведен на рис. 4.1.

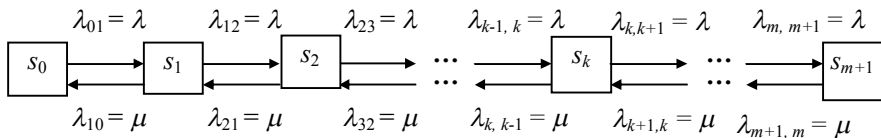


Рис. 4.1. Граф состояний одноканальной СМО с ограничением на длину очереди

Обозначив через $P_0(t)$, $P_1(t)$, ..., $P_k(t)$, ..., $P_{m+1}(t)$ – вероятности соответствующих состояний s_0 , s_1 , ..., s_k , ..., s_{m+1} в момент времени t , можно по одному из известных правил [2] записать для них систему дифференциальных уравнений Колмогорова [3]

$$P_{\text{отк}} = \begin{cases} \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}, & \text{если } \rho \neq 1, \\ \frac{1}{m+2}, & \text{если } \rho = 1; \end{cases} \quad (4.3)$$

– вероятность того, что заявка будет принята в систему (не получит отказ)

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}} = \begin{cases} \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}, & \text{если } \rho \neq 1, \\ \frac{m+1}{m+2}, & \text{если } \rho = 1; \end{cases} \quad (4.4)$$

– относительная пропускная способность

$$Q = P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}}; \quad (4.5)$$

– абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda Q; \quad (4.6)$$

– среднее число заявок в очереди

$$M_{\text{ож}} = \begin{cases} \frac{\rho^2 \left[1 - \rho^m (m+1 - m\rho) \right]}{\left(1 - \rho^{m+2} \right) (1 - \rho)}, & \text{если } \rho \neq 1, \\ \frac{m(m+1)}{2(m+2)}, & \text{если } \rho = 1; \end{cases} \quad (4.7)$$

– среднее число заявок, находящихся под обслуживанием

$$M_{\text{обс}} = \rho Q = \begin{cases} \frac{\rho(1-\rho^{m+1})}{1-\rho^{m+2}}, & \text{если } \rho \neq 1, \\ \frac{m+1}{m+2}, & \text{если } \rho = 1; \end{cases} \quad (4.8)$$

– среднее число заявок, находящихся в системе (как в очереди, так и под обслуживанием)

$$M = M_{\text{ож}} + M_{\text{обс}} = \begin{cases} \frac{\rho[1-(m+2)\rho^{m+1}+(m+1)\rho^{m+2}]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}, & \text{если } \rho \neq 1, \\ \frac{m+1}{2}, & \text{если } \rho = 1; \end{cases} \quad (4.9)$$

– среднее время ожидания заявки в очереди

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{1}{\lambda} M_{\text{ож}}; \quad (4.10)$$

– среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{t}_{\text{сис}} = \frac{1}{\lambda} M; \quad (4.11)$$

– среднее время обслуживания одной заявки, относящееся только к обслуженным заявкам

$$\bar{t}_{\text{обс}} = \frac{1}{\mu}; \quad (4.12)$$

– среднее время обслуживания одной заявки, относящееся ко всем заявкам, как обслуженным, так и получившим отказ

$$\bar{t}_{\text{обс}}^{\forall} = \frac{1}{\lambda} M_{\text{обс}}. \quad (4.13)$$

4.2. Многоканальная СМО с ограничением на длину очереди заявок

Постановка задачи. Пусть на вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . В системе массового обслуживания имеется ограниченное число мест, равное m . Если требование застанет хотя бы один свободный прибор или хотя бы одно свободное место ожидания, то оно остается в системе, в противном случае происходит потеря требования. Время обслуживания случайно, и его длительность имеет показательное распределение с параметром μ [3, 6, 9, 11].

Занумеруем состояния системы по числу заявок, находящихся в СМО, как в очереди, так и под обслуживанием:

s_0 – все n каналов свободны;

s_1 – в СМО одна заявка, т. е. занят один канал, а остальные свободны;

...

s_k – в СМО k ($< n$) заявок, т. е. заняты k каналов, а остальные $n - k$ свободны;

...

s_n – в СМО n заявок, т.е. все n каналов заняты, очереди нет;

s_{n+1} – в СМО $n + 1$ заявка, т.е. все n каналов заняты и одна заявка – в очереди;

...

s_{n+r} – в СМО $n + r$ заявок, т. е. все n каналов заняты и в очереди стоят r заявок;

...

s_{n+m} – в СМО $n + m$ заявок, т. е. все n каналов заняты и m заявок стоят в очереди.

Таким образом, система может находиться в одном из $n + m + 1$ состояний. Размеченный граф состояний рассматриваемой системы изображен на рис. 4.2.

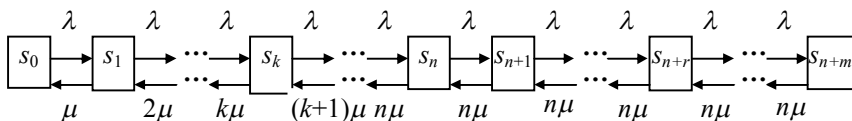


Рис. 4.2. Граф состояний многоканальной СМО с ограничением на длину очереди

Формулы для нахождения вероятностей имеют вид [3, 6, 9, 19].

– вероятность того, все каналы свободны (вероятность простаивания всей системы)

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\rho}{n} \right)^s \right]^{-1}; \quad (4.14)$$

– вероятность того, что в системе находится k требований

$$P_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} P_0 & \text{при } 1 \leq k \leq n, \\ \frac{\rho^k}{n! n^{k-n}} P_0 & \text{при } n \leq k \leq n+m; \end{cases} \quad (4.15)$$

– вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n! n^m} P_0 = \frac{\frac{\rho^{n+m}}{n! n^m}}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\rho}{n} \right)^s}; \quad (4.16)$$

– вероятность того, что заявка будет принята в систему (не получит отказа)

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{\frac{\rho^{n+m}}{n! n^m}}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\rho}{n} \right)^s}; \quad (4.17)$$

– относительная пропускная способность

$$Q = P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}}; \quad (4.18)$$

– абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda Q; \quad (4.19)$$

– среднее число занятых каналов (т. е. среднее число заявок, находящихся под обслуживанием)

$$N_3 = M_{\text{обс}} = \sum_{k=1}^n kP_k + n \sum_{k=1}^m P_{n+k}; \quad (4.20)$$

– среднее число заявок в очереди

$$M_{\text{ож}} = \sum_{s=1}^m sP_{n+s}; \quad (4.21)$$

– среднее число заявок, находящихся в системе (как в очереди, так и под обслуживанием)

$$M = M_{\text{ож}} + M_{\text{обс}}; \quad (4.22)$$

– среднее время ожидания заявки в очереди

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{1}{\lambda} M_{\text{ож}}; \quad (4.23)$$

– среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{t}_{\text{сис}} = \frac{1}{\lambda} M; \quad (4.24)$$

– среднее время обслуживания одной заявки, относящееся ко всем заявкам, как обслуженным, так и получившим отказ

$$\bar{t}_{\text{обс}}^{\forall} = \frac{1}{\lambda} M_{\text{обс}}. \quad (4.25)$$

4.3. Многоканальная СМО с ограничением на время пребывания заявки в очереди

Постановка задачи. СМО состоит из n однотипных приборов. В систему поступает пуассоновский поток требований. Время обслуживания каждого требования подчинено показательному закону. Если прибывшее в систему требование застанет в ней n требований, то оно становится в очередь. Ограничений на длину очереди нет, зато имеется ограничение на время пребывания требования в очереди. Время пребывания требования в очереди, заставшего в системе $n + s$ других требований, не должно превосходить $t_{ож}$, где $t_{ож}$ – случайная величина, имеющая показательное распределение [3, 6, 9].

Занумеруем состояния системы по числу заявок, находящихся в СМО, как в очереди, так и под обслуживанием:

s_0 – все n каналов свободны;

s_1 – в СМО одна заявка, т. е. занят один канал, а остальные свободны;

...

s_k – в СМО k ($< n$) заявок, т. е. заняты k каналов, а остальные

$n - k$ свободны;

...

s_n – в СМО n заявок, т. е. все n каналов заняты, очереди нет;

s_{n+1} – в СМО $n + 1$ заявка, т. е. все n каналов заняты и одна заявка – в очереди;

...

s_{n+r} – в СМО $n + r$ заявок, т. е. все n каналов заняты и в очереди стоят r заявок, ...

Таким образом, система может находиться в одном из бесконечного множества состояний. Размеченный граф состояний рассматриваемой системы представлен на рис. 4.3.

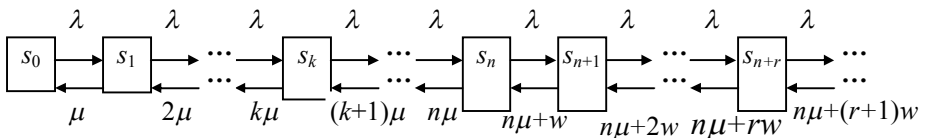


Рис. 4.3. Граф состояний многоканальной СМО с ограничением на время пребывания заявки в очереди

Для данной системы получены следующие расчетные формулы [3, 9]:

– вероятность того, все каналы свободны (вероятность простаивания всей системы)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\rho^s}{\prod_{i=1}^s (n+i\beta)}}; \quad (4.26)$$

– вероятность того, что в системе находится k требований

$$P_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} P_0, & \text{при } 1 \leq k \leq n, \\ \frac{\rho^k}{n! \prod_{i=1}^{k-n} (n+i\beta)} P_0 & \text{при } k \geq n+1, \end{cases} \quad (4.27)$$

где $\rho = \lambda/\mu$, $\beta = \nu/\mu$, $\nu = 1/t_{\text{ож}}$;

– среднее число требований, находящихся в очереди, равно

$$M_{\text{ож}} = \sum_{s=1}^{\infty} s P_{n+s} = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{(k-n)\rho^{k-n}}{\prod_{i=1}^s (n+i\beta)}; \quad (4.28)$$

– среднее число требований, находящихся в системе

$$M_{\text{обс}} = \sum_{k=1}^{n-1} k P_k + n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} P_k \right); \quad (4.29)$$

– среднее число требований, находящихся в системе

$$M = M_{\text{ож}} + M_{\text{обс}}; \quad (4.30)$$

Важнейшей характеристикой качества обслуживания в рассматриваемой системе является вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = \frac{\beta}{\rho} M_{\text{ож}}. \quad (4.31)$$

4.4. Система с ограничением на время пребывания заявки в системе

Постановка задачи. Система массового обслуживания состоит из n однотипных приборов. В систему поступает пуассоновский поток требований интенсивности λ . Время обслуживания каждого требования подчинено показательному закону с параметром μ . Если прибывшее в систему требование застанет в ней n требований, то оно становится в очередь. Время пребывания требования в системе не должно превосходить $t_{\text{доп}}$, независимо от того, обслуживается заявка или стоит в очереди. Время пребывания заявки в системе является случайной величиной с показательным законом распределения [9].

Для данной системы получены следующие расчетные формулы:

– вероятность того, все каналы свободны (вероятность простаивания всей системы)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{k!(1+\beta)^k} + \frac{\rho^n}{n!(1+\beta)^n} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\rho^s}{\prod_{r=1}^s [n+(n+r)\beta]}}; \quad (4.32)$$

– вероятности состояний системы

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!(1+\beta)^k} P_0, \quad k \leq n, \quad (4.33)$$

$$P_{n+s} = \frac{\rho^{n+s}}{n!(1+\beta)^n \prod_{r=1}^s [n+(n+r)\beta]} P_0, \quad s \geq 1; \quad (4.34)$$

– вероятность того, что заявка будет принята в систему (не получит отказ)

$$P_{\text{обс}} = \frac{\mu}{\lambda} \left[\sum_{k=1}^n k P_k + n \left(1 - \sum_{k=0}^n P_k \right) \right] = \frac{n - \sum_{k=0}^{n-1} P_k (n-k)}{\rho}; \quad (4.35)$$

– вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho - n + \sum_{k=0}^{n-1} P_k (n-k)}{\rho}. \quad (4.36)$$

4.5. Система с ограничением на длину очереди и время пребывания в ней

Постановка задачи. СМО состоит из n однотипных приборов. В систему поступает пуассоновский поток требований. Время обслуживания каждого требования подчинено показательному закону. Максимальное число мест в очереди равно m . Если прибывшее в систему требование застанет в ней $n + m$ требований, то оно покидает систему необслуженным. Время пребывания требования в очереди, заставшего в системе $n + s$ ($s < m$) других требований, не должно превосходить $t_{\text{ож}}$, где $t_{\text{ож}}$ – случайная величина, имеющая показательное распределение.

Для данной системы получены следующие расчетные формулы [9]:

– вероятность того, все каналы свободны (вероятность простаивания всей системы)

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{k} + \frac{\rho^n}{n} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\rho}{n} \right)^s}; \quad (4.37)$$

– вероятность того, что в системе находится k требований

$$P_k = \frac{\rho^k}{k} P_0; \quad (4.38)$$

– вероятность того, что в системе находится n требований и s стоят в очереди

$$P_{n+s} = \frac{\rho^n}{n} \left(\frac{\rho}{n} \right)^s P_0; \quad (4.39)$$

– среднее число занятых приборов

$$N_3 = \sum_{k=1}^n k P_k + n \sum_{k=1}^n P_{n+k}; \quad (4.40)$$

– среднее число требований, находящихся в очереди, равно

$$M_{\text{ож}} = \sum_{s=1}^m s P_{n+s}. \quad (4.41)$$

Важнейшей характеристикой качества обслуживания в рассматриваемой системе является вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n} P_0. \quad (4.42)$$

4.6. Система с ограничением на длину очереди и на время пребывания заявки в системе

Постановка задачи. СМО состоит из n однотипных приборов. В систему поступает пуассоновский поток требований плотностью λ . Время обслуживания каждого требования подчинено показательному закону с параметром μ . Максимальное число мест в очереди равно m . Если прибывшее в систему требование застанет в ней $n + m$ требований, то оно покидает систему необслуженным. Принятые в

систему заявки (находящиеся в очереди или на обслуживании) могут находиться в ней ограниченное время. По истечении этого времени заявка покидает систему независимо от того, обслуживалась она или находилась в очереди. Время пребывания требования в системе – случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром ν [9].

Примерами таких систем могут служить различные бытовые мастерские курортных городов. Отдыхающие испытывают потребность в ремонте фотоаппаратов, сотовых телефонов, магнитофонов, в починке обуви и одежды. Однако мастерские не всегда обеспечивают (особенно в разгар курортного сезона) быстрое обслуживание отдыхающих. Поэтому, если та или иная мастерская имеет уже определенное количество заказов, то она не принимает новых (ограничение на длину очереди). Однако, отдыхающие, как правило, ограничены временем пребывания в данном месте отдыха и поэтому по истечении срока отпуска, независимо от того, началось обслуживание или они ещё находились в ожидании ремонта (ограничение на время пребывания заявки в системе).

Для данной системы получены следующие расчетные формулы [9]:

– вероятность того, все каналы свободны (вероятность простаивания всей системы)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!(1+\beta)^k} + \frac{\rho^n}{n!(1+\beta)^n} \sum_{s=1}^m \frac{\rho^s}{\prod_{r=1}^s (n+(n+r)\beta)}}; \quad (4.43)$$

– вероятность того, что в системе находится k требований

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!(1+\beta)^k} P_0, \quad k \leq n; \quad (4.44)$$

– вероятность того, что в системе находится n требований и s стоят в очереди

$$P_{n+s} = \frac{\rho^{n+s}}{n!(1+\beta)^n \prod_{r=1}^s (n+(n+r)\beta)} P_0, \quad 0 \leq s \leq m; \quad (4.45)$$

– вероятность обслуживания

$$P_{\text{обс}} = \frac{\mu}{\lambda} \left(\sum_{k=1}^n k P_k + n \left(1 - \sum_{k=0}^n P_k \right) \right) = \frac{n - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) P_k}{\rho}; \quad (4.46)$$

– вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = 1 - P_{\text{обс}} = \frac{\rho - n + \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) P_k}{\rho}. \quad (4.47)$$

Задачи и упражнения

Задача 4.1. На станцию текущего ремонта сельскохозяйственной техники поступают в случайные моменты времени различные машины. Станция имеет одно помещение для одного технологического потока ремонта. Во дворе станции имеется небольшая крытая площадка, где одновременно может находиться, ожидая очереди, не более пяти машин. Среднее время ремонта равно 2 суткам. Неисправная техника поступает в мастерскую с плотностью 1 машина в сутки. Необходимо определить пропускную способность мастерской, среднее время простоя мастерской, среднее число машин, ожидающих ремонта.

Решение.

Математической моделью станции текущего ремонта сельскохозяйственной техники является одноканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди.

Определяем параметры системы: $n = 1$, $m = 5$, $\lambda = 1$, $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обс}} = 1/2 = 0,5$, $\rho = \lambda/\mu = 1/0,5 = 2$.

Так как $\rho \neq 1$, то вероятность того, что из-за недостатка мест для хранения неисправной техники в мастерской, вновь поступившая на ремонт машина не будет принята равна

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}} = \frac{2^{5+1}(1-2)}{1-2^{5+2}} = \frac{2^6 * (-1)}{1-2^7} = \frac{-64}{-127} = 0,5.$$

Вероятность того, что неисправная техника будет принята к обслуживанию равна

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,5 = 0,5.$$

Относительная и абсолютная пропускные способности соответственно равны

$$Q = P_{\text{обс}} = 0,5 \text{ машин в сутки,}$$

$$A = \lambda Q = 1 * 0,5 = 0,5 \text{ машин в сутки.}$$

Среднюю долю времени, в течение которого мастерская будет простаивать, найдем по формуле (4.1)

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}} = \frac{1 - 2}{1 - 2^{5+2}} = \frac{-1}{-127} = 0,008.$$

Среднее число машин, ожидающих ремонта, найдем по формуле (4.8)

$$M_{\text{ож}} = \frac{\rho^2 \left[1 - \rho^m (m + 1 - m\rho) \right]}{(1 - \rho^{m+2})(1 - \rho)} = \frac{2^2 \left[1 - 2^5 (5 + 1 - 10) \right]}{(1 - 2^7)(1 - 2)} = \frac{4(1 + 128)}{(1 - 128)(-1)} = \frac{516}{127} = 4,1$$

машины.

Таким образом, в среднем 4,1 машина будет находиться в очереди и ожидать своего ремонта.

Задача 4.2. На автозаправочной станции (АЗС) имеются три колонки. Площадка при станции, на которой машины ожидают заправку, может вместить не более трех машин одновременно, и если она занята, то очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится, а проезжает на соседнюю АЗС. В среднем машины прибывают на станцию каждые 4 мин. Процесс заправки одной машины продолжается в среднем 4 мин. Необходимо определить:

- 1) вероятность отказа;
- 2) относительную и абсолютную пропускные способности АЗС;
- 3) среднее число машин, ожидающих заправки;
- 4) среднее время ожидания машины в очереди;
- 5) среднее время пребывания машины в системе.

Решение.

Математической моделью автозаправочной станции является трехканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди.

Определяем параметры системы: $n = 3$, $m = 3$.

Так как машины в среднем прибывают каждые 4 мин, то интенсивность входящего потока равна $\lambda = 1/\bar{t}_{\text{прих}} = 1/4 = 0,25$ машин в мин. Интенсивность потока обслуживаний равна $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обс}} = 1/4 = 0,25$ машин в мин.

Определяем показатель нагрузки СМО $\rho = \lambda/\mu = 0,25/0,25 = 1$.

Показатель нагрузки, приходящейся на один канал равен

$$\psi = \rho/n = 1/3 = 0,333.$$

Вероятность простоя системы определяем по формуле (4.14)

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\rho}{n}\right)^s} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^3 \frac{1^k}{k!} + \frac{1^3}{3!} \sum_{s=1}^3 \left(\frac{1}{3}\right)^s} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^3}{3!} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \right)} = \frac{1}{1 + 1 + 0,5 + 0,17 + 0,17(0,33 + 0,11 + 0,04)} = \\ &= \frac{1}{2,67 + 0,08} = \frac{1}{2,75} = 0,36. \end{aligned}$$

Вероятность того, что из-за недостатка мест для ожидания заправки, машина проедет на соседнюю АЗС равна

$$P_{\text{отк}} = P_{3+3} = \frac{1^{3+3}}{3!3^3} 0,36 = \frac{0,36}{162} = 0,002.$$

Относительная и абсолютная пропускные способности соответственно равны

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,002 = 0,998,$$

$$Q = \lambda P_{\text{обс}} = 0,25 * 0,998 = 0,25 \text{ машины в сутки.}$$

Найдем вероятности состояний системы

$$P_4 = \frac{1^4}{3!1} * 0,36 = 0,02, \quad P_5 = \frac{1^5}{3!2} * 0,36 = 0,007, \quad P_6 = \frac{1^6}{3!3} * 0,36 = 0,002.$$

Среднее число машин, ожидающих ремонта, найдем по формуле (4.21)

$$M_{\text{ож}} = \sum_{s=1}^m sP_{n+s} = 1P_{3+1} + 2P_{3+2} + 3P_{3+3} = P_4 + 2P_5 + 3P_6 = 0,02 + 0,035 + 0,006 = 0,061 \text{ машины.}$$

Таким образом, в среднем 0,061 машины будет находиться в очереди и ожидать своей заправки.

Задача 4.3. На городскую овощную базу поступают овощи нового урожая. Для обеспечения длительного хранения они проходят стадию обработки. До обработки они хранятся под открытым небом. В зависимости от погоды и состояния овощи после транспортировки могут храниться без существенной потери качества не больше двух суток. В среднем на базу в течение декады прибывает до 20 автомашин овощей. На базе работают 2 бригады по предварительной обработке овощей перед закладкой их на длительное хранение. Каждая бригада способна переработать за сутки одну машину. Необходимо оценить работу базы по принятию овощей на длительное хранение.

Решение.

Математической моделью городской овощной базы является двухканальная СМО с ожиданием и ограничением на время пребывания заявки в очереди.

В рассматриваемой системе $\lambda = 2$ машины в день, $\mu = 1/1 = 1$ машина в день, $\nu = 1/2 = 0,5$; $\rho = 2$; $\beta = 0,5$.

Вероятность того, что бригады будут сидеть без дела из-за отсутствия овощей определим по формуле (4.26)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^2 \frac{2^k}{k!} + \frac{2^2}{2!} \sum_{s=3}^{\infty} \frac{2^s}{\prod_{i=1}^s (2 + i \cdot 0,5)}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + 2 \left(\frac{2^1}{2+1*0,5} + \frac{2^2}{(2+1*0,5)(2+2*0,5)} + \frac{2^3}{(2+1*0,5)(2+2*0,5)(2+3*0,5)} + \right. \\
&\times \frac{1}{2^4} \times \\
&\quad \left. + \frac{1}{(2+1*0,5)(2+2*0,5)(2+3*0,5)(2+4*0,5)} + \right. \\
&\times \frac{1}{2^5} \times \\
&\quad \left. + \frac{1}{(2+1*0,5)(2+2*0,5)(2+3*0,5)(2+4*0,5)(2+5*0,5)} + \right. \\
&\times \frac{1}{2^6} \left. \right) = \\
&\quad \left. + \frac{1}{(2+1*0,5)(2+2*0,5)(2+3*0,5)(2+4*0,5)(2+5*0,5)} \right) = \\
&= \frac{1}{1 + 2 + 2 + 2(0,8 + 0,53 + 0,3 + 0,23 + 0,07 + 0,03)} = \frac{1}{8,92} = 0,11.
\end{aligned}$$

Найдем вероятности состояний системы

$$P_3 = \frac{2^3}{2!(2+1*0,5)} * 0,11 = 0,18;$$

$$P_4 = \frac{2^4}{2!(2+1*0,5)(2+2*0,5)} * 0,11 = 0,12;$$

$$P_5 = \frac{2^5}{2!(2+1*0,5)(2+2*0,5)(2+3*0,5)} * 0,11 = 0,07;$$

$$P_6 = \frac{2^6}{2!(2+1*0,5)(2+2*0,5)(2+3*0,5)(2+4*0,5)} * 0,11 = 0,03.$$

Среднее число машин, находящихся в очереди, определяется по формуле (4.28)

$M_{\text{ож}} = 1P_3 + 2P_4 + 3P_5 + 4P_6 = 0,18 + 0,24 + 0,21 + 0,12 = 0,75$
машин.

Вероятность того, что привезенные овощи не будут своевременно обработаны, равна

$$P_{\text{отк}} = \frac{\beta}{\rho} M_{\text{ож}} = \frac{0,5}{2} * 0,75 = 0,19.$$

Задача 4.4. Электронно-вычислительное устройство обрабатывает информацию, поступающих с плотностью 1 инф./мин. Время обработки информации равно 1 мин. Со временем информация теряет свою ценность и через 10 мин считается негодной. Определить основные характеристики электронно-вычислительного устройства.

Решение.

Математической моделью электронно-вычислительного устройства является одноканальная СМО с ожиданием, ограничением на время пребывания заявки в системе.

В рассматриваемой системе $\lambda = 1$; $\mu = 1/1 = 1$; $\nu = 1/10 = 0,1$; $\rho = 1$, $\beta = 0,1$.

Вероятность простоя электронно-вычислительного устройства равна

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{k!(1+0,1)^k} + \frac{1^1}{1!(1+0,1)^1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1^s}{\prod_{r=1}^s [1+(1+r)0,1]}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1^1}{1!(1+0,1)^1} + \frac{1^1}{1!(1+0,1)^1} \left(\frac{1^1}{1+(1+1)0,1} + \dots + \frac{1^8}{(1+(1+1)0,1) \dots (1+(1+7)0,1)} \right)} = \\ &= \frac{1}{0,91 + 0,91(0,83 + 0,64 + 0,46 + 0,31 + 0,19 + 0,11 + 0,06)} = 0,31 \end{aligned}$$

Вероятности состояний системы определяются по формулам (4.33) и (4.34)

$$P_1 = \frac{1^1}{1!(1+0,1)^1} * 0,31 = 0,28,$$

$$P_2 = \frac{1^2}{1!(1+0,1)^1(1+(1+1)0,1)} * 0,31 = 0,23,$$

$$P_3 = \frac{1^3}{1!(1+0,1)^1(1+(1+1)0,1)(1+(1+2)0,1)} * 0,31 = 0,18,$$

$$P_4 = \frac{1^4}{1!(1+0,1)^1(1+(1+1)0,1)(1+(1+2)0,1)(1+(1+3)0,1)} * 0,31 = 0,13,$$

$$P_5 = \frac{1^5}{1!(1+0,1)^1(1+(1+1)0,1)(1+(1+2)0,1)(1+(1+3)0,1)(1+(1+4)0,1)} * 0,31 = 0,09$$

Вероятность того, что информация будет обработана равна

$$P_{\text{обс}} = \frac{1 - P_0}{1} = 1 - 0,31 = 0,69.$$

Вероятность того, что информация будет потеряна вычисляется по формуле (4.36)

$$P_{\text{отк}} = 1 - P_{\text{обс}} = 0,31.$$

Задача 4.5. В магазин поступают из различных отдаленных сельских хозяйств машины с фруктами. В день поступают 4 машины. В магазине имеется помещение, позволяющее хранить не более m машин фруктов одновременно и n бригад продавцов. Время продажи одной машины с фруктами одной бригадой составляет в среднем 0,5 дня. Среднее допустимое время хранения фруктов составляет 2,5 дня. Определить оптимальные значения n и m .

Решение

Математической моделью магазина является n -канальная СМО с ожиданием, ограничением на длину очереди и время пребывания заявки в ней.

В рассматриваемой системе $\lambda = 4$; $\mu = 1/0,5 = 2$; $\nu = 1/2,5 = 0,4$; $\rho = 2$; $\beta = 0,2$.

Соответствующие результаты вычислений, полученные по формулам (4.37) – (4.42) для $n = 1$; 2 и $m = 1$; 2; 3, приведены в табл. 4.1.

Из этой таблицы видно, что одна бригада продавцов явно не справится со своей работой, т. к. в среднем около 53 % – 67 % всех поступающих фруктов не будет распродано. Вероятность отказа в обслуживании при наличии двух бригад продавцов уже значительно меньше (21 % – 40 %), но еще сравнительно велика. По-видимому, целесообразно использовать три бригады.

Таблица 4.1

Результаты вычислений								
	$n = 1$				$n = 2$			
	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
P_0	0,333	0,158	0,090	0,059	0,2	0,145	0,119	0,105
P_1	0,667	0,316	0,181	0,117	0,4	0,290	0,238	0,210
P_2	–	0,526	0,300	0,195	0,4	0,290	0,238	0,210
P_3	–	–	0,430	0,281	–	0,244	0,225	0,198
P_4	–	–	–	0,350	–	–	0,181	0,159
P_5	–	–	–	–	–	–	–	0,122
$M_{\text{ож}}$	–	0,53	1,16	1,81	–	0,21	0,59	0,88
M	0,67	1,37	1,97	2,75	1,2	1,60	2,11	2,47
N_0	0,33	0,16	0,09	0,06	0,8	0,58	0,48	0,42
$P_{\text{отк}}$	0,67	0,58	0,54	0,53	0,4	0,29	0,24	0,21
$M\theta$, дней	–	0,13	0,29	0,45	–	0,06	0,15	0,22

С другой стороны, вероятность отказа менее чувствительна к изменению величины m , поэтому если содержание помещения связано с относительно большими издержками, то рационально использовать небольшие значения m , например $m = 1$. Вместе с тем полное отсутствие помещения также невыгодно, т. к. при этом заметно подпрыгивает вероятность отказа.

Упражнение 4.1. Вычислительная система состоит из трех процессоров. Если все три процессора заняты обработкой запросов, то они становятся в очередь. Количество запросов в очереди ограничено и равно 6. Время обработки запросов пользователя равно в среднем 20 сек. На обработку запросы поступают с интенсивностью 3 запроса в мин. Со временем запрос теряет свою актуальность и через 20 мин не

имеет смысла его обрабатывать. Оценить загрузку вычислительной системы.

Упражнение 4.2. Мастерская, ремонтирующая компьютеры, имеет 5 опытных мастеров. Поток компьютеров, поступающих от населения, имеет плотность 10 компьютеров в день. Время ремонта одного компьютера в среднем равно 5 дням. Помещение для хранения компьютеров ограничено по размерам и может вмещать 20 компьютеров. Определить эффективность мастерской.

Упражнение 4.3. С целью увеличения дальности беспосадочного полета производится дозаправка самолетов горючим в воздухе. В районе дозаправки постоянно дежурит 3 самолета-дозаправщика. Время дозаправки одного самолета равно 20 мин. Если все 3 дозаправщика заняты, то самолет, нуждающийся в дозаправке, некоторое время может «ожидать» (совершать полет по кругу в районе дозаправки). Время ожидания равно 30 мин. Самолет, не дождавшийся дозаправки, вынужден садиться на запасной аэродром. В район дозаправки самолеты прибывают с плотностью 5 самолетов в час.

Упражнение 4.4. В мастерской по ремонту фотоаппаратов курортного города работают 2 мастера. В день от отдыхающих в мастерскую поступает 10 фотоаппаратов. Время ремонта равно в среднем 2 дням. Если в мастерской имеется 7 заказов, то она не принимает новых. Клиенты ограничены временем пребывания в курортном городе, которое равно 3 дням. По истечении срока отпуска клиенты вынуждены забирать сданные в ремонт фотоаппараты, независимо от того, началось обслуживание или они еще находились в ожидании ремонта. Определить основные характеристики работы мастерской.

Упражнение 4.5. Счетно-решающий прибор производит расчеты задачи по заданному алгоритму в зависимости от поступающей информации. Поток информации задается плотностью 4 инф./мин. Поступающая информация, застав прибор занятым, ожидает его освобождения. Однако со временем информация теряет свою ценность. Время, в течение которого информация еще не потеряла свою ценность, равно 5 мин. Время решения задачи равно 2 мин. Определить характеристики системы. Рассмотрите вопрос об увеличении количества приборов.

Упражнение 4.6. В ателье по ремонту одежды на привокзальной площади работает 1 мастер. Поток клиентов задается плотностью 3 клиента в час. Время ремонта одежды в среднем равно 2 ч. Клиенты ограничены временем пребывания на вокзале, которое в среднем равно 1 ч. По истечении времени клиент вынужден забрать сданную в ателье

одежду, независимо от того, началось обслуживание или она еще находилась в ожидании ремонта. Определить основные характеристики системы. Рассмотрите вопрос об увеличении количества мастеров.

Упражнение 4.7. Вычислительная система состоит из двух процессоров. Если процессор 1 занят, обработка запросов пользователя проводится 2-м процессором. Если и он занят, то запросы встают в очередь. Время обработки запросов пользователя равно в среднем 10 сек. На обработку запросы поступают с интенсивностью 2 запроса в мин. Со временем запрос теряет свою актуальность и через 15 мин не имеет смысла его обрабатывать. Оценить загрузку вычислительной системы.

Упражнение 4.8. Станция автотехобслуживания ремонтирует машины, поступающие в среднем 4 машины в день. На СТО работают 3 бригады слесарей. Ремонт машин занимает 1 день. Стоянка перед СТО имеет 10 мест и каждая бригада имеет свой бокс на 2 машины, которые обслуживаются одновременно. Машины, не нашедшие места на стоянке, ремонтируются в другом месте.

5. ПРОЧИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

5.1. Системы с ненадежными приборами

Рассматривая функционирование различных СМО нельзя обойти вопрос об учете возможности выхода из строя в процессе работы обслуживающих приборов.

Как известно, время выхода t из строя аппаратуры (появления отказов) или время работы ее между отказами представляет собой случайные величины. Это объясняется различными изменениями условий эксплуатации (нестабильности питания, изменением параметров элементов и т. д.).

Так как отказы в аппаратуре устраняются в течение определенного промежутка времени, то они образуют поток. Поток отказов является простейшим с некоторой плотностью q . Примеров систем с ненадежными приборами много: работа АТС, работа сложно-измерительной аппаратуры, ЭВМ, аппаратов военного назначения и др.

В этих СМО в одних случаях заявки вынуждены ожидать обслуживания безгранично долго, а в других поступившая заявка покидает систему, если прибор не может начать ее обслуживание немедленно. Возможны случаи, когда время пребывания заявки в системе или в очереди ограничено.

Особенности функционирования могут проявляться и в том, что обслуживаемый прибор в первом случае выходит из строя только во время работы, а в других возможно появления неисправности как в период обслуживания, так и в нерабочем состоянии. При организации работы предприятия, на котором имеется ряд однотипных аппаратов, возникает вопрос о целесообразном объеме запасных агрегатов или деталей, о необходимом числе ремонтных бригад, мастеров и т. д. С учетом надежности работы приборов связаны задачи по оценке вероятности выполнения прибором той или иной производственной задачи, если для повышения производительности оборудования применяются различные схемы резервирования [6, 9].

5.1.1. Системы ненадежных приборов с отказами

Постановка задачи. Имеется СМО с отказами с n приборами обслуживания. В систему поступает простейший поток заявок интенсивности λ . Время обслуживания заявки является случайной величиной с параметром μ . Но в отличие от ранее рассмотренных случаев, каждая вновь поступившая в СМО заявка теряется не только тогда, когда все приборы заняты обслуживанием, но и тогда, когда часть приборов занята обслуживанием, а остальные находятся в состоянии ремонта. Выход прибора из строя одинаково возможен как в период работы, так и когда он не обслуживает заявку. Для привлечения в порядок этих приборов имеется бригада из m рабочих. Каждый прибор обслуживается одним рабочим. Поток отказов – простейший с параметром q , время, необходимое на приведение прибора в порядок, распределено по показательному закону с параметром γ .

Так как формулы для произвольных значений n и m громоздки, приведены формулы только для частного случая, когда $n = 1$ и $m = 1$ [6, 9]:

– вероятность того, что прибор находится в рабочем состоянии

$$\pi_0 = \frac{\gamma}{q + \gamma}; \quad (5.1)$$

– вероятность того, что прибор находится в нерабочем состоянии

$$\pi_1 = \frac{q}{q + \gamma}; \quad (5.2)$$

– вероятность того, что прибор свободен от обслуживания

$$P_0 = \frac{q + \mu}{q + \mu + \frac{\lambda \gamma}{q + \gamma}}; \quad (5.3)$$

– вероятность того, что прибор занят обслуживанием

$$P_1 = \frac{\lambda \gamma}{(q + \gamma)(q + \mu) + \lambda \gamma}; \quad (5.4)$$

– вероятность того, что заявка не попала в систему (т. к. либо прибор занят обслуживанием, либо неисправен), равна

$$P_{\text{нс}} = P_1 + \pi_1 = \frac{q}{q + \gamma} + \frac{\lambda \gamma}{(q + \mu)(q + \gamma) + \lambda \gamma}; \quad (5.5)$$

– вероятность того, что заявка, обслуживание которой не было закончено до того, как прибор вышел из строя, покинет систему не полностью обслуженной, равна

$$P_{\text{но}} = \frac{q P_1}{\lambda}; \quad (5.6)$$

– вероятность отказа равна

$$P_{\text{отк}} = P_{\text{нс}} + P_{\text{но}}. \quad (5.7)$$

5.1.2. Системы ненадежных приборов с ожиданием

Постановка задачи. Имеется СМО с ожиданием с n приборами обслуживания. В систему поступает простейший поток заявок интенсивности λ . Время обслуживания заявки является случайной

величиной с параметром μ . Но в отличие от рассмотренной выше системы с отказами, вновь поступившая заявка застав приборы занятыми обслуживанием или в состоянии ремонта, становится в очередь. Длина в очереди ограничена и равна m . Выход прибора из строя одинаково возможен как в период работы, так и когда он не обслуживает заявку. Поток отказов – простейший с параметром q , время необходимое на приведение прибора в порядок распределено по показательному закону с параметром γ .

Рассмотрим частный случай $n = 1, m = 2$, для которого получены следующие расчетные формулы [6, 9]:

– вероятность того, что прибор исправен

$$\pi_0 = \frac{\gamma}{q + \gamma}; \quad (5.8)$$

– вероятность того, что прибор свободен

$$P_0 = \frac{1}{1 + w + w^2 + w^3}, \quad (5.9)$$

где

$$w = \frac{\lambda}{(\mu + q)\pi_0};$$

– вероятности того, что прибор занят и s заявок стоит в очереди

$$P_{1+s} = w^s P_0, \quad 0 \leq s \leq 2; \quad (5.10)$$

– среднее число требований, находящихся на обслуживании

$$M_{\text{обс}} = (P_1 + P_2 + P_3) \pi_0; \quad (5.11)$$

– среднее число требований, находящихся в системе

$$M_{\text{сис}} = M_{\text{обс}} + P_2 + 2P_3; \quad (5.12)$$

– вероятность того, что заявка, обслуживание которой не было закончено до того, как прибор вышел из строя, покинет систему не полностью обслуженной, равна

$$P_{\text{но}} = \frac{qM_{\text{сис}}}{\lambda}; \quad (5.13)$$

– вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = P_3 + P_{\text{но}}. \quad (5.14)$$

5.2. Системы с приоритетами

Очень часто в систему массового обслуживания поступают потоки требований, которые имеют разный приоритет в обслуживании. Например, в больницах, в первую очередь обслуживаются пациенты с острой болью, на телефонных станциях в первую очередь соединяются международные линии связи и т. д.

5.2.1. СМО со смешанным входным потоком требований

Постановка задачи. В n -канальную систему массового обслуживания поступает два потока требований с плотностями λ_1 и λ_2 . Требования второго потока, застав все приборы уже занятыми обслуживанием, уходят из системы, теряются, а требования первого потока могут ожидать своей очереди. Приборы системы обслуживают потоки первого и второго типа с одинаковой производительностью, которая характеризуется параметром μ . Схема такой системы показана на рис. 5.1 [9].

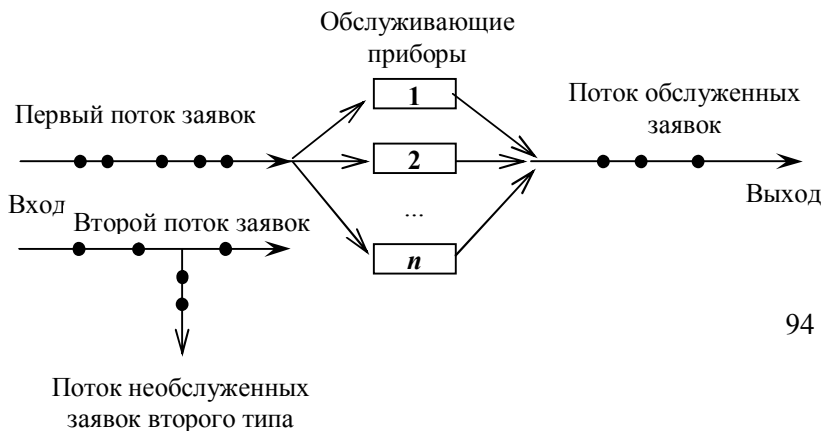


Рис. 5.1. Схема работы по обслуживанию смешанного потока требований

Для стационарных условий получены следующие формулы для определения основных характеристик функционирования системы [9]:

– вероятность того, что все приборы свободны от обслуживания

$$P_0 = \frac{n - \rho_1}{n - \rho_1 + \rho_1 E_n(\rho_1 + \rho_2)} N_n(\rho_1 + \rho_2), \quad (5.15)$$

где

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}; \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu}; \quad E_n = \frac{(\rho_1 + \rho_2)^n}{N_n}; \quad N_n = \sum_{k=0}^n \frac{(\rho_1 + \rho_2)^k}{k!};$$

– вероятность того, что в системе находятся k требований ($0 < k \leq n$)

$$P_k = \frac{(\rho_1 + \rho_2)^k}{k!} P_0; \quad (5.16)$$

– вероятность того, что в системе находятся k требований ($k > n$)

$$P_k = \frac{(n - \rho_1) E_n(\rho_1 + \rho_2)}{n - \rho_1 + \rho_1 E_n(\rho_1 + \rho_2)} \left(\frac{\rho_1}{n} \right)^{k-n}; \quad (5.17)$$

– вероятность потери требования

$$P_{\text{отк}} = \frac{n E_n(\rho_1 + \rho_2)}{n - \rho_1 + \rho_1 E_n(\rho_1 + \rho_2)}; \quad (5.18)$$

– среднее время ожидания требований первого типа

$$T_{\text{ож}} = \frac{P_{\text{отк}}}{\mu(n - \rho_1)}; \quad (5.19)$$

– среднее число занятых приборов

$$N_3 = \sum_{k=1}^n kP_k + n \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k; \quad (5.20)$$

– среднее число свободных от обслуживания приборов

$$N_0 = \sum_{k=0}^n (n-k)P_k. \quad (5.21)$$

5.2.2. СМО с абсолютным с абсолютным приоритетом

Постановка задачи. В одноканальную систему массового обслуживания поступает два потока требований с плотностями λ_1 и λ_2 . Требования первого потока имеют абсолютный приоритет в обслуживании. Это означает, что при поступлении требования из любого потока, застав прибор свободным, немедленно начинает обслуживаться; если же прибор занят обслуживанием, то требование из второго потока становится в очередь в любом случае, а требование из первого, т. е. приоритетного потока – только при наличии ранее поступивших необслуженных требований из первого потока, включая сюда и требование, находящееся на обслуживании. Если же в очереди находятся требования из второго потока и на обслуживании находится также требование из второго потока, то обслуживаемое требование снимается с обслуживания независимо от того, сколько оно там находилось, и начинает обслуживаться требование из первого (приоритетного) потока. После освобождения прибора на обслуживание поступает то требование приоритетного потока (если таковое имеется), время ожидания которого наибольшее. Требования из второго потока поступают на обслуживание только при условии, если нет ожидающих требований первого потока. При этом среди требований второго потока соблюдается обычная дисциплина очереди FIFO – First input, first output – Первым пришел, первым обслуживайся [6, 9].

Система с относительным приоритетом в обслуживании отличается от рассматриваемой системы с абсолютным приоритетом в обслуживании только тем, что требование из приоритетного потока, застав прибор занятым обслуживанием требования из второго потока, ждет окончания его обслуживания. Время обслуживания потоков характеризуется разной производительностью с параметрами μ_1 и μ_2 .

Если выполняется условие

$$\rho_1 + \rho_2 < 1,$$

где

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}; \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2},$$

то для установившегося режима справедливы следующие формулы определения основных характеристик функционирования системы:

– среднее число требований из приоритетного потока, находящихся в очереди

$$M_{\text{ож}}^1 = \frac{\rho_1^2}{1 - \rho_1}; \quad (5.22)$$

– среднее число требований из неприоритетного потока, находящихся в очереди

$$M_{\text{ож}}^2 = \frac{\rho_2}{1 - \rho_1 - \rho_2} \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \right); \quad (5.23)$$

– среднее время ожидания требования из приоритетного потока

$$T_{\text{ож}}^1 = \frac{M_{\text{ож}}^1}{\lambda_1}; \quad (5.24)$$

– среднее время ожидания требования из неприоритетного потока

$$T_{\text{ож}}^2 = \frac{M_{\text{ож}}^2}{\lambda_2} - \frac{1}{\mu_2}. \quad (5.25)$$

Задачи и упражнения

Задача 5.1. На одноканальный коммутатор поступают заявки на телефонные разговоры с абонентами плотностью 1 заявка в мин. Среднее время ведения одного разговора равно 3 мин. Коммутатор время от времени может выходить из строя. Опыт работы показал, что среднее время наработки на один отказ для коммутатора равно 2 000 мин. Время необходимое для устранения неисправности в среднем равно 200 мин. Если заявка на разговор поступит в тот момент, когда коммутатор занят или неисправен, то заявка теряется. Для ремонта коммутатора имеется один оператор. Требуется определить основные характеристики функционирования коммутатора.

Решение.

Математической моделью коммутатора является одноканальная система массового обслуживания с отказами с ненадежными приборами обслуживания.

В рассматриваемой системе $\lambda = 1$; $\mu = 1/3 = 0,33$; $q = 1/2\ 000 = 0,0005$; $\gamma = 1/200 = 0,005$.

Вероятность того, что коммутатор находится в рабочем состоянии определяется по формуле (5.1)

$$\pi_0 = \frac{0,005}{0,0005 + 0,005} = 0,91.$$

По формуле (5.2) вычислим вероятность того, что коммутатор будет находиться в нерабочем состоянии

$$\pi_1 = \frac{0,0005}{0,0005 + 0,005} = 0,09.$$

Вероятность того, что коммутатор будет свободен от обслуживания

$$P_0 = \frac{0,0005 + 0,33}{0,0005 + 0,33 + \frac{0,005}{0,0055}} = \frac{0,3305}{0,3305 + 0,91} = \frac{0,3305}{1,2405} = 0,27.$$

Вероятность того, что коммутатор будет занят разговором вычислим по формуле (5.4)

$$P_1 = \frac{0,005}{0,0055 * 0,3305 + 0,005} = \frac{0,005}{0,002 + 0,005} = \frac{0,005}{0,007} = 0,73.$$

Вероятность того, что разговор не состоится из-за занятости или неисправности коммутатора равна

$$P_{\text{нс}} = 0,73 + 0,09 = 0,82.$$

Вероятность того, что заявка, обслуживание которой не было закончено до того, как прибор вышел из строя, покинет систему не полностью обслуженной, равна

$$P_{\text{но}} = \frac{0,0005 * 0,73}{1} = 0,0004.$$

Вероятность отказа равна

$$P_{\text{отк}} = 0,82 + 0,0004 = 0,8204.$$

Задача 5.2. В компьютер в случайные моменты времени поступают для обработки блоки информации некоторой структуры с плотностью 5 блоков в час. Время обработки одного блока информации равно в среднем 15 мин. Иногда компьютер выходит из строя, причем среднее время его наработки на один отказ равно 5 ч. Среднее время ремонта равно 20 мин. Во внешней памяти компьютера могут одновременно храниться не более двух блоков одновременно, так что если очередной блок информации поступает в тот момент, когда в компьютере уже два блока ожидают обработки, то он теряется. Блок информации теряется и в том случае, когда во время его обработки компьютер сдает сбой. Требуется оценить эффективность работы компьютера.

Решение

Математической моделью компьютера является одноканальная система массового обслуживания с ожиданием с ненадежными приборами обслуживания с ограничением на длину очереди.

В рассматриваемой системе $\lambda = 5$; $\mu = 60/15 = 4$; $q = 1/5 = 0,2$; $\gamma = 60/20 = 3$.

Вероятность того, что компьютер исправен равна

$$\pi_0 = \frac{3}{0,2+3} = 0,9375.$$

Найдем $w = \frac{5}{4,2 * 0,9375} = \frac{5}{3,9375} = 1,3.$

Вероятность того, что компьютер свободен,

$$P_0 = \frac{1}{1+1,3+1,3^2+1,3^3} = \frac{1}{2,3+1,69+2,197} = \frac{1}{6,187} = 0,16.$$

Вероятность того, что компьютер занят и в памяти нет ни одного блока

$$P_1 = 1,3^0 * 0,16 = 0,16.$$

Вероятность того, что компьютер занят и один блок информации находится в памяти,

$$P_2 = 1,3^1 * 0,16 = 0,208.$$

Вероятность того, что компьютер занят и два блока информации находятся в памяти,

$$P_3 = 1,3^2 * 0,16 = 0,27,$$

т. е. 27 % блоков информации будет потеряно из-за отсутствия места во внешней памяти.

Среднее число блоков информации, находящихся на обслуживании

$$M_{\text{обс}} = (0,16 + 0,208 + 0,27) * 0,9375 = 0,6.$$

Среднее число блоков информации, находящихся в компьютере,

$$M_{\text{сис}} = 0,6 + 0,208 + 2 * 0,27 = 1,348.$$

Вероятность того, что блок информации, обслуживание которого не было закончено до того, как компьютер вышел из строя, покинет его не полностью обслуженным, равна

$$P_{\text{но}} = \frac{0,2 * 1,348}{5} = 0,05 ,$$

т. е. 5 % информации не будет обработано из-за сбоя компьютера во время обработки.

Таким образом, вероятность отказа равна

$$P_{\text{отк}} = 0,27 + 0,05 = 0,32 ,$$

т. е. 32 % блоков информации не будет обработано.

Задача 5.3. В одном из районов большого города работает парикмахерская, которая обслуживает жителей этого района. В парикмахерской имеется 3 мастера. Одни клиенты, застав всех мастеров занятыми обслуживанием, становятся в очередь и ожидают. Другие клиенты не могут ждать, они спешат и, если все мастера заняты уже обслуживанием уходят. Клиенты первого вида составляют поток с плотностью 6 клиентов в час, а второго вида – 3 клиента в час. Среднее время обслуживания равно 20 мин. Требуется оценить работу парикмахерской.

Решение

Математической моделью парикмахерской является трехканальная система массового обслуживания со смешанным входящим потоком требований.

В рассматриваемой системе $\lambda_1 = 6$; $\lambda_2 = 3$; $\mu = 60/20 = 3$; $\rho_1 = \lambda_1 / \mu = 6/3 = 2$; $\rho_2 = \lambda_2 / \mu = 3/3 = 1$.

Найдем E_n и N_n

$$N_3 = \sum_{k=0}^3 \frac{(2+1)^k}{k!} = \frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} = 1 + 3 + 4,5 + 4,5 = 13 \quad E_3 = \frac{3^3}{13} = \frac{4,5}{13} = 0,35;$$

По формулам (5.16)-(5.22) находим основные характеристики функционирования данной системы.

Вероятность того, что все три мастера свободны от обслуживания равна

$$P_0 = \frac{3-2}{[3-2+2*0,35*3]13*3} = \frac{1}{[3-2+2*0,35*3]13*3} = \frac{1}{120,9} = 0,008.$$

Вероятности состояний системы P_k , вычисленные по формуле (5.17), представлены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Результаты вычислений			
k	P_k	kP_k	$(n-k)P_k$
0	0,008	0	0,024
1	0,024	0,024	0,048
2	0,036	0,072	0,036
3	0,036	0,072	0,036
Сумма	0,104	0,168	0,144

Вероятность потерь для клиентов второго потока равна

$$P_{\text{отк}} = \frac{3*0,35*3}{3-2+2*0,35*3} = \frac{2,1}{2,75} = 0,764.$$

В среднем клиенты первого вида ожидают своей очереди

$$T_{\text{ож}} = \frac{0,764}{3(3-2)} = 0,255 \text{ часов} \approx 15,3 \text{ мин.}$$

Среднее число занятых мастеров

$$N_3 = \sum_{k=1}^n kP_k + n \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k = 0,168 + 3*0,896 = 2,856 \text{ мастера.}$$

Среднее число свободных мастеров

$$N_0 = \sum_{k=0}^n (n-k)P_k = 0,144 \text{ мастера.}$$

Коэффициент простоя мастеров

$$K_{\Pi} = \frac{0,144}{3} = 0,048.$$

Это означает, что в среднем около 5 % времени каждый мастер будет свободен во время работы.

Коэффициент простоя мастеров

$$K_3 = \frac{2,856}{3} = 0,952.$$

Это означает, что в среднем около 95 % времени каждый мастер будет занят обслуживанием клиентов.

Задача 5.4. Обувная мастерская, имеющая одного мастера, осуществляет обычный и срочный (в присутствии заказчика) ремонт. При поступлении заказа на срочный ремонт, обычный прерывается. Поток заказов на срочный ремонт имеет плотность 2 чел./ч. Поток обычных заказов задается плотностью 3 чел./ч. Время обычного ремонта равно 15 мин, время срочного ремонта – 5 мин. Необходимо определить основные характеристики функционирования системы.

Решение

Математической моделью обувной мастерской является одноканальная система массового обслуживания с абсолютным приоритетом.

В рассматриваемой системе $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 3$; $\mu_1 = 60/5 = 12$; $\mu_2 = 60/15 = 4$; $\rho_1 = \lambda_1 / \mu_1 = 2/12 = 0,17$; $\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 3/4 = 0,75$.

Так как $\rho_1 + \rho_2 = 0,17 + 0,75 < 1$, то по формулам (5.23)–(5.26) находим

– среднее число требований из приоритетного потока, находящихся в очереди

$$M_{\text{ож}}^1 = \frac{0,17^2}{1 - 0,17} = \frac{0,0289}{0,83} = 0,035;$$

– среднее число требований из неприоритетного потока, находящихся в очереди

$$M_{\text{ож}}^2 = \frac{0,75}{1 - 0,17 - 0,75} \left(1 + \frac{4}{12} \frac{0,17}{1 - 0,17} \right) = \frac{0,75}{0,08} (1 + 0,068) = 10,0125;$$

– в среднем требование из приоритетного потока ожидает своей очереди

$$T_{\text{ож}}^1 = \frac{0,035}{2} = 0,0175 \text{ часов} \approx 1,05 \text{ мин};$$

– а требование из второго потока ожидает своей очереди в среднем

$$T_{\text{ож}}^2 = \frac{10,0125}{3} - \frac{1}{4} = 3,0875 \text{ ч.}$$

Упражнение 5.1. В случайные моменты времени к моечной установке подъезжают в среднем 3 автомашины в час. Средняя производительность моечной установки составляет 5 автомашин в час. В случайные моменты времени моечная установка выходит из строя в среднем 3 раза за 120 часов работы. Время, необходимое для ремонта моечной установки, случайное и в среднем равно 2 ч. Требуется оценить работу моечной установки.

Упражнение 5.2. В одном из районов большого города работает аптека, которая обслуживает жителей этого района. В аптеке имеется 4 фармацевта. Одни клиенты, застав всех фармацевтов занятыми обслуживанием, становятся в очередь и ожидают. Другие клиенты не могут ждать, они спешат и, если все фармацевты заняты уже обслуживанием, уходят. Клиенты первого вида составляют поток с плотностью 10 клиентов в час, а второго вида – 4 клиента в час. Среднее время обслуживания равно 30 мин. Требуется оценить работу аптеки.

Упражнение 5.3. Обувная мастерская, имеющая одного мастера, осуществляет обычный и срочный (в присутствии заказчика) ремонт.

При поступлении заказа на срочный ремонт, обычный прерывается. Поток заказов на срочный ремонт имеет плотность 1 чел./ч. Поток обычных заказов задается плотностью 2 чел./ч. Время обычного ремонта равно 20 минутам, время срочного ремонта – 10 мин. Необходимо оценить работу мастерской.

Упражнение 5.4. В компьютер в случайные моменты времени поступают для обработки блоки информации некоторой структуры с плотностью 3 блока в час. Время обработки одного блока информации равно в среднем 20 мин. Иногда компьютер выходит из строя, причем среднее время его наработки на один отказ равно 10 ч. Среднее время ремонта равно 30 мин. Во внешней памяти компьютера могут одновременно храниться не более двух блоков одновременно, так что если очередной блок информации поступает в тот момент, когда в компьютере уже два блока ожидают обработки, то он теряется. Блок информации теряется и в том случае, когда во время его обработки компьютер сдает сбой. Требуется оценить эффективность работы компьютера.

6. ИМИТАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Аналитический аппарат теории массового обслуживания позволяет решить далеко не все задачи, представляющие практический интерес и ограничивается, в основном, задачами, в которых входные потоки являются простейшими потоками, а время обслуживания предполагается распределенным по показательному закону. В связи с этим для исследования сложных систем, приводимых к схеме систем массового обслуживания (СМО), целесообразно использовать компьютерное моделирование [20–27].

Сущность этого метода применительно к анализу систем массового обслуживания заключается в следующем. С помощью методов моделирования случайных закономерностей формируются реализации заданного потока заявок. Далее моделируется процесс функционирования обслуживающей системы. Все показатели работы системы, интересующие исследователя, фиксируются. Общий моделирующий алгоритм многократно воспроизводит случайные реализации процесса функционирования системы при некоторых заранее заданных условиях. Накопленная при этом информация статистически обрабатывается.

6.1. Моделирование одноканальной СМО с отказами

Пусть на вход системы поступают заявки, образующие ординарный поток однородных событий с заданным законом распределения интервалов между событиями. Длительность обслуживания заявки также является случайной величиной с заданным законом распределения. Если очередная заявка застает канал обслуживания занятым, то она получает отказ.

Процесс функционирования СМО будем рассматривать в интервале времени $[0, T_m]$. Это значит, что заявка, для которой время начала обслуживания $t^n < T_m$, а время окончания обслуживания $t^{об} > T_m$, получает отказ.

В результате моделирования необходимо получить характеристики качества обслуживания: вероятность отказа, относительную и абсолютные пропускные способности, долю обслуженных заявок, коэффициент загрузки и простоя канала.

Схема алгоритма, моделирующего заданную СМО, представлена на рис. 6.1. Опишем её функционирование. Оператор 1 осуществляет ввод исходной информации (параметры потока заявок, закона распределения времени обслуживания, количество дней моделирования и др.).

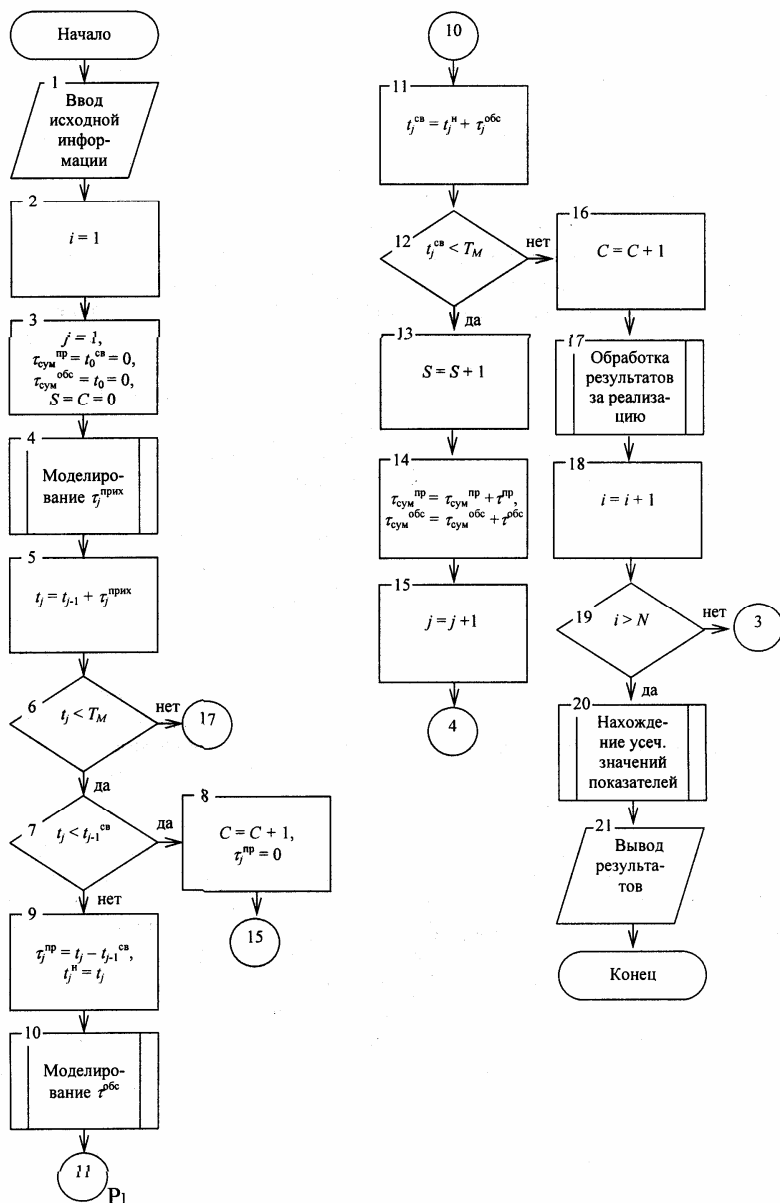


Рис. 6.1. Блок-схема алгоритма моделирования одноканальной СМО с отказами

Оператор 2 представляет собой счетчик числа реализаций (прогонов) процесса функционирования системы. Оператор 3 обеспечивает повторение нового прогона путем задания начальных условий для следующей реализации. Операторы 4 и 5 формируют момент поступления очередной заявки

$$t_j = t_{j-1} + \tau_j^{\text{прих}}, \quad (6.1)$$

где t_{j-1} – момент поступления предыдущей заявки; $\tau_j^{\text{прих}}$ – интервал времени между этими заявками. С помощью оператора 6 осуществляется проверка, не вышел ли момент поступления заявки t_j за пределы интервала моделирования

$$t_j < T_m. \quad (6.2)$$

Если условие (6.2) не выполняется, т. е. интервал моделирования исчерпан, следует переходить к обработке результатов моделирования, т. е. к оператору 16. Если же условие (6.2) выполняется, то оператор 7 выясняет, занят или свободен канал в момент поступления j -й заявки. Если в момент поступления заявки канал занят, т. е. $t_j < t_{j-1}^{\text{св}}$, то управление передается оператору 8, который подсчитывает текущее число заявок, получивших отказ и время простоя канала равно нулю. Здесь C – количество заявок, получивших отказ. Оператор 9 вычисляет время простоя канала как разницу между моментом прихода заявки и временем освобождения канала от обслуживания предыдущей заявки, т. е.

$$\tau_j^{\text{пп}} = t_j - t_{j-1}^{\text{св}},$$

и формирует момент начала обслуживания, совпадающий с моментом прихода заявки, т. е. $t_j^{\text{н}} = t_j$.

Оператор 10 формирует длительность обслуживания заявки $\tau_j^{\text{обс}}$ как случайную величину, подчиненную соответствующему закону распределения. Оператор 11 вычисляет время освобождения канала от обслуживания данной заявки

$$t_j^{\text{св}} = t_j^{\text{н}} + \tau_j^{\text{обс}}.$$

Оператор 12 проверяет условие

$$t_j^{\text{св}} < T_m. \quad (6.3)$$

Если это условие выполняется, т. е. время обслуживания заявки не вышло за пределы интервала моделирования, то в операторах 13, 14, 15 подсчитывается количество обслуженных заявок, суммарное

время простоя канала, суммарное время обслуживания заявок и осуществляется переход к следующей заявке.

Если условие (6.3) не выполняется, то данная заявка получает отказ и управление передается оператору 17 для частной обработки результатов за реализацию.

Частная обработка данных заключается в подготовке некоторых сумм, необходимых для последующего статистического расчета математических ожиданий и вероятностей некоторых величин, выбранных в качестве показателей эффективности СМО.

Суммами являются:

$\sum \tau_j^{\text{пр}}$ – суммарная длительность простоя канала за интервал функционирования системы $[0, T_{\text{м}}]$;

$\sum \tau_j^{\text{обс}}$ – суммарная длительность работы канала обслуживания.

Построенный моделирующий алгоритм позволяет получить следующие показатели:

– вероятность обслуживания заявки $P_{\text{обсл}} = \frac{S}{J}$;

– вероятность отказа в обслуживании $P_{\text{отк}} = 1 - P_{\text{обсл}} = 1 - \frac{S}{J}$;

– среднюю длительность простоя канала $\bar{\tau}^{\text{пр}} = \frac{1}{J} \sum \tau_j^{\text{пр}}$;

– вероятность простоя канала $P_{\text{прост}} = \frac{\tau_{\text{прост}}}{T_{\text{М}}}$;

– среднюю длительность загрузки канала $\bar{\tau}^{\text{обс}} = \frac{1}{J} \sum \tau_j^{\text{обс}}$;

– вероятность загрузки канала $P_{\text{загр}} = \frac{\tau_{\text{обс}}}{T_{\text{М}}}$.

Как известно, для достижения заданной точности полученных оценок необходимо усреднять результаты большого количества реализаций. Оператор 18 обеспечивает выполнение заданного количества (N) реализаций модели, а оператор 19 – вычисление усредненных значений показателей эффективности СМО.

6.2. Моделирование СМО с последовательно расположенными приборами разной производительности

Иногда на практике возникают ситуации, в которых заявка проходит ряд последовательно расположенных приборов.

В системе имеется n последовательно расположенных приборов. Поток требований поступает на первый прибор и является пуассоновским с параметром λ . Если он оказывается занятым, то заявка поступает на обслуживание на второй прибор и т. д. если все n приборов оказываются занятыми, то данная заявка получает отказ. Времена обслуживания заявок каждым прибором являются случайными величинами с показательным законом распределения, имеющими параметры $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$.

В результате моделирования необходимо получить характеристики качества обслуживания: вероятности обслуживания и отказа, коэффициенты загрузки и простоя канала.

Схема алгоритма, моделирующего заданную СМО, представлена на рис. 6.2. Опишем её функционирование. Оператор 1 осуществляет ввод исходной информации (параметры потока заявок, закона распределения времен обслуживания, количество дней моделирования и др.).

Оператор 2 представляет собой счетчик числа реализаций (прогонов) процесса функционирования системы. Оператор 3 обеспечивает повторение нового прогона путем задания начальных условий для следующей реализации. Операторы 4 и 5 формируют момент поступления очередной заявки $t_j = t_{j-1} + \tau_j^{\text{прпх}}$. С помощью оператора 6 осуществляется проверка, не вышел ли момент поступления заявки t_j за пределы интервала моделирования, т. е. $t_j < T_m$. Если условие не выполняется, т. е. интервал моделирования исчерпан, следует переходить к обработке результатов моделирования, т. е. к оператору 19. Если же условие выполняется, то операторы 7 и 8 выясняют, занят или свободен первый канал обслуживания в момент поступления j -й заявки. Если в момент поступления заявки первый канал занят, т. е. $t_j < t_k^{\text{св}}$, то управление передается оператору 9, который осуществляет переход ко второму каналу обслуживания и так до тех пор, пока заявка не будет обслужена одним из каналов или получит отказ (оператор 11).

Вернемся к оператору 8. Если в момент поступления заявки первый канал свободен, то оператор 10 вычисляет время простоя канала как разницу между моментом прихода заявки и временем освобождения канала от обслуживания предыдущей заявки, т. е. $\tau^{\text{пр}} = t_j - t_k^{\text{св}}$, и формирует момент начала обслуживания, совпадающий с моментом прихода заявки, т. е. $t_j^{\text{н}} = t_j$.

Оператор 13 формирует длительность обслуживания заявки $\tau_j^{\text{обс}}$ как случайную величину, подчиненную соответствующему закону

распределения. Оператор 14 вычисляет время освобождения канала от обслуживания данной заявки $t_k^{cb} = t_j^H + \tau_j^{обс}$.

Оператор 15 проверяет условие $t_k^{cb} < T_M$. Если это условие выполняется, т. е. время обслуживания заявки не вышло за пределы интервала моделирования, то в операторах 16–18 подсчитывается количество обслуженных заявок, суммарное время простоя канала, суммарное время обслуживания заявок и осуществляется переход к следующей заявке.

Если условие не выполняется, то данная заявка получает отказ и управление передается оператору 20 для частной обработки результатов за реализацию.

Частная обработка данных заключается в подготовке некоторых сумм, необходимых для последующего статистического расчета математических ожиданий и вероятностей некоторых величин, выбранных в качестве показателей эффективности СМО.

Суммами являются:

$\sum \tau^{пр}$ – суммарная длительность простоя каналов за интервал функционирования системы $[0, T_M]$;

$\sum \tau_j^{обс}$ – суммарная длительность работы канала обслуживания.

Построенный моделирующий алгоритм позволяет получить следующие показатели:

– вероятность обслуживания заявки $P_{обсл} = \frac{S}{J}$;

– вероятность отказа в обслуживании $P_{отк} = 1 - P_{обсл} = 1 - \frac{S}{J}$;

– среднюю длительность простоя каналов $\bar{\tau}^{пр} = \frac{1}{j} \sum \tau^{пр}$;

– вероятность простоя каналов $P_{прост} = \frac{\tau_{прост}}{T_M}$;

– среднюю длительность загрузки канала $\bar{\tau}^{обс} = \frac{1}{j} \sum \tau_j^{обс}$;

– вероятность загрузки канала $P_{загр} = \frac{\tau_{обс}}{T_M}$.

Как известно, для достижения заданной точности полученных оценок необходимо усреднять результаты большого количества

реализаций. Операторы 21, 22 обеспечивают выполнение заданного количества (N) реализаций модели, а оператор 23 – вычисление усредненных значений показателей эффективности СМО.

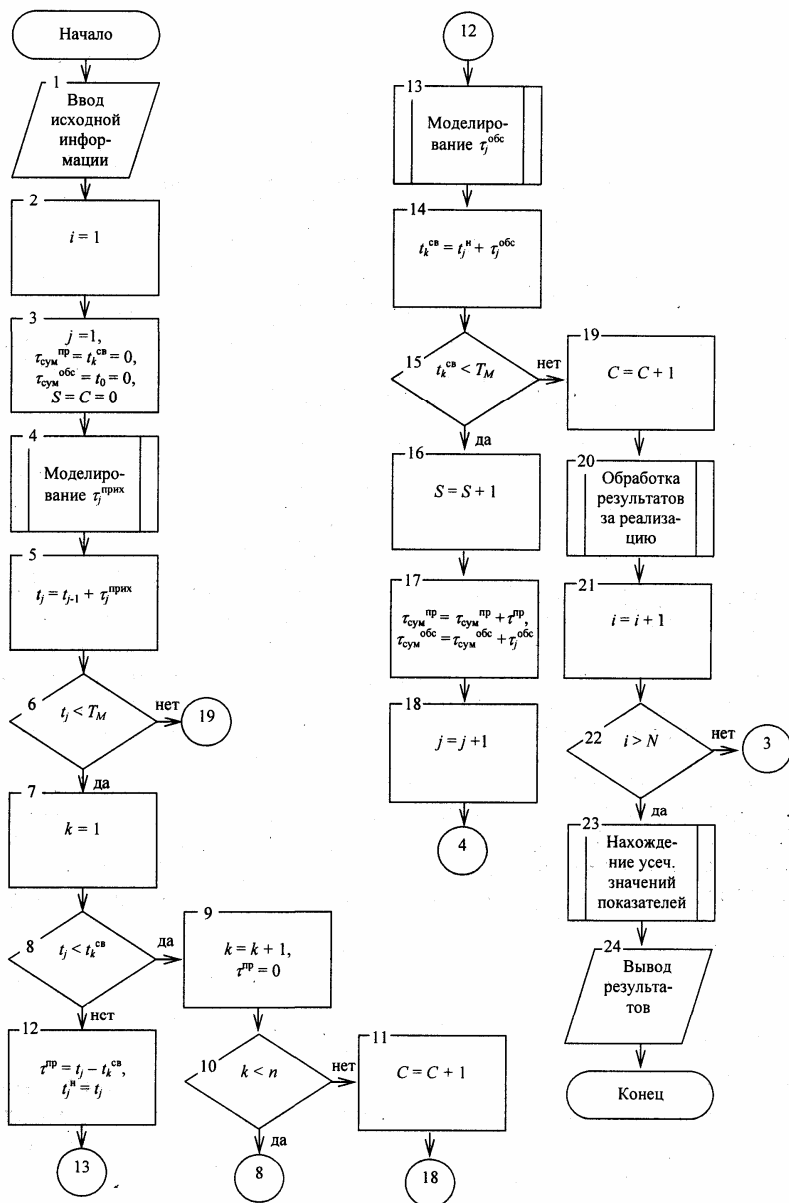


Рис. 6.2. Блок-схема алгоритма моделирования СМО

6.3. Моделирование одноканальной СМО с ожиданием

Пусть на вход системы поступают заявки, образующие ординарный поток однородных событий с заданным законом распределения интервалов между событиями. Длительность обслуживания заявки также является случайной величиной с заданным законом распределения. Если очередная заявка застаёт канал обслуживания занятым, то она ставит в очередь и ожидает освобождения канала.

Процесс функционирования СМО будем рассматривать в интервале времени $[0, T_m]$.

В результате моделирования необходимо получить характеристики качества обслуживания: вероятность ожидания, коэффициент загрузки и простоя канала.

Схема алгоритма, моделирующего заданную СМО, представлена на рис. 6.3. Опишем её функционирование. Оператор 1 осуществляет ввод исходной информации (параметры потока заявок, закона распределения времени обслуживания, количество дней моделирования и др.).

Оператор 2 представляет собой счетчик числа реализаций (прогонов) процесса функционирования системы. Оператор 3 обеспечивает повторение нового прогона путем задания начальных условий для следующей реализации. Операторы 4 и 5 формируют момент поступления очередной заявки

$$t_j = t_{j-1} + \tau_j^{\text{прих}}.$$

С помощью оператора 6 осуществляется проверка, не вышел ли момент поступления заявки t_j за пределы интервала моделирования $t_j < T_m$. Если условие не выполняется, т. е. интервал моделирования исчерпан, следует переходить к обработке результатов моделирования, т. е. к оператору 18. Если же условие выполняется, то оператор 7 выясняет, занят или свободен канал в момент поступления j -й заявки. Если в момент поступления заявки канал занят, т. е. $t_j < t_{j-1}^{\text{св}}$, то управление передается оператору 9, который формирует очередь, время простоя канала равно нулю, подсчитывает фактическое время ожидания заявки и формирует момент начала обслуживания, совпадающий с моментом освобождения канала, т. е. $t_j^{\text{н}} = t_{j-1}^{\text{св}}$.

Вернемся к оператору 7. Если канал обслуживания оказывается свободным в момент прихода заявки, то оператор 8 вычисляет время простоя канала как разницу между моментом прихода заявки и временем освобождения канала от обслуживания предыдущей заявки, т. е. $\tau_j^{\text{пр}} = t_j - t_{j-1}^{\text{св}}$, и формирует момент начала обслуживания, совпадающий с моментом прихода заявки, т. е. $t_j^{\text{н}} = t_j$ и управление передается оператору 10.

Оператор 10 формирует длительность обслуживания заявки $\tau_j^{\text{обс}}$ как случайную величину, подчиненную соответствующему закону

распределения. Оператор 11 вычисляет время освобождения канала от обслуживания данной заявки $t_j^{cb} = t_j^n + \tau_j^{обс}$. Оператор 14 проверяет условие $t_j^{cb} < T_M$. Если это условие выполняется, т. е. время обслуживания заявки не вышло за пределы интервала моделирования, то в операторах 15–17 подсчитывается количество обслуженных заявок, суммарное время простоя канала, суммарное время обслуживания заявок, суммарное время ожидания заявки и осуществляется переход к следующей заявке.

Если условие не выполняется, то управление передается оператору 18 для частной обработки результатов за реализацию.

Частная обработка данных заключается в подготовке некоторых сумм, необходимых для последующего статистического расчета математических ожиданий и вероятностей некоторых величин, выбранных в качестве показателей эффективности СМО.

Суммами являются:

$\sum \tau_j^{пр}$ – суммарная длительность простоя канала за интервал функционирования системы $[0, T_M]$;

$\sum \tau_j^{обс}$ – суммарная длительность работы канала обслуживания;

$\sum \tau_j^{фож}$ – суммарное время ожидания заявки в очереди.

Построенный моделирующий алгоритм позволяет получить следующие показатели:

– среднюю длительность простоя канала $\bar{\tau}^{пр} = \frac{1}{j} \sum \tau_j^{пр}$;

– вероятность простоя канала $P_{прост} = \frac{\tau_{прост}}{T_M}$;

– среднюю длительность загрузки канала $\bar{\tau}^{обс} = \frac{1}{j} \sum \tau_j^{обс}$;

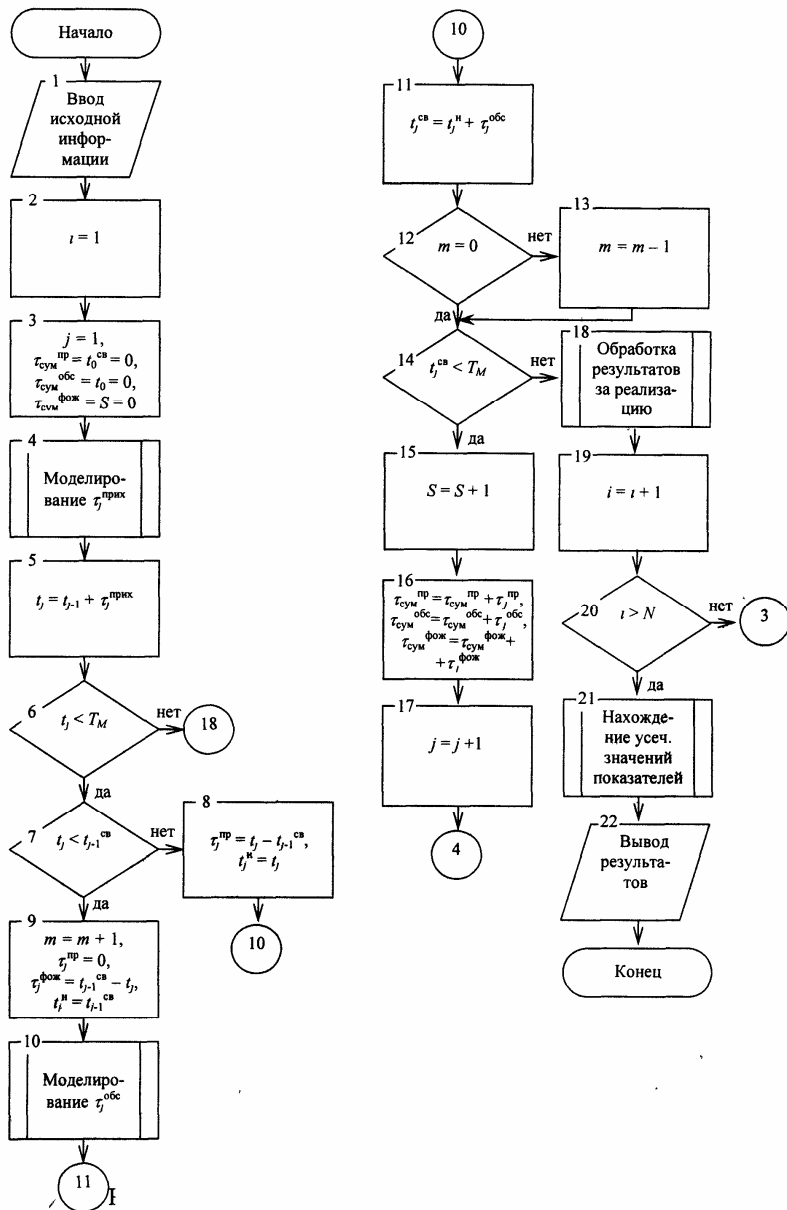
– вероятность загрузки канала $P_{прост} = \frac{\tau_{обс}}{T_M}$;

– среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{\tau}^{ож} = \frac{1}{j} \sum \tau_j^{фож}$;

– вероятность ожидания заявки $P_{ож} = \frac{\tau_{фож}}{T_M}$.

Как известно, для достижения заданной точности полученных оценок необходимо усреднять результаты большого количества реализаций. Операторы 19, 20 обеспечивают выполнение заданного

количества (N) реализаций модели, а оператор 21– вычисление усредненных значений показателей эффективности СМО.



6.3. Блок-схема алгоритма моделирования одноканальной СМО с ожиданием

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гнеденко Г.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
2. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972, 2000.
3. *Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О.* Теория массового обслуживания в экономической сфере. М.: Юнити, 1998.
4. *Кофман А., Крюон Р.* Массовое обслуживание: теория и применения. М.: Мир, 1965.
5. *Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1972.
6. *Саульев В.К.* Математические модели теории массового обслуживания. М.: Статистика, 1979.
7. *Норенков И.П.* Автоматизированное проектирование. М.: МГТУ, 2000.
8. *Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963.
9. *Новиков О.А., Петухов С.И.* Прикладные вопросы теории массового обслуживания. М.: Сов. радио, 1969. 400 с.
10. *Лабскер Л.Г., Михайлова В.П., Серегин Р.А.* Математическое моделирование финансово-экономических ситуаций с применением компьютера (на примере марковских случайных процессов). М.: Фин. акад. при Правительстве РФ, 1997.
11. *Садыхова А.Г., Ким Е.Р.* Модели и методы теории массового обслуживания. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Математические основы информатики». Алматы: КазНТУ, 2003.
12. *Бочаров М.И., Шеремет А.Д.* Теория массового

обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995.

13. *Саати Т.Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения /Пер. с англ. / Под ред. *И.Н. Коваленко*. М.: Сов. радио, 1971.

14. *Розенберг В.Я., Прохоров А.И.* Что такое теория массового обслуживания? М.: Сов. радио, 1965.

15. *Матвеев В.Ф., Ушаков В.Г.* Системы массового обслуживания. М.: МГУ, 1984.

16. Исследование операций в экономике /Под ред. проф. *Н.Ш. Кремера*. М.: ЮНИТИ, 1999.

17. *Кокс Д., Смит У.* Теория очередей. М.: Мир, 1966.

18. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979.

19. *Ким Е.Р.* Модели и методы теории систем. Ч.1. Методические указания к практическим занятиям по дисциплинам «Математические основы теории систем». Алматы: КазНТУ, 2005.

20. *Шукаев Д.Н., Ким Е.Р., Исмаилов Ж.И., Туkenова Л.С.* Имитационные модели процессов проектирования открытых горных работ //Мат. I Межд. науч. практ. конф. «Информатизация общества». Астана: ЕНУ им. Л. Гумилева, 2004. С. 194–195.

21. *Шукаев Д.Н., Ким Е.Р., Исмаилов Ж.И., Муханова Г.С.* Информационные модели принятия решений на железнодорожном транспорте //Вестн. ЕНУ. 2004. № 3. С. 229–233.

22. *Ким Е.Р., Шукаев Д.Н., Исмаилов Ж.И.* Компьютерный анализ моделей размещения на чувствительность //Тр. Университета, 2004. № 3. С. 48–51.

23. *Шукаев Д.Н., Ким Е.Р., Муханова Г.С., Исмаилов Ж.И., Косова Е.Г.* Имитационные модели железнодорожных перевозок //Вестн. КазНТУ. 2005. № 1. С. 158–163.

24. *Шукаев Д.Н., Ким Е.Р., Исмаилов Ж.И., Косова Е.Г.* Имитационная модель выемочно-погрузочного процесса на горном карьере //Вестник КазГАСА. 2005. № 1 (15). С. 137–146.

25. *Садыкова А.Г., Ким Е.Р.* Силлабус и УМК по дисциплине «Математические основы информатики». Алматы: КазНТУ, 2006. 99 с.

26. *Ким Е.Р., Таг Д.В.* Имитационная модель транспортировки руды на горном карьере //Тр. Межд. конф. «Автоматизация и управление. Перспективы, проблемы и решения». Алматы: КазНТУ, 2007. С. 424–426.

27. *Шукаев Д.Н.* Анализ и моделирование информационных процессов и систем. Алматы: КазНТУ, 2005.

Учебное издание

Ким Екатерина Романовна

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

Учебное пособие

Зав. РО
Редактор
Техн. редактор
Компьютерный набор
и верстка

*А. Губайдуллина
Э.З. Миргиястинова
Ж.Н. Байменова
Л.Т. Касжанова*

Подписано в печать 14. 10. 2008 г.
Формат 60х84/16. Бумага ксероксная. Усл. п. л. 7,25
Уч.изд.л.7,4. Тираж 500 экз. Заказ № 278. Цена договорная

Издание Казахского национального технического университета
им. К.И. Сатпаева
Научно-технический издательский центр КазНТУ.

Алматы, ул. Ладыгина, 32