



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный технический университет
имени К.И. Сатпаева

Л.Ш. Балгабаева

**ОПЕРАЦИЯЛАРДЫ
З Е Р Т Т Е У
Н Е Г І З Д Е Р І**

Л.Ш. Балғабаева

ОПЕРАЦИЯЛАРДЫ ЗЕРТТЕУ НЕГІЗДЕРІ

Алматы 2008

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ
МИНИСТРЛІГІ

Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті

Л.Ш. Балғабаева

ОПЕРАЦИЯЛАРДЫ ЗЕРТТЕУ НЕГІЗДЕРІ

Республикалық оқу- әдістемелік бірлестігі
оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2008

ЖОК 519.8

ББК 22.18. я 73

Б 22

Б 22 Балғабаева Л.Ш. Операцияларды зерттеу негіздері: Оқу құралы.- Алматы: ҚазҰТУ, 2008. - 122 б.
ISBN 978-601-228-004-3

Оқу құралы мамандардың жұмыс жоспары мен осы пәннің жұмыс бағдарламасына және маманның дәрежелік сипаттамасына қойылған талаптарына негізделіп құрастырылған.

Бұл оқу құралы 050704- Есептеуіш техника және программалық қамтама, 050703-Ақпараттық жүйелер (қолдану салалары бойынша) мамандықтарының студенттеріне арналған.

Кесте – 55. Әдебиеттер тізімі –17 атау.

ББК 22.18. я 73

Пікір жазғандар: *Тлебаев Қ.К.* - Қайнар университеті
"Информатика" факультетінің деканы, физ.-
мат. ғыл. канд., доцент ;
Хисаров Б.Ж. – АЭЖБИ "Инженерлік
кибернетика" кафедрасының меңгерушісі,
техн. ғыл. канд, профессор;
Өскенбаева Р.К. - Қ.И. Сәтбаев атындағы
ҚазҰТУ "ПОС және С" кафедрасының
меңгерушісі, техн. ғыл. докторы, доцент.

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2008 жылғы жоспары бойынша басылады

ISBN 978-601-228-004-3

© Л.Ш. Балғабаева, 2008

© ҚазҰТУ, 2008

КІРІСПЕ

Халық шаруашылығын ұйымдастыру кезінде көптеген мәселелер туындайды: өнім санын оптималдандыру, бұйым сапасын оптималдандыру, қаржы бөлу, жабдықтардың типтік өлшемдерін оптималдандыру, т.с.с. Осындай мәселелерді шешу үшін математикалық модельдер мен әдістер қолданған жөн. Математикалық модель көмегімен қойылған мәселені болжауға және есептеуге болады.

Осы оқу құралында оптималды басқарудың теориялық мәселелері берілген. Оқу құралының мақсаты автоматтандырылған басқару жүйелерінің жұмыс барысында зерттеудің модельдері мен әдістерін игеруге, жүйенің немесе зерттелетін операцияның моделін құруды, зерттеу есебін қоюды және математикалық әдістерді қолдануды үйрету болып табылады.

Математикалық бағдарламалаудың түрлері көп. Құралда математикалық бағдарламалау түсінігі келтіріліп, сыныптау түрлері көрсетілген.

Келесі математикалық бағдарламалау есептері қарастырылған: сызықтық, бейсызықтық, дискретті, динамикалық, тораптық, транспорт, коммивояжер есебі және ойындар теориясы. Операцияларды зерттеудің негізгі кезеңдері мен принциптері келтірілген. Сызықтық бағдарламалау есептерінің келесі түрлері қарастырылған: өнім шығарудың оптималды жоспары, металл өнімдерін тасымалдау, диета туралы, үлестіру есебі. Осы есептерге математикалық модель құру ережесі келтірілген.

Әрбір математикалық бағдарламалау есептерін шешетін әдістер тобы қарастырылған. Математикалық әдістер алгоритмдері мазмұнды берілген.

Сызықтық бағдарламалау есептерін шығаратын келесі әдістердің алгоритмдері қарастырылған: графикалық әдіс, тіке симплекс әдісі, қос мағыналы симплекс әдісі. Транспорт есебін шығаруға потенциалдар әдісі, дискретті есептерге Гоморидің кесіп түсіру әдісі және Ленд-Дойг әдісі, коммивояжер есебін шығаруға Литтл әдісі келтірілген.

Бейсызықтық бағдарламалау есептерінің келесі түрлері қарастырылған: бірөлшемді, шартсыз көпөлшемді, шартты көпөлшемді. Бейсызықтық бағдарламалау есептеріне келесі шешу әдістері келтірілген: алтын қиық, циклдік әрбір координата бойынша құлдылау, барынша тез құлдылау, Франк- Вульф, Ньютон- Рабсон.

Барлық математикалық әдістер мысалдармен сүйемелденген. Оның үстіне оқу құралында көптеген қосымша тапсырмалар келтірілген.

Сондай-ақ, оқу құралы пәннің әдістемесін, тәжірибе үшін мәнін, даму болашағын, жүйенің немесе онымен орындалатын операциялардың моделін құруды, зерттеу есептерін қоюды, математикалық әдістерді қолдануды және ізделінді нәтижелерді алу үшін есептеу әдістерін, көрсетілген нәтижелерді талдауды, кейбір операцияларды бір бүтін ретінде зерттеуге баулуды, басқарылатын операциялар шешімінің тиімділігін алдын ала сандық түрде негіздеуді үйретеді.

1. ОПЕРАЦИЯЛАРДЫ ЗЕРТТЕУ НЕГІЗДЕРІНІҢ МЕТОДОЛОГИЯСЫ

1.1 Негізгі анықтамалар мен түсініктемелер

Операция дегеніміз белгілі мақсатқа жеткізетін нақты ниетпен біріктірілген шаралар жиынтығы. Операциялар басқарылатын және басқарылмайтын болады. Біз тек басқарылатын операцияларды зерттейміз.

А. В. Канторович анықтамасы:

Операцияларды зерттеу (ОЗ) дегеніміз автоматтандырылған басқару жүйелеріндегі басқару есептерін шешуге қолданылатын ғылыми тәсіл.

Операцияларды зерттеу термині екінші дүниежүзілік соғыс кезінде пайда болды. Сол кезде ол пәннің мазмұнына толығымен сәйкес келетін еді, яғни ОЗ термині ретінде әскери операцияларды басқаруда қолданылатын математикалық әдістер деп түсінетін. Операцияларды зерттеу әдістері кейінірек басқа да салаларда қолданыла бастады, бірақ пәннің атауы осы күнге дейін сақталған (Англияда- “Операциялық зерттеу”, АҚШ-та-“Басқару туралы ғылым”, ал бізде – “ Операцияларды зерттеу ”).

Операцияларды зерттеуді ұжымдық басқарудың есептерін шешуге ғылыми тұрғыдан қарастыру деп сипаттауға болады. Операция дегеніміз – бірыңғай оймен біріктірілген және белгілі бір мақсатқа жетуге бағытталған іс-шаралардың жиынтығы.

Шешім деп – бастапқы параметрлерден тәуелді болатын кез келген тандауды айтамыз. Оптималды шешім дегеніміз – кез келген белгілері бойынша басқаларының арасындағы ең тиімді шешім.

Курс мақсаты: шешімнің оптималдылығын алдын-ала сандық негіздеу, бірақ шешімді қабылдау үшін (іске асыру) ол шешім қабылдаушы қызметкердің көңілінен шығатын болу керек.

Кез келген модельдің негізінде ақпараттық процестер жатады, себебі модельді құрудың өзі нақты объект туралы ақпараттардан тұрады. Операцияларды басқаруда шешім қабылдау үшін математикалық модельді қолдану керек. Сол математикалық модельге сандық әдісті қолданып, оптималды шешім табылады, содан соң шешім талдауға жатады. Шешім қабылдайтын қызметкер көмегімен кіріс және шығыс мәліметтер алынған нәтижелердің толықтығы мен дұрыстығы талданады. Талдаудан кейін қорытындылар шығарылады да, олар ұсыныс түрінде беріледі. Егер алынған шешім мен ұсыныстар шешім қабылдаушы қызметкердің көңілінен шығатын болса, онда олар іске асырылады.

1.2 Операцияларды зерттеудің негізгі кезеңдері

Кезең №	Операцияларды зерттеу кезеңдерінің аты-жөні	Қажетті мамандар	АБЖ-ны жобалау кезеңдері
1- кезең	Операцияларды (басқарылатын жүйелерді) жүйелеп талдау	Жоспарлаушы (технолог), операцияны зерттеуші	Басқарылатын дүниені жобалауға дейінгі зерттеулер
2- кезең	Операцияларды басқару есептерін мазмұндау және операцияның қарапайым бөлшектерін бөліп шығару	Жоспарлаушы (технолог), операцияны зерттеуші	Басқарылатын дүниені жобалауға дейінгі зерттеулер
3- кезең	Болжамдар жасау (жорамал құрастыру)	Жоспарлаушы (технолог), операцияны зерттеуші	Басқарылатын дүниені жобалауға дейінгі зерттеулер
4- кезең	Математикалық модельді жасау	Операцияны зерттеуші, математика маманы	Техникалық жобалау
5- кезең	Басқару есептерін шешетін әдісті таңдау	Операцияны зерттеуші, математика маманы	Техникалық жобалау
6- кезең	Алгоритмді жүзеге асыратын программа құрастыру және оны жөнге келтіру	Жүйелеуші программа маманы, операцияны зерттеуші	Жұмыс жобалау
7- кезең	Есепті шешу және шешімдерді талдау	Жоспарлаушы, операцияны зерттеуші	Өндірістік-тәжірибелік жағдайда іске кірісу
8- кезең	Есептің шешімдерін іс жүзінде қолдану	Алдыңғы кезеңдердегі барлық мамандар	Өндіріске енгізу

1-кезең. Операцияны жүйелеп талдау. Бұл кезеңдегі жұмыстарды технолог пен операцияны зерттеуші бірігіп жасайды. Жоспарлаушы мен технологтің рөлі жоғары. Операцияны бөліктерге бөліп, осы бөліктерді жеке-жеке зерттеу, талдау жүргізу және осы бөліктердің өзара бірігіп әрекеттесуін талдау қажет. Мәліметтер көздерін табу, АБЖ кезінде ақпарат желісін тұрғызып, керекті мәліметтерді табуға және талдауға ЭЕМ қолдану керек. Осы кезеңде операцияға әсер ететін барлық қозғаушы күштерді тиянақтап табу және осы операцияны зерттегендегі қорытындыны өмірдегі қандай құбылыстарға қолдануға

болатындығын, тиімділікті салыстыратын белгілерді анықтау жұмыстары жасалады.

2-кезең. Операцияны басқару есептерін мазмұндау және операцияның қарапайым бөлшектерін бөліп шығару. Бұл кезеңдегі жұмыстарды технолог пен операцияны зерттеуші бірігіп жасайды. Операцияны талдау нәтижелерін мазмұндау және суреттеу керек. Операцияның мазмұндалған бейнесі математикалық модельдерді тұрғызуға жеткілікті болу шарт. Бұл мазмұндалған бейнеде:

1. операцияның қозғаушы күшінің тізбегі болу керек. Олар математикалық модельдерде ескерілу қажет;

2. осы қозғаушы күштердің өзара әрекеттесуінің шамасы (сипаты) болу керек;

3. осы операция бөлшектерінің бүтін операциядағы орны көрсетілуі керек.

Операцияның қарапайым бөлшектерін немесе актілерін бөліп шығару аралық кезең болып есептеледі. Бұл кезең күрделі операцияны зерттегенде қолданылады. Операциядағы негізгі қозғаушы күштерді бөліп шығару керек. Бұл қозғаушы күштер төртінші кезеңде математикалық өрнектермен яғни формулалармен өрнектеледі.

3-кезең. Болжамдар жасау. Бұл кезеңдегі жұмыстарды технолог пен операцияны зерттеуші бірігіп жасайды. Болжам берілген есепті ықшамдауға, қарапайым түрге келтіруге көмектеседі. Болжам тексерілетіндей болуы шарт. Болжам тексерілетін операцияның турасындағы жетіспейтін мәліметтерінің орнын толтыру керек. Бұл мәліметтер тәжірибе жолымен тексерілуі шарт. Болжамдарды құрастырған кездегі жіберілетін кейбір қателер: нәтиже орнының ауысуы, негізсіз қарапайым болжамдарды қабылдау, кездейсоқ шашыраңқы факторды шындық ретінде қабылдау.

Жиі кездесетін болжамдар мынандай: сызықтық, дөңес, адекваттік.

4-кезең. Математикалық модельді құру.

Операцияны зерттеу үшін іс жүзінде қолданбалы математика маманы мен операцияны зерттеуші бірігіп жұмыс жасайды.

Модель – ақиқатты нақты белгілеу. Модель көмегімен есептеуге және болжауға болады. Математикалық модельді тұрғызу үшін тәуелсіз және тәуелді айнымалыларды енгізеді.

Тәуелсіз айнымалылар – есептің негізгі шешімдерін табуға қолданылады. Олар тиімділік айнымалымен, қозғаушы күштермен

байланысты. Математикалық модель мақсатты функция мен шектеулерден тұрады.

Мақсатты функция деп максимальды немесе минимальды мәнін істейтін функцияны айтады.

Шектеулер – ол тәуелсіз айнымалылар жиынтығының дәлдік шегін анықтайтын теңдеулер жүйесі.

5-кезең. Басқару есептерін шешетін әдісті таңдау. Бұл кезеңдегі жұмыстарды операцияны зерттеуші мен математика маманы бірігіп жасайды. Математикалық модельдерді келесі белгілермен жіктеуге болады:

1) айнымалылардың саны бойынша бір өлшемді және көп өлшемді оптималдандыру есептеріне бөлінеді;

2) шектеулерге байланысты шартты және шартсыз есептерге бөлінеді;

3) тәуелсіз айнымалылардың уақыттан функция болу болмауына байланысты статикалық немесе динамикалық оптималдандыру есептеріне бөлінеді;

4) ескерілетін ақпараттың дәрежелері бойынша детерминдік және стохастикалық оптималдандыру есептеріне бөлінеді, т.б.

Математикалық модельді жасаған соң мақсатты функциялар мен шектеулердің түрі бойынша қарастырған есепті қандай математикалық бағдарламалау есептеріне жататынын қарастыру керек:

1. сызықтық бағдарламалау есептеріне, егер мақсатты функция мен шектеулер сызықты түрде болса және тәуелсіз айнымалылар мәндер жиынынан шекті мәндер қабылдаса;

2. бейсызықты бағдарламалау есептеріне, егер мақсатты функция немесе шектеулер бейсызықты түрде берілсе;

3. дискретті бағдарламалау есептеріне, егер мақсатты функция мен шектеулер сызықты түрде болса, бірақ тәуелсіз айнымалылар мәндер жиынынан тек дискретті мәндер қабылдаса;

4. динамикалық бағдарламалау есептеріне, егер тәуелсіз айнымалылар кейбір параметрден (уақыт, кадам, кезең, т.б.) функция болса;

5. ойындар теориясына – егер шешім активті немесе пассивті қарсы әрекет жағдайында қабылданса;

6. стохастикалық бағдарламалау есептеріне, егер тәуелсіз айнымалылардың бастапқы мәндері немесе мақсаты функцияның коэффициенттері толығымен белгісіз болса, т.б.

Сондықтан, қарастырып отырған есеп қандай математикалық бағдарламалау есептеріне келетінін қарап, есепті шешетін әдістер тобын табамыз. Топ шінде нақты шешім әдісін табу – ол есептеу алгоритмінің тиімділігіне байланысты жүзеге асырылады.

Оптималдандырудың барлық таңдалған сандық әдістері есептеу алгоритміне дейін нақтыланады.

Алгоритм дегеніміз – есептің шешімін табу үшін оның берілген шарттарын қалай, қандай кезекпен қолдану керектігіне нұсқаулар, дәл анықталған іс - әрекеттер ережесі.

Алгоритмнің сипаттамалары мынандай:

1. детерминдік – есептеу кезеңдерінде берілген шарттар бойынша біржақты шешім алу;
2. есептеу процесінің дискреттілігі – орындалуы күдік туғызбайтын бөліктелген алгоритм қадамдары;
3. жалпылық – әртүрлі берілген шарттар бойынша біртүрлі берілген есептерге алгоритм қолдану мүмкіндігі.

6-кезең. Алгоритмдерді жүзеге асыратын программа құру және оны жөнге келтіру. Бұл кезеңдегі жұмыстарды операцияны зерттеуші мен программа маманы бірігіп жасайды. Программалық процесс келесі кезеңдерден тұрады:

- 1) есептеу алгоритмінің блок–схемасы бойынша программаның детальдік блок – схемасын тұрғызу;
- 2) программа тілін таңдау;
- 3) программа құру;
- 4) шешуі белгілі (тестік) есептер қолдана отырып, программаны тексеру және оған керекті түзетулер енгізу;
- 5) берілген шарттардың өлшем функциясы ретінде есептеу алгоритмінің бір циклдік жұмысына машина уақытының шығынын бағалау;
- 6) кіріс және шығыс мәліметтерін белгілі бір формада дайындау.

7-кезең. Есепті шешу және шешімдерді талдау. Бұл кезеңдегі жұмыстарды операцияны зерттеуші мен жоспарлаушы бірігіп жасайды.

Бұл кезеңде бастапқы мәліметтер жөнге келтіріледі. Есеп ЭЕМ арқылы шешіледі. Есептің шешімін кесте немесе график түрінде алуға болады. Содан соң шешім талдауға жатады. Шешім қабылдайтын қызметкер көмегімен кіріс және шығыс мәліметтері, алынған нәтижелердің толықтығы мен дұрыстығы талданады. Талдаудан кейін қорытындылар шығарылады да, олар ұсыныс түрінде беріледі. Егер алынған шешім мен ұсыныстар шешім қабылдаушы қызметкердің көңілінен шығатын болса, онда олар іске асырылады. Қарсы болған жағдайда модельді одан әрі жетілдіру, мазмұнды есептің формуласын өзгерту, операцияларды талдауды толықтыру, т.с.с. жұмыстар атқарылады. Былайша айтқанда, операцияларды зерттеудің кез келген алдыңғы кезеңіне көшеміз.

1.3 Операцияларды зерттеудің негізгі принциптері

1. Операцияны зерттейтін топ құрамына әртүрлі мамандар енгізу принципінің себебі көптеген басқарылатын дүниелерді әртүрлі көзқараспен зерттеу керек. Алдын-ала қай тәсіл тиімді екенін білмейміз, сол үшін әртүрлі саладағы мамандар керек. Бір адам әртүрлі салада білімді маман болуы мүмкін емес. Сол үшін оның жетекшісі жүйелеуші маман болуы керек. Ол адамға ерекше талаптар қойылады, олар: терең білімді, ой - өрісі кең, зерделі, жұмысқа жеке мамандарды жұмылдыра алатын қабілеті болуы және топтың жұмысын ойдағыдай атқара білетін болуы керек.

2. Математикалық модельдеу принципі.

Операцияны басқарғанда шешім қабылдау үшін математикалық модельді қолдану.

3. Оптималдық принцип.

Шешім қабылдағанда бізге кез келген шешім керек емес, керегі тиімді шешім қабылдау. Тиімділікті салыстыру үшін белгі (критерий) болу керек.

4. Іс жүзінде қолдану принципі.

Кез келген операцияны зерттеудің негізгі бағыты өндіріске енгізуге арналуы керек. Жәй зерттеумен шектелмеуі тиіс.

5. Үйлестік (ұқсастық) принципі.

Жаңа есепті ұқсасты есепке келтіру.

6. Декомпозиция (бөлшектеу) принципі.

Күрделі операцияларды зерттеуде қолданылады.

Мысалы, басқару теориясы негіздерінде жүйені бақылану мен басқарылуға тексерген кезде 3×3 , 2×2 матрицаларымен шығарамыз. Ал, егерде 7×7 , 9×9 , 5×5 матрицалары келетін болса оларды бөлшектеп алып, жеке-жеке есептеп содан соң барып, біріктіріп нәтижесін шығарамыз.

7. Жүйелеу тәсілі принципінің негізгі операцияға әсер ететін барлық негізгі қозғаушы күштерін ескеріп, операция бөліктерінің өзара қарым - қатынасын анықтап және операцияны жалпы бағалайды.

8. Агрегаттау (іріктеу) принципі.

Күрделі есеп шығару мен күрделі операцияларды зерттеуге қолданады.

1.4 Оптималдандыру әдістерінің жалпы схемасы

Әрбір әдіс есептеу алгоритміне дейін нақтыланады. Әрбір алгоритм іс - әрекеттер ережесін ұсынады. Сол ережелер бойынша

$\bar{x}^{(k)}$ нүктесі (шешімі) анықталады, оны зерттеумен $\bar{x}^{(k+1)}$ шешімі

табылады. Оптималды $\overrightarrow{X^*}$ нүктені (шешімді) табу үшін алгоритмнің әрбір қадамы $\overrightarrow{S^{(k)}}$, λ_k туралы ақпарат береді.

Алгоритм :

1-қадам. Бастапқы (немесе алғашқы) шешімдерді анықтау.

$$\overrightarrow{X^{(p) \in X}}, k \neq \phi$$

$$X = \{x \mid y = F(x, a, a_0)\},$$

$$Z = f(x, p) \longrightarrow \max(\min)$$

2-қадам. Тексеру: Кезекті нүкте оптималды ма?

$$\overrightarrow{X^{(k)}} = \overrightarrow{X^*} = ?$$

Иә деген жауап болса, онда берілген есептің шешімі табылады.

Жоқ деген жауап болса, онда келесі үшінші қадамға көшу.

3-қадам. Қозғалыс бағытын анықтау.

$$\overrightarrow{S(k) / X(k)} = ?$$

Қозғалыс бағыты мақсатты функция мәнінің жақсаруын көрсетеді.

4-қадам. Қозғалыс қадамын анықтау:

$$\lambda_k : f(\overrightarrow{x^{(k)}} + \lambda_k \overrightarrow{S^{(k)}}) \xrightarrow{\lambda_k} \max(\min)$$

5-қадам. Жаңа нүктенің координаталарын анықтау.

$$\overrightarrow{X^{(k+1)}} = \overrightarrow{X^{(k)}} + \lambda_k \overrightarrow{S^{(k)}}, k = k + 1 \text{ және екінші қадамға көшу.}$$

Тіректі және оптималды шешім анықтауға байланысты тіке, қос мағыналы және аралас оптималдандыру әдістерін ажыратады.

Тіке әдістерде (схемасы жоғарыда берілген) алдымен кезекті нүкте (шешім) анықталады. Егер ол оптималды болмаса, онда келесі тіректі шешімге көшу керек. Мақсатты функцияның мәнін жақсартпағанда, бұл оптималдау процесі жалғаса береді.

Қос мағыналы әдістерде алдымен оптималды нүкте (шешім) табылады. Содан соң ол есептің мүмкін шешу саласында жататыны тексеріледі. Егер нүкте (шешім) мүмкін шешу саласында жатпаса, онда шешу саласына жақындатып және оптималдылықты жоғалтпай келесі нүктені табу керек.

Аралас әдістерде алдыңғы екі әдіс қолданылады. Оптималды шешімге (нүктеге) екі жақтан жақындайды. Екі мақсаттық функция мәндерінің айырмасы тым аз болған кезде, есептеуді тоқтатады да, тіке әдіспен алынған шешім сол есептің шешімі болып саналады.

2. ТИПТІК ЕСЕПТЕР

2.1 Қоспаның ең жақсы құрамын анықтау (диета туралы)

Мал шаруашылығында малға тәулікте берілетін жем құрамы жоспарланады. Жем құрамында белгілі бір қоректі заттар болуы тиіс. Жем бірлігінің бағасы белгілі. Жем түрлерін таңдаған сәтте олардың жалпы бағасы минимальды болатындай және қоректі заттар қажетті мөлшерде болуы тиіс.

Негізгі белгілеулер:

$n (j = \overline{1, n})$ – жем түрлері;

$m (i = \overline{1, m})$ – қоректі заттар саны;

a_{ij} – j -ші жемнің бірлігіндегі i -ші заттың бірлігі;

b_i – тәуліктегі қоректі заттың қажеттілігі;

C_j – j -ші жем бірлігінің бағасы;

x_j – жем түрлерінің мөлшері.

Қарапайым актілер:

1) Жем түрлерінің жалпы бағасын минималдау.

2) Тәулікте қоректі заттар мөлшерін қанағаттандыру.

Есептің математикалық моделі:

$$z = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \min ,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i ,$$

$$x_j \geq 0, i = \overline{1, m} .$$

2.2 Өнім шығарудың оптималды жоспары

Кәсіпорын n түрлі өнім шығарады ($j = \overline{1, n}$). a_{ij} – арқылы j -ші өнім бірлігіне жұмсалатын i -ші шикізат бірлігін; b_i ($i = \overline{1, m}$) арқылы – i -ші шикізаттың толық көлемін; C_j арқылы – j -ші өнімнен кәсіпорын

алатын пайданы; a_j, A_j арқылы алдын ала белгіленген шығарылатын өнімнің төменгі және жоғарғы шегін белгілейміз.

Шикізат көлемі бойынша технологиялық іске асыратын, шығарылатын өнімнің көлемін қанағаттандыратын және де кәсіпорынға үлкен пайда әкелетін өнім шығаратын жоспардың тиімділігін анықтау.

Тәуелсіз айнымалылар:

$x_j, j = \overline{1, n}$ – шығарылатын өнім көлемі

Қарапайым актілер:

- 1) Кәсіпорын пайдасын максималдау.
- 2) Шығарылатын өнім көлемін қанағаттандыру.
- 3) Шикізат көлемінің шектілігін ескеру.

Есептің математикалық моделі:

$$\left. \begin{aligned} z &= \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \max, \\ a_j &\leq x_j \leq A_j, j = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \right\}$$

2.3 Металл өнімдерін тасымалдауды жоспарлау есебі (транспорт есебі)

Өндірістік қуаттары a_i – ге тең бірыңғай металл өнім шығаратын металлургия зауытының жеткізушілері m қалада орналасқан. Ал n қалада тұтынатын көлемі b_j – ға тең металл өнімдерін тұтынушылар бар. Бұл қалалар темір жол желілерімен байланысқан және қалалардың өзара қашықтықтары берілген a_{ij} , k – жүк бірлігінің арақашықтық бірлігіне тасымалдау құны, $k = \left[\frac{mn}{T \cdot км} \right]$.

Материалдық-техникалық жабдықтау басқармасына транспорт шығындары минимальды болатындай етіп, тұтынушыларды жеткізіп берушілерге бекіту керек.

Келесі белгілеулерді енгізейік:

$$C_{ij} = k \cdot a_{ij} \left[\frac{mn}{T} \right] \text{ тасымалдау құны.}$$

Тәуелсіз айнымалылар: x_{ij} – тасымалданатын металл өнімдерінің көлемі.

Қарапайым актілер:

- 1) Транспорт шығындарын минималдау.
- 2) Тұтынушылардың сұраныстарын толық қамтамасыз ету.
- 3) Өндіріс қуаттарының шектілігін ескеру.

Есептің математикалық моделі:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \rightarrow \min$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m X_{ij} &\geq b_j, j = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^n X_{ij} &\leq a_i, i = \overline{1, m} \end{aligned} \right\},$$

$$X_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

2.4 Белгілеу (үлестіру) туралы есеп

n механизмдерді үлестіру туралы есепте әрбір механизм тек бірден бір жұмысты орындайтын етіп және әрбір механизмнің берілген өнімділігі бойынша әрбір жеке жұмыстың жалпы тиімділігі максимальды болатындай етіп, n жұмысқа бөлу керек.

Белгілеулер:

a_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ - i -ші механизмнің j -ші жұмыстағы өнімділігі,

x_{ij} - i -ші механизмді j -ші жұмысқа белгілеу.

Қарапайым актілер:

- 1) Процесс тиімділігін максималдау.
- 2) Бір механизм бір жұмысты орындайды.
- 3) Бір жұмыс тек бір механизммен орындалу керек.

Есептің математикалық моделі:

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \rightarrow \max,$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, i = \overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, j = \overline{1, n} \end{aligned} \right\},$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер } i \text{ механизм } j\text{-жұмысқа белгіленген болса,} \\ 0, & \text{егер } i \text{ механизм } j\text{-жұмысқа белгіленбеген болса.} \end{cases}$$

2.5 Типтік есептерге мысалдар

2.5.1-мысал.

Мекемеде өндірілетін тауарлардың төрт түрінің кез келгенін өндіруге қажет шикізат, жұмыс күші және құрал-жабдық ресурстары бар. Берілген тауар бірлігін дайындауға жұмсалатын ресурстар шығыны, мекеме алатын таза пайда және де ресурстар көлемі кестеде көрсетілген:

Тауар түрі \ Ресурстар түрі	1	2	3	4	Ресурс көлемі
Шикізат, кг	3	2	1	4	40
Жұмыс күші, адам	20	10	15	16	100
Жабдық, станок-адам	8	2	4	10	56
Пайда, тенге	25	20	40	36	

Пайда максимальды болу үшін тауардың қандай ассортиментін шығару керек?

Шешімі:

Тәуелсіз айнымалылар енгізейік:

x_1, x_2, x_3, x_4 - тауар ассортименті (түрі).

Есептің математикалық моделі:

$$z = 25x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 36x_4 \rightarrow \max,$$

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &\leq 40 \\ 20x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 16x_4 &\leq 100 \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 10x_4 &\leq 56 \end{aligned} \right\},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

2.5.2-мысал. “Араласпалар” туралы есеп.

Мұнай өңдеу зауыты төрт жартылай фабрикат алады: 400 мың литр алкилат, 250 мың литр крекинг-бензин, 350 мың литр тура айдау жолымен алынатын бензин және 100 мың литр изопентан. Әртүрлі пропорциямен осы төрт жарты фабрикатты араластыру нәтижесінде үш сорт авиабензин түзеледі:

А бензині: 2:3:5:2

В бензині: 3:1:2:1

С бензині: 2:2:1:3

Көрсетілген бензин сорттары, оның 1 мың литрінің бағасы 120, 100 және 150 теңге сәйкес. Компоненттерді максимальды пайдаланатын жағдайда барлық өнімнің бағасы максимальды дәрежеге жететіндей компоненттерді араластырудың оптималды жоспарын анықтау қажет.

Тәуелсіз айнымалылар енгізейік:

x_1, x_2, x_3 – А, В, С бензин түрлерін шығару жоспары.

Есептің математикалық моделі:

$$z = 120x_1 + 100x_2 + 150x_3 \rightarrow \max,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{12}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{2}{8}x_3 &\leq 400 \\ \frac{3}{12}x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{2}{8}x_3 &\leq 250 \\ \frac{5}{12}x_1 + \frac{2}{7}x_2 + \frac{1}{8}x_3 &\leq 350 \\ \frac{2}{12}x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{3}{8}x_3 &\leq 100 \end{aligned} \right\},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

2.5.3-мысал. Егіс алаңдарын бөлу.

Совхоз өлшемдері 5000, 8000 және 9000 га үш жер массивін қара бидай, бидай және жүгері егісіне берді. Массивтердің егін түсімі кестеде көрсетілген. Бір ц қара бидайға совхоз 2 тг, бір ц бидайға – 2,5 тг, бір ц жүгеріге – 1,4 тг таза пайда алады.

Егер жоспар бойынша совхоз кем дегенде 1900 т қара бидай, 15800 т бидай және 30000 т жүгері өткізу керек болса, онда максимальды таза пайда алу үшін совхоз әрбір егістік үшін қандай массивтер және қанша га бөлу керек?

Егістік	Массивтердің егін түсімі, ц/га		
	I	II	III
қара бидай	12	14	15
бидай	14	15	22
жүгері	30	35	25

$$\begin{aligned}
 &x_{11}, x_{12}, x_{13} - \text{қара бидай (ц) I, II, III массивтерде егілсе,} \\
 &x_{21}, x_{22}, x_{23} - \text{бидай (ц) I, II, III массивтерде егілсе,} \\
 &x_{31}, x_{32}, x_{33} - \text{жүгері (ц) I, II, III массивтерде егілсе.} \\
 &2(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 2,5(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 1,4(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \rightarrow \max, \\
 &x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 5000 \\
 &x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 8000 \\
 &x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 9000
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &12x_{11} + 14x_{12} + 15x_{13} \geq 19000 \\
 &14x_{21} + 15x_{22} + 22x_{23} \geq 158000 \\
 &30x_{31} + 35x_{32} + 25x_{33} \geq 300000
 \end{aligned}$$

2.5.4-мысал. Стандартты программалар жиынтығын таңдау.

АБЖ қосалқы жүйесінің программа–математикалық қамтамасын жобалау кезінде стандартты программалар жиынтығын таңдау туралы келесі есеп пайда болды. Қосалқы жүйе құрамына екі есеп кіреді.

P_{ij} – еске сақтау орны ұяшықтарының қажетті саны алғашқы берілгендерімен бірге және t_{ij} – есептеу уақытымен (i – есеп индексі, j – астыңғы программа жүйесі) мінезделетін бұл есептерді шешуге керек бірнеше қосалқы программалар бар. Егер бір есепті шешуге тек бір ғана стандартты программа таңдап алынатыны және таңдап алынған қосалқы программалар ұзындықтарының жалпы сомасы еске сақтау орны ұяшықтарының санынан $b=250$ аспайтыны, ал олардың есептеу уақытының сомасы минимальды екені белгілі болса, онда АБЖ программа–математикалық қамтамасына қандай қосалқы программалар қосылатынын анықтау қажет.

P_{ij} / t_{ij}	I	II	III
	50/15	25/40	100/10
	110/30	150/20	160/10

Келесі тәуелсіз айнымалыларды енгізейік:

X_{11} – бірінші есепті шешуге бірінші программа таңдалсын,

X_{12} – бірінші есепті шешуге екінші программа таңдалсын,

X_{13} – бірінші есепті шешуге үшінші программа таңдалсын,
 X_{21} – екінші есепті шешуге бірінші программа таңдалсын,
 X_{22} – екінші есепті шешуге екінші программа таңдалсын,
 X_{23} – екінші есепті шешуге үшінші программа таңдалсын,
 X_{31} – үшінші есепті шешуге бірінші программа таңдалсын,
 X_{32} – үшінші есепті шешуге екінші программа таңдалсын,
 X_{33} – үшінші есепті шешуге үшінші программа таңдалсын.
 Бұл айнымалылар тек келесі мәндерді қабылдайды:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер } i\text{-есепке } j\text{-программа таңдалған болса,} \\ 0, & \text{қарсы жағдайда.} \end{cases}$$

Есептің математикалық моделі:

$$x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13}$$

$$x_{21} \quad x_{22} \quad x_{23}$$

$$15x_{11} + 40x_{12} + 10x_{13} + 30x_{21} + 20x_{22} + 10x_{23} \rightarrow \min$$

$$50x_{11} + 25x_{12} + 100x_{13} + 110x_{21} + 150x_{22} + 160x_{23} \leq 250$$

$$x_{ij} \geq 0 - \text{бүтін}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$

3. СЫЗЫҚТЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУ

3.1 Теңдеу жүйесін шешудің үш тәсілі

Теңдеулер жүйесі келесі түрде жазылған болсын:

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = \overline{1, m}, \quad m < n, \quad m = n, \quad m > n \quad (3.1.1)$$

Осы теңдеулермен кестені толтырайық:

3.1- кесте

	x_1	x_2	...	x_n	
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	ЖОЛ
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	
$\vdots$			...		
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	

|

баған

Теңдеулер жүйесін шешу үшін жордан шығаруларын қолданамыз.

«rs»-ші «a» шешуші элементі бар жордан шығаруларының бір қадамы берілген кестені жаңа кестеге келесі бес ережемен аударады:

1. Шешуші элемент бірлікке ауыстырылады.
2. Шешуші бағанның қалған элементтері сол күйінде қалады.
3. Шешуші жолдың қалған элементтері өз таңбаларын ауыстырады.
4. Жаңа элементтер a'_{ij} келесі өрнек бойынша табылады:

$$a'_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj} \quad (3.1.2)$$

(төртбұрыш ержесі).

5. Кестенің барлық элементтері шешуші элементке бөлінеді.

3.1.1—мысал:

3.2 - кесте

	x_1	x_2	x_3	
$y_1 = x_1 - 2x_2 + 3x_3$	y_1	1	-2	3
$y_2 = -x_1 + x_2 + 2x_3$	y_2	-1	1	2
$y_3 = 2x_1 - x_2 - x_3$	y_3	2	-1	-1

← шешуші элемент

3.3 - кесте

	x_1	x_2	y_2
y_1	5	-7	3
x_3	1	-1	1
y_3	3	-1	-1

3.4 -кесте

	x_1	x_2	y_2
y_1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Жордан шығаруларын қолданудың әртүрлі тәсілдері бар.

Бірінші тәсіл

(3.1.1)-теңдеу жүйесін келесі түрде жазайық:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = a_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.1.3)$$

3.5 - кесте

	x_1	x_2	...	x_n
a_1	$A_{(n \times n)}$			
a_2				
$\vdots$				
a_n				

Жордан шығаруларын n-рет қолданып, жаңа кестеге келеміз:

3.6 - кесте

	a_1	a_2	...	a_n
x_1	$A_{(n \times n)}^{-1}$			
x_2				
$\vdots$				
x_n				

Екінші тәсіл

Теңдеулер жүйесін келесі түрде жазамыз:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - a_i = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.1.4)$$

Кестені толтырамыз:

3.7 - кесте

	x_1	x_2	...	x_n	1
0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$-a_1$
0	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$-a_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
0	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}	$-a_n$

Бос мүшелі баған

Жордан шығаруларын n -рет қолданып, әрбір қадамнан кейін нөлінші бағанды сызып, осындай кестеге келеміз:

3.8 - кесте

	1
x_1	b_1
x_2	b_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	b_n

3.1.2—мысал

3.9 – кесте

	x_1	x_2	x_3	x_4	1
$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 4 = 0$	0	2	2	-1	1 -4
$4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 6 = 0$	0	4	3	-1	2-6
$8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 12 = 0$	0	8	5	-3	4-12
$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 6 = 0$	0	3	3	-2	2-6

3.10 - кесте

3.11 - кесте

3.12-кесте

	x_1	x_2	x_3	$\emptyset$	1
x_4	-2	-2	1		4
0	0	-1	1		2
0	0	-3	1		4
0	-1	-1	0		2

	x_1	x_2	$\emptyset$	1
x_4	-2	-1		2
x_3	0	1		-2
0	0	-2		2
0	-1	-1		2

	x_1	0	1
x_4	1	-1	0
x_3	1	1	0
0	-2	-2	2
x_2	1	1	-2

$/(-1)$

3.13 – кесте

	x_1	0	1
x_4	-1	1	0
x_3	-1	-1	0
0	2	2	-2
x_2	-1	-1	2

3.14 - кесте

	0	1
x_4	-1	-2
x_3	-1	-2 / 2
x_1	1	2
x_2	-1	2

3.15 – кесте

	1
x_4	-1
x_3	-1
x_1	1
x_2	1

$x^* = \{1, 1, -1, -1\}$

Тексеру: $2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - (-1) + (-1) - 4 = 0 \quad 0 = 0$

Үшінші тәсіл. (Гаусс тәсілі)

Жордан шығаруларының әрбір қадамынан кейін 0 – бағанды және әрбір x_s үшін сәйкесті өрнекті жазып, шешуші жолды кестеден шығарып тастаймыз. Ең ақырғы қадамда x_i - дің мәнін табамыз:

3.16 - кесте

$$\frac{1}{x_i} \mid b_i.$$

Оны үстіндегі өрнекке қоямыз. Сөйтіп, x_k -ның мәнін табамыз.

$$\begin{array}{l} x_4 = -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4 \\ x_3 = x_2 - 2 \\ x_2 = -x_1 + 2 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = -1 \Rightarrow x_4 = -1 \end{array} \right.$$

Шешімі жоқ теңдеулер жүйесі:

$$1) \ y_1 = 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2$$

$$y_2 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4$$

$$y_3 = 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6$$

$$2) \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 1 = 0$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3 = 0$$

$$3x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 + 3 = 0$$

Қосымша есептер:

- $$\begin{array}{ll}
 3.1) \left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{array} \right\}; & 3.2) \left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{array} \right\}; \\
 3.3) \left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{array} \right\}; & 3.4) \left. \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{array} \right\}; \\
 3.5) \left. \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0 \end{array} \right\}; & 3.6) \left. \begin{array}{l} 7x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 11 \\ 2x_1 + x_3 - 4x_4 = -8 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 39 \end{array} \right\}; \\
 3.7) \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 4 \end{array} \right\}; & 3.8) \left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{array} \right\}; \\
 3.9) \left. \begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \end{array} \right\}; & 3.10) \left. \begin{array}{l} 4x_1 - 17x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -17 \\ 43x_1 + 24x_2 - x_3 + 3x_4 = 28 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{array} \right\}; \\
 3.11) \left. \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 - x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{array} \right\}; & 3.12) \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3 \end{array} \right\}; \\
 3.13) \left. \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 14x_4 + 18x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 2 \\ 5x_1 - 4x_2 + 19x_3 + 25x_4 + 30x_5 = 15 \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 9 \\ x_1 - 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 14 \end{array} \right\} & 3.14) \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 82x_5 = 84 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 6 \\ x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 27x_5 = 27 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 1 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

3.2 Сызықтық бағдарламалау есептерінің геометриялық мағынасы (n=2)

Ең қарапайым жағдайда, сызықтық бағдарламалау есебінде бар жоғы екі айнымалы болған кезде оның геометриялық түрленуін алу қиын емес және есепті графикалық жолмен шығаруға болады.

$$\begin{aligned}
 Z &= p_1x_1 + p_2x_2 \rightarrow \max \\
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq a_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq a_2 \\
 &\text{-----} \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\leq a_m
 \end{aligned} \tag{1}$$

Жазықтықта декарттық тікбұрыштық координаталар жүйесін енгізіп және әрбір сан жұбына (x_1, x_2) жазықтықта x_1 және x_2 координаталары бар нүктесін қатар қойып салыстырымыз. Ең алдымен берілген есептің мүмкін шешулеріне сәйкес келетін нүктелер жиынының не екенін көріп алайық. Ол үшін бір сызықтық теңсіздікті қарастырайық:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq a_1$$

Ол теңсіздік түзуі $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$ жазықтықты екіге бөлгеннен пайда болатын екі бөліктің біреуін анықтайды.

Мұндай кезде сәйкес жарты жазықтық құрамына осы түзуі де кіреді. Сондықтан ол – тұйық жартылай жазықтық болады.

Берілген теңсіздік екі тұйық жартылай жазықтықтың қайсысын анықтайтынын білу үшін теңсіздікке шекаралық түзуде жатпайтын қайсыбір нүктенің координаталарын салу жеткілікті.

Егер алынған нүкте теңсіздікті қанағаттандырса, онда сол нүкте жақтан жартылай жазықтық іздегеніміз болады. Егер қанағаттандырмаса, керісінше болады. Сонымен сызықтық бағдарламалау есебінің әрбір шектеуі жазықтықта қайсыбір жартылай жазықтықты көрсетеді. Сызықтық бағдарламалау есебінің мүмкін шешулер жиыны (мүмкін шешу саласы) геометриялық түрде жекеленген шектеулермен анықталады.

Сызықтық бағдарламалау есебінің мүмкін шешу саласы бос емес болсын. Координаталары мақсатты функцияны ең үлкен мәніне жеткізетін ғана мүмкін саланың нүктелері оптималды болады.

$p_1x_1 + p_2x_2 = a$ түзуі, оның $p = (p_1, p_2)$ нормал вектор бағытында жылжытсақ, онда a мәні өсетінін және сол түзуді нормал вектор бағытына қарсы жылжытсақ, онда a мәнінің кемітінін көреміз.

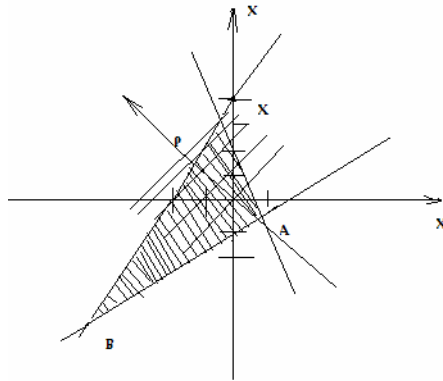
3.2.1 – мысал:

$$Z = -x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + x_2 \leq 1$$

$$-x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 1$$



$$X^* \approx (-0,3;1,6)$$

$$Z^* \approx 1,9$$

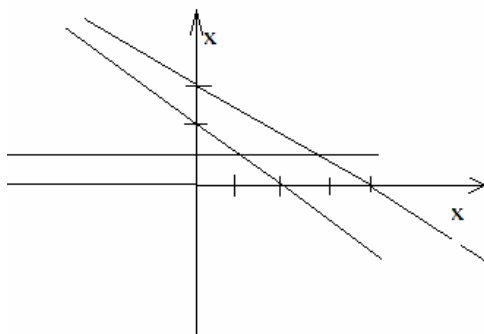
3.2.2 – мысал:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\frac{3}{4}x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_2 \leq 1$$



Бұл есептің мүмкін шешу саласы бос, сондықтан есептің шешімі (оптималды нүктесі) жоқ.

3.2.3 – мысал:

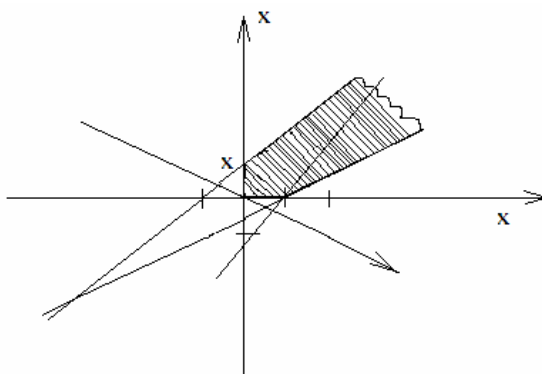
$$Z = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



$$X^* \approx (0; 1)$$

$$Z^* \approx -1$$

3.3 Тіке симплекс әдісі

Сызықтық бағдарламалау есептерінің математикалық моделі келесі түрде берілсін:

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \dots + p_nx_n \rightarrow \max \quad (3.3.1)$$

$$a_{i_1}x_1 - a_{i_2}x_2 - \dots - a_{i_n}x_n + a_i \geq 0, i = \overline{1, m} \quad (3.3.2)$$

$$x_i \geq 0, j = \overline{1, n} \quad (3.3.3)$$

Симплекс әдістерінің есептеу схемасының негізін түрлендірілген жордан шығарулары құрайды.

a_{rs} - ші шешуші элементі бар түрлендірілген жордан шығаруларының бір қадамы алғашқы кестені жаңа кестеге келесі бес ереже бойынша аударады:

1. Шешуші элемент бірлікке ауыстырылады.
2. Шешуші жолдың қалған элементтері сол күйінде қалады.
3. Шешуші бағанның қалған элементтері таңбасын ауыстырады.
4. Жаңа элементтер келесі өрнек бойынша табылады (төртбұрыш ережесі):

$$a'_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}$$

5. Жаңа кестенің барлық элементтері шешуші элементке бөлінеді.

Тіке симплекс әдісінің алгоритмі

1-қадам. Симплекс кестені толтыру.

3.3.1 – кесте

	$-x_1$	$-x_2$	$\dots$	$-x_n$	1
	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	a_1
	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	a_2
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	a_m
z	$-p_1$	$-p_2$	$\dots$	$-p_n$	0

2-қадам. Еркін айнымалыларды шығарып тастау.

Еркін (бос) айнымалы деп белгілеріне (таңбаларына) шек қойылмаған тәуелсіз айнымалыны айтады.

Барлық айнымалылар еркін болсын дейік. Онда түрлендірілген жордан шығаруларын n рет қолданып, келесі кестеге келеміз:

	$-y_1$	$-y_1$		$-y_1$	1
x_1	b_{11}	b_{12}		b_{1n}	b_1
x_2	b_{21}	b_{22}		b_{2n}	b_2
....					
x_n	b_{n1}	b_{n2}		b_{nn}	b_n
y_{n+1}	$b_{n+1,1}$	$b_{n+1,2}$		$b_{n+1,n}$	b_{n+1}
.....					
y_m	b_{m1}	b_{m2}		b_{mn}	b_m
z	q_1	q_2		q_n	Q

Әрбір x_j үшін сәйкесті өрнекті жазып,

$$\begin{cases} x_1 = -(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1n}y_n) + b_1 \\ \text{-----} \\ x_n = -(b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn}y_n) + b_n \end{cases} \quad (3.3.4)$$

кестеден шығарып тастаймыз.

Есептеуді 3.3.3 - кестемен жалғастырамыз.

	$-y_1$	$-y_1$		$-y_1$	1
y_{n+1}	$b_{n+1,1}$	$b_{n+1,2}$		$b_{n+1,n}$	b_{n+1}
.....					
y_m	b_{m1}	b_{m2}		b_{mn}	b_m
z	q_1	q_2		q_n	Q

3-қадам. Нөлінші жолды шығарып тастау.

Шешуші элементті таңдаудың ережелері:

1. Шешуші баған ретінде кестенің оң коэффициенті бар бағанын таңдаймыз.

2. Шешуші жолды таңдау:

Оң мағыналы бос мүшелердің шешуші бағанының коэффициенттеріне оң қатынастарын есептейміз. Арасынан ең кішісін таңдаймыз. Сөйтіп, шешуші элементті табамыз. Түрлендірілген жордан шығаруларын бір рет қолданамыз.

4-қадам. Тіректі шешімді табу.

Егер 3.3.3 – кестедегі барлық бос мүшелер оң мағыналы болса, онда (3.3.1)–(3.3.3) есебінің тіректі шешімі табылады:

$$y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$$

$$y_{n+1} = b_{n+1}$$

$$y_m = b_m$$

$$z_t = Q$$

$$x_t = \{x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_n^{(t)}\}$$

Тәуелді айнымалылар (y – тің) мәнін (3.3.4) теңдеу жүйесіне қойып X тәуелсіз айнымалылардың мәндерін табамыз.

Егер бос мүшелер арасында теріс мағыналы мүшелер болса, онда тіректі шешімді табатын шешуші элементті таңдаудың келесі ережелерін қолданамыз:

1. Теріс мағыналы бос мүшесі бар жолды қарастырамыз. (Егер осы жол коэффициенттерінің арасында теріс мағыналы коэффициенттер болмаса, онда (3.3.1)–(3.3.1) есебінің мүмкін шешу саласы бос).

2. Осы жол коэффициенттерінің арасында теріс мағыналы коэффициенттер бар болса, арасынан біреуін таңдаймыз, сол коэффициенті бар баған шешуші баған болады.

3. Шешуші жолды таңдау: бос мүшелердің шешуші баған коэффициенттеріне оң мағыналы қатынастарын есептейміз де, арасынан ең кішісін таңдаймыз. Түрлендірілген жордан шығаруларын бір рет қолданамыз.

5-қадам. Оптималды шешімді табу.

Егер z -ші жолдың (3.3.3- кесте) барлық коэффициенттері оң мағыналы болса, онда (3.3.1)–(3.3.1) есебінің оптималды шешімі табылады:

$$y_1^* = y_2^* = \dots = y_n^* = 0$$

$$y_{n+1}^* = b_{n+1}$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$y_m^* = b_m$$

$$z^* = Q$$

$$x^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$$

Егер z жолдың коэффициенттерінің арасында (3.3.3- кесте) теріс мағыналы коэффициенттер болса, онда оптималды шешімді табатын шешуші элементті таңдаудың келесі ережелерін қолданамыз:

1. Теріс мағыналы коэффициенті бар баған шешуші баған ретінде қарастырылады (егер z - жолда теріс мағыналы коэффициенттер көп болса, онда арасынан абсолюттік шамада ең үлкенін аламыз).

2. Осы бағанның барлық оң мағыналы коэффициенттерін қарастырамыз. Сәйкес бос мүшелерді оларға бөлеміз де, арасынан ең кішісін таңдаймыз. Түрлендірілген жордан шығаруларын бір рет қолданамыз.

3.3 - мысал:

$$z = -3x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$y_1 = x_1 + 2x_2 + 1 \geq 0$$

$$y_2 = 2x_1 + x_2 - 4 \geq 0$$

$$y_3 = x_1 - x_2 + 1 \geq 0$$

$$y_4 = x_1 - 4x_2 + 13 \geq 0$$

$$y_5 = -4x_1 + x_2 + 23 \geq 0$$

3.3.4 – кесте

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	-1	-2	1
y_2	-2	-1	-4
y_3	-1	1	1
y_4	-1	4	13
y_5	4	-1	23
z	3	-6	0

Есептің математикалық моделі бойынша, есепте екі еркін айнымалылар бар. Оларды кестеден шығарып тастаймыз. Түрлендірілген жордан шығаруларын қолданып, келесі кестеге келеміз:

3.3.5 - кесте

	$-y_1$	$-x_2$	1
x_1	1	-2	1
y_2	2	-3	6
y_3	1	-3	0
y_4	1	-6	-12
y_5	-4	9	-27
z	-3	12	-3

3.3.6- кесте

	$-y_1$	$-x_2$	1
y_2	-2	3	-6
y_3	-1	3	0
y_4	-1	6	12
y_5	4	-9	27
z	3	-12	3

$$x_1 = y_1 - 2x_2 - 1$$

3.3.7 – кесте

	$-y_1$	$-y_2$	1
x_2	-2	1	-6
y_3	3	-3	18
y_4	9	-6	72
y_5	-6	9	27
z	-15	12	-63

3-ке бөлеміз

3.3.8 – кесте

	$-y_1$	$-y_2$	1
y_3	1	-1	6
y_4	3	-2	24
y_5	-2	3	9
z	-5	4	-21

$$x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - 2$$

Есептің тіректі шешімі:

$$y_1 = y_2 = 0$$

$$y_3 = 6$$

$$y_4 = 24$$

$$y_5 = 9$$

$$z_T = -21$$

$$x_2 = 0 - 0 - 2 = -2$$

$$x_1 = 0 - 2 * (-2) - 1 = 3$$

$$x_T = \{3; -2\}$$

$$z_T = (-3) * 3 + 6 * (-2) = -9 - 12 = -21$$

3.3.9 – кесте

	$-y_3$	$-y_2$	1
y_1	1	-1	6
y_4	3	1	6
y_5	-2	1	21
z	-5	-1	9

3.3.10- кесте

	$-y_3$	$-y_4$	1
y_1	-2	1	12
y_2	3	1	6
y_5	5	-1	15
z	2	1	15

Есептің оптималды шешімі:

$$y_3 = y_4 = 0$$

$$y_1 = 12$$

$$y_2 = 6$$

$$y_5 = 15$$

$$z^* = 15$$

$$x_2 = 8 - 2 - 2 = 4$$

$$x_1 = 12 - 2 * 4 - 1 = 3$$

$$x^* = \{3; 4\}$$

$$z^* = (-3) * 3 + 6 * 4 = -9 + 24 = 15$$

Қосымша есептер:

$$\begin{array}{lll}
 \text{.3.1} & z = \frac{1}{2}x_1 + x_2 \rightarrow \max & \text{.3.2} \quad z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max & \text{.3.3} \quad z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\
 \left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \end{array} \right\}, & \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \geq -1 \\ 2x_1 + x_2 \geq 1 \end{array} \right\}, & \left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_2 \leq 2,5 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 - x_2 \geq -2 \end{array} \right\}, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \begin{array}{l}
 \text{.3.4} \quad z = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min \\
 \left. \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 16 \end{array} \right\}, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;
 \end{array} &
 \begin{array}{l}
 \text{.3.5} \quad z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\
 \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \end{array} \right\}, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;
 \end{array} &
 \begin{array}{l}
 \text{.3.6} \quad z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\
 \left. \begin{array}{l} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 4x_1 + x_2 \leq 8 \\ 4x_1 - x_2 \leq 8 \end{array} \right\}, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l}
 \text{.3.7} \quad z = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min \\
 \left. \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 4x_1 + 8x_2 \geq 5 \end{array} \right\}, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;
 \end{array} &
 \begin{array}{l}
 \text{.3.8} \quad z = x_1 + x_2 \rightarrow \max \\
 \left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 24 \end{array} \right\}, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;
 \end{array} &
 \begin{array}{l}
 \text{.3.9} \quad z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\
 \left. \begin{array}{l} 4x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16 \end{array} \right\}, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;
 \end{array} \\
 \\
 \text{3.3.10} \quad z = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min & \text{.3.11} \quad z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max \\
 \left. \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \end{array} \right\}, & \left. \begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{array} \right\}, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; & x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5});
 \end{array}$$

3.4 Сызықтық бағдарламалаудың қос мағыналы есептері

Тіке есеп	Қос мағыналы есеп
$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \rightarrow \max$	$\omega = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_mu_m \rightarrow \min$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq a_i, i = \overline{1, k}$	$u_i \geq 0, i = \overline{1, k}$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = a_i, i = \overline{(k+1), m}$	$u_i \leq 0, i = \overline{(k+1), m}$
$x_j \geq 0, j = \overline{1, l}$	$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_m \geq p_j, i = \overline{1, l}$
$x_j \leq 0, j = \overline{(l+1), n}$	$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_m = p_j, i = \overline{(l+1), n}$

Қос мағыналы есеп тіке есептен келесі ережелер бойынша табылады:

1. Тіке есептің шектеу жүйелерінің бос мүшелері қос мағыналы есептің мақсатты функциясының коэффициенттері болып саналады.

Ал тіке есептің мақсатты функциясының коэффициенттері қос мағыналы есептің шектеулер жүйесінің бос мүшелері болып саналады.

2. Тіке есептің әрбір шектеу–теңсіздігіне қос мағыналы есептің қайшы белгімен алынған еркін емес айнымалылары сәйкес келеді.

3. Тіке есептің әрбір шектеу–теңдіктеріне қос мағыналы есептің еркін айнымалылары сәйкес келеді.

4. Тіке есептің әрбір еркін емес айнымалысына қос мағыналы есептің шектеу–теңсіздіктері сәйкес келеді (теңсіздік өз белгісі бойынша).

5. Тіке есептің әрбір еркін айнымалысына қос мағыналы есептің шектеу–теңдіктері сәйкес келеді.

6. Тіке есептің мақсатты функциясының максималдануы қос мағыналы есепте мақсатты функциясын минималдануымен ауыстырылады.

7. Тіке есептің шектеулер коэффициенттерінің матрицасы қос мағыналы есепте келтірілген (транспонирленген) A^T матрицасымен ауыстырылады.

3.4 – мысал

Тіке есеп

Қос мағыналы есеп

$z = 10x_1 - x_2 - 42x_3 - 52x_4 \rightarrow \max$	$\omega = u_1 - 9u_2 + 2u_3 + 7u_4 \rightarrow \min$
$-3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 1,$	$-3u_1 + 3u_2 - 2u_3 - 3u_4 \geq 10,$
$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq 9,$	$u_1 - 2u_2 + u_3 + 2u_4 \geq -1,$
$-2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2,$	$4u_1 + 2u_2 + u_3 - 3u_4 \geq -42,$
$-3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7,$	$u_1 - 2u_2 + 3u_3 \geq -52,$
$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$	$u_i \geq 0, i = \overline{1,2}$

3.5 Қос мағыналы кестелер

Келесі жүйені қарастырайық:

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} (-x_j), \quad i = \overline{1,m} \quad (3.5.1)$$

Оған келесі кестені құрайық:

3.5.1-кесте

	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Түрлендірілген жордан шығаруларын бір рет қолданатын, тәуелді айнымалы y_r мен тәуелсіз айнымалы x_s орындарымен ауыстырамыз. Сонда келесі кестені аламыз:

3.5.2-кесте

	$-x_1$	...	$-y_r$	...	$-y_n$
y_1	b_{11}	...	$-a_{1r}$	...	b_{1n}
...	...	...	...	...	...
x_s	a_{s1}	...	1	...	a_{sn}
...	...	...	...	...	...
y_m	b_{m1}	...	$-a_{mr}$	...	b_{mn}

Енді келесі сызықтық форманы қарастырайық:

$$v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i, \quad j = \overline{1, n} \quad (3.5.2)$$

$(A^T = a_{ij} - A$ матрицасының келтірілген матрицасы:
 u_i – тәуелсіз айнымалылар, v_j – тәуелді айнымалылар)
 (3.5.2)-форма бойынша келесі кестені қарастырайық:

3.5.3-кесте

	v_1	...	v_s	...	v_n
u_1	a_{11}	...	a_{1s}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...
u_r	a_{r1}	...	a_{rs}	...	a_{rn}
...	...	...	...	...	...
u_m	a_{m1}	...	a_{ms}	...	a_{mn}

Онда екі кестенің (3.5.1, 3.5.3) матрицалары сәйкес келеді. 3.5.1 мен 3.5.3 кестелер қос мағыналы кестелер деп аталады. 3.5.3-кестеге кәдімгі жордан шығаруларын бір рет қолданып, келесі кестені аламыз:

3.5.4-кесте

	v_1	...	u_r	...	v_n
u_1	b_{11}	...	$-a_{1r}$	...	b_{1n}
...	...	...	...	...	...
v_s	a_{s1}	...	1	...	a_{sn}
...	...	...	...	...	...
u_m	b_{m1}	...	$-a_{mr}$	...	b_{mn}

/ a_{rs}

Осылайша, 3.5.1-кестеге қолданылған түрлендірілген жордан шығаруларының бір қадамы 3.5.3-кестеге қолданылған кәдімгі жордан шығаруларының бір қадамына эквивалентті. Осыдан өзара қос мағыналы екі есепті бір кестеге біріктіру қажеттілігі келесі кестеден көрінеді:

3.5.5-кесте

	v_1	...	v_s	...	v_n
	$-x_1$	...	$-x_s$	...	$-x_n$
u_1	y_1	$A_{(mxn)}$			
...	...				
u_r	y_r				
...	...				
u_m	y_m				

Өйткені сәйкес жордан шығаруларының әрбір қадамы бір мезгілде екі кестені де қажетті түрде өзгерте алады.

3.5 – мысал:

3.5.6-кесте

	v_1	v_2	v_3	v_4	$\varnothing$
	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
u_1	y_1	-3	1	4	1
u_2	y_2	3	-2	2	-9
u_3	0	-2	1	1	3
u_4	0	-3	2	-3	0
1	z	-10	1	42	52
			↑		0

1) 0-ші жолды шығару:

		v_1	u_1	v_3	v_4	
		$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	$-x_4$	
v_2	x_2	-3	1	4	1	1
u_2	y_2	-3	2	10	0	-7
u_3	0	1	-1	-3	2	1
u_4	0	3	-2	-11	-2	5
		-7	-1	38	51	-1

2) 0-ші жолды шығару:

		u_3	u_1	v_3	v_4	φ
		0	$-y_1$	$-x_3$	$-x_4$	1
v_2	x_2	3	-2	-5	7	4
u_2	y_2	3	-1	1	6	-4
v_1	x_1	1	-1	-3	2	1
u_4	0	-3	1	-2	-8	2
1	z	7	-8	17	65	6

$$u_3 = 3v_2 + 3u_2 + v_1 - 3v_4 + 7 \quad (3.5.3)$$

3) Екінші 0-ші жолды шығару:

		u_4	v_3	v_4	φ
		0	$-x_3$	$-x_4$	1
v_2	x_2	2	-9	-9	8
u_2	y_2	1	-1	-2	-2
v_1	x_1	1	-5	-6	3
u_1	y_1	1	-2	-8	2
1	z	8	1	1	22

$$u_4 = 2v_2 + u_2 + v_1 + u_1 \quad (3.5.4)$$

4) Тіректі шешімді табу:

		u_2	v_4	φ
		$-y_2$	$-x_4$	1
v_2	x_2	-9	9	26
v_3	x_3	-1	2	2
v_1	x_1	-5	4	13
u_1	y_1	-2	-4	6
1	z	1	-1	20

5) Оптималды шешімді табу:

		u_2	v_3	
		$-y_2$	$-x_3$	
v_2	x_2			17
v_4	x_4			1
v_1	x_1			9
u_1	y_1			10
1	z	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	21

$$\begin{cases} \max z = \max \omega \\ v_2 = v_4 = v_1 = u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}, v_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow v^* = \left\{0, \frac{1}{2}, -17, \frac{17}{2}\right\} \\ y_2 = 0, x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 17, x_4 = 1, x_1 = 9, y_1 = 10 \Rightarrow x^* = \{9, 17, 0, 1\} \\ \text{Тексеру: } 10 \cdot 9 - 17 - 42 \cdot 0 - 52 = 90 - 17 - 52 = 21. \end{cases}$$

3.6 Қос мағыналылықтың екі теоремасы

Қос мағыналылықтың бірінші теоремасы

Егер тіке және қос мағыналы есептердің шешімдері оптималды болса, онда оптималды нүктеде мақсатты функциялардың мәндері тең болады ($\max z = \max \omega$). Басқа шешімдері үшін $z \leq \omega$ шарты орындалады. Егер де қос мағыналы есептердің бір жұбының шешімі болмаса, онда екінші жұбының не шешімі жоқ, не мақсатты функциясы шектелмеген.

Тіке және қос мағыналы есептерді кестеге енгіземіз:

		V_1	...	V_n	W
		$-x_1$	...	$-x_n$	1
U_1	y_1	a_{11}	...	$-a_{1n}$	a_1
...	...	...	...	...	...
U_m	y_m	a_{m1}	...	a_{mn}	a_m
1	Z	$-p_1$	...	$-p_n$	0

Негізгі тіке есепті шеше отырып, қос мағыналы есепті де шешеміз.

Қос мағыналылықтың бірінші теоремасына дәлелдеме:

3.6.1-кесте

		V_1	...	V_l	0	...	0	W
		$-x_1$	...	$-x_l$	$-x_{l+1}$	...	$-x_n$	1
U_1	y_1	a_{11}	...	$-a_{1l}$	$a_{1,l+1}$	...	$-a_{1n}$	a_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...
U_k	y_k	a_{k1}	...	a_{kl}	$a_{k,l+1}$	...	a_{kn}	a_k
U_{k+1}	0	$a_{k+1,1}$	...	$a_{k+1,l}$	$a_{k+1,l+1}$	...	$a_{k+1,n}$	a_{k+1}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
U_m	0	a_{m1}	...	a_{ml}	$a_{m,l+1}$	...	a_{mn}	a_m
1	Z	$-p_1$	...	$-p_l$	$-p_{l+1}$	...	$-p_n$	0

Негізгі есептің соңғы шешімдері болсын, онда барлық $(n-1)$ бос айнымалыларын $(x_{l+1}, \dots, x_n)$ кестеден шығарғаннан кейін 3.6.1-кесте $(n-1)$ жолға кішірейеді, ал барлық нөлдік жолдарды шығарғаннан кейін кесте $(m-k)$ бағанға кішірейеді. Алынған қысқартылған кестені бос мүшелерінің және Z жолдың коэффициенттерінің теріс мәндерінен босатсақ келесі соңғы кестеге келеміз:

3.6.2-кесте

		V_1	...	V_r	U_1	...	U_s	W
		$-x_1$	...	$-x_r$	$-y_1$	...	$-y_s$	1
V_{r+1}	x_{r+1}	$b_{r+1,1}$	...	$b_{r+1,r}$	$b_{r+1,1}$	...	$b_{r+1,s}$	b_{r+1}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
V_l	x_l	b_{l1}	...	b_{lr}	b_{l1}	...	b_{ls}	b_l
U_{s+1}	y_{s+1}	$c_{s+1,1}$	...	$c_{s+1,r}$	$c_{s+1,1}$	...	$c_{s+1,s}$	c_{s+1}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
U_k	y_k	c_{k1}	...	c_{kr}	c_{k1}	...	c_{ks}	c_k
1	Z	q_1	...	q_r	q_1	...	q_s	Q

Мұндағы $b_{r+1}, \dots, b_l, c_{s+1}, c_k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
q_1, \dots, q_r, q_s &\geq 0, \\
x_1^* = \dots = x_r^* = y_1^* = \dots = y_s^* &= 0, \\
x_{r+1}^* &= b_{r+1}, \\
x_1^* &= b_1, \\
y_{s+1} &= c_{s+1}, \\
y_k &= c_k, \\
\max Z &= Q.
\end{aligned}$$

Қос мағыналы есептің кестесін сынға салайық. $V_{r+1} = \dots = V_1 = U_{s+1} = \dots = U_k = 0$ деп ойлап, қос мағыналы есептің келесі тіректі шешімін аламыз:

$$V_1 = q_1, \dots, V_r = q_r, U_1 = q_s, \dots, U_s = q_s.$$

Басқа U_i бос болып есептеледі.

$b_{r+1}, \dots, b_1, c_{s+1}, \dots, c_k$ оң мағыналы болғандықтан, мынадай теңдіктерді аламыз $\omega = b_{r+1}V_{r+1} + \dots + b_1V_1 + c_{s+1}V_{s+1} + \dots + c_kU_k + Q \geq Q$, яғни $V_{r+1} = \dots = V_1 = U_{s+1} = \dots = U_k = 0$ нүктесінде $\min \omega$ болады, яғни $\min \omega = Q = \max Z$.

Енді негізгі есептің Z мақсатты функциясы шектелген деп есептейік, яғни 3.6.2- кестеде кейбір жоғарғы x_r айнымалысына сәйкес q_r коэффициенті және осы бағанның барлық коэффициенттері теріс. Онда қос мағыналы есептен

$V_r = b_{r+1}, V_{r+1} + \dots + b_{1r}V_1 + c_{s+1}U_{s+1} + \dots + c_{kr}U_k + q_r \leq q_r < 0$ шығады, яғни қос мағыналы есептің шектеулер жүйесі карама-қайшы, яғни V_r оң мағыналылығы $V_{r+1} = \dots = V_1 = U_{s+1} = \dots = U_k$ оң мағыналылығымен сәйкес емес.

Теоремадан шығатын нәтиже

$x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ мүмкін шешімдері және $u' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_m)$ қос мағыналы есептің жұптары оптималды болса, сәйкес Z мақсатты функциялары және ω мына шешімдерде тең мәндер қабылдағаны қажетті және жеткілікті:

$$Z(x') = \sum_{j=1}^n p_j x_j = \sum_{i=1}^m a_i u_i = \omega(u')$$

Ескерту: қос мағыналылықтың негізгі теоремасын дәлелдеуде тіке есепті (max) симплекс әдісімен түрлендірілген жордан шығару аппараты көмегімен шығарған кезде, қос мағыналы есептің (min) шешімі автоматты түрде алынады:

Қос мағыналы есепті (min) симплекс әдісімен, бірақ жай жордан шығару аппаратымен шешсек, тіке есептің шешімі (max) автоматты түрде алынады.

Қос мағыналылықтың екінші теоремасы

Егер X^* және U^* векторлары жұп қос мағыналы есептердің оптималды шешімдері болса, онда олар келесі “қатаң еместікті толтыратын шарттар” деп аталатын шарттарды қанағаттандыруы қажетті де жеткілікті:

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^* - p_j \right) = 0, j = \overline{1, n}$$

$$u_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - a_i \right) = 0, i = \overline{1, m}$$

Қос мағыналылықтың екінші теоремасына дәлелдеме:

$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ және $u^* = (u_1^*, \dots, u_m^*)$ - қарастырылған қос мағыналы есептің оптималды шешімдері болсын. Олар мүмкін шешімдер болып есеп жұптарының барлық теңсіздік-шектеулері мен теңдік-шектеулерін қанағаттандырады. Онда келесі анық:

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^* \right) x_j^* = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} x_j^* \right) u_i^* \leq \sum_{i=1}^m a_i u_i^*$$

Бірінші теорема бойынша $\sum_{j=1}^n p_j x_j^* = \sum_{i=1}^m a_i u_i^* \quad x_j^* \quad \text{және} \quad u_i^*$

оптималды шешімдері болып табылады.

Сондықтан:

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j^* = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^* \right) x_j^*$$

$$\sum_{i=1}^m a_i u_i^* = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) u_i^*$$

оптималды болып табылады.

Бірінші теңдіктен шығатыны $\sum_{j=1}^n x_j^* (\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^* - p_j) = 0$, (бір

бөлгіш оң, екіншісі теріс болса, т.с.с., бірақ біздің жағдайда барлық мәндер оң). Егер барлық бөлгіштер нөлге тең болса, онда сумма да нөлге тең болады, ал әрбір бөлгіш – ол оң туынды, яғни:

$$x_j^* (\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^* - p_j) = 0, \forall j.$$

Екінші оптималды теңдік үшін де бұл дәлелдеу ұқсас.

3.7 Қос мағыналы симплекс әдісі

Сызықтық бағдарламалау есептерінің математикалық моделі келесі түрде беріلسін:

$$Z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots + p_n x_n \rightarrow \max \quad (3.7.1)$$

$$a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - \dots - a_{in} x_n + a_i = 0, i = \overline{1, m} \quad (3.7.2)$$

$$x_i \geq 0, j = \overline{1, n} \quad (3.7.3)$$

Симплекс әдістерінің есептеу схемасының негізін түрлендірілген жордан шығарулары құрайды.

a_{rs} - ші шешуші элементі бар түрлендірілген жордан

шығаруларының бір қадамы алғашқы кестені жаңа кестеге келесі бес ереже бойынша аударады:

5. Шешуші элемент бірлікке ауыстырылады.

6. Шешуші жолдың қалған элементтері сол күйінде қалады.

7. Шешуші бағдарламалаудың қалған элементтері таңбасын ауыстырады.

8. Жаңа элементтер келесі өрнек бойынша табылады (төртбұрыш ережесі).

$$a_{ij}^l = a_{ij} a_{rs} - a_{is} a_{rj}$$

9. Жаңа кестенің барлық элементтері шешуші элементіне бөлінеді.

Қос мағыналы симплекс әдісінің алгоритмі:

Есептеуді 3.7.3-кестемен жалғастырамыз.

3.7.3-кесте

	$-y_1$	$-y_2$	...	y_n	1
y_{n+1}	$b_{n+1,1}$	$b_{n+1,2}$	...	$b_{n+1,n}$	b_{n+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	$b_{m,1}$	$b_{m,2}$	...	$b_{m,n}$	b_m
z	q_1	q_2	...	q_n	Q

3-қадам. Нөлдік жолдарды шығарып тастау.

Шешуші элементті таңдаудың ережелері:

1. Шешуші баған ретінде кестенің оң коэффициенті бар бағанын таңдаймыз.

2. Шешуші жолды таңдау: оң мағыналы бос мүшелердің шешуші бағанның коэффициенттеріне қатынасы есептеледі. Сөйтіп шешуші элемент табылады. Түрлендірілген жордан шығаруларын бір рет қолданамыз.

4-қадам. Оптималды шешімді табу.

Шешуші элементті табу ережелері:

1. Егер z -ші жол коэффициенттері оң мағыналы болса, онда есептің оптималды шешімі бар.

2. Егер z -ші жолдың коэффициенттерінің арасында теріс мағыналы коэффициенттер ($q_s < 0$) болса, онда s -ші баған коэффициенттерінің арасында оң мағыналы коэффициент таңдалады. Сол коэффициенті бар жол шешуші жол болып саналады.

3. z -ші жол коэффициенттерінің шешуші жолдың коэффициенттеріне теріс мағыналы қатынастары есептеледі де, арасынан ең үлкені алынады (абсолюттік шамада ең кішісі). Түрлендірілген жордан шығаруларын бір рет қолданамыз.

5-қадам. Тіректі және оптималды шешімді табу.

Шешуші элементті табу ережелері:

1. Егер бос мүшелер оң болса, онда есептің тіректі және оптималды шешімі табылады.

2. Егер бос мүшелер арасында теріс мағыналы мүшелер болса, онда теріс мүшесі бар жол шешуші жол болып саналады. Шешуші жол коэффициенттерінің арасында теріс коэффициенттер таңдалады. Оларға z -ші жолдың сәйкес коэффициенттері бөлініп, арасынан ең үлкені таңдалады (абсолюттік шамада ең кішісі). Түрлендірілген жордан шығаруларын бір рет қолданамыз.

3.7- мысал:

$$z = 5x_1 - x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$$

$$x_2 + 2x_3 - 9 \geq 0$$

$$-x_1 + x_2 - 1 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 - 8 \geq 0$$

$$-x_1 + x_3 + 4 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
y_1	0	-1	-2	-9
y_2	1	-1	0	-1
y_3	-1	-1	3	-8
y_4	1	0	-1	4
z	-5	1	4	0

	$-x_1$	$-y_2$	$-x_3$	1
y_1	1	1	2	8
x_2	1	1	0	-1
y_3	2	1	-3	7
y_4	-1	0	1	-4
z	4	-1	-4	1

	$-x_1$	$-y_2$	$-x_3$	1
y_1	-1	-1	-2	-8
x_2	-1	-1	0	1
y_3	-2	-1	3	-7
y_4	1	0	-1	4
z	-4	1	4	-1

	$-y_4$	$-y_2$	$-x_3$	1
y_1	1	-1	-3	-4
x_2	1	-1	-1	5
y_3	2	-1	0	1
x_1	1	1	-1	4
z	4	1	0	15

	$-y_4$	$-y_2$	$-y_1$	1
x_3	1	-1	1	-4
x_2	-2	2	1	-19
y_3	-7	4	-1	1
x_1	-2	-1	1	-16
z	-12	-3	0	-45

	$-y_4$	$-y_2$	$-y_1$	1
x_3	-1/3	1/3	-1/3	4/3
x_2	2/3	-2/3	-1/3	19/3
y_3	7/3	-4/3	1/3	-1/3
x_1	2/3	1/3	1/3	16/3
z	4	1	0	15

	$-y_4$	$-y_3$	$-y_1$	1
x_3	-1/3	-1/3	1/3	-5/3
x_2	2/3	2/3	2/3	-26/3
y_2	7/3	1	1/3	-1/3
x_1	-5/3	1/3	1/3	-21/3
z	-23/3	-1	-1/3	-59/3

	$-y_4$	$-y_3$	$-y_1$	1
x_3	1/4	1/4	-1/4	5/4
x_2	-1/2	-1/2	1/4	13/2
y_2	-7/4	-3/4	-1/4	1/4
x_1	5/4	1/4	-1/4	21/4
z	23/4	3/4	1/4	59/4

$$x_1^* = 21/4$$

$$x_2^* = 13/2$$

$$x_3^* = 5/4$$

$$z^* = 59/4$$

Қосымша есептер:

- 3.7.1 $z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ 3.7.2 $z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min$ 3.7.3 $z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min$
- $$\left. \begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 6 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + 3x_2 &\geq 5 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\geq 5 \end{aligned} \right\},$$
- $$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \quad x_1 \geq 0, x_2 > 0 \text{ нәлде } x_2 < 0$$
- 3.7.4 $z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ 3.7.5 $z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ 3.7.6 $z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min$
- $$\left. \begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\leq 9 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 15 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 - 4x_2 &\leq 2 \\ x_1 - x_2 &\leq 5 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 - 4x_2 &\leq 4 \\ 6x_1 + 5x_2 &\geq 30 \end{aligned} \right\},$$
- $$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \quad x_1 \geq 0, x_2 > 0 \text{ нәлде } x_2 < 0$$
- 3.7.7 $z = x_1 + x_2 \rightarrow \min$ 3.7.8 $z = 4x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$ 3.7.9 $z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$
- $$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + x_2 &\geq 2 \\ -x_1 + x_2 &\geq -3 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 8 &\geq 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 10 &\geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 12 &\geq 0 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \end{aligned} \right\},$$
- $$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$3.7.10 \quad z = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min \quad 3.7.11 \quad z = 4x_1 - 5x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \geq 10 \\ -2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 - 2x_2 \geq 12 \\ x_2 \geq 2 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 1 \\ x_1 - x_3 \leq 1 \end{array} \right\},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$$

$$3.7.12 \quad z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max \quad 3.7.13 \quad z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7 \\ -3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2 \end{array} \right\},$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5}); \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$$

$$3.7.14 \quad z = 3x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max \quad 3.7.15 \quad z = 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 32 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -8 \end{array} \right\},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0; \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4});$$

4. ЖАЛПЫ ТРАНСПОРТ ЕСЕБІ

4.1 Транспорт есебін қою және оның математикалық моделі

Транспорт есебі дегеніміз тасымалдау құны ең аз болатын жүктерді жіберу пункттерінен қабылдау пункттеріне тасымалдау.

Тіке есебі	Қос мағыналы есебі
$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (4.1)$	$\omega = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \max \quad (4.5)$
$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m} \quad (4.2)$	$u_i, i = \overline{1, m} \quad (4.6)$
$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n} \quad (4.3)$	$v_j, j = \overline{1, n} \quad (4.7)$
$x_{ij} \geq 0, \forall i, j \quad (4.4)$	$u_i + v_j \leq c_{ij}, \forall i, j \quad (4.8)$

Тіке есепті қарастырайық, мұнда мақсатты функция (4.1) транспорт шығындарының минималдануын көрсетеді. (4.2)- шектеулер жабдықтаушы зауыттың (жіберу пункттерінің) өндіріс қуаттарының шектілігін ескертеді. (4.3)- шектеулер тұтынушылардың (қабылдау пункттерінің) сұраныстарын толық қамтамасыз етуін көрсетеді.

Егер $\sum_{i=1}^m a_i \leq \sum_{j=1}^n b_j$ болса, онда (4.1)-(4.4) есеп жабық транспорт есебі деп саналады. Басқа жағдайларда ашық транспорт есебі болады.

Ашық транспорт есебін жабық транспорт есебіне келтіруге болады: ол үшін жалған пункттер енгізу керек (мысалы, қоймалар). Жалған пункттерінің тасымалдау құны нөлге тең.

$$2) \sum_i a_i \leq \sum_j b_j$$

$$a_{m+1} = \sum_j b_j - \sum_i a_i, c_{m+1,j} = 0, j = \overline{1, n}.$$

$$3) \sum_i a_i \geq \sum_j b_j$$

$$b_{n+1} = \sum_i a_i - \sum_j b_j, c_{i,n+1} = 0, i = \overline{1, m}.$$

Транспорт есебін потенциалдар әдісімен, венгр әдісімен шығаруға болады. Осы оқу құралында потенциалдар әдісі келтірілген.

Потенциалдар әдісі жабық транспорт есебіне қолданылады. Потенциалдар әдісін қолдану үшін тіке транспорт есебіне қос мағыналы есепті (4.5)-(4.8) құру керек.

4.2 Потенциалдар әдісі

Потенциалдар әдісінің алгоритмі

I. Алғашқы қадам

1. Басты жоспарды құру.

2. Жоспары бар торлар үшін $v_j - u_i = c_{ij}$ жүйесін жасау.

3. Жоспары жоқ торлардың потенциалдығын зерттеу
 $v_j - u_i \leq c_{ij}$.

II. Жалпы қадам.

1. Жоспарды одан да жақсарту.

2. Жүйені түзету.

3. Түзетілген жүйенің потенциалдығын зерттеу.

Алғашқы жоспар не солтүстік-батыс бұрыш әдісімен, не минималды элемент әдісімен жасалады.

Жоспар бар торларға $v_j - u_i = c_{ij}$ жүйесі жасалады.

Жоспары жоқ торларға келесі теңсіздіктер жүйесі құрылады
 $v_j - u_i \leq c_{ij}$.

Егер бұл шарт орындалмаса, онда $\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ сандары табылады. Табылған барлық α_{ij} ішінен ең үлкені $\alpha_{i_0 j_0} = \max\{\alpha_{ij}\}$ болып алынады. (i_0, j_0) тұратын тордан бастап, жоспары бар торларда сағат тіліне қарсы бағыт бойынша цикл құрылады. Сонымен бірге (i_0, j_0) тордан бастап, цикл бұрылатын жерде алма-кезек (+, -) белгілері қойылады. (-) -та тұрған барлық x_{ij} ішінен ең кішісі алынады. Ол $\beta = \min\{x_{ij}^-\}$.

Жаңа жоспар келесідей құрылады:

$$x_{ij}^1 = \begin{cases} x_{ij}^+ + \beta, & \text{егер цикл бұрылған жерде плюс тұрса} \\ x_{ij}^- - \beta, & \text{егер цикл бұрылған жерде минус тұрса} \\ x_{ij}, & \text{цикл жүрмеген торларға} \end{cases}$$

Содан соң жоспары бар торларға жаңа теңдеулер жүйесін құрамыз: $v_j - u_i = c_{ij}$.

Жоспары жоқ торлардың потенциалдығын зерттейміз: $v_j - u_i \leq c_{ij}$.

4.2-мысал:

4.2.1-кесте

$b_j \backslash a_i$	150	120	80	50
100	3	5	7	11
130	1	4	6	3
170	5	8	12	7

4.2.2-кесте

$b_j \backslash a_i$	~~0~~ ~~20~~ 150	~~0~~ ~~40~~ 120	~~0~~ ~~80~~	~~0~~ ~~50~~
~~0~~ ~~80~~ 100	203	805	07	011
~~0~~ 130	1301	04	06	03
~~0~~ ~~80~~ 120 170	5	8	127	50

1. Алғашқы жоспар минималды элемент әдісімен құрылады:

$$z_{\min \text{ з.т.}} = 3 \cdot 20 + 5 \cdot 80 + 130 + 40 \cdot 8 + 80 \cdot 12 + 50 \cdot 7 = 2220$$

2. Алғашқы жоспар солтүстік-батыс бұрыш әдісімен құрылады:

4.2.3-кесте

$a_i \backslash b_j$	0	0	0	0
	~~50~~ 150	~~40~~ 120	~~80~~	~~50~~
0	100	0	0	0
~~80~~ 130	50	80	0	0
0	0	40	80	50

$$z_{\text{солт-бат}} = 3 \cdot 100 + 50 + 4 \cdot 80 + 40 \cdot 8 + 80 \cdot 12 + 50 \cdot 7 = 2300$$

4.2.4-кесте

$u_i \backslash v_j$	$v_1 = 3$	$v_2 = 6$	$v_3 = 10$	$v_4 = 5$
$u_1 = 0$	3 100	5	7 +	11
$u_2 = 2$	1 50 +	4 80 -	6	3
$u_3 = -2$	5	8 40 +	12 80 -	7 50

Жоспары бар торларға:

$$v_1 - u_1 = 3 \quad u_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 v_1 - u_2 &= 1 & v_1 &= 3, \\
 v_2 - u_2 &= 4 & u_2 &= 2, \\
 v_2 - u_3 &= 8 & v_2 &= 6, \\
 v_3 - u_3 &= 12 & u_3 &= -2, \\
 v_4 - u_3 &= 7 & v_3 &= 10, \\
 & & v_4 &= 5,
 \end{aligned}$$

Жоспары жоқ торларға:

$$v_2 - u_1 \leq 5, \alpha_{12} = 1$$

$$v_3 - u_1 \leq 7, \alpha_{13} = 3$$

$$v_4 - u_1 \leq 11 \vee$$

$$v_3 - u_2 \leq 6, \alpha_{23} = 2$$

$$v_4 - u_2 \leq 3 \vee$$

$$v_1 - u_3 \leq 5 \vee$$

$$\beta_{\min} = \{100, 80, 80\} = 80$$

Жоспарды жақсарту:

4.2.5-кесте

$v_j \backslash u_i$	$v_1 = 3$	$v_2 = 8$	$v_3 = 7$	$v_4 = 7$
$u_1 = 0$	20 - 3	5 + 80	7	11
$u_2 = 2$	130 1	4	6	3
$u_3 = -2$	5 +	8 - 120	12	7 50

Жоспары бар торларға (4.2.5-кесте):

$$v_1 - u_1 = 3$$

$$v_1 - u_2 = 1$$

$$v_3 - u_1 = 7$$

$$v_2 - u_3 = 8$$

$$v_4 - u_3 = 7$$

$$u_1 = 0,$$

$$v_1 = 3,$$

$$u_2 = 0,$$

$$v_2 = 8,$$

$$u_3 = 0,$$

$$v_3 = 7,$$

$$v_4 = 7,$$

Жоспары жоқ торларға (4.2.5-кесте):

$$v_2 - u_1 \leq 5, \alpha_{12} = 3$$

$$v_4 - u_1 \leq 11 \vee$$

$$v_2 - u_2 \leq 4, \alpha_{22} = 2$$

$$v_3 - u_2 \leq 6 \vee$$

$$v_4 - u_2 \leq 3, \alpha_{24} = 2$$

$$v_1 - u_3 \leq 5 \vee$$

$$v_3 - u_3 \vee$$

Жоспарды келесі санға өзгертеміз:

$$\beta_{\min} = \{20, 120\} = 20$$

Есептің шешімі:

$$z^* = 5 \cdot 20 + 7 \cdot 80 + 130 + 5 \cdot 20 + 800 + 350 = 2040$$

$$x_{12}^* = 20, x_{13}^* = 80,$$

$$x_{21}^* = 130, x_{31}^* = 20,$$

$$x_{32}^* = 100, x_{34}^* = 50$$

4.3-мысал: Ашық транспорт есебі

4.3.1-кесте

$a_i \backslash b_j$	40	350	30	45
46	4	3	2	7
34	1	1	6	4
40	3	5	9	4

Алғашқы жоспарды минимальды элемент әдісімен табамыз (4.3.2-кесте):

4.3.2-кесте

$a_i \backslash b_j$	0 ~~10~~ ~~40~~	1 ~~11~~ ~~350~~	0 ~~30~~	0 ~~5~~ ~~45~~	
0 ~~5~~ ~~36~~ ~~46~~	4	3	2	7	
0 ~~24~~ ~~34~~	10	1	6	4	
0 ~~40~~	3	5	9	4	
0 ~~30~~	0	0	0	0	

$$z = 33 + 60 + 10 + 24 + 160 + 35 = 322$$

4.3.3-кесте

$v_j \backslash u_i$	$v_1 = 3$	$v_2 = 3$	$v_3 = 2$	$v_4 = 7$
$u_1 = 0$	4	3 11 +	2 30	7 5 -
$u_2 = 2$	1 10 +	1 24 -	6	4
$u_3 = 3$	3	5	9	4 40
$u_4 = 3$	0 30 -	0	0	0 +

Жоспары бар торларға (4.3.3-кесте):

$$v_2 - u_1 = 3 \quad u_1 = 0,$$

$$v_3 - u_2 = 2 \quad u_2 = 2,$$

$$v_4 - u_1 = 7 \quad u_3 = 3,$$

$$v_1 - u_2 = 1 \quad u_4 = 3,$$

$$v_2 - u_2 = 1 \quad v_1 = 3,$$

$$v_4 - u_3 = 4 \quad v_2 = 3,$$

$$v_1 - u_4 = 0 \quad v_3 = 2,$$

$$v_4 = 7,$$

Жоспары жоқ торларға (4.3.3-кесте):

$$v_1 - u_1 \leq 4 \vee$$

$$v_3 - u_2 \leq 6 \vee$$

$$v_4 - u_2 \leq 4, \alpha_{24} = 1$$

$$v_1 - u_3 \leq 3 \vee$$

$$v_2 - u_3 \leq 5 \vee$$

$$v_3 - u_3 \leq 9 \vee$$

$$v_2 - u_4 \leq 0 \vee$$

$$v_3 - u_4 \leq 0 \vee$$

$$v_4 - u_4 \leq 0, \alpha_{44} = 4$$

$$\beta_{\min} = \min\{5, 24, 30\} = 5$$

$u_i \backslash v_j$	$v_1 = 3$	$v_2 = 3$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$
$u_1 = 0$	4	3 16	2 30	7
$u_2 = 2$	1 15	1 19	6	4
$u_3 = -1$	3	5	9	4 40 - 0
$u_4 = 3$	+ 0 25 -	0	0	0 5 +

Жоспары бар торларға (4.3.4-кесте):

$$v_2 - u_1 = 3 \quad u_1 = 0,$$

$$v_3 - u_2 = 2 \quad u_2 = 2,$$

$$v_1 - u_2 = 1 \quad u_3 = -1,$$

$$v_2 - u_2 = 1 \quad u_4 = 3,$$

$$v_4 - u_3 = 4 \quad v_1 = 3,$$

$$v_1 - u_4 = 0 \quad v_2 = 3,$$

$$v_4 - u_4 = 0 \quad v_3 = 2,$$

$$v_4 = 3$$

Жоспары жок торларға (4.3.4-кесте):

$$v_1 - u_1 \leq 4 \vee$$

$$v_4 - u_1 \leq 7 \vee$$

$$v_3 - u_2 \leq 6 \vee$$

$$v_4 - u_2 \leq 4 \vee$$

$$v_1 - u_3 \leq 3, \alpha_{31} = 1$$

$$v_2 - u_3 \leq 5 \vee$$

$$v_3 - u_3 \leq 9 \vee$$

$$v_2 - u_4 \leq 0 \vee$$

$$v_3 - u_4 \leq 0 \vee$$

$$\beta_{\min} = \min \{25, 40\} = 25$$

4.3.5-кесте

$v_j \backslash u_i$	$v_1 = 3$	$v_2 = 3$	$v_3 = 2$	$v_4 = 4$
$u_1 = 0$	4	3	2	7
$u_2 = 2$	15	1	6	4
$u_3 = 0$	20	3	9	4
$u_4 = 4$	0	0	0	0

Жоспары бар торларға (4.3.5-кесте) :

$$v_2 - u_1 = 3 \quad u_1 = 0,$$

$$v_3 - u_1 = 2 \quad u_2 = 2,$$

$$v_1 - u_2 = 1 \quad u_3 = 0,$$

$$v_2 - u_2 = 1 \quad u_4 = 4,$$

$$v_1 - u_3 = 3 \quad v_1 = 3,$$

$$v_4 - u_3 = 4 \quad v_2 = 3,$$

$$v_4 - u_4 = 0 \quad v_3 = 2,$$

$$v_4 = 4$$

Есептің оптималды шешімі:

$$z^* = 262$$

$$x_{12}^* = 16, x_{13}^* = 30,$$

$$x_{21}^* = 15, x_{22}^* = 19,$$

$$x_{31}^* = 20, x_{34}^* = 15$$

$$4.1 \quad a_1 = 30, a_2 = 60, a_3 = 10; \\ b_1 = 15, b_2 = 40, b_3 = 25, b_4 = 20;$$

$$c = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \\ 8 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix};$$

$$4.2 \quad a_1 = 100, a_2 = 150, a_3 = 80; \\ b_1 = 80, b_2 = 140, b_3 = 110;$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix};$$

$$4.3 \quad a_1 = 4, a_2 = 6, a_3 = 10;$$

$$4.4 \quad a_1 = 12, a_2 = 14, a_3 = 4;$$

$$b_1 = 3, b_2 = 5, b_3 = 12;$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$b_1 = 9, b_2 = 10, b_3 = 11;$$

$$c = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix};$$

$$4.5 \quad a_1 = 7, a_2 = 12, a_3 = 11;$$

$$b_1 = 10, b_2 = 10, b_3 = 10;$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$4.6 \quad a_1 = 15, a_2 = 25, a_3 = 5;$$

$$b_1 = 5, b_2 = 15, b_3 = 15, b_4 = 10;$$

$$c = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 & 11 \\ 12 & 7 & 9 & 20 \\ 0 & 14 & 16 & 18 \end{pmatrix};$$

$$4.7 \quad a_1 = 70, a_2 = 90, a_3 = 50;$$

$$b_1 = 30, b_2 = 95, b_3 = 25, b_4 = 60;$$

$$c = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 4 \\ 6 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix};$$

$$4.8 \quad a_1 = 25, a_2 = 55, a_3 = 22;$$

$$b_1 = 45, b_2 = 15, b_3 = 22, b_4 = 20;$$

$$c = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & 10 \\ 6 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$4.9 \quad a_1 = 11, a_2 = 11, a_3 = 8;$$

$$b_1 = 5, b_2 = 9, b_3 = 9, b_4 = 7;$$

$$c = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix};$$

$$4.1 \quad a_1 = 1, a_2 = 7, a_3 = 8;$$

$$0 \quad b_1 = 2, b_2 = 2, b_3 = 2, b_4 = 10;$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$4.11 \quad a_1 = 50, a_2 = 70, a_3 = 40;$$

$$b_1 = 30, b_2 = 60, b_3 = 45, b_4 = 25;$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & 6 & 2 \\ 8 & 2 & 9 & 11 \end{pmatrix};$$

$$4.1 \quad a_1 = 115, a_2 = 70, a_3 = 68;$$

$$2 \quad b_1 = 95, b_2 = 38, b_3 = 50, b_4 = 70;$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 8 & 5 \\ 7 & 9 & 6 & 1 \end{pmatrix};$$

5. ДИСКРЕТТІ (БҮТІН САНДЫҚ) БАҒДАРЛАМАЛАУ

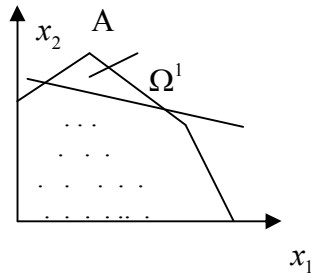
5.1 Дискретті бағдарламалау есептері

Бүтін сандық бағдарламалау есептерінің математикалық моделі:

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (5.1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1, n} \end{aligned} \right\}, \quad (5.1.2)$$

$$x_j - \text{бүтін}, j = \overline{1, n}. \quad (5.1.3)$$



Жазықтықта декарттық тік бұрыштық координаталар жүйесін қарастырайық, онда Ω (5.1.1)-(5.1.3) есептің мүмкін шешу саласы. Ω көпбұрышының A нүктесінде мақсаттық функция оптималды болсын дейік, бірақ A нүктесінің координаталары бүтін емес. Онда есепке қосымша шектеулер (S_i) енгізіп, Ω саласынан бүтін емес оптималды A нүктесі бар Ω^1 саласын қиып түсіруге болады. Дискретті бағдарламалау есептерін келесі әдістермен шығаруға болады:

1. Гоморидің кесіп түсіру әдісі.
2. Ленд-Дойг әдісі.

5.2 Гоморидің кесіп түсіру әдісі

Гоморидің кесіп түсіру әдісінің алгоритмі:

1 Алғашқы қадам.

(5.1.1)-(5.1.2) есепті тіке симплекс әдісімен шығарамыз. Кестеден еркін айнымалыларды, нөлдік жолдарды шығарғаннан кейін, тіректі және оптималды шешім тапқаннан кейін, келесі кестеге келеміз:

	$-y_1$	$-y_2$	$\dots$	$-y_s$	$-y_{s+1}$	$\dots$	$-x_n$	1
x_1	b_{11}	b_{12}	$\dots$	b_{1s+1}	b_{1s+1}	$\dots$	b_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_s	b_{s1}	b_{s2}	$\dots$	b_{ss+1}	b_{ss+1}	$\dots$	b_{sn}	b_s
y_{s+1}	b_{s+11}	b_{s+12}	$\dots$	b_{s+1s}	b_{s+1s+1}	$\dots$	b_{s+1n}	b_{s+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	b_{m1}	b_{m2}	$\dots$	b_{ms}	b_{ms+1}	$\dots$	b_{mn}	b_m
z	q_1	q_2	$\dots$	q_s	q_{s+1}	$\dots$	q_n	Q

мұнда $b_1, \dots, b_m \geq 0,$
 $q_1, \dots, q_n \geq 0, \quad (1)$

Егер x_j мәндері бүтін болса, онда (5.1.1)-(5.1.3) есептің шешімі табылды:

$$x_1^* = b_1,$$

$\vdots$

$$x_s^* = b_s,$$

$$z^* = q.$$

Егер x_j мәндері бүтін болмаса, онда жалпы қадамға көшеміз

2 Жалпы қадам.

1 - кестені келесідей көшірейік:

	$-\xi_1$	$\dots$	$-\xi_s$	$\dots$	$-\xi_n$	1
η_1	b_{11}	$\dots$	b_{1s}	$\dots$	b_{1n}	b_1
η_s	b_{s1}	$\dots$	b_{ss}	$\dots$	b_{sn}	b_s
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
η_m	b_{m1}	$\dots$	b_{ms}	$\dots$	b_{mn}	b_m
z	q_1	$\dots$	q_m	$\dots$	q_n	Q

(2)

2 – кестеге келесі қосымша шектеуді енгіземіз:

$$S_i = \sum_{j=1}^n (-\beta_{ij})(-S_j) - \beta_i \geq 0, \quad (5.1.4)$$

мұнда

$$\beta_{ij} = b_{ij} - [b_{ij}],$$

$$\beta_i = b_i - [b_i]$$

$[\cdot]$ - санның бүтін бөлігі.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & -\xi_1 & \dots & -\xi_S & \dots & -\xi_n & 1 \\
 \hline
 \eta_1 & b_{11} & \dots & b_{1S} & \dots & b_{1n} & b_1 \\
 \eta_S & b_{S1} & \dots & b_{SS} & \dots & b_{Sn} & b_S \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \eta_m & b_{m1} & & b_{mS} & & b_{mn} & b_m \\
 S_i & -\beta_{i1} & \dots & -\beta_{iS} & \dots & -\beta_{in} & -\beta_i \\
 \hline
 z & q_1 & \dots & q_m & \dots & q_n & Q
 \end{array} \quad (3)$$

Есептеуді қос мағыналы симплекс әдісімен жалғастырамыз.

5.2 - мысал:

$$\left. \begin{array}{l}
 z = 3x_1 + 7x_2 \rightarrow \max \\
 2x_1 + x_2 \leq 25 \\
 x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\
 x_1, x_2 - \text{бүтін}
 \end{array} \right\}$$

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	2	1	25
y_2	1	2	5 ←
z	-3	-7	0

	$-x_1$	$-y_2$	1
y_1	3/2	-1/2	45/2
x_2	1/2	1/2	5/2
z	1/2	7/2	35/2

	$-x_1$	$-y_2$	1
y_1	3/2	-1/2	45/2
x_2	1/2	1/2	5/2
S_2	-1/2	-1/2	-1/2 ←
z	1/2	7/2	35/2

	$-S_2$	$-y_2$	1
y_1	-3/2	1	-21
x_2	-1/2	0	-1
x_1	1	-1/2	-1/2
z	-1/2	-3/2	-17/2

	$-S_2$	$-y_2$	1
y_1	3	-2	42
x_2	1	0	2
x_1	-2	1	1
z	1	3	17

$$x^* = (1, 2)$$

$$z^* = 3 + 14 = 17$$

5.3 Ленд-Дойг әдісі

Ленд-Дойг әдісінің алгоритмі:

1-қадам. Алдымен (5.1.1)-(5.1.2) есепке тіке симплекс әдісін қолданып оптималды шешімді табамыз.

2-қадам. Егер x_j -шілер бүтін болса, онда (5.1.1)-(5.1.3) есептің оптималды шешімі табылды деп есептейміз. Қарсы жағдайда 3-қадамға көшеміз.

3- қадам. Келесі екі есепті құрастырамыз.

1-есеп

$$z = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \max \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \leq b_j, j = \overline{1, n} \quad (5)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$$

$$x_j \leq [x_j] \quad (6)$$

2-есеп

$$z = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \max \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \leq b_j, j = \overline{1, n} \quad (8)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$$

$$x_j \geq [x_j] + 1. \quad (9)$$

Екі есептің оптималды шешімін бөлек-бөлек іздейміз. Егер 1-ші немесе 2-есептің шешімі болмаса, онда $z = -\infty$ деп қоямыз.

4-қадам. Барлық шешімдер ішінен ең үлкен z -тің мәні бар шешімді таңдаймыз да, есептеуді жалғастырамыз.

5.3 - мысал:

$$\left. \begin{aligned} z &= 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 - \text{бүтін} \end{aligned} \right\}$$

Бұл есептің оптималды шешімі:

	$-y_1$	$-y_2$	1
x_1	4/10	-2/10	12/10
x_2	-1/10	3/10	22/10
z	8/10	6/10	124/10

$x_1 = 12/10, x_2 = 22/10$ – бүтін емес

Келесі екі есепті құрастырамыз:

1-есеп

$$z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2-есеп

$$z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1-есепті шығарайық:

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	3	2	8
y_2	1	4	10 ←
y_3	1	0	1
z	-3	-4	0

	$-x_1$	$-y_2$	1
y_1	10	-2	12
x_2	1	1	10
y_3	4	0	4
z	-8	4	40

	$-x_1$	$-y_2$	1
y_1	10/4	-2/4	3
x_2	1/4	1/4	10/4
y_3	1	0	1 ←
z	-2	1	10

	$-y_3$	$-y_2$	1
y_1	-10/4	-2/4	1/2
x_2	-1/4	1/4	9/4
x_1	1	0	1
z	2	1	12

1-есептің шешімі: $\{x_1 = 1, x_2 = 9/4, z = 12\}$.

2-есепті шығарайық:

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	3	2	8
y_2	1	4	10
y_4	-1	0	2 ←
z	-3	-4	0

	$-y_4$	$-x_2$	1
y_1	-3	-2	-2
y_2	-1	-4	-8
x_1	1	0	-2
z	3	4	-6

	$-y_4$	$-x_2$	1
y_1	3	2	2 ←
y_2	1	4	8
x_1	-1	0	2
z	-3	-4	6

	$-y_4$	$-y_1$	1
x_2	3	1	2
y_2	-10	-4	8
x_1	-2	0	4
z	6	4	20

	$-y_4$	$-y_1$	1
x_2	3/2	1/2	1
y_2	-5	-2	4
x_1	-1	0	2
z	3	2	10

2-есептің шешімі: $\{x_1^* = 2, x_2^* = 1, z^* = 10\}$.

1-есепте x_2^* -бүтін емес, сондықтан 1-есепті тағы екіге бөлеміз.
Сөйтіп 3- және 4-есептерді құрастырамыз:

3-есеп

$$\left. \begin{aligned} z &= 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

4-есеп

$$\left. \begin{aligned} z &= 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

3-есепті қарастырайық:

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	3	2	8
y_2	1	4	10
y_3	1	0	1
y_5	0	1	2 ←
z	-3	-4	0

	$-x_1$	$-y_3$	1
y_1	3	-2	4
y_2	1	-4	2
y_3	1	0	1 ←
x_2	0	1	2
z	-3	4	8

	$-y_3$	$-y_5$	1
y_1	-3	-2	1
y_2	-1	-4	1
x_1	1	0	1
x_2	0	1	2
z	3	4	11

3-есептің шешімі: $\{x_1^* = 2, x_2^* = 1, z^* = 11\}$.

4-ші есепті қарастырайық:

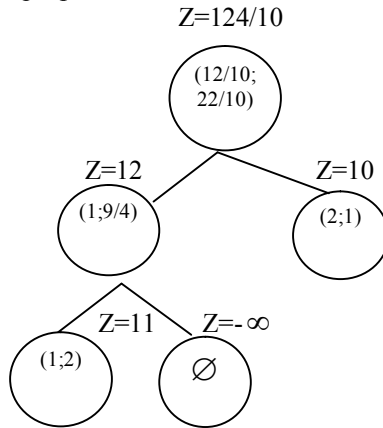
	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	3	2	8
y_2	1	4	10 ←
y_3	1	0	1
y_6	0	-1	-3
z	-3	-4	0

	$-x_1$	$-y_2$	1
y_1	10	-2	12
x_2	1	1	10
y_3	4	0	4
y_6	1	1	-2
z	-8	4	40

Бұл есептің шешімі жоқ, себебі тіректі шешім табылмады. Онда 4-есептегі мақсаттық функциясының мәні $-\infty$ деп аламыз.

Шығарылған есептің нәтижесін бұтаққа орналастырайық. Бұтақтан минус шексіздік және бүтін емес түбірлерін сызып тастаймыз. Сонда бұтақта екі бүтін шешімді түбір қалады. Олардың арасындағы $\{x_1^* = 2, x_2^* = 1, z^* = 11\}$ мысалдың нәтижесі болып есептеледі.

Нәтижелер бұтағы:



Қосымша есептер:

5.1) $z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 2 \end{array} \right\},$$

$x_j \geq 0$ – бүтін

$(j = 1, 2);$

5.2) $z = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 36 \\ x_2 \leq 13 \end{array} \right\},$$

$x_j \geq 0$ – бүтін

$(j = 1, 2);$

5.3) $z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{array} \right\},$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ – бүтін;

5.4) $z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{array} \right\},$$

$x_j \geq 0$ – бүтін

$(j = 1, 2);$

5.5) $z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 + 3x_2 \leq 7 \end{array} \right\},$$

$x_j \geq 0$ – бүтін

$(j = 1, 2);$

5.6) $z = 110x_1 + 90x_2 \rightarrow \max$

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 5 \end{array} \right\},$$

$x_j \geq 0$ – бүтін

$(j = 1, 2);$

5.7) $z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 \leq 17 \\ 10x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{array} \right\},$$

$x_j \geq 0$ – бүтін

$(j = 1, 2);$

5.8) $z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 9 \end{array} \right\},$$

$x_j \geq 0$ – бүтін

$(j = 1, 2);$

5.9) $z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 10x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{array} \right\},$$

$x_j \geq 0$ – бүтін

$(j = 1, 2);$

$$\begin{aligned}
 5.10) \quad & z = x_1 + x_2 \rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 6x_1 + 5x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 10 \end{aligned} \right\}, \\
 & x_j \geq 0 - \text{бүтін} \quad (j=1, 2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.12) \quad & z = x_1 + x_2 \rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 16 \end{aligned} \right\}, \\
 & x_j \geq 0 - \text{бүтін} \quad (j=1, 2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.14) \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 14 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \end{aligned} \right\}, \\
 & x_j \geq 0 - \text{бүтін} \quad (j=1, 2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.16) \quad & z = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1 - x_2 &\geq 1 \end{aligned} \right\}, \\
 & x_j \geq 0 - \text{бүтін} \quad (j=1, 2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.11) \quad & z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 2x_1 + 9x_2 &\leq 36 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \end{aligned} \right\}, \\
 & x_j \geq 0 - \text{бүтін} \quad (j=1, 2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.13) \quad & z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ 4x_1 + x_2 &\geq 10 \end{aligned} \right\}, \\
 & x_j \geq 0 - \text{бүтін} \quad (j=1, 2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.15) \quad & z = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ 5x_1 - 2x_2 &\leq 1 \end{aligned} \right\}, \\
 & x_j \geq 0 - \text{бүтін} \quad (j=1, 2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.17) \quad & z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 10 \end{aligned} \right\}, \\
 & x_j \geq 0 - \text{бүтін} \quad (j=1, 2);
 \end{aligned}$$

6. КОММИВОЯЖЕР ТУРАЛЫ ЕСЕП БЕЛГІЛЕУ ЕСЕБІНІҢ БІР ТҮРІ

Коммивояжер n пунктке (немесе қалаға) минимальды жолмен бір-бір реттен ғана кіріп, алғашқы (басқы) қалаға оралу керек. Қалалар арасында жол құны $C = \|c_{ij}\|$ матрицасымен берілген.

Коммивояжер туралы есептің математикалық моделі:

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = \overline{1, n}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, n}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер } i\text{-қаладан кейін } j\text{-қалаға барса} \\ 0, & \text{қарсы жағдайда} \end{cases}$$

Негізгі түсініктер

Цикл (t) деп реттелген қалалар жиынтығын (маршрутты) айтады, егер ол әрбір қаладан бір-бір реттен ғана өтсе

$$t = [(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)]$$

Сонда коммивояжердің жалпы жол шығыны t цикліне:

$$z(t) = \sum_{(i,j)} C_{ij}$$

Циклде матрицаның әрбір жолының және әрбір бағанының бір элементі ғана болады:

Егер i -ші жолдың әрбір элементінен немесе j -бағанның әрбір элементінен минимальдысын алсақ, онда келтірілген матрицаны табамыз.

Келтіру процесінде табылған минимальды элементтердің қосындысы – ол келтірілген константы болады ($h^{(k)}$), k – келтіру процесінің нөмірі.

6.1 Литтл алгоритмі

1-қадам. $k=1$.

2-қадам. Келтірілген матрицаны табу.

$$C'_{ij} = \min_j C_{ij}$$

$$C^*_{ij} = C_{ij} - C'_{ij}$$

$$C''_{ij} = \min_i C^*_{ij}$$

$$C^{**}_{ij} = C^*_{ij} - C''_{ij}$$

Ол үшін әрбір жолдың оң жағына ең кіші (минималды) элементті (коэффициентті) жазып, жолдың әрбір элементінен алып тастаймыз. Содан соң матрицаның төмен жағына әрбір бағанның минимальды элементін жазып, бағанның әрбір элементінен алып тастаймыз.

3-қадам. Келтірілген константаны табу. $h^{(k)}$ (минимальды элементтердің қосындысы), ол X жиынының төменгі шекарасы болады (максатты функцияның) $\omega(x) = h^{(k)}$.

4-қадам. Тарауға (Y жиыны) үміткерлер жұбын таңдау.

5-қадам. Үміткерлер үшін бағаларын анықтау:

$$\theta(i, j) = \min_{i' \neq i} C_{i'j} + \min_{j' \neq j} C_{ij'}$$

6-қадам. Барлық бағалардың ішінен ең үлкенін таңдаймыз:

$$\theta(k, l) = \max \theta(i, j)$$

7-қадам. $\overline{Y}$ жиыны үшін бағасын есептеу:

$$\omega(\overline{Y}) = \omega(x) + \theta(k, l)$$

8-қадам. Әрбір пункттен (қаладан) бір реттен ғана шығатын болғандықтан k -жолды матрицадан сызып тастаймыз. Әрбір қалаға (пунктке) бір-бір реттен ғана кіргендіктен, 1-бағанды да матрицадан сызып тастаймыз (шығарып тастаймыз). Пункттердің (қалалардың) барлығын аралау үшін (l, k) жұбына ∞ қоямыз.

9-қадам. Тексеру: алынған матрицаның шамасы 2×2 болса, екі жұп тарауға таңдалады. Қарсы жағдайда 10-қадамға көшу.

10-қадам. Келтіру рәсімі жасалады, $h^{(k+1)}$ есептеледі, Y жиынының бағасын анықтаймыз $\omega(Y) = \omega(x) + h^{(k+1)}$, $k = k + 1$, 4-қадамға көшу.

6.1 - мысал

	1	2	3	4	5	
1	x	4	10	9	4	4
2	2	x	9	7	6	2
3	8	5	x	5	9	5
4	5	8	10	x	7	5
5	1	5	4	8	x	1

	1	2	3	4	5
1	x	0	6	5	0
2	0	x	7	5	4
3	3	0	x	0	4
4	0	3	5	x	2
5	0	4	3	7	x
	0	0	3	0	0

	1	2	3	4	5
1	x	0	3	5	0
2	0	x	4	5	4
3	3	0	x	0	4
4	0	3	2	x	2
5	0	4	0	7	x

$$h^{(1)} = 20$$

$$\begin{array}{ll} C_{12} = 0 & \theta(1,2) = 0 \\ C_{15} = 0 & \theta(1,5) = 2 \\ C_{21} = 0 & \theta(2,1) = 4 \\ C_{32} = 0 & \theta(3,2) = 0 \\ C_{34} = 0 & \theta(3,4) = 5 \leftarrow \text{еңгілкен баға} \\ C_{41} = 0 & \theta(4,1) = 2 \\ C_{51} = 0 & \theta(5,1) = 0 \\ C_{53} = 0 & \theta(5,3) = 2 \end{array}$$

	1	2	3	5	
1	x	0	3	0	0
2	0	x	4	4	0
4	0	3	x	2	0
5	0	4	0	x	0
	0	0	0	0	

$$\begin{array}{ll} h^{(2)} = 0 & \theta(1,2) = 3 \\ C_{12} = 0 & \theta(1,5) = 2 \\ C_{15} = 0 & \theta(2,1) = 4 \leftarrow \text{еңгілкен баға} \\ C_{21} = 0 & \theta(4,1) = 2 \\ C_{41} = 0 & \theta(5,1) = 0 \\ C_{51} = 0 & \theta(5,3) = 3 \\ C_{53} = 0 & \end{array}$$

	2	3	5	
1	x	3	0	0
4	3	x	2	2
5	4	0	x	0

	2	3	5
1	x	3	0
4	1	x	0
5	4	0	x
	1	0	0

	2	3	5
1	x	3	0
4	0	x	0
5	3	0	x

$$C_{15} = 0$$

$$\theta(1,5) = 3$$

$$C_{42} = 0$$

$$\theta(4,2) = 0$$

$$C_{45} = 0$$

$$\theta(4,5) = 0$$

$$C_{53} = 0$$

$$\theta(5,3) = 6 \leftarrow$$

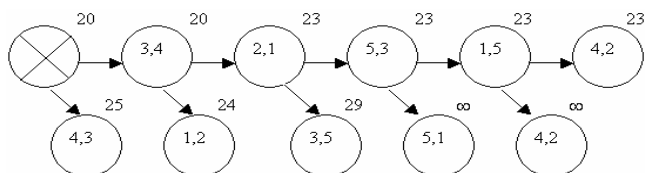
еңгізген баға

	2	5	
1	x	0	0
4	0	0	0
	0	0	

$$h^{(4)} = 0$$

$$3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 3$$

$$z^* = 23$$



Қосымша есептер:

6.1

x	39	45	2	51	33
30	x	20	33	40	35
54	16	x	55	22	56
19	36	25	x	18	43
29	8	8	12	x	25
16	47	31	14	8	x

6.2

x	6	56	35	48	29
34	x	46	46	55	26
29	31	x	32	13	42
26	34	12	x	17	7
38	35	40	13	x	47
60	25	59	36	31	x

6.3

x	4	39	22	10	47
58	x	56	18	4	35
34	29	x	17	57	18
52	4	22	x	15	37
41	44	25	11	x	32
11	6	19	2	58	x

6.4

x	15	43	38	10	45
44	x	18	6	49	40
41	42	x	19	1	48
33	44	20	x	20	21
40	17	16	26	x	15
3	4	37	54	36	x

6.5

x	58	56	13	21	54
21	x	58	43	56	14
4	46	x	38	7	22
44	56	42	x	6	60
3	34	36	11	x	17
59	47	40	60	13	x

6.6

x	36	51	24	11	46
28	x	17	46	10	20
7	41	x	58	2	35
25	60	45	x	55	59
48	20	33	26	x	38
50	27	19	14	52	x

6.7

×	16	15	32	53	55
27	×	34	50	2	31
33	39	×	42	36	39
45	22	59	×	28	26
55	49	14	18	×	12
28	14	8	48	35	×

6.8

×	33	41	46	11	21
10	×	26	28	39	43
1	57	×	20	60	28
50	25	35	×	42	7
43	44	51	19	×	34
55	22	30	50	53	×

6.9

×	13	55	19	16	19
58	×	23	54	48	45
25	53	×	38	59	24
17	11	16	×	60	53
1	38	18	36	×	1
19	11	32	44	3	×

6.10

×	30	57	34	24	44
14	×	9	14	30	17
32	21	×	53	21	23
25	39	28	×	48	21
42	5	29	56	×	55
16	17	37	5	30	×

6.11

×	11	14	22	17	30
20	×	10	54	31	4
5	18	×	29	20	40
31	3	23	×	42	33
34	13	33	5	×	32
39	44	28	42	2	×

6.12

×	10	26	44	21	17
14	×	23	22	54	58
33	4	×	5	49	57
42	55	29	×	14	35
20	53	38	40	×	33
52	17	45	41	50	×

6.13

×	40	34	50	10	44
18	×	3	38	52	10
23	12	×	47	42	5
54	29	56	×	9	2
17	31	23	8	×	4
28	53	58	15	41	×

6.14

×	37	7	46	57	20
26	×	34	10	42	16
42	1	×	26	21	13
30	20	60	×	50	10
43	47	28	38	×	36
16	17	53	36	2	×

6.15

×	44	6	49	28	53
40	×	4	30	42	51
3	47	×	55	20	24
1	26	30	×	33	47
18	24	13	33	×	46
56	25	11	22	40	×

6.16

×	19	40	30	15	9
56	×	14	57	12	8
42	4	×	28	33	24
1	12	5	×	21	16
21	16	38	52	×	59
51	1	17	22	29	×

6.17

×	28	29	2	2	58
48	×	41	13	51	23
56	53	×	59	46	57
5	31	48	×	53	20
26	54	42	48	×	27
43	22	15	30	9	×

6.18

×	52	8	50	4	16
38	×	39	51	13	44
55	51	×	1	27	27
18	39	5	×	28	21
4	3	44	17	×	29
57	28	52	21	53	×

6.19

×	12	41	57	45	17
49	×	48	42	40	53
22	5	×	23	51	2
23	8	19	×	46	26
49	44	3	22	×	21
22	56	54	16	54	×

6.20

×	16	2	11	10	11
3	×	29	29	5	37
43	25	×	31	35	36
50	40	9	×	4	2
46	39	15	14	×	59
52	37	45	27	60	×

6.21

×	21	17	21	41	10
51	×	25	35	16	32
5	16	×	38	21	50
37	12	28	×	2	2
22	54	49	31	×	9
43	51	7	19	30	×

6.22

×	10	7	36	40	36
34	×	58	48	33	53
47	30	×	59	10	15
31	12	15	×	22	11
9	16	3	13	×	9
36	4	14	20	48	×

6.23

×	1	7	3	14	2
3	×	6	9	1	24
6	14	×	3	7	3
2	3	5	×	9	4
15	7	11	2	×	4
20	5	13	4	13	×

6.24

×	7	10	13	4	2
11	×	5	6	18	10
13	4	×	8	6	2
7	5	10	×	15	12
11	13	4	3	×	8
7	6	4	10	14	×

6.25

×	5	9	6	3	5	9
8	×	8	8	5	9	2
6	9	×	1	6	7	3
7	11	4	×	4	2	9
4	6	3	2	×	2	8
5	2	2	8	4	×	3
8	1	3	16	5	3	×

6.26

×	6	12	6	4	8	1
6	×	10	5	4	3	3
8	7	×	11	3	11	8
5	4	11	×	5	8	6
5	2	7	8	×	4	7
6	3	11	5	4	×	2
2	3	9	7	4	3	×

6.27

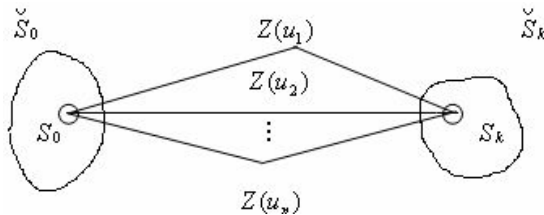
×	1	7	3	14	2
3	×	6	9	1	24
6	14	×	3	7	3
2	3	5	×	9	11
15	7	11	2	×	4
20	5	13	4	13	×

6.28

×	2	6	5	3	7
1	×	4	5	4	2
3	7	×	6	7	3
5	3	7	×	4	2
2	7	4	3	×	5
4	3	6	1	7	×

7. ДИНАМИКАЛЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУ

Қайсыбір S жүйе бастапқы (алғашқы) $S_0 \in \overset{\cup}{S_0}$ күйде болсын дейік. Уақыт өткен сайын оның күйі өзгереді де, жүйе ақырғы (соңғы) күйге енеді ($S_k \in \overset{\cup}{S_k}$). Жүйе күйінің өзгеру процесі қайсыбір критерийге (Z) байланысты. Есептің мәні мынада: критерий $Z(u)$ оптималды мәнін Z^* қабылдайтын етіп, S жүйесінің алғашқы қалыптан апаратын мүмкін боларлықтай басқарудың жиыны U ішінен оптималды басқаруын U^* табу керек.



7.1 – сурет.

7.1 Динамикалық басқаруды әр кезең бойынша құру принциптері

Динамикалық бағдарламалау дегеніміз көп қадамды процесті әр кезең бойынша жоспарлау, оның үстіне бүкіл процестің дамуын еске ала отырып, әр кезеңде тек бір ғана қадамды оптималды күйге келтіру (оптималдау).

Шешім қабылдауы болашақ кезден тәуелсіз соңғы k қадамда ең үлкен әсер бере алатын басқару таңдалады. Осы қадам жоспарланған соң оған ақырғы қадам алдындағы $(k-1)$ қадамын, оның үстіне $(k-2)$ қадамын және тағы сол сияқты қосады. Соңғы қорытынды бойынша S_0 алғашқы күйді табады:

1) k қадамын жоспарлау үшін, $(k-1)$ қадамда жүйенің қалпын білу кажет.

Егер $(k-1)$ қадамда жүйенің қалпы белгілі болмаса, онда берілген процестің сипаттамаларын басшылыққа ала отырып, жүйенің мүмкін болар қалыптары туралы әртүрлі болжам жасалады:

$$S_n = F(S_{(n-1)}, U_n) \quad (7.1.1)$$

Жүйенің қалпы n - қадамының ($n = \overline{1, k-1}$) соңында тек оның алдындағы қалыпқа $S(n-1)$ және берілген қадамдағы U_n басқаруға тәуелді.

Жүйенің мұндай қасиеті "кейінгі әсердің жоқтығы" деп аталады, ал (7.1.1) - қалып теңдеуі деп аталады.

2) Соңғы k -қадамда әрбір болжамға $S_{(k-1)}$ оптималды басқару таңдалады:

$$Z_k^*(U_k^*(S_{(k-1)})) = \underset{U_k \in D_k}{extr} f_k(U_k, S_{(k-1)}) \quad (7.1.2)$$

Мұнда, $f_k(U_k, S_{(k-1)})$ -қадамдағы тиімділік көрсеткіші;

D_k – дәлдік шектегі басқарулар саласы;

Мұндай оптималды басқару шартты оптималды басқару деп аталады.

3) $(n-1)$ – қадамда дәл осылай істейміз, тек шартты оптималды басқаруды n – шартты оптималды басқаруды ескере отырып, таңдаймыз:

$$Z_n^*(U_n^*(S_{(n-1)})) = \underset{U_n \in D_n}{extr} \{f_{nk}(U_n, S_{(n-1)}) + Z_{(n+1)}^*(U_{(n+1)}(S_n))\}$$

(7.1.3)-динамикалық бағдарламаның негізгі функционалды теңдеуі немесе Беллман теңдеуі деп аталады.

(7.1.3)-теңдеуі берілген n – қадамнан k – ші қадамға дейінгі тиімділіктер қосындысын сипаттайды.

4) Соңында алғашқы күйге келеміз $S_0 \in \overset{\cup}{S_0}$. Бірінші қадам үшін мүмкін болар күй – қалып туралы болжамдар жасамаймыз, өйткені ол жағдай белгілі S_0 – қалыптан S_k – қалпына өтіп бүкіл процесс үшін іздеген оптималды басқаруды табамыз.

7.2 Динамикалық бағдарламаның есептеу схемасы

Бірінші кезең.

1° 7.1.3 - теңдеуді шешуді тізбек бойынша 7.1.2- теңдеуді шешуден бастап жүргізеді— бұл шартты оптималдау кезеңі.

2° Экстремум шарттарына сәйкес k жеке есептердің соңғы шешулерінің қорытындылары бойынша функциялардың екі тізбегін анықтайды:

$$Z_n^*(U_n^*(S_{(n-1)})) \text{ және } U_n^*(S_{(n-1)}).$$

Бұл функциялар дискретті есептерде кесте түрінде, ал үздіксіз есептерде аналитикалық түрде алынады.

Екінші кезең.

3° 1-кезеңді орындаған соң (шартты оптималдау кезеңін) 2-кезеңге көшеміз (шартсыз оптималдау кезеңі):

а) Егер S_0 берілсе, онда

$$Z^* = Z_1^*(U_1^*(S_0)) \quad (7.2.1)$$

табамыз, содан соң іздеген шартсыз оптималды басқаруды тізбек бойынша табамыз:

$$S_0 \rightarrow U_1^* \rightarrow S_1 \rightarrow U_2^* \rightarrow K \rightarrow U_n^* \quad (7.2.2)$$

ә) Егер S_0 белгісіз болса, онда S_0 келесі есептің нәтижесіндей:

$$S_0^* : Z^* = \underset{S_0 \in S_0}{\text{extr}} \{Z_1^*(U_1^*(S_0))\} \quad (7.2.3)$$

осыдан (7.2.2) бойынша оптималды басқаруды табамыз.

7.3 Динамикалық бағдарламалаудың моделін құру ережесі

1. Қадамдарға бөлудің тәсілдерін таңдайды;
2. Қалып параметрлерін енгізеді $S_n = (S_{n1}, K, S_{np})$ және басқару айнымалыларды енгізеді $U_n = (U_{n1}, K, U_{nr})$;
3. Қалып тендеуін (7.1.1) құрастырып жазады;
4. n-қадамда тиімділік көрсеткішін енгізеді және мақсатты функциясының тиімділік көрсеткішін қосады:

$$Z = \sum_{n=1}^k f_n(U_n, S_{(n-1)}); \quad (7.3.1)$$

5. Қарастыруға extr шарттарын $Z_n^*(U_n^*(S_{(n-1)}))$ n- қадамынан процестің ақырына дейінгі тиімділік көрсеткіштерін және осы қадамда шартты оптималды басқаруды $U_n^*(S_{(n-1)})$ енгізеді;

6. Әрбір қадам үшін есеп шектеулерінен n-қадамдағы дәлдік шектегі басқару жиынын D_n анықтайды;

7. Беллманның (7.1.2) және (7.1.3) функционалды тендеулерін жазу.

7.1 – мысал. Дискретті есеп

Төрт мекемеге бөлінетін алғашқы қаржы мөлшері 200 мың теңгеге тең. Бұл қаржыны 40 мың теңгеге есе болатындай етіп бөлу керек. Келесі кестеде әрбір мекемеден түсетін түсім функциясы берілген:

7.1- кесте

$f(x)$ x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
40	8	6	1	4
80	10	9	4	6
120	11	10	10	8
160	12	13	11	13
200	18	15	18	16

x_1, x_2, x_3, x_4 – әр мекемеге бөлінетін қаржы мөлшері.

$$\xi_0 = 200$$

$$\xi_1 = \xi_0 - x_4$$

$$\xi_2 = \xi_1 - x_3$$

$$\xi_3 = \xi_2 - x_2$$

7.2 – кесте

Z	0	40	80	120	160	200
$D(Z)$	0	8	10	11	12	18

Бірінші қадам. Бір мекемені қарастырғандықтан, барлық қаржы өзіне бөлінеді:

$$x_1^*(0) = 0 \quad x_1^*(40) = 40 \quad x_1^*(80) = 80 \quad x_1^*(120) = 120$$

$$x_1^*(160) = 160 \quad x_1^*(200) = 200$$

Екінші қадам. Екі мекемені қарастырамыз:

1) $Z = 0, D_{1,2} = 0, x_2^*(0) = 0$

2) $Z = 40$

$$D_{1,2}(40) = \max[f_2(0) + D_1(40); f_2(40) + D_1(0)] = \max[0 + 8; 6 + 0] = 8$$

$$x_2^*(40) = 0$$

3) $Z = 80$

$$\begin{aligned} D_{1,2}(80) &= \max[f_2(0) + D_1(80); f_2(40) + D_1(40); f_2(80) + D_1(0)] = \\ &= \max[0 + 10; 6 + 8; 9 + 0] = \max[10; 14; 9] = 14 \end{aligned}$$

$$x_2^*(80) = 40$$

4) $Z = 120$

$$D_{1,2}(120) = \max[f_2(0) + D_1(120); f_2(40) + D_1(80); \\ f_2(80) + D_1(40); f_2(120) + D_1(0)] = \max[0 + 11; 6 + 10; 9 + 8; 10 + 0] = 17 \\ x_2^*(120) = 80$$

5) $Z = 160$

$$D_{1,2}(160) = \max[f_2(0) + D_1(160); f_2(40) + D_1(120); f_2(80) + D_1(80); \\ f_2(120) + D_1(40); f_2(160) + D_1(0)] = \max[0 + 12; 6 + 11; 9 + 10; 10 + 8; 13 + 0] = 19 \\ x_2^*(160) = 80$$

6) $Z = 200$

$$D_{1,2}(200) = \max[f_2(0) + D_1(200); f_2(40) + D_1(160); f_2(80) + D_1(120); \\ f_2(120) + D_1(80); f_2(160) + D_1(40); f_2(200) + D_1(0)] = \\ = \max[0 + 18; 6 + 12; 9 + 11; 10 + 10; 13 + 8; 15 + 0] = 21 \\ x_2^*(200) = 160$$

Үшінші қадам. Үш мекемені қарастырамыз:

1) $Z = 0, D_{1,2,3} = 0, x_3^*(0) = 0$

2) $Z = 40$

$$D_{1,2,3}(40) = \max[f_3(0) + D_{1,2}(40); f_3(40) + D_{1,2}(0)] = \\ = \max[0 + 8; 1 + 0] = \max[8; 1] = 8 \\ x_3^*(40) = 0$$

3) $Z = 80$

$$D_{1,2,3}(80) = \max[f_3(0) + D_{1,2}(80); f_3(40) + D_{1,2}(40); \\ f_3(80) + D_{1,2}(0)] = \max[0 + 14; 1 + 8; 4 + 0] = \max[14; 9; 4] = 14 \\ x_3^*(80) = 0$$

4) $Z = 120$

$$D_{1,2,3}(120) = \max[f_3(0) + D_{1,2}(120); f_3(40) + D_{1,2}(80); f_3(80) + D_{1,2}(40); \\ f_3(120) + D_{1,2}(0)] = \max[0 + 17; 1 + 14; 4 + 8; 10 + 0] = 17 \\ x_3^*(120) = 0$$

5) $Z = 160$

$$D_{1,2,3}(160) = \max[f_3(0) + D_{1,2}(160); f_3(40) + D_{1,2}(120); f_3(80) + D_{1,2}(80); \\ f_3(120) + D_{1,2}(40); f_3(160) + D_{1,2}(0)] = \max[0 + 19; 1 + 17; 4 + 14; 10 + 8; 11 + 0] = \\ = 19 \quad x_3^*(160) = 0$$

6) $Z = 200$

$$D_{1,2,3}(200) = \max[f_3(0) + D_{1,2}(200); f_3(40) + D_{1,2}(160); f_3(80) + D_{1,2}(120); f_3(120) + D_{1,2}(80); f_3(160) + D_{1,2}(40); f_3(200) + D_{1,2}(0)] =$$

$$= \max[0 + 21; 1 + 19; 4 + 17; 10 + 14; 11 + 8; 18 + 0] = 24$$

$$x_3^*(200) = 120$$

Төртінші қадам. Төрт мекемені қарастырамыз:

$$Z = 200$$

$$D_{1,2,3,4}(200) = \max[f_4(0) + D_{1,2,3}(200); f_4(40) + D_{1,2,3}(160); f_4(80) + D_{1,2,3}(120); f_4(120) + D_{1,2,3}(80); f_4(160) + D_{1,2,3}(40); f_4(200) + D_{1,2,3}(0)] =$$

$$= \max[0 + 24; 4 + 19; 6 + 17; 8 + 14; 13 + 8; 16 + 0] = 24$$

$$x_4^*(200) = 0$$

Жауабы: $x_4^*(200) = 0$, $\xi_1 = 200 - 0 = 200$

$$x_3^*(200) = 120, \xi_2 = 200 - 120 = 80$$

$$x_2^*(80) = 40, \xi_3 = 80 - 40 = 40$$

$$x_1^*(40) = 40,$$

$$x^* = \{40; 40; 120; 0\} \quad F^* = 8 + 6 + 10 + 0 = 24 \text{ мың теңге.}$$

Қосымша есептер:

7.1

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
20	9	11	16	13
40	18	19	32	27
60	24	30	40	44
80	38	44	57	69
100	50	59	70	73

7.2

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
40	9	11	13	12
80	17	34	28	35
120	29	46	37	40
160	38	53	49	54
200	47	75	61	73

7.3

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
10	7	9	17	16
20	29	19	27	30
30	37	28	37	42
40	41	37	48	65
50	59	46	66	81

7.4

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
30	9	12	11	14
60	20	25	20	23
90	35	34	32	40
120	44	46	48	50
150	57	57	61	58

7.5

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
15	9	8	12	7
30	18	19	25	15
45	29	30	51	52
60	41	47	58	59
75	60	58	69	60

7.6

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
35	11	13	12	10
70	21	20	22	27
105	40	42	34	33
140	54	45	55	57
175	62	61	60	69

7.7

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
25	12	16	9	15
50	26	21	17	25
75	40	36	35	51
100	60	49	51	62
125	72	63	65	76

7.8

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
45	14	12	13	7
90	24	30	25	33
135	37	42	45	46
180	45	58	62	60
225	58	71	70	68

7.9

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
50	16	10	15	17
100	28	29	27	23
150	36	42	46	38
200	49	50	58	53
250	60	74	65	67

7.10

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
60	12	14	11	16
120	28	26	24	21
180	39	40	43	36
240	47	51	51	49
300	69	68	68	72

7.11

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
55	9	11	16	13
110	17	34	28	35
165	37	28	37	42
220	44	46	48	50
275	60	58	69	60

7.12

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
20	9	11	13	12
40	29	19	27	30
60	37	28	37	42
80	44	46	48	50
100	60	58	69	60

7.13

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
10	7	9	17	16
20	20	25	20	23
30	29	30	51	52
40	38	44	57	69
50	47	75	61	73

7.14

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
40	9	12	11	14
80	18	19	25	15
120	29	46	37	40
160	44	46	48	50
200	60	58	69	60

7.15

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
30	9	8	12	7
60	18	19	32	27
90	29	30	51	52
120	41	37	58	65
150	57	57	61	78

7.16

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
50	11	13	12	10
100	26	21	17	25
150	37	42	45	46
200	47	51	51	49
250	62	61	60	69

7.2 – мысал. Үздіксіз есеп

Екі өндірісті дамыту үшін төрт жылғы қаржылар бөлінген: $z_0 = \xi_0 = 10000$ тг. Бір жылғы қаржы мөлшері 1 - өндірістен кіріс $f_1(x) = 0,4x$ алуға мүмкіндік береді және келесі мөлшерге дейін азаяды $\varphi_1(x) = 0,5x$. Оған сәйкес 2-өндірістен: $f_2(y) = 0,3y$, $\varphi_2(y) = 0,8y$. Жылдың соңында қалған қаржы қайта бөлінеді (өндіріске енгізіледі). Жаңа қаржы өндіріске түспейді. Қаржы жыл сайын толық бөлінеді.

Толық кіріс максимальды болатындай етіп қаржыларды бөлу керек.

Есептің шешімі:

Төрт жылды 4 кезеңге бөлеміз (әр жылға сәйкес бір кезең).

$$k = 4, \quad n = 4, 3, 2, 1$$

Тәуелсіз айнымалыларды енгіземіз (есепте бір айнымалы болған дұрыс):

$x_k - k$ - жылы 1-өндіріске бөлінген қаржы.

Қаржы жыл сайын толық бөлінгендіктен 2-өндіріске келесідей болады:

$$y_k = \xi_{k-1} - x_k$$

Осы жағдайда есеп бір өлшемді болады.

n - қадамның тиімділік көрсеткіші:

$$f_1(x_k) + f_2(\xi_{k-1} - x_k) = 0,4x_k + 0,3(\xi_{k-1} - x_k) = 0,1x_k + 0,3\xi_{k-1}$$

n - жылдан қалған қалдықтар:

$$\varphi_1(x_k) + \varphi_2(\xi_{k-1} - x_k) = 0,5x_k + 0,8(\xi_{k-1} - x_k) = 0,8\xi_{k-1} - 0,3x_k$$

Соңғы жылдың оптималды басқаруы:

$$z_4^*(\xi_3) = \max_{0 \leq x_4 \leq \xi_3} \{0,1x_4 + 0,3\xi_3\}$$

Негізгі функционалды теңдеу:

$$z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{0 \leq x_k \leq \xi_{k-1}} \{0,1x_k + 0,3\xi_{k-1} + z_{k+1}^*(0,8\xi_{k-1} - 0,3x_k)\}, \quad k=3,2,1.$$

Есептеулер:

Бірінші қадам. Шартты оптималдау кезеңі:

1)

$$z_4^*(\xi_3) = \max_{0 \leq x_4 \leq \xi_3} \{0,1x_4 + 0,3\xi_3\} = \max_{0 \leq x_4 \leq \xi_3} \{0,3\xi_3; 0,4\xi_3\} = 0,4\xi_3, \quad x_4^*(\xi_3) = \xi_3$$

2)

$$\begin{aligned} z_3^*(\xi_2) &= \max_{0 \leq x_3 \leq \xi_2} \{0,1x_3 + 0,3\xi_2 + 0,4(0,8\xi_2 - 0,3x_3)\} = \max_{0 \leq x_3 \leq \xi_2} \{-0,02x_3 + 0,62\xi_2\} = \\ &= \max_{0 \leq x_3 \leq \xi_2} \{0,62\xi_2; 0,6\xi_2\} = 0,62\xi_2, \quad x_3^*(\xi_2) = 0 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} z_2^*(\xi_1) &= \max_{0 \leq x_2 \leq \xi_1} \{0,1x_2 + 0,3\xi_1 + 0,62(0,8\xi_1 - 0,3x_2)\} = \max_{0 \leq x_2 \leq \xi_1} \{-0,086x_2 + 0,796\xi_1\} = \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq \xi_1} \{0,796\xi_1; 0,71\xi_1\} = 0,796\xi_1, \quad x_2^*(\xi_1) = 0 \end{aligned}$$

$$4) z_1^*(\xi_0) = \max_{0 \leq x_1 \leq \xi_0} \{0,1x_1 + 0,3\xi_0 + 0,796(0,8\xi_0 - 0,3x_1)\} =$$

$$= \max_{0 \leq x_1 \leq \xi_0} \{-0,1388x_1 + 0,9368\xi_0\} = 0,9368\xi_0. \quad x_1^*(\xi_0) = 0$$

Екінші қадам. Шартсыз оптималдау кезеңі:

$$\xi_0 = 10000 \quad z_{\max} = 9368$$

$$x_1^* = 0, \quad \xi_1 = 0,8\xi_0 - 0,3x_1 = 0,8 \cdot 10000 - 0,3 \cdot 0 = 8000$$

$$z_2^* = 0,796 \cdot 8000 = 6368$$

$$x_2^* = 0, \quad \xi_2 = 0,8 \cdot 8000 - 0,3 \cdot 0 = 6400$$

$$z_3^* = 0,62 \cdot 6400 = 3968$$

$$x_3^* = 0, \quad \xi_3 = 0,8 \cdot 6400 - 0,3 \cdot 0 = 5120$$

$$z_4^* = 0,4 \cdot 5120 = 2048$$

$$x_4^* = 5120$$

Үздіксіз есептің жауабы 7.3 - кестесінде келтірілген:

7.3 – кесте

Мекеме	Жылдар			
	1	2	3	4
I	0	0	0	5120
II	10000	8000	6400	0

Қосымша есептер:

Вариант	$f_1(x)$	$f_2(y)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(y)$	ξ_0	N
7.17	$1 - e^{-x}$	$1 - e^{-2y}$	$0,75x$	$0,3y$	2	5
7.18	$0,5x$	$0,7y$	$0,5x$	$0,6y$	10	5
7.19	$0,6(x-1)^2$	$0,5y^2$	$0,9x$	$0,1y$	30	5
7.20	$1 - e^{-2x}$	$1 - e^{-3y}$	$0,7x$	$0,2y$	4	5
7.21	x^2	$2y^2$	$0,6x$	$0,3y$	10	4
7.22	$3x^2$	$2y^2$	$0,45x$	$0,8y$	20	4
7.23	x^2	$3y^2$	$0,5x$	$0,2y$	30	4
7.24	$4x^2$	$2y^2$	$0,3x$	$0,7y$	10	4
7.25	$2x^2$	$4y^2$	$0,7x$	$0,5y$	30	4
7.26	$2x^2$	$3y^2$	$0,8x$	$0,4y$	20	4

8. БЕЙСЫЗЫҚТЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУ

Есептің математикалық моделі келесі түрде берілген дейік

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g_i(x) \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Егер $f(x)$ немесе $g_i(x)$ - бейсызық функция болса, онда бейсызық бағдарламалау есептерін қарастырамыз.

8.1 Бейсызықтық бағдарламалау есебінің қос мағыналылығы

Тіке есеп

$$f(x) \rightarrow \min$$

$$i = \overline{1, m}$$

$$h_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, \lambda}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, k}$$

$$x_j, \quad j = \overline{(k+1), n}$$

Қос мағыналы есеп

$$L(x, u, v) \rightarrow \max$$

$$v_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$$

$$u_i, \quad i = \overline{1, \lambda}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum u_i \cdot \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} + \sum v_i \cdot \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} \geq 0, \quad j = \overline{1, k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum u_i \cdot \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} + \sum v_i \cdot \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{(k+1), n}$$

Қос мағыналы есеп құру ережелері:

1. Талдап қорытылған Лагранж функциясы қос мағыналы есептің мақсатты функциясы болып табылады:

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i \cdot g_i(x) + \sum_{i=1}^{\lambda} v_i \cdot h_i(x)$$

2. Тіке есептің мақсаттық функциясының минималдануы қос мағыналы есепте мақсаттық функциясының максималдануымен ауыстырылады.

3. Тіке есептің әрбір шектеу-теңсіздігіне қос мағыналы есептің еркін емес айнымалылары u_i сәйкес келеді.

4. Тіке есептің әрбір шектеу-теңдіктеріне қос мағыналы есептің еркін айнымалылары сәйкес келеді

5. Тіке есептің әрбір еркін емес айнымалыларына қос мағыналы есептің шектеу- теңсіздіктері сәйкес келеді

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum u_i \cdot \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} + \sum v_i \cdot \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} \geq 0, \quad j = \overline{1, k}$$

6. Тіке есептің әрбір еркін айнымалыларына қос мағыналы есептің шектеу-теңдіктері сәйкес келеді.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum u_i \cdot \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} + \sum v_i \cdot \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{(k+1), n}$$

8.1.1- мысал:

Тіке есеп	Қос мағыналы есеп
$Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + x_2 \rightarrow \min$	$L(x, u, v) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + x_2 +$ $+ u_1(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 13) +$ $+ u_2(2x_1 + x_2^2 + x_3 - 6) +$ $+ v(x_1^2 + 2x_2 - 8) \rightarrow \max$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 13$	$u_1 \geq 0$
$2x_1 + x_2^2 + x_3 \leq 6$	$u_2 \geq 0$
$x_1^2 + 2x_2 = 8$	v
$x_1 \geq 0$	$2x_1 - 2 + u_1 + 2u_2 + 2vx_1 \geq 0$
x_2	$2x_2 + 1 + 2u_1 + 2u_2x_2 + 2v = 0$
$x_3 \geq 0$	$2x_3 + 3u_2 + u_2 \geq 0$

Қос мағыналылықтың бірінші теоремасы

Егер барлық функциялар $f(x)$, $g_i(x)$, $h_i(x)$, - дифференциалды болса, ал x^* - тіке есептің оптималды шешімі болса, онда (x^*, u^*, v^*) векторы – қос мағыналы есептің оптималды шешімі болады және жұп есептердің экстремальды шешімдері тең болады.

Қос мағыналылықтың екінші теоремасы

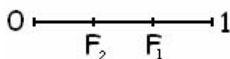
Барлық $f(x)$, $g_i(x)$, $h_i(x)$ - функцияларының екінші туындылары бар деп санайық және бір функция $g_i(x) = 0$, ал (x^*, u^*, v^*) векторы – қос мағыналы есептің оптималды шешімі болсын, онда екі есептің оптималды шешімдері үшін келесі шарт орындалады:

$$u_i^* g_i^*(x_i^*) = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

8.2 Бір өлшемді ізденіс әдістері

Фиббоначи саны

Барлық бірөлшемді әдістер ізденіс аралығын екі кіші кесімге белгілі пропорцияда бөлуге негізделген.



$$\frac{1}{F_1} = \frac{F_1}{F_2}, \text{ сонда } F_1 = \sqrt{F_2}$$

Осы жағдайда Фиббоначи алтын сандары: $F_1 = 0,62$, $F_2 = 0,38$,

8.3 Алтын қиық әдісі

Есептің берілгені:

$$f(x) \rightarrow \min$$

$$a \leq x \leq b, \quad \Delta;$$

Алтын қиық әдісінің алгоритмі:

$$1. \quad k = 0. \quad x_2^{(k)} = b, \quad x_1^{(k)} = a, \quad \Delta^{(k)} = x_2^{(k)} - x_1^{(k)}$$

2. Тексеру: $\Delta^{(k)} \leq \Delta$? Иә деген жауап болса, оптималды шешім

табылды, қарсы жағдайда 3^0 қадамға көшу керек.

3. Жаңа нүктелерді табу:

$$y_1^{(k)} = x_1^{(k)} + \Delta^{(k)} F_2$$

$$y_{21}^{(k)} = x_2^{(k)} + \Delta^{(k)} F_1$$

4. Тексеру: егер $f(y_1^{(k)}) \leq f(y_2^{(k)})$, онда

$$\Delta^{(k+1)} = y_2^{(k)} - x_1^{(k)}, \quad x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)}, \quad x_2^{(k+1)} = y_2^{(k)}, \quad k = k + 1,$$

қарсы жағдайда

$$\Delta^{(k+1)} = x_2^{(k)} - y_1^{(k)}, \quad x_1^{(k+1)} = y_1^{(k)}, \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)}, \quad k = k + 1.$$

8.3.1- мысал

$$Z = (x - 3)^2 + 1 \rightarrow \min$$

$$1 \leq x \leq 4, \quad \Delta = 0,5$$

x_1	x_2	Δ	y_1	y_2	$f(y_1)$	$f(y_2)$
1	4	3	2,14	2,86	1,7396	1,096
2,14	4	1,86	2,8468	3,2832	1,02347	1,0802
2,14	3,2832	1,1432	2,5744	2,8487	1,1811	1,0328
2,5744	3,2832	0,7088	3,8437	3,0137	1,0244	1,0002
3,843	3,2832	0,4395	3,01	3,116	1,0001	1,01347

Есептің жауабы: $x^* \approx 3$ $\Delta = 0,5$

8.4 Циклдік әрбір координата бойынша құлдылау әдісі

Циклдік әрбір координата бойынша құлдылау әдісі туындыны қолданбайтын көп өлшемді шартсыз оптималдау әдісіне жатады. Көпөлшемділік деп функцияның минимумін іздеу үшін әдістің бірден көп айнымалыларды қолданатынын айтамыз. Әдіс қозғалыстың минимумге жеткізетін бағытын анықтау үшін туындыны қолданбайды, әйтсе де қозғалыстың қадамын анықтау үшін дербес туындылауды қолданады. Бұл әдіс релаксациялық болып табылады, яғни қозғалыс барлық айнымалы үшін бірден болмайды. Қалған айнымалылардың мәндері тұрақты болып қалған кезде тек бір айнымалы бойынша құлдылау жүргізіледі.

Циклдік әрбір координата бойынша құлдылау әдісінің алгоритмі келесі түрде болады:

1) n айнымалы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мақсатты функция үшін бастапқы

вектор беріледі
$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}.$$

2) Бірлік вектор енгізіледі $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, оның элементтерінің саны n -ға тең.

3) $f(x_1^{(0)} + \lambda_1 e_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \rightarrow \min_{\lambda_1}$ есебі шығарылады, ағымды

нүкте ретінде $x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$ алынады.

4) Бірлік вектор енгізіледі $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, оның элементтерінің саны n -ға тең.

5) $f(x_1^{(1)}, x_2^{(0)} + \lambda_2 e_2, \dots, x_n^{(0)}) \rightarrow \min_{\lambda_2}$ есебі шығарылады, ағымды

нүкте ретінде $x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$ алынады.

6) Қозғалыс кезек бойынша қалған барлық айнымалылар бойынша орындалады, n -ші айнымалымен аяқталады.

7) Барлық λ нөлге тең болғанға дейін процесс басынан қайтадан қайталанып отырады. Бұл шарт орындалғанда X ағымды векторы оптималды болады.

8.4 – мысал:

$$f(x) = x_1^2 + 25x_2^2 \rightarrow \min \quad x^0 = (2, 2).$$

Бұл есепте екі тәуелсіз айнымалы бар. Бірлік векторды алдыменен бірінші координата бойынша енгіземіз:

$$1) e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1^{(0)} - \lambda_0 e_1, x_2^{(0)}) \rightarrow \min_{\lambda_0}$$

$$(x_1^{(0)} - \lambda_0)^2 + 25x_2^{(0)} \rightarrow \min_{\lambda_0}$$

$$-2(x_1^{(0)} - \lambda_0) = 0$$

Бірлік вектор бойынша бір қадам орындаймыз:

$$\lambda_0 = x_1^{(0)} = 2$$

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - \lambda_0 = 2 - 2 = 0$$

Жаңа нүкте:

$$x^{(1)} = (0; 2)$$

$$f(x) = 100$$

Бірлік векторды екінші координата бойынша енгіземіз:

$$2)e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(x_1^{(1)})^2 + 25(x_2^{(0)} - \lambda_1)^2 \rightarrow \min_{\lambda_1}$$

$$-50(x_2^{(0)} - \lambda_1) = 0$$

Бірлік вектор бойынша бір қадам орындаймыз:

$$\lambda_1 = x_2^{(0)} = 2$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - \lambda_1 = 2 - 2 = 0$$

Жаңа нүкте:

$$x^{(2)} = (0; 0)$$

$$f(x) = 0$$

8.5 Барынша тез құлдылау әдісі

Есептің берілгені: $f(x) \rightarrow \min, X^0$.

Барынша тез құлдылау әдісінің алгоритмі:

1. Бастапқы шешімді анықтау, X^0

2. Градиентті анықтау: $\nabla f = \partial f(x) / \partial x^k$;

эвклид нормасын табу:

$$\|\nabla f\| = \sqrt{(\partial f(x)/\partial x_1^{(k)})^2 + (\partial f(x)/\partial x_2^{(k)})^2 + \dots}.$$

3. Тексеру: егер $\|\nabla f\| = 0$ болса, онда оптималды нүкте табылады, $x^{(k)}$ – оптималды нүкте, қарсы жағдайда 4-қадамға көшу.

4. $x^{(k)}$ -ның бағытын анықтау: $S^{(k)} = -\nabla f / \|\nabla f\|$.

5. Бір қадам жасау $\lambda^{(k)} : f(x^{(k)} + \lambda^{(k)} S^{(k)}) \rightarrow \min \lambda^{(k)}$.

6. Жаңа нүктені анықтау: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} S^{(k)}$. 2-қадамға көшу.

Бұл әдісте λ тұрақты немесе айнымалы шама болуы мүмкін.

8.5.1- мысал:

$$f(x) = x_1^2 + 25x_2^2 \rightarrow \min \quad x^0 = (2,2).$$

1) λ - тұрақты шама ($\lambda = 1$)

8.5.1 -кесте

№	x_1	x_2	df/dx_1	df/dx_2	$\ \nabla f\ $	S_1	S_2
0	2	2	4	100	100	-0,04	-1
1	1,96	1	3,92	50	50	-0,078	-1
2	1,88	0	3,76	0	3,76	-1	0
3	0,88	0	3,76	0	3,76	-1	0
4	-0,12	0	-0,24	0	0,24	-1	0
5	0,88	0	1,76	0	1,76	-1	0

Есептің шешімі: $x^* = (0,38;0)$.

2) λ - айнымалы шама:

8.5.2 - кесте

№	x_1	x_2	df/dx_1	df/dx_2	$\ \nabla f\ $	S_1	S_2	λ
0	2	2	4	100	100	-0,04	-1	-2
1	1,97	-0,003	3,92	0,15	3,85	-0,99	0,039	0,13
2	0,07	0,07	3,76	3,5	3,5	-0,04	-1	0,07
3	0,13	0	3,76	0,26	0,26	-1	0	0,13
4	0	0	-0,24	0	0	0	0	0

Есептің шешімі: $x^* = (0;0)$.

Қосымша есептер:

- 8.5.1 $f(x) = 6x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max$,
 $X^{(0)} = (0, 0)$.
- 8.5.2 $f(x) = 9x_1^2 + 16x_2^2 - 90x_1 - 128x_2 \rightarrow \min$,
 $X^{(0)} = (0, 0)$.
- 8.5.3 $f(x) = x_1^2 - 4x_1 - x_2^2 + 6x_2 - 5 \rightarrow \min$,
 $X^{(0)} = (6, 4)$.
- 8.5.4 $f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 12x_2 + 14 \rightarrow \min$,
 $X^{(0)} = (3, 3)$.
- 8.5.5 $f(x) = 6x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max$,
 $X^{(0)} = (7, 4)$.
- 8.5.6 $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$,
 $X^{(0)} = (0, 0)$.
- 8.5.7 $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 \rightarrow \min$,
 $X^{(0)} = (0, 0)$.
- 8.5.8 $f(x) = 6x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max$,
 $X^{(0)} = (6, 6)$.
- 8.5.9 $f(x) = 2x_1 - x_1^2 - x_2 \rightarrow \min$,
 $X^{(0)} = (1, 2)$.
- 8.5.10 $f(x) = 18x_1 + 16x_2 - 3x_1^2 - x_1x_2 - 5x_2^2 \rightarrow \max$,
 $X^{(0)} = (0, 6)$.
- 8.5.11 $f(x) = 20x_1 + 16x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$,
 $X^{(0)} = (4, 4)$.
- 8.5.12 $f(x) = 2x_1 - 3x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \rightarrow \max$,
 $X^{(0)} = (6, 6)$.
- 8.5.13 $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$,
 $X^{(0)} = (5, 8)$.
- 8.5.14 $f(x) = 4x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max$,
 $X^{(0)} = (2, 3)$.
- 8.5.15 $f(x) = (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2 \rightarrow \max$,
 $X^{(0)} = (6, 4)$.
- 8.5.16 $f(x) = 18x_1 + 16x_2 - 3x_1^2 - x_1x_2 - 5x_2^2 \rightarrow \max$,
 $X^{(0)} = (5, 8)$.
- 8.5.17 $f(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \rightarrow \min$,
 $X^{(0)} = (5, 8)$.
- 8.5.18 $f(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \rightarrow \min$,
 $X^{(0)} = (4, 4)$.
- 8.5.19 $f(x) = 2x_1 - x_1^2 - 4x_2 \rightarrow \max$,
 $X^{(0)} = (1, 2)$.
- 8.5.20 $f(x) = 4x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max$,
 $X^{(0)} = (5, 10)$.
- 8.5.21 $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$,
 $X^{(0)} = (8, 0)$.
- 8.5.22 $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$,
 $X^{(0)} = (6, 4)$.
- 8.5.23 $f(x) = 20x_1 + 16x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$,
 $X^{(0)} = (2, 3)$.
- 8.5.24 $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 \rightarrow \min$,
 $X^{(0)} = (8, 8)$.
- 8.5.25 $f(x) = 6x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max$,
 $X^{(0)} = (3, 10)$.
- 8.5.26 $f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 40x_1 - 48x_2 \rightarrow \min$,
 $X^{(0)} = (5, 10)$.

8.6 Франк-Вульф әдісі

Есептің берілгені:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n_1} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{i=1}^{n_2} d_{ij} x_i x_j \rightarrow \max \quad (8.6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n_1} \end{aligned} \right\} \quad (8.6.2)$$

Франк-Вульф әдісінің алгоритмі:

1. Бастапқы шешімді $x^{(0)}$ симплекс әдісімен анықтау, $k=0$.

2. Бағытты есептеу: $S^{(k)} = x^{(*)} - x^{(k)}$.

$x^{(*)}$ – келесі есептің шешімі:

$$\sum_{j=1}^{n_1} df / dx_j^{(k)} (x_j - x_j^{(k)}) \rightarrow \max \quad (8.6.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j &\leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n_1} \end{aligned} \right\} \quad (8.6.4)$$

3. Қадамды ($\lambda^{(k)}$) анықтау:

$$f(x^{(k)} + \lambda^* S^{(k)}) \rightarrow \min$$

$$\lambda^{(k)} = \min[\lambda^*, 1].$$

4. Жаңа нүктенің координаталарын анықтау:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} S^{(k)}.$$

5. Тексеру: $f(x^{(k+1)}) > f(x^{(k)})$? Иә деген жауап болса онда $k=k+1$ деп 2 –қадамға көшеміз, қарсы жағдайда оптималды нүкте ($x^{(k)}$) табылды.

8.6.1- мысал:

$$f(x) = 2x_1 - 3x_2 - x_1^2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

1) $df/dx = 2 - 3 - 2x_1 \rightarrow \max :$

$$df/dx = -1 - 2x_1 \rightarrow \max :$$

	$-x_1$	$-x_1$	
y_1	1	2	16
y_1	5	2	40
	2	0	

$$x^{(0)} = (0,0).$$

2) $S^{(k)} = x^{(*)} - x^{(0)} ;$

$$\sum_{j=1}^2 df/dx(x_j - x_j^{(0)}) \rightarrow \max ;$$

$$df/dx_1 = 2 - 2x_1 \Big|_{x_1=0} = 2 ;$$

$$df/dx_2 = -2 \Big|_{x_2=0} = -3$$

$$2(x_1 - 0) - (x_2 - 0) \rightarrow \max$$

$$2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max.$$

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	1	2	16
y_2	5	2	40 ←
z	2	0	0

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	-1/5	8/5	8
y_2	1/5	2/5	8
z	2/5	19/5	16

$$x^{(*)} = (8,0)$$

$$S_1^{(0)} = 8$$

$$S_2^{(*)} = 0$$

$$3) f(x) = 2(x_1^{(0)} + \lambda^* S_1^{(0)}) - 3(x_2^{(0)} + \lambda^* S_2^{(0)}) - (x_1^{(0)} + \lambda^* S_1^{(0)})^2 \rightarrow \max;$$

$$f(x) = 16\lambda^* - 64(\lambda^*)^2 \rightarrow \max;$$

$$\lambda^* = 16/128 = 1/8,$$

$$\lambda^0 = \min[1; 1/8] = 1/8$$

$$4) x^1 = (1, 0).$$

$$5) f(x^{(0)}) = 0.$$

$$2) S^{(1)} = x^* - x^1;$$

$$f(x^{(1)}) = 1;$$

$$df/dx_1 = 2 - 2x_1 \Big|_{x_1=1} = 0$$

$$df/dx_2 = -3,$$

$$x = -3(x_2 - 0) \rightarrow \max;$$

$$x^* = (0, 0); \quad S^{(1)} = (-1, 0).$$

$$3) f(x) = 2(x_1^{(1)} + \lambda^* S_1^{(1)}) - 3(x_2^{(1)} + \lambda^* S_2^{(1)}) - (x_1^{(1)} + \lambda^* S_1^{(1)})^2 \rightarrow \max;$$

$$2(1 - \lambda^*) - 3(0 + 0) - (1 - \lambda^*)^2 \rightarrow \max;$$

$$-2 + 2(1 - \lambda^*) - 0,$$

$$-2 + 2 - 2\lambda^* = 0,$$

$$\lambda^* = 0, \quad \lambda^{(1)} = 1$$

$$4) x^{(2)} = (1, 0). \text{ - оптималды шешім.}$$

Қосымша есептер:

$$f(x) = 2x_1 - 3x_2 - x_1^2 \rightarrow \max,$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x_1 + 5x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + x_2 \leq 34 \end{array} \right\},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$X^0 = (2, 3).$$

$$8.6.1 \quad f(x) = 10 + 16x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max \quad 8.6.2$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 40 \end{array} \right\},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$8.6.3 \quad f(x) = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 \rightarrow \min, \quad 8.6.4 \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 + 6x_2 \rightarrow \max,$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{array} \right\},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0.$$

$$8.6.5 \quad f(x) = 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max, \quad 8.6.6 \quad f(x) = 2x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 - 2 \rightarrow \max,$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \end{array} \right\},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$8.6.7 \quad f(x) = x_1 + 2x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min, \quad 8.6.8 \quad f(x) = 18x_1 + 18x_2 - 5x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \end{array} \right\},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$x^0(5; 4; 2).$$

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$8.6.9 \quad f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 2 \rightarrow \min, \quad 8.6.10 \quad f(x) = 36x_1 + 36x_2 - 5x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} -3x_1 - 2x_2 + 8 \leq 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3 \leq 0 \end{array} \right\},$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0,$$

$$x_1 - 8 \leq 0,$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$8.6.11 \quad f(x) = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 \rightarrow \min, \quad 8.6.12 \quad f(x) = 10x_2 - 6x_1^2 - 19x_2^2 + 16x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{array} \right\},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$3x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

;

$$8.6.13 \quad f(x) = 20x_1 + 18x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max \quad 8.6.14 \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 6x_2 + 18 \rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 60 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x^0(2; 3)$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$3x_1 - x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

- 8.6.15 $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \max$, $\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \end{array} \right\}$,
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.
- 8.6.16 $f(x) = 36x_1 + 36x_2 - 5x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2 \rightarrow \max$
 $x_1 + x_2 \leq 2$,
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.
- 8.6.17 $f(x) = 2(x_1 - 1)^2 + 9(x_2 - 3)^2 \rightarrow \min$
 $x_1 + x_2 \leq 2$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
 $x^0(5;4)$
- 8.6.18 $f(x) = 6x_1 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 \rightarrow \max$
 $x_1 + x_2 \leq 1/2$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.
- 8.6.19 $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 \rightarrow \min$, $\left. \begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 7x_1 + 10x_2 \geq 84 \\ 5x_1 + x_2 \leq 60 \end{array} \right\}$,
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.
- 8.6.20 $f(x) = -4(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 11)^2 \rightarrow \max$,
 $\left. \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 60 \end{array} \right\}$,
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$,
 $x^0(3;5)$.
- 8.6.21 $f(x) = 20x_1 + 16x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$
 $x^0 = (5;5)$,
 $\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 40 \end{array} \right\}$,
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.
- 8.6.22 $f(x) = 10 - 2x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \rightarrow \max$
 $x^0 = (3;3;3)$,
 $\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 18 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \end{array} \right\}$,
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

8.7 Ньютон-Рабсон әдісі

Есептің берілгені:

$$f(x) \rightarrow \min, \vec{x}^{(0)}.$$

$f(x)$ функциясы – дифференциалдық деп есептеп, $\vec{x}^{(k)}$ нүктесінде Тейлор қатарына жіктейік:

$$f(x) = f(\vec{x}^{(k)}) + \nabla f(\vec{x}^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x - x^{(k)}) \cdot H(\vec{x})(x - x^{(k)})$$

Бағыт бойынша туындыны табайық, $[(x - x^{(k)})]$ бойынша:

$$\nabla f(\vec{x}^{(k)}) + H(\vec{x})(x - x^{(k)}) = 0$$

осыдан:

$$x - x^{(k)} = -H^{-1}(\vec{x}) \cdot \nabla f(\vec{x}^{(k)})$$

сонда:

$$x^{k+1} = x^{(k)} - H^{-1}(\vec{x}) \cdot \nabla f(\vec{x}^{(k)})$$

Егер берілген функция квадраттық болса, онда оптималды шешім табу үшін бір қадам орындау жеткілікті.

8.7.1- мысал

$$f(x) = x_1^2 + 25x_2^2 \rightarrow \min \quad \vec{x}^{(0)} = (2; 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 50x_2 \Rightarrow \nabla f(x^{(k)}) = (2x_0 \ 50x_0)$$

$$\nabla f(\vec{x}^{(k)}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}, \quad H^{-1}(x) = \begin{vmatrix} \frac{50}{100} & 0 \\ 0 & \frac{2}{100} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{100} \end{vmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{50} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 \\ 100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$x^1 = x^* = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} = (0; 0)$$

8.7.2 - мысал

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \min \quad x^{(0)} = (1; 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 \Big|_{x_1=0} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 + 2 \Big|_{x_2=0} = 2$$

$$\nabla f(\vec{x}^{(0)}) = \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$H(x) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad H^{-1}(x) = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

$$H^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$f(x^{(1)}) = 4 + \frac{1}{2} - 8 - 1 = -4,5$$

8.7.3 - мысал

$$9x_1^2 + 16x_2^2 - 90x_1 - 128x_2 \rightarrow \min \quad x^{(0)} = (0; 0) \quad f(x^{(0)}) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 18x_1 - 90 \Big|_{x_1=0} = -90 \quad \nabla f(\vec{x}^{(0)}) = \begin{vmatrix} -90 \\ -128 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 32x_2 - 128 \Big|_{x_2=0} = -128$$

$$H(x) = \begin{vmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 32 \end{vmatrix} \quad H^{-1}(x) = \frac{1}{576} \begin{vmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & \frac{1}{32} \end{vmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -90 \\ -128 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -5 \\ -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$x^* = x^{(1)} = (5; 4) \quad f(x^{(0)}) = 225 + 256 - 450 - 512 = -481$$

Қосымша есептер: 8.5 тақырыбының қосымша есептеріне қараңыз.

9. ТОРАПТЫҚ СЫЗЫҚТЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУ

Негізгі түсініктер

Торап түйіндер және қабырғалар жиынынан тұрады. Егер қабырғаның белгілі бағыты болса, онда оны бағытталған қабырға деп атайды, қарсы жағдайда—бағытталмаған.

Торапқа келесі белгілеулер енгізейік:

N_i – түйіндер үшін,

$A_{i,j} - N_i$ түйінінен N_j түйініне апаратын қабырғаға.

Торап байланысқан деп аталады, егер X – тораптың түйіндер жиынын қосалқы $\overline{X}$ жиынына бөлген жағдайда A_{ij} немесе A_{ji} қабырғасы табылады, мұнда $N_i \in X$, $N_j \in \overline{X}$.

Тізбек деп түйіндер мен қабырғалар кезектілігін айтады. Тұйық тізбекті цикл деп атайды.

Алдыңғы қабырғаның соңы келесі қабырғаның басымен қосылған қабырғалар тізбегін жол деп атайды. (Жол бойынша газ, транспорт, сұйықтық жіберіледі).

Торапта екі арнайы түйінді ажыратады: N_s - алғашқы түйін (түйін көзі), N_t - соңғы түйін.

Ағын x_{ij} —деп әрбір қабырғаға сәйкес келетін және келесі шарттарды қанағаттандыратын оң мағыналы сандар жиынын айтады:

$$\sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = \begin{cases} -v, j = s \\ 0, j \neq s, t \\ v, j = t, \end{cases} \quad (9.1)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad (9.2)$$

мұндағы,

$x_{ij} - A_{ij}$ қабырғасы бойынша ағын,

v —ағын шамасы.

(9.1) - шарт — әрбір түйінге (арнайы түйіндерден басқа) кіретін ағын шамасы, ағынның шығатын шамасына тең екенін білдіреді (көрсетеді), ал (9.2) - шарт қабырға бойынша ағын өзінің өткізе алатын қабілеттілігімен шектелетінін көрсетеді.

Тораптық бағдарламалау әдістері келесі есептерді шығаруға арналған:

- ең қысқа жол есебі;
- тах-ды ағын есебі;
- белгілеу есебі;
- сұраныс пен ұсыныс есебі;
- ресурстардың үлестірілуі туралы есеп.

Мысалы, максимальды ағын есебінің математикалық моделі:

$$\max v = \sum_j x_{sj} - \sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = \begin{cases} -v, j = s \\ 0, j \neq s, t \\ v, j = t, \end{cases} \quad 0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}$$

A_{ij} қабырғаларының жиынтығын кесік (тілік) $(X, \bar{X})$ деп атайды, егер $N_i \in X$, $N_j \in \bar{X}$ жатса немесе керісінше. Кесіктің өткізе алатын қабілеттілігі $d(X, \bar{X}) = \sum_{(i,j)} d_{ij}$. Мұнда қосынды

барлық қабырғалар бойынша алынады.

Алғашқы түйінді соңғы түйінмен қосатын минимальды өткізу қабілеттілігі бар кесікті минимальды кесік деп атайды.

9.1 Ең қысқа жол есебі

Форд алгоритмі.

Өртүрлі маршруттарымен торап берілген болсын. Жол ұзындығы l_{ij} қабырғаларда көрсетілген. Нөлінші пункттен n – пунктіне дейін қысқа жолды табу керек.

Алгоритм:

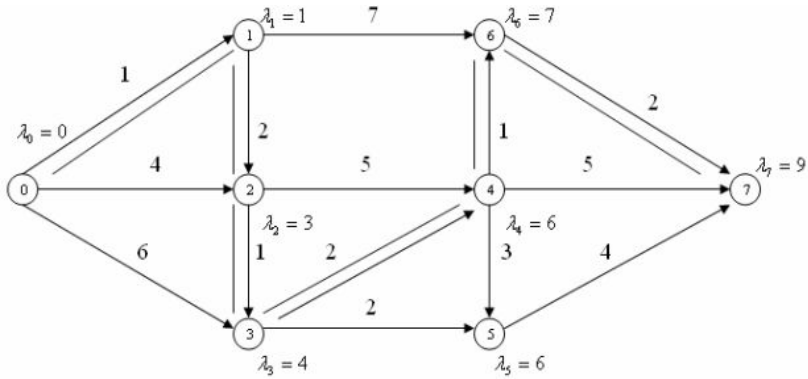
1°. Нөлінші түйінді $\lambda_0 = 0$ индексмен белгілейміз.

2°. Барлық түйіндерді нөмірлеу тәртібі бойынша белгілеп шығамыз: $\lambda_j = \min[\lambda_i + l_{ij}]$, i, j – түйіндер нөмірі.

3°. Ең қысқа жолдың ұзындығын табамыз λ_n .

4°. Соңынан алдыға қарай жылжып, қысқа жолға кіретін қабырғаларды анықтаймыз: $\lambda_j - \lambda_i = l_{ij}$.

9.1.1 - мысал :



9.1 – сурет

Есептің шешімі:

1°. $\lambda_0 = 0$

2°. $\lambda_1 = l_{01} = 1$

$$\lambda_2 = \min[0 + 4; 1 + 2] = 3$$

$$\lambda_3 = \min[0 + 6; 3 + 1] = 4$$

$$\lambda_4 = \min[3 + 5; 4 + 2] = 6$$

$$\lambda_5 = \min[4 + 2; 6 + 3] = 6$$

$$\lambda_6 = \min[6 + 1; 1 + 7] = 7$$

$$\lambda_7 = \min[6 + 5; 6 + 4; 7 + 2] = 9$$

3°. $\lambda_n = \lambda_7 = 9$

4°. $7: \min[\lambda_7 - \lambda_6; \lambda_7 - \lambda_5; \lambda_7 - \lambda_4] = \min[9 - 7; 9 - 6; 9 - 6] = 2 \quad 6 \rightarrow 7$

$6: \min[\lambda_6 - \lambda_4; \lambda_6 - \lambda_1] = \min[7 - 6; 7 - 1] = 1 \quad 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$

$4: \min[\lambda_4 - \lambda_3; \lambda_4 - \lambda_2] = \min[6 - 4; 6 - 3] = 2 \quad 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$

$3: \min[\lambda_3 - \lambda_2; \lambda_3 - \lambda_0] = \min[4 - 3; 4 - 0] = 1 \quad 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$

$2: \min[\lambda_2 - \lambda_1; \lambda_2 - \lambda_0] = \min[3 - 1; 3 - 0] = 2 \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$

$1: \lambda_1 - \lambda_0 = 1$

Қысқа жол $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$, $\lambda_n = 9$

9.2 Форд – Фалкерсон әдісі

9.2.1- теорема. Егер $c = \|c_{ij}\|$ матрицасы бар есеп үшін оптималды шешім болса, онда ол шешім түрлендірілген матрицасы $c' = \|c'_{ij}\|$, мұнда $c'_{ij} = c_{ij} \pm \delta \quad \forall (i, j)$ бар есептің де оптималды шешімі болады.

9.2.2 - теорема. Түрлендірілген есептің шешімі оптималды болу үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті де жеткілікті.

- 1) $c_{i,j} > 0, \quad x_{ij} = 0$
- 2) $c_{i,j} < 0, \quad x_{ij} = d_{ij}$
- 3) $c_{i,j} = 0, \quad 0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}$

Алгоритм :

1. Торапқа алғашқы және соңғы түйіндер енгізіп, $a_s = \sum_{j \in S} a_{ij}$,

$$b_t = \sum_{j \in T} b_j .$$

2. Барлық қабырғалар бойынша алғашқы ағын 0-ге тең деп есептейміз,

$$x_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) .$$

3. Алғашқы түйінді белгілеу: $S = [-, a_s]$.

4. Алғашқы түйінмен байланысқан түйіндер үшін белгілеулер жүргізу.

j- түйін келесі жағдайларда ғана белгіленеді:

- 1) $c'_{i,j} \leq 0, \quad x_{ij} \leq d_{ij}$
- 2) $c'_{i,j} \geq 0, \quad x_{ij} > 0$.

Егер i -түйін келесідей белгіленсе $i = [k^{\pm}, \varepsilon_i]$, онда j – түйіннің белгісі:

$j = [i^+, \varepsilon_j = \min(\varepsilon_i, d_{ij} - x_{ij})]$ - бірінші жағдай орын алса немесе екінші жағдайда:

$$j = [i^-, \varepsilon_j = \min(\varepsilon_i, x_{ij})] .$$

Белгілеу кері бағытталған қабырғаның тура бағыты бойымен жүргізілсе, онда “+” қойылады, қарсы бағыты бойынша жүргізілсе, “-” қойылады. 4-қадам соңғы түйін белгіленгенше орындалады.

Тексеру: Соңғы (t) түйін белгіленді ме?

“Иә” деген жауап болса, онда 5- қадамға көшу.

“Жоқ” деген жауап болса, онда 6-қадамға көшу.

5. Егер соңғы түйін белгіленген болса, басқаша айтқанда, s- түйіннен t- түйінге дейін жол табылса, онда ағынды (жоспарды) келесідей өзгертеміз:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \varepsilon_i, & \text{егер } (i,j) - \text{тура бағытталған қабырға болса} \\ x_{ij} - \varepsilon_i, & \text{егер } (i,j) - \text{кері бағытталған қабырға болса} \\ x_{ij}, & \text{басқа жағдайларда} \end{cases}$$

және $a'_s = a_s - \varepsilon_i$ деп өзгертіп, 3-қадамға көшеміз.

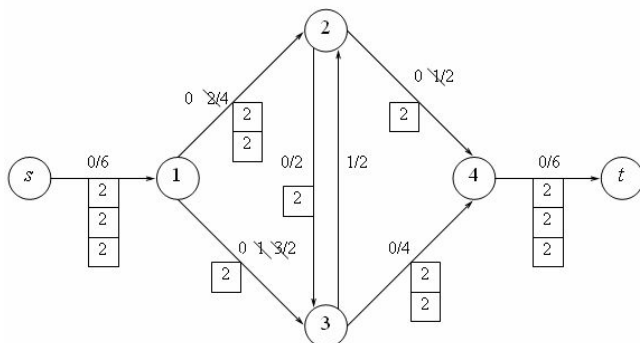
6. Егер соңғы түйінді (t) белгілей алмасақ, екі жиынды енгізіп A_1 , A_2 қабырғалар бағасын өзгертеміз:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(i, j) / i \in X, j \in \overline{X}, c_{i,j} \geq 0\} \\ A_2 &= \{(j, i) / i \in X, j \in \overline{X}, c_{i,j} < 0\} \\ \delta_1 &= \min_{A_1} c_{ij}, \quad \delta_2 = \min_{A_2} |c_{ij}|, \quad \delta = \min(\delta_1, \delta_2) \\ c'_{ij} &= \begin{cases} c_{ij} - \delta, & \text{егер } i \in X, j \in \overline{X} \\ c_{ij} + \delta, & \text{егер } i \in \overline{X}, j \in X \\ c_{ij}, & \text{басқа қабырғалар үшін} \end{cases} \end{aligned}$$

Қабырғалар бағасын өзгерткеннен кейін 3- қадамға көшеміз.

7. Есептеулер min-ді кесік табылған кезде тоқтатылады (Тексеру: $a_s = 0$ немесе A_1 , A_2 жиындар бос болса).

9.2.1 - мысал:



Шешімі:

Бірінші итерация.

Бірінші қадам. $a_s = 6$.

Екінші қадам. $x_{ij} = 0$, яғни бастапқы ағын барлық қабырғалар бойынша нөлге тең.

Үшінші қадам. Алғашқы $S = [-, \varepsilon_s = a_s = 6]$ түйінді белгілейміз.

Төртінші қадам. t түйініне жету үшін S түйінімен байланысқан түйіндер үшін белгілеулер жүргіземіз, яғни

$$1 = [s^+, \varepsilon_1 = \min(\varepsilon_s, d_{s1} - x_{s1}) = \min(6, 6) = 6].$$

Алтыншы қадам. Жиындарды енгіземіз:

$$A_1 = \{(i, j) \mid i \in X, j \in \bar{X}, c_{ij} \geq 0\} = \{(1, 2), (1, 3)\}, \quad \delta_1 = \min(2, 3) = 2,$$

$$A_2 = \{(i, j) \mid i \in \bar{X}, j \in X, c_{ij} < 0\} = \{\emptyset\}, \quad \delta_2 = \infty, \delta = 2.$$

Төртінші қадам. $2 = [1^+, \varepsilon_2 = \min(\varepsilon_1, 4) = \min(6, 4) = 4].$

$$3 = [2^+, \varepsilon_3 = \min(\varepsilon_2, 2) = \min(4, 2) = 2].$$

$$4 = [3^+, \varepsilon_4 = \min(\varepsilon_3, 4) = \min(2, 4) = 2].$$

$$t = [4^+, \varepsilon_t = \min(\varepsilon_4, 6) = \min(2, 6) = 2].$$

Жол: $s \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow t$, ағын екіге тең, $(2, 3)$ – қаныққан қабырға.

Екінші итерация.

Бірінші қадам. $a'_s = 6 - 2 = 4$.

Үшінші қадам. $s = [-, \varepsilon_s = 4]$.

Төртінші қадам. $1 = [s^+, \varepsilon_1 = \min(4, 4) = 4], 2 = [1^+, \varepsilon_2 = \min(4, 2) = 2].$

Алтыншы қадам. Жиындарды енгіземіз:

$$A_1 = \{(1, 3), (2, 4)\}, \quad \delta_1 = \min(1, 1) = 1,$$

$$A_2 = \{\emptyset\}, \quad \delta_2 = \infty, \delta = 1.$$

Төртінші қадам. $3 = [1^+, \varepsilon_3 = \min(4, 2) = 2]$.

$4 = [3^+, \varepsilon_4 = \min(2, 4) = 2]$.

$t = [4^+, \varepsilon_t = \min(2, 4) = 2]$.

Жол: $s \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow t$, ағын екіге тең, $(1, 3)$, $(3, 4)$ – қаныққан қабырғалар.

Үшінші итерация.

Бірінші қадам. $a'_s = 4 - 2 = 2$.

Үшінші қадам. $s = [-, \varepsilon_s = 2]$.

Төртінші қадам. $1 = [s^+, \varepsilon_1 = \min(2, 2) = 2]$, $2 = [1^+, \varepsilon_2 = \min(2, 2) = 2]$.

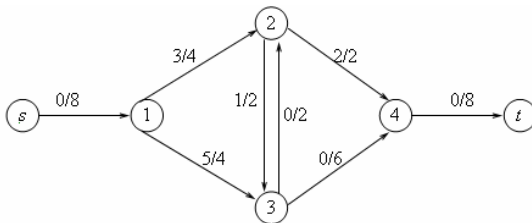
$4 = [2^+, \varepsilon_4 = \min(2, 2) = 2]$, $t = [4^+, \varepsilon_t = \min(2, 2) = 2]$.

Жол: $s \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow t$, ағын екіге тең.

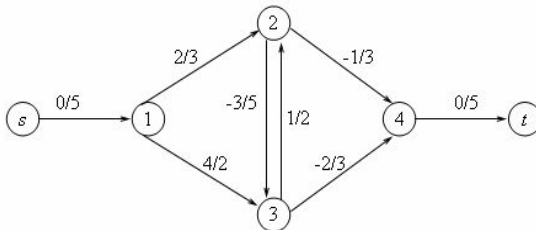
$a'_s = 0$.

Қосымша есептер:

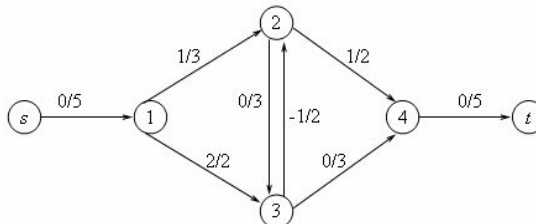
9.1



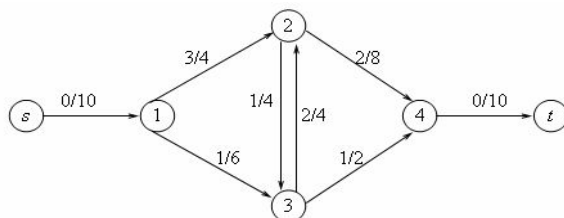
9.2



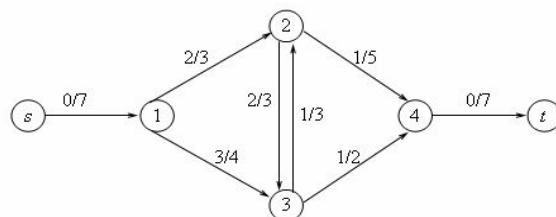
9.3



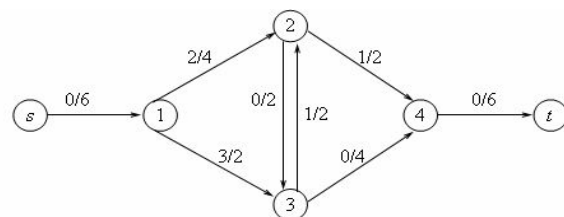
9.4



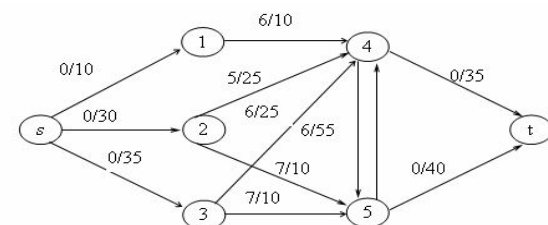
9.5



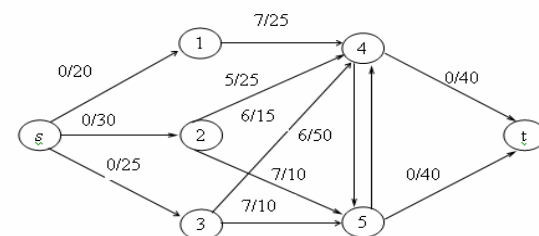
9.6



9.7



9.8



10. ОЙЫНДАР ЖӘНЕ СТАТИСТИКАЛЫҚ ШЕШІМДЕР ТЕОРИЯСЫ

10.1 Ойындар теориясының негізгі түсініктері

Ойындар теориясы бұл математикалық модельдер теориясы, бірақ оған қатысушылардың мақсаттары әртүрлі, олар өз мақсаттарына да әртүрлі жолдармен жетеді. Қатысушылардың карама-карсы мақсаттарының кақтығысуы жанжалды жағдайға әкеліп соғады. Жанжалды жағдайдың формалды түрге енгізілген моделі ойын деп аталады. Жанжалға қатысушы жақтарды ойыншылар деп атайды. Ойындар ережесінде ескерілген іс-әрекеттердің біреуін таңдау және оны жүзеге асыру ойындар теориясында жүріс деп аталады. Жүрістер жеке және кездейсоқ болады. Ойыншының мүмкін болар іс-әрекеттер вариантының біреуін сапалы түрде таңдап, іске асыру жеке жүріс деп аталды (шахмат ойынындағы кез келген жүріс). Бірқатар мүмкіндіктер ішінен біреуін таңдау және оны қайсыбір кездейсоқ таңдау механизмімен жүзеге асыру кездейсоқ жүріс деп аталады (карта үлестіру, тиын лактыру, т.б.).

Ойын процесінде түзелген жағдайға байланысты ойыншының әрбір жеке жүрісі кезіндегі іс-әрекеттер вариантын анықтайтын ережелер жиынтығы ойыншы стратегиясы деп аталады.

Стратегиялар санына байланысты ойындар шекті және шексіз болып бөлінеді. Ойыншылар санына байланысты ойындар жұп ойындар және жиындалған ойындар болып бөлінеді.

Алдын ала жасалған келісіммен ойыншылар арасында келісімге байланысты ойындар кооперативтік және кооперативтік емес болып бөлінеді.

Ойындар теориясы – ол кез келген ойыншыға оптималды стратегияны анықтау, былайша айтқанда ойынды көп қайталаған кезде берілген ойыншыға минимальды мүмкін болар орта ұтылыспен немесе максимальды мүмкін болар орта ұтыспен қамтамасыз ететін стратегияны анықтау. Стратегияның бастамасы келесі болжамнан шығады: «қарсылас та біз секілді ақылды және бізге мақсатымызға жетуімізге қарсы бар күшін салады?»

Ойынның ең қарапайым түрі "қосындылары нөлге тең", екі жақ ұтыстарының қосындысы нөлге тең екі адамның ойыны. Ойын екі жүрістен тұрады.

А ойыншы өзінің мүмкін болар бір стратегиясын таңдайды, ал В ойыншы В стратегиясын таңдайды. A_j B_j стратегияларын білу арқылы төлем матрицасын немесе ойын матрицасын құруға болады.

$$\begin{array}{cccc} & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

a_{ij} – А ойыншының ұтысы, В ойыншының ұтылысы, егер А ойыншыны A_i стратегиясын, В ойыншыны B_j стратегиясын таңдаса.

10.1.1- мысал

$$\begin{array}{cccc} & B_1 & B_2 & B_3 & \alpha_i \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -3 \\ -5 \\ -3 \end{array} \\ \beta_j & 3 & 4 & 6 & \begin{array}{c} \alpha = -3 \\ \beta = 3 \end{array} \end{array}$$

А ойыншы A_i стратегиясын таңдады дейік, онда ең нашар сәтте a_{ij} - дің минимальдысына тең ұтыс алады. Бұл кезде А ойыншы өзінің минимальды ұтысын максимальдайтын стратегия таңдайды.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

α - ол А ойыншының кепілденген ұтысы немесе ойынның ең төмен бағасы.

A_i стратегиясы максимин стратегиясы деп аталады.

В ойыншы стратегияны таңдай отырып, келесі принциптен бастайды:

B_j стратегиясын таңдау кезінде оның ұтысы j -ші бағанның максимальды мәнінен аспайды. В ойыншы өзінің максимальды ұтылысын минимальдайтын стратегия таңдайды.

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

β - ойынның жоғарғы бағасы.

B_j - минимакс стратегиясы.

1) Егер $a = \beta$ болса, онда мұндай ойын "ер сияқты" нүктесі бар ойын деп аталады. "Ер сияқты" нүктеге ойыншылардың оптималды, таза стратегиялары сәйкес келеді. Олардың жиынтығы ойынның шешімі.

10.1.2-мысал. Таза стратегия

А ойыншыда 3 түрлі қару-жарақтар бар: A_1, A_2, A_3 .

Қарсыласта үш түрлі ұшақтар бар: B_1, B_2, B_3

$$\begin{array}{c} B_1 \quad \overline{B_2} \quad B_3 \quad \alpha_i \\ \begin{array}{c} A_1 \\ \overline{A_2} \\ A_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,8 \\ 0,9 & 0,7 & 0,8 \\ 0,7 & 0,5 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 0,5 \\ 0,7 \\ 0,5 \end{array} \\ \beta_j \quad 0,9 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad \begin{array}{c} \alpha = 0,7 \\ \beta = 0,7 \end{array} \end{array}$$

Бірінші ойыншы ұшақтарды құлату керек, екінші ойыншы оларды аман сақтап қалу керек. Берілген матрица бойынша:

A_1 -ші қару B_1, B_2, B_3 ұшақтарын сәйкес 0,5; 0,6; 0,8 ықтималдығымен жояды;

A_2 -ші қару B_1, B_2, B_3 ұшақтарын сәйкес 0,9; 0,7; 0,8 ықтималдығымен жояды;

A_3 -ші қару B_1, B_2, B_3 ұшақтарын сәйкес 0,7; 0,5; 0,6 ықтималдығымен жояды;

(A_2, B_2) - есептің оптималды шешімі.

2) Егер $\alpha < \beta$ ойыншылар бір стратегия емес, кездейсоқ түрде бірнеше стратегия таңдайды. Өз стратегияларын кездейсоқ түрде таңдау аралас стратегия деп аталады.

$S_A = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ - А ойыншының аралас стратегиясы. $A_1, A_2, \dots, A_m$ стратегиялары $p_1, p_2, \dots, p_m$ ықтималдылығымен қолданылады.

мұнда

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1$$

$$S_B = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1 - \text{В ойыны үшін}$$

А ойыншының ұтысы аралас стратегияны қолданған кезде, ұтыстың математикалық күтуі ретінде анықталады:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j = S_A A S_B^T$$

10.2 Ойындар теориясының негізгі теоремасы

Кез келген шекті ойынның мүмкін аралас стратегия саласында кем дегенде бір шешімі болады. Ойыншылардың оптималды стратегиялары үшін келесі қатынас орын алады:

$$v = \max_i \min_j S_A A S_B^T = \min_j \max_i S_A A S_B^T$$

v - ойынның бағасы.

А - ойыншының оптималды S_A^* стратегиясын қолдануы В ойыншының қандай болса да іс-әрекеттеріне қарамай оған ойын бағасынан кем емес ұтыс камтамасыз етеді.

$$\sum_{i=1}^m p_i^* a_{ij} \geq v, \quad j = \overline{1, n}$$

Дәл солай В ойыншы оптималды S_B^* стратегиясын қолданған кезде А ойыншының кез келген стратегиясына қарамай, ойын бағасынан аспайтын ұтылыс әкеледі.

$$\sum_{j=1}^n q_j^* a_{ij} \leq v, \quad i = \overline{1, m}$$

10.3 2×2 ойынның шешімі (алгебралық әдіс)

$$\begin{matrix} & B_1 & B_2 \\ A_1 & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \\ A_2 & \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Егер "ер тәрізді" нүкте бар болса, онда ойынның шешімі жұп стратегияның осы нүктеде қиылысуы болады.

Егер "ер тәрізді" нүкте болмаса, онда ойынның шешімі аралас стратегия болады:

$$S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$$

$$S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$$

Негізгі теорияға сәйкес А ойыншының S_A^* оптималды стратегиясын қолдануы В ойыншының кез келген стратегиясына қарамай, V ұтысын алуын қамтамасыз етеді.

$$\begin{aligned} & \text{A} \\ & a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \\ & a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \\ & p_1 + p_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{B} \\ & a_{11}q_1 + a_{21}q_2 = v \\ & a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v \\ & q_1 + q_2 = 1 \end{aligned}$$

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$v^* = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

10.3.1-мысал:

$$\begin{matrix} B_1 & B_2 \\ A_1 & \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \\ A_2 & \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\alpha = 2, \beta = 4$$

$$P_1 + 4p_2 = v$$

$$5p_1 + 2p_2 = v$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$-4p_1 + 2p_2 = 0$$

$$p_1 = 1 - p_2$$

$$4(1 - p_2) + 2p_2 = 0$$

$$-4 + 4p_2 + 2p_2 = 0$$

$$6p_2 = 4$$

$$p_2^* = 2/3 \quad p_1^* = 1 - 2/3 = 1/3 \quad v^* = 1/3 + 8/3 = 9/3 = 3$$

$$q_1 + 5q_2 = v$$

$$4q_1 + 2q_2 = v$$

$$-3q_1 + 3q_2 = 0$$

$$-(1 - q_2) + q_2 = 0$$

$$-1 + q_2 + q_2 = 0$$

$$q_2^* = 1/2$$

$$q_1^* = 1/2$$

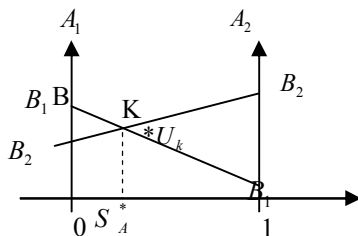
$$v_2^* = 1/2 + 5/2 = 3$$

10.4 Ойындар теориясының геометриялық мағынасы

10.4.1 Графикалық әдіс ("2×2" ойыны)

"2x2" ойынының шешімін графикалық түрде табуға болады. Абсцисса осінде ұзындығы 1-ге тең кесінді салынады. Кесіндінің сол жақ ұшы A_1 стратегиясына, оң жағы - A_2 стратегиясына сәйкес келеді.

Матрицадағы сандар оң мағыналы болу керек немесе матрицаға оң санды қосып сол түрге келтіру керек.



10.4.1-сурет

Арадағы нүкте S_A^* қайсыбір аралас стратегияға сәйкес келеді. Мұнда $p_1^* = 1 - S_A^*, P_2 = S_A^*$. Кесінділердің ұштарында ОХ осіне перпендикуляр ретінде сәйкес A_1, A_2 таза стратегияларын түсіреміз.

Егер В ойыншы B_1 стратегиясын қолданса, онда А ойыншының таза стратегиялар A_1 және A_2 пайдаланған кездегі ұтыстары – a_{11}, a_{21} . Осы шамаларды перпендикулярлар түсірген соң, алынған нүктелерді B_1 - B_1 түзуімен қосамыз. Дәл солай B_2 - B_2 түзуін құруға болады. (В ойыншының B_2 стратегиясына сәйкес). Егер А ойыншы аралас стратегия қолданса, онда ұтысы К нүктесіне сәйкес келеді.

B_1 оң жақтан солға қарай kB_2 , А ойыншы ұтысының төменгі шекарасы. К нүктесі ойын бағасын анықтайды. Бұл нүктеде максимальды ұтыс шығады.

10.4.1- мысал:

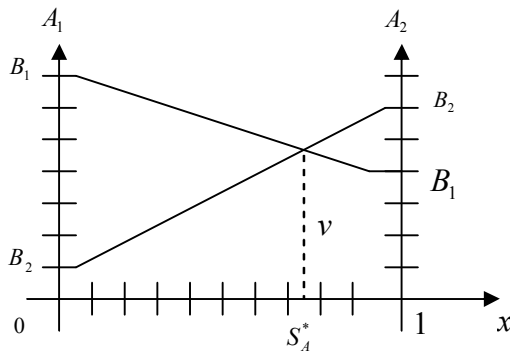
$$\alpha = 1$$

$$\beta = 3$$

$$\alpha \neq \beta$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 3$$

$$\begin{matrix} B_1 & B_2 \\ \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

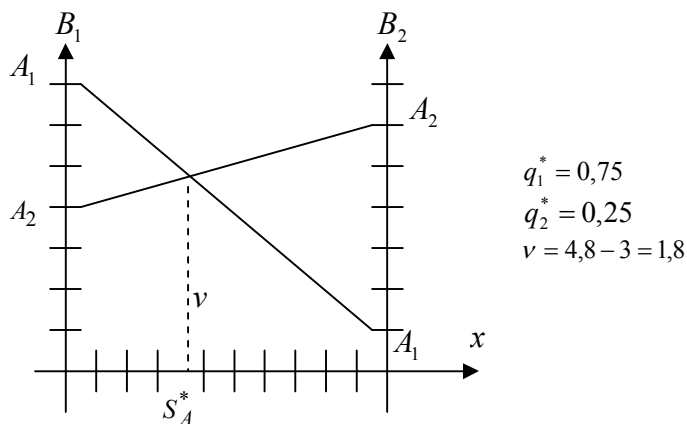


10.4.2-сурет

$$P_1^* = 0,25$$

$$P_2^* = 0,75$$

$$v = 4,8 - 3 = 1,8$$



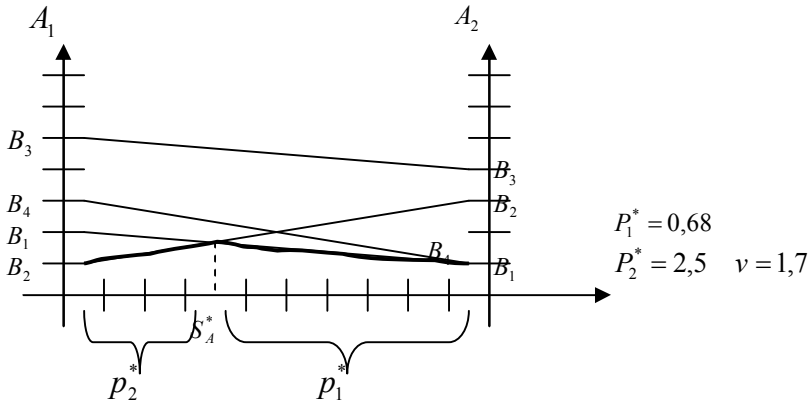
10.4.3-сурет

10.4.2 "2×n" немесе "m×2" ойындары

"2×n" матрицасымен берілген ойын шартын геометриялық түсініктемені пайдалана отырып шешуге болады.

Кез келген В стратегияларына түзулер сәйкес келеді. Осы түзулерді сала отырып, ұтыстың ең төменгі шекарасын табуға болады. Төменгі шекарада жататын К нүктесі максимальды ойын бағасын және оның шешімін анықтайды.

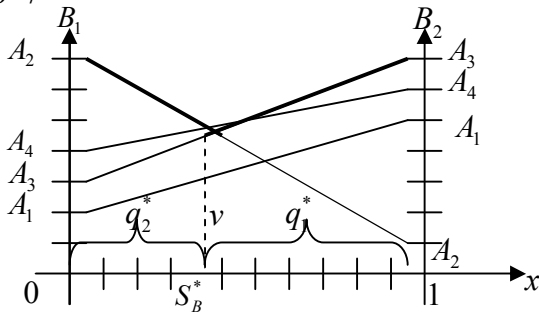
$$\begin{array}{cccc}
 B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\
 A_1 & \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 5 & 3 \end{array} \right) & 1 \\
 A_2 & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 0,5 \end{array} \right) & 0,5 \\
 & 2 & 3 & 5 & 3 & \alpha = 1 \\
 & & & & & \beta = 2
 \end{array}$$



10.4.4-сурет

Дәл осылай " $m \times 2$ " матрицалы ойынды шешуге болады. Тек осы жағдайда ұтылыстың жоғарғы шекарасын құрады және минимум нүктені анықтайды.

$$\begin{array}{c}
 B_1 \quad B_2 \\
 A_1 \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} 2 \\
 A_2 \begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix} 1 \\
 A_3 \begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix} 3 \\
 A_4 \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} 4 \\
 7 \quad 7 \quad \alpha=4 \\
 \beta=7
 \end{array}$$



10.4.5-сурет

10.5 “ $m \times n$ ” ойындарын сызықты бағдарламалау есептеріне келтіру

$$\begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ p_1 A_1 & \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \\ p_2 A_2 & & & \\ \vdots & & & \\ p_m A_m & & & \end{array}$$

Негізгі теоремаға сәйкес, А ойыншының оптималды стратегияларын анықтау есебін қарастырайық (дәл солай В ойыншының есебін де):

А	В
$v \rightarrow \max$	$v \rightarrow \min$
$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq v$	$a_{11}q_1 + a_{21}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \leq v$
$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \geq v$	$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n \leq v$
$a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \geq v$	$a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + \dots + a_{mn}q_n \leq v$
$\sum_{i=1}^m p_i = 1$	$\sum_{j=1}^n q_j = 1$

Шектеулердің сол және оң жағын v -ға бөлеміз де, жаңа айнымалы енгіземіз: (u_i, ξ_j) . А, В – ойыншылардың есептерін көшіреміз:

А	В
$u_i = \frac{p_i}{v}$	$\xi_j = \frac{q_j}{v}$
$\omega = \sum_{i=1}^m u_i \rightarrow \min$	$z = \sum_{j=1}^n \xi_j \rightarrow \max$
$v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m \geq 1$	$\eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n \leq 1$
$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m \geq 1$	$\eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n \leq 1$
$v_3 = a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + \dots + a_{mn}u_m \geq 1$	$\eta_3 = a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + \dots + a_{mn}\xi_n \leq 1$
$u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$	$\xi_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$

Екі есепті біз кестеге енгіземіз. В - ойыншының есебі негізгі болсын. Тіке симплекс әдісін сол есепке қолданамыз да, екінші есептің де айнымалыларын шығарамыз.

	v_1	v_2	..	v_n	ω
	$-\xi_1$	$-\xi_2$	..	$^*\xi_n$	1
$u_1\eta_1$	a_{11}	a_{12}	..	a_{1n}	1
$u_2\eta_2$	a_{21}	a_{21}	..	a_{2n}	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	..	$\vdots$	$\vdots$
$u_n\eta_m$	a_{m1}	a_{m2}	..	a_{mn}	1
1Z	-1	-1	..	-1	0

10.5.1- мысал:

$$\begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \\ A_2 & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ A_3 & \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

	v_1	v_2	v_3	ω
	$-\xi_1$	$-\xi_2$	$-\xi_3$	1
$u_1\eta_1$	-2	-1	5	1
$u_2\eta_2$	1	-2	3	1
$u_3\eta_3$	3	<u>1</u>	-4	1
1Z	-1	-1	-1	0

	v_1	u_3	v_3	ω
	$-\xi_1$	$-\eta_2$	$-\xi_3$	1
$u_1\eta_1$	1	1	<u>1</u>	5
$u_2\eta_2$	7	2	-5	3
$v_2\xi_2$	3	1	-4	1
1Z	2	1	-5	1

	v_1	u_3	u_1	ω
	$-\xi_1$	$-\eta_3$	$-\eta_1$	1
$v_3\xi_1$	1	4	1	2
$u_2\eta_2$	12	7	5	13
$v_2\xi_2$	7	5	4	9
1Z	7	6	5	11

$$\xi^* = (0; 9; 2)$$

$$u^* = (5; 0; 6) \quad p^* = \left(\frac{5}{11}; 0; \frac{6}{11}\right)$$

$$z^* = \omega^* = 11$$

$$v^* = \frac{1}{11} \quad q^* = (0; \frac{9}{11}; \frac{2}{11})$$

Қосымша есептер:

$$10.5.1 \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad 10.5.2 \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 10.5.3 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$10.5.4 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad 10.5.5 \quad A = \begin{pmatrix} 19 & 15 & 17 & 16 \\ 0 & 20 & 15 & 5 \end{pmatrix} \quad 10.5.6 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$10.5.7 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & 2 \\ 9 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad 10.5.8 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad 10.5.9 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$10.5.10 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 10.5.11 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \quad 10.5.12 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$10.5.13 \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad 10.5.14 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 0 & 10 & 2 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad 10.5.15 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$10.5.16 \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad 10.5.17 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 10.5.18 \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$10.5.19 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad 10.5.20 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad 10.5.21 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$10.5.22 \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad 10.5.23 \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad 10.5.24 \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$10.5.25 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad 10.5.26 \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad 10.5.27 \quad A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.8 \\ 0.9 & 0.4 & 0.2 \\ 0.7 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll}
 10.5.28 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} & 10.5.29 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} & 10.5.30 \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\
 10.5.31 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} & 10.5.32 \quad A = \begin{pmatrix} 29 & 30 & 32 \\ 180 & 60 & -20 \\ 20 & 70 & 120 \end{pmatrix} &
 \end{array}$$

10.6 Статистикалық шешімдер теориясының негіздері

Көптеген ойын есептерінде белгісіздік (анықталмағандық) сапасыз қарсы әрекеттерге, операция өткізілетін шарттарды білмеуге байланысты (ауа райы, белгілі бір өнімге сұраныс, т.с.с).

Мұндай ойындар “табиғатты” ойындар деп аталады. Мұнда табиғат ретінде кездейсоқ қимылдайтын қайсыбір өз мақсаты жоқ жұмыс орнын қарастырады.

Табиғаттың мүмкін стратегиялары оның күйі ретінде анықталады. Ойын шарты да матрица түрінде беріледі:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Егер A ойыншы A_i стратегиясын пайдаланатын болса, онда матрица элементі a_{ij} оның ұтысына тең. Ал табиғат күйін P_i бірқатар ойын шешу жағдайларында тәуекел матрицасы R деп қарастырады, мұнда r_{ij} ұтыстар айырмасы (егер A ойыншы, P_i күйін біле отырып, тапқан ұтысымен оның тура сол жағдайда A_i стратегиясын пайдалана отыра тапқан ұтыстарының айырмасы).

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}, \quad \text{мұнда} \quad \beta_j = \max_i a_{ij}$$

Табиғатты ойын шешулерінің бірқатар критерийлерін қарастырайық.

Табиғаттың әртүрлі күйлерінің ықтималдығы белгілі бір жағдайда орналасқанда шешім қабылдау критерийі ретінде ұтыстың максималды математикалық күтуі болады.

Егер табиғат күйі ықтималдықтарының орналасулары белгілі болмаса, онда келесі критерийлерді пайдаланады:

1. Вальд maxmin критерийі: Кез келген жағдайда $\max_i \min_j$

a_{ij} -нан кем емес ұтысқа кепілдік беретін стратегия таңдалады.

2. Сэвидж тәуекелінің минимальды критерийі: өте сәтсіз жағдайларда тәуекел шамасы ең аз болатындай стратегия таңдауды ұсынады.

$$\min(\max_j r_{ij})$$

3. Гурвиц критерийі: Стратегия таңдау кезінде келесі қатынастар орын алады.

$$H = \max_i (\alpha \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij})$$

мұнда $0 \leq \alpha \leq 1$, α - субъективті пайымдаулар негізінде таңдалады.

10.6.1-мысал:

Төрт түрлі электрстанция салынулары мүмкін. Табиғаттың 4 күйі бар, оларға электрстанциялардың тиімділігі тәуелді a_{ij} .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Вальд критерийі бойынша

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max(2, 2, 3, 4) = 3$$

сондықтан A_3^* -3-электрстанция салу керек.

2. Сэвидж критерийі бойынша

$$b_j = 8 \quad 5 \quad 8 \quad 12$$

$$r_{ij} = b_j - a_{ij}$$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \min (8, 6, 5, 7) = 5, \rightarrow \quad \text{сондықтан} \quad A_3^* \quad -$$

3-электрстанциясын салу керек.

3. Гурвиц критерийі бойынша: $\alpha = 0,5$

$$H = \max (0,5 * 2 + 0,5 * 8; 0,5 * 2 + 0,5 * 12; 0,5 * 3 + 0,5 * 10; 0,5 + 0,5 * 8)' = 7,$$

A_2^* - 2-электр- станция салу керек.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. М: Советское радио, 1980.
2. *Вазнер Г.* Основы исследования операций. Т. 1-3. М: Мир, 1973.
3. *Таха Х.* Введение в ИСО. В 2-х книгах. М: Мир, 2000.
4. *Зуховицкий С.И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. М: Наука, 2000.
5. *Форд Л., Фалкерсон Д.* Потоки в сетях. М: Мир, 1966.
6. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. М: Мир, 1967.
7. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М: Мир, 1972.
8. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. М: Мир, 1969.
9. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. М: Мир, 1974.
10. *Калихман И.Л.* Сборник задач по математическому программированию. М: Высш. школа, 1975.
11. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. М: Высш. школа, 1986.
12. *Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С.* Руководство к решению задач по математическому программированию. Минск: Вышэйшая школа, 1978.
13. *Балгабаева Л.Ш.* Сызықтық және бейсызықтық бағдарламау. Тәжірибелік сабақтарға арналған әдістемелік нұсқаулар. Алматы: ҚазҰТУ, 1997.
14. *Балгабаева Л.Ш.* Бүтінсандық бағдарламау. Транспорт есебі. Тәжірибелік сабақтарға арналған әдістемелік нұсқаулар. Алматы: ҚазҰТУ, 1997.
15. *Балгабаева Л.Ш., Мураталиева Е.П.* Исследование операций. Методические указания к практическим занятиям и выполнению курсовой работы. Алматы: КазНТУ, 1998.
16. *Балгабаева Л.Ш., Мураталиева Е.П.* Автоматтандырылған басқарудың модельдері мен әдістері. Тәжірибелік сабақтарға және курстық жұмыс орындау үшін арналған әдістемелік нұсқаулар. Алматы: ҚазҰТУ, 2003.
17. *Балгабаева Л.Ш., Ким Е.Р.* Сборник задач. Часть 1, 2, 3. Методические указания к практическим занятиям по дисциплинам «Основы исследования операций» и «Теория принятия решений». Алматы: КазНТУ, 2005.

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ.....	3
1. ОПЕРАЦИЯЛАРДЫ ЗЕРТТЕУ НЕГІЗДЕРІНІҢ МЕТОДОЛОГИЯСЫ.....	5
1.1 Негізгі анықтамалармен түсініктемелер.....	5
1.2 Операцияларды зерттеудің негізгі кезеңдері.....	6
1.3 Операцияларды зерттеудің негізгі принциптері.....	10
1.4 Оптималдандыру әдістерінің жалпы схемасы.....	10
2. ТИПТІК ЕСЕПТЕР.....	12
2.1 Қоспаның ең жақсы құрамын анықтау есебі (диета туралы есеп).....	12
2.2 Өнім шығарудың оптималды жоспары.....	12
2.3 Металл өнімдерін тасымалдауды жоспарлау есебі.....	13
2.4 Белгілеу (үлестіру) туралы есеп.....	14
2.5 Типтік есептерге мысалдар.....	15
3. СЫЗЫҚТЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУ.....	19
3.1 Тендеу жүйесін шешудің үш тәсілі.....	19
3.2 Сызықтық бағдарламалау есептерінің геометриялық мағынасы ($n=2$).....	24
3.3 Тіке симплекс әдісі.....	27
3.4 Сызықтық бағдарламалаудың қос мағыналы есептері.....	33
3.5 Қос мағыналы кестелер.....	34
3.6 Қос мағыналылықтың екі теоремасы.....	38
3.7 Қос мағыналы симплекс әдісі.....	42
4. ЖАЛПЫ ТРАНСПОРТ ЕСЕБІ.....	48
4.1 Транспорт есебін қою және оның математикалық моделі..	48
4.2 Потенциалдар әдісі.....	49
5. ДИСКРЕТТІ БАҒДАРЛАМАЛАУ.....	59
5.1 Дискретті бағдарламалау есептері.....	59
5.2 Гоморидің кесіп түсіру әдісі.....	59
5.3 Ленд-Дойг әдісі.....	62
6. КОММИВОЯЖЕР ТУРАЛЫ ЕСЕП БЕЛГІЛЕУ ЕСЕБІНІҢ БІР ТҮРІ.....	67
6.1 Литтл алгоритмі.....	68
7. ДИНАМИКАЛЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУ.....	73
7.1 Динамикалық басқаруды әр кезең бойынша құру принциптері.....	73
7.2 Динамикалық бағдарламалаудың есептеу схемасы.....	74
7.3 Динамикалық бағдарламалаудың моделін құру ережесі....	75

8. БЕЙСЫЗЫҚТЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУ	82
8.1 Бейсызықтық бағдарламалау есебінің қос мағыналылығы	82
8.2 Бір өлшемді ізденіс әдістері.....	84
8.3 Алтын қиық әдісі.....	84
8.4 Циклдік әрбір координата бойынша құлдिलाу әдісі.....	85
8.5 Барынша тез құлдिलाу әдісі.....	87
8.6 Франк-Вульф әдісі.....	90
8.7 Ньютон-Рабсон әдісі.....	94
9. ТОРАПТЫҚ СЫЗЫҚТЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУ	97
9.1 Ең қысқа жол есебі.....	98
9.2 Форд-Фалкерсон әдісі.....	100
10. ОЙЫНДАР ЖӘНЕ СТАТИСТИКАЛЫҚ ШЕШІМДЕР	
ТЕОРИЯСЫ.....	105
10.1 Ойындар теориясының негізгі түсініктері.....	105
10.2 Ойындар теориясының негізгі теоремасы.....	108
10.3 "2x2" ойынының шешімі (алгебралық әдіс).....	108
10.4 Ойындар теориясының геометриялық мағынасы.....	110
10.4.1 Графикалық әдіс ("2x2" ойыны).....	110
10.4.2 "2xn" немесе "mx2" ойындары.....	112
10.5 "mхn" ойындарын сызықтық бағдарламалау есептеріне келтіру.....	114
10.6 Статистикалық шешімдер теориясының негіздері.....	117
ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ.....	120

Оқулық басылым

Ләззат Шайханқызы Балғабаева

ОПЕРАЦИЯЛАРДЫ ЗЕРТТЕУ НЕГІЗДЕРІ

Оқу құралы

РБ меңгерушісі

З.А. Ғұбайдулина

Редакторы

А.М. Балхашева

Техн. редакторы

Ж.Н. Байменова

Компьютерде терген

және беттеген

А.А. Сегізбаева

Басуға «22» 05. 2008 ж. қол қойылды

Пішімі 60/84 1/16. № 1 баспаханалық қағаз.

Шартты б.т. 7,7. Есепті б.т. 7,8. Таралымы 500 дана.

Тапсырыс №149. Бағасы келісімді.

Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университетінің
басылымы, ҚазҰТУ-дың Ғылыми-техникалық баспа орталығы.

Алматы, Ладыгин көшесі, 32