

ҚҰЛЖАБАЙ ҚАСЫМОВ
ЕДІЛ ҚАСЫМОВ

ЖОҒАРЫ
МАТЕМАТИКА
КУРСЫ



АЛМАТЫ, «САНАТ», 1994

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

Қасымов Құлжабай, Қасымов Еділ

**Жоғары математика курсы: Оқу құралы.— Алматы,
«Санат», 1994.—256 бет.
ISBN 5-7090-0016-7**

Бұл қазақ тілінде жазылып отырған тұңғыш оқулық жоғары математика курсының бірінші бөлімі және аналитикалық геометрияның декарт координат жүйесіндегі толық курсы болып табылады. Мұнда жазықтықтағы координат әдісі мен анықтауыштар теориясына және векторлық алгебраның элементтеріне жан-жақты шолу жасалып, жазықтықтағы түзу сызықтардың теңдеулері, екіінші ретті сызықтың ықшамды теңдеулері толығымен қамтылған. Әр тақырып соңында теорияны меңгеру үшін есептер келтірілген. Бұл оқулық жоғары оқу орындарының студенттеріне арналған.

ISBN 5-7090-0016-7

© Қасымов Құлжабай, Қасымов

КООРДИНАТ ӘДІСІ

1.1. Жазықтықтағы тік бұрышты декарт координат жүйесі

Жазықтықтағы кез келген нүкте қосарланған екі санмен анықталады. Қосарланған екі санды анықтау үшін берілген жазықтықта бір-біріне перпендикуляр екі түзу жүргізелік. Олардың қиылысу нүктесін O әрпімен белгілейік (1-сурет). O нүкте арқылы өтетін жатық OX түзуін абсцисса, ал осы өспен O нүктесінде қиылысып және онымен 90° түзейтін тік OY түзуі ордината өстері деп аталады. Осылайша OX пен OY өстері орналасқан жазықтық координат жазықтығы делінеді.

Абсцисса және ордината өстерін координат өстері, ал осы өстердің қиылысу O нүктесін координат жүйесінің бас нүктесі деп атайды.

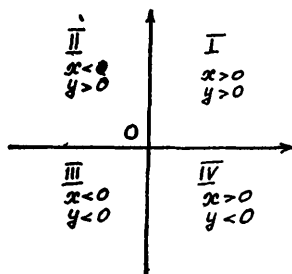
Абсцисса өсіндегі O нүктесінің оң жағындағы өсін оң бағыт, ал сол жағындағы өсін сол бағыт делік. Енді ордината өсіндегі O нүктесінің жоғарғы жағындағы өсін оң бағыт, ал төменгі жағындағы өсін сол бағыт делік. Сонымен, екі оң бағытқа қарама-қарсы екі сол бағыт сәйкес келеді және де осы екі оң бағыттың координаттарының таңбалары оң, ал оларға қарама-қарсы екі сол бағыттың координаттарының таңбалары теріс болады.

Таңбалары оң болатын координаттарының ұшына тілше қойылып x және y әріптерімен белгілейміз, ал таңбалары теріс болатын координаттарының ұштарына тілше қойылмайды және де оның ұштарын әріппен белгілемеу келісілген.

Абсцисса және ордината өстері берілген жазықтықты төрт жазықтыққа немесе ширекке бөледі.

Бірінші (I) ширектегі нүктенің координаттары тек оң, яғни абсцисса және ордината оң, ал үшінші (III) ширектегі абсцисса және ордината теріс болады (1-сурет). Екінші (II) ширектегі абсцисса теріс, ордината оң, ал төртінші (IV) ширектегі абсцисса оң, ордината теріс болады (1-сурет).

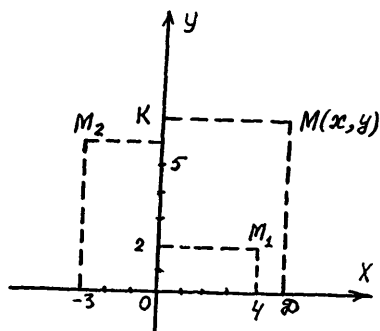
Абсцисса өсі берілген жазықтықты екі жазықтыққа бөледі: бірі OX өсінің жоғарғы, ал екіншісі төменгі жағына орналасқан. Жоғарғы жазықтықта жатқан нүктелердің ординатасы оң, ал төменгі жазықтықта жатқан нүктелердің ординатасы теріс. Осы сияқты ордината өсі де берілген жазықтықты екі жазықтыққа



1-сурет

бөледі. Оң жазықтық OY өсінің оң жағында, ал сол жазықтық осы өстің сол жағында орналасқан. Оң жазықтықта жатқан нүктелердің абсциссасы оң да, ал сол жазықтықтағысы теріс болады. Мысалы, M нүкте I ширекте, A —II ширекте, B —III ширекте, C —IV ширекте орналасқан (1-сурет).

OX және OY өстеріндегі кесінділерді өлшеу үшін екі өстен де бірдей бірлік масштаб аламыз. Бізге жазықтықта жатқан кез келген M нүктесі берілсін делік (2-сурет). Берілген нүктеден



2-сурет

координат өстеріне перпендикуляр түзулерін жүргізейік және олардың өстермен қиылысу нүктелерін D және K әріптерімен белгілейік. Сонда, $x=OD$ және $y=OK$ сандары M нүктесінің координаттары деп аталады және былай белгіленеді: $M=M(x, y)$, мұндағы бірінші орынға OX өсіндегі абсцисса, яғни x , ал екінші орынға OY өсіндегі ордината, яғни y сәйкес келеді. Сонымен, декарт координат жазықтығында берілген кез келген нүкте қосарланған x және y сандарымен

анықталады, керісінше, қосарланған екі санға декарт координат жазықтығында тек бір ғана нүкте сәйкес келеді. Мысалы, егер $x=4$, $y=2$ болса, онда қосарланған $(4, 2)$ санына $M(4, 2)$ нүктесі, осы сияқты қосарланған $(-3, 6)$ санына $M(-3, 6)$ нүктесі сәйкес келеді.

Егер координат өстеріндегі бірлік масштабтың скеуінде де бірдей етіп алсақ, онда мұндай координат жазықтығы тік бұрышты декарт координат жүйесі деп аталады және оны XOY деп белгілейміз.

Егер абсцисса мен ордината өстерінің арасындағы бұрыш 90° -қа тең болмаса, онда бұл қиғаш бұрышты координат жүйесі деп аталады.

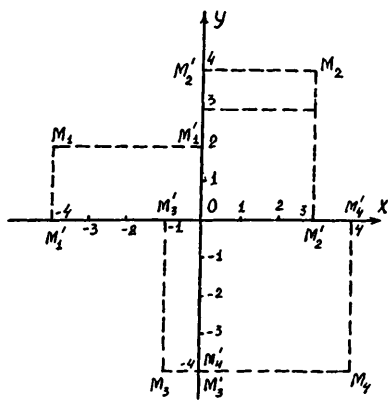
Біз алдағы тарауларда тек тік бұрышты декарт координат жүйесін ғана қарастыратын боламыз.

Мысалдар. 1. Тік бұрышты декарт координат жүйесінде берілген $M_1(-4, 2)$, $M_2(3, 4)$, $M_3(-1, -4)$, $M_4(4, -4)$ нүктелерін тап және осы нүктелерден координат өстеріне параллель жүргізілген түзулердің сол өстермен қиылысу нүктелерінің координаттарын анықта.

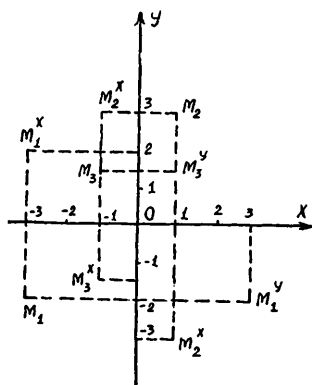
Шешімі 3-суретте көрсетілген.

2. Берілген $M_1(-3, -2)$, $M_2(1, 3)$, $M_3(-1, 1.5)$ нүктелеріне OX және OY өстері арқылы симметрия болатын нүктелердің координаттарын анықта.

Шешімі. M_1 нүктесіне OX және OY координат өстері арқылы симметрия болатын сәйкес нүктелерді M_1^x және M_1^y деп



3-сурет



4-сурет

белгілейік (4-сурет). Енді $M_1(-3, -2)$ нүктеге OY өсі арқылы симметрия болатын нүктені анықтау үшін OX өсіндегі -3 -ті кері таңбаға ауыстыру керек, сонда $M_1^y(3, -2)$ нүкте $M_1(-3, -2)$ нүктесіне OY өсі арқылы симметрия нүктесі болып табылады. Енді, $M_1(-3, -2)$ нүктеге OX өсі арқылы симметрия болатын нүктені анықтау үшін осы нүктенің OY өсіндегі -2 -ні кері таңбаға ауыстыру керек, сонда $M_1^x(-3, 2)$ нүкте $M_1(-3, 2)$ нүктесіне OX өсі арқылы симметрия нүктесі болып табылады (4-сурет). Осы сияқты $M_2(1, 3)$ нүктесіне $M_2^x(1, -3)$ және $M_2^y(-1, 3)$ нүктелері, ал $M_3(-1, 1.5)$ нүктесіне $M_3^x(-1, -1.5)$ және $M_3^y(1, 1.5)$ нүктелері сәйкес келеді.

1. 2. Поляр координат жүйесі

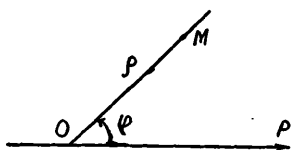
Өткен тақырыпта жазықтықтағы нүктені анықтау үшін тік бұрышты декарт координат жүйесін пайдаландық. Берілген M нүктесінің координатын анықтау үшін басқа да координат жүйені пайдалануға болады, мысалы, поляр координат жүйесін. Енді поляр координат жүйесімен танысып өтелік. Ол үшін, M жатқан жазықтықтан кез келген O нүкте алып, осы нүктенен өтетін OP және OM түзулерін тұрғызайық (5-сурет). Мұндағы O нүкте полюс, OP түзуі поляр өсі, ал OM түзуі поляр радиусы деп аталынады. Сонымен, поляр радиус дегеніміз полюстен берілген нүктеге дейінгі ара қашықтық, ал поляр радиусымен поляр өсі арасындағы φ бұрыш поляр бұрыш деп аталады.

Жазықтықтағы поляр өсі мен сол өстегі бірлік масштаб поляр координат жүйесін анықтайды. Поляр координат жүйесінде

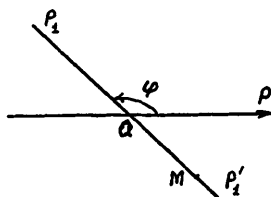
анытқалған $OM = \rho$ және $\varphi = (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM})$ сандары берілген M нүктесінің координаттары деп аталады және былай белгіленеді $M(\rho, \varphi)$, мұндағы бірінші орынға ρ , ол екінші орынға φ жазылады.

Сонымен, жазықтықтағы кез келген нүкте поляр координат жүйесінде де қосарланған екі ρ және φ сандарымен анықталады, керісінше, қосарланған екі ρ және φ сандарына поляр координат жүйесінде тек бір ғана нүкте сәйкес келеді.

Егер $\varphi > 0$ болса, онда ρ бұрышын сағат тіліне қарама-қарсы бағытта аламыз (5-сурет), ал егер $\varphi < 0$ болса, онда φ бұрышын сағат тіліне бағыттас бағытта аламыз.



5-сурет

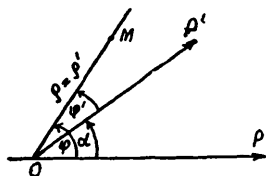


6-сурет

Жоғарыда айтылғандардан оқушыларда полярлық радиус тек оң сан деген ұғым қалуы мүмкін. Жалпы айтқанда ρ кез келген нақты сан. Егер $\rho < 0$, $\varphi > 0$ болған жағдайда, яғни $M(-\rho, \varphi)$ нүктесін поляр координат жүйесінде анықтау үшін сағат тіліне қарама-қарсы бағытта φ бұрышын өлшеп, полюс арқылы өтетін және поляр өсімен φ бұрыш түзейтін OP_1 өсін жүргіземіз. Енді O нүктесінен бастап OP поляр өсінің төменгі жағынан OP_1 өсінің бойынан $|\rho| = \rho = OM$ кесіндісін тұрғызсақ жеткілікті.

Сонымен, $M(-\rho, \varphi)$ нүктесін поляр координат жүйесінде анықтау үшін $M(|-\rho|, \varphi + \pi)$ нүктесін аныктасақ бізге жеткілікті (6-сурет).

Бізге, MOP поляр координат жүйесіндегі M нүктенің координаттары берілсін, яғни $M(\rho, \varphi)$ және MOP — ескі поляр координат жүйесі деп аталады. Енді OP поляр өсін α ($0 < \alpha < \varphi$) бұрыша бұрайық, сонда біз MOP' жаңа поляр координат жүйесін аламыз және осы жүйедегі $M(\rho', \varphi')$ нүктенің жаңа координаттарын ρ' , φ' әріптерімен белгілейік (7-сурет). Ескі және жаңа поляр координат жүйесіндегі M нүктенің координаттарының арасындағы байланысты қарастырайық. Ол үшін мына теңдіктердің



7-сурет

$$\rho = \rho', \quad \varphi = \varphi' + \alpha$$

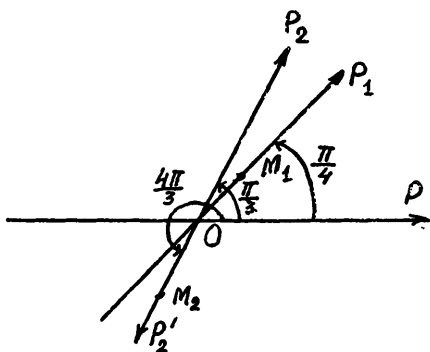
орындалатындағына оңай көз жеткізуге болады. Осыдан

$$\rho' = \rho, \quad \varphi' = \varphi - \alpha. \quad (1.1)$$

Сонымен, (1.1) формула M нүктенің ескі және жаңа поляр координат жүйесіндегі координаттарының арасындағы байланысын көрсетеді.

Мысал. Поляр координат жүйесінде $M_1(2, \frac{\pi}{4})$, $M_2(-3, \frac{\pi}{3})$ нүктелерін тұрғыз.

Шешімі. Алдымен M_1 нүктені тұрғызайық. Ол үшін OP поляр өсімен $\frac{\pi}{4}$ бұрыш түзейтін OP_1 өсін тұрғызайық (8-сурет). OP_1 өсінің бойынан 0— полюстен ұзындық бірлігі 2-ге тең OM_1 кесінді алайық. Осы кесіндінің екінші ұшы, яғни M_1 нүкте іздестіріп отырған нүктеміз.



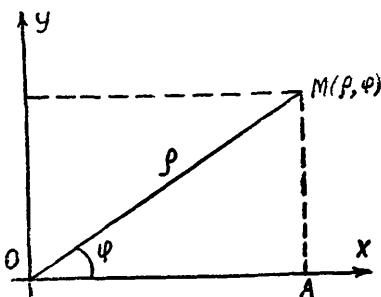
8-сурет

Енді M_2 нүктені тұрғызайық. Ол үшін OP поляр өсімен $\frac{\pi}{3}$ бұрыш түзейтін OP_2 өсін тұрғызамыз. OP_2 өсін кері бағытқа созып OP'_2 өсі бойынан ұзындық бірлігі $|-3|=3$ -ке тең OM_2 кесіндіні алайық. Сонда, M_2 нүкте іздестіріп отырған екінші нүктеміз болып табылады.

1.3. Тік бұрышты және поляр координат жүйесінің арасындағы байланыс

Көп жағдайларда тік бұрышты координат жүйесінде берілген қисық сызықтың немесе түзудің теңдеуін поляр координат жүйесі арқылы өрнектеуге тура келеді немесе керісінше. Сол себепті, координат жүйесінің бір түрінен екінші түріне көшу үшін олардың арасындағы байланысты табу қажет. Сондықтан, берілген нүктенің координаттары арқылы тік бұрышты және поляр координат жүйелерінің арасындағы байланысты қарастыралық.

Бізге бір жазықтықта жатқан тік бұрышты-декарт және поляр координат жүйелерінің $M(x, y)$ нүктесі берілсін және де олардың бас нүктесі мен полюсі ортақ, ал абсцисса Ox өсі поляр OP өсімен беттессін делік (9-сурет). Мұндағы $x=OA$, $y=OB$ берілген M нүктенің $ХОУ$ тік бұрышты декарт координат жүйесіндегі, ал



9-сурет

$$\rho = OM, \varphi = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$$

M нүктенің поляр координат жүйесіндегі координаттар.

Тік бұрышты $\triangle OMA$ -дан табатынымыз:

$$\cos \varphi = \frac{OA}{OM} = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{MA}{OM} = \frac{y}{\rho}.$$

Осыдан

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (1.2)$$

болады.

Сонымен, (1.2) формула тік бұрышты координат пен поляр координат жүйелері арасындағы байланысты көрсетеді.

Енді (1.2) теңдіктерінің екі жағын квадраттап қосайық:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \quad \text{немесе} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.3)$$

яғни поляр радиусының ұзындығын табамыз.

Егер берілген $M(x, y)$ нүкте OY өсінде жатпаса, онда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad \text{немесе} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (1.3)$$

Сонымен, тік бұрышты декарт координат жүйесінде берілген M нүктенің координаты белгілі болса, онда осы нүктенің поляр координат жүйесіндегі координаттар, яғни поляр радиусы мен бұрышы (1.3) және (1.4) формулалары арқылы анықталады.

Мысалдар. 1. Тік бұрышты декарт координат жүйесінде берілген $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ нүктенің поляр координат жүйесіндегі координаттарын анықта.

Шешімі. (1.3) формуладағы $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, сонда $\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$.

$$(1.4) \text{ формуладан: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3} \sqrt{3},$$

яғни $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Сонымен M нүктенің поляр координат жүйесіндегі координаттары $M\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$ болады (10-сурет).

2. Поляр координат жүйесінде берілген $M\left(-2, \frac{4\pi}{4}\right)$ нүктенің декарт координат жүйесіндегі координаттарын анықта.

Шешімі. Ол үшін (1.2) формуланы пайдаланамыз:

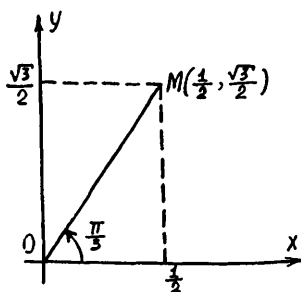
$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

мұндағы $\rho = -2$, $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. Онда, $x =$

$$= -2 \cos \frac{4\pi}{3} = -2 \left(-\frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$y = -2 \sin \frac{4\pi}{3} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}.$$

Сонымен, берілген нүктенің декарт координат жүйесіндегі координаттары $x = 1$, $y = -\sqrt{3}$ яғни $M'(1, -\sqrt{3})$.



10-сурет

3. Декарт координат жүйесіндегі $y^2(2a-x) - x^3 = 0$ циссоида теңдеуінің поляр координат жүйесіндегі теңдеуін анықта.

Шешімі. Ол үшін декарт және поляр координат жүйелері арасындағы байланысты көрсететін (1.2) формуланы пайдаланамыз. $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ формуланы берілген теңдеуге қойып, одан ρ -ны анықтайық

$$\begin{aligned}\rho^2 \sin^2 \varphi (2a - \rho \cos \varphi) - \rho^3 \cos^3 \varphi &= 0, \\ 2a \sin^2 \varphi - \rho \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi - \rho \cos^3 \varphi &= 0, \\ 2a \sin^2 \varphi - \rho \cos \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) &= 0.\end{aligned}$$

Осыдан,

$$\rho = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \text{ немесе } \rho = 2a \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi.$$

Соңғы теңдеу іздестіріп отырған циссоида теңдеуі.

4. Поляр координат жүйесіндегі $\rho = 2r(1 + \cos \varphi)$ кардиоида теңдеуінің декарт координат жүйесіндегі теңдеуін анықта.

Шешімі. Алдымен (1.2) мен (1.3) формулаларын пайдаланып, кардиоида теңдеуіндегі ρ мен $\cos \varphi$ -ді анықтайық:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Енді ρ мен $\cos \varphi$ -ді берілген кардиоида теңдеуіне қойып, оны x пен y айнымалылары арқылы өрнектелген теңдеуді анықтасақ жеткілікті:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2r \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

$$x^2 + y^2 = 2r(\sqrt{x^2 + y^2} + x), \quad x^2 + y^2 - 2rx = 2r\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Осыдан,

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2).$$

Соңғы теңдеу берілген кардиоида теңдеуінің декарт координат жүйесіндегі теңдеуі.

5. Центрі $M(0, 4)$, ал радиусы 4-ке тең шеңбердің поляр теңдеуін анықта.

Шешімі. Ол үшін шеңбердің центрі $M(a, b)$ — нүкте, ал радиусы R -ге тең шеңбердің жалпы теңдеуін пайдаланамыз:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

мұндағы $a=0$, $b=4$, $R=4$. Сонда, $x^2 + (y-4)^2 = 16$ теңдеуі іздестіріп отырған теңдеудің декарт координат жүйесіндегі теңдеуі. Енді $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ -ді шеңбердің теңдеуіне қояйық

$$\begin{aligned}\rho^2 \cos^2 \varphi + (\rho \sin \varphi - 4)^2 &= 16, \\ \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi - 8\rho \sin \varphi + 16 &= 16.\end{aligned}$$

Осыдан,

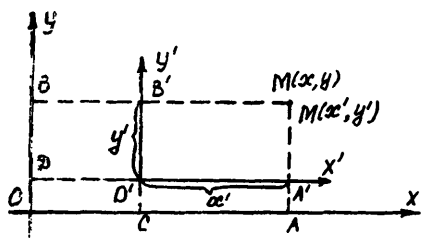
$$\rho = 8 \cos \varphi.$$

Соңғы теңдеу іздестіріп отырған шеңбердің поляр теңдеуі.

1.4. Тік бұрышты декарт координат жүйесін параллель көшіру

Бізге тік бұрышты XOY декарт координат жүйесі және осы координат жүйесінде жатқан $M(x, y)$ нүкте берілсін делік.

Енді XOY координат жүйесін берілген $M(x, y)$ нүктесінен басқа O' нүктесіне параллель көшіру үшін бағыттарын өзгертпей O' нүктеден OX және OY координат өстеріне параллель $O'A'$ және $O'B'$ өстерін тұрғызу керек. Сонда біз параллель көшіру нәтижесінде екі тік бұрышты XOY және $X'O'Y'$ декарт координат жүйелерін аламыз.



11-сурет

Бұл екі жүйедегі бірлік масштаб бірдей. Бұл жағдайда $X'O'Y'$ жүйесі XOY жүйесін O' нүктеге параллель көшіру нәтижесінде алынады. Параллель көшіру нәтижесінде алынған $X'O'Y'$ жүйесі жаңа, ал XOY жүйесі ескі координат жүйелері деп аталады (11-сурет).

Енді жаңа және ескі координат жүйелерінде берілген $M(x, y)$ нүктенің координаттарының арасындағы байланысты қарастырайық. Ол үшін $M(x, y)$ және O' нүктелерінен жаңа және ескі координат өстеріне перпендикуляр түзулер тұрғызайық, олардың өстермен қиылысу нүктелерін A, B және A', B' және C, D әріптерімен белгілейік. Берілген $M(x, y)$ нүкте жаңа және ескі координат жүйелеріне ортақ, мұндағы $x=OA, y=OB$ және $a=OC, b=OD, x'=O'A', y'=O'B'$ болсын, яғни $O'(a, b)$ болады. Сонда

$$\begin{aligned} OA &= a + CA, \\ OB &= b + DB, \end{aligned}$$

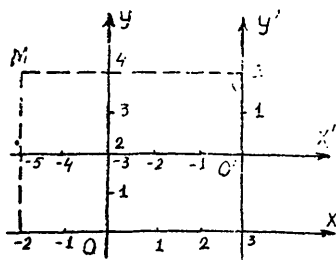
немесе

$$\begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y' \end{cases} \quad (1.5)$$

мұндағы x, y — берілген M нүктенің ескі XOY координат жүйесіндегі, координаттары, x', y' — осы нүктенің жаңа координат жүйесіндегі координаттары, ал a, b жаңа $X'O'Y'$ — координат жүйесінің бас нүктесінің координаттары.

Сонымен біз, нүктенің екі тік бұрышты декарт координат жүйелеріндегі координаттарының арасындағы байланысты таптық, ол (1.5) формуладан аныкталады.

Мысал. 1. Тік бұрышты декарт координат жүйені параллель $O'(3, 2)$ нүктесіне көшіріп, $M(-2, 4)$



12-сурет

нүктенің жаңа координат жүйесіндегі координаттарын анықта.

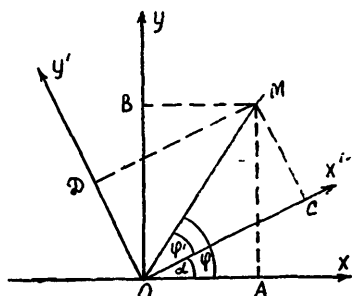
Шешімі. Ескі XOY координат жүйесін O' нүктесіне параллель көшірелік (12-сурет). (1.5) формуладан

$$\begin{cases} x=3+x', \\ y=2+y' \end{cases}$$

ескі және жаңа координат жүйелері арасындағы байланысты табамыз, мұндағы x, y — ескі, ал x', y' — жаңа координат жүйесіндегі нүктенің координаттары. Енді M нүктенің жаңа $X'O'Y'$ координат жүйесіндегі координаттарын анықтайық, ол $x'=x-3$ және $y'=y-2$ болады, мұндағы $x=-2, y=4$. Сондықтан $x'=-5, y'=2$, яғни $M(-5, 2)$ болады.

1.5. Тік бұрышты декарт координат жүйесін бұру

Бізге XOY координат жүйесінде жатқан $M(x, y)$ нүкте берілсін делік. Берілген XOY декарт координат жүйесін $\alpha > 0$ бұрышқа бұру үшін бағыттарын өзгертпей OX және OY өстерін O нүктесінде айнала сағат тіліне қарама-қарсы бағытта α бұрышқа тұрамыз, осыдан пайда болған тік бұрышты декарт координат жүйесін $X'O'Y'$ әріптерімен белгілейік (13-сурет). O нүкте ескі XOY және жаңа $X'O'Y'$ координат жүйелеріне ортақ. Енді XOY және $X'O'Y'$ жүйе координаттарының байланысын берілген $M(x, y)$ нүктенің координаттары арқылы қарастыралық. M нүктесінің ескі MOX поляр координаттағы координаттарын ρ, φ ал жаңа MOX' поляр координаттағы координаттарын $\rho'; \varphi'$ әріптерімен белгілейік, сонда олардың арасындағы байланыс мына теңдік арқылы өрнектеледі:



13-сурет

$$OM = \rho = \rho', \quad \varphi = \varphi' + \alpha \quad (1.6)$$

Енді поляр координат жүйесінен декарт координат жүйесіне көшелік:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \\ x' &= \rho' \cos \varphi' = \rho \cos \varphi', \quad y' = \rho' \sin \varphi' = \rho \sin \varphi', \end{aligned} \quad (1.7)$$

мұндағы x', y' берілген M нүктенің $X'O'Y'$ декарт координат жүйесіндегі координаттары. Жоғарыдағы (1.6) мен (1.7) формулаларына

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\varphi' + \alpha) = \rho \cos \varphi' \cdot \cos \alpha - \rho \sin \varphi' \cdot \sin \alpha = \\ &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \end{aligned}$$

$$y = \rho \sin(\varphi' + \alpha) = \rho \sin \varphi' \cdot \cos \alpha - \rho \cos \varphi' \sin \alpha = \\ = y' \cos \alpha + x' \sin \alpha$$

болады.

Сонымен, мына формула

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = y' \cos \alpha + x' \sin \alpha \end{cases} \quad (1.8)$$

ескі және жаңа координат жүйелерінің арасындағы байланысын өрнектейді.

Егер $X'OY'$ координат жүйесін $-\alpha$ бұрышқа бұрсак, онда XOY координат жүйесін аламыз, сондықтан (1.8) формуладағы α бұрыштың орнына α -ні сол сияқты x -ке x' -ті, x' -ке x -ті, ал y -ке y' -ті, y' -ке y -ті қойсак жеткілікті:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha. \end{cases} \quad (1.9)$$

Демек, берілген нүктенің ескі координат жүйесіндегі координаттарын жаңа координат жүйесіндегі координаттары арқылы өрнектеуге болады немесе, керісінше.

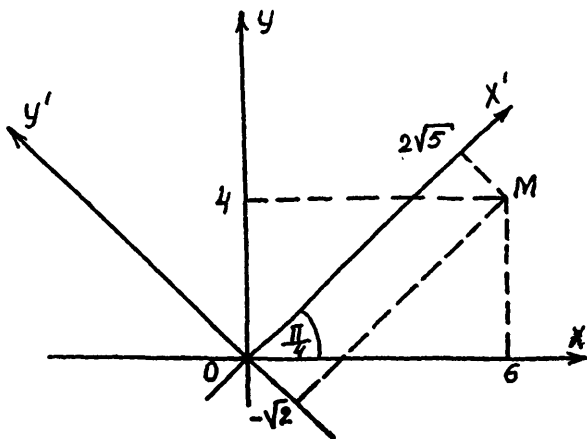
Жалпы жағдайда (1.8) формуланың орнына төмендегі формуланы

$$\begin{cases} x = k_1 x' + k_2 y', \\ y = m_1 x' + m_2 y' \end{cases}$$

пайдаланған тиімді, мұндағы

$$\begin{aligned} k_1 &= \cos \alpha, \quad k_2 = -\sin \alpha, \\ m_1 &= \sin \alpha, \quad m_2 = \cos \alpha. \end{aligned}$$

Мысал. Тік бұрышты декарт координат жүйесін $\alpha = \frac{\pi}{4}$ бұрышқа бұрып, $M(6, 4)$ нүктенің жаңа координат жүйесіндегі координаттарын анықта.



14-сурет

Шешімі. Егер (1.8) формуланы пайдалансак, онда x' және y' скі белгісізі бар сызықты екі теңдеулер жүйесін шешіп есепті шығаруға да болады. Бірақ бізге (1.9) формуланы пайдаланған тиімді, мұндағы $x=6$, $y=4$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, сондықтан

$$x' = 6 \cos 45^\circ + 4 \sin 45^\circ = 5\sqrt{2},$$

$$y' = 4 \cos 45^\circ - 6 \sin 45^\circ = -\sqrt{2}.$$

Сонымен, жаңа $X'O'Y'$ координат жүйесінде M нүктенің координаттары $x' = 5\sqrt{2}$, $y' = -\sqrt{2}$ болады (14-сурет).

1.6. Тік бұрышты декарт координат жүйесін параллель көшіру және бұру

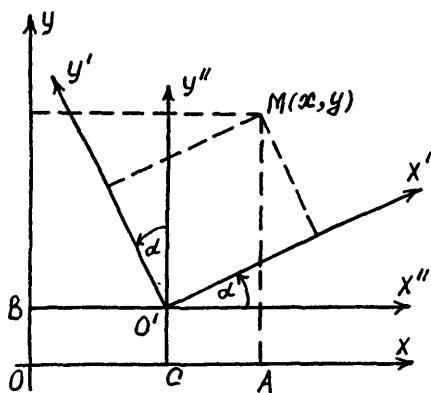
Бізге жазықтықта XOY тік бұрышты декарт координат жүйесі мен осы координат жүйесінде жатқан $M(x, y)$ нүкте берілсін делік. XOY координат жүйесін бас нүктесі $O'(a, b)$ болатын осы нүктеге параллель көшірейік, сонда $X''O''Y''$ тік бұрышты координат жүйесін аламыз. Параллель көшіру нәтижесінде алынған $X''O''Y''$ координат жүйесін $O'(a, b)$ нүктесінде айнала $\alpha > 0$ бұрышқа бұрайық, сонда $X'O'Y'$ тік бұрышты координат жүйесін аламыз (15-сурет). XOY координат жүйесіндегі берілген M нүктенің координаттары мен осы нүктенің $X''O''Y''$ және $X'O'Y'$ координат жүйесіндегі координаттары арасындағы байланысты қарастыралық. Ол үшін M нүктенің $X''O''Y''$ координат жүйесіндегі координаттарын x'' , y'' , ал $X'O'Y'$ жүйесіндегі координаттарын x' , y' әріптерімен белгілейік. Жоғарыдағы (1.5) және (1.8) формуларынан XOY пен $X'O'Y'$ және $X'O'Y'$ пен $X''O''Y''$ координат жүйесіндегі M нүктесінің координаттары арасындағы байланысты табамыз:

$$\begin{cases} x = a + x'', \\ y = b + y'', \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y'' = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \end{cases}$$

мұндағы $a = OC$, $b = OB$. Осыдан:

$$\begin{cases} x = a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (1.10)$$



15-сурет

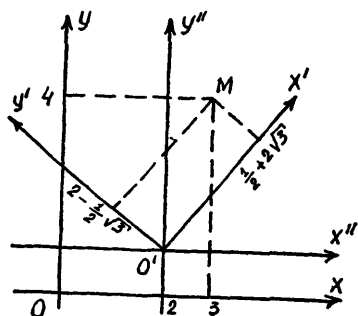
Сонымен, (1.10) формула XOY координат жүйесіндегі M нүктенің координаттары мен осы нүктенің $X'O'Y'$ координат жүйесіндегі координаттары арасындағы байланысты анықтайды.

Енді (1.10) теңдеуін екі x' , y' белгісіздері бар теңдеулер жүйесі ретінде қарастырып, x' пен y' -ті табайық:

$$\begin{cases} y' = -(x-a) \sin \alpha + (y-b) \cos \alpha \\ x' = (x-a) \cos \alpha + (y-b) \sin \alpha \end{cases} \quad (1.11)$$

Сонда (1.11) формула $X'O'Y'$ координат жүйесіндегі M нүктенің координаттары мен осы нүктенің XOY координат жүйесіндегі координаттары арасындағы байланысты анықтайды.

Сонымен, (1.10) мен (1.5) және (1.11) мен (1.9) формулаларын салыстырсақ, онда (1.5) формуласы (1.10) формуласының, ал (1.9) формуласы (1.11) формуласының дербес түрі екендігіне оңай көз жеткізуге болады.



16-сурет

Мысал. Тік бұрышты декарт координат жүйесінде $M(3, 5)$ нүкте берілген. Координат жүйесін $O'(2, 1)$ нүктеге параллель көшіру және оны $\alpha = \frac{\pi}{3}$ бұрышқа бұру нәтижесінде пайда болған координат жүйесіндегі M нүктенің координаттарын анықта.

Шешімі. Алдымен XOY координаттарын O' нүктеге параллель көшірейік, одан кейін $\alpha = \frac{\pi}{3}$ бұрышқа бұрайық (16-сурет). (1.5)

формуладағы $x=3$, $y=5$, $a=2$, $b=1$, сондықтан

$$x' = x - a = 1, \quad y' = y - b = 4$$

болады, яғни біз $X''O'Y''$ координат жүйесіндегі M нүктенің координатын таптық, яғни $M(1, 4)$.

Енді (1.10) формуладан

$$\begin{cases} 3 = x' \cos 60^\circ - y' \sin 60^\circ + 2 \\ 5 = x' \sin 60^\circ + y' \cos 60^\circ + 1 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} x' - \frac{\sqrt{3}}{2} y' = 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} x' + \frac{1}{2} y' = 4 \end{cases}$$

x' және y' белгісіздері бар екі сызықты теңдеулер жүйесін аламыз. Осы жүйені шешейік, сонда

$$x' = \frac{1 + 4\sqrt{3}}{2}, \quad y' = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}$$

болады. Сонымен, $X'O'Y'$ координат жүйесіндегі M нүктенің координаттары

$$x' = \frac{1}{2} + 2\sqrt{3} \approx 0,39, \quad y' = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,85$$

болады.

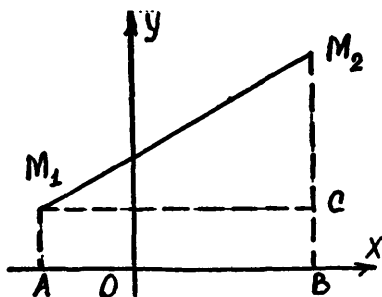
Ескерту. M нүктенің $X'O'Y'$ координат жүйесіндегі нүктелерін (1.11) формуланы пайдаланып табуға да болады.

1.7. Жазықтықтағы екі нүктенің ара қашықтығы

Жоғарыда тапысын өткен ұғымдарды пайдаланып, осы және алдағы тақырыпта аналитикалық геометриядағы қарапайым екі есепті қарастырып өтелік.

Есеп. Тік бұрышты координат жүйесінде берілген $M_1(x_1, y_1)$ $M_2(x_2, y_2)$ нүктелерінің ара қашықтығын анықта.

Шешімі. Берілген нүктелердің ара қашықтығын $d = |M_1M_2|$ әрпімен белгілейік және осы нүктелер координат жүйесінің бас нүктесінен тысқары жатсын делік (17-сурет). Енді M_1 мен M_2 нүктелерінен OX пен OY өстеріне перпендикуляр M_1A мен M_2B түзулерін және M_1 нүктесінен абсцисса өсіне параллель M_1C түзуін тұрғызайық. Тік бұрышты ΔM_1CM_2 -ні қарастырайық. Осы үшбұрыштан Пифагор теоремасы бойынша:



17-сурет

$$|M_1M_2|^2 = |M_1C|^2 + |M_2C|^2$$

мұндағы

$$M_1C = |AB| = |x_2 - x_1|, \quad |M_2C| = |y_2 - y_1|.$$

Сондықтан

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (1.12)$$

Сонымен, координаттарымен берілген екі нүктенің ара қашықтығы M_1M_2 кесіндісінің ұзындығына тең және ол (1.12) формуламен анықталады.

Егер берілген M_1 мен M_2 нүктелерінің бірі, мысалы, M_2 нүктесі координат жүйесінің бас нүктесімен беттессе, онда $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, яғни (1.12) формуладан

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (1.13)$$

болады.

Сонымен, берілген $M_1(x_1, y_1)$ нүктеден координат жүйесінің бас нүктесіне дейінгі ара қашықтық (1.13) формуладан анықталады.

Мысал. Берілген $A(1, -5)$ нүктеден $B(-1, 3)$ және координат жүйесінің бас нүктесіне дейінгі ара қашықтықтарды анықта.

Шешімі. Іздестіріп отырған ара қашықтықтарды (1.12) формуладан анықтаймыз:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

мұндағы $x_1 = 1, y_1 = -5, x_2 = -1, y_2 = 3$. Сонда

$$|AB| = \sqrt{(-1-1)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

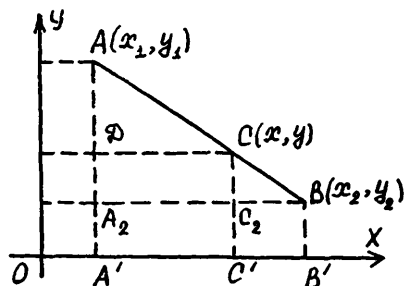
Осы сияқты

$$|AO| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}.$$

1.8. Жазықтықтағы кесіндіні берілген қатынасқа бөлу

Е с е п. Жазықтықтағы AB кесіндісінің екі ұшының координаттары берілген. Осы кесіндіні $\lambda = \frac{AC}{CB} \neq -1$ қатынасына бөлетін $C(x, y)$ нүктесінің координаттарын анықта.

Шешімі. Берілген A мен B нүктелерінің координаттарын сәйкес x_1, y_1 мен x_2, y_2 әріптерімен белгілейік және A, B, C нүктелерінен OX пен OY өстеріне перпендикуляр түзулер жүргізейік (18-сурет). Тік бұрышты ADC мен CC_2B үшбұрыштарының ұқсастығынан:



18-сурет

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'} = \frac{A_2C_2}{C_2B}, \quad \lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{CC_2},$$

мұндағы $A'C' = A_2C_2 = x - x_1, \quad C'B' = C_2B = x_2 - x, \quad AD = y_1 - y, \quad CC_2 = y - y_2$.

Осыдан

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \quad \lambda = \frac{y_1 - y}{y - y_2}.$$

Бірінші теңдіктен y -ті, ал екінші теңдіктен x -ті табалық, сонда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (1.14)$$

Сонымен кесіндіні берілген $\lambda \neq -1$ қатынасқа бөлетін C нүктесінің координаттары (1.14) формула бойынша анықталады.

Кесіндіні тең бөлікке бөлетін нүктенің координаттарын табу үшін (1.14) формуладағы λ -ны бірге тең деп алсақ жеткілікті, яғни

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (1.15)$$

Егер $\lambda > 0$ болса, онда C нүкте AB кесіндісінде жатады, ал $\lambda < 0$ болса, онда ол осы кесіндіден тысқары жатады.

Мысалдар. 1. Үшбұрыштың $A_1(-1, 3)$, $A_2(2, 1)$, $A_3(7, 3)$ төбелері берілген. Осы үшбұрыштың периметрін тап.

Шешімі. (1.12) формуладан

$$|A_1A_2| = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13},$$

$$|A_1A_3| = \sqrt{64} = 8, \quad |A_2A_3| = \sqrt{29}.$$

Сонда $P = |AA_2| + |A_1A_3| + |A_2A_3| = \sqrt{13} + 8 + \sqrt{28}$ болады.

2. $A(1, 4)$ мен $B(-3, 2)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта орналасқан абсцисса өсіндегі нүктенің координаттарын тап.

Шешімі. Іздестіріп отырған $C(x, y)$ нүктеміз абсцисса өсінде жатқандықтан $y = 0$ болады. Енді x_c -ны табу үшін $AC = BC$ теңдігін пайдаланамыз:

$$AC = \sqrt{(x_c - x_A)^2 + (y_c - y_A)^2} = \sqrt{(x_c - 1)^2 + 16},$$

$$BC = \sqrt{(x_c - x_B)^2 + (y_c - y_B)^2} = \sqrt{(x_c + 3)^2 + 4},$$

мұндағы x_A мен y_A берілген A нүктенің, ал x_B мен y_B берілген B нүктенің координаттары:

$$\sqrt{(x_c - 1)^2 + 16} = \sqrt{(x_c + 3)^2 + 4},$$

осыдан $x_c = \frac{1}{2}$

Сонымен $C(\frac{1}{2}, 0)$ нүкте A мен B нүктелерінен бірдей қашықтықта жатады.

3. $A(3, 4)$ нүктеден ара қашықтығы 5-ке тең болатын координат өстеріндегі нүктелерді анықта.

Шешімі. Іздеп отырған $B(x_B, y_B)$ нүкте OY , ал $C(x_c, y_c)$ нүкте OX өсінде жатсын делік, сонда $B(0, y_B)$, $C(x_c, 0)$ болады. Есептің шарты бойынша

$$5 = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2},$$

мұндағы $x_A = 3$, $y_A = 4$, сонда $25 = 9 + 16 - 8y_B + y_B^2$.

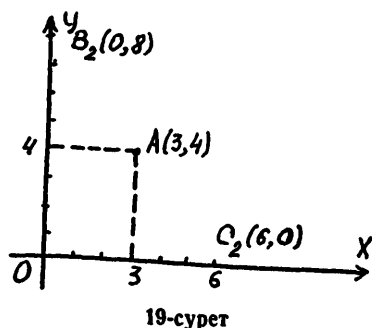
Осыдан $y_B = 0$, $y_B = 8$.

Сонымен, OY өсінде A нүктеден ара қашықтығы 5-ке тең болатын екі нүкте бар, ол $B_1(0, 0)$ мен $B_2(0, 8)$ нүктелері (19-сурет). Осы сияқты

$$5 = \sqrt{(x_A - x_c)^2 + (y_A - y_c)^2},$$

немесе $5 = \sqrt{(3 - x_c)^2 + (4 - y_c)^2}$.

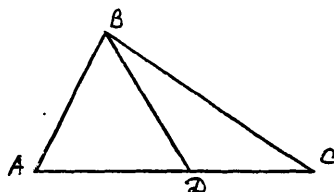
Осыдан $x_c = 0$, $x_c = 6$. Сонымен, OX өсінде A нүктеден ара қа-



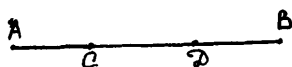
шықтығы 5-ке тең болатын екі нүкте бар, ол $C_1(0, 0)$ мен $C_2(6, 0)$ нүктелері.

4. Үшбұрыштың $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$, $C(1, 0)$ төбелері берілген. B төбесінен түсірілген медиананың ұзындығын тап.

Ш е ш і м і. Үшбұрыштың B төбесінен AC қабырғасына түсірілген медиана осы қабырғаны тең екі бөлікке бөледі (20-сурет), сондықтан D нүктенің координаттарын (1.14) формула бойынша анықтаймыз



20-сурет



21-сурет

$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = 1, \quad y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = 1,$$

яғни $D(1, 1)$. Сонда

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

болады.

5. AB кесіндісін $C(1, 2)$ мен $D(-1, 3)$ нүктелері тең үш бөледі. Осы кесіндінің ұштарының координаттарын анықта (21-сурет).

Ш е ш і м і. Есептің берілуі бойынша C нүкте AD кесіндіні, ал D нүктесі CB кесіндіні тең екі кесіндіге бөледі. Сондықтан

$$x_C = \frac{x_A + x_D}{2}, \quad 1 = \frac{x_A - 1}{2}, \quad x_A = 3,$$

$$y_C = \frac{y_A + y_D}{2}, \quad 2 = \frac{y_A + 3}{2}, \quad y_A = 1.$$

Осы сияқты

$$x_D = \frac{x_C + x_B}{2}, \quad x_B = -3,$$

$$y_D = \frac{y_C + y_B}{2}, \quad y_B = 4.$$

Сонымен $C(3, 1)$, $B(-3, 4)$ болады.

6. AB кесіндіні 1:3 қатынасындай бөлікке бөл, мұндағы $A(3, 5)$, $B(2, 8)$.

Ш е ш і м і. Есептің шарты бойынша AB кесіндіні $\lambda = \frac{1}{3}$ қатынаста бөлетін C нүктенің координаттарын анықтауымыз керек. Сондықтан, (1.14) формуладан

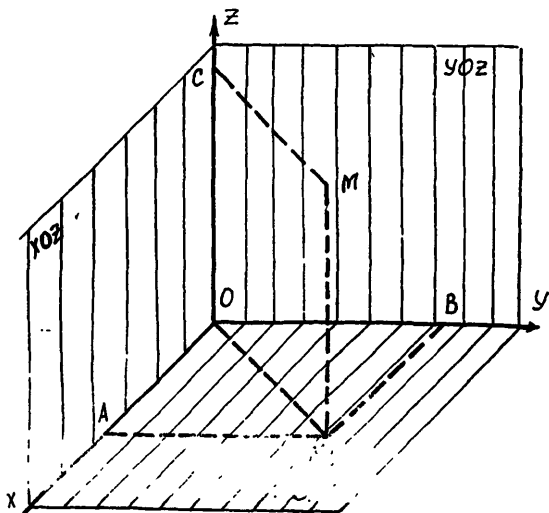
$$x_c = \frac{3 + \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{11}{4} = 2,75,$$

$$y_c = \frac{5 + \frac{8}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{23}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{23}{4} = 5,75.$$

1.9. Кеңістіктегі тік бұрышты декарт, цилиндр және сфера координат жүйелері

Кеңістікте жатқан кез келген O нүкте алып, осы нүктеден өтетін және де өзара перпендикуляр түзетін OX , OY , OZ түзулерін тұрғызайық. Мұндағы OX — абсцисса, OY — ордината, OZ — аппликата өстері деп аталады. Егер осы өстердегі бірлік масштабын бірдей етіп алсақ, онда олар кеңістікте тік бұрышты декарт координат жүйесін анықтайды және оны XOY деп белгілейміз. Кеңістіктегі декарт координат жүйесінің өстері екі-екіден бір жазықтық құрайды, олар координат жазықтықтары деп аталады және оларды XOY , XOZ , YOZ — деп белгілейміз. Координат жазықтықтары өзара перпендикуляр әрі координат жүйесі бас O нүктесінде қиылысады (22-сурет).

Енді координат жүйесінде жатқан M нүктесінің координаттарын табу үшін осы нүктеден XOY координат жазықтығына перпендикуляр MM_1 түзуін тұрғызайық. M_1 нүкте M нүктесінің XOY жазықтығындағы проекциясы деп аталады. M_1 нүктесінен

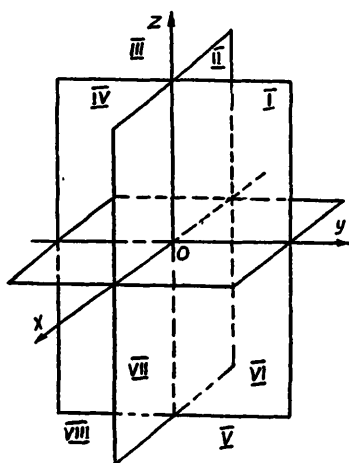


22-сурет

OX абсцисса өсіне M_1A , OY ординат өсіне M_1B перпендикуляр түзулерін тұрғызайық, ал M нүктесінен OZ — аппликата өсіне перпендикуляр MC түзуін тұрғызайық, сонда

$$x = OA = BM_1, y = OB = M_1A, z = OC = MM_1$$

кесінділерінің ұзындығы M нүктесінің тік бұрышты декарт координат жүйесіндегі координаттары болады және оны былай $M(x, y, z)$ деп белгілейміз. Енді OX пен OY өстері арқылы XOY координат жазықтығын, OX пен OZ өстері арқылы XOZ жазықтығын, ал OY пен OZ өстері арқылы YOZ координат жазықтықтарын тұрғызайық. Сонда координат жазықтықтары өзара қиылысып тік бұрышты координат жүйесінде 8 ширекке бөледі. (23-сурет). Берілген M нүктенің координаттарының таңбасы осы 8 ширектің қайсысында жатуына байланысты, яғни



23-сурет

- I ширекте: $x > 0, y > 0, z > 0$;
- II ширекте: $x < 0, y > 0, z > 0$;
- III ширекте: $x < 0, y < 0, z > 0$;
- IV ширекте: $x > 0, y < 0, z > 0$;
- V ширекте: $x > 0, y > 0, z < 0$;
- VI ширекте: $x < 0, y > 0, z < 0$;
- VII ширекте: $x < 0, y < 0, z < 0$;
- VIII ширекте: $x > 0, y < 0, z < 0$.

Сонымен, кеңістікте жатқан кез келген нүкте тік бұрышты декарт координат жүйесінде үш санмен анықталады.

Кеңістікте берілген M нүктенің координаттарын басқа координат жүйелерінде де анықтауға болады, мысалы цилиндрлік және сфералық координат жүйелерінде. Енді осы координат жүйелеріне жеке-жеке тоқталып өтелік.

Тік бұрышты XOY — декарт координат жүйесіндегі XOY координат жазықтығында поляр координат жүйесін қарастырайық. Кеңістіктен кез келген $M(x, y, z)$ нүкте алып, осы нүктенің OZ өсіндегі проекциясын M_z , ал XOY координат жазықтығындағы проекциясын M_{xy} деп белгілейік. M_{xy} нүктесі XOY жазықтығында жатқандықтан, оның поляр координат жүйесіндегі координаттары (ρ, φ) болады, яғни $M_{xy}(\rho, \varphi)$ (24-сурет).

А н ы қ т а м а. Жазықтықтағы M нүктенің цилиндрлік координаттары деп үш ρ, φ, z сандарын айтамыз және $M(\rho, \varphi, z)$ деп белгілейміз, мұндағы ρ — O нүктеде M_{xy} нүктеге дейінгі ара қашықтық және $0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty$. Енді XOY — декарт және цилиндрлік координат жүйелері арасындағы байланысты табалық. Тік бұрышты OM'_{xy} M_{xy} үшбұрышынан:

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho}.$$

Сонда

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z \end{cases} \quad (1.16)$$

болады және бұл тік бұрышты декарт пен цилиндрлік координат жүйелерінің арасындағы байланысты анықтайды.

(1.16) формуладан M нүктенің цилиндрлік координат жүйесіндегі координаттарын табу үшін бірінші және екінші теңдеулерді квадраттап қосайық және екінші мен бірінші теңдеуінің қатынасын алсақ жеткілікті, сонда

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

Анықтама. Жазықтықтағы M нүктенің сфералық координаттары деп үш ρ , φ , θ сандарын айтады, мұндағы ρ — O нүктеден M нүктеге дейінгі ара қашықтық $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$ (25-сурет).

Тік бұрышты OM_zM үшбұрышынан:

$$\cos \theta = \frac{z}{\rho}, \quad \sin \theta = \frac{|MM_z|}{\rho}$$

Осыдан

$$z = \rho \cos \theta, \quad |MM_z| = |OM_{xy}| = \rho \sin \theta. \quad (1.17)$$

Тік бұрышты $OM'_{xy}M_{xy}$ үшбұрышынан:

$$\cos \varphi = \frac{x}{|OM_{xy}|}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|OM_{xy}|},$$

немесе

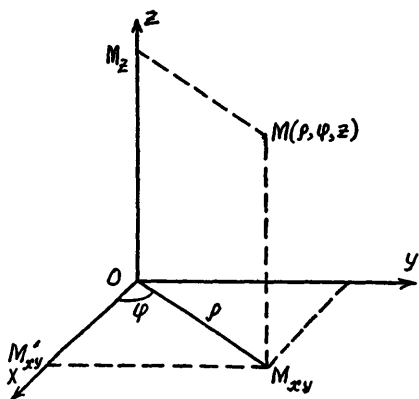
$$x = |OM_{xy}| \cos \varphi, \quad y = |OM_{xy}| \sin \varphi.$$

Осыдан және (1.17) формуладан

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases} \quad (1.18)$$

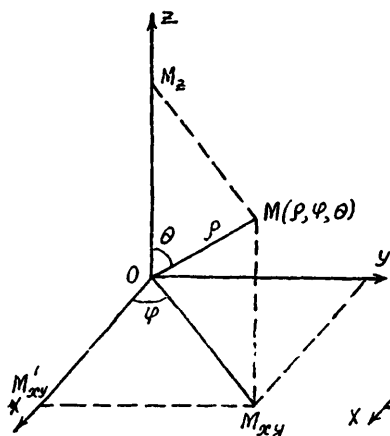
Сонымен, (1.18) формула тік бұрышты декарт пен сфералық координат жүйелері арасындағы байланысты анықтайды.

Егер $M(x, y, z)$ нүктесі берілсе, онда (1.18) формуладан осы нүктенің сфералық координат жүйесінде координаттарын табуға болады:

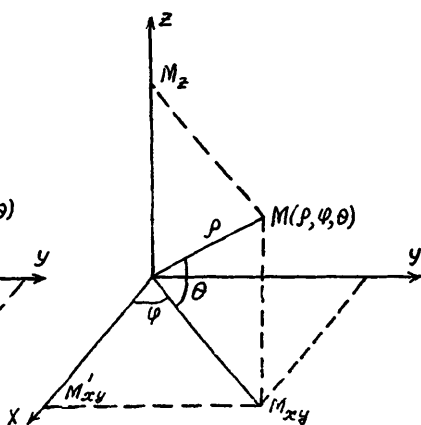


24-сурет

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \\ \cos \theta = \frac{z}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$



25-сурет



26-сурет

Кейбір жағдайларда θ бұрышы деп OM мен OM_{xy} түзулері арасындағы бұрышты алады (26-сурет). Бұл жағдайда нүктенің декарт және сфералық координат жүйелеріндегі координаттарының байланысы былай өрнектелінеді:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos \varphi = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sin \varphi = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho \sin \theta. \end{cases} \quad (1.19)$$

1.10. Анықтауыштар

Анықтауыштар теориясы мен сызықты тендеулер жүйесі аналитикалық геометрияда және жоғары математиканың әр түрлі бөлімдерінде кеңінен қолданылады. Сондықтан, біз олардың негізгі ұғымдарына қысқаша шолу жасайық.

Төрт элементтен анықталған мына кесте

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

екінші ретті квадрат матрица деп аталады. Осы сияқты, үшінші ретті квадрат матрица деп 9 элементтен анықталған мына кестені айтамыз

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

мұндағы a_{ij} — кез келген сандар, матрицаның элементтері деп аталады.

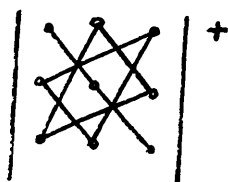
(1.20) матрицаның екінші ретті анықтаушы (детерминанты) деп мына өрнекті айтамыз: $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ және ол былай белгіленеді

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.22)$$

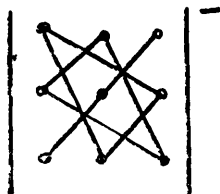
Осы сияқты, (1.21) матрицаның анықтаушы деп мына өрнекті айтамыз: $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13} \cdot a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$ және ол былай белгіленеді

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}), \quad (1.23)$$

мұндағы a_{ij} — анықтаушының элементтері деп аталады, бірінші үш қосылғыш «+» схема бойынша, ал екінші үш қосылғыш «-» схема бойынша анықталады, бірінші индекс i анықтаушының жатық жолының нөмірін, ал екінші индекс j оның тік жолының нөмірін көрсетеді.



«+» — схема



«-» — схема

Үшінші ретті анықтаушының (матрицаның) a_{11}, a_{12}, a_{13} элементтері оның — бірінші жатық жолын, ал a_{21}, a_{22}, a_{23} — екінші, a_{31}, a_{32}, a_{33} — үшінші жатық жолдарын құрайды. a_{11}, a_{21}, a_{31} — элементтері анықтаушының (матрицаның) бірінші тік жолын, ал a_{12}, a_{22}, a_{32} — екінші, a_{13}, a_{23}, a_{33} — үшінші тік жолдарын құрайды. a_{11}, a_{22}, a_{33} элементтері анықтаушының бас диагоналын, ал a_{13}, a_{22}, a_{31} — оның қосалқы диагоналын құрайды. Сонымен, үшінші ретті анықтаушы (матрица) үш жатық және үш тік жолдардан, ал екінші ретті анықтаушы (матрица) екі жатық және екі тік жолдардан құралады. Осы сияқты n — ретті анықтаушы былай белгілейміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Δ — анықтауыштың a_{ij} — элементінің миноры деп осы анықтауыштың i жатық және j тік жолынсыз алынған $n-1$ ретті анықтауышты айтамыз және ол M_{ij} әрпімен белгіленеді.

a_{ij} — элементінің алгебралық толықтауышы деп плюс немесе минус таңбасымен алынған осы элементтің минорын айтамыз, яғни

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

мұндағы A_{ij} — анықтауыштың a_{ij} элементінің алгебралық толықтауышы.

Жоғарыда екінші және үшінші ретті анықтауыштардың қалай есептелінетінін біз қарастырып өттік. Ал төртінші және одан жоғарғы ретті анықтауыштарды да есептеуге болады, ол үшін анықтауыштың қасиеттерімен танысып өтелік. Екінші ретті анықтауыштың қасиеттері кез келген анықтауыштарға да орындалады, сондықтан біз оның қасиеттерін тек екінші ретті анықтауыш үшін дәлелдейік.

1 - қ а с и е т. Анықтауыштың барлық жатық жолдарын сәйкес тік жолдарымен орын алмастырсақ, онда анықтауыштың мәні өзгермейді:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_2.$$

Дә л е л д е у і. Δ_1 анықтауышының бірінші жатық жолын оның бірінші тік жолымен, ал екінші жатық жолын екінші тік жолымен орын алмастырайық, сонда Δ_2 анықтауышын аламыз. Осы анықтауыштарды тікелей есептеу арқылы олардың өзара тең екендігіне оңай көз жеткізуге болады.

2 - қ а с и е т. Анықтауыштың екі тік (жатық) жолын орын алмастырсақ, онда оның мәні қарама-қарсы таңбаға ауысады:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Дә л е л д е у і. Шынында да

$$\Delta_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -\Delta_1.$$

3 - қ а с и е т. Анықтауыштың екі тік (жатық) жолының сәйкес элементтері тең болса, онда ол нөлге тең:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0.$$

4 - қ а с и е т. (Санды анықтауышқа көбейту). Анықтауыштың бір тік (жатық) жолының әр элементіндегі ортақ көбейткішті анықтауыш таңбасының алдына шығаруға болады:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & k \cdot a_{12} \\ a_{21} & k \cdot a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Дә л е л д е у і.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & k \cdot a_{12} \\ a_{21} & k \cdot a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}ka_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5-қасиет. Анықтауыштың екі тік (жатық) жолының сәйкес элементтері пропорционал болса, онда ол нөлге тең

$$\Delta = \begin{vmatrix} ma_{11} & a_{11} \\ ma_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

5-қасиетті 4-қасиет арқылы оңай дәлелдеуге болады.

6-қасиет. Анықтауыштың кез келген тік (жатық) жолының барлық элементтерін k санына көбейтіп екінші бір тік (жатық) жолының сәйкес элементтеріне қоссақ, онда оның мәні өзгермейді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Дәлелдеуі.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + ka_{12})a_{22} - a_{12}(a_{21} + ka_{22}) = a_{11}a_{22} + ka_{12}a_{22} - a_{21}a_{12} - ka_{22}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

7-қасиет (анықтауышты тік немесе жатық жолы арқылы жіктеу). Анықтауыштың кез келген тік (жатық) жол элементтерімен оның алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы осы анықтауыштың мәніне тең

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 a_{ij} A_{ij}, \quad j = \overline{1,3},$$

$$(\Delta = \sum_{j=1}^3 a_{ij} A_{ji}, \quad i = \overline{1,3})$$

мұндағы Δ — үшінші ретті анықтауыш.

Дәлелдеуі. Анықтауышты бірінші тік жолы арқылы жіктейік, яғни $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. Соңғы теңдікті дәлелдеу үшін оның оң жағын алып өрнектейік:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + \\ &+ a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{13}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ &- (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{13}a_{22}) = \Delta. \end{aligned}$$

8-қасиет. Анықтауыштың кез келген тік (жатық) жол элементтерімен осы элементтерге сәйкес келесі бір тік (жатық) жол элементтерінің алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы нөлге тең.

Дәлелдеуі. Мысалға, анықтауыштың бірінші тік жол элементтерімен осы элементтерге сәйкес екінші тік жол элемент-

терінің алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы нөлге тең болатындығын дәлелдесік, яғни

$$a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} = 0.$$

$$\begin{aligned} a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} &= -a_{11}M_{12} + a_{21}M_{22} - a_{31}M_{32} = \\ &= -a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{31} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{11}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ &+ a_{21}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{31}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) = 0. \end{aligned}$$

9-қасиет (анықтауышты қосу). Егер анықтауыштың кез келген тік (жатық) жол элементтері екі қосылғыштан анықталса, онда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Дәлелдеуі.

$$\begin{aligned} \Delta &= (a_{11} + a'_{11})a_{22} - (a_{21} + a'_{21})a_{12} = a_{11}a_{22} + a'_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} - a'_{21}a_{12} = \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + (a'_{11}a_{22} - a'_{21}a_{12}) = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

1.11. Матрица

m жатық және n тік жолдардан құралған кесте $m \times n$ ретті матрица деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

мұндағы a_{ij} — матрицаның элементтері.

Егер $m = n$ болса, онда ол n ретті квадрат матрица деп аталады.

а) матрицалардың алгебралық қосындысы. Бірдей ретті A мен B матрицаларының алгебралық қосындысы деп сол ретті C матрицаны айтамыз және оның элементтері былай анықталады:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

әрі ол былай белгіленеді $C = A \pm B$, мұндағы a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} сәйкес A , B , C матрицаларының элементтері. Мысал,

$$C = A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}.$$

ә) матрицаны санға көбейту. Кез келген A матрицаны λ санына көбейту деп осы матрицаның барлық элементтерін λ санына көбейтуді айтамыз және оның элементтері былай анықталады:

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

әрі ол былай белгіленеді $C = \lambda A$. Мысал,

$$C = \lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}.$$

б) матрицаны матрицаға көбейту (AB). Берілген A матрицаны B матрицаға көбейтуге болады, егер A матрицаның тік жолдарының саны B матрицаның жатық жолдарының санына тең және $AB = C$ болса, онда A матрицаның жатық жолының саны A матрицаның жатық жолының санына тең, ал оның тік жолының саны B матрицаның тік жолының санына тең. Мысал,

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}.$$

Енді квадрат матрицаны қарастырайық.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Егер A матрицаның барлық жатық жолдарын тік жолдарымен орын алмастырсак, онда мынадай матрица аламыз:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Бұл матрица транспонирленген матрица деп аталады.

Бірлік матрица деп мына матрицаны айтамыз:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

A матрицаның кері матрицасы деп мына матрицаны айтамыз:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

мұндағы A_{ij} берілген A матрицаның элементтерінің алгебралық толықтауыштары, $|A|$ — берілген A матрицаның анықтауышы.

Егер A матрицаның анықтауышы нөлге тең болмаса, яғни $|A| \neq 0$, онда A матрицаның кері матрицасы әрқашанда бар және

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Енді бізге үш белгісізі бар біртекті емес үш тендеулер жүйесі берілсін:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3. \end{cases}$$

Берілген жүйенің коэффициенттерінен анықталған мына матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

берілген жүйенің матрицасы, ал мына анықтауыш

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

осы жүйенің анықтауышы деп аталады.

Егер $\Delta \neq 0$ болса, онда жүйенің шешімі бар, әрі ол тек біреу ғана және ол мына формуладан анықталады (Крамер формуласы):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

мұндағы

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}.$$

Енді бізге үш белгісізі бар біртекті екі тендеулер жүйесі берілсін

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0. \end{cases}$$

Берілген жүйенің әрқашанда $x=y=z=0$ — нөлдік шешімдері бар болатындығына оңай көз жеткізуге болады. Енді нөл шешімдерінен басқа шешімдерін табу үшін мына

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

анықтауыштардың бірі нөлге тең емес деп ұйғаралық, мысалы, бірінші анықтауыш. Жүйенің z айнымалы мүшелерін теңдіктің оң жағына шығарып жазайық:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z, \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z. \end{cases}$$

Осы жүйені Крамер әдісі бойынша шешіп, оның түбірлерін табамыз

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \cdot z, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \cdot z,$$

мұндағы z — кез келген тұрақты сан,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Енді $\frac{z}{\Delta} = k$ деп белгілеп берілген жүйесінің нөл және нөл емес шешімдерін мына формулалардан анықтаймыз:

$$x = \Delta_x \cdot k, \quad y = \Delta_y \cdot k. \quad (1.24)$$

Егер жоғарыдағы үш екінші ретті анықтауыш нөлге тең болса, онда берілген жүйенің сәйкес коэффициенттері өзара пропорционал. Сондықтан, берілген жүйеден бір теңдеу аламыз, мысалы,

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0$$

Егер $a_{11} \neq 0$ болса, онда

$$x = -\frac{a_{12}y + a_{13}z}{a_{11}},$$

мұндағы z, y — кез келген сандар.

Мысалдар. 1. Мына анықтауыштарды есепте:

$$a) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix};$$

Шешімі. а) схема бойынша:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-5) \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 1 + \\ + 3 \cdot (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot (-5) \cdot 1 = -3 - 4 - 45 - 9 - \\ - 6 + 10 = -57.$$

Анықтауышты жіктеу бойынша (7-қасиет). Бірінші жатық жолы арқылы жіктейік:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = (-1)(-1)^{1+1}M_{11} + 2(-1)^{1+2}M_{12} + \\ + 3(-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ = -(3+6) - 2(-5+2) + 3(-15-3) = -9+6-54 = -57.$$

ә) төртінші ретті анықтауыштың ретін төмендету арқылы есептейік: анықтауыштың бірінші жатық жолын -2 -ге көбейтіп,

оны екінші жатық жолының сәйкес элементтеріне қосайық, осы сияқты бірінші жатық жолын —1-ге көбейтіп, үшінші жатық жолына қосайық, ал бірінші жатық жолды төртінші жатық жолына қосайық (бұл амалдар стрелкамен көрсетілген):

$$\left| \begin{array}{cccc|ccc} -2 & \boxed{1} & 2 & -4 & \textcircled{-2} & \textcircled{-1} & \textcircled{1} \\ 1 & 2 & 1 & 3 & \leftarrow & & \\ 1 & 1 & -2 & 1 & \leftarrow & & \\ -3 & -1 & 2 & 1 & & & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc|ccc} -2 & \boxed{1} & 2 & -4 & & & \\ 5 & 0 & -3 & 11 & & & \\ 3 & 0 & -4 & 5 & & & \\ -5 & 0 & 4 & -3 & & & \end{array} \right| =$$

Енді осы анықтауышты екінші тік жолы арқылы жіктейік (7-қасиет) $\left| \begin{array}{cccc|ccc} -2 & \boxed{1} & 2 & -4 & & & \\ 5 & 0 & -3 & 11 & & & \\ 3 & 0 & -4 & 5 & & & \\ -5 & 0 & 4 & -3 & & & \end{array} \right| = (-1)^{1+2} M_{12} =$

$$= \left| \begin{array}{ccc|ccc} 5 & -3 & 11 & \textcircled{1} & & \\ 3 & -4 & 5 & & & \\ -5 & 4 & -3 & & & \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{ccc|ccc} 5 & -3 & 11 & & & \\ 3 & -4 & 5 & & & \\ 0 & \boxed{1} & 8 & & & \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{ccc|ccc} 5 & -3 & 35 & & & \\ 3 & -4 & 37 & & & \\ 0 & \boxed{1} & 0 & & & \end{array} \right| =$$

$$= -(-1)^{3+2} \left| \begin{array}{cc|cc} 5 & 35 & & \\ 3 & 37 & & \end{array} \right| = 80.$$

2. Мына матрицаларға көрсетілген амалдарды орында

а) $A+3B$; ә) $AB-BA$; б) AA^{-1} ; в) CA , мұндағы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \ 3 \ 4), \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Шешімі.

$$\text{а) } 3 \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A+3B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+9 & -1-3 \\ 3-3 & -1+0 & 2+3 \\ 1+6 & 1+3 & 1+12 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 11 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 7 & 4 & 13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{ә) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2+2 & 3+0-1 & -1+2-4 \\ 6+1+4 & 9+0+2 & -3-1+8 \\ 2-1+2 & 3+0+1 & -1+1-4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 11 & 11 & 4 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix},$$

$$-B \cdot A = - \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -9 & -7 & -4 \end{pmatrix},$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 11 & 11 & 4 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -9 & -7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 2 & -6 \\ 11 & 12 & 2 \\ -6 & -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$6) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{-3} \quad \textcircled{-1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -14 + 5 = -9,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7, \quad A^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B) C \cdot A = (2 \ 3 \ 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2+9+4 \ 4-3+4 \ -2+6+4) =$$

$$= (15 \ 5 \ 8).$$

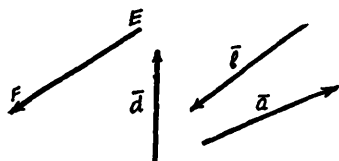
ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА

§ 2.1. Негізгі ұғымдар

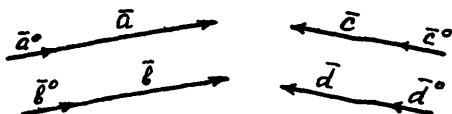
Кез келген сандар математикада, физикада, механикада т. б. екі шамамен анықталады. Егер кез келген шама оң немесе теріс санмен анықталса, онда ол скаляр шама деп аталады. Мысалы, көлем, масса, аудан, уақыт, температура — скаляр шама. Кейбір шамаларды анықтау үшін олардың сандық мәнімен қоса бағытын да білу қажет, олар векторлық шама деп аталады. Мысалы, үдеу, жылдамдық, күш — векторлық шамалар.

А н ы қ т а м а. Вектор дегеніміз бағытталған кесінді.

Берілген вектор үлкен екі латын әріпімен немесе кіші бір латын әріптерімен белгіленеді. Егер вектор екі әріппен белгіленсе, онда бірінші әріп вектордың бастапқы нүктесі, ал екіншісі — соңғы нүктесі деп аталады. Мысалы, $\vec{AB}$ — вектор, A нүктесі осы вектордың бастапқы нүктесі, ал B — соңғы нүктесі, стрелка $\vec{AB}$ вектордың бағытын сипаттайды, яғни вектордың бағыты A нүктеден B нүктеге бағытталған (27-сурет). Егер вектор кіші бір әріппен белгіленсе, онда әріптің төбесіне тек сызықша ғана қойылады. Мысалы, $\vec{AB}$ векторын $\vec{a}$ деп те белгілеуге болады. Берілген $\vec{AB}$ векторының ұзындығы немесе модулі деп AB кесіндісінің ұзындығын айтамыз және ол былай белгіленеді:



27-сурет



28-сурет

$|\vec{AB}|$ немесе $|\vec{a}|$. Модульдері бірге тең векторлар бірлік немесе орт вектор деп аталады. Берілген $\vec{a}$ векторының орт векторы $\vec{a}^0$ деп белгіленеді және оның бағыты $\vec{a}$ векторының бағытымен бір бағыттас болады. Жалпы, $\vec{a}$ векторының орт векторын $\vec{a}^0$ деп те белгілейді (28-сурет).

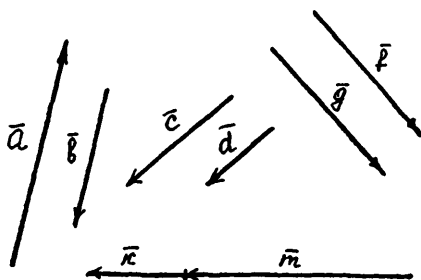
А н ы қ т а м а. Екі вектор *тең* деп аталады, егер:

- а) олар параллель болса (параллель түзулердің бойында немесе бір түзудің бойында жатса),
 ә) олардың бағыттары бір бағыттас болса,
 б) олардың модульдері тең болса (28-сурет).
 Екі $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторының теңдігін былай көрсетеміз:

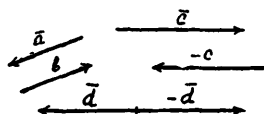
$$\vec{a} = \vec{b}.$$

Анықтама. Егер екі вектор бір түзудің бойында немесе параллель түзулердің бойында жатса, онда мұндай векторлар *коллинеар* векторлар деп аталады (29-сурет). Егер вектордың бас нүктесі мен соңғы нүктесі бір нүктеде үйлессе, онда мұндай вектор нөл вектор деп аталады және былай белгіленеді:

$\vec{0}$ немесе $\vec{AA}$, $\vec{BB}$. Нөл векторлардың бағыттары анықталмаған, модульдері нөлге тең және олар өзара тең. $\vec{AA}$ — нөл векторы A нүктесінен өтетін кез келген түзулердің бойында жатады, сондықтан нөл вектор кез келген вектормен коллинеар деп айтуға болады. Кез келген вектор өзіне-өзі коллинеар болады.



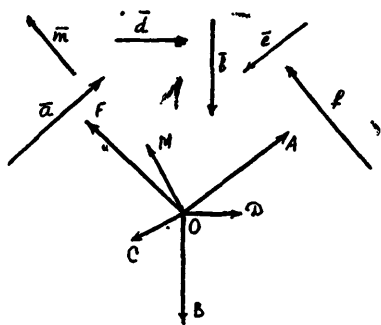
29-сурет



30-сурет

Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары параллель және де модульдері тең, ал бағыттары қарама-қарсы болса, онда мұндай векторлар қарама-қарсы бағыттас векторлар деп аталады (30-сурет). Қарама-қарсы векторлардың байланысын былай көрсетеміз: $\vec{a} = -\vec{b}$ $\vec{a}$ векторының қарама-қарсы векторын — $\vec{a}$ деп белгілеуге болады.

Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының модульдері ғана тең болса, онда бұлардың өзара теңдігі жайлы сшқандай тұжырым айтуға болмайды, яғни олар жалпы жағдайда тең немесе тең емес болуы да мүмкін. Көп жағдайларда бірнеше векторларға қосу, алу амалдарын орындауға болады. Ол үшін оларды ортақ бас нүктеге үйлестіру керек. Мысалы, берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{f}$ және $\vec{m}$ векторларын ортақ бас нүктеге үйлестірілдік. Ол үшін жазықтықта жақтан кез келген O нүкте алып, осы нүктеден $\vec{a}$ векторына тең $\vec{OA}$ вектор тұрғызамыз. Осы сияқты, қалған $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OD} = \vec{d}$, $\vec{OF} = \vec{f}$, $\vec{OM} = \vec{m}$ векторларын тұрғызамыз (31-сурет). Со-



31-сурет

нымен, 0 нүкте берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{f}$ және $\vec{m}$ векторларының ортақ бас нүктесі деп аталады.

Векторларға алгебралық амалдар қолдануға болады. Олар: қосу, алу және санды векторға көбейту. Бұл амалдар векторлық алгебрада сызықты амалдар деп аталады. Ал векторды векторға бөлу, көбейту және дәрежелеу амалдары векторлық алгебрада жалпы жоқ. Енді сызықты амалдарға тоқталып өтелік.

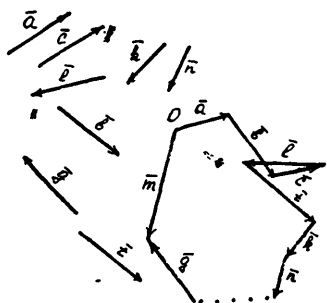
2.2. Векторларды қосу

Берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., $\vec{g}$ коллинеар емес векторларын былай орналастырайық: $\vec{a}$ векторының соңғы нүктесі $\vec{b}$ векторының бас нүктесімен, $\vec{b}$ векторының соңғы нүктесі $\vec{c}$ векторының бас нүктесімен үйлестірейік, осы сияқты қалғандарында тізбектеп орналастырайық.

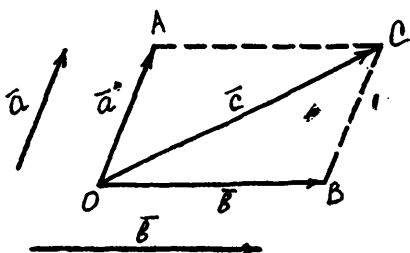
А н ы қ т а м а. Берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., $\vec{g}$ векторларының қосындысы деп бас нүктесі $\vec{a}$ векторының бас нүктесімен үйлесетін, ал соңғы нүктесі $\vec{g}$ векторының оңғы нүктесімен үйлесетін $\vec{m}$ векторын айтамыз (32-сурет). Осы векторлардың қосындысын былай жазамыз:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots + \vec{g} = \vec{m}.$$

Жоғарыдағы анықтаманы пайдаланып, коллинеар емес $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының қосындысын анықталық. Ол үшін $\vec{a}$ векторының соңғы нүктесін $\vec{b}$ векторының бас нүктесімен үйлестірейік, сонда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторының қосындысы деп бас нүктесі $\vec{a}$ векторының бас нүктесімен, ал соңғы нүктесі $\vec{b}$ векторының соңғы нүктесімен үйлесетін $\vec{c}$ векторын айтады, яғни $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының қосындысын табу үшін параллелограмм



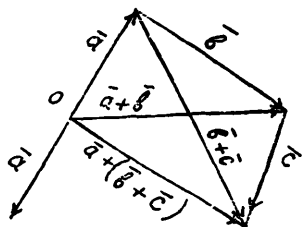
32-сурет



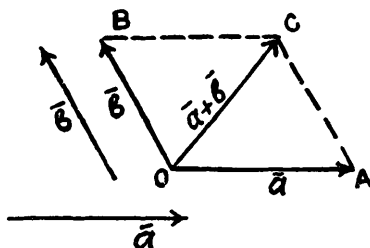
33-сурет

ережесін пайдаланып табуға да болады. Ол үшін жазықтықтағы O нүктені берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының бас нүктесі етіп аламыз да осы нүктерден $\vec{a} = \vec{OA}$ мен $\vec{b} = \vec{OB}$ векторларын тұрғыза-мыз. Осы тұрғызылған векторлар арқылы $OACB$ параллелограмын саламыз (33-сурет). Параллелограмның $\vec{OC} = \vec{c}$ диагонали берілген векторлардың қосындысы болып табылады, яғни $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ болады.

Жоғарыда берілген анықтамадан векторларды қосу амалына мынадай қасиеттер орындалады (34-сурет):



34-сурет



35-сурет

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — ауыстырымдылық заңы;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ — терімділік заңы;
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
4. кез келген $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы — $-\vec{a}$ векторы табылып, мына $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ теңдігі орындалады.

Енді осы қасиеттерді дәлелделік:

3 және 4 қасиеттердің дәлелденуі берілген анықтамадан алынады.

Ауыстырымдылық заңын дәлелдеу үшін кез келген O нүкте алып, берілген a мен b векторларын ортақ бас O нүктесімен үйлестірілсек (35-сурет). $\vec{a}$ векторының соңғы нүктесін A , ал $\vec{b}$ векторының соңғы нүктесін B әріптерімен белгілейік және $OACB$ параллелограммын қарастыралық. Параллелограмның қасиеттерінен және векторлардың теңдігінен мына

$$\vec{BC} = \vec{OA} = \vec{a}, \quad \vec{OB} = \vec{AC} = \vec{b},$$

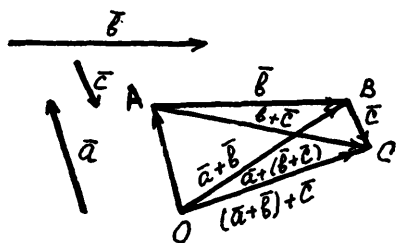
байланыстарын табамыз. Жоғарыдағы анықтамадан және $\triangle AOC$ -тан $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының қосындысын табамыз, яғни

$$\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b} \quad (2.1)$$

мұндағы $\vec{OC}$ векторы — параллелограмның диагоналында, ал $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ параллелограмм қабырғаларында жатқан векторлар.

Енді $\triangle OBC$ -ны қарастыралық, бұдан табатынымыз

$$\vec{OC} = \vec{b} + \vec{a} \quad (2.2)$$



36-сурет

Жоғарыдағы (2.1) мен (2.2) теңдіктерін салыстыра отыра дәлелдеу керектігімізді аламыз, яғни $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ болады.

Терімділік заңын дәлелдеу үшін $\vec{a}$ векторының бастапқы нүктесін O нүктесімен, ал соңғы нүктесін B векторының бас нүктесімен және $\vec{b}$ векторының соңғы нүктесін C векторының бас нүктесімен үйлестіретік (36-сурет).

Берілген векторларының соңғы нүктелерін сәйкес A, B, C әріптерімен белгілейік.

$\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{AB}$, $\vec{c} = \vec{BC}$. Енді $\triangle AOB$ мен $\triangle OBC$ -ны қарастыралық, бұдан:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{OA} + \vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC} \quad (2.3)$$

болады.

Енді $\triangle ABC$ мен $\triangle OAC$ -ны қарастыралық, бұдан:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}. \quad (2.4)$$

болады. Сонда, (2.3) пен (2.4) теңдіктерін салыстыра келе дәлелдеу керектігімізді аламыз, яғни

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

2.3. Векторлардың айырымы

Анықтама. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының айырымы деп үшінші $\vec{c}$ векторын айтамыз, егер $\vec{b}$ мен $\vec{c}$ векторларының қосындысы $\vec{a}$ векторына тең болса және ол былай белгіленеді

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}.$$

Осы анықтаманы пайдаланып, берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының $\vec{a} - \vec{b}$ — айырымын табайық. Ол үшін $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларын ортақ бас O нүктесімен үйлестіретік (37-сурет), яғни $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OA} = \vec{a}$. $\triangle OAB$ -дан және жоғарғы анықтамадан мына теңдікті аламыз:

$$\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}.$$

немесе

$$\vec{b} + \vec{BA} = \vec{a}.$$

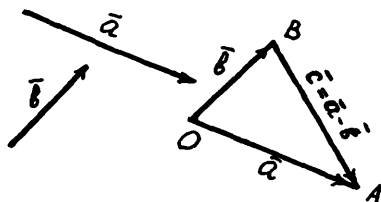
Сонда $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$, болады.

Сонымен берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының айырымын табу үшін алдымен осы векторларды ортақ бас O нүктесіне үйлесті-

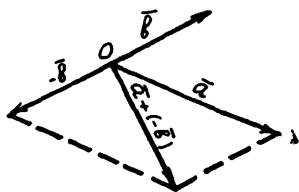
реміз де бастапқы нүктесі $\vec{b}$ векторының соңғы нүктесімен үйлесетін, ал соңғы нүктесі $\vec{a}$ векторының соңғы нүктесімен үйлесетін $\vec{BA}$ векторын тұрғызамыз, сонда $\vec{BA}$ векторы $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының айырымы болады, яғни

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$$

Векторлардың айырын табу үшін қосу амалын пайдаланып та табуға болады. Ол үшін $\vec{a}$ мен $-\vec{b}$ векторларының қосындысын анықтасақ жеткілікті, яғни $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$ (38-сурет).



37-сурет



38-сурет

Т е о р е м а. 2.1. Берілген екі вектордың айырымы әрқашанда бар және ол тек біреу ғана.

Д ә л е л д е у і. Алдымен берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының $\vec{a} - \vec{b}$ — айырымы бар болуын дәлелдейік, яғни кез келген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары үшін $\vec{c}$ векторы табылып, $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ теңдігі орындалатынын көрсетелік.

Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларын ортақ бас O нүктесімен үйлестіретілік (39-сурет):

$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b} \quad (2.5)$$

Осы векторлардың қосындысы $\vec{OA}$ векторы болады, яғни $\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$. Осыдан және (2.5) формуладан

$$\vec{b} + \vec{BA} = \vec{a}. \quad (2.6)$$

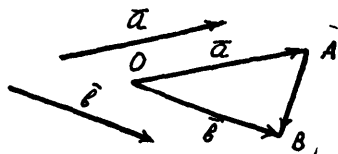
Енді $\vec{BA}$ векторын $\vec{c}$ әрпімен белгілейік, сонда (2.6) теңдігін былай жазуға болады:

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}. \quad (2.7)$$

Сонымен, алғашқы дәлелдеу керек тұжырым дәлелденді.

Енді мұндай $\vec{c}$ векторы тек біреу ғана екенін дәлелделік. Ол үшін қарсы тұжырым жасайық, яғни (2.7) теңдігі орындалатын мұндай $\vec{c}$ векторы екеу деп ұйғаралық. Сонымен, $\vec{c}$ векторынан басқа $\vec{c}_1$ векторы табылып, осы векторлар үшін (2.7) теңдігі орындалсын делік:

$$\vec{b} + \vec{c}_1 = \vec{a}. \quad (2.8)$$



39-сурет

Сонда (2.7) мен (2.8) теңдіктерінен

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}_1$$

теңдігін аламыз. Осы теңдіктің екі жағына да $-\vec{b}$ векторын қосайық, яғни

$$-\vec{b} + (\vec{b} + \vec{c}) = -\vec{b} + (\vec{b} + \vec{c}_1)$$

Соңғы теңдіктің екі жағына да векторлардың терімділік заңын пайдалансақ, онда

$$(-\vec{b} + \vec{b}) + \vec{c} = (-\vec{b} + \vec{b}) + \vec{c}_1 \text{ немесе } \vec{0} + \vec{c} = \vec{0} + \vec{c}_1$$

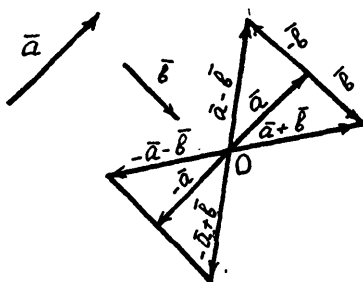
болды. Енді осыған векторлардың қосу амалының 3-қасиетін пайдаланайық, сонда

$$\vec{c} = \vec{c}_1$$

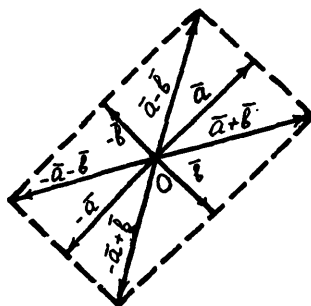
болады. Теорема толық дәлелденді.

Мысалдар. 1. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары арқылы оларды тізбектеп орналастыру әрі параллелограмм ережесін пайдаланып, мына векторларды тұрғыз: $\vec{a} + \vec{b}$, $-\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $-\vec{a} - \vec{b}$ және қарама-қарсы бағыттас әрі коллинеар векторларды ата.

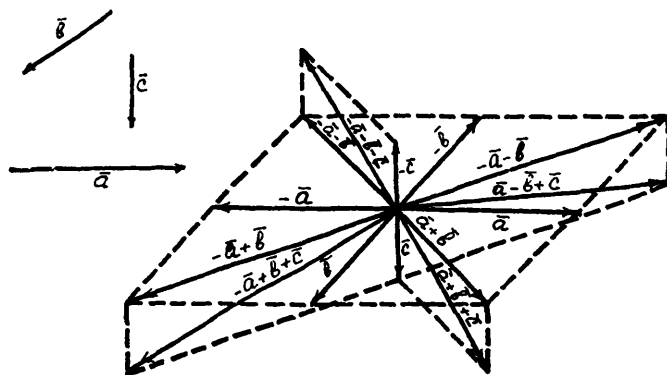
Шешімі. Тізбектеп орналастыру арқылы 40-суретте, ал параллелограмм ережесі бойынша 41-суретте көрсетілген.



40-сурет



41-сурет

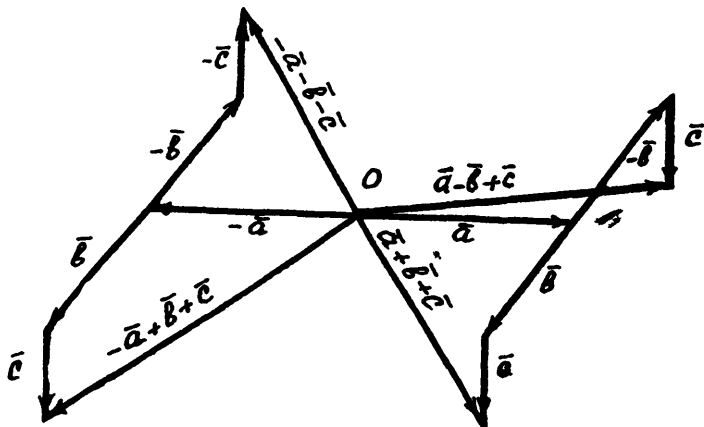


42-сурет

$\vec{a} + \vec{b}$ мен $-\vec{a} - \vec{b}$, $-\vec{a} + \vec{b}$ мен $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a}$ мен $-\vec{a}$, $\vec{b}$ мен $-\vec{b}$ қарама-қарсы әрі коллинеар векторлар.

2. Берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары арқылы оларды тізбектеп орналастыру әрі параллелограмм ережесі бойынша мына векторларды тұрғыз: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $-\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.

Ш е ш і м і. Параллелограмм ережесі бойынша 42-суретте, ал тізбектеп орналастыру арқылы 43-суретте көрсетілген.



43-сурет

2.4. Векторларды скаляр санға көбейту

А н ы қ т а м а. Берілген $\vec{a}$ векторын скаляр λ санына *көбейту* деп мына үш шартты қанағаттандыратын $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ векторын айтамыз:

1. $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
2. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар;
3. егер $\lambda > 0$ болса, онда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының бағыттары бір бағыттас, егер $\lambda < 0$ болса, онда олардың бағыттары қарама-қарсы бағыттас.

Осы анықтамадан мынадай тұжырым аламыз:

егер $\lambda = 0$ немесе $\vec{a} = 0$ болса, онда $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ — нөл вектор;

егер $\lambda = 1$ болса, онда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары беттеседі;

кез келген $\vec{a}$ векторы үшін $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ теңдігі орындалады;

кез келген $\vec{a}$ векторы мен λ саны үшін тек бір ғана $\lambda \cdot \vec{a}$ векторы анықталады.

Векторларды скаляр санға көбейту амалына мына қасиеттер орындалады:

$$1. \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b};$$

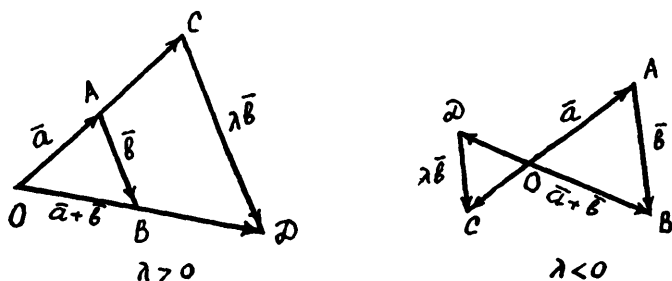
$$2. (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a};$$

$$3. \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}.$$

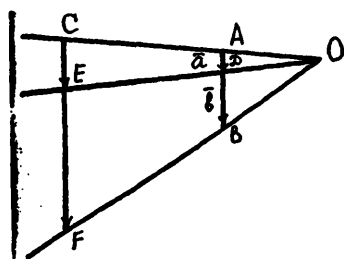
Енді осы қасиеттерді дәлелделік.

Бірінші қасиеттің дәлелдемесі. Дәлелдеу үшін $\lambda \neq 0$ деп алып екі жағдайды қарастыралық.

1 - жағдай. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар емес және $\lambda \neq 0$ деп ұйғарамыз. $\vec{a}$ векторын O нүктесімен, ал $\vec{b}$ векторын $\vec{a}$ векторының соңғы нүктесімен үйлестірілдік (44-сурет): $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{AB}$. Сонда $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ болады. Енді жоғарыда берілген анықтаманы пайдаланып, $\vec{OC} = \lambda \vec{a}$ және $\vec{OD} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$ векторларын тұрғызайық. $\triangle OCD$ мен $\triangle OAB$ ұқсас үшбұрыштар, сондықтан $\vec{CD} = \lambda \vec{b}$.



44-сурет



45-сурет

$\triangle OCD$ -дан: $\vec{OC} + \vec{CD} = \vec{OD}$ немесе $\lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$.

Сонымен, 1-жағдай дәлелденді.

2 - жағдай. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар делік және анықтық үшін $\lambda > 0$ болсын. Берілген векторлар коллинеар болғандықтан, олар бір түзудің бойында жатсын. Сондықтан, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB}$ болады (45-сурет). $\vec{AB}$ векторында жатпайтын O

нүктесін алып OA , OB , OD түзулерін және де AB түзуіне параллель CF түзуін жүргізейік. Салуымыз бойынша $\frac{OC}{OA} = \lambda$, $\triangle ADO \sim \triangle CEO$, $\triangle DBO \sim \triangle EFO$, $\triangle ABO \sim \triangle CFO$ болады, сондықтан

$$\frac{CE}{AD} = \lambda, \frac{EF}{DB} = \lambda, \frac{CF}{AB} = \lambda$$

немесе

$$\vec{CE} = \lambda \vec{AD} = \lambda \vec{a}, \quad EF = \lambda \vec{b}, \quad \vec{CF} = \lambda(\vec{a} + \vec{b}).$$

$\vec{CE}$ векторы $\vec{CF}$ мен $\vec{EF}$ векторларының қосындысы, салуымыз бойынша

$$\vec{CF} = \vec{CE} + \vec{EF}.$$

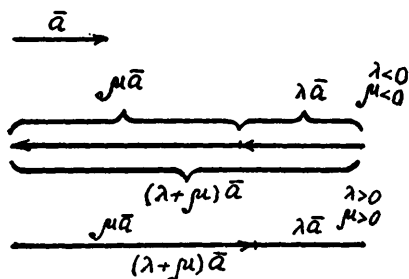
Соңғы теңдіктен

$$\lambda \bar{a} + \lambda \bar{b} = \lambda (\bar{a} + \bar{b}).$$

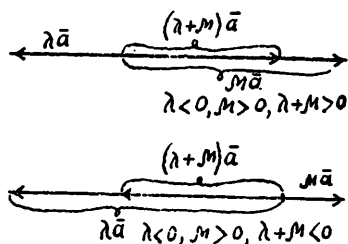
2-жағдай дәлелденді. Біз бұл дәлелдеуде тек $\lambda > 0$ болған жағдайды қарастырдық, ал $\lambda < 0$ болған жағдайды жаттығу ретінде оқырманның өзіне ұсынамыз.

Екінші қасиеттің дәлелдемесі. Дәлелдеу үшін үш жағдайды қарастыралық.

1-жағдай. λ, μ — бір таңбалы, яғни екеуі де не оң, не теріс сандар болсын. Бұл жағдайда $(\lambda + \mu)\bar{a}$ мен $\lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$ бір бағыттас векторлар және $(\lambda + \mu)\bar{a}$ векторының модулі $\lambda\bar{a}$ мен $\mu\bar{a}$ векторының модульдерінің қосындысына тең (46-сурет). Сондықтан 1-жағдай дәлелденді.



46-сурет



47-сурет

2-жағдай. λ, μ — сандарының таңбалары қарама-қарсы болсын деп ұйғаралық (47-сурет). Олай болса $\lambda + \mu$ санының таңбасымен бірдей, егер $|\lambda| > |\mu|$ болса, ал егер $|\lambda| < |\mu|$ болса, онда ол μ санының таңбасымен бірдей. Сондықтан $(\lambda + \mu)\bar{a}$ векторының бағыты $\lambda\bar{a}$ мен $\mu\bar{a}$ векторларының үлкендерінің бағытымен бір бағыттас болады. 2-жағдай дәлелденді.

3-жағдай. Енді $\lambda + \mu = 0$ болсын деп ұйғаралық. Бұл жағдайда $(\lambda + \mu)\bar{a}$ — нөл вектор болады және $\lambda\bar{a}$ мен $\mu\bar{a}$ векторларының модульдері тең, ал бағыттары қарама-қарсы. Сондықтан олардың қосындысы нөл вектор болады. Сонымен екінші қасиет толық дәлелденді.

Енді үшінші қасиетті дәлелделік. Егер $\lambda = 0$ немесе $\mu = 0$ немесе $\bar{a} = 0$ болса, онда үшінші қасиет дәлелденеті. Сондықтан $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ болсын деп ұйғаралық, онда $\lambda(\mu\bar{a})$ мен $(\lambda\mu)\bar{a}$ векторлардың модульдерін қарастыралық:

$$|\lambda(\mu\bar{a})| = |\lambda| \cdot |\mu\bar{a}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\bar{a}| = |\lambda\mu| \cdot |\bar{a}|,$$

яғни бұл векторлардың модульдері де тең. Сондықтан, тең векторлардың анықтамасын еске алсақ, дәлелдеу керектігімізді аламыз.

Теорема 2.2. Егер $\bar{a}$ векторы нөл емес $\bar{b}$ векторына коллинеар болса, онда β нақты саны табылып,

$$\bar{a} = \beta \bar{b}$$

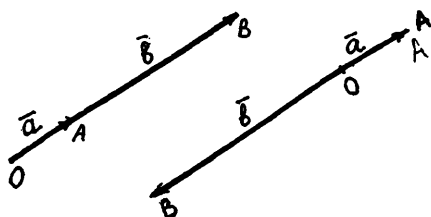
тендігі орындалады.

Дәлелдеуі. Өзара коллинеар $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларын ортақ O нүктесімен үйлестіретілік: $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$. Сонда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бір түзудің бойында жатады және де олардың бағыттары бір бағыттас немесе қарама-қарсы бағыттас болады (48-сурет). O нүкте бағытталған BA кесіндіні белгілі бір қатынасқа бөледі, осы қатынасты β әрпімен белгілейік, яғни

$$\frac{BO}{OA} = -\beta \quad (2.9)$$

немесе

$$OB = \beta \cdot OA, \quad (2.10)$$



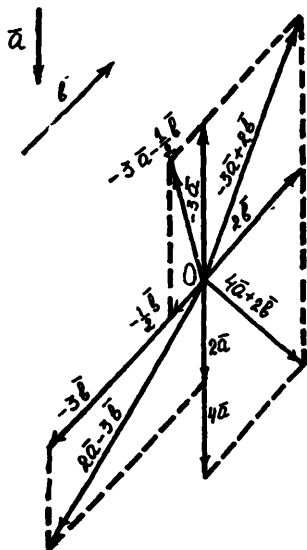
48-сурет

мұндағы OB мен OA бағытталған OB және OA кесінділерінің мәні.

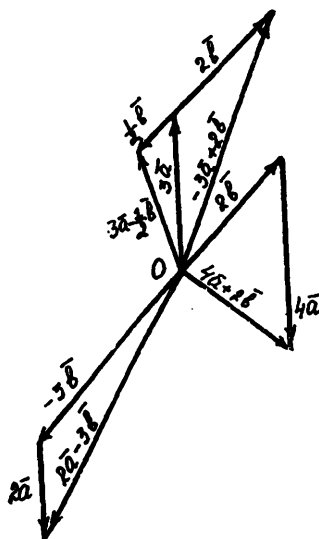
Егер $\vec{a} = \vec{OA}$ мен $\vec{b} = \vec{OB}$ векторларының бағыттары бір бағыттас болса, онда O нүкте BA кесіндіден тысқары жатады. Сондықтан, (2.9) формуладағы $\frac{BO}{OA} < 0$, ал $\beta > 0$ болады.

Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының бағыттары қарама-қарсы бағыттас болса, онда O нүктесі BA кесіндіде жатады. Сондықтан (2.9) формуладағы $\frac{BO}{OA} > 0$, ал, $\beta < 0$ болады.

Енді осы екі жағдайда да $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының теңдігін дәлелделік. Векторды скаляр санға көбейту амалынан және $\vec{a}$



49-сурет



50-сурет

мен $\vec{b}$ векторларының коллинеарлығынан $\vec{a}$ мен $\beta\vec{b}$ векторларының коллинеар болатындығына оңай көз жеткізуге болады. Сондықтан, $|\vec{a}| = |\beta\vec{b}|$ және егер $\lambda > 0$ болса, онда $\vec{a}$ мен $\beta\vec{b}$ векторлары бір бағыттас, ал $\lambda < 0$ болса, онда олар қарама-қарсы бағыттас болады.

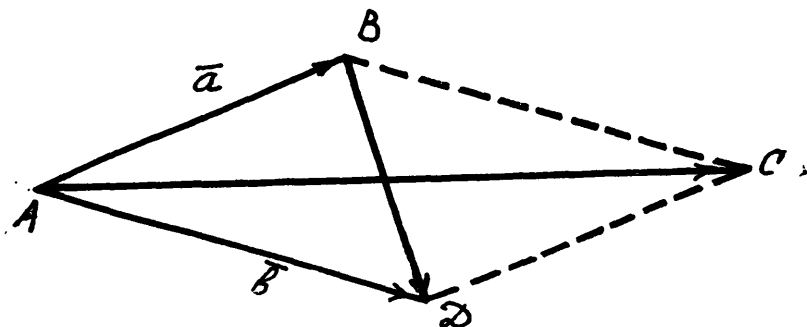
Теорема дәлелденді.

Мысалдар. 1. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бойынша мына векторларды тұрғыз:

$$2\vec{a} - 3\vec{b}, -3\vec{a} + 2\vec{b}, 4\vec{a} + 2\vec{b}, -3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Шешімі. Параллелограмм ережесі бойынша 49-суретте, ал тізбектеп орналастыру бойынша 50-суретте көрсетілген.

2. $ABCD$ параллелограмның $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AD}$ қабырғалары арқылы $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{CB}$, $\vec{AC}$, $\frac{1}{2}\vec{CA}$, $\vec{BD}$, $-3\vec{DB}$ — векторларын өрнекте.



51-сурет

Шешімі. Параллелограмның қасиеттері бойынша (51-сурет): $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{c}$. $\vec{AB}$ мен $\vec{BC}$ векторларын тізбектеп орналастыру арқылы $\vec{AC}$ векторын аламыз: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ немесе $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, осыдан $\vec{CA} = -\vec{a} - \vec{b}$. Енді $\vec{CA}$ векторын $\lambda = \frac{1}{2}$ скаляр шамаға көбейтіп $\frac{1}{2}\vec{CA}$ векторын аламыз, яғни $\frac{1}{2}\vec{CA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. Векторлардың айырымы бойынша $\vec{BD} = \vec{b} - \vec{a}$ болады. $\vec{BD}$ мен $\vec{DB}$ векторлары қарама-қарсы векторлар, сондықтан $\vec{DB} = \vec{a} - \vec{b}$ теңдігі орындалады. Осыдан $-3\vec{DB} = -3\vec{b} + 3\vec{a}$ болады.

2.5. Векторлардың сызықты тәуелділігі

А н ы қ т а м а. Берілген $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ векторларының *сызықты комбинациясы* деп $\alpha_1\bar{a}_1, \alpha_2\bar{a}_2, \dots, \alpha_m\bar{a}_m$ векторларының қосындысын айтамыз, яғни

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_m\bar{a}_m,$$

мұндағы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — кез келген нақты сандар.

А н ы қ т а м а. Берілген $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ векторлары *сызықты тәуелді* деп аталады, егер кем дегенде біреуі нөлге тең емес $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ сандары табылып, олардың сызықты комбинациясы нөлге тең болса, яғни

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_m\bar{a}_m = 0. \quad (2.11)$$

А н ы қ т а м а. Берілген $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ векторлары *сызықты тәуелсіз* деп аталады, егер нөлге тең $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ сандары табылып (2.11) теңдігі орындалса.

Енді векторлардың сызықты тәуелділігінің қасиеттерімен танысып өтелік.

1 - қ а с и е т. Егер $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ векторларының кем дегенде біреуі нөл вектор болса, онда олар сызықты тәуелді векторлар.

2 - қ а с и е т. Егер $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ векторлары сызықты тәуелді болса, онда $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_k$ векторлары да сызықты тәуелді ($k \geq 1$).

3 - қ а с и е т. Егер $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ векторларының бірнешеуі өзара сызықты тәуелді болса, онда олар сызықты тәуелді.

Енді осы қасиеттерді дәлелдейік.

Бірінші қасиеттің дәлелдемесі. Берілген $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_m$ векторларының тек біреуі ғана нөл вектор делік, мысалы $\bar{a}_m = 0$. Енді векторлардың мынадай сызықты комбинациясын қарастыралық:

$$0 \cdot \bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2 + \dots + 0 \cdot \bar{a}_{m-1} + 1 \cdot 0,$$

мұндағы $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-1} = 0, \alpha_m = 1$. Сондықтан

$$0 \cdot \bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2 + \dots + 0 \cdot \bar{a}_{m-1} + 1 \cdot 0 = 0$$

теңдігі орындалады.

Сонымен, жоғарыдағы анықтамадан берілген $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ векторлары сызықты тәуелді векторлар.

Екінші қасиеттің дәлелдемесі. Берілген $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ векторлары сызықты тәуелді, сондықтан кем дегенде біреуі нөлге тең емес $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ нақты сандары табылып, мына теңдік орындалады

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_m\bar{a}_m = 0 \quad (2.12)$$

Осы теңдіктен мына

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_m\bar{a}_m + 0 \cdot \bar{b}_1 + 0 \cdot \bar{b}_2 + \dots + 0 \cdot \bar{b}_k$$

сызықты комбинацияның нөлге тең екендігіне оңай көз жеткізуге болады. Сондықтан, анықтама бойынша $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_k$ векторлары сызықты тәуелді.

Үшінші қасиеттің дәлелдемесі. Берілген $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ векторларын сызықты тәуелді деп ұйғаралық, мұндағы $k < m$. Ұйғаруымыз бойынша, кем дегенде біреуі нөлге тең емес $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ нақты сандары табылып,

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k = 0$$

теңдігі орындалады.

Енді $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_m = 0$ болсын, онда мына

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k + 0 \cdot \bar{a}_{k+1} + \dots + 0 \cdot \bar{a}_m = 0$$

теңдік орындалады. Олай болса, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ векторлары сызықты тәуелді векторлар. Жоғарғы айтылған қасиеттер дәлелденді.

Анықтама. Егер b векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ векторларының сызықты комбинациясы арқылы өрнектелсе, яғни $b = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_m \bar{a}_m$ онда b векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ векторлары арқылы *жіктелінеді* дейміз.

Осы анықтамадан кейін векторлардың сызықты тәуелділігінің анықтамасын басқаша беруге де болады, яғни егер $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ векторларының бірі қалған векторлар арқылы жіктелсе, онда $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ векторлары сызықты тәуелді деп аталады.

2.6. Коллинеар және компланар векторлар

Теорема 2.3. Берілген $\bar{a}$ мен b векторлары сызықты тәуелді болу үшін олардың өзара коллинеарлығы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Берілген $\bar{a}$ мен b векторлары сызықты тәуелді деп ұйғаралық та, олардың коллинеар екендігін дәлелделік. Ұлғаруымыз бойынша, α мен β нақты сандары табылып,

$$\alpha \bar{a} + \beta b = 0 \quad (2.13)$$

теңдігі орындалады.

Енді α мен β сандарының бірі мысалы, анықтық үшін $\alpha \neq 0$ болсын делік, олай болса (2.13) теңдігінен мына

$$\bar{a} = \gamma b$$

теңдігін аламыз, мұндағы $\gamma = -\frac{\beta}{\alpha}$. Соңғы теңдіктен және векторды скаляр санға көбейту анықтамасын еске түсірсек, онда $\bar{a}$ мен b векторларының коллинеар екендігін аламыз.

Жеткіліктілігі. Енді $\bar{a}$ мен b векторларын коллинеар деп ұйғаралық та, олардың сызықты тәуелді векторлар екендігін дәлелделік. Ол үшін екі жағдайды қарастыралық.

Бірінші жағдай. Берілген векторлардың бірі нөл вектор болсын делік. Онда бұл векторлардың сызықты тәуелділігі бірінші қасиеттен алынады.

Екінші жағдай. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының екеуіде нөл емес вектор болсын делік. Онда теорема 2.2. бойынша α нақты саны табылып, мына теңдік орындалады

$$\vec{b} = \alpha \vec{a} \text{ немесе } \alpha \vec{a} - \vec{b} = 0. \quad (2.14)$$

Соңғы теңдікте, мынадай екі жағдай болуы мүмкін $\alpha = 0$ немесе $\alpha \neq 0$. Екі жағдайда да — $1 \neq 0$, сондықтан (2.14) теңдігі $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының сызықты тәуелділігін анықтайды.

Теорема дәлелденді.

Осы теоремадан мынадай салдар аламыз.

Салдар. Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар болмаса, онда олар сызықты тәуелсіз.

Анықтама. Параллель жазықтықтардың немесе бір жазықтықтың бойында жатқан векторлар *компланар* векторлар деп аталады.

Осы анықтамадан, кез келген екі вектор компланар.

Теорема 2.4. Кез келген үш $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар сызықты тәуелді болу үшін олардың компланарлығы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын сызықты тәуелді деп олардың компланарлығын дәлелделік. Олай болса сызықты тәуелді векторлардың анықтамасынан кем дегенде біреуі нөлге тең емес α , β , γ нақты сандары табылып,

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0 \quad (2.15)$$

теңдігі орындалады, мұндағы $\gamma \neq 0$ деп ұйғаралық. Сонда (2.15) теңдігінен

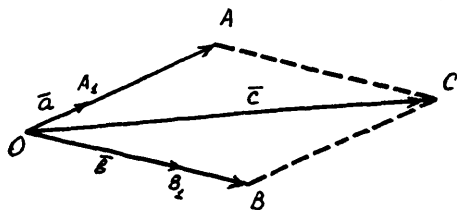
$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (2.16)$$

теңдігін аламыз, мұндағы $\lambda = -\frac{\alpha}{\gamma}$, $\mu = -\frac{\beta}{\gamma}$.

Енді $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын ортақ 0 нүктесімен үйлестірілсек (52-сурет). (2.16) теңдіктен $\vec{c}$ векторы параллелограмның диагоналы, ал $\vec{OA} = \lambda \vec{a}$, $\vec{OB} = \mu \vec{b}$ векторлары параллелограмның қабырғалары, сондықтан $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары бір жазықтықта жатыр, олай болса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары компланар.

Жеткіліктілігі.

Енді $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын компланар деп ұйғаралық та, олардың сызықты тәуелдігін дәлелделік. Дәлелдемек бұрын осы үш вектордан құралған қос векторлар, яғни $\vec{a}$ мен $\vec{b}$, $\vec{a}$ мен $\vec{c}$, $\vec{b}$ мен $\vec{c}$ векторларын коллинеар деп



52-сурет

ұйғаралық. Онда теорема 2.3-тен коллинеар екі вектор сызықты тәуелді, олай болса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының сызықты тәуелділігі векторлардың сызықты тәуелділігінің үшінші қасиетінен шығады.

Енді $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларынан құралған қос векторлар коллинеар емес деп ұйғаралық. Берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын бір жазықтықта орналастырып, ортақ бас 0 нүктесімен үйлестірейік (52-сурет). $\vec{c}$ векторының соңғы нүктесінен $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларына параллель түзулер жүргізейік. С нүктесінен $\vec{b}$ векторына параллель жүргізілген түзу мен $\vec{a}$ векторы жатқан түзудің қиылысу нүктесін A әрпімен, ал $\vec{b}$ векторы жатқан түзу мен C нүктесінен $\vec{a}$ векторына параллель жүргізілген түзудің қиылысу нүктесін B әрпімен белгілейік. Параллелограмм ережесі бойынша $\vec{OA}$ мен $\vec{OB}$ векторларының қосындысы $\vec{OC}$ векторына тең, яғни

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} \quad (2.17)$$

Нөл емес $\vec{a}$ векторы $\vec{OA}$ векторымен коллинеар, сондықтан теорема 2.2-ден α мен β нақты сандары табылып

$$\vec{OA} = \alpha \vec{a}, \quad (2.18)$$

$$\vec{OB} = \beta \vec{b} \quad (2.19)$$

теңдіктері орындалады. (2.17) теңдігін мына түрде жазуға болады

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + (-1) \vec{c} = 0,$$

мұндағы α , β нақты сандарының кем дегенде біреуі нөлге тең емес. Сондықтан соңғы теңдіктен $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының сызықты тәуелділігі шығады.

Теорема дәлелденді.

С а л д а р Егер үш $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары компланар болмаса, онда олар сызықты тәуелсіз.

2.7. Кеңістіктегі төрт вектордың сызықты байланысы

Т е о р е м а 2.5. Кеңістіктегі кез келген төрт $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ және $\vec{d}$ векторлары сызықты тәуелді.

Дәлелдеуі. Берілген төрт вектордың сызықты тәуелділігін дәлелдеу үшін олардың бірі қалғандарының сызықты комбинация арқылы өрнектелетінін көрсетсек жеткілікті. Ол үшін екі жағдайды қарастыралық.

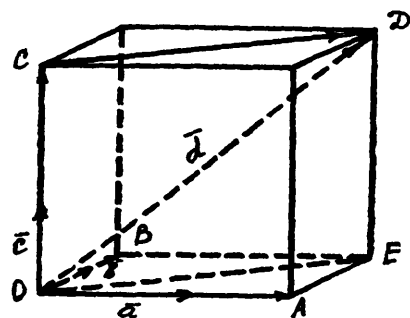
1 - ж а ғ д а й. Берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторларынан құралған үш вектор компланар болсын деп ұйғаралық, мысалы, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары компланар болсын. Онда теорема 2.4-тен ұйғаруымыз бойынша $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары сызықты тәуелді. Енді векторлардың сызықты тәуелділігінің екінші анықтамасын еске түсірейік, онда $\vec{a}$ векторы $\vec{b}$ мен $\vec{c}$ векторлары арқылы жіктелінеді, яғни

$$\vec{a} = \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

Бұл теңдікті берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторлары арқылы былай жазалық

$$\vec{a} = \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} + 0 \cdot \vec{d}.$$

Сонымен, $\vec{a}$ векторы $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторлары арқылы жіктелінеді. Олай болса, берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторлары сызықты тәуелді.



53-сурет

2-жағдай. Енді $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторынан құралған үш вектор компланар емес делік. Осы векторларды ортақ бас O нүктесімен үйлестіретілік (53-сурет). $\vec{d}$ векторының соңғы нүктесін D әрпімен белгілейік және $\vec{a}$ мен $\vec{b}$, $\vec{a}$ мен $\vec{c}$, $\vec{b}$ мен $\vec{c}$ векторлары арқылы құралған перпендикуляр жазықтықтарға параллель үш жазықтық тұрғызайық. Осы жазықтықтардың берілген векторлар жатқан түзулермен қиылысу

нүктелерін A , B , C -мен белгілейік, сонда $\vec{d} = \vec{OD}$ векторы параллелограммның диагоналы болса, ал $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ векторлары параллелепипедтің үш өлшемдері болады.

Енді $\vec{OD}$ векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ және $\vec{OC}$ векторларының қосындысына тең болатындығын дәлелдеміз, яғни

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}. \quad (2.20)$$

Ол үшін $OCDE$ және $OBEA$ параллелограмдарын қарастыралық. Параллелограмм ережесі бойынша

$$\vec{d} = \vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{OC} + \vec{OE}, \quad (2.21)$$

$$\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{OB}. \quad (2.22)$$

Жоғарыдағы (2.21) мен (2.22) теңдіктерінен (2.20) теңдігін аламыз.

Енді $\vec{OA}$ векторы $\vec{a}$ векторына коллинеар, сондықтан теорема 2.2-ден $\vec{OA}$ мен $\vec{a}$ векторлары үшін λ саны табылып

$$\vec{OA} = \lambda \vec{a} \quad (2.23)$$

теңдігі орындалады. Осы сияқты, теорема 2.2-ден $\vec{OB}$ мен $\vec{b}$ және $\vec{OC}$ мен $\vec{c}$ векторлары арасындағы байланысты көреміз:

$$\vec{OB} = \mu \vec{b}, \quad \vec{OC} = \nu \vec{c}. \quad (2.24)$$

Жоғарыдағы (2.23), (2.24) және (2.20) теңдіктерінен

$$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$$

немесе

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} + (-1)\vec{d} = 0 \quad (2.25)$$

болады. (2.25) теңдіктегі $-1 \neq 0$, сондықтан бұл теңдік $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының сызықты тәуелділігін көрсетеді. Теорема дәлелденді.

Осы теоремадан мынадай салдар аламыз.

С а л д а р. Қандай да болмасын коллинеар емес $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларына және де кез келген $\vec{d}$ векторы үшін λ , μ , ν нақты сандары табылып,

$$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$$

теңдігі орындалады.

2.8. Базис

Сызықты және векторлық алгебрада базис математиканың негізгі ұғымдарының бірі. Сондықтан біз базис жәйлі ұғым берелік.

А н ы қ т а м а. Түзу бойындағы *базис* деп осы түзу бойындағы кез келген нөл емес векторды айтамыз.

А н ы қ т а м а. Жазықтықтағы *базис* деп осы жазықтықтағы кез келген коллинеар емес екі векторды айтамыз.

Соңғы анықтамадан және теорема 2.3-тен жазықтықта жатқан кез келген $\vec{c}$ векторы үшін α мен β нақты сандары табылып,

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \quad (2.26)$$

теңдігі орындалады.

(2.26) теңдігі $\vec{c}$ векторының $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ базистері арқылы жіктелуі деп аталады.

А н ы қ т а м а. Бір жазықтықтағы сызықты тәуелді емес $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бір *базис* құрайды дейміз, егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары осы жазықтықтағы кез келген $\vec{c}$ векторының сызықты комбинациясы болса.

Осы анықтаманы басқаша берелік.

$\vec{c}$ векторымен бір жазықтықта жатқан сызықты тәуелді емес екі $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары $\vec{c}$ векторы арқылы жіктелсе, онда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бір базис құрайды дейміз, яғни α мен β нақты сандары табылып, (2.26) теңдігі орындалады.

А н ы қ т а м а. Кеңістіктегі сызықты тәуелді емес $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары бір *базис* құрайды дейміз, егер олар кез келген $\vec{d}$ векторының сызықты комбинациясы болса, яғни кез келген $\vec{d}$ векторы үшін α , β , γ нақты сандары табылып,

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \quad (2.27)$$

теңдігі орындалса.

Енді базис жәйлі негізгі теоремалармен танысып өтелік.

Теорема 2.6. Кеңістікте компланар емес $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары базис құрайды.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланар емес векторлар, сондықтан теорема 2.4-тің салдарынан олар сызықты тәуелді емес векторлар. Енді теорема 2.5-тің салдарынан кез келген $\vec{d}$ векторы үшін α , β , γ нақты сандары табылып, берілген компланар емес $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары үшін

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

теңдігі орындалады. Сондықтан $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары базис құрайды.

Теорема дәлелденді.

(2.27) теңдігін $\vec{d}$ векторының $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ базистері арқылы жіктелінуі, ал α , β , γ нақты сандарын $\vec{d}$ векторының осы базистерге тиісті координаталары деп атайды.

Теорема 2.7. Кеңістіктегі кез келген $\vec{d}$ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ базистері арқылы тек бір-ақ рет жіктелінеді, яғни (2.27) теңдігі орындалады.

Дәлелденуі. Берілген $\vec{d}$ векторының (2.27) түріндегі жіктелінуінен басқа жіктелінуі бар деп ұйғаралық, яғни α_1 , β_1 , γ_1 нақты сандары үшін

$$\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c} \quad (2.28)$$

теңдігі және (2.27) теңдігі орындалсын делік. Сонда, (2.27) мен (2.28) теңдіктерінен

$$(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} + (\gamma - \gamma_1)\vec{c} = 0 \quad (2.29)$$

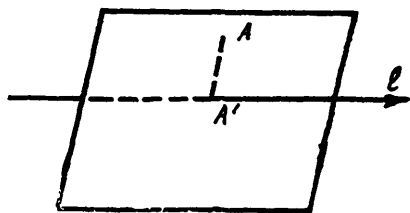
болады. Берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ базистері сызықты тәуелді емес, сондықтан (2.29) теңдігі орындалады, егер $\alpha - \alpha_1 = 0$, $\beta - \beta_1 = 0$, $\gamma - \gamma_1 = 0$ болса. Осыдан $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$

Теорема дәлелденді.

2.9. Вектордың өстегі проекциясы

Бізге кеңістікте бағытталған l өсі мен осы өстен тысқары жатқан A нүкте берілсін делік (54-сурет). A нүктесі арқылы l өсіне перпендикуляр P жазықтығын тұрғызайық, сонда P жазықтығы l өсімен A' нүктесінде қиылысады. A' нүкте A нүктесінің l өсіндегі проекциясы деп аталады. Сонымен нүктенің өстегі проекциясы нүкте болады.

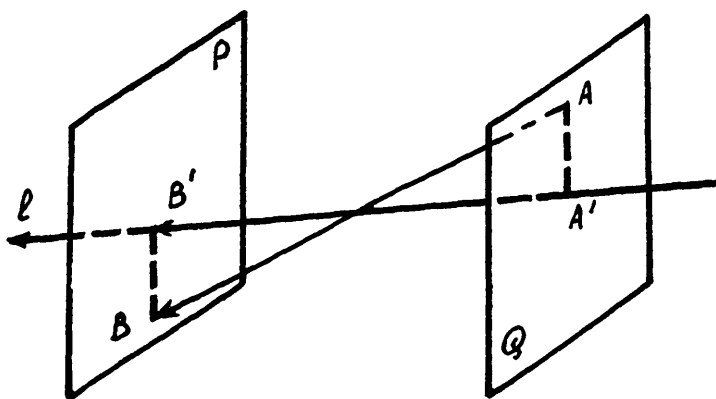
Енді вектордың өстегі проекциясын қарастыралық. Вектордың өстегі проекциясын екі мағынада түсінуге бо-



54-сурет

лады: геометриялық және алгебралық мағынада.

Геометриялық проекция. Кеңістікте l өсінде жатпайтын $\vec{AB}$ векторын алып, вектордың бас және соңғы нүктелері арқылы l өсіне перпендикуляр P мен Q жазықтықтарын тұрғызайық (55-сурет). Бұл жазықтықтар өзара параллель болады. A нүктенің l өсіндегі проекциясын A' , ал B нүктенің l өсіндегі проекциясын B' әріптерімен белгілейік.



55-сурет

Анықтама. $\vec{AB}$ векторының l өсіндегі геометриялық проекциясы деп бас нүктесі A нүктесінің проекциясы болатын, ал соңғы нүктесі B нүктесінің проекциясы болатын $\vec{A'B'}$ векторын айтады. $\vec{AB}$ векторының l өсіндегі геометриялық проекциясы былай белгіленеді

$$\text{пр}_l \vec{AB} = \vec{A'B'}$$

немесе

$$\text{пр } \vec{AB} = \vec{A'B'}.$$

Сонымен, вектордың өстегі геометриялық проекциясы вектор болады.

Алгебралық проекция. **Анықтама.** $\vec{AB}$ векторының l өсіндегі алгебралық проекциясы деп оң немесе теріс таңбасымен алынған $\vec{A'B'}$ векторының модулін айтамыз.

Егер $\vec{A'B'}$ векторы мен l өсінің бағыттары бір бағыттас болса, онда $\vec{A'B'}$ векторының таңбасы оң болады, ал қарама-қарсы болса, онда $\vec{A'B'}$ векторының таңбасы теріс болады.

$\vec{AB}$ векторының l өсіндегі алгебралық проекциясы былай белгіленеді:

$$\text{пр}_l \vec{AB} = |\vec{A'B'}|$$

немесе

$$\text{пр } \vec{AB} = |\vec{A'B'}|.$$

Сонымен, вектордың өстегі алгебралық проекциясы оң немесе теріс таңбасымен алынған вектордың модулі болып табылады.

Жоғарыдағы анықтамадан алгебралық проекцияның мынадай қасиеттерін аламыз:

1. Тең векторлардың l өсіндегі алгебралық проекциялары да тең болады.

2. Кез келген вектордың параллель және бір бағыттас l_1 мен l_2 өстеріндегі алгебралық проекциялары тең болады.

3. Кез келген вектордың параллель және қарама-қарсы бағыттас l_1 мен l_2 өстеріндегі алгебралық проекциясының абсолют шамасы тең, ал таңбалары қарама-қарсы болады.

Енді вектордың алгебралық және геометриялық проекцияларының арасындағы байланысты қарастырайық.

Теорема 2.8. Бірлік $\vec{e}$ векторымен $\vec{AB}$ векторының l өсіндегі алгебралық проекциясының көбейтіндісі $\vec{AB}$ векторының l өсіндегі геометриялық проекциясына тең, яғни

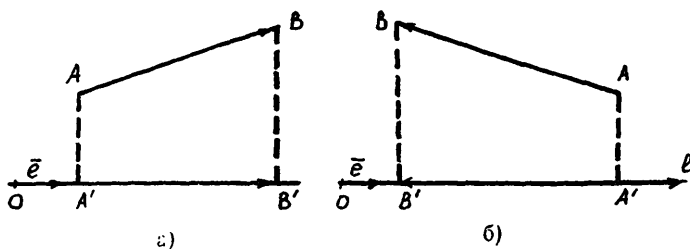
$$\vec{e} \text{ пр}_l \vec{AB} = \text{Пр}_l \vec{AB}$$

Дәлелдеуі. Берілген $\vec{AB}$ векторының l өсіндегі $\vec{A'B'}$ геометриялық проекциясы бірлік $\vec{e}$ векторымен коллинеар (56-сурет), сондықтан

$$\text{Пр}_l \vec{AB} = \vec{A'B'} = k\vec{e}, \quad (2.30)$$

ал абсолют шамасы $\vec{A'B'}$ кесіндінің немесе $\vec{A'B'}$ векторының ұзындығына тең, мұндағы k кез келген сан. k санының таңбасы оң, егер $\vec{A'B'}$ мен $\vec{e}$ векторларының бағыттары бір бағыттас болса (56, а-сурет), теріс, егер бұл векторлардың бағыттары қарама-қарсы болса (56, б-сурет).

$\vec{AB}$ векторының l өсіндегі алгебралық проекциясы k -ға тең, яғни

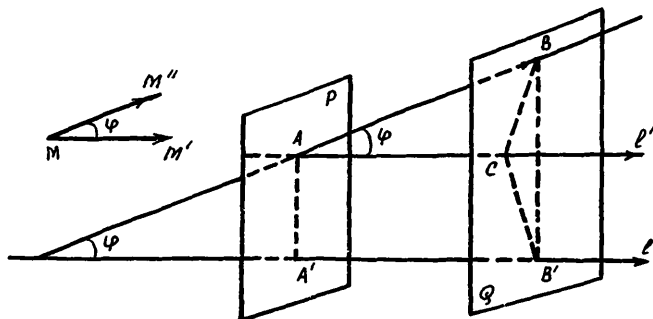


56-сурет

$$\text{пр}_l \vec{AB} = |A'B'| = k. \quad (2.31)$$

(2.30) және (2.31) теңдіктерінен дәлелдеу керегіміз шығады.

Енді $\vec{AB}$ векторының l өсіндегі алгебралық проекциясымен осы өстің $\vec{AB}$ векторының арасындағы бұрышының байланысын қарастырайық. Бұл бұрышты φ әрпімен белгілейік және бұл бұрыш былай анықталады: φ — бұрышы деп кез келген M нүктесінен шыққан екі сәуленің арасындағы бұрышты айтады, мұндағы екі сәуленің бірі берілген $\vec{AB}$ векторымен бір бағыттас, ал екіншісі берілген l өсімен бір бағыттас (57-сурет), яғни $\varphi = (\vec{AB}, l)$.



57-сурет

Теорема 2.9. $\vec{AB}$ векторының l өсіндегі алгебралық проекциясы осы вектормен өс арасындағы φ бұрышының косинусын сол вектордың модуліне көбейткенге тең, яғни

$$\text{пр}_l \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \varphi.$$

Дәлелдеуі. $\vec{AB}$ векторының бас және соңғы нүктелері арқылы l өсіне перпендикуляр P мен Q жазықтықтарын тұрғызайық. Берілген l өсіне бір бағыттас $\vec{AB}$ векторының бас A нүктесі арқылы өтетін l' өсін жүргізейік, мұндағы $\vec{AB}$ мен $\vec{MM''}$ және l' пен $\vec{MM'}$ бір бағыттас векторлар (31-сурет). A нүктесінің l өсіндегі проекциясын A' , B нүктесінің l' өсіндегі проекциясын C , ал l өсіндегі проекциясын B' әріптерімен белгілейік. Сонда $\widehat{BAC} = \varphi = (\vec{AB}, l)$ және AC кесіндісі $\vec{AB}$ векторының l' өсіндегі алгебралық проекциясы, яғни $AC = A'B'$, мұндағы $A'B'$ кесіндісі $\vec{AB}$ векторының l өсіндегі алгебралық проекциясы. Сондықтан, тік бұрышты $\triangle ABC$ -дан:

$$\text{пр}_l \vec{AB} = AC = |\vec{AB}| \cos \varphi$$

болады. Теорема дәлелденді.

2.10. Вектор проекцияларының негізгі қасиеттері

Теорема 2.10. Берілген векторлар косындыларының өстегі проекциялары осы векторлардың сол өстегі проекцияларының косындысына тең, яғни

$$\text{пр}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_m) = \text{пр} \vec{a}_1 + \text{пр} \vec{a}_2 + \dots + \text{пр} \vec{a}_m, \quad (2.32)$$

$$\text{Пр}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_m) = \text{Пр} \vec{a}_1 + \text{Пр} \vec{a}_2 + \dots + \text{Пр} \vec{a}_m. \quad (2.33)$$

Дәлелдеуі. Теореманы берілген $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ векторлары үшін (2.32) формуланы дәлелделік. Ол үшін векторларды тізбектеп тұрғызайық (58-сурет): $\vec{a}_1 = \vec{AB}$, $\vec{a}_2 = \vec{BC}$, $\vec{a}_3 = \vec{CD}$. Векторлардың косындысы $\vec{AD}$ векторына тең, яғни

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}.$$

Енді A, B, C және D нүктелерінің l өсіндегі проекцияларын A', B', C' және D' әріптерімен белгілейік. Сонда

$$\begin{aligned} \text{пр}_l \vec{a}_1 &= \text{пр}_l \vec{AB} = A'B', \quad \text{пр}_l \vec{a}_2 = \text{пр}_l \vec{BC} = B'C', \\ \text{пр}_l \vec{a}_3 &= \text{пр}_l \vec{CD} = C'D', \quad \text{пр}_l \vec{AD} = \text{пр}_l (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) = A'D' \end{aligned} \quad (2.34)$$

болады, мұндағы $A'B', B'C'$ және $C'D'$ кесінділерінің косындысы $\vec{AD}$ векторының l өсіндегі алгебралық проекциясына тең, яғни

$$\text{пр}_l \vec{AD} = A'D' = A'B' + B'C' + C'D'. \quad (2.35)$$

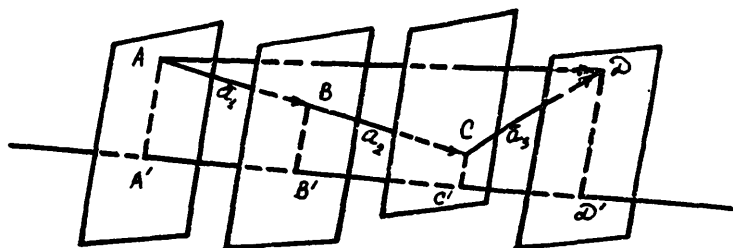
Жоғарыдағы (2.34) және (2.35) формулаларынан дәлелдеу керектігімізді аламыз.

Енді (2.33) формуланың дәлелдеуін жаттығу ретінде оқырманның өзіне ұсынамыз.

Теорема 2.11. Берілген $\vec{a}$ вектор мен k санының көбейтіндісінің проекциясы вектордың өстегі проекциясы мен k санының көбейтіндісіне тең, яғни

$$\text{Пр}_l k\vec{a} = k \text{ Пр}_l \vec{a}, \quad (2.36)$$

$$\text{пр}_l k\vec{a} = k \text{ пр}_l \vec{a}. \quad (2.37)$$

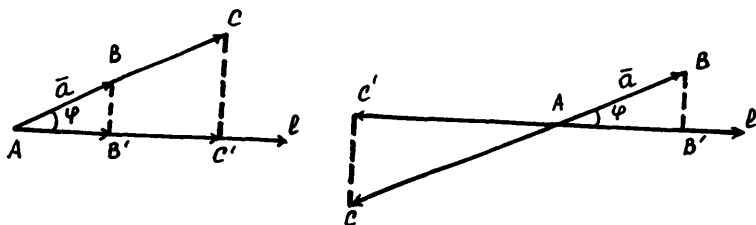


58-сурет

Дәлелдеуі. Алдымен (2.36) формуланы дәлелделік. Ол үшін l өсіндегі кез келген A нүктені алып, осы нүктені $\vec{a}$ мен $k \cdot \vec{a}$ векторларының ортақ бас нүктесі деп ұйғаралық (59-сурет):

$$\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = k\vec{a} \quad (2.38)$$

B мен C нүктелерінің l өсіндегі проекцияларын B' және C' әріптерімен белгілейік. Енді k саны оң және теріс болғандағы екі жағдайды қарастырайық:



59-сурет

1. Егер $k > 0$ болса, онда $\vec{AB'}$ пен $\vec{AC'}$ векторлары бір бағыттас (59, а-сурет):

$$\vec{AC'} = m\vec{AB'}, \quad (2.39)$$

мұндағы $m > 0$.

2. Егер $k < 0$ болса, онда $\vec{AB'}$ пен $\vec{AC'}$ векторлары қарама-қарсы бағыттас (59, б-сурет). Сондықтан, $k < 0$ болған жағдайда (2.39) теңдігі орындалады, бірақ мұндағы m теріс сан болады. Сонымен,

$$|k| = \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{AB}|}, \quad (2.40)$$

$$|m| = \frac{|\vec{AC'}|}{|\vec{AB'}|}. \quad (2.41)$$

(2.40) және (2.41) теңдіктерінен $|k| = |m|$ болады. Бұл теңдікті $\triangle ABB'$ пен $\triangle ACC'$ үшбұрыштарының ұқсастығынан да аламыз. Қарастырылып отырылған екі жағдайда да k мен m сандарының таңбалары бірдей, олай болса $k = m$ болады. (2.39) теңдігіндегі

$$\vec{AC'} = \text{Пр}_l \vec{AC}, \vec{AB'} = \text{Пр}_l \vec{AB}.$$

Сондықтан (2.39) теңдігін былай жазамыз:

$$\text{Пр}_l \vec{AC} = k \text{Пр}_l \vec{AB}$$

немесе

$$\text{Пр}_l (k\vec{a}) = k \text{Пр}_l \vec{a}.$$

(2.36) формула дәлелденді.

Енді (2.37) формуланы дәлелделік.

1. Егер $k > 0$ болса, онда $\vec{AB}$ мен $\vec{AC}$ векторлары бір бағыттас және де олар l өсімен φ бұрышын түзейді, сондықтан (2.30) формуладан (59, а-сурет):

$$\text{пр}_l k \vec{AB} = |k| \cdot |\vec{AB}| \cos \varphi = k |\vec{AB}| \cos \varphi = |k| \text{пр}_l \vec{AB}.$$

2. Егер $k < 0$ болса, онда $\vec{AB}$ мен $\vec{AC}$ векторлары қарама-қарсы бағыттас, сондықтан олар l өсімен φ және $\varphi + \pi$ бұрыш жасайды (59, б-сурет), олай болса

$$\begin{aligned} \text{пр}_l k \vec{AB} &= |k| \cdot |\vec{AB}| \cos(\varphi + \pi) = |k| \cdot |\vec{AB}| (-\cos \varphi) = \\ &= -|k| \cdot |\vec{AB}| \cos \varphi = -|k| \text{пр}_l \vec{AB} = k \text{пр}_l \vec{AB}. \end{aligned}$$

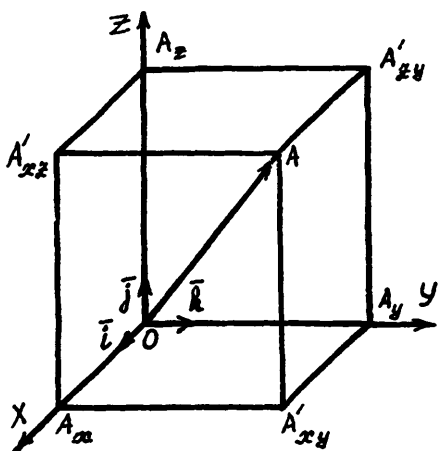
Теорема толық дәлелденді.

Ескерту. Алдағы тақырыптарда «вектордың алгебралық проекциясы» деген ұғымды қысқаша «вектордың проекциясы» деп айтатын боламыз.

2.11. Кеңістіктегі тік бұрышты декарт координат жүйесіндегі векторлардың проекциялары

Бізге тік бұрышты декарт координат жүйесі берілсін делік. Координат өстеріндегі бірлік векторлар $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ әріптерімен белгіленеді (60-сурет). Координат жүйесінің бас O нүктесі бірлік векторларының бас нүктесі болады. Кеңістікте жатқан кез келген A нүктесін аламыз. Бас нүктеден шығып A нүктесіне бағытталған вектор осы нүктенің радиус векторы деп аталады және ол былай белгіленеді $\vec{r}(A) = \vec{r} = \vec{OA}$. Кеңістіктегі кез келген нүкте

үш санмен немесе үш координатпен анықталатыны бізге белгілі. Енді берілген координат жүйесінде жатқан A нүктенің радиус векторының координаттарын анықтайық. Ол үшін A нүктеден координат жазықтықтарына параллель жазықтықтар тұрғызайық, осы жазықтықтардың координат жазықтықтарымен қиылысу нүктелерін A_x , A_y , A_z әріптерімен, ал A нүктенің координат жазықтықтарындағы проекцияларын A'_{xy} , A'_{xz} , A'_{yz} әріптерімен белгілейік.



60-сурет

Енді жазықтықтағы вектордың өстегі проекцияларының анықтамасын еске түсірелік. Бұл анықтамадан A нүктенің координатасы $\vec{OA}$ векторының координат өстеріне түсірілген проекциялары болып табылады, яғни $A(x, y, z)$.

ал $\vec{x\bar{i}}, \vec{y\bar{j}}, \vec{z\bar{k}}$ векторлары $\vec{OA}$ векторының координат өстеріндегі компоненттері деп аталады:

$$\begin{aligned}x &= \text{пр}_{ox} OA = OA_x, & x\bar{i} &= \text{Пр}_{ox} \vec{OA} = \vec{OA}_x, \\y &= \text{пр}_{oy} OA = OA_y, & y\bar{j} &= \text{Пр}_{oy} \vec{OA} = \vec{OA}_y, \\z &= \text{пр}_{oz} OA = OA_z, & z\bar{k} &= \text{Пр}_{oz} \vec{OA} = \vec{OA}_z.\end{aligned}\quad (2.42)$$

Сонымен, кеңістіктегі кез келген $\vec{a}$ векторы тік бұрышты координат жүйесінде $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ базистері арқылы тек бір-ақ рет жіктелінеді, яғни

$$\vec{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad (2.43)$$

мұндағы a_x, a_y, a_z — нақты сандар, $a_x \bar{i}, a_y \bar{j}, a_z \bar{k}$ — вектордың компоненттері.

(2.43) формуланың дәлелдеуін 2.12 — тақырыпта қарастырамыз.

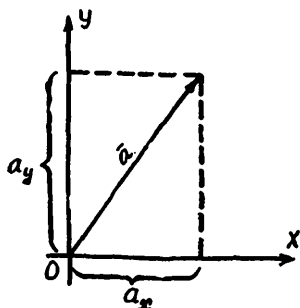
Анықтама. Вектордың тік бұрышты координат жүйесіндегі *координаты* деп осы вектордың координаттар өсіндегі проекцияларын айтамыз, яғни (2.43) формуладағы $a_x = \text{пр}_{ox} \vec{a}, a_y = \text{пр}_{oy} \vec{a}, a_z = \text{пр}_{oz} \vec{a}$ нақты сандары $\vec{a}$ векторының координаты болып табылады және ол былай белгіленеді:

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \quad (2.44)$$

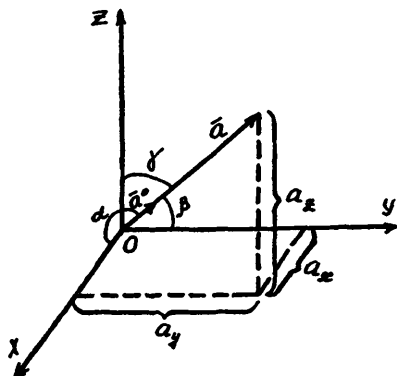
ал жазықтықтағы $\vec{a}$ вектор былай белгіленеді (61-сурет):

$$\vec{a} = \{a_x; a_y\}.$$

Егер вектордың бас нүктесі координат жүйесінің бас нүктерімен үйлессе, онда ол вектордың координаты осы нүктенің координатына тең.



61-сурет



62-сурет

Енді α , β , γ әріптері арқылы $\vec{a}$ векторының координаттар өстері арасындағы бұрыштарын белгілейік (62-сурет). Осы бұрыштардың косинустары $\vec{a}$ векторының бағыттауыш косинусы деп аталады. (2.42) формуладан $\vec{a}$ векторының координатын анықтайық:

$$\begin{aligned} a_x &= \text{пр}_{ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad a_y = \text{пр}_{oy} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta, \\ a_z &= \text{пр}_{oz} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Тік бұрышты параллелепипедтің диагоналының квадраты оның үш өлшемінің квадраттарының қосындысына тең (34-сурет):

$$|\vec{OA}|^2 = (A'_{xy} A_x)^2 + (A'_{xy} A_y)^2 + (A'_{xy} A_z)^2$$

немесе

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Сонымен, $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ векторының модулін мына формуладан анықтаймыз:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.46)$$

Енді (2.45) және (2.46) формулаларынан берілген векторының бағыттауыш косинустары былай анықталады:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Соңғы формуладағы теңдіктердің екі жағын да квадраттап қосайық, сонда

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (2.48)$$

Сонымен, кез келген вектордың бағыттауыш косинустарының квадраттарының қосындысы бірге тең.

А н ы қ т а м а. Берілген $\vec{a}$ векторының *орт* векторы деп бағыты $\vec{a}$ векторымен бір бағыттас және осы вектордың бойында жатқан бірлік векторды айтады және ол былай белгіленеді $\vec{a}^\circ$.

Анықтамадан, $\vec{a}^\circ$ векторының координат өстеріндегі проекциясы осы вектордың бағыттауыш косинустарына тең, яғни

$$a_x = \cos \alpha, \quad a_y = \cos \beta, \quad a_z = \cos \gamma.$$

Сондықтан, бірлік $\vec{a}^\circ$ векторы координат өсі бойынша былай жіктелінеді

$$\vec{a}^\circ = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}. \quad (2.49)$$

Демек, егер $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ болса, онда вектордың орт (бірлік) векторы мына формуладан анықталады:

$$\bar{a}^o = \frac{1}{|\bar{a}|} \bar{a} = \left\{ \frac{a_x}{|\bar{a}|}; \frac{a_y}{|\bar{a}|}; \frac{a_z}{|\bar{a}|} \right\}.$$

Егер $\bar{a}$ векторының OX өсіндегі проекциясы нөлге тең болса, яғни $\bar{a} = \{0; a_y; a_z\}$, онда $\bar{a}$ векторы YOZ координат жазықтығына параллель болады. Осы сияқты $\bar{a} = \{a_x; 0; a_z\}$ векторы XOZ жазықтығына, ал $\bar{a} = \{a_x; a_y; 0\}$ векторы XOY -ке параллель болады.

Егер $\bar{a}$ векторының OX пен OY өстеріндегі проекциялары нөлге тең болса, яғни $\bar{a} = \{0; 0; a_z\}$, онда $\bar{a}$ векторы OZ координат өсіне коллинеар болады. Осы сияқты $\bar{a} = \{0; a_y; 0\}$ векторы OY -ке, ал $\bar{a} = \{a_x; 0; 0\}$ векторы OX -ке коллинеар.

Мысалдар. 1. Берілген $\bar{a} = \{2; 3; -1\}$ векторының бағыттауыш косинустарын анықта.

Шешімі. Алдымен берілген $\bar{a}$ векторының модулін (2.46) формуладан анықтайық:

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}.$$

Сонда, (2.47) формуладан бағыттауыш косинустарды табамыз:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

2. l өсі координат өстерімен төмендегідей бұрыш түзей ала ма?

$$а) \alpha = 60^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ;$$

$$ә) \alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 90^\circ.$$

Шешімі. (2.48) формула бойынша:

$$а) \cos^2 60^\circ + \cos^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \neq 1;$$

$$ә) \cos^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 90^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Сонымен l өсі координат өстерімен $\alpha = 60^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$ бұрыш түзей алмайды, ал $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 90^\circ$ бұрыш түзей алады.

3. Берілген $\bar{a} = \{2; -3; 4\}$ векторының орт векторын тап.

Шешімі. $\bar{a}$ векторының орт векторын анықтау үшін мына формуланы пайдаланамыз:

$$\bar{a}^o = \left\{ \frac{a_x}{|\bar{a}|}; \frac{a_y}{|\bar{a}|}; \frac{a_z}{|\bar{a}|} \right\}.$$

$$\text{мұндағы } |\bar{a}| = \sqrt{29}.$$

Сонда

$$\vec{a}^0 = \left\{ \frac{2}{\sqrt{29}}; -\frac{3}{\sqrt{29}}; \frac{4}{\sqrt{29}} \right\}.$$

4. $\vec{a}$ векторы координат өстерімен $\alpha=60^\circ$, $\beta=120^\circ$, $\gamma=45^\circ$ бұрыш түзейді және $|\vec{a}|=7$. Осы вектордың орт векторының координатын анықта.

Ш е ш і м і. (2.45) формуладан $\vec{a}$ векторының координаталарын табайық:

$$a_x = 7 \cdot \cos 60^\circ = \frac{7}{2}, \quad a_z = 7 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{7}{2}, \quad a_z = 7 \cdot \cos 45^\circ = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Сонда, $\vec{a} = \left\{ \frac{7}{2}; \frac{7}{2}; \frac{7\sqrt{2}}{2} \right\}$ болады.

Осыдан

$$\vec{a}^0 = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

2.12. Векторды компоненттері арқылы өрнектеу

Бізге кеңістікте $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ векторы берілсін.

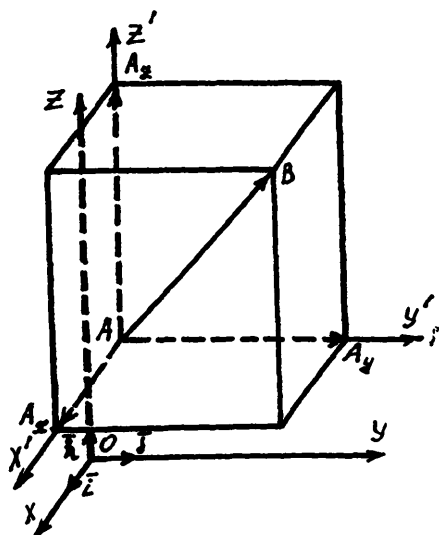
Т е о р е м а 2.12. Кез келген $\vec{a}$ векторының компоненттерінің қосындысы сол вектордың өзіне тең:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (2.50)$$

немесе

$$\vec{a} = \text{Пр}_{Ox} \vec{a} + \text{Пр}_{Oy} \vec{a} + \text{Пр}_{Oz} \vec{a}.$$

Д ә л е л д е у і. Берілген $\vec{a}$ векторын $\vec{AB}$ деп белгілейік. Вектордың бас A мен соңғы B нүктелері арқылы координат жазықтықтарына параллель жазықтықтарын тұрғызайық (63-сурет). $\vec{AB}$ векторының Ox , Oy , Oz өстеріндегі геометриялық проекциясын қарастырып, осы вектордың бас A нүктесінен басталған, осы өстермен бір бағыттас AX' , Ay' , Az' өстеріндегі геометриялық проекциясын қарастырып жеткілікті. Себебі бұдан $\vec{AB}$ векторының координаты



63-сурет

өзгермейді. Сондықтан $\vec{AA}_x$, $\vec{AA}_y$, $\vec{AA}_z$, векторлары $\vec{AB}$ векторының AX' , AY' , AZ' өстеріндегі компоненттері:

$$\vec{AA}_x = \text{Пр}_{AX'} \vec{AB}, \quad \vec{AA}_y = \text{Пр}_{AY'} \vec{AB}, \quad \vec{AA}_z = \text{Пр}_{AZ'} \vec{AB} \quad (2.51)$$

$\vec{AB}$ векторы тұрғызылған параллелепипедтің диагоналы, сондықтан

$$\vec{AB} = \vec{AA}_x + \vec{AA}_y + \vec{AA}_z \quad (2.52)$$

(2.51) мен (2.52) формулаларынан

$$\vec{AB} = \text{Пр}_{AX'} \vec{AB} + \text{Пр}_{AY'} \vec{AB} + \text{Пр}_{AZ'} \vec{AB}$$

немесе

$$\vec{a} = \text{Пр}_{OX} \vec{a} + \text{Пр}_{OY} \vec{a} + \text{Пр}_{OZ} \vec{a}.$$

Енді вектордың алгебралық және геометриялық проекцияларының арасындағы байланысын еске түсірелік (2.8-теорема):

$$\text{Пр}_l \vec{a} = \vec{a}^\circ \text{пр}_l \vec{a},$$

мұндағы l — бағытталған өс.

Осы формуланы (2.50) формулаға пайдаланайық:

$$\text{Пр}_{OX} \vec{a} = \vec{a}^\circ \text{пр}_{OX} \vec{a} = \vec{i} a_x,$$

$$\text{Пр}_{OY} \vec{a} = \vec{a}^\circ \text{пр}_{OY} \vec{a} = \vec{j} a_y,$$

$$\text{Пр}_{OZ} \vec{a} = \vec{a}^\circ \text{пр}_{OZ} \vec{a} = \vec{k} a_z.$$

Сонда, (2.50) формуланы мына түрде жазуға болады

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Теорема дәлелденді.

2.13. Векторларға сызықты амалдар қолдану

Векторларға сызықты амал қолдану нәтижесінде жаңа вектор аламыз. Енді жаңа вектордың координаттарын табу жолдарын қарастырамыз. Ол үшін бізге үш вектор берілсін:

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}, \quad \vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}.$$

Теорема (2.13). Берілген векторлардың қосындысын табу үшін, олардың сәйкес координаттарын қосу керек, яғни

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \{a_x + b_x + c_x; a_y + b_y + c_y; a_z + b_z + c_z\}.$$

Дәлелдеуі. Берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлардың қосындысын $\vec{d}$ әріпімен белгілейік те $\vec{d}$ вектордың координаттарын табалық. Ол үшін берілген векторларды $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — бірлік векторлары арқылы жіктеп жазайық:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$\begin{aligned}\bar{b} &= b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}, \\ \bar{c} &= c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}.\end{aligned}$$

Енді осы векторларды қосып, оларды $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ векторлары арқылы ұқсас мүшелерін жинақтайық, сонда

$$\bar{d} = d_x \bar{i} + d_y \bar{j} + d_z \bar{k},$$

мұндағы

$$d_x = a_x + b_x + c_x, \quad d_y = a_y + b_y + c_y, \quad d_z = a_z + b_z + c_z.$$

Теорема дәлелденді.

Жоғарыдағы теоремадан мынадай салдар шығады.

Салдар. $\bar{a} - \bar{b}$ векторының координаттарын табу үшін, бірінші вектордың координаттарынан екінші вектордың сәйкес координаттарын алу керек, яғни

$$\bar{a} - \bar{b} = \{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\},$$

мұндағы $\bar{a}$ — бірінші, $\bar{b}$ — екінші вектор.

Теорема 2.14. Скаляр шаманы векторға көбейту үшін вектордың координаттарын сол скаляр шамаға жеке-жеке көбейту керек:

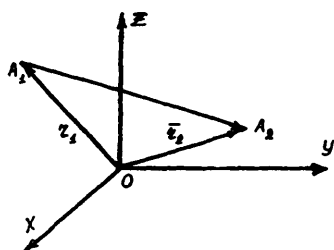
$$\lambda \bar{a} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\},$$

мұндағы λ — скаляр шама.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін берілген $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ векторын мына түрде жазайық $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ және оның екі жағында λ -ға көбейтелік: $\lambda \bar{a} = \lambda a_x \bar{i} + \lambda a_y \bar{j} + \lambda a_z \bar{k}$. Сонда $\bar{c} = c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}$ болады, мұндағы $\bar{c} = \lambda \bar{a}$, яғни

$$c_x = \lambda a_x, \quad c_y = \lambda a_y, \quad c_z = \lambda a_z.$$

Теорема дәлелденді.



64-сурет

Жоғарыдағы теоремалардан және вектор проекцияларының қасиеттерінен мынадай тұжырым аламыз:

1. Тең векторлардың сәйкес координаттары тең;

2. $\bar{a}$ мен $\lambda \bar{a}$ векторлары коллинеар;

3. Егер $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ болса, онда $\vec{A_1 A_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Енді $A_1(x_1, y_1, z_1)$ мен $A_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелерінің радиус векторын қарастырайық (64-сурет):

$$\vec{OA_1} = \vec{r_1} = \{x_1; y_1; z_1\}, \quad \vec{OA_2} = \vec{r_2} = \{x_2; y_2; z_2\}.$$

Осыдан

$$\vec{A_1 A_2} = \vec{OA_2} - \vec{OA_1},$$

немесе

$$\vec{A_1A_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

Сонымен, мына формуладан

$$|\vec{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

A_1A_2 векторының модулін, басқаша айтқанда, кеңістіктегі A_1 мен A_2 нүктелерінің ара қашықтығын анықтаймыз.

Мысалдар. 1. Берілген $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{-2; 3; 0\}$, $\vec{c} = \{-1; 0; -4\}$ векторлары бойынша $\vec{d} = 2\vec{a} - 4\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ векторын анықта.

Шешімі. Алдымен $2\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{c}$ векторларын анықтайық:

$$2\vec{a} = \{6; -4; 2\}, \quad -4\vec{b} = \{8; -12; 0\}, \quad \frac{1}{2}\vec{c} = \left\{-\frac{1}{2}; 0; -2\right\}.$$

Сонда

$$\begin{aligned} \vec{d} = 2\vec{a} - 4\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} &= \left\{6 + 8 - \frac{1}{2}; -4 - 12 + 0; 2 + 0 - 2\right\} = \\ &= \left\{\frac{27}{2}; -16; 0\right\}. \end{aligned}$$

2. Жазықтықтағы $A_1(5, -2, 4)$ мен $A_2(-3, -2, 1)$ нүктелерінің радиус векторларын, $\vec{A_2A_1}$ векторын және олардың ара қашықтығын анықта.

Шешімі: $\vec{r_1} = \vec{OA_1} = \{5; -2; 4\}$, $\vec{r_2} = \vec{OA_2} = \{-3; -2; 1\}$.

Сонда $\vec{A_2A_1} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \{5 + 3; -2 + 2; 4 - 1\} = \{8; 0; 3\}$.

Осыдан $|\vec{A_2A_1}| = |\vec{A_1A_2}| = \sqrt{64 + 0 + 9} = \sqrt{73}$.

3. Берілген $\vec{a} = \{2; -3; 1\}$ векторын $\vec{p} = \{1; 2; -1\}$, $\vec{q} = \{0; 1; 3\}$ және $\vec{r} = \{1; 0; -2\}$ базистері арқылы жікте.

Шешімі: (2.27) формула бойынша $\vec{a}$ векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ — базистері арқылы былай жіктелінеді:

$$\vec{a} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}.$$

Енді осы теңдік орындалатындай α , β , γ нақты сандарын анықтасақ бізге жеткілікті. Ол үшін жоғарыдағы теңдікті былай жазалық:

$$\{2; -3; 1\} = \{\alpha; 2\alpha; -\alpha\} + \{0; \beta; 3\beta\} + \{\gamma; 0; -2\gamma\}$$

немесе

$$\{2; -3; 1\} = \{\alpha + \gamma; 2\alpha + \beta; -\alpha + 3\beta - 2\gamma\}$$

Тең векторлардың сәйкес координаттары тең, сондықтан

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2, \\ 2\alpha + \beta = -3, \\ -\alpha + 3\beta - 2\gamma = 1 \end{cases}$$

яғни, біз үш белгісізі бар біртекті емес үш тендеулер жүйесін алдық. Осы жүйені шешелік, сонда $\alpha = -\frac{4}{5}$, $\beta = \frac{13}{5}$, $\gamma = \frac{24}{5}$.

Сонымен, $\vec{a}$ векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ — базистері арқылы былай жіктелінеді:

$$\vec{a} = -\frac{14}{5}\vec{p} + \frac{13}{5}\vec{q} + \frac{24}{5}\vec{r}.$$

4. $\vec{a} = \{2; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{-4; 1; 2\}$, $\vec{c} = \{1; 0; 2\}$ векторлары берілген. $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ векторын $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ базистері арқылы жікте.

Ш е ш і м і: Алдымен $\vec{p}$ векторының координаттарын анықтайық:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = \{2; 3; 1\} + \{8; -2; -4\} + \{1; 0; 2\} = \\ &= \{2+8+1; 3-2+0; 1-4+2\} = \{11; 1; -1\}\end{aligned}$$

(2.27) формула бойынша $\vec{p}$ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ базистері арқылы былай жіктелінеді:

$$\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

мұндағы α , β , γ — белгісіз нақты сандар. Осыдан

$$\{11; 1; -1\} = \alpha\{2; 3; 1\} + \beta\{-4; 1; 2\} + \gamma\{1; 0; 2\}$$

немесе

$$\{11; 1; -1\} = \alpha\{2; 3; 1\} + \beta\{-4; 1; 2\} + \gamma\{1; 0; 2\}$$

Соңғы теңдік орындалады, егер олардың сәйкес координаттары тең болса, яғни

$$\begin{cases} 11 = 2\alpha - 4\beta + \gamma, \\ 1 = 3\alpha + \beta, \\ -1 = \alpha + 2\beta + 2\gamma. \end{cases}$$

Осы тендеу жүйесін шешіп, оның $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$ шешімдерін табамыз. Сонымен, $\vec{p}$ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ базистері арқылы мына түрде жіктелінеді:

$$\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}.$$

2.14. Екі вектордың коллинеар болу шарты

Бізге $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ мен $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ векторлары берілсін.

Т е о р е м а (2.15). Нөл емес $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар болу үшін олардың сәйкес координаттарының пропорционалдығы қажетті әрі жеткілікті, яғни

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (2.53)$$

Д ә л е л д е у і. Қажеттілігі. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар деп ұйғаралық та олардың координаттарының пропорционалдылығын дәлелдедік. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары колли-

неар болғандықтан, β нақты саны табылып $\bar{a} = \beta \bar{b}$ теңдігі орындалады немесе

$$\{a_x; a_y; a_z\} = \beta \{b_x; b_y; b_z\}.$$

Осыдан,

$$a_x = \beta b_x, a_y = \beta b_y, a_z = \beta b_z$$

немесе

$$\beta = \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Жеткіліктілігі. Енді $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторларының сәйкес координаттары пропорционал деп ұйғаралық та олардың коллинеарлығын дәлелделік. Ұйғаруымыз бойынша, берілген векторлардың сәйкес координаттары пропорционал, яғни

$$a_x = \beta b_x, a_y = \beta b_y, a_z = \beta b_z.$$

Сондықтан

$$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\} = \beta \{b_x; b_y; b_z\} = \beta \bar{b}.$$

Теорема толық дәлелденді.

Жоғарыдағы (2.53) формуланы екінші ретті анықтауыш арқылы былайша да жазуға болады:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

және бұл формулалар векторлардың коллинеар болу шарты деп аталады. Осы теоремадан мынадай салдар аламыз.

Салдар. Кеңістіктегі $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ нүктелерінің әр түрлі жұптары бір түзудің бойында жатуы үшін $\vec{A_3A_1}$ мен $\vec{A_3A_2}$ векторларының коллинеарлығы қажетті әрі жеткілікті, яғни

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Мысалдар. 1. Берілген $\bar{a} = \{2; -3; 4\}$, $\bar{b} = \{6; -9; 2\}$, $\bar{c} = \{-4; 6; 8\}$ векторларының қайсысы басқасымен коллинеар болады.

Шешімі. Алдымен, (2.53) формула бойынша $\bar{a}$ векторы қалған векторлармен коллинеар болатынын немесе болмайтынын тексеріп көрелік. Сонда, $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ коллинеар емес, себебі $\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} \neq \frac{4}{2}$. $\bar{a}$ мен $\bar{c}$ коллинеар, себебі $\frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = \frac{4}{-8}$. $\bar{b}$

мен $\bar{c}$ векторлары коллинеар емес, себебі $\frac{6}{-4} \neq \frac{-9}{6} \neq \frac{2}{-8}$.

2. $\bar{a} = \{-4; 1; \alpha\}$ мен $\bar{b} = \{2; \beta; -3\}$ векторлары коллинеар болатындай α , β сандарын анықта.

Шешімі. (2.53) формуладан $\frac{-4}{2} = \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{-3}$. Осыдан

$\frac{1}{\beta} = -2$, $\frac{\alpha}{-3} = -2$, сонда $\beta = -\frac{1}{2}$, $\alpha = 6$. Енді $\vec{a} = \{-4; 1; 6\}$ мен $\vec{b} = \{2; -\frac{1}{2}; -3\}$ векторлары коллинеар болатындығына оңай көз жеткізуге болады.

3. Берілген $A(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -5)$, $B(\frac{5}{8}, -\frac{7}{2}, 4)$, $C(1, 1, -\frac{7}{2})$, $D(\frac{5}{2}, -2, 1)$ нүктелерінен анықталған $\vec{AB}$ мен $\vec{CD}$ векторларының ұзындықтарын салыстыр және олар коллинеар бола ма?

Ш е ш і м і. $\vec{AB} = \{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}; -\frac{7}{2} - \frac{5}{2}; 4 + 5\} = \{3; -6; 9\}$.

Осы сияқты $\vec{CD} = \{\frac{3}{2}; -3; \frac{9}{2}\}$.

Сонда $|\vec{AB}| = \sqrt{126}$; $|\vec{CD}| = \frac{\sqrt{126}}{2}$, яғни $\vec{AB}$ векторы $\vec{CD}$ векторынан екі есе ұзын, яғни $|\vec{AB}| = 2|\vec{CD}|$. Сондықтан $\vec{AB}$ мен $\vec{CD}$ векторлары коллинеар, яғни $\vec{AB} = 2\vec{CD}$.

2.15. Үш вектордың компланар болу шарты

Бізге үш вектор координаттарымен берілсін:

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}, \vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}.$$

Теорема 2.16. Берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары компланар болу үшін, олардың координаттарынан анықталған үшінші ретті анықтауыштың нөлге тең болуы қажетті әрі жеткілікті, яғни

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (2.54)$$

Д ә л е л д е у і. Берілген векторларды компланар деп ұйғарып, (2.54) формуланы дәлелделік. Вектордың компланарлығынан кем дегенде біреуі нөлге тең емес α , β және γ нақты сандары табылып,

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$$

теңдігі орындалады немесе

$$(\alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x)\vec{i} + (\alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y)\vec{j} + (\alpha a_z + \beta b_z + \gamma c_z)\vec{k} = 0.$$

Осыдан

$$\begin{cases} \alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x = 0, \\ \alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y = 0, \\ \alpha a_z + \beta b_z + \gamma c_z = 0 \end{cases}$$

болады.

Сонымен, біз үш α , β , γ — белгісізі бар біртекті үш теңдеулер жүйесін алдық. Бұл жүйенің нөлден басқа шешімі бар болуы үшін (2.54) шарттын орындалуы қажетті әрі жеткілікті. Сондықтан, теорема толық дәлелденді.

Осы теоремадан мынадай салдар аламыз.

Салдар: Кеңістіктегі $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$ нүктелері бір жазықтықта жату үшін A_4A_1 , A_4A_2 , A_4A_3 векторларының компланарлығы қажетті әрі жеткілікті.

Мысалдар. 1. Берілген $\vec{a} = \{1; -2; 4\}$, $\vec{b} = \{0; -\frac{2}{3}; 2\}$, $\vec{c} = \{0; -1; 3\}$ векторлары компланар бола ала ма?

Шешімі. (2.54) формуладан:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0.$$

Сонымен, берілген векторлар теореманың қажетті әрі жеткілікті шартын қанағаттандырады, сондықтан, олар компланар векторлар.

2. Берілген $A_1(2, 1, 0)$, $A_2(5, 3, 1)$, $A_3(7, 8, 4)$, $A_4(13, 23, 13)$ нүктелері бір жазықтықтың бойында жата ала ма?

Шешімі. Жоғарыдағы теореманың салдары бойынша берілген нүктелер бір жазықтықта жату үшін осы нүктелерден анықталған $\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_2A_3}$, $\vec{A_3A_4}$ векторларының компланарлығы қажетті әрі жеткілікті. Сондықтан, векторлардың координаттарын анықтап (2.54) формула бойынша олардың компланар болу шартын тексерелік:

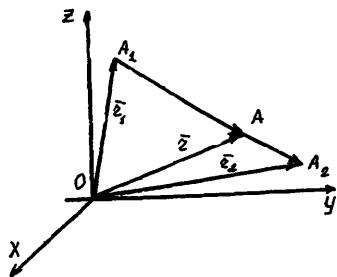
$$\vec{A_1A_2} = \{3; 2; 1\}, \vec{A_2A_3} = \{2; 5; 3\}, \vec{A_3A_4} = \{6; 15; 9\},$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & 15 & 9 \end{vmatrix} = 135 + 36 + 30 - 30 - 36 - 135 = 0$$

Яғни, берілген нүктелер бір жазықтықтың бойында жатыр.

2.16. Кесіндіні берілген қатынасқа бөлу

Бізге $A_1(x_1, y_1, z_1)$ мен $A_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері және $\frac{|A_1A|}{|AA_2|} = \frac{\alpha}{\beta}$ қатынасы берілсін делік. Енді A_1A_2 кесіндіні $\frac{\alpha}{\beta}$ қатынасына бөлінетін A нүктенің координаттарын табулық (65-сурет). Ол үшін белгісіз A нүктенің координаттарын x, y, z әріптерімен, ал $\vec{r}_1, \vec{r}, \vec{r}_2$ әріптерімен сәйкес A_1, A, A_2 нүктелерінің радиус векторларын белгілейік, сонда



65-сурет

$$\vec{r}_1 = \vec{OA}_1 = \{x_1; y_1; z_1\},$$

$$\vec{r} = \vec{OA} = \{x; y; z\},$$

$$\vec{r}_2 = \vec{OA}_2 = \{x_2; y_2; z_2\}.$$

А нүкте A_1A_2 кесіндіде жатқандықтан $\vec{A_1A}$ мен $\vec{AA_2}$ векторлары коллинеар, сондықтан $\beta \cdot \vec{A_1A} = \alpha \cdot \vec{AA_2}$, мұндағы

$$\beta \cdot \vec{A_1A} = \{\beta(x-x_1); \beta(y-y_1); \beta(z-z_1)\},$$

$$\alpha \cdot \vec{AA_2} = \{\alpha(x_2-x_1); \alpha(y_2-y_1); \alpha(z_2-z_1)\}.$$

Тең векторлардың сәйкес координаттары да тең, яғни

$$\beta(x-x_1) = \alpha(x_2-x_1), \beta(y-y_1) = \alpha(y_2-y_1), \beta(z-z_1) = \alpha(z_2-z_1).$$

Осыдан

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x_2 + \beta x_1,$$

$$(\alpha + \beta)y = \alpha y_2 + \beta y_1,$$

$$(\alpha + \beta)z = \alpha z_2 + \beta z_1.$$

Сонымен, берілген A_1A_2 кесіндіні $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{|A_1A|}{|AA_2|}$ қатынасына бөлетін А нүктенің координаттарын мына формуладан анықтаймыз:

$$x = \frac{\beta x_1 + \alpha x_2}{\alpha + \beta}, \quad y = \frac{\beta y_1 + \alpha y_2}{\alpha + \beta}, \quad z = \frac{\beta z_1 + \alpha z_2}{\alpha + \beta}. \quad (2.55)$$

Егер А нүкте A_1A_2 кесіндіні тең екі кесіндіге бөлсе, онда $\alpha = \beta$ болады, сондықтан, берілген кесіндіні тең екі бөлікке бөлетін нүктенің координаттарын мына формуладан анықтаймыз:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (2.56)$$

Мысалдар. 1. Үшбұрыштың $A(2, -3, 4)$, $B(3, -4, 5)$, $C(-1, 2, 2)$ төбелері берілген. Үшбұрыштың А төбесінен өтіп медиана болатын вектордың орт векторын анықта.

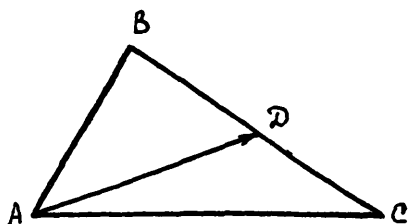
Шешімі. Есептің шарты бойынша А төбесінен өтіп BC қабырғаны D нүктесінде қиып өтетін AD кесінді BC кесіндісін тең екі BD мен CD кесінділеріне бөледі (66-сурет), сондықтан (2.56) формуладан:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1,$$

$$y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = -1,$$

$$z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{5 + 2}{2} = \frac{7}{2}.$$

болады, яғни $D(1, -1, \frac{7}{2})$.



66-сурет

Енді $\vec{AD}$ векторының орт векторын анықтайық:

$$\vec{a} = \vec{AD} = \left\{ -1; 2; -\frac{1}{2} \right\}, |\vec{AD}| = \sqrt{1+4+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \left\{ -\frac{2}{\sqrt{21}}; \frac{4}{\sqrt{21}}; -\frac{1}{\sqrt{21}} \right\}.$$

2. Кеңістікте $A(2, -1, 4)$ мен $B(-1, 3, 2)$ нүктелері берілген. $\vec{AB}$ векторын 3:4 қатынасқа бөлетін C нүктенің координаттарын анықта.

Ш е ш і м і. Алдымен $\vec{AB}$ векторының координаттарын анықтайық:

$$\vec{AB} = \{-3; 4; -2\}.$$

Енді (2.55) формуладан C нүктенің координаттарын табамыз:

$$x_C = \frac{\beta x_A + \alpha x_B}{\alpha + \beta} = \frac{4 \cdot 2 + 3(-1)}{3+4} = \frac{5}{7},$$

$$y_C = \frac{\beta y_A + \alpha y_B}{\alpha + \beta} = \frac{4(-1) + 3 \cdot 3}{3+4} = \frac{5}{7},$$

$$z_C = \frac{\beta z_A + \alpha z_B}{\alpha + \beta} = \frac{4 \cdot 4 + 3 \cdot 2}{3+4} = \frac{22}{7}.$$

Сонымен, $C\left(\frac{5}{7}, \frac{5}{7}, \frac{22}{7}\right)$.

2.17. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі

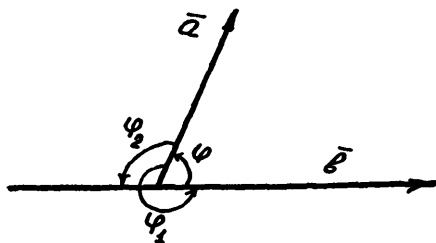
Анықтама. Екі вектордың *скаляр көбейтіндісі* деп осы векторлардың модульдері мен олардың бұрышының косинусының көбейтінділерін айтамыз.

Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі $(\vec{a}, \vec{b})$ түрінде белгіленеді, ал олардың арасындағы бұрышын φ әрпімен белгілесек (67-сурет), онда анықтама бойынша:

$$(a, b) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi. \quad (2.57)$$

Сонымен, екі вектордың скаляр көбейтіндісінің скаляр шама. $\vec{a}$ векторының $\vec{b}$ векторындағы проекциясын қарастырайық (2.9-теорема):

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$



67-сурет

Олай болса, (2.57) формуладан

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = |\vec{a}| \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \operatorname{pr}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Осы сияқты, енді $\vec{a}$ векторының $\vec{b}$ векторындағы проекциясын қарастыратын болсақ, онда

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b}.$$

Сондықтан,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = |\vec{a}| \cdot \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \operatorname{pr}_{\vec{b}} \vec{a}. \quad (2.58)$$

Сонымен, жоғарыдағы анықтаманы былай беруге де болады: екі вектордың скаляр көбейтіндісі бірінші вектордың модулін екінші вектордың бірінші векторға түсірілген проекциясына көбейткенге тең немесе керісінше.

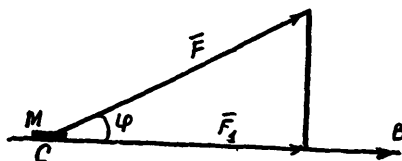
Вектордың скаляр көбейтіндісі физикада, механикада қолданылады. Мысалы, $\vec{F}$ күшінің әсерінен M дене C нүктесінен B нүктесіне CB түзуінің бойымен қозғалсын деп ұйғаралық (68-сурет). M денеге әсер ететін $\vec{F}$ күш пен CB түзуінің арасындағы бұрышты φ әрпімен белгілейік. Сонда ол денені қозғауға жұмсалған A жұмыс физикада былай анықталады:

$$A = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{S}|,$$

мұндағы $\vec{F}_1$ векторы $\vec{F}$ векторының CB өсіндегі геометриялық проекциясы, $|\vec{S}| = |\vec{CB}|$.

Енді (2.57) формуланы пайдаланайық:

$$A = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{S}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos \varphi = (\vec{F}, \vec{S}).$$



68-сурет

Сонымен, денені қозғауға жұмсалған жұмыс F және S векторларының скаляр көбейтіндісі

Берілген a мен b векторларының арасында φ бұрышынан басқа φ_1 бұрышы бар (68-сурет). Бұл бұрыштардың қосындысы 2π -ге тең, сондықтан $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш

ты қарастырғанда φ немесе φ_1 бұрыштарының бірін қарастырған жөн, себебі

$$\cos \varphi = \cos(2\pi - \varphi_1) = \cos \varphi_1.$$

φ -бұрышы векторлардың ішкі, ал φ_2 сыртқы бұрышы деп аталады, мұндағы

$$\cos \varphi = \cos(\pi - \varphi_2) = -\cos \varphi_2, \quad \varphi_2 < \pi, \quad \varphi_1 > \pi.$$

Сонымен, біз алдын ала былай келіселік: екі вектордың арасындағы бұрыш деп π -ден үлкен емес бұрышты айтатын боламыз.

Т е о р е м а (2.17). Нөл емес $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш сүйір (доғал) болу үшін олардың скаляр көбейтіндісі оң (теріс) болуы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ нөл емес векторлар, сондықтан (2.57) формуладан векторлардың скаляр көбейтіндісінің таңбасы $\cos \varphi$ -дің таңбасымен бірдей. Олай болса, келісім бойынша φ бұрышы π -ден үлкен емес, сондықтан $\cos \varphi > 0$ болады, егер φ сүйір бұрыш болса, ал $\cos \varphi < 0$ болады, егер φ — доғал бұрыш болса. Теорема дәлелденді.

2.18. Скаляр көбейтіндінің негізгі қасиеттері

Анықтамa. Егер екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, онда мұндай векторлар *ортогональ* векторлар деп аталады.

1-қасиет. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең, егер:

1. олар өзара перпендикуляр болса;
2. векторлардың бірі нөл вектор болса;

Дәлелдеуі скаляр көбейтіндінің анықтамасынан шығады.

2-қасиет. Егер нөл емес $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары өзара тең болса, онда олардың скаляр көбейтіндісі біреуінің модулінің квадратына тең және ол оң:

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2 > 0.$$

3-қасиет. Векторлардың скаляр көбейтіндісінде ауыстырымдылық заң орындалады.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}).$$

Шынында да

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, (\vec{b}, \vec{a}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos \varphi$$

4-қасиет. Векторлардың скаляр көбейтіндісінде үлестірімділік заң орындалады:

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}).$$

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін (2.58) формуланы және теорема 2.10-ды пайдалансақ жеткілікті, яғни

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) &= |\vec{c}| \operatorname{pr}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| (\operatorname{pr}_{\vec{c}} \vec{a} + \operatorname{pr}_{\vec{c}} \vec{b}) = \\ &= |\vec{c}| \operatorname{pr}_{\vec{c}} \vec{a} + |\vec{c}| \operatorname{pr}_{\vec{c}} \vec{b} = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}). \end{aligned}$$

Дәлелденді.

5-қасиет. Векторлардың скаляр көбейтіндісінде скаляр α санына терімділік заң орындалады: $(\alpha \vec{a}, \vec{b}) = \alpha (\vec{a}, \vec{b})$.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін (2.58) бен (2.37) (2.11-теорема) формулаларын пайдалансақ жеткілікті, яғни

$$(\alpha \vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \operatorname{pr}_{\vec{b}}(\alpha \vec{a}) = \alpha |\vec{b}| \operatorname{pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \alpha (\vec{a}, \vec{b}).$$

Дәлелденді.

Соңғы және 3-қасиеттен мына

$$(\alpha \vec{a}, \beta \vec{b}) = \alpha \beta (\vec{a}, \vec{b})$$

теңдікті оңай дәлелдеуге болады.

6-қасиет. Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ коллинеар векторлар болса, онда

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \pm |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін екі вектордың скаляр көбейтіндісінің анықтамасын пайдаланайық:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бір бағыттас болса, онда жоғарғы формуладан

$$\cos \varphi = \cos 0 = +1,$$

ал бағыттары қарама-қарсы бағыттас болса, онда

$$\cos \varphi = \cos 180^\circ = -1.$$

Дәлелденді.

Ескерту. 6-қасиеттен

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

Бірақ $\sqrt{\vec{a}^2} \neq \vec{a}$, себебі, бұл теңсіздіктің сол жағы скаляр шама, ал оң жағы векторлық шама.

Мысалдар. 1. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш $\frac{\pi}{6}$ және $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$. Олардың $(2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b})$, $(2\vec{a} - 3\vec{b})^2$ скаляр көбейтінділерін анықта.

Шешімі. Алдымен $(\vec{a}, \vec{b})$ скаляр көбейтіндіні анықтайық, ол үшін (2.57) формуланы пайдаланамыз:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = 2 \cdot 5 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 5\sqrt{3}.$$

Енді $(2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b})$ -ны анықтайық, ол үшін скаляр көбейтіндінің қасиеттерін пайдаланамыз:

$$\begin{aligned} (2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}) &= 2|\vec{a}|^2 + 3(\vec{b}, \vec{a}) - 4(\vec{a}, \vec{b}) - 6|\vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 - \\ &- (\vec{a}, \vec{b}) - 6|\vec{b}|^2 = 2 \cdot 4 - 5\sqrt{3} - 6 \cdot 25 = 158 - 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Енді $(2\vec{a} - 3\vec{b})^2$ -ты анықтайық:

$$\begin{aligned} (2\vec{a} - 3\vec{b})^2 &= (2\vec{a} - 3\vec{b}, 2\vec{a} - 3\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 - 12(\vec{a}, \vec{b}) + 9|\vec{b}|^2 = \\ &= 4 \cdot 4 - 60\sqrt{3} + 9 \cdot 125 = 241 - 60\sqrt{3}. \end{aligned}$$

2. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ теңдігін қанағаттандыратын $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары берілген және $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = \frac{1}{2}$, $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$ — скаляр көбейтінділерінің қосындысын анықта.

Шешімі. Алдымен $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ скаляр көбейтіндісін қарастырайық:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= |\vec{a}|^2 + (\vec{b}, \vec{a}) + (\vec{c}, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2 + \\ &+ (\vec{c} + \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}) + |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \\ &+ 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{a}, \vec{c}) + 2(\vec{b}, \vec{c}). \end{aligned}$$

Есептің шарты бойынша $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, сондықтан

$$(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = 0$$

Сонда

$$(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c}) = -\frac{1}{2}(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2) = -\frac{53}{8}$$

2.19. Координаттарымен берілген екі вектордың скаляр көбейтіндісі

Жоғарыда қарастырылған векторлардың скаляр көбейтіндісінің қасиеттерін пайдаланып, олардың координаттарымен берілген скаляр көбейтіндісін қарастыралық.

Бізге координаттарымен екі вектор берілсін делік:

$$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \quad \bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}.$$

Теорема 2.18. Координаттарымен берілген $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі олардың сәйкес координаттарының көбейтінділерінің қосындысына тең:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (2.59)$$

Дәлелдеуі. (2.50) формула бойынша

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k},$$

мұндағы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — бірлік векторлар.

Скаляр көбейтіндінің қасиеттерінен:

$$\begin{aligned} (\bar{a}, \bar{b}) &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = a_x b_x (\bar{i}, \bar{i}) + \\ &+ a_x b_y (\bar{i}, \bar{j}) + a_x b_z (\bar{i}, \bar{k}) + a_y b_x (\bar{j}, \bar{i}) + a_y b_y (\bar{j}, \bar{j}) + \\ &+ a_y b_z (\bar{j}, \bar{k}) + a_z b_x (\bar{k}, \bar{i}) + a_z b_y (\bar{k}, \bar{j}) + a_z b_z (\bar{k}, \bar{k}), \end{aligned}$$

мұндағы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ векторлары — қос-қостан ортогональ векторлар, сондықтан

$$\begin{aligned} (\bar{i}, \bar{i}) &= |\bar{i}|^2 = 1, \quad (\bar{j}, \bar{j}) = |\bar{j}|^2 = 1, \quad (\bar{k}, \bar{k}) = |\bar{k}|^2 = 1, \\ (\bar{i}, \bar{j}) &= 0, \quad (\bar{i}, \bar{k}) = 0, \quad (\bar{j}, \bar{k}) = 0. \end{aligned}$$

Сонымен

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Теорема дәлелденді.

Мысалдар. 1. $A(2, 3, -1)$, $B(1, -2, 0)$ мен $C(0, 3, -2)$ нүктелері берілген. $\vec{AB}$ мен $\vec{AC}$ векторларының координаттарын, $(2\vec{AB} - 3\vec{AC}, \vec{AB} + \vec{AC})$ скаляр көбейтіндісін анықта.

Шешімі. Алдымен $\vec{AB}$ мен $\vec{AC}$ векторларының координаттарын анықтайық:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \{1-2; -2-3; 0+1\} = \{-1; -5; 1\}, \\ \vec{AC} &= \{0-2; 3-3; -2+1\} = \{-2; 0; -1\}, \\ 2\vec{AB} &= \{-2; -10; 2\}, \quad 3\vec{AC} = \{-6; 0; -3\}. \end{aligned}$$

Енді $2\vec{AB}-3\vec{AC}$ мен $\vec{AB}+\vec{AC}$ векторларын анықтайық:

$$2\vec{AB}-3\vec{AC}=\{-2+6; -10-0; 2+3\}=\{4; -10; 5\}.$$

$$\vec{AB}+\vec{AC}=\{-1-2; -5+0; 1-1\}=\{-3; -5; 0\}.$$

Сонда

$$(2\vec{AB}-3\vec{AC}, \vec{AB}+\vec{AC})=4 \cdot (-3)-10(-5)+5 \cdot 0=-12+50=38.$$

2. $\vec{F}=\{-2; 5; 3\}$ күші $A(4, -4, 2)$ нүктедегі денені түзу бойымен $\vec{B}(2, 0, 1)$ нүктеге қозғауға жұмсалған жұмысты анықта.

Ш е ш і м і. Іздестіріп отырған жұмысты мына формуладан анықтаймыз

$$A=(\vec{F}, \vec{S}),$$

мұндағы $\vec{S}=\vec{AB}=\{-2; 4; -1\}$, сонда

$$A=(\vec{F}, \vec{S})=(-2)(-2)+4 \cdot 5+(-1) \cdot 3=21.$$

2.20. Координаттарымен берілген екі вектордың арасындағы бұрыш

Бізге $\vec{a}=\{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x; b_y; b_z\}$ векторлары берілсін делік.

Т е о р е м а (2.19). Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусы мына формуладан анықталады

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (2.60)$$

Д ә л е л д е у і. Дәлелдеу үшін жоғарыдағы 2.19 тақырыпты және вектордың модулін еске түсірсек жеткілікті.

Т е о р е м а 2.20. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары ортогональ болу үшін

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \quad (2.61)$$

теңдігінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті, ал параллель болу үшін олардың сәйкес координаттарының пропорционалдылығы қажетті әрі жеткілікті, яғни

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (2.62)$$

Д ә л е л д е у і. Қажеттілігі. Алдымен (2.61) формуланы дәлелделік. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары ортогональ деп ұйғарып, (2.61) формуланы дәлелделік. Онда 2.19 теоремадан $\cos \varphi = 0$ болады немесе

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Жеткіліктілігі. Енді $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ деп ұйғарып, берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының ортогональдылығын дәлелделік. Онда векторлардың ортогональдығының анықтамасынан, берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары ортогональ немесе олардың бірі нөл вектор болады. Сонымен, (2.61) формула дәлелденді.

(2.62) формуланың дәлелденуін біз 2.14-тақырыпта қарастырғанбыз.

Мысалдар. 1. $\vec{a} = \{-1; -3; 1\}$ мен $\vec{b} = \{2; 3; -2\}$ векторлары арқылы $3\vec{a}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) - 4\vec{b}^2$ өрнекті анықта.

Шешімі.

$$\begin{aligned}\vec{a}^2 &= (\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 = (\sqrt{1+9+1})^2 = 11, \\ (\vec{a}, \vec{b}) &= (-1) \cdot 2 + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = -13, \\ |\vec{b}|^2 &= (\sqrt{4+9+4})^2 = 17.\end{aligned}$$

Сонда

$$3\vec{a}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) - 4\vec{b}^2 = 3 \cdot 11 + 2(-13) - 4 \cdot 17 = -61.$$

2. $\vec{a} = \{2; -1; 4\}$ векторына коллинеар және $(\vec{c}, \vec{a}) = 84$ теңдігін қанағаттандыратын $\vec{c}$ векторын анықта.

Шешімі. Есептің шарты бойынша $\vec{c} = \alpha \vec{a} = \{2\alpha; -\alpha; 4\alpha\}$ және $(\vec{c}, \vec{a}) = 4\alpha + \alpha + 16\alpha = 21\alpha$, мұндағы α белгісіз нақты сан. Сонымен, $21\alpha = 84$, осыдан $\alpha = 4$, сонда $\vec{c} = \{8; -4; 16\}$.

3. $\vec{a} = \{1; 0; 1\}$, $\vec{b} = \{-1; 1; 3\}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын тап.

Шешімі.

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{1+0+1} \cdot \sqrt{1+1+9}} = \frac{2}{\sqrt{22}}.$$

4. Үшбұрыштың $A(1, 2, -1)$, $B(1, -1, -3)$, $C(0, 1, 1)$ төбелері берілген. A бұрышының ішкі және сыртқы бұрыштарын тап (69-сурет).

Шешімі. $\vec{AB} = \{0; -3;$

$-2\}$, $\vec{AC} = \{-1; -1; 2\}$.

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{3-4}{\sqrt{9+4} \cdot \sqrt{1+1+4}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{48}}.\end{aligned}$$

Осыдан

$$\varphi = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{48}} \right) =$$

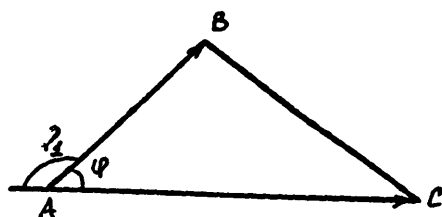
$$= \pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{48}} - \text{ішкі бұрыш.}$$

Сонда

$$\varphi_1 = \pi - \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{48}} \right) = \pi - \pi + \arccos \frac{1}{\sqrt{48}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{48}} -$$

— сыртқы бұрыш

5. M денені $F = \{-1; 3; 4\}$ күші әсерімен $C(1, 2, 1)$ нүктесінен



69-сурет

$B(5, 0, 4)$ нүктесіне $\vec{CB}$ векторының бойымен қозғауға жұмсалған жұмысты анықта (68-сурет).

Ш е ш і м і. 2.17-тақырыптан іздестіріп отырған жұмыс мына формуладан анықталады

$$\begin{aligned} A &= (F, \vec{S}) = (F, \vec{CB}) = |F| \cdot |\vec{CB}| \cos \varphi, \\ \vec{CB} &= \{4; -2; 3\}, \quad |\vec{CB}| = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}, \\ |F| &= \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}, \\ \cos \varphi &= \frac{-4-6+12}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{26}} = \frac{2}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{26}}. \end{aligned}$$

Сонда

$$A = \sqrt{26} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{26}} = 2.$$

6. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының арасындағы $\frac{\pi}{3}$ бұрышты және $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$ векторларының модульдерін анықта.

Шешімі. $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = 3 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 3$,

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= \sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b}, 2\vec{a}-3\vec{b})} = \sqrt{4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 - 12(\vec{a}, \vec{b})} = \\ &= \sqrt{4 \cdot 9 + 9 \cdot 4 - 12 \cdot 3} = 6. \end{aligned}$$

7. Егер $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$ және $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ болса, онда $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$ неге тең?

Ш е ш і м і. $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$ есептің шарты бойынша.

$$\begin{aligned} \text{Осыдан } |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{a}, \vec{c}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) &= 0, \\ 1 + 4 + 9 + 2[(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})] &= 0. \end{aligned}$$

Сонда

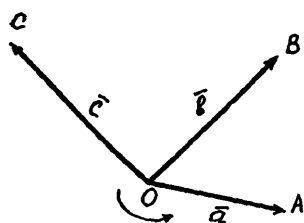
$$(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}) = -7.$$

2.21. Үш вектордың оң және теріс жүйесі

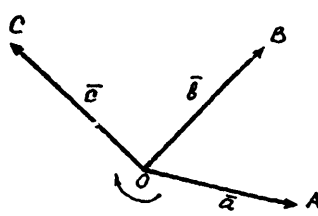
Біз нөл емес және бір жазықтыққа параллель болмайтын үш $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын қарастыралық. $\vec{a}$ векторы бірінші, $\vec{b}$ — екінші, $\vec{c}$ үшінші вектор болсын делік. Осылайша алынған $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар үштік векторлар деп аталады. Мысалы, үштік $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ векторлары, үштік $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларынан басқа үштік векторлар, мұндағы $\vec{b}$ — бірінші, $\vec{c}$ — екінші, $\vec{a}$ — үшінші векторлар, ал екінші үштік $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларындағы $\vec{a}$ — бірінші, $\vec{b}$ — екінші, $\vec{c}$ — үшінші векторлар.

Үштік $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын ортақ бас O нүктесімен үйлестірілдік те, бір жазықтықта жатпайтын $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ векторларын қарастыралық (70-сурет).

А н ы қ т а м а. Егер координат жүйенің бағыты сағат тілінің бағытындай болса, онда үштік $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары *оң жүйе* (70, а-



а) оң жүйе



б) сол жүйе

70-сурет

сурет), ал қарама-қарсы болса, онда олар сол жүйе (70, б-сурет) деп аталынады.

Егер екі үштік векторлар не оң не теріс жүйе құрса, онда оларды бір бағыттас үштік векторлар деп атаймыз, ал олардың бірі оң, екіншісі теріс жүйе құрса, онда оларды қарама-қарсы бағыттас үштік векторлар деп атаймыз. Мысалы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ — оң жүйе, $\vec{OB}$, $\vec{OA}$, $\vec{OC}$ — сол жүйе.

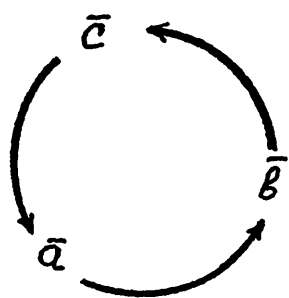
Сонымен, екі үштік:

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — бірінші үштік векторлар,
 $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$ — екінші үштік векторлар

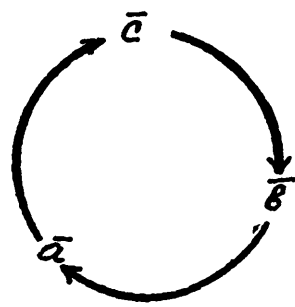
қарама-қарсы бағыттас векторлар.

Егер $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары оң жүйе құраса, онда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ және $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ және $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ — оң жүйе ал $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$ және $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$ теріс жүйе құрайды.

Сонымен үштік векторлар не оң не теріс жүйе құрайтынын анықтау үшін 71-суретті есте сақтаған дұрыс.



оң жүйе

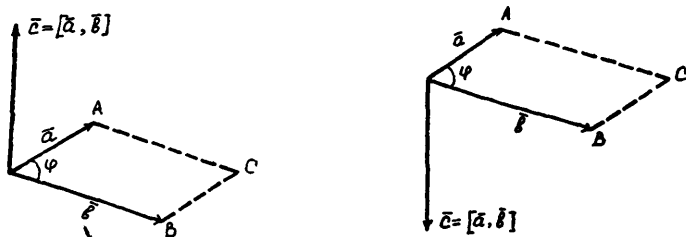


сол жүйе

71-сурет

2.22. Екі вектордың векторлық көбейтіндісі және қасиеттері

А н ы қ т а м а. Екі $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының *векторлық көбейтіндісі* деп төмендегі үш шартпен анықталатын $\vec{c}$ векторын айтамыз (72-сурет):



72-сурет

1. $\vec{c}$ — векторының модулі $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары арқылы анықталған параллелограмм ауданына тең, яғни

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi,$$

мұндағы φ бұрышы $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш;

2. $\vec{c}$ векторы $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары арқылы анықталған параллелограмм жазықтығына перпендикуляр немесе осы вектордың әрқайсысымен ортогональ;

3. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ үштік векторларынан анықталған геометриялық дененің бағыты координат жүйесінің бағытымен бір бағыттас болады.

Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісін былай белгілейміз $[\vec{a}, \vec{b}]$ немесе $(\vec{a} \times \vec{b})$. Сонымен, векторлардың векторлық көбейтіндісі вектор.

Енді векторлық көбейтіндінің негізгі қасиеттерімен танысып өтелік.

1-қасиет. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі нөл вектор, егер:

- 1) олардың бірі нөл вектор болса;
- 2) олар коллинеар болса.

Дәлелдеуі анықтамадан шығады.

2-қасиет. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісінде векторлардың орнын алмастырсак, онда векторлық көбейтіндінің таңбасы қарама-қарсы таңбаға өзгереді, ал модулі өзгермейді, яғни

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}], \quad |[\vec{a}, \vec{b}]| = |[\vec{b}, \vec{a}]|.$$

Дәлелдеуі. Алдымен модулінің өзгермейтіндігін дәлелделік. Шынында да

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})|, \quad |[\vec{b}, \vec{a}]| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot |\sin(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})|,$$

мұндағы

$$|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})| = |\sin(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})|.$$

Сондықтан

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |[\vec{b}, \vec{a}]|.$$

Анықтама бойынша (72-сурет), берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларына анықталған $[\vec{a}, \vec{b}]$ мен $[\vec{b}, \vec{a}]$ векторлары бір жазықтыққа перпендикуляр. Ол жазықтық берілген векторлар арқылы анықталған. Олай болса, үштік $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$ мен $\vec{b}, \vec{a}, [\vec{b}, \vec{a}]$ векторлары сол жүйе құрайды. Сондықтан $[\vec{a}, \vec{b}]$ мен $[\vec{b}, \vec{a}]$ векторлары қарама-қарсы бағыттас, яғни векторлардың векторлық көбейтіндісінде ауыстырымдылық заңы орындалмайды.

3 - қ а с и е т. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісінде скаляр α санына терімділік заңы орындалады, яғни

$$[\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}].$$

Дә л е л д е у і. Егер $\alpha > 0$ болса, онда 2-қасиеттен

$$|[\alpha \vec{a}, \vec{b}]| = \alpha |[\vec{a}, \vec{b}]| = \alpha |[\vec{b}, \vec{a}]|.$$

А л $\alpha [\vec{a}, \vec{b}]$ және $[\alpha \vec{a}, \vec{b}]$ векторларының бағыты бағыттас, себебі $\alpha \vec{a}$ мен $\vec{a}$, $\alpha \vec{b}$ мен $\vec{b}$ векторлары бір бағыттас.

Егер $\alpha < 0$ болса, онда $\alpha \vec{a}$ мен $\vec{a}$, $\alpha \vec{b}$ мен $\vec{b}$ векторларының бағыттары қарама-қарсы бағыттас, ал модульдері тең емес, бірақ

$$|\alpha [\vec{a}, \vec{b}]| = |[\alpha \vec{a}, \vec{b}]| = |[\vec{a}, \alpha \vec{b}]|$$

және де $[\alpha \vec{a}, \vec{b}]$ мен $[\vec{a}, \alpha \vec{b}]$ векторларының бағыттары $[\vec{a}, \vec{b}]$ векторының бағытына қарама-қарсы, яғни бұл тұжырым $[\vec{a}, \vec{b}]$ векторын теріс α санына көбейтумен бірдей.

4 - қ а с и е т. Берілген $\vec{a} + \vec{b}$ мен $\vec{d}$ векторларының векторлық көбейтіндісінде үйлестірімділік заңы орындалады, яғни

$$[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{d}].$$

2.23. Координаттарымен берілген екі вектордың векторлық көбейтіндісі

Бізге $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары координаттарымен берілсін делік, яғни

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}.$$

Т е о р е м а 2.21. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі мына түрде анықталады

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_z & a_y \\ b_z & b_y \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}, \quad (2.63)$$

мұндағы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — бірлік векторлар.

Дә л е л д е у і. Екі бірлік векторлардың векторлық көбейтіндісінің анықтамасынан және оң жүйе бойынша:

$$\begin{aligned} [\vec{i}, \vec{i}] &= [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = 0, \\ [\vec{i}, \vec{j}] &= \vec{k}, [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}, [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}, \\ [\vec{j}, \vec{i}] &= -\vec{k}, [\vec{k}, \vec{j}] = -\vec{i}, [\vec{i}, \vec{k}] = -\vec{j} \end{aligned}$$

болады. Осыдан

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= [a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}] = \\ &= a_x b_x [\vec{i}, \vec{j}] + a_x b_y [\vec{i}, \vec{k}] + a_x b_z [\vec{j}, \vec{i}] + a_y b_x [\vec{j}, \vec{k}] + a_y b_z [\vec{k}, \vec{i}] + \\ &+ a_z b_x [\vec{k}, \vec{j}] + a_z b_y [\vec{k}, \vec{i}] + a_z b_z [\vec{k}, \vec{k}] = \\ &= (a_y b_z - a_z b_x) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}. \end{aligned}$$

Осы формуланы оңай есте сақтау үшін оны үшінші ретті анықтауыш түрінде былай жазуға болады:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Теорема дәлелденді.

Осы теоремадан: егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар болса, онда олардың сәйкес координаттары пропорционал болады, яғни

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

М ы с а л. Берілген $\vec{a} = \{2; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{4; -1; 0\}$ векторларына перпендикуляр болатын $\vec{c}$ векторының орт векторын анықта.

Ш е ш і м і. Алдымен $\vec{c}$ векторын анықтайық:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= 3\vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k} = \{3; 12; 2\}. \end{aligned}$$

Сонда

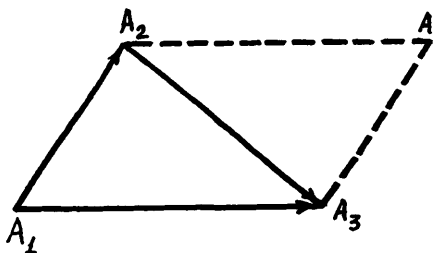
$$\vec{c}^0 = \frac{1}{|\vec{c}|} \cdot \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{9+144+4}} \{3; 12; 2\} = \left\{ \frac{3}{\sqrt{137}}; \frac{12}{\sqrt{137}}; \frac{2}{\sqrt{137}} \right\}.$$

2.24. Параллелограмм және үшбұрыш аудандары

Векторлардың векторлық көбейтіндісі арқылы параллелограмм және үшбұрыш аудандарын табуға болады. Ол үшін кеңістікте координаттарымен берілген әрі бір түзудің бойында

жатпайтын үш нүкте қарастыралық: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

Алдымен $\vec{A_1A_2}$ мен $\vec{A_1A_3}$ векторлары арқылы анықталған $\vec{A_1A_2}$ $\vec{A_1A_3}$ параллелограмм ауданын табалық (73-сурет). Параллелограммның S ауданы векторлық көбейтіндінің анықтамасы бойынша $[\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3}]$ векторының модуліне тең, яғни



73-сурет

$$S = |[\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3}]|,$$

мұндағы

$$\vec{A_1A_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} = \{a_x; a_y; a_z\},$$

$$\vec{A_1A_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\} = \{b_x; b_y; b_z\}.$$

Сонымен, (2.63) формуладан параллелограмм ауданы мына формула бойынша анықталады

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}$$

Ал $A_1A_2A_3$ үшбұрышының ауданы мына формула бойынша анықталады

$$S_A = \frac{1}{2} S.$$

Мысалдар. 1. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторының арасындағы бұрыш $\frac{2\pi}{3}$ және $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$. Векторлардың векторлық көбейтіндісінің модулін анықта.

Шешімі. Векторлық көбейтіндінің анықтамасынан

$$|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = 4 \cdot 7 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 14 \sqrt{3}.$$

2. Берілген $\vec{a} = \{1; 2; -3\}$ мен $\vec{b} = -2\vec{a} + \vec{c}$ векторларының векторлық көбейтіндісін тап, мұндағы $\vec{c} = \{0; -1; 1\}$.

Шешімі. $\vec{b} = \{-2; -4; 6\} + \{0; -1; 1\} = \{-2; -5; 7\}$,

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k},$$

яғни $[\vec{a}, \vec{b}] = \{-1; 1; -1\}$.

3. $\vec{a} = \{2; -2; 0\}$ мен $\vec{b} = \{1; -2; 1\}$ векторлары берілген. $[\vec{a} - 2\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b}]$ векторын анықта.

Ш е ш і м і. $-2\vec{b} = \{-2; 4; -2\}$, $\vec{a} - 2\vec{b} = \{0; 2; -2\}$,

$$3\vec{a} = \{6; -6; 0\}, 3\vec{a} + \vec{b} = \{7; -8; 1\},$$

$$[\vec{a} - 2\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ 7 & -8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= -14\vec{i} - 14\vec{j} - 14\vec{k} = \{-14; -14; -14\}.$$

4. Үшбұрыштың $A_1(3, 2, -1)$, $A_2(-1, 0, 2)$, $A_3(1, 2, 5)$ төбелері берілген. Үшбұрыштың ауданын анықта.

Ш е ш і м і. Алдымен $\vec{A_1A_2}$ мен $\vec{A_1A_3}$ векторларын анықтайық (73-сурет): $\vec{A_1A_2} = \{-4; -2; 3\}$, $\vec{A_1A_3} = \{-2; 0; 6\}$.

Сонда

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{144 + 324 + 16} = 11.$$

5. Берілген $\vec{a} = \{0; -1; 0\}$ мен $\vec{b} = \{3; 3; 1\}$ векторларының арасындағы бұрыштың синусын тап.

Ш е ш і м і.

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi.$$

Осыдан

$$\sin \varphi = \frac{|[\vec{a}, \vec{b}]|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$

мұндағы $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{19}$.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \{-1; 0; 3\}, |[\vec{a}, \vec{b}]| = \sqrt{10}, \sin \varphi = \sqrt{\frac{10}{19}}.$$

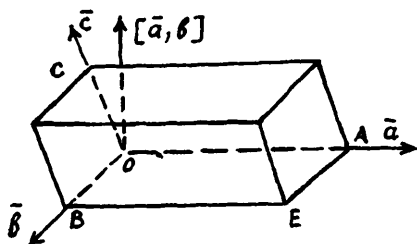
2.25. Үш вектордың аралас көбейтіндісі

А н ы қ т а м а. Компланар емес үш $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісін $\vec{c}$ векторына скаляр көбейтуді айтамыз.

Сонымен, үш вектордың аралас көбейтіндісі скаляр шама және былай белгіленеді: $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c})$.

Осы анықтамадан: компланар үш вектордың аралас көбейтіндісі нөлге тең.

Енді осы векторлардың аралас көбейтіндісінің геомет-



74-сурет

риялық мағынасын қарастыралық. Ол үшін компланар емес $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын ортақ бас O нүктесіне үйлестірілік (74-сурет):

$$\vec{OA} = \vec{a}, \quad \vec{OB} = \vec{b}, \quad \vec{OC} = \vec{c}.$$

Сонда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының көбейтіндісі осы векторлар арқылы анықталған жазықтыққа перпендикуляр болады. Векторлардың скаляр және аралас көбейтіндісінің анықтамасынан

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) = |\vec{a}| \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{c}, \quad (2.64)$$

мұндағы $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{d}$.

Егер үштік $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары теріс жүйе құрса, онда $\vec{c}$ мен $\vec{d}$ векторларының арасындағы φ бұрышы сүйір болады. Сондықтан $\cos \varphi = 0$, ал егер үштік векторлар оң жүйе құрса, онда φ доғал бұрыш болады, яғни $\cos \varphi < 0$.

Енді $\vec{c}$ векторының $\vec{d}$ векторына түсірілген проекциясын қарастыралық

$$\operatorname{pr}_{\vec{d}} \vec{c} = h, \quad (2.65)$$

мұндағы h — параллелепипедтің биіктігі.

Ал $\vec{d}$ векторының модулі $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларынан анықталған $BOAE$ параллелограммның ауданына тең, яғни

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = |[\vec{a}, \vec{b}]| \operatorname{pr}_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c} = \pm V$$

мұндағы V — параллелепипедтің көлемі.

Сонымен, компланар емес үш вектордың аралас көбейтіндісінің модулі осы векторлардан тұрғызылған параллелепипедтің көлеміне тең.

2.26. Координаттарымен берілген үш вектордың аралас көбейтіндісі және қасиеттері

Бізге координаттарымен үш вектор берілсін делік

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}, \quad \vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}.$$

Теорема 2.22. Үш вектордың аралас көбейтіндісі осы векторлардың координаттарынан анықталған үшінші ретті анықтауышқа тең, яғни

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (2.66)$$

Дәлелдеуі. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі (Теорема 2.21) $\vec{d}$ векторына тең

$$\vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\}.$$

Енді $\vec{d}$ векторын $\vec{c}$ векторына скаляр көбейтіп, оған анықтауыштың қасиетін пайдаланайық:

$$(\vec{d}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \\ = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Теорема дәлелденді.

Ескерту. (2.66) формуладағы $\vec{a}$ векторын бірінші, $\vec{b}$ — екінші, $\vec{c}$ — үшінші вектор болсын делік. Сонда бірінші $\vec{a}$ векторының координаттары — үшінші ретті анықтауыштың бірінші жатық жолын, екінші $\vec{b}$ векторының координаттары — екінші жатық жолын, ал үшінші $\vec{c}$ векторының координаттары — үшінші жатық жолын анықтайды.

Енді аралас көбейтіндінің негізгі қасиеттерімен танысып өтелік. Оларды дәлелдеу үшін анықтауыштың қасиеттерін пайдалансақ жеткілікті, сондықтан олардың дәлелдеулерін келтірмейміз.

1 - қ а с и е т. Егер аралас көбейтіндідегі көршілес екі вектордың орнын алмастырсақ, онда аралас көбейтіндінің таңбасы қарама-қарсы таңбаға өзгереді, яғни

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = -(\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c}) = -(\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{b}).$$

2 - қ а с и е т. Егер аралас көбейтіндідегі векторларды толық¹ орын алмастырсақ, онда аралас көбейтіндінің таңбасы өзгермейді, яғни

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a}) = (\vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}).$$

3 - қ а с и е т. Аралас көбейтіндіде үлестірімділік заң орындалады, яғни

$$((\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{d} \cdot \vec{g}) = (\vec{a} \cdot \vec{d} \cdot \vec{g}) + (\vec{b} \cdot \vec{d} \cdot \vec{g}) + (\vec{c} \cdot \vec{d} \cdot \vec{g}).$$

4 - қ а с и е т. Аралас көбейтіндіде скаляр α санына терімділік заң орындалады, яғни

$$(\alpha \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \alpha \vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \alpha \vec{c}) = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}).$$

5 - қ а с и е т. Берілген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары компланар болу үшін олардың аралас көбейтіндісінің нөлге теңдігі қажетті әрі жеткілікті, яғни

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

¹ Аралас көбейтіндідегі бірінші векторды екінші вектор орнына, екінші векторды үшінші вектор орнына, ал үшінші векторды бірінші вектор орнына алмастыруды толық орын алмастыру дейміз.

Қасиеттердің дәлелдеуін жаттығу ретінде оқырманның өзіне ұсынамыз.

Мысалдар. 1. Берілген

$$\vec{a} = \{1; -2; 0\}, \vec{b} = \{1; 3; -1\}, \vec{c} = \{3; -1; -1\}$$

векторлары компланар бола ала ма?

Шешімі. 5-қасиеттен:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 - 1 - 2 = 0,$$

яғни $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары компланар.

2. Мына тепе-теңдікті дәлелде

$$((\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} + \vec{a})) = 2(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}).$$

$$\begin{aligned} \text{Дәлелдеуі. } ((\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} + \vec{a})) &= ([\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}], \vec{c} + \vec{a}) = \\ &= ([\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}], \vec{c} + \vec{a}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) + ([\vec{b}, \vec{b}], \vec{c}) + \\ &+ ([\vec{a}, \vec{c}], \vec{c}) + ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{c}) + ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{a}) + ([\vec{b}, \vec{b}], \vec{a}) + ([\vec{a}, \vec{c}], \vec{a}) + \\ &+ ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) + (\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{c}) + \\ &+ (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a}) = 2(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}), \end{aligned}$$

мұндағы $(\vec{b} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$, $(\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{c}) = 0$, $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a}) = -(\vec{a} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$,

$$(\vec{b} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a}) = 0, (\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a}) = -(\vec{a} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c}) = 0,$$

$$(\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a}) = -(\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}), (\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{c}) = 0.$$

3. $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = 0$ теңдігін қанағаттандыратын $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары компланар бола ала ма?

Шешімі. Берілген теңдіктің екі жағында $\vec{c}$ векторына скаляр көбейтелік:

$$([\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}], \vec{c}) = (0, \vec{c}).$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{c}) + (\vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c}) = 0,$$

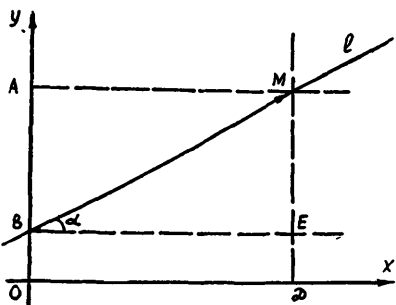
мұндағы $(\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{c}) = 0$, $(\vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c}) = 0$.

Сондықтан $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$, яғни олар компланар векторлар.

ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ТҮЗУ. ЕКІНШІ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫҢ ЫҚШАМДЫ ТЕНДЕУІ

3.1. Түзудің бұрыштық тендеуі

Жазықтықта тік бұрышты XOY декарт координат жүйесінің ордината өсіндегі $B(0, b)$ нүктесінен өтетін l түзуі OX өсімен $\alpha > 0$ бұрыш түзесін деп ұйғарып, осы түзудің тендеуін табалық (75-сурет). Ол үшін берілген l түзуінің бойынан кез келген $M(x, y)$ нүкте алып, $\vec{BM}$ векторының OX және OY өстеріндегі проекцияларын табайық:



75-сурет

$$\text{пр}_{OX} \vec{BM} = |OD| = x,$$

$$\text{пр}_{OY} \vec{BM} = |AB| = \\ = |OA| - |OB| = y - b.$$

Енді BME тік бұрышты үшбұрышын қарастыралық, бұдан

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{ME}|}{|\vec{BM}|}, \quad |\vec{ME}| = |\vec{BM}| \sin \alpha = y - b,$$

$$\text{Сонда } \cos \alpha = \frac{|\vec{BE}|}{|\vec{BM}|}, \quad |\vec{BE}| = |\vec{BM}| \cos \alpha = |OD| = x.$$

$$y - b = |\vec{ME}| = |\vec{BM}| \sin \alpha = |\vec{BM}| \cos \alpha \cdot \text{tg } \alpha = x \text{ tg } \alpha$$

немесе

$$y = kx + b, \tag{3.1}$$

мұндағы $k = \text{tg } \alpha > 0$ бұрыштық коэффициент.

Сонымен, (3.1) тендеуі l түзуінің бойында жатқан кез келген нүктені қанағаттандыра алады. (3.1) тендеуі түзудің бұрыштық коэффициентімен берілген тендеуі немесе, қысқаша, түзудің бұрыштық тендеуі деп аталады.

Егер $\alpha < 0$ болса, онда түзу OX өсімен доғал бұрыш түзейді, яғни $k = \text{tg } \alpha < 0$ болады.

Егер түзу OX өсіне параллель болса, яғни $\alpha = 0$ немесе $\text{tg } \alpha =$

$$= k = 0, \text{ онда бұл жағдайда (3.1) түзуінің тендеуі}$$

$$y = b$$

түрінде болады, яғни түзу ордината өсіндегі $B(0, b)$ нүктесі арқылы өтеді. Егер $b = 0$ болса, яғни түзу координат жүйесінің бас нүктесі арқылы өтеді, онда бұл жағдайда (3.1) түзуінің тендеуі

$$y = kx \tag{3.2}$$

түрінде болады.

Егер түзу OY өсіне параллель болса, яғни $\alpha = \frac{\pi}{2}$ немесе $\operatorname{tg} \alpha = k = \infty$, онда (3.1) түзуінің мағынасы болмайды, ал бұл жағдайда түзудің теңдеуі $x = a$ түрінде болады.

Сонымен, барлық жағдайда да жазықтықтағы түзудің теңдеуі x және y айнымалы шамаларының бірінші дәрежелері арқылы өрнектелінеді.

Мысалдар. 1. $y = 3x - 1$, $y = -x + 5$ түзулерін қанағаттандыратын нүктенің координаттарын анықта.

Шешімі. Берілген түзулерді қанағаттандыратын ортақ нүкте олардың қиылысу нүктесі болады, яғни ол нүкте берілген түзулердің екеуінде бойында жатыр. Олай болса, ол нүктенің координаттарын табу үшін берілген түзулердің теңдеулерін біріктіріп шешсек жеткілікті:

$$\begin{cases} y = 3x - 1, \\ y = -x + 5. \end{cases}$$

Осыдан $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{7}{2}$. Сонымен, $A\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ — нүкте іздестіріп отырған нүктеміз болады, яғни берілген түзулерді қанағаттандыратын нүкте.

2. Берілген $A(0, -5)$ нүктеден өтіп OX өсімен 60° түзейтін түзудің бұрыштық теңдеуін анықта.

Шешімі. Іздестіріп отырған түзудің теңдеуін (3.1) теңдеуі түрінде табуымыз керек, мұндағы $k = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $b = -5$. Сонымен, $y = \sqrt{3}x - 5$ түзуі $A(0, -5)$ нүктеден өтіп OX өсімен 60° түзейтін түзудің теңдеуі.

3. $y = \frac{1}{3}x + 7$ түзуінің бойында жатқан кез келген екі нүктені анықта және $A_1(3, -1)$, $A_2(-1, -1)$, $A_3\left(5, \frac{26}{3}\right)$ нүктелерінің қайсысы берілген түзудің бойында жатыр.

Шешімі. Берілген түзудің бойында жатқан нүктелердің координаттары осы түзудің теңдеуін қанағаттандырады. Сондықтан, оның бойында жатқан кез келген нүктені табу үшін, мысалы $x = 1$ деп y -ті табайық: $y = \frac{1}{3} + 7 = \frac{22}{3}$. Осы сияқты, мысалы $y = -2$ деп x -ті табайық $-2 = \frac{1}{3}x + 7$, $x = -27$.

Сонда, $M_1\left(1, \frac{22}{3}\right)$ мен $M_2(-27, -2)$ нүктелері берілген түзудің бойында жатады. Енді берілген нүктелер түзудің бойында жататынын немесе жатпайтынын тексерейік:

$$A_1: -1 = \frac{1}{3} \cdot 3 + 7, \quad -1 \neq 8, \quad \text{яғни } A_1 \text{ — нүкте жатпайды;}$$

$$A_2: -1 = \frac{1}{3}(-1) + 7, \quad -1 \neq \frac{20}{3}, \quad \text{яғни } A_2 \text{ — нүкте жатпайды;}$$

$$A_3: \frac{26}{3} = \frac{1}{3} \cdot 5 + 7, \quad \frac{26}{3} = \frac{26}{3}, \quad \text{яғни } A_3 \text{ — нүкте жатады.}$$

4. Берілген $M(3, -2)$ нүктеден өтіп ордината өсін 5-ке тең кесіндіде қиятын түзудің теңдеуін анықта.

Ш е ш і м і. Іздестіріп отырған түзудің теңдеуін бұрыштық коэффициент теңдеуі түрінде анықтайық. Онда (3.1) теңдеудегі $b=5$ болады. Енді k — бұрыштық коэффициентін табайық. Іздестіріп отырған түзу берілген M нүктеден өтетін болғандықтан, оның координаттары осы түзудің теңдеуін қанағаттандырады, яғни $-2=k \cdot 3+5$. Осыдан $k=-\frac{7}{3}$. Сонымен,

$$y = -\frac{7}{3}x + 5$$

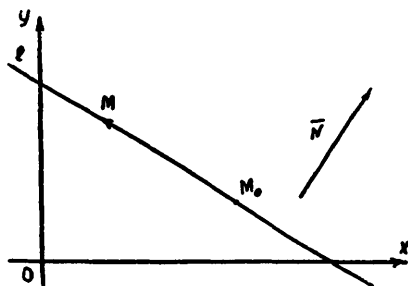
түзуі есептің шартын қанағаттандыратын түзудің теңдеуі.

5. Берілген $y=x-3$ түзуі OX өсімен қандай бұрыш түзейді.

Ш е ш і м і. Түзудің теңдеуі бұрыштық теңдеуі түрінде берілген, мұндағы $k=1$. Сонда $\operatorname{tg} \varphi = 1$. Осыдан $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Сонымен, берілген түзу OX өсімен 45° бұрыш түзейді.

3.2. Бір нүктеден өтіп берілген векторға перпендикуляр түзудің теңдеуі

Жазықтықтағы декарт координат жүйесінде жатқан $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден өтетін кез келген бір l түзуін және осы түзуге перпендикуляр болатын $N = A\vec{i} + B\vec{j} = \{A; B\}$ векторын қарастырайық, мұндағы A мен B бірден екеуі де нөлге тең емес нақты сандар.



76-сурет

Қарастырып отырған N вектор берілген l түзуінің нормаль векторы деп аталады.

Енді берілген $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден өтіп әрі N — нормаль векторына перпендикуляр болатын l түзуін қарастыралық. Ол үшін түзудің бойынан $M_1(x_0, y_0)$ нүктесінен басқа кез келген $M(x, y)$ нүкте алалық (75-сурет). Сонда

жазықтықтағы $\vec{M_0M}$ векторын былай жіктеуге болады:

$$\vec{M_0M} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} = \{x-x_0; y-y_0\}$$

және бұл берілген вектор берілген l түзуінің бойында жатады. Сондықтан, $\vec{M_0M}$ мен N векторлары ортогональ немесе перпендикуляр векторлар, олай болса, онда бұл векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең, яғни

$$(\vec{M_0M}, \vec{N}) = 0, A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0. \quad (3.3)$$

(3.3) теңдеуін бір нүктеден өтіп берілген $\vec{N} = \{A; B\}$ векторына перпендикуляр болатын түзудің теңдеуі деп аталады.

Сонымен, l түзуінің бойында жатқан кез келген нүктенің координаттары (3.3) теңдеуін қанағаттандырады, ал осы түзудің бойында жатпайтын XOY жазықтығындағы нүктелердің координаттары (3.3) теңдеуін қанағаттандыра алмайды.

Мысал. $M(2, -3)$ нүктеден өтіп $\vec{N} = \{1; -2\}$ векторына перпендикуляр түзудің теңдеуін және оның бұрыштық коэффициентін анықта.

Шешімі. Есептің шартындағы $\vec{N}$ вектор іздестіріп отырған түзудің нормаль векторы. Сондықтан, (3.3) формуланы пайдаланамыз, мұндағы $x_0 = 2, y_0 = -3, A = 1, B = -2$. Сонда

$$x - 2 - 2(y + 3) = 0 \text{ немесе } x - 2y - 8 = 0.$$

Сонымен, $y = \frac{1}{2}x - 4$ түзуі M нүктеден өтіп $\vec{N}$ векторына перпендикуляр түзудің теңдеуі және $k = \frac{1}{2}$ оның бұрыштық коэффициенті.

3.3. Түзудің жалпы теңдеуі

Жоғарғы тақырыптарда жазықтықтағы түзудің теңдеуі x пен y айнымалы шамаларының бірінші дәрежесі арқылы анықталады деп атап өттік. Олай болса, кез келген бірінші дәрежелі мына теңдеу

$$Ax + By + C = 0 \quad (3.4)$$

жазықтықтағы түзудің теңдеуі бола ала ма деген сұрақ туады? Сұраққа жауап беру үшін A мен B коэффициенттерінің кем дегенде бірі нөлге тең емес делік, мысалға $A \neq 0$, онда (3.4) теңдеуінен

$$A\left(x + \frac{C}{A}\right) + B(y - 0) = 0$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеу $M\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ нүктесінен өтіп $\vec{N} = \{A; B\}$ векторына перпендикуляр түзейтін түзудің теңдеуін анықтайды. Енді $B \neq 0$ деп ұйғарайық, онда

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$$

болады. Бұл теңдеу түзудің бұрыштық теңдеуі болып табылады, яғни

$$y = kx + b,$$

мұндағы $k = -\frac{A}{B}, b = \frac{C}{B}$.

Сонымен, (3.4) теңдеуі декарт координат жүйесіндегі түзудің теңдеуі болып табылады әрі ол жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі деп аталады, мұндағы A, B, C кез келген сандар. Енді түзудің жалпы теңдеуіндегі коэффициенттердің бірі нөлге тең болған жағдайларды жеке-жеке қарастырып өтелік.

1) Егер $A=0, B \neq 0, C \neq 0$ болса, онда $Bu + C = 0$ теңдеуі OX өсіне параллель түзуді анықтайды және де ол $M(0, -\frac{C}{B})$ нүктесінен өтіп $\vec{N} = \{0; B\}$ нормаль векторына перпендикуляр болады.

2) Егер $B=0, A \neq 0, C \neq 0$ болса, онда $Ax + C = 0$ теңдеуі OY өсіне параллель түзуді анықтайды және де ол $M(-\frac{C}{A}, 0)$ нүктесінен өтіп $\vec{N} = \{A; 0\}$ — нормаль векторына перпендикуляр болады.

3) Егер $C=0, A \neq 0, B \neq 0$ болса, онда $Ax + Bu = 0$ теңдеуі координат жүйесінің бас нүктесінен өтетін түзуді анықтайды.

Енді түзудің жалпы теңдеуіндегі коэффициенттердің екеуі нөлге тең болған жағдайларды қарастыралық.

1) Егер $A=0, C=0, B \neq 0$ болса, онда $Bu = 0$ теңдеуі OX өсімен беттесетін түзуді анықтайды.

2) Егер $B=0, C=0, A \neq 0$ болса, онда $Ax = 0$ теңдеуі OY өсімен беттесетін түзуді анықтайды.

Мысалдар. 1. Төмендегі түзулердің жазықтықтағы орналасуын анықтандар:

а) $3x - 5 = 0$; б) $2y + 7x = 0$;

в) $2y - 4 = 0$; г) $2x = 0$;

д) $7y = 0$.

Шешімдері: а) $3x - 5 = 0$ түзуінде y айнымалы шама жоқ. Сондықтан, ол OY өсіне параллель және OX өсін $M(\frac{5}{2}, 0)$ нүктеде қияды;

б) $2y + 7x = 0$ түзуінде бос мүше жоқ және $O(0, 0)$ нүктенің координаттары берілген теңдеуді қанағаттандырады. Сондықтан, берілген түзу координат жүйесінің бас нүктесінен өтеді;

в) $2y - 4 = 0$ түзуінде x — айнымалы шама жоқ. Сондықтан, ол OX өсіне параллель және OY өсін $M(2, 0)$ нүктеде қияды;

г) $2x = 0$ теңдеуінде y — айнымалы шама және бос мүше жоқ. Сондықтан, ол OY өсінің бойында жатады, яғни OY өсімен беттеседі;

д) $7y = 0$ түзуі — OX өсінің теңдеуі.

2. Берілген $2x - 5y - 4 = 0$ түзуінің бұрыштық коэффициентін және нормаль векторын анықта.

Шешімі. Берілген теңдеуді (3.1) теңдеуіне келтіруіміз керек, ол үшін теңдеуден y -ті табалық:

$$y = \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}.$$

Сонда, $k = \frac{2}{5}$ түзудің бұрыштық коэффициенті, ал $\vec{N} = \{2; -5\} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ түзудің нормаль векторы болады.

3. OY өсін $A(0, 4)$ нүктесінде қиып, ал OX өсімен $\frac{\pi}{3}$ бұрыш жасайтын түзудің теңдеуін анықта.

Ш е ш і м і. Іздестіріп отырған теңдеу түзудің бұрыштық теңдеуі болып табылады, яғни $y = kx + b$, мұндағы $b = 4$, $k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, сондықтан $y = \sqrt{3}x + 4$ болады.

4. $M(1, -7)$ нүктеден өтіп $\vec{a} = \{-2; 3\}$ векторына перпендикуляр болатын түзудің жалпы және бұрыштық теңдеуін анықта.

Ш е ш і м і. (3.3) теңдеуіндегі $A = -2$, $B = 3$, $x_0 = 1$, $y_0 = -7$. Сонда $-2(x - 1) + 3(y + 7) = 0$ болады. Сонымен, $2x - 3y - 23 = 0$ түзудің жалпы теңдеуі, ал $y = \frac{2}{3}x - \frac{23}{3}$ түзудің бұрыштық теңдеуі болып табылады, мұндағы $k = \frac{2}{3}$ — бұрыштық коэффициент.

3.4. Түзудің канонды және параметр теңдеулері

Бізге жазықтықтағы декарт координат жүйесінде кез келген l түзуі берілсін делік.

А н ы қ т а м а. Берілген түзуге параллель (немесе беттесетін) вектор түзудің *бағыттауыш векторы* деп аталады.

Берілген l түзуінің теңдеуін осы түздегі $M_0(x_0, y_0)$ нүкте және түзудің бағыттауыш векторы арқылы анықтауға болады. Ол үшін l түзуінің бойынан кез келген $M(x, y)$ нүкте алалық (77-сурет). Сонда

$$\vec{M_0M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} \text{ және } \vec{S} = m\vec{i} + n\vec{j}$$

векторлары коллинеар, мұндағы $\vec{S}$ — вектор берілген l түзуінің бағыттауыш векторы. Сондықтан, векторлардың сәйкес координаттары пропорционал, яғни

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad (3.5)$$

$$\left| \begin{matrix} x - x_0 & y - y_0 \\ m & n \end{matrix} \right| = 0.$$

(3.5) теңдеуі l түзуінің бойында жатқан кез келген нүктені қанағаттандырады. Сондықтан, (3.5) теңдеуі түзудің канонды теңдеуі деп аталады. Егер $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден өтетін l түзуі OX өсіне параллель болса, онда түзудің бағыттауыш векторы $\vec{S} = \{m; 0\}$ болады, ал OY өсіне параллель болса, онда бағыттауыш векторы $\vec{S} = \{0; n\}$ болады, сондықтан

$$\left(\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{0}\right) \text{ немесе } y-y_0=0, \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n}\right) \text{ немесе } x-x_0=0. \quad (3.7)$$

Сонымен, (3.6) мен (3.7) тендеулерін түзудің канонды тендеулері деп те айтуға болады.

Енді (3.5) тендеуіндегі қатнасты t әрпімен белгілейік, яғни

$$\frac{x-x_0}{m} = t, \quad \frac{y-y_0}{n} = t.$$

Осыдан x -пен y -ті табайық:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \quad (3.8)$$

мұндағы t параметр.

(3.8) теңдігін түзудің параметр тендеуі деп атайды.

Енді түзудің параметр тендеуін векторлық түрде жазып көрсетелік. Ол үшін M мен M_0 нүктелерінің радиус-векторын $\vec{r}$ мен $\vec{r}_0$ әріптерімен белгілейік, яғни $\vec{OM} = \vec{r}$, $\vec{OM}_0 = \vec{r}_0$ (77-сурет). Онда $\vec{M_0M}$ мен $\vec{S}$ векторларының коллинеарлығынан

$$\vec{M_0M} = t \cdot \vec{S}$$

теңдігін аламыз, мұндағы $\vec{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$. Сондықтан

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S}. \quad (3.9)$$

Соңғы векторлық тендеу түзудің параметр тендеуінің вектор түріндегі тендеуі деп аталады.

М ы с а л. $M_0(2, -3)$ нүктесінен өтіп бағыттауыш векторы $\vec{S} = \{4; 5\}$ болатын түзудің канонды және параметр тендеуінің вектор түріндегі тендеулерін тап.

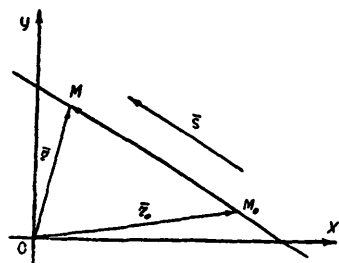
Ш е ш і м і. (3.5) тендеуіндегі $x_0=2$, $y_0=-3$, $m=4$, $n=5$, сондықтан $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{5}$ тендеуі іздестіріп отырған түзудің канонды тендеуі болады. Енді параметрлік тендеуін табу үшін теңдіктің екі жағында t -ға теңестірейік:

$$\frac{x-2}{4} = t, \quad \frac{y+3}{5} = t.$$

Осыдан, түзудің параметрлік тендеуін аламыз:

$$\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -3 + 5t. \end{cases}$$

Енді (3.9) формуладағы $\vec{r} = \{x; y\}$ айнымалы $M(x, y)$ нүктенің,



77-сурет

ал $\vec{r}_0 = \{2; -3\}$ берілген $M_0(2, -3)$ нүктенің радиус-векторлары, сондықтан

$$\{x; y\} = \{2; -3\} + t\{4; 5\}$$

немесе

$$x\vec{i} + y\vec{j} = (2+4t)\vec{i} + (-3+5t)\vec{j}$$

тендеуі түзудің параметр тендеуінің вектор түріндегі тендеуі болып табылады.

3.5. Түзудің кесінді тендеуі

Түзудің кесінді тендеуін оның жалпы тендеуінен алу жолын қарастырып өтелік. Сонымен, бізге түзудің жалпы тендеуі берілсін

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.10)$$

мұндағы A, B, C нөлге тең емес сандар, Осы тендеудің екі жағын да $-C$ санға бөлелік, сонда

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1.$$

Осыдан

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (3.11)$$

тендеуін аламыз, мұндағы $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

(3.11) тендеуі түзудің кесінді тендеуі деп аталады.

Мысал. $2x - 3y + 5 = 0$, $4x = 3$ тендеулерінің кесінді тендеулерін тап.

Шешімі. Бірінші тендеуден $2x - 3y = -5$. Енді тендеудің екі жағын да -5 -ке бөліп, бірінші тендеудің кесінді тендеуін табамыз:

$$\frac{2x-3y}{-5} = 1, \quad \frac{2x}{-5} - \frac{3y}{-5} = 1, \quad \frac{x}{-\frac{5}{2}} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1.$$

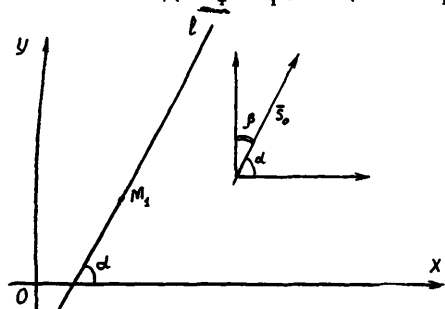
Сонымен, соңғы тендеу бірінші түзудің кесінді тендеуі болады.

Екінші тендеудің екі жағын да 3 -ке бөліп, осы түзудің кесінді тендеуін табамыз:

$$\frac{x}{\frac{3}{4}} = 1.$$

3.6. Бір нүктеден өтіп бұрыштық коэффициентпен берілген түзудің теңдеуі

Бізге $ХОУ$ жазықтығында кез келген l түзуі берілсін. Осы түзу $ОХ$ өсімен α бұрыш түзесін және берілген $M_1(x_1, y_1)$ нүктесінен өтсін деп ұйғаралық та l түзуінің теңдеуін табалық. Берілген l түзуінің бағыттауыш векторы ретінде бірлік $\vec{S}^0 = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j}$ векторын алайық (78-сурет). Сонда $\vec{S}$ бірлік векторы да $ОХ$ өсімен α бұрышын түзеді.



78-сурет

Сондықтан

$$\cos \beta = \cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Сонымен

$$\vec{S}^0 = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j} = \{\cos \alpha; \sin \alpha\},$$

яғни $m = \cos \alpha$, $n = \sin \alpha$.

Осыдан және түзудің канонды теңдеуінен

$$\frac{x-x_0}{\cos \alpha} = \frac{y-y_0}{\sin \alpha}$$

теңдеуін аламыз. Енді теңдіктің екі жағында $\sin \alpha$ -ге көбейтелік

$$y - y_1 = k(x - x_1), \quad (3.12)$$

мұндағы $k = \operatorname{tg} \alpha$ — бұрыштық коэффициент.

(3.12) теңдеу бір нүктеден өтіп бұрыштық коэффициентпен берілген түзудің теңдеуі деп аталады немесе белгілі бір бағытпен берілген нүктеден өтетін түзудің теңдеуі деп те аталады.

Мысалдар. 1. $A(-2, 0)$ нүктеден өтіп $ОХ$ өсімен түзейтін бұрышы $4\sqrt{3}x + 4y + 1 = 0$ түзуінің осы өспен түзейтін бұрышынан екі есе кем түзудің теңдеуін анықта.

Шешімі. Алдымен $4\sqrt{3}x + 4y + 1 = 0$ түзуінің $ОХ$ өсімен түзейтін бұрышын табайық:

$$y = -\sqrt{3}x - \frac{1}{4}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}, \quad \alpha = -60^\circ.$$

Сонда, түзудің $ОХ$ өсімен сағат тілімен бағыттас бағыттағы түзейтін бұрышы 120° -қа тең. Олай болса, іздестіріп отырған түзу $ОХ$ өсімен 60° түзеді. Енді (3.12) формуладан іздестіріп отырған түзудің теңдеуін табамыз:

$$k = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \quad y - 0 = \sqrt{3}(x + 2), \quad y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}.$$

2. Берілген $A(3, -1)$ нүктеден өтіп $ОХ$ өсімен 60° түзейтін түзудің теңдеуін тап.

Шешімі. Іздестіріп отырған түзудің бұрыштық коэффици-

енгі $k = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ болады. Осыдан және (3.12) теңдеуден есептің шартын қанағаттандыратын түзудің теңдеуін табамыз:

$$y+1=\sqrt{3}(x-3), \quad \sqrt{3}x-y-(1+3\sqrt{3})=0.$$

3. Берілген $A_1(1, -1)$ мен $A_2(2, 3)$ нүктелерінен өтетін түзудің теңдеуін анықта.

Шешімі. Есептің шартын қанағаттандыратын түзудің теңдеуін табу үшін, алдымен A_1 нүктеден өтетін түзудің теңдеуін анықтайық. Ол үшін (3.12) теңдеуін пайдаланамыз:

$$y+1=k(x-1).$$

Есептің шарты бойынша бұл теңдеу A_2 нүктеден өту керек. Сондықтан, A_2 нүктенің координаттары осы түзудің теңдеуін қанағаттандырады:

$$3+1=k(2-1), \quad k=4.$$

Сонымен, $y+1=4(x-1)$ түзуі іздестіріп отырған түзудің теңдеуі болып табылады.

3.7. Екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуі

Бізге жазықтықта жатқан $M_1(x_1, y_1)$ мен $M_2(x_2, y_2)$ нүктелері берілсін делік те осы нүктелерден өтетін түзудің теңдеуін табалық. Ол үшін берілген нүктелерден өтетін түзудің бағыттауыш векторы ретінде $\vec{M_1M_2}=\vec{S}$ векторын алайық. Сонда

$$\vec{S}=\vec{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}=m\vec{i}+n\vec{j}.$$

болады, мұндағы $x_2-x_1=m$, $y_2-y_1=n$.

Осыдан және (3.5) теңдеуінен мына теңдеуді аламыз:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \quad (3.13)$$

(3.13) теңдеуі берілген екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуі деп аталады.

(3.13) теңдеуін екінші ретті анықтауыш ретінде жазуға да болады. Ол үшін (3.13) теңдеуінен мына

$$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$$

теңдікті аламыз, осыдан

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0$$

Берілген $M_1(x_1, y_1)$ мен $M_2(x_2, y_2)$ нүктелерінің координаттары соңғы теңдікті қанағаттандырады. Сондықтан, соңғы немесе (3.13) теңдеуі берілген екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуін анықтайды.

Енді берілген $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ нүктелері бір

түзудің бойында жату үшін қандай белгінің орындалатынын қарастырайық. Ол үшін M_1 мен M_2 нүктелерінен өтетін түзудің теңдеуін пайдаланамыз:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Егер берілген үшінші M_3 нүкте M_1 мен M_2 нүктелерінен өтетін жоғарыдағы түзудің бойында жатса, онда M_3 нүктенің координаттары жоғарыдағы теңдеуді қанағаттандырады, яғни мына тепе-теңдік орындалады:

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}.$$

Сонымен, берілген үш нүкте бір түзудің бойында жату үшін жоғарыдағы тепе-теңдіктің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Мысалдар. 1. Үшбұрыштың $A(1, -2)$, $B(2, -3)$, $C(4, 1)$ төбелері берілген. Оның қабырғаларының теңдеуін тап.

Шешімі. Алдымен A мен B нүктелерінен өтетін түзудің теңдеуін анықтаймыз. Ол үшін (3.13) формуланы пайдаланамыз:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y+2}{-3+2}, \quad -x+1=y+2, \quad x+y+1=0.$$

Осы сияқты:

$$AC: \frac{x-1}{4-1} = \frac{y+2}{1+2}, \quad x-1=y+2, \quad x-y-3=0,$$

$$BC: \frac{x-2}{4-2} = \frac{y+3}{1+3}, \quad 2x-4=y+3, \quad 2x-y-7=0.$$

2. Берілген $A(2, 3)$, $B(5, 3)$ нүктелерінен өтетін түзудің теңдеуін анықта.

Шешімі. Ол үшін (3.13) — формуланы пайдаланамыз:

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-3}{3-3}, \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{0}.$$

Осыдан, $y-3=0$ — түзуі іздестіріп отырған түзудің теңдеуі.

3.8. Екі түзу арасындағы бұрыш

Бізге бір жазықтықта жатқан қиылысатын әрі перпендикуляр емес l_1 мен l_2 түзулері бұрыштық коэффициент теңдеулерімен берілсін делік:

$$l_1: y=k_1x+b_1,$$

$$l_2: y=k_2x+b_2.$$

Осы түзулердің арасындағы бұрышты φ әрпімен, ал олардың Ox өсімен түзейтін бұрыштарын α_1 мен α_2 әріптерімен белгілейік (79-сурет). Сонда

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

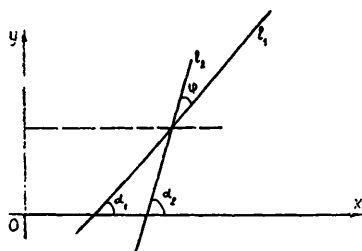
болады. Онда

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2},$$

мұндағы $\operatorname{tg} \alpha_1$ берілген l_1 ал $\operatorname{tg} \alpha_2$ берілген l_2 түзудің бұрыштық коэффициенттері, яғни $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$.

Сонда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \quad (3.14)$$



79-сурет

Сонымен l_1 мен l_2 түзулерінің арасындағы φ бұрышының тангенсі (3.14) формула бойынша анықталады.

Егер l_1 мен l_2 түзулері параллель немесе бірімен-бірі беттессе, онда $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$, яғни $k_1 = k_2$. Немесе, керісінше, егер $k_1 = k_2$ болса, онда $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$.

Сонымен, екі түзу параллель болу үшін олардың бұрыштық коэффициенттерінің теңдігі қажетті әрі жеткілікті, яғни

$$k_1 = k_2. \quad (3.15)$$

Егер l_1 мен l_2 түзулері перпендикуляр болса, онда (3.14) формуланың мағынасы жоқ, сондықтан олардың арасындағы φ бұрышының котангенсін қарастырамыз

$$\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1}.$$

Егер, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ болса, онда $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$, сондықтан $\frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0$. Осыдан $k_1 \cdot k_2 = -1$. Керісінше, егер $k_1 \cdot k_2 = -1$ болса, онда $\varphi = \frac{\pi}{2}$ болады.

Сонымен, берілген екі түзу перпендикуляр болу үшін олардың бұрыштық коэффициенттерінің көбейтіндісі минус бірге тең болуы қажетті әрі жеткілікті, яғни

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ немесе } k_1 = -\frac{1}{k_2}. \quad (3.16)$$

Егер l_1 мен l_2 түзулерінің теңдеуі жалпы түрде берілсе, яғни

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{онда } k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}.$$

Сондықтан, (3.14) формуланы мына түрде жазуға болады

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Сонымен, түзулердің параллельдік белгісін мына түрде

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \quad (3.17)$$

ал перпендикулярлық белгісі мына түрде болады

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0 \text{ немесе } \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = -1. \quad (3.18)$$

Егер $A_1 A_2 + B_1 B_2 > 0$ болса, онда φ — бұрышы сүйір, ал $A_1 A_2 + B_1 B_2 < 0$ болса, онда φ бұрышы доғал болады.

Мысалдар. 1. $2x - 3y + 5 = 0$ түзуімен $A(2, -3)$ нүкте берілген. Нүктеден түзуге параллель және перпендикуляр жүргізілген түзулердің теңдеулерін анықта.

Шешімі. Берілген түзудің бұрыштық коэффициентін анықтайық:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, \quad k_1 = \frac{2}{3}.$$

Енді берілген түзуге A нүктеден жүргізілген параллель түзудің теңдеуін анықтайық. A нүктеден берілген түзуге параллель жүргізілген түзудің k_2 бұрыштық коэффициенті $\frac{2}{3}$ -ге тең, яғни $k_1 = k_2 = \frac{2}{3}$. (3.12) формуланы пайдаланып берілген нүктеден берілген түзуге жүргізілген параллель түзудің теңдеуін анықтаймыз:

$$y + 3 = -\frac{2}{3}(x - 2), \quad 2x - 3y - 13 = 0.$$

Енді A нүктеден берілген түзуге перпендикуляр болатын түзудің теңдеуін анықтайық. Іздестіріп отырған түзудің k_3 бұрыштық коэффициенті мен берілген түзудің $k_1 = \frac{2}{3}$ бұрыштық коэффициенттері арасындағы байланысты қарастырайық, яғни (3.16) формуланы:

$$k_3 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{3}{2}.$$

Сонда, (3.12) формуладан перпендикуляр түзудің теңдеуін анықтаймыз:

$$y + 3 = -\frac{3}{2}(x - 2), \quad 3x + 2y = 0.$$

Ескерту: A нүктеден $2x - 3y + 5 = 0$ түзуіне жүргізілген параллель түзудің теңдеуін табу үшін $2x - 3y + C = 0$ теңдеуіндегі C коэффициентін анықтасақ жеткілікті Себебі, олардың сәйкес коэффициенттері пропорционал (3.17) формула. A нүктенің координаттарын $2x - 3y + C = 0$ теңдеуіне қойып, C -ны табамыз: $C = -13$.

2. Берілген $A(1, 3)$ нүктеден өтіп $2x - 3y + 5 = 0$ түзуімен 60° түзейтін түзудің теңдеуін анықта.

Шешімі. Іздестіріп отырған түзудің бұрыштық коэффициенті k_1 болсын, онда берілген түзудің бұрыштық коэффициенті

$k_2 = \frac{2}{3}$ болады. Енді осы екі түзудің арасындағы бұрыштың тангенісін (3.14) формуладан анықтаймыз:

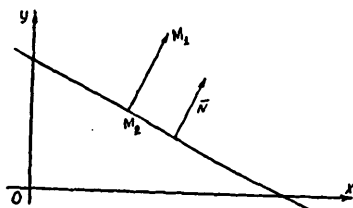
$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{2}{3} - k_1}{1 + \frac{2}{3} k_2}, \quad k_1 = \frac{2 - 3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3}.$$

Сонымен, іздестіріп отырған түзудің теңдеуін (3.12) формуладан анықтаймыз:

$$y - 3 = \frac{2 - 3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3}(x - 1).$$

3.9. Нүктеден түзуге дейінгі ара қашықтық

Бізге декарт координат жүйесіндегі $Ax + By + C = 0$ түзуі мен осы түзуден тысқары жатқан $M_1(x_1, y_1)$ нүкте берілсін делік. Берілген M_1 нүктеден түзуге дейінгі ара қашықтықты d әрпімен белгілеп, осы ара қашықтықты табайық (80-сурет). Іздестіріп отырған ара қашықтық берілген M_1 нүктеден түзуге түсірілген перпендикулярдың модуліне тең, яғни



80-сурет

$$d = |\vec{M_2M_1}|,$$

мұндағы $\vec{M_2M_1} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$, ал $\vec{N} = \{A; B\}$ — нормаль вектор.

Енді $\vec{M_2M_1}$ векторы мен $\vec{N}$ — нормаль векторларының скаляр көбейтіндісін қарастырайық:

$$(\vec{N}, \vec{M_2M_1}) = |\vec{N}| \cdot |\vec{M_2M_1}| \cdot \cos \varphi,$$

мұндағы φ — $\vec{N}$ мен $\vec{M_2M_1}$ векторларының арасындағы бұрыш. Бұл векторлар коллинеар, сондықтан олардың арасындағы бұрыш π -ге немесе нөлге тең, олай болса,

$$(\vec{N}, \vec{M_2M_1}) = \pm |\vec{N}| \cdot d \quad (3.19)$$

және

$$(\vec{N}, \vec{M_2M_1}) = A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = Ax_1 + By_1 - (Ax_2 + By_2).$$

$M_2(x_2, y_2)$ нүкте берілген түзудің бойында жатыр, сондықтан оның координаттары түзудің теңдеуін қанағаттандырады:

$$Ax_2 + By_2 = -C.$$

Олай болса,

$$(\bar{N}, \vec{M_2M_1}) = Ax_1 + By_1 + C. \quad (3.20)$$

Енді (3.19) және (3.20) формулаларынан мына формуланы аламыз

$$\pm |\bar{N}| \cdot d = Ax_1 + By_1 + C.$$

Осыдан

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \quad (3.21)$$

Сонымен, берілген нүктеден берілген түзуге дейінгі ара қашықтық (3.21) формуладан анықталынады.

Бізге бір жазықтықта жатқан қиылысатын екі түзу жалпы теңдеуімен берілсін делік:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Осы түзулерден бірдей қашықтықта орналасқан нүктелердің геометриялық орны түзу болады. Бұл түзу берілген түзулердің биссектриса түзуі немесе биссектрисасы деп аталады. Енді биссектриса түзуінің теңдеуін (3.21) формуланы пайдаланып оңай табуға болады және ол мына түрде болады:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (3.22)$$

Мысалдар. 1. $A(3, -2)$ нүктеден $3x + 5y + 8 = 0$ түзуіне дейінгі ара қашықтықты тап.

Шешімі. Берілген түзуден нүктеге дейінгі ара қашықтықты табу үшін (3.21) формуланы пайдаланамыз:

$$d = \frac{|9 - 10 + 8|}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{7}{\sqrt{34}}.$$

2. Берілген $3x + 4y - 7 = 0$ мен $2x - \sqrt{5}y - 1 = 0$ түзулерінің биссектриса теңдеулерін анықта.

Шешімі. Ол үшін (3.22) формуланы пайдаланамыз:

$$\frac{3x + 4y - 7}{\sqrt{9 + 16}} = \pm \frac{2x - \sqrt{5}y - 1}{\sqrt{4 + 5}}$$

немесе

$$3(3x + 4y - 7) = \pm 5(2x - \sqrt{5}y - 1).$$

Осыдан берілген түзулердің биссектриса теңдеулерін табамыз:

$$9x + 12y - 21 = \pm (10x - 5\sqrt{5}y - 5)$$

немесе

$$9x + 12y - 21 = 10x - 5\sqrt{5}y - 5,$$

$$9x + 12y - 21 = -10x + 5\sqrt{5}y + 5,$$

Сонда, $x - (12 + 5\sqrt{5})y + 16 = 0$ және $19x + (12 - 5\sqrt{5})y - 26 = 0$

түзулері берілген түзулердің биссектриса тендеулері болып табылады.

3. Параллель $2x - 3y - 5 = 0$, $2x - 3y + 4 = 0$ түзулерінің ара қашықтығын тап.

Шешімі. Параллель түзулердің ара қашықтығын табу үшін олардың бірінде жатқан нүктенің координаттарын тауып, сол нүктеден екінші түзуге дейінгі ара қашықтықты (3.21) формуладан тапсақ жеткілікті. Сондықтан, $2x - 3y - 5 = 0$ түзуінің бойынан кез келген нүкте алайық, мысалы, $x = 0$, $y = -\frac{5}{3}$. Енді осы нүктеден, яғни $M(0, -\frac{5}{3})$ нүктеден $2x - 3y + 4 = 0$ түзуге дейінгі ара қашықтықты (3.21) формуладан анықтаймыз:

$$d = \frac{|2 \cdot 0 + 5 + 4|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{9}{\sqrt{13}}.$$

3.10. Екі түзудің орналасуы

Бізге екі түзу жалпы тендеуімен берілсін:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Теорема 3.1. Берілген екі түзу: 1) қиылысу үшін мына шарттың

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad (3.24)$$

орындалуы қажетті әрі жеткілікті;

2) параллель болу үшін мына шарттың

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \quad (3.25)$$

орындалуы қажетті әрі жеткілікті;

3) беттесу үшін мына шарттың

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (3.26)$$

орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. 1) Қажеттілігі. Берілген екі түзу қиылысады деп ұйғарып, (3.24) теңсіздікті дәлелделік. Ұйғаруымыз бойынша, олардың ортақ тек бір ғана нүктесі бар, ал ол нүктенің координаттары мына жүйенің

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases} \quad (3.27)$$

шешімі болып табылады. Сондықтан, бұл жүйенің тек бір ғана шешімі бар, егер

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ немесе } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

Жеткіліктілігі. Енді (3.24) теңсіздігі орындалсын деп ұйғарып, олардың қиылысатынын дәлелделік. (3.24) теңсіздігінің орындалуы (3.27) жүйенің тек бір ғана шешімі бар екендігін анықтайды. Ол нүктенің координаттары осы түзулердің теңдеуін қалағаттандырады, яғни ол нүкте екеуіне де ортақ. Сондықтан, бұл түзулер осы нүктеде ғана қиылысады. Бірінші тұжырым дәлелденді.

2) Қажеттілігі. Берілген екі түзу параллель болсын деп ұйғарып (3.25) теңсіздікті дәлелделік. Түзулер параллель болғандықтан, (3.27) жүйенің шексіз көп шешімі бар, олай болса, Крамер теоремасынан (3.25) теңсіздігін аламыз.

Жеткіліктілігі. Енді (3.25) теңсіздігі орындалсын деп ұйғарып, олардың параллель екендігін дәлелделік. Крамер теоремасы бойынша (3.27) жүйесінің шексіз көп шешімі бар, олай болса түзулер параллель. Екінші тұжырым дәлелденді.

Теореманың үшінші тұжырымын жаттығу ретінде оқырманның өзіне ұсынамыз.

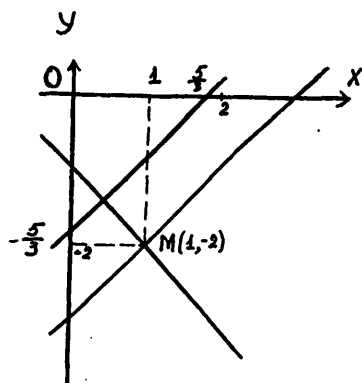
Мысалдар. 1. Берілген $M(-1, 3)$ нүктеден өтіп OY өсімен 45° бұрыш жасайтын түзудің кесінді теңдеуін тап.

Шешімі. (3.12) теңдеуіндегі $x_1 = -1$, $y_1 = 3$, $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Сонда $y - 3 = x + 1$ немесе $x - y = -4$. Осыдан түзудің кесінді теңдеуін табамыз

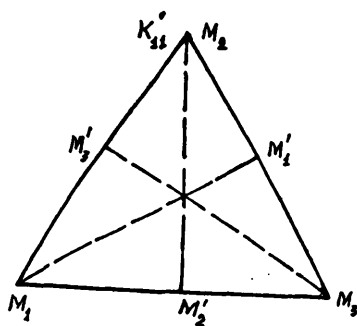
$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{4} = 1.$$

2. Берілген $M(1, -2)$ нүктеден өтіп $3x - 3y - 5 = 0$ түзуіне параллель және перпендикуляр түзулердің теңдеулерін тап.

Шешімі. Алдымен параллель түзудің теңдеуін табайық (81-сурет), ол үшін $3x - 3y - 5 = 0$ теңдеуінен $y = x - \frac{5}{3}$ теңдеуін аламыз, мұндағы $k = 1$. (3.12) теңдеуіндегі $x_1 = 1$, $y_2 = -2$, $k_1 = 1$, сондықтан $y + 2 = x - 1$ немесе $x - y - 3 = 0$ берілген $M(1, -2)$ нүктеден өтіп, $3x - 3y - 5 = 0$ түзуіне параллель болатын түзудің теңдеуі болады.



81-сурет



82-сурет

Енді $M(1, -2)$ нүктеден өтіп, $3x - 3y - 5 = 0$ түзуіне перпендикуляр болатын түзудің теңдеуін табайық. Ізестіріп отырған түзу берілген $3x - 3y - 5 = 0$ түзуіне перпендикуляр болғандықтан, түзулердің перпендикулярлық белгісін пайдаланайық

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -1.$$

Олай болса, $x + y + 1 = 0$ түзуі ізестіріп отырған перпендикуляр түзудің теңдеуі болады.

3. $M_1(2, -1)$, $M_2(1, 0)$, $M_3(3, 1)$ — үшбұрыштың төбелері. Үшбұрыш биіктіктерінің теңдеулерін және $K(1, 1)$ нүктеден биіктіктерге дейінгі ара қашықтықты тап (82-сурет).

Ш е ш і м і. Алдымен үшбұрыштың қабырғаларының теңдеулерін (3.13) формуладан табайық:

$$M_1M_2: \frac{x-2}{1-2} = \frac{y+1}{1}, \quad y = -x + 1, \quad k = -1;$$

$$M_1M_3: \frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{1+1}, \quad y = 2x - 5, \quad k = 2;$$

$$M_1M_3: \frac{x-1}{3-1} = \frac{y}{1}, \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad k_3 = \frac{1}{2}.$$

M_1M_1' түзуі M_2M_3 -ке, M_2M_2' түзуі M_1M_3 -ке, M_3M_3' түзуі M_1M_2 -ге перпендикуляр болғандықтан, түзулердің перпендикулярлық белгісі бойынша

$$k'_1 = -\frac{1}{k_1} = 1, \quad k'_2 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{2}, \quad k'_3 = -\frac{1}{k_3} = -2,$$

мұндағы k'_1 , k'_2 , k'_3 — сәйкес M_1M_1' , M_2M_2' , M_3M_3' түзулерінің бұрыштық коэффициенттері.

Енді үшбұрыш биіктіктерінің теңдеулерін табу үшін (3.12) формуланы пайдаланамыз:

$$M_1M_1': y - y_{M_1} = k'_1(x - x_{M_1}), \quad x - y - 3 = 0;$$

$$M_2M_2': y - y_{M_2} = k'_2(x - x_{M_2}), \quad x + 2y - 1 = 0;$$

$$M_3M_3': y - y_{M_3} = k'_3(x - x_{M_3}), \quad 2x + y - 7 = 0.$$

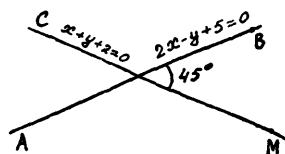
Енді $K(1, 1)$ нүктеден биіктіктерге дейінгі ара қашықтығын (3.21) формуладан анықтаймыз, сонда K нүктеден M_1M_1' түзуіне дейінгі ара қашықтық

$$d = \frac{(1-1+3)}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

болады. Осы сияқты

$$d_2 = \frac{2}{\sqrt{\frac{5}{5}}}, \quad d_3 = \frac{4}{\sqrt{\frac{5}{5}}}.$$

4. $M(1, 3)$ нүктеден өтіп $2x - y + 5 = 0$ түзуімен 45° бұрыш жасайтын түзудің теңдеуін анықта (83-сурет).



83-сурет

Шешімі. Біз CM түзуінің теңдеуін табуымыз керек, ал AB түзуінің теңдеуі бізге берілген. AB түзуінің бұрыштық коэффициентті 2-ге тең: $k_{AB}=2$.

Енді AB мен CM түзулерінің арасындағы бұрыштың тангенісін (3.14) формуладан табайық:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_{AB} - k_{CM}}{1 + k_{AB} \cdot k_{CM}} \quad \text{немесе} \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{2 - k_{CM}}{1 + 2k_{CM}},$$

мұндағы k_{CM} — CM түзуінің бұрыштық коэффициенті. Осыдан $1 + 2k_{CM} = 2 - k_{CM}$. (3.12) теңдеуінен $y - y_M = k_{CM}(x - x_M)$ теңдеуін аламыз, мұндағы $x_M = 1$, $y_M = -3$, $k_{CM} = -\frac{1}{3}$. Сонда $y + 3 = -\frac{1}{3}(x - 1)$ немесе $x - 3y - 10 = 0$ — CM — түзуінің теңдеуі.

3.11. Түзулер шоғы

Параллель емес екі түзу жалпы теңдеуімен берілсін делік:

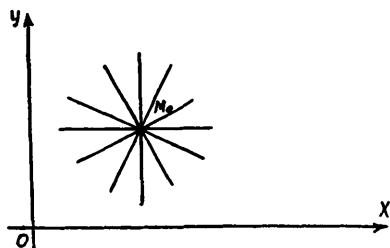
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 & (3.28) \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 & (3.29) \end{cases}$$

Алдымен түзулердің қиылысу нүктесін табалық. Ол нүкте осы түзулердің екеуінің де бойында жатады. Сондықтан оның координаттары екі түзудің теңдеуін де қанағаттандырады, олай болса (3.28) бен (3.29) теңдеулерін екі белгісізі бар теңдеулер жүйесі ретінде қарастырып шешсек жеткілікті:

$$x = \frac{C_2B_1 - C_1B_2}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Сонымен, табылған x -пен y -тің мәні түзулердің қиылысу нүктесінің координаттары болып табылады және ол тек біреу ғана.

Енді декарт координат жазықтығынан кез келген $M_0(x_0, y_0)$ нүкте алайық. M_0 нүктеден өтетін шексіз көп түзу жүргізуге болады, бұл түзулер жиынын түзулер шоғы, ал $M_0(x_0, y_0)$ — нүкте түзулер шоғының центрі деп аталады (84-сурет). $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінен өтетін түзулер шоғының теңдеуін табалық. Ол үшін (3.28) бен (3.29) параллель емес түзулері берілсін делік те, мына түзуді қарастыралық:



84-сурет

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (3.30)$$

мұндағы α мен β — кез келген нақты сандар. Бұл теңдеу x пен y айнымалы шамаларының бірінші дәрежелері арқылы өрнектел-

ген, сондықтан ол жазықтықтағы түзудің теңдеуі болады. Енді кез келген α мен β сандары үшін (3.30) түзуі $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінен өтетіндігін көрсетелік. $M_0(x_0, y_0)$ нүктенің координаттары (3.28) бен (3.29) теңдеулерін қанағаттандырады, яғни

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Олай болса, $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің координаттары (3.30) теңдеуін де қанағаттандырады, яғни

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0.$$

Сонымен, кез келген α мен β сандары үшін (3.30) теңдеуі центрі $M_0(x_0, y_0)$ — нүкте болатын түзулер шоғының теңдеуін анықтайды.

Енді, осы түзулер шоғындығы белгілі бір түзуді анықтау үшін сол түзуге тиісті α мен β сандарын табу керектігін көрсетелік. Іздестіріп отырған түзуіміз $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінен басқа берілген $M_1(x_1, y_1)$ нүктесінен өтсін деп ұйғаралық. Олай болса,

$$\alpha(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \beta(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0$$

болады.

Соңғы теңдеудегі жақша ішіндегі өрнектердің кем дегенде бірі нөлге тең емес, себебі, егер екеуі де нөлге тең болса, онда M_0 мен M_1 нүктелері беттескен болар еді. Сондықтан, $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 \neq 0$ деп ұйғаралық. Онда α санының нөлге тең емес кез келген мәнінде, ал

$$\beta = -\frac{\alpha(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1)}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}$$

мәнінде (3.30) теңдеуі іздестіріп отырған түзудің теңдеуі болып табылады.

Сонымен, (3.30) теңдеуі түзулер шоғының теңдеуі деп те аталады және оны былай жазуға да болады

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

мұндағы $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha \neq 0$.

Мысал. Берілген $2x - 3y - 1 = 0$, $x + 2y + 2 = 0$ түзулерінің қиылысу нүктесінен және $M(1, -1)$ нүктеден өтетін түзудің теңдеуін тап.

Шешімі. Ол үшін түзулер шоғының теңдеуін пайдаланайық:

$$(2x - 3y - 1) + \lambda(x + 2y + 2) = 0$$

Түзулер шоғы берілген түзулердің қиылысу нүктесінен өтеді. Сондықтан, түзулер шоғынан $M(1, -1)$ нүктеден өтетін түзуді алсақ бізге жеткілікті. Ол түзу M нүктеден өтетін болғандықтан, оның координаттары түзулер шоғының теңдеуін қанағаттандырады. Олай болса, M нүктесінің координаттарын түзулер

шоғының тендеуіне қойып, белгісіз λ коэффициентін анықтаймыз:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1 + \lambda(1 - 2 + 2) = 0, \lambda = -4.$$

Сонда

$2x - 3y - 1 - 4(x + 2y + 2) = 0$ немесе $2x + 11y + 9 = 0$
түзуі есептің шартын қанағаттандыратын түзудің тендеуі.

3.12. Жазықтықтағы үш түзудің орналасуы

Бізге үш түзу жалпы тендеуімен берілсін

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

А н ы қ т а м а. Егер $M_0(x_0, y_0)$ нүкте бір жазықтықта жатқан түзулер жиының центрі болса, онда бұл түзулер жиыны меншікті түзулер шоғы деп аталады. Бір жазықтықта жатқан параллель түзулер жиыны меншіксіз түзулер шоғы деп аталады.

Т е о р е м а (3.2). Берілген үш түзу меншікті (меншіксіз) түзулер шоғы болу үшін мына шарттың

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.32)$$

орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Д ә л е л д е у і. Қажеттілік. Берілген үш түзу меншікті түзулер шоғы болсын деп ұйғарып (3.32) шарттың орындалуын дәлелдедік. Анықтық үшін үш түзу бір нүктеде қиылыссын деп ұйғаралық. Онда қиылысу нүкте үш түзудің де тендеуін қанағаттандырады әрі ол түзулердің үшеуіне де тиісті. Сондықтан, үшінші ретті (3.32) анықтауыштың сәйкес тік жолдарының элементтері пропорционал, олай болса анықтауыштың қасиеттерінен $\Delta = 0$ болады.

Ж е т к і л і к т і л і к. Енді (3.32) теңдік орындалсын деп ұйғарып, түзулер меншікті түзулер шоғы болатындығын дәлелдедік. Дәлелдеу үшін, берілген үш түзу меншікті түзулер шоғы болмасын деп қарсы жорық, яғни олардың арасында өзара қиылысатын түзулер бар. Анықтық үшін бірінші $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ мен екінші $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ түзулер қиылыссын деп ұйғаралық. Енді

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

жүйені шешіп, олардың қиылысу нүктесінің координаттарын Крамер әдісімен табамыз:

$$x_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta_3}, \quad y_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta_3},$$

мұндағы

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Қиылысу нүктелерінің координаттарын үшінші түзудің теңдеуіне апарып қоялық, онда

$$A_3 \frac{\Delta_1}{\Delta_3} + B_3 \frac{\Delta_2}{\Delta_3} + C_3 = 0 \quad \text{немесе} \quad A_3 \Delta_1 + B_3 \Delta_2 + C_3 \Delta_3 = 0.$$

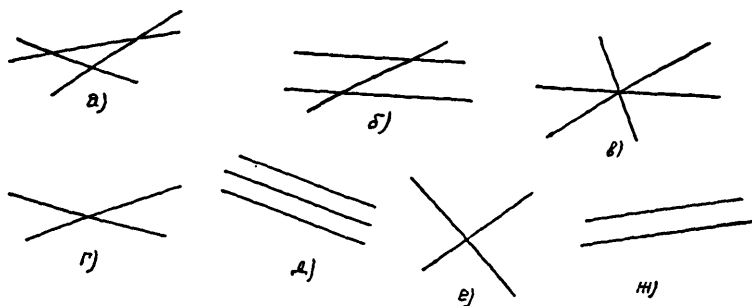
Енді Δ анықтауышты үшінші жатық жолы бойынша жіктелік, сонда

$$\Delta = A_3 \Delta_1 + B_3 \Delta_2 + C_3 \Delta_3 = 0.$$

Сонымен, бірінші мен екінші түзулердің қиылысу нүктесі үшінші түзуге де тиісті. Олай болса, берілген үш түзу меншікті түзулер шоғы болады. Осы қайшылық теореманы дәлелдейді.

Осы және (3.11) тақырылтан мынадай қорытындыға келеміз:

1. Егер $\Delta \neq 0, \Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0$ болса, онда берілген үш түзулер қос-қостан қиылысады және де меншікті және меншіксіз түзулер шоғының бірі де бола алмайды (85, а-сурет);



85-сурет

2. Егер $\Delta \neq 0, \Delta_i$ — анықтауыштарының тек біреуі ғана нөлге тең болса, онда екі түзу параллель, ал үшінші түзу оларды қиып өтеді (85, б-сурет), $i = 1, 3$.

3. Егер $\Delta = 0, \Delta_i \neq 0$ болса, онда олар бір нүктеде қиылысады (85, в-сурет), $i = 1, 3$.

4. Егер $\Delta = 0, \Delta_i$ — анықтауыштарының тек біреуі ғана нөлге тең болса, онда екі түзу беттеседі, ал үшінші түзу оларды қиып өтеді (85, г-сурет), $i = 1, 3$.

5. Егер $\Delta_i = 0$, ал екі-екіден қосарланған барлық түзулердің коэффициенттері пропорционал болмаса, онда олар қос-қостан параллель болады (85, д-сурет), $i = 1, 3$.

6. Егер $\Delta_1=0$, ал ескіден қосарланған тек екі түзудің ғана коэффициенттері пропорционал болса, онда екі түзу беттеседі, ал үшінші түзу оларға параллель болады (85, ж-сурет), $i=1,3$.

7. Егер барлық түзулердің сәйкес коэффициенттері пропорционал болса, онда олар беттеседі (85, ж-сурет).

3.13. Жазықтықтағы түзудің нормаль теңдеулері

Бізге поляр координат жүйесінде L түзуі берілсін және O — полюстен өтетін осы түзудің нормаль $\vec{n}$ векторы OQ — поляр өсімен α бұрыш түзесін делік (86-сурет). Берілген L түзуінің бойынан кез келген $M(x, y)$ нүкте алайық және $\vec{OM}$ векторы OQ — поляр өсімен φ бұрышын түзесін. Сонда

$$\text{пр}_{\vec{n}} \vec{OM} = |\vec{OD}| = P, \quad \text{пр}_L \vec{OM} = |\vec{OM}| \cos(\varphi - \alpha) = \rho \cos(\varphi - \alpha),$$

мұндағы $\rho = |\vec{OM}|$ — радиус вектор.

Осыдан

$$\rho \cos(\varphi - \alpha) = P \quad \text{немесе} \quad \rho \cos \varphi \cos \alpha + \rho \sin \varphi \sin \alpha - P = 0 \quad (3.33)$$

(3.33) теңдеуі L түзуінің поляр координат жүйесіндегі теңдеуі болып табылады.

Енді берілген L түзуін тік бұрышты XOY координат жүйеде қарастыралық (86-сурет). Ол үшін тік бұрышты декарт пен поляр координат жүйесінің арасындағы байланысты қарастырайық:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Осыдан және (3.33) теңдеуінен

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - P = 0 \quad (3.34)$$

теңдігін аламыз.

Сонымен, (3.34) теңдеу L түзуінің жазықтықтағы нормаль теңдеуі деп аталады.

Бізге түзудің жалпы теңдеуі берілсін

$$Ax + By + C = 0. \quad (3.35)$$

Осы теңдеуді нормаль теңдеуге келтірелік. Ол үшін (3.35) теңдеуді белгісіз $\mu \neq 0$ санына көбейтелік:

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0. \quad (3.36)$$

Енді (3.34) пен (3.36) теңдеулерді салыстыралық, сонда (3.36) теңдеу түзудің нормаль теңдеуі бола алады, егер $\mu A = \cos \alpha$, $\mu C = -P$, $\mu B = \sin \alpha$ болса. Сонда $(\mu A)^2 + (\mu B)^2 = 1$. Себебі

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \quad \text{Осыдан} \quad \mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$

Сонымен, түзудің жалпы тендеуін нормаль тендеуге келтіру үшін түзудің жалпы тендеуін μ нақты санына көбейту керек, яғни

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2+B^2}} = 0, \quad (3.37)$$

мұндағы μ нақты саны нормаль көбейткіш деп аталады және оның таңбасын C коэффициентінің таңбасына қарама-қарсы етіп аламыз. Себебі (3.34) пен (3.36) формулаларынан $\mu C = -P < 0$. Егер $C=0$ болса, онда нормаль көбейткіштің таңбасы үшін кез келген таңбаны алуға болады.

Енді (3.34) пен (3.37) теңдеулерін қарастыралық, сонда

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2+B^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2+B^2}}, \quad P = \frac{-C}{\pm \sqrt{A^2+B^2}},$$

мұндағы $\cos \alpha$ мен $\cos \beta$ нормаль $\vec{n} = \{A; B\}$ векторының бағыттауыш косинустары деп аталады, ал P координат жүйесінің бас нүктесінен L түзуге дейінгі ара қашықтық.

Егер түзу нормаль теңдеумен берілсе, онда $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден осы түзуге дейінгі ара қашықтық мына формуладан анықталады

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - P|.$$

Мысалдар. 1. Түзудің жалпы тендеуін $2x - 3y + 7 = 0$ нормаль теңдеуіне келтір.

Шешімі. Алдымен нормаль көбейткішті анықтайық:

$$\mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{4+9}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Енді түзудің жалпы тендеуін μ санына көбейтіп, түзудің нормаль теңдеуін аламыз:

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{7}{\sqrt{13}} = 0.$$

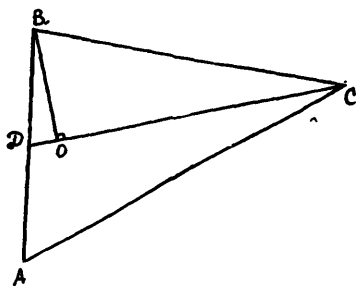
2. $A(-10, -13)$, $B(-2, 3)$, $C(2, 1)$ — үшбұрыштың төбелері. Үшбұрыштың C төбесінен қарама-қарсы қабырғаға медина жүргізілген. C төбеден мединаға дейінгі ара қашықтықты анықта (87-сурет).

Шешімі. DC — медина, $BO \perp DC$. D нүктенің координаттарын анықтайық:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = -6,$$

$$y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = -5.$$

Енді D мен C нүктелерінен өтетін түзудің теңдеуін анықтайық. (3.13) формула бойынша



87-сурет

$$\frac{x-x_D}{x_C-x_D} = \frac{y-y_D}{y_C-y_D}.$$

мұндағы $x_C=2$, $y_C=1$. Сонымен CD түзуінің теңдеуі $3x-4y-2=0$ болады. Іздестіріп отырған ара қашықтықты табу үшін (3.21) формуланы пайдалансақ жеткілікті

$$d=|BO| = \frac{|-6-12-2|}{\sqrt{9+16}} = 4.$$

3. Берілген $x+2y-11=0$ мен $2x-y-2=0$ түзулерінің қиылысу нүктелерінен өтіп, координат жүйесінің бас нүктесінен ара қашықтығы 5-ке тең түзудің теңдеуін анықта.

Шешімі. Іздестіріп отырған түзудің теңдеуін табу үшін түзулер шоғының теңдеуін пайдаланып мына теңдеуді аламыз:

$$x+2y-11+\lambda(2x-y-2)=0.$$

Осыдан

$$(1+2\lambda)x + (2-\lambda)y - 11 - 2\lambda = 0.$$

Енді осы теңдеудің нормаль көбейткішін табайық:

$$\mu = \frac{1}{\pm \sqrt{(1+2\lambda)^2 + (2-\lambda)^2}}.$$

Теңдеуді нормаль көбейткішке көбейтейік

$$\frac{1+2\lambda}{\sqrt{(1+2\lambda)^2 + (2-\lambda)^2}}x + \frac{2-\lambda}{\sqrt{(1+2\lambda)^2 + (2-\lambda)^2}}y - \frac{11+2\lambda}{\sqrt{(1+2\lambda)^2 + (2-\lambda)^2}} = 0.$$

Мұндағы бос мүше іздестіріп отырған түзуден координат жүйесінің бас нүктесіне дейінгі ара қашықтыққа тең. Олай болса,

$$\frac{11+2\lambda}{\sqrt{(1+2\lambda)^2 + (2-\lambda)^2}} = 5.$$

Осы иррационал теңдеудің шешімін табайық:

$$(11+2\lambda)^2 = 25(1+4\lambda+4\lambda^2+4-4\lambda+\lambda^2), \quad 121+44\lambda+4\lambda^2 = 125\lambda^2 + 125, \quad 121\lambda^2 - 44\lambda + 4 = 0, \quad \lambda = \frac{2}{11}.$$

Сонда

$$\left(1 + \frac{4}{11}\right)x + \left(2 - \frac{2}{11}\right)y - 11 - \frac{4}{11} = 0 \text{ немесе } 3x + 4y - 25 = 0$$

теңдеуі іздестіріп отырған түзудің теңдеуі болады.

3.14. Шеңбердің ықшамды теңдеуі

Өткен тақырыптарда тік бұрышты декарт координат жүйесіндегі түзулердің әр түрлі теңдеулерімен танысып өттік. Енді жазықтықтағы екінші ретті (қисық) сызықтардың қарапайым

түрлеріне тоқталып өтелік. Жазықтықтағы екінші ретті сызықтар жалпы түрде мына теңдеумен анықталады:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (3.38)$$

мұндағы A, B, C, D, E, F — коэффициенттер және де A, B, C коэффициенттері бір мезгілде нөлге тең емес.

Жазықтықтағы түзу сызықтар айнымалы шама x пен y -тің бірінші дәрежелері арқылы өрнектелетіндігін көрдік, ал екінші ретті сызықтар осы айнымалы шамалардың екінші және бірінші дәрежелері арқылы өрнектеледі. Екінші дәрежелі сызықтардың ықшамды (қарапайым) түрлеріне шеңбер, эллипс, гипербола және параболалар жатады. Біз шеңбердің ықшамды теңдеуіне тоқталып өтелік. Ол үшін (3.38) теңдеудегі $A=C \neq 0, B=0$ деп ұйғаралық, сонда

$$Ax^2 + 2Dx + Ay^2 + 2Ey + F = 0. \quad (3.39)$$

Соңғы теңдіктің екі жағында A -ға бөліп, бірінші мен екінші және үшінші мен төртінші мүшелерді толық квадратқа келтіре-лік:

$$x^2 + 2 \frac{D}{A} x + \frac{D^2}{A^2} + y^2 + 2 \frac{E}{A} y + \frac{E^2}{A^2} + \frac{F}{A} - \frac{D^2}{A^2} - \frac{E^2}{A^2} = 0$$

немесе

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2}{A^2} + \frac{E^2}{A^2} - \frac{F}{A}.$$

Осыдан

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (3.40)$$

мұндағы

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{E}{A}, \quad R^2 = \frac{D^2}{A^2} + \frac{E^2}{A^2} - \frac{F}{A}.$$

Егер $\frac{D^2}{A^2} + \frac{E^2}{A^2} - \frac{F}{A} > 0$ болса, онда (3.39) немесе (3.40) теңдеуі центрі $M(a, b)$ нүктесі, ал радиусы $R = \sqrt{\frac{D^2}{A^2} + \frac{E^2}{A^2} - \frac{F}{A}}$ болатын шеңбердің ықшамды теңдеуі деп аталады.

Егер $\frac{D^2}{A^2} + \frac{E^2}{A^2} - \frac{F}{A} = 0$ болса, онда (3.40) теңдіктен

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0 \quad (3.41)$$

Осыдан $x = -\frac{D}{A}$, $y = -\frac{E}{A}$, яғни (3.41) теңдікті қанағаттандыратын тек бір ғана нүкте, ол $M\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{A}\right)$ нүктесі. Сонымен, бұл жағдайда шеңбер $M\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{A}\right)$ нүктеге айналады дейміз, яғни (3.41) теңдеуі тек бір ғана нүктені анықтайды.

Егер $\frac{D^2}{A^2} + \frac{E^2}{A^2} - \frac{F}{A} < 0$ болса, онда (3.40) теңдеуінің оң жа-

ғындағы өрнек теріс, ал сол жағындағы өрнек оң. Олай болуы мүмкін емес. Сондықтан, бұл жағдайда (3.40) теңдеуі ешқандай сызықты анықтай алмайды.

Мысалдар. 1. $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 5 = 0$ шеңберінің центрін, радиусын анықта.

Шешімі. Алдымен, берілген теңдеуді (3.40) теңдеуіне түрлендірейік:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + y^2 + 4y + 5 &= x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + y^2 + 2 \cdot 2y + 4 - 4 + 5 = \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 - \frac{9}{4} - 4 + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 - \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Сонда

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{5}{4}$$

теңдеуі центрі $O_1 \left(\frac{3}{2}, -2\right)$, радиусы $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ болатын шеңбердің теңдеуі болып табылады.

2. Берілген $x^2 - 2x + y^2 - y - 3 = 0$ шеңбермен $y = 2x$ түзуінің қиылысу нүктелерін анықта.

Шешімі. Ол үшін шеңбер мен түзудің теңдеулерін біріктіріп төмендегі жүйені шешейік. Осы жүйенің шешімі олардың қиылысу нүктесі болады. Себебі, ол нүктенің координаттары шеңбердің де және түзудің де теңдеуін қанағаттандырады:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - y - 3 = 0, \\ y = 2x, \end{cases}$$

осыдан $x^2 - 2x + 4x^2 - 2x - 3 = 0$, $5x^2 - 4x - 3 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 60}}{10} = \frac{4 \pm \sqrt{76}}{10}, \quad x_1 = \frac{4 + \sqrt{76}}{10}, \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{76}}{10},$$

$$y_1 = \frac{4 + \sqrt{76}}{5}, \quad y_2 = \frac{4 - \sqrt{76}}{5}.$$

Сонымен, $A_1 \left(\frac{4 + \sqrt{76}}{10}, \frac{4 + \sqrt{76}}{5} \right)$, $A_2 \left(\frac{4 - \sqrt{76}}{10}, \frac{4 - \sqrt{76}}{5} \right)$

нүктелері іздестіріп отырған қиылысу нүктелері.

3. Берілген $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 2)$ нүктелерінен өтетін шеңбердің теңдеуін анықта.

Шешімі. Есептің шарты бойынша берілген нүктелер $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ шеңберінің бойында жатыр. Сондықтан, нүктелердің координаттары шеңбердің теңдеуін қанағаттандырады. Осы үш нүктенің координаттарын шеңбердің теңдеуіне қойып, a , b , R белгісіздері бар үш теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} (1 - a)^2 + b^2 = R^2, \\ (1 - a)^2 + (1 - b)^2 = R^2, \\ a^2 + (2 - b)^2 = R^2 \end{cases}$$

Бірінші теңдеуді екіншіге және үшіншіге теңестіріп a, b — белгісіздері бар жүйе аламыз:

$$\begin{cases} 1-2b=0, \\ 4b-2a=3. \end{cases}$$

Осыдан, $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$. Енді a мен b -ның мәндерін бастапқы жүйенің біріне қойып R^2 -ты табамыз: $R^2 = \frac{5}{2}$.

Сонымен, $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2}$ теңдеуі іздестіріп отырған шеңбердің теңдеуі болады.

3.15. Эллипстің ықшамды және поляр теңдеулері

Анықтама. Координат өстерінің бірінде берілген фокустар деп аталатын екі нүктеден ара қашықтықтарының қосындысы әрқашанда тұрақты шама болатын нүктелердің геометриялық орындарын *эллипс* дейміз (88-сурет).

Бізге жазықтықтағы XOY тік бұрышты декарт координат жүйесінде кез келген $M(x, y)$ нүкте берілсін. Абсцисса өсінен фокустар деп аталатын $F_1(-c, 0)$ мен $F_2(c, 0)$ нүктелерін алайық және $2a$ деп анықтамадағы тұрақты шаманы белгілейік, сонда

$$F_1F_2 = 2c, \quad 2a > 2c.$$

MF_1 мен MF_2 кесінділері M нүктенің фокальдық радиусы деп аталады. Эллипстің анықтамасы бойынша

$$MF_1 + MF_2 = 2a,$$

мұндағы

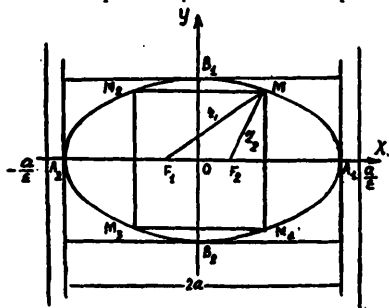
$$\begin{aligned} MF_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \\ MF_2 &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Осыдан

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (3.42)$$

Бұл теңдік іздестіріп отырған нүктелердің геометриялық орындары, яғни эллипстің теңдеуі болып табылады. Бірақ (3.42) эллипстің теңдеуін қолдану ыңғайсыз, сондықтан оны біз әрі қарай ықшамдайық. Ол үшін екінші квадрат түбірді теңдіктің оң жағына шығарып теңдіктің екі жағын квадраттайық:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$



88-сурет

немесе

$$a - \frac{c}{a}x = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (3.43)$$

Соңғы теңдіктің екі жағын квадраттайық, сонан соң a^2 -қа көбейтелік:

$$a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

немесе

$$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Осыдан

$$a^4 - a^2c^2 = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 \text{ немесе } b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

мұндағы $b^2 = a^2 - c^2$ ($b < a$).

Анықтама бойынша $2a > 2c$, сондықтан $a^2 - c^2 > 0$. Теңдіктің екі жағын a^2b^2 -қа бөлейік:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.44)$$

Эллипстің анықтамасы бойынша $M(x, y)$ нүктенің кез келген координаттары (3.42) теңдеуін қанағаттандырады. Олай болса, $M(x, y)$ нүктенің кез келген координаттары (3.44) теңдеуін де қанағаттандыра алады және керісінше. Сонымен (3.44) теңдеуі эллипстің теңдеуі болып табылады және де ол эллипстің ықшамды немесе қарапайым теңдеуі деп аталады.

Эллипстің теңдеуі айнымалы x пен y -тің жұп дәрежесі арқылы өрнектелген. Сондықтан, егер $M(x, y)$ нүктенің координаттары (3.42) теңдеуін қанағаттандыса, онда $M_1(x_0, -y)$, $M_2(-x, y)$, $M_3(-x, -y)$ нүктелерінің координаттары да осы теңдеуді қанағаттандырады, яғни M_1 , M_2 , M_3 нүктелері эллипс бойында жатады.

Енді эллипстің OX және OY өстерімен қиылысу нүктелерін анықтайық. Егер $x=0$ болса, онда $\frac{y^2}{b^2} = 1$, осыдан $y = \pm b$, яғни эллипс OY өсін $B_1(0, b)$ мен $B_2(0, -b)$ нүктелерінде қиып өтеді. Осы сияқты егер $y=0$ болса, онда эллипс OX өсін $A_1(a, 0)$ мен $A_2(-a, 0)$ нүктелерінде қияды (88-сурет).

(3.44) теңдеуінен $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$, $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ теңсіздіктерінің орындалатындығын көреміз, яғни $|x| \leq a$ және $|y| \leq b$ немесе $-a \leq x \leq a$ және $-b \leq y \leq b$. Сондықтан, эллипстің барлық нүктелері жазықтықтағы қабырғалары $2a$ мен $2b$ болатын тік бұрышты төртбұрыштың ішінде орналасқан (88-сурет). Енді эллипстің ықшамды теңдеуінен y -ті табайық:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Осыдан және жоғарыда айтылғандардан мынадай қорытындыға келеміз:

егер x айымалы шама 0-ден a -ға дейін өссе, онда y айнымалы шама кемиді; егер $x \geq a$ болса, онда y жорымал мән қабылдайды, яғни x айнымалы шама a -дан үлкен мәндерді қабылдағанда эллипс бойындағы нүктені таба алмаймыз.

Сонымен, эллипс сызығы декарт координат жазығында қисық сызық болады (14-сурет).

$OB_1 = OB_2 = b = \sqrt{a^2 - c^2}$ — эллипстің кіші жарты өсі, ал $B_1, B_2 = 2b$ кіші өсі деп аталады. $OA_1 = OA_2 = a$ — эллипстің үлкен жарты өсі, ал $A_1, A_2 = 2a$ үлкен өсі деп аталады.

Эллипстің абсцисса және ордината өстерімен қиылысу A_1, A_2, B_1, B_2 нүктелерін эллипстің төбелері, ал осы өстердің қиылысу нүктесі эллипстің центрі деп аталады.

Эллипстің эксцентриситеті деп $\frac{2c}{2a}$ қатынасын айтамыз және оны ε әрпімен белгілейміз, яғни $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$.

Осыдан $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$, $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$.

(3.42) мен (3.43) теңдіктерінен эллипстің фокальдық радиус теңдеулерін аламыз:

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x = a - \varepsilon x,$$

$$r_2 = a + \frac{c}{a}x = a + \varepsilon x.$$

Фокустар жатқан өс фокальдық өс деп аталады.

Егер $a > b$ болса, онда OX өсі фокальдық өс, егер $a < b$ болса, онда фокальдық өсі OY болады.

Егер $a = b$ немесе $\varepsilon = 0$ болса, онда (3.44) теңдігінен радиусы a -ға тең, ал центрі координат жүйесінің бас нүктесі болатын шеңбердің теңдеуін аламыз, яғни

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Эллипстің үлкен өсіне перпендикуляр және центрінен $\frac{a}{\varepsilon}$ қашықтықта болатын екі түзу эллипс директрисасы деп аталады. Директрисаның теңдеуі

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \text{ немесе } x = \pm \frac{a^2}{c}$$

болады, мұндағы $0 < \varepsilon < 1$. Сондықтан $\frac{a}{\varepsilon} > a$, яғни $x = +\frac{a}{\varepsilon}$ эллипстің оң төбесінің оң жағында, ал директриса $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ сол төбесінің сол жағында орналасады. Сондықтан, директриса эллипстен тысқары жатады.

Енді $a \neq b$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} \neq 0$ — тұрақты сан болып, b саны кемісін делік, онда c мен қатар ε де өседі.

Егер эллипс фокустары OY өсінде жатса, онда $b > a$ және $2b$ — үлкен өс, $2a$ — кіші өс, $\varepsilon = \frac{c}{b}$, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $y = \pm \frac{b}{a}$ директриса болады.

Енді эллипстің поляр теңдеуін қарастыралық. Эллипсте жатқан M нүктенің поляр координаттарын ρ , φ , ал F_1 фокусты поляр полюсі деп алайық (88-сурет). Сонда, тік бұрышты, F_1ME үшбұрышынан $\cos \varphi = \frac{F_1E}{r_1} = \frac{c+x}{\rho}$, мұндағы $F_1E = c+x$, $r_1 = \rho$. Осыдан $x = \rho \cos \varphi - c$. Ал эллипстің фокальдық теңдеуінен

$$x = \frac{\rho - a}{\varepsilon}.$$

Соңғы екі теңдікті теңестірейік

$$\rho \cos \varphi - c = \frac{\rho - a}{\varepsilon}.$$

Осыдан

$$\rho = \frac{a - \varepsilon c}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = \frac{P}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad (3.45)$$

мұндағы $P = \frac{b^2}{a^2}$, $\varepsilon < 1$.

(3.45) теңдеу эллипстің поляр теңдеуі деп аталады, егер $\varepsilon < 1$ болса. Бұл теңдеу механикада және астрономияда кеңінен пайдаланылады.

Мысалдар. 1. Мына теңдеулердің қайсысы шеңберді анықтайды:

а) $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 8 = 0$.

б) $(x+2)^2 + (y-7)^2 = 0$.

в) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 15 = 0$.

Шешімі. а) $x^2 - 10x$ және $y^2 - 4y$ мүшелерін толық квадратқа өрнектейік: $x^2 - 10x = (x-5)^2 - 25$, $y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$. Сонда $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 21$ теңдеуінің центрі — $A(5, 2)$, ал радиусы $\sqrt{21}$ болатын шеңберді анықтайды.

б) $(x+2)^2 + (y-7)^2 = 0$ теңдеуін тек $x = -2$, $y = 7$ мәндер ғана қанағаттандыра алады, сондықтан берілген теңдеу тек $A(-2, 7)$ нүктені ғана анықтайды.

в) $x^2 - 6x$ және $y^2 - 2y$ мүшелерін толық квадратқа өрнектейік $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$, $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$. Сонда, $(x-3)^2 + (y-1)^2 = -5$ теңдеуі жазықтықта ешқандай сызықты анықтай алмайды.

2. Центрі $A(-1, 1)$, ал радиусы 2-ге тең шеңбер мен $y = -x$ түзудің қиылысу нүктелерін анықта.

Шешімі. Есептің шарты бойынша шеңбердің $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ теңдеуі мен $y = -x$ түзуінің қиылысу нүктелерінің координаттары осы екі теңдеуді де қанағаттандырады. Сондықтан, олардың қиылысу нүктелерін тапсақ жеткілікті, ол үшін мына жүйені шешеміз:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4, \\ y = -x. \end{cases}$$

Сонда $(x+1)^2 + (-x-1)^2 = 4$, $2(x+1)^2 = 4$, $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, $y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. Сонымен, олардың қылысу нүктелері $A_1(-1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ мен $A_2(-1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ болады.

3. Эллипс $36x^2 + 4y^2 = 144$ теңдеуінен эллипстің элементтерін анықта, яғни а) жарты өстерін; б) фокусын; в) эксцентриситетін; г) директриса теңдеуін; д) фокальдық радиусын.

Шешімі. а) Эллипс теңдеуін ықшамды түрде өрнектейік:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1,$$

мұндағы $a=2$ — жарты кіші өс, $b=6$ — жарты үлкен өс,

б) $b > a$, сондықтан $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, осыдан $c = \pm \sqrt{b^2 - a^2} = \pm \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$. Сонымен, $F_1(-4\sqrt{2}, 0)$; $F_2(4\sqrt{2}, 0)$

в) $b > a$, сондықтан $e = \frac{c}{b} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

г) $b > a$, сондықтан $x = \frac{a}{e} = \pm \frac{2}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$.

д) $r = a \pm ex = 2 \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}x$.

4. Берілген $A(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ мен $B(-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1)$ нүктелерінен өтетін эллипс теңдеуін анықта.

Шешімі. A мен B нүктелері эллипстің бойында жатқандықтан, олардың координаттары $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс теңдеуін қанағаттандырады. Олай болса,

$$\frac{2}{a^2} + \frac{\frac{3}{4}}{b^2} = 1 \quad \text{және} \quad \frac{\frac{2}{9}}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1.$$

Екінші теңдеуден b^2 -ты анықтайық: $b^2 = \frac{9a^2}{9a^2 - 2}$. Осыдан және бірінші теңдеуден $a^2 = \frac{22}{3}$, $b^2 = \frac{33}{32}$. Сонымен, $\frac{x^2}{\frac{22}{3}} + \frac{y^2}{\frac{33}{32}} = 1$ теңдеуін анықтайды.

5. Эллипстің $a=14$ — жарты өсі, $e=0,5$ эксцентриситеті бойынша оның ықшамды теңдеуін және фокустардың ара қашықтығын анықта.

Шешімі. Эллипс эксцентриситетінің анықтамасы бойынша:

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}.$$

Осыдан

$$b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) = 196(1 - 0,5^2) = 49.$$

Сонымен, эллипстің ықшамды теңдеуі мына түрде болады:

$$\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

Енді $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $c = a \cdot \varepsilon = 14 \cdot 0,5 = 7$. Онда $|F_1 F_2| = 2c = 14$.

3.16. Нүктенің эллипс бойында жату белгісі

Бізге эллипстің ықшамды теңдеуі берілсін

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

және $a > b > 0$ болсын, онда $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ теңдеуі эллипстің директриса теңдеуі болады және де $0 < \varepsilon < 1$, $\frac{a}{\varepsilon} > a$ теңсіздіктері орындалады. Онда, соңғы теңсіздіктен $F_1(-c, 0)$ фокусқа $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ директриса, ал $F_2(c, 0)$ фокусқа $x = \frac{a}{\varepsilon}$ — директриса сәйкес келеді (88-сурет).

Берілген эллипс сызығының бойынан $M(x, y)$ нүкте алайық және $MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$, $MD_1 = d_1$, $MD_2 = d_2$ — деп белгілейік.

Т е о р е м а. 3.3. $M(x, y)$ — нүкте эллипс сызығының бойында жату үшін

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$$

теңдігі орындалуы қажетті әрі жеткілікті (88-сурет).

Д ә л е л д е у і. Қ а ж е т т і л і г і. M нүкте эллипс бойында жатыр деп ұйғарып, теоремадағы теңдікті дәлелдейік. Эллипстің анықтамасы бойынша

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

мұндағы $r_1 = MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. r_1 мен r_2 -ні квадраттап, $r_2^2 - r_1^2$ — айырымын қарастырайық:

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx \text{ немесе } (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4cx.$$

Осыдан $2a(r_2 - r_1) = 4cx$ немесе $r_2 - r_1 = \frac{2c}{a}x$.

Енді

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a, \\ r_2 - r_1 = \varepsilon x \end{cases}$$

жүйенің шешімдерін табамыз:

$$\begin{aligned} r_1 &= a - \varepsilon x, \\ r_2 &= a + \varepsilon x, \end{aligned}$$

мұндағы $r_1 - F_1$ нүктесінен $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ директрисаға дейінгі, ал ал $r_2 - F_2$ нүктеден $x = \frac{a}{\varepsilon}$ директрисаға дейінгі ара қашықтық.

Енді $d_2 = MD_2$ ара қашықтығын, яғни M нүктеден $x = \frac{a}{\varepsilon}$ директрисаға дейінгі ара қашықтықты анықтайық:

$$d_2 = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon} \right| = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon} = \frac{r_2}{\varepsilon}.$$

Осыдан дәлелдеу керек теңдіктердің бірін аламыз, ал екіншісін де осы жолмен дәлелдеуге болады.

Жеткіліктілігі. Теоремадағы $\frac{r_2}{d_2} = \frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$ теңдігі орындалсын деп жорып нүктенің эллипс бойында жататындығын дәлелдесік. Ол үшін $\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$ теңдігін квадраттайық:

$$\frac{r_2^2}{d_2^2} = \varepsilon^2 \text{ немесе } r_2^2 = \varepsilon^2 d_2^2.$$

Осыдан

$$(x - c)^2 + y^2 = \varepsilon^2 \left(x - \frac{a}{\varepsilon} \right)^2.$$

Соңғы теңдікті өрнектейік:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= \frac{c^2}{a^2} \left(x^2 - 2\frac{a^2}{c}x + \frac{a^4}{c^2} \right), \\ x^2 + y^2 &= a^2 - c^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2, \quad \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) x^2 + y^2 = b^2, \\ \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 &= b^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{aligned}$$

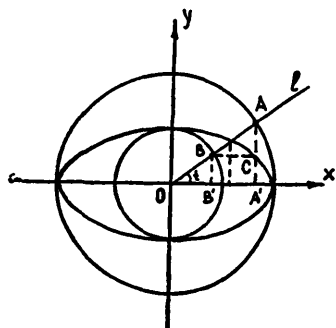
Сонымен, берілген $\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$ теңдігінен эллипстің теңдеуін алдық, яғни $M(x, y)$ нүкте эллипстің бойында жатыр.

Теорема дәлелденді.

3.17. Эллипстің параметр, жанама және нормаль теңдеулері

Бізге декарт координат жүйесінде концентрлі екі шеңбер берілсін, радиустары, $R_1 = a, R_2 = b$, мұндағы $a > b$ (89-сурет).

Координат жүйесінің бас нүктесінен кез келген l сәуле жүргізейік және оның шеңберлермен қиылысу нүктелерін $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ әріптерімен белгілейік. A нүктесінен OU өсіне, ал B нүктеден OX өсіне параллель түзулердің қиылысу нүктесін $C(x, y)$ әрпімен және l мен OX өс арасындағы бұрышты t әрпімен белгілейік. Енді l сәулені координат жүйесінің бас нүктесінде айналдырайық, сонда айналу нәтижесінде пайда болған C нүктенің геометриялық орны эллипс сызығын анықтайды. B мен C нүкте-



89-сурет

лері OX өсіне параллель түзу бойында жатыр, сондықтан $y=y_2$, осы сияқты A мен C нүктелері үшін $x=x_1$, яғни $C(x_1, y_2)$. Тік бұрышты $\triangle OBB' = \text{тен}$: $y_2 = b \sin t$, ал $\triangle OAA' = \text{тен}$: $x_1 = a \cos t$. Осыдан, егер $t=0$ болса, онда $y_2=0$, $x_1=a$; егер $t=\frac{\pi}{2}$ болса, онда $y_2=b$, $x_1=0$ болады. Жоғарыдағы теңдіктерден $\sin t$ мен $\cos t$ -ны тауып, олардың екі жағында квадраттап қоссақ, эллипстің ықшамды теңдеуін аламыз. Сондықтан

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases}$$

теңдеуі эллипстің параметрлік теңдеуі болады.

Енді эллипстің жанама теңдеуін қарастырайық. Ол үшін эллипсте жатқан кез келген $A_0(x_0, y_0)$ нүктені жанап өтетін түзудің теңдеуін тапсақ жеткілікті. Біздің іздестіріп отырған түзуіміз параметрлік теңдеуімен берілсін делік, яғни

$$\begin{cases} x = x_0 + nt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Алдымен түзу мен эллипстің қиылысу нүктесінің параметрлерін табайық, ол үшін түзудің параметрлік теңдеуін эллипс теңдеуіне апарып қояйық:

$$\frac{(x_0 + nt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} = 1.$$

Осыдан t -ны табайық:

$$\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) t^2 + \left(\frac{2nx_0}{a^2} + \frac{2my_0}{b^2} \right) t + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

$$A_0(x_0, y_0) \text{ нүкте эллипс бойында жатқандықтан } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \equiv 1,$$

сонда

$$t \left[\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) t + \frac{2nx_0}{a^2} + \frac{2my_0}{b^2} \right] = 0,$$

$$t_1 = 0, t_2 = - \frac{2nx_0b^2 + 2my_0a^2}{n^2b^2 + m^2a^2} = \frac{\frac{2nx_0}{a^2} + \frac{2my_0}{b^2}}{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}},$$

мұндағы $n^2b^2 + m^2a^2 \neq 0$.

Сонымен, түзу мен эллипстің қиылысу нүктесінің параметрлерін таптық, олар t_1 мен t_2 . Егер $t_1=0$ болса, онда $x=x_0$, $y=y_0$ болады. Егер екінші қиылысу нүкте A_0 нүктеге ұмтылса, онда

t_2 -де нольге ұмтылады. Сондықтан, түзудің параметрлік теңдеуі эллипстің жанама теңдеуі болуы үшін мына шарттың орындалуы

$$2n \frac{x_0}{a^2} + 2m \frac{y_0}{b^2} = 0 \text{ немесе } \left| -\frac{y_0}{b^2} \quad \frac{x_0}{a^2} \right| = 0$$

қажетті әрі жеткілікті. Олай болса, $A_0(x_0, y_0)$ нүктеден өтіп $\left\{ -\frac{y_0}{b^2}; \frac{x_0}{a^2} \right\}$ — векторына параллель жанаманың теңдеуі былай анықталады:

$$\left| \begin{array}{cc} x - x_0 & y - y_0 \\ -\frac{y_0}{b^2} & \frac{x_0}{a^2} \end{array} \right| = 0.$$

Осыдан және A_0 нүкте эллипс бойында жатқандықтан, мына теңдеу

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$$

эллипстің жанама теңдеуі болып табылады.

Енді эллипстің жанама теңдеуінен y -ті табайық:

$$y = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2} x + \frac{b^2}{y_0}.$$

Соңғы түзудің $A_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы осы түзуге жүргізілген перпендикуляр түзу эллипстің жанамасына перпендикуляр болады. Демек, екі түзудің перпендикулярлық белгісін $(k_1 = -\frac{1}{k_2})$ пайдаланып, эллипстің жанама теңдеуінен оның нормаль теңдеуін аламыз:

$$y = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} x + c,$$

мұндағы белгісіз c , коэффициентін табу үшін $y = y_0$, $x = x_0$ — мәндерін эллипстің нормаль теңдеуіне қойып, c -ны анықтаймыз, яғни

$$c = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) y_0.$$

Мысалдар. 1. Берілген $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ — эллипстің $A(1, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ нүктесіне жүргізілген жанама және нормаль теңдеулерін анықта.

Шешімі. Берілген нүкте эллипстің бойында жатқандықтан оның координаттары эллипстің теңдеуін қанағаттандырады. Сондықтан, $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ мәндерін жанаманың теңдеуіне қойып, эллипстің A_0 нүктесіне жүргізілген жанаманың теңдеуін аламыз:

$$\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y = 1 \text{ немесе } y = -\frac{3}{2\sqrt{3}}x + \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Енді A_0 нүктеден жүргізілген эллипстің нормаль теңдеуін анықтайық. Ол үшін эллипстің жанама түзуі мен іздестіріп отырған оның нормаль түзуі өзара перпендикуляр. Олай болса, ол түзулердің бұрыштық коэффициенттеріне $k_{ж} = -\frac{1}{k_n}$ перпендикулярлық белгі орындалады, мұндағы $k_{ж}$ — жанаманың, k_n — нормальдың бұрыштық коэффициенттері:

$$-\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{k_n}, \quad k_n = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Сонда

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + c$$

түзуі эллипстің нормаль теңдеуі болады, мұндағы c — белгісіз коэффициент. Енді белгісіз коэффициентті табайық. Нормаль түзу берілген A_0 нүктеден өтетін болғандықтан, оның теңдеуін A_0 нүктенің координаттары қанағаттандырады:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{6} + c, \quad c = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

Сонымен,

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

теңдеуі эллипстің нормаль теңдеуі болып табылады.

2. Берілген $C(2, -3)$ нүктеден өтіп $x_2 + \frac{y^2}{4} = 1$ эллипске жүргізілген жанаманың теңдеуін анықта.

Шешімі. Берілген нүкте эллипстен тысқары жатыр, сондықтан бұл нүктенің координаттары эллипс теңдеуін қанағаттандыра алмайды. Эллипстің жанама теңдеуін, яғни

$$-\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$$

біздің іздестіріп отырған жанаманың теңдеуі деп қарастырайық. Олай болса, берілген $C(2, -3)$ нүкте осы жанаманың бойында жатыр, яғни

$$2x_0 - \frac{3y_0}{4} = 1.$$

Соңғы теңдіктегі x_0 мен y_0 -дің мәндері берілген эллипс бойында жатқан A нүктенің координаттары, сондықтан

$$x_0^2 + \frac{y_0^2}{4} = 1.$$

Енді мына жүйенің шешімін табайық:

$$\begin{cases} 2x_0 - \frac{3y_0}{4} = 1, \\ x_0^2 + \frac{y_0^2}{4} = 1. \end{cases}$$

Жүйенің екі шешімі бар, олар эллипстің бойында жатыр:

$$A_1\left(\frac{64}{200} + \frac{3\sqrt{66}}{100}, -\frac{12}{25} + \frac{2\sqrt{66}}{25}\right), B_1\left(\frac{8}{25} - \frac{3\sqrt{66}}{100}, -\frac{12}{25} - \frac{2\sqrt{66}}{25}\right).$$

Сонда, эллипске жүргізілген екі жанама теңдеуін аламыз:

$$\begin{aligned} \left(\frac{64}{200} + \frac{3\sqrt{66}}{100}\right)x + \left(\frac{\sqrt{66}}{50} - \frac{3}{25}\right)y &= 1, \\ \left(\frac{8}{25} - \frac{3\sqrt{66}}{100}\right)x - \left(\frac{3}{25} + \frac{\sqrt{66}}{50}\right)y &= 1. \end{aligned}$$

3.18. Эллипстің түйіндес диаметрлерінің теңдеулері

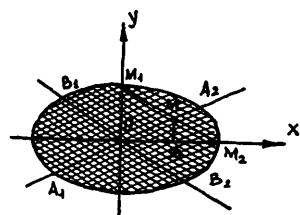
Анықтама. Эллипстің центрінен өтетін түзу эллипстің *диаметрі* деп аталады.

Эллипстің кез келген екі нүктесінен өтетін түзулерді эллипстің *хордалары* дейміз.

Анықтама. Егер эллипстің бір диаметріне параллель жүргізілген хордаларды екінші диаметр тең екі бөлікке бөлсе, онда осы екі диаметр *түйіндес диаметрлер* деп аталады (90-сурет) A_1A_2 мен B_1B_2 — түйіндес диаметрлер.

Бізге $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипстің теңдеуі

мен оның диаметріне түйіндес хорда бұрыштық коэффициент теңдеуімен берілсін, яғни $y = kx + m$. Осы хордағы түйіндес диаметрдің теңдеуін табайық. Ол үшін түйіндес A_1A_2 мен B_1B_2 диаметрін және M_1M_2 хорда мен A_1A_2 диаметрін қиылысу $M(x, y)$ нүктесінен OX өсіне перпендикуляр MD түзуді жүргізейік. M_1M_2 хорданың M_1 мен M_2 нүктелері осы хорданың және эллипстің бойында жатқандықтан, хорда мен эллипстің теңдеуін біріктіріп шешейік:



90-сурет

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = kx + m, \end{cases} \quad \begin{cases} b^2x^2 + a^2(kx + m)^2 = a^2b^2, \\ y = kx + m, \end{cases}$$

$$b^2x^2 + a^2k^2x^2 + 2a^2kmx + a^2m^2 - a^2b^2 = 0,$$

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2m^2 - a^2b^2 = 0,$$

$$x^2 + \frac{2a^2km}{b^2 + a^2k^2}x + \frac{a^2m^2 - a^2b^2}{b^2 + a^2k^2} = 0.$$

M_1M_2 хорданы A_1A_2 диаметр $M(x, y)$ нүктеде тең екі бөлікке бөледі, сондықтан соңғы квадрат теңдеуден Виета теоремасы бойынша M нүктенің x координатын табамыз:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2km}{a^2k^2 + b^2}.$$

Енді M нүктенің y координатын табу үшін

$$b^2\left(\frac{y-m}{k}\right)^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

квадрат теңдеуінен $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ -ні табайық:

$$\begin{aligned} b^2y^2 - 2b^2my + b^2m^2 + a^2k^2y^2 - a^2b^2k^2 &= 0, \\ (b^2 + a^2k^2)y^2 - 2b^2my + b^2m^2 - a^2b^2k^2 &= 0, \\ y^2 - \frac{2b^2m}{b^2 + a^2k^2}y + \frac{b^2m^2 - a^2b^2k^2}{b^2 + a^2k^2} &= 0. \end{aligned}$$

Осыдан Виета теоремасы бойынша

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{b^2m}{b^2 + a^2k^2}.$$

Енді M нүктенің координаттарын, яғни y -ті x -ке бөлейік:

$$\frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2k}.$$

Осыдан

$$y = k'x$$

іздістіріп отырған түйіндес диаметрдің теңдеуі, мұндағы $k' = -\frac{b^2}{a^2k}$. Түйіндес диаметрлердің бұрыштық коэффициенттерінің арасында

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2}$$

теңдігі орындалады.

Мысалдар. 1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ эллипстің $y = 3x$ диаметріне түйіндес диаметрдің теңдеуін анықта.

Шешімі. Берілгені бойынша $a^2 = 16$, $b^2 = 4$. Сонда іздістіріп отырған диаметрдің теңдеуін мына түрде анықтаймыз:

$$y = -\frac{4}{16 \cdot 3}x \text{ немесе } y = -\frac{1}{12}x.$$

2. Екінші мен төртінші ширектен өтетін биссектриса бойындағы $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ эллипстің диаметрінің ұзындығын анықта.

Шешімі. Екінші мен төртінші ширектен өтетін биссектрисаның теңдеуі $y = -x$ болады. Енді берілген эллипстің теңдеуімен осы биссектрисаның теңдеуін біріктіріп шешіп, олардың қиылысу $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ нүктелерін табамыз.

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = -x, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + \frac{x^2}{4} = 1, \\ y = -x, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4}{5}x^2 = 1, \\ y = -x. \end{cases}$$

Осыдан $x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $y_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $x_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Сонымен, эллипс пен диаметр $M_1\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $M_2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ нүктелерінде қиылысады. Енді осы нүктелердің ара қашықтығын тапсақ іздестіріп отырған диаметрдің ұзындығын табамыз

$$|M_1M_2| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{2}.$$

3. Берілген $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ эллипстің түйіндес диаметрлерін анықта. Олардың бірі $A(2, 3)$ нүктеден өтеді.

Шешімі. Эллипстің диаметрлері A нүктеден өтеді, сондықтан $y=kx$ түзуін осы нүктенің координаттары қанағаттандырады:

$$3 = k \cdot 2, \quad k = \frac{3}{2}.$$

Сонда, A нүктеден өтетін диаметрдің теңдеуі

$$y = \frac{3}{2}x$$

болады. Ал осы диаметрге түйіндес диаметрдің бұрыштық коэффициентін

$$k'k = -\frac{b^2}{a^2}$$

формуладан анықтайық

$$\frac{3}{2}k' = -\frac{16}{4}, \quad k' = -\frac{8}{3}.$$

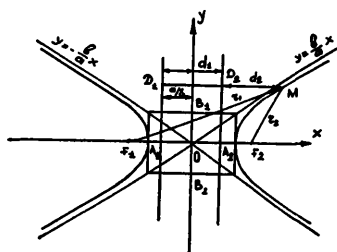
Сонымен, іздестіріп отырған түйіндес диаметрлердің теңдеулері

$$y = \frac{3}{2}x, \quad y = -\frac{8}{3}x$$

болады

3.19. Гиперболаның ықшамды теңдеуі

Анықтама. Координат өстерінің бірінде берілген фокустар деп аталатын екі нүктеден ара қашықтарының айырымы әрқашанда тұрақты шама болатын нүктелердің геометриялық орындарын *гипербола* дейміз (Тұрақты шама фокустардың ара қашықтығынан кіші).



91-сурет

Бізге жазықтықтағы XOY тік бұрышты декарт координат жүйеде кез келген $M(x, y)$ нүкте берілсін.

Абсцисса өсінен фокустар деп аталатын $F_1(-c, 0)$ мен $F_2(c, 0)$ нүктелерін алайық (91-сурет). Анықтама бойынша

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a \quad (3.46)$$

немесе

$$r_1 - r_2 = \pm 2a,$$

мұндағы

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Осыдан

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (3.47)$$

(3.47) теңдік іздестіріп отырған нүктелердің геометриялық орны, яғни гиперболаның теңдеуі болып табылады. Енді осы теңдікті ықшамдайық 3.15 тақырыптағыдай:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \text{ немесе } b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

мұндағы $b^2 = c^2 - a^2 > 0$.

Осыдан

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.48)$$

Гиперболаның бойында жатқан кез келген нүктелердің координаттары (3.48) теңдеуін қанағаттандыра алады. Сондықтан, (3.48) гиперболаның ықшамды теңдеуі деп аталады.

Координат жүйесінің бас нүктесі гиперболаның центрі, ал $y = \pm \frac{b}{a}x$ түзуі асимптотасы деп аталады. Фокустар жатқан өсті фокальдық өс дейміз. Гиперболаның фокальдық өсімен киялысу $A_1(a, 0)$ $A_2(-a, 0)$ нүктелерін гиперболаның төбелері, ал $A_1A_2 = 2a$ кесінді нақты өс, $B_1B_2 = 2b$ жорымал өс деп аталады. Гиперболаның эксцентриситеті деп $\epsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ қатынасын айтады және $c > a > 0$, гипербола үшін $\epsilon > 1$. Гиперболаның оң тармағының фокальдық радиус теңдеуі мына теңдеулер

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \epsilon x, \quad x > 0, \\ r_2 &= -a + \epsilon x, \quad x > 0 \end{aligned}$$

болады, ал сол тармағының фокальдық радиус теңдеулері мына теңдеулер

$$\begin{aligned} r_1 &= -a - \epsilon x, \quad x < 0, \\ r_2 &= a - \epsilon x, \quad x < 0 \end{aligned}$$

болады, $F_1(-c, 0)$ нүктеге $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ директриса, ал $F_2(c, 0)$ нүктеге $x = \frac{a}{\varepsilon}$ директриса сәйкес келеді.

Егер, $a=b$ болса, онда мұндай гипербола тең өсті гипербола деп аталады және ол $x^2 - y^2 = a^2$ теңдеуімен анықталады. Бұл жағдайда $c = a\sqrt{2}$, $\varepsilon = \sqrt{2}$ және де тең өсті гиперболаның асимптоталары өзара перпендикуляр болады, яғни $y = \pm x$.

Бір декарт координат жүйесіндегі мына екі гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

түйіндес деп аталады (92-сурет).

Егер гиперболаның $2b$ нақты өсі OY өсінде, ал $2a$ жорымал өсі OX өсінде жатса, онда гиперболаның теңдеуі былай анықталады,

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ немесе } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

ал $\varepsilon = \frac{c}{b}$ — эксцентриситет, $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ директриса, $y = \pm \frac{b}{a}x$ асимптота.

Енді гиперболаның параметр мен поляр теңдеулерімен танысып өтелік.

Гиперболаның теңдеуін мына $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$ түрде жазалық. Осыдан

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \neq 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \neq 0$$

екендігін көреміз, олай болса $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ өрнекті t әріпмен белгілейік, яғни

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = t \neq 0.$$

Соңғы теңдіктің екі жағында $\frac{x}{a} - \frac{y}{b}$ өрнегіне көбейтейік:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = t\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

немесе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = t\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right), \quad 1 = t\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Осыдан

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{t}.$$

Сонымен

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \\ y = \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \end{cases}$$

тендеуі гиперболаның параметрлік тендеуі деп аталады.

3.15 тақырыптағы (3.45) тендеуі гиперболаның полярлық тендеуі деп аталады, егер $\epsilon > 1$ болса.

Мысалдар. 1. Гиперболаның $25x^2 - 9y^2 = 225$ тендеуінен оның элементтерін анықта, яғни а) жарты өстерін; б) фокусын; в) эксцентриситетін; г) асимптота тендеуін; д) директриса тендеуін.

Шешімі. а) гиперболаның ықшамды тендеуін жазайық $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$. Осыдан $a=3$, $b=5$ — жарты өстер.

б) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$. Сонда, $F_1(-\sqrt{34}, 0)$ мен $F_2(\sqrt{34}, 0)$ нүктелері берілген гиперболаның фокустары;

в) $\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{34}}{3}$ — эксцентриситеті;

г) $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{5}{3}x$ — асимптоталары;

д) $y = \pm \frac{a}{\epsilon} = \pm \frac{9}{\sqrt{34}}$ — директрисалары.

2. $M(8, -3)$ нүктеден өтіп және эксцентриситеті $\sqrt{2}$ -ге тең гиперболаның тендеуін анықта.

Шешімі. Гиперболаның $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ тендеуі $M(8, -3)$ нүктеден өтсін және $\epsilon = \sqrt{2}$. Сондықтан іздестіріп отырған гиперболаның тендеуі үшін мына теңдік орындалады $\frac{64}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$ және $\epsilon = \sqrt{2}$. Олай болса, ол тең өсті гипербола, яғни $a=b$. Сонда $a^2=55$. Сонымен, $x^2 - y^2 = 55$ тендеуі есептің шартын қанағаттандыратын гиперболаның тендеуі болып табылады.

3.20. Гиперболаның асимптоталары

Бізге гиперболаның ықшамды тендеуі берілсін

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

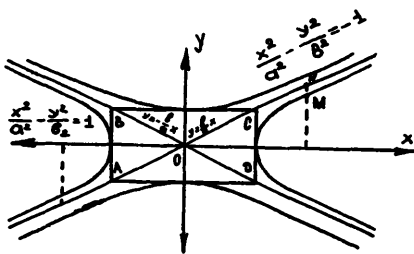
және $x > 0$, $y > 0$.

Осы тендеуден y -ті табайық:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Енді гиперболаның бойында жатқан $M(x, y)$, ал $y = \frac{b}{a}x - \text{тү-}$

зуінің бойында жатқан $N(x, \bar{y})$ нүктелерін алайық (92-сурет). Бұл нүктелердің абсцисса өсіне тиісті координаттары тең, ал ордината өсіне тиісті координаттарына мына теңсіздік орындалады $\bar{y} > y$. Сондықтан, M мен N нүктелерінің ара қашықтығы $\bar{y} - y$ болады. x шексіздікке ұмтылғанда осы ара қашықтықтың нөлге ұмтылатындығын көрсетейік.



92-сурет

Сонымен,

$$\begin{aligned} MN = \bar{y} - y &= \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \\ &= \frac{b}{a} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Егер $x \rightarrow +\infty$ -са, онда $MN \rightarrow 0$. Сондықтан, егер M нүкте гиперболы бойымен шексіздікке ұмтылса, онда гипербола бойында жатқан M нүктеден $y = \frac{b}{a}x$ түзуі бойында жатқан нүктеге дейінгі ара қашықтық нөлге ұмтылады. Олай болса, $y = \frac{b}{a}x$ түзуі берілген гиперболаның I ширектегі ($x > 0, y > 0$) асимптотасы болады.

Гипербола сызығы координат жүйесінің бас нүктесі арқылы симметриялы, сондықтан $y = \frac{b}{a}x$ түзуі осы гиперболаның III ширектегі асимптотасы да болады. Осы сияқты, гипербола сызығы координат жүйесінің OY өсі арқылы симметриялы болатындығын ескеріп, II-ші мен IV ширектегі гиперболаның екінші асимптотасын табамыз. Ол $y = -\frac{b}{a}x$ теңдеуімен анықталады.

Сонымен, $y = \pm \frac{b}{a}x$ түзуі берілген гиперболаның асимптоталары болып табылады.

Берілген гиперболаның асимптоталары $ABCD$ тік төртбұрышының диагоналі болып табылады.

Мысал. $A(1, -2)$ нүктеден өтіп және $y = \pm 3x$ түзуі асимптоталары болатын гиперболаның теңдеуін анықта.

Шешімі. Координат өстері $y = 3x$ және $y = -3x$ түзулерінің биссектрисасы, яғни гипербола өстері координат өстері болып табылады. Сондықтан, егер нақты өс OY өсімен беттессе, онда гиперболаның теңдеуін

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

түрінде, ал егер нақты өс OX өсімен беттессе, гипербола теңдеуін

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

түрінде іздестіреміз. Біз осы екі жағдайды да қарастыруымыз керек. Алдымен, гиперболаны бірінші түрде іздестірейік. Берілген A нүкте осы гиперболаның бойында жатыр, яғни

$$\frac{1}{a^2} - \frac{4}{b^2} = -1$$

және $\frac{b}{a}$ берілген асимптоталарының бірінің бұрыштық коэффициенті $\frac{b}{a} = 3$ немесе $\frac{b^2}{a^2} = 9$. Енді мына жүйеден:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{4}{b^2} = -1, \quad \frac{b^2}{a^2} = 9$$

a^2 және b^2 мәндерін анықтайық:

$$a^2 = -\frac{5}{9} < 0, \quad b^2 = -5 < 0.$$

Сонымен, нақты өс OY -сі болатын гипербола жоқ.

Енді екінші тендеуді қарастырайық:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1, \\ \frac{b^2}{a^2} = 9. \end{cases}$$

Осыдан $a^2 = \frac{5}{9} > 0$, $b^2 = 5 > 0$. Сонымен, іздестіріп отырған гиперболаның тендеуі мына түрде болады:

$$\frac{x^2}{\frac{5}{9}} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

3.21. Нүктенің гипербола бойында жату белгісі

Бізге гиперболаның ықшамды тендеуі берілсін

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гиперболаның бойынан $M(x, y)$ нүктесін алайық.

Берілген гипербола үшін $c > a > 0$, $\varepsilon = \frac{2c}{2a} > 1$ теңсіздіктері орындалады және оның оң және сол тармақтарының фокальдық радиус тендеулерін мына түрде қарастырайық (3.19 тақырып):

$$r_1 = |a + \varepsilon x|, \quad r_2 = |\varepsilon x - a|, \quad |x| \geq a.$$

мұндағы $r_1 = MF_1$, $r_2 = MF_2$ (91-сурет).

Теорема 4.4. $M(x, y)$ нүкте гипербола сызығының бойында жатуы үшін

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon,$$

теңдігі орындалуы қажетті әрі жеткілікті, мұндағы $MD_1 = d_1$, $MD_2 = d_2$.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. $M(x, y)$ нүкте гиперболы бойында жатыр деп ұйғарып, теоремадағы теңдікті дәлелдейік, мысалы $\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

Сонда

$$d_2 = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = \frac{|\varepsilon x - a|}{\varepsilon} = \frac{r_2}{\varepsilon}.$$

Осыдан

$$\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Осылайша екінші теңдікті де дәлелдеуге болады.

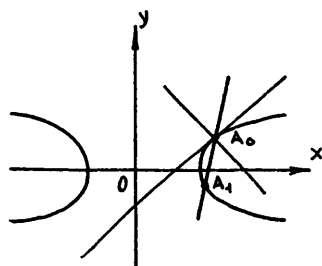
Теореманың жеткілікті шарты 3.16 тақырыптағы 3.3 теоремадағыдай дәлелденеді. Теорема дәлелденді.

3.22. Гиперболаның жанама және нормаль теңдеулері

Алдымен гиперболаның жанама теңдеуін табайық. Ол үшін гиперболда жатқан кез келген $A_0(x_0, y_0)$ нүктені жанап өтетін түзудің теңдеуін тапсақ жеткілікті. Сондықтан бізге $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

эллипстің бойында жатқан $A_0(x_0, y_0)$ нүкте берілсін (93-сурет). Енді осы нүктеден өтетін әрі іздестіріп отырған жанамамен беттеспейтін A_0A_1 қиюшыны қарастырайық және оның теңдеуі екі A_0 мен A_1 нүктелерінен өтетін түзудің теңдеуі болады, яғни

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0).$$



93-сурет

Берілген A_0 және A_1 нүктелері гиперболы сызығының бойында жатқандықтан, олардың координаттары гиперболы теңдеуін қанағаттандырады, яғни

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad \text{және} \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Жоғарыдағы екінші теңдеуден бірінші теңдеуді алайық:

$$\frac{x_1^2 - x_0^2}{a^2} - \frac{y_1^2 - y_0^2}{b^2} = 0$$

немесе

$$\frac{(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)}{a^2} - \frac{(y_1 - y_0)(y_1 + y_0)}{b^2} = 0.$$

Соңғы теңдіктің екі жағын $\frac{b^2}{(x_1 - x_0)(y_1 + y_0)}$ өрнегіне көбейтіп, қиюшының бұрыштық коэффициентін табамыз:

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_0}{y_1 + y_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = 0 \text{ немесе } \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{b^2(x_1 + x_0)}{a^2(y_1 + y_0)}.$$

Егер A_1 нүкте гипербола бойымен ұмтылса, онда $A_0 A_1$ қиюшы гиперболаның A_0 нүктесіне жүргізілген жанамамен беттеседі, яғни

$$\lim_{A_1 \rightarrow A_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{A_1 \rightarrow A_0} \frac{b^2(x_1 + x_0)}{a^2(y_1 + y_0)} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Сонымен, егер A_1 нүкте A_0 нүктеге гипербола бойымен ұмтылғанда қиюшы A_0 нүктеге жүргізілген гиперболаның жанамасына ұмтылады. Олай болса, соңғы шектен және қиюшының теңдеуінен іздестіріп отырған жанаманың теңдеуін аламыз, яғни

$$y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0).$$

Осыдан

$$\begin{aligned} a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 &= b^2 x_0 x - b^2 x_0^2, \\ b^2 x_0 x - a^2 y_0 y &= b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2. \end{aligned}$$

Соңғы теңдіктің екі жағында $a^2 b^2$ -қа бөлейік:

$$\frac{x_0}{a^2} x - \frac{y_0}{b^2} y = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Теңдіктің оң жағындағы өрнектің 1-ге теңдігін ескере отыра іздестіріп отырған жанаманың ықшамды теңдеуін аламыз, яғни

$$\frac{x_0}{a^2} x - \frac{y_0}{b^2} y = 1.$$

Енді A_0 нүктедегі гиперболаның нормаль теңдеуін табу үшін екі түзудің перпендикулярлық белгісін еске түсіріп, оның нормаль теңдеуін аламыз, яғни

$$y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} (x - x_0).$$

Осы теңдеуді түрлендірейік:

$$\begin{aligned} b^2 x_0 y - b^2 x_0 y_0 &= -a^2 y_0 x + a^2 y_0 x_0, \\ b^2 x_0 y + a^2 y_0 x &= (a^2 + b^2) x_0 y_0, \\ b^2 x_0 y + a^2 y_0 x &= c^2 x_0 y_0. \end{aligned}$$

Осы теңдеуден іздестіріп отырған гиперболаның нормаль теңдеуінің ықшамды теңдеуін аламыз:

$$\frac{a^2}{x_0} x + \frac{b^2}{y_0} y = c^2.$$

Мысалдар. 1. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ гиперболаның $A(4, \sqrt{27})$ нүктесіне жүргізілген жанама мен нормаль теңдеулерін анықта.

Шешімі. Есептің шарты бойынша берілген A нүкте гиперболаның бойында жатыр. Сондықтан гиперболаның жанама мен нормаль теңдеулерінің ықшамды теңдеулерін пайдалансақ, жеткілікті. Ондағы $a=2$, $b=3$, $c=\sqrt{13}$, $x_0=4$, $y_0=\sqrt{27}$. Сонда $\frac{4}{4}x - \frac{\sqrt{27}}{9}y = 1$ немесе $3x - \sqrt{3}y - 3 = 0$ теңдеуі жанаманың теңдеуі, ал $\frac{4}{4}x + \frac{9}{\sqrt{27}}y = 13$ немесе $\sqrt{3}x + 3y - 13\sqrt{3} = 0$ теңдеуі нормаль теңдеуі болады.

2. $A(1, 1)$ нүктеден өтетін $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ гиперболаның жанама теңдеуін анықта.

Шешімі. Жанаманың теңдеуі берілген A нүктеден өтетін болғандықтан оның координаттарын жанама теңдеуіне апарып қояйық:

$$\frac{x_0}{2} - \frac{y_0}{3} = 1.$$

Мұндағы x_0 мен y_0 — гипербола бойында жатқан жанасу нүктесінің координаттары. Олай болса, ол нүктенің координаттары берілген гиперболаның теңдеуін қанағаттандырады, яғни

$$\frac{x_0^2}{2} - \frac{y_0^2}{3} = 1.$$

Енді осы екі теңдеуден x_0 мен y_0 -ді табамыз:

$$\begin{cases} 3x_0 - 2y_0 = 6, \\ 3x_0^2 - 2y_0^2 = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} y_0 = \frac{3x_0 - 6}{2}, \\ 3x_0^2 - \frac{(3x_0 - 6)^2}{2} - 6 = 0. \end{cases}$$

$$6x_0^2 - 9x_0^2 + 36x_0 - 36 - 12 = 0, \quad x_0^2 - 12x_0 + 16 = 0,$$

$$x_0 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 64}}{2} \approx \frac{12 \pm 8,98}{2}, \quad x'_0 = 10,49, \quad x''_0 = 1,51.$$

$$y'_0 = 12,73, \quad y''_0 = -0,73.$$

Сонда, $A'_0(10,49, 12,73)$ мен $A''_0(1,51, 0,73)$ нүктелері — эллипстің бойында жатқан жанасу нүктелер. Осы нүктелердің координаттарын эллипстің жанама теңдеуіне қойып, оның жанама теңдеулерін аламыз:

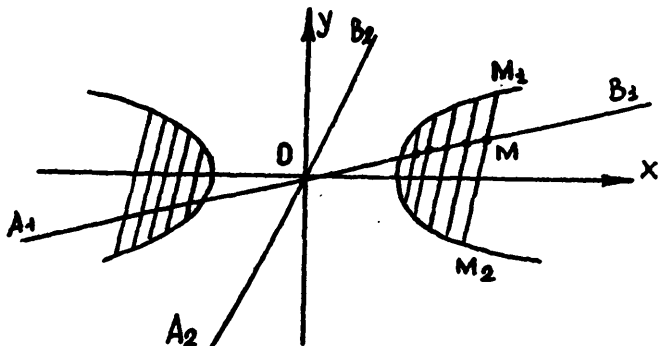
$$\frac{10,49}{2}x - \frac{12,73}{3}y = 1 \quad \text{және} \quad \frac{1,51}{2}x + \frac{0,73}{3}y = 1.$$

3.23. Гиперболаның түйіндес диаметрлерінің теңдеулері

Анықтама. Гиперболаның диаметрі деп оның центрінен өтетін және гиперболаның параллель хордаларының ортасындағы нүктелердің геометриялық орындарын айтамыз. 94-суретте A_1B_1 мен A_2B_2 — гиперболаның диаметрлері, M_1M_2 — параллель хордалар.

Егер екі диаметрдің біреуіне параллель жүргізілген хордаларды екінші диаметр тең екі бөлікке бөлсе, онда мұндай екі диаметр түйіндес диаметрлер деп аталады (94-суретте A_1B_1 мен A_2A_2 — түйіндес диаметрлер).

Бізге $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболаның теңдеуі, A_2B_2 — гиперболаның диаметрі және оған жүргізілген параллель хордалардың теңдеуі



94-сурет

бұрыштық коэффициент теңдеуімен берілсін, яғни $y = kx + m$. Енде берілген A_2B_2 — диаметрге түйіндес A_1B_1 диаметрінің теңдеуін табайық. Ол үшін берілген гипербола мен оның хордаларының теңдеулерін біріктіріп, y -ті осы теңдеулердің коэффициенттері мен x арқылы ернектеп анықтайық. Алдымен x -ті анықтайық:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = kx + m, \end{cases} \quad \begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \\ y = kx + m, \end{cases}$$

$$b^2x^2 - a^2(kx + m)^2 = a^2b^2, \quad b^2x^2 - a^2k^2x^2 - 2a^2kmx - a^2m^2 = a^2b^2, \\ (b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kmx - a^2b^2 - a^2m^2 = 0.$$

Осыдан

$$x^2 - \frac{2a^2akm}{b^2 - a^2k^2} - \frac{a^2b^2 + a^2m^2}{b^2 - a^2k^2} = 0.$$

Соңғы квадрат теңдеуден Виета теоремасы бойынша A_1B_1 хордаларды M_1M_2 диаметрі тең екі бөлікке бөледі, сондықтан

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2 km}{b^2 - a^2 k^2}, \quad x = \frac{a^2 km}{b^2 - a^2 k^2}.$$

Осы сияқты y -ті анықтайық:

$$\begin{cases} b^2 x^2 - a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0, \\ x = \frac{y - m}{k}. \end{cases}$$

Осыдан

$$\begin{aligned} b^2 \frac{(y - m)^2}{k^2} - a^2 k^2 y^2 - a^2 b^2 k^2 &= 0, \\ b^2 y^2 - 2b^2 m y + b^2 m^2 - a^2 k^2 y^2 - a^2 b^2 k^2 &= 0, \\ (b^2 - a^2 k^2) y^2 - 2b^2 m y + b^2 m^2 - a^2 b^2 k^2 &= 0, \\ \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{b^2 m}{b^2 - a^2 k^2}, \quad y = \frac{b^2 m}{b^2 - a^2 k^2}. \end{aligned}$$

Анықталған y -ті x -ке бөліп, іздестіріп отырған $A_1 B_1$ диаметрдің теңдеуін аламыз:

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2 m}{b^2 - a^2 k^2} : \frac{a^2 km}{b^2 - a^2 k^2}, \quad y = \frac{b^2}{a^2 k} x,$$

мұндағы $\frac{b^2}{a^2 k} = k'$ — диаметрдің бұрыштық коэффициенті.

$A_1 B_1$ диаметріне түйіндес $A_2 B_2$ диаметрдің теңдеуі

$$y = \frac{b^2}{a^2 k'} x$$

болады, яғни түйіндес диаметрлердің бұрыштық коэффициенттері арасында

$$k \cdot k' = -\frac{b^2}{a^2}$$

теңдігі орындалады.

Мысалдар. 1. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ гиперболаның $y = 2x + 4$ хордасына түйіндес диаметрін анықта.

Шешімі. 1. Бізге түйіндес диаметрдің теңдеуін пайдалансақ жеткілікті, яғни

$$y = \frac{6}{4+2} x, \quad y = \frac{3}{4} x.$$

2. Гипербола $M(3, 4)$, $M(1, 1)$ нүктелерінен өтеді. Осы нүктенен өтетін хордаға түйіндес диаметрдің теңдеуін анықта.

Шешімі. Алдымен гиперболаның теңдеуін табайық. Есептің шарты бойынша гипербола сызығы M_1 мен M_2 нүктелерінен өтеді. Сондықтан олардың координаттары $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболаның теңдеуін қанағаттандырады:

$$\frac{9}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1,$$

$$\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \text{ немесе } \frac{9}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 9.$$

Осы теңдеулердің бірінші теңдеуінен екінші теңдеуін алып, a^2 пен b^2 -ты табамыз:

$$-\frac{16}{b^2} + \frac{9}{b^2} = -8, \quad -\frac{7}{b^2} = -8, \quad b^2 = \frac{7}{8},$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{8}{7} = 1, \quad \frac{1}{a^2} = \frac{15}{7}, \quad a^2 = \frac{7}{15}.$$

Сонымен, берілген M_1 мен M_2 нүктелерден өтетін гиперболаның теңдеуі

$$\frac{x^2}{\frac{7}{15}} - \frac{y^2}{\frac{7}{8}} = 1$$

болады.

Гипербола хордасының теңдеуін табу үшін M_1 мен M_2 нүктелерден өтетін түзудің теңдеуін тапсақ жеткілікті:

$$\frac{x-x_2}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad \frac{x-3}{1-3} = \frac{y-4}{1-4}.$$

Осыдан хорданың теңдеуін аламыз:

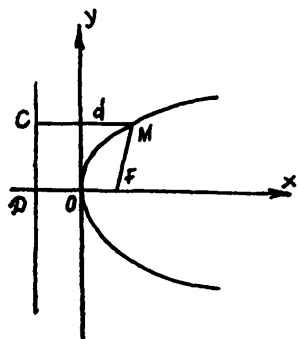
$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Енді анықталған хордаға түйіндес диаметрдің теңдеуін табу үшін оның теңдеуін пайдалансақ жеткілікті:

$$y = \frac{b^2}{a^2 k} x = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{7}{15} \cdot \frac{3}{2}} x, \quad y = \frac{5}{4} x.$$

3.24. Параболаның ықшамды теңдеуі

А н ы қ т а м а. Координат өстерінің бірінде берілген фокус деп аталатын нүктеден және директриса деп аталатын берілген түзуден ара қашықтықтары бірдей болатын нүктелердің геометриялық орындарын *парабола* дейміз.



95-сурет

Бізге декарт координат жүйесінде $M(x, y)$ нүкте және абсцисса өсінде жатқан және де оны координат жүйесінің O нүктесі тең кесіндіге бөлетін DF кесіндісі берілсін делік (95-сурет). DF кесіндінің ұзындығын p әрпімен белгілейік, сонда $DO = OF = \frac{p}{2}$, яғни $D(-\frac{p}{2}, 0)$, $F(\frac{p}{2}, 0)$.

Берілген M мен F нүктелерінің ара қашықтығын r әрпімен белгілейік, яғни $MF=r$, мұндағы F — анықтамадағы парабола-ның фокусы, $x = -\frac{p}{2}$ — параболаның директрисасы. M нүктеден директрисаға дейінгі ара қашықтықты d әрпімен белгілейік: $CM=d$.

Сонда, анықтама бойынша

$$r=d \text{ немесе } \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x. \quad (3.49)$$

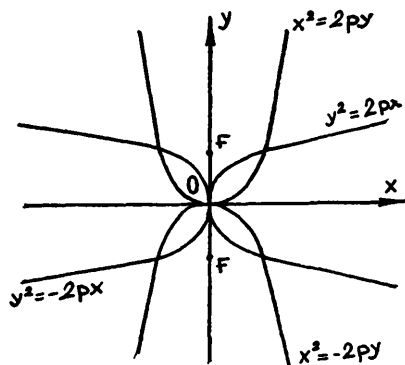
(3.49) теңдік параболаның теңдеуі деп аталады. Осы теңдікті ықшамдайық:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2 \text{ немесе } y^2 = 2px. \quad (3.50)$$

Соңғы теңдік параболаның ықшамды теңдеуі деп аталады, мұндағы $r = x + \frac{p}{2}$ — параболаның фокальдық радиусы.

$\frac{FM}{MC} = \frac{r}{d} = \varepsilon$ — параболаның эксцентриситеті.

Параболаның графигі OX өсін бас нүктеде қиып өтеді, бұл нүкте параболаның төбесі, ал фокустан директрисаға дейінгі ара қашықтық параболаның параметрі деп аталады, яғни p — параметр. Парабола OX өсі арқылы симметриялы. Егер координат жүйені $\pi/2$ бұрышқа бұрсак, онда (3.50) теңдеуіндегі x пен y -тің орындары алмасады, мұндай параболаның ықшамды теңдеуі мына түрде анықталады: $x^2 = 2py$. Бұл парабола OY өсімен симметриялы және $y = -\frac{p}{2}$ директриса болады (96-сурет):



96-сурет

$$y^2 = -2px, \quad x^2 = -2py.$$

3.15-тақырыптағы (3.45) теңдеу параболаның полярлық теңдеуі деп аталады, егер $\varepsilon=1$ болса.

Мысалдар. 1. $y^2=7x$ параболаның директрисасын және фокусын анықта.

Шешімі. $y^2=7x$ теңдеуін (3.50) теңдеуімен салыстырып, $2p=7$ теңдігін аламыз, осыдан $p=\frac{7}{2}$. Сонда $x = -\frac{p}{2} = -\frac{7}{4}$, ал $F\left(-\frac{7}{4}, 0\right)$ болады.

2. Фокусы $5x+7y-10=0$ мен $2x-7y-4=0$ түзулерінің қиылысу нүктесі болатын параболаның теңдеуін анықта.

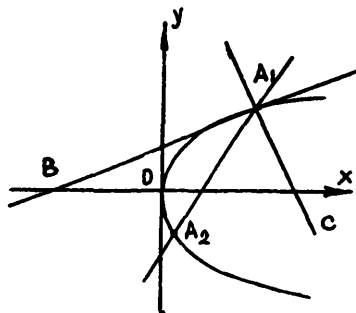
Ш е ш і м і. Берілген екі түзудің қиылысу нүктесін табайық:

$$\begin{cases} 5x+7y=10, \\ 2x-7y=4. \end{cases}$$

Осыдан $x=2, y=0$, яғни параболаның фокусы OX өсінде жатыр. Сондықтан $\frac{p}{2}=2$ немесе $p=4$. Сонымен, $y^2=8x$ — параболаның теңдеуі болады.

3.25. Параболаның жанама және нормаль теңдеулері

Бізге $y^2=2px$ параболаның теңдеуі және оның бойында жатқан $A_1(x_1, y_1)$ нүкте берілсін. Осы нүкте арқылы берілген параболаға жүргізілген жанама мен нормальдық теңдеулерін табайық. Алдымен параболаның жанама теңдеуін анықтайық. Ол үшін осы нүктеден параболаға BA_1 жанама және A_1A_2 қиюшы жүргізейік (97-сурет). Сонда A_1A_2 қиюшы



97-сурет

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

теңдеуімен анықталады.

Берілген $A_1(x_1, y_1)$ және $A_2(x_2, y_2)$ нүктелері параболаның бойында жатқандықтан, олардың координаттары параболаның теңдеуін қанағаттандырады, яғни $y_1^2 = 2px_1, y_2^2 = 2px_2$

Екінші теңдеуден бірінші теңдеуді алайық:

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1) \text{ немесе } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}.$$

Егер $A_2(x_2, y_2)$ нүкте парабола бойымен берілген $A_1(x_1, y_1)$ нүктеге ұмтылса, онда A_1A_2 қиюшы A_1B жанамамен беттеседі, яғни бұл жағдайда A_2 нүктенің координаттары A_1 нүктенің сәйкес координаттарына ұмтылады. Олай болса, соңғы теңдіктен мына өрнекті аламыз

$$\lim_{A_2 \rightarrow A_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{p}{y_1}.$$

Осыдан және A_1A_2 қиюшының теңдеуінен параболаның $A_1(x_1, y_1)$ нүктесіне жүргізілген жанама теңдеуін аламыз:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1} (x - x_1)$$

мұндағы $\frac{p}{y_1}$ — жанама түзуінің бұрыштық коэффициенті.

Енді параболаның A_1C нормаль теңдеуін табу үшін екі түзудің перпендикулярлық белгісін еске алып, параболаның жанама теңдеуінен оның нормаль теңдеуін аламыз:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p} (x - x_1).$$

Мысал. $y^2 = 9x$ параболаның $A(4, 6)$ нүктесіне жүргізілген жанама мен нормаль теңдеулерін анықта.

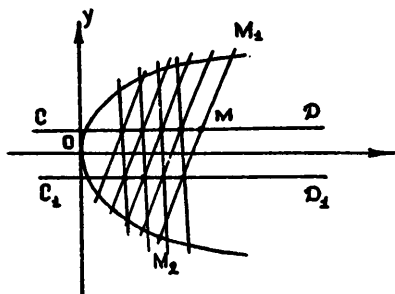
Шешімі. Берілген A нүкте параболаның бойында жатыр, сондықтан іздестіріп отырған теңдеулерді формулалардан табамыз, мұндағы $p = \frac{9}{2}$, $x_1 = 4$, $y_1 = 6$. Сонда $y - 6 = \frac{3}{4}(x - 4)$ — параболаның жанама теңдеуі, ал $y - 6 = -\frac{4}{3}(x - 4)$ параболаның нормаль теңдеуі болады.

3.26. Парабола диаметрінің теңдеуі

Анықтама. Параболаның *хордасы* деп оның кез келген екі нүктесінен өтетін түзуді айтамыз (M_1M_2 — хорда, 98-сурет).

Анықтама. Парабола хордаларының ортасынан өтетін түзу оның диаметрі деп аталады (CD , C_1D_1 — диаметрлер).

Бізге $y^2 = 2px$ параболаның ықшамды теңдеуі берілсін және параллель хордалардың бұрыштық коэффициенті $0 \neq k$ -ге тең болсын. Енді осы параболаның бойында жатқан $M_1(x_1, y_1)$ мен $M_2(x_2, y_2)$ нүктелерін алайық және $M(\bar{x}, \bar{y})$ нүкте M_1M_2 хордасын тең екі бөлікке бөлсін. M_1 мен M_2 нүктелері парабола сызығының бойында жатқандықтан, олардың координаттары парабола теңдеуін қанағаттандырады:



98-сурет

$$y_1^2 = 2px_1, \quad (3.51)$$

$$y_2^2 = 2px_2. \quad (3.52)$$

Ұйғаруымыз бойынша M_1M_2 хордасының бұрыштық коэффициенті k -ге тең, яғни

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \quad (3.53)$$

және M нүкте M_1M_2 хорданы тең бөлікке бөледі. Олай болса,

$$x_1 + x_2 = 2\bar{x}, \quad y_1 + y_2 = 2\bar{y}. \quad (3.54)$$

Жоғарыдағы (3.51) — (3.54) теңдеулерінен M_1 мен M_2 нүктелерінің координаттарын жоямыз. Ол үшін (3.52)-ден (3.51)-ді ала-йық:

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1) \text{ немесе } (y_2 - y_1)(y_2 + y_2) = 2p(x_2 - x_1).$$

Осыдан және (3.53), (3.54)-тен

$$2k(x_2 - x_1)\bar{y} = 2p(x_2 - x_1) \text{ немесе } \bar{y} = \frac{p}{k}.$$

Сонымен, параллель хордалардың ортасы

$$y = \frac{p}{k}$$

түзуінің бойында жатады, яғни осы түзу парабола диаметрінің тендеуі болып табылады және барлық диаметрлер OX өсіне параллель болады.

Егер хорданың k бұрыштық коэффициенті $+\infty$ -ке ұмтылса, онда оған түйіндес диаметр OX өсіне ұмтылады.

Мысал. $A(1, 2)$ нүктеде $y = 16x$ параболаның хордасы тең бөлікке бөлінеді. Хорданың тендеуін анықта.

Шешімі. Іздестіріп отырған хорданың тендеуін (3.1) формуладан анықтаймыз

$$y = kx + b.$$

Енді хорда мен параболаның қиылысу нүктелерінің ординаталарын табайық. Ол үшін хорданың тендеуінен x -ті тауып, оны парабола тендеуіне қояйық:

$$x = \frac{y-b}{k}, \quad y^2 + \frac{16}{k}y + 16 \frac{1}{k} = 0.$$

Квадрат тендеуден Виета теоремасы бойынша:

$$y_1 + y_2 = -\frac{16}{k},$$

мұндағы y_1 мен y_2 — хорда мен параболаның қиылысу нүктелерінің ординаталары. Есептің шарты бойынша $\frac{y_1 + y_2}{2}$ хорданы тең бөлікке бөлетін A нүктенің ординатасына тең, яғни

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 2.$$

Осыдан $y_1 + y_2 = 4$. Онда $4 = -\frac{16}{k}$, $k = -4$.

Хорданың $y = kx + b$ тендеуі A нүктеден өтеді, сондықтан

$$2 = 4 \cdot 1 + b, \quad b = 6.$$

Сонымен,

$$y = -4x + 6$$

іздестіріп отырған хорданың тендеуі.

3.27. Екінші ретті сызықтың жалпы тендеуі

Біз жоғарғы тақырыптарда жазықтықтағы тік бұрышты декарт координат жүйесінде екінші ретті сызықтардың ықшамды тендеулерімен танысып өттік. Енді екінші ретті сызықтардың

жалпы теңдеуімен және оны ықшамды теңдеуіне келтіру әдістерімен танысып өтелік.

Жазықтықтағы екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі мына түрде беріледі

$$L(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (3.54)$$

мұндағы $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{23}, a_{33}$ — коэффициенттер деп аталады және де a_{11}, a_{22}, a_{33} коэффициенттері бір мезгілде нөлге тең емес.

Теңдіктің сол жағын өрнектеп мына түрде жазуға болады:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = \quad (3.55)$$

$$= (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})y + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}).$$

Анықтама. Егер (3.54) теңдеуін кейбір түрлендіру мына түрге өрнектесе

$$L(x', y') \equiv \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + H = 0, \quad (3.56)$$

онда (3.56) теңдеу (3.54) теңдеуінің *ықшамды теңдеуі* деп аталады, мұндағы λ_1, λ_2, H — кез келген сандар.

Екінші ретті сызықтың жалпы және ықшамды теңдеулерін салыстыра мынадай жағдайды байқаймыз, екінші ретті сызықтың ықшамды теңдеуінде x пен y айнымалы шамалардың бірінші дәрежесі мен олардың көбейтіндісі жоқ және де (3.54) теңдеуін қарастырғаннан гөрі (3.56) теңдеуін қарастырған әлдеқайда тиімді әрі оның геометриялық орнын ықшамды теңдеуіне қарап оңай ажыратуға болады. (3.54) теңдеуін түрлендіру кезінде $x \cdot y$ және x пен y айнымалы шамаларының коэффициенттері нөлге тең болатындай түрлендіру табуға бола ма? Мұндай түрлендіруге екі жолмен жетуге болады:

1. Координат жүйесінің бас нүктесі (3.54) теңдеуінің центрі болса.

2. Координат өстерін тек белгілі бір бұрышқа бұрса.

3.28. Тік бұрышты декарт координат жүйесін параллель көшіру және жалпы теңдеудің центрі

Анықтама. Егер берілген $M(x, y)$ нүктенің координаттары мына жүйені

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

қанағаттандыратын болса, онда ол нүкте *екінші ретті сызықтың центрі* деп аталады.

Анықтамадағы жүйенің сол жағындағы өрнекті (3.54) теңдеуінен x пен y бойынша туынды алып табуға болады және оларды

$L'_x(x, y), L'_y(x, y)$ әріптерімен белгілейік:

$$L'_x(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13},$$

$$L'_y(x, y) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}.$$

Тік бұрышты декарт координат жүйесіндегі екінші ретті сызқтың жалпы теңдеуінің центрін $S(x_0, y_0)$ әрпімен белгілейік те осы нүктенің координаттарын анықтайық. Ол үшін координат жүйесінің бас нүктесін іздестіріп отырған $S(x_0, y_0)$ нүктеге параллель көшірейік, яғни мынадай түрлендіруді қарастырайық:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \quad (3.57)$$

(3.57) түрлендіруін (3.54) теңдеуіндегі x пен y -ке апарып қояйық:

$$\begin{aligned} & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = \\ & = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} a'_{13} &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \quad a'_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \\ a'_{33} &= a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

S нүктенің координаттары $a'_{13} = 0, a'_{23} = 0$ теңдіктерін қанағаттандыратындай етіп анықтайық, ол үшін мына жүйені

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = -a_{13}, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 = -a_{23} \end{cases} \quad (3.60)$$

шешсек бізге жеткілікті. Жүйенің анықтауышын δ әрпімен белгілейік, яғни

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \quad (3.61)$$

Егер $\delta \neq 0$ болса, онда

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\delta}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\delta}. \quad (3.62)$$

Сонымен, $S(x_0, y_0)$ нүктенің координаттары (3.62) формула бойынша анықталса ғана (3.58) формуладағы a'_{13} пен a'_{23} коэффициенттері нөлге тең болады. Енді (3.58) формуладағы a'_{33} -ті анықтайық. Ол үшін (3.55) формуланы еске ала отыра (3.59) мен (3.60) формулаларынан a'_{33} -ті анықтаймыз:

$$\begin{aligned} a'_{33} &= (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x_0 + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y_0 + \\ &+ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}, \end{aligned}$$

мұндағы

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \quad a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0.$$

Осыдан және (3.62) формуладан

$$a'_{33} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = a_{13} \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\delta} = \frac{\Delta}{\delta}. \quad (3.63)$$

Сонымен, координат жүйесін параллель көшіру нәтижесінде біріншіден, екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуін мына түрге келтірдік

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0; \quad (3.64)$$

екіншіден, егер $\delta \neq 0$ болса, онда екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі центрінің координаттары (3.62) формуладан анықталады; үшіншіден, егер $\delta = 0$ болса, онда екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуінің центрі болмайды.

3.29. Координат жүйесін бұру арқылы ықшамды теңдеу алу

Анықтама. Айнымалы x' және y' шамаларының екінші дәрежесі және олардың көбейтінділері арқылы анықталған мына біртекті көпмүшелік

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 \quad (3.65)$$

квадрат пішін деп аталады.

Бізге (3.65) квадрат пішін берілсін делік. Квадрат пішінді ықшамды түрге келтіру жолын қарастырайық. Анығырақ айтқанда, (3.65) пішінді декарт координат жүйесінің OX' және OY' өстерін белгілі бір бұрышқа бұру нәтижесінде пайда болған координат жүйесінің координаттарына өрнектеу кезінде квадрат пішіннің $x' \cdot y'$ мүшесі нөлге айналатын тәсілмен танысып өтейік. Ол үшін мынадай түрлендіруді қарастырайық:

$$\begin{cases} x' = k_1x'' + k_2y'', \\ y' = m_1x'' + m_2y'', \end{cases} \quad (3.66)$$

мұндағы k_i, m_i — белгісіз коэффициенттер, x'', y'' — жаңа координат жүйесінің айнымалы шамалары, $i=1,2$.

(3.66) түрлендіру ортогональ болсын деп ұйғарайық, яғни

$$a) \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = k_1m_2 - m_1k_2 = \pm 1, \quad б) \begin{cases} k_1^2 + m_1^2 = 1, \\ k_2^2 + m_2^2 = 1, \\ k_1k_2 + m_1m_2 = 0. \end{cases} \quad (3.67)$$

(3.67) түрлендіруі $X'OY'$ координат жүйесін α бұрышқа бұрады, ал α бұрыш мына формуладан анықталады:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_1}{k_1} \quad \text{немесе} \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{m_2}{k_2}.$$

Енді (3.67) шарттарды қанағаттандыратын k_i, m_i коэффициенттерді табу үшін (3.66) ортогональ түрлендіру (3.65) квадрат пішінді мына түрге

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \quad (3.68)$$

өрнектейді деп ұйғаралық, мұндағы λ_1 мен λ_2 — белгісіз коэффициенттер.

Белгісіз k_i, m_i, λ_i коэффициенттерін табу үшін (3.68) теңдікті өрнектейік

$$(a_{11}x' + a_{12}y')x' + (a_{12}x' + a_{22}y')y' = \lambda_1 x'' \cdot x'' + \lambda_2 y'' \cdot y''. \quad (3.69)$$

(3.69) теңдігінің сол жағына (3.66) түрлендіруін қолданаық

$$\begin{aligned} a_{11}x' + a_{12}y' &= a_{11}(k_1x'' + k_2y'') + a_{12}(m_1x'' + m_2y'') + \\ &= (a_{11}k_1 + a_{12}m_1)x'' + (a_{11}k_2 + a_{12}m_2)y'', \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} a_{12}x' + a_{22}y' &= a_{12}(k_1x'' + k_2y'') + a_{22}(m_1x'' + m_2y'') = \\ &= (a_{12}k_1 + a_{22}m_1)x'' + (a_{12}k_2 + a_{22}m_2)y'' \end{aligned}$$

(3.66) өрнегін былай өрнектеп жазайық

$$\begin{cases} x'' = k_1x' + m_1y', \\ y'' = k_2x' + m_2y'. \end{cases} \quad (3.71)$$

Енді (3.69) теңдігінің оң жағына (3.71) түрлендіруін қолданаық

$$\begin{aligned} x'' \cdot x'' &= (k_1x' + m_1y')x'', \\ y'' \cdot y'' &= (k_2x' + m_2y')y''. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Түрлендіру арқылы өрнектелген (3.70) пен (3.72) теңдіктерін (3.69) теңдігіне апарып қояйық:

$$\begin{aligned} (a_{11}k_1 + a_{12}m_1)x'' \cdot x' + (a_{11}k_2 + a_{12}m_2)y'' \cdot x' + \\ + (a_{12}k_1 + a_{22}m_1)x'' \cdot y' + (a_{12}k_2 + a_{22}m_2)y'' \cdot y' = \\ = \lambda_1(k_1x' + m_1y')x'' + \lambda_2(k_2x' + m_2y')y''. \end{aligned}$$

Соңғы теңдіктегі $x'' \cdot x', x'' \cdot y', y'' \cdot x'$ және $y'' \cdot y'$ мүшелерінің коэффициенттерін теңестіріелік

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}m_1 = \lambda_1 k_1, \\ a_{12}k_1 + a_{22}m_1 = \lambda_1 m_1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}k_2 + a_{12}m_2 = \lambda_2 k_2, \\ a_{12}k_2 + a_{22}m_2 = \lambda_2 m_2 \end{cases} \quad (3.73)$$

немесе жалпы түрде

$$\begin{cases} a_{11}k + a_{12}m = \lambda k, \\ a_{12}k + a_{22}m = \lambda m. \end{cases} \quad (3.74)$$

Осыдан

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)k + a_{12}m = 0, \\ a_{12}k + (a_{22} - \lambda)m = 0. \end{cases} \quad (3.75)$$

Біртекті (3.75) жүйенің нөл емес тек бір ғана шешімі бар, егер

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ немесе } \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0 \quad (3.76)$$

болса.

Анықтама. (3.76) тендеуі (3.65) квадрат пішіннің сипаттамалық тендеуі, ал осы тендеудің λ_1, λ_2 түбірлері сол квадрат пішіннің сипаттамалық түбірлері деп аталады:

$$\lambda_{1/2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}{2}, \quad (3.77)$$

мұндағы $(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \geq 0$.

(3.74) тендеуіндегі λ -ның орнына (3.77) формуладан анықталған λ_i -ді қойып, біртекті жүйенің нөлге тең емес әрі (3.67) шарттарын қанағаттандыратын k_i, m_i шешімдерін табамыз, $i = \overline{1, 2}$.

Анықтама. (3.65) квадрат пішіннің λ_i сипаттамалық түбірлеріне сәйкес келетін $\bar{n}_i = \{k_i; m_i\}$ векторлары *бас бағыт* векторлар деп аталады, $i = \overline{1, 2}$.

Егер k_i, m_i сандары (3.67) шарттарындағы мына теңдікті $k_i^2 + m_i^2 = 1$ қанағаттандыра алмаса, онда олардың орнына мына

сандарды аламыз: $\bar{k}_i = \mu_i k_i, \bar{m}_i = \mu_i m_i$, мұндағы $\mu = \pm \sqrt{\frac{1}{k_i^2 + m_i^2}}$. Бұл сандар үшін мына теңдік $\bar{k}_i^2 + \bar{m}_i^2 = 1$ орындалады және де $\bar{n}_i = \{\bar{k}_i; \bar{m}_i\}$ — нормальданған бірлік вектор, яғни $(\bar{n}_i, \bar{n}_i) = 1$. Енді $\bar{n}_1$ мен $\bar{n}_2$ векторлардың ортогональ болатындығына оңай көз жеткізуге болады, яғни (3.67) формуладағы үшінші шарт орындалады: $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = k_1 \cdot k_2 + m_1 m_2 = 0$. Демек, λ_1, λ_2 нақты сандары және (3.67) формуладағы шарттарды қанағаттандыратын k_i, m_i сандары табылып, $\bar{n}_i$ — ортонормальданған вектор болады, яғни

$$(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0, \quad (\bar{n}_i, \bar{n}_i) = 1, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Сонымен. (3.28) мен (3.29) тақырыптарынан мынадай қорытындыға келеміз: (3.57) пен (3.66) түрлендірулері арқылы және (3.64) мен (3.68) формулаларын ескере отырып, екінші ретті сызықтың жалпы тендеуін мынадай

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = H \quad (3.78)$$

ықшамды түрге келтіруге болады, мұндағы λ — (3.66) квадрат пішіннің сипаттамалық түбірлері, $H = -\frac{\Delta}{\delta}$, $i = \overline{1, 2}$.

3.30. Тік бұрышты координат жүйесін бұру

Біз өткен тақырыптарда тік бұрышты координат жүйесін α бұрышқа бұрамыз деп келдік. Негізінде осы α бұрыш қалай анықталатынын әрі оның мәні неге тең екендігін қарастырғанымыз жоқ. Енді α бұрышын анықтайық және координат жүйесін осы анықталған α бұрышқа бұру нәтижесінде екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі қалай өрнектелетінін қарастырайық. Ол үшін 1.5 тақырыпты еске алайық:

$$\begin{cases} x' = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y' = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (3.79)$$

Енді (3.79) түрлендіруін (3.54) теңдеуіне қояйық:

$$a_{11}(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 2a_{12}(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + a_{22}(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + 2a_{13}(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 2a_{23}(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + a_{33} = 0.$$

Осыдан

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \quad (3.80)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \cos \alpha \cdot \sin \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha, \\ a'_{12} &= (a_{22} - a_{11}) \cos \alpha \cdot \sin \alpha + a_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \\ a'_{22} &= a_{11} \sin^2 \alpha - 2a_{12} \cos \alpha \cdot \sin \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha, \\ a'_{13} &= a_{13} \cos \alpha + a_{23} \sin \alpha, \\ a'_{22} &= -a_{13} \sin \alpha + a_{23} \cos \alpha, \\ a'_{33} &= a_{33}. \end{aligned}$$

Бізге (3.80) теңдеуіндегі a'_{12} — коэффициент нөлге айналатындай α бұрышын анықтауымыз керек, сондықтан

$$a'_{12} = (a_{22} - a_{11}) \cos \alpha \cdot \sin \alpha + a_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0.$$

Соңғы теңдіктен α бұрышын табайық:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11}) \sin 2\alpha + a_{12} \cos 2\alpha &= 0, \quad a_{22} - a_{11} = -2a_{12} \operatorname{ctg} 2\alpha, \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= -\frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{12}}, \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arccotg} \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \end{aligned}$$

Сонымен, егер координат жүйесін $\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arccotg} \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$ бұрышқа бұрса, онда (3.54) теңдеуі мына түрге өрнектелінеді:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33} = 0. \quad (3.81)$$

3.31. Екінші ретті сызықтың классификациясы

Бізге екінші ретті сызықтың ықшамды теңдеуі берілсін

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = H, \quad (3.82)$$

мұндағы $H = -\frac{\Delta}{\delta}$.

Виета теоремасы бойынша

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Енді үш жағдайды қарастырайық.

1 - жағдай. $\delta > 0$ болсын делік, немесе $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, яғни сипаттамалық түбірлердің таңбалары бір таңбалы. Анықтық үшін $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ болсын. (Егер $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ болса, онда (3.79) теңдеуін -1 -ге көбейтеміз).

1а). Егер $H > 0$ болса, онда (3.82) теңдеуі мына түрге

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{H}{\lambda_2}}\right)^2} = 1$$

өрнектелінеді және ол эллипс.

1ә). Егер $H < 0$ болса, онда (3.82) теңдеуі мына түрге

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{\lambda_2}}\right)^2} = -1$$

өрнектелінеді және оны тек жорымал сандар ғана қанағаттандырады, сондықтан ол жорымал эллипс деп аталады.

1б). Егер $H = 0$ болса, онда (3.82) теңдеуі мына түрге

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0 \quad (3.83)$$

өрнектелінсін. Бұл жағдайда, (3.83) теңдеуін тек $x'' = 0, y'' = 0$ мәндері ғана қанағаттандыра алады, сондықтан ол эллипстің нүктеге айналу теңдеуі деп аталады.

Демек, егер $\delta > 0$ болса, онда екінші ретті сызықтың теңдеуі эллипсті анықтайды.

2 - жағдай. $\delta < 0$ болсын дейік немесе $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, яғни λ_1 мен λ_2 -нің таңбалары қарама-қарсы. Анықтық үшін $\lambda_1 > 0$, ал $\lambda_2 < 0$ болсын.

2а). Егер $H > 0$ болса, онда (3.82) теңдеуі мына түрге

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{\lambda_2}}\right)^2} = 1$$

өрнектелінеді және ол гипербола.

2б). Егер $H < 0$ болса, онда (3.82) теңдеуі мына түрге

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{\lambda_1}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{\lambda_2}}\right)^2} = -1$$

өрнектелінеді. Бұл теңдеудің графигі ордината өсін қиып өтеді және ол гиперболаны анықтайды. Шынында да ол ордината өсін $(0, y_0)$ нүктеде қиып өтеді.

2в). Егер $H=0$ болса, онда (3.82) теңдеуі мына түрге

$$\left(\sqrt{\lambda_1}\right)^2 x''^2 - \left(\sqrt{\lambda_2}\right)^2 y''^2 = 0$$

өрнектелінеді және ол гиперболаның нүктеге айналу теңдеуі деп аталады.

Сонымен, егер $\delta < 0$ болса, онда екінші ретті сызықтың теңдеуі гиперболаны анықтайды.

3- жағдай. Енді $\delta=0$ болсын дейік немесе $\lambda_1 \cdot \lambda_2=0$, яғни λ_1 мен λ_2 -нің бірі нөлге тең. Анықтық үшін $\lambda_1 \neq 0$, ал $\lambda_2=0$ болсын. Онда (3.77)-ден $\lambda_1=a_{11}+a_{22}$ болады және екінші ретті сызықтың центрі болмайды. Сондықтан, үшінші жағдайда (3.57) түрлендіруін қарастырудың қажеті жоқ, бірден (3.66) түрлендіруін қарастырған тиімді.

Егер (3.54) теңдеуіне мынадай түрлендіру қолдансақ

$$\begin{cases} x=k_1x'+k_2y', \\ y=m_1x'+m_2y', \end{cases} \quad (3.84)$$

онда теңдеудің сол жағы мына түрге өрнектелінеді

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = \\ = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + a_{33}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

мұндағы

$$\mu_1 = a_{13}k_1 + a_{23}m_1, \quad \mu_2 = a_{23}k_2 + a_{13}m_2, \quad \text{ал } k_1, m_1, \lambda_1$$

$(\lambda_1 \neq 0, \lambda_2=0, \lambda_1=a_{11}+a_{22})$ коэффициенттері 3.29 тақырыптағыдай анықталады.

Енді (3.84) өрнектің оң жағындағы $\lambda_2=0$ екендігін еске алатырып, оны Лагранж әдісі бойынша өрнектейік:

$$\begin{aligned} \lambda_1 x'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + a_{33} = \\ = \lambda_1 \left(x'^2 + \frac{2\mu_1}{\lambda_1} x' \right) + 2\mu_2 y' + a_{33} = \\ = \lambda_1 \left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2\mu_2 y' + a_{33} - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2}. \end{aligned}$$

Сонымен, (3.54) теңдеуіне (3.84) түрлендіруін қолданып, мына теңдеуді аламыз

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2\mu_2 y' + H = 0, \quad (3.86)$$

мұндағы $H = a_{33} - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2}$.

3а). Егер $\mu_2 \neq 0$ болса, онда (3.86) теңдеуі мына түрге өрнектелінеді:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2\mu_2 \left(y' + \frac{H}{2\mu_2} \right) = 0.$$

Енді координат жүйесін мына түрлендіру бойынша

$$\begin{cases} x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1} = x'', \\ y' + \frac{H}{2\mu_2} = y'' \end{cases}$$

параллель көшірейік, онда параболаның мынадай ықшамды теңдеуін аламыз:

$$\lambda_1 x''^2 + 2\mu_2 y'' = 0. \quad (3.87)$$

3б). Егер $\mu_2 = 0$ болса, онда (3.86) -ден

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right)^2 + H = 0 \quad (3.88)$$

теңдеуін аламыз. Енді OX' өсін мына формула бойынша

$x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1} = x''$ параллель көшірейік, сонда (3.87) теңдеуінен

$$\lambda_1 x''^2 + H = 0 \quad (3.89)$$

теңдеуін аламыз. Біздің қарастырып отырған жағдайымызда $\lambda_1 \neq 0$, сондықтан, анықтық үшін $\lambda_1 > 0$ болсын деп ұйғарайық (егер $\lambda_1 < 0$ болса, онда (3.89) теңдеуін -1 -ге көбейтеміз).

б'). Егер $H < 0$ болса, онда (3.89) теңдеуінен

$$(\sqrt{\lambda_1} x'' + \sqrt{-H})(\sqrt{\lambda_1} x'' - \sqrt{-H}) = 0$$

теңдеуін аламыз, яғни (3.89) теңдеуі параллель екі түзуді анықтайды, яғни

$$\begin{cases} \lambda_1 x'' + \sqrt{-H} = 0, \\ \sqrt{\lambda_1} x'' - \sqrt{-H} = 0. \end{cases} \quad (3.90)$$

б''). Егер $H = 0$ болса, онда (3.89) теңдеуі беттесетін екі түзуді анықтайды және ол

$$x''^2 = 0 \quad (3.91)$$

теңдеуімен аныкталады.

б'''). Егер $H > 0$ болса, онда (3.89) теңдеуі жорымал параллель екі түзуді анықтайды.

Сонымен, егер $\delta = 0$ болса, онда екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі параболаны анықтайды.

Мысалдар. 1. Екінші ретті сызықтың жалпы теңдеулерін ықшамды теңдеуге өрнекте және олардың суретін сал:

$$1. 5x^2 + 5y^2 + 8xy - 18x - 18y + 9 = 0.$$

$$2. 4x^2 + y^2 - 4xy - 2x - 14y + 7 = 0.$$

Шешімі. 1. Алдымен екінші ретті сызықтың түрін анықтайық, (3.61) формуладан

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9 > 0,$$

яғни екінші ретті сызық эллипсті анықтайды (1-жағдай). Енді координат жүйесін (3.57) формула бойынша параллель көшірейік: $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$. Жалпы тендеуге x пен y -ті апарып қойып, квадрат жақшаны ашып және жаңа координаттар бойынша өрнектеп жазайық:

$$\begin{aligned} & 5(x' + x_0)^2 + 8(x' + x_0)(y' + y_0) + 5(y' + y_0)^2 - 18(x' + x_0) - \\ & \quad - 18(y' + y_0) + 9 = 0, \\ & 5x'^2 + 8x'y' + 5y'^2 + (11x_0 + 8y_0 - 18)x' + 8(x_0 + 10y_0 - 18)y' + \\ & \quad + 5x_0^2 + 8x_0y_0 + 5y_0^2 - 18x_0 - 18y_0 + 9 = 0. \end{aligned}$$

(3.60) формуладан

$$\begin{cases} 5x_0 + 4y_0 = 9, \\ 4x_0 + 5y_0 = 9. \end{cases}$$

Осы жүйенің шешімі $x_0 = y_0 = 1$ болады. Сонымен, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ болғанда (3.58) теңдігіндегі $a'_{13} = 0$, $a'_{23} = 0$ және екінші ретті сызықтың центрі $S(1, 1)$ болады.

Енді a'_{33} — коэффициентін табайық, (3.63) формуладан

$$a'_{33} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = -9 \cdot 1 + (-9) \cdot 1 + 9 = 9.$$

Сонымен, параллель көшіру нәтижесінде (3.64) формуланы анықтадық, яғни

$$5x'^2 + 8x'y' + 5y'^2 - 9 = 0.$$

Енді жаңа координат жүйесін бұрышқа бұрайық. Ол үшін λ_i — сипаттамалық түбірлерді және осы түбірлерге сәйкес келетін $\bar{n}_i$ — бас бағыт векторларының k_i , m_i — координаттары (3.67) шартты қанағаттандыратындай етіп анықтайық. Алдымен сипаттамалық түбірлерді табайық:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ осыдан } (5 - \lambda)^2 - 16 = 0, \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1.$$

Егер $\lambda = \lambda_1 = 9$ болса, онда (3.75) формуладан

$$\begin{cases} (5 - 9)k_1 + 4m_1 = 0, \\ 4k_1 + (5 - 9)m_1 = 0 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} -4k_1 + 4m_1 = 0, \\ 4k_1 - 4m_1 = 0 \end{cases}$$

Осы жүйенің көп шешімдерінің ішіндегі тек бір шешімін ғана алайық, мысалы $k_1 = m_1 = 1$. Сонда $\bar{n}_1 = \{k_1; m_1\} = \{1; 1\}$. Бірақ $|\bar{n}_1|^2 = 1 + 1 = 2 \neq 1$. Сондықтан, $\bar{n}_1$ векторды нормальдаймыз

$$(3.67) \text{ шарт орындалатындай, яғни } \tilde{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tilde{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Сонда } \tilde{n}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}. \text{ Сонымен } \tilde{n}_1 \text{ векторы үшін } \tilde{k}_1^2 + \tilde{m}_1^2 = 1 \text{ теңдігі}$$

орындалады. $\tilde{n}_1$ векторды да $\bar{n}_1$ әрпімен белгілейік.

Егер $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ болса, онда (3.75) формуладан

$$\begin{cases} 4k_2 + 4m_2 = 0, \\ 4k_2 + 4m_2 = 0. \end{cases}$$

Осыдан $k_2 = -m_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, яғни $\bar{n}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \cdot \bar{n}_2$ векторы үшін

$k_2^2 + m_2^2 = 1$ теңдігі орындалады. (3.67) формуладағы басқа шарттардың орындалатынына көз жеткізейік: $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$ немесе

$$k_1 k_2 + m_1 m_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = k_1 m_2 - k_2 m_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -1.$$

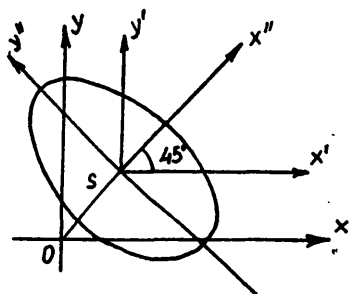
(3.67) формуладан

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}} x'' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'', \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}} x'' - \frac{1}{\sqrt{2}} y''. \end{cases}$$

x' пен y' -ті $5x'^2 + 8x'y' + 5y'^2 - 9 = 0$

теңдігіне қойып, $\frac{x''^2}{1} + \frac{y''^2}{9} = 1$ эллипстің ықшамды теңдеуін аламыз. Енді α бұрышын тауып, эллипстің суретін салуға болады (99-сурет):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_1}{k_1} = 1, \quad \alpha = 45^\circ, \quad a = 1, \quad b = 3.$$



99-сурет

2. Берілген екінші ретті сызық параболаны анықтайды, себебі $\delta = 0$ (3-жағдай). Енді μ_i , k_i , m_i , сандарын анықтайық: $\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 5}{2}$, $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0$. Егер $\lambda_1 = 5$ болса, онда (3.75) формуладан

$$\begin{cases} -k_1 - 2m_1 = 0, & k_1 = 2m, & k_1 = -2, & m_1 = 1, \\ -2k_1 - 4m_1 = 0, & k_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}, & m_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Сонда $\bar{n}_1 = \left\{ -\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$, $(\bar{n}_1, \bar{n}_1) = 1$.

Егер $\lambda = 0$ болса, онда (3.75) формуладан

$$\begin{cases} 4k_2 - 2m_2 = 0, \\ 2k_2 + m_2 = 0. \end{cases}$$

Осыдан $2k_2 = m_2$, $m_2 = 2$, $k_2 = 1$, $k_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $m_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Сонда,

$$\bar{n}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}, \quad (\bar{n}_2, \bar{n}_2) = 1, \quad (\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0.$$

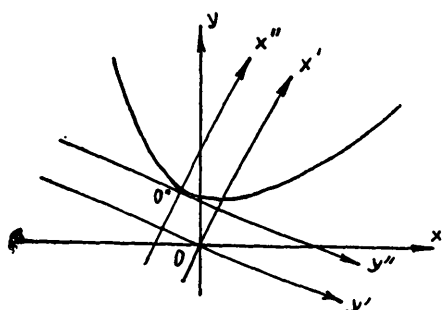
Сонымен,

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y', \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

түрлендіруі екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуін мына түрге өрнектейді

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 &= 5x'^2 - 6\sqrt{5}y' - 2\sqrt{5}x' + 7 = \\ &= 5\left(x'^2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}x'\right) - 6\sqrt{5}y' + 7 = 5\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{25} - \\ &- 6\sqrt{5}y' + 7 = 5\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 6\sqrt{5}y' + 6 = 5\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \\ &- 6\sqrt{5}\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right). \end{aligned}$$

Енді координат жүйесін параллель көшірейік:



100-сурет

$$\begin{cases} x' = x'' + \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ y' = y'' + \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Сонда

$$5x''^2 - 6\sqrt{5}y''^2 = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}.$$

Параболаның төбесі $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ — нүкте болады (100-сурет).

3.32. Екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуінің инварианттары

Екінші ретті сызықтың теңдеуін мына түрде қарастырайық:

$$L(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (3.92)$$

және оның коэффициенттерінен

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3.93)$$

анықтауыштарын құрайық, мұндағы $a_{ij} = a_{ji}$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$.

А н ы қ т а м а. I_1, I_2, I_3 сандары екінші ретті сызықтың *инварианттары* деп аталады.

1. Координат жүйесін бұру (1.5-тақырып). (3.92) теңдеуіне мынадай түрлендіру қолданайық:

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y', \\ y = c_{21}x' + c_{22}y'. \end{cases} \quad (3.94)$$

мұндағы c_{ij} — коэффициенттер.

Енді (3.94) түрлендіруін (3.92) теңдеуіне апарып қояйық, сонда

$$g(x', y') \equiv a_{11}(c_{11}x' + c_{12}y')^2 + 2a_{12}(c_{11}x' + c_{12}y')(c_{21}x' + c_{22}y') + \\ + a_{22}(c_{21}x' + c_{22}y')^2 + 2a_{13}(c_{11}x' + c_{12}y') + 2a_{23}(c_{21}x' + c_{22}y') + \\ + a_{33} = 0.$$

Осыдан

$$g(x', y') = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \quad (3.95)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}c_{11}^2 + 2a_{12}c_{11}c_{21} + a_{22}c_{21}^2, \\ a'_{12} &= a_{11}c_{11}c_{12} + a_{12}(c_{12}c_{21} + c_{22}c_{11}) + a_{22}c_{21}c_{22} = a'_{21}, \\ a'_{22} &= a_{11}c_{12}^2 + 2a_{12}c_{12}c_{22} + a_{22}c_{22}^2, \\ a'_{13} &= a_{13}c_{11} + a_{23}c_{21} = a'_{31}, \\ a'_{23} &= a_{13}c_{12} + a_{23}c_{22} = a'_{32}, \quad a'_{33} = a_{33}, \end{aligned} \quad (3.96)$$

(3.95) теңдіктен мына анықтауыштарды құрайық:

$$I'_1 = a'_{11} + a'_{22}, \quad I'_2 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}, \quad I'_3 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} \quad (3.97)$$

мұндағы $a'_{ij} = a'_{ji}$.

Т е о р е м а 3.4. Кез келген (3.94) — ортогональ түрлендіруі екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуін (3.95) түрге өрнектейді және I_1, I_2, I_3 — инварианттар бұл түрлендіруде өзгермейді, яғни

$$I_1 = I'_1, \quad I_2 = I'_2, \quad I_3 = I'_3. \quad (3.98)$$

Д ә л е л д е у і. Теореманың бірінші тұжырымын біз алдын ала дәлелдеп кеттік, яғни (3.92) теңдеуін (3.94) түрлендіруі арқылы (3.95) түрге өрнектедік. Енді теореманың екінші тұжырымын дәлелдейік. Алдымен (3.98) формуладағы бірінші теңдіктің орындалатындығына көз жеткізсйік. Ол үшін (3.95) формуладағы бірінші мен үшінші теңдіктерінен және (3.84) түрлендіруінің ортогональдығынан мына теңдікті аламыз:

$$\begin{aligned} I'_1 &= a'_{11} + a'_{22} = a_{11}c_{11}^2 + 2a_{12}c_{11}c_{21} + a_{22}c_{21}^2 + a_{11}c_{12}^2 + \\ &+ 2a_{12}c_{12}c_{22} + a_{22}c_{22}^2 = a_{11}(c_{11}^2 + c_{12}^2) + a_{22}(c_{21}^2 + c_{22}^2) + \\ &+ 2(c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22}) = a_{11} + a_{22} = I_1. \end{aligned}$$

Енді (3.98) формуладағы екінші теңдікті дәлелдейік:

$$\begin{aligned}
I'_2 &= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = a'_{11} \cdot a'_{22} - a'^2_{12} = \\
&= (a_{11}c^2_{11} + 2a_{12}c_{11}c_{21} + a_{22}c^2_{21})(a_{11}c^2_{12} + 2a_{12}c_{12}c_{22} + a_{22}c^2_{22}) - \\
&- [a_{11}c_{11}c_{12} + a_{12}(c_{12}c_{21} + c_{22}c_{11}) + a_{22}c_{22}c_{21}]^2 = c^2_{11}c^2_{11}c^2_{12} + \\
&+ 2a_{11}a_{12}c^2_{11}c_{22}c_{12} + 2a_{12}a_{11}c_{11}c_{21}c^2_{11} + a_{11}a_{22}c^2_{11}c_{22} + \\
&+ 4a^2_{12}c_{11}c_{21}c_{22}c_{12} + 2a_{12}a_{22}c_{11}c_{21}c^2_{22} + a_{11}a_{22}c^2_{21}c^2_{12} + \\
&+ 2a_{12}a_{22}c^2_{21}c_{22}c_{12} + a^2_{22}c^2_{21}c^2_{22} - [a_{11}c^2_{11}c^2_{12} + a^2_{12}(c_{12}c_{21} + c_{22}c_{11})^2 + \\
&+ a^2_{22}c^2_{22}c^2_{21} + 2a_{11}a_{12}c_{11}c_{12}(c_{12}c_{21} + c_{22}c_{11}) + 2a_{11}a_{22}c_{11}c_{12}c_{22}c_{21} + \\
&+ 2a_{12}a_{22}c_{22}c_{21}(c_{12}c_{21} + c_{22}c_{11})] = \\
&= a_{11}a_{22}(c^2_{11}c^2_{22} - 2c_{11}c_{12}c_{21}c_{22} + c^2_{21}c^2_{12}) + \\
&+ a^2_{12}(2c_{11}c_{21}c_{22}c_{12} - c^2_{12}c^2_{21} - c^2_{22}c^2_{11}) = (a_{11}a_{22} - a^2_{12})^2(c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12})^2 = \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \left(\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \right)^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = I_2.
\end{aligned}$$

Осы жолмен мына теңдіктің $I'_3 = I_3$ орындалатындығына оңай көз жеткізуге болады. Теорема толық дәлелденді.

2) Координат жүйесін параллель көшіру (1.4-тақырып).

Координат жүйесін параллель көшірсек, онда I_1, I_2, I_3 инварианттары өзгермейтінін дәлелдейміз. Ол үшін (3.99) теңдеуіне мынадай түрлендіруді қолданайық:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \end{cases} \quad (3.99)$$

сонда

$$\begin{aligned}
h(x', y') &= a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 + \\
&+ 2a_{13}(x' + x_0) + 2a_{23}(y' + y_0) + a_{33}.
\end{aligned}$$

Осыдан

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \quad (3.100)$$

мұндағы $a'_{11} = a_{11}$, $a'_{21} = a'_{12} = a_{12}$, $a'_{22} = a_{22}$,

$$a'_{31} = a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13},$$

$$a'_{32} = a'_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \quad (3.101)$$

$$a'_{33} = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}.$$

Соңғы формуладан $I'_1 = I_1$ және $I'_2 = I_2$ теңдіктерінің орындалатындығына оңай көз жеткізуге болады. Енді $I'_3 = I_3$ теңдіктің орындалатынын дәлелдейік. Шынында да

$$I'_3 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Осы анықтауыштың бірінші жатық жолын — x_0 -ге, ал екінші жатық жолын — y_0 -ге көбейтіп, оларды үшінші жатық жолының сәйкес элементтеріне қосайық:

$$I'_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a'_{31}x_0 + a'_{32}y_0 + a_{33} \end{vmatrix}.$$

Енді соңғы анықтауыштың бірінші тік жолын — x_0 -ге, ал екінші тік жолын — y_0 -ге көбейтіп, оларды үшінші тік жолының сәйкес элементтеріне қосайық:

$$I'_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = I_3.$$

Сонымен, біз мына теореманы дәлелдедік.

Т е о р е м а 3.4. Егер екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуін (3.99) түрлендіруімен өрнектесек, онда (3.92) теңдеуі (3.100) түріне өрнектеледі және бұл түрлендіруде I_1, I_2, I_3 инвариантары өзгермейді.

3.33. Екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуін инварианттар көмегімен ықшамды теңдеуге түрлендіру

Т е о р е м а (3.5). Координат жүйесін бұру және параллель көшіру нәтижесінде екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі төмендегі ықшамды теңдеулердің біріне

$$a''_{11}x''^2 + a''_{22}y''^2 + A = 0, \quad (3.102)$$

$$a''_{11}x''^2 + a''_{22}y'' = 0, \quad (3.103)$$

$$a''_{11}x''^2 + A = 0 \quad (3.104)$$

түрленуі үшін мына шарттардың орындалуы қажетті әрі жеткілікті:

(3.96) теңдеуіне $I_2 \neq 0$ шарты;

(3.97) теңдеуіне $I_2 = 0, I_3 \neq 0$ шарты;

(3.98) теңдеуіне $I_2 = 0, I_3 = 0, I_1 \neq 0$ шарты;

мұндағы $a''_{11} \neq 0, a''_{22} \neq 0$.

Д ә л е л д е у і. Қажеттілігі. Екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі (3.102) теңдеуге өрнектелді деп ұйғарып, $I_2 \neq 0$ болатындығын дәлелдесік. Ол үшін I_2 -ні есептейік:

$$I_2 = \begin{vmatrix} a''_{11} & 0 \\ 0 & a''_{22} \end{vmatrix} = a''_{11} \cdot a''_{22} \neq 0.$$

Ж е т к і л і к т і л і г і. Енді $I_2 \neq 0$ болсын деп ұйғарып, екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі (3.102) теңдеуге өрнектелетін-

дігін дәлелдейік. Ол үшін кері жорық, яғни екінші ретті сызықтың жалпы тендеуі не (3.103) не (3.104) тендеулерінің біріне өрнектелсін. Онда, теореманың қажетті шарты бойынша $I_2=0$ болады. Бұл қайшылық теореманың жеткілікті шартын дәлелдейді.

Теореманың қалған тұжырымдарын жаттығу ретінде оқырмандарға ұсынамыз.

Теорема 3.6. Координат жүйесін бұру және параллель көшіру нәтижесінде екінші ретті сызықтың жалпы тендеуі төмендегі тендеулердің біріне түрленеді:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0, \quad (3.105)$$

$$\lambda_1 x''^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} y''^2 = 0, \quad (3.106)$$

$$I_1^2 x''^2 + K = 0, \quad (3.107)$$

мұндағы λ_1 мен λ_2 сипаттамалық тендеу деп аталатын $\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0$ — тендеуінің сипаттамалық түбірлері,

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

семиинвариант деп аталады.

Дәлелдеуі. Екінші ретті сызықтың жалпы тендеуі (3.102) тендеуіне (3.105) өрнектелсін деп ұйғарып теореманың бірінші тұжырымын, яғни (3.105)-ды дәлелдейік. Ол үшін (3.105) формуланың I_1, I_2, I_3 — инварианттарын есептейік (3.102) тендеуі үшін

$$I_1 = a_{11}' + a_{22}'' = 0,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & a_{22}'' \end{vmatrix} = a_{11}' \cdot a_{22}'' \neq 0,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}'' & 0 \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = a_{11}' \cdot a_{22}'' \cdot A = I_2 \cdot A.$$

Сонымен, біріншіден, Виета теоремасы бойынша a_{11}' мен a_{22}'' — коэффициенттері

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0$$

Сипаттамалық тендеудің түбірлері, яғни $\lambda_1 = a_{11}'$, $\lambda_2 = a_{22}''$; екіншіден,

$$A = \frac{I_3}{I_2}.$$

Осылардан және (3.102) тендеуінен дәлелдеу керек (3.105) тендеуін аламыз. Теореманың бірінші тұжырымы дәлелденді. Қалған тұжырымдарын жаттығу ретінде оқырмандардың өзіне ұсынамыз.

3.34. Екінші ретті сызықтың түрін инварианттар көмегімен анықтау

Теорема (3.7). Екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі:

1.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

эллипсті анықтау үшін $I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 < 0$ шарттын орындалуы;

2.
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

жорымал эллипсті анықтау үшін $I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 > 0$ шарттын орындалуы;

3.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

қиылысатын екі түзуді (нүкте) анықтау үшін $I_2 > 0$, $I_3 = 0$ шарттын орындалуы;

4.
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

гиперболаны анықтау үшін $I_2 < 0$, $I_3 \neq 0$ — шарттын орындалуы;

5.
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

қиылысатын екі түзуді анықтау үшін $I_2 < 0$, $I_3 = 0$ шарттын орындалуы;

6.
$$x^2 = 2py \quad (y^2 = 2px)$$

параболаны анықтау үшін $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$ шарттын орындалуы;

7.
$$x^2 - a^2 = 0 \quad (y^2 - b^2 = 0)$$

нақты параллель түзуді анықтау үшін $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $K < 0$ шарттын орындалуы;

8.
$$x^2 + a^2 = 0 \quad (y^2 + b^2 = 0)$$

жорымал параллель екі түзуді анықтау үшін $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $K > 0$ — шарттын орындалуы;

9.
$$x^2 = 0 \quad (y^2 = 0)$$

беттескен екі түзуді анықтау үшін $I_3 = 0$, $I_2 = 0$, $K = 0$ шарттын орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Жеткіліктілігі. Теоремадағы $I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 < 0$ шарты орындалсын деп ұйғарып екінші ретті сызықтың (3.99) теңдеуі эллипсті анықтайтынын дәлелдейік. Берілуі бойынша $I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 < 0$, мұндағы $I_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$. Сондықтан, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ немесе $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, яғни сипаттамалық теңдеудің λ_1 мен λ_2 түбірлерінің таңбалары бірдей. Егер $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) болса, онда $I_2 > 0$ ($I_2 > 0$), $I_1 > 0$ ($I_1 < 0$) және $I_3 < 0$ ($I_3 > 0$). Сонымен, I_1 -дің таңбасы сипаттамалық түбірлердің таңбасымен бірдей, ал I_3 -тің таңбасы олардың таңбасына

қарама-қарсы. Енді, (3.99) тендеуін $-\frac{I_2}{I_3}$ өрнегіне көбейтіп, ықшамдап, жазайық:

$$\frac{x''^2}{-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2}} + \frac{y''^2}{-\frac{I_3}{\lambda_2 I_2}} = 1,$$

мұндағы $-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2} > 0$, $-\frac{I_3}{\lambda_2 I_2} > 0$.

Осыдан

$$\frac{x''^2}{a'^2} + \frac{y''^2}{b'^2} = 1,$$

мұндағы $a' = \sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2}}$, $b' = \sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_2 I_2}}$.

Сонымен, екінші ретті сызықтың жалпы тендеуі эллипстің тендеуін анықтайды.

Қажеттілігі. Енді екінші ретті сызықтың жалпы тендеуі эллипстің тендеуін анықтасын деп ұйғарып $I_2 > 0$ мен $I_1 \cdot I_3 < 0$ теңсіздіктерін дәлелдейік. Ол үшін кері жорық, яғни $I_2 \leq 0$ болсын. Онда, екінші ретті сызықтың тендеуі теореманың 4—9 пункттеріндегі қисық сызықтардың бірін анықтайды, ал олар эллипс емес. Сондықтан $I_2 > 0$. Енді $I_1 \cdot I_3 \geq 0$ болсын. Онда екінші ретті сызықтың жалпы тендеуі жорымал эллипсті немесе қиылысатын жорымал екі түзуді анықтайды. Сондықтан $I_1 \cdot I_3 \leq 0$. Теореманың бірінші тұжырымы дәлелденді. Қалған тұжырымдарын жаттығу ретінде оқырмандардың өзіне ұсынамыз.

Сонымен, егер $I_2 = 0$ болса; яғни $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, онда a_{11} мен a_{22} коэффициенттерінің таңбалары бірдей. Мысалы, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ болсын және $a_{11} = \alpha^2$, $a_{22} = \beta^2$ деп белгілейік. Онда $\alpha^2\beta^2 - a_{12}^2 = 0$. Осыдан $a_{12} = \alpha \cdot \beta$. Енді a_{11} , a_{22} , a_{12} — коэффициенттерінің мәнін екінші ретті сызықтың жалпы тендеуіне қояйық:

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \\ (\alpha x + \beta y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (3.108)$$

Керісінше, егер екінші ретті сызықтың жалпы тендеуіндегі x^2 , $x \cdot y$, y^2 мүшелері толық квадратқа жіктелсе, онда $I_2 = 0$. (3.108) тендеуінің I_3 инвариантын есептейік:

$$I_3 = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha \cdot \beta & a_{13} \\ \alpha \cdot \beta & \beta^2 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha^2(\beta^2 a_{33} - a_{23}^2) - \alpha\beta(\alpha\beta a_{33} - a_{23}a_{13}) + \\ + a_{13}(\alpha\beta a_{23} - \beta^2 a_{13}) = \alpha^2\beta^2 a_{33} - \alpha^2 a_{23}^2 - \alpha^2\beta^2 a_{33} + \alpha\beta a_{23}a_{13} + \\ + \alpha\beta a_{13}a_{23} - \beta^2 a_{13}^2 = -(\alpha^2 a_{23}^2 - 2\alpha\beta a_{13}a_{23} + \beta^2 a_{13}^2) = \\ = -(\alpha a_{23} - \beta a_{13})^2. \quad (3.109)$$

Егер $I_3 = 0$ болса, онда (3.109) формуладан

$$\alpha a_{23} = \beta a_{13} \text{ немесе } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

Осыдан

$$\begin{aligned} \alpha &= s a_{13}, \\ \beta &= s a_{23}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Керісінше, егер $\alpha = s a_{13}$, $\beta = s a_{23}$ болса, онда $I_3 = 0$. (3.110) формуладан

$$\begin{aligned} a_{13} &= k \alpha, \\ a_{23} &= k \beta, \end{aligned}$$

мұндағы $k = \frac{1}{s}$.

Сонымен, егер (3.108) екінші ретті сызық параллель екі түзудің теңдеуін анықтаса, онда параллель түзулердің теңдеуін мына түрде жазуға болады:

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2k(\alpha x + \beta y) + a_{33} = 0. \quad (3.111)$$

Егер $K = 0$ болса, онда

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha^2 & k \cdot \alpha \\ k \cdot \alpha & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta^2 & k \beta \\ k \cdot \beta & a_{33} \end{vmatrix} &= 0, \\ \alpha^2 a_{33} - k^2 \alpha^2 + \beta^2 a_{33} + k^2 \beta^2 &= 0, \\ (\alpha^2 + \beta^2) a_{33} - k^2 (\alpha^2 + \beta^2) &= 0, \quad k^2 = a_{33}. \end{aligned}$$

Осыдан және (3.111) формуладан мына теңдеуді аламыз:

$$(\alpha x + \beta y + k)^2 = 0.$$

Сонымен, егер (3.108) екінші ретті сызық беттесетін екі түзудің теңдеуін анықтаса, онда ол түзулердің теңдеуін мына түрде жазуға болады:

$$(\alpha x + \beta y + k^2)^2 = 0, \quad (3.112)$$

мұндағы $\alpha^2 = a_{11}$, $\beta^2 = a_{22}$, $k = \frac{1}{s}$, $s \neq 0$.

М ы с а л д а р. 1. Төмендегі екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеуін ықшамды теңдеуіне өрнекте:

1. $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$.
2. $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0$.
3. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x - 110y - 50 = 0$.
4. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$.
5. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$.
6. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$.
7. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$.
8. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.
9. $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$.

Ш е ш і м д е р і. 1. Алдымен екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуінің инварианттарын анықтайық:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = 9 + 4 = 13, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 36,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & -4 \\ 9 & -4 & 49 \end{vmatrix} = 1296.$$

Сонда, $I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 > 0$, яғни екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі жорымал эллипсті анықтайды. Енді жорымал эллипстің теңдеуін құрайық. Ол үшін мына түбірлерді анықтайық:

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0, \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0, \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 4.$$

Анықталған λ_1 , λ_2 -ні, I_2 , I_3 -тің мәндерін (3.105) теңдеуге қойып іздестіріп отырған жорымал эллипстің теңдеуін табамыз:

$$9x''^2 + 4y''^2 + 36 = 0 \text{ немесе } \frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{9} = -1.$$

$$2. I_1 = a_{11} + a_{22} = 41 + 34 = 75,$$

$$I_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 41 & 12 \\ 12 & 34 \end{vmatrix} = 1250,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 41 & 12 & 17 \\ 12 & 34 & -56 \\ 17 & -56 & 129 \end{vmatrix} = 0.$$

Сонда, $I_2 > 0$, $I = 0$, яғни екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі нүкте (эллипс). Енді осы эллипстің теңдеуін табайық. Ол үшін сипаттамалық теңдеуді құрып, оның сипаттамалық түбірлерін анықтайық:

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0, \lambda^2 - 45\lambda + 1250 = 0, \lambda_1 = 25, \lambda_2 = 50.$$

Сонымен, λ_1 , λ_2 , I_2 , I_3 -тің мәндерін (3.105) теңдеуіне қойып іздестіріп отырған теңдеуді табамыз:

$$25x''^2 + 50y''^2 = 0 \text{ немесе } \frac{x''^2}{1} + \frac{y''^2}{2} = 0.$$

Соңғы теңдікті тек $x'' = 0$, $y'' = 0$ мәндері ғана қанағаттандырады, яғни олар координат жүйенің бас нүктесінің координаттары.

3. $I_1 = 25$, $I_2 = 0$, $I_3 = -15625 \neq 0$, яғни екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі параболаның теңдеуін анықтайды. Енді осы параболаның теңдеуін анықтайық. Ол үшін сипаттамалық түбірлерді анықтаймыз:

$$\lambda^2 - 25\lambda = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 25.$$

Осыдан

$$25y''^2 - 2 \sqrt{\frac{-15625}{25}} x''^2 = 0, y''^2 = 2x''^2.$$

$$4. I_1 = 25, I_3 = 0, I_2 = 0,$$

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & -80 \\ -80 & 425 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 60 \\ 60 & 425 \end{vmatrix} = 625.$$

Яғни, екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі параллель жорымал екі түзудің теңдеуін анықтайды. Енді параллель жорымал екі түзудің теңдеуін анықтайық. Ол үшін I_1 мен K -ның мәндерін (3.107) теңдеуіне қойып, іздестіріп отырған теңдеуді табамыз:

$$625y''^2 + 625 = 0 \text{ немесе } y'' = -i, y'' = i.$$

5. $I_1 = 13, I_2 = 0, I_3 = 0, K = 0$, яғни екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі беттескен екі түзудің теңдеуін анықтайды. I_1 мен K -ның мәндерін (3.107) теңдеуіне қойып, іздестіріп отырған теңдеуімізді табамыз:

$$169y''^2 = 0 \text{ немесе } y'' = 0, y'' = 0.$$

6. $I_1 = 13, I_2 = 0, I_3 = 0, K = -169$, яғни екінші ретті сызықтың теңдеуі нақты параллель екі түзуді анықтайды. Енді (3.107) теңдеуден іздестіріп отырған сызықтың ықшамды теңдеуін аламыз

$$169x''^2 - 169 = 0 \text{ немесе } x'' = 1, x'' = -1.$$

7. Алдымен инварианттарын табайық:

$I_1 = 35, I_2 = 150, I_3 = -1950$, осыдан $I_2 > 0, I_1 \cdot I_3 > 0$. Сонымен, екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі эллипстің теңдеуін анықтайды. Енді сипаттамалық түбірлерді анықтайық:

$$\lambda^2 - 35\lambda + 150 = 0, \lambda_1 = -5, \lambda_2 = -30.$$

Осыдан және (3.105) формуладан мына теңдікті аламыз:

$$-5x''^2 - 30y''^2 - \frac{1950}{50} = 0 \text{ немесе } \frac{x''^2}{30} + \frac{y''^2}{5} = 1.$$

8. $I_2 = -4, I_1 = 3, I_3 = 144$. Осыдан $I_2 < 0, I_3 \neq 0$, яғни екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі гиперболаның теңдеуін анықтайды. Енді сипаттамалық түбірлерін табайық:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1.$$

Осылардан және (3.100) теңдеуінен гиперболаның теңдеуін табамыз:

$$\frac{x''^2}{9} - \frac{y''^2}{36} = 1.$$

9. $I_1 = 39, I_2 = -676, I_3 = 0$. Осыдан $I_2 < 0, I_3 = 0$, яғни екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі қиылысатын екі түзудің теңдеуін анықтайды. Енді сипаттамалық түбірлерін анықтайық:

$$\lambda^2 - 36\lambda - 676 = 0, \lambda_1 = -13, \lambda_2 = 52.$$

Осылардан және (3.106) теңдеуінен қиылысатын екі түзудің теңдеуін табамыз:

$$\begin{aligned} -13x''^2 + 52y''^2 = 0, \quad x''^2 - 4y''^2 = 0, \\ x'' - 2y'' = 0 \text{ және } x'' + 2y'' = 0. \end{aligned}$$

Мысалдар. 2. Төмендегі екінші ретті сызықтардың жалпы тендеулерінің түрін анықта.

1. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y + 4 = 0$.
2. $3x^2 + 4\sqrt{3}xy + 4y^2 + 6x - 3y - 3 = 0$.
3. $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 24x - 18y + 9 = 0$.

Шешімдері. 1. Берілген екінші ретті сызықтың бастапқы үш мүшесін толық квадратқа толықтырайық:

$$(2x - 3y)^2 - (2x - 3y) + 4 = 0.$$

Осыдан және (3.11) тендеуден берілген екінші ретті сызықтың жалпы тендеуі параллель екі түзудің тендеуі, яғни $I_2 = 0$, $I_3 = 0$.

2. Бастапқы үш мүшесін толық квадратқа толықтырайық:

$$(\sqrt{3}x + 2y)^2 + 3(2x - y) - 3 = 0$$

Осыдан және (3.108) тендеуден екінші ретті сызықтың жалпы тендеуі — парабола, яғни $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$.

3. Берілген екінші ретті сызықтың жалпы тендеуін өрнектейік:

$$\begin{aligned} (4x - 3y)^2 + 6(4x - 3y) + 9 = 0, \\ (4x - 3y + 3)^2 = 0. \end{aligned}$$

Осыдан, және (3.112) тендеуден берілген екінші ретті сызық — беттесетін екі түзу.

3.35. Екінші ретті сызық пен түзудің қиылысуы және оның жанама тендеуі

Бізге екінші ретті сызықтың жалпы тендеуі берілсін:

$$L(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Алдымен екінші ретті сызық пен параметрлік тендеуімен берілген кез келген l :

$$\begin{cases} x = \bar{x} + mt, \\ y = \bar{y} + nt \end{cases} \quad (3.113)$$

түзуінің қиылысу нүктесінің координаттарын анықтайық, мұндағы $\bar{x}$, $\bar{y}$ — екінші ретті сызық бойынан тысқары жатқан M нүктесінің координаттары. Ол үшін (3.113)-ті сызықтың жалпы тендеуіне апарып қояйық:

$$\begin{aligned} L(\bar{x} + mt, \bar{y} + nt) \equiv a_{11}(\bar{x} + mt)^2 + 2a_{12}(\bar{x} + mt)(\bar{y} + nt) + \\ + a_{22}(\bar{y} + nt)^2 + 2a_{13}(\bar{x} + mt) + 2a_{23}(\bar{y} + nt) + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Осыдан} \quad At^2 + 2Bt + C = 0, \quad (3.114)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} A &= a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2, \\ B &= (a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13})m + (a_{12}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23})n, \\ C &= L(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned} \quad (3.115)$$

Соңғы теңдіктен екінші ретті сызық пен түзудің қиылысу сызықтарының t_1 мен t_2 параметрлерін тауып, оны (3.113)-ке қойсақ, онда олардың қиылысу нүктелерінің координаттарын табамыз, яғни $M_1(x_1, y_1)$ $M_2(x_2, y_2)$, мұндағы

$$x_1 = \bar{x} + mt_1, y_1 = \bar{y} + nt_1, x_2 = \bar{x} + mt_2, y_2 = \bar{y} + nt_2.$$

Енді екінші ретті сызықтың бойынан $M_0(x_0, y_0)$ нүкте алайық. Егер l түзуі мен екінші ретті сызық $M_0(x_0, y_0)$ нүктеде жанасса, онда $C=0$, себебі M_0 нүктенің координаттары екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуін қанағаттандырады, сондықтан

$$At^2 + 2Bt = 0 \quad (3.116)$$

болады. Егер (3.113) түзуі екінші ретті сызықтың $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіндегі жанаманың теңдеуі болса, онда $M_1(x_1, y_1)$ мен $M_2(x_2, y_2)$ нүктелері $M_0(x_0, y_0)$ нүктемен беттеседі, яғни мына теңдік орындалады

$$x_0 = x_1 = x_2, y_0 = y_1 = y_2.$$

Олай болса, (3.114) теңдіктен анықталған t_1 мен t_2 -нің мәндері нөлге тең болуы керек, ал бұл тек қана $B=0, C=0$ болғанда ғана орындалады.

Сонымен, егер (3.113) түзуі екінші ретті сызықтың $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіне жүргізілген жанама теңдеуі болса, онда $C=0$ және $B=0$, яғни (3.115)-тен:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})m + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})n = 0.$$

Енді жанаманың теңдеуін табайық. $\vec{S} = \{m; n\}$ векторы — l түзуінің бағыттауыш векторы, олай болса, $\vec{S}$ векторына коллинеар $\vec{S}_1$ векторы ретінде мына $\{a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}; -a_{11}x_0 - a_{12}y_0 - a_{13}\}$ векторды алуға болады. Сонымен, $M_0(x_0, y_0)$ нүктедегі екінші ретті сызықтың жанама теңдеуі, осы нүктеден өтіп $\vec{S}_1$ векторына коллинеар болатын түзудің канонды теңдеуімен анықталады:

$$\frac{x - x_0}{a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}} = \frac{y - y_0}{-a_{11}x_0 - a_{12}y_0 - a_{13}}.$$

Осыдан

$$\begin{aligned} & - (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + a_{11}x_0^2 + a_{12}x_0y_0 + a_{13}x_0 - \\ & - (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y + a_{22}y_0^2 + a_{12}x_0y_0 + a_{23}y_0 = 0 \end{aligned}$$

немесе

$$\begin{aligned} & a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} - \\ & - (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x - (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y - a_{33} - a_{13}x_0 - \\ & - a_{23}y_0 = 0. \end{aligned}$$

$M_0(x_0, y_0)$ нүкте екінші ретті сызық бойында жатқандықтан

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{23}y_0^2 + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0.$$

Сонымен, екінші ретті сызық бойында жатқан $M_0(x_0, y_0)$ нүктеге жүргізілген екінші ретті сызықтың жанама теңдеуі мына түрде анықталады:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0. \quad (3.117)$$

Мысалдар. 1. Екінші ретті $2x^2 - xy + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ сызықтың $M_0(1, -2)$ нүктесіне жүргізілген жанама теңдеуін тап.

Шешімі. Берілген $M_0(1, -2)$ нүкте екінші ретті сызық бойында жатыр. Сондықтан, M_0 нүктенің координаттары берілген екінші ретті сызықтың теңдеуін қанағаттандырады. Енді (3.117) — жанама теңдеуін алайық, мұндағы $a_{11}=2$, $a_{12}=-\frac{1}{2}$, $a_{22}=-1$, $a_{13}=-1$, $a_{23}=1$, $a_{33}=-2$, $x_0=1$, $y_0=-2$, осыдан екінші ретті сызықтың жанама теңдеуін табамыз:

$$(2+1-1)x + (-\frac{1}{2}-2+1)y - 1-2-2=0$$

немесе

$$4x - 3y - 10 = 0.$$

2. Екінші ретті $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 12x - 12y + 4 = 0$ сызыққа $A(1, 1)$ нүктеден жүргізілген жанама теңдеуін тап.

Шешімі. Берілген $A(1, 1)$ нүкте екінші ретті сызықтан тысқары жатыр. Екінші ретті сызықтың бойынан $M_0(x_0, y_0)$ нүкте алайық. Сонда, іздестіріп отырған жанама теңдеу $A(1, 1)$ мен $M_0(x_0, y_0)$ нүктелерінен өтетін түзудің теңдеуі болады. Енді M_0 нүктенің координаттарын анықтайық. $A(1, 1)$ нүктенің координаттары іздестіріп отырған екінші ретті сызықтың жанама теңдеуін, ал $M_0(x_0, y_0)$ нүктенің координаттары жанама теңдеу мен екінші ретті сызықтың теңдеуін де қанағаттандырады, сондықтан

$$\begin{cases} 3x_0^2 + 10x_0y_0 + 3y_0^2 - 12x_0 - 12y_0 + 4 = 0, \\ 3x_0 + 5y_0 - 6 + 5x_0 + 3y_0 - 6 - 6x_0 - 6y_0 + 4 = 0. \end{cases}$$

Осы жүйені шешіп, екі нүктенің координаттарын табамыз, яғни $M_0(2 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5})$, $M_0(2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$. Енді M_0 мен M нүктелерінің координаттарын (3.117) жанама теңдеуіне апарып қойып, $A(1, 1)$ нүктеден екінші ретті сызыққа жүргізілген жанамалар теңдеуін аламыз:

$$(5 - \sqrt{5})x + (5 + \sqrt{5})y - 10 = 0,$$

$$(5 + \sqrt{5})x + (5 - \sqrt{5})y - 10 = 0.$$

3.36. Екінші ретті сызықтың диаметрінің теңдеуі

А н ы қ т а м а. Екінші ретті сызықтың *диаметрі* деп осы сызққа жүргізілген параллель хордалар ортасындағы нүктелердің геометриялық орындарын айтамыз.

Бізге екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі және осы сызықтың хордалары параметрлік теңдеуімен берілсін, мұндағы $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ нүкте M_1M_2 хорда бойында жатқан нүкте, ал M_1 мен M_2 нүктелерінің координаттарын 3.35 тақырыпта анықтағанбыз.

Екінші ретті сызықтың диаметрінің теңдеуін табу үшін M_1M_2 хордада жатқан $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ нүкте осы хordаның орта нүктесі болсын деп ұйғарайық, яғни $\bar{M}$ нүкте M_1M_2 хорданы тең екі бөлікке бөледі. Олай болса, $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ нүктенің координаттары былай анықталады:

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{2\bar{x}+m(t_1+t_2)}{2},$$

$$\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{2\bar{y}+n(t_1+t_2)}{2}$$

Ұйғаруымыз бойынша

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad \bar{y} = \frac{y_1+y_2}{2}$$

теңдігі орындалуы керек, ал бұл тек қана $t_1+t_2=0$ болғанда ғана орындалады. Олай болса, (3.114) теңдеудегі $B=0$ болады, яғни

$$(a_{11}\bar{x}+a_{12}\bar{y}+a_{13})m + (a_{12}\bar{x}+a_{22}\bar{y}+a_{23})n = 0$$

немесе

$$a_{11}\bar{x}+a_{12}\bar{y}+a_{13}+k(a_{12}\bar{x}+a_{22}\bar{y}+a_{23})=0, \quad (3.118)$$

мұндағы $k = \frac{n}{m}$ — бұрыштық коэффициент, $m \neq 0$.

Сонымен, соңғы теңдікті қанағаттандыратын $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ нүктенің координаттары хordаны тең екі бөлікке бөледі, ал бұл хordаның бағыттауыш векторы $S=\{m; n\}$. Барлық параллель хордаларды тең екі бөлікке бөлетін және координаттары соңғы теңдікті қанағаттандыратын $M(x, y)$ нүктенің геометриялық орны анықтама бойынша екінші ретті сызықтың диаметрі, олай болса, соңғы теңдіктен екінші ретті сызықтың диаметрінің теңдеуін аламыз:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}+k(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})= \quad (3.119)$$

немесе

$$(a_{11}m+a_{12}n)x + (a_{12}m+a_{22}n)y + a_{13}m+a_{23}n=0.$$

(3.119) формуладағы k -ны — бұрыштық коэффициентті осы диаметр тең екі бөлікке бөлетін өзара параллель хордалардың бағыты дейміз.

А н ы қ т а м а л а р. Параллель хордалар орталарынан өтетін (3.119) диаметрді осы хордаларға *түйіндес диаметр* дейміз,

ал түйіндес диаметрдің k' бұрыштық коэффициенті осы диаметрдің бағыты деп аталады.

Параллель хордалардың k бұрыштық коэффициенті мен оларға түйіндес диаметрдің k' бұрыштық коэффициенттері түйіндес бағыттар деп аталады.

Бас диаметр деп өзара әрі түйіндес әрі перпендикуляр диаметрлерді айтамыз, ал өзара әрі түйіндес әрі перпендикуляр бағыттар бас бағыттар деп аталады.

Енді диаметрдің бұрыштық коэффициентін табайық. Ол үшін (3.119) диаметрдің бағыттауыш векторын $S' = \{m'; n'\}$ деп белгілейік.

Сонда

$$m' = -(a_{12}m + a_{22}n), \quad n' = a_{11}m + a_{12}n.$$

Бірінші теңдікті — n' -ке, ал екінші m' -ке көбейтіп, қосайық:

$$a_{12}mn' + a_{22}nn' + a_{11}mm' + a_{12}nm' = 0 \quad (3.120)$$

немесе

$$a_{11}mm' + a_{12}(mn' + nm') + a_{22}nn' = 0.$$

Соңғы теңдікті $\frac{1}{mm'}$ -ке көбейтейік, сонда

$$a_{11} + a_{12}(k' + k) + a_{22}k' \cdot k = 0, \quad (3.121)$$

мұндағы $k = \frac{n}{m}$, $k' = \frac{n'}{m'}$.

Сонымен, (3.121) формуладан хорда мен түйіндес диаметрдің бұрыштық коэффициенттерін анықтаймыз, яғни

$$k' = -\frac{a_{11} + ka_{12}}{a_{12} + ka_{22}} \text{ және } k = \frac{a_{11} + k'a_{12}}{a_{12} + k'a_{22}}. \quad (3.122)$$

(3.121) формуланы бас диаметрдің түйіндестік шарты, ал $k = -\frac{1}{k'}$ -ті перпендикулярлық шарты деп атайды.

Енді $k' = -\frac{1}{k}$ -ны (3.121)-ке апарып орнына қояйық, сонда

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0. \quad (3.123)$$

Осы квадрат теңдеуді шешіп, $k = k_1$ мен $k = k_2$ бұрыштық коэффициенттерін табамыз және олар өзара әрі перпендикуляр әрі түйіндес бағыттарды анықтайды, яғни бас бағыттар.

Енді $S = \{m; n\}$ векторының координаттарын анықтайық. Ол үшін (3.119) диаметр теңдеуін қарастырайық. Бұл диаметр өзара параллель хордаларға перпендикуляр, егер S векторымен $S_1 = \{a_{11}m + a_{12}n; a_{12}m + a_{22}n\}$ векторы коллинеар болса, онда

$$\begin{cases} a_{11}m + a_{12}n = \lambda m, \\ a_{12}m + a_{22}n = \lambda n \end{cases}$$

немесе

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)m + a_{12}n = 0, \\ a_{12}m + (a_{22} - \lambda)n = 0. \end{cases}$$

Осы жүйеден 5 векторының координаттарын анықтаймыз. Сонымен, екінші ретті сызықтың диаметрінің теңдеуін табу үшін (3.123) формуладан k_1 мен k_2 коэффициенттерін тауып ($k_1 \cdot k_2 = -1$), олардың мәндерін (3.119) теңдеуіне қоямыз.

Мысалдар. 1. Екінші ретті $x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ сызықтың бас диаметр теңдеулерін тап.

Шешімі. Алдымен (3.123) формуладан екінші ретті сызықтың бас бағыттарын анықтаймыз: $2k^2 + (1+2)k - 2 = 0$, $2k^2 + 3k - 2 = 0$,

$$k_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}, \quad k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = -2.$$

Енді $k_1 = \frac{1}{2}$ бұрыштық коэффициентке сәйкес келетін бас диаметр теңдеуін (3.119) формуладан анықтаймыз:

$$(x + 2y - 1) + \frac{1}{2}(2x - 2y + 1) = 0 \quad \text{немесе} \quad y = -2x + \frac{1}{2}.$$

Осы сияқты ($k_2 = -2$) екінші бас диаметр теңдеуін табамыз:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

2. Екінші ретті $2x^2 + 4xy - 3y^2 + x - y - 5 = 0$ сызықтың $k = -\frac{2}{5}$ бағытқа түйіндес диаметрінің бұрыштық коэффициентін және түйіндес диаметрлерін тап.

Шешімі. Берілген екінші ретті сызықтың диаметрін (3.119)-дан табамыз:

$$2x + 2y + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}\left(2x - 3y - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{немесе} \quad 12x - 32y - 7 = 0. \\ (3.129) \text{ формуладан}$$

$$k' = - \frac{2 + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 2}{2 + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-3)} = - \frac{3}{8}.$$

Енді $12x - 32y - 7 = 0$ диаметрге түйіндес диаметрдің теңдеуін (3.119) формуладан анықтаймыз:

$$2x + 2y + \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\left(2x - 3y - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{немесе} \quad 20x + 50y + 11 = 0.$$

Сонымен, $12x - 32y - 7 = 0$ мен $20x + 50y + 11 = 0$ теңдеулері берілген екінші ретті сызықтың түйіндес диаметрлерінің теңдеулері болады.

3. Екінші ретті $x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ сызықта жатқан абсциссасы -1 -ге тең нүктеге жүргізілген жанама теңдеуін тап.

Шешімі. $M_0(-1, y_0)$ нүкте екінші ретті сызықтың бойында жатқандықтан,

$$1 - 2y_0 + 3y_0^2 + 2 - 2y_0 - 3 = 0 \quad \text{немесе} \quad 3y_0^2 - 4y_0 = 0.$$

Осы квадрат тендеуді шешіп: $y_0=0$, $y_0=\frac{4}{3}$, екінші ретті сызықта жатқан $M_0(-1, 0)$ мен $M'_0(-1, \frac{4}{3})$ нүктелерін табамыз. Енді (3.118)— жанама тендеуін пайдаланып, M_0 мен M'_0 нүктелерге жүргізілген екінші ретті сызықтың екі жанама тендеулерін табамыз:

$$\begin{aligned}x+y+1=0 &— M_0 \text{ нүктеге жүргізілген жанама тендеуі,} \\x-3y+5=0 &— M'_0 \text{ нүктеге жүргізілген жанама тендеуі.}\end{aligned}$$

3.37. Екінші ретті сызықтың асимптотасы

Анықтама. Асимптотаның бағыты деп

$$A \equiv a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 0 \quad (3.124)$$

тендеуін қанағаттандыратын бағыттауыш $\vec{S}$ векторының m , n координаттарын айтамыз.

Берілген (3.124) тендіктің екі жағын $\frac{1}{m^2}$ -қа көбейтейік, сонда

$$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0 \quad (3.125)$$

тендеуін аламыз. Осы тендікті шешіп, асимптотаның екі бағытын яғни асимптотаның бұрыштық коэффициенттерін анықтаймыз. Бірақ, (3.119) бен (3.125) тендіктеріндегі k -ның мәндері әртүрлі. (3.119) тендеудегі k — параллель хордалардың бұрыштық коэффициенті болса, ал (3.125)-дегі k — асимптоталық бағыттың бұрыштық коэффициенті. Егер (3.122) түйіндістік шартындағы k' -тің орнына k -ны қойсақ, онда (3.121) шарттан (3.124) тендікті аламыз. Сондықтан, асимптотаның тендеуін табу үшін (3.119) тендеуіндегі k -ның орнына (3.125) тендігінің k_1 , k_2 түбірлерін қойсақ жеткілікті.

Сонымен екінші ретті сызықтың асимптота тендеуін табу үшін (3.125) тендеуінен k_1 мен k_2 мәндерін тауып, оларды (3.119) тендеуіндегі k -ның орнына қойып табамыз.

Енді екінші ретті сызықтың асимптоталарының классификацияларын қарастырайық. Ол үшін (3.125) тендеуінің түбірлерін табайық:

$$k_{1,2} = \frac{-2a_{12} \pm \sqrt{4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}}}{2a_{22}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-(a_{11}a_{12} - a_{12}^2)}}{a_{22}}.$$

Сонда

$$k_{1,2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-I_2}}{a_{22}}.$$

Сондықтан үш жағдайды қарастырайық.

1) Егер $I_2 < 0$ болса, онда екінші ретті сызықтың екі асимптотасы бар және ол гиперболо типтес екінші ретті сызық деп аталады. Олар: гиперболо және қиылысатын екі түзу.

2) Егер $I_2 > 0$ болса, онда екінші ретті сызықтың нақты асимптотасы бар және ол эллипс типтес екінші ретті сызық деп аталады. Олар: эллипс, жорымал эллипс және қиылысатын екі түзу.

3) Егер $I_2 = 0$ болса, онда екінші ретті сызықтың бір асимптотасы бар және ол парабола типтес екінші ретті сызық деп аталады. Олар: парабола, параллель екі түзу және беттескен екі түзу.

Мысал. Екінші ретті $2x^2 + xy - y^2 - 7x + 5y + 3 = 0$ сызықтың асимптоталарын анықта.

Шешімі. Алдымен асимптотаның бағыттарын (3.125) формуладан табайық:

$$-k^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}k + 2 = 0, \quad k^2 - k - 2 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \mp 3}{2}, \quad k = -1, \quad k_2 = 2.$$

Сонымен, $k_1 = -1$ мен $k_2 = 2$ бағыттары бар хордаларға түйіндес диаметрдің теңдеуін (3.118) формуладан анықтаймыз, яғни (3.118)-ге k_1 мен k_2 -нің мәндерін қойып, екінші ретті сызықтың асимптоталарын табамыз:

$$2x + \frac{1}{2}y - \frac{7}{2} - \left(\frac{1}{2}x - y + \frac{5}{2}\right) = 0, \quad x + y - 4 = 0,$$

$$2x + \frac{1}{2}y - \frac{7}{2} + 2\left(\frac{1}{2}x - y + \frac{5}{2}\right) = 0, \quad 2x - y + 1 = 0.$$

Сонымен, $x + y - 4 = 0$ мен $2x - y + 1 = 0$ — екінші ретті сызықтың асимптота теңдеулері.

3.38. Эллипс пен гиперболаның орналасуы

Бізге эллипс пен гипербола жалпы теңдеулерімен берілсін, яғни бұл жағдайда $I_2 \neq 0$ болса, онда қарастырып отырған екінші ретті сызық не эллипсті не гиперболаны анықтайды. Берілген екінші ретті сызықты қарастырып отырған декарт координат жүйесін параллель көшіру және бұру арқылы екінші ретті сызықтың ықшамды теңдеуін аламыз. Енді осы ықшамды теңдеудің сызбасын салу үшін төмендегі пункттерді орындау қажет:

1) Екінші ретті сызықтың I_1 , I_2 , I_3 — инварианттарын (3.93) формуладан анықтаймыз.

2) Екінші ретті сызықтың $S(x_0, y_0)$ — центрін табамыз. Ол үшін екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуінен $L'_x(x, y)$ пен $L'_y(x, y)$ туындыларын тауып төмендегі жүйені шешсек жеткілікті:

$$\begin{cases} L'_x(x, y) \equiv a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = -a_{13}, \\ L'_y(x, y) \equiv a_{21}x_0 + a_{22}y_0 = -a_{23} \end{cases}$$

және оны XOY — координат жүйесіне орналастырамыз.

4) Сипаттамалық теңдеудің түбірлерін табамыз

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0.$$

5) Екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуінің ықшамды теңдеуін табамыз. Ол үшін

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$$

теңдеуінен оның ықшамды теңдеуін аламыз, мұндағы λ_1 мен λ_2 сипаттамалық теңдеудің түбірлері.

6) Екінші ретті сызықтың диаметр теңдеуін төмендегі формуладан анықтаймыз

$$L'_x(x, y) + kL'_y(x, y) = 0$$

және олардың сызбасын саламыз, мұндағы k — бұрыштық коэффициент,

$$a_{11}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$$

— квадрат теңдеуінің түбірлері ($k_1 \cdot k_2 = -1$).

7) Екінші ретті сызықтың асимптота теңдеулерін

$$L'_x(x, y) + kL'_y(x, y) = 0$$

теңдеуінен табамыз, мұндағы k — бұрыштық коэффициент,

$$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0$$

— квадрат теңдеуінің түбірлері (егер екінші ретті сызық эллипс болса, онда оның асимптотасы жоқ; егер гипербола болса, онда оның асимптотасы бар).

8) Екінші ретті сызықтың $X''SY''$ — координат жүйесіндегі SX'' , SU'' өстерімен қиылысу нүктелерін анықтаймыз.

9) Екінші ретті сызықтың ықшамды теңдеуінің сызбасын координат жүйесіне саламыз.

Мысал. Берілген екінші ретті сызықтың сызбасын салыңдар.

а) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$

б) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0.$

Шешімдері. а) 1) Екінші ретті сызықтың I_1, I_2, I_3 инварианттарын (3.93) формуладан табайық:

$$I_1 = 6, I_2 = -16, I_3 = 128.$$

2) $I_2 < 0, I_3 \neq 0$. Сонымен, екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі гиперболаның теңдеуін анықтайды.

3) Екінші ретті сызықтың, яғни гиперболаның центрін анықтайық. Ол үшін екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуінен

$L'_x(x, y)$ пен $L'_y(x, y)$ туындаларын тауып, оларды нөлге теңестіріп, жүйені шешейік:

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = 6x + 10y - 2 = 0, \\ L'_y(x, y) = 10x + 6y - 14 = 0 \end{cases}$$

немесе

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1, \\ 5x + 3y = 7. \end{cases}$$

Осыдан, $x=2$, $y=-1$, яғни $S(2, -1)$ — нүкте параболаның центрі және оны $ХОУ$ координатынан табамыз (101-сурет).

4) Сипаттамалық теңдеудің түбірлерін табамыз:

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0, \quad \lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = -2.$$

5) Екінші ретті сызқтың ықшамды теңдеуін табамыз:

$$8x''^2 - 2y''^2 - 8 = 0.$$

Осыдан

$$x''^2 - \frac{y''^2}{4} = 1$$

— гипербола.

6) Екінші ретті сызқтың диаметрінің теңдеуін табайық:

$$\begin{aligned} 5k^2 - 5 &= 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \\ 6x + 10y - 2 + 1(10x + 6y - 14) &= 0, \\ 6x + 10y - 2 - 1(10x + 6y - 14) &= 0. \end{aligned}$$

Осылардан,

$$\begin{aligned} 16x + 16y - 16 &= 0, \\ -4x + 4y + 12 &= 0. \end{aligned}$$

Сонымен, $x + y - 1 = 0$ мен $x - y - 3 = 0$ түзулері берілген екінші сызбасын саламыз (101-сурет).

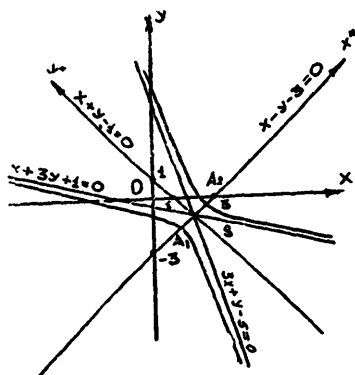
7) Екінші ретті сызқтың асимптота теңдеулерін табайық:

$$\begin{aligned} 3k^2 + 10k + 3 &= 0, \quad k_1 = -\frac{1}{3}, \quad k_2 = -3, \\ 6x + 10y - 2 - \frac{1}{3}(10x + 6y - 14) &= 0, \\ 6x + 10y - 2 - 3(10x + 6y - 14) &= 0. \end{aligned}$$

Осылардан

$$8x + 24y + 8 = 0, \quad -24x - 8y + 40 = 0.$$

Сонымен, $x + 3y + 1 = 0$ мен $3x + y - 5 = 0$ теңдеулері — гипербола-ның асимптота теңдеулері. Енді, осы асимптоталардың сызбасын саламыз (101-сурет).



101-сурет

8) Гиперболоаның SX'' өсімен қиылысу нүктелерін табайық. Егер $y''=0$ болса, онда

$$x''^2 = 1, x'' = 1, x'' = -1.$$

Сонымен, гипербола SX'' өсін $A_1(-1, 0)$ мен $A_2(1, 0)$ нүктелерінде қияды.

9) Гиперболоаның сызбасын $X''SY''$ координатында тұрғызамыз (101-сурет).

6) 1) Екінші ретті сызықтың I_1, I_2, I_3 — инварианттарын (3.93) формуладан табамыз:

$$I_1 = 50, I_2 = 576, I_3 = -165888.$$

2) $I_2 > 0, I_1 \cdot I_3 < 0$. Сонымен, екінші ретті сызық — эллипс.

3) Екінші ретті сызықтың — эллипстің центрін анықтайық. Ол үшін екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуінен $L'_x(x, y)$ пен $L'_y(x, y)$ туындыларын тауып, оларды нөлге теңестіріп жүйені шешейік:

$$\begin{aligned} L'_x(x, y) &\equiv 50x - 14y + 64 = 0, \\ L'_y(x, y) &\equiv -14x + 50y - 64 = 0, \text{ немесе } \begin{cases} 25x - 7y = -32, \\ 7x - 25y = -32. \end{cases} \end{aligned}$$

Осыдан, $x = -1, y = 1$. Сонымен, $S(-1, 1)$ нүктесі эллипстің центрі және оны XOY координатынан табамыз (102-сурет).

4) Сипаттамалық теңдеудің түбірлерін табамыз:

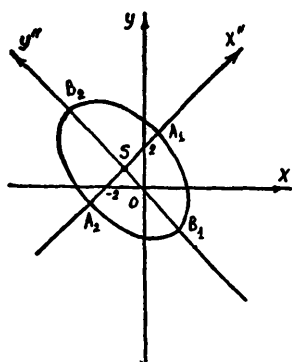
$$\lambda^2 - 50\lambda + 576 = 0, \lambda_1 = 32, \lambda_2 = 18.$$

5) Екінші ретті сызықтың ықшамды теңдеуін анықтайық:

$$32x''^2 + 18y''^2 - \frac{165688}{576} = 0$$

Осыдан

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{16} = 1 \quad \text{— эллипс.}$$



102-сурет

6) Екінші ретті сызықтың диаметр теңдеулерін табамыз.

7) Эллипстің асимптотасы болмайды.

8) Эллипстің $X''SY''$ координат жүйесінде SX'' пен SU'' координат өстерімен қиылысу нүктелерін табамыз. Ол үшін эллипстің ықшамды теңдеуін пайдаланамыз. Егер $x''=0$ болса, онда $y''^2 = 16, y''_1 = 4, y''_2 = -4$. Егер $y''=0$ болса, онда $x''^2 = 9$ немесе $x'' = 3, x'' = -3$. Сонымен, эллипс SX'' өсін $A_1(2, 0)$ мен $A_2(-2, 0)$ нүктелерінде, ал SU'' өсін $B_1(4, 0)$ мен $B_2(-4, 0)$ нүктелерінде қияды (102-сурет).

9) Эллипстің сызбасын $X''SY''$ координаттыңда тұрғызамыз (102-сурет).

3.39. Параболаның орналасуы

Бізге парабола жалпы теңдеуімен берілсін, яғни бұл жағдайда $I_2=0$ болса, онда қарастырып отырған екінші ретті сызық параболаның теңдеуін анықтайды. Берілген екінші ретті сызықты қарастырып отырған декарт координат жүйесінде параллель көшіру және бұру арқылы екінші ретті сызықтың ықшамды теңдеуін аламыз. Енді осы ықшамды теңдеудің сызбасын салу үшін төмендегі пункттерді орындау қажет:

- 1) Екінші ретті сызықтың инварианттарын есептейміз.
- 2) Екінші ретті сызықтың түрін анықтаймыз.
- 3) Сипаттамалық теңдеудің түбірлерін табамыз:

$$\lambda^2 - I_1\lambda = 0.$$

- 4) Екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуінің ықшамды теңдеуін анықтаймыз:

$$\lambda_1 y'^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} x' = 0.$$

- 5) Екінші ретті сызықтың диаметр теңдеуін

$$L'_x(x, y) + \frac{a_{12}}{a_{11}} L'_y(x, y) = 0$$

формуладан тауып оның сызбасын саламыз.

- 6) Парабола төбесінің координаттарын анықтаймыз. Ол үшін екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі мен оның диаметрінің теңдеуін біріктіріп жүйені шешсек жеткілікті:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \\ L'_x(x, y) + \frac{a_{12}}{a_{21}} L'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Параболаның төбесін координат жүйесінде белгілейміз.

- 7) Параболаның төбесі арқылы өтіп 5-пункте анықталған диаметрге перпендикуляр түзудің теңдеуін

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

формуладан анықтаймыз, мұндағы $A_0(x_0, y_0)$ — параболаның төбесі, k — бұрыштық коэффициент (Осы түзуді басқа жолмен табуға да болады).

- 8) Екінші ретті сызықтың OX немесе OY өсімен қиылысу нүктелерін анықтаймыз.

- 9) Екінші ретті сызықтың $X''AY''$ — жаңа координат жүйесіндегі сызбасын саламыз.

Мысал. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ екінші ретті сызықтың сызбасын тұрғызындар.

Шешімі. 1) I_1, I_2, I_3 — инварианттарын (3.93) формуладан анықтайық: $I_1 = 25, I_2 = 0, I_3 = -15625$.

- 2) $I_2 = 0, I_3 \neq 0$. Сондықтан, екінші ретті сызық — парабола.

- 3) Сипаттамалық теңдеудің түбірлерін табайық:

$$\lambda^2 - 25\lambda = 0, \lambda = 0, \lambda_2 = 25.$$

4) Екінші ретті сызықтың ықшамды теңдеуін анықтайық:

$$25y''^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{15625}{25}} x'' = 0.$$

Осыдан,

$$y''^2 = \pm 2x''$$

— парабола.

5) Екінші ретті сызықтың диаметр теңдеуін табайық. Ол үшін жалпы теңдеудің $L'_x(x, y)$ пен $L'_y(x, y)$ туындыларын табайық:

$$L'_x(x, y) \equiv 18x - 24y - 20, \quad L'_y(x, y) \equiv -24x - 32y + 110.$$

Сонда

$$18x - 24y - 20 + \frac{-12}{9}(-24x - 32y + 110) = 0.$$

Осыдан

$$3x - 4y - 10 = 0 \text{ немесе } y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}.$$

Сонымен, $3x - 4y - 10 = 0$ түзуі екінші ретті сызықтың диаметр теңдеуі, ал $k = \frac{3}{4}$ — бұрыштық коэффициенті. Диаметр түзуін координат жүйесінде тұрғызамыз (103-сурет).

6) Парабола төбесінің координаттарын табамыз:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 10 = 0, \\ 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0. \end{cases}$$

Сонда $A\left(\frac{18}{5}, \frac{1}{5}\right)$ — нүкте параболаның төбесі.

7) $3x - 4y - 10 = 0$ — диаметріне перпендикуляр түзудің теңдеуін табайық. Ол үшін

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0),$$

мұндағы $A(x_0, y_0)$ — параболаның төбесі, $-\frac{1}{k}$ — диаметрдің бұрыштық коэффициенті.

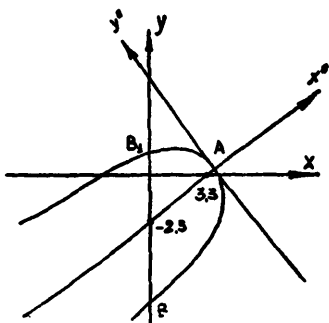
Сонда

$$-\frac{1}{k} = \frac{3}{4}, \quad k = -\frac{4}{3},$$

$$y - \frac{1}{5} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{18}{5}\right).$$

Сонымен, $y = -\frac{4}{3}x + 5$ — түзуі нүктеде өтіп диаметріне перпендикуляр түзудің теңдеуі.

8) Екінші ретті сызықтың OY өсімен қиылысу нүктелерін табайық. Егер $x = 0$ болса, онда $16y^2 + 110y - 50 = 0$.



103-сурет

Осыдан $y_1 \approx \frac{13}{13}$, $y_2 = -7,2$. Сонымен, парабола OY өсін $B_1(0, \frac{13}{32})$ мен $B_2(0, 7,2)$ нүктелерінде қияды.

9) Екінші ретті сызықтың ықшамды теңдеуінің $X''AY''$ координатындағы сызбасын саламыз (103-сурет).

3.40. Параллель екі түзудің орналасуы

Егер $I_2=0$, $I_3=0$ болса, онда екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі параллель екі түзудің теңдеуін анықтайды. Параллель екі түзудің теңдеуін (3.111) формуладан анықтаймыз, яғни

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2k(\alpha x + \beta y) + a_{33} = 0.$$

Осы теңдеуді $\alpha x + \beta y$ — өрнегі бойынша шешейік

$$\alpha x + \beta y = -k \pm \sqrt{k^2 - a_{33}}. \quad (3.126)$$

Сонымен, (3.126) теңдеуі іздестіріп отырған параллель түзулердің теңдеуі болады және ол:

нақты параллель екі түзудің теңдеуі, егер $k^2 - a_{33} > 0$;
жорымал параллель екі түзудің теңдеуі, егер $k^2 - a_{33} < 0$;
беттескен екі түзудің теңдеуі, егер $k^2 - a_{33} = 0$.

Мысал. Төмендегі екінші ретті сызықтардың сызбасын салындар:

а) $4x^2 - 8xy + 4y^2 - 48x + 48y - 25 = 0$.

б) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$.

Шешімдері. а) Алдымен $I_1, I_2, K < 0$ — инварианттарын және екінші дәрежелі көпмүшеліктерді толық квадратқа толықтырайық. Сонда, $I_2=0$, $I_3=0$, $K < 0$. Сонымен берілген екінші ретті сызық параллель екі түзудің теңдеуін анықтайды және

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8xy + 4y^2 - 48x + 48y - 25 &= 4(x^2 - 2xy + y^2) - 48(x - y) - 25 = \\ &= 4[(x - y)^2 - 12(x - y) - \frac{25}{4}]. \end{aligned}$$

Яғни, берілген екінші ретті сызықты мына түрде өрнектеуге болады

$$(x - y)^2 - 12(x - y) - \frac{25}{4} = 0.$$

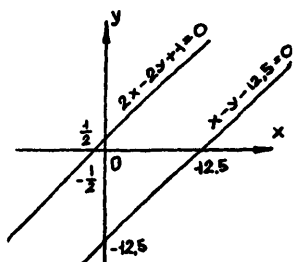
Соңғы квадрат теңдеуді $x - y$ өрнегі бойынша шешейік:

$$x - y = \frac{12 \pm 13}{2}.$$

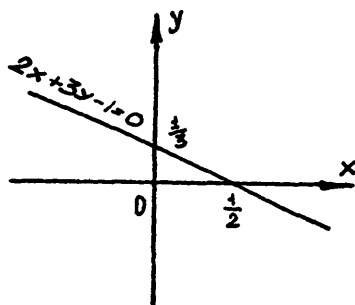
Сонымен, берілген екінші ретті сызық параллель екі түзудің теңдеуін анықтайды және олар

$$x - y - 12,5 = 0, \quad 2x - 2y + 1 = 0$$

теңдеулерімен анықталады (104-сурет).



104-сурет



105-сурет

б) Берілген екінші ретті сызық беттесетін екі түзудің теңдеуін анықтайды, себебі

$$I_2=0, \quad I_3=0, \quad K=0$$

Берілген теңдеуді мына түрге өрнектеуге болады

$$(2x+3y)^2 - 2(2x+3y) + 1 = 0$$

Осыдан

$$(2x+3y-1)^2 = 0.$$

Сонымен, беттесетін екі түзу

$$2x+3y-1=0$$

теңдеуімен анықталады (105-сурет).

3.41. Жазықтықтағы тамаша сызықтар

Біз бұл тақырыпта механикада, техникада кеңінен қолданылатын кейбір тамаша қисық сызықтардың тек графигіне және координат жүйесіндегі теңдеулеріне ғана тоқталып өтеміз.

1. Декарт жапырағы. Тік бұрышты декарт координат жүйесіндегі декарт жапырағы деп

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

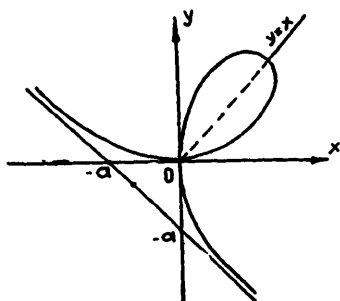
теңдеуімен анықталған сызықты айтамыз (106сурет).

Декарт жапырағының параметрлік теңдеуін табу үшін мына жүйені

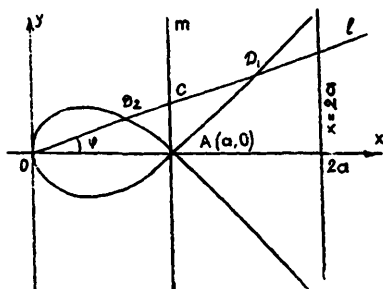
$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3axy = 0, \\ y = tx \end{cases}$$

x және y айнымалы шамалар арқылы шешсек, онда оның параметрлік теңдеуін аламыз:

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$



106-сурет



107-сурет

Егер $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ өрнектерін декарт жапырағының теңдеуіне апарып қойып, одан ρ -ны анықтайық, сонда мына теңдеу

$$\rho = \frac{2a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin \varphi}$$

декарт жапырағының полярлық теңдеуі болады.

Декарт жапырағы $y = x$ түзуімен симметриялы және $y = -x - a$ түзуі оның асимптотасы.

2. Стрoфoидa. Тік бұрышты декарт координат жүйесіндегі стрoфoидa деп

$$y^2 = (x - a)^2 \frac{x}{2a - x}$$

теңдеуімен анықталған сызықты айтамыз (107-сурет).

Декарт координат жүйеде стрoфoидa сызығын салу үшін бізге жазықтықтағы 0 нүктенен a қашықтықта жатқан m түзуі берілсін. Енді 0 нүктенен OX өсімен φ бұрыш түзейтін l сәуле жүргізейік. Осы сәуленің бойынан AC кесіндісіне тең $CD_1 = CD_2$ кесінділерін тұрғызайық. Сонда, 0 нүктенің төңірегінде l сәуленің айналуынан пайда болған D_1 мен D_2 нүктелердің геометриялық орны стрoфoидa сызығын түзейді.

Егер O полюс, ал OX поляр өсі болса, онда

$$\rho = OC \pm OA$$

мұндағы $OC = \frac{a}{\cos \varphi}$, $OA = a \tan \varphi$.

Сонымен, стрoфoидaның

$$\rho = a \frac{1 \pm \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

полярлық теңдеуі, ал

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2}$$

параметрлік теңдеуі болады.

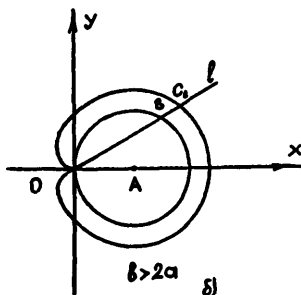
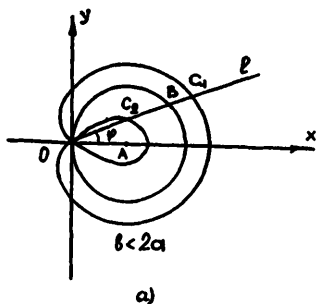
Строфоида OX өсімен симметриялы және $x=2a$ тендеуі оның асимптотасы.

3. Паскаль улиткасы (Кардиоида). Тік бұрышты декарт координат жүйесіндегі Паскаль улиткасы деп

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0$$

тендеуімен анықталған сызықты айтамыз (108-сурет).

Декарт координат жүйесінде Паскаль улиткасын салу үшін координат жүйесінің A нүктесінен радиусы a -ға тең шеңбер және O нүктеден осы шеңберді B нүктеде қиып өтетін l сәуле жүргіземіз.



108-сурет

Осы сәуленің B нүктесінің екі жағында орналасатын өзара b -ға тең BC_1 мен BC_2 кесінділерін тұрғызайық (108-сурет). Сонда l сәуленің бойындағы C_1 мен C_2 нүктелердің геометриялық орны Паскаль улитка сызығын түзейді ($b < 2a$).

Сонымен, Паскаль улитканың $\rho = 2a \cos \varphi + b$ — полярлық тендеуі, ал

$$\begin{cases} x = 2a \cos^2 t + b \cos t, \\ y = 2a \sin t \cdot \cos t + b \sin t \end{cases}$$

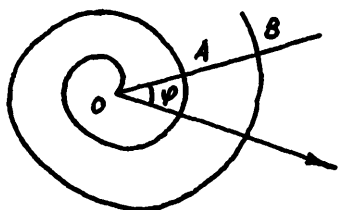
параметрлік тендеуі болады.

Егер $b > 2a$ болса, онда C_1 мен C_2 нүктелерінің геометриялық орны кардиоида сызығын түзейді (108-сурет):

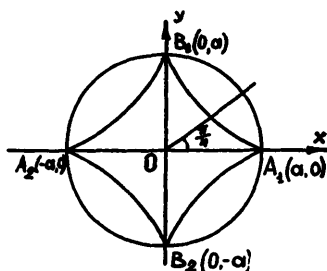
$$\rho = 2a(1 + \cos \varphi).$$

4. Архимед спиралі. Архимед спиралі сызығы — екі нүктенің бірі түзу бойымен, ал екіншісі шеңбер бойымен бір уақытта бір қалыпты қозғалу нәтижесіндегі геометриялық орны (109-сурет).

Кез келген A нүкте OB түзу бойымен, ал OB түзуі O нүктенің төңірегінде бір қалыпты қозғалсын делік. Енді O — полюс, ал OP поляр өсі болсын. A нүкте бастапқы мезгілде O нүктемен, ал OB түзуі OP түзуі OP өсімен беттеседі. A нүкте O нүктеден қашықтаған сайын φ бұрышы өседі, яғни OA мен φ тура пропорционал. Сонымен, Архимед спиралі поляр координат жүйесінде $\rho = a\varphi$ тендеуімен, ал декарт координат жүйеде



109-сурет



110-сурет

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \arctg \frac{y}{x}$$

теңдеуімен анықталады.

Астроида сызығының параметрлік теңдеуі былай анықталады: астроида деп

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

теңдеуімен анықталған сызықты айтамыз (110-сурет).

Астроида сызығының параметрлік теңдеуі былай анықталады:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \frac{t}{4}, \\ y = a \sin^3 \frac{t}{4}. \end{cases}$$

Астроида ОХ және ОУ өстерімен симметриялы. Астроида теңдеуін табу үшін гипоциклоида деп аталатын

$$x = (a - ma) \cos mt + am \cos(t + mt),$$

$$y = (a - ma) \sin mt - am \sin(t - mt)$$

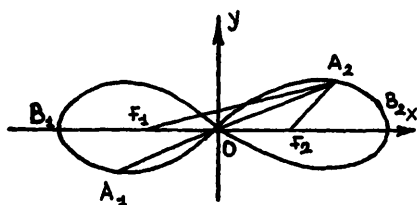
сызықтық теңдеуіндегі m -нің орнына $\frac{1}{4}$ -ті қояйық, сонда

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} a \cos \frac{t}{4} + \frac{1}{4} a \cos \frac{3t}{4}, \\ y = \frac{3}{4} a \sin \frac{t}{4} - \frac{1}{4} a \sin \frac{3t}{4}. \end{cases}$$

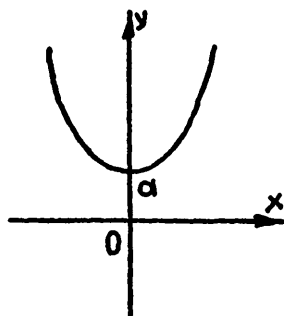
Осы теңдеуді өрнектеп астроида сызығының параметрлік теңдеуін аламыз:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \frac{t}{4}, \\ y = a \sin^3 \frac{t}{4}. \end{cases}$$

Енді осы теңдеудің екі жағын $\frac{2}{3}$ дәрежеге шығарып қоссақ, астроиданың декарт координат жүйесіндегі теңдеуін аламыз.



111-сурет



112-сурет

6. Бернулли лемнискаты. Жазықтықтағы Ox өсінің бойынан $F_1(-a, 0)$ мен $F_2(a, 0)$ нүктелерін алайық (111-сурет). A_2 нүктенің геометриялық орны Бернулли лемнискат сызығын анықтау үшін мына шарттың орындалуы қажетті әрі жеткілікті

$$A_2F_1 \cdot A_2F_2 = a^2$$

немесе

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = a^2.$$

Осыдан, оның декарт координат жүйесіндегі теңдеуін:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

және полярлық теңдеуін аламыз

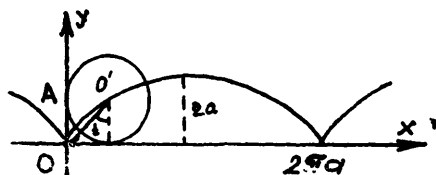
$$\rho^2 = 2a^2 \cos^2 \varphi.$$

Егер $\varphi = 0$ болса, онда $\rho = \sqrt{2}a$. Сондықтан, лемнискат сызығы Ox өсін $B_1(-\sqrt{2}a, 0)$ мен $B_2(\sqrt{2}a, 0)$ нүктелерінде қиып өтеді және ол Ox өсімен симметриялы.

7. Тізбектелген сызық. Тік бұрышты декарт координат жүйесінде

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

немесе $y = ach \cdot \frac{x}{a}$ теңдеуімен анықталған сызықты тізбек сызық деп атаймыз (112-сурет).



113-сурет

8. Циклоида. Тік бұрышты декарт координат жүйесінде

$$x = a \cdot \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}$$

теңдеуімен анықталған сызықты циклоида деп атаймыз (113-сурет).

Бізге радиусы a -ға тең шеңбер берілсін және ол OX өсімен дөңгелесін. Сонда осы шеңбердің нүктесінің траекториясы циклоида сызығын анықтайды және мына теңдеу:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

циклоиданың параметрлік теңдеуі болады.

9. Раушан гүлі. Раушан гүл сызығы поляр координат жүйесінде

$$\rho = a \sin k\varphi$$

теңдеуімен анықталады (114-сурет).

Егер k — бүтін тақ сан болса, онда раушан гүлі k гүл жапырағынан тұрады (114, а-сурет).

Егер k — бүтін жұп сан болса, онда раушан гүлі — $2k$ гүл жапырағынан тұрады (114, б-сурет).

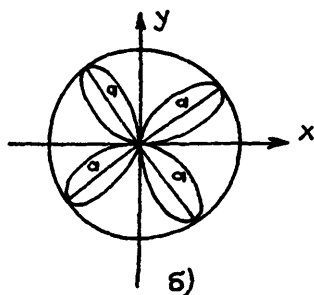
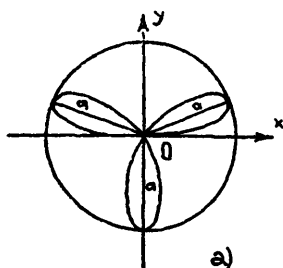
Үш жапырақты раушан гүл поляр координат жүйесінде

$$\rho = a \sin \varphi$$

теңдеуімен, ал декарт координат жүйесінде

$$(x^2 + y^2)^2 = a(3x^2y - y^3)$$

теңдеуімен анықталады (114, а-сурет).



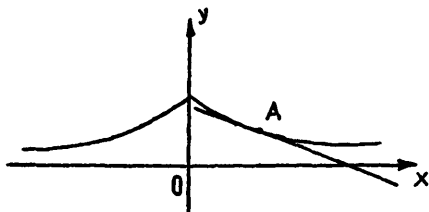
114-сурет

Төрт жапырақты раушан гүлі поляр координат жүйесінде

$$\rho = a \sin 2\varphi$$

теңдеуімен, ал декарт координат жүйесінде $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$ теңдеуімен анықталады (114, б-сурет).

10. Трактриса. Трактриса сызығы деп осы сызықтың кез келген нүктесіне жүргізілген жанаманың ($AB=a$) ұзындығы тұрақты болатын нүктелердің геометриялық орнын айтамыз (115-сурет).



115-сурет

Трактриса сызығының параметрлік теңдеуі:

$$\begin{cases} x = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \cos t, \\ y = a \sin t \end{cases}$$

болады, ал декарт координат жүйесінде

$$x = a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}$$

теңдеуімен анықталады және ол OY өсімен симметриялы. OX өсі трактриса асимптотасы болады.

КЕҢІСТІКТЕГІ ЖАЗЫҚТЫҚ ЖӘНЕ ТҮЗУ

4.1. Бір нүктеден өтетін жазықтық теңдеуі

Бізге кеңістіктегі декарт координат жүйесінде коллинеар емес екі $\vec{u} = \{l_1; m_1; n_1\}$, $\vec{v} = \{l_2; m_2; n_2\}$ векторы берілсін делік.

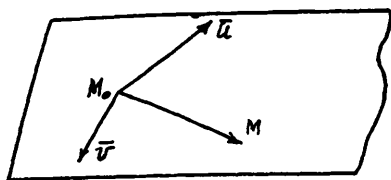
Т е о р е м а. 4.1. Кеңістікте берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен өтіп коллинеар емес $\vec{u}$ мен $\vec{v}$ векторларына компланар болатын жазықтықтың теңдеуі мына түрде анықталады:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.1)$$

немесе

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} (x-x_0) + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} (y-y_0) + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} (z-z_0) = 0. \quad (4.1')$$

Д ә л е л д е у і. Кеңістікте жатқан кез келген $M(x, y)$ нүкте іздестіріп отырған жазықтықта жату үшін $M_0\vec{M} = \{x-x_0; y-y_0; z-z_0\}$, $\vec{u} = \{l_1; m_1; n_1\}$ және $\vec{v} = \{l_2; m_2; n_2\}$ векторларының компланарлығы қажетті әрі жеткілікті (116-сурет). Шынында да, бұл векторлар компланар болады. Олай болса, векторлардың компланар болуы жәйлі теореманы (теорема 2.27) еске түсірсек жеткілікті, сонда (4.1) теңдігі орындалады.



116-сурет

Енді (4.1) теңдігін дәлелдеу үшін (4.1) формуладағы үшінші ретті анықтауышты бірінші жатық жолы бойынша жіктесек дәлелдеу керектігімізді аламыз. Сонымен, (4.1) немесе (4.1') теңдеуі берілген бір нүктеден өтетін жазықтықтың теңдеуі деп аталады. Теорема дәлелденді.

Егер бізге берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен өтіп $\vec{N}=\{A; B; C\}$ векторына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін табу керек болса, онда 3.2-тақырыпта қарастырылғандай, іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуін мына түрде табуға болады:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \quad (4.2)$$

мұндағы $\vec{N}=\{A; B; C\}$ — жазықтықтың нормаль векторы деп аталады, A, B, C — кез келген нақты сандар.

Осы сияқты жазықтықтың нормаль теңдеуінде (3.13 — тақырып) оңай табуға болады, яғни

$$(\vec{N}, \vec{r}) - P = 0 \quad (4.3)$$

немесе

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - P = 0, \quad (4.3)$$

мұндағы $\vec{r} = OM = \{x; y; z\}$ — жазықтықта жатқан кез келген $M(x, y, z)$ нүктесінің радиус векторы, P — координат жүйесінің бас нүктесінен жазықтыққа дейінгі ара қашықтық, α, β, γ — жазықтықтың параллель векторының координат өстерімен түзейтін бұрыштары. (4.3) — жазықтықтың нормаль теңдеуінің векторлық, ал (4.3) — координаттық түрі деп аталады.

4.2. Жазықтықтың жалпы теңдеуі және оны нормаль түріне келтіру

Теорема 4.2. Егер кез келген теңдеу айнымалы x, y және z шамаларының бірінші дәрежесі арқылы өрнектелсе, яғни

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (4.4)$$

онда бұл теңдеу жазықтықтың теңдеуі болып табылады, мұндағы A, B, C, D — кез келген нақты сандар.

Дәлелдеуі. Іздестіріп отырған жазықтықта жатқан кез келген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте алайық, яғни бұл нүктенің координаттары (4.4) теңдеуін қанағаттандырады

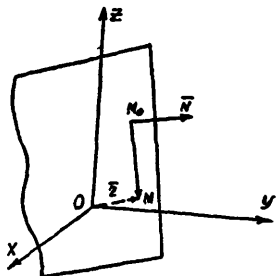
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (4.5)$$

Енді (4.4) теңдеуінен (4.5) теңдеуін алайық, онда (4.4) теңдеуіне мәндес

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \quad (4.6)$$

теңдеуін аламыз.

M_0 нүктеден осы жазықтыққа нормаль $\vec{N}=\{A; B; C\}$ векторын тұрғызайық (117-сурет). Сонда, егер кез келген $M(x, y, z)$ нүкте жазықтықта жатса, онда ол нүктенің координаттары (4.6) теңдеуін қанағаттандырады, бұл жағдайда $\vec{N}=\{A; B; C\}$ мен $\vec{M_0M} = \{x-x_0; y-y_0; z-z_0\}$ векторларының скаляр көбейтіндісі нөлге тең, себебі бұл векторлар өзара ортогональ векторлар. Сондықтан



117-сурет

$$(\vec{N}, \vec{M}_0 M) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Егер $M(x, y, z)$ нүкте жазықтықта жатпаса, онда ол нүктенің координаттары (4.6) тендеуін қанағаттандыра алмайды, ал бұл жағдайда $\vec{N}$ мен $\vec{M}_0 M$ векторлары ортогональ емес, яғни

$$(\vec{N}, \vec{M}_0 M) \neq 0.$$

Сонымен, (4.4) тендеу жазықтықтың тендеуі болып табылады. Теорема дәлелденді.

(4.4) тендеуі жазықтықтың жалпы тендеуі деп аталады.

Жазықтың жалпы тендеуің — D -ге бөліп, осы жазықтықтың кесінді тендеуін табамыз

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

мұндағы $a = -\frac{A}{D}$, $b = -\frac{B}{D}$, $c = -\frac{C}{D}$.

Енді $\vec{N} = \{A; B; C\}$ мен $\vec{r} = \{x; y; z\}$ векторларының скаляр көбейтіндісін қарастырсақ, онда жазықтықтың жалпы тендеуін вектор түрінде былай жазуға болады:

$$(\vec{N}, \vec{r}) + D = 0.$$

Енді жазықтықтың дербес түрлері декарт координат жүйесінде қалай орналасатындығын қарастыралық.

1. Егер $A=0$ болса, онда жазықтық $B y + C z + D = 0$ тендеуімен анықталады. Бұл жағдайда, жазықтықтың $\vec{N} = \{0; B; C\}$ — нормаль векторы OX өсімен ортогональ болады, сондықтан жазықтық OX өсіне параллель.

Егер $B=0$ болса, онда $A x + C z + D = 0$ жазықтығы OY өсіне параллель жазықтықты анықтайды, себебі жазықтықтың $\vec{N} = \{A; 0; C\}$ — нормаль векторы OY өсіне перпендикуляр (ортогональ).

Егер $C=0$ болса, онда $A x + B y + D = 0$ жазықтығы OZ өсіне параллель жазықтықты анықтайды.

2. Егер $D=0$ болса, онда $A x + B y + C z = 0$ жазықтығы декарт координат жүйесінің бас нүктесінен өтетін жазықтықты анықтайды, себебі координат жүйесінің бас нүктесінің координаттары осы жазықтықты қанағаттандырады.

3. Егер $A=0, B=0$ болса, онда $C z + D = 0$ жазықтығы XOY координат жазықтығына параллель жазықтықты анықтайды.

Егер $A=0, C=0$ болса, онда $B y + D = 0$ жазықтығы XOZ координат жазықтығына параллель.

Егер $B=0, C=0$ болса, онда $A x + D = 0$ жазықтығы YOZ координат жазықтығына параллель.

4. Егер $A=0, B=0, D=0$ болса, онда $C z = 0$ жазықтығы XOY координат жазықтығын анықтайды.

Егер $A=0, C=0, D=0$ болса, онда $B y = 0$ жазықтығы XOZ координат жазықтығын анықтайды.

Егер $B=0, C=0, D=0$ болса, онда $A x = 0$ жазықтығы YOZ координат жазықтығын анықтайды.

Енді жазықтықтың жалпы теңдеуін нормаль түрге келтіру үшін (4.4) теңдеуін нормальдың көбейткіші деп аталатын

$$\mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

нақты санына көбейту керек және де осы μ санының таңбасы D коэффициентінің таңбасына қарама-қарсы алынады. Сонда

$$\frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + x \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + y \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + z \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0.$$

Соңғы теңдікті (4.3') теңдеумен салыстыра

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad P = - \frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

сандарының мәндерін анықтаймыз, мұндағы $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ нормаль $\vec{N} = \{A; B; C\}$ векторының бағыттауыш косинустары деп аталады.

Мысалдар. 1. Берілген $M_0(1, -2, 3)$ нүктеден өтіп, нормаль векторы $\vec{N} = \{3; -2; 3\}$ болатын жазықтықтың теңдеуін анықта.

Шешімі. Іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуін табу үшін (4.2) формуланы пайдаланамыз, мұндағы $A=3$, $B=-2$, $C=4$, $x_0=1$, $y_0=-2$, $z_0=3$, сонда

$$3(x-1) - 2(y+2) + 4(z-3) = 0.$$

Осыдан іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуін табамыз:

$$3x - 2y + 4z - 19 = 0.$$

2. Берілген $M_0(2, 4, -3)$ нүктеден өтіп $\vec{u} = \{1; 2; 0\}$ мен $\vec{v} = 3\vec{u} + \vec{a}$ векторларына компланар болатын жазықтықтың нормаль векторын анықта, мұндағы $\vec{a} = \{-2; 2; -1\}$.

Шешімі. Алдымен берілген M_0 нүктеден өтетін жазықтықтың теңдеуін (4.1) теңдеуінен табамыз, ол үшін алдымен $\vec{v}$ векторының координаттарын анықтайық:

$$\vec{v} = 3\vec{u} + \vec{a} = \{3; 6; 0\} + \{-2; 2; -1\} = \{2; 8; -1\}.$$

Сонда

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} (x-2) + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} (y-4) + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} (z+3) = 0$$

немесе

$$-2(x-2) + (y-4) + 4(z+3) = 0.$$

Осыдан іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуін табамыз:

$$2x - y - 4z - 12 = 0.$$

Сонда $\vec{N} = \{2; -1; -4\}$ векторы есептің шартын қанағаттандыра алатын жазықтықтың нормаль векторы болады.

3. Жазықтықтың кесінді $\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ теңдеуін нормаль

түріне келтіріп және бағыттауыш косинустарын тап.

Ш е ш і м і. Алдымен жазықтықтың кесінді теңдеуін жалпы теңдеуіне келтірілік, ол үшін берілген теңдеуді -15 -ке көбейтелік:

$$3x - 10y - 5z + 15 = 0.$$

Енді жазықтықтың жалпы теңдеуін $\mu = -\frac{1}{\sqrt{134}}$ — нормаль көбейткішке көбейтелік, сонда

$$\frac{3}{-\sqrt{134}}x - \frac{10}{-\sqrt{134}}y - \frac{5}{-\sqrt{134}}z + \frac{15}{-\sqrt{134}} = 0$$

жазықтықтың нормаль теңдеуі, ал

$$\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{134}}, \quad \cos \beta = \frac{10}{\sqrt{134}}, \quad \cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{134}}$$

бағыттауыш косинустары болады.

4. $A_1(1, 2, 1)$ мен $A_2(2, -3, 1)$ нүктелерінен өтіп OZ өсіне параллель жазықтықтың теңдеуін анықта.

Ш е ш і м і. OZ өсіне параллель жазықтықтың теңдеуі мына түрде анықталады:

$$Ax + By + D = 0,$$

мұндағы A, B, D — белгісіз коэффициенттер.

Есептің шарты бойынша іздестіріп отырған жазықтығымыз берілген A_1 мен A_2 нүктелерінен өтеді. Сондықтан, ол нүктелердің координаттары іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуін қанағатандырады:

$$\begin{cases} A + 2B + D = 0, \\ 2A - 3B + D = 0. \end{cases}$$

Сонымен, біз үш белгісізі бар біртекті сызықты екі теңдеулер жүйесін алдық. Жүйені шешу үшін оның коэффициенттерінен мына матрицаны құрамыз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сонда (1.24) — формуладан:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} t, \quad B = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} t, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} t.$$

Осыдан $A = 5t$, $B = t$, $D = -7t$. Енді A, B, D — коэффициенттерінің мәндерін теңдеуге қойып, іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуін аламыз:

$$5x + y - 7 = 0$$

5. $A_1(1, 3, -1)$ нүктеден және OX өсінен өтетін жазықтықтың теңдеуін анықта.

Ш е ш і м і. OX өсінен өтетін жазықтықтың теңдеуі мына түрде анықталады

$$By + Cz = 0,$$

мұндағы B, C — белгісіз коэффициенттер және ол берілген A_1 нүктеден өтетін болғандықтан, оның координаттары осы теңдеуді қанағаттандырады, яғни

$$3B - C = 0 \text{ немесе } C = 3B.$$

C -ның мәнін бастапқы теңдеуге қойып, іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуін анықтаймыз:

$$y + 3z = 0.$$

6. $A_1(-1, 4, 3)$ нүктеден өтіп $ХОУ$ — координат жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуін анықта.

Шешімі. $ХОУ$ — жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуін мына түрде анықтаймыз:

$$Cz + D = 0$$

және есептің шарты бойынша A_1 нүктеден өтеді, яғни оның координаттары іздестіріп отырған түзудің теңдеуін қанағаттандырады:

$$3C + D = 0, \quad \text{осыдан} \quad D = -3C.$$

D -ның мәнін бастапқы теңдеуге қойып есептің шартын қанағаттандыратын жазықтықтың теңдеуін табамыз:

$$Cz - 3C = 0, \quad z - 3 = 0.$$

7. $3x - 5y + 4z - 60 = 0$ — жазықтығы координат өстерін қандай кесіндімен қиып өтеді.

Шешімі. Ол үшін берілген жазықтықтың жалпы теңдеуінен оның кесінді теңдеуін табайық. Теңдіктің екі жағын 60-қа бөлейік:

$$\frac{x}{20} - \frac{y}{12} + \frac{z}{15} = 1.$$

Сонымен, берілген жазықтық $ОХ$ өсін $a=20$, $ОУ$ өсін $b=-12$, $ОZ$ — өсін $c=15$ кесіндімен қиып өтеді.

8. $2x + 3y + 5z + 1 = 0$ — жазықтық теңдеуін нормаль теңдеуіне келтір.

Шешімі. Алдымен нормаль көбейткішті анықтайық:

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{4+9+25}} = -\frac{1}{\sqrt{38}}.$$

Енді берілген жазықтықтың жалпы теңдеуін μ — санының мәніне көбейтіп, іздестіріп отырған жазықтығымызды табамыз.

$$\frac{2}{\sqrt{38}}x + \frac{3}{\sqrt{38}}y + \frac{5}{\sqrt{38}}z + 1 = 0.$$

9. $A(1, 1, 2)$ нүктеден өтіп

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$$

түзуіне параллель жазықтықтың теңдеуін анықта.

Ш е ш і м і. Іздестіріп отырған жазықтық A мен $A_0(2, 3, -1)$ нүктелерінен өтіп $\vec{u}=\{2; 2; 3\}$ векторына параллель болады. Олай болса, жазықтық $\vec{AA}_0=\{1; 2; -3\}$ векторына параллель болады. Сондықтан, іздестіріп отырған жазықтық A нүктеден өтіп $\vec{u}$ мен $\vec{AA}_0$ векторларына компланар болады, (4.1) формуладан:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

есептің шартын қанағаттандыратын жазықтықтың теңдеуін табамыз:

$$12x - 9y - 2z + 1 = 0.$$

10. $A(2, 1, -1)$ нүктеден өтіп $2x + 3y + z - 1 = 0$, $x + 2y + 3z + 1 = 0$ жазықтықтарына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін анықта.

Ш е ш і м і. Берілген жазықтықтардың $\vec{N}_1 = \{2; 3; 1\}$ мен $\vec{N}_2 = \{1; 2; 3\}$ — нормаль векторлары. Іздестіріп отырған жазықтық $\vec{N}_1$ мен $\vec{N}_2$ векторларына параллель және ол A нүктеден өтеді. Сондықтан,

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ немесе } 7x - 5y + z - 8 = 0$$

жазықтығы іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуі.

4.3. Жазықтықтар байламы және шоғы

А н ы қ т а м а. Кеңістікте берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте арқылы өтетін жазықтықтар жиыны центрі M_0 нүкте болатын *меншікті жазықтықтар байламы*, ал берілген түзуге компланар жазықтықтардың жиыны *меншіксіз жазықтықтар шоғының байламы* деп аталады.

Бізге кеңістікте жазықтық теңдеуі векторлық түрінде берілсін

$$(\vec{N}, \vec{r}) + D = 0 \quad (4.8)$$

және ол $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтсін деп ұйғаралық, мұндағы $\vec{N} = \{A; B; C\}$ — осы жазықтықтың нормаль векторы, $\vec{r} = \{x; y; z\}$ — жазықтықта жатқан кез келген нүктенің радиус-векторы.

Берілген M_0 нүктенің радиус-векторын $\vec{r}_0$ әрпімен белгілейік. Сонда, M_0 нүктенің координаттары (4.8) теңдеуін қанағаттандырады:

$$(\vec{N}, \vec{r}_0) + D = 0 \quad (4.9)$$

Енді осы теңдіктердің айырымын қарастыралық, яғни

$$(\vec{N}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \quad (4.10)$$

Сонымен, $M_0(x_0, y, z_0)$ нүктеден өтетін кез келген жазықтықтардың векторлық түріндегі тендеуі (4.10) тендеумен анықталады және ол жазықтықтар байламының тендеуі деп аталады.

Енді осы жазықтықтың координаттық түріндегі тендеуін табайық, мұндағы

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}, \quad \vec{N} = \{A; B; C\}.$$

Сонда (4.10) — формуладан:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (4.11)$$

Бұл тендеуді жазықтықтар байламының координаттық түріндегі тендеуі деп аталады.

Анықтама. Кеңістікте берілген l түзу бойымен қиылысатын жазықтықтар жиынын центрі l түзуі болатын *меншікті жазықтықтар шоғы*, ал *меншіксіз жазықтықтар шоғы* деп өзара параллель жазықтықтардың жиынын айтады.

Егер $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ мен $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ жазықтықтары параллель болмаса, онда

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (4.12)$$

жазықтығы меншікті жазықтық шоғын анықтайды, мұндағы α мен β бір уақытта нөлге тең емес нақты сандар. (4.12) теңдікті былай жазуға да болады:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (4.13)$$

мұндағы $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$, $\beta \neq 0$.

Мысалдар. 1. $A_1(1, 2, 1)$ мен $A_2(-1, 2, 3)$ нүктелерінен өтіп $2x + 3y - z + 4 = 0$ жазықтығына перпендикуляр жазықтықтың тендеуін анықта.

Шешімі. A_1 нүктеден өтетін жазықтықтар байламының тендеуін қарастырайық ((4.11) формула):

$$A(x - 1) + B(y - 2) + C(z - 1) = 0,$$

мұндағы A, B, C — белгісіз коэффициенттер. Енді белгісіз коэффициенттерді анықтайық. Есептің шарты бойынша жазықтық A_2 нүктеден де өтеді. Олай болса, A_2 нүктенің координаттары жазықтықтың тендеуін қанағаттандырады:

$$A(-1 - 1) + B(2 - 2) + C(3 - 1) = 0.$$

Осыдан $A = C$. Іздестіріп отырған жазықтық берілген жазықтыққа перпендикуляр. Сондықтан, жазықтықтардың перпендикулярлық белгісін пайдаланайық:

$$2A + 3B - C = 0.$$

Сонда біз үш белгісізі бар біртектес екі тендеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} 2A + 3B - C = 0, \\ A - C = 0. \end{cases}$$

Осыдан

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} t = -3t, \quad B = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} t = t, \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} t = -3t.$$

Анықталған A, B, C — коэффициенттерін A_1 нүктеден өтетін жазықтықтар байламының теңдеуіне қойып іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуін аламыз:

$$-3t(x-1) + t(y-2) - 3t(z-1) = 0 \text{ немесе } 3x - y + 3z - 4 = 0.$$

2. $2x + 3y + z + 1 = 0$ және $2x + y - 3z - 2 = 0$ жазықтықтарына перпендикуляр болатын жазықтықтар шоғының теңдеуін анықта.

Ш е ш і м і. Алдымен жазықтықтар шоғының теңдеуін анықтайық:

$$2x + 3y + z + 1 + \lambda(2x + y - 3z - 2) = 0.$$

Осыдан

$$(2 + 2\lambda)x + (3 + \lambda)y + (1 - 3\lambda)z + 1 - 2\lambda = 0.$$

Соңғы жазықтық $2x + 3y + z + 1 = 0$ жазықтығына перпендикуляр болатындай λ — санын табайық. Ол үшін олардың перпендикулярлық белгісін пайдаланайық:

$$2(2 + 2\lambda) - 3(3 + \lambda) + 1 - 3\lambda = 0, \quad \lambda = -2.$$

Сонда, $2x + 3y + z + 1 = 0$ теңдеуіне перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін жазықтықтар шоғының теңдеуіне $\lambda = -2$ мәнін қойып табамыз:

$$(2 + 2\lambda)x + (3 + \lambda)y + (1 - 3\lambda)z + 1 - 2\lambda = 0 \text{ немесе } 2x - y - 7z - 5 = 0.$$

Осы сияқты, $2x + y - 3z - 2 = 0$ жазықтығына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін табу үшін жазықтықтар шоғы теңдеуі осы жазықтықпен перпендикуляр болатындай етіп λ коэффициентінің мәнін табу қажет. Ол үшін екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісін пайдалансақ жеткілікті:

$$2(2 + 2\lambda) + 3 + \lambda - 3(1 - 3\lambda) = 0, \quad \lambda = -\frac{2}{7}.$$

Сонда, $2x + y - 3z - 2 = 0$ жазықтығына перпендикуляр болатын жазықтықтардың екінші теңдеуін жазықтықтар шоғының теңдеуіне $\lambda = -\frac{2}{7}$ мәнін қойып табамыз:

$$\left(2 - \frac{4}{7}\right)x + \left(3 - \frac{2}{7}\right)y + \left(1 + \frac{6}{7}\right)z + 1 + \frac{4}{7} = 0 \text{ немесе } 10x + 19y + 13z + 11 = 0.$$

3. Жазықтықтар шоғын анықтайтын $x + y + z - 2 = 0$ мен $2x + y + 2z + 1 = 0$ жазықтықтарында өзара перпендикуляр болатын және біреуі $A(2, -2, 3)$ нүктеден өтетін жазықтықтардың теңдеуін анықта.

Ш е ш і м і. Жазықтықтар шоғының ішіндегі A нүктеден өтетін жазықтықтың теңдеуін табайық. Жазықтықтар шоғының

$$x + y + z - 2 + \lambda(2x + y + 2z + 1) = 0$$

теңдеуі A нүктеден өтетін болғандықтан нүктенің координаттары жазықтықтар шоғының теңдеуін қанағаттандырады:

$$2 - 2 + 3 - 2 + \lambda(4 - 2 + 6 + 1) = 0.$$

Осыдан λ -ны табайық: $\lambda = -\frac{1}{9}$. λ -ның мәнін жазықтықтар шоғы теңдеуіне қойып, іздестіріп отырған жазықтықтың, яғни A нүктеден өтетін жазықтықтың теңдеуін табамыз:

$$x + y + z - 2 - \frac{1}{9}(2x + y + 2z + 1) = 0 \text{ немесе } 7x + 8y + 7z - 19 = 0.$$

Енді осы жазықтыққа перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін табайық:

$$2x + y + 2z + 1 + \lambda(x + y + z - 2) = 0.$$

Осыдан

$$(2 + \lambda)x + (1 + \lambda)y + (2 + \lambda)z + 1 - 2\lambda = 0.$$

λ -ның мәнін табу үшін жазықтықтардың перпендикулярлық белгісін пайдаланамыз

$$7(2 + \lambda) + 8(1 + \lambda) + 7(2 + \lambda) = 0, \quad \lambda = -\frac{18}{11}.$$

λ -ның мәнін орнына қойып, $7x + 8y + 7z - 19 = 0$ жазықтығына перпендикуляр жазықтық теңдеуін табамыз:

$$2x + y + 2z + 1 - \frac{18}{11}(x + y + z - 2) = 0 \text{ немесе } 4x - 7y + 4z - 47 = 0.$$

4.4. Жазықтықтар арасындағы бұрыш және нүктеден жазықтыққа дейінгі ара қашықтық

Бізге қиылысатын екі жазықтық векторлық түрінде берілсін делік:

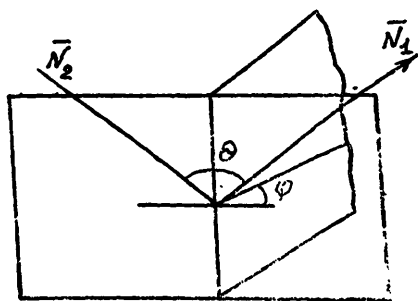
$$\begin{aligned} (\vec{N}_1, \vec{r}) + D_1 &= 0, \\ (\vec{N}_2, \vec{r}) + D_2 &= 0, \end{aligned}$$

мұндағы $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ — бірінші, ал $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ — екінші жазықтықтың нормаль векторы.

Енді осы жазықтықтардың арасындағы φ бұрышын анықтайық. Ол үшін осы жазықтықтардың нормаль векторларының арасындағы θ бұрышын анықтасақ бізге жеткілікті (118-сурет). Сонда $\varphi = \theta$ немесе $\varphi = \pi - \theta$, осыдан $\cos \varphi = \pm \cos \theta$.

Сондықтан

$$\cos \varphi = \pm \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (4.14)$$



118-сурет

Сонымен, екі жазықтықтың арасындағы бұрыш (4.14) формуладан анықталады.

Екі жазықтықтың параллельдік белгісі мына формуламен

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

ал перпендикулярлық белгісі мына формуламен

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

анықталады.

Енді берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеден

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (4.15)$$

жазықтығына дейінгі арақашықтықты анықтайық. Ол үшін M_0 нүктеден осы жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың ұзындығын $d = |M_0M_1|$ әрпімен белгілейік, мұндағы $M_1(x_1, y_1, z_1)$ берілген жазықтықта жатыр. Жазықтықтағы M_1 нүкте M_0 нүктесінің осы жазықтықтағы проекциясы болғандықтан, біздің іздестіріп отырған арақашықтығымыз екі M_0 мен M_1 нүктелерінің арақашықтығы болып табылады, сондықтан

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4.16)$$

4.5. Екі жазықтықтың орналасуы.

Бізге екі жазықтық жалпы тендеуімен берілсін

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (4.17)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (4.18)$$

Берілген жазықтықтарға мына үш жағдайдың бірі орындалады: қиылысады, беттеседі, параллель болады. Енді қандай шарттар орындалғанда жазықтықтардың қиылысатынын, беттесетінін, параллель болатынын жеке-жеке қарастырайық.

Теорема 4.3. Берілген (4.17) және (4.18) жазықтықтары қиылысуы үшін x, y, z — айнымаларының сәйкес коэффициенттері пропорционал болмауы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Жеткіліктілігі. x, y, z — айнымаларының сәйкес екі үштік коэффициенттері, яғни A_1, B_1, C_1 және A_2, B_2, C_2 — пропорционал емес деп ұйғарып, жазықтықтардың қиылысатынын дәлелдейік. Онда пропорционал емес сәйкес екі үштік коэффициенттерінен пропорционал емес сәйкес екі қос коэффициенттерін табуға болады, мысалы, A_1, B_1 мен A_2, B_2 (4.17) мен (4.18) тендеулеріндегі $z=0$ болсын:

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + D_2 = 0 \quad (4.19)$$

Онда (4.19) теңдеулер XOY жазықтығындағы түзулерді анықтайды және (4.17) мен (4.18) жазықтықтары XOY — координат жазықтықтарын (4.19) түзулері бойымен қиып өтеді. Екі қос коэффициент пропорционал емес, олай болса, XOY координат жазықтығындағы (4.19) түзулері қиылысады және де қиылысатын түзулерден өтетін жазықтықтар да қиылысады.

Теореманың жеткілікті шартының дәлелдеуін жаттығу ретінде оқырмандардың өзіне ұсынамыз (Кері жору әдісімен дәлелденеді).

Теорема 4.4. Берілген (4.17) мен (4.18) жазықтықтары параллель болу үшін x, y, z — айнымалыларының сәйкес коэффициенттері пропорционал болуы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Жеткіліктілігі. x, y, z айнымалыларының сәйкес екі үштік коэффициенттері пропорционал болсын деп ұйғаралық та олардың параллель болатынын дәлелдейік. Коэффициенттері параллель болғандықтан, нөлге тең емес k саны бар болып, мына теңдік орындалады:

$$A_1 = kA_2, B_1 = kB_2, C_1 = kC_2.$$

Осыдан

$$A_2 = \frac{A_1}{k}, B_2 = \frac{B_1}{k}, C_2 = \frac{C_1}{k}.$$

Анықталған A_2, B_2, C_2 коэффициенттерінің мәндерін (4.18) теңдеуге қойып, осы теңдеуге эквивалентті теңдеу аламыз:

$$A_1x + B_1y + C_1z + \frac{D_1}{k} = 0 \quad (4.20)$$

Енді (4.17) мен (4.20) теңдеулерін салыстырайық, мұндағы D_1 мен $\frac{D_1}{k}$ өзара тең емес бос мүшелер, яғни (4.17) теңдеудің кез келген шешімі (4.18) теңдеудің шешімі бола алмайды. Олай болса, (4.17) теңдеудің бойында жатқан нүкте (4.20) теңдеудің бойында жата алмайды.

Теореманың қажеттілігі шартының дәлелдеуін жаттығу ретінде оқырмандардың өзіне ұсынамыз.

Теорема 4.5. Берілген (4.17) мен (4.18) жазықтықтары беттесу үшін олардың барлық коэффициенттері пропорционал болуы қажетті әрі жеткілікті, яғни $A_1 = kA_2, B_1 = kB_2, C_1 = kC_2, D_1 = kD_2$.

Теореманың толық дәлелдеуін оқырмандардың өзіне ұсынамыз.

4.6. Жазықтық пен вектордың компланарлық белгісі

Бізге кеңістікте $\vec{u} = \{l; m; n\}$ векторы және жазықтық жалпы теңдеуімен берілсін делік, яғни

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (4.21)$$

Теорема 4.6. Берілген $\vec{u}$ вектор мен (4.21) жазықтық компланар болу үшін мына шарттын

$$Al + Bm + Cn = 0 \quad (4.22)$$

орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Берілген жазықтықтан $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте алып, осы нүктені $\vec{u}$ векторының бас нүктесі етіп, вектордың өзін тұрғызайық, ал оның соңғы нүктесін M әрпімен белгілейік.

Сонымен M нүктенің координаты $(x_0 + l, y_0 + m, z_0 + n)$ болады және де бұл нүкте берілген жазықтықта жатуы үшін мына шарттын орындалуы қажетті әрі жеткілікті:

$$A(x_0 + l) + B(y_0 + m) + C(z_0 + n) + D = 0,$$

мұндағы $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Осыдан

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

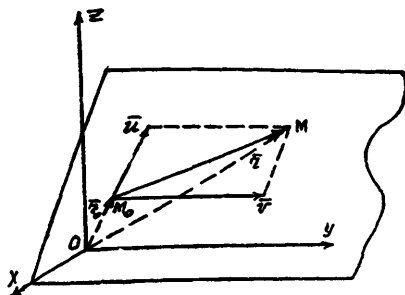
Теорема дәлелденді.

4.7. Жазықтықтың параметрлік теңдеуі

Теорема 4.7. Берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеден өтіп, өзара коллинеар емес $\vec{u} = \{l_1; m_1; n_1\}$ мен $\vec{v} = \{l_2; m_2; n_2\}$ векторларына компланар болатын жазықтықтың параметрлік теңдеуінің координаттық түрі былай

$$\begin{cases} x = x_0 + tl_1 + sl_2, \\ y = y_0 + tm_1 + sm_2, \\ z = z_0 + tn_1 + sn_2, \end{cases} \quad (4.23)$$

ал векторлық түрі былай



119-сурет

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u} + s\vec{v} \quad (4.24)$$

анықталады, мұндағы t, s — параметр.

Дәлелдеуі. Кеңістіктегі кез келген $M(x, y, z)$ нүкте осы жазықтықта жату үшін $\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$, $\vec{u}$ және $\vec{v}$ векторларының компланарлығы қажетті әрі жеткілікті (2.15 — тақырып, 119-сурет). Теореманың шарты бойынша

$\vec{u}$ мен $\vec{v}$ векторлары компланар емес, сондықтан $\vec{M_0M}$ векторы $\vec{u}$ мен $\vec{v}$ векторларының сызықты комбинациясы болады (2.5-тақырып): $\vec{M_0M} = t\vec{u} + s\vec{v}$ немесе координаттық түрде:

$$\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\} = \{tl_1 + sl_1; tm_1 + sm_2; tn_1 + sn_2\}.$$

Енді тең векторлардың анықтамасын пайдаланып мына теңдіктерді аламыз:

$$\begin{cases} x-x_0=tl_1+sl_2, \\ y-y_0=tm_1+sm_2, \\ z-z_0=tn_1+sn_2. \end{cases}$$

Осыдан (4.23) теңдігін аламыз.

Енді M_0 нүктенің радиус-векторын $\vec{r}_0$, ал M нүктенің радиус-векторы $\vec{r}$ әріптерімен белгілейік, онда (4.23) теңдеуінен жазықтықтың параметрлік теңдеуінің векторлық түрін аламыз. Теорема дәлелденді.

4.8. Екі және үш нүктеден өтетін жазықтықтың теңдеулері

Бізге кеңістікте $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктелері және коллинеар емес $\vec{u}$ мен $\vec{M_0M_1}$ векторлары берілсін делік.

Теорема 4.8. Берілген $\vec{u}$ векторымен компланар әрі M_0 мен M_1 нүктелерінен өтетін жазықтықтың теңдеуі мына түрде анықталады:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \quad (4.25)$$

Дәлелдеуі. $\vec{M_0M_1}$ векторының x_1-x_0 , y_1-y_0 және z_1-z_0 координаттары болып табылады, яғни $\vec{M_0M_1} = \{x_1-x_0; y_1-y_0; z_1-z_0\}$. Теореманың шарты бойынша $\vec{u}$ мен $\vec{M_0M_1}$ векторлары коллинеар емес. Олай болса, берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеден өтіп коллинеар емес $\vec{u}$ мен $\vec{M_0M_1}$ векторларына компланар болатын жазықтықтың теңдеуінен, яғни (4.1)-ден (4.25) теңдікті аламыз. Теорема дәлелденді.

Осылайша, бір түзудің бойында жатпайтын үш $M(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелерден өтетін жазықтықтың теңдеуі мына түрде анықталады:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Егер M_1, M_2, M_3 нүктелері бір түзудің бойында жатса, онда мына үш анықтауыш:

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ z_2-z_0 & x_2-x_0 \end{vmatrix}$$

нөлге тең.

Егер M_1, M_2, M_3 нүктелері бір түзудің бойында жатпаса, онда анықтауыштардың кем дегенде біреуі нөлге тең емес.

Мысалдар. 1. Берілген $M(0, -1, 3)$ нүктеден өтіп $3x - 2y + 5z - 3 = 0$ — жазықтығымен параллель болатын жазықтықты тап.

Шешімі. Іздестіріп отырған жазықтық берілген $3x - 2y + 5z - 3 = 0$ жазықтыққа параллель болғандықтан, жазықтықтың $\vec{N} = \{3; -2; 5\}$ нормаль векторы сол жазықтықтың нормаль векторы бола алады. Сондықтан, M нүктеден өтіп $\vec{N}$ — нормаль векторына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін (4.2)-ден анықтаймыз:

$$3(x-0) - 2(y+1) + 5(z-3) = 0 \text{ немесе } 3x - 2y + 5z - 17 = 0$$

2. Берілген $x + 2y - z - 4 = 0$ мен $2x + y + z - 2 = 0$ жазықтықтардың қиылысу сызығынан өтіп OX өсіне параллель жазықтығының теңдеуін және осы жазықтықтан $M(1, 1, -2)$ нүктеге дейінгі ара қашықтықты тап.

Шешімі. Жазықтық шоғының (4.13) теңдеуі бойынша

$$x + 2y - z - 4 + \lambda(2x + y + z - 2) = 0.$$

Осыдан

$$(1 + 2\lambda)x + (2 + \lambda)y + (\lambda - 1)z + (-4 - 2\lambda) = 0.$$

Іздестіріп отырған жазықтық OX өсіне параллель болғандықтан, соңғы теңдіктегі x айнымалы шаманың коэффициенті нөлге тең, яғни $1 + 2\lambda = 0$, $\lambda = -\frac{1}{2}$. Осы $\lambda = -\frac{1}{2}$ мәнін бастапқы теңдікке апарып қояйық, сонда

$$x + 2y - z - 4 - \frac{1}{2}(2x + y + z - 2) = 0 \text{ немесе } \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z - 3 = 0$$

болады. Енді $M(1, 1, -2)$ нүктеден $\frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z - 3 = 0$ жазықтығына дейінгі ара қашықтықты (4.16) формуладан анықтаймыз:

$$d = \frac{\left| \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot (-2) - 3 \right|}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Параллель $x - 3y + 5z + 2 = 0$, $x - 3y + 5z - 7 = 0$ жазықтықтарының ара қашықтығын тап.

Шешімі. Олардың ара қашықтығын табу үшін осы екі жазықтықтың бірінде жатқан кез келген бір нүктені тауып сол нүктеден екінші жазықтыққа дейінгі ара қашықтықты (4.16) формуладан анықтасақ жеткілікті. Алдымен $x - 3y + 5z + 2 = 0$ жазықтығында жатқан кез келген нүктені анықтайық, ол үшін x пен y айнымалы шамалары үшін кез келген санды алайық, мысалға $x = 1$, $y = 0$. Ал енді z -ті табу үшін $x = 1$, $y = 0$ -ді осы теңдеуге апарып қояйық та z -ті табалық: $1 - 3 \cdot 0 + 5z + 2 = 0$, $z = -\frac{3}{5}$. Сонымен, $M(1, 0, -\frac{3}{5})$ нүкте $x - 3y + 5z + 2 = 0$ жазықтығында жатыр. Енді $M(1, 0, -\frac{3}{5})$ нүктеден екінші $x - 3y +$

$+5z-7=0$ жазықтығына дейінгі ара қашықтықты (4.16) формуладан табамыз:

$$d = \frac{|1 \cdot 1 + 0(-43) + 5\left(-\frac{3}{5}\right) - 7|}{\sqrt{1+9+25}} = \frac{9}{\sqrt{35}}.$$

4. $A(1, 2, -1)$ нүктеден өтіп $x+y-3z+1=0$ мен $2x+y-z-3=0$ жазықтықтарының қиылысу сызығына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін анықта.

Шешімі. $\vec{N}_1 = \{1; 1; -3\}$, $\vec{N}_2 = \{2; 1; -1\}$ — векторлар берілген жазықтықтардың нормаль векторлары. Сондықтан, олар жазықтықтардың қиылысу сызығына да перпендикуляр. Олай болса, $\vec{N}_1$ мен $\vec{N}_2$ векторлары іздестіріп отырған жазықтыққа параллель, яғни іздестіріп отырған жазықтық A нүктеден өтіп $\vec{N}_1$ мен $\vec{N}_2$ векторларына параллель болады. Енді іздестіріп отырған жазықтықтың кез келген $B(x, y, z)$ нүктесінен алайық, онда $\vec{AB} = \{x-1; y-2; z+1\}$, $\vec{N}_1 = \{1; 1; -3\}$, $\vec{N}_2 = \{2; 1; -1\}$ — векторлары компланар болады. Олай болса, олардың аралас көбейтіндісі нөлге тең, яғни

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Осы анықтауышты бірінші жатық жолы бойынша жіктеп іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуін табамыз:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} (x-1) - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} (y-2) + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} (z+1) = 0$$

немесе

$$2x - 5y - z + 7 = 0.$$

5. Берілген $A_0(1, -1, 2)$, $A_1(1, 0, 1)$, $A_2(3, 1, -1)$ нүктелерінен өтетін жазықтықтың теңдеуін анықта.

Шешімі. Іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуін табу үшін

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

теңдеуін пайдалансақ жеткілікті, мұндағы $A_0(x_0, y_0, z_0)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Сонда

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1-1 & 0+1 & 1-2 \\ 3-1 & 1+1 & -1-2 \end{vmatrix} = 0 \text{ немесе } \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Соңғы анықтауышты бірінші жатық жолы бойынша жіктеп, іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуін табамыз:

$$-(x-1) - 2(y+1) - 2(z-2) = 0 \text{ немесе } x + 2y + 2z - 3 = 0.$$

6. Берілген $2x - y + 3z - 1 = 0$ жазықтығынан ара қашықтығы 7-ге тең параллель жазықтықтың теңдеуін анықта.

Ш е ш і м і. Іздестіріп отырған жазықтық берілген жазықтыққа параллель болғандықтан оның теңдеуін мына түрде анықтауға болады:

$$2x - y + 3z + D = 0,$$

мұндағы D — белгісіз коэффициент. Енді осы параллель жазықтықтардың ара қашықтығын есептейік. Ол үшін берілген, яғни $2x - y + 3z - 1 = 0$ жазықтығының бойында жатқан кез келген нүктені анықтайық, мысалы, $x = 0$, $y = 0$ деп алып нүктенің үшінші координатын табайық, сонда $z = \frac{1}{3}$. Енді $M(0, 0, \frac{1}{3})$ нүктенен $2x - y + 3z + D = 0$ жазықтыққа дейінгі ара қашықты есептейік:

$$d = \frac{|1 + D|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{|1 + D|}{\sqrt{14}}.$$

Есептің шарты бойынша $d = 5$, яғни

$$\frac{|1 + D|}{\sqrt{14}} = 5.$$

Осыдан

$$1 + D = \pm 5\sqrt{14}, \quad D = \pm 5\sqrt{14} - 1.$$

Сонымен, іздестіріп отырған жазықтық — екеу:

$$2x - y + 3z + 5\sqrt{14} - 1 = 0 \quad \text{және} \quad 2x - y + 3z - 5\sqrt{14} - 1 = 0.$$

7. Берілген $A_1(1, -2, 1)$ мен $A_2(2, 1, -2)$ нүктелерінен өтіп $\vec{u} = \{3; -3; 1\}$ векторына компланар жазықтықтың теңдеуін анықта.

Ш е ш і м і. Іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуін табу үшін. (4.25) формуланы пайдалансақ жеткілікті:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 2-1 & 1+2 & -2-1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{немесе} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & x-1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Үшінші ретті анықтауышты бірінші жатық жолы бойынша жіктеп есептейік. Сонда

$$-6(x-1) - 10(y+2) - 12(z-1) = 0 \quad \text{немесе} \quad 3x + 5y + 6z + 1 = 0$$

теңдеуі берілген A_1 мен A_2 нүктелерінен өтіп $\vec{u}$ векторына компланар жазықтықтың теңдеуін анықтайды.

4.9. Үш жазықтықтың қиылысу нүктелері және жазықтық пен қос нүктелердің орналасуы

Бізге қиылысатын үш жазықтық жалпы теңдеуімен берілсін

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

Берілген үш жазықтықтың қиылысу нүктесін табу үшін олардың теңдеулерін біріктіріп, яғни x , y , z белгісіздері бар біртекті емес теңдеулер жүйесін шешсек жеткілікті. Себебі, жүйенің шешімі үш жазықтықтың да теңдеуін қанағаттандырады. Үш белгісізі бар біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесін Крамер немесе матрица әдістерімен шешуге болады.

Егер жүйенің анықтауышы

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

нөлге тең болмаса, онда жүйенің тек бір ғана шешімі бар, яғни берілген үш жазықтық тек бір ғана нүктеде қиылысады. Ол нүкте

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

формуларынан анықталады, мұндағы

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \\ -D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \\ A_3 & -D_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & -D_3 \end{vmatrix}.$$

Егер жүйенің анықтауышы нөлге тең болса ($\Delta = 0$) және оның кем дегенде бір миноры нөлге тең болмаса, онда берілген үш жазықтыққа төмендегі екі жағдайдың бірі орындалады: 1) қиылыспайды; 2) шексіз көп нүктелерде қиылысады.

Бірінші жағдайда, төмендегі кестенің

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

кем дегенде үшінші ретті анықтауыштарының бірі нөлге тең емес. Сондықтан, үш жазықтықтың екеуі қиылысады және олардың қиылысу сызығы үшінші жазықтыққа параллель болады. Ал екінші жағдайда, жоғарыдағы кестенің барлық үшінші ретті анықтауыштары нөлге тең және үш жазықтық бір түзуден өтеді.

Егер Δ анықтауышы және оның барлық минорлары нөлге тең болса, онда берілген үш жазықтыққа төмендегі екі жағдайдың бірі орындалады:

1) қиылыспайды; 2) шексіз көп нүктелерде қиылысады.

Бірінші жағдайда жоғарыдағы кестенің екінші ретті анықтауыштарының бірі нөлге тең емес. Сондықтан, үш жазықтық өзара параллель болады. Ал екінші жағдайда жоғарыдағы кестенің барлық екінші ретті анықтауыштары нөлге тең және үш жазықтық беттеседі.

Енді берілген $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығымен $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ кос нүктелердің орналасуын қарастырайық.

Егер $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ мен $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ сандарының таңбасы бірдей болса, онда M_1 мен M_2 нүктелері берілген жазықтықтың бір жағында орналасады, ал егер олардың таңбасы қарама-қарсы болса, онда ол нүктелер жазықтықтың екі жағында орналасады. Егер олар нөлге тең болса, онда ол нүктелер жазықтықта жатады. Егер олардың біреуі нөлге тең болса, екіншісі нөлге тең болмаса, онда нүктенің біреуі жазықтықта, ал екіншісі жазықтықтан тысқары орналасады.

Мысалдар. 1. Төмендегі жазықтықтардың қиылысу нүктесін анықта

$$2x + y - z + 3 = 0, \quad 3x + 2y + z + 1 = 0, \quad x - y + z + 3 = 0.$$

Шешімі. Іздестіріп отырған нүктенің координаттарын табу үшін төмендегі бір текті емес сызықты жүйені шешсек жеткілікті:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -3, \\ 3x + 2y + z = -1, \\ x - y + z = -3. \end{cases}$$

Жүйені Крамер әдісімен шешейік:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta x = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 9.$$

Сонда, $x = -2$, $y = 2$, $z = 1$ жүйенің шешімі болып табылады. Сонымен, осы жүйенің шешімі іздестіріп отырған нүктенің координаттары болады, яғни $A(-2, 2, 1)$.

2. Берілген $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(1, -1, -2)$ нүктелері мен

$$2x - 3y + 5z + 1 = 0$$

жазықтығы қалай орналасқан?

Шешімі. Таңбасын зерттейік M_1 мен M_2 нүктелердегі

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1 = 2 - 6 + 15 + 1 > 0,$$

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) + 1 = 2 + 3 - 10 + 1 < 0.$$

Сонымен, таңбалары қарама-қарсы, яғни M_1 мен M_2 нүктелері $2x - 3y + 5z + 1 = 0$ — жазықтығының екі жағында орналасқан.

3. Берілген $M_1(-1, 2, 1)$, $M_2(1, 1, 2)$ нүктелері мен

$$x + 5y - 4z - 5 = 0$$

жазықтығы қалай орналасқан.

Ш е ш і м і. Таңбасын зерттейік:

$$-1 + 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 5 = -1 + 10 - 4 - 5 = 0,$$

$$1 + 5 - 4 \cdot 2 - 5 = 1 + 5 - 8 - 5 < 0.$$

Сонымен, M_1 нүкте берілген жазықтықта орналасқан, ал екінші нүкте жазықтықтан тысқары жатыр.

4.10. Бір нүктеден өтетін кеңістіктегі түзудің теңдеуі

Бізге кеңістікте кез келген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте мен осы нүктеден өтетін L түзуі берілген, ал түзудің бағыттауыш векторын $\vec{s} = \{l; m; n\}$ әрпімен белгілейік (120-сурет).

Т е о р е м а 4.9. Кеңістіктегі $M(x_0, y_0, z_0)$ нүктеден өтіп бағыттауыш векторымен берілген L түзуінің канонды теңдеуі:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \quad (4.26)$$

ал векторлық теңдеуі:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}, \quad (4.27)$$

ал параметрлік теңдеуі:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (4.28)$$

түрінде анықталады, мұндағы $\vec{r}$ түзудегі $M(x, y, z)$ нүктенің, ал $\vec{r}_0$ — осы түзудегі $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктенің радиус-векторлары.

Д ә л е л д е у і. Теореманың шарты бойынша $M(x, y, z)$ нүкте $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеден өтетін L түзуінің бойында жатыр, сондықтан $\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ мен $\vec{s} = \{l; m; n\}$ векторлары коллинеар, олай болса олардың сәйкес координаттары пропорционал (120-сурет) яғни

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (4.29)$$

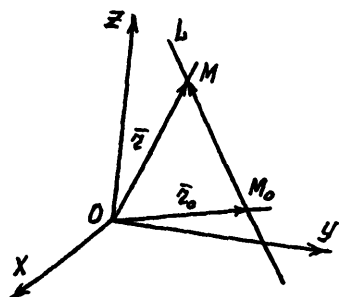
және

$$\vec{M_0M} = t \cdot \vec{s},$$

мұндағы t — параметр.

Сонғы теңдіктің оң жағындағы вектор $\vec{r} - \vec{r}_0$ векторына тең, яғни $\vec{N_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$. Олай болса, (4.29) теңдеуінен мына теңдікті аламыз:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$$



120-сурет

немесе

$$\{x; y; z\} = \{x_0; y_0; z_0\} + \{tl; tm; tn\}.$$

Осыдан және векторлардың теңдігін ескере отырып дәлелдеу керек (4.28). теңдікті аламыз. Теорема дәлелденді.

Мысалдар. 1. Берілген $M(1, -4, 5)$ нүктеден өтіп

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 1 - 4t, \\ z = 5 + 3t \end{cases}$$

түзуіне параллель болатын түзудің теңдеуін анықта.

Шешімі. Түзудің параметр теңдеуінің әрқайсысынан t — параметрін тауып және оларды теңестіріп берілген түзудің канонды теңдеуін аламыз:

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-5}{3} = t.$$

Іздестіріп отырған түзудің бағыттауыш векторы $\vec{s} = \{-2; -4; 3\}$ болады. Енді $M(1, -4, 5)$ нүктеден өтіп бағыттауыш векторы $\vec{s}$ болатын түзудің теңдеуін табу үшін (4.26) формуланы пайдалансақ жеткілікті

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+4}{-4} = \frac{z-5}{3}.$$

2. Берілген $M(2, -1, 1)$ нүктеден өтіп координат жүйесінің өстерімен $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$ бұрыштар түзейтін түзудің канонды және параметр теңдеулерін анықта.

Шешімі. Іздестіріп отырған түзудің бағыттауыш векторы ретінде осы вектордың бірлік векторын алуға болады, яғни

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \cos \frac{\pi}{4} \cdot \vec{i} + \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \vec{j} + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \vec{k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{1}{2} \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{k} = \\ &= \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Енді түзудің канонды теңдеуін табу үшін (4.26) формуланы пайдаланамыз:

$$\frac{x-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y+1}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-1}{\frac{1}{2}} \quad \text{немесе} \quad \frac{x-2}{\sqrt{2}} = -(y+1) = z-1.$$

Осы түзудің параметр теңдеуін табу үшін оның канонды теңдеуін t -ға теңестіріп, олардан x , y , z -ді табайық:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{\sqrt{2}} &= -(y+1) = z-1 = t, \\ \frac{x-2}{\sqrt{2}} &= t, \quad x-2 = \sqrt{2}t, \quad x = 2 + \sqrt{2}t, \\ -(y+1) &= t, \quad y+1 = -t, \quad y = -1-t, \\ z-1 &= t, \quad z = 1+t. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=2+\sqrt{2}t, \\ y=-1-t, \\ z=1+t \end{cases}$$

тендеуі түзудің параметр тендеуі болады.

3. Берілген $M(1, -1, 3)$ нүктеден өтіп координат өсінің OX өсіне параллель түзудің канонды және параметр тендеулерін анықта.

Шешімі. Есептің шарты бойынша $\vec{e}=\{1; 0; 0\}$ векторы OX өсінде орналасқан және ол іздестіріп отырған түзуге параллель. Сондықтан $\vec{e}$ векторын осы түзудің бағыттауыш векторы ретінде алайық. Сонда (4.29) тендеуін аламыз:

$$\left(\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-3}{0} \right), \\ y+1=0, z-3=0.$$

Енді түзудің параметр тендеуін табу үшін бірінші бөлшекті t -ға теңестіріп іздестіріп отырған түзудің тендеуін аламыз:

$$x=1+t, y=-1, z=3.$$

4. Берілген $A(2, -1, 3)$ нүктеден өтіп $x-3y+2z+1=0$ жазықтығына перпендикуляр түзудің тендеуін анықта.

Шешімі. Берілген жазықтықтың $\vec{N}=\{1; -3; 2\}$ — нормаль векторы іздестіріп отырған түзудің бағыттауыш векторы болып табылады. Олай болса, берілген нүктеден өтіп бағыттауыш векторы $\vec{N}$ болатын түзу, яғни

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-3}{2}$$

іздестіріп отырған түзу болады.

4.11. Екі нүктеден өтетін кеңістіктегі түзудің тендеуі

Бізге кеңістікте $M_0(x_0, y_0, z_0)$ мен $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктелері берілсін, делік.

Теорема 4.10. Екі нүктеден өтетін кеңістіктегі түзудің тендеуі

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}, \quad (4.30)$$

ал параметрлік тендеуі

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t(x_1 - x_0), \\ y &= y_0 + t(y_1 - y_0), \\ z &= z_0 + t(z_1 - z_0) \end{aligned} \quad (4.31)$$

түрінде анықталады.

Дәлелдеуі. Іздестіріп отырған түзудің бағыттауыш век-

торы ретінде түзудің бойында жатқан $\vec{M_0M}$ векторын алалық, яғни $\vec{M_0M} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$. Демек, (4.26) теңдеуінен (4.30) теңдеуін аламыз. Енді осы теңдеуді t -ға теңестірілдік:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = t, \quad \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = t, \quad \frac{z-z_0}{z_1-z_0} = t.$$

Осыдан x, y, z айнымалы шамаларын табатын болсақ, онда (4.31) теңдеуін аламыз. Теорема дәлелденді.

Мысалдар. 1. Берілген $M_0(1, 2, 1)$ мен $M_1(-1, 3, 4)$ нүктелерінен өтетін түзудің канонды теңдеуін және параметрлік теңдеуін анықта.

Шешімі. (4.30) формуладан екі нүктеден өтетін түзудің канонды теңдеуін табамыз:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

Осы теңдеуді t -ға теңестірілдік:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3} = t.$$

Осылардың әрқайсысын t -ға теңестіріп, одан x, y, z -ді тапсақ түзудің параметрлік теңдеуін аламыз, немесе (4.31) формуланы пайдалансақ та болады:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

2. Үшбұрыштың $A(1, 0, 4)$, $B(3, 2, -1)$, $C(-1, 5, -2)$ төбелері. Оның қабырғаларының және B төбесінен жүргізілген медиананың теңдеулерін тап.

Шешімі. Үшбұрыштың қабырғаларының теңдеулерін табайық. Ол үшін (4.30) формуланы пайдаланамыз. AB түзуінің теңдеуі:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-0}{2-0} = \frac{z-4}{-1-4}, \text{ осыдан } \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{-5};$$

AC — түзуінің теңдеуі:

$$\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-0}{5-0} = \frac{z-4}{-2-4}, \text{ осыдан } \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{5} = \frac{z-4}{-6};$$

BC — түзуінің теңдеуі:

$$\frac{x-3}{-1-3} = \frac{y-2}{5-2} = \frac{z+1}{-2+1}, \text{ осыдан } \frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}.$$

Енді B төбесінен жүргізілген медиана үшбұрыштың AC қабырғасын тең екі бөлікке бөледі. Енді AC қабырғаны тең екі бөлікке бөлетін D нүктенің координаттарын табайық:

$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0, \quad y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0 + 5}{2} = \frac{5}{2},$$

$$z_D = \frac{-z_A + z_C}{2} = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Енді (4.30) формуланы екінші рет пайдаланып үшбұрыштың B төбесінен қарсы жатқан AC қабырғасына жүргізілген BD — медиана теңдеуін табамыз:

$$\frac{x-x_D}{x_B-x_D} = \frac{y-y_D}{y_B-y_D} = \frac{z-z_D}{z_B-z_D}, \text{ осыдан } \frac{x}{3} = \frac{y-\frac{5}{2}}{-\frac{5}{2}} = \frac{z-1}{-2}.$$

4.12. Кеңістіктегі түзудің жалпы теңдеуі және оны канонды, параметр теңдеулеріне келтіру

Бізге кеңістікте қиылысатын екі жазықтық берілсін

$$(\vec{N}_1, \vec{r}) + D_1 = 0, (\vec{N}_2, \vec{r}) + D_2 = 0,$$

мұндағы $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ — жазықтықтардың сәйкес нормаль, ал $\vec{r} = \{x; y; z\}$ радиус векторлары (121-сурет).

Енді жазықтықтарды бірге қарастыралық:

$$\begin{cases} (\vec{N}_1, \vec{r}) + D_1 = 0, \\ (\vec{N}_2, \vec{r}) + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Берілген жазықтықтар қиылысатын болғандықтан олардың қиылысу сызығы кеңістіктегі түзу болады. Демек, (4.32) теңдеуін кеңістіктегі түзудің теңдеуі деп қарастыруға болады. Олай болса, (4.32) теңдеуін былай жазуға болады;

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Сонымен, (4.33) теңдеуін кеңістіктегі түзудің жалпы теңдеуі, ал (4.32) теңдеуін осы түзудің жалпы теңдеуінің векторлық теңдеуі деп аталады.

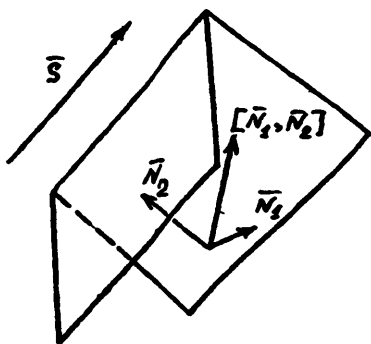
(4.33) түзуінің бағыттауыш векторы ретінде $\vec{s} = \{l; m; n\}$ векторын алайық. Сонда (4.32) немесе (4.33) түзуінің теңдеуін параметрлік түрде былай жазуға болады:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}.$$

Енді осы қиылысатын жазықтықтардың нормаль векторларының векторлық көбейтіндісін қарастыралық:

$$[\vec{N}_1, \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Бағыттауыш $\vec{s}$ векторы $[\vec{N}_1, \vec{N}_2]$ векторына коллинеар, сондықтан



121-сурет

$$l : m : n = \left| \begin{array}{cc} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right|.$$

Демек, кеңістіктегі түзудің канонды (4.26) теңдеуіндегі l, m, n коэффициенттермен алмастыруға болады. Сонымен, кеңістіктегі түзу жалпы теңдеуімен берілсе, онда оның канонды теңдеуі былай анықталады:

$$\frac{x-x_0}{\left| \begin{array}{cc} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{array} \right|} = \frac{y-y_0}{\left| \begin{array}{cc} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{array} \right|} = \frac{z-z_0}{\left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right|}. \quad (4.34)$$

Түзудің (4.33) жалпы теңдеуінен оның параметр теңдеуін алайық. Ол үшін (4.33) теңдеуден оның канонды теңдеуін аламыз, яғни (4.34) теңдеуін. Енді (4.34) теңдеуіндегі өрнектерді жеке-жеке t -ға теңестірейік:

$$\frac{x-x_0}{\left| \begin{array}{cc} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{array} \right|} = t, \quad \frac{y-y_0}{\left| \begin{array}{cc} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{array} \right|} = t, \quad \frac{z-z_0}{\left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right|} = t.$$

Осыдан x, y, z айнымаларын тауып түзудің параметр теңдеуін аламыз:

$$\begin{cases} x = x_0 + \left| \begin{array}{cc} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{array} \right| t, \\ y = y_0 + \left| \begin{array}{cc} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{array} \right| t, \\ z = z_0 + \left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right| t. \end{cases}$$

Түзудің жалпы теңдеуінен параметр теңдеуін басқа жолмен де алуға болады. Мысалы,

$$\left| \begin{array}{cc} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{array} \right| \neq 0$$

болсын деп ұйғарайық және $x = x_0 + a_0 t$, мұндағы x_0, a_0 — кез келген сандар. x -тің мәнін (4.33) теңдеуіне қойып, жүйені y, z айнымалары арқылы шешейік, сонда

$$\begin{aligned} y &= y_0 + a_1 t, \\ z &= z_0 + a_2 t \end{aligned}$$

болады. Сонымен,

$$\begin{cases} x = x_0 + a_0 t, \\ y = y_0 + a_1 t, \\ z = z_0 + a_2 t \end{cases}$$

берілген түзудің параметр теңдеуі болады.

М ы с а л д а р. 1. Түзудің жалпы теңдеуін

$$\begin{cases} x - 2y - 3z + 4 = 0, \\ 2x + y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

канонды түрге келтір.

Шешімі. Түзудің жалпы теңдеуінен, алдымен y -ті, одан кейін z -ті айырайық:

$$\begin{cases} 5x - 7z - 6 = 0, \\ 4x + 7y - 23 = 0. \end{cases}$$

Осы теңдеулердің әрқайсысынан x -ті тауып және оларды теңестіріп, іздестіріп отырған түзудің теңдеуінен аламыз:

$$x = \frac{7z+6}{5} \quad x = \frac{-7y+23}{4}$$

немесе

$$\frac{x}{7} = \frac{y - \frac{23}{7}}{-4} = \frac{z + \frac{6}{7}}{5}.$$

2. Берілген $M(2, -2, 3)$ нүктеден өтіп

$$\begin{cases} 2x - 3y - z - 1 = 0, \\ x - 2y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

түзуіне параллель түзудің теңдеуін анықта.

Шешімі. Іздестіріп отырған түзудің теңдеуін табу үшін (4.34) формуланы пайдалансақ жеткілікті:

$$\frac{x-2}{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{y+2}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z-3}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} \quad \text{немесе} \quad \frac{x-2}{8} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-3}{1}.$$

Осы теңдеуді басқа жолмен де алуға болады. Мысалы, берілген түзудің бағыттауыш векторын тауып (4.26) формуланы пайдалансақ жеткілікті. $2x - 3y - z - 1 = 0$ жазықтығының $\vec{N}_1 = \{2; -3; -1\}$ нормаль векторы болады. Берілген түзудің бағыттауыш векторы ретінде $\vec{N}_1$ мен $\vec{N}_2$ векторларының векторлық көбейтіндісін алуға болады:

$$\vec{S} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k} = \{-8; -5; -1\}.$$

Енді іздестіріп отырған түзудің теңдеуін табу үшін (4.26) — формуланы пайдалансақ жеткілікті:

$$\frac{x-2}{8} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-3}{1}.$$

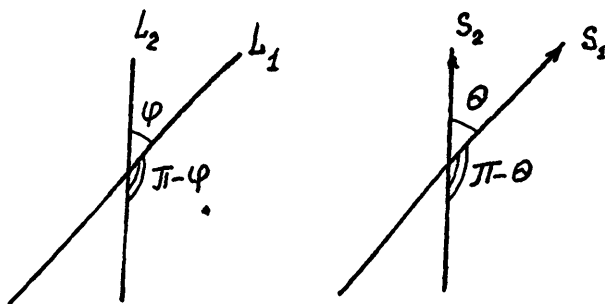
4.13. Кеңістіктегі екі түзу арасындағы бұрыш

Бізге кеңістікте қиылысатын L_1 мен L_2 түзулері векторлық түрде берілсін делік:

$$\begin{aligned} L_1: \vec{r} &= \vec{r}_1 + t \cdot \vec{s}_1, \\ L_2: \vec{r} &= \vec{r}_2 + t \cdot \vec{s}_2, \end{aligned}$$

мұндағы $\vec{r}=\{x; y; z\}$, $\vec{r}_1=\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{r}_2=\{x_2; y_2; z_2\}$ — радиус векторлар, $\vec{s}_1=\{l_1; m_1; n_1\}$, $\vec{s}_2=\{l_2; m_2; n_2\}$ — бағыттауыш векторлар.

Берілген L_1 мен L_2 түзулерінің арасындағы бұрышты φ әрпімен; ал олардың бағыттауыш $\vec{s}_1$ мен $\vec{s}_2$ векторларының арасындағы бұрышын θ әрпімен белгілейік (122-сурет) Сонда $\varphi=\theta$ немесе $\varphi=\pi-\theta$, осыдан $\cos \varphi=\pm \cos \theta$.



122-сурет

Олай болса, L_1 мен L_2 түзулерінің арасындағы φ бұрыш олардың бағыттауыш векторларының арасындағы бұрышы арқылы анықталады, яғни

$$\cos \varphi = \pm \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}.$$

Сонымен, L_1 мен L_2 түзулері канонды тендеулері арқылы берілсе, яғни

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

онда

$$\cos \varphi = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (4.35)$$

Т е о р е м а. 4.11. Кеністіктегі L_1 мен L_2 түзулері ортогонал болу үшін мына шарттың,

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \quad (4.36)$$

ал параллель болу үшін мына шарттың

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (4.37)$$

орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеу. Қажеттілігі. Берілген екі түзу ортогональ деп ұйғарып (4.36) шартын дәлелделік. Ұйғаруымыз бойынша $\varphi = \frac{\pi}{2}$, олай болса (4.35)-тен (4.36)-шартын аламыз.

Жеткіліктілігі. Енді (4.36) шарты орындалсын деп

ұйғарып, олардың ортогональдығын дәлелдейік. Бұл жағдайда (4.35) формуладан $\cos \varphi = 0$ екендігін аламыз, олай болса $\varphi = \frac{\pi}{2}$ болады. Теореманың екінші тұжырымын жаттығу ретінде оқырманның өзіне ұсынамыз. Теорема дәлелденді.

4.14. Екі түзудің бір жазықтықта жату белгісі

Бізге кеңістікте екі түзу канонды теңдеулерімен берілсін:

$$\frac{x-x_0}{l_0} = \frac{y-y_0}{m_0} = \frac{z-z_0}{n_0}, \quad (4.38)$$

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad (4.39)$$

мұндағы $\vec{s}_0 = \{l_0; m_0; n_0\}$ — бірінші түзудің, ал $\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$ — екінші түзудің бағыттауыш векторлары. Бірінші түзу $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеден, екінші түзу $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктеден өтеді (123-сурет).

M_1 мен M_2 нүктелерінің радиус векторларын сәйкес $\vec{r}_1$ мен $\vec{r}_2$ әріптерімен белгілейік. Берілген түзулердің параметр теңдеулерін табайық. Ол үшін (4.38) мен (4.39) теңдеулерін жеке-жеке t -ға теңестіріп, олардан x, y, z айнымаларын анықтасақ жеткілікті:

$$\begin{aligned} \frac{x-x_0}{l_0} = t; \quad \frac{y-y_0}{m_0} = t; \quad \frac{z-z_0}{n_0} = t; \\ \frac{x-x_1}{l_1} = t; \quad \frac{y-y_1}{m_1} = t; \quad \frac{z-z_1}{n_1} = t. \end{aligned}$$

Сонда

$$\begin{cases} x = x_0 + l_0 t, \\ y = y_0 + m_0 t, \\ z = z_0 + n_0 t, \end{cases} \quad (4.38)$$

бірінші түзудің параметр теңдеуі, ал

$$\begin{cases} x = x_1 + l_1 t, \\ y = y_1 + m_1 t, \\ z = z_1 + n_1 t. \end{cases} \quad (4.39)$$

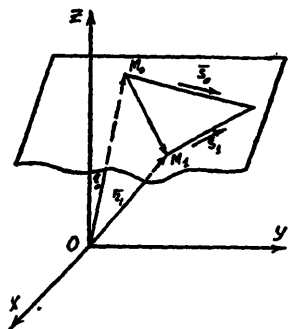
екінші түзудің параметр теңдеуі болады.

Теорема 4.12. Берілген (4.38) мен (4.39) түзулері бір жазықтықта жату үшін $\vec{s}_0, \vec{s}_1, \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \vec{M}_0 \vec{M}_1 = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$ — векторларының компланарлығы қажетті әрі жеткілікті, яғни

$$([\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{s}_0], \vec{s}_1) = 0$$

немесе

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l_0 & m_0 & n_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.40)$$



123-сурет

Дәлелдеуі. Жеткіліктілігі. (4.40) — теңдік орындалсын деп ұйғарып $\vec{s}_0, \vec{s}_1, \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ — векторларының компланарлығын дәлелдейік. Үш вектордың компланар болу шарты бойынша, онда олар компланар. Сондықтан, (4.38), (4.39) түзулері сәйкес $\vec{s}_0, \vec{s}_1$ бағыттауыш векторларымен және M_0 мен M_1 нүктелерінен өтетін түзу бір жазықтықта жатады.

Қажеттілігі. Енді (4.38) мен (4.39) түзулері бір жазықтықта жатсын, онда ол түзулердің бағыттауыш векторлары және $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ — векторы осы жазықтықта да жатады, яғни олардың аралас көбейтіндісі нөлге тең.

Теорема дәлелденді.

Мысалдар. 1. Берілген түзулердің арасындағы доғал бұрыштың косинусын анықта:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+5}{3}, \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}.$$

Шешімі. Іздестіріп отырған бұрышты (4.35) формуладан анықтаймыз:

$$\cos \varphi = -\frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{\sqrt{4+16+9} \sqrt{4+9+1}} = -\frac{19}{\sqrt{406}}.$$

2. $M(1, -2, 0)$ нүктеден өтіп

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{4}, \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{3}$$

түзулеріне перпендикуляр түзудің теңдеуін анықта.

Шешімі. Іздестіріп отырған түзудің бағыттауыш векторын анықтайық. Есептің шарты бойынша ол берілген түзулердің $\vec{s}_1 = \{2; 3; 4\}$ және $\vec{s}_2 = \{2; 2; 3\}$ — бағыттауыш векторларына перпендикуляр. Сондықтан, іздестіріп отырған түзудің бағыттауыш векторы ретінде $\vec{s}_1$ мен $\vec{s}_2$ векторларының векторлық көбейтіндісін алуға болады:

$$\vec{s} = [\vec{s}_1, \vec{s}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Енді (4.26) формуланы пайдаланып, іздестіріп отырған түзудің теңдеуін аламыз:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-0}{-2} \text{ немесе } x-1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}.$$

3. $A(1, 1, 2)$ нүктенің $2x + y - z - 7 = 0$ — жазықтығындағы A' — проекциясын анықта.

Шешімі. Алдымен A нүктеден өтіп берілген жазықтыққа перпендикуляр түзудің теңдеуін табайық:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

Енді анықталған перпендикуляр түзудің параметр теңдеуін анықтайық:

$$\frac{x-1}{2} = t, \quad y-1 = t, \quad \frac{z-2}{-1} = t.$$

Осыдан

$$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=1+t, \\ z=2-t. \end{cases}$$

Сонымен, есептің шарты бойынша түзудің параметр теңдеуі берілген жазықтыққа перпендикуляр. Сондықтан түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесі іздестіріп отырған нүктеміз. Алдымен перпендикуляр түзудің параметр теңдеуімен берілген жазықтықтың жалпы теңдеуін біріктіріп t параметрін анықтайық:

$$2(1+2t) + 1 + t - (2-t) - 7 = 0, t = 1.$$

Параметрдің мәнін түзудің параметр теңдеуіне қойып, A нүктенің берілген жазықтықтағы A' проекциясының координаттарын табамыз:

$$x=3, y=2, z=1 \text{ немесе } A'(3, 2, 1).$$

4.15. Кеңістіктегі түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш

Анықтама. Кеңістіктегі түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш деп түзу мен осы түзудің жазықтықтағы проекциясы арасындағы бұрышты айтады (124-сурет).

Бізге кеңістікте жазықтық жалпы теңдеуімен

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (4.41)$$

ал түзу канонды теңдеуімен

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{m} \quad (4.42)$$

берілсін делік, мұндағы

$$\vec{N} = \{A; B; C\}, \quad \vec{s} = \{l; m; n\}$$

түзудің бағыттауыш векторы.

Түзудің бағыттауыш $\vec{s}$ векторымен жазықтықтың $\vec{N}$ нормаль векторларының скаляр көбейтіндісін қарастырайық:

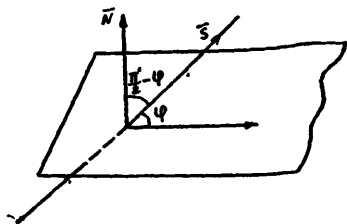
$$(\vec{N}, \vec{s}) = |\vec{N}| \cdot |\vec{s}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -|\vec{N}| \cdot |\vec{s}| \sin \varphi$$

Осыдан

$$\sin \varphi = - \frac{(\vec{N}, \vec{s})}{|\vec{N}| \cdot |\vec{s}|} = - \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Демек, кеңістіктегі түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш мына формуламен анықталады:

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (4.43)$$



124-сурет

Теорема 4.13. Кеңістіктегі түзу мен жазықтық ортогональ болу үшін мына шарттың

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}, \quad (4.44)$$

ал параллель болу үшін мына шарттың

$$Al + Bm + Cn = 0 \quad (4.45)$$

орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Түзу мен жазықтық ортогональ деп ұйғарайық та (4.44) шартын дәлелделік. Ұйғаруымыз бойынша бағыттауыш $\vec{s}$ векторымен нормаль $\vec{N}$ векторы параллель. Демек, (4.44) шартын дәлелдеу үшін осы екі вектордың параллельдік белгісін еске түсірсек болғаны.

Жеткіліктілігі. Енді (4.44) шарты орындалсын деп ұйғаралық та түзу мен жазықтықтың ортогональдығын дәлелделік немесе $\vec{N}$ мен $\vec{s}$ векторларының параллельдік белгісін дәлелдесек бізге жеткілікті. (4.44) шарты $\vec{s}$ пен $\vec{N}$ векторларының сәйкес координаттары пропорциональ екендігін анықтайды, олай болса, түзу мен жазықтық ортогональ. Теореманың бірінші тұжырымы дәлелденді, ал екіншісін жаттығу ретінде оқырманның өзіне ұсынамыз. Теорема дәлелденді.

4.16. Түзу мен жазықтықтың орналасуы

Бізге жазықтық жалпы теңдеуімен

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (4.46)$$

ал түзу канонды теңдеуімен

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (4.47)$$

берілсін.

Егер берілген жазықтық пен түзу қиылысса, онда ол нүкте жазықтықтың да түзудің де бойында жатады, яғни ол нүкте оларға ортақ нүкте және ортақ нүктенің координаттары берілген теңдеулерді қанағаттандырады. Сондықтан, ортақ нүктенің координаттарын табу үшін (4.46) мен (4.47) теңдеулерін біріктіріп x , y , z айнымалары арқылы шешеміз, яғни (4.47) теңдікті t -ға теңестіріп және оларды (4.46) мен біріктіріп, x , y , z , t белгісіздері бар сызықты теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \quad (4.48)$$

(4.48) жүйесінің x , y , z мәндерін төртінші теңдеуге қойып t параметрін табайық:

$$\begin{aligned} A(x_0 + lt) + B(y_0 + mt) + C(z_0 + nt) + D &= 0. \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + t(Al + Bm + Cn) &= 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Осыдан

$$t = - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}. \quad (4.50)$$

Енді төмендегі үш жағдайға жеке-жеке тоқталып өтейік.

1 - жағдай. Егер $Al + Bm + Cn \neq 0$ болса, онда берілген түзу мен жазықтық тек бір нүктеде қиылысады. Ол нүктені табу үшін (4.50) формуладағы t -ның мәнін (4.48) теңдіктегі бас-тапқы үш теңдеуге қойып олардың қиылысу нүктесінің координаттарын табамыз.

2 - жағдай. Егер

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

болса, онда түзу мен жазықтық параллель болады. Бұл жағдайда (4.49) теңдеудің шешімі жоқ. Олай болса, онда түзу мен жазықтықтың бірде бір ортақ нүктесі болмайды.

3 - жағдай. Егер

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

болса, онда түзу мен жазықтық беттеседі. Бұл жағдайда, t -ның кез келген мәні (4.49) теңдікті қанағаттандырады. Олай болса, (4.47) түзудің кез келген нүктесінің координаттары (4.46) жазықтықтың теңдеуін қанағаттандырады.

Мысалдар. 1. Берілген $x - 3y + 5z + 31 = 0$ жазықтығы мен

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$$

түзуінің қиылысу нүктесін табыңдар.

Шешімі. Қиылысу нүктенің координаттарын табу үшін түзудің канонды теңдеуінен оның параметр теңдеуін алайық:

$$\frac{x-2}{2} = t, \quad \frac{y+2}{2} = t, \quad \frac{z-1}{3} = t.$$

Осыдан

$$\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -2 + 2t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

Енді x, y, z айнымалыларының мәндерін берілген жазықтықтың теңдеуіне қойып, t -ны табайық:

$$2 + 2t + 6 - 6t + 5 + 15t + 31 = 0, \quad t = -4.$$

Анықталған t — параметрінің мәнін түзудің параметр теңдеуіне қойып, іздестіріп отырған нүктенің координаттарын табамыз:

$$x = -6, \quad y = -10, \quad z = -11.$$

2. $A(1, -1, 3)$ нүктенің $5x + 3y - z - 34 = 0$ жазықтығындағы проекциясының координаттарын анықта:

Ш е ш і м і. Берілген жазықтықта жатқан $A'(x', y', z')$ нүкте нүктенің проекциясы болсын. AA' түзуі берілген жазықтыққа перпендикуляр және оның $\vec{N} = \{5; 3; -1\}$ — нормаль векторына параллель. Сондықтан, AA' түзуінің канонды теңдеуі мына түрде анықталады:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

Ал параметр теңдеуі

$$\begin{cases} x = 1 + 5t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = 3 - t \end{cases}$$

болады. Енді x, y, z айнымалыларын жазықтықтың теңдеуіне қойып, t параметр табамыз:

$$5 + 25t - 3 + 9t - 3 + t - 34 = 0, \quad t = 1.$$

Анықталған t -ның мәнін AA' түзуінің параметр теңдеуіне қойып, іздестіріп отырған A' нүктенің координаттарын табамыз:

$$x' = 6, \quad y' = 2, \quad z' = 2.$$

3. $2x + 2y - 3z - 1 = 0$ жазықтығы мен

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{2}$$

түзуінің арасындағы бұрыштың синусын анықта.

Ш е ш і м і. Іздестіріп отырған бұрыштың синусын табу үшін (4.43) формуланы пайдаланамыз:

$$\sin \varphi = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2|}{\sqrt{4+4+9} \sqrt{4+9+4}} = \frac{1}{17}.$$

4. Берілген $A(1, 1, -2)$ нүктеден өтіп

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$$

түзуіне перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін тап.

Ш е ш і м і. Есептің шарты бойынша іздестіріп отырған жазықтықтың $\vec{N}$ нормаль векторы берілген түзудің $\vec{s} = \{3; -2; 2\}$ бағыттауыш векторына параллель болады. Сондықтан, A нүктеден өтіп $\vec{s}$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуі іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуі, яғни

$$3(x-1) - 2(y-1) + 2(z+2) = 0 \text{ немесе } 3x - 2y + 2z + 3 = 0.$$

5. m -нің қандай мәнінде

$$\begin{cases} x = 2 + mt, \\ y = 2 - 4t, \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

түзуі $3x - 2y - z + 2 = 0$ жазықтығына параллель болады?

Ш е ш і м і. Есептің шартын қанағаттандыратын m -нің мәнін

табу үшін жазықтық пен түзудің параллельдік белгісін пайдаланамыз:

$$3m + (-2) \cdot (4) + (-1) \cdot 5 = 0 \quad m = -1.$$

6. Берілген $A(3, 1, -1)$ нүктенің

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$$

түзуіндегі проекциясын тап.

Шешімі. A нүктенің берілген түздегі проекциясы $A'(x', y', z')$ болсын. Сонда A' нүкте берілген түзу мен AA' түзуі арқылы өтетін жазықтықтың қиылысу нүктесі және ол жазықтық $\vec{s} = \{3; 2; 3\}$ векторына перпендикуляр. Олай болса, жазықтықтың теңдеуін (4.2) формуладан табамыз:

$$3(x-3) + 2(y-1) + 3(z+1) = 0 \quad \text{немесе} \quad 3x + 2y + 3z - 8 = 0$$

Енді берілген түзудің канонды теңдеуінен оның параметр теңдеуін табайық:

$$\frac{x}{3} = t, \quad \frac{y-2}{2} = t, \quad \frac{z+2}{3} = t.$$

Осыдан

$$\begin{cases} x=3t, \\ y=2+2t, \\ z=-2+3t. \end{cases}$$

Анықталған $3x + 2y + 3z - 8 = 0$ жазықтығының теңдеуіне x, y, z — айнымалыларының мәндерін қойып, t параметрінің мәнін анықтаймыз:

$$3(3t) + 2(2+2t) + 3(-2+3t) - 8 = 0, \quad t = \frac{5}{11}.$$

$t = \frac{5}{11}$ мәнін түзудің параметр теңдеуіне қойып, іздестіріп отырған нүктенің координаттарын табамыз:

$$x' = \frac{15}{11}, \quad y' = \frac{32}{11}, \quad z' = -\frac{7}{11}, \quad A'\left(\frac{15}{11}, \frac{32}{11}, -\frac{7}{11}\right).$$

7. Берілген түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін анықта:

$$x - 2y + z - 1 = 0, \quad \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}.$$

Шешімі. Түзудің канонды теңдеуінен параметр теңдеуін алайық

$$\frac{x}{2} = t, \quad \frac{y-1}{3} = t, \quad \frac{z-2}{2} = t.$$

Осыдан

$$\begin{cases} x=2t, \\ y=1+3t, \\ z=2+2t. \end{cases}$$

Енді түзудің параметр теңдеуімен жазықтықтың теңдеуін біріктіріп t параметрді анықтайық:

$$2t - 2(1 + 3t) + 2 + 2t - 1 = 0, t = -\frac{1}{2}$$

Параметрдің мәнін түзудің параметр теңдеуіне қойып, берілген түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесінің координаттарын табамыз:

$$x = -1, y = -\frac{1}{2}, z = 1.$$

ЕКІНШІ РЕТТІ БЕТ

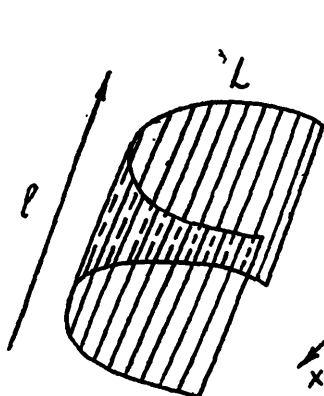
5.1. Цилиндрлік, конустық және айналу беттер

Анықтама. Берілген l түзуіне параллель әрі L сызығын қиып өтетін параллель түзулердің жиынынан анықталған бет цилиндрлік бет немесе цилиндр деп аталады, мұндағы L сызығы цилиндрдің бағыттаушысы, ал l түзуі цилиндрдің жасаушысы деп аталады.

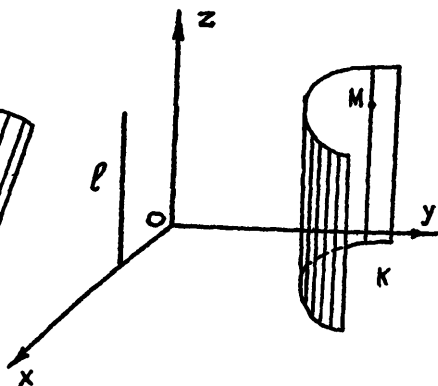
Егер цилиндрдің L бағыттаушысының бойынан кез келген A нүкте алып, осы нүктеден берілген l түзуіне параллель түзулер жүргізейік, онда параллель түзулер жиыны цилиндр түзейді XOY декарт координат жазықтығында жатқан L сызығы

$$F(x, y) = 0 \quad (5.1)$$

теңдеуімен анықталсын делік. Енді координат өсінің OZ өсі цилиндрдің l жасаушысы, ал L сызығы бағыттаушысы болатын цилиндр теңдеуін анықтайық (125-сурет). Ол үшін XYZ декарт



125-сурет



126-сурет

координат жүйесіндегі цилиндрден кез келген $M(x, y, z)$ нүкте алып, осы нүктеден $ХОУ$ жазықтығында жатқан L сызығымен қиылысатын әрі OZ өсіне параллель $МК$ түзуін жүргізейік. Сонда, K — нүкте цилиндрлік беттің жасаушысының бойында жатады әрі M нүктенің $ХОУ$ жазықтығында жатқан проекциясы. Сондықтан, $МК$ түзуінің бойында жатқан кез келген $N(x, y, z)$ нүкте (5.1) теңдеуін қанағаттандырады (126-сурет).

Олай болса, (5.1) теңдеуі OZ өсіне параллель жасаушылардан анықталған цилиндрдің теңдеуі болып табылады.

Осы сияқты

$$F(x, z) = 0 \quad (5.2)$$

теңдеуі OY өсіне параллель жасаушылардан анықталған цилиндрдің теңдеуі, ал

$$F(y, z) = 0 \quad (5.3)$$

теңдеуі OX өсіне параллель жасаушылардан анықталған цилиндрдің теңдеуі.

Сонымен, XYZ кеңістігіндегі (5.1) теңдеуімен анықталған цилиндрлік беттің L бағыттаушысы

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

теңдеуімен анықталады.

Осы сияқты (5.2) теңдеуімен анықталған цилиндрлік беттің L бағыттаушысы

$$\begin{cases} F(x, z) = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

теңдеуімен, ал (5.3) теңдеуімен анықталған цилиндрлік беттің L бағыттаушысы

$$\begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0 \end{cases}$$

теңдеуімен анықталады.

Енді жасаушылары декарт координат жүйесінің OX , OY , OZ өстеріне параллель екінші ретті цилиндрді қарастыралық, мысалы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.4)$$

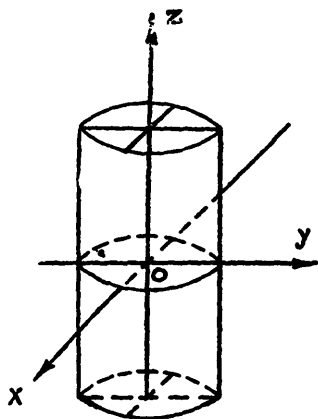
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.5)$$

$$x^2 = 2py \quad (5.6)$$

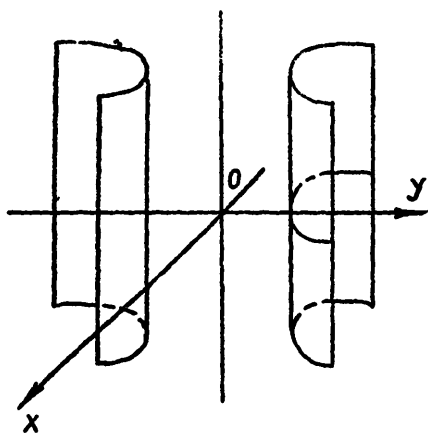
(5.4) теңдеу $xуz$ декарт координат жүйесінде эллипстік цилиндрді анықтайды (127-сурет), ал осы эллипстік цилиндрдің бағыттаушысы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

теңдеуімен анықталады.



127-сурет



128-сурет

Осы сияқты, (5.5) теңдеу гиперболаалық цилиндрді (128-сурет).

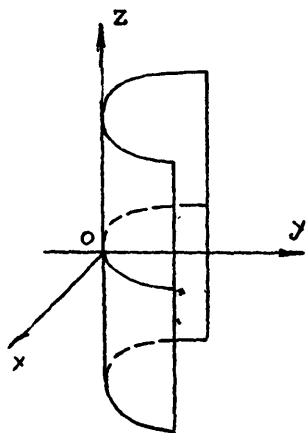
ал

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z=0 \end{cases}$$

теңдеуі оның бағыттаушысының теңдеуін анықтайды; (5.6) теңдеу гиперболаалық цилиндрді, ал

$$\begin{cases} x^2 = 2py, \\ z=0 \end{cases}$$

теңдеуі оның бағыттаушысының теңдеуін анықтайды (129-сурет).

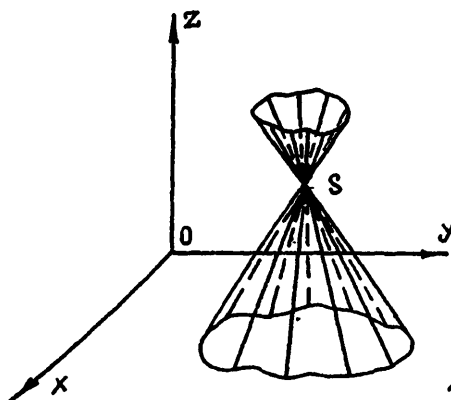


129-сурет

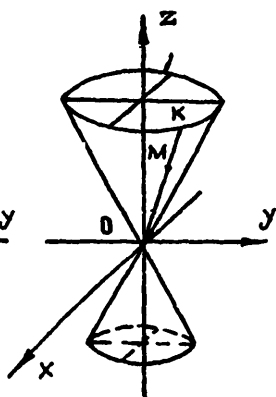
А н ы қ т а м а. Берілген S нүктеден өтіп C сызығымен қиылысатын түзулердің жиынынан анықталған бет конустық бет немесе конус деп аталады. Анықтамадағы түзулерді *конустың жасаушысы*, C сызығы *жасаушысы*, ал S төбесі деп аталады.

XOY декарт координат жүйесінің XOY жазықтығында жатқан C сызығын және осы сызықта жатпайтын S нүктені алайық C сызығының кез келген нүктелерінен белгіленген бір S нүкте арқылы өтетін түзулер жүргізейік, сонда осы түзулердің жиыны конусты анықтайды (130-сурет).

Мысалы, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



130-сурет



131-сурет

тендеуі екінші ретті конус тендеуі деп аталады (131-сурет). Осы конустың бағыттаушысы

$$\begin{cases} z = C, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

тендеуімен анықталады. Конустың төбесі координат жүйесінің бас нүктесі болады, ал жасаушысы эллипстің бойында жатқан кез келген нүктені координат жүйесінің бас нүктесімен қосатын түзулер.

А н ы қ т а м а. Берілген C сызығы тағайындалған d өсі бойымен айналу нәтижесінде пайда болған бетті *айналу бет* деп атайды.

Мысалы, $x^2 + y^2 = R^2$ шеңбер OX өсінің бойымен айналу нәтижесінде XOZ координат жүйесінде шар пайда болады, мұндағы C — шеңбер, ал d координат жүйесінің OX өсі болады.

Егер $F(x^2 + y^2, z) = 0$ екінші ретті беттің тендеуі болса, онда C — сызығының OZ өсі бойымен айналу нәтижесінде пайда болған айналу беттің тендеуі. Осы сияқты, $F(x^2 + z^2, y) = 0$ тендеуі OY өсінің бойымен, ал $F(y^2 + z^2, x) = 0$ тендеуі OX өсінің бойымен C сызығының айналу нәтижесінде пайда болған айналу беттердің тендеуі болады. Енді OZ өсінің бойымен айналу нәтижесінде пайда болған екінші ретті беттердің тендеуімен танысып өтелік:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — айналу эллипсоид;}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — бір қуысты айналу гиперболоид;}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ — қос қуысты айналу гиперболоид;}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z \text{ — айналу параболоид деп аталады.}$$

YOZ координат жазықтығында жатқан сызық y және z айнымалы шамалармен өрнектеледі, сондықтан осы сызықтың теңдеуін былай жазайық:

$$F(y, z) = 0.$$

Ал кеңістіктегі беттің теңдеуі үш x, y, z айнымалы шамалары арқылы өрнектеледі. Енді $F(y, z) = 0$ теңдеуімен берілген сызық OY өсі арқылы айналу нәтижесінде кеңістікте пайда болған айналу беттің теңдеуін табу үшін осы теңдеудегі OY өсіне аттас y айнымалы шаманы өзгертпей, ал екінші z айнымалы шаманы $\pm \sqrt{x^2 + z^2}$ өрнегіне алмастырсақ жеткілікті. Сонда пайда болған айналу беттің теңдеуі $F(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ теңдеуімен анықталады.

Егер берілген сызық OZ өсі арқылы айналса, онда OZ өсіне аттас z айнымалы шаманы өзгертпей, ал y -ті $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$ өрнегіне алмастырып, айналу беттің теңдеуін табамыз, яғни

$$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Осы сияқты, XOY және XOZ координат жазықтықтарында жатқан сызықтардың айналу беттерінің теңдеулерін табамыз.

Енді алдағы тақырыптарда берілген екінші ретті беттердің теңдеуі бойынша оның геометриялық түрін қима әдісі көмегімен анықтайық, яғни екінші ретті бетті бірнеше жазықтықтармен қиып, олардың қима сызықтарын табамыз, сонда, пайда болған қималар осы беттің геометриялық түрін анықтайды. Көп жағдайларда қима жазықтықтарын координат жазықтықтарына параллель жүргізген тиімді.

5.2. Эллипсоид

Анықтама. Кеңістіктегі тік бұрышты декарт координат жүйеде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5.7)$$

теңдеуімен берілген екінші ретті бет *эллипсоид* деп аталады.

Енді эллипсоидтың геометриялық түрін қима әдісі көмегімен анықтайық. Эллипсоид теңдеуіндегі x, y, z айнымалы шамалар жұп дәрежелі, сондықтан ол координат жазықтықтарымен симметриялы. Эллипсоидты XOY жазықтығына параллель $z = h$ жазықтығымен қиып, сонда пайда болған қима сызық (қима) теңдеуін табайық. Ол үшін, мына жүйеден

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases} \quad (5.8)$$

қима сызықтың теңдеуін аламыз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \quad z = h \quad (5.9)$$

немесе

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1, z = h, \quad (5.10)$$

мұндағы

$$a_0 = a \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_0 = b \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

Сонымен, қима сызық центрі $(0, 0, h)$, жарты өстері a_0, b_0 және $ХОУ$ жазықтығына параллель болатын эллипсті анықтайды.

Енді h -тің әртүрлі мәндеріндегі қима сызықтың (қиманың) геометриялық түрін қарастырайық.

1. Егер $|h| = C$ немесе $h = \pm C$ болса, онда (5.9) теңдіктен $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ болады. Бұл теңдікті нақты $x=0, y=0$ мәндері ғана қанағаттандыра алады. Демек, $|h| = C$ болса, онда эллипсоид пен (5.9) қиманың ортақ екі ғана $C_1(0, 0, C)$ мен $C_2(0, 0, -C)$ нүктелері бар.

2. Егер $h=0$ болса, онда (5.10) теңдігіндегі $a_0=a, b_0=b$ болады және қима

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

теңдеуімен анықталады және де бұл қима эллипсті анықтайды әрі ол $ХОУ$ координат жазықтығында жатады.

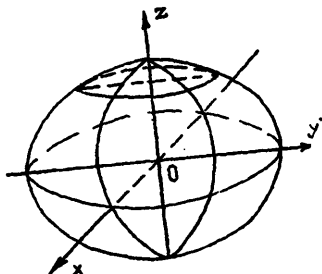
3. Егер $|h| > C$ болса, онда (5.8) жүйені қанағаттандыратын нақты x, y айнымалы шамалары жоқ. Сондықтан, бұл жағдайда эллипсоид пен $z=h$ — қима жазықтығы қиылыспайды. $z=0$ жазықтық немесе $ХОУ$ координат жазықтық эллипсоидты қиып, қиылысу нәтижесінде қима — эллипс болады және ол мына теңдеумен өрнектеледі:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Осы сияқты, $x=0$ пен $y=0$ жазықтықтары эллипсоидты қиып, қималары эллипс болады.

Осы сияқты, $ХОZ, УОZ$ координат жазықтықтарына параллель қима жазықтықтарын жүргізіп және олардың қима сызықтарының теңдеулерін анықтасақ, онда да қима эллипс болады. Сонымен, осы қималар бізге эллипсоидтың геометриялық түрін анықтап береді (132-сурет). a, b, c — эллипсоид жарты өстері, O — центрі, OX, OY, OZ — бас өстері, $ХОУ, ХОZ, УОZ$ — бас жазықтықтары деп аталады.

Егер эллипсоид жарты өстерінің тек екеуі ғана тең болса, онда қима



132-сурет

сызық центрі OZ өсінде жатқан шеңбер болады және, бұл жағдайда эллипсоид айналу эллипсоид деп аталады.

Егер $a=b>c$ болса, онда қима радиусы $r = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - h^2}$ болатын шеңбер:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z = h.$$

Бұл жағдайда айналу эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0$$

эллипсінің OZ өсі бойымен айналу нәтижесінде анықталынады. Ал, мұндай эллипсоид сығыла айналу эллипсоид деп аталады.

Егер $a>b=c$ болса, онда қима радиусы $r = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - h^2}$ болатын шеңбер:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2, \quad x = h.$$

Бұл жағдайда айналу эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

эллипсінің OX өсі бойымен айналу нәтижесінде анықталынады. Ал мұндай эллипсоид созыла айналу эллипсоид деп аталады.

Егер $a=b=c$ болса, онда мұндай эллипсоид радиусы — a -ға тең, ал центрі координат жүйесінің бас нүктесі болатын шар (сфера) деп аталады.

Егер $a>b>c$ болса, онда мұндай эллипсоид үш өсті эллипсоид деп аталады. Үш өсті эллипсоидтың төбесі деп өс пен оның бас өстерінің қиылысу нүктелерін айтамыз, яғни

$$A(\pm a, 0, 0), B(0, \pm b, 0), C(0, 0, \pm c).$$

(5.7) тендеуден $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$ олай болса, эллипсоид өлшемі $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ болатын тікбұрышты параллелепипедтің ішінде жатады және параллелепипедтің жақтары эллипсоидпен эллипсоид/төбелерінде ғана жанасады.

Егер координат жүйеде екінші ретті бет

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

тендеумен берілсе, онда бұл тендеу жорымал эллипсоид тендеуі деп аталады.

5.3. Гиперболоид

Анықтама. Кеңістіктегі тікбұрышты декарт координат жүйесінде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5.11)$$

тендеуімен берілген екінші ретті бет бір қуысты гиперboloид деп аталады.

Енді бір қуысты гиперboloидтың геометриялық түрін қима әдісі көмегімен анықтайық. Бір қуысты гиперboloид тендеуіндегі x, y, z айнымалы шамалар жұп дәрежелі, сондықтан ол координат жазықтықтарымен симметриялы. $z=h$ жазықтығымен бір қуысты гиперboloидқа қима жүргізейік, сонда пайда болған қима тендеуін анықтайық. Ол үшін, мына жүйеден

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}, \\ -h \end{cases} \quad (5.12)$$

қима тендеуін табамыз:

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1, \\ z=h, \end{cases} \quad (5.13)$$

мұндағы

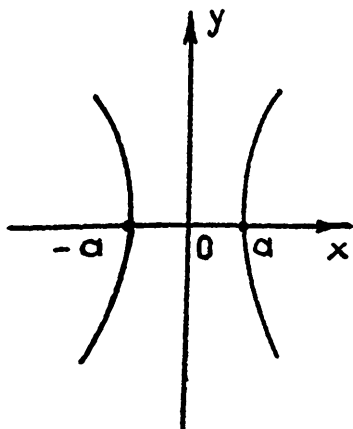
$$a_0 = a \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_0 = b \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

Сонымен, қима центрі $(0, 0, h)$, жарты өстері a_0, b_0 және XOY жазықтығына параллель болатын эллипсті анықтайды әрі h -тың мәні өссе, онда a_0 пен b_0 жарты өстері де өседі.

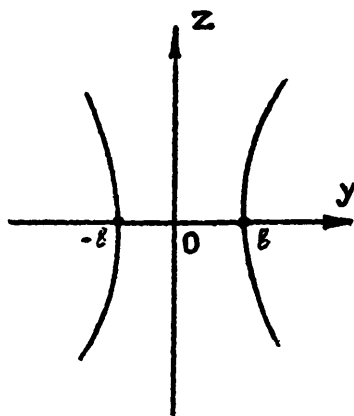
Гиперboloид пен XOY координат жазықтығы арасындағы қима тендеуі мына тендеумен анықталады (133-сурет):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y=0. \quad (5.14)$$

Осы тендеуден, қима гиперболаны анықтайды және ол OX, OY өстері арқылы симметриялы және де OX өсін $(a, 0, 0)$ мен $(-a, 0, 0)$ нүктелерінде қиятындығын көреміз.



133-сурет



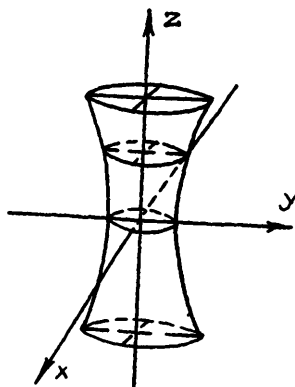
134-сурет

Осы сияқты, YOZ жазықтығымен анықталған қима гиперболаны анықтайды және ол OY , OZ өстері арқылы симметриялы және де OY өсін $(0, b, 0)$ мен $(0, -b, 0)$ нүктелерінде қияды (134-сурет).

Егер $z=0$ болса, онда XOY жазықтығында центрі жарты өстері a, b болатын кіші эллипс жатады:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z=0.$$

Осы кіші эллипсті бір қуысты гиперболоидтың эллипс қылтасы деп аталады. Сонымен, бір қуысты гиперболоидтың геометриялық түрі 135-суретте көрсетілген.



135-сурет

Егер $a=b$ болса, онда бір қуысты гиперболоид бір қуысты айналу гиперболоид деп аталады және ол

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

тендеуімен анықталады, бұл жағдайда OZ — айналу өсі, яғни бір қуысты айналу гиперболоид

$$\left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{немесе} \quad \left\{ \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \right. \right.$$

гиперболалардың бірі OZ өсі арқылы айналу нәтижесінде пайда болады.

Егер $a=b=c$ болса, онда гиперболоид дұрыс гиперболоид деп аталады.

$(0, 0, 0)$ — нүкте бір қуысты гиперболоидтың центрі, OX , OY , OZ — бас өстері, XOY , XCZ , YOZ — бас жазықтықтары деп аталады.

Анықтама. Кеңістіктегі тік бұрышты декарт координат жүйесінде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (5.15)$$

тендеуімен берілген екінші ретті бет қос қуысты гиперболоид деп аталады.

Егер (5.15) тендеуін $y=0$ жазықтығымен қиялық, сонда пайда болған қима

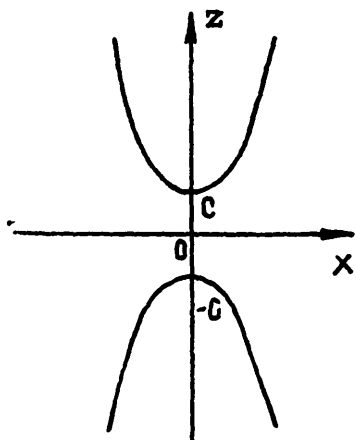
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad y=0$$

тендеуімен анықталады. Бұл қима гиперболаны анықтайды және OX , OZ өстерімен симметриялы және де OZ өсін гипербола $(0, 0, c)$ мен $(0, 0, -c)$ нүктелерінде қияды (136-сурет).

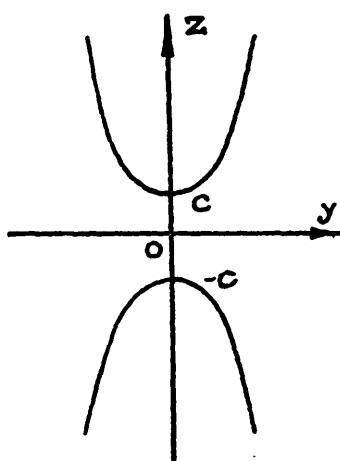
Қос қуысты гиперболоидтың $x=0$ жазықтығындағы қима

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad x=0$$

тендеуімен анықталады (137-сурет).



136-сурет



137-сурет

Енді қос қуысты гиперболоидты $z=h$ жазықтығымен қиялық, сонда пайда болған қима

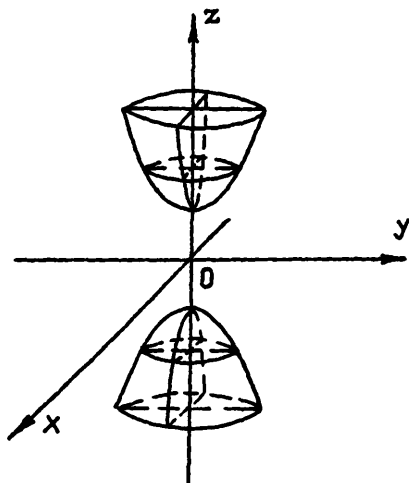
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \quad z=h$$

теңдеуімен анықталады.

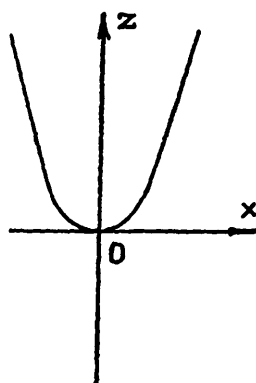
Сонымен, 1) егер $h > c$ болса, онда $z=h > c$ жазықтығы қос қуысты гиперболоидпен қиылысып жарты өстері

$$a_0 = a \cdot \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b_0 = b \cdot \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$$

болатын эллипсті анықтайды;



138-сурет



139-сурет

2) Егер $h = \pm c$ болса, онда $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ болады және де қима — эллипс нүктеге айналады;

3) Егер h өссе, онда a_0 және b_0 өседі, ал h кемісе онда a_0 , b_0 — кемиді;

4) Егер $|h| < c$, яғни $h < c$, $h > -c$, онда $z = h$ жазықтығы қос қуысты гиперболоидпен қиылыспайды;

5) Қос қуысты гиперболоид координат жазықтықтарымен симметриялы;

6) $x = 0$ мен $y = 0$ координат жазықтықтары қос қуысты гиперболоидты гипербола бойымен қияды, яғни қима гипербола. Осы сияқты қос қуысты гиперболоидты $x = h$ және $y = h$ жазықтықтарымен қиып қимада центрі $(h, 0, 0)$ және $(0, h, 0)$ болатын гипербола аламыз. Осы қималар бізге қос қуысты гиперболаның геометриялық түрін анықтайды (138-сурет).

5.4. Параболоид

Анықтама. Кеңістіктегі тік бұрышты декарт координат жүйеде

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (5.16)$$

теңдеуімен берілген екінші ретті бет *эллипстік параболоид* деп аталады.

Эллипстік параболоидтың геометриялық түрін қима әдісі көмегімен анықтайық. Егер $y = 0$ болса, онда (5.16) теңдеуінен

$$x^2 = 2pz, \quad y = 0$$

болады, яғни қима парабола теңдеуін анықтайды. Парабола OZ өсімен симметриялы, $(0, 0, 0)$ — нүкте оның төбесі (139-сурет). Егер $x = 0$ болса, онда

$$y^2 = 2qz, \quad x = 0$$

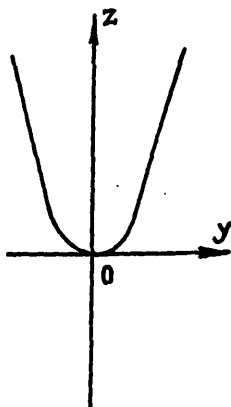
болады, яғни қима парабола теңдеуін анықтайды. Бұл жағдайда парабола OZ өсімен симметриялы, $(0, 0, 0)$ — оның төбесі.

Егер $z = h$ болса, онда

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{cases} \quad \text{не} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1, \\ z = h \end{cases} \quad (5.17)$$

мұндағы $a_0 = \sqrt{2hp}$, $b_0 = \sqrt{2hq}$.

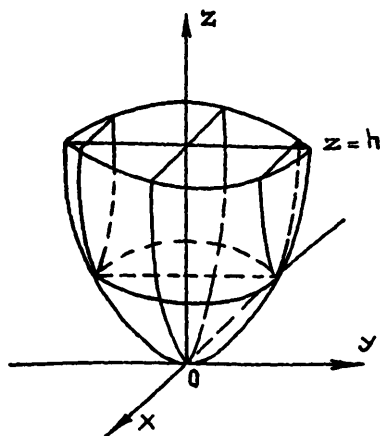
Сонымен, 1) $z = h > 0$ жазықтығы мен эллипстік параболоид қиылысып, қиылысу сызығында эллипс пайда болады, a_0 , b_0 — жарты өстері және ол OXZ , OYZ — координат жазықтықтарымен симметриялы; 2) егер h өссе, онда a_0 , b_0 жарты өстері де өседі; 3)



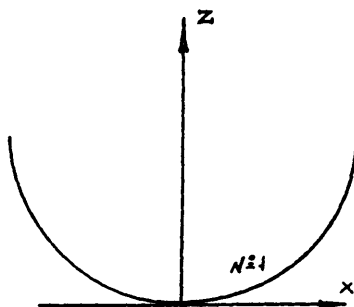
140-сурет

3) егер h нөлге дейін кемісе, онда a_0, b_0 жарты өстері де нөлге дейін кемиді; 4) егер $h=0$ болса, онда $a_0=0, b_0=0$ және қима сызығындағы эллипс нүктеге айналады; 5) егер $h<0$ болса, онда $z=h<0$ жазықтығы эллипстік параболоидпен қиылыспайды.

Осы сияқты $x=h, y=h$ координат жазықтықтарымен эллипстік параболоидты қиып, осы қималар бізге эллипстік параболаның түрін анықтайды (141-сурет).



141-сурет



142-сурет

Анықтама. Кеңістіктегі тік бұрышты декарт координат жүйесінде

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p>0, q>0$$

тендеуімен берілген екінші ретті бет гиперболалық *параболоид* деп аталады.

Гиперболалық параболоидтың геометриялық түрін қима әдісі көмегімен анықтайық.

Егер $y=0$ болса, онда

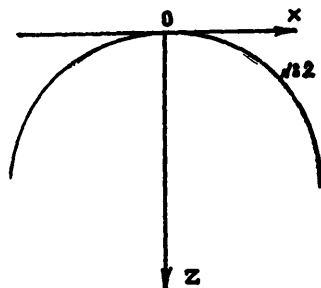
$$x^2 = 2pz, \quad y=0$$

тендеуі параболаның тендеуін анықтайды. Бұл параболаны №1 деп белгілейік және ол жылжымайтын параболола деп аталады (142-сурет).

Егер $x=0$ болса, онда

$$y^2 = -2qz, \quad x=0$$

тендеуі де параболаны анықтайды. Бұл параболаны №2 деп белгілейік және ол жылжымалы параболола деп аталады 143-сурет.



143-сурет

Егер $z=h>0$ болса, онда $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h, z=h$
немесе

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2ph})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2qh})^2} = 1, z=h \quad (5.18)$$

болады, яғни қима сызық XOY жазықтығына параллель гипер-
боланың тендеуін анықтайды. Бұл гиперболаны № 3 деп белгі-
лейік.

Егер $z=h<0$ болса, онда қима сызық

$$\frac{y^2}{(\sqrt{-2qh})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{-2ph})^2} = 1, z=h$$

тендеуімен анықталған гипербола болады. Бұл гиперболаны
№ 4 деп белгілейік.

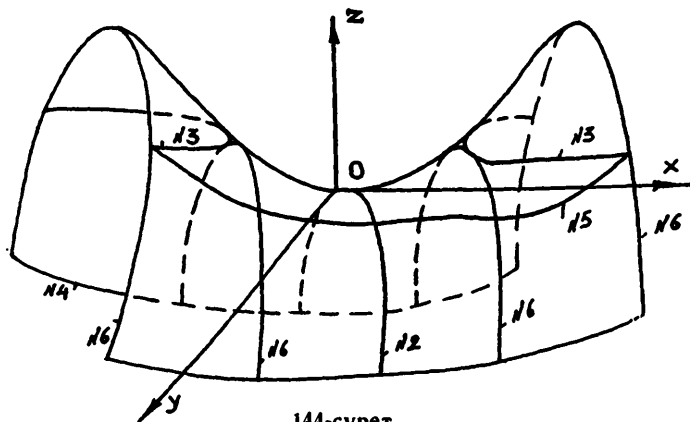
Осы сияқты № 5 деп:

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{k^2}{q}, y=k,$$

ал № 6 деп:

$$\begin{cases} x=k \\ 2z = \frac{k^2}{p} - \frac{y^2}{q} \end{cases}$$

параболаларды белгілейік. № 1, № 2, № 3, № 4, № 5, № 6 қима-
лары және гиперболалық параболоид 144-суретте көрсетілген.



144-сурет

5.5. Конус

Анықтама. Кеңістіктегі тік бұрышты декарт координат
жүйесінде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (5.19)$$

теңдеуімен берілген екінші ретті бет конус деп аталады. Конустың геометриялық түрін қима әдісі арқылы анықтайық.

Егер $z = \pm h$ болса, онда (5.19) теңдеуден

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = \pm h \end{cases}$$

болады, мұндағы $a' = \frac{ah}{c}$, $b' = \frac{bh}{c}$.

Бұл жағдайда қима жарты өстері a' , b' болатын эллипс болады. Сонымен, 1) егер $x=0$ болса, онда

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = 0 \end{cases} \text{ немесе } \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) = 0,$$

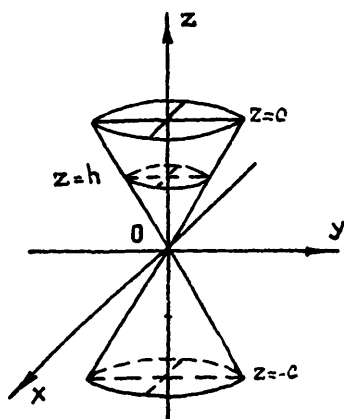
болады, яғни қима YOZ координат жазықтығының бас нүктесінен өтетін екі түзу; 2) егер $y=0$ болса, онда да қима XOZ координат жазықтығының бас нүктесінен өтетін екі түзу болады:

$$x = \pm \frac{a}{c}z, \quad y = 0.$$

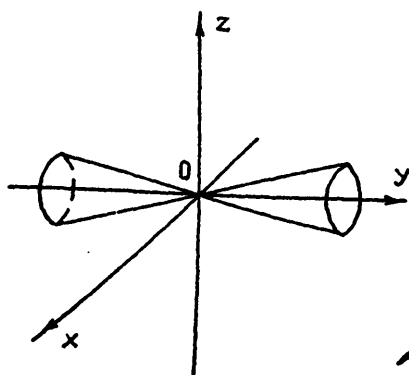
3) егер h өссе, онда a_0 және h_0 жарты өстері өседі; 4) егер h кемісе, онда a_0 және h_0 жарты өстері кемиді; 5) егер $z=h=0$ болса, онда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad z = 0$$

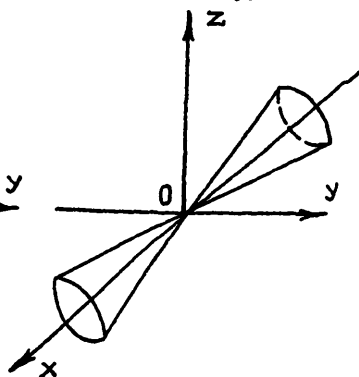
болады. Бұл жағдайда конус теңдеуін қанағаттандыра алатын тек бір ғана нүкте бар, ол координат жүйесінің бас нүктесі. Олай болса, (5.19) теңдеуімен берілген конус координат жүйесінің бас нүктесінен өтіп, OZ өсімен симметриялы болады және қима нүктеге айналады.



145-сурет



146-сурет



147-сурет

Сонымен, осы қималар бізге (5.19) тендеуінің геометриялық түрін анықтайды (145-сурет). Ал қалған OX өсімен (146-сурет) және OY өсімен (147-сурет) симметриялы конустар мына тендеулермен беріледі:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0.$$

5.6. Цилиндр

Анықтама. Кеңістіктегі тік бұрышты декарт координат жүйесінде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.20)$$

тендеуімен берілген екінші ретті бет эллипстік цилиндр;

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.21)$$

гиперболалық цилиндр;

$$y^2 = 2px \quad (5.22)$$

параболалық цилиндр деп аталады, ал осы цилиндрлерді жалпы екінші ретті цилиндр дейміз.

(5.20)—(5.22) тендеулерімен берілген цилиндрлердің сәйкес бағыттауыш сызықтарының тендеулері былай анықталады:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 2px, \\ z = 0, \end{cases}$$

ал жасаушысы OZ өсі болып табылады.

Мысалдар. 1. Төмендегі. тендеулер кеңістікте қандай геометриялық денені анықтайды:

$$а) \frac{x^2}{49} + \frac{z^2}{64} = 1;$$

$$б) x^2 + y^2 = 25;$$

$$в) z^2 = y$$

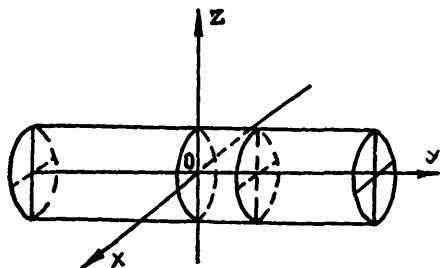
$$г) x^2 - y^2 = 1.$$

Шешімдері. а) Берілген тендеу XOZ жазықтығында эллипстің ықшамды тендеуі және $(0, 0)$ нүкте — эллипстің центрі, ал $a=7$, $b=8$ — жарты өстері. Эллипстің тендеуінде y — айнымалы шама жоқ, сондықтан

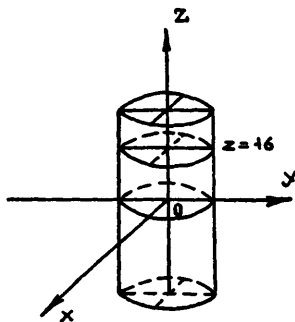
$$\begin{cases} \frac{x^2}{49} + \frac{z^2}{64} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

тендеуі XOZ кеңістігінде қиманың тендеуін анықтайды және ол — эллипс.

Енді қима сызығының тендеуін қарастырайық. Бұл қима да центрі $(0, 2, 0)$ нүкте, жарты өстері $a=7$, $b=8$ болатын эллипс.



148-сурет



149-сурет

Сонымен, берілген теңдеу эллипстік цилиндрдің теңдеуін анықтайды (148-сурет).

б) Берілген теңдеуде z айнымалы шама жоқ және ол $ХОУ$ жазықтығында центрі $(0, 0)$, ал радиусы 5-ке тең шеңбердің теңдеуі. Сондықтан

$$x^2 + y^2 = 25, z = 0$$

теңдеуі қиманың теңдеуі және ол шеңбер.

Енді

$$x^2 + y^2 = 25, z = 16$$

қима теңдеуін қарастырайық. Бұл теңдеу центрі $(0, 0, 4)$ — нүкте, радиусы 5-ке тең — шеңбер. Сонымен, берілген теңдеу кеңістікте дөңгелек цилиндрдің теңдеуін анықтайды (149-сурет).

в) $z^2 = y$ теңдеуінде x — айнымалы шама жоқ. Сондықтан, ол $УОZ$ жазықтығында параболаны анықтайды, ал $ХУZ$ кеңістігінде

$$z^2 = y, x = 0$$

теңдеуі қиманың теңдеуі және ол — парабола.

Енді

$$z^2 = y, x = 5$$

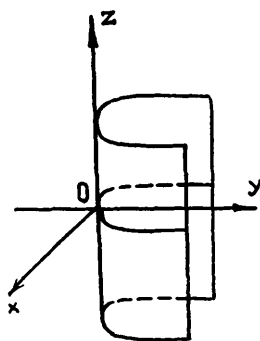
қима теңдеуін қарастырайық. Бұл теңдеу $ХУZ$ кеңістігінде қиманың теңдеуі және ол да параболаның теңдеуі (150-сурет).

г) $x^2 - y^2 = 1$ теңдеуінде z — айнымалы шама жоқ. Сондықтан, ол $ХОУ$ жазықтығында гиперболаның теңдеуі. $ХУZ$ кеңістігінде

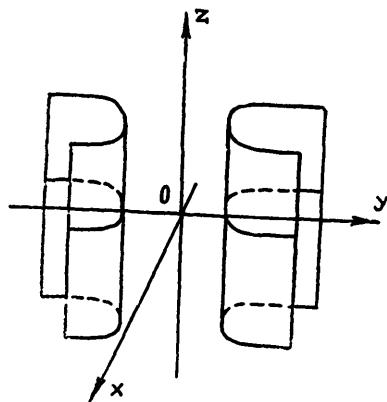
$$x^2 - y^2 = 1, z = 0$$

теңдеуі қиманың теңдеуі және ол гиперболаның теңдеуі. Ал $x^2 - y^2 = 1$, теңдеуі $z = 3$ кеңістігіндегі қиманың теңдеуі және ол гипербола. Сонымен, берілген теңдеу гиперболалық цилиндрдің теңдеуін анықтайды (151-сурет).

2. Берілген екінші ретті беттерді қима әдісі көмегімен зертте және схемасын салындар:



150-сурет



151-сурет

а) $x^2 + 4y^2 - 7z^2 = 0$.

б) $z^2 + 2y^2 - 16x = 0$.

Шешімдері. а) Берілген теңдеуді ықшамды түрге келтірейік:

$$\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{7} - \frac{z^2}{4} = 0,$$

яғни бұл теңдеу төбесі координат жүйесінің бас нүктесі, ал өсі OZ координат өсі болатын конустың теңдеуі (152-сурет). $z=h$ жазықтығын жүргізейік, сонда

$$\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{7} = \left(\frac{h}{2}\right)^2, \quad z=h$$

немесе

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{28 \cdot h}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7 \cdot h}}{2}\right)^2} = 1, \quad z=h$$

теңдеуі қима сызықтың теңдеуі, ал жарты өстері

$$a = \frac{\sqrt{28 \cdot h}}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{7 \cdot h}}{2}$$

және $(0, 0, b)$ — нүкте центрі. Сонымен, жоғарыдағы қима сызық эллипсті анықтайды. Егер $x=0$ болса, онда

$$\frac{y^2}{7} - \frac{z^2}{4} = 0 \quad x=0$$

теңдеуі YOZ жазықтығында қима сызығын анықтайды. Осы теңдеуден

$$\left(\frac{y}{\sqrt{7}} + \frac{z}{2}\right) \cdot \left(\frac{y}{\sqrt{7}} - \frac{z}{2}\right) = 0.$$

Осыдан

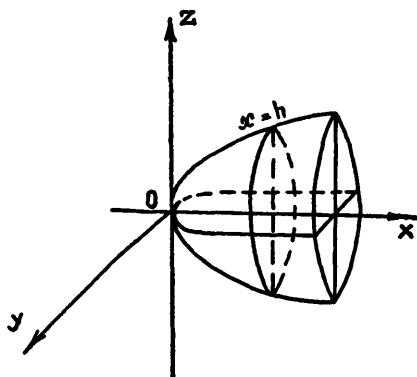
$$y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot z,$$

яғни уоз жазықтығында жатқан қима сызық конустың төбесінде қиылысатын екі түзу. Осы сияқты, $y=0$ болса, онда xoz жазықтығындағы қима сызық ол да қиылысатын екі түзу, яғни

$$x = \pm \sqrt{7} \cdot z.$$

б) Берілген тендеуді мына түрде жазайық:

$$\frac{z^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 2x.$$



153-сурет

Бұл тендеу эллипстік параболоид тендеуін анықтайды (153-сурет).

Эллипстік параболоидка $x=h$ жазықтығымен қима жазықтығын жүргізейік, сонда

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} = 2h, \quad x=h$$

немесе

$$\frac{y^2}{(2\sqrt{2} \cdot h)^2} + \frac{z^2}{(4\sqrt{2})^2} = 1, \quad x=h$$

тендеуі қима сызықтың тендеуін анықтайды және ол эллипс. Енді эллипстік параболоидты бас жазықтықтармен қима жүргізейік:

$$\begin{cases} y^2 = 8x, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} z^2 = 16x, \\ y = 0, \end{cases}$$

онда қима сызықтары парабола.

5.7. Екінші ретті беттің жалпы және ықшамды тендеулері

Екінші ретті беттің жалпы тендеуі былай жазылады:

$$L(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + a_{33}z^2 + 2a_{34}z + 2a_{14}x + a_{44} = 0,$$

мұндағы $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}$ коэффициенттерінің кем дегенде біреуі нөлге тең емес.

Жалпы тендеудің сол жағын, былай өрнектеп жазуға да болады:

$$L(x, y, z) \equiv (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})y + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})z + (a_{41} + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}). \quad (5.24)$$

Анықтама. Егер кейбір түрлендіру екінші ретті беттің жалпы теңдеуін мына түрге өрнектесе

$$L(x, y, z) \equiv \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + H = 0, \quad (5.25)$$

онда бұл теңдеу жалпы теңдеуінің *ықшамды теңдеуі* деп аталады, мұндағы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, H$ кез келген сандар.

Енді екінші ретті беттің жалпы теңдеуіндегі xu, xz, yz және x, y, z мүшелерінің коэффициенттері және мүмкін болса бос мүше де нөлге айналатындай түрлендірулермен танысып өтелік, яғни қысқаша айтқанда (5.23) теңдеуін (5.25) теңдеуіне өрнектеу жолдарын қарастыралық.

5.8. Параллель көшіру және екінші ретті беттің центрі

Екінші ретті беттің центрін $S(x_0, y_0, z_0)$ әрпімен белгілейік және де кеңістіктегі тік бұрышты декарт координат жүйесінің $O(0, 0, 0)$ бас нүктесін $S(x_0, y_0, z_0)$ нүктеге көшіру керек болсын делік. Ол үшін параллель көшіру түрлендіруін қарастыралық:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \\ z = z' + z_0. \end{cases} \quad (5.26)$$

Енді (5.26) параллель түрлендіруін (5.23) теңдеуіндегі x, y, z -тің орнына апарып қояйық, сонда

$$L(x, y, z) \equiv a_1 x'^2 + 2a_{12} x' y' + 2a_{13} x' z' + a_{22} y'^2 + 2a_{23} y' z' + a_{33} z'^2 + 2A_{14} x' + 2A_{24} y' + A_{34} z' + A_{44}, \quad (5.27)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} A_{14} &= a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} z_0 + a_{14}, \\ A_{24} &= a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23} z_0 + a_{24}, \\ A_{34} &= a_{31} x_0 + a_{32} y_0 + a_{33} z_0 + a_{34}, \\ A_{44} &= L(x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \quad (5.28)$$

S нүктенің координаттарын анықтау үшін A_{14}, A_{24}, A_{34} коэффициенттерін нөлге теңестіріп, үш белгісізді біртекті емес сызықты үш теңдеу жүйесін шешсек, бізге жеткілікті:

$$\begin{cases} a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} z_0 + a_{14} = 0, \\ a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23} z_0 + a_{24} = 0, \\ a_{31} x_0 + a_{32} y_0 + a_{33} z_0 + a_{34} = 0. \end{cases} \quad (5.29)$$

Егер

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.30)$$

болса, онда (5.29) жүйенің тек бір ғана x_0, y_0, z_0 шешімі бар және оларды Крамер формуласын пайдаланып табамыз:

$$x_0 = \frac{\delta_x}{\delta}, \quad y_0 = \frac{\delta_y}{\delta}, \quad z_0 = \frac{\delta_z}{\delta}, \quad (5.31)$$

мұндағы

$$\delta_x = \begin{vmatrix} -a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{34} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{34} \end{vmatrix}.$$

Енді (5.28) формуладан (5.24) пен (5.29)-ды ескере отыра A_{44} -ті анықтайық:

$$A_{44} = L(x_0, y_0, z_0) = A_{14}x_0 + A_{24}y_0 + A_{34}z_0 + (a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44}) = a_{41} \frac{\delta_x}{\delta} + a_{42} \frac{\delta_y}{\delta} + a_{43} \frac{\delta_z}{\delta} + a_{44} = \frac{\Delta}{\delta},$$

мұндағы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \quad (5.32)$$

Сонымен, егер $S(x_0, y_0, z_0)$ нүкте екінші ретті беттің центрі болса және $O(0, 0, 0)$ нүктені сол центрге (5.26) түрлендіруі арқылы параллель көшірсек, онда (5.23) теңдеуі мына түрге өрнектелінеді

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + a_{22}y'^2 + 2a_{23}y'z' + a_{33}z'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \quad (5.33)$$

Егер $\delta=0$ болса, онда (5.26) түрлендіруін қолданудың қажеті жоқ, яғни екінші ретті беттің бұл жағдайда центрі болмайды.

5.9. Координат жүйесін бұру тәсілімен жалпы теңдеуден ықшамды теңдеу алу

Анықтама. Айнымалы x' , y' және z' шамаларының екінші дәрежелі және олардың қосарланған көбейтінділері арқылы анықталған мына біртекті көпмүшелік

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + a_{22}y'^2 + 2a_{23}y'z' + a_{33}z'^2 \quad (5.34)$$

квадрат пішін деп аталады, мұндағы $a_{ik} = \overline{a_{ki}}$, $i = \overline{1,3}$, $k = \overline{1,3}$.

Бізге (5.34)—квадрат пішін берілсін делік. Квадрат пішінің $x' \cdot y'$, $x' \cdot z'$, $y' \cdot z'$, мүшелерінің коэффициенттері нөлге айналатындай $X'Y'Z'$ координат жүйесін белгілі бір бұрышқа бұрайық. Координат жүйені бұру нәтижесінде пайда болған координат жүйесін, $X''Y''Z''$ — деп, ал осы жаңа координат жүйесінің айнымалы шамаларын x'' , y'' , z'' айнымалы мен жаңа коор-

динат жүйесіндегі x'', y'', z'' айнымалы шамаларының арасындағы байланысты мына формула бойынша қарастыралық:

$$\begin{aligned} x' &= k_1 x'' + k_2 y'' + k_3 z'', \\ y' &= m_1 x'' + m_2 y'' + m_3 z'', \\ z' &= n_1 x'' + n_2 y'' + n_3 z'', \end{aligned} \quad (5.35)$$

мұндағы k_i, m_i, n_i — белгісіз коэффициенттер, $i = \overline{1,3}$.

Белгісіз k_i, m_i, n_i коэффициенттерінен анықталған (5.34) пішіннің бас бағыт деп аталатын $\bar{n}_i$ векторын құрайық:

$$\bar{n}_i = \{k_i; m_i; n_i\}.$$

Енді (5.35) түрлендіруі ортогональ әрі нормальданған болсын, деп ұйғаралық, яғни

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = \pm 1, \quad (\bar{n}_i, \bar{n}_j) = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (5.36)$$

Егер (5.35) түрлендіруінің белгісіз коэффициенттерінен анықталған матрицаны T әрпімен белгілейік, яғни

$$T = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix},$$

онда (5.36) шартынан (5.35) түрлендіруінің ортогональдылығы шығады, басқаша айтқанда

$$T' \cdot T = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

мұндағы T' матрица T матрицаның транспонирленген матрицасы, яғни

$$T' = \begin{pmatrix} k_1 & m_1 & n_1 \\ k_2 & m_2 & n_2 \\ k_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}$$

Сонымен, егер T ортогональ матрица болса, онда x'', y'', z'' пен x', y', z' айнымалы шамалары арасындағы байланысты ((5.35) — формула) кері байланыс арқылы төмендегідей анықтаймыз:

$$\begin{aligned} x'' &= k_1 x' + m_1 y' + n_1 z', \\ y'' &= k_2 x' + m_2 y' + n_2 z', \\ z'' &= k_3 x' + m_3 y' + n_3 z'. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Енді k_i, m_i, n_i коэффициенттерін табайық. Ол үшін (5.35) ортогональ түрлендіруі (5.34) квадрат пішінді мына ықшамды түрге келтіреді деп ұйғаралық:

$$\begin{aligned} a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a_{33}z'^2 = \\ = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2, \end{aligned} \quad (5.38)$$

мұндағы $a_i = a_{ij}$.

Соңғы өрнекті төмендегідей жазайық

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')x' + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')y' + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')z' = \lambda_1 x'' \cdot x'' + \lambda_2 y'' \cdot y'' + \lambda_3 z'' \cdot z''. \quad (5.39)$$

(5.39) формадағы жақша ішіндегі өрнектерді (5.35) түрлендіру бойынша өрнектейік, ал теңдіктің оң жағындағы $x'' \cdot x''$, $y'' \cdot y''$, $z'' \cdot z''$ көбейтінділерін (5.37) түрлендіру арқылы өрнектейік:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' = (a_{11}k_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1)x'' + \\ \quad + (a_{11}k_2 + a_{12}m_2 + a_{13}n_2)y'' + \\ \quad + (a_{11}k_3 + a_{12}m_3 + a_{13}n_3)z'', \\ a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' = (a_{21}k_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)x'' + \\ \quad + (a_{21}k_2 + a_{22}m_2 + a_{23}n_2)y'' + \\ \quad + (a_{21}k_3 + a_{22}m_3 + a_{23}n_3)z'', \\ a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' = (a_{31}k_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1)x'' + \\ \quad + (a_{31}k_2 + a_{32}m_2 + a_{33}n_2)y'' + \\ \quad + (a_{31}k_3 + a_{32}m_3 + a_{33}n_3)z'', \end{array} \right. \quad (5.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' \cdot x'' = (k_1x' + m_1y' + n_1z') \cdot x'', \\ y'' \cdot y'' = (k_2x' + m_2y' + n_2z') \cdot y'', \\ z'' \cdot z'' = (k_3x' + m_3y' + n_3z') \cdot z''. \end{array} \right. \quad (5.41)$$

Енді (5.40) және (5.41)-ді (5.39)-ға апарып қойып, $x'' \cdot x'$, $x'' \cdot y'$, $x'' \cdot z'$; $y'' \cdot x'$, $y'' \cdot y'$, $y'' \cdot z'_3$; $z'' \cdot x'$, $z'' \cdot y'$, $z'' \cdot z'$

мүшелерінің коэффициенттерін теңестірілдік, сонда

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}k_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1 = \lambda_1 k_1, \\ a_{21}k_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1 = \lambda_1 m_1, \\ a_{31}k_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1 = \lambda_1 n_1, \end{array} \right. \quad (5.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}k_2 + a_{12}m_2 + a_{13}n_2 = \lambda_2 k_2, \\ a_{21}k_2 + a_{22}m_2 + a_{23}n_2 = \lambda_2 m_2, \\ a_{31}k_2 + a_{32}m_2 + a_{33}n_2 = \lambda_2 n_2, \end{array} \right. \quad (5.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}k_3 + a_{12}m_3 + a_{13}n_3 = \lambda_3 k_3, \\ a_{21}k_3 + a_{22}m_3 + a_{23}n_3 = \lambda_3 m_3, \\ a_{31}k_3 + a_{32}m_3 + a_{33}n_3 = \lambda_3 n_3 \end{array} \right. \quad (5.44)$$

немесе, жалпы түрде

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}k + a_{12}m + a_{13}n = \lambda k, \\ a_{21}k + a_{22}m + a_{23}n = \lambda m, \\ a_{31}k + a_{32}m + a_{33}n = \lambda n. \end{array} \right. \quad (5.45)$$

Осыдан

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)k + a_{12}m + a_{13}n &= 0, \\ a_{21}k + (a_{22} - \lambda)m + a_{23}n &= 0, \\ a_{31}k + a_{32}m + (a_{33} - \lambda)n &= 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

(5.46)— біртекті жүйе, сондықтан оның нөлге тең емес тек бір ғана шешімі бар, егер жүйенің анықтаушы нөлге тең болса, онда

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5.47)$$

Ал, егер (5.47) нөлге тең болмаса, онда $k=m=n=0$ болады, яғни $k_i=m_i=n_i=0$. Бұл жағдайда (5.35) түрлендіру нөлге айналады.

А н ы қ т а м а. (5.47) тендеу (5.34) квадрат пішінінің сипаттамалық тендеуі, ал осы тендеудің $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ түбірлері сол квадрат форманың *сипаттамалық түбірлері* деп аталады.

Сонымен, (5.47) сипаттамалық тендеуінен $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ сипаттамалық түбірлерін тауып, оны (5.40) жүйеге қойып нөлге тең емес k_i, m_i, n_i , шешімдерін табамыз, яғни (5.34) квадрат пішіннің $\bar{n}_i = \{k_i; m_i; n_i\}$ — бас бағыт векторын анықтаймыз.

Енді біз мынадай теоремаларды дәлелделік.

Теорема 5.1. Егер (5.34) квадрат пішіннен анықталған матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A'$$

және $\lambda_i \neq \lambda_j$ болса, онда $(\bar{n}_i, \bar{n}_j) = 0, i \neq j$, мұндағы A' матрица A матрицаның транспонирленген матрицасы.

Дәлелдеуі. (5.42)—(5.44) жүйелерін матрица түрінде жазайық:

$$A\bar{n} = \lambda\bar{n} \text{ немесе } A\bar{n}_i = \lambda_i \bar{n}_i. \quad (5.48)$$

Соңғы теңдіктің екі жағында $\bar{n}_j$ векторына скаляр көбейтейік:

$$(A\bar{n}_i, \bar{n}_j) = \lambda_i (\bar{n}_i, \bar{n}_j).$$

Теореманың шарты бойынша $A = A'$, сондықтан

$$\begin{aligned} (A\bar{n}_i, \bar{n}_j) &= (\bar{n}_i, A'\bar{n}_j) = (\bar{n}_i, A\bar{n}_j) = \\ &= (\bar{n}_i, \lambda_j \bar{n}_j) = \lambda_j (\bar{n}_i, \bar{n}_j). \end{aligned}$$

Демек,

$$\lambda_j \bar{n}_i, \bar{n}_j = \lambda_i (\bar{n}_i, \bar{n}_j) \text{ немесе } (\lambda_i - \lambda_j) (\bar{n}_i, \bar{n}_j) = 0.$$

Осыдан $(\bar{n}_i, \bar{n}_j) = 0$, себебі $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$. Теорема дәлелденді.

Теорема (5.2). Егер $A = A'$ болса, онда барлық λ — сипаттамалық түбірлер нақты сандар, $i = \overline{1,3}$.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін кері жорық, анықтық үшін $\lambda_i = \alpha + i\beta$ түбірі комплекс болсын деп ұйғаралық,

мұндағы $\beta \neq 0$. Олай болса λ_1 түбіріне $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ түйіндес түбірі сәйкес келеді. Енді (5.42) — (5.44) немесе (5.48) тендеулерінің біріне λ -ның орнына λ_1 -ді және λ_2 -ні апарып қояйық:

$$A\bar{n}_1 = \lambda_1 \bar{n}_1 \quad \text{немесе} \quad A\bar{n}_1 = (\alpha + i\beta) \bar{n}_1,$$

$$A\bar{n}_2 = \lambda_2 \bar{n}_2 \quad \text{немесе} \quad A\bar{n}_2 = (\alpha - i\beta) \bar{n}_2.$$

Осыдан

$$\bar{n}_1 = \{k_1 + ik'_1; m_1 + im'_1; n_1 + in'_1\},$$

$$\bar{n}_2 = \{k_1 - ik'_1; m_1 - im'_1; n_1 - in'_1\}$$

болады және $\lambda_1 \neq \lambda_2$ болғандықтан әрі теорема 5.1-ден ($\bar{n}_1, \bar{n}_2$) = 0 немесе $k_1^2 + k_1'^2 + m_1^2 + m_1'^2 + n_1^2 + n_1'^2 = 0$. Соңғы теңдіктің орындалуы үшін мына шарттың $k_1 = k'_1 = m_1 = m'_1 = n_1 = n'_1 = 0$ орындалуы қажетті әрі жеткілікті, демек $\bar{n}_1$ мен $\bar{n}_2$ — нөлдік векторлар. Бірақ $\bar{n}_1$ мен $\bar{n}_2$ векторлары (5.42) — (5.44) жүйелердің нөлге тең емес шешімдері, сондықтан, бұл қайшылық теореманы дәлелдейді, яғни λ_i түбірлер нақты сандар. Теорема дәлелденді.

Сонымен, анықтаған $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ сипаттамалық түбірлеріміз — нақты сандар, ал $\bar{n}_i$ ортогональ векторлар болды.

Егер $(\bar{n}_1, \bar{n}_1) \neq 1$ болса, онда $\bar{n}$ векторын μ көбейткішіне көбейтеміз мына теңдікті қанағаттандыратындай етіп

$$(\mu \bar{n}_i, \mu \bar{n}_i) = 1 \quad \text{немесе} \quad \mu^2 k_i^2 + \mu^2 m_i^2 + \mu^2 n_i^2 = 1.$$

Осыдан

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{k_i^2 + m_i^2 + n_i^2}}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Сонымен, мына түрдегі $\bar{n}_i$ векторы:

$$\bar{n}_i = \left\{ \frac{k_i}{\sqrt{k_i^2 + m_i^2 + n_i^2}}; \frac{m_i}{\sqrt{k_i^2 + m_i^2 + n_i^2}}; \frac{n_i}{\sqrt{k_i^2 + m_i^2 + n_i^2}} \right\}$$

ортонормальданған вектор болады, яғни

$$(\bar{n}_i, \bar{n}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Демек, 5.8 және 5.9 тақырыптардан мынадай қорытындыға келеміз: (5.26) мен (5.35) түрлендірулері арқылы және (5.33) мен (5.39) формулаларын ескере отыра екінші ретті беттің жалпы теңдеуін мынадай ықшамды түрге өрнектеуге болады:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 = H,$$

мұндағы λ_i (5.34) квадрат пішіннің сипаттамалық түбірлері, $H = -\frac{\Delta}{\delta}$ бұл (5.30) және (5.32) формулаларынан анықталады.

5.10. Екінші ретті беттің классификациясы

Бізге екінші ретті беттің ықшамды теңдеуі

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 = H \quad (5.49)$$

және

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

анықтаушы берілсін, мұндағы $H = -\frac{\Delta}{\delta}$.

Сипаттамалық түбірлердің таңбасы әртүрлі болуына байланысты үш жағдайды жеке-жеке қарастыралық.

1-жағдай. $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$ болсын деп ұйғаралық (егер $\lambda_1 < 0$ болса, онда (5.49) теңдеуін -1 -ге көбейтеміз)

а) Егер $H > 0$ болса, онда (5.49) теңдеуі эллипсоид теңдеуін анықтайды;

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{H}{\lambda_2}}\right)^2} + \frac{z''^2}{\left(\sqrt{\frac{H}{\lambda_3}}\right)^2} = 1.$$

б). Егер $H < 0$ болса, онда (5.49) теңдеуі жорымал эллипсоид теңдеуін анықтайды:

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{\lambda_2}}\right)^2} + \frac{z''^2}{\left(\sqrt{\frac{H}{\lambda_3}}\right)^2} = -1.$$

в). Егер $H = 0$ болса, онда (5.49) теңдеуі жорымал конус теңдеуін анықтайды:

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}\right)^2} + \frac{z''^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_3}}\right)^2} = 0.$$

Сонымен, егер $\delta > 0$ болса, онда (5.23) теңдеуінің квадрат пішіні эллипсоидты анықтайды.

2-жағдай. $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$ болсын делік. Анықтық үшін $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ болсын.

2а). Егер $H > 0$ болса, онда (5.49) теңдеуі бір қуысты гиперболоид теңдеуін анықтайды:

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{H}{\lambda_2}}\right)^2} - \frac{z''^2}{\left(\sqrt{\frac{H}{-\lambda_3}}\right)^2} = 1.$$

б) Егер $H < 0$ болса, онда (5.49) теңдеуі қос қуысты гиперболоид теңдеуін анықтайды:

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{\lambda_2}}\right)^2} - \frac{z''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{-\lambda_3}}\right)^2} = -1.$$

в) Егер $H=0$ болса, онда (5.49) теңдеуі нақты конус теңдеуін анықтайды:

$$\frac{x'^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}\right)^2} - \frac{z'^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{-\lambda_3}}\right)^2} = 0.$$

Сонымен, егер $\delta < 0$ болса, онда (5.23) теңдеуінің квадрат пішіні гиперболоидты анықтайды.

3- жағдай. $\delta=0$ болсын делік. Онда, координат жүйені параллель көшіру арқылы екінші ретті беттің жалпы теңдеуін ықшамды түрге келтіруге болмайды. Сондықтан, бұл жағдайда x', y', z' — жаңа айнымалы шамаларын төмендегі түрлендіру арқылы енгіземіз:

$$\begin{cases} x = k_1 x' + k_2 y' + k_3 z', \\ y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'. \end{cases}$$

Сонда, (5.23) теңдеуі мына түрге өрнектелінеді:

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a_{14}(k_1 x' + k_2 y' + k_3 z') + \\ &+ 2a_{24}(m_1 x' + m_2 y' + m_3 z') + 2a_{34}(n_1 x' + n_2 y' + n_3 z') + a_{44} \equiv \\ &\equiv \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + a_{44}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

мұндағы

$$\mu_i = a_{14}k_i + a_{24}m_i + a_{34}n_i, \quad i = \overline{1,3}.$$

а). Егер $\lambda_3=0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ болса, онда (5.50)-ден

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + a_{44} = 0$$

немесе

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{2\mu_1}{\lambda_1} x' \right) + \lambda_2 \left(y' + \frac{2\mu_2}{\lambda_2} y' \right) + 2\mu_3 z' + a_{44} = 0$$

теңдігін аламыз. Осыдан

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2} \right)^2 + 2\mu_3 \left(z' + \frac{H}{2\mu_3} \right) = 0, \quad (5.51)$$

мұндағы $H = a_{44} - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} - \frac{\mu_2^2}{\lambda_2}$.

а'). Егер $\mu_3 \neq 0$ болса, онда мына формула бойынша

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \\ y'' = y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2}, \\ z'' = z' + \frac{H}{2\mu_3} \end{cases}$$

x'', y'', z'' — жаңа айнымалы шамаларын енгіземіз, сонда (5.51) теңдеуінен $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2\mu_3 z'' = 0$ немесе $2z'' = -\frac{x''^2}{\frac{\mu_3}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{\frac{\mu_3}{\lambda_2}}$ теңдеуін аламыз. $\mu_3, \lambda_1, \lambda_2$ сандарының таңбаларына байланысты соңғы теңдеу, яғни

$$2z'' = \frac{x''}{p} + \frac{y''}{q}, \quad p = -\frac{\mu_3}{\lambda_1} > 0, \quad q = -\frac{\mu_3}{\lambda_2} > 0$$

эллипстік параболоид теңдеуін, ал

$$2z'' = \frac{x''}{p} - \frac{y''}{q} \quad \text{немесе} \quad 2z'' = -\frac{x''}{p} + \frac{y''}{q}, \quad p > 0, \quad q > 0$$

гиперболалық параболоид теңдеуін анықтайды.

а''). Егер $\mu_3 = 0$ болса, онда (5.51) теңдеуінен

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + H = 0 \quad (5.52)$$

теңдігін аламыз.

Осы жағдайда λ_1 мен λ_2 -нің таңбаларына байланысты (5.52) теңдеуі әртүрлі екінші ретті беттің ықшамды теңдеуін анықтайды. Енді соларға жеке-жеке тоқталып өтелік.

1) Анықтық үшін $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ болсын.

а₁''). Егер $H > 0$ болса, онда (5.52) теңдеуі жорымал эллипстік цилиндр теңдеуін анықтайды:

$$\frac{x''}{\left(\sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y''}{\left(\sqrt{\frac{H}{\lambda_2}}\right)^2} = -1.$$

а₂). Егер $H < 0$ болса, онда (5.52) теңдеуі эллипстік цилиндр теңдеуін анықтайды:

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{\lambda_2}}\right)^2} = 1.$$

а₃''). Егер $H = 0$ болса, онда (5.52) теңдеуі қиылысатын жорымал екі жазықтықтың теңдеуін анықтайды:

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{H}{\lambda_2}}\right)^2} = 0.$$

2). Анықтық үшін $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ болсын.

а₁''). Егер $H > 0$ болса, онда (5.52) теңдеуі жорымал гиперболалық цилиндр теңдеуін анықтайды:

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{\lambda_2}}\right)^2} = -1.$$

a''_{11}). Егер $H < 0$ болса, онда (5.52) теңдеуі гиперболалық цилиндр теңдеуін анықтайды:

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{\lambda_1}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{-H}{-\lambda_2}}\right)^2} = 1.$$

a''_{11}). Егер $H = 0$ болса, онда (5.52) теңдеуі қиылысатын екі жазықтықтың теңдеуін анықтайды:

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{-\lambda_1}}\right)^2} = 0.$$

б). Енді анықтық үшін $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ болсын. Онда (5.50) теңдеуінен

$$\lambda_1 x''^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + a_{44} = 0$$

немесе

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right) + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + H = 0 \quad (5.53)$$

теңдеуін аламыз, мұндағы $H = a_{44} - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2}$.

б'). Егер $\lambda_1 > 0$, $\mu_2 = \mu_3 = 0$ ($\lambda_1 < 0$, $\mu_2 = \mu_3 = 0$) болса, онда (5.53) теңдеуінен

$$\lambda_1 x''^2 + H = 0 \quad (5.54)$$

теңдігін аламыз, мұндағы $x'' = x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}$.

б'₁). Егер $H > 0$ болса, онда (5.54) теңдеуі параллель екі жорымал жазықтықтың теңдеуін анықтайды:

$$x''^2 + \left(\sqrt{\frac{H}{\lambda_1}} \right)^2 = 0.$$

б'₂). Егер $H < 0$ болса, онда (5.54) теңдеуі параллель екі жазықтықтың теңдеуін анықтайды:

$$x''^2 - \left(\sqrt{\frac{-H}{\lambda_1}} \right)^2 = 0.$$

б'₃). Егер $H = 0$ болса, онда (5.54) теңдеуі беттескен екі жазықтықтың теңдеуін анықтайды: $x''^2 = 0$.

б''). Егер $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 = 0$ ($\mu_3 \neq 0$, $\mu_2 = 0$) болса, онда

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \\ y'' = y' \end{cases}$$

басқа жаңа айнымалы шамаларын енгізейік, сонда

$$\lambda_1 x''^2 + 2\mu_2 y'' + H = 0$$

тендеуін аламыз.

Егер $\lambda_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ ($\lambda_1 > 0$, $\mu_2 < 0$) болса, онда (5.55) тендеуі параболалық цилиндрдің тендеуін анықтайды:

$$x''^2 + 2\left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\lambda_1}}\right)^2 y''' = 0.$$

Енді $\mu_3 \neq 0$, $\mu_2 = 0$ болған жағдайдағы (5.55) тендеуі тәріздес тендеуді қорытып шығаруды жаттығу ретінде оқырманның өзіне ұсынамыз.

Мысалдар. Екінші ретті беттің жалпы тендеуін ықшамды түрге өрнекте:

$$1. x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 6 = 0.$$

$$2. 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0.$$

$$3. 5x^2 + 7y^2 + 6z^2 - 4xz + 4yz - 10x + 14y + 8z - 6 = 0.$$

Шешімдері. 1. Алдымен екінші ретті беттің центрі бар болатындығын тексерейік. Ол үшін (5.29) жүйенің шешімін табайық

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + 3z_0 = 0, \\ x_0 + 5y_0 + z_0 = 0, \\ 3x_0 + y_0 + z_0 = 0. \end{cases}$$

Сонымен, біз біртекті үш белгісізі бар үш тендеулер жүйесін алдық, мұндағы

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0.$$

Сондықтан (5.31)-ден $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ жүйенің, яғни екінші ретті беттің центрі бар және ол координат жүйенің бас нүктесі болып табылады $S(0, 0, 0)$. Енді сипаттамалық тендеудің түбірлерін анықтайық (5.47) формуладан:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Осыдан $(1-\lambda^2(5-\lambda) + 6 - 9(5-\lambda) - 2(1-\lambda) = 0$ немесе $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$. Бұл сипаттамалық тендеудің түбірлері $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$ болады.

Енді екінші ретті беттің бас бағыт векторларының координаттарын анықтайық. Ол үшін (5.46) формуладан

$$\begin{cases} (1-\lambda)k + m + 3n = 0, \\ k + (5-\lambda)m + n = 0, \\ 3k + m + (1-\lambda)n = 0 \end{cases}$$

жүйені аламыз. Егер $\lambda = \lambda_1 = -2$ болса, онда жоғарыдағы жүйеден

$$\begin{cases} 3k_1 + m_1 + 3n_1 = 0, \\ k_1 + 7m_1 + n_1 = 0, \\ 3k_1 + m_1 + 3n_1 = 0. \end{cases}$$

Бұл біртекті жүйенің нөлге тең емес шешімдерінің бірі ретінде мына мәндерді алайық $k_1 = -1$, $m_1 = 0$, $n_1 = 1$. Сондықтан, бірінші бас бағыт векторы ретінде $\vec{n}_1 = \{-1; 0; 1\}$ векторын аламыз.

Енді $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ болсын, онда

$$\begin{cases} -5k_2 + m_2 + 3n_2 = 0, \\ k_2 - m_2 + n_2 = 0, \\ 3k_2 + m_2 - 5n_2 = 0. \end{cases}$$

Бұдан $k_2 = 1$, $m_2 = 2$, $n_2 = 1$. Сонымен, екінші бас бағыт векторы ретінде $\vec{n}_2 = \{1; 2; 1\}$ векторын аламыз.

Егер $\lambda = \lambda_3 = 3$ болса, онда

$$\begin{cases} -2k_3 + m_3 + 3n_3 = 0, \\ k_3 + 2m_3 + n_3 = 0, \\ 3k_3 + m_3 - 2n_3 = 0. \end{cases}$$

Бұдан $k_3 = 1$, $m_3 = -1$, $n_3 = 1$. Сонымен, үшінші бас бағыт векторы ретінде $\vec{n}_3 = \{1; -1; 1\}$ векторын аламыз.

Бас бағыт $\vec{n}$ векторлары ортогональ, оған оңай көз жеткізуге болады.

Енді осы векторларды нормальдайық:

$$\mu_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mu_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \mu_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$\vec{n}_i$ векторларының нормальданған векторларында $\vec{n}_i$ деп белгілейік, сонда

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \quad \vec{n}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}, \\ \vec{n}_3 &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \end{aligned}$$

векторлары ортонормальданған.

Енді (5.35) формуладан

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} z', \\ y = \frac{1}{\sqrt{6}} x' + \frac{2}{\sqrt{6}} y' + \frac{1}{\sqrt{6}} z', \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}} x' - \frac{1}{\sqrt{3}} y' + \frac{1}{\sqrt{3}} z' \end{cases}$$

түрлендірулерін табамыз. Сонымен, (5.33) формуланы пайдаланып екінші ретті беттің ықшамды тендеуін табамыз:

$$x'^2 + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{3} = 1.$$

бұл бір қуысты гиперboloид теңдеуі болып табылады.

2. Екінші ретті беттің центрін табайық:

$$\begin{cases} 2x_0 - y_0 = -\frac{1}{2}, \\ -x_0 + y_0 - z_0 = 2, \\ -y_0 + 2z_0 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Бұл жүйенің анықтаушы нөлге тең, сондықтан, екінші ретті беттің центрі болмайды. Енді сипаттамалық түбірлерді табайық, (5.47) формуладан

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2-\lambda^2(1-\lambda)-4+2\lambda=0, \lambda_1=0, \lambda_2=2, \lambda_3=3.$$

Енді бас бағыт векторларды табайық.

Егер $\lambda=\lambda_1=0$ болса, онда (5.46) -дан $k_1=1$, $m_1=2$, $n_1=1$ болады, яғни $\bar{n}_1=\{1; 2; 1\}$ болады. Осы сияқты $\lambda=\lambda_2=2$, $\lambda=\lambda_3=3$ болса, онда $\bar{n}_2=\{1; 0; -1\}$, $\bar{n}_3=\{-1; 1; -1\}$ болады және $v_1=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $v_2=\pm \frac{1}{\sqrt{6}}$, $v_3=\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Сонда

$$\bar{n}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}, \bar{n}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \\ \bar{n}_3 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

векторлары ортонормалданған.

Енді (5.50) формуладағы μ_i коэффициенттерді табайық $\mu_1 = -\frac{5}{\sqrt{6}}$, $\mu_2 = \frac{2}{\sqrt{2}}$, $\mu_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ және оларды (5.50) теңдеуіне апарып орындарына қояйық:

$$2y'^2 + 3z'^2 - \frac{10}{\sqrt{6}}x' - \frac{4}{\sqrt{2}}y' - \frac{2}{\sqrt{3}}z' + 2 = 0$$

немесе

$$2\left(y'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}y'\right) + 3\left(z'^2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}z'\right) - \frac{10}{\sqrt{6}}x' + 2 = 0.$$

Жақша ішіндегі өрнектерді толық квадратқа өрнектейік:

$$2\left[\left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] + 3\left[\left(z' - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{27}\right] - \frac{10}{\sqrt{6}}x' + 2 = 0$$

немесе

$$2\left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(z' - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{10}{\sqrt{6}}\left(x' + \frac{\sqrt{6}}{45}\right).$$

Енді мына

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{\sqrt{6}}{4}, \\ y'' = y' - \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ z'' = z' - \frac{1}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

түрлендіру екінші ретті беттің жалпы тендеуін мынадай ықшамды түрге өрнектейді

$$2y''^2 + 3z''^2 = \frac{10}{\sqrt{6}} x''.$$

Бұл эллипстік параболоид тендеуі болып табылады.

3. Екінші ретті беттің центрі бар, ол $S(1, -1, 0)$ болады, себебі $\delta = 162 \neq 0$. Сипаттамалық тендеудің түбірлері $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 6$ болады. Енді (5.32)-ден Δ -ны табайық, ол $\Delta = -2916$. Сонда (5.33)-тен

$$5x'^2 + 7y'^2 + 6z'^2 - 4x'y' + 4y'z' - \frac{2916}{162} = 0.$$

Егер $\lambda = \lambda_1 = 3$ болса, онда $\bar{n}_1 = \{1; -\frac{1}{2}; 1\}$ — бірінші бас бағыт векторы болады; егер $\lambda = \lambda_2 = 9$ болса, онда $\bar{n}_2 = \{-\frac{1}{2}; 1; 1\}$; егер $\lambda = \lambda_3 = 6$ болса, онда $\bar{n}_3 = \{1; 1; -\frac{1}{2}\}$. Енді осы бас бағыт векторларды ортонормалдайық, сонда

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= \left\{ \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right\}, \quad \bar{n}_2 = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right\}, \\ \bar{n}_3 &= \left\{ \frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right\}. \end{aligned}$$

(5.35) формуладан

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x'' - \frac{1}{3}y'' + \frac{2}{3}z'', \\ y' = -\frac{1}{3}x'' + \frac{2}{3}y'' + \frac{2}{3}z'', \\ z' = \frac{2}{3}x'' + \frac{2}{3}y'' - \frac{1}{3}z'' \end{cases}$$

түрлендіруін табамыз, ал (5.49)-дан

$$3x''^2 + 9y''^2 + 6z''^2 = 18$$

немесе

$$\frac{x''^2}{6} + \frac{y''^2}{2} + \frac{z''^2}{3} = 1.$$

Сонымен, екінші ретті беттің жалпы тендеуін ықшамды түріне өрнектедік және ол эллипсоид.

Мысалдар. 1. $x^2 + y^2 = 4x$ — тендеуі қандай беттің тендеуін анықтайды?

Шешімі: Берілген тендеуде Z — айнымалы шама жоқ, олай болса қарастырып отырған тендеу — жасаушылары OZ өсіне параллель болатын цилиндр. Цилиндрдің бағыттаушысы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x, \\ z = 0 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4, \\ z = 0 \end{cases}$$

болады және оның центрі OX — өсіндегі $S(2, 0, 0)$ — нүкте, ал радиусы $R=2$ -ге тең. Демек, берілген тендеудің өсі $x=2$, $y=0$ болады.

2. $z^2 + 3z - 5x + \frac{9}{4} = 0$ қандай беттің тендеуі?

Шешімі: Берілген тендеуде y — айнымалы шама жоқ, олай болса қарастырып отырған тендеу — жасаушылары OY өсіне параллель болатын цилиндр. Цилиндрдің бағыттаушысы

$$\begin{cases} \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = 5x, \\ y = 0 \end{cases}$$

XOZ жазықтығындағы парабола, ал $A\left(0, 0, -\frac{3}{2}\right)$ оның төбесі. Демек, берілген тендеу параболалық цилиндр болады.

3. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$ қандай беттің тендеуі?

Шешімі. Тендеудің оң жағындағы өрнекті мына түрде жазайық

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = 0,$$

яғни берілген тендеу OZ өсінде қиылысатын екі жазықтықты анықтайды.

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0 \quad \text{және} \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0.$$

4. Төмендегі жүйе қандай сызықты анықтайды?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 23 = 0, \\ z = 4. \end{cases}$$

Шешімі. Жүйенің бірінші тендеуі сфераны, ал екіншісі XOY координат жазықтығына параллель жазықтықты анықтайды. XOY — координат жазықтығына параллель жазықтық сфераны қияды. Қиылысу сызығы шеңбер. Сонымен, іздестіріп отырған сызығымыз $z=4$ жазықтығында жатқан шеңбер болады.

5. Төмендегі жүйе қандай сызықты анықтайды

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

Шешімі. Берілген жүйедегі бірінші теңдеу кеңістікте эллипстік цилиндрді анықтайды, ал екіншісі XOY координат жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуі. Ал олардың қиылысу сызығы $z=3$ жазықтығында жатқан эллипс болады.

6. Төмендегі жүйе қандай сызықты анықтайды

$$\begin{cases} y^2 = z, \\ x = 7. \end{cases}$$

Шешімі. Жүйедегі бірінші теңдеу кеңістікте параболалық цилиндрдің, ал екіншісі YOZ — жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуі. Осы жазықтық параболалық цилиндрмен қиылысып, қиылысу сызығы парабола болады. Ал бұл парабола $x=7$ жазықтығында жатады.

7. $x^2 + y^2 = R^2$ шеңбер OX өсі бойымен айналады. Айналу дененің теңдеуін анықтандар.

Шешімі. OX — өсі бойымен айналу дененің теңдеуін табу үшін берілген шеңбердің теңдеуіндегі x — айнымалы шаманы қалдырып (OX — өсі бойымен айналады), екінші y — айнымалы шаманы y -пен z — айнымалы шамалар арқылы өрнектеу керек, яғни y -тің орнына $\pm \sqrt{y^2 + z^2}$ -ті қойсақ болғаны:

$$x^2 + (\pm \sqrt{y^2 + z^2})^2 = R^2,$$

немесе

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Сонымен, берілген шеңбер OX өсі бойымен айналғанда сфераның теңдеуін аламыз.

8. $x=z$ — түзу OZ өсі бойымен айналғандағы дененің теңдеуін табындар.

Шешімі. Берілген түзу x пен z айнымалы шамалар арқылы өрнектелген, сондықтан түзу XOZ координат жазықтығында жатыр. Айналу дененің (OZ — өсімен) теңдеуін табу үшін z — айнымалы шаманы қалдырып, x айнымалыны $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$ -қа алмастырайық, сонда $\pm \sqrt{x^2 + y^2} = z$ немесе $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Сонымен, іздестіріп отырған дене конус. Бұл конустың төбесі координат жүйенің бас нүктесі, ал $x=z$ түзуі XOZ координат жүйенің биссектрисасы болады.

9. $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ конус пен $y=4$ жазықтығының қиылысу сызығын анықтандар.

Шешімі. Конустың теңдеуіндегі y -ке 4-ті қояйық:

$$x^2 + 16 - 3z^2 = 0 \text{ немесе } \frac{x^2}{16} - \frac{3z^2}{16} = 1. \text{ Сонымен } x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$$

конус пен $y=4$ — қиылысып қиылысу сызығы гиперболы болады және $y=4$ жазықтығында жатыр.

10. $x^2 - y^2 - 2x + 3y - 2z = 0$ теңдеуін канонды теңдеуге келтір.

Шешімі. Теңдеудің сол жағындағы x пен y -ті топтастырайық: $(x^2 - 2x) - (y^2 - 3y) = 2z$. Жақша ішіндегі өрнектерді толық квадратқа толықтырайық:

$$(x^2 - 2x + 1) - \left(y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) = 2z + 1 - \frac{9}{4},$$

$$(x-1)^2 - \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 2\left(z - \frac{5}{8}\right).$$

Енді координат өсін параллель $O'\left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right)$ нүктесіне көшірейік. Сонда

$$x = x' + 1,$$

$$z = z' + \frac{3}{2},$$

$$y = y' + \frac{5}{8}$$

болады. Сонымен

$$x'^2 - y'^2 = 2z'$$

тендеуі гиперболалық параболоид тендеуін анықтайды.

11. $2x^2 - y^2 + 4z^2 + 4x + 2y + 8z - 5 = 0$ тендеуі қандай беттің тендеуін анықтайды?

Ш е ш і м і. x, y, z — айнымалы шамаларды топтастырайық және оларды толық квадратқа толықтырайық:

$$2(x^2 + 2x + 1) + 4(z^2 + 2z + 1) - (y^2 - 2y + 1) = 0$$

$$2(x+1)^2 - (y+1)^2 + 4(z+1)^2 = 0$$

Енді координат өсін параллель $O'(-1, -1, -1)$ нүктеге көшірейік. Сонда

$$\begin{cases} x = x' - 1, \\ y = y' - 1, \\ z = z' - 1 \end{cases}$$

болады. Демек, параллель көшіру нәтижесінде соңғы тендеу жаңа координат жүйеде мына түрге түрленеді:

$$2x'^2 + 4z'^2 - y'^2 = 0 \quad \text{немесе} \quad \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{1} = 0,$$

ал бұл конустық тендеуі болады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

Александров П. С. Лекция по аналитической геометрии. М.—Л., «Наука», 1968.

Аяпбергенов С. Аналитикалық геометрия. Алматы, «Мектеп», 1971.

Бахвалов С. В., Бабушкин Л. И. Иваницкая В. П. Аналитическая геометрия, изд-во «Просвещение», 1970.

Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., «Наука», 1980.

Бюшгенс С. С. Аналитическая геометрия. ч. I, II, М.—Л., 1946.

Волгов В. А., Демидович И. С. Сборник задач по математике для вузов, Т. I, М., «Наука», 1981.

Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. М., «Наука», 1969.

Ефимов Н. В. Квадратичные формы и матрицы. М., «Наука», 1972.

Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые её приложения, М., «Наука», 1979.

Қасымов Е. Ә., Баймолдина С. А. Векторлық алгебра, Алматы, РБК, 1991.

Қасымов Е. Ә., Баймолдина С. А., Мустафина К. К. Санды тізбектер. Бір айнымалы функциялар. Алматы, РБК, 1991.

Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии, М., «Наука», 1980.

Машина А. П. Проскуряков И. В. Высшая алгебра, М., «Наука», 1962.

Моденов П. С. Аналитическая геометрия. М., МГУ, 1969.

Мусхелишвили Н. И. Курс аналитической геометрии. М.—Л., 1947.

Привалов И. И. Аналитическая геометрия, М, Т. Т. Л., 1957.

Фадеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре, М., «Наука», 1972.

Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики, ч. I, М., «Высшая математика», 1978.

МАЗМҰНЫ

I тарау. КООРДИНАТ ӘДІСІ

1.1. Жазықтықтағы тік бұрышты декарт координат жүйесі	3
1.2. Поляр координат жүйесі	5
1.3. Тік бұрышты және поляр координат жүйесінің арасындағы байланыс	7
1.4. Тік бұрышты декарт координат жүйесін параллель көшіру	10
1.5. Тік бұрышты декарт координат жүйесін бұру	11
1.6. Тік бұрышты декарт координат жүйесін параллель көшіру және бұру	13
1.7. Жазықтықтағы екі нүктенің ара қашықтығы	15
1.8. Жазықтықтағы кесіндіні берілген қатынасқа бөлу	16
1.9. Кеңістіктегі тік бұрышты декарт, цилиндр және сфера координат жүйелері	19
1.10. Анықтауыштар	22
1.11. Матрица	26

II тарау. ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА

2.1. Негізгі ұғымдар	32
2.2. Векторларды қосу	34
2.3. Векторлардың айырымы	36
2.4. Векторларды скаляр санға көбейту	39
2.5. Векторлардың сызықты тәуелділігі	44
2.6. Коллинеар және компланар векторлар	45
2.7. Кеңістіктегі төрт вектордың сызықты байланысы	47
2.8. Базис	49
2.9. Вектордың өстегі проекциясы	50
2.10. Вектор проекцияларының негізгі қасиеттері	54
2.11. Кеңістіктегі тік бұрышты декарт координат жүйесіндегі вектордың проекциялары	56
2.12. Векторды компоненттері арқылы өрнектеу	60
2.13. Векторларға сызықты амалдар қолдану	61
2.14. Екі вектордың коллинеар болу шарты	64
2.15. Үш вектордың компланар болу шарты	66
2.16. Кесіндіні берілген қатынасқа бөлу	67
2.17. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі	69
2.18. Скаляр көбейтіндінің негізгі қасиеттері	71
2.19. Координаттарымен берілген екі вектордың скаляр көбейтіндісі	73
2.20. Координаттарымен берілген екі вектордың арасындағы бұрыш	74
2.21. Үш вектордың оң және теріс жүйесі	76
2.22. Екі вектордың векторлық көбейтіндісі және қасиеттері	78
2.23. Координаттарымен берілген екі вектордың векторлық көбейтіндісі	79
2.24. Параллелограмм және үшбұрыш аудандары	80
2.25. Үш вектордың аралас көбейтіндісі	82
2.26. Координаттарымен берілген үш вектордың аралас көбейтіндісі және қасиеттері	83

III тарау. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ТҮЗУ. ЕКІНШІ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫҢ ЫҚШАМДЫ ТЕНДЕУІ

3.1. Түзудің бұрыштық тендеуі	86
3.2. Бір нүктеден өтіп берілген векторға перпендикуляр түзудің тендеуі	88
3.3. Түзудің жалпы тендеуі	89
3.4. Түзудің канонды және параметр тендеулері	91
3.5. Түзудің кесінді тендеуі	93
3.6. Бір нүктеден өтіп бұрыштық коэффициентпен берілген түзудің тендеуі	94
3.7. Екі нүктеден өтетін түзудің тендеуі	95
3.8. Екі түзу арасындағы бұрыш	96
3.9. Нүктеден түзуге дейінгі ара қашықтық	99
3.10. Екі түзудің орналасуы	101
3.11. Түзулер шоғы	104
3.12. Жазықтықтағы үш түзудің орналасуы	106
3.13. Жазықтықтағы түзудің нормаль тендеулері	108
3.14. Шенбердің ықшамды тендеуі	110
3.15. Эллипстің ықшамды және поляр тендеулері	113
3.16. Нүктенің эллипс бойында жату белгісі	118
3.17. Эллипстің параметр, жанама және нормаль тендеулері	119
3.18. Эллипстің түйіндес диаметрлерінің тендеулері	123
3.19. Гиперболаның ықшамды тендеуі	125
3.20. Гиперболаның асимптоталары	128
3.21. Нүктенің гипербола бойында жату белгісі	130
3.22. Гиперболаның жанама және нормаль тендеулері	131
3.23. Гиперболаның түйіндес диаметрлерінің тендеулері	134
3.24. Параболаның ықшамды тендеуі	136
3.25. Параболаның жанама және нормаль тендеулері	138
3.26. Парабола диаметрінің тендеуі	139
3.27. Екінші ретті сызықтың жалпы тендеуі	140
3.28. Тік бұрышты декарт координат жүйесін параллель көшіру және жалпы тендеудің центрі	141
3.29. Координат жүйесін бұру арқылы ықшамды тендеу алу	143
3.30. Тік бұрышты координат жүйесін бұру	146
3.31. Екінші ретті сызықтың классификациясы	147
3.32. Екінші ретті сызықтың жалпы тендеуінің инварианттары	152
3.33. Екінші ретті сызықтың жалпы тендеуін инварианттар көмегімен ықшамды тендеуге түрлендіру	155
3.34. Екінші ретті сызықтың түрін инварианттар көмегімен анықтау	157
3.35. Екінші ретті сызық пен түзудің қиылысуы және оның жанама тендеуі	162
3.36. Екінші ретті сызықтың диаметрінің тендеуі	165
3.37. Екінші ретті сызықтың асимптотасы	168
3.38. Эллипс пен гиперболаның орналасуы	169
3.39. Параболаның орналасуы	
3.40. Параллель екі түзудің орналасуы	175
3.41. Жазықтықтағы тамаша сызықтар	176

IV тарау. КЕҢІСТІКТЕГІ ЖАЗЫҚТЫҚ ЖӘНЕ ТҮЗУ

4.1. Бір нүктеден өтетін жазықтық тендеуі	183
4.2. Жазықтықтың жалпы тендеуі және оны нормаль түріне келтіру	184
4.3. Жазықтықтар байламы және шоғы	189
4.4. Жазықтықтар арасындағы бұрыш және нүктеден жазықтыққа дейінгі ара қашықтық	192
4.5. Екі жазықтықтың орналасуы	193
4.6. Жазықтық пен вектордың компланарлық белгісі	194
4.7. Жазықтықтың параметрлік тендеуі	195
4.8. Екі және үш нүктеден өтетін жазықтықтың тендеулері	196

4.9. Үш жазықтықтың қиылысу нүктелері және жазықтық пен қос нүктелердің орналасуы	200
4.10. Бір нүктеден өтетін кеңістіктегі түзудің теңдеуі	202
4.11. Екі нүктеден өтетін кеңістіктегі түзудің теңдеуі	204
4.12. Кеңістіктегі түзудің жалпы теңдеуі және оны канонды, параметр теңдеулеріне келтіру	206
4.13. Кеңістіктегі екі түзу арасындағы бұрыш	208
4.14. Екі түзудің бір жазықтықта жату белгісі	210
4.15. Кеңістіктегі түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш	212
4.16. Түзу мен жазықтықтың орналасуы	213

V тарау. ЕКІНШІ РЕТТІ БЕТ

5.1. Цилиндрлік, конустық және айналу беттер	218
5.2. Эллипсоид	222
5.3. Гиперболоид	224
5.4. Параболоид	228
5.5. Конус	229
5.6. Цилиндр	232
5.7. Екінші ретті беттің жалпы және ықшамды теңдеулері	235
5.8. Параллель көшіру және екінші ретті беттің центрі	236
5.9. Координат жүйесін бұру тәсілі мен жалпы теңдеуден ықшамды теңдеу алу	237
5.10. Екінші ретті беттің классификациясы	242
Пайдаланылған әдебиеттер	253

КАСЫМОВ Құлжабай Абдыкалыкович
КАСЫМОВ Едил Абдыкалыкович

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

(На казахском языке)

Редакторы *Ыдырысова Р.*
 Корректоры *Махмутова Ж.*
 Көркемдеуші редакторы *Табылдиев Б.*
 Техникалық редакторы *Овчинникова Ф.*

ИБ № 199

Теруге 6.01.93 жіберілді. Басуға 02.02.94 қол қойылды. Пішімі 60×90^{1/16}. Офсеттік қағаз. Офсеттік басылыс. Шартты баспа табағы 16,0. Шартты бояулы таңбасы 13,6. Есептік баспа табағы 14,4. Таралымы 4000 дана. Тапсырыс № 1261. Бағасы келісімді.

Қазақстан Республикасы Білім министрлігінің «Санат» баспасы, 480012, Алматы қаласы, А. Байтұрсынұлы көшесі, 65 «а» үй.

Қазақстан Республикасы Баспасөз және бұқаралық ақпарат министрлігінің «КІТАП» полиграфиялық кәсіпорындары өндірістік бірлестігінің Кітап фабрикасы, 480124, Алматы қаласы, Гагарин даңғылы, 93-үй.