

Ж.М. ЕСМҰХАНОВ  
Е.М. МАҚЫШЕВ  
Е.Ж. ЕСМҰХАНОВ

# СЫЗБА ГЕОМЕТРИЯ ЕСЕПТЕРІ

*Қазақстан Республикасы Білім министрлігі  
жоғары оқу орындары студенттеріне арналған  
оқу құралы ретінде мақұлдаған*

**Есмұханов Ж. М., Мақышев Е. М., Есмұханов Е. Ж.**

**Сызба геометрия есептері: Жоғары оқу орындары студенттеріне арналған оқу құралы.— Алматы: «Білім», 1995 — 272 бет.**

**ISBN 5-7404-0005-8**

Оқу құралында жоғары оқу орындарында сызба геометрия курсы есептерін шешу бойынша методикалық ұсыныстар мен нұсқаулар берілген. Онда сызба геометрияның негізгі бөлімдері қарастырылады. Есептерді шешу үшін сәйкес бөлімнің теориялық материалы, сонымен қатар өзіндік жұмысқа арналған жаттығулар беріледі.

Кітап жоғары оқу орындары студенттеріне арналған, сондай-ақ техникумдар мен училищелердің оқушыларына да пайдалы болмақ.

## КІРІСПЕ

Сызба — техника тілі деп өткен ғасырдан бастап айтылғанын білесіздер. Бұл әлем халықтарына ортақ интернационалдық тіл. Өйткені сызба салу ережелері барлық елдер үшін ортақ, ал өзгешеліктері жоқтың қасы деуге болады. Сондықтан Америкада немесе Жапонияда жобаланған машиненің сызбасын тілмәшсіз түсіне беруге болады. Біздің елімізде жобаланған машинелердің сызбаларына қарап, басқа елдерде оны жасап шығаруға болады.

Сызбаны қалай салғанда түсінікті, қалай салу жеңіл болады? Сызба салудың қандай әдістері болуы мүмкін? Сызбаны оқу, талдау және оны пайдаланып есептер шығару мәселелері қандай? Осындай көптеген сұрақтарға жауап беретін пәнді *сызба геометрия* деп атаған. Сызба геометрия сызбаны салу, оқу және сызбалар көмегімен инженерлік есептерді шешу теориясын оқытады. Сызбаны техника тілі десек, онда сызба геометрия осы тілдің грамматикасы болып табылады. Жалпы алғанда сызба геометрия денелерді бетке немесе жазықтыққа кескіндеу ережелерін тағайындайды. Кескіндеріне қарап дененің формасын, кеңістіктегі орнын анықтау есептері де осы пәнде қарастырылады.

Сызба геометрияның негізгі әдістерінің бірі — проекциялау әдісі. Берілген дененің кескінін салу үшін проекциялау аппаратын тандап алу керек. Одан кейін дене кескіні тұрғызылады. Осылайша тұрғызылған кескін толық немесе толымсыз болуы мүмкін. Толық кескіндерді пайдаланып ғылымның немесе техниканың әр түрлі есептерін шешуге болады. Ал толымсыз кескіндерді мұғалімдер, суретшілер пайдаланады. Толымсыз кескіндерде кейбір сызықтарды, нүктелерді қалауымызша алуымызға болады. Бірақ толымсыз кескінді пайдаланып берілген дененің формасын, кеңістіктегі орнын дәл анықтай алмаймыз. Толық кескінде бірде-бір нүктені, бірде-бір сызықты қалауымызша алуға болмайды. Толық кескінді пайдаланып берілген дененің формасын және оның кеңістіктегі орнын дәл анықтауға болады. Техникада көбіне толық кескіндер қолданылады. Сызба геометрия толық кескіндерді алу жолдарын көрсетеді. Дене кескіні толық болуы үшін оның неше параметрін көрсету керектігі анықталады. Толымсыз кескіндерді толық кескіндерге айналдыруға қажетті параметрлер де есептеледі.

Сызба геометрияны техникалық ғылымдар қатарына қосуға болатынын көрдік. Ол математикалық ғылым болып та есептеледі. Өйткені оның қарастыратын элементтері күнделікті өмірден абстракциялау нәтижесінде алынған (нүкте, сызық, жазықтық, бет т. с. с.), әдістері дәлелденген дәлдікпен есептің шешуін анықтай алады. Аналитикалық геометрияда денелерді координаталар системасымен байланыстырып, олардың теңдеулерін құрады, одан кейін осы теңдеулерді зерттейді. Проективтік геометрияда денелердің проекциялау нәтижесінде өзгермейтін қасиеттерін қарастырады. Сызба геометрия денелердің кескіндерін салу, кескіндері бойынша денелерді жаңадан

құрастыру және кескіндерде түрлі есептерді шешу мәселелерімен шұғылданады.

Сызба геометрияның өз алдына жеке ғылым болып қалыптасуын атақты ғалым Гаспар Монждың (1746—1818) атымен байланыстырады. Г. Монж оған дейінгі кескіндерді салу туралы материалдарды жинақтап белгілі бір жүйеге келтірді және «Сызба геометрия» атты кітапты жазып жарыққа шығарды. Бірақ Г. Монж сызба геометрияны басынан аяғына дейін ойлап тапты деуге болмайды. Тіпті біздің дәуірге дейін де кескіндерді сала білген және оларды тұрмыста пайдаланған. Анаксагор (б. д. д. 500—428 ж.ж.), Демокрит (б. д. д. 460—380 ж.ж.), Эсхил (б. д. д. 525—456 ж.ж.) және Евклид (б. д. д. III ғасыр) еңбектерінде кескіндерді салу туралы мағлұматтар кездеседі. Рим архитекторы Витрувийдің (б. д. д. I ғасыр) «Архитектура туралы он кітап» атты еңбегінде фасад, план, көру нүктесі, көріністің бас нүктесі, түйісу нүктесі және басқа да күні бүгінге дейін қолданылып келе жатқан терминдер бар. Ол суретті салу үшін центрлік проекцияны пайдаланды.

Орта ғасырда іс жүзінде қолданылатын геометрияның негізі қаланды. Әл-Хорезми (780—850), әл-Фараби (870—950), әл-Бируни (973—1050) және басқа да оқымыстылардың кітаптарынан геометриялық салу есептерін, әр түрлі астрономиялық және музыкалық аспаптардың аксонометриялық сызбаларын, стереографиялық проекциялар туралы мәліметтерді кездестіреміз. Леонардо да Винчи (1455—1519) көлеңкелер туралы мәліметтерді дамытты, «ауа перспективасының» негізгі принциптерін тұжырымдады. Жерар Дезарг (1593—1662) перспективаның теориялық негізін қалады, сөйтіп сызба геометрияның жеке ғылым болып бөлінуіне жол ашты.

Ресейде сызба геометрияны техникалық жоғары оқу орындарында оқыту және оның дамуы Севастьянов Я. А. (1796—1849), Макаров Н. И. (1824—1904), Курдюмов В. И. (1853—1904), Рынин Н. А. (1887—1943), Добряков А. Н. (1895—1947), Четверухин Н. Ф. (1891—1974), Котов И. И. (1909—1976) және т. б. ғалымдардың аттарымен тығыз байланысты. Әсіресе педагогикалық ғылымдар академиясының толық мүшесі болған, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Н. Ф. Четверухиннің еңбектерін ерекше атағымыз келеді. Н. Ф. Четверухин еңбектері арасында оқулықтар (жоғарғы геометрия, проективтік геометрия, сызба геометрия курсы) және монографиялар (аксонометрия, геометриялық тұрғызулар тәсілдері, кеңістік денелердің сызбалары) бар. Аталған кітаптар математиктер мен инженерлерді дайындауда үлкен міндеттер атқаруымен қатар, сызба геометрияның советтік мектебін жасауға мүмкіндік береді. Н. Ф. Четверухиннің толық және толымсыз кескіндерді параметрлік есептеу әдісі сызба геометрияның негізгі мәселелерін шешіп берді. Техникалық жоғары оқу орындарында қазіргі кезде жемісті еңбек етіп жүрген профессорлар Вальков К. И., Волков В. Я., Иванов Г. С., Михайленко В. Е., Осипов В. А., Рыжов Н. Н., Тевлин А. М., Фролов С. А., Якунин В. И. және басқалар сызба геометрияны одан әрі дамытуда.

Сызба геометрия бес бөлімнен тұрады: перспектива, аксонометрия, Монж эпюрі, сандық белгісі бар проекциялар және көлеңкелер. Оқушыларға ұсынылып отырған кітапта жоғарыда аталған бес бөлімнің тек екі бөлімі (аксонометрия мен Монж эпюрі) қарастырылып отыр. Өйткені аксонометрия мен Монж эпюрі көпшілікке бірдей керек екінші сауаттылықтың негізгі болып табылады. Ал қалған үш бөлім (перспектива, сандық белгілері бар проекциялар, көлеңкелер) архитектура, құрылыс және басқа да кейбір мамандықтар үшін

керек. Оқушыларға осы бөлімдер керек болса, олар қарастырылып отырған материалдарға сүйене отырып басқа оқу құралдарын пайдалануларына болады. Шағын көлемде аталған бөлімдер Ж. М. Есмұхановтың 1987 жылы Алматыда «Мектеп» баспасында жарық көрген «Сызба геометрия» атты кітабында бар. Ұсынылып отырған оқу құралы аталған кітаппен бірге оқушылар алған білімдерін бекіту, одан әрі тереңдету және теорияны іс жүзінде кездесетін есептерді шешуде қолдану дағдыларын дамыту мақсатын көздейді. Алайда бұл оқу құралын жеке оқып пайдалануға да болады.

Сызба геометрияны меңгеру оңайға соқпайды. Оның себебі — оқушылардың дамыған кеңістік ойлау қабілетімен қатар геометрия мен сызуды орта білім беретін оқу орындарының бағдарламасына сай білулері қажет. Бірақ оқушылардың көбі геометрия мен сызуды ұмытып қалған, ал өткенді естеріне түсірейін десе оқулықтары жоқ. Осы жағдайды ескеріп бірінші тарауда сызба геометрияны түсіну үшін керекті геометриялық салу есептері, кейбір маңызды теоремалар беріліп отыр.

## 1 - т а р а у. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ САЛУ ЕСЕПТЕРІ

### 1.1. ТҮЗУЛЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

Түзу ұғымы геометриялық анықтамасыз қабылданып, негізгі ұғымдардың бірі. Түзуді сызғыштың, немесе сызба салуға арналған бұрыштықтың қырларын пайдаланып жүргізеді. Сондықтан сызғыштың және бұрыштықтардың қырларын тексеріп отыру керек. Ол үшін ақ қағазға сызғыштың (бұрыштықтың) бір қырын пайдаланып түзу салады. Одан кейін сызғышты (бұрыштықты) төңкеріп алдыңғы түзуді бастыра сызық жүргізеді. Сонда екі сызық дәл беттессе, тексеріліп отырған қырдың түзу болғаны, ал бұл екі сызықтың аз да болса айырмашылығы болса, онда қырдың түзу болмағаны.

Бір жазықтықта жатқан әр түрлі екі түзудің тек бір ғана ортақ нүктесі болуы мүмкін. Әр түрлі екі түзудің ортақ нүктесін *олардың қиылысу нүктесі* дейді. Ортақ нүктесі болмайтын жазықтық түзулерін *параллель түзулер* деп атайды. Параллель түзулерді қанша созсақ та олар қиылыспайды. Егер екі түзудің екі ортақ нүктесі болса, онда олар беттескен түзулер (яғни бір түзу) болады. Өйткені бұл жағдайда аталған түзулердің қалған нүктелері де беттеседі.

Сонымен жазықтықта жатқан екі түзу үш жағдайда орналасуы мүмкін:

— олардың ортақ нүктелері жоқ. Бұл жағдайда берілген екі түзу өзара параллель болады;

— олардың ортақ бір ғана нүктесі бар. Бұл жағдайда берілген екі түзу қиылысады;

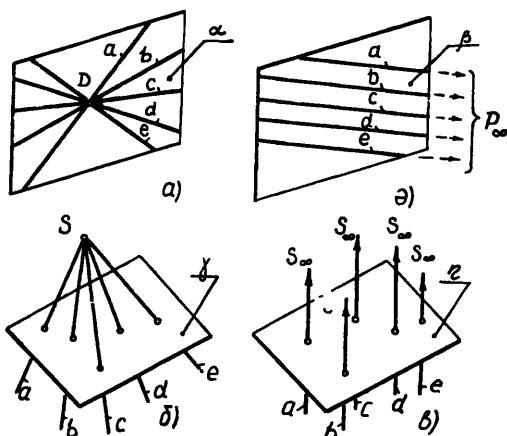
— олардың екі ортақ нүктесі бар. Бұл жағдайда берілген түзулер беттеседі.

Жоғарғы геометрияда жазықтықта жатқан екі түзуді әрқашан қиылысады деп те қарастырады. Параллель түзулерді қиылысатын түзулерден ажырату үшін нүктелерді екі топқа бөледі. Бірінші топқа өзімізге белгілі қарапайым нүктелерді жатқызады, ал екінші топқа шексіз қашықтықтағы нүктелерді жатқызады. Әрбір түзудің бойында тек бір ғана шексіз қашықтықта жатқан нүкте бар деп қарастырады. Горизонталь орналасқан түзуді

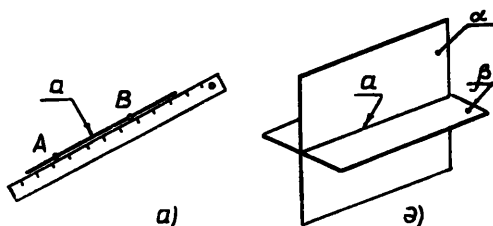
көз алдымызға елестетелік. Оның бойынан алынған нүктеден оңға қарай түзудің бойымен қашықтай берсек, шексіз қашықтыққа кетер едік. Сонда кездесетін шексіз қашықтықтағы нүктені  $M_{\infty}$  деп белгілейік. Ал енді сол қарапайым нүктеден солға қарай түзудің бойымен шексіз қашықтыққа кеткенде кездесетін шексіз қашықтықтағы нүктені  $M'_{\infty}$  деп белгілейік. Түзудің тек жалғыз шексіз қашықтықта орналасқан нүктесі болатындықтан  $M_{\infty}$  және  $M'_{\infty}$  нүктелері бірігеді:  $M_{\infty} = M'_{\infty}$ ; былайша айтқанда шексіз қашықтықта жатқан нүктемен толықтырылған түзу тұйық сызық болады. Өзімізге бұрыннан белгілі қарапайым нүктелерді *өзіндік*, ал шексіз қашықтықтағы нүктелерді *өзіндік емес нүктелер* деп атайды. Сонда параллель түзулер өзіндік емес нүктеде, ал параллель емес түзулер өзіндік нүктеде қиылысады. Бір жазықтықта жатқан екі түзудің ортақ нүктесі болуы міндетті.

Берілген нүкте арқылы өтетін, бір жазықтықта жататын түзулерді *түзулер шоғы* деп атайды. Түзулер шоғының ортақ нүктесін *шоқтың центрі* дейді. Шоқтың центрі өзіндік немесе өзіндік емес нүкте болуы мүмкін.

Кеңістікте екі түзудің ортақ нүктесі болмауы мүмкін. Осындай ортақ нүктесі болмайтын екі түзуді *айқас түзулер* деп атайтыны белгілі. Сонда әр түрлі екі түзу кеңістікте үш жағдайда: қиылысып, айқасып және параллель орналасуы мүмкін. Екі қарындаш алып, оларды аталған үш жағдайда орналастырып көріңіздер. Айқас екі түзудің бір жазықтықта жатпайтынына көңіл аударыңыздар.



1-сурет.



2-сурет.

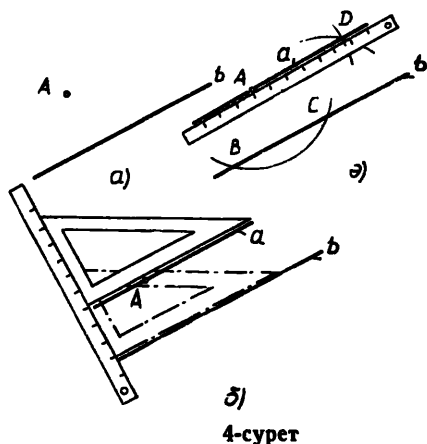
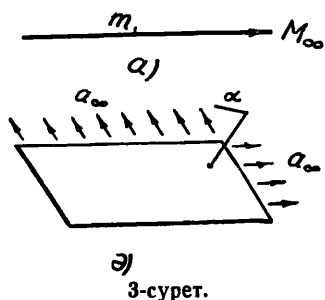
Кеңістікте берілген нүкте арқылы өтетін түзулердің жиыны *түзулер байламы* деп аталады. Олардың ортақ нүктесін *байламның центрі* дейді. Байламның центрі де өзіндік, немесе өзіндік емес нүкте болуы мүмкін.

1, а-суретте центрі өзіндік  $D$  нүктесі болатын түзулер шоғы, 1, б-суретте центрі өзіндік емес нүкте  $P \neq$  болатын түзулер шоғы, 1, в-суретте центрі өзіндік  $S$  нүктесі болатын түзулер байламы және 1, в-суретте центрі өзіндік емес нүкте  $S_{\infty}$  болатын түзулер байламы кескінделген.

Түзу өзінің екі нүктесі арқылы толық анықталады. Егер  $A$  және  $B$  нүктелері берілсе (2, а-сурет), онда осы екі нүкте арқылы тек бір ғана түзу жүргізуге болады. Түзуді берілген екі жазықтықтың қиылысу сызығы түрінде де анықтауға болады. 2, б-суретте көрсетілген  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтары  $a$  түзуі бойымен қиылысады. Геометрияда нүктелерді латын алфавитінің үлкен әріптерімен, сызықтарды латын алфавитінің кіші әріптерімен және жазықтықтарды грек алфавитінің кіші әріптерімен белгілейді. Мектептегі геометрия курсындағы басқа да математикалық белгілеулерді қолданамыз.

Сонда геометриялық сөйлемдерді, қорытындыларды көрнекті түрде қысқаша жазуға мүмкіндік туады. Мысалы:  $\alpha \cap \beta = a$ . Бұл жазудағы  $\cap$  — қиылысу белгісі; келтірілген жазуды былай оқуға болады: альфа және бэта жазықтықтары қиылысқанда  $a$  түзуі алынады.

Параллель жазықтықтарды да қиылысады деп қарастыруға болады. Параллель жазықтықтарды қиылысатын жазықтықтардан ажырату үшін түзулерді екі топқа бөледі. Бірінші топқа өзімізге бұрыннан белгілі қарапайым түзулерді, екінші топқа шексіз қашықтықта орналасқан түзулерді жатқызады. Шексіз қашықтықта орналасқан түзулерді *өзіндік емес түзулер* деп атайды. Сонда параллель жазықтықтар өзіндік емес түзу бойынша қиылысады, ал қиылысатын жазықтықтар *өзіндік түзу* бойынша қиылысады. Әрбір жазықтықта жалғыз ғана өзін-



дік емес түзу болады. Сондықтан жазықтықтың өзіндік емес нүктелері оның өзіндік емес түзуі бойында жатады.

Шексіз қашықтықта жатқан элементтерді сызбада кескіндей алмаймыз. Сондықтан өзіндік емес элементтерді өзіндік элементтердің көмегімен анықтайды. Өзіндік емес түзу осы түзу арқылы өтетін жазықтықтың көмегімен анықталады. Өзіндік емес нүкте өзіндік түзу (3, а-сурет), өзіндік емес түзу өзіндік жазықтық (3, ә-сурет) арқылы беріледі. Сонда 3, а-суретте өзіндік емес  $M_\infty$  нүктесін  $m$  түзуі, ал 3, ә-суретте өзіндік емес  $a_\infty$  түзуін өзіндік жазықтық  $\alpha$  анықтайды. Өзара параллель орналасқан түзу мен жазықтық өзіндік емес нүктеде қиылысады. Түзу мен жазықтықтың кем дегенде ортақ бір нүктесі болады. Егер ортақ нүкте өзіндік болса, онда олар қиылысады; ал ортақ нүкте өзіндік емес болса, онда түзу мен жазықтық параллель орналасады. Түзу мен жазықтықтың ортақ екі нүктесі болса, онда түзу берілген жазықтықта жатады.

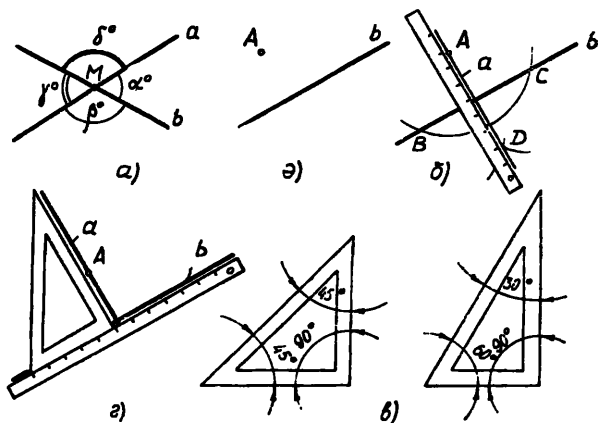
Өзіндік емес нүктелер мен өзіндік емес түзулердің жиыны өзіндік емес жазықтықты анықтайды. Кеңістікте жалғыз ғана өзіндік емес жазықтық болады. Кез келген өзіндік жазықтықтың өзіндік емес жазықтықпен ортақ түзуі өзіндік емес болады, ал кез келген өзіндік түзудің өзіндік емес жазықтықпен ортақ өзіндік емес нүктесі болады.

## 1.2. ӨЗАРА ПАРАЛЛЕЛЬ НЕМЕСЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТҮЗУЛЕРДІ САЛУ

Алдымен өзара параллель түзулерді салуды қарастыралық. Параллель түзулердің орналасуы туралы жоғарыда айтылды. Параллель екі түзу өзіндік нүктеде қиылыспайды және олар бір жазықтықта жатады. Мысалдар қарастыралық.

Берілген  $A$  нүктесі арқылы өтетін және берілген  $b$  түзуіне параллель  $a$  түзуін салу керек болсын (4, а-сурет). Нүктені сызбада үшкір қарындаштың ұшынан қалған із түрінде көрсетеміз. Нүкте математикалық ұғым. Оның өлшемдері болмауға тиіс, ал қарындаштың ұшынан қалған іздің аз да болса ауданы болатыны сөзсіз. Кейінірек іс жүзінде қолданылатын геометрия туралы сөз болады. Онда теориядан ауытқулар кездеседі. Бірақ бұл ауытқулар өмір талаптарына (мысалы, инженерлік есептер) сай және теориялық геометрияға қайшы болмауы шарт. Берілген түзуді де сызбада сызылған күйінде көрсетеміз. Түзудің математикалық анықтамасы бойынша оның қалыңдығы болмауы шарт. Бірақ іс жүзінде қолданылатын геометрияда қалыңдығы әр түрлі сызықтарды пайдаланады. Бұл теориялық қайшылық болып есептелмейді.

Енді  $A$  нүктесі арқылы  $b$  түзуіне параллель  $a$  түзуін жүргізу мәселесіне көшелік. Алдымен есепті циркуль мен сызғышты пайдаланып шешелік.  $A$  нүктесін центр етіп алып  $b$  түзуін екі нүктеде қиятын шеңбер жүргіземіз. Жүргізілген шеңбер мен  $b$  түзуінің қиылысу нүктелері  $B$  және  $C$  болсын (4, ә-сурет). Центрі  $C$  нүктесі, радиусы  $AB$  кесіндісіне тең шеңбер және центрі  $A$  нүктесі, радиусы  $BC$  кесіндісіне тең шеңбер жүргіземіз. Осы екі шеңбердің қиылысу нүктесі  $D$  параллелограмм  $ABCD$ -ның төртінші төбесі болады. Сонда  $A$  және  $D$  нүктелері арқылы жүргізілген түзу ізден отырған  $a$  түзуін береді. Табылған  $a$  түзуі  $A$  нүктесі арқылы жүргізілді және ол  $b$  түзуіне параллель, өйткені параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары параллель болады. Бұл есепті циркульді пайдаланбай да шешуге болады. Ең қарапайым жағдайда сызба салуға арналған бұрыштықты пайдаланады (4, б-сурет). Бұрыштықтың катетін  $b$  түзуімен дәл келетіндей етіп орналастырады да оның екінші катетіне сызғышты тірсейді. Сызғышты қозғамай, оның қыры бойынша бұрыштықты жылжытады. Бұрыштықты оның қыры (катеті)  $A$  нүктесі арқылы өтетін жағдайға дейін жылжытып,



5-сурет.

осы  $A$  нүктесін бастыра түзу жүргізеді. Жүргізілген  $a$  түзуі  $b$  түзуіне параллель болатынын дәлелдеу қиын емес. Параллель түзулерді салудың соңғы әдісін инженерлер жиі пайдаланады.

Жазықтықтың қиылысатын екі түзуі төрт бұрышты анықтайды. Берілген  $a$  және  $b$  түзулері  $M$  нүктесінде қиылыссын (5, а-сурет). Сонда пайда болған бұрыштар  $\alpha^\circ$ ,  $\beta^\circ$ ,  $\gamma^\circ$  және  $\delta^\circ$ . Олардың қосындысы  $360^\circ$  болатынын,  $\alpha^\circ$  мен  $\beta^\circ$ ,  $\alpha^\circ$  мен  $\delta^\circ$  — *сыбайлас бұрыштар*, ал  $\alpha^\circ$  мен  $\gamma^\circ$  *вертикаль бұрыштар* деп аталатыны белгілі. Сол сияқты  $\delta^\circ$ -ға сыбайлас бұрыштар  $\alpha^\circ$  мен  $\gamma^\circ$ , ал онымен вертикаль бұрыш  $\beta^\circ$  болады. Вертикаль бұрыштар өзара тең болады, сондықтан:  $\alpha^\circ = \gamma^\circ$  және  $\beta^\circ = \delta^\circ$ . Сыбайлас бұрыштардың қосындысы жазық бұрыш болатындықтан:  $\alpha^\circ + \beta^\circ = 180^\circ$ ;  $\alpha^\circ + \delta^\circ = 180^\circ$ ;  $\beta^\circ + \gamma^\circ = 180^\circ$ ;  $\gamma^\circ + \delta^\circ = 180^\circ$ . Бұл бұрыштардың мәндері  $0^\circ$ -тан  $180^\circ$ -қа дейінгі аралықта болады. Өзара тең сыбайлас бұрыштар  $90^\circ$ -қа тең болады.  $90^\circ$ -қа тең бұрышты *тік бұрыш* деп те атайды.

Қиылысатын екі түзу құрайтын төрт бұрыштың біреуі тік бұрыш болса, онда оның қалған үшеуі де тік бұрыш болады. Егер екі түзу қиылысқанда төрт тік бұрыш пайда болса, онда мұндай түзулерді *өзара перпендикуляр* деп атайды. Өзара перпендикуляр түзулерді де циркуль мен сызғышты пайдаланып салуға болады. Берілген  $A$  нүктесі арқылы өтетін және берілген  $b$  түзуіне перпендикуляр болатын  $a$  түзуін салу керек болсын (5, ә-сурет). Центрі  $A$  нүктесі болатын және  $b$  түзуін  $B$  және  $C$  нүктелерінде қиятын шеңбер жүргіземіз. Циркульдің сирақ-

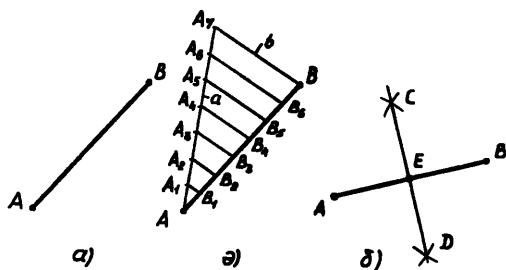
тары аралығын өзгертпей центрі  $B$  және  $C$  нүктелері болатын екі шеңбер жүргізсек, олар  $A$  және  $D$  нүктелерінде қиылысады. Сызғышты пайдаланып  $A$  және  $D$  нүктелерін бастыра  $a$  түзуін жүргіземіз (5, б-сурет). Жүргізілген  $a$  түзуі мен берілген  $b$  түзуі өзара перпендикуляр болады. Оны дәлелдеу үшін  $ABCD$  төртбұрышы ромбы екенін ескеру жеткілікті. Ал ромбының диагональдары ( $BC$  және  $AD$ ) өзара перпендикуляр болады.

Өзара перпендикуляр түзулерді де бұрыштықтарды пайдаланып салу тиімді. Сызба салу үшін бұрыштықтардың екі түрін жиі қолданады. Бұрыштықтардың бір бұрышы тік бұрыш (яғни  $90^\circ$ -қа тең) болады. Қалған екі бұрыштың қосындысыда  $90^\circ$ -қа тең болуы керек (5, в-сурет). Бұрыштықтың бірінде олар  $45^\circ$ -қа, ал екіншісінде  $30^\circ$  және  $60^\circ$ -қа тең. Сызғышты бір қыры берілген  $b$  түзумен беттесетіндей етіп орналастырып, оған бұрыштықтың бір катетін тірейді. Сызғышты қозғамай бұрыштықты жылжыта отырып, оның екінші катетін  $A$  нүктесімен дәл келтіреді. Осыдан кейін  $A$  нүктесін бастыра  $a$  түзуін жүргізеді (5, г-сурет). Сонда  $a$  және  $b$  түзулері арасындағы бұрыш бұрыштықтың катеттері арасындағы бұрышқа тең болады. Сондықтан бұрыштықтың тік бұрышы дәл  $90^\circ$ -қа теңдігін тексеріп алған дұрыс. Осы мақсат үшін сызғышқа бұрыштықтың бір катетін тіреп, оның екінші катеті бойынша түзу жүргізеді. Сызғышты қозғамай бұрыштықты төңкеріп, салынған түзуді бастыра сызық жүргізеді. Сонда бұл екі сызық бір-бірімен дәл беттессе, тексеріп отырған бұрыш дәл  $90^\circ$ -қа тең болғаны. Егер бұл екі сызық бір-бірімен дәл келмесе, онда бұрыштық жұмысқа жарамсыз болғаны.

Қарастырылған мысалдардағы есептердің әрқашан шешімі бар және ол шешім тек біреу ғана екеніне көңіл аударған дұрыс. Берілген нүкте арқылы өтіп, берілген түзуге перпендикуляр болатын және олардың (берілген нүкте мен түзудің) жазықтығында жататын түзу жалғыз ғана болады. Сондай-ақ. Евклид геометриясындағы берілген түзуге параллель және берілген нүкте арқылы өтетін түзу де жалғыз. Лобачевский геометриясында кем дегенде екі түзу жүргізуге болса, ал Риман геометриясында осындай жалғыз да түзу жүргізуге болмайды.

### **1.3. КЕСІНДІНІ ЖӘНЕ ШЕҢБЕРДІ ТЕҢ БӨЛІКТЕРГЕ БӨЛУ**

Кесіндіні тең  $n$  бөлікке бөлу үшін оның бір ұшы арқылы қалауымызша алынған бұрышпен түзу саламыз. Осы түзудің бойына оның берілген кесіндімен ортақ нүк-

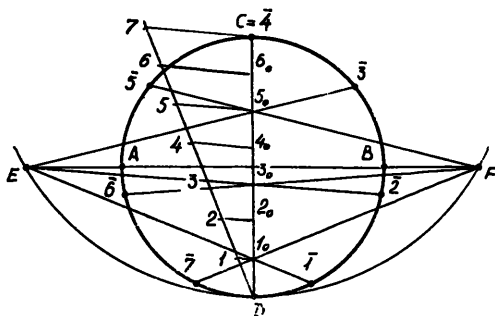


6-сурет.

тесінен бастап қалауымызша алынған ұзындықтағы өзара тең  $n$  кесінділер саламыз. Түзу бойындағы ең соңғы нүктені берілген кесіндінің екінші ұшымен қосатын түзу жүргіземіз. Түзудің бөліну нүктелері арқылы соңғы жүргізілген түзуге параллель түзулер жүргіземіз. Параллель түзулер берілген кесіндіні өзара тең  $n$  бөлікке бөледі (Фалес теоремасы). Мысалы, берілген  $AB$  кесіндісін өзара тең 7 бөлікке бөлу керек болсын (6, а-сурет).  $A$  нүктесі арқылы қалауымызша  $a$  түзуін жүргіземіз. Осы  $a$  түзуіне  $A$  нүктесінен бастап қалауымызша алынған өзара тең 7 кесінді салсақ, онда  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  және  $A_7$  нүктелері алынады:  $|AA_1| = |A_1A_2| = |A_2A_3| = \dots = |A_6A_7|$ .  $A_7$  және  $B$  нүктелері арқылы  $b$  түзуін жүргіземіз.  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  нүктелері арқылы  $b$  түзуіне параллель түзулер саламыз. Сонда  $B_1, B_2, \dots, B_6$  нүктелері алынады. Фалес теоремасы бойынша  $|AB_1| = |B_1B_2| = |B_2B_3| = \dots = |B_6B|$ .

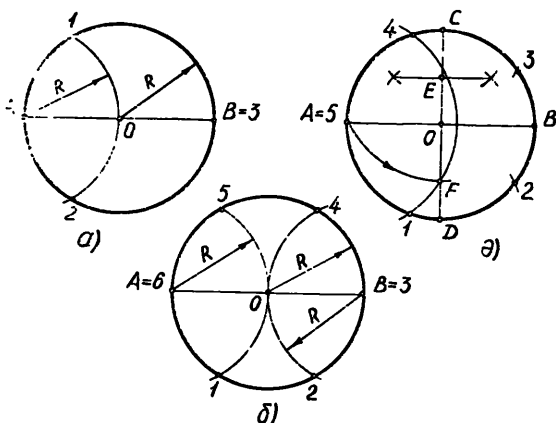
Берілген кесіндінің дәл ортасын табу және орталық перпендикуляр салу есебі жиі кездеседі (6, б-сурет). Бұл есепті шешу үшін центрлері  $A$  және  $B$  нүктелері болатын және радиустары (өзара тең)  $AB$  кесіндісінің жартысынан үлкен екі шеңбер жүргізсек, олар  $C$  және  $D$  нүктелерінде қиылысады.  $C$  және  $D$  нүктелері арқылы өтетін түзу  $AB$  кесіндісінің орталық перпендикулярлары болады, ал  $AB$  және  $CD$  түзулерінің қиылысу нүктесі  $AB$  кесіндісінің дәл ортасы болады:  $E = (AB) \cap (CD)$ ;  $|AE| = |EB|$ .

Шеңберді тең  $n$  бөлікке бөлу үшін оның өзара перпендикуляр екі диаметрін жүргізеді (7-сурет). Оларды  $AB$  және  $CD$  деп белгілейік. Енді олардың біреуін (мысалы  $CD$  диаметрін) тең  $n$  бөлікке бөледі. Осы диаметрдің бір ұшын (мысалы  $C$  нүктесін) центр етіп алып, оның екінші ұшы  $D$  нүктесі арқылы шеңбер жүргізеді. Осы радиусы берілген шеңбердің диаметріне тең шеңбер екін-



ші диаметрдің созындысымен  $E$  және  $F$  нүктелерінде қиылысады. Енді осы  $E$  және  $F$  нүктелерін  $CD$  диаметрінің тақ немесе жұп бөліну нүктелерімен қосатын сәуле-лердің шеңбермен қиылысу нүктелерін ( $\bar{1}$ ,  $\bar{2}$ ,  $\bar{3}$ ,  $\bar{4}$ ,  $\bar{5}$ ,  $\bar{6}$ ,  $\bar{7}$ ) қарастыралық. Олар шеңберді  $n$  тең бөліктерге бөледі. 7-суреттегі мысалда шеңбер жеті бөлікке бөлінген ( $n=7$ ). Бұл жуық әдістің қателігі  $0,01 R$ -ден аспайды ( $R$  — шеңбердің радиусы).

Шеңберді тең үш ( $n=3$ ) бөлікке бөлу үшін оның бойынан қалауымызша алынған  $A$  нүктесін центрі етін алып, берілген шеңберге тең шеңбер салынады (8, а-сурет). Сонда екі шеңбер 1 және 2 нүктелерінде қиылысады, ал  $A$  нүктесін центрмен қосатын түзу шеңберді 3 нүктесінде қияды. 1, 2 және 3 бөліну нүктелері, оларды қосатын кесінділер тең қабырғалы үшбұрыш құрайды.



8-сурет.

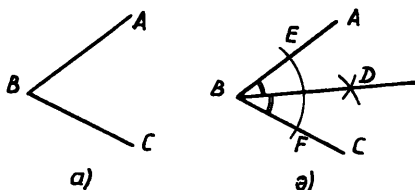
Шеңберді тең төрт ( $n=4$ ) бөлікке бөлу үшін оның өзара перпендикуляр екі диаметрін салу жеткілікті. Мысалы,  $AB$  және  $CD$  диаметрлері өзара  $90^\circ$  бұрыш жасайтын болса (8, ә-сурет), онда  $A$ ,  $B$ ,  $C$  және  $D$  шеңбердің тең төрт бөлікке бөліну нүктелері болады. Оларды қосатын төртбұрыш квадрат болатынын байқау қиын емес.

Шеңберді тең бес бөлікке ( $n=5$ ) бөлу үшін де оның өзара перпендикуляр ( $AB$  және  $CD$ ) диаметрлерін жүргізіп алады (8, ә-сурет).  $CO$  кесіндісінің ортасын табады:  $|CE|=|EO|$ ,  $O$  — шеңбердің центрі.  $E$  нүктесін центр етіп алып,  $A$  нүктесі арқылы шеңбер жүргізеді. Осы шеңбер  $CD$  диаметрін  $F$  нүктесінде қияды:  $|AE|=|EF|$ . Сонда  $AF$  кесіндісі шеңберге іштей сызылған дұрыс бесбұрыш қабырғасының ұзындығын анықтайды: 1, 2, 3, 4, 5 — бөліну нүктелері.

Шеңберді тең алты ( $n=6$ ) бөлікке бөлу оңай. Ол үшін шеңбердің  $AB$  диаметрін салып, оның ұштарын центр ретінде қарастырып берілген шеңберге тең екі шеңбер жүргіземіз. Сонда бұл екі шеңбер берілген шеңбермен төрт нүктеде қиылысады (8, б-сурет). Табылған төрт нүкте және  $A$  мен  $B$  нүктелері шеңберді тең алты бөлікке бөледі: 1, 2, 3, 4, 5 және 6 нүктелері — шеңберге іштей сызылған дұрыс алтыбұрыштың төбелері.

Шеңберді тең 8 бөлікке бөлу үшін алдымен оны тең төрт бөлікке бөледі; одан кейін өзара перпендикуляр екі диаметрдің әрқайсысымен  $45^\circ$  бұрыш жасайтын тағы екі диаметр жүргізеді. Төрт диаметр шеңберді тең 8 бөлікке бөледі. Шеңберге іштей сызылған дұрыс онбұрыштың бір қабырғасының ұзындығы  $OF$  кесіндісі ұзындығына тең болады (8, ә-сурет). Шеңберді 12-ге бөлу оны тең 6 бөлікке бөлуден басталады (8, б-сурет); одан кейін  $AB$  диаметріне перпендикуляр  $CD$  диаметрін салып, шеңберді тағы да тең 6 бөлікке бөледі. Осылай шеңберді 24, 36 және т. с. тең бөліктерге бөлуге болады.

Берілген бұрышты тең бөліктерге бөлу есептері де жиі кездеседі. Бұрыштың биссектрисасын салуды қарастыралық. Берілген  $ABC$  бұрышының биссектрисасын салу керек болсын (9, а-сурет). Кез келген радиуспен  $B$  нүктесінен доға жүргіземіз. Бұл доға бұрыштың қабырғаларын  $E$  және  $F$  нүктелерінде қияды. Осы екі нүктені центр етіп алып,  $D$  нүктесінде қиылысатын, радиустары тең шеңбер доғаларын саламыз. Сонда  $BD$  түзуі берілген  $ABC$  бұрышының биссектрисасын береді:  $\angle ABD = \angle DBC$  (9, ә-сурет).



9-сурет.

#### 1.4. ҮШБҰРЫШТАРДЫ САЛУ

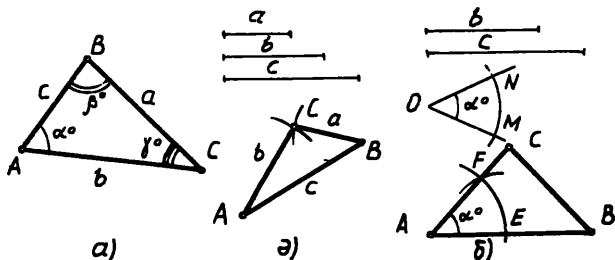
Үшбұрыштың қабырғалары  $a, b, c$  және бұрыштары  $\alpha^\circ, \beta^\circ, \gamma^\circ$  — оның негізгі элементтері деп аталады (10, а-сурет).  $a = |BC|$ ;  $b = |AC|$ ;  $c = |AB|$ ;  $\alpha^\circ = \widehat{BAC}$ ;  $\beta^\circ = \widehat{ABC}$ ;  $\gamma^\circ = \widehat{ACB}$ . Үшбұрышты салу үшін осы алты элементтің үшеуі берілуі тиіс:  $\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ = 180^\circ$ ;  $a + b > c$ ;  $b + c > a$ ;  $a + c > b$ .

1-есеп. Берілген  $a, b, c$  үш қабырғасы бойынша үшбұрыш салу керек (10, ә-сурет). Есептің шешімі бар болуы үшін мына теңсіздік орындалуы тиіс:  $|a - b| < c < a + b$ .

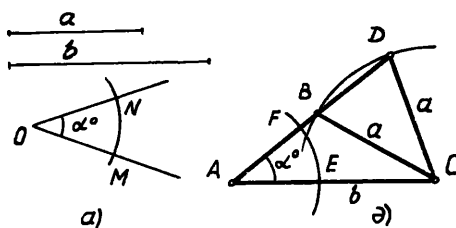
Ұзындығы  $c$ -ға тең  $AB$  кесіндісін саламыз. Центрі  $A$  нүктесі, радиусы  $b$ -ға тең және центрі  $B$  нүктесі, радиусы  $a$ -ға тең болатын екі шеңбер жүргіземіз. Бұл шеңберлер үшбұрыштың үшінші төбесі болатын  $C$  нүктесінде қиылысады. Табылған  $ABC$  үшбұрышының қабырғалары —  $a, b$  және  $c$ .

2-есеп. Екі қабырғасы  $b, c$  және олардың арасындағы бұрышы  $\alpha^\circ$  бойынша үшбұрыш салу керек (10, б-сурет). Есептің шешімі бар болуы үшін  $\alpha^\circ < 180^\circ$  болуы міндетті.

Берілген бұрыштың төбесін  $O$  әрпімен белгілеп, қалауымызша алынған радиуспен шеңбер доғасын жүргі-



10-сурет.



11-сурет.

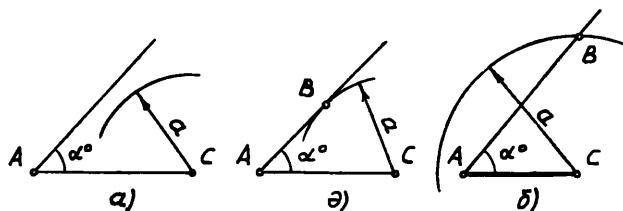
земіз. Осы доғаның бұрыштын қабырғаларымен қиылысу нүктелерін  $M$  және  $N$  деп белгілейік. Қалауымызша алынған  $A$  нүктесінен бастап сәуле саламыз. Центрі  $A$  нүктесі болатын, радиусы алдыңғы доға радиусына тең доға жүргіземіз. Доға мен сәуленің қиылысу нүктесі  $E$  болсын. Центрі  $E$  нүктесі, радиусы  $|MN|$ -ге тең шеңбер соңғы доғаны  $F$  нүктесінде қияды. Сонда берілген бұрышқа тең бұрыш алынады:  $\widehat{EAF} = \alpha^\circ$ .

Енді  $AE$  сәулесіне  $C$ -ға тең кесінді салып,  $B$  нүктесін, ал  $AF$  сәулесіне  $b$ -ға тең кесінді салып,  $C$  нүктесін аламыз. Табылған  $B$  және  $C$  нүктелерін кесіндімен қоссақ, іздеп отырған үшбұрышымыз алынады.

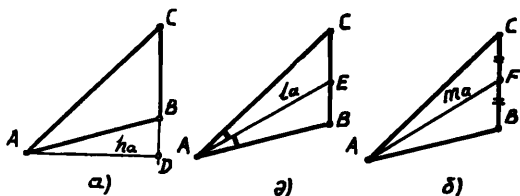
3-есеп. Берілген  $a$  және  $b$  екі қабырғасы және олардың біреуіне қарсы жатқан  $\alpha^\circ$  бұрышы бойынша үшбұрыш салу керек (11, а-сурет).

Төбесін қалауымызша орналастырып, берілген  $\alpha^\circ$  бұрышына тең  $A$  бұрышын саламыз (11, б-сурет). Оның бір қабырғасына берілген  $b$ -ға тең кесінді салсақ, іздеп отырған  $ABC$  үшбұрышының екінші төбесі алынады. Центрі  $C$  нүктесі және радиусы  $a$  болатын шеңбер салсақ, ол шеңбер  $A$  бұрышының екінші қабырғасын екі нүктеде қияды ( $B$  және  $D$ ). Сонда алынған екі үшбұрыш ( $ABC$  және  $ADC$ ) есептің шартын қанағаттандыратын үшбұрыштар, яғни бұл есептің екі шешуі бар.

Жалпы алғанда төрт түрлі жағдай болуы мүмкін. Бірінші жағдай жоғарыда қарастырылды. Екінші жағ-



12-сурет

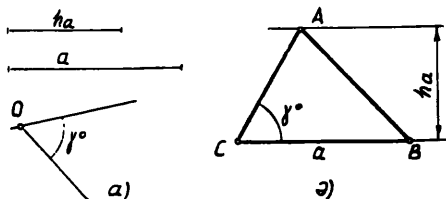


13-сурет.

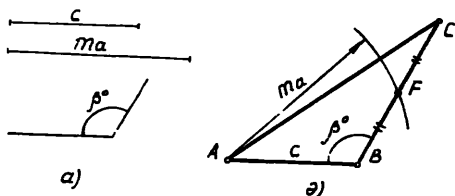
дайда  $(C; a)$  шеңбері  $A$  бұрышының екінші қабырғасымен қиылыспайды (12, а-сурет): есептің бірде-бір шешімі жоқ. Үшінші жағдайда  $(C; a)$  шеңберінің  $A$  бұрышының екінші қабырғасымен тек жалғыз ортақ нүктесі болады (12, б-сурет), яғни есептің шешімі біреу. Төртінші жағдайда да есептің шешімі біреу болады (12, в-сурет). Бұл жағдайда  $a > b$  болғандықтан  $(C; a)$  шеңберінің  $A$  бұрышының екінші қабырғасымен қиылысу нүктелерінің біреуі  $(D = (AB) \cap (C; a))$  есептің шартын қанағаттандырмайды.

Үшбұрыштың негізгі элементтерінен басқа да элементтері көп-ақ. Үшбұрыштың биіктігі, биссектрисасы және медианасы туралы айта кетелік. Үшбұрыштың бір төбесінен оның осы төбе арқылы өтпейтін қабырғасы анықтайтын түзуге перпендикуляр түсірелік. Аталған (мысалы  $A$  нүктесі) төбені перпендикулярдың табанымен ( $D$  нүктесі) қосатын кесінді *үшбұрыштың биіктігі* деп аталады ( $h_a$ ; 13, а-сурет). Үшбұрыштың бір төбесінің биссектрисасын жүргізелік (13, б-сурет). Сонда пайда болған  $AE$  кесіндісі *үшбұрыштың биссектрисасы* деп аталады ( $\angle CAE = \angle EAB$ ;  $l_a$  — биссектриса). Үшбұрыштың төбесін қарсы жатқан қабырғаның ортасымен қосатын кесіндіні *үшбұрыштың медианасы* деп атайды (13, в-сурет;  $|BF| = |FC|$ ;  $m_a$  — медиана).

4-есеп. Бір қабырғасы  $a$ , оған іргелес жатқан бұрышы  $\gamma^\circ$  және қарсы төбесінің биіктігі  $h_a$  (14, а-сурет) бойынша үшбұрыш салу керек.



14-сурет.



15-сурет.

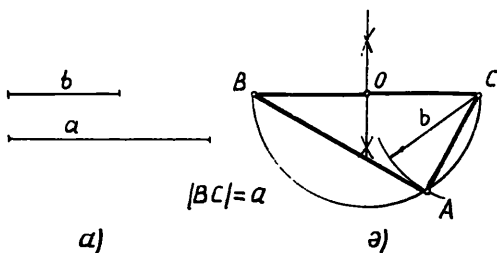
Ұзындығы  $a$ -ға тең  $BC$  кесіндісін және  $\gamma^\circ$ -қа тең  $C$  бұрышын саламыз (14, ә-сурет).  $BC$  түзуіне параллель және одан қашықтығы  $h_a$  болатын түзу жүргіземіз. Осы түзу  $C$  бұрышының қабырғасын  $A$  нүктесінде қияды.  $ABC$  — есептің берілген шарттарына сай келетін үшбұрыш.

5-есеп. Бір қабырғасы  $c$  және оған іргелес жатқан бұрыштардың біреуі  $\beta^\circ$  мен екіншісінің медианасы  $m_a$  бойынша (15, а-сурет) үшбұрыш салу керек.

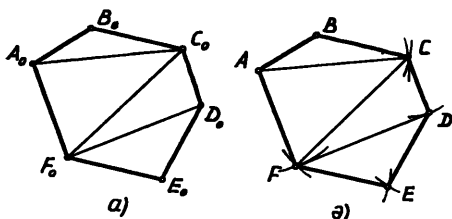
Ұзындығы  $c$ -ға тең  $AB$  кесіндісін және  $\beta^\circ$ -ға тең  $B$  бұрышын салып аламыз (15, ә-сурет). Центрі  $A$  нүктесі, радиусы  $m_a$  болатын шеңбер ( $A; m_a$ ) саламыз. Осы шеңбер  $B$  бұрышының екінші қабырғасымен  $F$  нүктесінде қиылысады.  $|BF|$ -ке тең  $FC$  кесіндісін салып, ізделініп отырған үшбұрыштың үшінші төбесін ( $C$  нүктесін) аламыз. Сонда 15, ә-суреттегі  $ABC$  үшбұрышы есептің шешімін береді.

Егер үшбұрыштың бір бұрышы  $90^\circ$ -қа тең болса, онда оны *тікбұрышты үшбұрыш* деп атайды. Оның тік бұрышына қарсы қабырғасын *гипотенуза* деп, ал қалған екі қабырғасын *катеттер* деп атайды. Тікбұрышты үшбұрышты салу үшін оның екі элементін (параметрін) беру қажетті және жеткілікті.

6-есеп. Гипотенузасы  $a$ , катеті  $b$  болатын (16, а-сурет) үшбұрышты салу керек.



16-сурет.

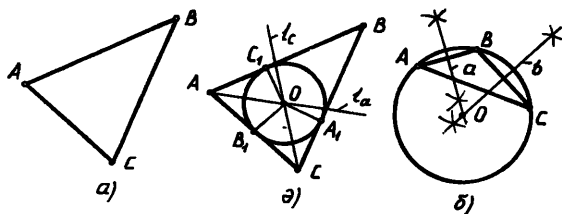


17-сурет.

Ұзындығы берілген гипотенузаға тең  $BC$  кесіндісін салып, диаметрі осы  $BC$  кесіндісі болатын шеңбер жүргіземіз. Бұл шеңбердің центрі  $BC$  кесіндісінің ортасы болады. Центрі  $C$  нүктесі, радиусы берілген катетке тең шеңбер жүргізсек, онда  $(O; a/2)$  және  $(C; b)$  шеңберлерінің қиылысу нүктесі  $A$  тікбұрышты үшбұрыштың үшінші төбесі болады.  $\angle BAC$  тікбұрыш екендігіне көз жеткізу қиын емес, өйткені ол диаметрге тірелетін шеңберге іштей сызылған бұрыш.

Көпбұрышты салу үшін оны үшбұрыштарға бөледі. Содан кейін алдымен бір үшбұрышты, одан кейін екінші үшбұрышты т.с.с. үшбұрыштарды бірін-біріне қабырғалары бойынша тақап салады. Мысал үшін берілген  $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$  көпбұрышына тең  $ABCDEF$  көпбұрышын салуды қарастыралық (17-сурет).  $A_0C_0$ ,  $C_0F_0$  және  $F_0D_0$  кесінділерінің көмегімен берілген алтыбұрыш төрт үшбұрышқа  $(A_0B_0C_0)$ ,  $(A_0C_0F_0)$ ,  $(C_0D_0F_0)$  және  $(D_0E_0F_0)$  бөлінеді.  $A_0B_0$  кесіндісіне тең  $AB$  кесіндісін қалауымызша орналастырып саламыз (17, ә-сурет).  $(A; |A_0C_0|)$  және  $(B; |B_0C_0|)$  шеңберлері  $C$  нүктесінде,  $(A; |A_0F_0|)$  және  $(C; |C_0F_0|)$  —  $F$  нүктесінде,  $(C; |C_0D_0|)$  және  $(F; |F_0D_0|)$  —  $D$  нүктесінде қиылысады.  $(F; |F_0E_0|) \cap (D; |D_0E_0|) = E$ . Табылған нүктелер  $ABCDEF$  алтыбұрышын анықтайды. Бұл алтыбұрыш берілген  $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$  алтыбұрышына тең.

Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі биссектрисалардың қиылысу нүктесінде жатады. Үшбұрыштың үш биіктігі бір нүктеде, үш медианасы да бір нүктеде, сол сияқты үш биссектрисасы да бір нүктеде қиылысатыны белгілі. Олай болса, үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрін табу үшін оның екі биссектрисасын салу жеткілікті. Үшбұрыштың қабырғалары оған іштей сызылған шеңберге жанамалар болады, яғни олардың ортақ нүктесі жалғыз болады. Осы үшбұрыш қабырғасы мен оған іштей сызылған шеңбердің ортақ нүктесін



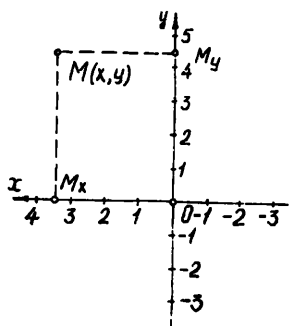
18-сурет.

жанасу нүктесі деп атайды. Жанасу нүктесін анықтау үшін шеңбер центрінен үшбұрыш қабырғаларына перпендикуляр болатын түзулер жүргізіліп, олардың қиылысу нүктелері анықталады. Мысалы,  $ABC$  үшбұрышына іштей шеңбер сызу керек болсын (18, а-сурет). Үшбұрыштың  $A$  және  $C$  төбелерінің биссектрисаларын  $l_a$  және  $l_c$  жүргіземіз. Олар  $O$  нүктесінде қиылысады:  $l_a \cap l_c = O$ . Осы  $O$  нүктесінен  $ABC$  үшбұрышының қабырғаларына түсірілген перпендикулярдың табандарын —  $A_1$ ,  $B_1$  және  $C_1$  нүктелерін табамыз. Сонда  $|OA_1| = |OB_1| = |OC_1| = r$  болады. Центрі  $O$  нүктесі, радиусы  $r$ -ге тең шеңбер —  $ABC$  үшбұрышына іштей сызылған шеңбер (18, ә-сурет).

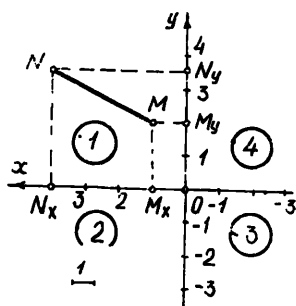
Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңберді, яғни берілген үш нүкте  $A$ ,  $B$  және  $C$  арқылы өтетін шеңберді былай салады. Шеңбер центрі  $O$  үшбұрыш төбелерінен бірдей қашықтықта орналасады:  $|OA| = |OB| = |OC| = R$ .  $A$  және  $B$  нүктелерінен қашықтықтары бірдей нүктелер  $AB$  кесіндісінің ортасына тұрғызылған перпендикуляр түзуді (а) анықтайды. Сол сияқты  $B$  және  $C$  нүктелерінен қашықтықтары бірдей нүктелер  $BC$  кесіндісінің ортасына тұрғызылған перпендикуляр түзуді (б) анықтайды. Осы екі түзудің (а мен б) қиылысу нүктесі — іздеп отырған шеңберіміздің центрін анықтайды.  $a \cap b = O$ . Центрі табылған  $O$  нүктесі, радиусы  $R$  болатын шеңбер (18, б-сурет)  $ABC$  үшбұрышына сырттай сызылған шеңбер болады.

## 1.5. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСЫ

Өзара перпендикуляр  $Ox$  және  $Oy$  түзулерін жүргізілік (19-сурет). Олардың қиылысу нүктесі  $O$  — бас нүкте, ал түзулер  $Ox$  — абсциссалар осі,  $Oy$  — ординаталар осі деп аталады. Осьтердің оң бағыттары сызбада көрсетілген. Кез келген  $M$  нүктесінен  $Ox$  және  $Oy$  осьтеріне пер-



19-сурет.



20-сурет.

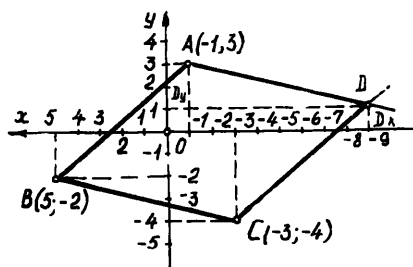
пендикулярлар түсірсек,  $M_x$  және  $M_y$  нүктелерін аламыз ( $M_x \in O_x$ ;  $M_y \in O_y$ ).  $M_x$  және  $M_y$  нүктелерін  $M$  нүктесінің осьтік проекциялары деп атайды.  $M_x$  нүктесіне сәйкес санды  $x$  әрпімен белгілеп, оны  $M$  нүктесінің абсциссасы, ал  $M_y$  нүктесіне сәйкес санды  $y$  әрпімен белгілеп, оны  $M$  нүктесінің ординатасы деп атайды. 19-суреттен  $M$  нүктесінің абсциссасы 3,5-ке, ал ординатасы 4,5-ке тең екенін көреміз. Сонымен жазықтықтың кез келген нүктесіне ( $M$ -ге) екі сан ( $x$  және  $y$ ) сәйкес болады және, керісінше, кез келген екі санға жазықтықтың бір ғана нүктесі сәйкес болады. Бұл екі санды ( $x$  және  $y$ ) нүктенің тікбұрышты декарттық координаталары деп атайды. Нүктенің тікбұрышты декарттық координаталары оны белгілейтін әріптің оң жақ қатарына жақшалар ішіне жазылып көрсетіледі. Мысалы:  $M(3,5; 4,5)$ , мұндағы бірінші сан нүктенің абсциссасын, ал екінші сан оның ординатасын көрсетеді. Бас нүктенің координаталары нөлге тең болады:  $O(0; 0)$ .

Енді нүктені берілген координаталары бойынша салуды қарастыралық. Мысалы, берілген  $M(1; 2)$  және  $N(4; 3,5)$  нүктелерін қосатын кесіндіні салалық. Ол үшін өзара перпендикуляр және  $O$  нүктесінде қиылысатын екі түзу жүргізіп, олардың горизонталь орналасқанын абсциссалар, вертикаль орналасқанын ординаталар осьтері ретінде қарастырамыз (20-сурет). Осьтердің біреуін горизонталь және екіншісін вертикаль орналастыру міндетті емес. Бірақ инженерлік тәжірибеде көбіне оларды солай орналастырады. Одан кейін масштаб тағайындалады, яғни ұзындығы бір өлшемге тең кесінді қалап алынады.  $M$  нүктесінің абсциссасы 1-ге, ординатасы 2-ге тең. Сондықтан  $Ox$  осіне тандап алынған кесіндінің біреуін,

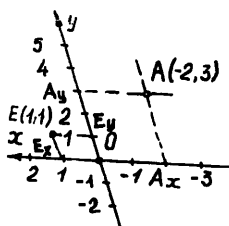
ал  $Oy$  осіне екеуін салып,  $M_x$  және  $M_y$  нүктелерін аламыз.  $M_x$  нүктесі арқылы ординаталар, ал  $M_y$  нүктесі арқылы абсциссалар осіне параллель түзулер жүргізелік. Сонда олар  $M$  нүктесінде қиылысады. Осылайша  $N$  нүктесін салып, оны  $M$  нүктесімен қосамыз.  $N_x$ ,  $N_y$  — нүктелері  $N$  нүктесінің оське проекциялары:  $|ON_x| = 4$ ;  $|ON_y| = 3,5$ .

Координаталар осьтері сызба жазықтығын төрт бөлікке бөледі. Бұл бөліктерді ширектер деп атайды. Бірінші ширек абсциссалар осінен жоғарғы, ординаталар осінің сол жағында орналасқан сызба жазықтығының бөлігімен анықталады. Екінші ширек абсциссалар осінен төмен, ординаталар осінің сол жағында орналасқан сызба жазықтығының бөлігі болады. Қалған екі ширек ординаталар осінің оң жағында жатады. Үшінші ширек абсциссалар осінен төмен, төртінші ширек одан жоғары орналасады. 20-суретте ширектердің нөмірлері дөңгелектің ішінде араб цифрларымен жазылып көрсетілген. Ширектер бас нүктеге қарағанда сағат тілі қозғалысына қарсы бағытта нөмірленген. Бірінші ширектегі нүктелердің координаталары оң мәнді, ал үшінші ширектегі нүктелердің координаталары теріс мәнді болады. Екінші ширектегі нүктелердің абсциссалары оң, ординаталары теріс мәнді болса, төртінші ширектегі нүкте координаталарының мәні бұған керісінше, яғни абсциссасы теріс, ординатасы оң болады.

$ABCD$  параллелограмын салу керек (21-сурет). Оның үш төбесінің координаталары берілген:  $A(-1; 3)$ ,  $B(5; -2)$ ,  $C(-3; -4)$ . Тікбұрышты координаталар системасын алып, берілген нүктелерді координаталары бойынша саламыз. Сызбадан  $A$  нүктесі төртінші,  $B$  нүктесі екінші және  $C$  нүктесі үшінші ширекте орналасқанын көріп



21-сурет.

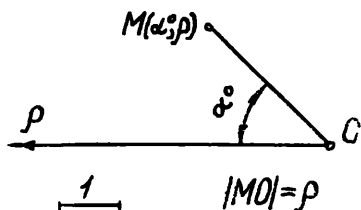


22-сурет.

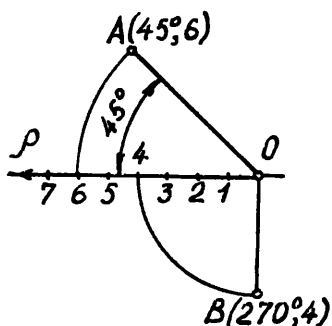
отырмаз. Параллелограмның төртінші төбесі  $D$  салу нәтижесінде табылады, ол үшін параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары параллель төртбұрыш екенін ескереміз.  $A$  нүктесі арқылы  $BC$  қабырғасына параллель және  $C$  нүктесі арқылы  $AB$  қабырғасына параллель етіп жүргізілген түзулер  $D$  нүктесінде қиылысады. Салынған параллелограмның төртінші төбесінің координаталарын анықтауға болады. Ол үшін  $D$  нүктесінен абсциссалар, ординаталар осьтеріне перпендикуляр түзулер жүргізіп, оның оське проекциялары болатын  $D_x$  және  $D_y$  нүктелерін тауып алу керек. Сонда  $DD_y$  кесіндісінің ұзындығы  $D$  нүктесінің абсциссасын, ал  $DD_x$  кесіндісінің ұзындығы оның ординатасын анықтайды:  $|DD_y| = -9$ ;  $|DD_x| = 1$ . Сонда  $D(-9; 1)$  нүктесі де төртінші ширекте жатады екен.

Осьтердің арасындағы бұрышты  $90^\circ$ -тан өзге етіп алуға да болады. Сол сияқты  $Ox$  және  $Oy$  осьтері бағытындағы масштабтарды де өзара тең болмайтындай етіп алуға болады. Мысалы,  $Ox$  осінің  $E_x$  нүктесін және  $Oy$  осінің  $E_y$  нүктесін белгілеп аламыз. Сонда  $e_x = |OE_x|$  және  $e_y = |OE_y|$  осьтерге сәйкес масштабтар болсын (22-сурет).  $E_x$  нүктесі арқылы  $Oy$  осіне,  $E_y$  нүктесі арқылы  $Ox$  осіне параллель түзулер жүргізіп, олардың қиылысу нүктесін ( $E$ ) белгілейміз. Табылған  $E$  нүктесін *бірлік нүкте* деп те атайды, өйткені оның координаталары бірге тең. Сонда  $Ox$  пен  $Oy$  осьтері және бірлік нүкте  $E$  белгілі бір *координаталар системасын* анықтайды. Оны *аффиндік координаталар системасы* дейді. Аффиндік координаталарымен берілген  $A(-2; 3)$  нүктесінің кескінін салу үшін  $Ox$  осіне оның бас нүктесі  $O$ -дан бастап оңға қарай  $e_x$ -ке тең екі кесінді салып,  $A$  нүктесінің оське проекциясы болатын  $A_x$  нүктесін және  $Oy$  осіне бас нүктеден бастап жоғары қарай  $e_y$ -ке тең үш кесінді салып,  $A$  нүктесінің екінші оське проекциясы болатын  $A_y$  нүктесін аламыз. Алынған нүктелерді бастыра сәйкес осьтерге параллель етіп жүргізілген түзулер  $A$  нүктесінде қиылысады.

Жазықтықтағы тағы да бір координаталар системасы туралы айта кетелік.  $O$  нүктесінен басталатын сәуле жүргізілетін (23-сурет) және ұзындық өлшем бірлігін тағайындаймыз. Сәулені  $\rho$  әрпімен белгілеп, *полярлық ось* деп,  $O$  нүктесін *полюс* деп атайды. Кез келген  $M$  нүктесінің орны екі сан арқылы анықталады: оның полюстен қашықтығы — нүктенің *полярлық радиусы* ( $\rho = |OM|$ )



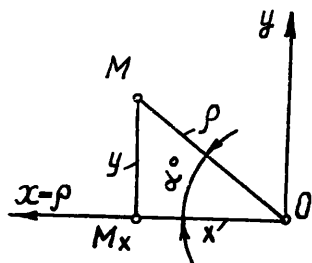
23-сурет.



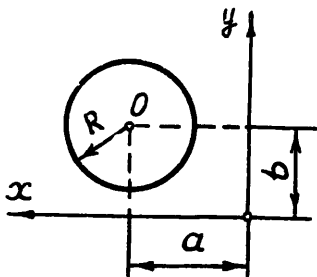
24-сурет.

және полярлық радиусты анықтайтын кесінді мен полярлық ось аралығындағы бұрыш — нүктенің *полярлық бұрышы* ( $\alpha^\circ = (\widehat{OM})$ ,  $\rho$ ). Полярлық бұрышты сағат тілі қозғалысы бағытында есептейтін боламыз. Пайда болған системаны *полярлық координаталар системасы* деп атайды. Нүктелерді берілген полярлық координаталары бойынша салу 24-суретте көрсетілген. Онда полярлық радиусы 6-ға, полярлық бұрышы  $45^\circ$ -қа тең  $A$  нүктесі және полярлық радиусы 4-ке, полярлық бұрышы  $270^\circ$ -қа тең  $B$  нүктесі кескінделген.

Нүктенің тікбұрышты декарттық координаталары мен полярлық координаталары арасындағы байланысты оңай табуға болады. Ол үшін абсциссалар осі мен полярлық ось бірігеді деп қарастырған қолайлы (25-сурет). Қалауымызша алынған  $M$  нүктесінен абсциссалар осіне түсірілген перпендикулярдың табаны —  $M_x$  нүктесі болсын. Бас нүктемен полюс біріккен болса, онда  $MM_x$   $O$  тікбұрышты үшбұрышын қарастырудың нәтижесінде мына өрнектерді аламыз:  $x = \rho \cos \alpha^\circ$ ,  $y = \rho \sin \alpha^\circ$ ; керісінше



25-сурет.



26-сурет.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha^\circ = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Келтірілген өрнектердегі  $x = |OM_x|$ ,  $y = |MM_x|$ ,  
 $\rho = |MO|$ ;  $\alpha^\circ = \angle MOM_x$ .

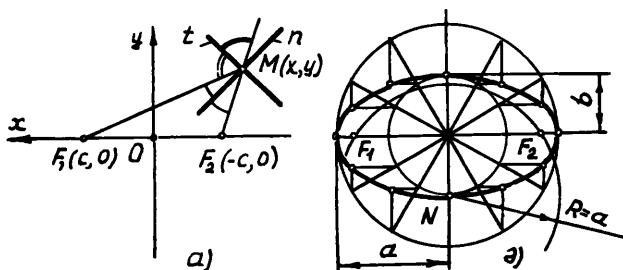
## 1.6. ЖАЗЫҚ ҚИСЫҚТАР ТУРАЛЫ АЛҒАШҚЫ ҰҒЫМДАР

Қисық-сызықтарды, қысқаша қисықтарды, белгілі бір заңдылықпен орналасқан жазықтық нүктелерінің геометриялық орны ретінде қарастырамыз. Басқаша айтқанда, қисық деп берілген теңдеуді қанағаттандыратын нүктелер жиынын атайды. Бізге декарттық координаталар системасы  $xOy$  берілсе, онда  $y=f(x)$  теңдеуін қанағаттандыратын нүктелер қайсыбір қисықты анықтайды.

Түзуден кейінгі қарапайым сызық — ол шеңбер. Шеңбердің теңдеуі  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ , мұндағы  $a, b$  — шеңбер центрінің координаттары;  $R$  — шеңбердің радиусы (26-сурет). *Шеңбер* деп берілген центрі деп аталатын нүктеден бірдей қашықтықтағы нүктелердің геометриялық орнын айтады.

*Эллипс* деп жазықтықтың фокустар деп аталатын екі нүктесінен қашықтықтарының қосындысы тұрақты шама болатын сол жазықтықтағы нүктелер жиынын айтады.  $F_1(c; 0)$  және  $F_2(-c; 0)$  — эллипстің фокустары екен делік.  $M(x; y)$  — эллипстің кез келген нүктесі,  $2a$  — берілген тұрақты шама болса, эллипстің жоғарыда келтірілген анықтамасына сүйеніп, мына теңдікті жазуға болады:  $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$ . Осы теңдікті түрлендіру нәтижесінде эллипстің теңдеуін аламыз (27, а-сурет):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



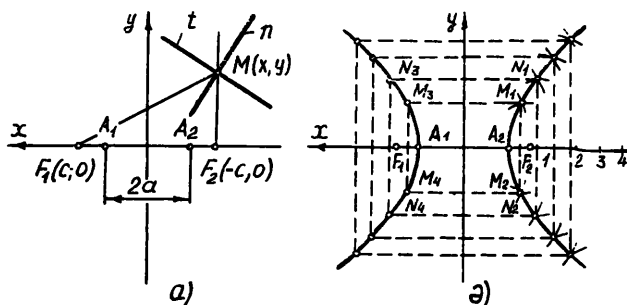
27-сурет.

Эллипстің теңдеуіндегі  $b^2 = a^2 - c^2$  болады, ал  $2a$  — эллипстің үлкен осі және  $2b$  — эллипстің кіші осі деп аталады. Эллипстің осьтері өзара перпендикуляр орналасады (27, ә-сурет). Осьтері белгілі эллипсті салу оңай. Ол үшін бір центрден диаметрлері эллипстің осьтеріне тең екі шеңбер жүргізеді. Олардың сыртқысын тең бөліктерге (мысалы 12 бөлікке) бөледі. Бөліну нүктелерін центрмен қоссақ, ішкі шеңбер де тең бөліктерге бөлінеді. Сыртқы шеңбердің бөліну нүктелері арқылы үлкен оське перпендикуляр, ал ішкі шеңбердің бөліну нүктелері арқылы үлкен оське параллель етіп жүргізілген сәйкес түзулердің қиылысу нүктелері эллипстің бойында жатады. Осылайша табылған нүктелерді лекалоның көмегімен жатық сызықпен қосады. Эллипстің фокустарын салу үшін кіші осьтің бір ұшын (мысалы 27, ә-суреттегі  $N$  нүктесін) центр етіп алып, радиусы үлкен осьтің жартысына тең шеңбер жүргізеді. Осы шеңбер үлкен осьті эллипс фокустары болатын  $F_1$  және  $F_2$  нүктелерінде қияды.

**Гипербола** деп жазықтықтың фокустар деп аталатын екі нүктесінен қашықтықтарының айырымы тұрақты шама болатын сол жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орнын айтады.  $F_1(c; 0)$  және  $F_2(-c; 0)$  нүктелері гиперболаның фокустары болсын (28, а-сурет).  $M(x; y)$  гиперболаның кез келген нүктесі болса, онда осы нүктеден  $F_1$  және  $F_2$  нүктелеріне дейінгі ара қашықтықтардың айырымы тұрақты шама болуы қажет. Егер бұл тұрақты шаманы  $2a$  деп белгілесек, онда

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (*)$$

Мұндағы  $a < c$  болуы міндетті. Абсциссалар осінің теңдікті қанағаттандыратын екі нүктесін оңай табуға болады. Олар  $A_1$  және  $A_2$  нүктелері екен делік. Сонда



23-сурет.

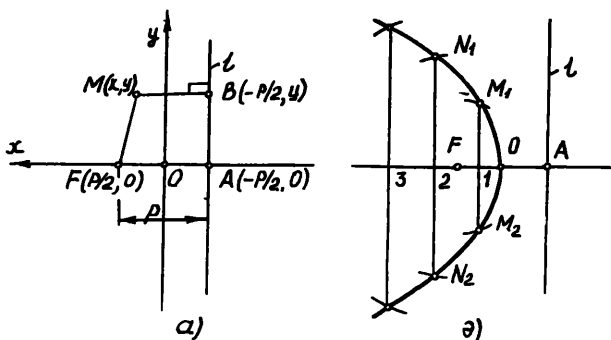
$|A_1 A_2| = 2a$  болады. Осы нүктелерді *гиперболаның төбелері* деп атайды. (\*) өрнегінен гиперболаның екі бөліктен тұратынын аңғару қиын емес: тұрақты шаманың (теңдіктің оң жағындағы сан) алдындағы оң таңбаға гиперболаның бір бөлігі сәйкес болса, теріс таңбаға оның екінші бөлігі сәйкес болады. (\*) өрнегін түрлендіре отырып, гиперболаның теңдеуін аламыз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гипербола теңдеуіндегі  $b^2 = c^2 - a^2$  болады. Фокустарының аралықтары  $2c$  және төбелерінің аралықтары  $2a$  берілсе, гиперболаны салу оңай (28, ә-сурет). Ол үшін абсциссалар осінің 1, 2, 3, ... нүктелерін белгілейміз.  $F_1$  центрінен радиусы  $|A_1 1|$  болатын шеңбер, ал  $F_2$  центрінен радиусы  $|A_2 1|$  болатын шеңбер жүргізсек, олар екі нүктеде —  $M_1$  және  $M_2$  нүктелерінде қиылысады. Табылған нүктелер гиперболаның бойында жатады, өйткені  $|F_1 M_1| - |F_2 M_1| = |F_1 M_2| - |F_2 M_2| = |A_1 1| - |A_2 1| = 2a$ .

Центрлері  $F_1$  нүктесі радиустары  $|A_1 2|$ ,  $|A_1 3|$ , ... болатын шеңберлер, оларға сәйкес центрлері  $F_2$  нүктесі радиустары  $|A_2 2|$ ,  $|A_2 3|$ , ... болатын шеңберлермен қиылысу нүктелерін тауып, табылған нүктелерді бастыра қисық жүргізеді. Сонда гиперболаның бір тарамы алынады. Табылған нүктелерге  $Oy$  осіне қарағанда симметриялы болатын  $M_3$ ,  $M_4$ ,  $N_3$ ,  $N_4$ , ... нүктелері гиперболаның екінші тарамын анықтайды. Эллипс пен гиперболаға жанама жүргізу оңай. Ол үшін қисықтың жанама тұрғызылатын нүктесін оның фокустарымен қосу қажет. Сонда пайда болған сыртқы бұрыштың биссектрисасы ізделініп отырған жанаманы береді. Жанамаға жанасу нүктесі арқылы перпендикуляр етіп жүргізілген түзуді *қисықтың нормалі* деп атайды. Нормаль жоғарыда алынған ішкі бұрыштың биссектрисасы болатынына көз жеткізу қиын емес. Жанаманы  $t$  әрпімен, ал нормальді  $n$  әрпімен белгілейді (27, а және 28, а-суреттер).

*Парабола* деп берілген түзу мен нүктеден ара қашықтықтары тең жазықтықтағы (нүкте мен түзу анықтайтын) нүктелердің геометриялық орнын айтады. Берілген түзуді ( $l$ ) *параболаның директрисасы* деп атаса, берілген нүктені ( $F$ ) оның *фокусы* деп атайды (29, а-сурет). Фокус пен директрисаның ара қашықтығын  $p$  әрпімен белгілелік. Абсциссалар осін фокус арқылы директрисаға перпендикуляр етіп жүргізсек, онда олар  $A$  нүктесінде қиылысады.  $AF$  кесіндісінің ортасы арқылы директриса-



29-сурет.

ға параллель етіп  $y$  осін жүргізеді.  $M(x; y)$  парабола-ның кез келген нүктесі болса, онда  $|FM| = |BM|$ ; мұндағы  $B$  нүктесі  $M$  нүктесінен директрисаға түсірілген перпендикулярдың табаны. Сонда

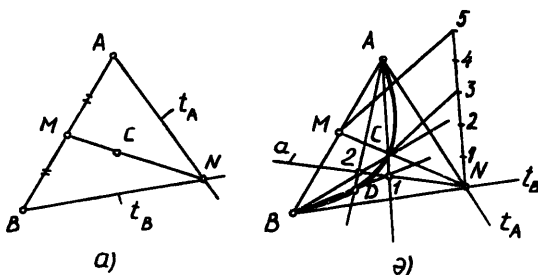
$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Осы теңдікті түрлендірудің нәтижесінде параболаның теңдеуі алынады:

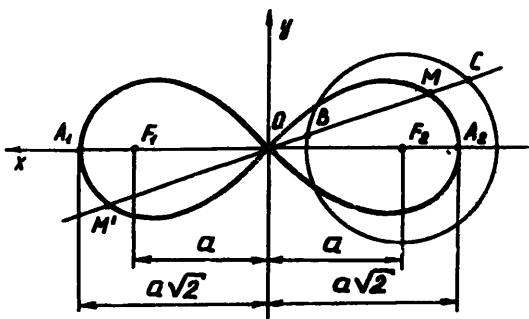
$$y^2 = 2px.$$

Фокусы  $F$  және директрисасы  $l$  берілген параболаны былай салады.  $F$  нүктесінен  $l$  түзуіне перпендикуляр түсіреді. Перпендикулярдың табаны ( $A$ ) мен фокусты ( $F$ ) қосатын кесіндінің дәл ортасы —  $O$  нүктесі — *параболаның төбесі* деп аталады (29, ә-сурет).  $AO$  түзуі бойынан 1, 2, 3, ... нүктелерін алып, директрисаға параллель түзулер жүргізіледі. Осы түзулердің центрлері  $F$  нүктесінде, радиустары  $|A1|$ ,  $|A2|$ ,  $|A3|$ , ... болатын шеңберлермен қиылысу нүктелері  $M_1, M_2, N_1, N_2, \dots$  параболаның бойында жатады. Табылған нүктелерді бастыра жүргізілген қисық параболаны анықтайды.

Жоғарыда аталған сызықтардың теңдеулеріндегі белгісіздердің дәреже көрсеткіштері екіден аспайды. Сондықтан шеңбер, эллипс, гиперболa және парабола (оларға ортақ атпен) *екінші ретті қисықтар* деп аталады. Екінші ретті қисықтарды конустың жазықтықпен қиылысу сызықтары ретінде де анықтауға болады. Соңғы айтылғанды ескеріп екінші ретті қисықтарды *конустық қималар* деп те атайды. Конустық қималар деудің орнына, көбіне қысқаша, *коника* дейді. Кониканы салу үшін



оның бес нүктесі белгілі болуы керек. Жалпы алғанда екінші ретті қисықты бес шарт анықтайды. Өмірде жиі кездесетін бір жағдайды қарастыралық. Онда коника өзінің екі нүктесі және осы нүктелерде оған жүргізілген жанамалары арқылы беріледі. Кониканың  $A$  және  $B$  нүктелері, осы нүктелердегі жанамалары  $t_A$  және  $t_B$  берілген болсын (30-сурет). Сонда бес шарттың төртеуі тағайындалған, ал қалған бесінші шартты түрліше тағайындауға болады. Жанамалар  $N$  нүктесінде қиылысады.  $AB$  кесіндісінің ортасын  $M$  деп белгілесек ( $|AM| = |MB|$ ), онда  $MN$  кесіндісі  $ABN$  үшбұрышының медианасы болады. Коника  $MN$  түзуін  $C$  нүктесінде қиып өтеді делік. Сонда  $C$  нүктесінің орнын былайша анықтауға болады:  $f = \frac{|MC|}{|MN|}$ . Осы қатынасты инженерлік немесе проективтік дискриминант деп атайды. Сонда бесінші шарт ретінде инженерлік дискриминантты алуға болады. Оның мәні 0-ден 1-ге дейінгі аралықта өзгереді ( $0 \leq f \leq 1$ ). Егер  $C=M$  болса, онда  $f=0$  болады және коника қос түзу  $AB$ -ға айналады. Егер  $C=N$  болса, онда  $f=1$  болады және коника  $N$  нүктесінде қиылысатын екі түзуге ( $t_A$  мен  $t_B$ ) ажырайды. Парабола үшін  $f=0,5$ , эллипс үшін  $f < 0,5$  және гиперболола үшін  $f > 0,5$  болады.



31-сурет.

жүргізсек, ол түзу  $MN$  кесіндісін  $C$  нүктесінде қияды. Енді кониканың үш нүктесі белгілі болды. Кониканың кез келген  $D$  нүктесін салу үшін  $AB$  кесіндісімен қиылысатын және  $N$  нүктесі арқылы өтетін  $a$  түзуін қалауымызша жүргіземіз. Сонда  $a \cap (AC) = 1$  және  $a \cap (BC) = 2$ , яғни  $a$  түзуі  $AC$  түзуін 1 нүктесінде және  $BC$  түзуін 2 нүктесінде қияды. Ал  $A_2$  және  $B_1$  түзулері кониканың  $D$  нүктесінде қиылысады. Сонда осы әдісті қайталай отырып, кониканың көптеген нүктелерін табуға болады. Табылған нүктелерді бастыра жүргізілген сызық іздеп отырған коникамызды анықтайды. 30, ә-суреттегі коника эллипс болады (неге?).

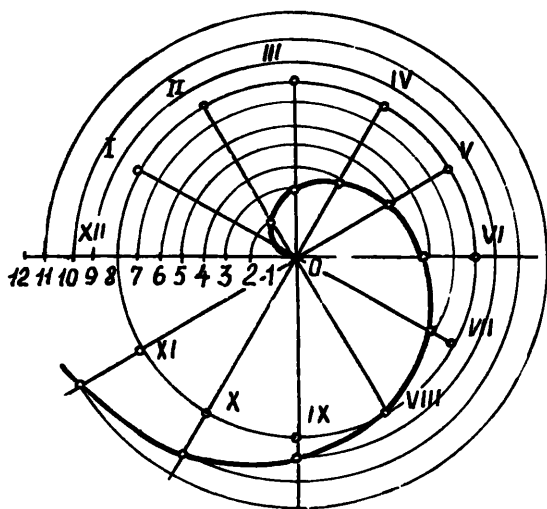
Төртінші ретті қисықтың мысалы ретінде Бернулли лемнискатасын қарастыралық (31-сурет). *Бернулли лемнискатасы* деп *фокустары* деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтықтарының көбейтіндісі тұрақты шама — фокустарының ара қашықтығы жартысының квадратына тең болатын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орнын айтады.  $F_1(a; 0)$  және  $F_2(-a; 0)$  нүктелері лемнискатаның фокустары, ал  $M(x, y)$  сол лемнискатаның кез келген нүктесі болсын. Сонда

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = a^2.$$

Түрлендіргеннен кейін лемнискатаның теңдеуін аламыз:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

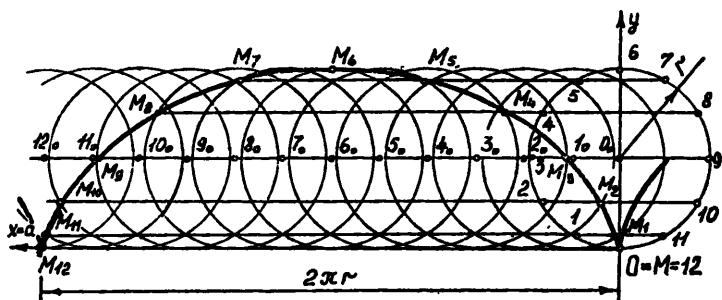
Осы теңдіктен  $y=0$  болғандағы  $x$ -тің мәндерін аламыз:  $x_{1,2}=0$ ,  $x_3=a\sqrt{2}$  және  $x_4=-a\sqrt{2}$ . Басқаша айтқанда лемниската бас нүкте арқылы және  $A_1(a\sqrt{2}; 0)$  мен  $A_2(-a\sqrt{2}; 0)$  нүктелері арқылы өтеді. Соңғы  $A_1$  және



32-сурет.

$A_2$  нүктелерін *лемнискатаның төбелері* деп атайды. Центрі  $F_2$  (немесе  $F_1$ ) нүктесі, радиусы  $a/\sqrt{2}$  болатын шеңбер салалық. Ұзындығы  $a/\sqrt{2}$  болатын кесіндіні гипотенузасы  $a$ -ға тең теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыштың катеті ретіне анықтауға болады. Бас нүкте  $O$ -ны бастыра жүргізілген түзу шеңберді  $B$  және  $C$  нүктелерінде қияды. Осы түзудің бойына  $O$  нүктесінен бастап  $|BC|$ -ға тең кесінді салсақ, онда  $M$  және  $M'$  нүктелерін аламыз (31-сурет). Табылған екі нүкте лемнискатаның бойында жатады. Тұрғызуды қайталай отырып, лемнискатаны толық анықтауға жеткілікті мөлшерде нүктелер табады да, оларды бір-бірімен лекалоны пайдаланып жатық қисықпен қосады.

Қисықтарды кейде үздіксіз қозғалып отыратын нүктенің траекториясы ретінде қарастырған түсінікті болады. Мысалға *Архимед спиралін* келтірелік. Ол жазықтықта бірқалыпты айналатын радиустың бойымен бірқалыпты қозғалатын нүктенің траекториясы болып табылады (32-сурет). Архимед спиралінің теңдеуін полярлық координаталар системасында көрсету оңай:  $\rho = a \cdot \varphi$ . Мұндағы  $\rho$  — Архимед спиралі бойында орналасқан нүктенің полярлық радиусы;  $\varphi$  — сол нүктенің полярлық бұрышы;  $a$  — спиральдің қадамы. Радиусы спиральдің қадамына тең шеңбер жүргізіп, оны тең бөліктерге (мы-



33-сурет.

салы 12 бөлікке) бөледі. Шеңбердің радиусында сонша тең бөліктерге бөледі (32-суретте шеңбердің бөліну нүктелері римше, ал радиустың бөліну нүктелері арабша белгіленген). Шеңбердің бөліну нүктелерін центрмен қосамыз, ал радиустың бөліну нүктелері арқылы шеңберлер жүргіземіз. Сәйкес сызықтардың қиылысу нүктелерін бастыра жүргізілген қисық Архимед спиралін береді.

Радиусы  $r$  болатын дөңгелек  $a$  түзуінің бойымен сырғанамай домалайтын болсын (33-сурет). Сонда дөңгелекті қоршайтын шеңбердің  $M$  нүктесі сызатын траекторияны *циклоида* деп атайды. Домалайтын дөңгелек шеңберін *жасаушы* деп, ал түзу сызық  $a$ -ны *бағыттаушы* дейді. Бастапқы жағдайда  $M$  нүктесі координаталар системасының бас нүктесімен бірігеді, ал бағыттаушы түзу  $a$  абсциссалар осімен бірігеді деп қарастыралық. Сонда циклоиданың тендеуі мына түрде алынады:

$$x = r \cdot \arccos \frac{r-y}{r} - \sqrt{y(2r-y)}.$$

Циклоиданы салу үшін тікбұрышты координаталар системасын алып, центрі  $Oy$  осінде жататын және радиусы  $r$ -ге тең шеңбер саламыз. Бұл шеңбер бас нүкте арқылы өтеді. Енді осы шеңберді тең бөліктерге (мысалға тең 12 бөлікке) бөлеміз. Жасаушы шеңбердің центрі арқылы абсциссалар осіне параллель түзу салып, оның бойына шеңбердің ұзындығын ( $c=2\pi r$ ) өлшеп саламыз. Алынған кесіндіні де тең 12 бөлікке бөлеміз. Жасаушы шеңбердің бөліну нүктелерін бас нүктеден бастап сағат тілі қозғалысы бағытында нөмірлелік: 1, 2, ..., 12. Кесіндінің бөліну нүктелерін  $0_0, 1_0, 2_0, \dots, 12_0$  деп белгілелік. Мұндағы  $0_0$  жасаушы дөңгелектің бастапқы жағдайдағы центрі. Центрлері  $1_0, 2_0, \dots, 12_0$  болатын, радиуста-

ры  $r$ -ге тең шеңберлер жүргізсек, олар бастапқы шеңбердің бөліну нүктелері арқылы абсциссалар осіне параллель жүргізілген сәйкес түзулермен  $M_1, M_2, \dots, M_{12}$  нүктелерінде қиылысады. Сонда табылған  $M_1, M_2, \dots, M_{12}$  нүктелерін қосатын қисық циклоиданы береді.

Бағыттаушы  $a$  түзуін радиусы  $R$ -ге тең шеңбермен алмастыралық. Сонда бағыттаушы шеңберді сырттай сырғанамай домалайтын шеңбердің нүктесі сызатын траекторияны *эпициклоида* деп атайды.  $R=r$  болған жағдайдағы эпициклоиданы *кардиоида* деп атайды. Бағыттаушы шеңберді іштей сырғанамай домалайтын жасаушы шеңбердің нүктесі сызатын траекторияны *гипоциклоида* деп атайды.  $R=4r$  болған жағдайдағы гипоциклоиданы *астроида* деп атайды.

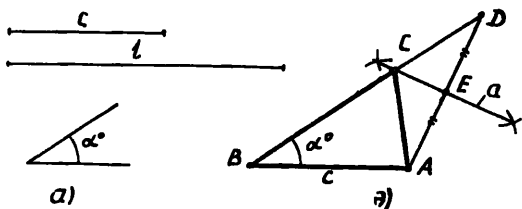
### 1.7. САЛУ ЕСЕПТЕРІН ШЕШУ МЕТОДИКАСЫ

Салу есептерін әр түрлі әдістерді қолданып шешуге болатыны түсінікті. Шешу тәсілдеріне байланыссыз геометриялық салудың негізгі бөліктерін қарастыралық. Алдымен есептің берілген шарттарына талдау жасап, олардың арасындағы байланыстарды анықтап алу қажет. Бұнда есеп шешілді деп қарастыру тәсілі кең түрде қолданылады. Сөйтіп, берілген есепті шешу алгоритмі тағайындалады. Салу есептерін шешудің қарастырылған бөлігін *анализ* деп атайтын боламыз. Сонымен есепті шешу анализден басталады.

Келесі бөлім — анализдің нәтижесінде алынған алгоритмді пайдаланып — *есепті салу*. Салуда негізінен сызғыш пен циркуль пайдаланылады. Сызғыштың көмегімен түзу сызықты, ал циркульдің көмегімен шеңберді салуға болады. Сондықтан түзу мен шеңбер *қарапайым геометриялық сызықтар* деп аталады. Салу есебін шешу нәтижесінде геометриялық фигура алынады.

Келесі бөлімде алынған геометриялық фигураның есептің берілген шарттарын қанағаттандыратынын *дәлелдеу* керек.

Геометриялық салу есептерін шешудің соңғы бөлігінде есептің шешулері және шарттары *зерттеледі*. Есептің қанша шешуі болады және олар қалай табылады? Есептің берілген шарттарына өзгерістер енгізсек, онда оның шешулері қалай және қандай заңдылықтармен өзгереді? Міне осындай сұрақтарға төртінші бөлімде жауап берілуі қажет.



34-сурет.

Сонымен, салу есептерінің шешуін табуда *анализ, салу, дәлелдеу* және *зерттеу* деп аталатын төрт бөлім қарастырылуы қажет. Енді мысалдар келтірелік.

**1 - е с е п.** Үшбұрыштың бір қабырғасының ұзындығы  $c$ , оған іргелес бұрышы  $\alpha^\circ$  және қалған екі қабырғасының ұзындықтарының қосындысы  $l$ . Осы үшбұрышты салу керек (34, а-сурет).

**А н а л и з.** Есеп шешілді, яғни  $ABC$  үшбұрышы іздеп отырған үшбұрыш екен делік (34, ә-сурет).  $ABC$  үшбұрышының  $BC$  қабырғасын  $C$  төбесінен ары қарай созып, оның созындысына ұзындығы  $AC$  кесіндісінің ұзындығына тең  $CD$  кесіндісін салалық. Сонда  $B$ ,  $C$  және  $D$  нүктелері бір түзудің бойында жатады және  $|CD| = |AC|$ . Енді  $D$  нүктесін  $A$  нүктесімен қоссақ,  $ABD$  және  $ACD$  үшбұрыштарын аламыз. Соңғы  $ACD$  үшбұрышы теңбүйірлі үшбұрыш, өйткені оның  $AC$  мен  $CD$  қабырғалары өзара тең. Олай болса, оның  $C$  төбесінен  $AD$  табанына түсірілген перпендикуляр түзу  $a$  осы  $AD$  кесіндісінің дәл ортасы болатын  $E$  нүктесі арқылы өтеді. Енді есепті шешу алгоритмін көрсету қиын емес. Ол үшін қабырғалары  $c$  және  $l$  болатын, ал олардың арасындағы бұрышы  $\alpha^\circ$  болатын үшбұрыш  $ABD$  салынады. Оның қабырғасын ( $AD$  кесіндісін) тең екі бөлікке бөлетін  $E$  нүктесі табылады. Осы  $E$  нүктесі арқылы  $AD$  түзуіне перпендикуляр  $a$  түзуі жүргізіледі. Осы  $a$  түзуі  $BD$  кесіндісін  $C$  нүктесінде қияды. Табылған  $C$  нүктесін  $A$  нүктесімен қосады.

**С а л у.** Қалауымызша түзу жүргізіп, оған ұзындығы  $c$ -ға тең  $AB$  кесіндісін саламыз.  $B$  нүктесі арқылы  $AB$  түзуіне  $\alpha^\circ$ -ге тең бұрышпен көлбейтін түзу жүргіземіз де, оған  $B$  нүктесінен бастап ұзындығы  $l$ -ге тең кесінді саламыз. Сонда алынған  $D$  нүктесі бір бұрышы  $\alpha^\circ$  болатын  $ABD$  үшбұрышының төбесі болады. Енді  $AD$  кесіндісінің ортаңғы перпендикуляры болатын  $a$  түзуін салып, оның  $BD$  кесіндісімен қиылысу нүктесін аламыз. Осы табыл-

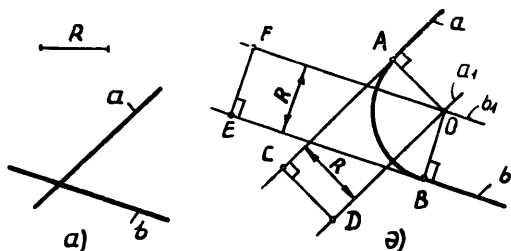
ған  $C$  нүктесін  $A$  нүктесімен қосып, іздеп отырған  $ABC$  үшбұрышын салуды аяқтаймыз.

**Дәлелдеу.** Табылған  $ABC$  үшбұрышының бір қабырғасы, яғни  $AB$  қабырғасы  $c$ -ға тең, ал оған іргелес бұрышы  $\angle ABC = \alpha^\circ$ . Салынған  $a$  түзуі  $AD$  кесіндісінің ортаңғы перпендикулярлары болғандықтан, оның бойындағы  $C$  нүктесі  $A$  және  $D$  нүктелерінен бірдей қашықтықта орналасады, яғни  $|AC| = |DC|$ . Салуымыз бойынша  $|BD| = l = |BC| + |CD| = |BC| + |AC|$ . Сонда  $ABC$  үшбұрышының қалған екі қабырғаларының ұзындықтарының қосындысы берілген  $l$  кесіндісіне тең. Сонымен,  $ABC$  үшбұрышы есептің берілген шарттарын түгелдей қанағаттандырады.

**Зерттеу.** Егер  $l \leq c$  болса, есептің шешуі болмайды; өйткені үшбұрыштың кез келген екі қабырғасының ұзындықтарының қосындысы оның үшінші қабырғасының ұзындығынан үлкен болады. Сондықтан  $l > c$  болады. Осы жағдайда есептің шешуі болатынын және оның тек біреу екенін көрсетелік.  $ABD$  үшбұрышының  $AD$  қабырғасымен қиылысатын түзу  $a$ , оның тағы бір қабырғасымен қиылысуы тиіс. Егер  $a$  түзуі үшбұрыштың  $AB$  қабырғасымен  $F$  нүктесінде қиылысатын болса, онда  $|AB| = |AF| + |BF| = |DF| + |BF| > |BD| = l$  болар еді. Бірақ  $l > c$ ,  $|BD| > |AB|$ . Олай болса,  $a$  түзуі  $ABD$  үшбұрышының  $BD$  қабырғасымен қиылысады, яғни есептің шешуі болады. Түзу мен түзудің кесіндісі тек бір нүктеде қиылысуы мүмкін; олай болса, есептің шешуі де тек біреу ғана болады.

**2-есеп.** Берілген екі түзумен жанасатын және радиусы  $R$ -ға тең шеңбер салу керек (35, а-сурет).

**Анализ.** Берілген түзулерді  $a$  және  $b$  әріптерімен, ал іздеп отырған шеңберіміздің центрін  $O$  әрпімен белгілеміз. Сонда  $O$  нүктесін  $a$  түзуіне параллель және одан  $R$ -ға тең қашықтықта орналасқан  $a_1$  түзуі бойынан іздеуіміз керек. Сондай-ақ  $O$  нүктесін  $b$  түзуіне параллель



35-сурет.

және одан  $R$ -ға тең қашықтықта орналасқан  $b_1$  түзуі бойынан іздеуіміз керек. Олай болса,  $O$  нүктесі  $a_1$  және  $b_1$  түзулерінің қиылысу нүктесі ретінде анықталады.

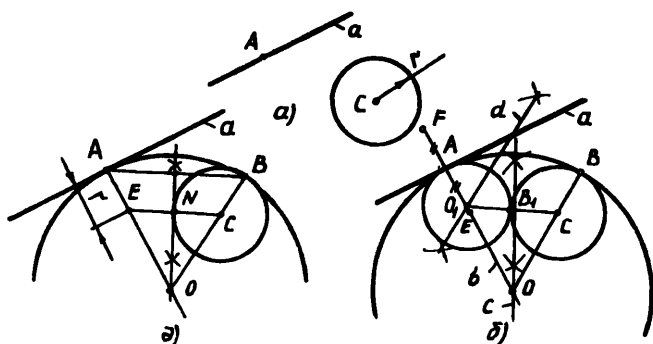
**С а л у.** Берілген  $a$  түзуіне параллель және одан қашықтығы  $R$ -ға тең  $a_1$  түзуін саламыз. Ол үшін қалауымызша  $C \in a$  нүктесін алып, осы  $C$  нүктесі арқылы  $a$  түзуіне перпендикуляр тұрғызылады. Тұрғызылған перпендикулярға  $R$ -ға тең кесінді салып,  $D$  нүктесін аламыз ( $|CD| = R$ ). Енді  $D$  нүктесі арқылы  $a$  түзуіне параллель  $a_1$  түзуін жүргіземіз. Берілген  $b$  түзуіне параллель және одан қашықтығы  $R$ -ға тең  $b_1$  түзуін саламыз. Салынған  $a_1$  және  $b_1$  түзулерінің қиылысу нүктесінен, яғни  $O$  нүктесінен, берілген түзулерге перпендикуляр түсіріп  $A$ ,  $B$  нүктелерін аламыз. Осыдан кейін центрі  $O$  нүктесі болатын және  $A$  мен  $B$  нүктелері арқылы өтетін шеңбер саламыз.

**Д ә л е л д е у.** 35, ә-суреттегі шеңбердің радиусы  $R$ -ға тең және ол  $a$  түзуімен  $A$  нүктесінде, ал  $b$  түзуімен  $B$  нүктесінде жанасады.

**З е р т т е у.** Берілген түзуге параллель және одан берілген қашықтықта орналасатын және онымен бір жазықтықта жататын екі түзу жүргізуге болады. Олай болса,  $a$  түзуінен  $R$ -ға тең қашықтықтағы  $a_1$  және  $a_2$  параллель екі түзу  $b$  түзуінен  $R$ -ға тең қашықтықтағы  $b_1$  және  $b_2$  параллель екі түзумен төрт нүктеде қиылысады. Сондықтан берілген  $a$  және  $b$  түзулері қиылысатын болса, есептің төрт шешуі болады. Егер  $a \parallel b$  және олардың ара қашықтығы  $2R$ -ға тең болса ( $|a, b| = 2R$ ), онда есептің шексіз көп шешуі болады. Берілген түзулерден  $R$ -ға тең қашықтықта орналасқан және  $a$  және  $b$  түзулері жазықтығында жататын  $c$  түзуін жүргізуге болады. Сонда  $c$  түзуінің әрбір нүктесіне  $a$  мен  $b$  түзулерімен жанасатын шеңбер сәйкес болады. Ондай шеңберлердің саны  $\infty^1$ -ке тең. Ал егер  $a \parallel b$  және олардың ара қашықтығы  $2R$ -ға тең болмаса, онда есептің шешуі болмайды.

**3 - е с е п.** Берілген  $a$  түзуімен оның  $A$  нүктесінде жанасатын және берілген радиусы  $r$ -ға тең шеңбермен жанасатын шеңберді салу керек (36, а-сурет).

**А н а л и з.** Есеп шешілді деп жорылық. Табылған шеңбер берілген шеңбермен  $B$  нүктесінде жанасады және оның центрі  $O$  нүктесі екен делік (36, ә-сурет). Олай болса,  $AO$  және  $BO$  кесінділері табылған шеңбердің радиустары болғандықтан өзара тең. Сондықтан  $AOB$  үшбұрышы — теңбүйірлі үшбұрыш. Берілген шеңбердің центрі ( $C \in (BO)$ ) арқылы  $AB$  түзуіне параллель түзу жүргіз-



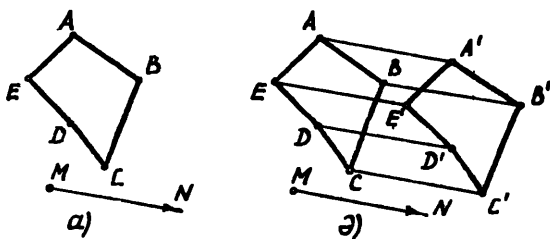
36-сурет.

сек, онда ол түзу  $AO$  кесіндісін  $E$  нүктесінде қияды.  $EOC$  үшбұрышы да — теңбүйірлі үшбұрыш:  $|AE| = |BC| = r$ .  $[CE]$  осы үшбұрыштың табаны. Теңбүйірлі үшбұрыштың төбесінен табанына түсірілген перпендикуляр оның табанын қаж бөледі. Олай болса, онда  $(ON) \perp (CE)$  және  $|CN| = |EN|$ .

**С а л у.** Жанасу нүктесі арқылы берілген түзуге перпендикуляр  $b$  түзуін жүргіземіз:  $A \in b \perp a$ . Осы  $b$  түзуіне оның  $A$  нүктесінен бастап берілген шеңбердің радиусына тең кесінді салып,  $E$  нүктесін аламыз:  $|AE| = r$ . Табылған  $E$  және шеңбердің центрі  $C$  нүктесінің ортаңғы перпендикулярын ( $c$  түзуін) тұрғызамыз. Ортаңғы перпендикуляр  $c$  мен  $b$  түзуінің қиылысу нүктесі  $O$  іздеп отырған шеңберіміздің центрі болады:  $O = b \cap c$ . Осы  $O$  нүктесін берілген шеңбердің центрімен қосатын түзу шеңбермен  $B$  нүктесінде қиылысады. Берілген және іздеп отырған шеңберлеріміз  $B$  нүктесінде жанасады. Енді центрі  $O$  нүктесі болатын және  $A$  мен  $B$  нүктелері арқылы өтетін шеңбер жүргіземіз.

**Д ә л е л д е у.** Жүргізілген шеңбер есептің берілген шарттарын түгел қанағаттандырады:  $a$  түзуімен оның  $A$  нүктесінде жанасады, ол берілген шеңбермен де жанасады.

**З е р т т е у.** Есептің екі шешуі болатынын аңғару қиын емес (36, б-сурет), өйткені берілген шеңбердің радиусына тең кесіндіні  $A$  нүктесінен бастап  $b$  түзуінің бойына екі бағытта салуға болады. Жоғарыда есептің бір шешуі қарастырылды. Оның екінші шешуін алу үшін  $b$  түзуіне ұзындығы  $r$ -ға тең  $AF$  кесіндісін саламыз.  $C$  және  $F$  нүктелерінің ортаңғы перпендикулярын, яғни  $d$



37-сурет.

түзуін жүргіземіз. Сонда  $b$  және  $d$  түзулері  $O_1$  нүктесінде қиылысады.  $O_1C$  түзуі берілген шеңберді  $B_1$  нүктесінде қияды. Сонда  $B_1$  жанасу нүктесі болады. Центрі  $O_1$  нүктесі болатын,  $A$  және  $B_1$  нүктелері арқылы өтетін шеңбер есептің екінші шешуі болады. Есептің бірінші шешуі болатын шеңбер ( $O; |AO|$ ) берілген шеңбермен іштей жанасса, есептің екінші шешуі болатын шеңбер ( $O_1; |AO_1|$ ) берілген шеңбермен сырттай жанасады.

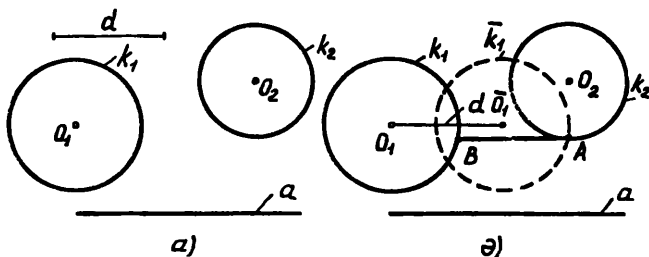
### 1.8. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ТҮРЛЕНДІРУЛЕР

**1.8.1. Параллель ығыстыру.** Бізге  $ABCDE$  көпбұрышы және  $\vec{MN}$  векторы берілсін (37, а-сурет).  $A, B, C, D$  және  $E$  нүктелері арқылы  $MN$  түзуіне параллель түзулер жүргізіп, олардың бойына  $\vec{MN}$  векторы бағытында осы вектордың ұзындығына тең кесінділер салсақ,  $A', B', C', D'$  және  $E'$  нүктелерін аламыз. Алынған нүктелерді берілген көпбұрышқа сәйкестендіріп кесінділермен қоссақ,  $A'B'C'D'E'$  көпбұрышы алынады (37, б-сурет). Сонда  $ABCDE$  көпбұрышын  $A'B'C'D'E'$  көпбұрышына түрлендірдік. Фигураларды осылайша түрлендіруді *параллель ығыстыру* деп атайды. Параллель ығыстыруды кез келген вектор анықтайды. Параллель ығыстырудың негізгі қасиеттері:

- кесінді өзіне тең және параллель, немесе өзімен бір түзудің бойында жататын кесіндіге түрленеді;
- бұрыш өзіне тең бұрышқа өзгереді;
- шеңбер өзіне тең шеңберге түрленеді;
- көпбұрыш өзіне тең көпбұрышқа түрленеді.

**1-есеп.** Ұзындығы  $d$  берілген  $a$  түзуіне параллель және ұштары  $k_1$  және  $k_2$  шеңберлері бойында жататын  $AB$  кесіндісін салу керек (38, а-сурет).

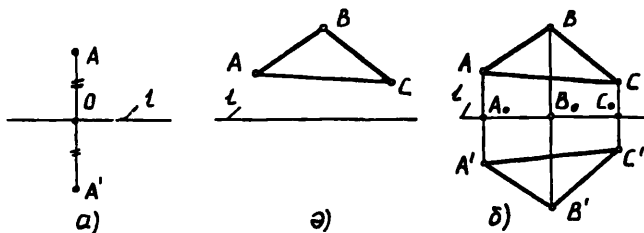
**Шешуі.** Бірінші шеңбердің центрі арқылы берілген  $a$  түзуіне параллель түзу жүргізіп, оның бойына ұзын-



38-сурет.

дығы  $d$ -ға тең  $O_1\bar{O}_1$  кесіндісін саламыз. Центрі  $\bar{O}_1$  нүктесі болатын берілген  $k_1$  шеңберіне тең  $\bar{k}_1$  шеңберін жүргіземіз. Сонда  $\bar{k}_1$  және  $k_2$  шеңберлерінің қиылысу нүктесі  $A$  іздеп отырған кесіндіміздің бір ұшын береді.  $A$  нүктесі арқылы берілген  $a$  түзуіне параллель етіп жүргізілген түзу  $k_1$  шеңберін  $B$  нүктесінде қияды (38, ә-сурет). Табылған  $AB$  кесіндісі есептің шарттарын қанағаттандыратыны көрініп тұр.  $\bar{k}_1$  және  $k_2$  шеңберлері үш жағдайда орналасулары мүмкін. Егер  $\bar{k}_1$  және  $k_2$  шеңберлері қиылыспаса, онда есептің нақты шешімі болмайды. Бұл екі шеңбер жанасса, онда есептің жалғыз шешімі болады. 38, ә-суретте аталған шеңберлер екі нүктеде қиылысып тұр. Олай болса, есептің екі шешімі бар болады.

**1.8.2. Осьтік симметрия.** Жазықтықта  $l$  түзуін алып,  $A$  нүктесі арқылы оған перпендикуляр түзу жүргізелік (39, а-сурет). Осы түзудің бойынан  $A'$  нүктесін  $l$  түзуі  $AA'$  кесіндісін тең екі бөлікке бөлетіндей етіп аламыз:  $|AO| = |A'O|$ .  $A$  және  $A'$  нүктелерін  $l$  түзуіне қатысты *симметриялы нүктелер*, ал  $l$  түзуін *симметрия осі* деп атайды. Егер  $ABC$  үшбұрышы беріліп, оған  $l$  түзуіне қатысты симметриялы болатын  $A'B'C'$  үшбұрышын салу керек болса, онда былай істейміз:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  нүктелері ар-



39-сурет.

қылы  $l$  түзуіне перпендикуляр болатын түзулер жүргіземіз. Олар  $l$  түзуін  $A_0, B_0, C_0$  нүктелерінде қияды. Енді осы түзулердің бойына  $l$  түзуінен төмен қарай  $AA_0, BB_0$  және  $CC_0$  кесінділеріне тең кесінділер салып  $A', B', C'$  нүктелерін аламыз. Сонда  $ABC$  және  $A'B'C'$  үшбұрыштары  $l$  түзуіне қатысты симметриялы фигуралар болады (39, б-сурет). Берілген фигураға симметрия осіне қатысты симметриялы фигураны салуды *осьтік симметрия* деп атайды.

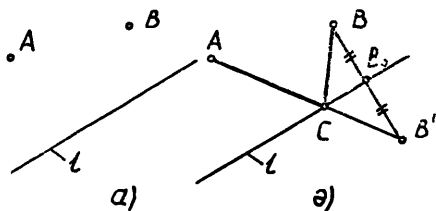
Осьтік симметрияда да:

- кесінді өзіне тең кесіндіге түрленеді;
- бұрыш өзіне тең бұрышқа өзгереді;
- шеңбер өзіне тең шеңберге түрленеді;
- көпбұрыш өзіне тең көпбұрышқа түрленеді.

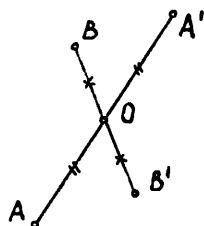
2-есеп.  $A, B$  нүктелері және  $l$  түзуі берілген. Осы  $l$  түзуінің бойынан  $C$  нүктесін алып, оны  $A$  және  $B$  нүктелерімен түзу кесінділерінің көмегімен қосу керек. Сонда пайда болған кесінділер ұзындықтарының қосындысы ең аз шама болатын есептің шешуін табалық (40, а-сурет).

Шешуі. Осы мақсат үшін осьтік симметрияны пайдаланамыз. Берілген  $l$  түзуін симметрия осі деп қарастырып,  $B$  нүктесіне симметриялы  $B'$  нүктесін саламыз (40, ә-сурет).  $A$  және  $B'$  нүктелерін қосатын сызықтардың ішіндегі ең қысқасы түзудің кесіндісі.  $AB'$  түзуі симметрия осін  $C$  нүктесінде қияды. Табылған  $C$  нүктесін  $B$  нүктесімен қосамыз. Сонда пайда болған үшбұрыштар  $BCB_0$  және  $B'CB_0$  өзара тең. Олай болса,  $|CB| = |CB'|$ . Сондықтан  $|AB'| = |AC| + |CB'| = |AC| + |CB|$ .

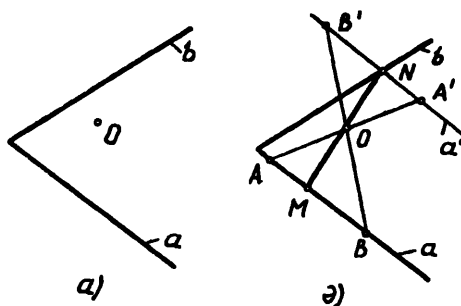
1.8.3. Центрілік симметрия. Жазықтықтың қалауымызша алынған  $O$  нүктесін центр деп аталық. Енді осы жазықтықтың кез келген  $A$  нүктесіне сәйкес  $A'$  нүктесін былайша табалық:  $AA'$  кесіндісі центр арқылы өтеді және центр оны қажет бөледі:  $|AO| = |A'O|$ . Сонда  $A$  және  $A'$  нүктелері  $O$  нүктесіне қатысты симме-



40-сурет.



41-сурет.



42-сурет.

триялы нүктелер деп аталады (41-сурет). Берілген  $B$  нүктесіне  $O$  центріне қатысты симметриялы болатын  $B'$  нүктесін салу үшін  $BO$  түзуін жүргіземіз. Осы түзуге  $BO$  кесіндісіне тең  $OB'$  кесіндісін салып,  $B'$  нүктесін табады.

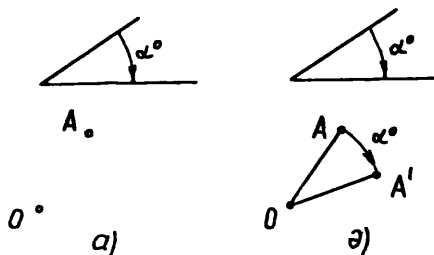
Фигураны оның әрбір нүктесіне *центр* деп аталатын нүктеге қатысты симметриялы нүкте сәйкес болатындай етіп түрлендіру *центрлік симметрия* деп аталады. Центрлік симметрияның қасиеттері параллель ығыстыру мен осьтік симметрияның қасиеттерімен бірдей.

3-есеп. Өзара қиылысатын  $a$  және  $b$  түзулері берілген. Бір ұшы  $a$  түзуінде, екінші ұшы  $b$  түзуінде жататын және берілген  $O$  нүктесі дәл ортасы болатын  $MN$  кесіндісін салу керек (42, а-сурет).

Анализ. Есептің шарттарын қанағаттандыратын  $MN$  кесіндісі табылған екен делік (42, ә-сурет). Олай болса  $O \in [MN]$ ,  $M \in a$ ,  $N \in b$  және  $|MO| = |ON|$ . Сондықтан  $M$  және  $N$  нүктелері симметрия центрі  $O$ -ға қатысты центрлік симметриялы нүктелер. Берілген  $O$  нүктесіне қатысты  $a$  түзуіне симметриялы болатын  $a'$  түзуін салсақ, онда  $N$  нүктесі осы  $a'$  түзуі бойында жатар еді:  $N \in a'$ ;  $N = a' \cap b$ .

Салу. Берілген  $a$  түзуіне  $O$  центріне қатысты симметриялы болатын  $a'$  түзуін саламыз. Осы мақсатта  $a$  түзуі бойынан қалауымызша  $A$  және  $B$  нүктелерін алып, оларға симметриялы  $A'$  және  $B'$  нүктелерін табамыз. Сонда  $(A'B') = a'$ . Табылған  $a'$  және  $b$  түзулерінің қиылысу нүктесі  $N$  іздеп отырған кесіндіміздің бір ұшы болады. Енді  $NO$  түзуін жүргізсек, ол  $a$  түзуін  $M$  нүктесінде қияды ( $a$  және  $a'$  түзулері параллель болатынын дәлелденіздер).

Дәлелдеу.  $MN$  кесіндісі  $O$  нүктесі арқылы өтеді

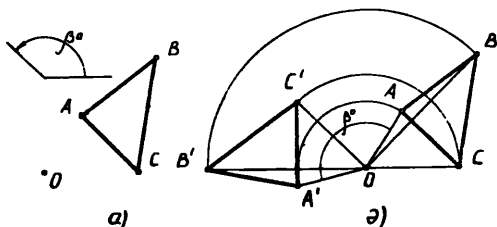


43-сурет.

және оның бір ұшы  $a$  түзуі, ал екінші ұшы  $b$  түзуі бойында жатыр:  $M \in a$  және  $N \in b$ . Бұл екі нүкте симметриялы түзулердің ( $a$  мен  $a'$ ) бойларынан алынғандықтан олардың симметрия центрінен қашықтықтары бірдей болады:  $|MO| = |ON|$ .

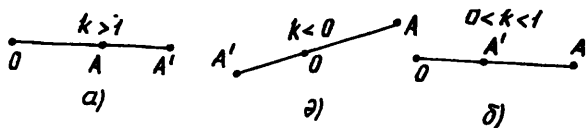
**Зерттеу.** Егер  $a$  және  $b$  түзулері қиылысса, ал  $O$  нүктесі олардан тыс орналасса, есептің әрқашанда шешімі бар және ол жалғыз болады. Егер  $a$  және  $b$  түзулері өзара параллель болса, есептің шешуі болуы үшін бұл екі түзу  $O$  нүктесіне қатысты симметриялы түзулер болуы қажет. Егер  $a \parallel b$  болып, бірақ  $O$  нүктесіне қатысты симметриялы болмаса, онда есептің шешімі жоқ болады.

**1.8.4. Айналдыру.** Жазықтықтың  $O$  нүктесі және  $\alpha^\circ$  бұрышы ( $|\alpha^\circ| < 360^\circ$ ) берілсін (43, а-сурет). Енді  $|AO| = |A'O|$  және  $\angle AOA' = \alpha^\circ$  болатындай  $A'$  нүктесін тұрғызалық. Осындай  $A'$  нүктесі  $A$  нүктесін  $O$  нүктесі маңында  $\alpha^\circ$  бұрышына көрсетілген бағытта бұрудың нәтижесінде алынады (43, ә-сурет). Берілген фигураның әрбір нүктесін  $O$  нүктесі айналасында көрсетілген бағытта  $\alpha^\circ$  бұрышына бұрудың нәтижесінде алынатын фигураны салуды **айналдыру** деп атайды.  $O$  нүктесін **айналу центрі**,  $\alpha^\circ$  бұрышын **айналу бұрышы** деп атайды. Айналдыру фигураны өзіне тең фигураға түрлендіреді.  $ABC$  үшбұрышы, айналу центрі  $O$  және айналу бұрышы  $\beta^\circ$



44-сурет.

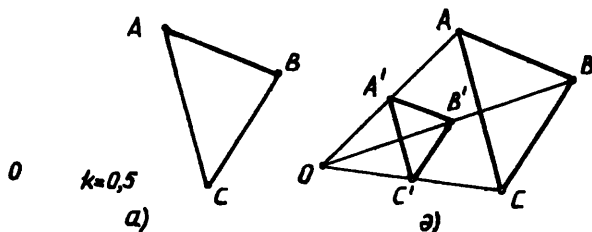




46-сурет.

лері арқылы  $CB''$  түзуіне перпендикуляр түзулер жүргіземіз.  $A$  нүктесі арқылы жүргізілген түзу  $D$  нүктесі арқылы жүргізілген түзумен 1 нүктесінде қиылысады, ал  $B$  нүктесі арқылы жүргізілген түзумен 2 нүктесінде қиылысады.  $B$  нүктесі арқылы жүргізілген түзу  $CB''$  түзуін 3 нүктесінде қиса,  $D$  нүктесі арқылы жүргізілген түзу оны 4 нүктесінде қияды.

**1.8.5. Гомотетия.** Жазықтықтан  $O$  нүктесін алып, берілген  $A$  нүктесіне сәйкес  $A'$  нүктесін былайша табалық:  $A' \in (OA)$  және  $\frac{|OA'|}{|OA|} = k$  болсын. Берілген тұрақты сан  $k$  бірден үлкен болса,  $A'$  нүктесі  $OA$  кесіндісінің созындысында жатады (46, а-сурет). Ал  $k < 0$  болса, онда  $A$  және  $A'$  нүктелері  $O$  нүктесінің әр түрлі жағында орналасады (46, ә-сурет). Егер  $0 < k < 1$  болса,  $A'$  нүктесі  $OA$  кесіндісінің бойында жатады (46, б-сурет). Фигураны, оның әрбір нүктесі  $A$  оны берілген  $O$  нүктесімен қосатын түзудің бойында жататын  $A'$  нүктесіне сәйкес және  $OA'$  пен  $OA$  кесінділерінің қатынасы берілген тұрақты  $k$  санына тең болатындай етіп, түрлендіруді *гомотетия* деп атайды,  $O$  — *гомотетия центрі*,  $k$  — *гомотетия коэффициенті* деп аталады. Мысалға  $ABC$  үшбұрышы, гомотетия центрі  $O$  және гомотетия коэффициенті  $k = 0,5$  берілсін (47, а-сурет). Берілген гомотетияда  $ABC$  үшбұрышына сәйкес  $A'B'C'$  үшбұрышын салуды қарастыралық.  $A$ ,  $B$  және  $C$  нүктелерін гомотетия центрімен қосамыз.  $AO$  кесіндісінің ортасы  $A'$ ,  $BO$  кесіндісінің ортасы  $B'$  және  $CO$  кесіндісінің ортасы  $C'$  нүктелерін береді. Табылған



47-сурет.

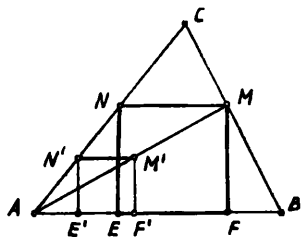
нүктелерді қосып,  $A'B'C'$  үшбұрышын аламыз (47, ә-сурет).

5-есеп. Берілген  $ABC$  үшбұрышына іштей бір қабырғасы оның табаны  $AB$ -ның бойында, ал қалған екі төбесі — бүйір қабырғалары  $AC$  мен  $BC$ -ның бойында жататын квадрат салу керек (48-сурет).

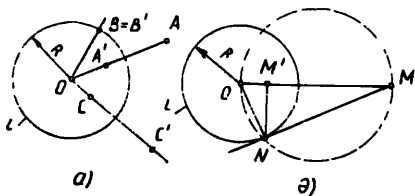
Шешуі. Берілген  $ABC$  үшбұрышына іштей сызылған квадраттың бір қабырғасы  $EF$  үшбұрыш табаны  $AB$ -ның бойында, ал оның төбелері  $M$  және  $N$  үшбұрыштың бүйір қабырғалары бойында жатсын:  $M \in [BC]$  және  $N \in [AC]$ .  $A$  нүктесін гомотетияның центрі деп қарастырсақ және  $0 < k < 1$  деп жорысақ,  $EFMN$  квадратына сәйкес  $E'F'M'N'$  төртбұрышы да квадрат болады және оның бір қабырғасы  $E'F'$  үшбұрыштың табаны  $AB$ -ның бойында, ал  $N'$  —  $AC$ -ның бойында жатады. Сондықтан  $AC$ -ның бойынан қалауымызша  $N'$  нүктесін аламыз ( $N'$  нүктесі  $A$  нүктесіне жақынырақ болуы керек). Осы  $N'$  нүктесінен  $AB$ -ға түсірілген перпендикулярдың табаны  $E'$  болсын.  $AB$ -ның бойына  $N'E'$  кесіндісіне тең  $E'F'$  кесіндісін салып,  $E'F'M'N'$  квадратын аламыз. Енді  $M'A$  түзуін жүргізсек, ол  $BC$ -ны  $M$  нүктесінде қияды.  $M$  нүктесі арқылы  $AB$ -ға параллель және перпендикуляр түзулер жүргізіп,  $N$  және  $F$  нүктелерін аламыз.  $N$  нүктесінен  $AB$ -ға түсірілген перпендикулярдың табаны  $E$  нүктесі болады. Алынған төртбұрыш  $EFMN$  есептің шарттарын толық қанағаттандырады. Оның квадрат екені гомотетия қасиеттерінің салдары болады.

Гомотетияда түзу өзіне параллель түзуге, шеңбер шеңберге, бұрыш өзіне тең бұрышқа түрленеді. Жалпы алғанда гомотетияда фигура өзіне ұқсас фигураға өзгереді.

1.8.6. Инверсия. Жазықтықта центрі  $O$  нүктесі және радиусы  $R$  болатын шеңбер берілсін. Сонда  $O$  нүктесінен өзге кез келген  $M$  нүктесіне мына шартты  $|OM| \cdot |OM'| = R^2$  қанағаттандыратын,  $OM$  сәулесі бойында жататын



48-сурет.



49-сурет.

$M'$  нүктесі сәйкес болатындай етіп жазықтықты түрлендіруді *инверсия* деп атайды;  $O$  нүктесі *инверсияның центрі*,  $R$  — *инверсияның радиусы*, ал  $(O, R)$  шеңбері *инверсия шеңбері* деп аталады.

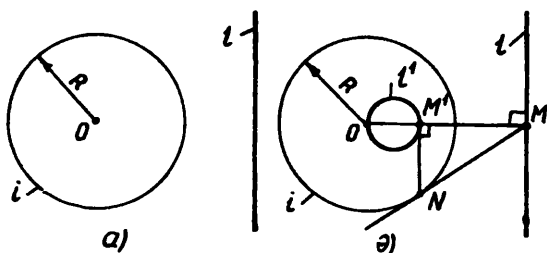
Егер берілген нүкте  $A$  инверсия шеңберінен тыс орналасса, онда оған сәйкес  $A'$  нүктесі инверсия шеңбері ішінде болады (49, а-сурет). Шынында да,  $|OA| > R$  болғандықтан  $|OA'| = R^2/|OA| < R$  болады. Берілген нүкте  $B$  инверсия шеңбері бойында жатса, онда  $|OB| = R$  және  $|OB'| = R^2/|OB| = R$  болғандықтан, оған сәйкес  $B'$  нүктесі де инверсия шеңбері бойында жатуы тиіс. Сондықтан  $B'$  нүктесі берілген  $B$  нүктесімен бірігеді. Егер берілген нүкте  $C$  шеңбердің ішінде жатса, онда оған сәйкес нүкте  $C'$  инверсия шеңберінен тыс орналасады. Шынында да,  $|OC| < R$  болғандықтан  $|OC'| = R^2/|OC| > R$  болады. Егер берілген  $C$  нүктесін инверсия центріне шексіз жақындатсақ, онда  $OC'$  кесіндісі шексіз ұзарған болар еді. Сондықтан  $C=O$  болса,  $C'$  нүктесі шексіз қашықтықта жатар еді. Осыған байланысты инверсияның центріне ( $O$ -ға) шексіз қашықтықта жатқан түзу сәйкес болады деп есептеледі.

Енді берілген  $M$  нүктесіне сәйкес  $M'$  нүктесін қалай салуға болатынын көрсетелік (49, ә-сурет). Ол үшін  $OM$  кесіндісін диаметр етіп шеңбер жүргізелік (бұл шеңбер сыздада үзілме сызықпен көрсетілген). Екі шеңбердің қиылысу нүктесін  $N$  деп белгілеп, одан  $OM$  сәулесіне перпендикуляр түсірелік. Осы перпендикулярдың табаны  $M'$  нүктесі болсын. Сонда пайда болған тікбұрышты үшбұрыштар  $ONM$  және  $OM'N$  өзара ұқсас. Олай болса,

$$\frac{|OM|}{|ON|} = \frac{|ON|}{|OM'|} \Rightarrow |OM| \cdot |OM'| = |ON|^2 = R^2.$$

Берілген нүкте инверсия шеңберінен тыс жатса оны инверсия центрімен қосатын және жанама болатын түзулер жүргізу керек. Жанама нүктесін тауып, одан берілген нүктені центрмен қосатын түзуге перпендикуляр түсіру керек. Осы перпендикулярдың табаны берілген нүктеге сәйкес нүктені анықтайды. Берілген нүкте инверсия шеңберінің ішінде жатса, онда оны центрмен қосатын түзу және осы түзуге берілген нүкте арқылы перпендикуляр тұрғызады. Перпендикулярдың шеңбермен қиылысу нүктесінде шеңберге жанама жүргізіледі. Жанама мен берілген нүктені центрмен қосатын түзудің қиылысу нүктесі іздеп отырған нүктеміз болады.

Инверсияның негізгі қасиеттері:



50-сурет.

— инверсия центрі арқылы өтетін түзу өзіне өзі сәйкес болады;

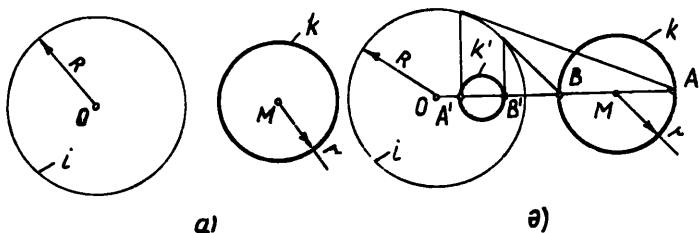
— инверсия центрі арқылы өтпейтін түзуге инверсия центрі арқылы өтетін шеңбер сәйкес болады;

— инверсия центрі арқылы өтетін шеңберге инверсия центрі арқылы өтпейтін түзу сәйкес болады;

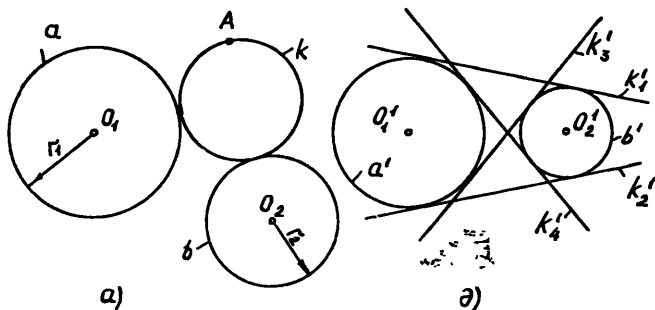
— инверсия центрі арқылы өтпейтін шеңберге инверсия центрі арқылы өтпейтін шеңбер сәйкес болады.

Инверсия шеңбері, центрі және центр арқылы өтпейтін  $l$  түзуі берілсін (50, а-сурет). Сонда  $l$  түзуі инверсия центрі арқылы өтетін  $l'$  шеңберіне түрленеді.  $l'$  шеңберін салу үшін  $O$  нүктесінен  $l$  түзуіне перпендикуляр түсіреді. Перпендикулярдың табаны  $M$  нүктесі болса, оған сәйкес  $M'$  нүктесі салынады (50, б-сурет).  $OM'$  кесіндісін диаметр етіп алып, салынған шеңбер сол  $l'$  шеңбері болады. Бұған керісінше, инверсия центрі арқылы өтетін  $l'$  шеңберіне инверсия центрі арқылы өтпейтін  $l$  түзуі сәйкес болады.

Инверсия шеңбері  $i(O; R)$  және одан тыс орналасқан  $k(M; r)$  шеңбері берілсін (51, а-сурет). Берілген  $k$  шеңберіне сәйкес  $k'$  шеңберін салуды көрсетелік.  $OM$  түзуі  $k$  шеңберін  $A$  және  $B$  нүктелерінде қияды. Бұл екі нүктеге сәйкес  $A'$  және  $B'$  нүктелерін табалық (51, б-сурет).



51-сурет.



52-сурет.

$A'B'$  кесіндісін диаметр деп қарастырып, шеңбер сала-лық. Салынған  $k'$  шеңбері берілген инверсияда  $k$  шеңберіне сәйкес шеңбер болады.

6 - е с е п. Берілген қиылыспайтын екі шеңбермен жанасатын және берілген нүкте арқылы өтетін шеңбер салу керек болсын.

Ш е ш у і. Бізге  $a(O_1; r_1)$  мен  $b(O_2; r_2)$  шеңберлері және  $A$  нүктесі берілген екен делік (52, а-сурет). Есептің шешуі болатын  $k$  шеңбер  $A$  нүктесі арқылы өтеді және  $a$  мен  $b$  шеңберлерімен жанасады. Центрі  $A$  нүктесі болатын инверсияны қарастыралық, сонда берілген шеңберлер  $a'$  және  $b'$  шеңберлеріне, ал іздеп отырған шеңберіміз олардың ортақ жанамаларына түрленер еді (52, б-сурет). Екі шеңберге ортақ 4 жанама  $k'_1$ ,  $k'_2$ ,  $k'_3$  және  $k'_4$  жүргізуге болатындықтан есептің төрт шешімі бар. Осы жанамаларға қарастырып отырған инверсияда сәйкес болатын шеңберлер есептің шешулерін береді (есепті салу оқушылардың өздеріне тапсырылады).

Параллель ығыстыру, осьтік симметрия, центрлік симметрия, айналдыру, гомотетия және инверсия деп аталатын жазықтықтағы түрлендірулерді қарастырдық. Түрлендіруде бір нүктеге тек бір ғана нүкте сәйкес болатынын аңғардық. Түрлендіру кезінде кейбір нүктелер, кейде сызықтар өзіне-өзі сәйкес болуы мүмкін. Осындай өзіне-өзі сәйкес болатын нүктелерді, немесе сызықтарды түрлендірудің қозғалмайтын элементтері (инварианттары) деп атайды. Түрлендірудің қозғалмайтын элементтерін анықтаудың маңызы зор. Параллель ығыстырудың қозғалмайтын бірде-бір нүктесі болмайды, ал осьтік симметрияла осі бойында жатқан нүкте өзіне сәйкес болады. Симметрия осі түрлендірудің қозғалмайтын түзуі

болады. Симметрия осіне перпендикуляр түзулер де қозғалмайды. Центрілік симметрияның центрден өзге қозғалмайтын нүктесі болмайды. Айналырудың да центрден өзге қозғалмайтын нүктесі жоқ. Гомотетия жөнінде де осыны айтуға болады. Ал инверсияда инверсия шеңбері бойында жатқан нүктелер өзіне өзі түрленетіні туралы айттық, яғни инверсия шеңбері түрлендірудің инварианты болады.

## Есептер

1. Үш нүкте  $A(0; 5)$ ,  $B(4; 2)$  және  $C(7; 5)$  берілген. Оларды координаталары бойынша салып,  $A$  нүктесі арқылы  $BC$  түзуіне параллель  $a$  түзуін ( $A \in a \parallel (BC)$ ),  $B$  нүктесі арқылы  $AC$  түзуіне перпендикуляр  $b$  түзуін ( $B \in b \perp (AC)$ ) және  $C$  нүктесін  $AB$  кесіндісінің ортасымен қосатын  $l$  түзуін жүргізіңіздер.  $M$  және  $N$  нүктелерінің координаталарын анықтау керек:  $M = a \cap b$  және  $N = b \cap l$ .

2. Ұзындығы 70 мм кесінді алып, алдымен оны тең 11, одан кейін 8 және соңында 13 бөлікке сызғыш пен циркульді пайдаланып бөлу керек.

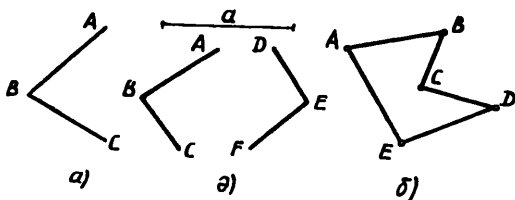
3. Диаметрі 60 мм шеңберге іштей дұрыс бесбұрыш, диаметрі 70 мм шеңберге іштей дұрыс алтыбұрыш және диаметрі 80 мм шеңберге іштей дұрыс тоғызбұрыш салу керек.

4. Қабырғаларының ұзындықтары  $a$ ,  $b$  және  $c$  белгілі үшбұрышты салу керек (1-кесте). Салынған үшбұрыштардың қайсысы теңбүйірлі үшбұрыш, қайсысы теңқабырғалы үшбұрыш, қайсысы тікбұрышты үшбұрыш, қайсысы сүйірбұрышты үшбұрыш және қайсысы доғалбұрышты үшбұрыш болады?

1-кесте

| Қабырғалар | Бармақтар |    |    |    |    |
|------------|-----------|----|----|----|----|
|            | 1         | 2  | 3  | 4  | 5  |
| $a$        | 40        | 30 | 20 | 23 | 40 |
| $b$        | 40        | 30 | 23 | 26 | 30 |
| $c$        | 40        | 50 | 26 | 36 | 50 |

5. Берілген  $ABC$  бұрышына тең бұрыш салып, оған вертикаль және сыбайлас бұрыштарды көрсетіңіздер (53, асурет). Осы  $ABC$  бұрышының және оған сыбайлас бұрыштың биссектрисаларын жүргізіңіздер.



53-сурет.

6. Бір қабырғасы 40 мм, келесі қабырғасы 60 мм және осы 60 мм-ге тең қабырғасына қарсы бұрышы  $60^\circ$  болатын үшбұрыш салыңыздар.

7. Ұзындығы  $a$ -ға тең кесінді,  $ABC$  және  $DEF$  бұрыштары берілген (53, ә-сурет). Қабырғасы  $a$ -ға, оған іргелес бұрыштары  $ABC$  және  $DEF$  бұрыштарына тең бір үшбұрыш, одан кейін  $a$ -ға тең қабырғасына іргелес бұрышы  $ABC$ , ал оған қарсы бұрышы  $DEF$  болатын екінші үшбұрыш салыңыздар.

8. Берілген  $ABCDE$  бесбұрышына тең бесбұрыш салыңыздар (53, б-сурет).

9. Табаны 50 мм, биіктігі 40 мм және табанына іргелес бұрышы  $30^\circ$  болатын үшбұрыш салыңыздар.

10. Бір қабырғасы 60 мм оған іргелес бұрышы  $45^\circ$  және екінші іргелес бұрышының биссектрисасы 45 мм болатын үшбұрышты салыңыздар.

11. Төбелерінің координаталары белгілі  $ABC$  үшбұрышына іштей және сырттай шеңбер сызу керек.

2-кестеде  $A$ ,  $B$  және  $C$  нүктелерінің координаталары берілген. Есептің шешуін тапқаннан кейін масштабты сызғышты пайдаланып, үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер центрінің координаталарын  $x_1$ ,  $y_1$  және сырттай сызылған шеңбер центрінің координаталарын  $x_k$ ,  $y_k$  өлшеп осы 2-кестені толтыруды аяқтаңыздар.

2-кесте

| Вариант-<br>тар | Координаталар |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                 | $x_1$         | $y_1$ | $x_B$ | $y_B$ | $x_C$ | $y_C$ | $x_k$ | $y_k$ | $x_k$ | $y_k$ |
| 1               | 4             | -6    | -2    | 3     | 0     | -1    |       |       |       |       |
| 2               | 0             | -5    | 6     | 2     | 3     | -1    |       |       |       |       |
| 3               | 8             | 2     | 4     | -3    | 5     | 0     |       |       |       |       |
| 4               | -2            | 4     | 2     | 0     | 5     | -2    |       |       |       |       |

| Вариант-<br>тар | Координаталар |       |       |       |       |       | $f$ |
|-----------------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
|                 | $x_a$         | $y_a$ | $x_b$ | $y_b$ | $x_c$ | $y_c$ |     |
| 1               | 40            | 10    | 20    | -30   | -20   | 0     | 0,5 |
| 2               | 35            | 25    | 15    | -15   | -25   | 15    | 0,4 |
| 3               | 60            | 10    | 40    | -30   | 0     | 0     | 0,6 |
| 4               | 20            | 40    | -40   | -30   | 0     | 0     | 0,3 |

12. Үлкен осі 60 мм, кіші осі 40 мм эллипсті сызыңыздар. Оның фокустарын тауып, теңдеуін жазыңыздар.

13. Кониканың екі нүктесі  $A$  және  $B$ , осы нүктелерінде тұрғызылған жанамалары  $(AC)$  және  $(BC)$  берілген. 3-кестеде көрсетілген инженерлік дискриминанттың мәндеріне сәйкес коникаларды салып, олардың екінші ретті қандай қисықтар болатынын анықтаңыздар.

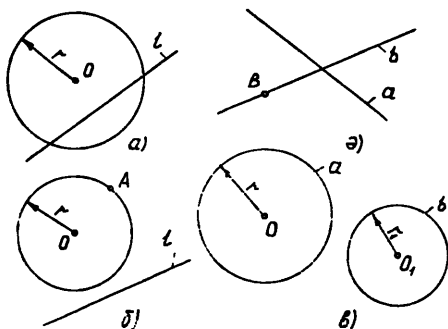
14. Берілген түзу мен шеңберге жанасатын радиусы  $R=40$  мм болатын шеңберлерді салу керек (54, а-сурет).

15. Қиылысатын екі түзу  $a$  мен  $b$  берілген (54, ә-сурет). Осы екі түзумен жанасатын және  $B$  нүктесі арқылы өтетін шеңбер салыңыздар ( $B \in b$ ).

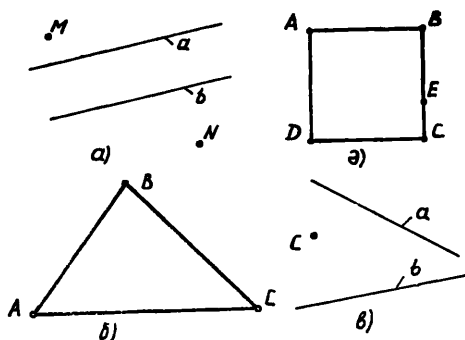
16. Шеңбер  $a$  ( $O; r$ ), түзу  $l$  және  $A$  нүктесі берілген (54, б-сурет). Берілген шеңберді және түзуді жанайтын,  $A$  нүктесі арқылы өтетін шеңберді салу керек ( $A \in a$ ).

17. Екі шеңбер  $a$  ( $O; r$ ) және  $b$  ( $O_1; r_1$ ) берілген (54, в-сурет). Радиусы  $R=15$  мм болатын және берілген шеңберлермен жанасатын шеңберлерді салу керек.

18. Берілген үш медианасы  $m_a=45$  мм,  $m=30$  мм



54-сурет.



55-сурет.

және  $m_c = 36$  мм бойынша  $ABC$  үшбұрышын салыңыз-дар.

19. Трапецияның табандары 50 және 20 мм, ал оның диагональдары 70 мм және 30 мм. Осы трапецияны салу керек.

20. Параллель екі түзу  $a$  және  $b$ , олардан тыс орналасқан екі нүкте  $M$  және  $N$  берілген (55, а-сурет). Берілген түзулердің бойынан  $A$  және  $B$  нүктелерін тауып, ұзындығы мүмкіндігінше қысқа және  $(AB) \perp a$ ,  $(AB) \perp b$  болатын  $MABN$  сынық сызығын салу керек.

21. Екі шеңбер  $a (O; r)$  және  $b (O_1; r_1)$  берілген (54, в-сурет). Бір ұшы бірінші шеңберде, екінші ұшы екінші шеңберде жататын және  $(OO_1)$  түзумен  $30^\circ$ -қа тең бұрыш жасайтын  $AB$  кесіндісін салындар ( $A \in a; B \in b$ ).

22. Квадрат  $ABCD$  және оның бір қабырғасы бойынан алынған  $E$  нүктесі берілген (55, ә-сурет). Осы квадратқа іштей бір төбесі берілген  $E$  нүктесі болатын тең-қабырғалы  $EFL$  үшбұрышын салу керек.

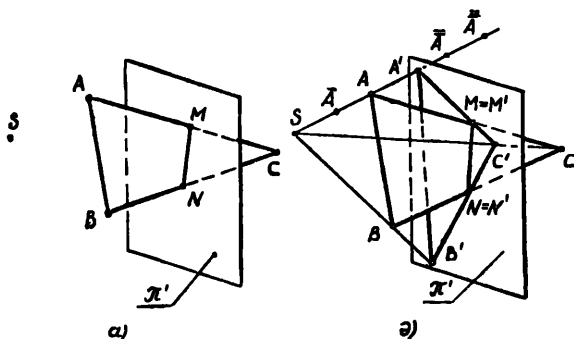
23. Берілген  $ABC$  үшбұрышына іштей бір қабырғасы  $AB$  түзуі бойында, ал қалған екі төбесінің біреуі  $[AC]$ -ның, екіншісі  $[BC]$ -ның бойында жататын квадрат сызу керек (55, б-сурет).

24. Қиылысу нүктесі қағаз бетінде жатпайтып  $a$  және  $b$  түзулері және олардан тыс орналасқан  $C$  нүктесі берілген (55, в-сурет). Берілген  $C$  нүктесін бастыра  $a$  және  $b$  түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін түзу салу керек

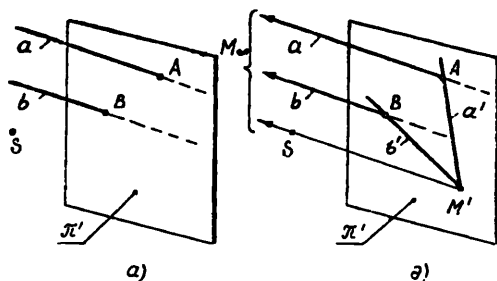
## 2-тарау. ПРОЕКЦИЯЛАУ ЖӘНЕ ПРОЕКЦИЯЛАУ НӘТИЖЕСІНДЕ ПАЙДА БОЛАТЫН СӘЙКЕСТІКТЕР

### 2.1. ЦЕНТРЛІК ПРОЕКЦИЯЛАУ

Күнделікті өмірде әр түрлі кескіндерді кездестіреміз. Фотография, сурет, сызба және тағы басқа кескіндермен біз жақсы таныспыз. Осындай кескіндер қалай салынады? Нәрсенің кескінін алу үшін *проекциялау әдісі* кең түрде қолданылады. Сондықтан кеңістікте  $\pi'$  жазықтығын және одан тыс орналасқан  $S$  нүктесін алалық. Сонда берілген  $ABC$  үшбұрышының кескінін былай тұрғызады (56, а-сурет):  $AS$ ,  $BS$  және  $CS$  түзулерін жүргізеді де, олардың  $\pi'$  жазықтығымен қиылысу нүктелерін түзу сызық кесінділерімен қосады.  $AS$  түзуі мен  $\pi'$  жазықтығының қиылысу нүктесін  $A'$  деп белгілейік. Сол сияқты  $BS \cap \pi' = B'$  және  $CS \cap \pi' = C'$  болады. Табылған  $A'B'C'$  үшбұрышы  $ABC$  үшбұрышының кескіні болады (56, ә-сурет).  $\pi'$  жазықтығын *проекциялар жазықтығы*,  $S$  нүктесін *проекциялау центрі*, ал  $AS$ ,  $BS$  және  $CS$  түзулерін *проекциялаушы түзулер* деп атайтынын білеміз.  $A'B'C'$  үшбұрышын  $ABC$  үшбұрышының  $\pi'$  жазықтығындағы *центрлік проекциясы* деп атайды. Нәрсенің кескінін осылай табуды *центрлік проекциялау* дейді. Берілген үшбұрыштың  $AC$  және  $BC$  қабырғалары проекциялар жазықтығымен  $M$  және  $N$  нүктелерінде қиылысатынын көріп тұрмыз. Бұл нүктелердің кескіндерін —  $M'$  және  $N'$  нүктелерін табу үшін  $MS$  және  $NS$  түзулерін, олардың проекциялар жазықтығымен қиылысу нүктелерін салуымыз керек. Сонда  $M'=M$  және  $N'=N$  болатынын көреміз.  $\pi'$  жазықтығының  $M$  және  $N$  нүктелерінен басқа



56-сурет.



57-сурет.

нүктелері де өздеріне өздері проекцияланады. Осындай өздеріне өздері проекцияланатын нүктелерді *қозғалмайтын нүктелер (инварианттар)* деп атайды.  $A'B'C'$  үшбұрышының сәйкес қабырғалары осы  $M$  және  $N$  нүктелері арқылы өтетінін аңғару қиын емес.  $M$  нүктесін  $AC$  түзуінің  $\pi'$  жазықтығындағы ізі,  $N$  нүктесін  $BC$  түзуінің  $\pi'$  жазықтығындағы ізі, ал  $MN$  кесіндісін  $ABC$  үшбұрышының  $\pi'$  жазықтығындағы ізі деп атайтынын білесіздер. Сонда түзудің ізі қозғалмайтын нүкте болса, жазықтықтың ізі қозғалмайтын түзу болады.

Сонымен, кеңістіктегі нүктеге  $\pi'$  жазықтығында тек бір ғана нүкте (оның центрлік проекциясы) сәйкес болады екен. Енді бұған керісінше  $\pi'$  жазықтығының бір нүктесіне кеңістікте қанша нүкте сәйкес болады екен? Басқаша айтқанда, кеңістіктің неше нүктесі  $\pi'$  жазықтығының бір нүктесіне проекцияланады? Мысалға  $AS$  түзуінде орналасқан  $\bar{A}, \bar{A}, \dots$  нүктелердің проекцияларын қарастырсақ, олардың бәрі де  $A'$  нүктесіне кескінделетінін көреміз. Яғни  $\pi'$  жазықтығының  $A'$  нүктесіне кеңістікте  $AS$  түзуі бойында жататын нүктелер түгелдей сәйкес болады.

*Проекциялау аппараты* (проекциялар жазықтығы мен проекциялау центрі) және өзара параллель  $a$  және  $b$  түзулері берілсін (57, а-сурет). Берілген параллель екі түзудің кескіндерін салу керек болсын.  $a \cap \pi' = A$  және  $b \cap \pi' = B$  сцен делік. Жеке жағдайда  $A$  немесе  $B$  нүктесі шексіз қашықтықта жатуы мүмкін. Бірақ бұдан есепті шешу жолы өзгермейді.  $A$  мен  $B$  нүктелері берілген түзулердің іздері болғандықтан өздеріне өздері проекцияланады:  $A' = A$  және  $B' = B$ . Проекциялау центрі арқылы берілген түзулерге параллель түзу жүргізсек, онда үш түзу шексіз қашықтықта жатқан  $M_\infty$  нүктесінде қиы-

лысар еді. Ал  $M_\pi$  нүктесінің  $\pi'$  жазықтығындағы проекциясы —  $M'$  нүктесін  $A$  және  $B$  нүктелерімен қоссақ,  $a$  және  $b$  түзулерінің центрлік проекцияларын —  $a'$  және  $b'$  түзулерін аламыз:  $(MA') = a'$  және  $(BM') = b'$  (57, ә-сурет). Бұдан біз параллель түзулердің центрлік проекциялары қиылысатынын көреміз. Параллель түзулердің центрлік проекциялары да параллель түзулер болуы үшін, олар проекциялар жазықтығына параллель болулары керек. Шексіз қашықтықта жатқан нүктелер қарапайым нүктелерге, ал қарапайым нүктелер шексіз қашықтықта жататын нүктелерге кескінделуі мүмкін. Өзіндік емес нүкте өзіндік нүктеге, ал өзіндік нүкте өздік емес нүктеге проекциялана беретіндіктен олардың центрлік проекциялауда айырмашылықтары жоқ екенін көреміз. Кеңістіктің проекциялау центрінен басқа нүктелерінің проекцияларын көрсетуге болады, ал проекциялау центрінің кескіні анықталмайды.

Центрлік проекциялаудың негізгі қасиеттері:

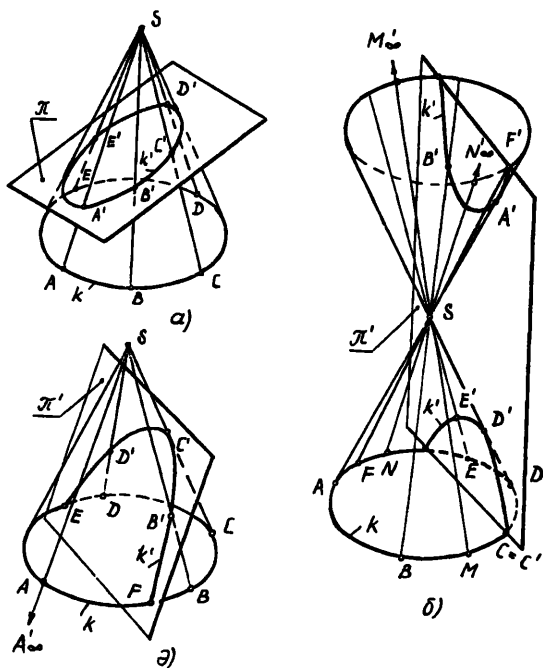
- нүкте нүктеге кескінделеді;
- проекциялаушы түзулерден өзге түзулер түзуге кескінделеді, ал проекциялаушы түзу нүктеге кескінделеді;

- егер түзу нүкте арқылы өтсе, онда түзудің проекциясы сол нүктенің проекциясы арқылы өтеді:  $A \in l \Rightarrow A' \in l'$ .

Бізге проекциялау центрі  $S$  және шеңбер  $k$  берілсін (58-сурет). Берілген шеңбердің кескінін алу үшін оны  $S$  центрінен проекциялаймыз, яғни  $AS$ ,  $BS$ ,  $CS$ , ... проекциялаушы түзулер жүргіземіз. Сонда осы проекциялаушы түзулердің жиыны *конус бетін* құрайды. Бұл конустың төбесі  $S$  нүктесі болады. Проекциялар жазықтығы  $\pi'$  пайда болған конусқа қарағанда түрліше орналасуы мүмкін. Бұл жерде негізінен үш жағдайды ажырату қажет.

1 - жағдай. Проекциялар жазықтығы проекциялаушы конустың жасаушыларымен түгелдей өзіндік нүктеде қиылысады. Бұл жағдайда шеңбер нүктелері өзіндік нүктелерге проекцияланады және оларды қосатын қисық сызық  $k'$  *эллипс* болады (58, а-сурет). Эллипсті өзіндік емес нүктесі жоқ екінші ретті қисық түрінде де анықтайды. Егер шеңбер жазықтығы проекциялар жазықтығына параллель болса, онда шеңбердің проекциясы да шеңбер болар еді.

2 - жағдай. Проекциялаушы конустың бір жасаушысы, мысалы  $AS$ , проекциялар жазықтығына параллель



58-сурет.

орналасқан делік (58, ә-сурет).  $AS$  түзуі  $\pi'$ -қа параллель болғандықтан, олардың қиылысу нүктесі  $A'_\infty$  шексіз қашықтықта жатады. Сондықтан шеңбер  $k$  жалғыз өзіндік емес нүктесі  $A'_\infty$  бар  $k'$  қисығына проекцияланады. Жалғыз өзіндік емес нүктесі бар екінші ретті қисықты *парабола* деп атайды.

3 - ж а ғ д а й. Проекциялаушы конустың екі жасаушысы, мысалы  $MS$  және  $NS$  проекциялар жазықтығына параллель орналасқан екен делік. Конустың жазықтыққа параллель екіден көп жасаушысы болуы мүмкін емес. Сонда шеңбердің екі нүктесі  $M$  және  $N$  өзіндік емес нүктелерге  $M'_\infty$  және  $N'_\infty$  проекцияланады. Яғни  $k'$ -тың екі өзіндік емес нүктесі болады екен. Өзіндік емес екі нүктесі бар екінші ретті қисық — *гипербола* болады (58, б-сурет).

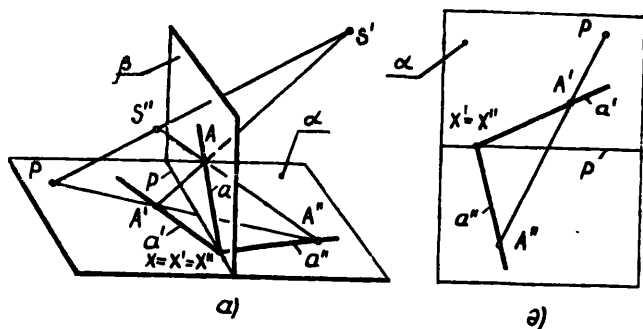
Біз шеңбер жазықтығы проекциялау центрі арқылы өтпейді деп қарастырдық. Ал, егер шеңбер жазықтығы проекциялау центрі арқылы өтетін болса, онда шеңбер

түзуге кескінделер еді. Сонымен, қорытып айтқанда, шеңбердің центрлік проекциясы не түзу, не шеңбер, не эллипс, не парабола, не гиперболола болуы мүмкін екен.

## 2.2. ЖАЗЫҚТЫҚТЫ ЖАЗЫҚТЫҚҚА ПРОЕКЦИЯЛАУ. ГОМОЛОГИЯ

Жоғарыда нүктенің, түзудің және шеңбердің проекцияларын салу қарастырылды. Жалпы алғанда, қисықтың проекциясын салу үшін оның нүктелерінің проекцияларын тауып, оларды бастыра қисық сызық жүргізеді. Енді жазықтықтың проекциясын қарастыралық. Егер жазықтық проекциялау центрі арқылы өтсе, онда оның проекциясы түзу (берілген және проекциялар жазықтықтарының қиылысу сызығы) болар еді. Осындай *проекциялау центрі* арқылы өтетін жазықтықтарды *проекциялаушы жазықтықтар* деп атайды.

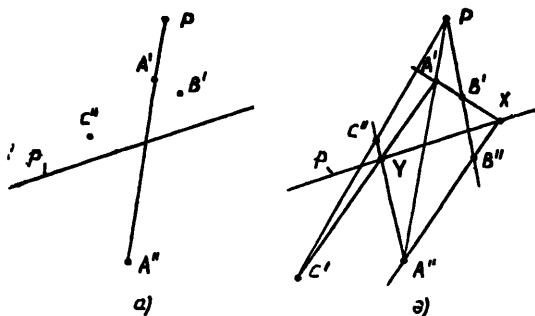
Өзара  $p$  түзуі бойымен қиылысатын  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарын алалық (59-сурет):  $\alpha \cap \beta = p$ . Осы  $\beta$  жазықтығының нүктелерін  $S'$  центрінен  $\alpha$  жазықтығына проекциялайық.  $A \in \beta$  нүктесінің проекциясы  $A' \in \alpha$  болсын. Сонда  $\beta$  жазықтығының әрбір нүктесіне  $\alpha$  жазықтығының белгілі бір нүктесі сәйкес болады. Берілген  $\beta$  жазықтығында жататын оның  $A$  нүктесі арқылы өтетін  $a$  түзуін қарастырсақ, ол  $p$  түзуімен  $X$  нүктесінде қиылысады:  $a \cap p = X$ . Осы  $a$  түзуін  $S'$  центрінен  $\alpha$  жазықтығына проекциялағанда алынатын  $a'$  түзуі  $A'$  және  $X$  нүктелері арқылы өтеді. Өйткені  $X$  нүктесі қозғалмайтын нүкте, яғни  $X' = X$  болады. Сонда  $\beta$  жазықтығының кез келген  $a$  түзуіне  $\alpha$  жазықтығының белгілі бір түзуі  $a'$  сәйкес келеді. Осы айтылғандарға керісінше  $\alpha$  жазықтығын  $S'$  центрінен  $\beta$  жазықтығына проекцияласақ, онда  $\alpha$  жазық-



59-сурет.

тығының  $A'$  нүктесіне  $\beta$  жазықтығының  $A$  нүктесі, ал  $\alpha$  жазықтығының  $a'$  түзуіне  $\beta$  жазықтығының  $a$  түзуі сәйкес болар еді. Осындай екі жазықтықтың арасындағы өзара бірімәнді сәйкестікті *коллинеация* деп атайды.

Енді проекциялау центрін  $S''$  нүктесіне көшірелік. Осы  $S''$  центрінен  $\beta$  жазықтығын  $\alpha$  жазықтығына проекциялағанда  $A$  нүктесіне  $A''$  нүктесі,  $a$  түзуіне  $a''$  түзуі сәйкес болады. Бұған керісінше,  $\alpha$  жазықтығын  $S''$  центрінен  $\beta$  жазықтығына проекцияласақ, онда  $A''$  нүктесіне  $A$  нүктесі,  $a''$  түзуіне  $a$  түзуі сәйкес болар еді. Сөйтіп  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтары арасында тағы да өзара бірімәнді сәйкестік алынды, тағы да алдыңғыдан өзге коллинеация алынды. Сонда  $\alpha$  жазықтығында нүктелер мен түзулердің екі жиыны, яғни екі *өріс* алынды. Нүктелер  $A', \dots$  және түзулер  $a', \dots$  бірінші өрісті анықтаса, нүктелер  $A'', \dots$  және түзулер  $a'', \dots$  екінші өрісті анықтайды. Бірінші өрістің  $A'$  нүктесіне екінші өрістің  $A''$  нүктесі сәйкес болады, және керісінше, екінші өрістің  $A''$  нүктесіне бірінші өрістің  $A'$  нүктесі сәйкес болады. Осындай бір жазықтықта орналасқан нүктелер мен түзулер өрістері арасындағы өзара бірімәнді сәйкестікті *гомология* деп атайды (59, ә-сурет).  $P$  нүктесі *гомологияның центрі*,  $p$  түзуі *гомологияның осі* деп аталады. Гомология осінде жатқан нүкте өзіне-өзі сәйкес болатындықтан, оны қозғалмайтын нүктелер жиыны ретінде анықтауға болады. Гомология коллинеацияның жеке түрі болғандықтан нүктеге нүкте, түзуге түзу сәйкес болады және өзара меншіктілік сақталады. Соңғы айтылғанды былай түсіну керек: *егер нүкте түзудің бойында жатса, онда ол нүктеге сәйкес нүкте берілген түзуге сәйкес түзудің бойында жатуы керек*. Бұлардан басқа гомологияның басты екі қасиеті бар. Гомологияның бірінші қасиеті: *сәйкес нүктелер гомология центрі арқылы өтетін түзудің бойында жатады*. Егер  $A'$  және  $A''$  сәйкес нүктелер, ал  $P$  гомология центрі болса, онда бұл үш нүктенің бір түзудің бойында жатулары керек:  $P \in (A'A'')$ . Гомологияның бұл қасиетін дәлелдеу үшін  $A, S'$  және  $S''$  нүктелері анықтайтын  $\gamma$  жазықтығын қарастыралық.  $AS', AS''$  және  $S'S''$  түзулері осы  $\gamma$  жазықтығында жатыр, ал  $A', A''$  және  $P$  нүктелері аталған түзулердің  $\alpha$  жазықтығындағы іздері. Олай болса, бұл үш нүкте  $A', A''$  және  $P$   $\alpha$  және  $\gamma$  жазықтықтарының қиылысу сызығы бойында орналасады, яғни бір түзуде жатады. Гомологияның екінші қасиеті: *сәйкес түзулер гомология осінде жататын нүктеде қиылысады*. Мысалы,  $a'$  және  $a''$  сәйкес түзулер



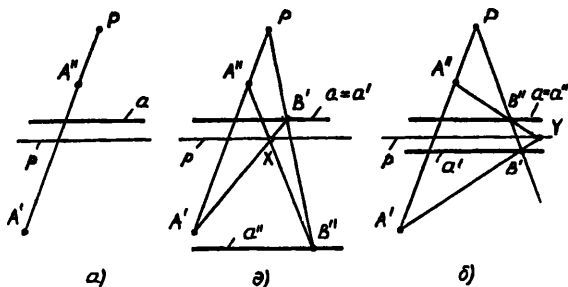
60-сурет.

болсын. Сонда олардың қиылысу нүктесі өзіне-өзі сәйкес нүкте болуы тиіс, яғни  $X' = X'' = a' \cap a''$  болады. Ал өзіне өзі сәйкес нүктелер гомология осінде жатады:  $X' = X'' \in \in p$ . Олай болса,  $a' \cap a'' = X' = X'' \in p$ .

**Теорема.** Гомология центрі  $P$ , осі  $p$  және екі сәйкес нүктелері  $A' \leftrightarrow A''$  арқылы толық анықталады.

Гомология анықталады дегенді қалай түсіну керек? Егер жазықтықтың кез келген нүктесіне сәйкес нүктені салу мүмкін болса, онда гомология берілген болып есептеледі. Сондықтан гомологияны беру үшін оның центрін —  $P$  нүктесін, осін —  $p$  түзуін және сәйкес  $A'$  пен  $A''$  нүктелерін белгілеуіміз керек (60, а-сурет). Гомологияны анықтайтын түзу  $p$ , нүктелер  $P$ ,  $A'$  және  $A''$  жалпы жағдайда орналасулары керек, яғни  $p \neq P$ ,  $p \neq A'$ ,  $p \neq A''$ ,  $A' \neq A''$ ,  $P \neq A'$ ,  $P \neq A''$ . Бірақ үш нүкте  $P$ ,  $A'$  және  $A''$  бір түзудің бойында орналасуы тиіс.

Жоғарыдағы теореманы дәлелдеу үшін жазықтықтың кез келген  $B'$  нүктесіне сәйкес  $B''$  нүктесін салуды көрсету жеткілікті. Берілген  $B'$  нүктесіне сәйкес  $B''$  нүктесі былай табылады.  $PB'$  түзуін жүргізелік (60, ә-сурет). Гомологияның бірінші қасиетіне сай  $B''$  нүктесі осы  $PB'$  түзуі бойында жатуы керек. Енді  $A'B'$  түзуін жүргізіп, оның гомология осімен қиылысу нүктесін табалық. Бұл нүктені  $X'$  деп белгілесек, онда оған сәйкес  $X''$  нүктесі осы  $X'$  нүктесімен бірігуі тиіс:  $X' = X'' = X$ . Гомологияның екінші қасиетіне сүйеніп  $A'B'$  түзуіне сәйкес  $A''B''$  түзуін салуға болады. Сәйкес түзулер гомология осінде қиылысатындықтан,  $A''B''$  түзуі  $A''$  және  $X$  нүктелері арқылы өтеді. Сонда  $B''$  нүктесі осы  $A''X$  түзуінде де жатады. Олай болса,  $B''$  нүктесі  $PB'$  және  $A''X$  түзулерінің қиылысу нүктесі болады. Жазықтықтың әр түрлі екі түзуі тек бір нүктеде қиылысатындықтан, есептің шешуі де



61-сурет.

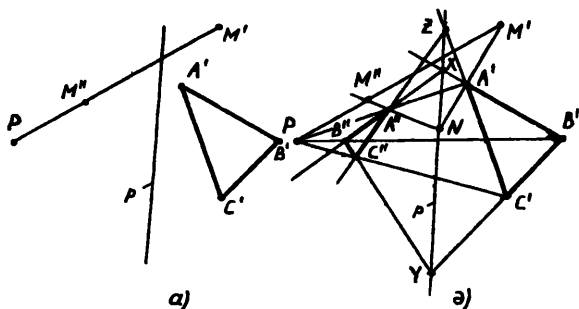
жалғыз болады. Егер  $C''$  нүктесі беріліп, оған сәйкес  $C'$  нүктесін салу керек болса, онда:  $C'' \in (PC'')$ ;  $(A'C'') \cap p = Y$ ;  $A' \in (A'Y)$ ;  $(PC'') \cap (A'Y) = C'$ .

1-есеп. Гомологияның центрі  $P$ , осі  $p$  және сәйкес нүктелері  $A' \leftrightarrow A''$  беріліп, гомология осіне параллель  $a$  түзуіне сәйкес түзуді салу керек болсын (61, а-сурет).

**Шешуі.** Берілген түзуге сәйкес түзуді салу үшін, оның бойынан екі нүкте алып, оларға сәйкес нүктелерді табады. Табылған екі нүктені бастыра түзу жүргізеді. Ал берілген есептің шарты бойынша түзу гомология осіне параллель. Сондықтан оның бір нүктесіне сәйкес нүктені салып, салынған нүкте арқылы гомология осіне параллель түзу жүргізсе болады. Өйткені гомологияның екінші қасиетіне сай сәйкес түзулер гомология осінде қиылысады. Бұл жағдайда гомология осіне параллель түзу онымен өзіндік емес нүктеде қиылысады. Берілген түзуге сәйкес түзу де гомология осімен өзіндік емес нүктеде қиылысуы үшін олардың параллель орналасулары қажет. Берілген түзуді бірінші өріске жатқызып, оны  $a'$  деп белгілеу (61, ә-сурет). Оның бойынан қалауымызша  $B'$  нүктесін алып, оған сәйкес  $B''$  нүктесін табалық.  $B''$  нүктесі арқылы  $p$  түзуіне параллель  $a''$  түзуі жүргізіледі. Ал берілген түзу екінші өрістің түзуі болса, онда оны  $a''$  деп белгілеу керек (61, б-сурет).  $B'' \in a''$  нүктесіне сәйкес  $B'$  нүктесін тауып,  $B' \in a' \parallel p$  болатындай етіп  $a'$  түзуін салуымыз керек.

2-есеп. Гомология  $(P, p, M' \leftrightarrow M'')$  және  $A'B'C'$  үшбұрышы берілген.  $A''B''C''$  үшбұрышын салу керек (62, а-сурет).

**Шешуі.**  $A'M'$  түзуі гомология осімен  $N$  нүктесінде қиылыссын.  $P$  нүктесін  $A'$  нүктесімен қосатын түзу  $M''$  нүктесін  $N$  нүктесімен қосатын түзумен  $A''$  нүктесінде



62-сурет.

қиылысады.  $A'B'$  түзуі  $p$  түзуімен  $X$  нүктесінде қиылысы.  $PB'$  және  $A''X$  түзулерін жүргізіп, олардың қиылысу нүктесін  $B''$  табамыз.  $B'C'$  түзуі гомология осімен  $Y$  нүктесінде қиылысады. Сонда  $C''$  нүктесі  $PC'$  және  $B''Y$  түзулерінің қиылысуы нәтижесінде табылады. Ал  $A'C'$  және  $A''C''$  түзулерінің қиылысу нүктесі  $Z$  гомология осінің бойында жатқанын көреміз (62, ә-сурет). Сонда табылған  $A''B''C''$  үшбұрышы берілген гомологияда  $A'B'C'$  үшбұрышына сәйкес үшбұрыш болады.

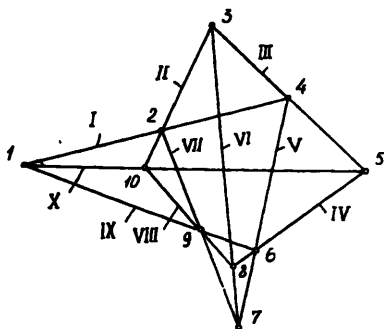
62, ә-суретке қарап отырып, біраз қорытындылар шығаруға болады. Алдымен гомологияны үш жұп сәйкес нүктелердің толық анықтайтынын көреміз. Мысалы  $A' \leftrightarrow A''$ ,  $B' \leftrightarrow B''$  және  $C' \leftrightarrow C''$  нүктелері берілсе, онда гомология анықталады. Шынында да  $A'A''$ ,  $B'B''$  және  $C'C''$  түзулері гомология центрі болатын бір нүкте арқылы өтулері тиіс. Олай болса гомология центрі анықталды. Енді сәйкес түзулер  $A'B' \leftrightarrow A''B''$ ,  $B'C' \leftrightarrow B''C''$  гомология осінде жататын  $X$  және  $Y$  нүктелерінде қиылысады. Түзу екі нүктесімен анықталатындықтан,  $XY$  түзуі гомология осі болады. Енді бізге гомологияның центрі  $P$ , осі  $p$  және үш жұп сәйкес нүктелері  $A' \leftrightarrow A''$ ,  $B' \leftrightarrow B''$ ,  $C' \leftrightarrow C''$  белгілі. Жоғарыда дәлелденген теоремаға сәйкес гомология осі, центрі және бір жұп сәйкес нүктелерімен толық анықталады. Енді  $A'B'C'$  және  $A''B''C''$  үшбұрыштарын қарастыралық. Олардың сәйкес төбелерін қосатын түзулер  $A'A''$ ,  $B'B''$  және  $C'C''$  бір нүкте  $P$  арқылы өтетінін, ал олардың сәйкес қабырғаларының қиылысу нүктелері  $X = (A'B') \cap (A''B'')$ ,  $Y = (B'C') \cap (B''C'')$  және  $Z = (A'C') \cap (A''C'')$  бір түзудің бойында жататынын көріп тұрмыз:  $P \in (A'A'')$ ;  $P \in (B'B'')$ ;  $P \in (C'C'')$ ;  $X \in p$ ,  $Y \in p$ ,  $Z \in p$ . Бұл айтылған фактілер Де-зарг теоремасы деп аталады.

Дезаргтың тура теоремасы: егер екі үшбұрыштың сәйкес төбелерін қосатын түзулер бір нүкте арқылы өтсе, онда ол үшбұрыштардың сәйкес қабырғаларының қиылысу нүктелері бір түзудің бойында жатады.

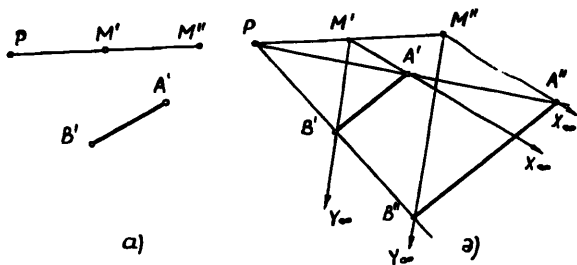
Дезаргтың кері теоремасы: егер екі үшбұрыштың сәйкес қабырғаларының қиылысу нүктелері бір түзудің бойында жатса, онда ол үшбұрыштардың сәйкес төбелері арқылы өтетін түзулер бір нүктеде қиылысады.

Бұл арада Дезаргтың конфигурациясы деп аталатын тамаша фигура туралы да айта кетелік. 10 нүктеден және 10 түзуден тұратын, әрбір нүкте арқылы тек 3 түзу өтетін және әрбір түзудің бойында тек 3 нүкте жататын фигураны Дезаргтың конфигурациясы дейді. 63-суретте Дезарг конфигурациясының нүктелері араб цифрлары, ал түзулері рим цифрлары көмегімен белгіленген. Әрбір нүкте арқылы тек үш түзу өтетінін көреміз. Мысалы 10 нүкте арқылы II, VIII және X түзулер өтеді, ал 8 нүкте арқылы IV, VI және VIII түзулер өтеді. Әрбір түзудің бойында тек үш нүкте жатады. Мысалы IV түзудің бойында 5, 6 және 8 нүктелер жатса, IX түзудің бойында 1, 6 және 9 нүктелер жатады.

Дезарг конфигурациясының кез келген нүктесін гомологияның центрі деп, ал осы нүкте арқылы өтпейтін түзуді гомологияның осі деп қарастыруға болады. Мысалға 7 нүкте гомологияның центрі, ал X түзу гомологияның осі болсын. Бұл жағдайда 2 нүктесіне 9 нүктесі, 3 нүктесіне 8 нүктесі және 4 нүктесіне 6 нүктесі сәйкес болар еді. 234 үшбұрышына 689 үшбұрышы сәйкес болғандықтан, олардың төбелерін қосатын түзулер VII, VI және V бір нүктеде (7 нүктесінде) қиылысады, ал сәйкес қабырғалары  $I \leftrightarrow IX$ ,  $II \leftrightarrow VIII$ ,  $III \leftrightarrow IV$  бір түзудің (X түзуінің) бойында жататын 1, 5 және 10 нүктелерде қиылысады. Егер 1 нүктесін гомологияның центрі, ал VI түзуін гомологияның осі деп қарастыратын болсақ, онда сәйкес нүктелер  $2 \leftrightarrow 4$ ,  $10 \leftrightarrow 5$ ,  $9 \leftrightarrow 6$  болар еді. Сол сияқты үш жұп



63-сурет.



64-сурет.

сәйкес нүктелерді тағайындау арқылы гомологияны анықтауға болады. Мысалы  $1 \leftrightarrow 5$ ,  $2 \leftrightarrow 3$  және  $9 \leftrightarrow 8$  сәйкес нүктелер болса, онда 10 нүктесі гомологияның центрі және  $V$  түзу гомологияның осі болар еді. Бұл жағдайда 129 үшбұрышына 538 үшбұрышы сәйкес болады.

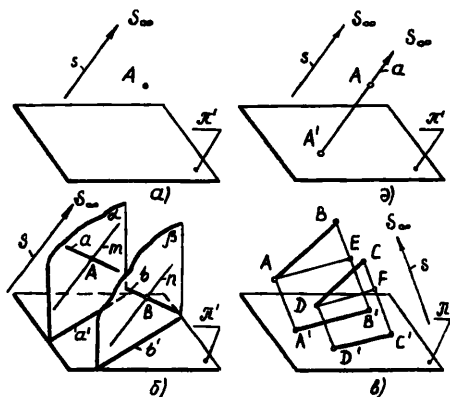
3-есеп. Берілген  $A'B'$  кесіндісіне сәйкес  $A''B''$  кесіндісін салу керек. Гомологияның центрі —  $P$  нүктесі, осі — сызба жазықтығының шексіз қашықтықта жатқан түзуі және  $M' \leftrightarrow M''$  сәйкес нүктелері (64, а-сурет).

Шешуі.  $A''$  нүктесін  $PA'$  түзуі, ал  $B''$  нүктесін  $PB'$  түзуі бойынан іздейміз.  $A'M'$  түзуін жүргіземіз. Бұл түзу гомология осімен өзіндік емес  $X_\infty$  нүктесінде қиылысады (64, б-сурет).  $A'M'$  түзуіне сәйкес түзу  $A''M''$  осы өзіндік емес нүкте  $X_\infty$  арқылы өтуі қажет, ал өзіндік емес нүктеде қиылысатын түзулер параллель болады. Сондықтан  $M''$  нүктесі арқылы  $A'M'$  түзуіне параллель түзу жүргіземіз. Осы түзу  $PA'$  түзуін  $A''$  нүктесінде қияды.  $B'$  және  $M'$  нүктелері арқылы өтетін түзу гомология осімен  $Y_\infty$  нүктесінде қиылысады.  $M''$  нүктесі арқылы  $B'M'$  түзуіне параллель етіп жүргізілген түзу  $PB'$  түзуімен  $B''$  нүктесінде қиылысады.  $M'B'$  және  $M''B''$  түзулері  $Y_\infty$  нүктесінде қиылысады. Табылған  $A''$  және  $B''$  нүктелерін кесіндімен қоссақ, есептің шешуін аламыз.

Гомологияны жазықтықтағы түрлендіру ретінде қарастыруға болады. Гомология осі түрлендірудің қозғалмайтын түзуі болады. Сол сияқты гомология центрі арқылы өтетін түзулер де қозғалмайды, яғни өздеріне-өздері сәйкес болады. Гомология центрі ерекше нүкте. Гомологияда шеңберге сәйкес қисық екінші ретті қисық болады. Жеке жағдайда ол эллипс те, парабола да, гиперболола да болуы мүмкін.

### 2.3. ПАРАЛЛЕЛЬ ПРОЕКЦИЯЛАУ. ШЕҢБЕРДІҢ ПАРАЛЛЕЛЬ ПРОЕКЦИЯСЫ

Проекциялау центрі өзіндік емес нүкте болатын центрлік проекцияның жеке түрін *параллель проекция* деп атайды. Өзіндік емес нүкте өзіндік түзудің көмегімен анықталатындықтан проекциялау аппараты бұл жағдайда проекциялар жазықтығынан және шексіз қашықтықта жатқан  $S_\infty$  нүктесі арқылы өтетін, *проекциялау бағыты* деп аталатын  $s$  түзуінен тұрады (65, а-сурет). Берілген  $A$  нүктесінің кескінін салу үшін  $A$  нүктесі арқылы  $s$  түзуіне параллель  $a$  түзуін жүргізеді. Осы  $a$  түзуі мен проекциялар жазықтығының қиылысу нүктесі  $A'$  іздеп отырған кескініміз болады (65, ә-сурет). Проекциялау бағыты проекциялар жазықтығына параллель болмауы тиіс ( $s \neq \pi'$ ). Бізге өзара параллель  $a$  және  $b$  түзулері беріліп, олардың кескіндерін салу керек болсын (65, б-сурет). Ол үшін  $a$  түзуі бойынан  $A$  нүктесін және  $b$  түзуі бойынан  $B$  нүктесін алып, осы  $A$  және  $B$  нүктелері арқылы  $s$  түзуіне параллель  $m$  және  $n$  түзулерін жүргіземіз. Сонда қиылысатын  $a$  және  $m$  түзулері  $\alpha$  жазықтығын, ал  $b$  және  $n$  түзулері  $\beta$  жазықтығын анықтайды.  $\alpha$  жазықтығы мен  $\pi'$  жазықтығының қиылысу сызығын  $a'$  деп белгілеп, оны  $a$  түзуінің кескіні ретінде қарастырамыз. Сол сияқты  $b'$  түзуі ( $b' = \beta \cap \pi'$ )  $b$  түзуінің кескіні болады. Табылған  $A'$  нүктесін  $A$  нүктесінің  $\pi'$  жазықтығындағы  $s$  бағытындағы *параллель проекциясы*,  $a'$  түзуін  $a$  түзуінің және  $b'$  түзуін  $b$  түзуінің *параллель проекциясы* деп атайды. Нәрсенің кескінін осылайша табуды *параллель проекциялау* дейді. Параллель проекциялауда да нүкте нүктеге, про-



65-сурет.

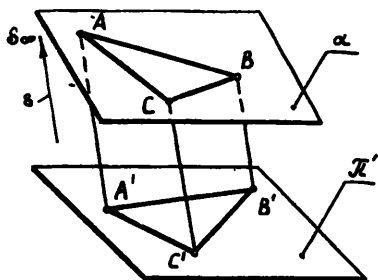
екциялау бағытына параллель емес түзу түзуге проекцияланады және өзара меншіктілік сақталады. Проекциялау бағытына параллель түзулер *проекциялаушы түзулер* деп аталады. Проекциялаушы түзулер нүктелерге кескінделеді (проекцияланады).

Берілген түзудің проекциясын салу үшін сол түзу арқылы проекциялау бағытына параллель жазықтық жүргізіледі. Жоғарыда  $a$  түзуінің проекциясын табу үшін осы  $a$  түзуі арқылы  $s$  түзуіне (проекциялау бағытына) параллель  $\alpha$  жазықтығы, ал  $b$  түзуін проекциялау үшін —  $\beta$  жазықтығы жүргізілді. Аталған  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарын *проекциялаушы жазықтықтар* деп атайды. Жалпы алғанда проекциялаушы жазықтық деп проекциялау бағытына параллель жазықтықты айтады. Проекциялаушы жазықтық түзуге проекцияланады.

Параллель түзулердің параллель проекциялары параллель болады. Егер  $a \parallel b$  болса, онда  $a' \parallel b'$  болады. Бұл айтылғанды дәлелдедік. Ол үшін  $a$  және  $b$  түзулері параллель екен деп ұйғаралық. Олай болса оларды проекциялайтын  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтары да өзара параллель болады. Өйткені  $\alpha$  жазықтығының қиылысатын екі түзуі ( $a$  мен  $m$ )  $\beta$  жазықтығының қиылысатын екі түзуіне параллель. Жоғарыда  $m$  және  $n$  түзулерін  $s$  түзуіне параллель етіп жүргіздік. Сондықтан  $m \parallel n$  болады. Өзара параллель екі жазықтықты үшінші бір жазықтықпен қиғанда пайда болатын екі түзу де өзара параллель болады.  $\alpha \parallel \beta$ ;  $\alpha \cap \pi' = a'$ ;  $\beta \cap \pi' = b'$ , олай болса,  $a' \parallel b'$  болады.

Өзара параллель  $AB$  және  $CD$  кесінділерін алып, оларды  $\pi'$  жазықтығына  $s$  бағытында проекциялайық (65, в-сурет). Сонда  $AB$  кесіндісі  $A'B'$  кесіндісіне, ал  $CD$  кесіндісі  $C'D'$  кесіндісіне проекцияланады және  $(A'B') \parallel (C'D')$  болады.  $A$  нүктесі арқылы  $A'B'$ -ка параллель етіп жүргізілген түзу  $BB'$ -ты  $E$  нүктесінде, ал  $D$  нүктесі арқылы  $C'D'$ -ка параллель етіп жүргізілген түзу  $CC'$ -ты  $F$  нүктесінде қияды. Сонда пайда болған үшбұрыштар  $AEB$  және  $DFC$  өзара ұқсас үшбұрыштар болады. Өйткені  $\angle BAE = \angle CDF$  және  $\angle ABE = \angle DCF$  болатынын дәлелдеу қиын емес. Осы екі үшбұрыштың ұқсастығынан  $|AB|/|DC| = |A'B'|/|D'C'|$  теңдігін аламыз. Яғни параллель кесінділер проекцияларының қатынасы сол кесінділердің өздерінің қатынасына тең болады екен. Енді  $CD$  кесіндісін  $AB$  кесіндісіне біртіндеп жақындата бердік. Сөйтіп, оларды  $A=D$  болатындай етіп беттестіреміз. Сонда бір түзудің бойында жататын екі кесінді аламыз. Олай болса, параллель проекциялау кезінде бір түзудің

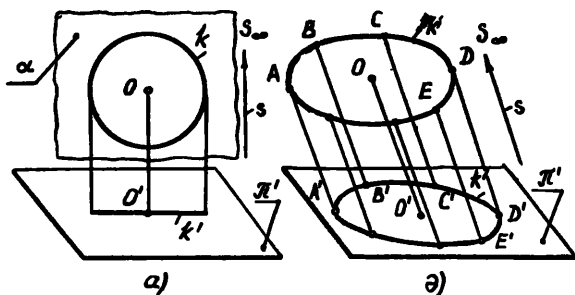
бойында орналасқан кесінділердің де қатынастары сақталады екен. Бұдан біз маңызды қорытынды аламыз: *түзуді берілген қатынаста бөлудің орнына оның кескінін берілген қатынаста бөлуге болады.* Мысалы,  $K$  нүктесі  $MN$  кесіндісінің дәл ортасы болса, онда  $K$  нүктесінің проекциясы  $K'$  берілген  $MN$  кесіндісі проекциясының, яғни  $M'N'$  кесіндісінің ортасы болады.



66-сурет.

Проекциялар жазықтығына параллель  $\alpha$  жазықтығында жатқан  $ABC$  үшбұрышының параллель проекциясын қарастыралық (66-сурет).  $A'B'C'$  үшбұрышы проекциялар жазықтығына параллель  $ABC$  үшбұрышының параллель проекциясы болсын ( $\alpha \parallel \pi'$ ). Сонда  $ABBA'$  төртбұрышы параллелограмм екенін көреміз. Параллелограммның қарама-қарсы қабырғалары өзара тең болатынын білеміз. Сондықтан  $|AB| = |A'B'|$  болады. Олай болса, проекциялар жазықтығына параллель кесінді өзінің ұзындығын (натурал шамасын) сақтап проекцияланады екен:  $|BC| = |B'C'|$  және  $|AC| = |A'C'|$ . Бұдан  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$  болатынын көреміз. *Проекциялар жазықтығына параллель жазық фигураның параллель проекциясы сол фигураның өзіне тең болады.*

Шеңбердің параллель проекциясын салу үшін оның бойынан көптеген нүктелер алып, сол нүктелердің параллель проекцияларын табады; одан кейін табылған проекцияларды қосады. Бұл арада екі жағдай болуы мүмкін. бірінші жағдайда шеңбер жазықтығы проекциялау бағытына параллель болады да, екінші жағдайда — параллель болмайды. Егер шеңбер жазықтығы  $\alpha$  проекциялау бағытына параллель болса, онда шеңбердің параллель проекциясы кесінді болатынын түсіну қиын емес (67, а-сурет). Центрі  $O$  нүктесі болатын  $k$  шеңбері  $\alpha$  жазықтығын анықтайтын және  $\alpha \parallel s$  болсын. Сонда  $O$  нүктесі  $O'$  нүктесіне проекцияланады, ал шеңбер ұзындығы шеңбердің диаметріне тең кесіндіге кескінделеді.  $O'$  нүктесі шеңбердің проекциясы болатын кесіндінің дәл ортасы болады. Енді шеңбер жазықтығы проекциялау бағытына параллель болмасын (67, ә-сурет). Берілген  $k$  шеңбері бойынан  $A, B, C, \dots$  нүктелерін алып, олар-



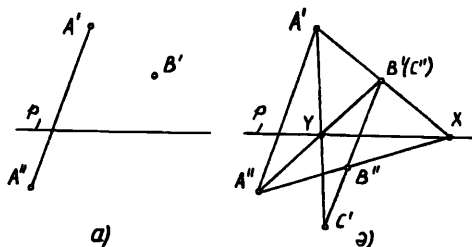
67-сурет.

дың  $\pi'$  жазықтығындағы проекцияларын —  $A', B', C', \dots$  нүктелерін табады; одан кейін  $A', B', C', \dots$  нүктелерін жатық сызықпен қосады. Проекциялаушы түзулердің жиыны  $\{AA', BB', \dots\}$  цилиндр бетін түзеді, ал цилиндрдің жазықтықпен қимасында, жалпы жағдайда, эллипс деп аталатын қисық алынады. Сонда шеңбердің параллель проекциясы, жалпы жағдайда, эллипс болады екен. Жоғарыда шеңбердің центрлік проекциясы парабола да, гиперболола да болатынын айттық. Бірақ шеңбердің параллель проекциясы парабола немесе гиперболола болуы мүмкін емес. Шеңбер бір жазықтықта жататын қисық болғандықтан, оның параллель проекциясы өзіне тең болуы үшін ол проекциялар жазықтығына параллель орналасуы керек. Яғни проекциялар жазықтығына параллель жазықтықта орналасқан шеңбердің параллель проекциясы да шеңбер болады. Сонымен, шеңбердің параллель проекциясы немесе кесінді, немесе эллипс, немесе шеңбер болуы мүмкін. Шеңбердің центрі оның проекциясы болатын эллипстің центріне проекцияланады. Эллипстің кез келген екі нүктесін қосатын кесіндіні оның *хордасы* деп атайды, ал центрі арқылы өтетін хорданы *диаметр* деп атайды. Шеңбердің диаметрлері өзара тең болса, эллипстің диаметрлері өзара тең бола бермейді. Егер екі диаметрдің біреуі екіншісіне параллель хордалардың орталары арқылы өтетін болса, онда оларды *түйіндес диаметрлер* деп атайды. Түйіндес екі диаметрдің біреуі екіншісіне параллель хорданы қалай бөледі. Шеңбердің түйіндес диаметрлері өзара перпендикуляр болады, ал эллипстің түйіндес диаметрлері өзара перпендикуляр бола бермейді. Параллель проекциялауда түзу кесінділерінің қатынасы сақталатындықтан, шеңбердің түйіндес диаметрлері эллипстің түйіндес диаметрлеріне проекцияланады.

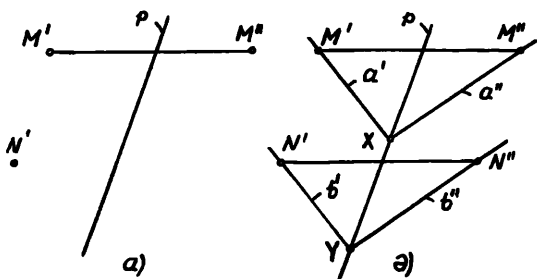
## 2.4. ТЕКТЕС СӘЙКЕСТІК. ШЕҢБЕРДІҢ ПАРАЛЛЕЛЬ ПРОЕКЦИЯСЫ БОЛАТЫН ЭЛЛИПСТІҢ ОСЬТЕРІН САЛУ

Гомологияның центрі өзіндік емес нүкте болатын жеке түрін *тектеc сәйкестік* немесе қысқаша *тектеcтік* деп атайды. Тектеcтікте сәйкес нүктелерді қосатын түзулер өзіндік емес нүктеде қиылысатындықтан өзара параллель болады. Сәйкес нүктелерді қосатын түзудің бағытын *тектеcтіктің бағыты* деп атайды. Сонда тектеcтік оның осі деп аталатын түзу  $p$  және сәйкес нүктелер  $A' \leftrightarrow A''$  арқылы толық анықталады (68, а-сурет). Бұл айтылғанды дәлелдеу үшін  $B'$  нүктесіне сәйкес  $B''$  нүктесін қалай салуға болатындығын қарастыралық.  $B'$  нүктесі **арқылы**  $A'A''$  түзуіне параллель түзу жүргізіп,  $B''$  нүктесін осы түзудің бойынан іздейтін боламыз. Гомологиядағы сияқты тектеcтікте де сәйкес түзулер  $p$  түзуі бойында (сәйкестік осінде) қиылысады.  $A'B'$  түзуін жүргізіп, оған сәйкес түзуді табамыз.  $A'B'$  түзуімен  $p$  түзуінің қиылысу ( $X$  нүктесін) нүктесін  $A''$  нүктесімен қосамыз. Сонда  $B'B''$  және  $A''X$  түзулерінің қиылысу нүктесі  $B''$  болады. Енді  $B'$  нүктесін екінші өріске жатқызып  $C''$  деп белгілеміз. Одан кейін оған сәйкес  $C'$  нүктесін анықталық:  $(A''C'') \cap p = Y$ ;  $(C'C'') \parallel (A'A'')$ ;  $(A'Y) \cap (C'C'') = C'$ . Жалпы жағдайда  $C'$  нүктесі  $B''$  нүктесінен өзге болады. Жеке жағдайда  $C' = B''$  болуы мүмкін. Осындай сызба **жазықтығы** нүктесін қай өріске жатқызсақ та оған сәйкес нүкте өзгермейтін тектеcтіктің жеке түрін *инволюция* деп атайды. Инволюция маңызды түрлендірулердің бірі болып есептеледі.

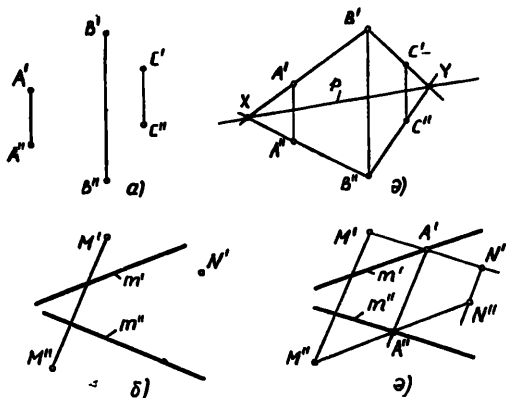
Тектеcтікті анықтау үшін екі жазықтық алып, олардың біреуін екіншісіне алдымен  $s'$  бағытында, одан кейін  $s''$  бағытында параллель проекциялауға болады. Қысқаша айтқанда, тектеcтік параллель проекциялау нәтижесінде алынады. Олай болса, тектеc сәйкестікте параллель



68-сурет.



түзулерге параллель түзулер сәйкес болады. Бұл қорытынды тектестікте сәйкес нүктелерді салуда қолданылады. Мысалы 69, а-суретте берілген тектестікте  $N'$  нүктесіне сәйкес  $N''$  нүктесін салуды қарастыралық. Алдымен  $N'$  нүктесі арқылы  $M'M''$  түзуіне параллель түзу жүргіземіз. Одан кейін  $M'N'$  түзуінің сәйкестік осі  $p$  мен қиылысу нүктесін пайдалануымыз керек. Бірақ бұл нүкте сызба салынатын парақтан тыс орналасқан. Міне осындай жағдайда былай істеуге болады:  $M'$  және  $N'$  нүктелері арқылы өзара параллель  $a'$  және  $b'$  түзулерін жүргізелік және бұл түзулердің осымен қиылысу нүктелері сызба салынып отырған қағаздың бетінде орналассын (69, ә-сурет).  $a' \cap p = X$  және  $b' \cap p = Y$ . Бұл екі түзуге сәйкес түзулер  $a''$  пен  $b''$  параллель болады. Олардың біріншісін  $M''$  және  $X$  нүктелері анықтайды, ал екіншісі  $Y$  нүктесі арқылы  $M''X$  түзуіне параллель жүргізіледі. Өзара меншіктілік сақталатындықтан  $N''$  нүктесін  $b''$  түзуі бойынан іздеуіміз керек. Сонда  $N'' = (N'N'') \cap b''$ , ал  $(N'N'') \parallel (M'M'')$  және  $a'' \parallel b''$  болады.

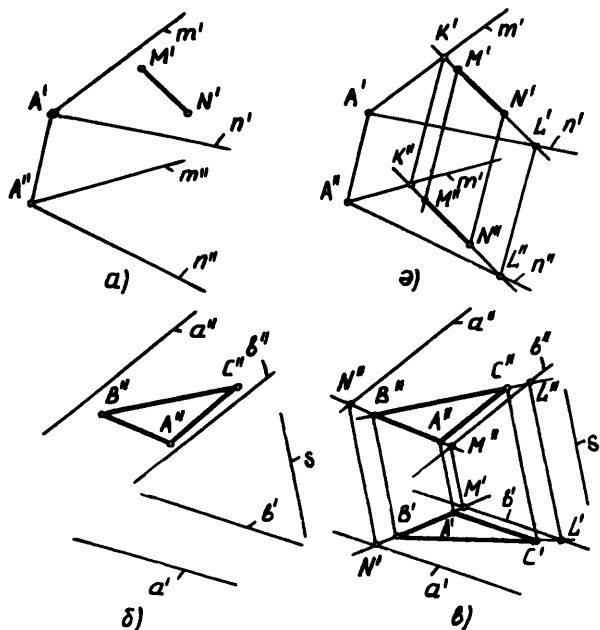


70-сурет.

(70, в-сурет). Егер  $A'C'$  және  $A''C''$  түзулерінің қиылысу нүктесін қарастырсақ, ол нүктеде  $p$  түзуі бойында жатуы тиіс. Өйткені  $A'B'C'$  және  $A''B''C''$  сәйкес үшбұрыштар, ал олардың сәйкес төбелерін қосатын түзулер бір нүктеде қиылысады (параллель түзулер өзіндік емес нүктеде қиылысады). Олай болса, Дезаргтың тура теоремасына сай олардың сәйкес қабырғаларының қиылысу нүктелері бір түзудің бойында жатулары керек.

Жазықтықты түзу және осы түзудің бойында жатпайтын нүкте анықтайды. Олай болса, тектестік бір жұп сәйкес нүктелер мен бір жұп сәйкес түзулер арқылы толық анықталады (70, б-сурет). Берілген сәйкес нүктелер ( $M' \leftrightarrow M''$ ) мен түзулер ( $m' \leftrightarrow m''$ ) тектестікті анықтайтынын көрсету үшін  $N'$  нүктесіне сәйкес  $N''$  нүктесін салуды көрсетсек болады (70, в-сурет). Ол үшін  $M'N'$  түзуін жүргізіп, оның  $m'$  түзуімен қиылысу нүктесін белгі-лелік:  $(M'N') \cap m' = A'$ . Осы  $A'$  нүктесіне сәйкес  $A''$  нүктесін анықтау қиын емес.  $A''$  нүктесі  $A'$  нүктесі арқылы  $M'M''$  түзуіне параллель етіп жүргізілген түзумен  $m''$  түзуінің қиылысу нүктесі болады. Сонда  $M'N'$  түзуіне сәйкес түзу  $M''$  және  $A''$  нүктелерімен толық анықталады, ал  $N''$  нүктесі осы  $M'N'$  түзуіне сәйкес түзу мен  $N'$  арқылы сәйкестік бағытында жүргізілген түзудің қиылысу нүктесі болады.

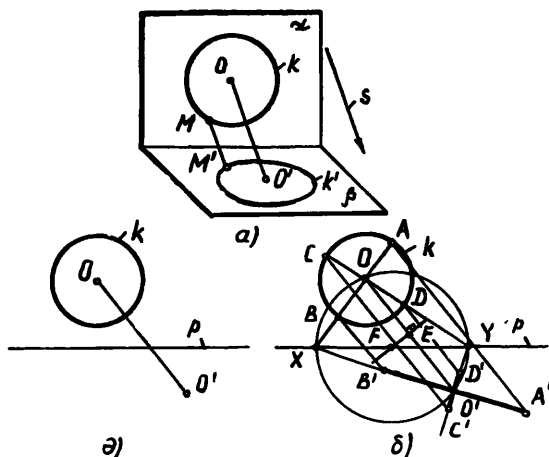
Жазықтықты қиылысатын екі түзу де анықтайды. Сондықтан қиылысатын екі жұп сәйкес түзулер  $m' \leftrightarrow m''$  және  $n' \leftrightarrow n''$  тектестікті анықтай алады (71, а-сурет). Шынында да  $m'$  пен  $n'$  түзулерінің қиылысу нүктесіне



71-сурет.

( $A'$ -қа)  $m''$  пен  $n''$  түзулерінің қиылысу нүктесі ( $A''$ ) сәйкес болса, онда кез келген  $M'N'$  кесіндісіне сәйкес  $M''N''$  кесіндісін салуға болар еді. Ол үшін  $M'N'$  түзуінің  $m'$  және  $n'$  түзулері мен қиылысу нүктелеріне сәйкес нүктелерді тауып, оларды түзу сызықпен қосу керек.  $(M'N') \cap m' = K'$ ;  $(M'N') \cap n' = L'$ ;  $(K'K'') \parallel (L'L'') \parallel (A'A'')$ ;  $(K'K'') \cap m'' = K''$ ;  $(L'L'') \cap n'' = L''$ ;  $(K''L'') = (M''N'')$ .  $M'$  және  $N'$  нүктелері арқылы сәйкестік бағытында жүргізілген түзулер  $K''L''$  түзуін  $M''$  және  $N''$  нүктелерінде қияды (71, ә-сурет).

Параллель екі түзу де жазықтықты анықтайтынын білеміз. Сондықтан екі жұп параллель түзулер  $a' \leftrightarrow a''$  пен  $b' \leftrightarrow b''$  тектестікті береді. Бірақ бұл жағдайда сәйкестік бағыты көрсетілуі тиіс (71, б-сурет). Бұндағы  $a' \parallel b'$  және  $a'' \parallel b''$ . Берілген  $A''B''C''$  үшбұрышына сәйкес  $A'B'C'$  үшбұрышын салуды қарастыралық.  $A''B''$  кесіндісін созып, оның  $a''$  және  $b''$  түзулерімен қиылысу нүктелерін табамыз.  $(A''B'') \cap a'' = N''$ ;  $(A''B'') \cap b'' = M''$ . Табылған  $N''$  және  $M''$  нүктелері арқылы тектестік бағыты  $s$  түзуіне параллель етіп жүргізілген түзулер  $a'$  және  $b'$



72-сурет.

түзулерін  $N'$  және  $M'$  нүктелерінде қияды.  $N'M'$  түзуімен  $A''$  және  $B''$  нүктелері арқылы сәйкестік бағытында жүргізілген түзулер  $A'$  және  $B'$  нүктелерінде кездеседі.  $B''C''$  кесіндісін  $b''$  түзуімен  $L''$  нүктесінде қиылысқанша соза-мыз.  $L''$  нүктесі арқылы  $s$  түзуі бағытында жүргізілген түзу  $b'$  түзуімен  $L'$  нүктесінде кездеседі.  $C''$  нүктесі арқылы сәйкестік бағытында жүргізілген түзу  $B'L'$  кесіндісімен  $C'$  нүктесінде кездеседі.

Енді шеңберге сәйкес фигураны зерттеп көрелік. Ол үшін  $\alpha$  жазықтығында центрі  $O$  нүктесі болатын шеңбер  $k$  алып, оны  $\beta$  жазықтығына  $s$  бағытында проекциялайық (72, а-сурет).  $O$  нүктесі  $O'$  нүктесіне проекцияланады, шеңбердің  $M$  нүктесі  $M'$  нүктесіне проекцияланады. Бұл жағдайда шеңбер эллипске ( $k'$ ) проекцияланатынын көреміз. Кесінділердің қатынасы сақталатындықтан,  $O'$  нүктесі эллипстің центрі болады.  $M$  нүктесі шеңбер сызатын болса, оның проекциясы  $M'$  эллипс сызады. Осы екі жазықтықтың ( $\alpha$  мен  $\beta$ ) арасында тектес сәйкестік пайда болады. Аталған жазықтықтардың қиылысу сызығы сәйкестік осі болады және ол қос нүктелер (қозғалмайтын нүктелер) жиыны болады, ал  $O \leftrightarrow O'$  сәйкес нүктелер.

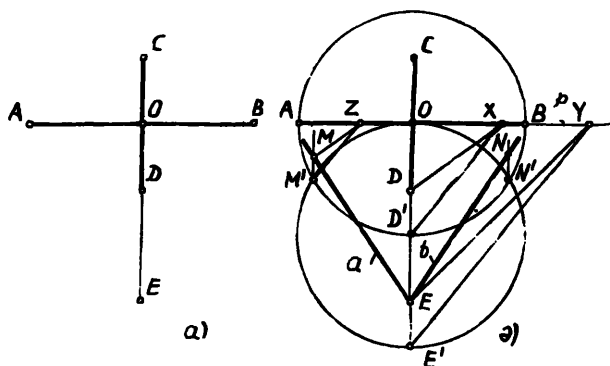
Сонда эллипсті шеңберге тектес фигура түрінде анықтауға болады. Бізге тектестік осі  $p$  және бір жұп сәйкес нүктелері  $O \leftrightarrow O'$  арқылы берілсін. Центрі  $O$  нүктесі болатын  $k$  шеңберіне тектес фигураны салу керек болсын

(72, ә-сурет). Шеңбердің диаметрі эллипстің диаметріне сәйкес болатыны жоғарыда айтылды. Шеңбер диаметрлері өзара тең болғанмен эллипс диаметрлері өзара тең болмайды. Эллипстің ең ұзын диаметрін *үлкен осі*, ал ең қысқа диаметрін *кіші осі* деп атайды. Эллипстің осьтері өзара перпендикуляр болатынын бұрыннан білеміз және эллипсті осьтері бойынша тұрғыза да аламыз. Сондықтан эллипстің осьтерін салуды қарастыралық.  $OO'$  кесіндісінің ортасын тауып, осы табылған нүктеде оған перпендикуляр тұрғызалық:  $|OE| = |EO'|$  және  $(EF) \perp (OO')$ . Осы перпендикулярдың сәйкестік осімен қиылысу нүктесін ( $F$ ) центр етіп алып,  $O$  және  $O'$  нүктелерін бастыра шеңбер жүргізелік. Соңғы шеңбер сәйкестік осімен  $X$  және  $Y$  нүктелерінде кездеседі. Шеңбердің өзара перпендикуляр  $AB$  және  $CD$  диаметрлері  $OX$  және  $OY$  түзулері бойында жатыр (72, б-сурет). Шеңбердің түйіндес диаметрлері  $AB$  мен  $CD$ -ға эллипстің түйіндес диаметрлері  $A'B'$  пен  $C'D'$  сәйкес болады.  $A'B'$  диаметрі  $XO'$  түзуі бойында жатса,  $C'D'$  диаметрі  $YO'$  түзуі бойында жатыр: ал соңғы екі түзу өзара перпендикуляр болады, өйткені олардың арасындағы бұрыш шеңбер диаметріне тіреледі, яғни жазық бұрыштың жартысына тең болады. Олай болса,  $A'B'$  кесіндісі эллипстің үлкен осі, ал  $C'D'$  кесіндісі эллипстің кіші осі болады.

Тектестікте өзара перпендикуляр түзулерге сәйкес түзулер өзара перпендикуляр болмайды. Бірақ өзара перпендикуляр түзулердің ішінде оларға тектес түзулер де өзара перпендикуляр болатындары бар екенін жоғарыда көрдік.  $AB$  және  $CD$  түзулеріне параллель түзулер алып, оларға сәйкес түзулерді салсақ, олар да өзара перпендикуляр болатынын көрер едік. Осындай өзара перпендикуляр түзулердің бағыттарын *тектестіктің басты бағыттары* деп атайды. Тектестіктің басты бағыттары өзара перпендикулярлық сақталатын түзулер жұбын анықтайды.

1-есеп. Эллипстің үлкен осі  $AB$  және кіші осі  $CD$  берілген. Осы екі осімен анықталған эллипске  $E$  нүктесі арқылы өтетін жанама түзуді салу керек (73, а-сурет).

Шешуі. Берілген эллипске диаметрі  $AB$  кесіндісі болатын шеңбер сәйкес болатын тектестікті қарастыралық. Сонда  $AB$  түзуі тектестіктің осі, ал  $D$  және  $D'$  нүктелері оның сәйкес нүктелері болады. Тектестіктің бағыты  $DD'$  сәйкестік осіне перпендикуляр (73, ә-сурет).  $(DD') \perp (AB) = p$ . Енді  $E$  нүктесіне сәйкес  $E'$  нүктесін табуымыз керек. Ол үшін  $E$  және  $D$  нүктелері арқылы



73-сурет.

параллель түзулер жүргізіп, олардың осьпен қиылысу нүктелерін  $X$  және  $Y$  белгілейміз.  $X$  нүктесін  $D'$  нүктесімен қосамыз, ал  $Y$  нүктесі арқылы  $D'X$  түзуіне параллель түзу жүргіземіз. Соңғы түзу  $E$  нүктесі арқылы сәйкестік бағытында жүргізілген түзумен  $E'$  нүктесінде кездеседі.  $E'$  нүктесінен шеңберге екі жанама жүргізуге болады. Осы жанамалардың шеңбермен жанасу нүктелерін былай анықтайды.  $OE'$  кесіндісін диаметр етіп алып шеңбер жүргізеді. Бұл шеңбер эллипске сәйкес шеңбермен  $M'$  және  $N'$  нүктелерінде қиылысады. Енді кері түрлендіруді қарастырамыз. Шеңбер қайтадан эллипске,  $E'$  нүктесі  $E$  нүктесіне түрленсін. Сонда шеңберге жүргізілген жанамаларға эллипске жүргізілген жанамалар сәйкес және жанасу нүктелеріне жанасу нүктелері сәйкес болады. Сондықтан  $M'$  және  $N'$  нүктелеріне тектес  $M$  және  $N$  нүктелерін тауып, оларды  $E$  нүктесімен қосамыз. Сонда іздеп отырған жанамаларымыз —  $a(E, M)$  және  $b(E, N)$  түзулері алынады. Сонымен эллипске жанама жүргізу үшін сол эллипсті салудың керегі жоқ екен.

2-есеп. Эллипстің үлкен осі  $AB$  және бір нүктесі  $M$  берілген (74, а-сурет). Эллипстің кіші осін табу керек.

Шешуі.  $AB$  кесіндісін диаметр етіп алып шеңбер жүргіземіз. Осы  $AB$  кесіндісінің ортасы —  $O$  нүктесі арқылы оған перпендикуляр жүргізсек, кіші осьтің бағытын аламыз. Шеңбер мен берілген эллипсті тектес фигуралар деп қарастырсақ,  $AB$  түзуі сәйкестіктің осі, ал сәйкестіктің бағыты  $AB$ -ға перпендикуляр болады.  $M$  нүктесі арқылы  $AB$ -ға перпендикуляр етіп жүргізілген түзу шеңберді  $M'$  нүктесінде қияды (74, ә-сурет). Сонда  $M \leftrightarrow M'$



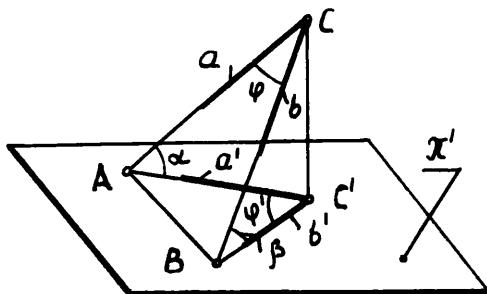
нүктесі арқылы өтеді.  $A$  нүктесі арқылы  $a'$  түзуіне параллель түзу жүргізсек, ол түзу  $BB'$  кесіндісімен  $C$  нүктесінде кездесер еді (75, ә-сурет). Егер  $a$  түзуінің  $\pi'$  жазықтығына көлбеулік бұрышы  $\alpha^\circ$  белгілі болса, онда  $ACB$  тікбұрышты үшбұрышынан мына теңдікті аламыз:  $|AC| = |A'B'| = |AB| \cos \alpha^\circ$ . Осы теңдіктен кесіндінің тікбұрышты проекциясын сол кесіндіні оның проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышының косинусына көбейту нәтижесінде анықтауға болады. Кесіндінің тікбұрышты проекциясының ұзындығы сол кесіндінің натурал ұзындығынан үлкен болмайтынын көреміз. Егер  $\alpha^\circ = 0^\circ$  немесе  $\alpha^\circ = 180^\circ$  болса, онда кесінді ұзындығын сақтап проекцияланады. Жалпылап айтқанда, проекциялар жазықтығына параллель болмайтын фигураның тікбұрышты проекциясы сол фигураның өзінен әрқашан кіші болады.

Тікбұрыштап проекциялау кезінде жоғарыда қарастырылған центрлік және параллель проекциялаудың қасиеттері түгелдей сақталады.

Өзара  $C$  нүктесінде қиылысатын  $a$  және  $b$  түзулері арасындағы бұрыш  $\varphi$  болсын. Осы бұрышты  $\pi'$  жазықтығына тікбұрыштап проекциялайық (76-сурет).  $A$  нүктесі  $a$  түзуінің,  $B$  нүктесі  $b$  түзуінің  $\pi'$  жазықтығындағы іздері, ал  $C'$  нүктесі  $C$  нүктесінің осы  $\pi'$  жазықтығындағы тік бұрышты проекциясы болсын. Сонда  $a' = (AC')$  және  $b' = (BC')$  түзулері  $a$  және  $b$  түзулерінің тікбұрышты проекциялары болады, ал  $\varphi$  бұрышы  $\varphi'$  бұрышына проекцияланады:  $\angle ACB = \varphi$ ;  $\angle AC'B = \varphi'$ .  $AC'C$  және  $BC'C$  тік бұрышты үшбұрыштарынан мына теңдіктерді аламыз:

$$|AC'| = |AC| \cos \alpha; \quad |BC'| = |BC| \cos \beta; \quad |AC| = \frac{|CC'|}{\sin \alpha};$$

$$|BC| = \frac{|CC'|}{\sin \beta}. \quad (2.5.1.)$$



76-сурет.

$ABC$  үшбұрышына косинустар теоремасын қолданалық. Сонда  $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC||BC|\cos\varphi$ . Енді  $ABC'$  үшбұрышына косинустар теоремасын қолданалық. Сонда  $|AB|^2 = |AC'|^2 + |BC'|^2 - 2|AC'||BC'|\cos\varphi'$ . Осы теңдіктерді салыстырып, (2.5.1) теңдігін ескерсек, берілген бұрыш пен оның тікбұрышты проекциясы арасындағы байланысты анықтайтын формуланы аламыз:

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}. \quad (2.5.2.)$$

Тік бұрыш берілген деп ұйғаралық, яғни  $\varphi = 90^\circ$  болсын. Сонда  $\cos 90^\circ = 0$  болғандықтан, (2.5.2) теңдігін былайша жазуға болады:

$\cos\varphi' = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$ . Енді тік бұрыштың проекциясы да тік бұрыш болсын, яғни  $\varphi' = 90^\circ$  екен делік. Сонда  $\sin\alpha\sin\beta = 0$ . Бұл теңдік орындалуы үшін  $\sin\alpha = 0$  немесе  $\sin\beta = 0$  болуы тиіс.  $\sin\alpha = 0$  болуы үшін  $\alpha = 0^\circ$  болуы керек, яғни  $a$  түзуі  $\pi'$  жазықтығына параллель орналаса ғана бұл шарт орындалады. Ал  $\sin\beta = 0$  болуы үшін  $b$  түзуі проекциялар жазықтығына параллель орналасуы қажет. Осы қорытындыны теорема түрінде тұжырымдалық.

Тік бұрыштың тікбұрышты проекциясы туралы теорема: *тік бұрыш тік бұрышқа проекциялануы үшін бір қабырғасының проекциялар жазықтығына параллель болуы, ал екінші қабырғасының перпендикуляр болмауы қажетті де жеткілікті.*

Егер жазық бұрыштың екі қабырғасы да проекциялар жазықтығына параллель болса (бұл жағдайда  $\alpha = 0^\circ$  және  $\beta = 0^\circ$  болады), онда (2.5.2) теңдігінен  $\cos\varphi' = \cos\varphi \Rightarrow \varphi' = \varphi$  болатынын көреміз. Бұл жазық бұрыш өзінің натурал шамасын сақтап проекцияланатынын көрсетеді. Егер бұрыштың бір қабырғасы проекциялар жазықтығына перпендикуляр болса, онда бұрыш түзуге проекцияланады (бұл жағдайда  $\varphi' = 0^\circ$  болады).

Нәрсенің тікбұрышты проекциясын салу үшін проекциялар жазықтығын таңдап алса болады. Техникада көбіне тікбұрыштап проекциялау әдісін пайдаланады.

## 2.6. ҚАЙТЫМДЫЛЫҚ ТУРАЛЫ ТҮСІНІК. ТЕХНИКАДА КЕЗДЕСЕТІН ҚАЙТЫМДЫ КЕСКІНДЕР

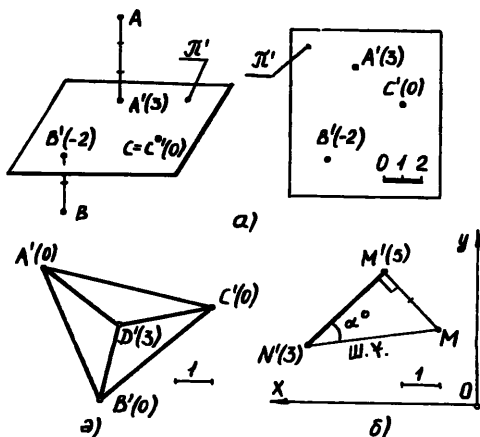
Нәрсені жазықтыққа проекциялау нәтижесінде оның әрбір нүктесіне проекциялар жазықтығының тек жалғыз нүктесі сәйкес келетінін көрдік. Бұған керісінше проек-

циялар жазықтығының әрбір нүктесіне кеңістікте оны проекциялаушы түзудің барлық нүктелері сәйкес болады, яғни сәйкестік бірімді болмайды. Басқаша айтқанда, бір проекциядан тұратын кескін нүктенің кеңістіктегі орнын анықтай алмайды. Нәрсенің формасын және кеңістіктегі орнын анықтауға мүмкіндік бермейтін кескіндерді *қайтымсыз* деп атайды. Қайтымсыз кескіндердің ғылым мен техника үшін маңызы шамалы. Неліктен бір проекциядан тұратын кескін қайтымсыз болады?

Кеңістіктегі нүктенің орнын анықтау үшін оның үш координатасы белгілі болуы керек. Фигура мен оның кескіні арасында өзара бірімді сәйкестік орнату үшін фигураның әрбір нүктесіне кескіннің белгілі бір нүктесі сәйкес болуы керек және керісінше, кескіннің әрбір нүктесіне фигураның белгілі бір нүктесі сәйкес болуы қажет. Яғни фигурда қанша нүкте болса, оның кескінінде де сонша нүкте болуы шарт. Түзудің нүктелер санын жазықтықтың нүктелер санымен салыстыруға бола ма? Жоқ, болмайды. Өйткені жазықтықтың нүктелері түзуге қарағанда әлдеқайда көп. Түзу нүктелерінің орнын анықтау үшін оның бойынан алынған бас нүктеден қашықтықтарын көрсету жеткілікті. Түзуді бірпараметрлі нүктелер жиыны деп те қарастырады, яғни түзу нүктелерінің саны  $\infty^1$  болады. Жазықтықта нүктенің орны екі координатаның көмегімен анықталады. Жазықтықты екіпараметрлі нүктелер жиыны деп те қарастырады, яғни жазықтық нүктелерінің саны  $\infty^2$  болады. Кеңістіктегі нүктелердің орны үш параметрге байланысты анықталып, үшөлшемді кеңістік нүктелерінің саны  $\infty^3$  болады. Сондықтан үшөлшемді кеңістік фигуралары мен олардың жазықтықтағы кескіндері арасында бірімді сәйкестік орнату үшін кескіндер де үш параметрге тәуелді болулары қажет. Олай болса, бір проекциядан тұратын кескін қайтымды бола алмайды.

Нәрсенің формасын және кеңістіктегі орнын анықтауға мүмкіндік беретін кескіндерді *қайтымды кескіндер* деп атайды. Қайтымды кескіндерді алу әдістері көп-ақ. Техника мен ғылымда қайтымды кескін алудың төмендегі 4 әдісі кең тараған.

**Сандық белгілері бар проекциялар.** Проекциялар жазықтығына нүкте тікбұрыштап проекцияланады, одан кейін проекцияның жанына нүкте мен проекциялар жазықтығының ара қашықтығы жазылады. Бұл ара қашықтықты *сандық белгі* деп атайды. 77, а-суретте сандық белгілері бар проекцияларды алу жолы көрсетілген. Егер



77-сурет.

нүкте проекциялар жазықтығынан жоғары орналасса, онда сандық белгінің алдына ешқандай таңба қойылмайды. Проекциялар жазықтығынан төмен орналасқан нүктелердің сандық белгілері алдына минус таңбасы қойылады. Проекциялар жазықтығының нүктелері нөлге тең сандық белгілерге ие болады. Кескінде масштаб көрсетілуге тиіс.

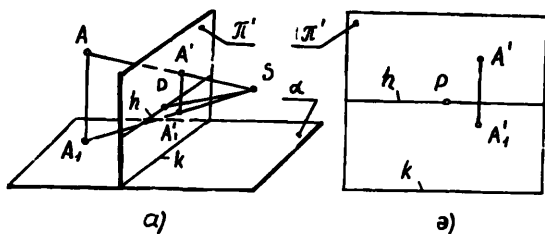
77, ә-суретке көңіл аударыңыздар. Онда сандық белгілері бар проекцияларда үшбұрышты пирамида  $ABCD$  кескінделген. Кескіннен оның табаны болатын үшбұрыш  $ABC$  проекциялар жазықтығында жатқанын және пирамиданың биіктігі 3-ке тең болатынын көреміз. Сандық белгілері бар проекцияларды пайдаланып, есептер шығаруға болады. Мысалы,  $MN$  кесіндісінің ұзындығын салуды көрсетелік (77, б-сурет). Проекцияда кесіндінің ұзындығы сақталуы үшін ол кесінді проекциялар жазықтығына параллель орналасуы керек. Жалпы жағдайда координаталары белгілі екі нүктені қосатын кесіндінің ұзындығы былай анықталады:

$$|MN| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}.$$

Осы кесіндінің  $\pi'$  жазықтығындағы тікбұрышты проекциясының ұзындығы (Пифагор теоремасы)

$$|M'N'| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}.$$

Енді тікбұрышты  $MM'N'$  үшбұрышын былайша салалық:



78-сурет.

$M'$  нүктесі арқылы  $M'N'$  түзуіне перпендикуляр түзу жүргіземіз; осы түзудің бойына кесінді ұштарының сандық белгілерінің айырымына тең кесінді салып  $M$  нүктесін аламыз.  $|M'M| = z_N - z_M = -2$ . Осы үшбұрыштың гипотенузасы  $MN'$  берілген нүктелерді қосатын кесіндінің шын ұзындығы болады.

**Е р е ж е.** Кесіндінің шын ұзындығы бір катеті проекцияға, ал екінші катеті оның ұштарының сандық белгілерінің айырымына тең тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы ретінде анықталады.

Осы  $MM'N'$  үшбұрышынан берілген  $MN$  түзуінің проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын да анықтауға болады. Бұл бұрыш гипотенуза мен проекцияға тең катет аралығындағы бұрыш ретінде анықталады:  $\alpha^\circ = \angle MN'M' = (MN), \pi'$ .

**Сызықтық перспектива.** Заттық жазықтық деп аталатын  $\alpha$  жазықтығына нүкте тікбұрыштап проекцияланады (78, а-сурет). Осы тікбұрышты проекция нүктенің табаны деп аталады. Нүкте  $S$  центрінен  $\pi'$  (картина) жазықтығына проекцияланады. Нүктенің табаны да проекцияланады.  $(SA)\pi' = A'$  — нүктенің перспективасы,  $(SA_1)\pi' = A'_1$  — нүкте табанының перспективасы.  $P$  нүктесі  $S$  нүктесінің  $\pi'$  жазықтығындағы тікбұрышты проекциясы; осы  $P$  нүктесін *картинаның бас нүктесі* дейді.  $\pi' \cap \alpha = k$  — картинаның табаны, ал  $h$  түзуі ( $P \in h \parallel k$ ) *горизонт сызығы* деп аталады. Кескінде горизонт сызығы, бас нүкте  $P$  және нәрсенің перспективасы көрсетіледі (78, б-сурет). Картина табаны  $k$  және нүктенің табаны  $A_1$ -дің перспективасы  $A'_1$  кескіннің қайтымды болуына әсерін тигізеді. Сонда кеңістіктегі  $A$  нүктесіне сызықтық перспективада  $A'$  және  $A$  нүктелер жұбы сәйкес болады. Кеңістікте  $\infty^3$  нүкте бар екені туралы жоғарыда айтылған. Ал  $\pi'$  жазықтығында қанша нүктелер жұбы бар?

$A'$  нүктесінің  $\pi'$  жазықтығындағы орны екі параметрдің көмегімен анықталады, ал  $A'_1$  нүктесін анықтау үшін тағы бір параметр керек. Сонда  $A'$  және  $A'_1$  нүктелер жұбын үш параметрдің көмегімен анықтаймыз. Олай болса,  $\pi'$  жазықтығында  $\infty^3$  нүктелер жұбы бар.

Бұл кітапта *аксонометрия* және *Монж эюрі* деп аталатын қайтымды кескіндерді алудың екі әдісі ғана қарастырылған.

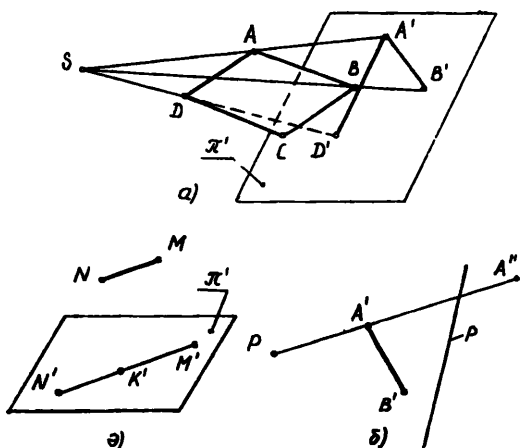
## Есептер

1. Проекциялау аппараты:  $S$  — проекциялау центрі және  $\pi'$  — проекциялар жазықтығы белгілі болсын. Берілген  $ABCD$  тіктөртбұрышының үш төбесінің проекциялары белгілі деп қарастырып (79, а-сурет) оның

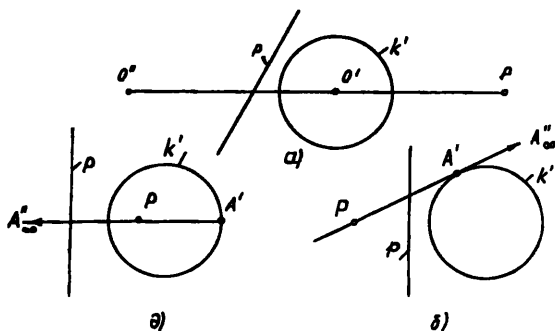
- центрлік проекциясын салуды аяқтау керек;
- $AB$  түзуінің  $\pi'$  жазықтығындағы ізін табу керек;
- $ABCD$  төртбұрышының проекциялар жазықтығындағы ізін салу керек;

—  $ABCD$  төртбұрышы жазықтығының өзіндік емес түзуінің  $\pi'$  жазықтығындағы центрлік проекциясын табу керек. Табылған  $A'B'C'D'$  төртбұрышын параллелограмм, немесе трапеция болады деп айта аламыз ба?

2.  $MN$  кесіндісі және оның  $\pi'$  жазықтығындағы центрлік проекциясы  $M'N'$  берілген (79, ә-сурет). Проекциялау центрін,  $MN$  кесіндісінің  $K$  нүктесін оның проекциясы  $K'$  бойынша анықтау керек.  $MN$  түзуінің  $N$  нүктесіне қатысты  $M$  нүктесіне симметриялы болатын  $L$  нүктесінің



79-сурет.



80-сурет.

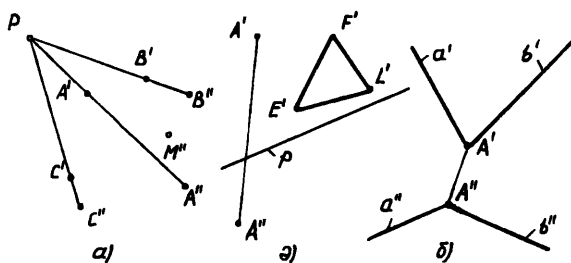
проекциясын  $L'$  салыңыздар.  $M'$  және  $L'$  нүктелері  $N'$  нүктесіне қатысты симметриялы болуы мүмкін бе?

3. Берілген гомологияда ( $P, p, A' \leftrightarrow A''$ )  $A'B'$  кесіндісіне сәйкес  $A''B''$  кесіндісін салу керек (79, б-сурет).  $A'B'$  түзуінің өзіндік емес нүктесіне сәйкес нүктені табу керек.

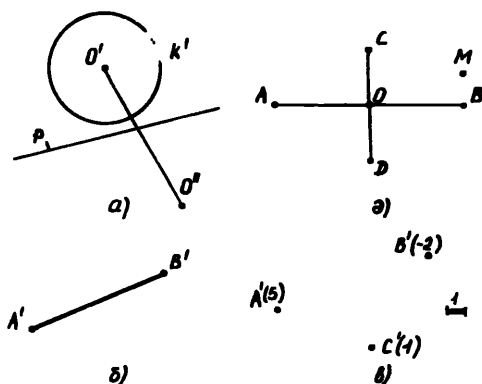
4. Берілген гомологияда ( $P, p, O' \leftrightarrow O''$ ) центрі  $O'$  нүктесі болатын  $k'$  шеңберіне сәйкес  $k''$  қисығын салу керек (80-сурет). Гомологияның центрі  $P$  арқылы оның осіне параллель етіп жүргізілген түзу 80, а-суретте  $k'$  шеңберімен қиылыспайды, 80, б-суретте жанасады және 80, в-суретте қиылысады. Сонда  $k'$  шеңберіне сәйкес  $k''$  қисығы қандай қисық болатынын анықтаңыздар.

5. Гомологияны сәйкес үш жұп нүктелер  $A' \leftrightarrow A''$ ,  $B' \leftrightarrow B''$  және  $C' \leftrightarrow C''$  анықтайды (81, а-сурет). Гомологияның осін және  $M''$  нүктесіне сәйкес  $M'$  нүктесін салыңыздар.

6. Текестік сәйкес нүктелері  $A' \leftrightarrow A''$  және осі  $p$  ар-



81-сурет.



82-сурет.

қылы анықталған.  $E'F'L'$  үшбұрышына сәйкес  $E''F''L''$  үшбұрышын салыңыздар (81, ә-сурет).

7. Тектестік қиылысатын түзулер жұбы арқылы анықталған:  $a' \cap b' = A'$ ;  $a'' \cap b'' = A''$ ;  $A' \leftrightarrow A''$ . Тектестік сәйкестіктің осін салыңыздар (81, б-сурет).

8. Тектестік берілген:  $O' \leftrightarrow O''$  сәйкес нүктелер,  $p$  — сәйкестік осі. Центрі  $O'$  нүктесі болатын  $k'$  шеңберіне сәйкес қисықты салыңыздар және сәйкестіктің басты бағыттарын анықтаңыздар (82, а-сурет).

9. Осьтері арқылы берілген эллипске тектес сәйкестікті пайдаланып  $M$  нүктесі арқылы өтетін жанама түзу салыңыздар (82, ә-сурет).

10. Кеңістікте  $m$  және  $n$  түзулері арасындағы бұрыш  $\varphi = 45^\circ$ , ал  $m$  түзуі проекциялар жазықтығына  $30^\circ$ -қа тең бұрышпен және  $n$  түзуі —  $60^\circ$ -қа тең бұрышпен көлбейді. Осы  $m$  және  $n$  түзулері құрайтын бұрыштың тікбұрышты проекциясын есептеп табыңыздар.

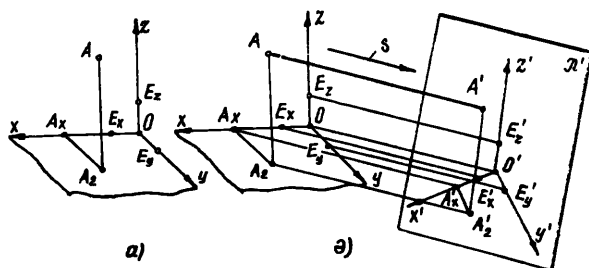
11.  $ABC$  тік бұрышты үшбұрыш:  $\angle ABC = 90^\circ$ . Оның катеттерінің біреуі екіншісінен екі есе ұзын.  $AB$  катетінің тікбұрышты проекциясы берілген (82, б-сурет).  $AB \parallel \pi'$  және  $BC$  түзуі проекциялар жазықтығына  $30^\circ$ -қа тең бұрышпен көлбейді деп қарастырып,  $ABC$  үшбұрышының тікбұрышты проекциясын салуды аяқтаңыздар.

12. Сандық белгілері бар проекциялары берілген  $ABC$  үшбұрышының натурал (шын) мөлшерін салыңыздар (82, в-сурет) және  $AB$  түзуінің проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтаңыздар.

### 3 - тарау. АКСОНОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОЕКЦИЯЛАР

#### 3.1. АКСОНОМЕТРИЯЛЫҚ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСЫ

Кеңістікте  $A$  нүктесін және тікбұрышты координаталар системасын  $Oxuz$  алалық (83, а-сурет).  $Oxuz$  натурал координаталар системасы деп аталады. Натурал координаталар системасы үш түзуден ( $Ox$ ,  $Oy$  және  $Oz$ ) тұрады. Бұл түзулерді координаталық осьтер деп атайды:  $Ox$  — абсциссалар осі;  $Oy$  — ординаталар осі;  $Oz$  — аппликатаалар осі. Олар өзара перпендикуляр орналасады.  $O$  — координаталар системасының бас нүктесі. Бас нүктеден бастап осьтерге өзара тең кесінділер салып,  $E_x$ ,  $E_y$  және  $E_z$  нүктелерін аламыз. Сонда пайда болған  $OE_x$ ,  $OE_y$  және  $OE_z$  кесінділерінің ұзындықтарын  $e$  әрпімен белгілеп, оны *натурал масштаб* деп атайды:  $|OE_x| = |OE_y| = |OE_z| = e$ . Натурал координаталар системасы өзара перпендикуляр, координаталық жазықтықтар деп аталатын, үш жазықтықтан тұрады. Олар:  $Oxy$ ,  $Oyz$  және  $Oxz$  жазықтықтары. Енді  $A$  нүктесінен  $Oxy$  жазықтығына перпендикуляр түсірелікте, оның табанын  $A_2$  деп белгілелік. Осы  $A_2$  нүктесі арқылы  $Oy$  осіне параллель түзу жүргізсек, ол түзу  $Ox$  осін  $A_x$  нүктесінде қияды. Алынған  $OA_xA_2$  сынығын  $A$  нүктесінің *натурал координаталар сынығы* деп атайды. Ол үш бөліктен тұрады:  $OA_x$ ,  $A_xA_2$  және  $A_2A$ . Бірінші бөлік  $OA_x$  берілген нүктеден  $Oyz$  жазықтығына дейінгі қашықтыққа тең, сондықтан ол нүктенің абсциссасын анықтайды:  $|OA_x| / |OE_x| = x$ . Екінші бөлік  $A_xA_2$  берілген нүктеден  $Oxz$  жазықтығына дейінгі қашықтыққа тең, сондықтан ол нүктенің ординатасын анықтайды:  $|A_xA_2| / |OE_y| = y$ . Үшінші бөлік  $A_2A$  берілген нүктеден  $Oxy$  жазықтығына дейінгі қашықтыққа тең, сондықтан ол нүктенің аппликатасын анықтайды:  $|A_2A| / |OE_z| = z$ .



83-сурет.

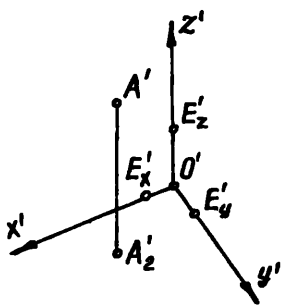
Кез келген  $\pi'$  жазықтығындағы  $A$  нүктесінің және натурал координаталар системасының кескіндерін салу керек болсын. Ол үшін центрлік немесе параллель проекциялау әдістерінің біреуін пайдалануға болады. Техникада параллель проекциялау әдісі кең тараған. Сондықтан проекциялау бағытын ( $s$ ) тағайындайық. Тағайындалған бағытта натурал координаталар системасын  $\pi'$  жазықтығына параллель проекциялайық. Сонда  $O$ ,  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $A_x$ ,  $A_2$  және  $A$  нүктелері сәйкес  $O'$ ,  $E'_x$ ,  $E'_y$ ,  $E'_z$ ,  $A'_x$ ,  $A'_2$  және  $A'$  нүктелеріне проекцияланады (83, б-сурет). *Охуз* системасы  $\pi'$  жазықтығында жататын  $O'x'y'z'$  системасына проекцияланады.  $O'x'y'z'$  аксонометриялық координаталар системасы деп аталады.  $O'E'_x$ ,  $O'E'_y$  және  $O'E'_z$  кесінділері аксонометриялық масштабтарды анықтайды. Олардың ұзындықтары жалпы жағдайда әр түрлі болады.  $A'$  нүктесін  $A$  нүктесінің аксонометриялық проекциясы, көбіне қысқартып аксонометриясы деп, ал  $A'_2$  нүктесін  $A$  нүктесінің екінші проекциясы деп атайды. Сонда  $O'A'_x A'_2 A'$  сынығы  $A$  нүктесінің аксонометриялық координаталар сынығы болады. Осы сынықтың бөліктері  $A$  нүктесінің аксонометриялық координаталарын анықтайды:  $|O'A'_x|/|O'E'_x| = x'$  — оның абсциссасы,  $|A'_x A'_2|/|O'E'_y| = y'$  — ординатасы және  $|A'_2 A'|/|O'E'_z| = z'$  — аппликаты болады.  $(A'A'_2) \parallel (O'z')$ ,  $(A'_2 A'_x) \parallel (O'y')$ .

Аксонометриялық осьтер ( $O'x'$  — абсциссалар осі,  $O'y'$  — ординаталар осі,  $O'z'$  — аппликаталар осі) аралықтарындағы бұрыштардың және аксонометриялық масштабтардың ( $|O'E'_x|$ ,  $|O'E'_y|$ ,  $|O'E'_z|$ ) мәндеріне шек қойыла ма деген сұрақ туады. Бұл сұраққа Польке теоремасы толық жауап береді. Осы теоремаға сай аксонометриялық осьтердің бағыттарын және аксонометриялық масштабтардың мәндерін қалауымызша тағайындауға болады.

Оз және  $AA_2$  түзулері өзара параллель, ал олар *Оху* координаталар жазықтығына перпендикуляр орналасқан. Сол сияқты *Оу* және  $A_2A_x$  түзулері де өзара параллель және *Охз* координаталар жазықтығына перпендикуляр орналасқан. Олай болса, нүктенің аксонометриялық координаталары оның сәйкес натурал координаталарына тең болады:  $x' = x$ ;  $y' = y$ ;  $z' = z$ . Бұл теңдіктердің дұрыстығы параллель проекциялауда параллель түзулердің

немесе бір түзудің бойынан алынған кесінділер ұзындықтарының қатынастары сақталатындығы нәтижесінде дәлелденеді.

Сонымен аксонометрия әдісімен орындалған кескінде аксонометриялық осьтер, аксонометриялық масштабтар және кескінделетін фигураның аксонометриялық және екінші проекциялары көрсетілуі қажетті де жеткілікті.



84-сурет.

Осы айтылғанды, яғни аксонометриялық кескіннің қайтымды болатынын дәлелдейік. Ол үшін аксонометриялық осьтер ( $O'x'$ ,  $O'y'$ ,  $O'z'$ ), аксонометриялық масштабтар ( $|O'E'_x|$ ,  $|O'E'_y|$ ,  $|O'E'_z|$ ),  $A$  нүктесінің аксонометриясы  $A'$  және екінші проекциясы  $A_2$  берілген деп **жорылық** (84-сурет). Кескінде  $O'z'$  және  $A_2$   $A'$  түзулері өзара параллель орналасулары міндетті.  $A_2$  нүктесі арқылы  $O'y'$  осіне параллель түзу жүргізсек, ол түзу  $O'x'$  осін  $A'_x$  нүктесінде қияды. Сонда  $A$  нүктесінің аксонометриялық координаталық сынығы  $O'A'_x A_2 A'$  алынады. Осы сынықтың бөліктерін сәйкес аксонометриялық масштабтар мен өлшеу арқылы  $A$  нүктесінің аксонометриялық координаталарын анықтауға болады.  $O'A'_x$  кесіндісі ұзындығын  $O'E'_x$  кесіндісі ұзындығына бөлу арқылы  $A$  нүктесінің аксонометриялық абсциссасы ( $x'$ ) алынады. Сол сияқты  $|A'_x A_2|$ -ты  $|O'E'_y|$ -қа және  $|A_2 A'|$ -ты  $|O'E'_z|$ -қа бөлудің нәтижесінде  $A$  нүктесінің аксонометриялық ординатасы ( $y'$ ) және аппликаты ( $z'$ ) табылады. Аксонометриялық координаталар сәйкес натурал координаталарға тең болатыны жоғарыда дәлелденді. Енді кеңістікте натурал координаталар системасын қалауымызша аламыз, яғни  $O$  нүктесінде қиылысатын және өзара перпендикуляр орналасатын  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  түзулерін жүргізіп, олардың бойына өзара тең  $OE_x$ ,  $OE_y$ ,  $OE_z$  кесінділерін саламыз. Содан кейін  $A$  нүктесін координаталары бойынша тұрғызамыз:  $Ox$  осіне  $A$  нүктесінің абсциссасына тең кесінді салып  $A_x$  нүктесін,  $A_x$  нүктесі арқылы  $Oy$  осіне параллель түзу жүргізіп оның бойына  $A$  нүктесінің ординатасына тең кесінді салып  $A_2$  нүктесін алады.  $A_2$  нүктесі арқылы  $Oxy$  жазықтығына перпендикуляр тұрғызып, оның бойына  $A$  нүктесінің аппликатына тең кесінді

салу нәтижесінде іздеп отырған  $A$  нүктесі алынады. Сонымен нүктенің аксонометриясынан және оның екінші проекциясынан тұратын кескін қайтымды болады екен, яғни мұндай кескін нүктенің кеңістіктегі орнын анықтауға мүмкіндік береді. Көп жағдайда есепті натурал координаталар системасында шешуден көрі оны кескінде аксонометриялық координаталар системасында шешу әлдеқайда тиімді болады. Оның үстіне жаңа бұйымдар, мәшинелер жасау оның кескінін салудан басталады. Кескінге қарап бұйымның қандай болатынын көруге, оның кемшіліктерін анықтауға және ол кемшіліктерді түзетуге болады. Осы мағынада берілген фигура мен оның кескіні пара-пар болады.

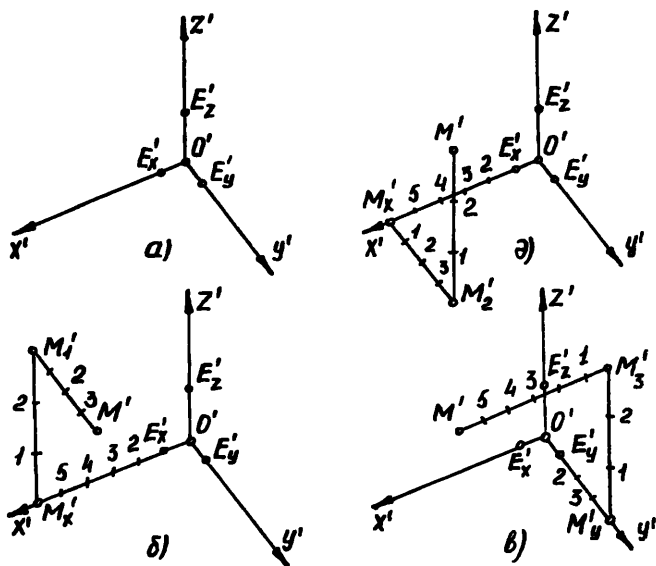
Проекциялау кезінде кеңістік нүктелері мен проекциялар жазықтығы арасында сәйкестік анықталады. Аксонометрияда кеңістіктегі нүктеге (кескінде) екі нүкте сәйкес болатынын көрдік. Бұл екі нүктенің біреуі аксонометриялық проекция болса, ал екіншісі — екінші проекция. Екінші проекцияны көбіне *Оху* координаталар жазықтығындағы нүкте табанын аксонометриялық проекциялар жазықтығына проекциялау әдісімен тұрғызады. Бұл жағдайда нүктенің аксонометриясы мен екінші проекциясын қосатын түзу  $O'z'$  осіне параллель болуы міндетті. Екінші проекция ретінде нүктенің *Охz* немесе *Оуz* жазықтықтарының біреуіндегі табанының аксонометриясын алуға да болады.

Бір нәрсені екінші нәрсемен сандық шамасына қарап салыстыруға болады. Нәрсе және оның кескіні бірдей ақпарат беруі үшін олардағы нүктелер саны өзара тең болуы тиісті. Кеңістікте, жазықтықта және түзуде неше нүкте бар? Бұл сұрақтарға тек «шексіз көп» деп жауап беру жеткіліксіз. Түзуге қарағанда жазықтықтағы нүктелердің саны көп болса, жазықтыққа қарағанда кеңістіктегі нүктелердің саны көп болатынын анықтау қиын емес. Бұл мәселе параметрлеу теориясымен байланысты. Түзу бойындағы нүктенің орнын анықтау үшін оның түзу бойынан алынған басқа нүктеден қашықтығын көрсету жеткілікті. Осы түзудің бойынан алынған (бас) нүкте оны екі сәулеге бөледі: оның біреуі оң сандарға, екіншісі теріс сандарға сәйкес болады. Осыған орай түзудің бойында  $\infty^1$  нүкте бар деп есептейді, немесе оны бірпараметрлі нүктелер жиыны деп қарастырады. Жазықтықтағы нүктенің орны екі координата көмегімен анықталады, яғни жазықтықты екіпараметрлі нүктелер жиыны деп қарастыруға болады. Олай болса, жазықтықтағы

нүктелер саны  $\infty^2$  болады. Ал кеңістіктегі нүктенің орнын үш координаталардың көмегімен ғана анықтауға болатындықтан, олардың саны  $\infty^3$  болады. Олай болса, кеңістік нүктелері жазықтық нүктелерінен көп болғандықтан, олардың арасында өзара бірімәнді сәйкестік орнатуға болмайды. Проекциялауда кеңістіктегі проекциялаушы түзудің бойындағы  $\infty^1$  нүктелерге проекциялар жазықтығының тек жалғыз нүктесі сәйкес болады және бұған керісінше проекциялар жазықтығының әрбір нүктесіне кеңістікте сол нүктені проекциялайтын түзу сәйкес болады. Ал аксонометрияда кеңістіктің  $A$  нүктесіне  $\pi'$  жазықтығының екі нүктесі  $A'$  (аксонометрия) және  $A''$  (екінші проекция) сәйкес болады дедік. Яғни кеңістіктің әрбір нүктесіне кескінде өзара параллель түзулер бойынан алынған нүктелер жұбы сәйкес. Жазықтықтағы параллель түзулер бойында орналасқан нүктелер жұбының санын анықталық. Жазықтықтағы  $\infty^2$  нүктелердің біреуін алалық, одан кейін осы нүкте арқылы берілген бағытқа параллель түзу жүргізіп оның бойынан  $\infty^1$  нүктелердің біреуін алалық. Сонда жазықтықтағы осындай нүктелер жұбының саны  $\infty^2 \cdot \infty^1 = \infty^3$  болатынын көреміз. Осыдан кеңістік пен жазықтық арасында өзара бірімәнді сәйкестік алу үшін кеңістіктің әрбір нүктесін жазықтықта параллель түзулер бойында орналасатын жұп нүктелерге кескіндеу керек екені дәлелденді.

Суретте аксонометриялық осьтердің оң бағыттары көрсетіледі. Керек болған жағдайда аксонометриялық осьтердің теріс бағыттарын да найдалануға болады.

Енді координаталары берілген нүктенің аксонометриясын және екінші проекциясын салуды көрсетелік. Мысалы,  $M(x, y, z)$  нүктесін қарастыралық. Жақшалар ішіндегі бірінші сан нүктенің абсциссасын, екінші сан — ординатасын және үшінші сан — аппликатысын анықтайтыны белгілі.  $x=6$ ,  $y=4$  және  $z=3$  болсын. Польше теоремасына сүйеніп  $O'$  нүктесінен басталатын үш сәуле  $O'x'$ ,  $O'y'$  және  $O'z'$  жүргіземіз және олардың бойынан қалауымызша  $E'_x$ ,  $E'_y$  және  $E'_z$  нүктелерін белгілейміз. Сонда аксонометриялық координаталар системасы алынды (85, а-сурет).  $O'x'$  осіне  $O'E'_x$  кесіндісіне тең 6 кесінді салып,  $M'_x$  нүктесін аламыз.  $M'_x$  нүктесі арқылы  $O'y'$  түзуіне параллель түзу жүргізіп, оның бойына  $O'E'_z$  кесіндісіне тең 4 кесінді салсақ,  $M'_2$  нүктесін ( $M$  нүктесінің  $Oxy$  жазықтығындағы екінші проекциясын) ала-



85-сурет.

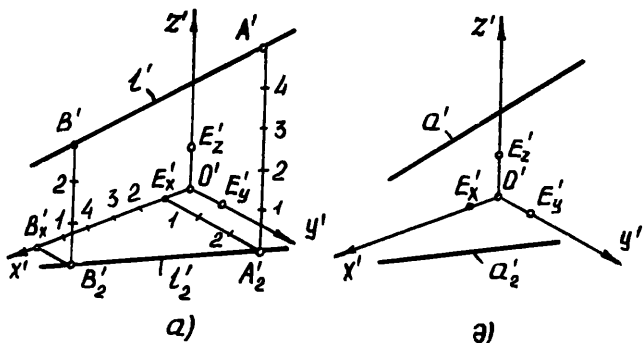
мыз. Енді  $M'_2$  нүктесін бастыра  $O'z'$  түзуіне параллель түзу жүргізіп, онын бойына  $|O'E'_z|$  -ка тең 3 кесінді салсақ, онда  $M$  нүктесінің аксонометриясын аламыз (85, ә-сурет). Екінші проекция үшін  $M$  нүктесінің  $Oxz$  немесе  $Oyz$  жазықтығындағы табанының проекциясын қарастыруға болады. Егер  $M'_x$  нүктесі арқылы  $(O'z')$ -ка параллель түзу жүргізіп, онын бойына  $|O'E'_z|$  -ка тең 3 кесінді салсақ, онда  $M'_1$  нүктесін алар едік (85, б-сурет)  $M'$  нүктесін алу үшін  $M'_1$  нүктесін бастыра  $(O'y')$ -ка параллель түзу жүргізіп, оған  $M'_1$  нүктесінен бастап  $|O'E'_y|$  -ка тең кесіндіні 4 рет салу керек.  $Oyz$  жазықтығындағы нүкте табанын пайдаланатын болсақ, онда  $O'M'_2M'_3$   $M'$  немесе  $O'M'_2M'_3M'$  аксонометриялық координаталар сынықтарының біреуін салу керек (85, в-сурет).  $M(6; 4; 3)$  нүктесінің аксонометриядағы кескіні ретінде  $M'$  нүктесіне коса екінші проекцияларының біреуін көрсету керек.

$$M \leftrightarrow (M', M'_1); \quad M \leftrightarrow (M', M'_2); \quad M \leftrightarrow (M', M'_3).$$

### 3.2. ТҮЗУДІҢ ЖӘНЕ ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ АКСОНОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОЕКЦИЯСЫН САЛУ

Түзуді екі нүкте, ал жазықтықты бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте анықтайтыны белгілі. Екі нүкте арқылы өтетін тек жалғыз түзу, ал үш нүкте арқылы өтетін тек жалғыз жазықтық салуға болады. Сондықтан түзудің аксонометриясын салу үшін оның екі нүктесінің аксонометриясын салу, ал жазықтықтың аксонометриясын салу үшін оның үш нүктесінің аксонометриясын салу жеткілікті.

Берілген  $A(1; 3; 5)$  және  $B(6; 1; 3)$  нүктелері арқылы өтетін  $l$  түзуін аксонометрияда кескінделік. Ол үшін қалауымызша аксонометриялық осьтерді жүргізіп, аксонометриялық масштабтарды тандап алып, берілген  $A$  және  $B$  нүктелерінің екінші проекцияларын —  $A'_2$  және  $B'_2$  нүктелерін және олардың аксонометрияларын —  $A'$  және  $B'$  нүктелерін координаталары бойынша саламыз (86, а-сурет). Екінші проекцияларды қосатын түзу  $l'_2$  берілген  $l$  түзуінің екінші проекциясы, аксонометрияларды қосатын түзу  $l'$  оның аксонометриясы болады. Сонда түзу аксонометрияда өзінің аксонометриясы мен екінші проекциясына кескінделеді:  $l \leftrightarrow (l', l'_2)$ . Түзудің аксонометриялық және екінші проекцияларынан тұратын кескіннің қайтымды болатынын көрсетелік. Ол үшін кеңістіктегі түзулер санын және жазықтықтағы жұп түзулер санымен салыстыралық. Кеңістікте неше түзу бар? Түзуді екі нүкте анықтайды делік. Олай болса, кеңістікте  $\infty^3 \cdot \infty^3 = \infty^6$  жұп нүктелер бар, бірақ олардың  $\infty^2$  нүктелері бір түзудің бойында орналасады. Сондықтан ке-



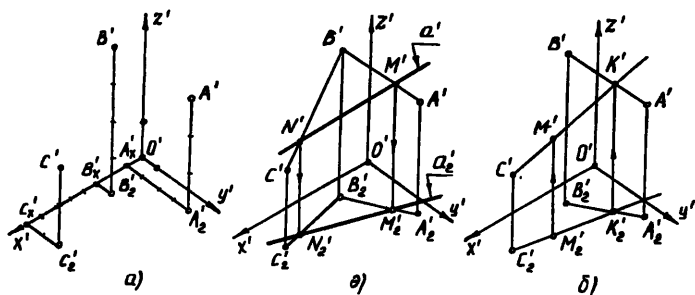
86-сурет.

ңістіктегі түзулер саны  $\infty^6/\infty^2 = \infty^4$  болады. Ал жазықтықта қанша түзу бар? Жазықтықтағы нүктелер саны  $\infty^2$  болатынын жоғарыда айттық, ал кез келген жұп нүктелер саны  $\infty^2 \cdot \infty^2 = \infty^4$  болады. Олардың  $\infty^2$  нүктелері сол түзудің бойында орналасатындықтан жазықтықтағы түзулер саны  $\infty^4/\infty^2 = \infty^2$  болатынын көреміз. Сондықтан жазықтықтағы жұп түзулер саны да  $\infty^4$  болады екен. Дәлелдеу керегі де осы еді. Кеңістіктегі нүктелер саны  $\infty^3$  болғандықтан нүктелер кеңістігі үшөлшемді, ал түзулер саны  $\infty^4$  болатындықтан түзулер кеңістігі төртөлшемді болады.

Аксонометрияда түзуді ( $a$ ) оның бізге керек бөлігінің аксонометриясы ( $a'$ ) және екінші проекциясы ( $a'_2$ ) арқылы кескіндейміз (86, ә-сурет). Түзудің бойынан нүкте алу үшін оның аксонометриясын түзу аксонометриясы бойынан қалауымызша белгілеуімізге болады. Одан кейін осы нүкте арқылы  $O'z'$  осіне параллель түзу жүргізілік те оның түзудің екінші проекциясымен қиылысу нүктесін табалық. Сонда табылған нүкте берілген түзу бойынан алынған нүктенің екінші проекциясы болады. Мысалы,  $M \in a$  делік. Қалауымызша  $M' \in a'$  нүктесін аламыз.  $M' \in l \parallel (O'z')$ ;  $M'_2 = l \cap a'_2$ .  $M \leftrightarrow (M', M'_2)$ . Алдымен нүктенің екінші проекциясын түзудің екінші проекциясы бойынан қалауымызша белгілеп алып, одан кейін аксонометриясын тұрғызуға да болады:  $M'_2 \in a'_2$ ;  $M'_2 \in l \parallel (O'z')$ ;  $M' = l \cap a'$ .  $(M', M'_2) \leftrightarrow M \in a$ .

Проекциялау бағытына параллель болмайтын жазықтықтың проекциялау әдісімен алынған кескінін қарастыратын болсақ, онда ол кескін қағаз бетін түгел алып жатар еді. Бір жазықтықтың кескінін екінші жазықтықтың кескінінен ажыратуға болмас еді. Сондықтан аксонометрияда жазықтықты анықтайтын геометриялық элементтерді ғана кескіндеу тиімді болады.

Берілген  $A(1; 4, 3)$ ,  $B(3; 1; 4)$  және  $C(8; 2; 2)$  нүктелері анықтайтын  $\alpha$  жазықтығының аксонометриядағы кескінін салалық. Ол үшін қалауымызша аксонометриялық координаталар системасын алып, берілген нүктелердің екінші  $A'_2$ ,  $B'_2$ ,  $C'_2$  және аксонометриялық  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  проекцияларын олардың координаталары бойынша саламыз (87, а-сурет). Сонда  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  нүктелері жазықтықтың аксонометриясын, ал  $A'_2$ ,  $B'_2$ ,  $C'_2$  нүктелері оның екінші проекциясын анықтайды. Жазықтықтың аксонометриясы мен екінші проекциясы аралығында өзара бір-



87-сурет.

мәнді сәйкестік бар екенін аңғару қиын емес. Бұл сәйкестік параллель проекциялау нәтижесінде алынғандықтан тектес сәйкестік болады. Бір өріс  $A'$ ,  $B'$  және  $C'$  нүктелерімен анықталатын болса, екінші өріс  $A_2'$ ,  $B_2'$  және  $C_2'$  нүктелерімен анықталады. Бірінші өрістің  $A'$  нүктесіне екінші өрістің  $A_2'$  нүктесі, бұған керісінше, екінші өрістің  $B_2'$  нүктесіне бірінші өрістің  $B'$  нүктесі сәйкес болады.

Жазықтық аксонометрияда тектес сәйкестікті анықтайды, ал осы тектестікті пайдаланып түрлі есептердің шешуін алуға болады. Мысалға  $\alpha(A, B, C)$  жазықтығында жататын қандай да болса  $a$  түзуін аксонометрияда кескіндеу керек болсын. Ол үшін  $a$  түзуінің аксонометриясын немесе екінші проекциясын қалауымызша жүргізуге болады. Біз  $a'$  түзуін жүргізіп, оны  $a$  түзуінің аксонометриясы деп қарастыралық (87, ә-сурет). Енді  $a$  түзуінің екінші проекциясын салуымыз керек. Бұл арада  $a$  түзуінің  $\alpha$  жазықтығында жататынын пайдалану керек. Алдымен  $AB$  және  $BC$  түзулерінің проекцияларын жүргізіп аламыз. Бұл екі түзу де  $\alpha$  жазықтығында жатыр, өйткені олардың екі нүктесі осы жазықтықта жатыр:  $A \in \alpha$ ;  $B \in \alpha$ ;  $(AB) \subset \alpha$ ;  $B \in \alpha$ ;  $C \in \alpha$ ;  $(BC) \subset \alpha$ . Бір жазықтықта жатқан екі түзу қиылысады.  $(AB) \cap a = M$ ;  $(BC) \cap a = N$ . Бұл екі нүктенің аксонометриялары ( $M'$  пен  $N'$ ) берілген  $a$  түзуінің аксонометриясының  $AB$  және  $BC$  түзулерінің аксонометрияларымен қиылысу нүктелері ретінде анықталады:  $a' \cap (A'B') = M'$ ;  $a' \cap (B'C') = N'$ . Табылған  $M'$  және  $N'$  нүктелері арқылы  $O'z'$  түзуіне параллель түзулерді  $A_2'$ ,  $B_2'$  және  $B_2'$ ,  $C_2'$  түзулерімен қиылысқанша созамыз. Қиылысу нүктелері ( $M_2'$  және  $N_2'$  нүктелері)

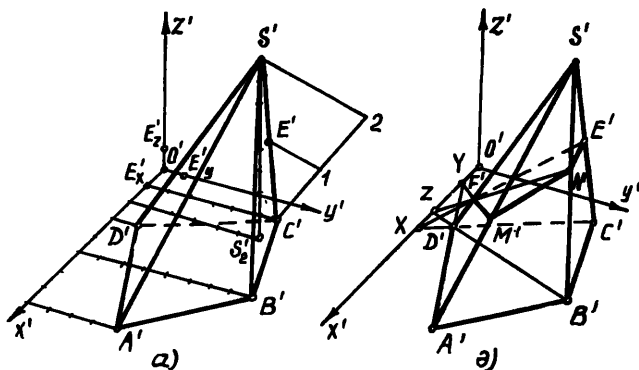
$M$  және  $N$  нүктелерінің екінші проекциялары болатынын байқау қиын емес. Енді осы  $M'_2$  және  $N'_2$  нүктелерін бастыра  $a'_2$  түзуін жүргізіп, есепті шешуді аяқтаймыз. Бұл айтылғандарды қысқартып, былай деуге болады:  $A'$ ,  $B'$  және  $C'$  нүктелер өрісінің  $a'$  түзуіне тектес  $A'_2$ ,  $B'_2$  және  $C'_2$  нүктелер өрісінің  $a'_2$  түзуін саламыз.

Енді  $\alpha$  жазықтығында жататын  $M$  нүктесінің екінші проекциясы  $M'_2$  беріліп, оның аксонометриялық проекциясын —  $M'$  нүктесін табу керек болсын (87, б-сурет).  $C'_2 M'_2$  түзуін  $A'_2 B'_2$  түзуімен  $K'_2$  нүктесінде қиылысқанға дейін жүргіземіз.  $K'_2$  нүктесі арқылы  $O'z'$  түзуіне параллель түзу жүргізсек, ол түзу  $A'B'$  түзуімен  $K'$  нүктесінде қиылысады.  $M'_2$  нүктесі арқылы  $O'z'$  түзуіне параллель етіп жүргізілген түзу  $C'$  және  $K'$  нүктелерін қосатын түзуді  $M'$  нүктесінде қияды.  $M'$  және  $M'_2$  жұп нүктелерге кеңістікте  $M$  нүктесі сәйкес болады, ал  $C'K'$  және  $C'_2 K'_2$  жұп түзулерге кеңістікте  $CK$  түзуі сәйкес болады.  $M$  нүктесі  $CK$  түзуінде, ал  $CK$  түзуі  $\alpha(ABC)$  жазықтығында жатыр. Олай болса  $M$  нүктесі  $\alpha(A, B, C)$  жазықтығында жатыр.  $M \in (CK) \subset \alpha \Rightarrow M \in \alpha$ . Бұл айтылғандарды қысқартып, былай деуге болады:  $A'_2$ ,  $B'_2$  және  $C'_2$  нүктелер өрісінің  $M'_2$  нүктесіне тектес  $A'$ ,  $B'$  және  $C'$  нүктелер өрісінің  $M'$  нүктесін табамыз.

Кеңістікте қанша жазықтық бар? Жазықтық үш нүктесімен толық анықталатындықтан кеңістікте нүктелердің қанша үштігі бар екенін анықталық. Кеңістікте  $\infty^3$  нүкте бар екені туралы жоғарыда айтылды. Олай болса, нүктелер үштігінің саны  $\infty^3 \cdot \infty^3 \cdot \infty^3 = \infty^9$  болады. Жазықтықтағы нүктелер саны  $\infty^2$ , ал жазықтықтағы нүктелер үштігінің саны  $\infty^2 \cdot \infty^2 \cdot \infty^2 = \infty^6$  болады. Сондықтан кеңістіктегі  $\infty^9$  нүктелер үштігінің  $\infty^6$  нүктелер үштігі бір жазықтықта жатады. Олай болса кеңістіктегі жазықтықтар саны былай анықталады:  $\infty^9 / \infty^6 = \infty^3$ .

### 3.3. АКСОНОМЕТРИЯДА КӨПЖАҚТЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ЖАЗЫҚТЫҚПЕН ҚИМАСЫН САЛУ

Параллелепипед, призма, пирамида және т. б. көпжақтар туралы мектепте оқылатын геометрия курсынан белгілі. Кескінде көпжақтың төбелерін және қырларын көрсетеді. Көпжақ жақтары деп аталатын көпбұрыштармен шектеледі. Көпжақ төбелерінің санын  $B$ , қырларының санын  $P$  және жақтарының санын  $\Gamma$  әріптерімен



88-сурет.

белгілелік. Егер көпжақ үшін  $B + \Gamma = P + 2$  теңдігі орындалса, онда көпжақты *қарапайым* деп атайды. Қарапайым көпжақтар дұрыс, жартылай дұрыс және дұрыс емес болып бөлінеді. Дөңес дұрыс көпжақтар бесеу-ак. Олар: тетраэдр, октаэдр, гексаэдр, додекаэдр және икосаэдр.

Төртбұрышты  $SABCD$  пирамидасының төбелері координаталары арқылы берілген.  $A(8; 4; 0)$ ,  $B(5; 8; 0)$ ,  $C(1; 6; 0)$ ,  $D(3; 1; 0)$  және  $S(2; 6; 8)$ . Осы пирамиданың аксонометриясын және оның абсциссалар осі арқылы өтіп,  $[CS]$  қырын тең етіп екіге бөлетін жазықтықпен кимасын салу керек болсын (88, а-сурет).

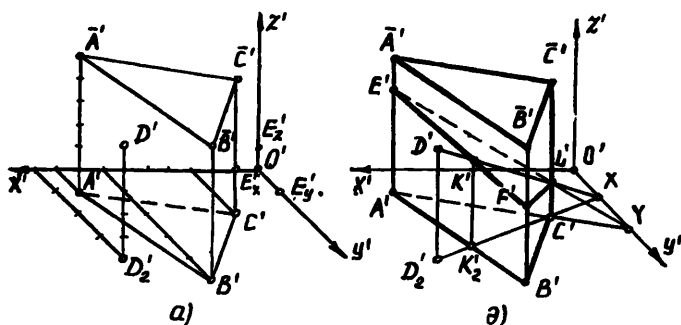
Қалауымызша аксонометрия осьтерін жүргізіп аксонометриялық масштабтарды тағайындаймыз. Берілген нүктелерді координаталары бойынша саламыз.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  және  $D$  нүктелерінің аппликаталары нөлге тең болғандықтан, олардың  $Oxy$  жазықтығында жататынын аңғарамыз.  $Oxy$  жазықтығында жататын нүктенің аксонометриясы мен екінші проекциясы бірігіп түседі:  $A' = A_2$ ;  $B' = B_2$ ;  $C' = C_2$ ;  $D' = D_2$ . Пирамиданың қырларын жүргіземіз (88, а-сурет). Кескінде көрінетін қырларды негізгі тұтассызықпен, ал кескінде көрінбейтін қырларды үзілме сызықпен жүргіземіз. Пирамиданың бүйір қырлары түгелдей тұтас сызықпен жүргізілгенін көрін тұрмыз, өйткені олар кескінде көрінеді. Табан қырларының үшеуі көрінеді, ал төртінші  $CD$  қыры пирамиданың тасасында болғандықтан көрінбейді. Сондықтан кескінде  $C'D'$  кесіндісі үзілме сызықпен жүргізіліп отыр.

Енді  $CS$  қырын дәл екіге бөлетін  $E$  нүктесінің кескі-

нін салалық. Параллель проекцияларда бір түзудің бойында орналасқан кесінділер ұзындықтарының қатынасы сақталатындықтан,  $E$  нүктесінің аксонометриясы  $E'$  пирамиданың  $CS$  қыры аксонометриясының дәл ортасы болады. Сондықтан кескінде  $C'S'$  кесіндісін тең екіге бөлетін  $E'$  нүктесін тұрғызамыз. Қиюшы  $\alpha$  жазықтығы  $Ox$  түзуі және  $E$  нүктесі арқылы анықталады:  $\alpha(E; (Ox))$ .  $SABCD$  пирамидасы мен  $\alpha(E; (Ox))$  жазықтығының қиылысу сызығы шектейтін фигураны қима деп атайды. Қиманың аксонометриясын салуға көшелік. Егер пирамида табанын  $S$  нүктесінен (пирамиданың төбесі) қима жазықтығына проекцияласақ, онда пирамиданың табан жазықтығымен қима жазықтығы арасында өзара бірімәнді сәйкестік орнатылар еді. Ал бұл сәйкестік коллинеация болатыны түсінікті. Коллинеацияның жазықтықтағы проекциясы гомологияны анықтайды. Гомология кескінде центрі  $S'$ , осі  $O'x'$  және бір жұп сәйкес нүктелері  $E' \leftrightarrow C'$  арқылы берілген. Қиманың аксонометриясын берілген гомологияда пирамиданың табанына сәйкес фигура түрінде салуға болады.  $D'$  нүктесіне сәйкес  $F'$  нүктесін  $S'D'$  түзуі бойынан былай табамыз (88, ә-сурет):  $C'D'$  түзуін  $O'x'$  осімен  $X$  нүктесінде қиылысқанша созамыз; табылған  $X$  нүктесін  $E'$  нүктесімен қосатын түзу  $S'D'$  түзуін  $F'$  нүктесінде қияды.  $A'$  нүктесіне сәйкес  $M'$ ,  $B'$  нүктесіне сәйкес  $N'$  нүктелері де дәл солай табылады:  $(A'D') \cap (O'x') = Y$ ;  $(YF') \cap (A'S') = M'$ ;  $(B'D') \cap (O'x') = Z$ ;  $(F'Z) \cap (B'S') = N'$ . Табылған нүктелердің пирамиданың бір жағында жатқандарын кесінділермен қосалық. Қиманы шектейтін  $E'F'M'N'$  төртбұрышының кескінде көрінбейтін қабырғасы  $E'F'$  үзілме сызықпен жүргізілген.

Табаны  $ABC$  үшбұрышы болатын тік үшбұрышты призманың биіктігі 6 өлшем. Призманың аксонометриясын салу және оның  $D(10; 4; 5)$  нүктесі мен  $Oy$  осі анықтайтын  $\beta$  жазықтығымен қимасын тұрғызу керек:  $A(9; 1; 0)$ ,  $B(7; 5; 0)$ ,  $C(3; 2; 0)$ .

Аксонометриялық координаталар системасын алып  $A$ ,  $B$  және  $C$  нүктелерін саламыз.  $A$  нүктесі  $A'$  нүктесіне,  $B$  нүктесі  $B'$  нүктесіне,  $C$  нүктесі  $C'$  нүктесіне кескінделді.  $A'$ ,  $B'$  және  $C'$  нүктелері арқылы  $O'z'$  осіне параллель түзулер жүргіземіз де оларға 6  $|O'E'_z|$  -қа тең кесінділер саламыз. Сонда  $\bar{A}'$ ,  $\bar{B}'$  және  $\bar{C}'$  нүктелері алынады (89, а-сурет). Кескінде  $(A'B') \parallel (\bar{A}'\bar{B}')$ ,  $(A'C') \parallel (\bar{A}'\bar{C}')$  және  $(B'C') \parallel (\bar{B}'\bar{C}')$  болады. Призманың қырларын жүргіземіз. Олардың тек біреуі —  $[A'C']$  қыры көрінбейтін.

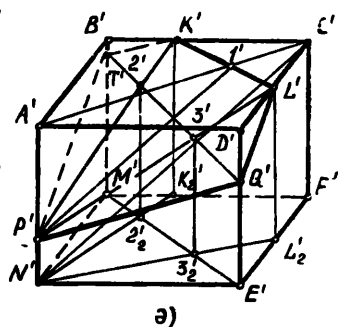
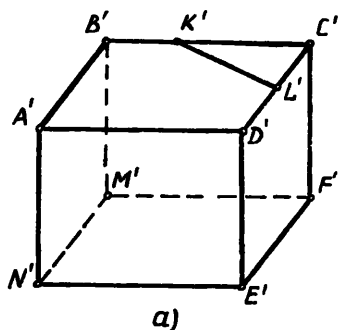


89-сурет.

діктен үзілме сызықпен кескінделген.  $D$  нүктесінің аксонометриясын  $D'$  координаталары бойынша тұрғызамыз.

Енді  $ABCA'B'C'$  призмасының  $\beta(D; (Oy))$  жазықтығымен қимасын салалық (89, ә-сурет). Берілген  $\beta(D; (Oy))$  жазықтығын  $Oxy$  жазықтығына тікбұрыштап проекциялағанда аффиндік коллинеация алынады, ал аффиндік коллинеацияның параллель проекциясы тектес сәйкестікті анықтайды. Сонда аксонометрияда тектес сәйкестік берілген.  $(O'y')$  — сәйкестік осі,  $D' \leftrightarrow D_2$  сәйкес нүктелер жұбы. Есепті шешу үшін  $A'B'C'$  үшбұрышына тектес  $E'F'L'$  үшбұрышын салу керек.  $D_2$   $C'$  түзуі тектестік осімен  $X$  нүктесінде қиылысады. Табылған  $X$  нүктесін  $D'$  нүктесімен қосатын түзу  $D_2$   $C'$  түзуіне сәйкес түзу болады.  $C'$  нүктесіне сәйкес  $L'$  нүктесі  $D'X$  және  $C'\bar{C}'$  түзулерінің қиылысу нүктесі түрінде анықталады.  $A'C'$  түзуіне сәйкес  $L'Y$  түзуін жүргізіп  $E'$  нүктесін аламыз:  $(A'C') \cap (O'y') = Y$ ;  $(L'Y) \cap (A'\bar{A}') = E'$ . Кескінде  $DX$  түзуінің призманың  $AB\bar{B}\bar{A}$  жағымен қиылысу нүктесі  $K$  көрсетілген.  $EK$  түзуі призманың  $B\bar{B}$  қырын  $F$  нүктесінде кездестіреді. Сонда  $E'F'L'$  үшбұрышы іздеп отырған қиманың аксонометриясы.

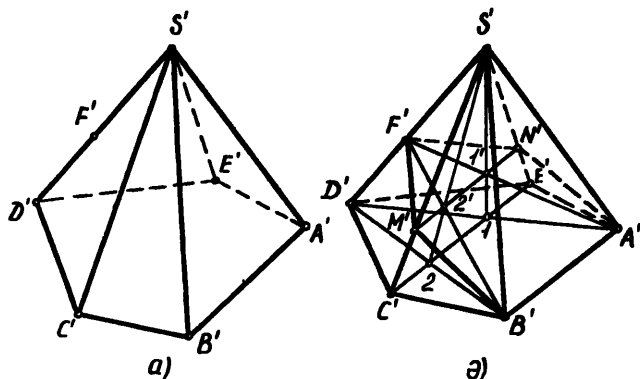
Кейде кескіндегі сызықтардың санын азайтып, оны ықшамдау үшін аксонометриялық осьтерді көрсетпейді. Мысалға 90, а-суретте  $ABCDEFMN$  параллелепипедінің кескіні берілген. Параллелепипедтің  $ABCD$  жағында жатқан  $KL$  түзуі арқылы өтіп,  $CN$  диагоналіне параллель болатын жазықтықпен қимасын салу керек.  $A'C'$  түзуін жүргізсек, ол түзу  $K'L'$  түзуімен  $1'$  нүктесінде қиылысады. Осы  $1'$  нүктесі арқылы  $C'N'$  түзуіне параллель түзу жүргізсек, ол түзу  $A'N'$  қырымен  $P'$  нүктесінде қиылысады. Сонда қима жазықтығы қиылысатын екі түзу:  $KL$



90-сурет.

және  $1P$  арқылы анықталады. Енді қима жазықтығымен  $E'F'MN$  жазықтықтары арасындағы тектес сәйкестікті пайдаланамыз:  $K$  және  $L$  нүктелерінің екінші проекцияларын ( $K_2$  және  $L_2$  нүктелерін) саламыз.  $K'P'$ ,  $L'P'$ ,  $K_2N'$ ,  $L_2N'$  және  $E'M'$  түзулерін жүргіземіз (90, ә-сурет).  $E'M'$  түзуі  $K_2N'$  және  $L_2N'$  түзулерін  $2_2$  және  $3_2$  нүктелерінде қияды. Табылған  $2_2$  және  $3_2$  нүктелеріне сәйкес  $2'$  және  $3'$  нүктелерін  $K'P'$  және  $L'P'$  түзулері бойынан табамыз.  $2'3'$  түзуі  $D'E'$  және  $B'M'$  қырларымен  $Q'$  және  $T'$  нүктелерінде қиылысады. Табылған  $Q$  және  $T$  нүктелері де қима жазықтығында жатады.  $Q'$ ,  $P'$  және  $T'$  нүктелері параллелепипедтің қырлары ( $DE$ ,  $AN$  және  $BM$ ) қима жазықтығымен қиылысулары нәтижесінде пайда болған нүктелердің аксонометриялары болады. Сонда қимада бесбұрыш шығатынын, ал  $K'L'Q'P'T'$  оның аксонометриясы болатынын көреміз. Қиманың көрінетін қабырғалары  $KL$ ,  $LQ$ ,  $QP$  тұтас сызықпен, ал көрінбейтін қабырғалары  $PT$ ,  $T'K$  үзілме сызықпен жүргізілген.

Тағы бір мысал қарастыралық. Бесбұрышты  $SABCDE$  пирамидасының және оның  $SD$  қыры бойынан алынған  $F$  нүктесінің кескіндері берілген (91, а-сурет). Осы пирамиданың  $A$ ,  $B$  және  $F$  нүктелері анықтайтын үш жазықтығымен қимасының кескінін салу керек. Бізге гомология берілген.  $S'$  — гомологияның центрі,  $A'B'$  түзуі гомологияның осі және  $D' \leftrightarrow F'$  сәйкес нүктелері.  $A'B'C'D'E'$  бесбұрышына сәйкес фигураны табу керек. Іздеп отырған фигурамыз да бесбұрыш болуы қажет және оның үш төбесі ( $A'$ ,  $B'$  және  $F'$  нүктелері) белгілі.  $C'$  нүктесіне сәйкес қиманың  $M'$  нүктесін және  $E'$  нүктесіне сәйкес қиманың  $N'$  нүктесін табуымыз керек.  $A'D'$ ,  $B'D'$  және



91-сурет.

$C'E'$  түзулерін жүргізсек, олар 1 және 2 нүктелерінде қиылысады (91, ә-сурет).  $A'F'$  және  $B'F'$  түзулерін жүргізіп, 1 және 2 нүктелерін  $S'$  центрінен осы түзулерге проекциялаймыз. Сонда алынған  $1'$  және  $2'$  нүктелерін қосатын түзу  $C'S'$  және  $E'S'$  қырларымен  $M'$  және  $N'$  нүктелерінде қиылысады.  $B'M'$  және  $M'F'$  кесінділерін тұтас, ал  $F'N'$  және  $N'A'$  кесінділерін үзілме сызықтармен жүргізіп, қиманың кескінін —  $A'B'M'F'N'$  бесбұрышын аламыз.

#### 3.4. БҰРМАЛАНУ КӨРСЕТКІШТЕРІ. АКСОНОМЕТРИЯНЫҢ ТҮРЛЕРІ

Натурал масштабтар  $|OE_x|$ ,  $|OE_y|$  және  $|OE_z|$  өзара тең болғанымен аксонометриялық масштабтар өзара тең болмайды, яғни аксонометрияда нәрсе бұрмаланып кескінделеді. Нәрсенің бұрмалану дәрежесін анықтау үшін *бұрмалану көрсеткіштері* деп аталатын коэффициенттер қарастырылады. *Бұрмалану көрсеткіші* деп аксонометриялық масштабтың оған сәйкес натурал масштабқа қатынасын айтады. Сонда абсциссалар осі бағытындағы бұрмалану көрсеткіші  $u = |O'E'_x| / |OE_x|$ , ординаталар осі бағытындағы бұрмалану көрсеткіші  $v = |O'E'_y| / |OE_y|$  және аппликатаалар осі бағытындағы бұрмалану көрсеткіші  $w = |O'E'_z| / |OE_z|$  болады. Проекциялау бағыты мен аксонометриялық проекциялар жазықтығы арасындағы бұрышты  $\varphi^\circ$  әрпімен белгілейік:

$\varphi^\circ = (\hat{s}, \pi')$ . Аксонометриялық масштабтарды қалауымызша тандап алуға болғанымен, бұрмалану көрсеткіште-

рінің және проекциялау бағытының ( $s$ ) проекциялар жазықтығына ( $\pi'$ ) көлбеулік бұрышы ( $\varphi^\circ$ ) аралығында тәуелділік бар. Бұл тәуелділік *аксонометрияның негізгі формуласы* деп аталатын теңдікпен өрнектеледі. Аксонометрияның негізгі формуласы

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi^\circ.$$

Параллель аксонометрияны проекциялау бағытының проекциялар жазықтығына көлбеу бұрышына қарай екі топқа бөледі: *тікбұрышты және қиғашбұрышты аксонометриялар*. Тікбұрышты аксонометрияда проекциялау бағыты проекциялар жазықтығына перпендикуляр болады, яғни  $s \perp \pi'$  (немесе  $\varphi^\circ = 90^\circ$ ). Қиғашбұрышты аксонометрияда проекциялау бағыты  $s$  проекциялар жазықтығына  $\pi'$  перпендикуляр болмайды, (немесе  $\varphi^\circ \neq 90^\circ$ ).

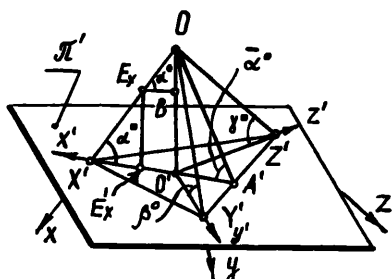
Бұрмалану көрсеткіштеріне қарай аксонометрияны үш топқа бөледі: *изометрия, диметрия және триметрия*. Егер бұрмалану көрсеткіштері өзара тең болса, онда *изометриялық аксонометрия*, қысқаша *изометрия* алынады. Изометрияда  $u = v = w$  болады. Егер бұрмалану көрсеткіштерінің скеуі өзара тең, ал олар үшінші бұрмалану көрсеткішіне тең болмаса, онда *диметриялық аксонометрия*, қысқаша *диметрия* алынады. Диметрияда  $u = v \neq w$ , немесе  $u = w \neq v$ , немесе  $u \neq v = w$  болуы мүмкін. Егер бұрмалану көрсеткіштері үш түрлі болса, онда *триметриялық аксонометрия*, немесе қысқаша *триметрия* алынады. Триметрияда  $u \neq v \neq w \neq u$  болады. Изометрия, диметрия және триметрия деген терминдер латын тілінен алынған, оларды қазақшаға аударғанда бірөлшем, екіөлшем және үшөлшем деген мағыналар береді.

Енді тікбұрышты аксонометрияның кейбір қасиеттерін қарастыра кетелік. Тікбұрышты аксонометрия үшін  $\varphi^\circ = 90^\circ$  болғандықтан,

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2. \quad (3.4.1)$$

Кеңістікте *Охуз* тікбұрышты координаталар системасын алып, оны  $\pi'$  жазықтығына тікбұрыштап проекциялайық (92-сурет). Сонда  $O$  нүктесі  $O'$  нүктесіне кескінделеді және  $(OO') \perp \pi'$  болады. Натурал осьтердің  $\pi'$  жазықтығымен қиылысу нүктелерін  $X'$ ,  $Y'$  және  $Z'$  әріптерімен белгілеп,  $X'Y'Z'$  үшбұрышын аламыз.  $X' = (Ox) \cap \pi'$ ;  $Y' = (Oy) \cap \pi'$ ;  $Z' = (Oz) \cap \pi'$  Осы  $X'Y'Z'$  үшбұрышын *іздер үшбұрышы* деп атайды.  $E_x$  нүктесі  $E'_x$  нүктесіне проек-

цияланады және  $O', X', E'_x$  нүктелері бір түзудің бойында жатады.  $O'$  нүктесін іздер үшбұрышының төбелерімен косатын түзулер аксонометриялық осьтерді анықтайды.  $E_x$  нүктесі арқылы  $O'X'$  түзуіне параллель түзу жүргізсек, ол түзу  $O'O$  түзуін  $B$  нүктесінде қияды. Сонда пайда болған



92-сурет.

$OBE_x$  үшбұрышы  $OO'X'$  үшбұрышына ұқсас және олар тікбұрышты үшбұрыштар. Натурал осьтердің  $\pi'$  жазықтығына көлбеулік бұрыштарын  $\alpha^\circ$ ,  $\beta^\circ$  және  $\gamma^\circ$  деп белгі-

лесек, онда  $\alpha^\circ = (\widehat{Ox}, \pi')$ ;  $\beta^\circ = (\widehat{Oy}, \pi')$ ;  $\gamma^\circ = (\widehat{Oz}, \pi')$  болады.  $OBE_x$  тікбұрышты үшбұрышынан мына теңдікті  $|E_x B|/|E_x O| = \cos \alpha^\circ$  аламыз. Мұндағы  $E_x B$  кесіндісі  $E'_x O'$  кесіндісіне, яғни аксонометриялық масштабқа тең:  $|E_x B| = |E'_x O'|$ . Ал аксонометриялық масштабтың натурал масштабқа қатынасы бұрмалану көрсеткішін береді. Сонда мына теңдіктерді аламыз:

$$u = \cos \alpha^\circ; \quad v = \cos \beta^\circ; \quad w = \cos \gamma^\circ. \quad (3.4.2)$$

Тікбұрышты аксонометрияда бұрмалану көрсеткіші оган сәйкес натурал осьтің аксонометриялық проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышының косинусына тең. Үш перпендикуляр теоремасына сүйеніп аксонометриялық осьтің іздер үшбұрышының сәйкес қабырғасына перпендикуляр болатынын дәлелдеу қиын емес:  $(O'x') \perp (Y'Z')$ ;  $(O'y') \perp (X'Z')$ ;  $(O'z') \perp (X'Y')$ . Егер  $O'x'$  осінің  $Y'Z'$  түзуімен қиылысу нүктесін  $A$  әрпімен белгілеп, оны  $O$  нүктесімен қоссақ,  $AOX'$  тікбұрышты үшбұрышын аламыз. Оның  $OA O'$  бұрышын  $\bar{\alpha}^\circ$  әрпімен белгілеу және бұл бұрыш  $Oyz$  және  $\pi'$  жазықтықтары арасындағы екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы екенін ескертеді. Сонда  $\alpha^\circ + \bar{\alpha}^\circ = 90^\circ$  болады.  $Oyz$  координаталар жазықтығының  $\pi'$  жазықтығына көлбеулік бұрышының косинусын есептеу:

$$\cos \bar{\alpha}^\circ = \cos (90^\circ - \alpha^\circ) = \sin \alpha^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha^\circ} = \sqrt{1 - u^2}.$$

Енді  $Oxz$  және  $Oxy$  жазықтықтарының аксонометриялық проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрыштарын сәй-

кес  $\bar{\alpha}^\circ$  және  $\bar{\gamma}^\circ$  әріптерімен белгілеп, мына теңдіктерді аламыз:

$$\cos \bar{\alpha}^\circ = \sqrt{1-u^2}; \quad \cos \bar{\beta}^\circ = \sqrt{1-v^2}; \quad \cos \bar{\gamma}^\circ = \sqrt{1-w^2}.$$

*Тікбұрышты аксонометрияда іздер үшбұрышы сүйір-бұрышты үшбұрыш болады.* Бұл айтылғанды дәлелділік.  $Y'OZ'$  тікбұрышты үшбұрышының  $O$  төбесінен гипотенузасына түсірілген перпендикулярдың табаны —  $A$  нүктесі  $Y'$  және  $Z'$  нүктелері аралығында жатады. Олай болса  $X'Y'Z'$  үшбұрышының  $X'$  төбесінен  $Y'Z'$  қабырғасына түсірілген перпендикуляр осы үшбұрыштың ішінде орналасады. Дәл осылайша оның  $Y'$  төбесінен  $X'Z'$  қабырғасына және  $Z'$  төбесінен  $X'Y'$  қабырғасына түсірілген биіктіктерде  $X'Y'Z'$  үшбұрышы ішінде орналасады. Үшбұрыш биіктіктерінің қиылысу нүктесін *ортоцентр* деп атайды.  $X'Y'Z'$  үшбұрышының ортоцентрі оның ішінде орналасады. Ал ортоцентрі ішінде орналасатын үшбұрыш сүйірбұрышты үшбұрыш болады. Тікбұрышты үшбұрыштың ортоцентрі оның  $90^\circ$ -қа тең бұрышының төбесімен бірігеді, ал доғалбұрышты үшбұрыштың ортоцентрі үшбұрыштан тыс орналасады.

Изометрияда іздер үшбұрышы теңқабырғалы үшбұрыш, ал диаметрияда — теңбүйірлі үшбұрыш болуы керек. Іздер үшбұрышының қабырғалары әр түрлі болса, онда оған сәйкес аксонометрия триметрия болады.

**3.4.1 - е с е п.** Аксонометриялық осьтер  $O'x'$  және  $O'y'$  бағыттарындағы бұрмалану көрсеткіштері 0,8 және 0,6 болсын. Проекциялау бағыты  $\pi'$  жазықтығына  $30^\circ$ -қа тең бұрышпен көлбейтін болса,  $O'z'$  осі бағытындағы бұрмалану көрсеткіші қандай болады?

**Ш е ш у і.** Берілгені:  $u=0,8$ ;  $v=0,6$ ;  $\varphi^\circ=30^\circ$ . Табу кергіміз:  $w=?$  Жоғарыда келтірілген аксонометрияның негізгі формуласын пайдаланамыз:  $u^2+v^2+w^2=2+\text{ctg}^2 \varphi^\circ \Rightarrow 0,8^2+0,6^2+w^2=2+\text{ctg}^2 30^\circ \Rightarrow 0,64+0,36+$   
 $+w^2=2+(\sqrt{3})^2 \Rightarrow w^2=2+3-1=4 \Rightarrow w=2$ .

**3.4.2 - е с е п.** Тікбұрышты аксонометрияның осьтері  $O'x'$ ,  $O'y'$ ,  $O'z'$  және іздер үшбұрышының бір төбесі  $Z' \in (O'z')$  берілген. Іздер үшбұрышын ( $\Delta X'Y'Z'$ ) салу керек (93, а-сурет).

**Ш е ш у і.** Тікбұрышты аксонометрияда іздер үшбұрышының қабырғалары оған сәйкес аксонометриялық осьтерге перпендикуляр болады. Сондықтан  $Z'$  нүктесі арқылы  $O'x'$  осінің созындысына перпендикуляр түзу жүргізсек, онда ол түзу  $O'y'$  осін  $Y'$  нүктесінде қияды. Ал

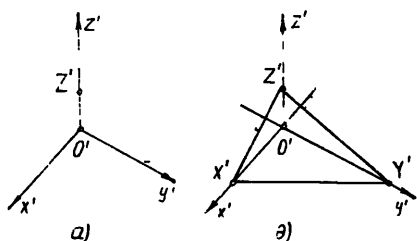
$Z'$  нүктесі арқылы  $O'y'$  осінің созындысына перпендикуляр түзу жүргізсек, онда ол түзу  $O'x'$  түзуін  $X'$  нүктесінде қияды. Табылған  $X'$  және  $Y'$  нүктелерін қосып,  $X'Y'Z'$  іздер үшбұрышын (93, ә-сурет) аламыз.

### 3.5. СТАНДАРТ АКСОНОМЕТРИЯЛАР

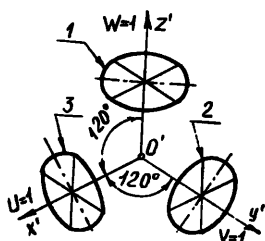
Польке теоремасына сай аксонометриялық осьтердің бағыттарына, аксонометриялық масштабтардың мәндеріне ешқандай шек қойылмайды. Бірақ кез келген аксонометрия іс жүзінде тиімді бола бермейді. Аксонометрияда нәрсенің кескінін салу мүмкіндігінше оңай бслуы және нәрсе аз бұрмаланып проекциялануы керек. Іс жүзінде қолданылатын аксонометрияларды бір жүйеге келтіру мақсатында МЕСТ 2.317-69 аксонометрияның тек 5 түрін тағайындаған. Оларды *стандарт аксонометриялар* деп атаймыз. Стандарт аксонометрияға жататындар: тікбұрышты изометрия; тікбұрышты диметрия; қиғашбұрышты фронталь изометрия, қиғашбұрышты фронталь диметрия; қиғашбұрышты горизонталь изометрия.

**Тікбұрышты изометрия.** Изометрия болғандықтан  $u=v=w$  болады. (3.4.1) теңдігінен  $u=v=w=\sqrt{2/3}\cong\cong 0,82$  болады. Бірақ бұндай бөлшек көрсеткіштерді пайдалану қолайсыз. Сондықтан оларды дөнгелектеп, бірге тең деп алады. Келтірілген жаңа көрсеткіштерді үлкен әріптермен белгілейді:  $U=V=W=1$ . Аксонометриялық кескін үлкейіп түседі. Үлкейту масштабы  $(1/0,82\cong 1,22)$   $1,22:1$  болады. Іздер үшбұрышы изометрия үшін теңқабырғалы болатыны туралы жоғарыда айтылды. Ал аксонометриялық осьтер осы теңқабырғалы үшбұрыштың биіктіктерімен бағыттас болғандықтан, олардың арасындағы бұрыштар  $120^\circ$  ( $360^\circ/3=120^\circ$ ) болады.

Координаталар жазықтығында немесе оған параллель жазықтықта орналасқан шеңбер кіші осі координаталар



93-сурет.



94-сурет.

жазықтығы атауында жоқ осьпен бағыттас, ал үлкен осі оған перпендикуляр болатын эллипске кескінделеді. Егер шеңбер *Оху* жазықтығына параллель орналасса, онда оның аксонометриясы кіші осі  $O'z'$  түзуімен бағыттас болатын эллипске кескінделеді (94-сурет, 1-эллипс). Сол сияқты *Охz* жазықтығына параллель шеңбер 2-эллипске және *Оуz* жазықтығына параллель шеңбер 3-эллипске проекцияланады (94-сурет). Аталған эллипстер өзара тең, олардың үлкен осьтері  $1,22d$  және кіші осьтері  $0,71d$  болады. Бұл арада  $d$  — кескінделетін шеңбердің диаметрі.

**Тікбұрышты диметрия.** Тікбұрышты изометрия жалғыз, ал тікбұрышты диметрия шексіз көп. Сондықтан абсциссалар, аппликатаалар осьтері бағыттарындағы бұрмалану көрсеткіштерін өзара тең, ал ординаталар осі бағытындағы бұрмалану көрсеткішін олардың жартысына тең деп алу ұйғарылған. Сонда  $u=2 \cdot v=w$  болады, ал (3.4.1) теңдігінен  $u=2 \cdot v=w=\sqrt{8/9} \cong 0,94$  болады. Бірақ диметрияны салу қолайлы болуы үшін дәл бұрмалану көрсеткіштерінің орнына келтірілген бұрмалану көрсеткіштерін пайдаланады. Диметриядағы келтірілген бұрмалану көрсеткіштері  $U=W=1$  және  $V=0,5$ . Сонда кескін үлкейіп түседі. Тікбұрышты диметриядағы үлкейту масштабы  $(1/0,94 \cong 1,06)$   $1,06:1$  болады. Аксонометриялық осьтер арасындағы бұрыштарды есептелік. Ол үшін бұрышпен оның тікбұрышты проекциясы аралығындағы байланысты қарастыралық. Бізге  $\varphi^\circ$  бұрышы берілсін. Оның қабырғалары проекциялар жазықтығына  $\alpha^\circ$  және  $\gamma^\circ$  бұрыштарымен көлбесін. Берілген бұрыштың тікбұрышты проекциясын  $\varphi'$  деп белгілесек, онда (2.4.2) формуласын аламыз. Енді (2.4.2) формуласын пайдаланып  $O'x'$  және  $O'z'$  осьтері арасындағы бұрышты есептелік. (3.4.2) теңдіктерінен:

$$\cos \alpha = u; \quad \cos \gamma = w; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - u^2}; \\ \sin \gamma = \sqrt{1 - w^2}.$$

Тікбұрышты координаталар системасы қарастырылатындықтан  $\varphi = 90^\circ$ . Олай болса,  $\cos \varphi = \cos 90^\circ = 0$ . Сонда

$\cos((O'x'), \widehat{(O'z')}) = \cos \varphi' = (0 - \sqrt{1 - u^2} \cdot \sqrt{1 - w^2}) / uw$  болады. Тікбұрышты диметрияда  $u=w=\sqrt{8/9}$ .

$$\cos((O'x'), \widehat{(O'z')}) = - \sqrt{1 - 8/9} \cdot \sqrt{1 - 8/9} / \sqrt{8/9} \cdot \sqrt{8/9} = -1/8;$$

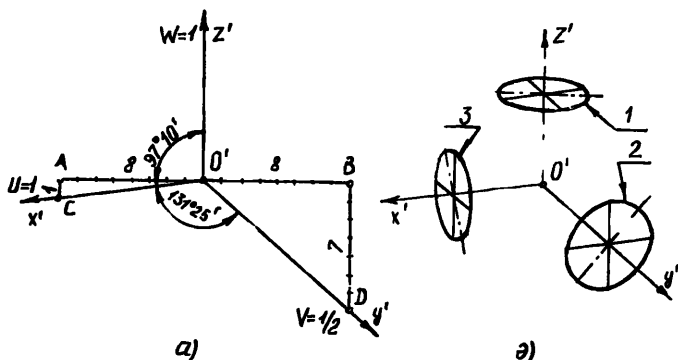
$$((O'x'), \widehat{(O'z')}) = 97^\circ 10'.$$

Іздер үшбұрышы теңбүйірлі үшбұрыш болатындықтан  $O'y'$  осі  $((O'x'), \widehat{(O'z')})$  бұрышының биссектрисасы болады:

$$((O'x'), \widehat{(O'y')}) = ((O'y'), \widehat{(O'z')}) = (360^\circ - 97^\circ 10')/2 = 131^\circ 25'.$$

Тікбұрышты диметрия осьтерін былай салады. Вертикаль түзу салып, оны  $O'z'$  осі ретінде қабылдайды.  $O'$  нүктесі арқылы  $O'z'$  түзуіне перпендикуляр (горизонталь) түзу жүргізіп, оның бойына 8 өзара тең кесінділер салады. Сонда  $A$  және  $B$  нүктелері алынады (95, а-сурет). Осы  $A$  және  $B$  нүктелері арқылы  $O'z'$  түзуіне параллель түзулер жүргізіп, олардың бойына сәйкес 1 және 7 кесінді салады да, табылған  $C$  және  $D$  нүктелерін  $O'$  нүктесімен қосады:  $(O'C) = O'x'$  және  $(O'D) = O'y'$ .

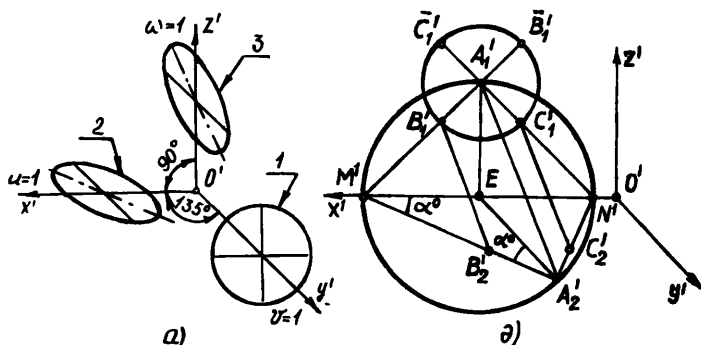
Координаталар жазықтықтарына параллель орналасқан шеңберлер үлкен осьтері жазықтықтың атында жоқ оське перпендикуляр болатын эллипстерге кескінделеді (95, ә-сурет).  $Oxy$  жазықтығына параллель шеңбер үлкен осі  $O'z'$  осіне перпендикуляр (95, ә-суретте 1-эллипс), ал  $Oyz$  жазықтығына параллель шеңбер үлкен осі  $O'x'$  осіне перпендикуляр (95, ә-суреттегі 3-эллипс) болатын эллипстерге кескінделеді. Бұл өзара тең екі эллипстің өлшемдері: үлкен осьтері  $1,06d$ , кіші осьтері  $0,35d$  және  $O'y'$  осіне параллель диаметрлері  $0,5d$  болады. Ал 1-эллипстің  $O'x'$  осіне параллель диаметрі, 3-эллипстің  $O'z'$  осіне параллель диаметрі бұрмаланбайды (олар  $d$ -ға



95-сурет.

тең).  $Oxz$  жазықтығына параллель шеңбер үлкен осі  $O'y'$  түзуіне перпендикуляр эллипске (95, ә-суреттегі 2-эллипс) проекцияланады. Оның кіші осі  $0,94d$  болады.

**Қиғашбұрышты фронталь изометрия.** Аксонометриялық проекциялар жазықтығын  $Oxz$  координаталар жазықтығына параллель орналастырады. Бұл жағдайда  $Ox$  және  $Oz$  осьтері өзара перпендикуляр түзулерге ( $O'x'$  және  $O'z'$ ) бұрмаланбай проекцияланады, яғни  $(O'x') \perp (O'z')$  және  $u=w=1$  болады. Ал  $O'y'$  осінің бағыты және  $v$  бұрмалану көрсеткішінің мәні проекциялау бағытына байланысты болады. Егер проекциялау бағыты проекциялар жазықтығына перпендикуляр болса, онда  $Oy$  осі нүктеге проекцияланады және  $v=\operatorname{ctg} \varphi^0 = \operatorname{ctg} 90^0 = 0$  болады. Бұл жағдайда кескінде үшінші ось болмайды, кескін өзінің көрнектілігін жояды. Сондықтан қиғаш бұрыштап проекциялау керек. Изометрияда проекциялау бағытын үшінші бұрмалану көрсеткіші  $v=1$  болатындай етіп тағайындайды, ал абсциссалар, ординаталар осьтері арасындағы бұрышты  $135^0$  деп алады (96, а-сурет). Координаталар жазықтықтарына параллель шеңберлердің кескіндерін салуды қарастыралық.  $Oxz$  жазықтығына параллель шеңбер аксонометриялық проекциялар жазықтығына да параллель болады, олай болса, ол бұрмаланбай шеңбер түрінде проекцияланады (96, а-суреттегі 1-шеңбер).  $Oxu$  және  $Oyuz$  жазықтықтарына параллель шеңберлер өзара тең эллипстерге (96, а-суреттегі 2 және 3-эллипстер) кескінделеді. Аталған эллипстердің аксонометрияда орналасу бағыттарын және өлшемдерін анықтау үшін шеңбердің  $Oxz$  және  $Oxu$  жазықтықтарындағы проекциялары арасындағы тектес сәйкестікті пайдаланалық (96, ә-сурет). Центрі  $A$  нүкте-



96-сурет.

сінде орналасқан *Охз* жазықтығына параллель шеңбердің бұрмаланбайтын екінші проекциясы центрі  $A'_1$ , радиусы берілген шеңбердің радиусына тең шеңберге кескінделеді, ал  $A'$  нүктесін  $A'_1$  нүктесінен  $O'x'$  түзуіне түсірілген перпендикулярдың табаны  $E$  нүктесі арқылы  $O'y'$  осіне параллель етіп жүргізілген түзудің бойынан табамыз. Изометрияда бұрмалану көрсеткіштері өзара тең болғандықтан  $|A'_1 E| = |EA'_2|$  болады. Тектес сәйкестіктің басты бағыттарын салу есебін пайдаланып, 2-эллипстің осьтерін анықталық. Ол үшін центрі  $E$  нүктесі болатын және  $A'_1, A'_2$  нүктелерін басып өтетін шеңбер жүргіземіз. Соңғы шеңбер тектес сәйкестік осін ( $O'x'$  түзуін)  $M'$  және  $N'$  нүктелерінде қияды.  $A'_1 M'$  және  $A'_1 N'$  түзулері  $B'_1 \overline{B'_1}$  және  $C'_1 \overline{C'_1}$  диаметрлерін анықтайды. Аталған диаметрлерге сәйкес кесінділер 2-эллипстің осьтерін береді. 2-эллипстің үлкен осі  $A'_2 M'$  түзуімен бағыттас.  $A'_2 EM'$  үшбұрышы теңбүйірлі үшбұрыш және оның  $E$  төбесіндегі бұрышы  $135^\circ$ . Осыдан 2-эллипстің үлкен осі  $O'x'$  осіне  $\alpha^\circ = (180^\circ - 135^\circ)/2 = 22^\circ 30'$  бұрышпен көлбейтінін көреміз.  $M'A'_2 N'$  тікбұрышты үшбұрышынан

$$|A'_2 M'| = |M' N'| \cos \alpha^\circ = a \cos 22^\circ 30' \cong 0,9235a,$$

$$|A'_2 N'| = |M' N'| \sin \alpha^\circ = a \sin 22^\circ 30' \cong 0,3825a;$$

ал  $M'A'_1 N'$  тікбұрышты үшбұрышынан

$$|A'_1 M'| = |A'_1 N'| = |M' N'| \sin 45^\circ \cong 0,71a.$$

$A'_1 A'_2 M'$  және  $B'_1 B'_2 M'$  үшбұрыштарының ұқсастығынан

$$|A'_2 B'_2| / |A'_1 B'_1| = |A'_2 M'| / |A'_1 M'| = 0,9235/0,71 \cong 1,3;$$

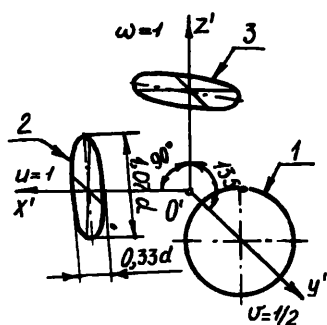
ал  $A'_1 A'_2 N'$  және  $C'_1 C'_2 N'$  үшбұрыштарының ұқсастығынан

$$|A'_2 C'_2| / |A'_1 C'_1| = |A'_2 N'| / |A'_1 N'| = 0,3825/0,71 \cong 0,54$$

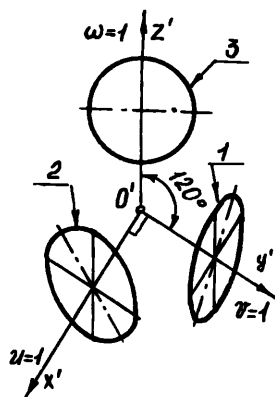
екені анықталады.

Сонымен 2 және 3-эллипстердің үлкен осьтері  $1,3d$ , кіші осьтері  $0,54d$  болады, ал 2-эллипстің үлкен осі  $O'x'$  осіне  $22^\circ 30'$  және 3-эллипстің үлкен осі  $O'z'$  осіне  $22^\circ 30'$  бұрыш жасап көлбейді.

**Қиғашбұрышты фронталь диметрияның қиғашбұрышты фронталь изометриядан айырмашылығы** тек мыналарда ғана: бұрмалану көрсеткіші  $v=0,5$  деп алынады; 2-және 3-эллипстердің (97-сурет) үлкен осьтері  $1,07d$ , кіші осьтері  $0,33d$  болады; 3-эллипстің үлкен осі  $O'z'$



97-сурет.

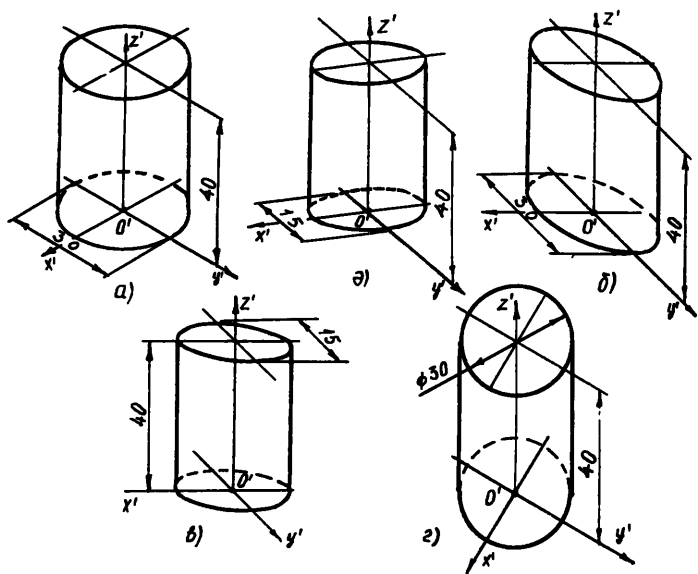


98-сурет.

осімен  $82^{\circ}46'$  және 2-эллипстің үлкен осі  $O'x'$  осімен  $82^{\circ}46'$ -ке тең бұрыштар жасап көлбейді.

**Қиғашбұрышты горизонталь изометрия.** Аксонометриялық проекциялар жазықтығын горизонталь орналас-тыралық, яғни  $\pi' \parallel Oxy$  болсын. Бұл жағдайда проекция-лау бағытына байланыссыз  $O'x'$  және  $O'y'$  осьтері өзара перпендикуляр орналасады, ал бұрмалану көрсеткіштері ( $u$  және  $v$ ) бірге тең болады. Проекциялау бағытын  $O'z'$  және  $O'y'$  осьтері арасындағы бұрыш  $120^{\circ}$  және бұрма-лану көрсеткіші  $\omega=1$  болатындай етіп тандап алуға бо-лады (98-сурет).  $Oxy$  жазықтығына параллель шеңбер бұрмаланбай 3-шеңбер түрінде, ал  $Oxz$  және  $Oyz$  жа-зықтықтарына параллель шеңберлер 1 және 2-эллипстер-ге кескінделеді. 1-эллипстің үлкен осі  $O'y'$  осіне  $75^{\circ}$ -қа тең бұрышпен көлбейді, ал оның ұзындығы  $1,37d$  болады. 1-эллипстің кіші осі  $0,37d$ -ға тең болады. 2-эллипстің үлкен осі  $O'x'$  осіне  $120^{\circ}$ -қа тең бұрышпен көлбейді және оның ұзындығы  $1,22d$  болады, ал оның кіші осінің ұзын-дығы  $0,71d$ -ға тең.

**Мысал.** Биіктігі 40 мм және диаметрі 30 мм ци-линдрдің стандарт аксонометрияларын салу керек бол-сын. Цилиндр осін аппликатадар осі ретінде қабылдап, оны  $Oxy$  жазықтығында тұр екен делік. Цилиндрдің 99, а-суретте тікбұрышты изометриясы, 99, ә-суретте тікбұрышты диметриясы, 99, б-суретте қиғашбұрышты фронталь изометриясы, 99, в-суретте қиғашбұрышты фронталь диметриясы және 99, г-суретте қиғашбұрышты горизонталь изометриясы сызылған.



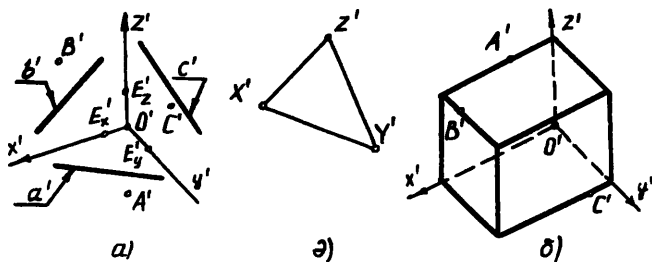
99-сурет.

## Есептер

1. Аксонометриялық осьтер бағытын және аксонометриялық масштабтарды тандап алып  $A$ ,  $B$ ,  $C$  нүктелері мен  $MN$  кесіндісінің аксонометриялық және екінші проекцияларын салыңыздар. Берілген  $A$ ,  $B$ ,  $C$  нүктелерінің қайсысы  $MN$  кесіндісінің бойында жатады?  $A(4; 3; 8)$ ,  $B(6; 2; 10)$ ,  $C(7; 4; 5)$   $M(10; 0; 5)$ ,  $N(0; 5; 10)$ .

2.  $Oxy$  жазықтығында жатқан  $A$  нүктесі мен  $a$  түзуінің,  $Oxz$  жазықтығында жатқан  $B$  нүктесі мен  $b$  түзуінің және  $Oyz$  жазықтығында жатқан  $C$  нүктесі мен  $c$  түзуінің аксонометриялық проекциялары:  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  нүктелері және  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  түзулері берілген (100, а-сурет). Осы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  нүктелерінің және  $a$ ,  $b$ ,  $c$  түзулерінің екінші проекцияларын табыңыздар.

3.  $A(3; 3; 7)$ ,  $B(8; 1; 4)$  және  $C(1; 8; 6)$  нүктелерінің аксонометрияларын салыңыздар (аксонометриялық осьтердің бағыттарын және аксонометриялық масштабтардың мәндерін тандап алыңыздар). Аксонометрияда  $A$  нүктесі арқылы үш түзу жүргізіңіздер. Олардың біреуі  $BC$  түзуіне параллель, екіншісі  $Oxz$  жазықтығына параллель және  $BC$  түзуімен қиылысатын болсын, ал үшін-



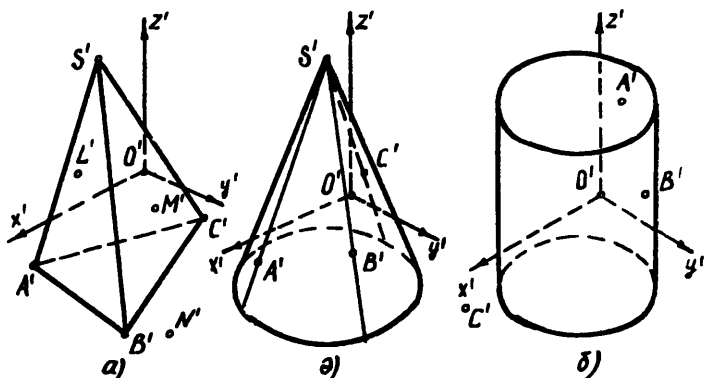
100-сурет.

шісі  $Oyz$  жазықтығына параллель және  $BC$  түзуімен қиылысатын болсын.

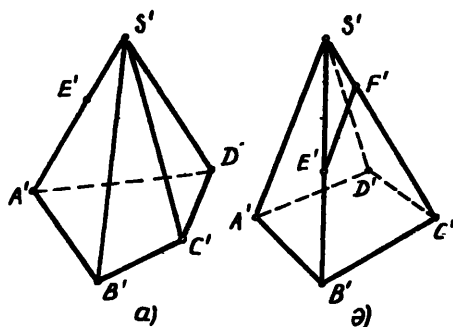
4. Екі нүкте берілген:  $M(6; 2; 5)$  және  $N(2; 7; 8)$ . Осы нүктелер арқылы өтетін үш жазықтық жүргізіп, олардың координаталар жазықтығымен қиылысу сызықтарын салыңыздар. Бірінші жазықтық  $Oxy$  жазықтығына перпендикуляр, екінші жазықтық  $Oxz$  жазықтығына және үшінші жазықтық  $Oyz$  жазықтығына перпендикуляр болсын.

5. 100, б-суретте параллелепипедтің және оның қырлары бойынан алынған  $A, B, C$  нүктелерінің аксонометриясы берілген. Осы  $A, B$  және  $C$  нүктелері анықтайтын жазықтық пен параллелепипедтің қиылысуы нәтижесінде алынған көпбұрыштың аксонометриясын салу керек.

6. Табаны  $Oxy$  жазықтығында орналасқан  $SABC$  пирамидасы және үш нүкте  $L \in \triangle ABS$ ,  $M \in \triangle BCS$ ,  $N \in \triangle ACS$  кескінделген (101, а-сурет). Осы үш нүкте анық-



101-сурет.



102-сурет.

тайтын жазықтықпен  $SABC$  пирамидасының қиылысу сызығын салу керек.

7. Конустың және оның бетінде жатқан үш нүктенің ( $A$ ,  $B$  және  $C$ ) аксонометриялары берілген (101, ә-сурет). Конустың табаны  $Oxy$  жазықтығында жатыр деп қарастырып, оның берілген  $A$ ,  $B$  және  $C$  нүктелері анықтайтын жазықтықпен қимасын салыңыздар.

8. Цилиндрдің және үш нүктенің аксонометриясы берілген (101, б-сурет).  $A$  нүктесі цилиндрдің жоғарғы табанында,  $B$  нүктесі көрінетін бүйір бетінде, ал  $C$  нүктесі  $Oxy$  жазықтығында жатыр. Аталған нүктелер анықтайтын жазықтықпен цилиндрдің қимасын салыңыздар.

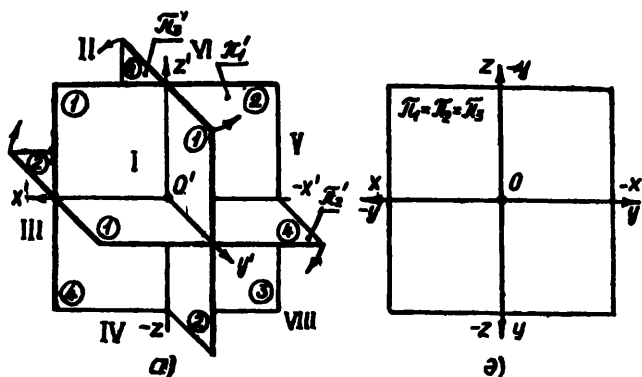
9.  $SABCD$  төртбұрышты пирамиданың кескіні берілген (102, а-сурет). Оның  $AS$  қыры бойында орналасқан  $E$  нүктесі арқылы өтетін жазықтықпен қимасында параллелограмм пайда болады. Осы параллелограммның аксонометриясын салу керек.

10.  $SABCD$  төртбұрышты пирамидасы және оның  $BCS$  жағында жатқан  $EF$  кесіндісінің аксонометриясы берілген (102, ә-сурет).  $EF$  түзуінің пирамиданың табан жазықтығымен және  $ADS$  жағымен қиылысу нүктелерін салу керек.

## 4 - т а р а у. НҮКТЕНІҢ, ТҮЗУДІҢ ЖӘНЕ ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ЭПИЮРЛЕРІ. ПОЗИЦИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕР

### 4.1. ОКТАНТТАР. НҮКТЕНІҢ ЭПИЮРІ

Өзара перпендикуляр  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  және  $\pi_3$  жазықтықтарын алып, олардың біріншісін фронталь, екіншісін горизонталь және үшіншісін профиль орналастыралық (103, а-



103-сурет.

сурет).  $\pi_1$  және  $\pi_2$  жазықтықтарының қиылысу сызығын  $x$  әрпімен белгілеп, оны абсциссалар осі ретінде қарастыралық. Сол сияқты  $\pi_2 \cap \pi_3 = y$  — ординаталар және  $\pi_1 \cap \pi_3 = z$  — аппликатаалар осьтері болсын. Аталған үш түзу  $x, y, z$  бір нүктеде қиылысады да бұл нүкте  $\pi_1, \pi_2$  және  $\pi_3$  жазықтықтарына ортақ  $O$  нүктесі болады. Енді өлшем бірліктерін тағайындасак, онда тікбұрышты декарттық координаталар системасы  $Oxyz$  алынар еді. Сонда  $\pi_1$  жазықтығы  $Oxz$  координаталар жазықтығымен,  $\pi_2$  —  $Oxy$  және  $\pi_3$  —  $Oyz$  жазықтықтарымен беттеседі. Бірақ бұл міндетті емес. Жалпы жағдайда координаталар системасын кеңістікте қалауымызша орналастыруға болады. Бірақ есептерді графиктік және аналитикалық жолдармен шешуді байланыстыру және жеңілдету мақсатымен  $\pi_1 = Oxz$ ,  $\pi_2 = Oxy$  және  $\pi_3 = Oyz$  болатын жеке жағдайды ғана қарастырамыз.

Берілген дененің сызбасын алу үшін оны осы  $\pi_1, \pi_2$  және  $\pi_3$  жазықтықтарына тікбұрыштап проекциялайтын боламыз. Сонда дененің  $\pi_1$  жазықтығындағы тікбұрышты проекциясын оның *фронталь проекциясы*,  $\pi_2$  жазықтығындағы тікбұрышты проекциясын оның *горизонталь проекциясы* және  $\pi_3$  жазықтығындағы тікбұрышты проекциясын оның *профиль проекциясы* деп атайды. Ал  $\pi_1$  жазықтығын *фронталь проекциялар жазықтығы*,  $\pi_2$  жазықтығын *горизонталь проекциялар жазықтығы* және  $\pi_3$  жазықтығын *профиль проекциялар жазықтығы* деп атайды. Профиль проекциялар жазықтығы  $Ox$  осін екіге бөледі. Абсциссалар осінің  $\pi_3$  жазықтығының сол жағындағы бөлігі оның *оң* (таңбалы) *бағыты*, ал оң жағындағы

бөлігі оның *теріс* (таңбалы) *бағыты* болады.  $\pi_2$  жазықтығы  $Oz$  осін екіге бөледі: жоғары бөлігі *оң бағытты* және төменгі бөлігі *теріс бағытты* анықтайды. Сол сияқты,  $\pi_1$  жазықтығы ординаталар осін екіге бөледі:  $Oy$  осінің алдыңғы бөлігі *оң бағытты* және  $Oy$  осінің артқы бөлігі *теріс бағытты* анықтайды. Нүктеден  $\pi_3 = Oyz$  жазықтығына дейінгі қашықтықты оның *абсциссасы*,  $\pi_1 = Oxz$  жазықтығына дейінгі қашықтықты — ординатасы және  $\pi_2 = Oxy$  жазықтығына дейінгі қашықтықты — *аппликата*сы деп атайды. Нүктенің координаталарын осьтерге сәйкес әріптермен белгілейді. Мысалы,  $M(x, y, z)$  немесе  $M(15, 10, 4)$  деген жазулардан  $M$  нүктесінің горизонталь проекциялар жазықтығынан қашықтығы  $z=4$ , фронталь проекциялар жазықтығынан қашықтығы  $y=10$  және профиль проекциялар жазықтығынан қашықтығы  $x=15$  екенін көреміз. Нүктенің кеңістіктегі орнын оның координаталары толық анықтайды. Шынында да,  $M(x, y, z)$  нүктесін тұрғызу үшін  $\pi_3$  жазықтығына параллель және одан қашықтығы  $x$ -ке тең  $\alpha$  жазықтығын,  $\pi_1$  жазықтығына параллель және одан қашықтығы  $y$ -ке тең  $\beta$  жазықтығын,  $\pi_2$  жазықтығына параллель және одан қашықтығы  $z$ -ке тең  $\gamma$  жазықтығын жүргізсек, онда олар тек жалғыз нүктеде қиылысар еді. Осы  $\alpha, \beta, \gamma$  жазықтықтарына ортақ нүкте  $M$  нүктесі болар еді. Бұл айтылғанға керісінше, егер кеңістікте нүкте берілсе, онда оның координаталарын оңай анықтауға болады. Осы берілген нүкте арқылы  $\pi_3$  жазықтығына параллель  $\alpha$  жазықтығын жүргізсек, онда ол жазықтық абсциссалар осімен  $M_x$  нүктесінде қиылысады:

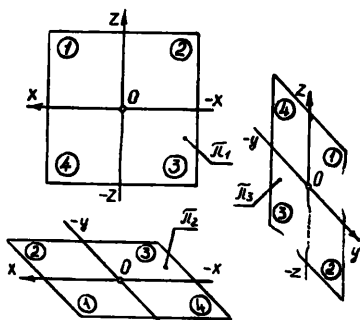
$$\alpha \cap x = M_x. \quad M \in \beta \parallel \pi_1; \quad \beta \cap y = M_y. \quad M \in \gamma \parallel \pi_2; \quad \gamma \cap z = M_z.$$

Сонда  $OM_x, OM_y, OM_z$  кесінділердің ұзындықтары  $M$

нүктесінің сәйкес координаталарын анықтайды:

$$|OM_x| = x; \quad |OM_y| = y; \\ |OM_z| = z.$$

Кеңістікті  $\pi_1, \pi_2$  және  $\pi_3$  жазықтықтары 8 бөлікке бөледі. Осы бөліктерді *октанттар* деп атайды. Әрбір жазықтық сәйкес екі осьтің көмегімен төртке бөлінеді.  $\pi_1$  жазықтығы  $x$  және  $z$  осьтерінің көмегімен 4 ширекке бөлінеді (104, а-сурет): 1-



104-сурет.

ширек  $x$  және  $z$  осьтерінің оң бағыттарымен, 2-ширек  $x$  осінің теріс және  $z$  осінің оң бағыттарымен, 3-ширек  $x$  және  $z$  осьтерінің теріс бағыттарымен, 4-ширек  $x$  осінің оң және  $z$  осінің теріс бағыттарымен анықталады.  $\pi_2$  жазықтығы  $x$  және  $y$  осьтерімен 4 ширекке бөлінеді (104, ә-сурет): 1-ширек  $x$  және  $y$  осьтерінің оң бағыттарымен, 2-ширек  $x$  осінің оң,  $y$  осінің теріс бағыттарымен, 3-ширек  $x$  және  $y$  осьтерінің теріс бағыттарымен, 4-ширек  $x$  осінің теріс және  $y$  осінің оң бағыттарымен анықталады.  $\pi_3$  жазықтығы  $y$  және  $z$  осьтерінің көмегімен 4 ширекке бөлінеді (104, б-сурет): 1-ширек  $y$  және  $z$  осьтерінің оң бағыттарымен, 2-ширек  $y$  осінің оң,  $z$  осінің теріс бағыттарымен, 3-ширек  $y$  және  $z$  осьтерінің теріс бағыттарымен, 4-ширек  $y$  осінің теріс және  $z$  осінің оң бағыттарымен анықталады. Сонда: I октант  $\pi_1, \pi_2$  және  $\pi_3$  жазықтықтарының 1-ширектерімен анықталады; II октант  $\pi_1$  жазықтығының 1-ширегі,  $\pi_2$  жазықтығының 2-ширегі және  $\pi_3$  жазықтығының 4-ширегімен анықталады; III октант  $\pi_1$  жазықтығының 4-,  $\pi_2$  жазықтығының 2- және  $\pi_3$  жазықтығының 3- ширектерімен анықталады; IV октант  $\pi_1$  жазықтығының 4-,  $\pi_2$  жазықтығының 1- және  $\pi_3$  жазықтығының 2-ширектерімен анықталады; V октант  $\pi_1$  жазықтығының 2-,  $\pi_2$  жазықтығының 4- және  $\pi_3$  жазықтығының 1-ширектерімен анықталады; VI октант  $\pi_1$  жазықтығының 2-,  $\pi_2$  жазықтығының 3- және  $\pi_3$  жазықтығының 4- ширектерімен анықталады; VII октант  $\pi_1, \pi_2$  және  $\pi_3$  жазықтықтарының 3-ширектерімен анықталады; VIII октант  $\pi_1$  жазықтығының 3-,  $\pi_2$  жазықтығының 4- және  $\pi_3$  жазықтығының 2- ширектерімен анықталады. Енді әр түрлі октанттарда орналасқан нүктелер координаталарының таңбаларын анықтау қиын емес. 103, а- және 104-суреттерді пайдалана отырып 4-кестені толтыру қиын емес.

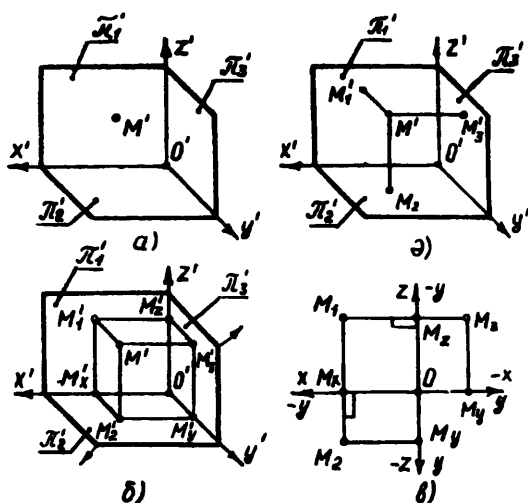
4-кесте

| Координаталар | Октанттар |    |     |    |   |    |     |      |
|---------------|-----------|----|-----|----|---|----|-----|------|
|               | I         | II | III | IV | V | VI | VII | VIII |
| $x$           | +         | +  | +   | +  | - | -  | -   | -    |
| $y$           | +         | -  | -   | +  | + | -  | -   | +    |
| $z$           | +         | +  | -   | -  | + | +  | -   | -    |

Ал 4-кестені пайдаланып берілген нүкте координаталарының таңбаларына қарап, оның қай октантта орналасқанын анықтау қиын емес. Нүктенің абсциссасы оң, ал ординатасы мен аппликаты теріс таңбалы болатын болса, онда ол нүкте III октантта орналасады. Абсциссасы мен ординатасы теріс, ал аппликаты оң таңбалы болатын нүкте VI октантта орналасады. Координаталарының үшеуі де оң таңбалы болса, онда нүкте I октантта, ал олардың үшеуі де теріс таңбалы болса VII октантта орналасады т. с. с. Егер нүкте  $\pi_1$  жазықтығында жатса, онда нүктенің ординатасы нөлге тең болады. Бұған керісінше, егер  $y=0$  болса, онда нүкте фронталь проекциялар жазықтығында жатады. Сол сияқты  $\pi_2$  жазықтығында жатқан нүктенің аппликаты нөлге тең, ал  $\pi_3$  жазықтығында жатқан нүктенің абсциссасы нөлге тең болады. Керісінше,  $z=0$  болса, онда нүкте горизонталь проекциялар жазықтығында, ал  $x=0$  болса, онда — профиль проекциялар жазықтығында жатады.

Жазық кескін алу үшін  $\pi_2$  жазықтығын  $x$  осінен айналдырып,  $\pi_3$  жазықтығын  $z$  осінен айналдырып,  $\pi_1$  жазықтығымен беттестіреді. Сонда беттескен үш жазықтықты кескін салынатын қағаз беті деп қарастыруға болады. Фигураның фронталь, горизонталь және профиль проекцияларынан тұратын кескінді *эпюр* деп атайды. Кейде эпюр деудің орнына комплекстік сызба, немесе қысқартып сызба деп те атайды. Сызуда фронталь проекцияны *алдынан қарағандағы көрініс*, горизонталь проекцияны *үстінен қарағандағы* және профиль проекцияны *сол жағынан қарағандағы көріністер* деп атайды. Алдынан, үстінен және сол жағынан қарағандағы көріністер *негізгі көріністерге* жатады. Осыған орай эпюрді *негізгі көріністер сызбасы* деп те атайды. Біз бұдан былай *эпюр* немесе *сызба* дейтін боламыз. Эпюрде ординаталар осі екіге ажырайды. Оның біреуі  $\pi_2$  жазықтығымен бірге қозғалып аппликаты осімен, ал екіншісі  $\pi_3$  жазықтығымен бірге қозғалып абсциссалар осімен бірігеді (103, ә-сурет). Нүктені, түзуді және жазықтықты кеңістікте қандай әріптермен белгілесе, онда олардың проекцияларын да сондай әріптермен белгілейді. Проекцияларды ажырату үшін проекциялар жазықтықтарына сәйкес индекстер пайдаланылады:  $a$  түзуінің горизонталь проекциясын  $a_2$ , фронталь проекциясын  $a_1$  және профиль проекциясын  $a_3$  деп белгілеу керек.

Бірінші октантта орналасқан  $M$  нүктесінің проекцияларын тауып, оның эпюрін салуды қарастыралық (105,



105-сурет.

а-сурет). Берілген нүктеден фронталь, горизонталь және профиль проекциялар жазықтықтарына перпендикулярлар түсірсек, олардың табандары  $M_1$ ,  $M_2$  және  $M_3$  нүктелері болады. Сонда  $M_1$  нүктесі  $M$  нүктесінің фронталь проекциясын,  $M_2$  — горизонталь проекциясын және  $M_3$  — профиль проекциясын анықтайды (105, в-сурет). Нүктенің фронталь проекциясынан абсциссалар және аппликата осьтеріне, горизонталь проекциясынан абсциссалар және ординаталар осьтеріне және профиль проекциясынан ординаталар және аппликата осьтеріне түсірілген перпендикулярлар  $M_x$ ,  $M_y$  және  $M_z$  нүктелерін береді. Осы  $M_x$ ,  $M_y$  және  $M_z$  нүктелерін  $M$  нүктесінің *осьтік проекциялары* деп те атайды (105, б-сурет). Нүкте  $M$ , бас нүкте  $O$ , горизонталь проекция  $M_2$ , профиль проекция  $M_3$ , фронталь проекция  $M_1$  және осьтік проекциялар  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  тік параллелепипедтің төбелері болады. Бұл параллелепипедтің үш өлшемі  $M$  нүктесінің координаталарымен анықталады. Егер  $M(x, y, z)$  болса, онда

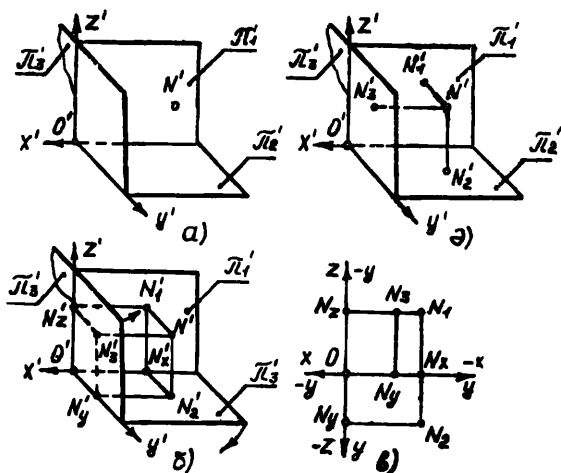
$$\begin{aligned} x &= |MM_3| = |M_1M_z| = |M_2M_y| = |M_xO|; \\ y &= |MM_1| = |M_2M_x| = |M_3M_z| = |M_yO|; \\ z &= |MM_2| = |M_1M_x| = |M_3M_y| = |M_zO| - \text{болады.} \end{aligned}$$

Эпюр алу үшін  $\pi_2$  жазықтығын  $x$  осінең оның оң бағытынан қарағанда сағат тілі қозғалысы бағытында ай-

налдырып, ал  $\pi_3$  жазықтығын  $z$  осінен оның оң бағытынан қарағанда сағат тілі қозғалдысына кері бағытта айналдырып, оларды  $\pi_1$  жазықтығымен беттестіру қажет (105, в-сурет). Эпюрде бірінші октантта орналасқан нүктенің фронталь проекциясы бірінші ширекте, профиль проекциясы — екінші ширекте және горизонталь проекциясы — төртінші ширекте жататынын көреміз. Нүктенің фронталь және горизонталь проекцияларын қосатын түзу  $x$  осіне перпендикуляр болады, яғни вертикаль орналасады. Сондықтан оны *вертикаль байланыс сызығы* дейді. Ал фронталь және профиль проекцияларын қосатын түзу  $z$  осіне перпендикуляр болады, яғни горизонталь орналасады. Сондықтан оны *горизонталь байланыс сызығы* деп атайды.  $(M_1M_2)$  — вертикаль байланыс сызығы;  $(M_1M_3)$  — горизонталь байланыс сызығы. Нүктенің фронталь және горизонталь проекцияларының ара қашықтығы оның ординатасы мен аппликатының қосындысына тең, ал фронталь және профиль проекцияларының ара қашықтығы абсциссасы мен ординатасының қосындысына тең болады:

$$|M_1M_2| = y + z; \quad |M_1M_3| = x + y.$$

Екінші мысал ретінде бесінші октантта орналасқан  $N$  нүктесінің проекцияларын тұрғызып эпюрін салуды қарастыралық (106, а-сурет). Бұл жолы нүктенің фронталь проекциясы  $\pi_1$  жазықтығының 2-ширегінде, гори-

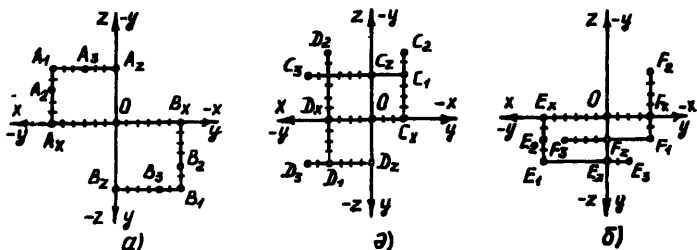


106-сурет.

горизонталь проекциясы —  $\pi_2$  жазықтығының 4-ширегінде және профиль проекциясы  $\pi_3$  жазықтығының 1-ширегінде орналасқанын көреміз (106, ә-сурет). Нүктенің осьтік проекцияларын анықтап  $ON_y N_3 N N_2 N_x N_1 N_z$  параллелепипедін аламыз (106, б-сурет).  $\pi_2$  жазықтығын  $x$  осінен сағат тілі қозғалысы бағытында,  $\pi_3$  жазықтығын  $z$  осінен сағат тілі қозғалысына қарсы бағытта айналдырып,  $\pi_1$  жазықтығымен беттестірудің нәтижесінде  $N$  нүктесінің эпюрін аламыз (106, в-сурет). Эпюрде фронталь және профиль проекциялардың 2-ширекте, горизонталь проекцияның 3-ширекте орналасқанын көреміз. Жоғарыда алынған қорытындылар орындалатынын байқаймыз: фронталь және горизонталь проекциялар  $x$  осіне перпендикуляр вертикаль байланыс сызығы, ал фронталь және профиль проекциялар  $z$  осіне перпендикуляр горизонталь байланыс сызығы бойларында орналасқан:  $|N_1 N_2| = z + y$ ;  $|N_1 N_3| = x + y$ . Бұл алгебралық қосындылар екенін ескеру қажет.

4.1.1 - е с е п. Координаталарымен берілген  $A(6; -3; 5)$ ,  $B(-6; 4; -6)$ ,  $C(-3; -6; 4)$ ,  $D(4; -6; -4)$ ,  $E(6; 2; -4)$ ,  $F(-4; -4; -2)$  нүктелерінің эпюрлерін салу керек.

**Шешуі.** 4-кестенің көмегімен  $A$  нүктесі II октантта,  $B$  нүктесі VIII октантта,  $C$  нүктесі VI октантта,  $D$  нүктесі III октантта,  $E$  нүктесі IV октантта және  $F$  нүктесі VII октантта орналасқанын анықтаймыз. Эпюр салу үшін горизонталь түзу жүргізіп оны абсциссалар (ординаталар) осі ретінде және вертикаль түзу жүргізіп оны аппликатаалар (ординаталар) осі ретінде қабылдаймыз. Масштабты тағайындап  $x$  осіне  $A$  нүктесінің абсциссасына тең кесінді салып,  $A_x$  нүктесін аламыз. Осы  $A_x$  нүктесі арқылы вертикаль байланыс сызығын жүргізіп, оның бойына  $A$  нүктесінің ординатасына және аппликата-тасына (олардың таңбаларын ескеру қажет) тең кесінділер салып, берілген нүктенің горизонталь ( $A_2$ ) және фронталь ( $A_1$ ) проекцияларын аламыз (107, а-сурет).  $A_1$  нүктесі арқылы горизонталь байланыс сызығын жүргізсек,  $z$  осі бойынан  $A_z$  нүктесін аламыз. Осы сызықтың бойына аппликатаалар осінен бастап  $A$  нүктесінің ординатасына тең кесіндіні таңбасын ескере отырып салсақ,  $A_3$  нүктесі (профиль проекциясы) шығады. Сонда II октантта орналасқан нүктенің үш проекциясы да бірінші ширекте жататынын көреміз.  $B$  нүктесінің абсциссасы теріс таңбалы болғандықтан оны  $O$  нүктесінен бастап оңға



107-сурет.

карай салу керек. Сонда табылған  $B$  нүктесінің осьтік проекциясы ( $B_x$  нүктесі) арқылы вертикаль байланыс сызығы жүргізіледі. Осы байланыс сызығына  $B$  нүктесінің ординатасына және аппликатысына тең кесінділерді олардың таңбаларын ескере отырып салсақ,  $B_1$  және  $B_2$  нүктелерін аламыз.  $B_1$  нүктесі арқылы жүргізілген горизонталь түзу  $z$  осін  $B_z$  нүктесінде қияды. Осы горизонталь байланыс сызығына  $|B_2B_x|$ -ке тең  $B_z B_3$  кесіндісін салып,  $B$  нүктесінің профиль проекциясы болатын  $B_3$  нүктесін табамыз. Сонда VIII октантта орналасқан нүктенің проекциялары ( $B_1, B_2$  және  $B_3$  нүктелері) 3-ширеkte жататынын көреміз. 107, а-суретте координаталары бойынша  $C$  және  $D$  нүктелерінің, ал 107, б-суретте  $E$  және  $F$  нүктелерінің эпюрлері салынған. VI октанттағы нүктенің фронталь және горизонталь проекциялары 2-ширеkte, ал III октанттағы нүктенің горизонталь проекциясы 1-ширеkte, фронталь және профиль проекциялары 4-ширеkte жатады екен. IV октанттағы нүктенің фронталь және горизонталь проекциялары 4-ширеkte, ал профиль проекциясы 3-ширеkte болса, VII октанттағы нүктенің горизонталь проекциясы 2-ширеkte, фронталь проекциясы 3-ширеkte және профиль проекциясы 4-ширеkte болады.

Фронталь проекциялар жазықтығында жатқан нүктелердің горизонталь проекциялары абсциссалар осінде, ал профиль проекциялары аппликатаалар осінде орналасады. Горизонталь проекциялар жазықтығында жатқан нүктелердің фронталь проекциялары абсциссалар осінде, ал профиль проекциялары ординаталар осінде орналасады. Профиль проекциялар жазықтығында жатқан нүктелердің фронталь проекциялары  $Oz$  осінде, ал горизонталь проекциялары  $Oy$  осінде орналасады. Абсциссалар осінде орналасқан нүктенің фронталь және горизонталь проек-

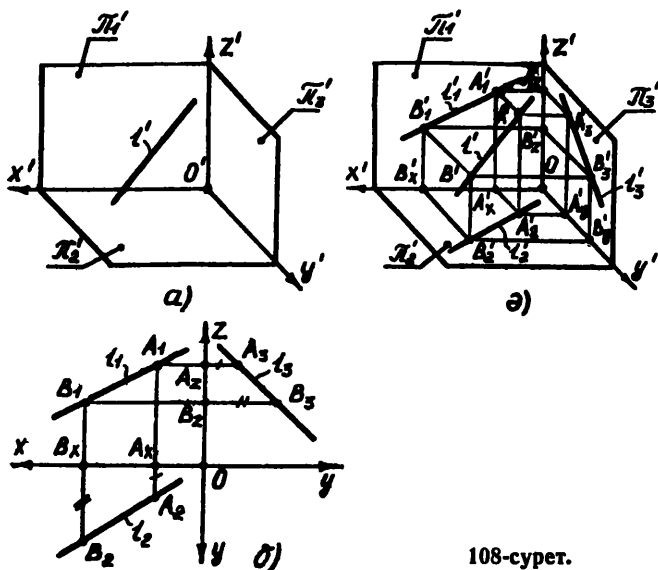
циялары бірігеді және  $Ox$  осінде жатады, ал профиль проекциясы бас нүктемен бірігеді. Ординаталар осінің нүктесі үшін горизонталь проекция  $y=z$  осінде, профиль проекция  $x=y$  осінде және фронталь проекция бас нүктеде жатады. Аппликатаалар осінің нүктелері үшін фронталь және профиль проекциялар бірігеді және  $Oz$  осінде орналасады, ал горизонталь проекциясы бас нүктесімен бірігеді.

Нүктенің екі проекциясы берілсе, онда оның үшінші проекциясын тауып алуға болады. Егер фронталь және горизонталь проекциялар берілсе, онда профиль проекцияны табу үшін фронталь проекция арқылы горизонталь проекциялық байланыс сызығын жүргізіп, осы байланыс сызығына  $Oz$  осінен бастап нүктенің горизонталь проекциясынан абсциссалар осіне дейінгі қашықтықты өлшеп салу қажет. Егер фронталь және профиль проекциялар берілсе, онда горизонталь проекцияны табу үшін фронталь проекция арқылы вертикаль проекциялық байланыс сызығын жүргізу керек. Осы вертикаль байланыс сызығына абсциссалар осінен бастап оның профиль проекциясынан  $Oz$  осіне дейінгі қашықтыққа тең кесінді салса болады. Ал енді горизонталь және профиль проекциялар берілсе, онда фронталь проекцияны табу үшін вертикаль және горизонталь байланыс сызықтарын жүргізу жеткілікті, өйткені бұл екі байланыс сызықтары нүктенің фронталь проекциясында қиылысады.

## 4.2. ТҮЗУДІҢ ЭПЮРИ

Түзуді жазықтыққа проекциялау үшін оның екі нүктесінің проекцияларын тауып, оларды бастыра түзу жүргізу керек. Сонда соңғы түзу берілген түзудің проекциясы болады. Проекциялар жазықтықтары  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  және  $l$  түзуі берілсін (108, а-сурет). Қалауымызша  $l$  түзуінің екі нүктесі  $A$  мен  $B$ -ны белгілеп, оларды  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  жазықтықтарына тікбұрыштап проекциялайық.  $A$  және  $B$  нүктелерінің аттас проекцияларын қосатын түзулер  $l$  түзуінің проекцияларын анықтайды:  $(A_1B_1)=l_1—l$  түзуінің фронталь проекциясы,  $(A_2B_2)=l_2—l$  түзуінің горизонталь проекциясы,  $(A_3B_3)=l_3—l$  түзуінің профиль проекциясы (108, ә-сурет).

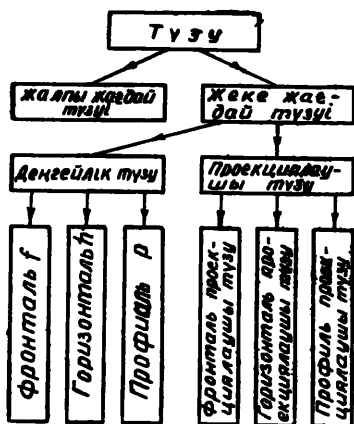
АксонOMETриядан эпюрге көшу үшін  $\pi_2$  жазықтығын  $Ox$  осінен,  $\pi_3$  жазықтығын  $Oz$  осінен айналдырып  $\pi_1$  жазықтығымен беттестіреміз. Сонда пайда болған түзудің фронталь, горизонталь және профиль проекцияларынан



108-сурет.

тұратын жазық кескінді *түзудің эпюрі* деп атайды (108, б-сурет). Эпюреде  $A_3$  нүктесінің  $Oz$  осінен қашықтығы  $A_2$  нүктесінің  $Ox$  осінен қашықтығына тең, ал  $B_3$  нүктесінің  $Oz$  осінен қашықтығы  $B_2$  нүктесінің  $Ox$  осінен қашықтығына тең. Бұдан былай түзуді эпюреде бізге керек бөлігінің (кесіндісінің) проекцияларымен кескіндеп, оны анықтайтын екі нүктенің проекцияларын белгілемейтін боламыз. Түзудің де екі проекциясы берілсе, онда оның үшінші проекциясын тауып алуға болады. Ол үшін түзудің берілген проекциясы бойынан қалауымызша екі нүкте аламыз. Одан кейін байланыс сызықтарының көмегімен түзудің берілген екінші проекциясы бойынан бұл екі нүктеге сәйкес нүктелерді табамыз. Бұл екі нүктенің үшінші проекцияларын салып, оларды (үшінші проекцияларын) бастыра түзудің үшінші проекциясын жүргіземіз. Сондықтан келешек тек екі проекциядан тұратын эпюрлер қарастырылады.

Берілген түзуді оның  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  және  $\pi_3$  жазықтықтарына қатысты орналасуына қарай *жалпы жағдай* немесе *жеке жағдай* түзуі деп атайды. Жалпы жағдай түзуі проекциялар жазықтықтарының бірде-біріне параллель болмайды, яғни ол  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  жазықтықтарымен өзіндік нүктелерде қиылысады. Жоғарыда қарастырылған  $l$  түзуі жалпы жағдай түзуі. Оның проекцияларының ішінде



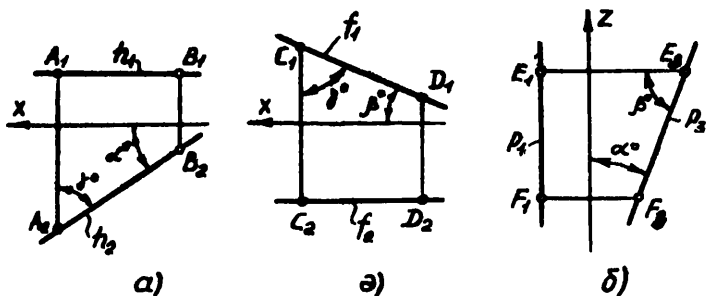
109-сурет.

осьтердің біреуіне де параллель немесе перпендикуляр орналасқаны жоқ. Сондай-ақ жалпы жағдай түзүінде орналасқан кесінді  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  жазықтықтарының біреуіне де өзінің ұзындығын сақтап проекцияланбайды. Жалпы жағдайда орналасқан кесіндінің ұзындығын анықтау үшін көмекші тұрғызуларды орындау қажет.

Жеке жағдай түзулерін *деңгейлік түзулер* және *проекциялаушы түзулер* деп екі топқа бөледі. Деңгейлік түзу проекциялар жазықтықтарының біреуіне параллель

орналасады. Деңгейлік түзулер үшеу: *горизонталь*, *фронталь* және *профиль* (109-сурет). *Горизонталь* деп горизонталь проекциялар жазықтығына параллель түзуді айтады және оны  $h$  әрпімен белгілейді (110, а-сурет). Горизонталь эпюрінің позициялық қасиеті: оның фронталь проекциясы  $Ox$  осіне параллель орналасады ( $h_1 \parallel x$ ). Горизонталь эпюрінің метрикалық қасиеттері: оның бойында жатқан кесінді горизонталь проекциялар жазықтығына өзінің ұзындығын сақтап проекцияланады ( $|AB| = |A_2B_2|$ ); фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы оның горизонталь проекциясы мен абсциссалар осі арасындағы бұрышымен өлшенеді

( $\widehat{\pi_1}, h = \widehat{h_2}, x = \alpha^\circ$ ); профиль проекциялар жазықтығына

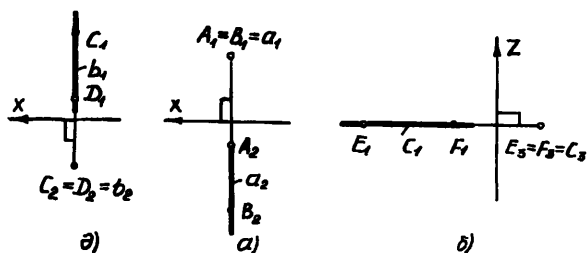


110-сурет.

көлбеулік бұрышы оның горизонталь проекциясы мен вертикаль байланыс сызығы арасындағы бұрышпен өлшенеді ( $\pi_3, \widehat{h} = \widehat{h_2}, (A_1 A_2) = \gamma^\circ$ ). *Фронталь* деп фронталь проекциялар жазықтығына параллель түзуді айтады және оны  $f$  әрпімен белгілейді (110, ә-сурет). Фронталь эпюрінің позициялық қасиеті: оның горизонталь проекциясы абсциссалар осіне параллель орналасады ( $f_2 \parallel x$ ). Фронталь эпюрінің метрикалық қасиеттері: оның бойында жатқан кесінді фронталь проекциялар жазықтығына өзінің ұзындығын сақтап проекцияланады ( $|CD| = |C_1 D_1|$ ); оның горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы эпюрден  $f_1$  мен  $x$  түзулері аралығындағы бұрыш ретіне анықталады ( $\widehat{f}, \pi_2 = f_1, x = \beta^\circ$ ); профиль проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы  $\gamma^\circ = (C_1 C_2), \widehat{f_1} = \pi_3, \widehat{f}$  болады. *Профиль* деп профиль проекциялар жазықтығына параллель түзуді айтады және оны  $p$  әрпімен белгілейді (110, б-сурет). Бұл жағдайда фронталь және профиль проекциялардан тұратын эпюр қарастырылады. Эпюрде профилінің фронталь проекциясы вертикаль орналасады ( $p_1 \parallel z$ ) және оның кесіндісі  $\pi_3$  жазықтығына натурал шамасын сақтап кескінделеді ( $|EF| = |E_3 F_3|$ ). Профиль түзудің  $\pi_1$  және  $\pi_2$  жазықтықтарына көлбеулік бұрыштары эпюрден оңай анықталады:

$$\pi_1, \widehat{p} = \widehat{p_3}, \widehat{z} = \alpha^\circ; \quad \pi_2, \widehat{p} = \widehat{p_3}, \widehat{(E_1 E_3)} = \beta^\circ.$$

Проекциялаушы түзу проекциялар жазықтықтарының біреуіне перпендикуляр орналасады. Осындай түзулер проекциялар жазықтықтарының қалған екеуіне параллель болады. Сондықтан оларды деңгейлік түзудің жеке түрі, яғни екі рет деңгейлік түзу деп те қарастыруға болады. Проекциялаушы түзулер де үшеу: *фронталь проекциялаушы түзу, горизонталь проекциялаушы түзу және профиль проекциялаушы түзу*. Фронталь проекциялаушы түзу фронталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр болады, сондықтан оның фронталь проекциясы нүктеге кескінделеді (111, а-сурет) және горизонталь проекциясы  $Ox$  осіне перпендикуляр орналасады. Фронталь проекциялаушы  $a$  түзуінде жатқан  $AB$  кесіндісі  $\pi_2$  жазықтығына өзінің шын ұзындығын сақтап кескінделеді ( $|AB| = |A_2 B_2|$ ). Горизонталь проекциялаушы түзу горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр болады, сондықтан оның горизонталь проекциясы

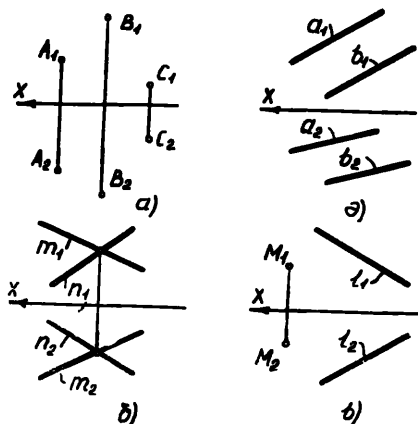


111-сурет.

нүктеге кескінделеді және фронталь проекциясы  $Ox$  осіне перпендикуляр орналасады (111, а-сурет). Горизонталь проекциялаушы  $b$  түзуінде жатқан  $CD$  кесіндісі  $\pi_1$  ге шын ұзындығын сақтап проекцияланады ( $|CD| = |C_1D_1|$ ). Профиль проекциялаушы  $c$  түзуі  $\pi_3$  жазықтығына перпендикуляр болады, сондықтан оның бойындағы  $E$  және  $F$  нүктелерінің профиль проекциялары сол түзудің проекциясы болатын нүктеге кескінделеді (111, б-сурет), ал  $EF$  кесіндісінің натурал шамасы фронталь проекциядан аныкталады ( $|EF| = |E_1F_1|$ ).

### 4.3. ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ЭПЮРИ

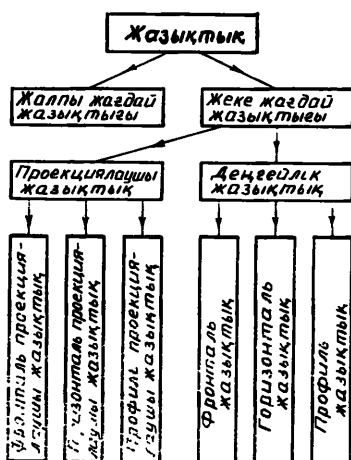
Жазықтық бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктесі арқылы толық анықталатыны белгілі. Бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте  $A, B$  және  $C$   $\alpha$  жазықтығын анықтасын:  $\alpha(A, B, C)$ . Сонда  $\alpha$  жазықтығының горизонталь проекциясы  $\alpha_2$ , осы үш нүктенің горизонталь проекциялары  $A_2, B_2$  және  $C_2$  нүктелерімен, ал фронталь проекциясы  $\alpha_1$  олардың фронталь проекциялары  $A_1, B_1$  және  $C_1$  нүктелерімен аныкталады (112, а-сурет). Жазықтық қиылысатын екі түзу, немесе параллель екі түзу, немесе түзу және сол түзде жатпайтын нүкте арқылы да анықталатынын білссіздер. Өзара параллель  $a$  және  $b$  түзулері  $\beta$  жазықтығын анықтасын. Сонда бұл түзулердің фронталь проекциялары  $\beta$  жазықтығының фронталь проекциясын, ал горизонталь проекциялары  $\beta$  жазықтығының горизонталь проекциясын анықтайды:  $\beta_1(a_1 \parallel b_1)$  және  $\beta_2(a_2 \parallel b_2)$ . 112, б-суретте қиылысатын  $m$  және  $n$  түзулері анықтайтын жазықтықтың, ал 112, в-суретте  $M$  нүктесі және  $l$  түзуі анықтайтын жазықтықтың эпюрлері келтірілген. Жазықтық эпюрі (сызбада)



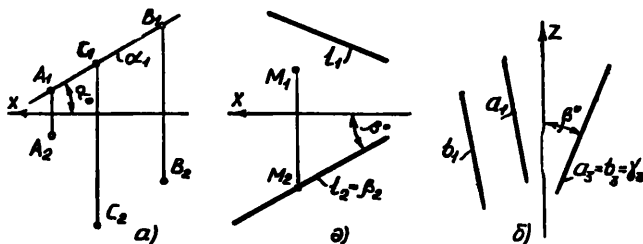
112-сурет.

сол жазықтықты анықтайтын геометриялық элементтердің проекцияларымен беріледі. Сызбада жазықтықты оны анықтайтын геометриялық фигуралардың проекцияларымен де кескіндеуге болады. Мысалы үшбұрыш, трапеция, параллелограмм, шеңбер, эллипс т. с. с. жазық фигуралардың да жазықтықты толық анықтайтыны белгілі. Сондықтан энюре жазықтықты оны анықтайтын фигураның проекцияларымен де беруге болады.

Берілген жазықтықты оның  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  және  $\pi_3$  жазықтықтарына қатысты орналасуына қарай жалпы жағдай немесе жеке жағдай жазықтығы деп атайды (113-сурет). Жалпы жағдай жазықтығы проекциялар жазықтығының біреуіне де перпендикуляр болмайды, яғни ол  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  және  $\pi_3$  жазықтықтарына көлбеу орналасады. 112-суреттегі жазықтықтар жалпы жағдайда орналасқан. Жске жағдай жазықтықтарын проекциялаушы немесе деңгейлік жазықтықтар деп екі топқа бөледі. Проекциялаушы жазықтық деп  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  жазықтықтарының біреуіне



113-сурет.



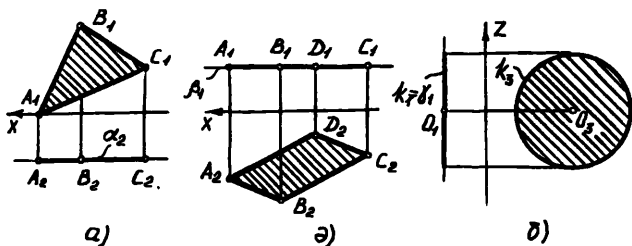
114-сурет.

перпендикуляр жазықтықты айтады. Фронталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр жазықтықты *фронталь проекциялаушы жазықтық* деп атайды. Фронталь проекциялаушы жазықтық фронталь проекцияда түзуге кескінделеді. Мысалы, фронталь проекциялаушы  $\alpha$  жазықтығын  $A, B$  және  $C$  нүктелері анықтайтын болса, онда  $A_1, B_1$  және  $C_1$  нүктелері бір түзудің бойында жатулары тиіс (114, а-сурет):  $C_1 \in (A_1 B_1)$ . Эпюрден фронталь проекциялаушы жазықтықтың горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтауға болады, яғни бұл бұрыш жазықтықтың фронталь проекциясы болатын түзу мен абсциссалар осі арасындағы бұрышпен өлшенеді:

$\alpha, \pi_2 = (A_1 B_1), x = \alpha^\circ$ . Горизонталь проекциялаушы жазықтық горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр болады. Олай болса, оның горизонталь проекциясы түзу болады. Осы түзуге айналатын проекциясы мен абсциссалар осі арасындағы бұрыш оның фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтайды. 114, ә-суретте горизонталь проекциялаушы  $\beta$  жазықтығы  $M$  нүктесі және  $l$  түзуі арқылы кескінделген.

Эпюрде  $l_2 = \beta_2, M_2 \in l_2, l_2, x = \beta, \pi_1 = \beta^\circ$  болады. Профиль проекциялаушы жазықтық  $\pi_3$  жазықтығына перпендикуляр болғандықтан, оның профиль проекциясы түзу болады. Параллель түзулер  $a$  мен  $b$ -ның профиль проекциялары біріккен, сондықтан олар профиль проекциялаушы  $\gamma$  жазықтығын анықтайды (114, б-сурет). Бұл жағдайда фронталь және профиль проекциялардан тұратын эпюрді қарастыру қажет. Профиль проекциялаушы жазықтықтың фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы  $\beta^\circ$  сызбадан оның түзуге айналған проекциясы мен  $Oz$  осі аралығындағы бұрышпен өлшенеді.

*Деңгейлік жазықтық* деп проекциялар жазықтықта-



115-сурет.

рының біреуіне параллель жазықтықты айтады. Денгейлік жазықтықтар да үшеу: *фронталь жазықтық*, *горизонталь жазықтық* және *профиль жазықтық*. Фронталь жазықтық фронталь проекциялар жазықтығына параллель орналасады. Егер  $ABC$  үшбұрышы фронталь жазықтықта орналасса, онда оның горизонталь проекциясы абсциссалар осіне параллель орналасқан кесінді болады, ал фронталь проекциясы сол үшбұрыштың өзіне тен үшбұрыш болады.  $\triangle ABC \subset \alpha \parallel \pi_1 \Rightarrow C_2 \in (A_2B_2) \parallel x$ ;  $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$  (115, а-сурет). Горизонталь орналасқан  $\beta$  жазықтығында жатқан  $ABCD$  параллелограмы  $\pi_2$  жазықтығына өзінің натурал шамасын сақтап, ал  $\pi_1$  жазықтығына абсцисса осіне параллель кесіндіге кескінделеді (115, ә-сурет).  $\square ABCD \subset \beta \parallel \pi_2 \Rightarrow C_1 \in (A_1B_1)$ ;  $D_1 \in (A_1B_1) \parallel x$ ;  $\square A_2B_2C_2D_2 = \square ABCD$ . Профиль жазықтық  $\pi_3$  жазықтығына параллель және осы  $\pi_3$  жазықтығына натурал шамасын сақтап кескінделеді. Ал оның фронталь проекциясы  $Oz$  осіне параллель түзу болады. Бұл жағдайда фронталь және профиль проекциялардан тұратын сызбаны қарастыру тиімді (115, б-сурет). Жеке жағдайда орналасқан жазықтықтардың қарастырылған позициялық және метрикалық қасиеттерін есептерді шешуде кең түрде пайдаланады.

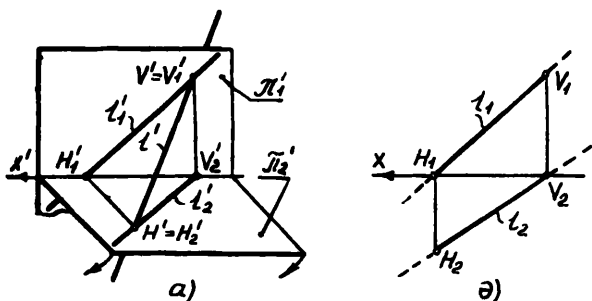
Жалпы жағдайда, орналасқан жазықтық эпюрге өзара бірімәнді, атап айтқанда тектес сәйкестікті анықтайды. Берілген жалпы жағдай жазықтығының проекциялары арасындағы тектес сәйкестікті пайдаланып бір проекциясы берілген жазықтық нүктесінің екінші проекциясын оңай салуға болады. Керек болған жағдайда сәйкестік осін анықтап алуға мүмкіндік бар. Бір нүктенің проекцияларын қосатын түзу сәйкестіктің бағытын анықтайды.

Жеке жағдайда орналасқан жазықтықтың проекциялары арасындағы сәйкестік бір көпмәнді, немесе көп бірімәнді болады. Мысалға фронталь проекциялаушы

жазықтықты қарастыратын болсақ, оның фронталь проекциясы бойынан алынған әрбір нүктеге горизонталь проекцияда осы нүкте арқылы өтетін вертикаль түзу сәйкес болады; бұған керісінше, горизонталь проекцияның әрбір, вертикаль түзуіне фронталь проекцияда тек бір нүкте сәйкес болады. Горизонталь проекциялаушы жазықтықтың горизонталь проекциясы бойынан алынған әрбір нүктеге фронталь проекцияда осы нүкте арқылы өтетін вертикаль түзу сәйкес болады; керісінше, фронталь проекцияның вертикаль орналасқан түзуіне горизонталь проекцияда тек жалғыз нүкте сәйкес келеді. Профиль проекциялаушы жазықтықтың профиль және фронталь проекциялары арасындағы сәйкестік те бір көпмәнді болатынына көз жеткізу қиын емес. Жазықтықтың профиль проекциясы бойынан алынған бір нүктеге осы нүкте арқылы өтетін горизонталь түзу нүктелері сәйкес болады. Фронталь проекциядағы горизонталь түзуге профиль проекцияда тек бір нүкте сәйкес болады. Деңгейлік жазықтықтарды проекциялаушы жазықтықтардың жеке жағдайлары деп қарастыруға болады, өйткені олар проекциялар жазықтықтарының екеуіне перпендикуляр орналасады. Фронталь жазықтық  $\pi_2$  және  $\pi_3$  жазықтықтарына перпендикуляр, горизонталь жазықтық  $\pi_1$  және  $\pi_3$  жазықтықтарына және профиль жазықтық  $\pi_1$  және  $\pi_2$  жазықтықтарына перпендикуляр болады.

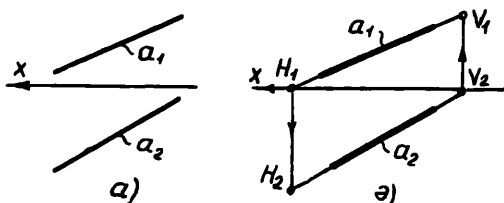
#### 4.4. ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ІЗДЕРІ

*Түзудің іздері* деп оның проекциялар жазықтықтарымен қиылысу нүктелерін айтады. Берілген  $l$  түзуі фронталь проекциялар жазықтығымен  $V$  нүктесінде қиылысын (116, а-сурет). Осы  $V$  нүктесін  $l$  түзуінің *фронталь ізі* дейді ( $V = l \cap \pi_1$ ). Осы  $l$  түзуінің горизонталь проек-



116-сурет.

циялар жазықтығымен қиылысу нүктесін оның *горизонталь ізі* дейді. Сонда  $l \cap \pi_2 = H$  нүктесі  $l$  түзуінің горизонталь ізі болады. Фронталь іздің горизонталь проекциясы  $V_2$  және горизонталь іздің фронталь проекциясы  $H_1$  абсциссалар осінде жатады. Түзудің іздері — оның октанттардың біреуінен екіншісіне өту нүктелері екенін аңғару қиын емес. 116-суреттен  $l$  түзуі төртінші октанттан  $H$  нүктесінде бірінші октантқа, ал бірінші октанттан  $V$  нүктесінде екінші октантқа өтетінін көреміз. Сонда  $l$  түзуінің  $H$  және  $V$  нүктелері аралығындағы бөлігі ғана бірінші октантта орналасады екен. Эпюр алу үшін  $\pi_2$  жазықтығын  $Ox$  осінен айналдырып,  $\pi_1$  жазықтығымен беттестіреміз. Эпюрде (116, ә-сурет) түзудің фронталь ізінің горизонталь проекциясы оның горизонталь проекциясы мен абсциссалар осінің қиылысу нүктесі, ал горизонталь ізінің фронталь проекциясы оның фронталь проекциясымен абсциссалар осінің қиылысу нүктесі болатынын көреміз:  $V_2 = l_2 \cap x$ ;  $H_1 = l_1 \cap x$ . Соңғы қорытындыны түзудің іздерін салуда пайдаланады. Мысалға 117, а-суретте берілген  $a$  түзуінің іздерін салуды қарастыралық. Түзудің горизонталь проекциясын  $Ox$  осімен қиылысқанша созамыз. Сонда  $a$  түзуінің фронталь ізінің горизонталь проекциясы  $V_2$  нүктесі табылады. Осы  $V_2$  нүктесі арқылы  $Ox$  осіне перпендикуляр түзу жүргізіп,  $a_1$  түзуін осы перпендикулярмен  $V_1$  нүктесінде қиылысқанша созамыз. Табылған  $V_1$  нүктесі  $l$  түзуінің фронталь ізінің фронталь проекциясы. Енді түзудің фронталь проекциясын  $x$  осімен қиылысқанша созып, оның горизонталь ізінің фронталь проекциясын ( $H_1$  нүктесін) анықтаймыз. Осы  $H_1$  нүктесін бастыра вертикаль байланыс сызығын  $a_2$  түзуімен қиылысқанша жүргіземіз:  $H_1 \in (H_1 H_2) \perp x$ ;  $(H_1 H_2) \cap a_2 = H_2$ . Табылған  $H_2$  нүктесі  $a$  түзуінің горизонталь ізінің горизонталь проекциясы болады (117, ә-сурет). Горизонтальдың горизонталь ізі шексіз қашықтықта жатқан нүкте болса, фронтальдың фронталь ізі шексіз қашықтықта жатқан нүкте болады. Олай болса горизон-

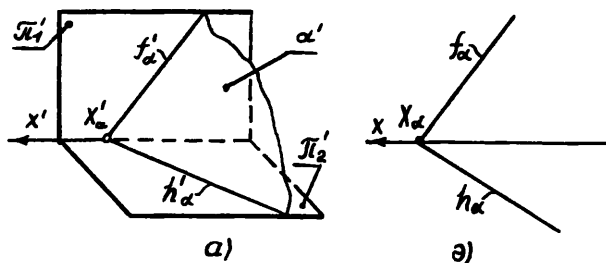


117-сурет.

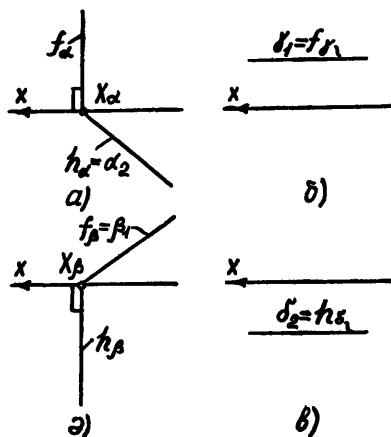
тальдың фронталь проекциясы және фронтальдың горизонталь проекциясы абсцисса осіне параллель орналасулары қажет:  $h \parallel \pi_2 \Rightarrow h \cap \pi_2 = H_\alpha \Rightarrow h_1 \parallel x$ ;  $f \parallel \pi_1 \Rightarrow f \cap \pi_1 = V_\alpha \Rightarrow f_2 \parallel x$ .

*Жазықтықтың іздері* деп оның проекциялар жазықтықтарымен қиылысу сызықтарын айтады. Жазықтықтың фронталь проекциялар жазықтығымен қиылысу сызығын оның *фронталь ізі* деп атап,  $f_\alpha$  арқылы белгілейтін боламыз. Фронталь із  $f_\alpha$  — жазықтық фронтальдарының біреуі, сондықтан оны  $f$  әрпімен белгілеу керек. Ал бұл із қай жазықтықтың ізі екенін ажырату үшін оның төменгі жанына жазықтық белгісін қоятын боламыз. Сонда  $f_\alpha$  —  $\alpha$  жазықтығының фронталь ізі екенін оңай түсінуге болады. Жазықтықтың горизонталь проекциялар жазықтығымен қиылысу сызығын оның *горизонталь ізі* деп атайды. Сонда  $\alpha$  жазықтығының горизонталь ізін  $h_\alpha$  деп белгілеуіміз керек (118, а-сурет):  $\alpha \cap \pi_1 = f_\alpha$ ;  $\alpha \cap \pi_2 = h_\alpha$ . Жазықтықтың фронталь және горизонталь іздері абсциссалар осінде жататын нүктеде қиылысады. Бұл нүктені жазықтық іздерінің *тоғысу нүктесі* деп атауға келісілген және оське сәйкес үлкен әріппен белгілеп оның төменгі жағына жазықтық белгісі қойылады.  $f_\alpha \cap h_\alpha = X_\alpha$ .

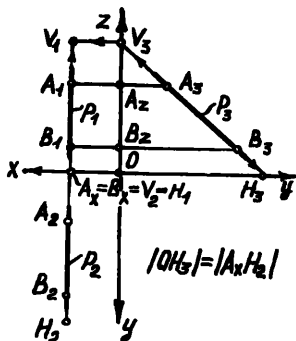
Аксометриядан эпюрге көшу үшін  $\pi_2$  жазықтығын  $Ox$  осінен айналдырып,  $\pi_1$  жазықтығымен беттестіреді (118, ә-сурет). 118-суреттегі  $\alpha$  жазықтығы жалпы жағдайда орналасқан. Енді осы  $\alpha$  жазықтығын оның горизонталь ізінен айналдырып,  $\pi_2$  жазықтығына перпендикуляр етіп орналастыралық. Сонда оның фронталь ізі  $Ox$  осіне перпендикуляр болады. Осындай горизонталь проекциялаушы жазықтықтың эпюрі 119, а-суретте келтірілген. Егер  $\alpha$  жазықтығын (118, а-сурет) оның фронталь ізінен айналдырып,  $\pi_1$  жазықтығына перпендикуляр



118-сурет.



119-сурет.



120-сурет.

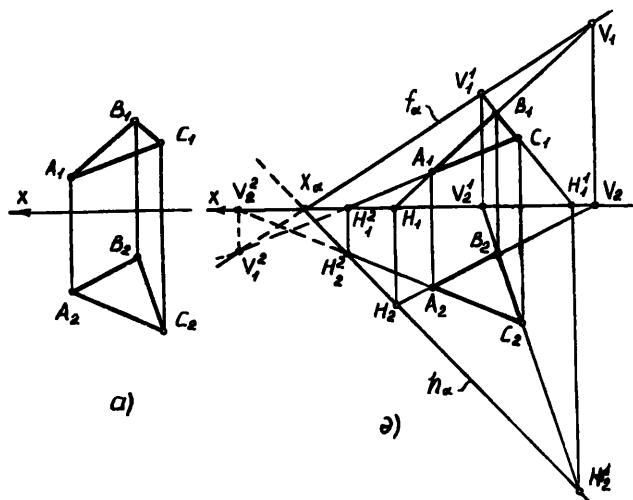
жағдайға келтірсек, онда фронталь проекциялаушы жазықтық алынар еді. Осындай фронталь проекциялаушы  $\beta$  жазықтығының сызбасы 119, ә-суретте көрсетілген. Фронталь проекциялаушы жазықтықтың горизонталь ізі абсциссалар осіне перпендикуляр орналасады. Сонда  $\alpha \perp \pi_2 \Rightarrow f_\alpha \perp x$  және  $h_\alpha = \alpha_2$ , ал  $\beta \perp \pi_1 \Rightarrow h_\beta \perp x$  және  $f_\beta = \beta_1$  болады екен. Горизонталь жазықтық  $\pi_2$  жазықтығына параллель болғандықтан оның горизонталь ізі шексіз қашықтықта жатқан түзу болады, олай болса, тоғысу нүктесі де шексіз қашықтықта жатады. Горизонталь жазықтықтың фронталь ізі абсцисса осімен шексіз қашықтықта жатқан нүктеде қиылысуы үшін оған параллель орналасуы қажет. 119, б-суретте горизонталь орналасқан  $\gamma$  жазықтығының эпюрі кескінделген, онда  $f_\gamma \parallel x$ . Бұған керісінше, фронталь жазықтықтың фронталь ізі шексіз қашықтықта жатқан түзу болғандықтан эпюрге көрсетілмейді, ал оның горизонталь ізі  $Ox$  осіне параллель орналасады. Егер  $\delta \parallel \pi_1 \Rightarrow \delta \cap \pi_1 = f_{\delta\infty}$  болса, онда  $h_\delta \parallel x$  болады (119, в-сурет).

4.4.1 - е с е п. Берілген  $A(2; 1; 4)$  және  $B(2; 3; 1)$  нүктелері анықтайтын түзудің эпюрін және іздерін салу керек болсын.

Ш е ш у і. Вертикаль және горизонталь екі түзу жүргізіп, оларды  $Oy$  және  $Ox$  осьтері ретінде қабылдаймыз (120-сурет). Масштабты тандап алып берілген  $A$  және  $B$  нүктелерінің фронталь ( $A_1$  мен  $B_1$ ) және горизонталь

( $A_2$  мен  $B_2$ ) проекцияларын тұрғызамыз. Одан кейін  $A$  нүктесінің профиль проекциясын тұрғызу үшін оның фронталь проекциясы ( $A_1$  нүктесі) арқылы горизонталь байланыс сызығын жүргізіп, оның бойына  $Oz$  осінен бастап  $A_2$  нүктесінен  $Ox$  осіне дейінгі қашықтыққа тең кесінді саламыз. Сонда  $A_3$  нүктесі ( $A$  нүктесінің профиль проекциясы) алынады. Табылған нүктелердің сәйкес проекцияларын қосатын түзулер жүргізіп ( $p_1$ ,  $p_2$  және  $p_3$ ), бізге берілгені профиль түзу екенін көреміз ( $|AB| = |A_3B_3|$ ). Профиль түзудің фронталь және горизонталь іздері ғана өзіндік нүктелер болады. Түзудің горизонталь проекциясын  $Ox$  осімен қиылысқанша созып, фронталь іздің горизонталь проекциясын және фронталь проекцияны да  $Ox$  осімен қиылысқанша созып, горизонталь іздің фронталь проекциясын аламыз:  $p_2 \cap x = V_2$ ;  $p_1 \cap x = H_1$ ;  $V_2 = H_1 = A_x$ . Профиль проекцияны  $Oz$  осімен қиылысқанша созып фронталь іздің профиль проекциясын және  $Oy$  осімен қиылысқанша созып горизонталь іздің профиль проекциясын аламыз:  $p_3 \cap z = V_3$ ;  $p_3 \cap y = H_3$ . Енді  $V_2$  және  $V_3$  нүктелері бойынша  $V_1$  нүктесін, ал  $H_1$  және  $H_3$  нүктелері бойынша  $H_2$  нүктесін табуға болады.  $V_3$  нүктесі арқылы жүргізілген горизонталь байланыс сызығы  $p_1$  түзуімен  $V_1$  нүктесінде қиылысады.  $A_2B_2$  түзуіне  $Ox$  осінен бастап  $OH_3$  кесіндісіне тең кесінді салып  $H_2$  нүктесін аламыз.

4.4.2. - е с е п. Берілген  $ABC$  үшбұрышы анықтайтын



121-сурет.

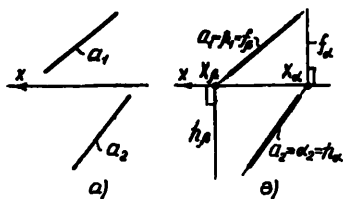
$\alpha$  жазықтығының іздерін салу керек болсын (121, а-сурет).

**Шешуі.**  $AB$  түзуінің фронталь  $V_1$  және горизонталь  $H_2$  іздерін,  $BC$  түзуінің фронталь  $V_1^1$  және горизонталь  $H_2^1$  іздерін,  $AC$  түзуінің фронталь  $V_1^2$  және горизонталь  $H_2^2$  іздерін саламыз. Сонда  $\alpha$  жазықтығының фронталь ізі  $V_1$ ,  $V_1^1$  және  $V_1^2$  нүктелері, ал горизонталь ізі  $H_2$ ,  $H_2^1$  және  $H_2^2$  нүктелері арқылы өтулері қажет. Шынында да  $V_1$ ,  $V_1^1$  және  $V_1^2$  нүктелері  $f_\alpha$  түзуінде, ал  $H_2$ ,  $H_2^1$  және  $H_2^2$  нүктелері  $h_\alpha$  түзуінде жатыр. Егер бұл шарттар орындалмаса, онда сызба салуда дәлдіктің нашар болғаны. Соңғы жағдайда перпендикуляр түзулер іс жүзінде перпендикуляр орналасқан ба? Параллель түзулер іс жүзінде параллель орналасқан ба? Міне осы параллель түзулердің параллелдігін, перпендикуляр түзулердің перпендикулярлығын тексеру керек. Араларындағы бұрышы аз екі түзудің қиылысу нүктесін анықтауда қате кетуі мүмкін. Жазықтық іздерінің тоғысу нүктесі осьтің бойында жатуы керек. Егер бұл шарт орындалмаса да, сызбаны салудағы дәлдікті арттыра отырып оны қайта сызу қажет (121, ә-сурет):  $(V_1 V_1^1) = f_\alpha \Rightarrow V_1^2$ ;  $(H_2 H_2^1) = h_\alpha \Rightarrow H_2^2$ ;  $f_\alpha \cap h_\alpha = X_\alpha \in \alpha$ .

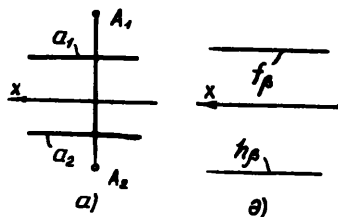
**4.4.3 - есеп.** Берілген  $a$  түзуі арқылы екі жазықтық жүргізу керек болсын. Бұл екі жазықтықтың біреуі горизонталь проекциялаушы жазықтық, ал екіншісі фронталь проекциялаушы жазықтық болсын (122, а-сурет).

**Шешуі.** Горизонталь проекциялаушы жазықтық  $\pi_2$  жазықтығына түзуге проекцияланады, ал горизонталь проекциялаушы жазықтық берілген түзу арқылы өтуі үшін оның горизонталь проекциясы сол түзудің горизонталь проекциясымен бірігуі қажет:  $a \subset \alpha \perp \pi_2 \Rightarrow a_2 = \alpha_2$ . Олай болса, жазықтықтың горизонталь ізі де түзудің горизонталь проекциясымен бірігеді:  $h_\alpha = a_2$  (122, ә-сурет). Берілген  $a$  түзуі арқылы өтетін горизонталь проекциялаушы  $\alpha$  жазықтығының фронталь ізі  $f_\alpha$  оның тоғысу нүктесі  $X_\alpha$  арқылы  $x$  осіне перпендикуляр жүргізіледі. Фронталь проекциялаушы жазықтықты салу осыған сәйкес.  $a \subset \beta \perp \pi_1 \Rightarrow a_1 = \beta_1 = f_\beta$ ;  $f_\beta \cap x = X_\beta$ ;  $X_\beta \in h_\beta \perp x$ .

Жазықтықты эпюрге іздерімен беру сызбаның көрнектілігін арттырады. Шынында да, 123-суретте кескінделген  $\alpha(A; a)$  және  $\beta$  жазықтықтарының екеуі де профиль проекциялаушы жазықтықтар. Бірақ  $\alpha(A; a)$  жазықтығының профиль проекциялаушы жазықтық болатынына



122-сурет.

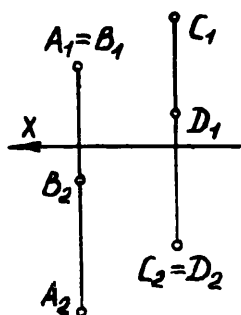


123-сурет.

көз жеткізу, іздерімен берілген  $\beta$  жазықтығының профиль проекциялаушы жазықтық болатынына көз жеткізуге қарағанда әлдеқайда күрделі болады.

#### 4.5. НҮКТЕЛЕРДІҢ ЖӘНЕ ТҮЗУЛЕРДІҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

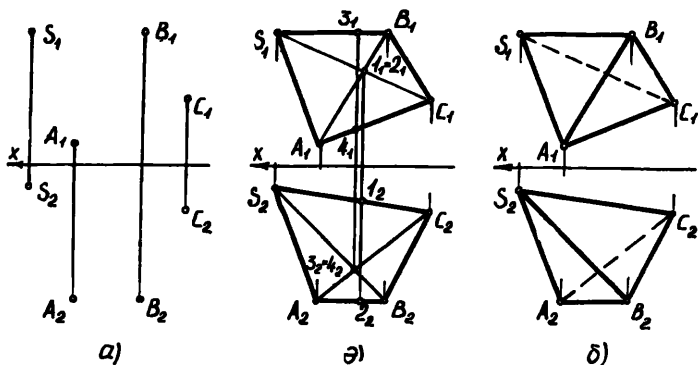
Эпюрде әр түрлі екі нүктенің фронталь проекциялары бірігуі мүмкін. Мысалы  $A$  және  $B$  нүктелерінің фронталь проекциялары біріксің (124-сурет). Осындай фронталь проекциялаушы түзудің бойында орналасқан екі нүктені *фронталь бәсекелес нүктелер* деп атайды. Фронталь бәсекелес екі нүктенің қайсысының горизонталь проекциясы төменірек орналасса, сонысы фронталь проекцияда көрінеді.  $A$  нүктесінің горизонталь проекциясы  $A_2$  екінші нүктенің горизонталь проекциясы  $B_2$  нүктесіне қарағанда төменірек орналасқан. Сондықтан фронталь проекцияда  $A$  нүктесі көрінеді, ал оның тасасындағы  $B$  нүктесі көрінбейді.  $C$  және  $D$  нүктелерін қарастыратын болсақ, онда эпюрден олардың горизонталь проекцияларының біріккенін көреміз. Осындай горизонталь проекциялаушы түзу бойынан алынған екі нүктені *горизонталь бәсекелес нүктелер* деп атаймыз. Горизонталь бәсекелес екі нүкте-



124-сурет.

нің қайсысының фронталь проекциясы жоғары орналасса эпюрде сонысы көрінеді.  $C_1$  нүктесі  $D_1$  нүктесінен жоғары орналасқан. Олай болса, горизонталь проекцияда  $C$  нүктесі көрінеді, ал оның тасасындағы  $D$  нүктесі көрінбейді. Бәсекелес нүктелерді сызбада көрінетіндікті анықтауда пайдаланады.

4.5.1-мысал.  $SABC$  үшбұрышты пирамидасы төбелерінің горизонталь және фронталь проекциялары берілген (125, а-сурет). Пирами-



125-сурет.

да қырларының көрінетінін тұтас, ал көрінбейтіндерін үзілме сызықтармен жүргізу керек.

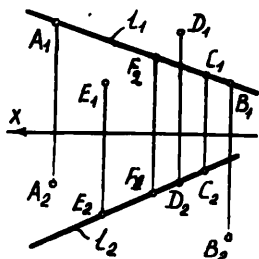
Шешуі. Пирамида проекцияларын шектейтін қырлар эпюрге көрінетіндіктен оларды бірден тұтас сызықтармен жүргізе беруге болады. Фронталь проекцияда  $S_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  және  $A_1S_1$  қырлары, ал горизонталь проекцияда  $S_2A_2$ ,  $A_2B_2$ ,  $B_2C_2$  және  $C_2S_2$  қырлары көрінетіндіктен тұтас сызықпен жүргізілген (125, а-сурет). Фронталь проекцияда  $A_1B_1$  және  $S_1C_1$  кесінділерінің біреуі көрінбейді. Көрінетіндікті анықтау үшін фронталь бәсекелес 1 және 2 нүктелері қарастырылады. Олардың фронталь проекциялары  $AB$  және  $SC$  қырларының фронталь проекцияларының қиылысу нүктесі болады:  $(A_1B_1) \cap (S_1C_1) = 1_1 = 2_1$ . Байланыс сызығын жүргізіп бәсекелес нүктелердің горизонталь проекцияларын анықтаймыз:  $1_2 \in (S_2C_2)$  және  $2_2 \in (A_2B_2)$ ; эпюрге  $2_2$  нүктесі  $1_2$  нүктесінен төмен болғандықтан 2 нүктесі көрінеді. Олай болса, осы 2 нүктесі жатқан  $AB$  қыры да көрінеді. Сондықтан  $A_1B_1$  кесіндісін тұтас сызықпен жүргізу керек (125, б-сурет). 2 нүктесі тасасындағы 1 нүктесі көрінбейді, ал олай болса,  $S_1C_1$  кесіндісін үзілме сызықпен жүргізу керек.  $AC$  және  $BS$  айқас қырлардың қайсысының горизонталь проекциясы көрінетіндігін анықтау үшін горизонталь бәсекелес нүктелерді қарастыруымыз керек.  $A_2C_2$  және  $B_2S_2$  кесінділерінің қиылысу нүктесі  $3_2 = 4_2$  осындай горизонталь бәсекелес нүктелер. Байланыс сызығының көмегімен  $A_1C_1$  кесіндісі бойынан  $4_1$  нүктесін және  $B_1S_1$  кесіндісі бойынан  $3_1$  нүктесін анықтаймыз.  $3_1$  нүктесі  $4_1$  нүктесінен жоғары болғандықтан, осы 3 нүк-

тесі арқылы өтетін  $BS$  қырының горизонталь проекциясы да көрінеді, яғни оны ( $B_2S_2$ -ні) тұтас сызықпен жүргізу керек. 4 нүктесінің горизонталь проекциясы көрінбейді. Көрінбейтін  $A_2C_2$  кесіндісі үзілме сызықпен жүргізіледі.

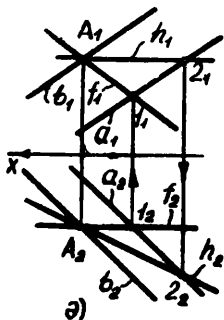
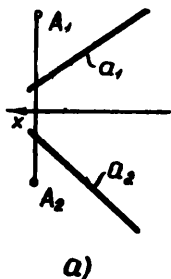
$A$  және  $C$  нүктелерінің (124-сурет) өзара орналасуын қарастырсақ, онда  $A$  нүктесі  $C$  нүктесінің сол жағында және қараушыға жақын орналасқанын, ал  $C$  нүктесі  $A$  нүктесінен жоғары және  $\pi_1$  жазықтығына жақындау орналасқанын көреміз. Өздеріңіз  $B$  және  $D$  нүктелерінің орналасуына талдау жасаңыздар.

126-суретте  $l$  түзуі және 6 нүкте  $A, B, C, D, E, F$  кескінделген.  $A_1 \in l_1$  және  $A_2$  нүктесі  $Ox$  осіне жақын, сондықтан  $A$  нүктесі  $l$  түзуінің арғы жағында орналасқан.  $B_1 \in l_1$  және  $B_2$  нүктесі  $Ox$  осінен қашық, сондықтан  $B$  нүктесі  $l$  түзуінің бергі жағында орналасқан. Егер нүкте түзуде жататын болса, онда нүктенің проекциялары түзудің аттас проекциялары бойында жатулары тиіс.  $C_1 \in l_1$  және  $C_2 \in l_2$ , сондықтан  $C \in l$ .  $F_1 \in l_2$  және  $F_2 \in l_1$ , бірақ  $F \notin l$ .  $D_2 \in l_2$  және  $D_1$  жоғары, сондықтан  $D$  нүктесі  $l$  түзуінің үстіңгі жағында орналасқан.  $E_2 \in l_2$  және  $E_1$  төмен, сондықтан  $E$  нүктесі  $l$  түзуінің астында орналасқан.

Екі түзу үш жағдайда орналасуы мүмкін: параллель, қиылысатын және айқас түзулер. Параллель түзулердің аттас проекциялары өзара параллель болады. Егер  $a \parallel b$  болса, онда  $a_1 \parallel b_1$  және  $a_2 \parallel b_2$  болады. Қиылысатын түзулердің аттас проекциялары да қиылысады және аттас проекциялардың қиылысу нүктелерін қосатын түзу вертикаль ( $Ox$  осіне перпендикуляр) орналасады. Егер  $c \perp d$  болса, онда  $c_1 \cap d_1 = A_1$ ,  $c_2 \cap d_2 = A_2$  және  $(A_1A_2) \perp x$  болады. Айқас түзулердің аттас проекцияларының да қиылысуы мүмкін, бірақ аттас проекциялардың қиылысу нүктеле-



126-сурет.



127-сурет.

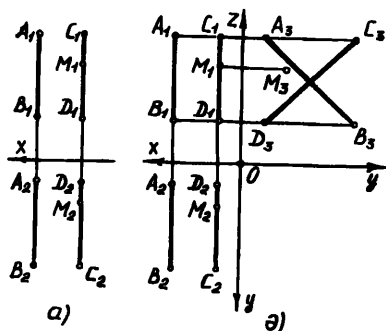
рін қосатын түзу вертикаль ( $Ox$  осіне перпендикуляр) болмайды. Егер  $m \div n$  болса, онда  $m_1 \cap n_1 = M_1$ ,  $m_2 \cap n_2 = N_2$ , ал  $(M_1 N_2) \perp x$  болмайды. Екі түзудің аттас проекцияларының бір жұбы бірігуі мүмкін. Осындай екі түзу проекциялаушы жазықтықта жататындықтан, олар өзара параллель немесе қиылысып орналасуы қажет. Өйткені айтқас түзулер бір жазықтықта жатпайды. Егер  $a_1 = b_1$  болса, онда олар фронталь проекциялаушы жазықтықта жатады;  $a_2 \parallel b_2$  болса, онда  $a \parallel b$  болады;  $a_2 \cap b_2 = K_2$  болса, онда  $a \cap b = K$ . Егер  $c_2 = d_2$  болса, онда олар горизонталь проекциялаушы жазықтықта жатады;  $c_1 \parallel d_1$  болса, онда  $c \parallel d$ ; егер  $c_1 \cap d_1 = L_1$  болса, онда  $c \cap d = L$ .

4.5.2 - е с с п. Берілген  $A$  нүктесі арқылы  $a$  түзуіне параллель  $b$  түзуін және онымен қиылысатын фронталь  $f$ , горизонталь  $h$  түзулерін жүргізу керек (127, а-сурет).

Ш е ш у і.  $A_1$  нүктесі арқылы  $a_1$  түзуіне параллель  $b_1$  түзуін,  $A_2$  нүктесі арқылы  $a_2$  түзуіне параллель  $b_2$  түзуін жүргізілсін. Сонда проекциялары  $b_1$  және  $b_2$  түзулері болатын  $b$  түзуі анықталады. Тұрғызылған  $b$  түзуі  $A$  нүктесі арқылы өтеді, өйткені  $A_1 \in b_1$  және  $A_2 \in b_2$ . Осы  $b$  түзуі  $a$  түзуіне параллель, өйткені  $a_1 \parallel b_1$  және  $a_2 \parallel b_2$ . Сонда  $A \in b \parallel a$  болатын  $b$  түзуі жүргізілді. Фронталь түзудің горизонталь проекциясы  $Ox$  осіне параллель орналасады. Сондықтан  $A_2$  нүктесі арқылы  $Ox$  осіне параллель  $f_2$  түзуін жүргіземіз. Сонда  $f_2$  және  $a_2$  түзулері  $l_2$  нүктесінде қиылысады. Вертикаль байланыс сызығын жүргізіп  $a_1$  түзуі бойынан  $l_1$  нүктесін табамыз. Табылған  $l_1$  нүктесін  $A_1$  нүктесімен қосатын  $f_1$  түзуін жүргіземіз. Сонда анықталған  $f(f_1, f_2)$  түзуі  $A$  нүктесі арқылы өтеді,  $l_1$  жазықтығына параллель болады және  $a$  түзуімен қиылысады. Бұған керісінше горизонталь түзуді салуды оның  $Ox$  осіне параллель болатын фронталь проекциясынан бастаған дұрыс.  $A_1$  нүктесін бастыра  $Ox$  осіне параллель етіп  $h_1$  түзуі жүргізіледі.  $h_1$  түзуі  $a_1$  түзуімен  $2_1$  нүктесінде қиылысады. Осы  $2_1$  нүктесінің горизонталь проекциясын ( $2_2$  нүктесін) анықтап, оны  $A_2$  нүктесімен  $h_2$  түзуі көмегімен қосамыз (127, ә-сурет). Сонда проекциялары  $h_1$  және  $h_2$  түзулері болатын горизонталь түзу  $h$  берілген  $A$  нүктесі арқылы өтеді және  $a$  түзуімен қиылысады, яғни есептің шарттарын толық қанағаттандырады.

4.5.3 - е с с п.  $AB$  және  $CD$  түзулері,  $M$  нүктесі берілген (128, а-сурет). Олар өзара қалай орналасқан?

Ш е ш у і.  $M$  нүктесі  $AB$  түзуінен тыс орналасқан, өйткені оның проекциялары  $AB$  түзуінің аттас проекцияларында жатпайды:  $M_1 \notin (A_1 B_1)$ ;  $M_2 \notin (A_2 B_2)$ ;  $M \notin (AB)$ .



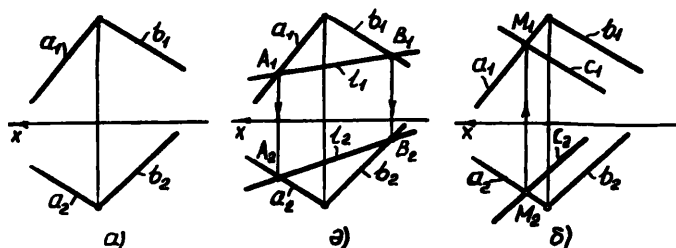
128-сурет.

$M$  нүктесінің проекциялары  $CD$  түзуінің аттас проекцияларында жатыр ( $M_1 \in (C_1D_1)$  және  $M_2 \in (C_2D_2)$ ), бірақ  $CD$  профиль түзу болғандықтан  $M$  нүктесі  $CD$  түзуінде жата ма деген сұраққа олардың профиль проекцияларына қарап жауап беруге болады. Сол сияқты  $AB$  және  $CD$  түзулерінің аттас проекциялары өзара параллель:  $(A_1B_1) \parallel$

$(C_1D_1)$ ;  $(A_2B_2) \parallel (C_2D_2)$ . Бірақ берілген профиль түзулер болғандықтан, олар кеңістікте өзара параллель болмаулары мүмкін. Сондықтан  $AB$ ,  $CD$  түзулері мен  $M$  нүктесінің профиль проекцияларын салалық.  $Oz$  осін қалауымызша вертикаль орналастыруымыз керек (128, ә-сурет). Горизонталь байланыс сызықтары жүргізіледі. Осы сызықтарға  $Oz$  осінен бастап сәйкес нүктенің горизонталь проекциясынан  $Ox$  осіне дейінгі аралыққа тең кесінді салу арқылы  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$ ,  $D_3$  және  $M_3$  нүктелері табылады.  $M_3$  нүктесі  $C_3D_3$  түзуінен тыс орналасқан. Олай болса,  $M$  нүктесі  $CD$  түзуі бойында да жатпайды.  $A_3B_3$  және  $C_3D_3$  түзулері қиылысады. Сондықтан  $AB$  және  $CD$  түзулері өзара параллель емес. Ал өзара параллель болмайтын немесе қиылыспайтын екі түзу айқас орналасады. Сонда  $M \notin (AB)$ ,  $M \notin (CD)$  және  $(AB) \div (CD)$  болады скен. Бұл есептен берілген фигуралардың біреуі немесе бірнешеуі профиль проекциялар жазықтығына қатысты жеке жағдайда орналасса, онда фронталь және профиль проекциялардан тұратын эпюрдің қажеттігін көреміз.

#### 4.6. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ТҮЗУЛЕР МЕН НҮКТЕЛЕР

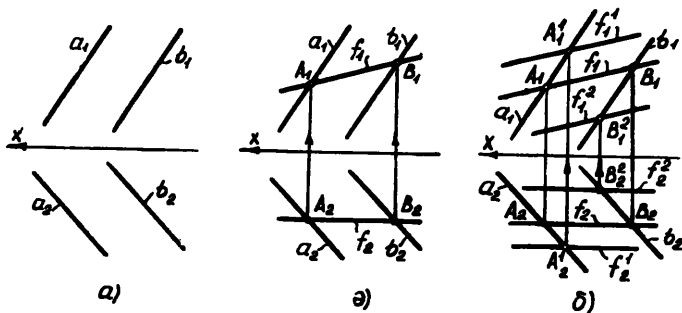
Берілген түзу берілген жазықтықта жатуы үшін, оның екі нүктесі жазықтықта жатса болады. Бұл мектептен белгілі жағдай. Эпюрде берілген жазықтықта жататын түзу салу керек болса, онда ол түзудің бір проекциясын қалауымызша жүргізуімізге болады. Бір проекциясы белгілі берілген жазықтықта жататын түзудің екінші проекциясын салу оңай. Қиылысатын  $a$  және  $b$  түзулері анықтайтын  $\alpha$  жазықтығының кез келген  $l$  түзуін салу



129-сурет.

керек болсын (129, а-сурет). Осы мақсатта  $l$  түзуінің фронталь порекциясын қалауымызша жүргіземіз (129, ә-сурет). Сонда  $l$  түзуі  $a$  және  $b$  түзулерімен қиылысуы қажет.  $l_1 \cap a_1 = A_1$ ;  $l_1 \cap b_1 = B_1$ .  $A_1$  және  $B_1$  нүктелері  $l$  түзуімен  $a$  және  $b$  түзулерінің қиылысу нүктелерінің фронталь проекциялары.  $A$  және  $B$  нүктелерінің горизонталь проекцияларын тауып, оларды  $l_2$  түзуінің көмегімен қосамыз. Сонда  $l(A, B)$  түзуінің екі нүктесі ( $A$  мен  $B$ )  $\alpha$  жазықтығында жататындықтан, ол түзудің өзі де  $\alpha$  жазықтығында жатады. Нүкте берілген жазықтықта жатуы үшін, ол нүкте берілген жазықтықта жататын түзудің бойында жатуы қажет.  $A$  нүктесі  $\alpha$  жазықтығының  $a$  түзуі бойынан алынған, сондықтан  $A$  нүктесі  $\alpha$  жазықтығында жатыр. Сол сияқты  $\alpha$  жазықтығының  $b$  түзуі бойынан алынған  $B$  нүктесі де  $\alpha$  жазықтығында жатыр.

Берілген түзудің берілген жазықтықта жатуының тағы бір белгісі бар: жазықтықтың нүктесі арқылы өтетін және осы жазықтыққа параллель түзуге параллель түзде берілген жазықтықта жатады. Мысалы 129, б-суреттегі  $c$  түзуі  $\alpha(a \cap b)$  жазықтығында жатады, өйткені ол

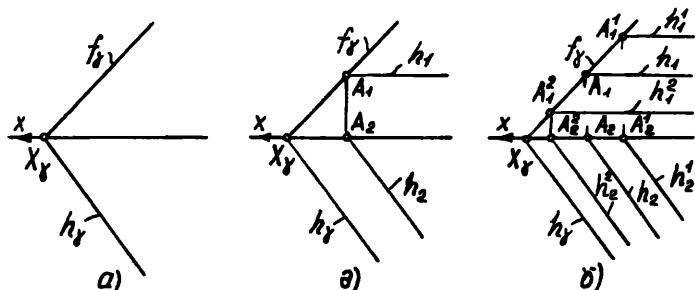


130-сурет.

$\alpha$  жазықтығының  $M$  нүктесі арқылы  $\alpha$  жазықтығында жатқан  $b$  түзуіне параллель жүргізілген.  $M \in a \subset \alpha$ ;  $M \in \alpha$ ;  $M \in c \parallel b$ ;  $b \subset \alpha \Rightarrow c \subset \alpha$ .

Жазықтықта жататын және фронталь проекциялар жазықтығына параллель түзуді осы *жазықтықтың фронталі* деп атайды. Жазықтықта бір параметрлі фронтальдар жиыны жатады және олардың аттас проекциялары өзара параллель орналасады. Берілген  $\beta(a \parallel b)$  жазықтығының фронтальдарын салуды қарастыралық (130, а-сурет). Жазықтықтың фронталін салуды горизонталь проекциядан бастау керек. Қалауымызша горизонталь түзу  $f_2$  жүргізіп, оны жазықтық фронталінің горизонталь проекциясы ретінде қабылдадық (130, ә-сурет). Фронталь  $f$  жазықтық  $a$  және  $b$  түзулерімен қиылысады:  $f_2 \cap a_2 = A_2$ ;  $f_2 \cap b_2 = B_2$ . Байланыс сызықтары  $a_1$  түзуін  $A_1$ ,  $b_1$  түзуін  $B_1$  нүктелерінде қиып өтеді.  $A_1$  және  $B_1$  нүктелері анықтайтын  $f_1$  түзуі фронтальдің фронталь проекциясы болады. 130, б-суретте  $\beta(a \parallel b)$  жазықтығының тағыда екі фронталі жүргізілген. Олардың біреуі  $a$  түзуі бойынан алынған  $A^1$  нүктесі арқылы, екіншісі  $b$  түзуі бойынан алынған  $B^2$  нүктесі арқылы  $f$  түзуіне параллель жүргізіледі:  $A^1 \in a$ ;  $A^1 \in f^1 \parallel f$ ;  $B^2 \in b$ ;  $B^2 \in f^2 \parallel f$ .

Жазықтықта жататын және горизонталь проекциялар жазықтығына параллель түзуді осы *жазықтықтың горизонталі* деп атайды. Жазықтықта бір параметрлі горизонтальдар жиыны болады және олардың аттас проекциялары өзара параллель орналасады. Берілген жазықтықтың горизонталін салуды оның абсциссалар осіне параллель болатын фронталь проекциясынан бастаған дұрыс (131, а-сурет). Іздерімен берілген  $\gamma$  жазықтығының горизонталін оның фронталь ізі бойынан алынған  $A$  нүктесі арқылы фронталь проекциясын  $Ox$  осіне, горизонталь проекциясын жазықтықтың горизонталь



131-сурет.

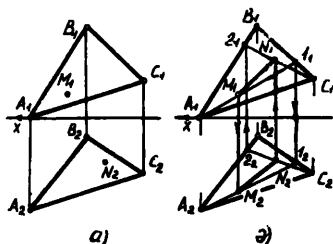
ізіне параллель етіп жүргіземіз.  $A_1 \in f_1$ ;  $(A_1 A_2) \perp x$ ;  $(A_1 A_2) \cap x = A_2$ ;  $A_1 \in h_1 \parallel x$ ;  $A_2 \in h_2 \parallel h_1$ . 131, б-суретте ү жазықтығының үш горизонталі  $h$ ,  $h^1$ ,  $h^2$  көрсетілген. Олардың аттас проекциялары өзара параллель.

4.6.1 - е с е п. Берілген  $ABC$  үшбұрышында жататын  $MN$  кесіндісінің бір ұшының фронталь проекциясы  $M_1$  және екінші ұшының горизонталь проекциясы  $N_2$  көрсетілген (132, а-сурет).  $MN$  кесіндісінің проекцияларын салыңыздар.

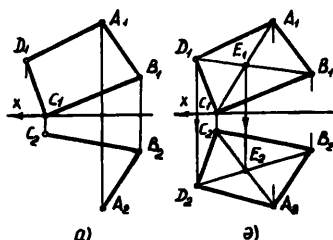
Ш е ш у і.  $ABC$  үшбұрышында жатқан  $M$  нүктесінің горизонталь проекциясын салу үшін, оның  $M$  нүктесі арқылы өтетін түзулерінің біреуін пайдалану керек. Осы мақсатта  $MA$  түзуін қарастыралық. Оның фронталь проекциясын ( $M_1 A_1$  түзуін) жүргізіп,  $B_1 C_1$  түзуімен қиылысу нүктесін  $1_1$  анықтаймыз. Осы  $1_1$  нүктесі арқылы жүргізілген вертикаль түзу  $B_2 C_2$  кесіндісін  $1_2$  нүктесінде қияды.  $A_2 1_2$  түзуі  $ABC$  үшбұрышында жатқан  $A1$  түзуінің горизонталь проекциясы.  $M_1$  нүктесін бастыра жүргізілген вертикаль түзу  $A_2 1_2$  түзуімен  $M_2$  нүктесінде қиылысады. Табылған  $M(M_1, M_2)$  нүктесі  $ABC$  үшбұрышында жатады, өйткені бұл нүкте осы үшбұрыштың  $A1$  түзуі бойынан алынған. Енді  $N$  нүктесінің фронталь проекциясын ( $N_1$  нүктесін) салу үшін  $C2$  түзуі пайдаланылған. Осы  $C2$  түзуінің горизонталь проекциясы  $N_2$  нүктесі арқылы өтетіндей етіп жүргізіледі. Сонда  $[M_1 N_1]$  фронталь проекциясы  $[M_2 N_2]$  горизонталь проекциясы болатын  $MN$  кесіндісі есептің шешуі болады (132, ә-сурет).

4.6.2 - е с е п. Жазық  $ABCD$  төртбұрышының горизонталь проекциясын салуды аяқтау қажет (133, а-сурет).

Ш е ш у і. Жазық фигура өзінің үш нүктесімен толық анықталады.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  нүктелерінің екі проекциялары да белгілі, ал  $D$  нүктесінің горизонталь проекциясын табуымыз керек. Ол үшін  $D_1$  нүктесі арқылы вертикаль бай-



132-сурет.

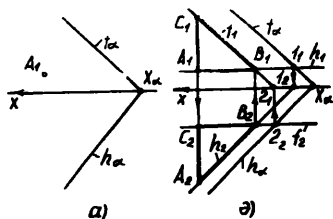


133-сурет.

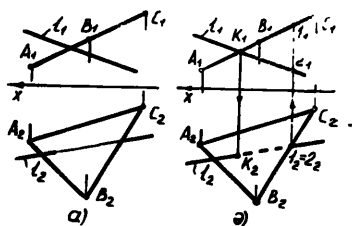
ланыс сызығын жүргізіп  $D$  нүктесінің горизонталь проекциясын ( $D_2$  нүктесін) осы вертикаль байланыс сызығы бойынан іздейміз. Төртбұрыш диагональдарын жүргіземіз; олар қиылысады:  $(AC) \cap (BD) = E$ . Қиылысу нүктесінің фронталь проекциясы  $E_1$  белгілі (133, ә-сурет). Осы  $E_1$  нүктесі арқылы жүргізілген байланыс сызығы  $A_2C_2$  түзуін  $E_2$  нүктесінде қияды. Сонда  $B_2$  және  $E_2$  нүктелері  $BD$  диагоналінің горизонталь проекциясын анықтайды, ал  $B_2E_2$  түзуі мен  $D_1$  нүктесі арқылы жүргізілген байланыс сызығы  $D_2$  нүктесінде қиылысады. Сонда  $D(D_1, D_2)$  нүктесі  $A, B$  және  $C$  нүктелері анықтайтын жазықтықта жатады. Енді  $D_2$  нүктесін  $A_2$  және  $C_2$  нүктелерімен қосып  $ABCD$  төртбұрышының горизонталь проекциясын салуды аяқтаймыз.

4.6.3 - есеп. Іздерімен берілген  $\alpha$  жазықтығында жатқан  $ABC$  үшбұрышының бір қабырғасы  $\pi_1$  жазықтығына, екінші қабырғасы  $\pi_2$  жазықтығына және үшінші қабырғасы  $\pi_3$  жазықтығына параллель және  $A$  төбесінің фронталь проекциясы ( $A_1$  нүктесі) берілген (134, а-сурет). Осы  $ABC$  үшбұрышының горизонталь орналасқан қабырғасының ұзындығы 30 мм болсын, оның проекцияларын салыңыздар.

Ш е ш у і. Берілген  $\alpha$  жазықтығының  $A$  нүктесі арқылы өтетін горизонтальін салалық. Осы горизонтальдың фронталь проекциясы  $A_1$  нүктесі арқылы горизонталь жүргізіледі:  $A_1 \in h_1 \parallel x$ . Жазықтықтың фронталь ізі мен  $h_1$  түзуі  $1_1$  нүктесінде қиылысады. Осы  $1_1$  нүктесінен  $Ox$  осіне түсірілген перпендикуляр табаны ( $1_2$  нүктесі) арқылы жазықтықтың горизонталь ізіне параллель етіп  $h_2$  түзуі жүргізіледі.  $A_1$  нүктесі арқылы жүргізілген байланыс сызығы  $h_2$  түзуін  $A_2$  нүктесінде қияды. Ұзындығы 30 мм  $A_2B_2$  кесіндісін  $h_2$  түзуіне салып,  $B_2$  нүктесін аламыз.  $B$  нүктесі арқылы  $\alpha$  жазықтығының фронтальін жүргіземіз:  $B_2 \in f_2 \parallel x$ ;  $f_2 \cap h = 2_2$ ;  $2_2 \in (2_2 2_1) \perp x$ ;  $(2_2 2_1) \cap \pi x = 2_1$ ;  $2_1 \in f_1 \parallel f_\alpha$ ;  $B_2 \in (B_2 B_1) \perp x$ ;  $f_1 \cap h_1 \cap (B_2 B_1) = B_1$ .



134-сурет.



135-сурет.

Сонда үш түзу: горизонтальдың фронталь проекциясы, фронтальдың фронталь проекциясы және  $B_2$  нүктесі арқылы өтетін вертикаль байланыс сызығы бір нүктеде —  $B_1$  нүктесінде — қиылысады.  $AC$  түзуі профиль проекциялар жазықтығына параллель болғандықтан, оның фронталь және горизонталь проекциялары вертикаль орналасады:  $f_1 \cap (A_1A_2) = C_1$ ;  $f_2 \cap (A_1A_2) = C_2$ . Табылған  $ABC$  ( $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$ ) үшбұрышы есептің шарттарын түгелдей қанағаттандырады.

#### 4.7. ТҮЗУ МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ҚИЫЛЫСУ НҮКТЕСІН САЛУ

Түзу берілген жазықтықта жатпаса, онда олардың жалғыз ортақ нүктесі болады. Берілген түзу мен жазықтықтың ортақ екі нүктесі болса, онда түзу жазықтықта жатар еді. Бірақ түзу берілген жазықтықта жатпайды. Олардың ортақ нүктесі өзіндік немесе өзіндік емес болуы мүмкін. Соңғы жағдайда түзу мен жазықтық параллель болады. Түзу жазықтыққа параллель болуы үшін ол түзудің жазықтықта жатқан түзуге параллель болуы қажет. Кеңістіктегі нүкте арқылы берілген жазықтыққа параллель болатын шексіз көп түзулер жүргізуге болады. Эпюреде түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін салу үшін, жазықтықтың фронталь проекциялары болатын нүктелер өрісі мен оның горизонталь проекциялары болатын нүктелер өрісі аралығындағы тектес сәйкестікті пайдалануға болады. Түзу бойынан берілген жазықтық анықтайтын тектестікте проекциялары сәйкес болатын нүктені табу керек. Ондай нүктені, берілген жазықтық жеке жағдайда орналасқан болса, оңай анықтауға болады. Ал берілген жазықтық жалпы жағдайда орналасса, онда көмекші салуларды пайдалану қажет.

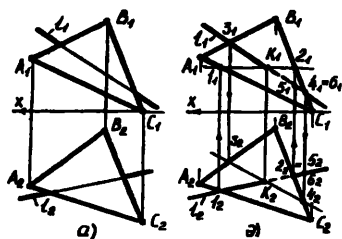
**4.7.1 - есеп.** Фронталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр  $ABC$  үшбұрышы мен  $l$  түзуінің қиылысу нүктесін салу керек (135, а-сурет).

**Шешуі.**  $ABC$  үшбұрышы фронталь проекциялаушы жазықтықта жатқандықтан, оның фронталь және горизонталь проекциялары аралығындағы сәйкестік бір көпмәнді болады, яғни фронталь проекциядағы әрбір нүктеге горизонталь проекцияда вертикаль түзудің бойында орналасқан көп нүктелер сәйкес болады. Қиылысу нүктесін  $K$  әрпімен белгілесек, онда оның фронталь проекциясы болатын  $K_1$  нүктесін оңай анықтауға болады. Бұл  $K$  нүктесі  $ABC$  үшбұрышы жазықтығында жататындықтан оның фронталь проекциясын  $A_1C_1$  түзуі бойынан

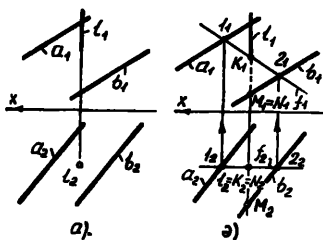
ізейміз. Сондай-ақ  $K$  нүктесі  $l$  түзуінде жатқандықтан, оның фронталь проекциясын  $l_1$  түзуі бойынан ізейміз. Осындай  $A_1C_1$  және  $l_1$  түзулеріне ортақ нүкте  $K_1$  олардың қиылысу нүктесі болады:  $K_1 = (A_1C_1) \cap l_1$ . Бұл нүктенің горизонталь проекциясы ( $K_2$  нүктесі)  $l_2$  түзуінде жатады, ал фронталь проекциялаушы  $ABC$  үшбұрышы анықтайтын жазықтықтың фронталь проекциясы  $K_1$  нүктесі болатын нүктесіне оның горизонталь проекциясында осы  $K_1$  нүктесі арқылы өтетін вертикаль түзу нүктелері сәйкес болады. Сонда  $K_2$  нүктесі  $K_1$  нүктесі арқылы өтетін вертикаль түзу мен  $l_2$  түзуінің қиылысу нүктесі болады:  $K_1 \in (K_1K_2) \perp x$ ;  $(K_1K_2) \cap l_2 = K_2$ . Табылған  $K(K_1, K_2)$  нүктесі  $l$  түзуі мен  $ABC$  үшбұрышының қиылысу нүктесі болады. Енді горизонталь проекцияда  $l$  түзуінің  $ABC$  үшбұрышы тасасындағы бөлігін анықтап, осы бөлікті үзілме сызықпен жүргізу қажет. Ол үшін горизонталь бәсекелес нүктелерді қарастырамыз. Осындай нүктелер (1 және 2)  $l$  және  $BC$  түзулерінің горизонталь проекциялары қиылысатын нүкте ретінде анықталады:  $l_2 \cap (B_2C_2) = 1_2 = 2_2$ . Осы біріккен  $1_2 = 2_2$  нүктесі арқылы байланыс сызығын жүргізіп,  $l_1$  түзуі бойынан  $2_1$  нүктесін,  $B_1C_1$  түзуі бойынан  $1_1$  нүктесін аламыз.  $ABC$  үшбұрышы жазықтығында жатқан 1 нүктесінің фронталь проекциясы ( $1_1$ )  $l$  түзуінде жатқан 2 нүктесінің фронталь проекциясынан ( $2_1$ ) жоғары орналасқандықтан, горизонталь проекцияда түзудің  $K$  және 2 нүктелері аралығындағы кесіндісі  $ABC$  үшбұрышының тасасында жатыр деген қорытындыға келеміз. Сондықтан көрінбейтін  $K_2 2_2$  кесіндісі үзілме сызықпен жүргізіледі (135, ә-сурет).

**4.7.2 - е с е п.** Жалпы жағдайда орналасқан  $ABC$  үшбұрышы мен  $l$  түзуінің қиылысу нүктесін салу керек (136, а-сурет).

**Ш е ш у і.** Жалпы жағдайда орналасқан жазықтық проекциялары арасында өзара бірімәнді тектес сәйкестік болады дегенбіз. Қиылысу нүктесін  $K$  әрпімен белгілесек, онда оның фронталь проекциясын салу үшін  $l_2$  түзуін  $ABC$  үшбұрышы жазықтығының горизонталь проекциясына меншіктеп,  $1_2$  және  $2_2$  нүктелерімен анықталық:  $1_2 = l_2 \cap (A_2C_2)$  және  $2_2 = l_2 \cap (B_2C_2)$ . Осы  $1_2 2_2$  түзуіне сәйкес  $1_2 2_1$  түзуін салалық. Ол үшін  $1_2$  және  $2_2$  нүктелері арқылы  $Ox$  осіне перпендикуляр түзулер (сәйкестіктің бағыттары) жүргізіліп, олардың  $A_1C_1$  және  $B_1C_1$  түзулерімен қиылысулары нәтижесінде табылған  $1_1$  және  $2_1$  нүктелерін қосатын түзу жүргіземіз. Сонда  $l$  түзуінде және  $ABC$  үшбұрышы жазықтығында жататын нүктенің



136-сурет.



137-сурет.

фронталь проекциясы  $l_1$  және  $1_1 2_1$  түзулерінің қиылысу нүктесі болады:  $K_1 = l_1 \cap (1_1 2_1)$ . Қиылысу нүктесінің горизонталь проекциясын салу үшін  $l_1$  түзуін  $ABC$  жазықтығының фронталь проекциясына меншіктеп,  $3_1$  және  $4_1$  нүктелерімен анықталық:  $3_1 = l_1 \cap (A_1 B_1)$  және  $4_1 = l_1 \cap (B_1 C_1)$ . Осы  $3_1 4_1$  түзуіне сәйкес  $3_2 4_2$  түзуін салалық. Ол үшін  $3_1$  және  $4_1$  нүктелері арқылы сәйкестік бағытына параллель түзулер жүргізіп, олардың  $A_2 B_2$  және  $B_2 C_2$  түзулерімен қиылысулары нәтижесінде табылған  $3_2$  және  $4_2$  нүктелерін қосатын түзу жүргіземіз. Сонда  $l$  түзуі мен  $ABC$  үшбұрышына ортақ  $K$  нүктесінің горизонталь проекциясы ( $K_2$  нүктесі)  $l_2$  және  $3_2 4_2$  түзулерінің қиылысу нүктесі болады:  $K_2 = l_2 \cap (3_2 4_2)$ . Сонда  $K(K_1, K_2)$  нүктесі  $ABC$  үшбұрышы мен  $l$  түзуінің қиылысу нүктесі.  $K_1$  және  $K_2$  нүктелерін қосатын түзу  $Ox$  осіне перпендикуляр болуы шарт. Сонғы шартты тұрғызу дәлдігін тексеру үшін пайдаланады. Енді эпюрде көрінетіндікті анықтау қажет.  $K$  нүктесі  $l$  түзуін көрінетін және көрінбейтін бөліктерге ажыратады. Горизонталь проекциядағы көрінетіндікті анықтау үшін, горизонталь бәсекелес нүктелер қарастырылады. Осындай горизонталь бәсекелес нүктелер ретінде  $l_2$  түзуінің  $A_2 B_2 C_2$  үшбұрышының қабырғаларымен қиылысу нүктелерінің біреуін алған дұрыс. Мысалы  $2_2 = 5_2 = l_2 \cap (B_2 C_2)$ ;  $2_2 \in (B_2 C_2)$ ;  $5_2 \in l_2$ . Байланыс сызығының көмегімен  $2_1 \in (B_1 C_1)$  және  $5_1 \in l_1$  нүктелері анықталады. Фронталь проекциясы жоғары орналасқан  $2$  нүктесі горизонталь проекцияда көрінеді. Олай болса,  $l_2$  түзуінің  $K_2 5_2$  кесіндісі көрінбейтіндіктен үзілме сызықпен жүргізіледі (136, ә-сурет). Фронталь проекциядағы көрінетіндікті анықтау үшін фронталь бәсекелес  $4$  және  $6$  нүктелері қарастырылған  $4 \in (BC)$ ;  $6 \in l$ .  $4$  нүктесінің горизонталь проекциясы төмен орналасқан, сондықтан осы нүкте фронталь проекцияда көрінеді. Олай болса,  $l$  түзуінің  $6$  және  $K$  нүктелері аралығындағы бө-

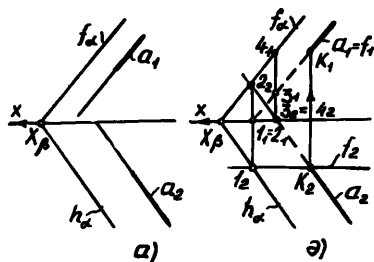
лігі фронталь проекцияда  $ABC$  үшбұрышының тасасында, яғни көрінбейді. Бұдан былай қиылысу нүктесінің бір проекциясын анықтағаннан кейін оның екінші проекциясын байланыс сызығының көмегімен түзудің екінші проекциясы бойынан табатын боламыз.

**4.7.3 - е с е п.** Горизонталь проекциялаушы  $l$  түзуі мен  $a$  және  $b$  параллель түзулері анықтайтын жалпы жағдайда орналасқан  $\alpha$  жазықтығының қиылысу нүктесін салып, эпюрде  $l$  түзуінің көрінбейтін бөліктерін анықтау керек (137, а-сурет).

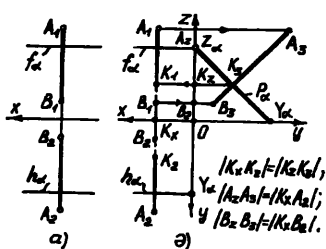
**Ш е ш у і.** Түзу  $\pi_2$  жазықтығына перпендикуляр болғандықтан, оның горизонталь проекциясы нүкте түрінде кескінделген:  $l \perp \pi_2 \Rightarrow l_2$  — нүкте болады. Осы түзудің  $\alpha(a \parallel b)$  жазықтығымен қиылысу нүктесі  $K \in l$  болғандықтан,  $K_2$  нүктесі де  $l_2$  нүктесіне кескінделеді.  $K$  нүктесі  $\alpha(a \parallel b)$  жазықтығында да жатады. Сондықтан оның горизонталь проекциясы бойынша фронталь проекциясын салу оңай. Ол үшін осы  $K$  нүктесі арқылы өтетін  $\alpha$  жазықтығының фронталін жүргізуге болады:  $K \in f \subset \alpha$ ;  $K_2 \in f_2 \parallel x$ ;  $f_2 \cap a_2 = 1_2$ ;  $f_2 \cap b_2 = 2_2$ ;  $1_2 \in (1_2 1_1) \perp x$ ;  $2_2 \in (2_2 2_1) \perp x$ ;  $(1_2 1_1) \cap a_1 = 1_1$ ;  $(2_2 2_1) \cap b_1 = 2_1$ ;  $(1_2 2_1) = f_1$ . Сонда  $K$  нүктесінің фронталь проекциясы  $l_1$  және  $f_1$  түзулері бойында жатуы тиіс, яғни олардың қиылысу нүктесі болады:  $K_1 = l_1 \cap f_1$ .  $K(K_1, K_2) = l \cap \alpha$ . Эпюрде  $l$  түзуінің көрінбейтін бөлігін анықтау үшін фронталь бәсекелес  $M$  және  $N$  нүктелерін қарастыралық:  $M_1 = N_1 = l_1 \cap b_1$ ;  $M \in b$ ;  $N \in l$ . Олардың горизонталь проекцияларына қарап  $N$  нүктесінің фронталь проекциялар жазықтығына жақынырақ орналасқанын көреміз. Олай болса,  $l$  түзуінің  $K$  нүктесінен төменгі бөлігі эпюрде көрінбейді, өйткені  $\alpha$  жазықтығының тасасында қалады.

**4.7.4 - е с е п.** Жалпы жағдайда орналасқан  $a$  түзуі мен іздерімен берілген  $\alpha$  жазықтығының қиылысу нүктесін салып, түзудің көрінетін бөлігін анықтау керек (138, а-сурет).

**Ш е ш у і.** Берілген түзудің фронталь проекциясы жазықтықтың фронталь ізіне, ал горизонталь проекциясы жазықтықтың горизонталь ізіне параллель орналасқан:  $a_1 \parallel f_a$  және  $a_2 \parallel h_a$ . Сондықтан  $\alpha$  жазықтығы анықтайтын тектес сәйкестіктің  $a_1$  түзуіне сәйкес түзу ( $f_2$ )  $Ox$  осіне параллель, ал  $a_2$  түзуіне сәйкес түзу де ( $h_1$ )  $Ox$  осіне параллель орналасулары қажет. Оның себебі параллель түзулерге сәйкес түзулерде параллель болады:  $a_1 \parallel f_a \Rightarrow f_2 \parallel x$ ;  $a_2 \parallel h_a \Rightarrow h_1 \parallel x$ . Жазықтықтың фронталь ізіне сәйкес түзу  $Ox$  осі және оның горизонталь ізіне сәйкес түзу



138-сурет.

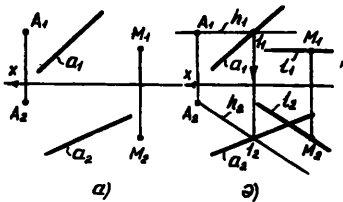


139-сурет.

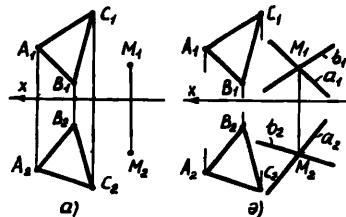
де  $Ox$  осі болатынын жоғарыда айтқанбыз. 138, ә-суретте  $a_1 = f_1$  деп қарастырып,  $f_2$  түзуі жүргізілген:  $a_1 \cap x = 1_1$ ;  $1_1 \in (1_1 1_2) \perp x$ ;  $(1_1 1_2) \cap h_\alpha = 1_2$ ;  $1_2 \in f_2 \parallel x$ . Сонда  $a$  түзуінің  $\alpha$  жазықтығымен қиылысу нүктесінің горизонталь проекциясы  $a_2$  және  $f_2$  түзулері бойында жатуы үшін олардың қиылысу нүктесі болуы қажет:  $a_2 \cap f_2 = K_2$ . Осы  $K_2$  нүктесін бастыра вертикаль байланыс сызығын жүргізіп  $a_1$  түзуі бойынан  $K_1$  нүктесін табамыз:  $K(K_1, K_2) = a \cap \Pi_\alpha(f_\alpha \cap h_\alpha)$ . Көрінетіндікті анықтау үшін фронталь бәсекелес 1 және 2 нүктелерін, горизонталь бәсекелес 3 және 4 нүктелерін қарастыруға болады (138, ә-сурет):  $1 \in \alpha$ ;  $2 \in \alpha$ ;  $3 \in \alpha$ ;  $4 \in \alpha$ . Қарастырылып отырған сызбада  $\alpha$  жазықтығында жатқан 1 нүктесінің горизонталь проекциясы  $a$  түзуінің бойындағы 2 нүктесінің горизонталь проекциясына қарағанда осьтен қашық орналасқан. Олай болса, фронталь проекцияда  $a$  түзуінің  $K$  нүктесінен сол қол жағындағы бөлігі көрінбейді. 4 нүктесі 3 нүктесінен жоғары орналасқандықтан горизонталь проекцияда да  $a$  түзуінің  $K$  нүктесінен сол қол жақтағы бөлігі көрінбейді.

4.7.5 - е с е п. Профиль түзу  $AB$  және профиль проекциялаушы  $\alpha(f_\alpha \cap h_\alpha)$  жазықтығы берілген (139, а-сурет). Берілген түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін салу керек.

Ш е ш у і. Сызбада  $A_1 B_1$  және  $A_2 B_2$  түзулері бірігіп абсциссалар осіне перпендикуляр бір түзуге кескінделген. Олай болса горизонталь проекциясы  $A_2 B_2$  түзуі және фронталь проекциясы  $(A_1 B_1)$  болатын түзу профиль түзу, яғни  $\pi_3$  жазықтығына параллель түзу екен. Жазықтықтың фронталь ізі  $f_\alpha$  және горизонталь ізі  $h_\alpha$  өзара және  $Ox$  осіне параллель, олай болса,  $\alpha \perp \pi_3$  болады. Есепті шешу үшін түзудің профиль проекциясын  $(A_3 B_3)$  және жазықтықтың профиль ізін ( $p$ ) тұрғызып алу қо-



140-сурет.



141-сурет.

лайлы. Аппликата осін қалауымызша вертикаль орналастырамыз (139, ә-сурет). Сонда  $A_3B_3$  және  $p_x$  түзулерінің қиылысу нүктесі  $K_3$  іздеп отырған нүктенің профиль проекциясы болады. Горизонталь байланыс сызығын жүргізіп  $A_1B_1$  түзуі бойынан  $K_1$  нүктесін, одан кейін  $A_2B_2$  түзуі бойынан  $K_2$  нүктесін анықтауға болады. Эпюрде  $BK$  кесіндісінің фронталь және горизонталь проекциялары үзілме сызықтармен жүргізілген, өйткені олар көрінбейтін сызықтар.

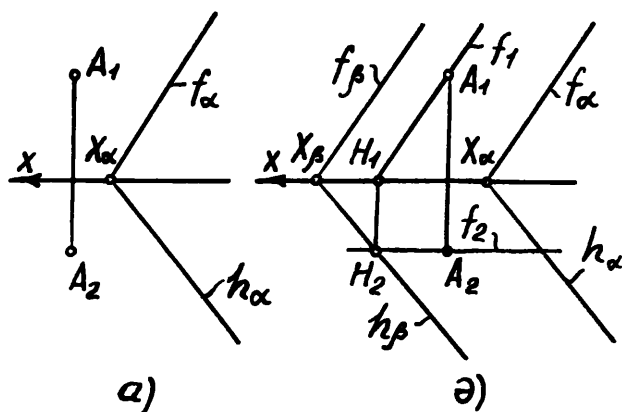
4.7.6 - е с е п. Берілген  $M$  нүктесі арқылы  $\alpha(A; a)$  жазықтығына параллель горизонталь түзу жүргізу қажет (140, а-сурет).

Ш е ш у і. Түзу жазықтыққа параллель болуы үшін оның жазықтықта жатқан түзуге параллель болуы шарт. Іздеп отырған түзуіміз горизонталь проекциялар жазықтығына параллель болатындықтан оған параллель берілген жазықтықтағы түзу де горизонталь орналасады. Берілген  $\alpha(A; a)$  жазықтығының  $A$  нүктесі арқылы өтетін горизонтальін салу қолайлы:  $A_1 \in h_1 \parallel x$ ;  $h_1 \cap a_1 = l_1$ ;  $l_1 \in (l_1 l_2) \perp x$ ;  $(l_1 l_2) \cap a_2 = l_2$ ;  $(A_2 l_2) = h_2$ ;  $h(h_1, h_2) \subset \alpha$ . Сонда  $M$  нүктесі арқылы өтетін және  $h$  түзуіне параллель  $l$  түзуі есептің шарттарын толық қанағаттандырады:  $M_1 \in l_1 \parallel h_1$ ;  $M_2 \in l_2 \parallel h_2$ . Есептің әрқашан шешімі бар және ол жалғыз екенін дәлелдеу қиын емес (140, ә-сурет).

#### 4.8. ЕКІ ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

Кеңістікте екі жазықтық қиылысады, немесе параллель болады. Екі жазықтық өзара параллель болуы үшін олардың біреуінің қиылысатын екі түзуі екіншісінің сәйкес екі түзуіне параллель болулары қажет. Егер  $a \subset \alpha$ ,  $b \subset \alpha$ ,  $a \cap b = A$ ;  $c \subset \beta$ ;  $d \subset \beta$  және  $a \parallel c$ ,  $b \parallel d$  болса, онда  $\alpha \parallel \beta$  болады. Аталған  $c$  және  $d$  түзулері де өзіндік нүктеде қиылысатын түзулер болатынына көз жеткізу қиын емес.

4.8.1 - е с е п. Берілген  $M$  нүктесі арқылы  $ABC$  үшбұ-



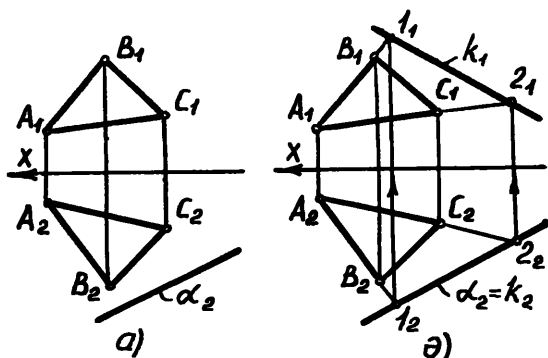
142-сурет.

рышы жазықтығына параллель жазықтық салу керек (141, а-сурет).

Шешуі.  $M$  нүктесін бастыра  $AB$  түзуіне параллель  $a$  түзуін және  $AC$  түзуіне параллель  $b$  түзуін жүргіземіз:  $M_1 \in a_1 \parallel (A_1B_1)$ ;  $M_2 \in a_2 \parallel (A_2B_2)$ ;  $M_1 \in b_1 \parallel (A_1C_1)$ ;  $M_2 \in b_2 \parallel (A_2C_2)$ . Сонда  $M$  нүктесінде қиылысатын екі түзу ( $a$  және  $b$ ) анықтайтын жазықтық есептің шешуі болады (141, ә-сурет). Егер  $\alpha(ABC)$  және  $\beta(a \cap b)$  жазықтықтарын қарастырсақ, онда олардың өзара параллель болатынын көреміз. Өйткені  $\alpha$  жазықтығының  $A$  нүктесінде қиылысатын екі түзуі ( $AB$  мен  $AC$ )  $\beta$  жазықтығының  $M$  нүктесінде қиылысатын екі түзуіне ( $a$  және  $b$ ) сәйкес параллель:  $a \parallel (AB)$ ;  $b \parallel (AC)$ .

4.8.2 - есеп.  $A$  нүктесі арқылы өтетін, іздерімен берілген  $\alpha$  жазықтығына параллель  $\beta$  жазықтығының іздерін салу керек (142, а-сурет).

Шешуі. Параллель жазықтықтардың іздері де параллель болады.  $\alpha \parallel \beta$  болса, онда  $f_\alpha \parallel f_\beta$  және  $h_\alpha \parallel h_\beta$  болуы қажет. Параллель жазықтықтардың деңгейлік түзулері де параллель орналасады. Берілген  $A$  нүктесі арқылы  $\beta$  жазықтығының фронталін  $f$  жүргізелік (142, ә-сурет):  $A_1 \in f_1 \parallel f_\alpha$ ;  $A_2 \in f_2 \parallel x$ . Осы  $f$  фронтальдың горизонталь ізін ( $H$  нүктесін) тұрғызамыз:  $f_1 \cap x = H_1$ ;  $H_1 \in (H_1H_2) \perp x$ ;  $(H_1H_2) \cap f_2 = H_2$ . Сонда іздеп отырған  $\beta$  жазықтығының горизонталь ізін  $H_2$  нүктесі арқылы  $\alpha$  жазықтығының горизонталь ізіне параллель етіп жүргізу керек.  $H_2 \in h \parallel h_\alpha$ . Горизонталь із  $h_\beta$  және ось  $x$  тоғысу нүктесінде ( $X_\beta$ ) қиылысады. Тоғысу нүктесі арқылы  $\alpha$



143-сурет.

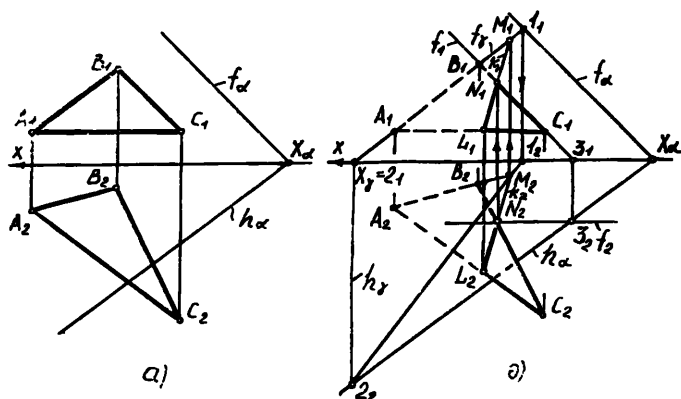
жазықтығының фронталь ізіне параллель жүргізілген түзу  $\beta$  жазықтығының фронталь ізі болады.  $h_3 \cap x = X_3$ ;  $X_3 \in f_3 \parallel f_\alpha$ . Іздері  $X_3$  нүктесінде кездесетін  $f_3$  және  $h_3$  түзулері болатын жазықтық  $\beta$  берілген  $A$  нүктесі арқылы өтеді және  $\alpha$  жазықтығына параллель. Есептің шешуі болатын жазықтық жалғыз. Екі жазықтықтың қиылысу сызығы түзу сызық болады, ал түзуді салу үшін оның екі нүктесін анықтау жеткілікті. Сондықтан берілген екі жазықтықтың қиылысу сызығын салу үшін осы берілген екі жазықтыққа ортақ екі нүктені тауып, оларды қосатын түзу жүргізсе болады.

4.8.3 - е с е п. Берілген горизонталь проекциялаушы  $\alpha(\alpha_2)$  жазықтығы мен  $ABC$  үшбұрышы анықтайтын  $\beta(ABC)$  жазықтығының қиылысу сызығын  $k$  салу керек (143, а-сурет).

Ш е ш у і. Жазықтықтар  $\alpha(\alpha_2)$  және  $\beta(ABC)$  қиылысатын  $k$  түзуі  $\alpha$  жазықтығында жататындықтан оның горизонталь проекциясы  $k_2$  осы горизонталь проекциялаушы  $\alpha$  жазықтығының горизонталь проекциясымен бірігеді:  $\alpha \perp \pi_2$ ;  $\alpha \cap \beta = k$ ;  $k_2 = \alpha_2$  (143, ә-сурет). Қиылысу сызығын анықтайтын нүктелер ретінде  $AB$  және  $AC$  түзулерінің  $\alpha$  жазықтығымен қиылысу нүктелерін қарастыруға болады.  $(AB) \cap \alpha = 1$  және  $(AC) \cap \alpha = 2$ . Бұл екі нүктенің фронталь проекцияларын салып, оларды бастыра  $k_1$  түзуін жүргіземіз.  $k(k_1, k_2)$  түзуі  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарына ортақ.

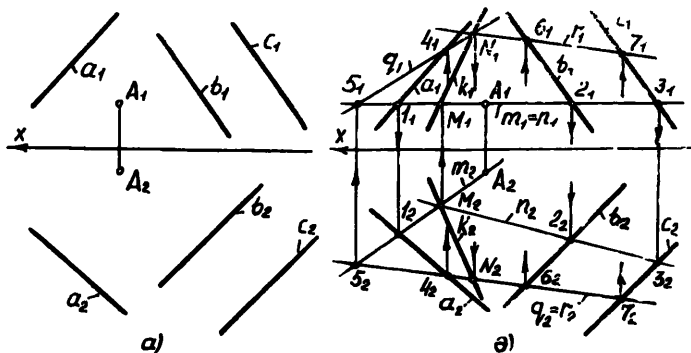
4.8.4 - е с е п. Жалпы жағдайда орналасқан  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$  және  $\beta(A, B, C)$  жазықтықтарының қиылысу сызығын салу керек (144, а-сурет).

Ш е ш у і.  $AB$  түзуінің  $\alpha$  жазықтығымен қиылысу нүк-



144-сурет.

тесі  $M$  анықталған (144, ә-сурет).  $(AB) \subset \gamma \perp \pi_1$ ;  $f_1 = (A_1B_1)$ ;  $(A_1B_1) \cap x = X_1 = 2_1$ ;  $X_1 \subset h_1 \perp x$ ;  $\gamma \cap \alpha = (12)$ ;  $(12) \cap (AB) = M$ . Одан кейін  $BC$  түзуінің  $\alpha$  жазықтығымен қиылысу нүктесі  $N$  анықталған.  $(B_1C_1) \parallel f_2$ ;  $(B_1C_1) = f_1 \cap \pi x = 3_1$ ;  $3_1 \in (3_23_1) \perp x$ ;  $(3_23_1) \cap h_2 = 3_2$ ;  $3_2 \in f_2 \parallel x$ ;  $f \cap (BC) = N$ . Табылған  $M$  және  $N$  нүктелерін қосатын  $k$  түзуі берілген  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарының қиылысу сызығы болады. Табылған  $k$  түзуі және үшбұрыштың  $AC$  қабырғасы бір жазықтықта жататындықтан қиылысады:  $(AC) \cap k = L$ . Сонда  $LN$  кесіндісі  $ABC$  үшбұрышын көрінетін және көрінбейтін екі бөлікке бөледі. Бәсекелес нүктелер әдісімен пайдаланып  $CLN$  үшбұрышының проекциялары эпюрге көрінетіні, ал  $ABNL$  төртбұрышының проекциялары көрінбейтіні анықталады.



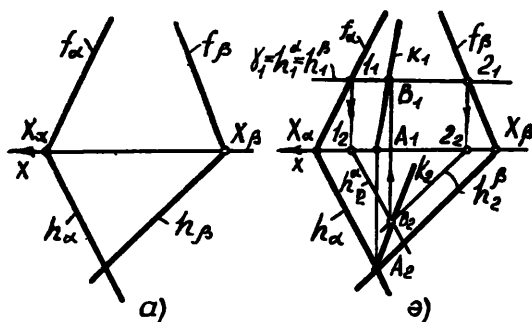
145-сурет.

4.8.5 - е с е п. Берілген  $\alpha(A; a)$  және  $\beta(b||c)$  жазықтықтарының қиылысу сызығын салу керек (145, а-сурет).

Ш е ш у і. Эпюрде  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтары екі тектес сәйкестікті анықтайды, ал олардың қиылысу сызығы аталған екі сәйкестіктің ортақ түзуі болады. Егер  $\alpha \cap \beta = k$  болса, онда  $k$  түзуінің проекциялары  $\alpha$  анықтайтын тектестікте де,  $\beta$  анықтайтын тектестікте де сәйкес түзулер болады. Осы  $k$  түзуін былай салуға болады. Фронталь проекцияда қалауымызша түзу жүргізіп, оны  $m_1$  және  $n_1$  әріптерімен белгілелік (145, ә-сурет). Бұл түзуге  $\alpha$  жазықтығы анықтайтын тектестікте  $m_2$  түзуі, ал  $\beta$  жазықтығы анықтайтын тектестікте  $n_2$  түзуі сәйкес болады. Табылған  $m_2$  және  $n_2$  түзулерінің қиылысу нүктесіне ( $M_2$ -ге) фронталь проекцияда  $M_1$  нүктесі сәйкес. Сонда  $M$  нүктесінің проекциялары оны  $M \in \alpha$ , немесе  $M \in \beta$  деп қарастырғанда өзгермейді, яғни  $M$  нүктесі  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарына ортақ нүкте. Горизонталь проекцияда қалауымызша  $q_2 = r_2$  түзуін жүргізіп, фронталь проекцияда оған сәйкес түзуді тұрғызалық. Бұл түзуге  $\alpha$  жазықтығы анықтайтын тектестікте  $q_1$  түзуі, ал  $\beta$  жазықтығы анықтайтын тектестікте  $r_1$  түзуі сәйкес болады. Тұрғызылған  $q_1$  және  $r_1$  түзулерінің қиылысу нүктесіне ( $N_1$ -ге) горизонталь проекцияда  $N_2$  нүктесі сәйкес болады.  $N$  нүктесі де  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарына ортақ нүкте. Табылған  $M$  және  $N$  нүктелерін қосатын түзуде  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарына ортақ түзу болады. Егер  $k_1 = (M_1, N_1)$  түзуіне  $\alpha$  жазықтығы анықтайтын тектестікте  $k_2 = (M_2, N_2)$  сәйкес болса, онда  $k_2 = (M_2, N_2)$  түзуіне  $\beta$  жазықтығы анықтайтын тектестікте  $k_1 = (M_1, N_1)$  түзуі сәйкес болатынына көз жеткізу қиын емес. Олай болса, горизонталь проекциясы  $k_2(M_2, N_2)$  және фронталь проекциясы  $k_1(M_1, N_1)$  түзулері болатын  $k$  түзуі  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарының қиылысу сызығы болады.

4.8.6 - е с е п. Іздерімен берілген  $\alpha(f_2, h_2)$  және  $\beta(f_3, h_3)$  жазықтықтарының қиылысу сызығын салу керек (146, а-сурет).

Ш е ш у і. Берілген жазықтықтардың горизонталь іздері  $A$  нүктесінде қиылысады. Сондықтан қиылысу сызығы осы  $A$  нүктесі арқылы өтеді. Енді берілген жазықтықтарға ортақ тағы бір нүктені анықтауымыз керек. Ондай нүкте ретінде жазықтықтардың фронталь іздерінің қиылысу нүктесін алуға болар еді. Бірақ бұл нүкте қағаз бетінен тыс орналасқан. Горизонталь орналасқан ү жазықтығын жүргіземіз (146, ә-сурет). Осы көмекші жазықтықтың берілген жазықтықтармен қиылысу сы-

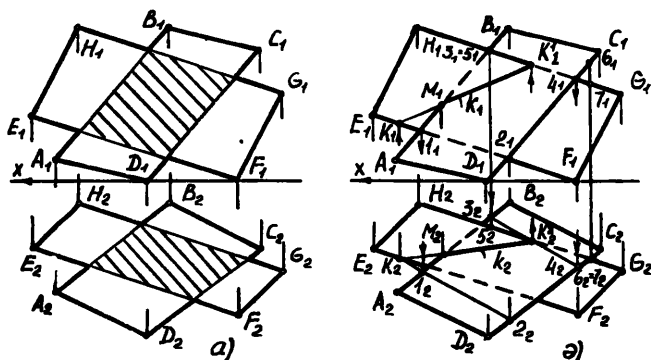


146-сурет.

зықтарып саламыз. Қиылысу сызықтары горизонталь жазықтықта жататындықтан горизонталь түзулер болады:  $\gamma \parallel \pi_2$ ;  $\gamma \cap \alpha = h^\alpha$ ;  $\gamma \cap \beta = h^\beta$ . Көмекші жазықтық  $\alpha$  жазықтығының фронталь ізімен 1 нүктесінде қиылысады, ал қиылысу сызығының горизонталь проекциясы 1 нүктесінің горизонталь проекциясы арқылы  $\alpha$  жазықтығының горизонталь ізіне параллель жүргізіледі:  $1_2 \in h_2^\alpha \parallel h_\alpha$ . Сол сияқты  $\beta$  және  $\gamma$  жазықтықтарының қиылысу сызығының горизонталь проекциясы  $\gamma$  жазықтығының  $\beta$  жазықтығының фронталь ізімен қиылысу нүктесінің горизонталь проекциясы арқылы соңғы жазықтықтың горизонталь ізіне параллель жүргізіледі:  $2_2 \in h_2^\beta \parallel h_\beta$ . Сонда  $\alpha$ ,  $\gamma$  және  $\beta$  жазықтықтары  $B$  нүктесінде қиылысады, ал  $A$  және  $B$  нүктелерін қосатын түзу  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарының қиылысу сызығы болады:  $(AB) = k = \alpha \cap \beta$ . 146-суретте кескінделген жазықтықтар жалпы жағдайда орналасқан жазықтықтар. Ал олардың біреуі проекциялаушы жазықтық болса, онда қиылысу сызығының проекциялаушы жазықтықпен аттас проекциясы сол жазықтықтың сәйкес ізімен бірігеді. Мысалы,  $\alpha$  фронталь проекциялаушы жазықтық болса, онда  $k_1 = f_\alpha$  болар еді. Сол сияқты  $\beta$  горизонталь проекциялаушы жазықтық болса, онда  $k_2 = h_\beta$  болар еді.

4.8.7 - е с с п. Екі параллелограммен шектелген  $ABCD$  және  $EFGH$  төртбұрыштарының қиылысу сызығын салу керек (147, а-сурет).

Шешуі. Қиылысу сызығының кесінді болатынына және ол кесіндінің проекциялары параллелограмдар проекцияларының аяқасын жатқан бөліктерінде (суретте штрихталған аудандар) орналасатынын анықтау қиын емес.  $ABCD$  параллелограмы анықтайтын жазық-



147-сурет.

тықты  $\alpha$  деп, ал  $EFGH$  параллелограмы анықтайтын жазықтықты  $\beta$  деп белгілесек, онда  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарының қиылысу сызығын ( $k$  түзуін) салу оңай. Ол үшін  $EF$  түзуінің  $\alpha$  жазықтығымен қиылысу нүктесі  $K$ -ны және  $GH$  түзуінің  $\alpha$  жазықтығымен қиылысу нүктесі  $K'$ -ды тауып, оларды бастыра  $k$  түзуін жүргізсе болғаны:  $(EF) \cap \alpha = K$ ;  $(GH) \cap \alpha = K'$ ;  $(KK') = k = \alpha \cap \beta$ . Осы  $k$  түзуінің  $K'M$  кесіндісі берілген екі төртбұрыштың қиылысу сызығын анықтайды. Сонда  $ABCD$  параллелограмының  $AB$  қабырғасы  $EFGH$  төртбұрышымен  $M$  нүктесінде, ал  $EFGH$  параллелограмының  $GH$  қабырғасы  $ABCD$  төртбұрышымен  $K'$  нүктесінде қиылысады. Төртбұрыштарды мөлдір емес деп қарастырып, бәсекелес нүктелер әдісімен эпюрге көрінетіндікті анықтау қажет. Фронталь проекциядағы көрінетіндікті анықтау үшін бәсекелес 3 және 5 нүктелерін ( $3 \in (AB)$  және  $5 \in (GH)$ ) қарастыруға болады (147, ә-сурет). 5 нүктесінің горизонталь проекциясы осьтен қашықтау орналасқан. Сондықтан фронталь проекцияда 3 нүктесі көрінбейді, яғни  $AB$  қабырғасының  $M$  және 3 нүктелері аралығындағы бөлігі фронталь проекцияда үзілме сызықпен көрсетіледі. Сол сияқты  $E_1F_1$  қабырғасының 1<sub>1</sub> және 2<sub>1</sub> нүктелері,  $G_1H_1$  қабырғасының  $K'_1$  және 4<sub>1</sub> нүктелері аралығындағы бөліктері де фронталь проекцияда көрінбейді. Горизонталь проекциядағы көрінетіндікті бәсекелес 6 және 7 нүктелерін ( $6 \in (CD)$  және  $7 \in (GH)$ ) қарастырудың нәтижесінде анықтауға болады.  $CD$  қабырғасында орналасқан 6 нүктесінің фронталь проекциясы жоғары болғандықтан,  $GH$  қабырғасының 7 нүктесі горизонталь проекцияда көрінбейді.

## Есептер

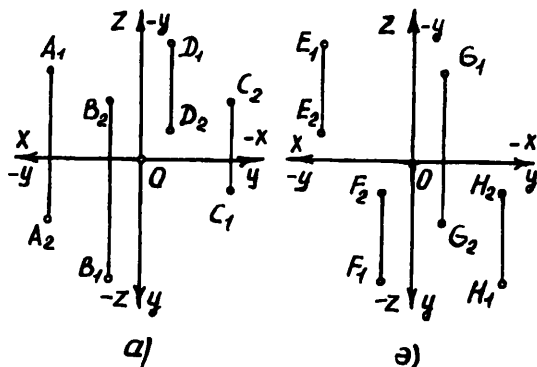
1. Берілген  $A(50; 40; 20)$  нүктесінің эпюрге фронталь, горизонталь және профиль проекцияларын салыңыздар.  $A$  нүктесіне  $\pi_1$  жазықтығына қатысты симметриялы  $B$  нүктесінің,  $\pi_2$  жазықтығына қатысты симметриялы  $C$  нүктесінің және  $\pi_3$  жазықтығына қатысты симметриялы  $D$  нүктесінің аксонометрияларын және эпюрлерін тұрғызыңыздар.  $A$  нүктесі нешінші октантта орналасқан?  $B$ ,  $C$  және  $D$  нүктелері нешінші октанттарда орналасқан?

2. 148, а-суретте  $A$ ,  $B$ ,  $C$  және  $D$  нүктелерінің фронталь және горизонталь проекциялары берілген. Осы нүктелердің профиль проекцияларын және аксонометрияларын салыңыздар.  $A$  нүктесі нешінші октантта орналасқан?  $B$ ,  $C$  және  $D$  нүктелері нешінші октанттарда орналасқан?

3. 148, ә-суретте  $E$ ,  $F$ ,  $G$  және  $H$  нүктелерінің фронталь және горизонталь проекциялары берілген. Осы нүктелердің профиль проекцияларын және аксонометрияларын салыңыздар.  $E$  нүктесі нешінші октантта орналасқан?  $F$ ,  $G$  және  $H$  нүктелері нешінші октанттарда орналасқан?

4.  $A(10; 20; -15)$  нүктесінің,  $A$  нүктесіне абсциссалар осіне қатысты симметриялы болатын  $B$  нүктесінің, ординаталар осіне қатысты симметриялы болатын  $C$  нүктесінің және аппликатаалар осіне қатысты симметриялы болатын  $D$  нүктесінің фронталь, горизонталь және профиль проекцияларын салыңыздар.  $A$  нүктесі нешінші октантта орналасқан?  $B$ ,  $C$  және  $D$  нүктелері нешінші октантта орналасқан?

5. Берілген  $A(20; 30; 20)$  нүктесі арқылы өтетін  $Oy$



148-сурет.

осімен қиылысатын фронталь,  $Oz$  осімен қиылысатын горизонталь және  $Ox$  осімен қиылысатын профиль түзулердің фронталь, горизонталь және профиль проекцияларын салыңыздар. Эпюрден фронтальдың горизонталь және профиль проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын көрсетіңіздер және горизонтальдың фронталь және профиль проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын анықтаңыздар.

6.  $A(5; 5; 20)$  және  $B(20; 15; 10)$  нүктелері берілген. Эпюрде  $AB$  түзуінің іздерін салыңыздар.  $AB$  түзуі бойынан фронталь және горизонталь проекциялар жазықтықтарынан қашықтықтары тең болатын  $M$  нүктесін табыңыздар.  $AB$  түзуі арқылы өтетін горизонталь проекциялаушы  $\alpha$  жазықтығының және фронталь проекциялаушы  $\beta$  жазықтығының іздерін көрсетіңіздер.

5-кестеде  $A, B, C, D, E, F$  нүктелерінің координаталары берілген (10 вариант). Осы нүктелерді пайдаланып 7, 8, ..., 24 есептерді шығарыңыздар.

7.  $ABCD, ABCE, ABCF, ADEF, BDEF, CDEF$  пирамидалардың горизонталь және фронталь проекцияларын салыңыздар. Эпюрде пирамиданың көрінетін қырларын жуан тұтас, ал көрінбейтін қырларын жіңішке үзілме сызықтармен жүргізу қажет.

8.  $ABC, BCD, CDE, DEF, ABE$  және  $BEF$  үшбұрыштарын анықтайтын жазықтықтардың іздерін салыңыздар.

9.  $AB$  түзуінің  $DEF$  үшбұрышы анықтайтын жазықтықпен қиылысу нүктесін салып,  $AB$  түзуінің көрінетін бөліктерін анықтаңыздар. Қиылысу нүктесін  $C$  нүктесімен қосатын түзудің іздерін салыңыздар.

10.  $BC$  түзуі арқылы фронталь проекциялаушы жазықтық жүргізіп, оның  $DEF$  үшбұрышымен қиылысу сызығын салыңыздар.  $DEF$  үшбұрышының горизонталь проекцияда көрінбейтін бөлігін анықтаңыздар.

11.  $E$  нүктесі арқылы  $ABC$  және  $ABD$  үшбұрыштарына параллель түзу жүргізіңіздер. Осы түзудің  $CDF$  үшбұрышы анықтайтын жазықтықпен қиылысу нүктесін салыңыздар.

12.  $ABC$  және  $DEF$  үшбұрыштарының қиылысу сызығын салып, олардың көрінетіндіктерін анықтаңыздар.

13.  $D$  нүктесі арқылы  $ABC$  үшбұрышына параллель жазықтық жүргізіңіздер. Осы жазықтықтың  $BEF$  үшбұрышымен қиылысу сызығын салыңыздар.

14.  $E$  нүктесі арқылы  $AB$  және  $CD$  түзулерінің әр қайсысына параллель жазықтық жүргізіңіздер. Осы жа-

зықтықпен  $CF$  түзуінің қиылысу нүктесін салыңыздар.

15.  $ABCD$  пирамидасы мен  $AEF$  үшбұрышы анықтайтын жазықтықтың қиылысу сызығын салыңыздар.

16.  $CDEF$  пирамидасы мен  $AB$  түзуі арқылы өтетін горизонталь проекциялаушы жазықтықтың қиылысу сызығын салыңыздар.

17.  $D$  нүктесі арқылы горизонталь жазықтық жүргізіп,  $ABCE$  пирамидасының осы жазықтықпен қиылысу сызығын салыңыздар.

18.  $BC$  кесіндісінің ортасы және  $EF$  түзуі арқылы өтетін жазықтықпен  $ABCD$  пирамидасының қиылысу сызығын салыңыздар.

19.  $D$  нүктесімен фронталь бәсекелес болатын  $ABC$  үшбұрышы жазықтығында жататын  $K$  нүктесінің,  $E$  нүктесімен горизонталь бәсекелес болатын  $ABF$  үшбұрышы жазықтығында жататын  $L$  нүктесінің эпюрлерін салыңыздар. Осы  $KL$  түзуі бойынан  $\pi_1$  жазықтығынан қашықтығы 20-ға тең  $M$  нүктесін анықтаңыздар.

20.  $ABC$  жазықтығының  $A$  нүктесі арқылы өтетін фронталь,  $DEF$  жазықтығының  $D$  нүктесі арқылы өтетін горизонталь салыңыздар. Тұрғызылған фронтальға ұзындығы 30-ға тең  $AK$  кесіндісін, ал горизонтальға ұзындығы 25-ке тең  $DL$  кесіндісін салыңыздар.

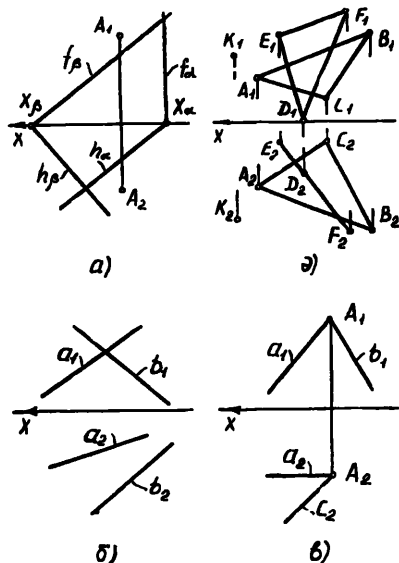
21.  $ABC$  үшбұрышы жазықтығында фронталь проекциясынан  $Ox$  осіне дейінгі қашықтығы оның горизонталь проекциясынан  $Ox$  осіне дейінгі қашықтығына тең болатын нүктелер жиынын,  $DEF$  үшбұрышы жазықтығында жататын және  $\pi_1$  мен  $\pi_2$  жазықтықтарынан бірдей қашықтықта орналасқан нүктелер жиынын тұрғызыңыздар.

22.  $ABD$  және  $CEF$  жазықтықтарына ортақ  $\pi_1$  жазықтығының нүктесін және  $\pi_2$  жазықтығының нүктесін салыңыздар.

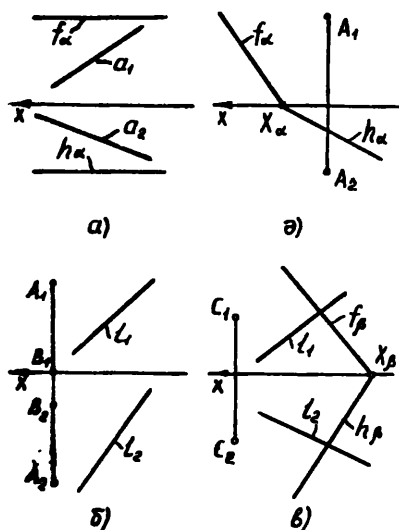
23.  $B$  нүктесі арқылы өтетін  $DEF$  жазықтығына параллель  $\alpha$  жазықтығын және  $D$  нүктесі арқылы өтетін  $ABC$  жазықтығына параллель  $\beta$  жазықтығын салып, осы  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарының қиылысу сызығын тұрғызыңыздар.

24.  $A$  нүктесі арқылы өтетін  $BC$  және  $DE$  түзулерімен қиылысатын түзудің фронталь және горизонталь проекцияларын салыңыздар.

25. Берілген үш жазықтықтың қиылысу нүктесін анықтаныңдар (149, а-сурет). Олардың екеуі ( $\alpha$  мен  $\beta$ ) өздерінің іздерімен берілген, ал үшіншісі  $\gamma(A, X_1, X_2)$  үш нүкте  $A, X_1$  және  $X_2$  арқылы анықталған.



149-сурет.



150-сурет.

26. Берілген  $K$  нүктесі арқылы  $ABC$  және  $DEF$  үшбұрыштарының жазықтықтарына параллель  $a$  түзуін жүргізіңіздер (149, ә-сурет). Осы  $a$  түзуінің  $A$  нүктесінен қашықтықтары 20 мм болатын нүктелерін анықтаңыздар.

27. Берілген  $a$  және  $b$  түзулерімен қиылысатын үш түзу жүргізу керек (149, б-сурет). Олардың біріншісі  $\pi_1$  жазықтығынан 15 мм қашықтықта, ал екіншісі  $\pi_2$  жазықтығынан 20 мм қашықтықта болса, онда үшіншісі абсциссалар осіне параллель орналасқан.

28. Горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеу бұрыштары тең  $A$  нүктесінде қиылысатын үш түзудің біреуінің екі проекциясы  $a$  ( $a_1$ ,  $a_2$ ), екіншісінің  $b$  ( $b_1$ ) фронталь проекциясы және үшіншісінің горизонталь проекциясы берілген (149, в-сурет). Олардың біріншісін фронталь проекциялар жазықтығына параллель деп қарастырып, екіншісінің горизонталь проекциясын және үшіншісінің фронталь проекциясын салыңыздар.

29. Профиль проекциялаушы  $\alpha$  жазықтығы мен  $a$  түзуі берілген (150, а-сурет). Қиылысу нүктесін салып,  $a$  түзуінің көрінбейтін бөліктерін анықтаңыздар.

30. Іздерімен берілген  $\alpha$  жазықтығының осьтік жазықтық  $\beta(A; x)$  мен қиылысу сызығын салыңыздар (150, ә-сурет).

31. Берілген  $AB$  және  $l$  түзулері арқылы өтетін өзара параллель жазықтықтар жүргізіңіздер (150, б-сурет).  $(AB) \subset \alpha \parallel l$ ;  $l \subset \beta \parallel (AB)$  болатын  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарының іздерін салыңыздар.

32. Берілген  $C$  нүктесі арқылы өтетін  $\beta$  жазықтығына параллель болатын және  $l$  түзуімен қиылысатын түзудің проекцияларын салыңыздар (150, в-сурет).

5-кесте

| Нүктелер | Координаталар | Варианттар |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|----------|---------------|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|          |               | 1          | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
| A        | x             | 18         | 120 | 120 | 20  | 122 | 117 | 117 | 120 | 15  | 18  |
|          | y             | 40         | 10  | 90  | 10  | 40  | 90  | 9   | 10  | 10  | 40  |
|          | z             | 10         | 40  | 10  | 40  | 75  | 9   | 90  | 90  | 85  | 75  |
| B        | x             | 85         | 50  | 50  | 85  | 50  | 52  | 52  | 48  | 80  | 83  |
|          | y             | 110        | 80  | 25  | 80  | 110 | 25  | 79  | 82  | 80  | 117 |
|          | z             | 80         | 110 | 80  | 110 | 10  | 79  | 25  | 20  | 20  | 6   |
| C        | x             | 135        | 0   | 0   | 135 | 0   | 0   | 0   | 0   | 130 | 135 |
|          | y             | 45         | 50  | 85  | 50  | 50  | 83  | 48  | 52  | 50  | 47  |
|          | z             | 50         | 45  | 50  | 50  | 40  | 48  | 83  | 82  | 80  | 38  |
| D        | x             | 70         | 70  | 70  | 70  | 140 | 68  | 68  | 65  | 70  | 67  |
|          | y             | 20         | 20  | 110 | 85  | 20  | 110 | 85  | 80  | 80  | 20  |
|          | z             | 85         | 85  | 85  | 20  | 85  | 85  | 110 | 110 | 108 | 0   |
| E        | x             | 0          | 135 | 135 | 0   | 0   | 135 | 135 | 130 | 0   | 0   |
|          | y             | 110        | 110 | 20  | 35  | 110 | 19  | 36  | 38  | 35  | 111 |
|          | z             | 40         | 40  | 35  | 110 | 35  | 36  | 19  | 20  | 20  | 48  |
| F        | x             | 40         | 15  | 15  | 120 | 120 | 14  | 14  | 15  | 120 | 121 |
|          | y             | 80         | 80  | 50  | 0   | 80  | 52  | 0   | 0   | 0   | 78  |
|          | z             | 0          | 0   | 0   | 80  | 0   | 0   | 52  | 52  | 50  | 86  |

## 5-тарау. МЕТРИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕР. ӨЗАРА ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАР

### 5.1. МЕТРИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕР ТУРАЛЫ ЖАЛПЫ МӘЛІМЕТТЕР

Геометрияның есептерін *позициялық* және *метрикалық* деп екі топқа бөледі. Позициялық есептерде берілген геометриялық фигуралардың өзара орналасуы анықталады. Егер екі фигура берілсе, онда үш жағдай болуы мүмкін. Бірінші жағдайда берілген фигураның біреуі екіншісінің құрамына снесі, яғни оның бір бөлігі болады. Мысалы, түзу мен жазықтықты қарастырсақ, түзу осы берілген жазықтықта жатуы мүмкін. Бұл жағдайда түзуді жазықтыққа меншікті дейміз. Екі фигураның бірі екіншісіне меншікті болса, онда оның барлық нүктелері де екінші фигурада жатады. Екінші жағдайда берілген фигуралардың ортақ нүктелері болмайды. Мысалы, айқас түзулердің ортақ нүктелері жоқ, ал өзара параллель жазықтық пен түзудің қарапайым ортақ нүктесі болмайды. Үшінші жағдайда берілген фигураның біреуі екіншісіне меншікті емес, бірақ олардың ортақ нүктелері болады. Мысалы, әр түрлі екі жазықтықтың ортақ түзуі болуы мүмкін, ал жазықтықта жатпайтын түзудің сол жазықтықпен ортақ нүктесі болуы мүмкін. Олай болса, позициялық есептердің үш түрі болады: 1) позициялық есепте өзара меншіктілік анықталады, мысалы, жазықтықта жатқан нүктенің проекциялары салынады; 2) позициялық есепте берілген фигураға параллель фигура салынады, мысалы, берілген жазықтыққа параллель жазықтық салу есебін айтуға болады; 3) позициялық есепте берілген фигуралардың ортақ элементтері тұрғызылады, мысалы, түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін табу есебі. Басқаша айтқанда позициялық есептер өзара меншіктілікке, өзара параллельдікке және қиылысуға беріледі.

Метрикалық есептерде берілген фигуралардың ара қашықтықтары, олардың арасындағы бұрыштар және беттерінің аудандары анықталады. Метрикалық есептер өлшеумен байланысты және оларда ара қашықтықтардың, бұрыштардың, аудандардың натурал шамалары анықталады. Барлық метрикалық есептер негізінде екі қарапайым есеп жатыр: 1) кесіндінің натурал ұзындығын анықтау; 2) қиылысатын екі түзудің арасындағы бұрыштың натурал шамасын салу есептері. Шынында да, екі нүктенің ара қашықтығын анықтау үшін осы нүк-

телерді қосатын түзу кесіндісінің ұзындығын табу жеткілікті, ал нүктеден жазықтыққа дейінгі аралықты анықтау үшін, сол нүктеден берілген жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың табанын салғаннан кейін, тағы да екі нүктені қосатын түзу кесіндісінің ұзындығын табу жеткілікті болады. Параллель жазықтықтардың ара қашықтығын анықтау үшін олардың біреуіне меншікті нүкте алып осы нүктеден екінші жазықтыққа дейінгі қашықтық анықталады, ал соңғы есеп екі нүктені қосатын кесіндінің натурал ұзындығын салу арқылы шешіледі. Үшбұрыштың ауданын анықтау үшін оның натурал шамасын салып алу керек. Үшбұрыштың натурал шамасын салу үшін оның қабырғаларының натурал ұзындықтарын анықтайды. Айқас түзулер арасындағы бұрышты анықтау үшін олардың біреуі бойынан қандай болса да нүкте алып, осы нүкте арқылы екіншісіне параллель түзу жүргізеді. Сонда қиылысатын екі түзудің арасындағы бұрыш айқас түзулер арасындағы бұрышқа тең болады. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрышты анықтау есебін де қиылысатын екі түзу аралығындағы бұрышты салу есебіне келтіруге болады: бұл арада қиылысатын екі түзудің біреуі берілген түзу болса, онда екіншісі осы түзудің берілген жазықтықтағы тікбұрышты проекциясы. Ал қиылысатын екі түзудің арасындағы бұрыштың натурал шамасын салу есебі де кесіндінің ұзындықтарын анықтау есебі арқылы шешіледі.

Метрикалық есептерді шешуде өзара перпендикуляр түзулерді, өзара перпендикуляр түзу мен жазықтықты және өзара перпендикуляр жазықтықтарды салу есептері ерекше орын алады. Берілген түзуге  $90^\circ$ -қа тең бұрыш жасап, онымен қиылысатын түзуді салу перпендикулярлыққа берілген есептердің негізі болып табылады. Өйткені өзара перпендикуляр жазықтық пен түзу немесе жазықтықтар салу өзара перпендикуляр түзулерді қарастырудан басталады. Көптеген метрикалық есептерді шешу үшін позициялық есептердің шешімдерін таба білу керек. Іс жүзінде инженерлік жобаларда геометрияның аралас есептерімен кездесеміз. Осындай күрделі есептерді аталған қарапайым позициялық және метрикалық есептерге ажырата білу керек.

## 5.2. КЕСІНДІНІҢ ҰЗЫНДЫҒЫН АНЫҚТАУ ЖӘНЕ ОНЫ ЕСЕПТЕР ШЕШУДЕ ПАЙДАЛАҢУ

$AB$  кесіндісінің ұзындығын формуланы пайдаланып есептеуге болады. Координаталар жазықтықтары оларға сәйкес проекциялар жазықтықтарымен беттескен деп қарастыралық. Сонда  $AB$  кесіндісінің фронталь және горизонталь проекцияларының ұзындықтарын сәйкес формулалармен анықтауға болады:

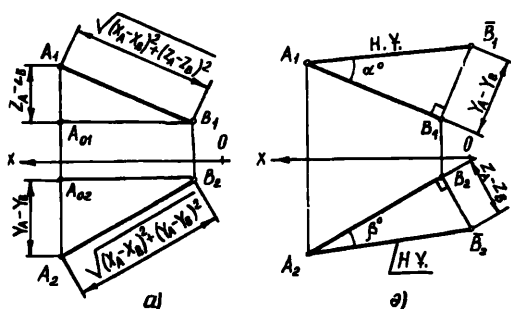
$$|A_1B_1| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (z_A - z_B)^2};$$

$$|A_2B_2| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

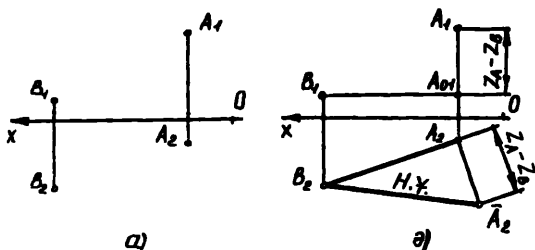
Эпюрде  $AB$  кесіндісі берілсін (151, а-сурет). Оның фронталь проекциясы  $[A_1B_1]$  тікбұрышты үшбұрыш  $A_1A_{01}B_1$ -дің гипотенузасы, ал горизонталь проекциясы  $[A_2B_2]$  тікбұрышты үшбұрыш  $A_2A_{02}B_2$ -нің гипотенузасы болады. Сондықтан жоғарыдағы теңдіктердің орындалатынын көреміз. Формуланы пайдаланып,  $A_1B_1B_1$  немесе  $A_2B_2B_2$  тікбұрышты үшбұрыштарын тұрғызамыз (151, ә-сурет). Осы тікбұрышты үшбұрыштардың гипотенузалары өзара тең екеніне және олар  $AB$  кесіндісінің натурал ұзындығын анықтайтынына көз жеткізу қиын емес. Өйткені

$$\begin{aligned} |A_1\bar{B}_1| &= \sqrt{|A_1B_1|^2 + |B_1\bar{B}_1|^2} = \\ &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (z_A - z_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = |AB|, \\ |A_2\bar{B}_2| &= \sqrt{|A_2B_2|^2 + |B_2\bar{B}_2|^2} = \\ &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = |AB|. \end{aligned}$$

Сызбада кесіндінің берілген проекцияларын пайдаланып, оның натурал ұзындығын графиктік тәсілмен анықтау үшін мынадай ережені қолдануға болады: кесіндінің на-



151-сурет.



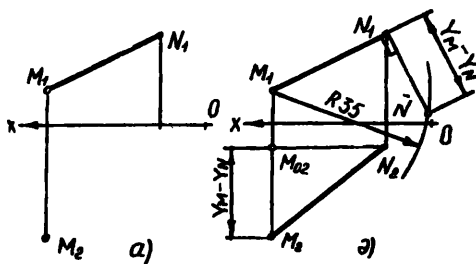
152-сурет.

турал ұзындығы бір катеті оның проекциялар жазықтығындағы тікбұрышты проекциясына, ал екінші катеті — ұштарының проекциялар жазықтығынан қашықтықтарының айырымына тең тікбұрышты үшбұрыш гипотенузасының ұзындығына тең болады.

5.2.1 - есеп.  $A$  және  $B$  нүктелерінің эпюрі берілген (152, а-сурет). Осы екі нүктенің ара қашықтығын анықтау керек.

**Шешуі.**  $A_2B_2$  кесіндісін жүргізіп, оған  $A_2$  нүктесі арқылы перпендикуляр тұрғызамыз.  $B_1$  нүктесі арқылы абсциссалар осіне параллель түзу жүргізсек, ол түзу  $A_1A_2$  түзуін  $A_{01}$  нүктесінде қияды. Алдыңғы перпендикулярға оның  $A_2$  нүктесінен бастап  $A_1A_{01}$  кесіндісінің ұзындығына тең кесінді салсақ,  $\bar{A}_2$  нүктесін аламыз. Сонда  $B_2A_2\bar{A}_2$  тікбұрышты үшбұрыш және оның гипотенузасы берілген  $A$  және  $B$  нүктелерінің ара қашықтығын анықтайды. Өйткені ол үшбұрыштың бір катеті  $AB$  кесіндісінің проекциясына, ал екінші катеті осы кесінді ұштарының проекциялар жазықтығынан қашықтықтарының айырымына тең. Олай болса,  $|\bar{A}_2B_2| = |AB|$  болады.

5.2.2 - есеп.  $MN$  кесіндісінің фронталь проекциясы  $M_1N_1$  және оның бір ұшы  $M$  нүктесінің горизонталь проекциясы ( $M_2$  нүктесі) берілген (153, а-сурет). Ұзындығы



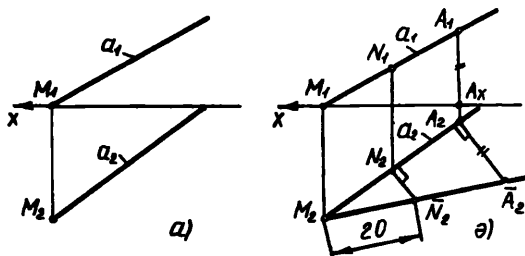
153-сурет.

35 мм болатын  $MN$  кесіндісінің горизонталь проекциясын ( $M_2N_2$  кесіндісін) салу керек.

**Шешуі.**  $N_2$  нүктесі  $N_1$  нүктесімен вертикаль байланыс сызығы бойында орналасады. Осы абсциссалар осіне перпендикуляр  $N_1N_2$  түзуі бойынан  $N_2$  нүктесін анықтау үшін  $M_2$  және  $N_2$  нүктелерінің  $Ox$  осінен қашықтықтарының айырымын, яғни  $M$  және  $N$  нүктелері ординаталарының айырымын ( $y_M - y_N$ ) білу керек. Бір катеті  $MN$  кесіндісінің фронталь проекциясы болатын, ал гипотенузасы 35 мм-ге тең тікбұрышты  $M_1N_1\bar{N}$  үшбұрышын тұрғызамыз (153, ә-сурет). Осы  $M_1N_1\bar{N}$  тікбұрышты үшбұрышының екінші катеті бізге керек кесіндіні анықтайды:  $|N_1\bar{N}| = |y_M - y_N|$ . Байланыс сызығы  $M_1M_2$  түзуіне  $M_2$  нүктесінен бастап  $N_1\bar{N}$  кесіндісіне тең  $M_2M_{02}$  кесіндісін саламыз. Табылған  $M_{02}$  нүктесі арқылы байланыс сызықтарына перпендикуляр түзуді  $N_1$  нүктесі арқылы жүргізілген вертикаль түзумен  $N_2$  нүктесінде қиылысқанша сызамыз. Табылған  $N_2$  нүктесін  $M_2$  нүктесімен қосып,  $MN$  кесіндісінің горизонталь проекциясы  $M_2N_2$  кесіндісін аламыз. Есептің екі шешуі болатынын байқау қиын емес. Біз  $M_2M_{02}$  кесіндісін  $M_1M_2$  түзуіне  $M_2$  нүктесінен бастап жоғары қарай салдық. Есептің екінші шешуін алу үшін  $M_2M_{02}$  кесіндісін  $M_2$  нүктесінен бастап төмен қарай салу керек.

**5.2.3 - е с е п.** Эпюрде  $a$  түзуі және  $M \in a$  нүктесі берілген (154, а-сурет). Осы  $a$  түзуіне бірінші октантта жататын ұзындығы 20 мм  $MN$  кесіндісін салу керек.

**Шешуі.** Берілген  $a$  түзуі бойынан бірінші октантта жататын қалауымызша  $A$  нүктесін аламыз. Осы  $MA$  кесіндісінің натурал ұзындығын  $M_2A_2\bar{A}_2$  тікбұрышты үшбұрыш тұрғызу әдісімен саламыз. Іздеп отырған  $MN$  кесіндісінің бір ұшы белгілі — ол  $M$  нүктесі, ал екінші ұшы —  $N$  берілген  $a$  түзуі бойында  $M$  нүктесінен 20 мм қашықтықта орналасуы керек. Соңғы шартты қа-

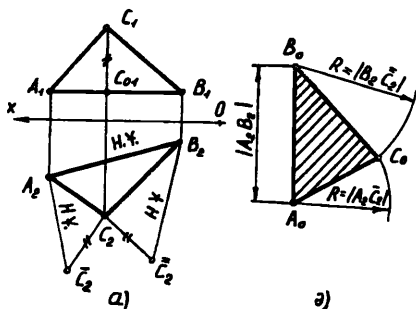


154-сурет.

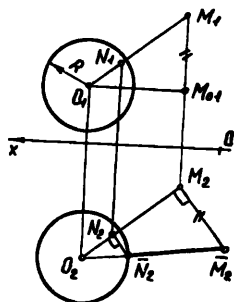
нағаттандыратын екі нүкте бар. Бұл екі нүктенің біреуі төртінші октантта, ал екіншісі бірінші октантта жатыр.  $M_2\bar{A}_2$  түзуіне ұзындығы 20 мм  $M_2\bar{N}_2$  кесіндісін саламыз.  $\bar{N}_2$  нүктесінен  $a_2$  түзуіне түсірілген перпендикулярдың табаны —  $N_2$  нүктесі іздеп отырған  $N$  нүктесінің горизонталь проекциясын анықтайды.  $N$  нүктесінің фронталь проекциясы  $N_1$  оның горизонталь проекциясы арқылы жүргізілген байланыс сызығының көмегімен  $a_1$  түзуі бойынан табылады (154, ә-сурет). Сонда горизонталь проекциясы  $[M_2N_2]$ , ал фронталь проекциясы  $[M_1N_1]$  болатын  $MN$  кесіндісі берілген  $a$  түзуі бойында жатыр және оның ұзындығы 20 мм. Есептің жалғыз шешімі бар. Егер  $a$  түзуі бірінші октант арқылы өтпесе, яғни оның бірінші октантта орналасқан кесіндісі болмаса, онда есептің шешімі жоқ болады.

5.2.4 - е с е п. Эпюрі берілген  $ABC$  үшбұрышының натурал шамасын салу керек (155, а-сурет).

Ш е ш у і. Үшбұрышты салу үшін оның үш параметрі белгілі болу керек. Осындай үш параметр ретінде үшбұрыш қабырғаларының ұзындықтарын алуға болады. Сонда  $AB$ ,  $AC$  және  $BC$  кесінділерінің натурал ұзындықтарын анықтап алуымыз керек.  $AB$  кесіндісі горизонталь проекциялар жазықтығына параллель орналасқан, сондықтан оның горизонталь проекциясы бұрмаланбай кескінделген:  $|AB| = |A_2B_2|$ .  $AC$  және  $BC$  қабырғаларының ұзындықтарын тікбұрышты үшбұрыш салу әдісімен анықтаймыз:  $|AC| = |A_2\bar{C}_2|$ ;  $|BC| = |B_2\bar{C}_2|$ . Қалауымызша орналасқан  $A_0B_0$  кесіндісін  $|A_0B_0| = |A_2B_2|$  болатындай етіп саламыз (155, ә-сурет). Центрі  $A_0$ , радиусы  $|A_2\bar{C}_2|$  және центрі  $B_0$ , радиусы  $|B_2\bar{C}_2|$  болатын екі шеңбер жүргізсек, онда олар  $C_0$  нүктесінде қиылысады. Сон-



155-сурет.



156-сурет.

да  $A_0B_0C_0$  үшбұрышы  $ABC$  үшбұрышының натурал шамасына тең.

**5.2.5 - е с е п.** Берілген  $M$  нүктесінен центрі  $O$  нүктесі және радиусы  $R$  болатын сфераға дейінгі қашықтықты анықтау керек (156-сурет).

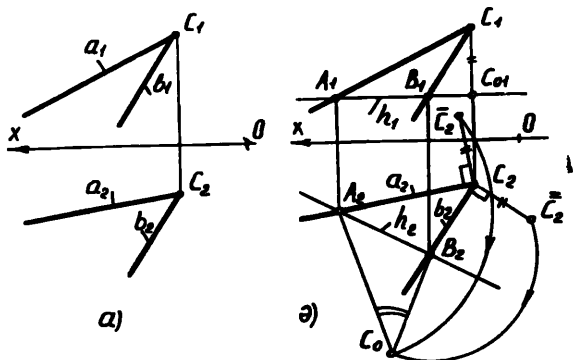
**Ш е ш у і.**  $OM$  кесіндісінің натурал ұзындығын оның горизонталь проекциясы жанына тікбұрышты үшбұрыш  $O_2M_2\bar{M}_2$  салу арқылы анықтаймыз:  $|OM| = |O_2\bar{M}_2|$ . Салынған үшбұрыштың гипотенузасы сфераның горизонталь проекциясын шектейтін шеңбермен  $\bar{N}_2$  нүктесінде қиылысады. Сонда  $\bar{M}_2\bar{N}_2$  кесіндісінің ұзындығы  $M$  нүктесінен берілген сфераға дейінгі қашықтықты анықтайды. Ал  $\bar{N}_2$  нүктесінен  $O_2M_2$  кесіндісіне түсірілген перпендикулярдың табаны  $N_2$  осы  $OM$  кесіндісінің сфера бетімен қиылысу нүктесінің горизонталь проекциясы болатынын айта кетелік.  $N$  нүктесінің фронталь проекциясы  $N_1$  нүктесі  $O_1M_1$  түзуі бойынан  $N_2$  нүктесі арқылы жүргізілген вертикаль байланыс сызығының көмегімен табылады.

### 5.3. ҚИЙЛЫСАТЫН ЕКІ ТҮЗУ АРАСЫНДАҒЫ БҰРЫШТЫ АНЫҚТАУ ЖӘНЕ ОНЫ ЕСЕПТЕР ШЕШУДЕ ПАЙДАЛАНУ

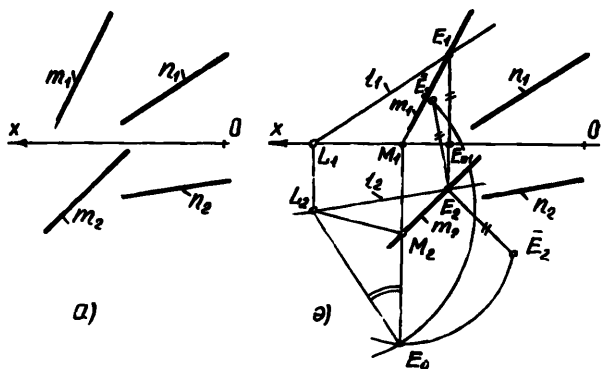
Қиылысатын екі түзу төрт бұрыш құрайды және олардың біреуі белгілі болса, онда қалғандарын анықтау оңай. Біз қиылысатын екі түзудің сызбада кескінделген бөліктері арасындағы бұрышты қарастырамыз.

**5.3.1 - е с е п.**  $C$  нүктесінде қиылысатын  $a$  және  $b$  түзулері берілген (157, а-сурет). Осы екі түзудің арасындағы бұрышты анықтау керек.

**Ш е ш у і.** Берілген түзулерді  $A$  және  $B$  нүктелерінде қиятын түзу жүргіземіз. 157, ә-суретте горизонталь түзу  $h$  жүргізілген. Сонда пайда болған  $ABC$  үшбұрышының



157-сурет.



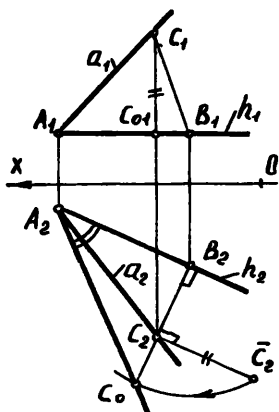
158-сурет.

натурал шамасын саламыз. Горизонтальдың  $AB$  кесіндісі  $\pi_2$  жазықтығына өзінің натурал ұзындығын сақтап проекцияланады. Сондықтан  $AC$  және  $BC$  кесінділерінің ұзындықтарын тікбұрышты үшбұрыштар  $A_2C_2\bar{C}_2$  және  $B_2C_2\bar{C}_2$  салып, олардың гипотенузалары ретінде анықтаймыз:  $|C_2\bar{C}_2| = |C_2\bar{C}_2| = |C_1C_{01}|$ ;  $|AC| = |A_2\bar{C}_2|$  және  $|BC| = |B_2\bar{C}_2|$ . Центрі  $A_2$  нүктесі, радиусы  $|A_2\bar{C}_2|$  және центрі  $B_2$  нүктесі, радиусы  $|B_2\bar{C}_2|$  болатын екі шеңбер жүргізсек, олар  $C_0$  нүктесінде қиылысады. Сонда  $A_2B_2C_0$  үшбұрышы  $ABC$  үшбұрышының натурал шамасына тең.

$\angle A_2C_0B_2 = \hat{a}, \hat{b}$ . Қиылысатын екі түзу құрайтын сыбайлас бұрыштардың біреуі сүйір бұрыш болса, екіншісі доғал бұрыш және сыбайлас бұрыштардың қосындысы жазық бұрыш болады. Егер табылған бұрыш доғал бұрыш болып, ал бізге керегі сүйір бұрыш болса, онда  $180^\circ$ -тан табылған бұрышты азайтамыз.

5.3.2 - есеп. Эпюрде айқас түзулер  $m$  және  $n$  берілген (158, а-сурет). Осы түзулер арасындағы бұрыштың шамасын анықтау керек.

Шешуі. Берілген түзулердің біреуінде жататын нүкте, мысалы  $E \in m$  алып, сол нүкте арқылы олардың екіншісіне параллель түзу жүргіземіз:  $E \in l \parallel n$ . Сонда айқас түзулер  $m$  және  $n$  арасындағы бұрыштың шамасы қиылысатын  $m$  және  $l$  түзулері арасындағы бұрыштың шамасымен өлшенеді. Ал  $E$  нүктесінде қиылысатын екі түзу ( $m$  мен  $l$ ) арасындағы бұрышты алдыңғы мысалдағыдай анықтаймыз. Көмекші сызықтар санын азайту мақсатында  $m$  және  $l$  түзулерінің горизонталь іздерін



159-сурет.

$M$  және  $L$  нүктелерін қарастырамыз.  $E_2$  нүктесі арқылы екі түзу жүргіземіз. Олардың біріншісі  $m_2$  түзуіне, ал екіншісі  $l_2$  түзуіне перпендикуляр. Осы түзулер бойына ұзындықтары  $E_1E_{01}$  кесіндісінің ұзындығына тең кесінділер салып,  $E_2E_2$  және  $E_2\bar{E}_2$  кесінділерін аламыз. Центрі  $M_2$  нүктесі, радиусы  $M_2E_2$  кесіндісіне тең, центрі  $L_2$  нүктесі, радиусы  $L_2\bar{E}_2$  кесіндісіне тең болатын шеңберлер  $E_0$  нүктесінде қиылысады. Сонда  $E_0$  нүктесін  $M_2$  және  $L_2$  нүктелерімен қосатын түзулер арасындағы бұрыш берілген айқас түзулер  $m$  мен  $n$  арасындағы

бұрыштың мөлшерін анықтайды.

**5.3.3 - есеп.** Жалпы жағдайда орналасқан  $a$  түзуімен  $A$  нүктесінде қиылысатын горизонтальдың ( $h$ ) арасындағы бұрыштың мөлшерін табу керек (159-сурет).

**Шешуі.** Горизонтальдың бойынан  $B$  нүктесін алып осы нүкте арқылы оған перпендикуляр түзу жүргіземіз. Егер бұл түзу  $a$  және  $h$  түзулері анықтайтын жазықтықта жатса, онда  $a$  түзуімен де қиылысады. Оның  $a$  түзуімен қиылысу нүктесі  $C$  болсын. Сонда пайда болған  $ABC$  үшбұрышы тікбұрышты үшбұрыш. Тікбұрышты үшбұрыш екі параметрімен, мысалы катеттерімен анықталады.  $AB$  катеті горизонталь орналасқандықтан  $|AB| = |A_2B_2|$  болады. Екінші катеті  $BC$  кесіндісінің ұзындығын тікбұрышты үшбұрыш әдісімен саламыз.  $|BC| = |B_2\bar{C}_2|$ .  $B_2$  центрінен  $\bar{C}_2$  нүктесін бастыра  $B_2\bar{C}_2$  түзуімен  $C_0$  нүктесінде қиылысқанша шеңбер доғасын жүргіземіз.  $C_0$  нүктесін  $A_2$  нүктесімен қосып  $ABC$  үшбұрышының натурал шамасын аламыз:  $\triangle ABC = \triangle A_2B_2C_0$ . Іздеп отыр-

ған бұрышымыз  $\hat{a}, \hat{h} = \angle B_2A_2C_0$  болады.

**5.3.4 - есеп.**  $AB$  түзуінің фронталь және горизонталь проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын анықтау керек (151, ә-сурет).

**Шешуі.** Түзудің жазықтыққа көлбеулік бұрышы немесе түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш деп осы түзу мен оның сол жазықтықтағы тікбұрышты проекциясы арасындағы бұрышты айтады. Біз  $MN$  кесіндісін және оның  $\pi'$  жазықтығындағы тікбұрышты проекциясы

$M'N'$ -ты қарастыралық. Бұл екі түзу қиылысады, сондықтан бір жазықтықты анықтайды:  $\alpha((MN) \cap (M'N'))$ . Осы  $\alpha$  жазықтығында  $M$  нүктесі арқылы  $M'N'$  түзуіне параллель түзу жүргізсек, онда ол түзу  $NN'$  түзуімен  $N_0$  нүктесінде қиылысар еді. Сонда тікбұрышты  $\triangle MN_0N$  пайда болады. Бұл үшбұрыштың бір катеті берілген кесіндінің проекциясына, ал екінші катеті проекциялар жазықтығынан кесінді ұштарының қашықтықтарының айырымына және гипотенузасы кесіндінің өзіне тең болады. Қабырғалары параллель бұрыштар тең болатындықтан аталған үшбұрыштың гипотенузасы мен проекцияға тең катеті арасындағы бұрыш  $MN$  түзуінің  $\pi'$  жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтайды.

Осы айтылғандарға сүйеніп  $AB$  түзуінің фронталь проекциялар жазықтығына көлбеу бұрышын бір катеті  $A_1B_1$  кесіндісі, екінші катеті  $A$  және  $B$  нүктелерінің фронталь проекциялар жазықтығынан қашықтықтарының айырымына тең тікбұрышты үшбұрыш  $A_1B_1\bar{B}_1$ -ден оның проекцияға тең катетіне іргелес бұрышы ретінде анық-

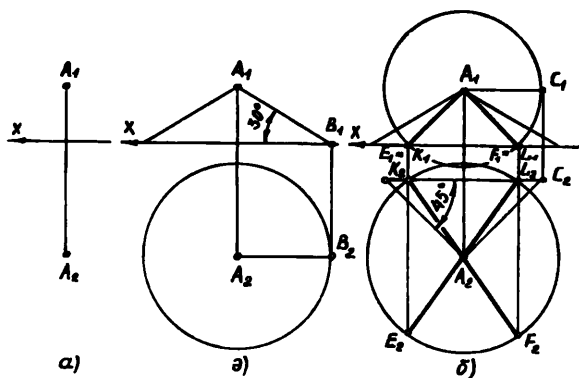
таймыз:  $(AB), \widehat{\pi}_1 = \angle B_1A_1\bar{B}_1 = \alpha^\circ$ .

Енді  $AB$  кесіндісінің горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы бір катеті  $A_2B_2$  кесіндісі, екінші катеті  $A$  және  $B$  нүктелерінің горизонталь проекциялар жазықтығынан қашықтықтарының айырымына және гипотенузасы берілген кесіндінің өзіне тең болатын тікбұрышты  $A_2B_2\bar{B}_2$  үшбұрышынан оның проекцияға тең

катетіне іргелес бұрышы ретінде анықталады:  $(AB), \widehat{\pi}_2 = \angle B_2A_2\bar{B}_2 = \beta^\circ$ .

5.3.5 - е с е п. Берілген  $A$  нүктесі арқылы өтетін горизонталь проекциялар жазықтығына  $30^\circ$ -қа тең бұрыш жасап, ал фронталь проекциялар жазықтығына  $45^\circ$ -қа тең бұрыш жасап көлбейтін түзудің проекцияларын салу керек (160, а-сурет).

Шешуі.  $A$  нүктесі арқылы өтіп горизонталь проекциялар жазықтығына  $30^\circ$ -қа тең бұрышпен көлбейтін түзулердің жпны төбесі  $A$  нүктесі болатын осі горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр айналу конусын жасайды. Табаны  $\pi_2$  жазықтығында жатқан, жасаушысының ұзындығы  $A_1B_1$  кесіндісінің ұзындығына тең, төбесі берілген  $A$  нүктесі болатын конус саламыз (160, ә-сурет).  $A$  нүктесі арқылы өтіп фронталь проекциялар жазықтығына  $45^\circ$  бұрышпен көлбейтін түзулер жпны да айналу конусын жасайды. Соңғы конустың



160-сурет.

осі фронталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр болады. Есепті шешуді жеңілдету үшін жасаушысы  $[AC]$ -ның ұзындығы бірінші конустың жасаушысы  $[AB]$ -ның ұзындығына тең, табаны фронталь орналасқан және жасаушылары табан жазықтығына  $45^\circ$ -қа тең бұрышпен көлбейтін конус саламыз (160, б-сурет). Сонда төбелері ортақ осьтері өзара перпендикуляр екі конус аламыз. Олардың 4 ортақ жасаушылары бар:  $(AE)$ ,  $(AF)$ ,  $(AK)$  және  $(AL)$ .  $AE$  және  $AK$  түзулерінің фронталь проекциялары бірігіп кескінделеді. Сол сияқты  $(A_1F_1) = (A_1L_1)$  болады. Сонымен бұл есептің жалпы жағдайда төрт шешуі болатынын көрдік. Түзудің горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын  $\alpha^\circ$  деп, ал фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын  $\beta^\circ$  деп белгілелік. Егер  $\alpha^\circ + \beta^\circ > 90^\circ$  болса, есептің шешімі жоқ болады. Бұл жағдайда жоғарыда тұрғызылған конустардың ортақ жасаушысы болмайды. Бұл айтылғанға конустардың профиль проекцияларын тұрғызып көз жеткізуге болады. Оның себебі жалпы жағдайда орналасқан түзудің фронталь және горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрыштарының қосындысы тікбұрыштан кем болуы тиіс. Сонымен  $\alpha^\circ + \beta^\circ < 90^\circ$  болса, есептің 4 шешімі бар болады. Ал егер  $\beta^\circ + \alpha^\circ = 90^\circ$  болса, жоғарыда қарастырылған екі конус екі жасаушылары бойымен жанасар еді. Бұл жағдайда есептің тек екі шешімі бар болады және есептің шешімі болатын түзулер профиль проекциялар жазықтығына параллель болады. Шынында да ,тек профиль түзулер үшін оның фронталь және горизонталь проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарының қосындысы тік бұрыш болады.

#### 5.4. ӨЗАРА ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТҮЗУЛЕРДІ САЛУ

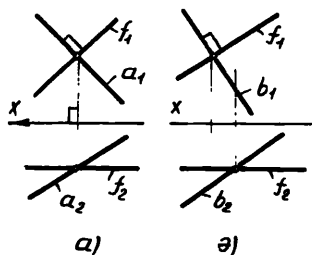
1. Тік бұрыштың тікбұрышты проекциясы туралы теореманы (§ 2.4) еске алып, одан қандай салдар шығатынын қарастыралық.

1 - с а л д а р. *Өзара перпендикуляр екі түзудің біреуі фронталь болса, онда олардың фронталь проекциялары өзара тікбұрыш жасап орналасады.* Керісінше, *екі түзудің біреуі фронталь болып, олардың фронталь проекциялары өзара тікбұрыш жасап орналасса, онда бұл екі түзу кеңістікте де өзара перпендикуляр болады:*  $f \perp a \Rightarrow f_1 \perp a_1$ ;  $f_1 \perp a_1 \Rightarrow f \perp a$ .

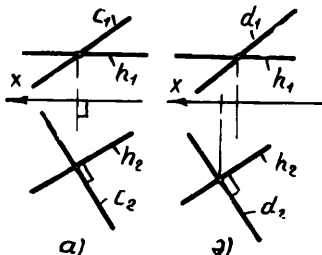
161, а-суретте фронталь проекциялары өзара тік бұрыш жасап орналасқан  $a$  және  $f$  түзулері берілген және олардың біреуі фронталь орналасқан түзу. Олай болса, бұл екі түзудің кеңістікте де өзара перпендикуляр болғаны. Эпюрге қарап  $a$  және  $f$  түзулерінің қиылысатынын көреміз. Ал 161, ә-суретте өзара тік бұрыш жасап айқасатын  $b$  және  $f$  түзулері кескінделген.

2 - с а л д а р. *Өзара перпендикуляр екі түзудің біреуі горизонталь болса, онда олардың горизонталь проекциялары өзара тікбұрыш жасап орналасады.* Керісінше, *екі түзудің біреуі горизонталь болып, олардың горизонталь проекциялары өзара тікбұрыш жасап орналасса, онда бұл екі түзу кеңістікте де өзара перпендикуляр болады:*  $h \perp c \Rightarrow h_2 \perp c_2$ ;  $h_2 \perp c_2 \Rightarrow h \perp c$ .

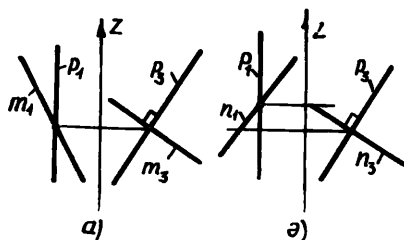
162, а-суретте кескінделген екі түзудің біреуі горизонталь проекциялар жазықтығына параллель және олардың горизонталь проекциялары арасындағы бұрыш  $90^\circ$ -қа тең. Сондықтан бұл екі түзу кеңістікте де өзара перпендикуляр орналасады. Олардың аттас проекцияларының қиылысу нүктелерін қосатын түзу проекциялар осіне перпендикуляр, олай болса бұл екі түзу бір нүктеде



161-сурет.



162-сурет.



163-сурет.

қиылысады. Ал 162, ә-суретте кескінделген түзулер  $d$  мен  $h$  өзара тікбұрыш жасап айқасады.

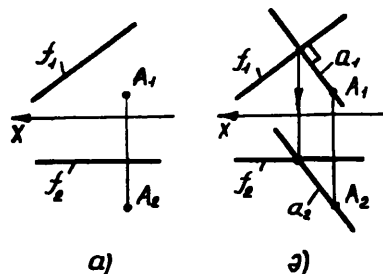
3-салдар. Өзара перпендикуляр екі түзудің біреуі профиль түзу болса, онда олардың профиль проекциялары өзара тікбұрыш жасап орналасады. Керісінше, екі

түзудің біреуі профиль түзу болып, олардың профиль проекциялары өзара тікбұрыш жасап орналасса, онда бұл екі түзу кеңістікте де өзара перпендикуляр болады:  $p \perp m \Rightarrow p_3 \perp m_3$ ;  $p_3 \perp m_3 \Rightarrow p \perp m$ .

163, а-суретте кескінделген екі түзу өзара тікбұрыш жасап қиылысады, ал 163, ә-суреттегі екі түзу өзара тікбұрыш жасап айқасады.

5.4.1-есеп. А нүктесі және фронталь  $f$  берілген (164, а-сурет). А нүктесі арқылы өтетін және  $f$  түзуін тікбұрыш жасап қиятын  $a$  түзуін салу керек.

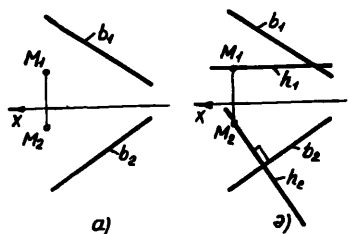
Шешуі. 1-салдардан іздеп отырған  $a$  түзуінің және берілген фронтальдың фронталь проекциялары өзара тікбұрыш жасап орналасатынын білеміз. Сондықтан  $a$  түзуінің фронталь проекциясын  $A_1$  нүктесін бастыра  $f_1$  түзуіне перпендикуляр етіп жүргіземіз:  $A_1 \in a_1 \perp f_1$ .  $a_1$  және  $f_1$  түзулерінің қиылысу нүктесі  $B_1$  болсын.  $B_1$  нүктесі арқылы жүргізілген вертикаль байланыс сызығы  $f_2$  түзуін  $B_2$  нүктесінде қияды.  $A_2$  және  $B_2$  нүктелерін қосатын түзуді  $a_2$  деп белгілейміз. Сонда фронталь проекциясы  $a_1$  және горизонталь проекциясы  $a_2$  түзулері болатын  $a$  түзуі А нүктесі арқылы өтетінін және  $f$  түзуімен тікбұрыш жасап В нүктесінде қиылысатынын көреміз (164, ә-сурет). Егер А нүктесі  $f$  түзуінен тыс орналасса, онда



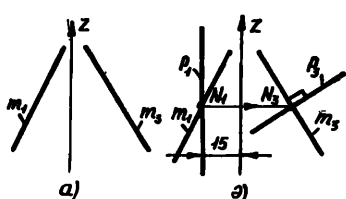
164-сурет.

есептің бір шешімі болады. Ал А нүктесі  $f$  түзуі бойында жатса, онда есептің шексіз көп шешімі бар. Есептің шешімі болатын түзулер А нүктесі арқылы өтетін  $f$  түзуіне перпендикуляр жазықта жатады.

5.4.2-есеп. М нүктесі және жалпы жағдай



165-сурет.



166-сурет.

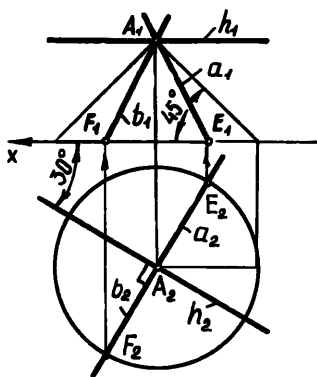
түзуі  $b$  берілген (165, а-сурет).  $M$  нүктесі арқылы өтетін және  $b$  түзуіне перпендикуляр горизонталь түзуді салу керек.

**Шешуі.** 2-салдардан іздеп отырған горизонталь мен берілген түзудің горизонталь проекциялары өзара перпендикуляр орналасатынын білеміз. Олай болса, горизонтальдың горизонталь проекциясы  $M_2$  нүктесін бастыра  $b_2$  түзуіне перпендикуляр жүргізіледі:  $M_2 \in h_2 \perp b_2$ . Горизонтальдың фронталь проекциясы байланыс сызығына перпендикуляр болатынын білеміз:  $M_1 \in h_1 \perp (M_1 M_2)$ . Есептің жалғыз шешімі бар.

**5.4.3 - есеп.** Берілген  $t$  түзуімен тікбұрыш жасап қиылысатын, профиль проекциялар жазықтығына параллель және одан қашықтығы 15 мм болатын  $p$  түзуін салу керек болсын (166, а-сурет).

**Шешуі.** Алдымен профиль түзудің фронталь проекциясын саламыз:  $p_1 \parallel z$  және  $|p_1 z| = 15$  мм. Осы  $p_1$  түзуі мен  $t_1$  түзуінің қиылысу нүктесін  $N_1$  деп белгілеп,  $N_1$  нүктесі арқылы горизонталь байланыс сызығын жүргіземіз:  $p_1 \cap t_1 = N_1$ ;  $N_1 \in (N_1 N_3) \perp p_1$ . Байланыс сызығы  $t_3$  түзуін  $N_3$  нүктесінде қияды. 3-салдарға сүйеніп  $p_3$  түзуін  $N_3$  нүктесі арқылы  $t_3$  түзуіне перпендикуляр етіп жүргіземіз. Табылған  $p(p_1, p_3)$  түзуі  $t(t_1, t_3)$  түзуімен тікбұрыш жасап қиылысады және профиль проекциялар жазықтығынан 15 мм қашықтықта оған параллель орналасады (166, б-сурет). Берілген түзу  $t$  жалпы жағдайда орналасса, онда есептің жалғыз шешімі бар. Берілген  $t$  түзуі профиль проекциялар жазықтығына параллель болуы мүмкін. Бұл жағдайда: егер  $|t \pi_3| = 15$  болса, есептің шексіз көп шешімі болады және есептің шешімі болатын түзулер профиль жазықтықта орналасады; ал егер  $|t \pi_3| \neq 15$  болса, онда есептің бірде-бір шешімі жоқ.

**5.4.4 - есеп.** Берілген  $A$  нүктесі арқылы екі түзу жүргізу керек. Олардың біріншісі горизонталь проекциялар жазықтығына параллель және фронталь проекциялар



167-сурет.

жазықтығына  $30^\circ$ -қа тең бұрыш жасап көлбейді, ал екіншісі біріншісіне перпендикуляр және горизонталь проекциялар жазықтығына  $45^\circ$ -қа тең бұрыш жасап көлбейді (167-сурет).

**Шешуі.** Іздеп отырған түзулеріміздің біріншісі горизонталь болғандықтан, оның фронталь проекциясы  $A_1$  нүктесін бастыра  $Ox$  осіне параллель жүргізіледі, ал горизонталь проекциясы  $A_2$  нүктесін бастыра  $x$  түзуімен  $30^\circ$ -қа тең бұрыш жасайтындай етіп жүр-

гізіледі:  $A_1 \in h_1 \parallel x$ ;  $A_2 \in h_2$ ;  $\widehat{h_2, x} = 30^\circ$ . Жоғарыда көрсетілгендей  $A$  нүктесі арқылы өтетін және горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы  $45^\circ$ -қа тең түзулер жиыны айналу конусының бетінде жатады. Бұл конустың фронталь проекциясы — төбесі  $A_1$  нүктесі, табанындағы бұрышы  $45^\circ$  болатын тең бүйірлі үшбұрыш, ал горизонталь проекциясы центрі  $A_2$  нүктесі болатын шеңбер болады. Іздеп отырған түзулердің екіншісі осы конустың жасаушыларының біреуі.  $A_2$  нүктесін бастыра  $h_2$  түзуіне перпендикуляр түзу жүргіземіз. Осы түзуді конустың жасаушысы деп қарастырып, оның фронталь проекциясын тұрғызамыз. Есептің шартын қанағаттандыратын екі жасаушы бар: олар  $a$  және  $b$  түзулері. Кеністіктегі нүкте арқылы фронталь проекциялар жазықтығына берілген бұрышпен көлбейтін горизонталь екі түзу жүргізуге болады. Сонда есептің төрт шешімі болатыны анықталады.

### 5.5. ӨЗАРА ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТҮЗУ МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТЫ САЛУ

Түзу жазықтыққа перпендикуляр болуы үшін ол түзу берілген жазықтықтың қиылысатын екі түзуіне перпендикуляр болуы қажет. Егер түзу жазықтыққа перпендикуляр болса, онда ол түзу сол жазықтықта жатқан түзулердің барлығына да перпендикуляр болады.

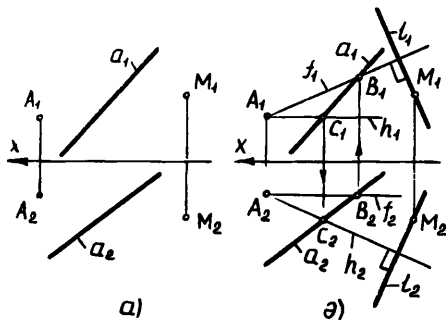
**Теорема.** *Энюрде берілген түзу мен жазықтық өзара перпендикуляр болуы үшін түзудің фронталь проекциясы жазықтық фронталінің фронталь проекциясына, ал*

түзудің горизонталь проекциясы жазықтық горизонталінің горизонталь проекциясына перпендикуляр болуы қажетті де жеткілікті.

Теореманың шарты жеткілікті болатынын дәлелделік. Бізге  $a(a_1, a_2)$  түзуі және  $\alpha(h \cap f)$  жазықтығы берілсін. Түзудің фронталь проекциясы  $a_1$  берілген  $\alpha$  жазықтығы фронталінің фронталь проекциясы  $f_1$ -ге перпендикуляр және оның горизонталь проекциясы  $a_2$  жазықтық горизонталінің горизонталь проекциясы  $h_2$ -ге перпендикуляр деп жорылық.  $a_1 \perp f_1$  және  $a_2 \perp h_2$ . Олай болса, тікбұрыштың тікбұрышты проекциясы туралы теореманың 1 және 2-салдарына сүйеніп берілген түзу жазықтықтың фронталі мен горизонталіне перпендикуляр болатынын анықтаймыз:  $a \perp f$  және  $a \perp h$ . Сонымен,  $a$  түзуі  $\alpha$  жазықтығының қиылысатын  $f$  пен  $h$  түзулеріне перпендикуляр болады екен. Олай болса, бұл түзу сол жазықтықтың өзіне де перпендикуляр болады.

Енді теорема шартының қажеттілігін дәлелделік. Ол үшін берілген  $a(a_1, a_2)$  түзуін  $\alpha(h \cap f)$  жазықтығына перпендикуляр деп жорылық. Олай болса,  $a$  түзуі  $\alpha$  жазықтығы түзулерінің бәріне де перпендикуляр болады.  $f \subset \alpha \perp a \Rightarrow f \perp a$ ;  $h \subset \alpha \perp a \Rightarrow h \perp a$ . Тікбұрыштың тікбұрышты проекциясы туралы теореманың 1 және 2-салдарын ескерелік. Сонда  $f \perp a \Rightarrow f_1 \perp a_1$  және  $h \perp a \Rightarrow h_2 \perp a_2$  болады. Яғни түзу жазықтыққа перпендикуляр болса, онда түзудің фронталь проекциясы жазықтық фронталінің фронталь проекциясына және түзудің горизонталь проекциясы жазықтық горизонталінің горизонталь проекциясына перпендикуляр болулары қажет екен.

5.5.1 - е с е п. Эпюрде  $\alpha(A; a)$  жазықтығы және  $M(M_1, M_2)$  нүктесі берілген (168, а-сурет). Осы  $M$  нүктесін бастыра  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр  $l$  түзуін салыңыздар.

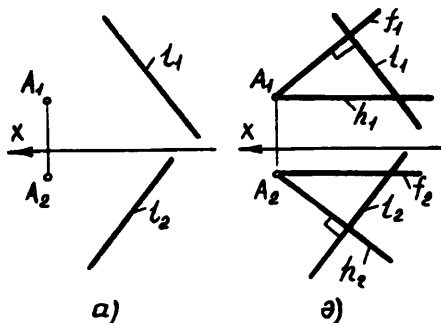


168-сурет.

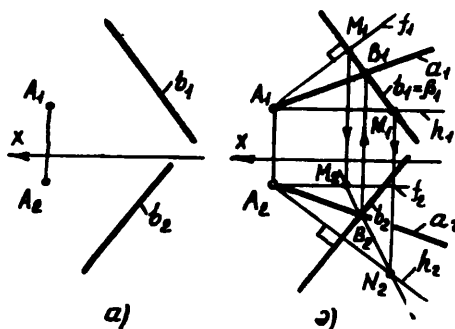
**Шешуі.** Жоғарыда дәлелденген теоремаға сүйеніп  $l$  түзуінің фронталь проекциясын  $M_1$  нүктесі арқылы  $\alpha$  жазықтығы фронталінің фронталь проекциясына перпендикуляр, ал оның горизонталь проекциясын  $M_2$  нүктесі арқылы осы  $\alpha$  жазықтығы горизонталінің горизонталь проекциясына перпендикуляр етіп жүргізуіміз керек. Олай болса, алдын ала  $\alpha$  жазықтығының фронталін және горизонталін салып алуымыз керек. Фронтальдің горизонталь проекциясын  $A_2$  нүктесі арқылы оське параллель жүргіземіз:  $A_2 \in f_2 \parallel x$ ;  $f_2 \cap a_2 = B_2$ . Осы фронтальдің берілген түзумен қиылысу нүктесінің фронталь проекциясы  $B_1$  нүктесін  $A_1$  нүктесімен қоссақ,  $\alpha$  жазықтығы фронталінің фронталь проекциясы болатын  $f_1$  түзуін аламыз:  $f_1 = (A_1 B_1)$ . Горизонтальдің фронталь проекциясын  $A_1$  нүктесін бастыра проекциялар осіне параллель жүргіземіз:  $A_1 \in h_1 \parallel x$ ;  $f_1 \cap a_1 = C_1$ . Горизонталь мен  $a$  түзуінің қиылысу нүктесінің горизонталь проекциясын тауып, оны  $A_2$  нүктесімен қосамыз:  $(A_2 C_2) = h_2$ . Енді теоремаға сүйеніп іздеп отырған  $l$  түзуінің проекцияларын тұрғызамыз:  $M_1 \in l_1 \perp f_1$ ;  $M_2 \in l_2 \perp h_2$ . Табылған  $l$  түзуі  $M$  нүктесі арқылы өтіп,  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр болатынына көз жеткізу қиын емес. Есептің әрқашан жалғыз шешімі болады.

**5.5.2 - е с е п.** Берілген нүкте  $A$  арқылы берілген түзуге  $l(l_1, l_2)$  перпендикуляр жазықтық жүргізу керек (169, а-сурет).

**Шешуі.** Алдыңғы мысалмен салыстыралық. Бұл екі мысалдағы есептер біріне-бірі кері есептер екенін байқаймыз. Бірінші мысалда берілген нүкте арқылы өтетін берілген жазықтыққа перпендикуляр түзуді салу керек болса, екінші мысалда берілген нүкте арқылы өтетін берілген түзуге перпендикуляр жазықтықты салу керек.



169-сурет.

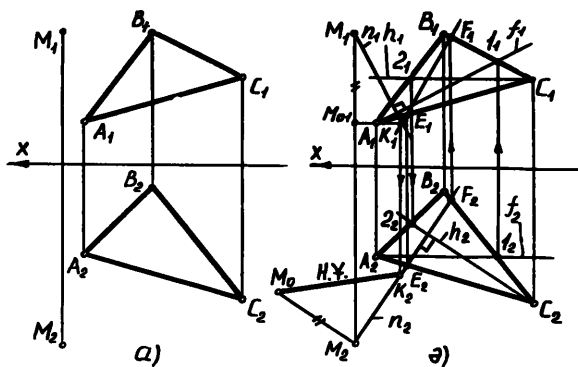


170-сурет.

Өзара перпендикуляр жазықтық пен түзу эпюрінің қасиеттері туралы теоремаға сүйеніп іздеп отырған жазықтықтың фронталь  $A$  нүктесі арқылы  $l$  түзуіне перпендикуляр етіп, ал оның горизонтальін де  $A$  нүктесі арқылы  $l$  түзуіне перпендикуляр етіп жүргіземіз:  $A_1 \in f_1 \perp l_1$ ;  $A_2 \in f_2 \parallel x$ ;  $A_2 \in h_2 \perp l_2$ ;  $A_1 \in h_1 \parallel x$  (169, ә-сурет). Бұл арада тікбұрыштың тікбұрышты проекциясы туралы теореманың салдары еске алынады.  $f$  және  $l$  түзулері, сол сияқты  $h$  және  $l$  түзулері өзара тікбұрыш жасап айқасады.  $A$  нүктесінде қиылысатын екі түзу  $f$  және  $h$  бір жазықтықты анықтайды:  $\alpha(f \cap h)$ . Табылған  $\alpha$  жазықтығы  $A$  нүктесі арқылы өтіп,  $l$  түзуіне перпендикуляр орналасқан. Есептің бір ғана шешімі бар.

**5.5.3 - е с е п.** Эпюрде  $A$  нүктесі және  $b$  түзуі берілген (170, а-сурет).  $A$  нүктесі арқылы өтіп,  $b$  түзуімен тікбұрыш жасап қиылысатын  $a$  түзуін салу керек (өзара перпендикуляр жалпы жағдайда орналасқан түзулерді салу есебі).

**Ш е ш у і.** Берілген  $A$  нүктесі арқылы  $b$  түзуіне перпендикуляр  $\alpha(h \cap f)$  жазықтығын жүргіземіз (5.5.2-есеп). Осы көмекші  $\alpha$  жазықтығы мен  $b$  түзуінің қиылысу нүктесін саламыз. Ол үшін  $b$  түзуі арқылы фронталь проекциялаушы  $\beta$  жазықтығы жүргізіледі. Жүргізілген екі жазықтықтың қиылысу түзуі салынады:  $\alpha \cap \beta = (MN)$ . Фронталь проекциялаушы  $\beta$  жазықтығында жатқан екі түзу  $b$  және  $MN$  бір нүктеде қиылысады:  $b \cap (MN) = B$ . Табылған  $B$  нүктесін берілген  $A$  нүктесімен қосатын түзу жүргіземіз:  $(AB) = a$ . Осы  $a$  түзуі есептің шарттарын толық қанағаттандырады. Өйткені  $a$  түзуі  $A$  нүктесі арқылы өтеді ( $A_1 \in a_1$ ,  $A_2 \in a_2$ ) және  $b$  түзуіне перпендикуляр  $\alpha$  жазықтығында жатыр ( $A \in \alpha$ ;  $B \in \alpha$ ). Егер  $b \perp \alpha$  болса,



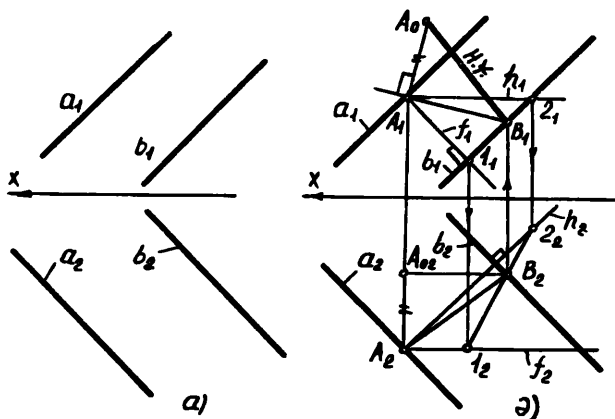
171-сурет.

онда  $b$  түзуі  $\alpha$  жазықтығының барлық түзулеріне де перпендикуляр болады:  $a \subset \alpha \perp b \Rightarrow a \perp b$ . Егер  $A \notin b$  болса, онда есептің жалғыз шешімі болады. Егер  $A \in b$  болса, онда есептің шексіз көп шешімдері бар және есептің шарттарын қанағаттандыратын түзулердің бәрі де  $\alpha$  жазықтығында жатады.

5.5.4 - есеп.  $M$  нүктесінен  $ABC$  үшбұрышының жазықтығына дейінгі қашықтықты анықтау керек (171, а-сурет).

Шешуі. Берілген  $M$  нүктесі арқылы  $ABC$  үшбұрышы жазықтығына перпендикуляр  $n$  түзуін жүргіземіз. Одан кейін осы  $n$  түзуі мен  $ABC$  үшбұрышы жазықтығының қиылысу нүктесін табамыз.  $ABC$  үшбұрышы жазықтығын  $\alpha$  деп белгілесек, онда  $\alpha \cap n = K$ . Сонда  $M$  нүктесінен  $\alpha$  жазықтығына дейінгі қашықтық  $MK$  кесіндісінің ұзындығымен анықталады. Енді  $MK$  кесіндісінің натурал ұзындығын тікбұрышты үшбұрыш әдісімен табамыз.

Алдымен  $\alpha$  жазықтығының фронталін және горизонталін салу қажет. 171, ә-суретте  $\alpha$  жазықтығының  $A$  нүктесі арқылы өтетін фронталі жүргізілген. Алдымен фронтальдің горизонталь проекциясы салынады:  $A_2 \in f_2 \parallel x$ . Фронтальдің фронталь проекциясы оның  $\alpha$  жазықтығында жататыны ескеріліп тұрғызылады. Горизонталь  $h$  берілген үшбұрыштың  $C$  төбесін бастыра жүргізілген. Горизонтальдің алдымен фронталь проекциясы, ал одан кейін оның горизонталь проекциясы салынады. Өзара перпендикуляр түзу мен жазықтық эпюрінің қасиеттері туралы теоремаға сай  $n$  түзуінің фронталь проекциясы фронтальдің фронталь проекциясына перпендикуляр, ал горизонталь проекциясы горизонтальдің горизонталь проекция-



172-сурет.

сына перпендикуляр жүргізіледі:  $M_1 \in n_1 \perp f_1$ ;  $M_2 \in n_2 \perp \perp h_2$ . Енді  $n$  түзуі мен  $\alpha$  жазықтығының қиылысу нүктесін салуымыз керек. Ол үшін  $n$  түзуі арқылы ойша горизонталь проекциялаушы жазықтық жүргізіледі. Сонда осы көмекші жазықтық  $\alpha$  жазықтығымен  $EF$  түзуі бойымен қиылысады.  $EF$  және  $n$  түзулерінің фронталь проекциялары  $K_1$  нүктесінде қиылысады.  $K$  нүктесінің горизонталь проекциясы  $n_2$  түзуі бойынан оңай табылады.  $MK$  кесіндісінің натурал ұзындығын анықтау үшін катеттерінің біреуі оның горизонталь проекциясы болатын, ал екіншісі  $M_1$  және  $K_1$  нүктелерінің  $Ox$  осінен қашықтықтарының айырымына тең болатын  $M_0M_2K_2$  тікбұрышты үшбұрышын саламыз. Оның гипотенузасы  $M_0K_2$  кесіндісі берілген  $M$  нүктесінен  $ABC$  үшбұрышы жазықтығына дейінгі қашықтықты анықтайды.

5.5.5 - есеп. Берілген параллель түзулердің ара қашықтығын анықтау керек (172, а-сурет).

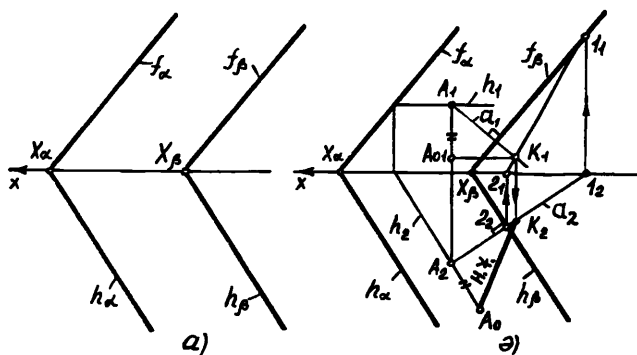
Шешуі. Берілген түзулердің аттас проекциялары өзара параллель орналасқан:  $a_1 \parallel b_1$  және  $a_2 \parallel b_2$ . Сондықтан бұл екі түзу кеңістікте де өзара параллель болады. Олардың біреуі, мысалы  $a$  түзуі бойынан қалауымызша  $A$  нүктесін аламыз. Одан кейін  $A$  нүктесінен олардың екіншісіне дейінгі қашықтықты табамыз:  $A_1 \in a_1$ ;  $(A_1A_2) \perp x$ ;  $(A_1A_2) \cap a_2 = A_2$ . Осы  $A$  нүктесі арқылы  $b$  түзуін тікбұрыш жасап қиятын түзу жүргіземіз (5.5.3-есепті қараңыз).  $A$  нүктесінен  $b$  түзуіне түсірілген перпендикулярдың табаны  $B$  нүктесі болсын.  $AB$  кесіндісінің ұзындығы оның фронталь проекциясы бір катеті болатын



түсіреміз. Осы мақсатта  $\alpha$  жазықтығының фронталін және горизонталін салып аламыз.  $f_2$  түзуін қалауымызша жүргіземіз.  $f_2 \cap m_2 = 1_2$  және  $f_2 \cap a_2 = 2_2$ .  $1_2$  және  $2_2$  нүктелері арқылы вертикаль байланыс сызықтарын жүргізсек, олар  $m_1$  және  $a_1$  түзулерін  $1_1$  және  $2_1$  нүктелерінде қияды:  $f_1 = (1_1 2_1)$ .  $h_1$  түзуін  $1_1$  нүктесі арқылы  $Ox$  осіне параллель жүргіземіз:  $h_1 \cap a_1 = 3_1$ . Осы  $3_1$  нүктесін бастыра жүргізілген вертикаль түзу  $a_2$  түзуімен  $3_2$  нүктесінде қиылысады:  $h_2 = (1_2 3_2)$ .  $A_1 \in b_1 \perp f_1$  және  $A_2 \in b_2 \perp h_2$ ;  $b \cap \alpha = K$ . Бұл нүктені табу үшін  $b$  түзуі арқылы горизонталь проекциялаушы жазықтық жүргізіледі. Осы горизонталь проекциялаушы жазықтық  $\alpha$  жазықтығымен  $EF$  түзуі бойынша қиылысады. Ал  $EF$  және  $b$  түзулері бір жазықтықта жататындықтан қиылысады да  $K$  нүктесін анықтайды.  $AK$  кесіндісінің натурал ұзындығы тікбұрышты үшбұрыш әдісімен табылған (173, ә-сурет).

5.5.7 - е с е п. Өзара параллель  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтары өздерінің іздерімен кескінделген (174, а-сурет). Осы екі жазықтықтың ара қашықтығын анықтау керек.

Ш е ш у і. Берілген жазықтықтардың аттас іздері өзара параллель, сондықтан олардың өзара параллель болатынын анықтаймыз. Осы екі жазықтықтың біреуінің бойынан нүкте алсақ, онда осы нүктеден олардың екіншісіне дейінгі ара қашықтық іздеп отырған шамамыз, яғни  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарының ара қашықтығы болатынын көреміз. Енді  $A$  ( $A \in \alpha$ ) нүктесінен  $\beta$  жазықтығына дейінгі қашықтықты анықтаса болады. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты табу есебі 5.5.4-есепте қарастырылды. Одан өзгешелік мынада: жазықтық  $\beta$  өзінің іздерімен берілген. Іздер жазықтықтың сәйкес проекциялар жазықтықтарында жататын денгейлік түзу-



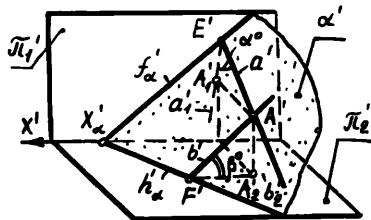
174-сурет.

лері болғандықтан, жоғарыдағы теореманы былайша өзгертуге болады: эпюрге берілген түзу мен жазықтық өзара перпендикуляр болулары үшін түзудің фронталь проекциясы жазықтықтың фронталь ізіне және түзудің горизонталь проекциясы жазықтықтың горизонталь ізіне перпендикуляр орналасулары керек.

Қалауымызша  $A_1$  нүктесін белгілеп (174, ә-сурет), оны  $\alpha$  жазықтығында жататын  $A$  нүктесінің фронталь проекциясы деп қарастырамыз. Енді осы  $A$  нүктесі арқылы өтетін  $\alpha$  жазықтығының горизонтальін жүргіземіз:  $A \in \in h \subset \alpha$ . Сонда байланыс сызығының көмегімен горизонтальдің горизонталь проекциясы бойынан  $A_2$  нүктесі табылады.  $A$  нүктесінен  $\beta$  жазықтығына перпендикуляр түсіреміз:  $A_1 \in a_1 \perp f_\beta$  және  $A_2 \in a_2 \perp h_\beta$ . Сонда  $a$  түзуі  $\beta$  жазықтығына перпендикуляр және оны  $K$  нүктесінде қияды:  $a \cap \beta = K$ . Табылған  $K$  нүктесін  $A$  нүктесімен қосатын кесінді параллель жазықтықтар  $\alpha$  мен  $\beta$ -нын ара қашықтығын анықтайды. Оның ұзындығы тікбұрышты үшбұрыш тұрғызу нәтижесінде тұрғызылған.

## 5.6. ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ПРОЕКЦИЯЛАР ЖАЗЫҚТЫҚТАРЫНА КӨЛБЕУЛІК БҰРЫШТАРЫН САЛУ

Жалпы жағдайда орналасқан  $\alpha$  жазықтығын қарастыралық (175-сурет).  $f_\alpha$ ,  $h_\alpha$  — осы  $\alpha$  жазықтығының фронталь және горизонталь іздері болсын. Сонда екі екіжақты бұрыш алынады.  $\alpha$  және  $\pi_1$  жазықтықтары қыры  $f_\alpha$  түзуі болатын бірінші екіжақты бұрышты, ал  $\alpha$  және  $\pi_2$  жазықтықтары қыры  $h_\alpha$  түзуі болатын екінші екіжақты бұрышты анықтайды. Оларды былай белгілейді:  $\angle \alpha f_\alpha \pi_1$  және  $\angle \alpha h_\alpha \pi_2$ . Осы  $\alpha$  жазықтығынан кез келген нүкте алып, оны бастыра екіжақты бұрыштардың қырларына перпендикуляр түзулер жүргізелік:  $A \in \alpha$ ;  $A \in \in a \perp f_\alpha$ ;  $A \in \in b \perp h_\alpha$ . Осы түзулердің  $\alpha$  жазықтығы ізде-



175-сурет.

рімен қиылысу нүктелерін  $E$  және  $F$  деп белгілейді:  $a \cap f_\alpha = E$ ;  $b \cap h_\alpha = F$ .  $A$  нүктесінің фронталь проекциясын  $E$  нүктесімен, ал горизонталь проекциясын  $F$  нүктесімен қоссақ, екі бұрыш алынады:  $\angle AEA_1 = \alpha^\circ$  және  $\angle AFA_2 = \beta^\circ$ . Бұл екі бұрыштың біріншісі екіжақты  $\alpha f_\alpha \pi_1$

бұрышының сызықтық бұрышын, ал екіншісі екіжақты  $\alpha/h_2$  бұрышының сызықтық бұрышын анықтайды. Екіжақты бұрыштың шамасы деп оның сызықтық бұрышының шамасын айтатыны белгілі. Екіжақты  $\alpha/f_1$  бұрышының шамасын  $\alpha$  жазықтығының фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы, ал екіжақты  $\alpha/h_2$  бұрышының шамасын  $\alpha$  жазықтығының горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы деп атайтын боламыз. Жазықтықтың проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрышын салуда оның іздеріне перпендикуляр түзулерді пайдаланады. Жазықтықтың ізіне перпендикуляр түзулері оның сәйкес деңгейлік түзулеріне де перпендикуляр болады. Шынында да, берілген  $\alpha$  жазықтығының фронталь ізіне перпендикуляр  $a$  түзуі оның фронтальдарына да перпендикуляр болады, ал  $\alpha$  жазықтығының горизонталь ізіне перпендикуляр  $b$  түзуі оның горизонтальдарына да перпендикуляр болады.

**А н ы қ т а м а.** Жазықтықтың деңгейлік түзуіне перпендикуляр түзуін оның ең үлкен көлбеулік сызығы деп атайды.

Жазықтықтың фронталь проекциялар жазықтығына қатысты ең үлкен көлбеулік сызығы оның фронтальдарына перпендикуляр орналасады, ал горизонталь проекциялар жазықтығына қатысты ең үлкен көлбеулік сызығы оның горизонтальдарына перпендикуляр орналасады. Жазықтықтың ең үлкен көлбеулік сызықтары шексіз көп және олар өзара параллель орналасады. 175-суреттегі  $a$  түзуі  $\alpha$  жазықтығының  $\pi_1$  жазықтығына қатысты ең үлкен көлбеулік сызықтарының біреуі, ал  $b$  түзуі оның  $\pi_2$  жазықтығына қатысты ең үлкен көлбеулік сызықтарының біреуі. Енді  $a$  және  $b$  түзулері  $\alpha$  жазықтығының ең үлкен көлбеулік сызықтары деп аталу себептеріне тоқтала кетелік. Осы  $a$  түзуі  $\alpha$  жазықтығының  $A$  нүктесі арқылы өтетін түзулерінің ішіндегі  $\pi_1$  жазықтығымен ең үлкен көлбеулік бұрыш жасайтыны. Шынында да, егер  $f_2$  түзуі бойынан  $E$  нүктесінен өзге кез келген  $L$  нүкте-

сін алсақ, онда  $\widehat{AEA_1} > \widehat{ALA_1}$  болар еді. Оның себепін дәлелделік.  $\triangle AA_1E$  және  $\triangle AA_1L$  — тікбұрышты үшбұрыштар.  $(A_1E) \perp f_2 \Rightarrow |A_1E| < |A_1L|$ . Үлкен қабырғаға қарсы

үлкен бұрыш жататындықтан  $\widehat{EAA_1} < \widehat{LAA_1}$  болады.  $\widehat{EAA_1} + \widehat{AEA_1} = \widehat{LAA_1} + \widehat{ALA_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EAA_1} > \widehat{ALA_1}$ . Дәл осы

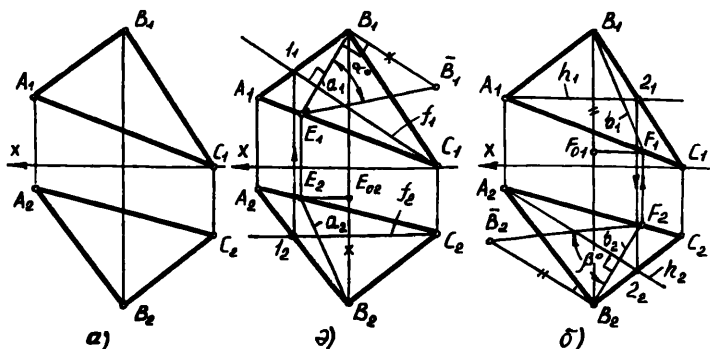
сияқты  $b$  түзуі  $\alpha$  жазықтығының  $A$  нүктесі арқылы өтетін түзулерінің ішіндегі  $\pi_2$  жазықтығымен ең үлкен көлбеулік бұрыш жасайтыны.

Жазықтықтың фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы оның фронталь проекциялар жазықтығына қатысты ең үлкен көлбеулік сызығы мен  $\pi_1$  жазықтығы аралығындағы бұрыш ретінде анықталады. Жазықтықтың горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы оның горизонталь проекциялар жазықтығына қатысты ең үлкен көлбеулік сызығы мен  $\pi_2$  жазықтығы арасындағы бұрыш ретінде анықталады. Түзудің проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын салу 5.3-параграфтағы 4-мысалда қарастырылды.

Жазықтықтың ең үлкен көлбеулік сызығын оның домалау сызығы деп те атайды. Өйткені  $\alpha$  жазықтығының  $A$  нүктесінде орналасқан ауыр және жұмыр дене ауырлық күші әсерімен  $b$  түзуі бойымен домалаған болар еді (175-сурет).

5.6.1 - есеп. Эпюрге  $ABC$  үшбұрышы кескінделген (176, а-сурет). Осы  $ABC$  үшбұрышы анықтайтын  $\alpha$  жазықтығының фронталь және горизонталь проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын салу керек.

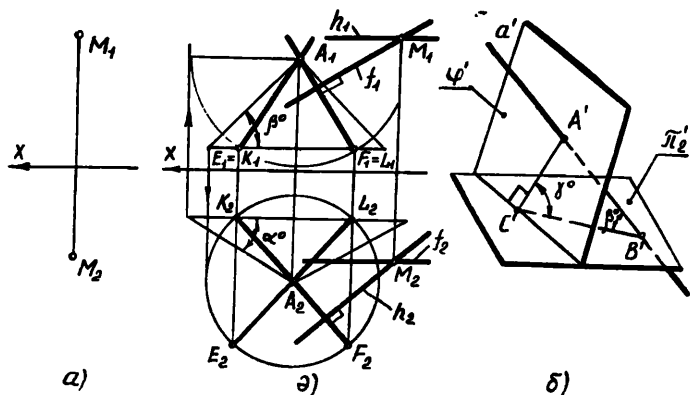
Шешуі. Алдымен  $\alpha$  жазықтығының фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықталық. Осы мақсатта  $\alpha$  ( $ABC$ ) жазықтығының  $C$  нүктесі арқылы өтетін фронталь жүргізілген.  $C_2 \in f_2 \parallel x$ ;  $f_2 \cap (A_2 B_2) = l_2$ ;  $l_2 \in (l_2 l_1) \parallel (A_2 A_1)$ ;  $(l_2 l_1) \cap (A_1 B_1) = l_1$ ;  $(C_1 l_1) = f_1$ . Ең үлкен көлбеулік сызықты салуды оның фронталь проекциясынан бастаймыз. Өйткені  $\pi_1$  жазықтығына қатысты ең үлкен көлбеулік сызықтың фронталь проекциясы жазықтықтың фронтальінің фронталь проекциясына перпенди-



176-сурет.







179-сурет.

кізу қиын емес. Енді  $X_7$  және  $V_1$  нүктелерін қосатын түзу  $\gamma$  жазықтығының фронталь ізін анықтайды:  $(X_1, V_1) = f_7$ .

5.6.3 - е с е п. Берілген  $M$  нүктесі арқылы өтетін, горизонталь проекциялар жазықтығына  $\gamma^\circ = 45^\circ$  және фронталь проекциялар жазықтығына  $\delta^\circ = 60^\circ$  бұрыштармен көлбейтін  $\phi$  жазықтығын салу керек (179, а-сурет).

Ш е ш у і. Егер  $\phi$  және  $\pi_2$  жазықтықтары арасындағы бұрыш  $\gamma^\circ$ , ал  $\phi$  жазықтығына перпендикуляр  $a$  түзуі горизонталь проекциялар жазықтығына  $\beta^\circ$  бұрышпен көлбейтін болса, онда  $\beta^\circ + \gamma^\circ = 90^\circ$  (179, б-сурет) болады. Шынында да,  $\phi$  және оған перпендикуляр  $a$  түзуі  $A$  нүктесінде,  $a$  түзуі мен горизонталь проекциялар жазықтығы  $B$  нүктесінде, ал  $\phi$  жазықтығының  $A$  нүктесі арқылы өтетін домалау сызығы мен  $\pi_2$  жазықтығы  $C$  нүктесінде қиылысатын болса, онда  $ABC$  үшбұрышы тікбұрышты үшбұрыш

болады:  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ;  $\widehat{ABC} = \beta^\circ$ ;  $\widehat{ACB} = \gamma^\circ$  және  $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$ . Дәл осы сияқты  $\phi$  жазықтығының фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы  $\delta^\circ$  мен оған перпендикуляр  $a$  түзуінің  $\pi_1$  жазықтығына көлбеулік бұрышы  $\alpha^\circ$ -ның қосындысы да тікбұрыш болады:  $\alpha^\circ + \delta^\circ = 90^\circ$ . Сонда фронталь және горизонталь проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштары  $\delta^\circ$  және  $\gamma^\circ$  болатын  $\phi$  жазықтығын былайша салуға болады: фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы  $\alpha^\circ = 90^\circ - \delta^\circ$  және горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы  $\alpha^\circ = 90^\circ - \gamma^\circ$  болатын  $a$  түзуін жүргізіп алып, одан кейін  $\phi$  жазықтығын  $M$  нүктесін бастыра  $a$

түзуіне перпендикуляр етіп тұрғызады.  $\pi_1$  және  $\pi_2$  жазықтықтарына көлбеулік бұрыштары  $\alpha^\circ$  және  $\beta^\circ$  болатын түзуді салу 5.3.5-есепте, ал берілген нүкте арқылы берілген түзуге перпендикуляр жазықтықты салу 5.5.2-есепте қарастырылды.

Кеңістіктен қалауымызша  $A$  нүктесін алып, осы нүкте арқылы  $\pi_1$  жазықтығына көлбеулік бұрышы  $30^\circ$  ( $\alpha^\circ = 90^\circ - \delta^\circ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ) және  $\pi_2$  жазықтығына көлбеулік бұрышы  $45^\circ$  ( $\beta^\circ = 90^\circ - \gamma^\circ = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ) болатын түзу жүргіземіз. Осындай төрт түзу жүргізуге болады (179, ә-сурет): олар  $(AE)$ ,  $(AF)$ ,  $(AL)$  және  $(AK)$  түзулері. Сонда есептің 4 шешімі, яғни есептің шарттарын қанағаттандыратын 4 жазықтық бар. Біз сол төрт жазықтықтың біреуін көрсетелік:  $M$  нүктесі арқылы  $AF$  түзуіне перпендикуляр фронталь  $f$  және горизонталь  $h$  жүргіземіз.  $M$  нүктесінде қиылысатын екі түзу ( $h$  және  $f$ ) анықтайтын жазықтық  $\varphi(h \cap f)$  эпюрдегі түзу мен жазықтықтың перпендикуляр болу шарттарын анықтайтын теоремаға сай  $AF$  түзуіне перпендикуляр. Олай болса,  $\varphi(h \cap f)$  жазықтығы горизонталь проекциялар жазықтығына  $\gamma^\circ$  бұрышпен, ал фронталь проекциялар жазықтығына  $\delta^\circ$  бұрышпен көлбейді. Қалған үш жазықтықтың біреуі  $AE$  түзуіне, екіншісі  $AL$  түзуіне және үшіншісі  $AK$  түзуіне перпендикуляр жүргізіледі. Енді жазықтықтың  $\pi_1$  және  $\pi_2$  жазықтықтарына көлбеулік бұрыштары  $\gamma^\circ$  мен  $\delta^\circ$  арасындағы байланысты анықталық.  $\beta^\circ + \gamma^\circ = 90^\circ$ ;  $\alpha^\circ + \delta^\circ = 90^\circ \Rightarrow \alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ + \delta^\circ = 180^\circ$ . Егер  $a$  жалпы жағдайдағы түзу болса, онда оның көлбеулік бұрыштарының қосындысы тікбұрыштан кем болуы қажет:  $\alpha^\circ + \beta^\circ < 90^\circ$ . Олай болса,  $90^\circ < \gamma^\circ + \delta^\circ < 180^\circ$  болады, яғни жазықтықтың көлбеулік бұрыштарының қосындысы тік бұрыштан артық және жазық бұрыштан кем болуы тиіс. Осындай жағдайда есептің 4 шешімі болады. Ал іздеп отырған жазықтығымыз  $\varphi$  профиль проекциялаушы жазықтық болатын болса, онда  $\gamma^\circ + \delta^\circ = 90^\circ$  болады.  $\pi_3$  жазықтығына параллель жазықтық үшін  $\gamma^\circ + \delta^\circ = 180^\circ$  болатынына көз жеткізу оңай. Егер  $\gamma^\circ + \delta^\circ < 90^\circ$  немесе  $\gamma^\circ + \delta^\circ > 180^\circ$  болса, онда есептің бірде-бір шешімі жоқ.

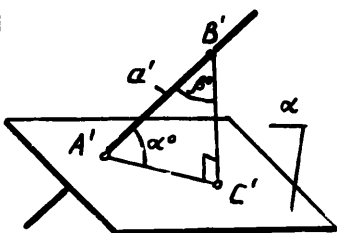
## 5.7. ТҮЗУ МЕН ЖАЗЫҚТЫҚ АРАСЫНДАҒЫ БҰРЫШТЫ АНЫҚТАУ

Берілген  $\alpha$  жазықтығы мен  $a$  түзуі  $A$  нүктесінде қиылыссын (180-сурет),  $B \in a$  нүктесінің  $\alpha$  жазықтығындағы тікбұрышты проекциясы  $C$  нүктесі болсын. Сонда  $AC$  түзуі  $a$  түзуінің  $\alpha$  жазықтығындағы проекциясы, ал  $\triangle ABC$

тікбұрышты үшбұрыш:  $a \perp$

$\Pi\alpha = A; (BC) \perp \alpha; \widehat{ACB} = 90^\circ$ .

Берілген  $a$  түзуі мен  $\alpha$  жазықтығы арасындағы бұрыш деп  $a$  түзуі мен оның  $\alpha$  жазықтығындағы проекциясы арасындағы бұрышты айта-



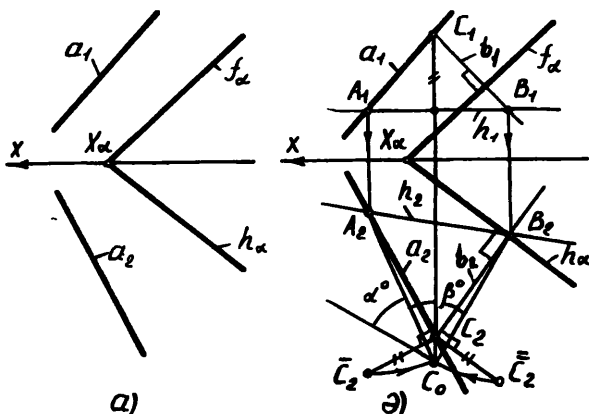
180-сурет.

ды:  $\widehat{a, \alpha} = \widehat{a, (AC)} = \alpha^\circ$ . Енді

$a$  және  $BC$  түзулері арасындағы бұрышты  $\beta^\circ$  деп белгілелік. Сонда  $ABC$  тікбұрышты үшбұрышынан  $\alpha^\circ + \beta^\circ = 90^\circ$  болатынын көреміз.  $\beta^\circ$  бұрышы  $\alpha^\circ$  бұрышын тікбұрышқа дейін толықтырады. Олай болса,  $\alpha^\circ$  бұрышын салудың орнына  $\beta^\circ$  бұрышын анықтап, оны  $90^\circ$ -қа дейін толықтыратын  $\alpha^\circ$  бұрышын тұрғызуға болады. Ал қиылысатын екі түзудің арасындағы бұрышты анықтай аламыз (§ 5.3). Мысалдар қарастыралық.

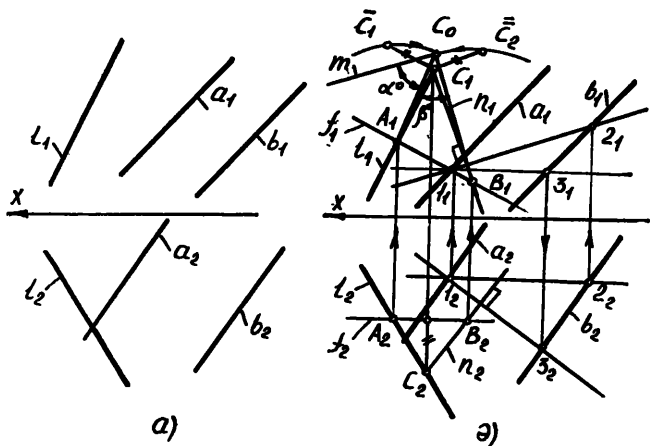
5.7.1 - е с е п. Іздерімен берілген  $\alpha$  жазықтығы мен  $a$  түзуі арасындағы бұрышты анықтау керек (181, а-сурет).

Ш е ш у і. Берілген  $a$  түзуі бойынан қалауымызша  $C$  нүктесін алып, осы нүктені бастыра  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр  $b$  түзуін жүргіземіз (181, ә-сурет).  $C$  нүктесінде қиылысатын  $a$  және  $b$  түзулері арасындағы бұрыш  $\beta^\circ$  болсын. Осы бұрыштың натурал шамасын тұрғыза-мыз (5.3.1-мысал). Қиылысатын түзулер  $a$  және  $b$  анықтайтын жазықтық горизонтальдарының біреуін жүргізе-



181-сурет.





183-сурет.

5.7.3 - есеп.  $l$  түзуі мен  $\gamma(a \parallel b)$  жазықтығы арасындағы бұрышты анықтау керек (183, а-сурет).

Шешуі. Алдымен  $\gamma$  жазықтығының горизонталі мен фронталін тұрғызып аламыз. Одан кейін  $l$  түзуі бойынан қалауымызша  $C$  нүктесін алып, одан  $\gamma$  жазықтығына нормаль (перпендикуляр)  $n$  түзуін жүргіземіз (183, ә-сурет). Енді  $C$  нүктесінде қиылысатын екі түзудің ( $l$  және  $n$  түзулерінің) арасындағы бұрыш  $\beta^\circ$  тұрғызылады:  $l_2 \cap f_2 = A_2$ ;  $n_2 \cap f_2 = B_2$ ;  $(A_1 A_2) \parallel (B_1 B_2) \perp x$ ;  $(A_1 A_2) \cap l_1 = A_1$ ;  $(B_1 B_2) \cap n_1 = B_1$ . Осыдан кейін  $AC$  және  $BC$  кесінділерінің натурал ұзындықтары тұрғызылады, ал  $|AB| = |A_1 B_1|$ . Қабырғалары белгілі  $A_1 B_1 C_0$  үшбұрышын салу арқылы

$\beta^\circ$  бұрышы анықталады:  $\widehat{A_1 C_0 B_1} = \beta^\circ$ . Енді  $C_0$  нүктесі арқылы  $B_1 C_0$  түзуіне перпендикуляр  $m$  түзуін жүргізсек,  $\alpha^\circ$  бұрышы алынады. Бұл бұрыш  $l$  түзуі мен  $\gamma(a \parallel b)$  жазықтығы арасындағы бұрышты анықтайды:  $\widehat{l, \gamma} = \widehat{(A_1 C_0), m} = \alpha^\circ$ .

5.7.4 - есеп. Горизонталь проекциялаушы  $\alpha$  жазықтығы және  $a$  түзуінің горизонталь проекциясы берілген (184, а-сурет). Берілген  $\alpha$  жазықтығымен  $a$  түзуі  $M$  нүктесінде қиылысады. Осы  $\alpha$  жазықтығы мен  $a$  түзуі арасындағы бұрышты  $30^\circ$  деп алып, түзудің фронталь проекциясын салу керек.

Шешуі. Берілген  $\alpha$  жазықтығына көлбеулік бұры-



таль проекциясы бойынан  $E_2 = F_2$  нүктесі арқылы жүргізілген байланыс сызығын пайдаланып  $E_1$  және  $F_1$  нүктелерін анықтаймыз. Сонда есептің екі шешімі болатынын көреміз. Олар  $a_1 = (M_1 E_1)$  және  $\bar{a}_1 = (M_1 F_1)$  түзулері болады. Егер  $a_2$  және  $\alpha_2$  түзулері арасындағы сүйір бұрыш  $30^\circ$ -тан кем болса, онда есептің бірде-бір шешімі болмай-

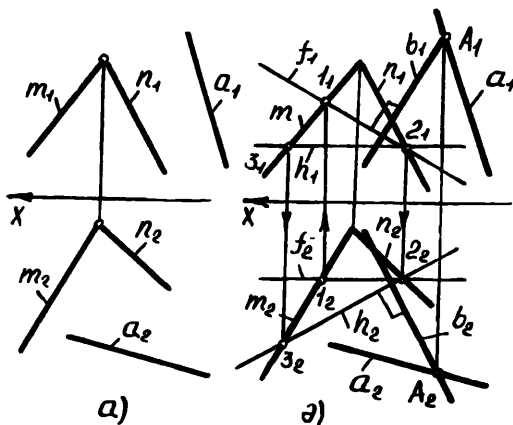
ды. Ал  $\widehat{a_2, \alpha_2} = 30^\circ$  болса, есептің жалғыз шешімі болады. Бұл жағдайда  $a$  түзуі горизонталь проекциялар жазықтығына параллель орналасады.

### 5.8. ӨЗАРА ПЕРПЕНДИКУЛЯР ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫ САЛУ

Екі жазықтықтың өзара перпендикуляр болу шарттарын еске түсірелік. Егер екі жазықтықтың біреуі екіншісінде жатқан түзуге перпендикуляр болса, онда бұл екі жазықтық өзара перпендикуляр болады:  $\alpha \perp b \subset \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$ . Егер екі жазықтықтың біреуі екіншісіне перпендикуляр түзу арқылы өтетін болса, онда бұл екі жазықтықта өзара перпендикуляр:  $\gamma \subset \alpha \perp \beta \Rightarrow \gamma \perp \beta$ . Олай болса, өзара перпендикуляр жазықтықтарды салу есебі өзара перпендикуляр түзу мен жазықтықты салу есебіне келтіріледі.

5.8.1 - есеп. Берілген  $a$  түзуі арқылы өтетін және  $\alpha(m \cap n)$  жазықтығына перпендикуляр  $\beta$  жазықтығын салу керек (185, а-сурет).

Шешуі. Берілген  $\alpha(m \cap n)$  жазықтығының горизонталін және фронталін тұрғызып аламыз. Одан кейін  $a$  түзуі бойынан қалауымызша  $A$  нүктесін алып, осы нүк-

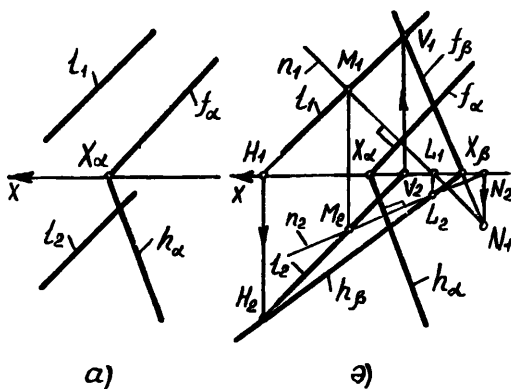


185-сурет.

тені бастыра  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр  $b$  түзуін жүргіземіз:  $A_1 \in b_1 \perp f_1$ ;  $A_2 \in b_2 \perp h_2$ . Сонда  $A$  нүктесінде қиылысатын  $a$  және  $b$  түзулері  $\beta$  жазықтығын анықтайды (185, ә-сурет). Ал табылған  $\beta(a \cap b)$  жазықтығы  $a$  түзуі арқылы өтеді және  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр. Өйткені  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр орналасқан  $b$  түзуі  $\beta$  жазықтығында жатыр. Есептің шешімі болатын жазықтық тек біреу ғана. Шынында да, егер  $B \in a$  нүктесін алып, одан  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр  $c$  түзуін жүргізсек, онда  $B$  нүктесінде қиылысатын екі түзу  $a$  және  $c$   $\gamma(a \cap c)$  жазықтығын анықтар еді. Бұл  $\gamma(a \cap c)$  жазықтығы да  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр. Өйткені оның бетінде жатқан  $c$  түзуі  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр жүргізілген. Бірақ  $c$  түзуі  $\beta$  жазықтығында жатыр. Оның себебі  $c$  түзуі  $\beta$  жазықтығында жатқан  $B$  нүктесі арқылы өтіп оның  $b$  түзуіне параллель орналасқан. Олай болса,  $\gamma$  жазықтығының қиылысатын екі түзуі ( $a$  мен  $c$ )  $\beta$  жазықтығында жатыр. Сондықтан  $\beta = \gamma$  болады.

5.8.2 - е с е п. Берілген  $l$  түзуі арқылы өтетін және  $\alpha(f_\alpha \cap h_\alpha)$  жазықтығына перпендикуляр  $\beta$  жазықтығының іздерін салыңыздар (186, а-сурет).

Ш е ш у і. Қалауымызша алынған  $M \in l$  нүктесі арқылы  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр  $n$  түзуін жүргіземіз. Осы  $n$  түзуінің фронталь проекциясы жазықтықтың фронталь ізіне, ал горизонталь проекциясы жазықтықтың горизонталь ізіне перпендикуляр жүргізіледі:  $M_1 \in n_1 \perp f_\alpha$ ;  $M_2 \in n_2 \perp h_\alpha$  (186, ә-сурет). Сонда  $M$  нүктесінде қиылысатын  $l$  және  $n$  түзулері іздеп отырған  $\beta$  жазықтығын анықтайды. Енді  $\beta(l \cap n)$  жазықтығының іздерін саламыз. Ол

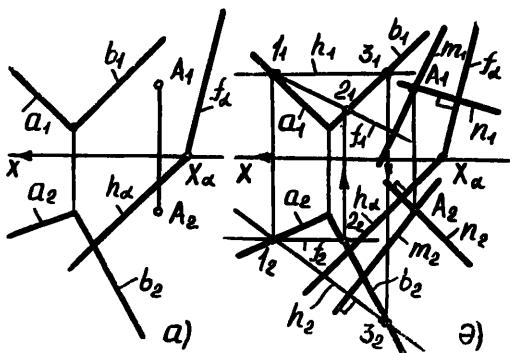


186-сурет.

үшін  $l$  және  $n$  түзулерінің іздерін салып алуымыз керек. Түзудің фронталь ізінің горизонталь проекциясы сол түзудің горизонталь проекциясы мен абсциссалар осінің қиылысу нүктесі ретінде анықталады, ал оның фронталь проекциясы іздің горизонталь проекциясы арқылы жүргізілген вертикаль байланыс сызығының көмегімен түзудің фронталь проекциясы бойынан табылады:  $l_2 \cap x = V_2$ ;  $n_2 \cap x = N_2$ ;  $(V_2 V_1) \parallel (N_2 N_1) \parallel (M_2 M_1)$ ;  $(V_2 V_1) \cap l_1 = V_1$ ;  $(N_2 N_1) \cap n_1 = N_1$ . Түзудің горизонталь ізінің фронталь проекциясы сол түзудің фронталь проекциясы мен абсциссалар осінің қиылысу нүктесі ретінде анықталады, ал оның горизонталь проекциясы іздің фронталь проекциясы арқылы жүргізілген вертикаль байланыс сызығының көмегімен түзудің горизонталь проекциясы бойынан табылады:  $l_1 \cap x = H_1$ ;  $n_1 \cap x = L_1$ ;  $(H_1 H_2) \parallel (L_1 L_2) \parallel (M_1 M_2)$ ;  $(H_1 H_2) \cap l_2 = H_2$ ;  $(L_1 L_2) \cap n_2 = L_2$ . Жазықтықтың фронталь ізі сол жазықтықта жататын түзулердің фронталь іздерінің фронталь проекциялары арқылы өтеді. Олай болса,  $\beta$  жазықтығының фронталь ізі  $V_1$  және  $N_1$  нүктелерін қосатын түзу болады:  $f_\beta = (V_1 N_1)$ . Жазықтықтың горизонталь ізі сол жазықтықта жататын түзулердің горизонталь іздерінің горизонталь проекциялары арқылы өтеді. Сондықтан  $\beta$  жазықтығының горизонталь ізі  $H_2$  және  $L_2$  нүктелерін қосатын түзу болады:  $h_\beta = (H_2 L_2)$ . Іздердің қиылысу нүктесі абсциссалар осінде жатуы тиіс:  $f_\beta \cap h_\beta = X_\beta \in x$ . Егер  $X_\beta$  нүктесі  $x$  түзуінен тыс орналасса, онда тұрғызудың дәлдігі нашар болғаны. Бұл жағдайда тұрғызуларды тексеріп, жіберілген қателерді түзету керек.

**5.8.3 - е с е п.**  $A$  нүктесі арқылы өтетін және  $\alpha$  ( $h_\alpha \cap f_\alpha$ ) мен  $\beta$  ( $a \cap b$ ) жазықтықтарына перпендикуляр  $\gamma$  жазықтығын эпюрде анықтау керек (187, а-сурет).

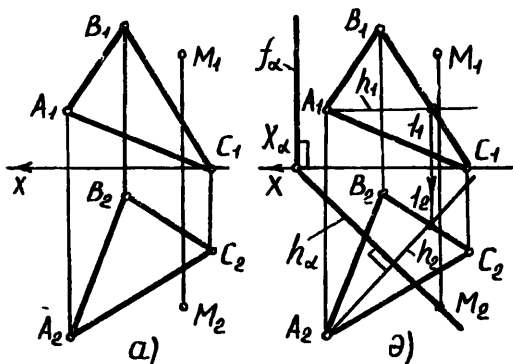
**Ш е ш у і.** Берілген  $A$  нүктесінен  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр түсіреміз:  $A_1 \in n_1 \perp f_\alpha$  және  $A_2 \in n_2 \perp h_\alpha$ . Екінші жазықтықтың фронтальін және горизонтальін жүргізіп аламыз. Фронтальдің горизонталь проекциясы проекциялар осіне параллель жүргізіледі ( $f_2 \parallel x$ ). Оның  $a$  және  $b$  түзулерімен қиылысу нүктелерінің горизонталь проекциялары арқылы вертикаль байланыс сызықтары жүргізіліп  $a_1$  және  $b_1$  түзулері бойынан  $1_1$  және  $2_1$  нүктелері анықталады. Сонда  $f_1 = (1_1 2_1)$  болады. Горизонтальдің фронталь проекциясы  $f_2$  түзуіне параллель жүргізіледі, ал оның горизонталь проекциясын  $l_2$  және  $3_2$  (187, ә-сурет) нүктелері анықтайды:  $h_1 \parallel f_2$ ;  $h_1 \cap a_1 = 1_1$ ;  $h_1 \cap b_1 = 3_1$ ;  $(1_1 1_2) \parallel (2_1 2_2) \parallel (3_1 3_2) \perp x$ ;  $(1_1 1_2) \cap a_2 = 1_2$ ;  $(3_1 3_2) \cap b_2 = 3_2$ . Енді



187-сурет.

$A$  нүктесін бастыра  $\beta$  жазықтығына перпендикуляр  $m$  түзуін жүргіземіз:  $A_1 \in m_1 \perp f_1$ ;  $A_2 \in m_2 \perp h_2$ . Сонда  $A$  нүктесінде қиылысатын екі түзу  $n$  және  $t$  бір жазықтықты ( $\gamma$ ) анықтайды. Осы  $\gamma(n \cap m)$  жазықтығы есептің шарттарын толық қанағаттандырады. Шынында да,  $\gamma$  жазықтығы  $A$  нүктесі арқылы өтеді және ол  $\alpha$  мен  $\beta$  жазықтықтарына перпендикуляр. Өйткені  $\gamma$  жазықтығы  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр  $n$  түзуі арқылы өтеді:  $\gamma \supset n \perp \alpha \Rightarrow \gamma \perp \alpha$ . Сол сияқты  $\gamma$  жазықтығы  $\beta$  жазықтығына перпендикуляр  $m$  түзуі арқылы өтеді:  $\gamma \supset m \perp \beta \Rightarrow \gamma \perp \beta$ . Есептің шешімі жалғыз болатынына көз жеткізу оңай.

5.8.4 - есеп. Берілген  $M$  нүктесі арқылы өтетін  $ABC$  үшбұрышы анықтайтын жазықтыққа перпендикуляр болатын горизонталь проекциялаушы  $\alpha$  жазықтығының іздерін салу керек (188, а-сурет).

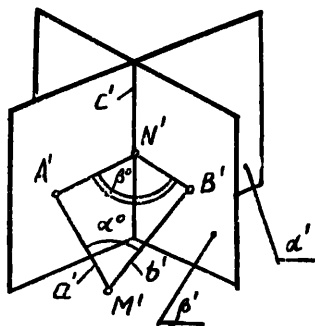


188-сурет.

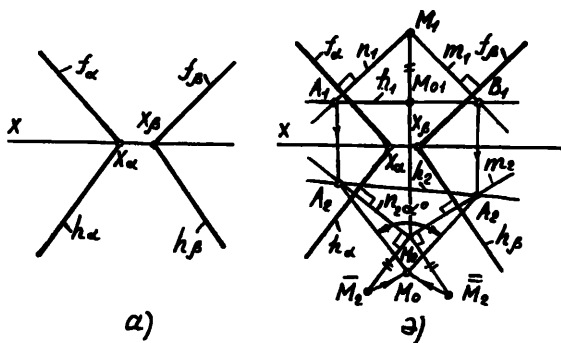
Шешуі.  $ABC$  үшбұрышы анықтайтын жазықтықты  $\beta$  деп белгілесек, онда  $\alpha \perp \beta$  болуы қажет. Сонда  $\beta$  жазықтығы  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр түзу арқылы өтеді екен. Ал горизонталь проекциялаушы жазықтыққа перпендикуляр түзу горизонталь проекциялар жазықтығына параллель орналасады, яғни горизонталь болады. Олай болса,  $\alpha$  жазықтығы  $\beta$  жазықтығының горизонтальіне перпендикуляр болады.  $ABC$  үшбұрышының  $A$  нүктесі арқылы өтетін горизонтальі салынған (188, ә-сурет). Іздеп отырған  $\alpha$  жазықтығының горизонталь ізі  $h_\alpha$  берілген нүктенің горизонталь проекциясы арқылы горизонтальдің горизонталь проекциясына перпендикуляр жүргізіледі:  $M_2 \in h_\alpha \perp h_2$ . Ал  $\alpha$  жазықтығының фронталь ізі  $X_\alpha$  нүктесі арқылы абсцисса осіне перпендикуляр жүргізіледі:  $h_\alpha \cap x = X_\alpha$ ;  $X_\alpha \in f_\alpha \perp x$ . Есептің шешімі жалғыз болады.

### 5.9. ЕКІ ЖАЗЫҚТЫҚ АРАСЫНДАҒЫ БҰРЫШТЫ САЛУ

Қиылысатын екі жазықтық екі екіжақты бұрышты анықтайды. Олардың біреуі доғал, ал екіншісі сүйір болады. Бұл екі бұрыш шамаларының қосындысы  $180^\circ$  болатынын 189-суреттен түсінуге болады. *Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш* деп осы аталған екі екіжақты бұрыштың сүйір бұрышының шамасын айтады. Бізге  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтары беріліп, олардың арасындағы бұрышты анықтау керек болсын. Аталған жазықтықтардан тыс орналасқан  $M$  нүктесін алып, осы  $M$  нүктесін бастыра  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарына перпендикуляр  $a$  және  $b$  түзулерін жүргізелік:  $a \cap \alpha = A$ ;  $b \cap \beta = B$ . Екі жазықтықтың қиылысу сызығы  $c$  болса, онда  $A$  және  $B$  нүктелерінен осы  $c$  түзуіне түсірілген перпендикулярлар  $N$  нүктесінде қиылысады. Сонда пайда болған  $ANBM$  төртбұрышын қарастыралық. Оның бұрыштары  $A$  мен  $B$  тік бұрыштар, яғни  $\widehat{MAN} = \widehat{MBN} = 90^\circ$ . Егер  $\widehat{AMB} = \alpha^\circ$  және  $\widehat{ANB} = \beta^\circ$  болса, онда  $\alpha^\circ + \beta^\circ = 180^\circ$  болуы керек. Олай болса, онда  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтары арасындағы бұрышты анықтау үшін  $\alpha^\circ$  бұры-



189-сурет.



190-сурет.

шын салу жеткілікті. Егер табылған  $\alpha^\circ$  бұрышы сүйір бұрыш болса, онда екі жазықтықтың арасындағы бұрыш та  $\alpha^\circ$  болғаны. Ал  $\alpha^\circ$  доғал бұрыш болса, онда оны  $180^\circ$ -қа дейін толықтыратын  $\beta^\circ = 180^\circ - \alpha^\circ$  бұрышын салу қиынға соқпайды. Соңғы жағдайда берілген жазықтықтар арасындағы бұрыш  $\beta^\circ$  болады.

5.9.1 - е с е п. Іздерімен берілген  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтары арасындағы бұрышты анықтау керек болсын (190, а-сурет).

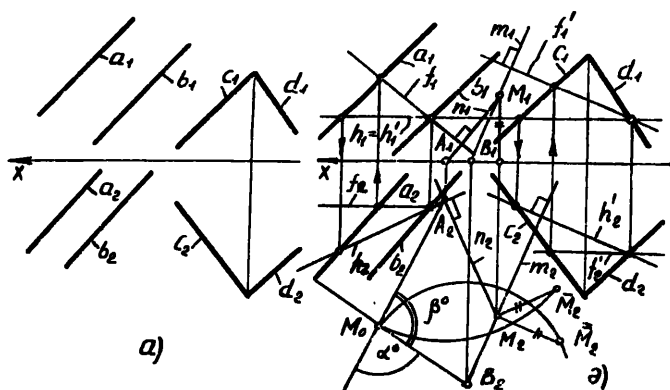
Ш е ш у і. Кеңістіктен  $M$  нүктесін қалауымызша аламыз. Бұл  $M$  нүктесі  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарынан тыс орналасатын болсын.  $M$  нүктесі арқылы екі түзу жүргіземіз: олардың біреуі ( $n$  түзуі)  $\alpha$  жазықтығына, ал екіншісі ( $m$  түзуі)  $\beta$  жазықтығына перпендикуляр орналас-тырылады:  $M \in n \perp \alpha$ ;  $M \in m \perp \beta$ . Осы  $n$  және  $m$  түзулері анықтайтын жазықтықтың қалауымызша алынған гори-зонталін тұрғызалық. Осы горизонталь  $h$  берілген жа-зықтықтарға перпендикуляр түзулермен  $A$  және  $B$  нүкте-лерінде қиылысады:  $h \cap n = A$ ;  $h \cap m = B$ . Пайда болған  $MAVB$  үшбұрышының натурал шамасын тұрғызу нәтиже-сінде оның төбесіне сәйкес бұрышының натурал шамасын

аламыз (190, ә-сурет). Бізде  $AMB$  бұрышы сүйір бұрыш.

Сондықтан  $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} = \widehat{AMB} = \alpha^\circ$  болады.

5.9.2 - е с е п. Берілген  $\alpha(a \parallel b)$  және  $\beta(c \parallel d)$  жазық-тықтары арасындағы бұрыштың натурал шамасын салу керек (191, а-сурет).

Ш е ш у і. Алдымен  $\alpha$  жазықтығының бір горизонта-лін ( $h$ ) және бір фронталін ( $f$ ), одан кейін  $\beta$  жазықты-



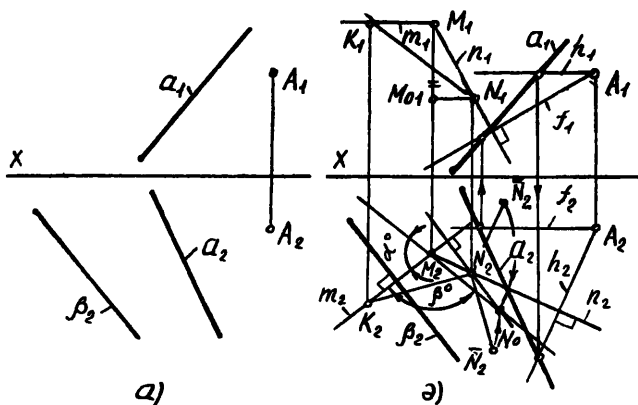
191-сурет.

ғының бір горизонталін ( $h'$ ) және бір фронталін ( $f'$ ) жүргізіп аламыз (191, ә-сурет). Қалауымызша  $M$  нүктесін алып, оны бастыра екі түзу жүргіземіз. Олардың біріншісі  $n-\alpha$  ( $a\parallel b$ ) жазықтығына, ал екіншісі  $m-\beta$  ( $c\cap d$ ) жазықтығына перпендикуляр орналастырылады. Енді  $M$  нүктесінде қиылысатын  $n$  және  $m$  түзулері арасындағы бұрыштың натурал шамасы тұрғызылады. 191-суретте

табылған бұрыш  $A_2\widehat{M_0}B_2$  — доғал бұрыш, яғни  $A_2\widehat{M_0}B_2 > 90^\circ$ . Сондықтан іздеп отырған бұрышымыз табылған

$A_2\widehat{M_0}B_2$  бұрышына сыбайлас бұрыш болады.

5.9.3 - есеп. Жалпы жағдайда орналасқан  $\alpha(A; a)$



192-сурет.

жазықтығы мен горизонталь проекциялаушы  $\beta$  жазықтығының арасындағы бұрышты анықтау керек (192, а-сурет).

**Шешуі.**  $A$  нүктесі арқылы өтетін  $\alpha$  жазықтығында жататын горизонталь  $h$  және фронталь  $f$  түзулер жүргіземіз (192, ә-сурет). Қалауымызша  $M$  нүктесін алып, оны бастыра  $n$  және  $m$  түзулерін жүргіземіз:  $M \in n \perp \alpha$ ;  $M \in m \perp \beta$ . Горизонталь проекциялаушы жазықтық  $\beta$ -ға перпендикуляр түзу  $m$  горизонталь орналасады, яғни оның фронталь проекциясын  $Ox$  осіне параллель жүргіземіз ( $M_1 \in m_1 \parallel x$ ). Қалауымызша  $N \in n$  және  $K \in m$  нүктелерін алып, оларды кесіндімен қосалық. Сонда пайда болған  $KMN$  үшбұрышының натурал шамасын саламыз.

$\widehat{K_2M_2N_0}$  бұрышы доғал бұрыш болғандықтан, берілген жазықтықтардың арасындағы бұрыш осы бұрышты  $180^\circ$ -қа дейін толықтыратын  $\alpha^\circ$  бұрышымен анықталады.

### Есептер

Төрт нүкте  $A(30; 30; 40)$ ,  $B(0; 10; 20)$ ,  $C(20; 40; 0)$ ,  $D(50; 15; 15)$  берілген. Эпюрде төмендегі есептерді шешу керек.

1.  $AB$  кесіндісінің ұзындығын және оның горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын салу керек.

2.  $CD$  кесіндісінің ұзындығын және оның фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын салыңыздар.

3.  $ABC$  үшбұрышының натурал шамасын табу және  $\widehat{ABD}$  бұрышының натурал шамасын салу керек.

4.  $D$  нүктесінен  $ABC$  үшбұрышы анықтайтын жазықтыққа дейінгі қашықтықты анықтаңыздар.

5.  $B$  нүктесі арқылы  $ACD$  үшбұрышы анықтайтын жазықтыққа перпендикуляр түзу жүргізу керек.

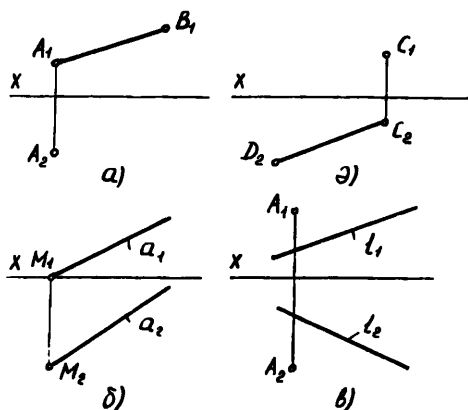
6.  $D$  нүктесі арқылы  $AB$  түзуімен тікбұрыш жасап қиылысатын түзу жүргізіңіздер.

7.  $B$  нүктесінен  $AC$  түзуіне дейінгі қашықтықты анықтаңыздар.

8.  $ABD$  үшбұрышы анықтайтын жазықтықтың горизонталь және фронталь проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын анықтау керек.

9.  $C$  нүктесі арқылы  $AB$  түзуіне перпендикуляр жазықтық жүргізу керек.

10.  $AC$  және  $BD$  түзулері арасындағы ең қысқа қашықтықты анықтау керек.



193-сурет.

11.  $AD$  түзуі мен  $BCD$  жазықтығы арасындағы бұрышты анықтаңыздар.

12.  $AD$  және  $BC$  түзулері арасындағы бұрыштың натурал шамасын салыңыздар.

13.  $A$  нүктесіне  $BCD$  үшбұрышы анықтайтын жазықтыққа қатысты симметриялы болатын  $E$  нүктесін салыңыздар.

14.  $B$  нүктесі арқылы өтетін  $ABC$  және  $ACD$  үшбұрыштары анықтайтын жазықтықтарға перпендикуляр жазықтық салыңыздар.

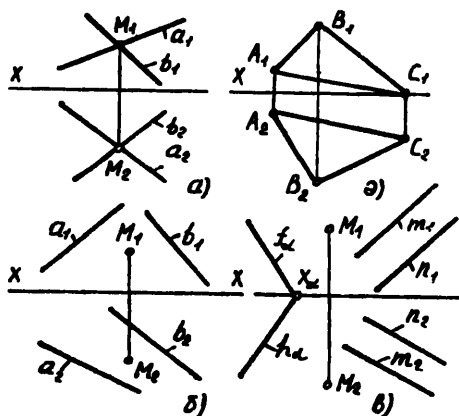
15. Ұзындығы 60 мм болатын  $AB$  кесіндісінің горизонталь проекциясын салуды аяқтаңыздар (193, а-сурет).

16. Горизонталь проекциялар жазықтығына  $30^\circ$ -қа тең бұрышпен көлбейтін  $CD$  кесіндісінің фронталь проекциясын салуды аяқтау керек (193, ә-сурет).

17. Берілген  $a$  түзуіне ұзындығы 40 мм болатын  $MN$  кесіндісін салыңыздар (193, б-сурет).

18.  $A$  нүктесі арқылы фронталь проекциялар жазықтығына параллель  $l$  түзуіне перпендикуляр  $f$  түзуін және горизонталь проекциялар жазықтығына параллель және  $l$  түзуіне перпендикуляр  $h$  түзуін салыңыздар (193, в-сурет). Осы  $f$  және  $h$  түзулері анықтайтын жазықтық пен  $l$  түзуі арасындағы бұрышты анықтаңыздар.  $A$  нүктесі арқылы  $l$  түзуімен тікбұрыш жасап қиылысатын  $a$  түзуін жүргізіңіздер.

19. Горизонталь проекциялаушы жазықтықта орналасқан  $ABC$  үшбұрышының фронталь және горизонталь



194-сурет.

проекцияларын салыңыздар:  $A(5; 40; 15)$ ,  $B(45; 10; 15)$ ,  $C(20; y; 40)$ .

20.  $M$  нүктесінде қиылысатын  $a$  және  $b$  түзулері арасындағы бұрышты анықтаңыздар. Осы  $\alpha(a \cap b)$  жазықтығының  $a$  түзуінен қашықтығы 15 мм және  $b$  түзуінен қашықтығы 20 мм болатын нүктелерін салыңыздар (194, а-сурет).

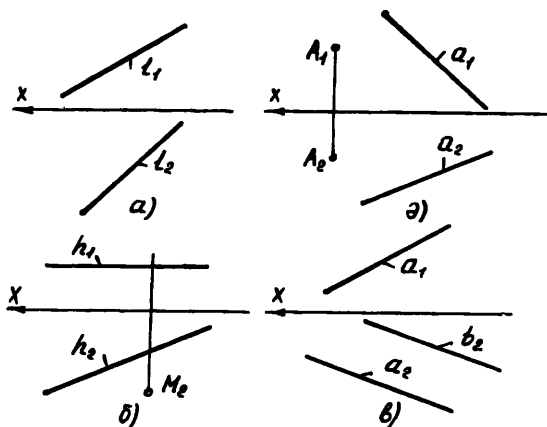
21.  $ABC$  үшбұрышының медианалары қиылысатын нүктесі арқылы оның жазықтығына перпендикуляр түзу жүргізіп, жүргізілген түзудің көрінбейтін бөлігін анықтаңыздар.  $ABC$  үшбұрышы жазықтығынан 30 мм қашықтықта орналасқан  $\alpha$  жазықтығының іздерін салыңыздар (194, ә-сурет).

22.  $M$  нүктесі арқылы өтетін және берілген  $a$  мен  $b$  түзулерінің әрқайсысына да перпендикуляр болатын түзуді салу керек (194, б-сурет).

23.  $M$  нүктесі арқылы өтетін және берілген  $\alpha(f_x \cap h_x)$  мен  $\beta(m \parallel n)$  жазықтықтарының әрқайсысына да перпендикуляр болатын  $\gamma$  жазықтығын салу керек (194, в-сурет).

24. Ұзындығы 60 мм болатын  $AB$  кесіндісінің эпюрін салу керек.  $AB$  кесіндісі горизонталь проекциялар жазықтығына  $45^\circ$  және фронталь проекциялар жазықтығына  $30^\circ$  бұрышпен көлбейді:  $A(20; 50; 50)$ .

25. Өзінің фронталь проекциялар жазықтығына қарағандағы ең үлкен көлбеулік сызығы  $l$  болатын  $\alpha$  жазықтығының іздерін салыңыздар және оның проекциялар



195-сурет.

жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын анықтаңыздар (195, а-сурет).

26. Берілген  $\beta(A; a)$  жазықтығының проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын тұрғызыңыздар (195, ә-сурет).

27. Бір қабырғасы берілген  $a$  түзуінде жататын тең қабырғалы  $ABC$  үшбұрышының проекцияларын салыңыздар (195, ә-сурет).

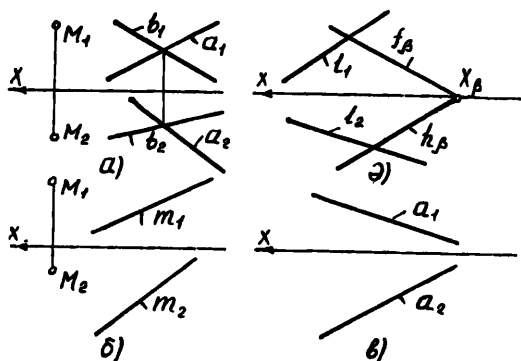
28.  $A$  нүктесінен  $a$  түзуіне дейінгі қашықтықтың натурал шамасын табыңыздар (195, ә-сурет).

29. Горизонталь  $h$  және одан 40 мм қашықтықта орналасқан  $M$  нүктесінің горизонталь проекциясы берілген (195, б-сурет). Осы  $M$  нүктесінің фронталь проекциясын салу керек.

30. Өзара параллель  $a$  және  $b$  түзулерінің біреуі екі проекциясымен берілген (195, в-сурет), ал екіншісінің горизонталь проекциясы ғана белгілі. Олардың ара қашықтығын 30 мм деп алып, екінші түзудің фронталь проекциясын салыңыздар.

31.  $M$  нүктесі және  $\beta(a \cap b)$  жазықтығы берілген (196, а-сурет). Берілген  $\beta$  жазықтығына параллель және  $M$  нүктесі мен  $\beta$  жазықтығы аралығын қак бөлетін  $\alpha$  жазықтығын салыңыздар.

32. Өзара параллель  $\alpha$  және  $\beta(a \cap b)$  жазықтықтары мен  $l(l_1, l_2)$  түзуін қарастыралық (196, ә-сурет).  $l$  түзуі  $\alpha$  жазықтығын  $A$  нүктесінде, ал  $\beta$  жазықтығын  $B$  нүктесінде қияды:  $l \cap \alpha = A$ ;  $l \cap \beta = B$ . Осы  $AB$  кесіндісінің ұзындығы 50 мм болатындай етіп  $\alpha$  жазықтығын салу керек.



196-сурет.

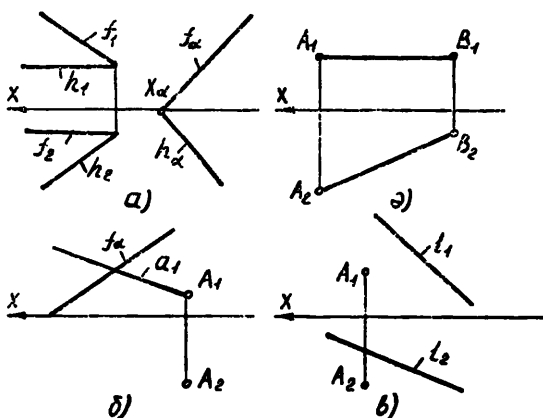
33.  $M$  нүктесі арқылы өтетін және  $m$  түзуімен  $45^\circ$ -қа тең бұрыш жасап қиылысатын түзуді салу керек (196, б-сурет).

34. Берілген  $a$  түзуі мен абсциссалар осі аралығындағы бұрыштың натурал шамасын анықтаңыздар (196, в-сурет).

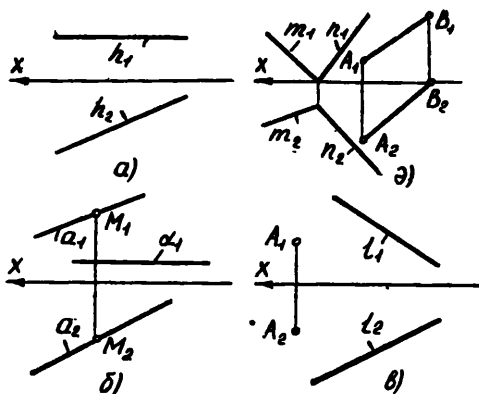
35.  $\alpha(f_\alpha \cap h_\alpha)$  және  $\beta(f_\beta \cap h_\beta)$  жазықтықтары арасындағы бұрышты анықтаңыздар (197, а-сурет).

36. Горизонталь проекциялар жазықтығына  $45^\circ$ -қа тең бұрышпен көлбейтін тең қабырғалы  $ABC$  үшбұрышының проекцияларын салыңыздар (197, ә-сурет).

37.  $A$  нүктесі арқылы өтетін және  $\alpha(A; f_\alpha)$  жазықтығымен  $45^\circ$  бұрыш жасайтын  $a(a_1)$  түзуінің горизонталь проекциясын салу керек (197, б-сурет).



197-сурет.



198-сурет.

38.  $A$  нүктесі арқылы өтетін және  $l$  түзуіне  $30^\circ$  бұрышпен көлбейтін  $\alpha$  жазықтығын салыңыздар (197, в-сурет).

39.  $M(40; 40; 50)$  нүктесі арқылы өтетін, горизонталь проекциялар жазықтығына  $45^\circ$  бұрышпен және фронталь проекциялар жазықтығына  $60^\circ$  бұрышпен көлбейтін  $\alpha$  жазықтығын салу керек.

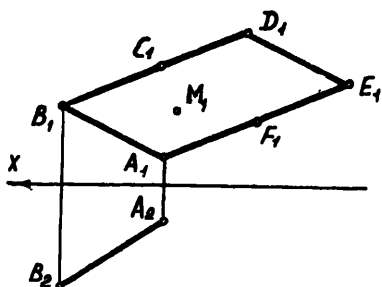
40. Берілген горизонталь  $h(h_1, h_2)$  арқылы өтетін және горизонталь проекциялар жазықтығына  $75^\circ$  бұрышпен көлбейтін  $\alpha$  жазықтығының іздерін салыңыздар (198, а-сурет).

41.  $AB$  кесіндісі және  $\alpha(m \cap n)$  жазықтығы берілген (198, ә-сурет). Осы  $AB$  кесіндісінің  $\alpha$  жазықтығындағы тікбұрышты проекциясын салыңыздар.

42. Жалпы жағдайда орналасқан  $a$  түзуі және горизонталь жазықтық  $\alpha$  берілген (198, б-сурет).  $M$  нүктесі арқылы ( $M \in a$ ) берілген  $a$  түзуіне перпендикуляр және  $\alpha$  жазықтығын  $M$  нүктесінен 50 мм қашықтықта орналасатын  $N$  нүктесінде қиятын  $b$  түзуін салу керек.

43. Берілген  $l$  түзуін симметрия осі деп қарастырып,  $A$  нүктесіне симметриялы болатын  $B$  нүктесін салыңыздар (198, а-сурет).

44. 199-суретте биль-

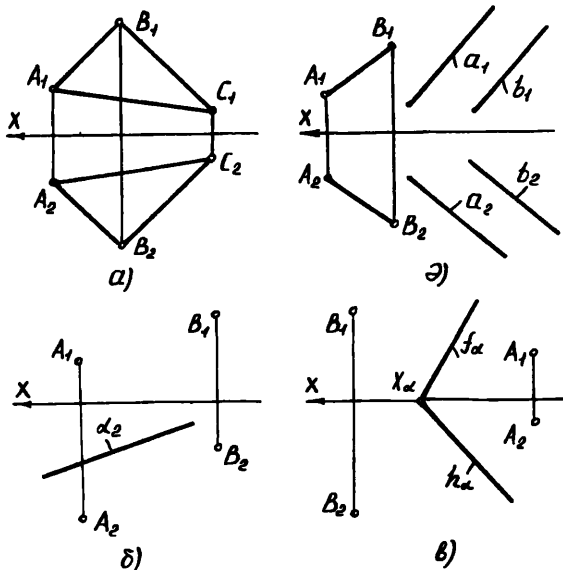


199-сурет.

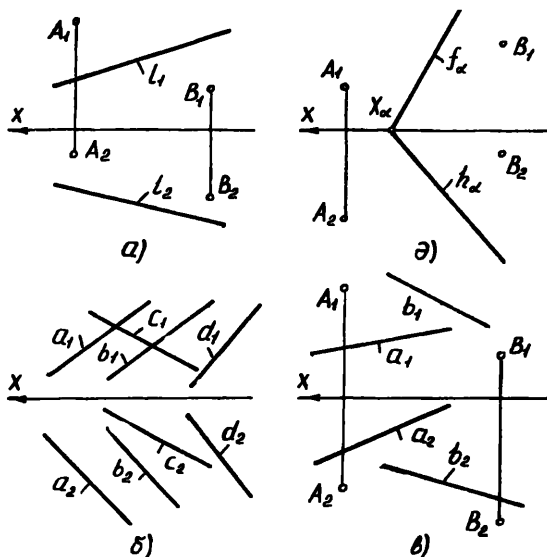
ярд столының фронталь проекциясы кескінделген. Бильярд столының беті тіктөртбұрышты болады. Осы тіктөртбұрыштың төбелері —  $A, B, D$  және  $E$  нүктелерінде шарларға арналған ұялар орналастырылады. Столдың ұзын қабырғаларының орталарына қосымша тағы да екі ұя ( $C$  мен  $F$  нүктелері) орналастырылады.  $ABDE$  тіктөртбұрышының  $AB$  қырының горизонталь проекциясы берілген.  $C, D, E$  және  $F$  нүктелерінің горизонталь проекцияларын табыңыздар. Бильярд шары  $M$  нүктесінде орналасқан. Шардың траекториясын мына жағдайлар үшін салу керек: 1)  $AF$  қабырғасына соқтығысып,  $D$  нүктесіндегі ұяға түседі; 2)  $AF$  қабырғасына, одан кейін  $DE$  қабырғасына соқтығысып,  $C$  нүктесіндегі ұяға түседі; 3)  $AB$  қабырғасына, одан кейін  $BD$  қабырғасына соқтығысып,  $E$  нүктесіндегі ұяға түседі; 4)  $BD$  қабырғасына, одан кейін  $DE$  қабырғасына соқтығысып,  $A$  нүктесіндегі ұяға түседі.

45.  $ABC$  үшбұрышының ауырлық центрі арқылы оның жазықтығына перпендикуляр түзу жүргізіңіздер (200, а-сурет).

46.  $AB$  кесіндісіне  $\alpha (a \parallel b)$  жазықтығына қатысты симметриялы болатын  $A'B'$  кесіндісін салыңыздар (200, ә-сурет).



200-сурет.



201-сурет.

47.  $A$  нүктесінен шыққан сәуле  $\alpha$  жазықтығына шағылысқаннан кейін  $B$  нүктесі арқылы өтеді. Осы  $A$  нүктесінен шығатын және  $B$  нүктесі арқылы өтетін сәуле-лердің бағыттарын алдымен  $\alpha$  жазықтығын горизонталь проекциялаушы жазықтық деп (200, б-сурет), одан кейін оны жалпы жағдайда орналасқан (200, в-сурет) деп қарастырып салыңыздар.

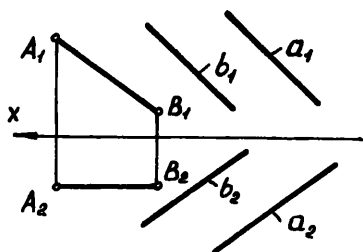
48. Берілген  $l$  түзуі бойынан  $A$  және  $B$  нүктелерінен қашықтықтары өзара тең болатын  $L$  нүктесін табу керек (201, а-сурет).

49.  $A$  мен  $B$  нүктелері және  $\alpha(h_\alpha \cap f_\alpha)$  жазықтығы берілген (201, ә-сурет). Осы  $\alpha$  жазықтығындағы  $A$  мен  $B$  нүктелерінен бірдей қашықтықтағы нүктелердің орнын анықтаңыздар.

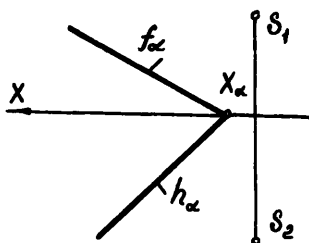
50. Берілген  $\alpha(a \parallel b)$  жазықтығына перпендикуляр және  $c$  мен  $d$  түзулерін қиятын  $l$  түзуін салыңыздар (201, б-сурет).

51.  $A$  нүктесі арқылы  $a$  түзуіне перпендикуляр және  $\alpha(B; b)$  жазықтығына параллель болатын  $l$  түзуін жүргізіңіздер (201, в-сурет).

52. Кубтың бір қыры  $AB$  және  $\alpha(a \parallel b)$  жазықтығы берілген (202-сурет). Оның  $A$  төбесіне көршілес  $A'$  тө-



202-сурет.



203-сурет.

бесі  $\alpha$  жазықтығында жатыр. Осы кубтың  $(ABCD A' B' C' D')$  горизонталь және фронталь проекцияларын салыңыздар.

53. Төбесі берілген  $S(S_1, S_2)$  нүктесі болатын, ал табаны  $\alpha(f_\alpha \cap h_\alpha)$  жазықтығында жататын айналу конусының горизонталь және фронталь проекцияларын салу керек (203-сурет). Конустың табанындағы шеңбердің радиусы 30 мм.

## 6 - тарау. ЭПЮРДІ ТҮРЛЕНДІРУ ТӘСІЛДЕРІ

### 6.1. ЭПЮРДІ ТҮРЛЕНДІРУ ТӘСІЛДЕРІ ТУРАЛЫ ЖАЛПЫ МАҒЛҰМАТТАР

Жоғарыда қарастырылған позициялық және метрикалық есептерді шешу жолдарына талдау жасап, оларды зерттейтін болсақ, онда берілген геометриялық фигура проекциялар жазықтықтарына қатысты жеке жағдайда орналасса, есепті шешу оңай, ал жалпы жағдайда орналасса — қиын болатынын көреміз. Позициялық есептердің мысалы ретінде жалпы жағдайда орналасқан түзудің жеке жағдайда және жалпы жағдайда орналасқан жазықтықтармен қиылысу нүктесін салуды қарастырсақ, онда жеке жағдайда орналасқан жазықтықпен қиылысу нүктесінің бір проекциясы эпюрден көмекші сызық жүргізбей-ақ табылады; ал жалпы жағдайда орналасқан жазықтықпен қиылысу нүктесінің проекцияларын табу үшін біраз көмекші сызықтар жүргізуге тура келеді. Екі жазықтықтың қиылысу сызығын салу есебінде де олардың біреуі проекциялаушы жазықтық болса, онда есепті шешу оңай, ал олардың екеуі де жалпы жағдайда орналасса, есепті шешу үшін көптеген көмекші сызықтар

жүргізу қажет. Метрикалық есептерде де осы заңдылық байқалады. Жеке жағдайда орналасқан түзу кесіндісінің ұзындығын және оның проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын эпюрден көмекші сызықтар жүргізбей анықтауға болады, ал жалпы жағдайда орналасқан түзу кесіндісінің ұзындығы мен көлбеулік бұрыштарын анықтау үшін тікбұрышты үшбұрыш әдісін пайдалану керек. Деңгейлік жазықтықтағы фигура оған сәйкес проекцияда нақты шамасын сақтап кескінделеді. Жалпы жағдайда орналасқан жазықтықтағы фигураның натурал шамасын салу үшін де көптеген көмекші сызықтарды пайдалануға тура келеді. Осындай жалпы жағдайда орналасқан фигураларға байланысты есептерді жеке жағдайларға келтіріп алған тиімді болар еді. Геометриялық есептерді шешуде берілген геометриялық фигуралардың жалпы жағдайларынан жеке жағдайларына, яғни есепті шешуді жеңілдететін жағдайларға көшуді *эпюрді түрлендіру* деп атайды. Эпюрді түрлендіруде фигураның берілген проекциялары бойынша оның есепті шешуге қолайлы проекциялары тұрғызылады. Фигураның берілген проекцияларынан оның жаңа проекцияларына көшкенде өзгермей қалатын қасиеттерді *түрлендірудің инварианттары* деп атайды. Түрлендірудің инварианттары эпюрде берілген проекциялар бойынша жаңа проекцияларды салуға мүмкіндік беруі тиіс.

Эпюрді түрлендірудің екі әдісі бар: берілген фигуралардың кеңістіктегі орнын өзгерту және қосымша проекциялар жазықтығын енгізу. Бірінші әдісте берілген фигураның проекциялар жазықтықтарына қатысты орындары өзгертіледі, яғни берілген денені қозғап, есепті шешуге қолайлы жағдайға апарып қоямыз. Осы жаңа жағдайдағы проекцияларын пайдаланып есепті шешеміз де эпюрді кері түрлендіреміз. Екінші әдісте жаңа проекциялар жазықтығы енгізіледі. Осы жаңа жазықтықты *қосымша проекциялар жазықтығы* деп атайды. Берілген фигураның кеңістіктегі орнын өзгерту өте көп тараған үш тәсілде кездеседі. Бұл тәсілдер: *жазық параллель еңгізгенде, проекциялаушы түзуден айналдыру және деңгейлік түзуден айналдыру*. Қосымша проекциялар жазықтығын енгізу әдісінде берілген денені қозғамайды, оны қосымша проекциялар жазықтығына проекциялайды, ал одан кейін қосымша проекциялар жазықтығындағы проекцияны негізгі жазықтықтарға тікбұрыштап проекциялайды, ал кейде (метрикалық есептерде) қосымша проекцияның натурал шамасын тұрғызады. Қосымша

проекциялар жазықтығы жалпы жағдай жазықтығы, немесе проекциялаушы жазықтық, немесе деңгейлік жазықтық болуы мүмкін. Фигураны қосымша проекциялар жазықтығына центрден, немесе параллель, немесе тікбұрыштап проекциялауға болады. Сонда қосымша проекциялар жазықтығын енгізу әдісінде 9 жағдай болуы мүмкін. Олардың ішінде көп тарағаны — фигураны проекциялаушы жазықтыққа тікбұрыштап проекциялау. Бұл жағдайды *проекциялар жазықтығын алмастыру* деп атайды.

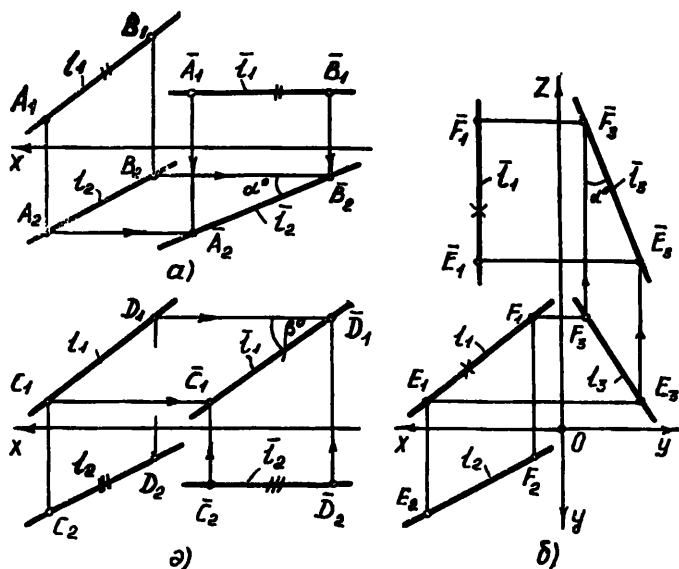
Есептерді эпюрді түрлендіру тәсілдерінің біреуін пайдаланып шешудің негізінде төменде келтірілген төрт есеп жатады: жалпы жағдай түзуін деңгейлік түзуге түрлендіру; деңгейлік түзуді проекциялаушы түзуге түрлендіру; жалпы жағдай жазықтығын проекциялаушы жазықтыққа түрлендіру; проекциялаушы жазықтықты деңгейлік жазықтыққа түрлендіру. Кесіндінің натурал ұзындығын анықтау үшін бірінші есептің шешуін, екі түзудің арақашықтығын табу үшін алдымен бірінші есептің, одан кейін екінші есептің шешулерін, жазықтықтың проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын салу үшін үшінші есептің шешуін, ал жазық фигураның натурал шамасын тұрғызу үшін алдымен үшінші есептің, одан кейін төртінші есептің шешулерін пайдалану қажет.

## 6.2. ЖАЗЫҚ-ПАРАЛЛЕЛЬ ЫҒЫСТЫРУ

*Жазық-параллель ығыстыру* деп фигураны оның нүктелері өзара параллель жазықтықтарда жататын траекториялар бойынша орындарын өзгертетіндей етіп қозғауды айтады. Фигура  $A, B, C, \dots$  нүктелерінен тұратын болсын, ал осы фигураны жазық-параллель ығыстыруда  $A, B, C, \dots$  нүктелері сызатын траекториялар жазықтықтары  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  болсын. Сонда  $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma \dots$  болуы шарт. Осы  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  жазықтықтарының бағытын *жазық-параллель ығыстыру бағыты* дейді. Жазық-параллель ығыстыру бағытын негізгі проекциялар жазықтықтарының біреуіне параллель деп қарастырған қолайлы болады. Осыған байланысты фронталь, немесе горизонталь, немесе профиль бағыттағы жазық-параллель ығыстыруларды ғана қарастырамыз. Эпюрді түрлендіру үшін түрлендірудің инварианттарын білуіміз керек, яғни жазық-параллель ығыстыру кезінде өзгермейтін қасиеттерді анықтауымыз қажет. Осы мақсатта  $AB$  кесіндісінің фронталь  $[A_1B_1]$  және горизонталь  $[A_2B_2]$  проекцияларын қарас-

тыралық. Осы кесіндіні фронталь ығыстырсақ, онда  $A$  нүктесі  $\alpha$  жазықтығында және  $B$  нүктесі  $\beta$  жазықтығында орналасатын траекториялармен қозғалулары және  $\alpha \parallel \beta \parallel \pi_1$  болуы қажет.  $AA_1$  түзуі  $\beta$  жазықтығымен  $A_0$  нүктесінде қиылыссын. Сонда пайда болған  $AA_0B$  үшбұрышы — тікбұрышты үшбұрыш. Шынында да,  $(AA_1) \perp \pi_1$  болғандықтан,  $\pi_1$  жазықтығына перпендикуляр түзу  $\beta$  жазықтығына да перпендикуляр болады:  $(AA_1) \perp \beta$ .  $(A_0B) \subset \beta$  болғандықтан,  $AA_0$  түзуі осы  $\beta$  жазықтығында жатқан кез келген түзуге, олардың ішінде  $A_0B$  түзуіне де перпендикуляр болады.  $AB$  кесіндісін фронталь ығыстырып  $\bar{A}\bar{B}$  жағдайына түрлендірелік.  $\bar{A}\bar{B}$  кесіндісінің проекциялары  $[\bar{A}_1\bar{B}_1]$  және  $[\bar{A}_2\bar{B}_2]$  болсын және  $\bar{A}\bar{A}_1$  түзуі  $\beta$  жазықтығымен  $\bar{A}_0$  нүктесінде қиылыссын. Сонда пайда болған  $\bar{A}\bar{A}_0\bar{B}$  үшбұрышы да — тікбұрышты үшбұрыш.  $AA_0B$  және  $\bar{A}\bar{A}_0\bar{B}$  үшбұрыштарын салыстырсақ, олардың өзара тең екенін көреміз. Өйткені олардың гипотенузалары  $|AB| = |\bar{A}\bar{B}|$  және катеттері  $|AA_0| = |\bar{A}\bar{A}_0|$  тең болады. Сондықтан бұл екі үшбұрыштың екінші катеттері де өзара тең болулары тиіс:  $|A_0B| = |\bar{A}_0\bar{B}|$ .  $A_0BB_1A_1$  және  $\bar{A}_0\bar{B}\bar{B}_1\bar{A}_1$  параллелограмдарынан  $|A_0B| = |A_1B_1|$  және  $|\bar{A}_0\bar{B}| = |\bar{A}_1\bar{B}_1|$  болатынын көреміз (параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары). Сондықтан  $|A_1B_1| = |\bar{A}_1\bar{B}_1|$ , яғни түрлендіру кезінде фронталь проекцияның шамасы өзгермейді.  $A$  және  $\bar{A}$  нүктелері жататын  $\alpha$  жазықтығы,  $B$  және  $\bar{B}$  нүктелері жататын  $\beta$  жазықтығы фронталь жазықтықтар болғандықтан  $(A_2\bar{A}_2) \parallel (B_2\bar{B}_2) \parallel x$  болады.

Енді жазық-параллель ығыстыру тәсілінің инварианттарын тұжырымдауға болады. *Фронталь ығыстырудың* бірінші инварианты: фронталь проекция өзінің өлшемдерін және формасын өзгертпей орын ауыстырады; екінші инварианты: нүктелердің горизонталь проекциялары  $Ox$  осіне параллель (горизонталь), ал профиль проекциялары  $Oz$  осіне параллель (вертикаль) бағытта қозғалады. *Горизонталь ығыстырудың* бірінші инварианты: горизонталь проекция өзінің өлшемдерін және формасын өзгертпей орын ауыстырады; екінші инварианты: нүктелердің фронталь проекциялары  $Ox$  осіне параллель (горизонталь) бағытта қозғалады. *Профиль ығыстырудың* бірінші инварианты: профиль проекция өзінің өлшемдерін және формасын сақтап орын ауыстырады; екінші инварианты: нүктелердің фронталь проекциялары  $Oz$  осіне параллель (вертикаль) бағытта қозғалады. Бұл үш бағыттағы параллель ығыстыру тәсілінің инварианттарын



204-сурет.

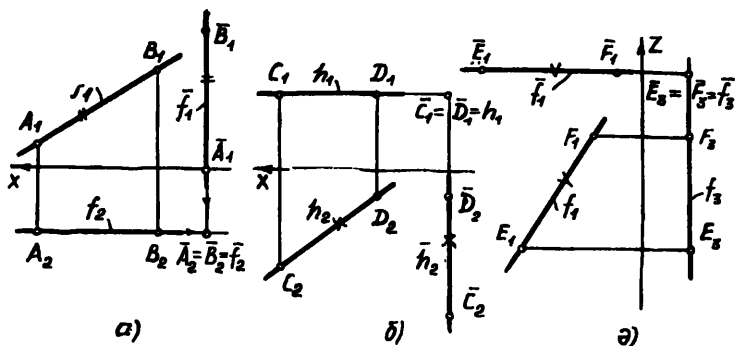
жалпылап, былай айтуға болады: 1) қозғау бағытына параллель жазықтықтағы проекция өзінің өлшемдерін және формасын сақтап орын ауыстырады; 2) нүктелердің қозғалу бағытына перпендикуляр жазықтықтағы проекциялары байланыс сызығына перпендикуляр бағытта қозғалады.

Енді жоғарыда келтірілген негізгі төрт есепті жазық-параллель ығыстыру тәсілін пайдаланып шешуді қарастырылық.

1-есеп. Жалпы жағдайда орналасқан берілген  $l$  түзуін деңгейлік түзуге айналдыру қажет (204-сурет).

Шешуі. Деңгейлік түзудің үш түрі бар дегенбіз. Олар фронталь, горизонталь және профиль түзулер. Сонда жалпы жағдай түзуін осы үш түзудің біреуіне айналдыруымыз керек. Есептің үш шешуі болады. Берілген түзуді горизонтальға түрлендіру, яғни оны горизонталь проекциялар жазықтығына параллель жағдайға келтіру үшін оны фронталь ығыстыруымыз керек. Горизонтальдың фронталь проекциясы  $Ox$  осіне параллель болуы қажет. Осы  $l$  түзуі бойынан қалауымызша  $A$  және  $B$  нүктелерін аламыз. Горизонталь түзу жүргізіп, оны  $l$  түзуінің түрленгеннен кейінгі фронталь проекциясы  $\bar{l}_1$  деп қарастырамыз (204, а-сурет). Түрлендірудің бірінші ин-

вариантына сай  $|A_1B_1| = |\bar{A}_1\bar{B}_1|$  болатындай етіп  $\bar{A}_1$  және  $\bar{B}_1$  нүктелерін тағайындаймыз. Екінші инвариантқа сай  $A_2$  және  $B_2$  нүктелері арқылы горизонталь түзулер жүргізіп,  $\bar{A}_2$  және  $\bar{B}_2$  нүктелерін осы түзулердің бойынан іздейміз.  $\bar{A}_1$  және  $\bar{B}_1$  нүктелері арқылы өтетін вертикаль байланыс сызықтары сәйкес горизонталь түзулер бойынан  $\bar{A}_2$  және  $\bar{B}_2$  нүктелерін анықтайды. Сонда  $(\bar{A}_2\bar{B}_2) = \bar{l}_2$  түзуі алынады. Біз дегенімізге жеттік, яғни  $l$  түзуін горизонталь түзуге ( $\bar{l}$ ) түрлендірдік. Сонда  $AB$  кесіндісінің ұзындығы ( $|\bar{A}_2\bar{B}_2|$ ) және фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрыш ( $\alpha^\circ$ ) анықталды (204, а-сурет). Енді  $l$  түзуін фронтальға түрлендіру үшін оны горизонталь ығыстыру қажет. Қалауымызша горизонталь түзу ( $\bar{l}_2$ ) жүргіземіз:  $C \in l$ ;  $D \in l$ . Бірінші инвариант бойынша  $|C_2D_2| = |\bar{C}_2\bar{D}_2|$  болуы қажет (204, ә-сурет). Екінші инвариант бойынша  $C$  нүктесінің фронталь проекциясы  $C_1$  нүктесі арқылы жүргізілген горизонталь түзуде,  $D$  нүктесінің фронталь проекциясы  $D_1$  нүктесі арқылы жүргізілген горизонталь түзуде жатады.  $\bar{C}_2$  және  $\bar{D}_2$  нүктелері арқылы байланыс сызықтарын жүргізіп  $\bar{C}_1$  және  $\bar{D}_1$  нүктелерін табамыз. Сонда  $(\bar{C}_1\bar{D}_1) = \bar{l}_1$  болады.  $\bar{C}\bar{D}$  түзуі фронталь проекциялар жазықтығына параллель, яғни жалпы жағдайдағы  $l$  түзуін фронтальға ( $\bar{C}\bar{D}$  түзуіне) айналдырдық. Эпюрден  $CD$  кесіндісінің ұзындығы ( $|\bar{C}_1\bar{D}_1|$ ) және горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы ( $\beta^\circ$ ) анықталады (204, ә-сурет). Берілген  $l$  түзуін профиль түзуге түрлендіру үшін де оны фронталь ығыстыруымыз қажет. Бұл жағдайда фронталь және профиль проекциялардан тұратын эпюр қарастырылады. Алдымен  $l$  түзуі бойынан  $E$  және  $F$  нүктелерін белгілеп, оның профиль проекциясын ( $l_3$  түзуін) тұрғызып аламыз. Профиль түзудің фронталь проекциясы  $Oz$  осіне параллель болуы тиіс. Қалауымызша жүргізілген вертикаль түзу  $\bar{l}_1$  жаңа фронталь проекция деп қарастырып, оның бойынан  $|\bar{E}_1\bar{F}_1| = |E_1F_1|$  болатындай  $\bar{E}_1$  және  $\bar{F}_1$  нүктелерін аламыз (бұл арада бірінші инвариант ескерілді). Осы  $E$  және  $F$  нүктелерінің профиль проекциялары (екінші инвариант)  $Oz$  осіне параллель вертикаль түзулердің бойымен қозғалады.  $E_1$  және  $F_1$  нүктелері арқылы горизонталь байланыс сызықтарын жүргізсек, онда  $\bar{E}_3$  және  $\bar{F}_3$  нүктелерін табамыз (204, б-сурет). Соңғы екі нүкте арқылы  $\bar{l}_3$  түзуі жүргізіледі.  $\bar{l}(\bar{l}_1, \bar{l}_3)$  түзуінің профиль проекциялар жазықтығына параллель, яғни профиль түзу екеніне көз жеткізу қиын емес. Эпюрден  $EF$  кесіндісінің ұзындығы ( $|EF| = |E_3F_3|$ )

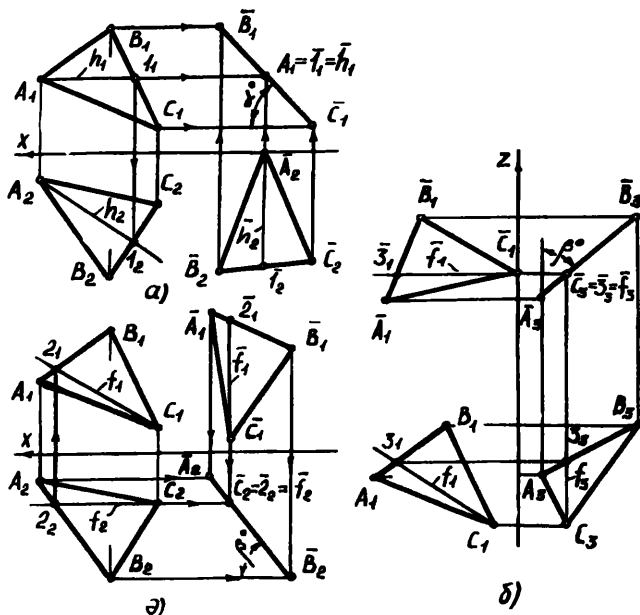


205-сурет.

және оның  $\pi_1$  жазықтығына көлбеулік бұрышы ( $\alpha^\circ$ ) анықталады (204, б-сурет).  $l(l_1, l_3)$  түзуін профиль ығыстырудың нәтижесінде оны фронталь түзуге түрлендіруге болады.

2-есеп. Берілген деңгейлік түзуді проекциялаушы түзуге айналдыру қажет (205-сурет).

**Шешуі.** Берілген түзу фронталь, немесе горизонталь, немесе профиль түзу болуы мүмкін. Егер берілген түзу фронталь болса, онда оны горизонталь проекциялаушы, немесе профиль проекциялаушы түзуге айналдыруға болады. Осы мақсатта түзуді фронталь ығыстырудың нәтижесінде горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр жағдайға келтіруге болады. Қалауымызша вертикаль түзу жүргізіп, оны түзудің түрленгеннен кейінгі фронталь проекциясы деп қарастырамыз:  $A \in f$ ;  $B \in f$ ;  $\bar{f}_1 \perp x$ ;  $|\bar{A}_1\bar{B}_1| = |A_1B_1|$ . Одан кейін оның горизонталь проекциясын табамыз (205, а-сурет).  $\bar{f}_2 \parallel x$ ;  $\bar{f}_1 \cap \bar{f}_2 = \bar{A}_2 = \bar{B}_2 = \bar{f}_2$ . Фронталь проекциясы вертикаль орналасқан  $\bar{f}_1$  түзуі, ал горизонталь проекциясы  $\bar{A}_2 = \bar{B}_2 = \bar{f}_2$  нүктесі болатын  $\bar{f}$  түзуі горизонталь проекциялаушы түзу екенін көреміз. Енді  $\bar{f}$  түзуін профиль проекциялаушы түзуге айналдыру үшін оның жаңа проекциясын  $Oz$  осіне перпендикуляр (горизонталь) етіп орналастырамыз (205, в-сурет):  $E \in \bar{f}$ ;  $F \in \bar{f}$ ;  $\bar{f}_1 \perp z$ ;  $|\bar{E}_1\bar{F}_1| = |E_1F_1|$ . Түрлендірудің екінші инвариантын ескеріп, осы  $\bar{f}(\bar{E}, \bar{F})$  түзуінің нүктеге кескінделетін  $\bar{f}_3 = \bar{E}_3 = \bar{F}_3$  проекциясын тұрғызамыз. Сонда  $\bar{f}(\bar{E}, \bar{F}) \perp \pi_3$ . Егер берілген түзу горизонталь болса, онда оны фронталь проекциялаушы, немесе профиль проекциялаушы түзуге айналдыруға болады. Осы мақсатта оны горизонталь жазық-параллель ығыстыруымызға болады.



206-сурет.

Қалауымызша вертикаль түзу жүргізіп, оны түзудің түрленгеннен кейінгі горизонталь проекциясы деп қарастырамыз:  $C \in h$ ;  $D \in h$ ;  $\bar{h}_2 \perp x$ ;  $|\bar{C}_2 D_2| = |C_2 D_2|$ . Нүктелердің фронталь проекциялары горизонталь бағытта қозғалатынын ескеріп,  $\bar{h}$  түзуінің фронталь проекциясын тұрғызатын болсақ, онда оның нүктеге кескінделетінін көреміз (205, б-сурет). Сонда горизонталь  $h$  фронталь проекциялаушы  $\bar{h}$  түзуіне түрленеді, яғни біз мақсатымызға жеттік. Егер берілген түзу профиль түзу болса, онда оны горизонталь проекциялаушы немесе фронталь проекциялаушы түзуге түрлендіруге болады.

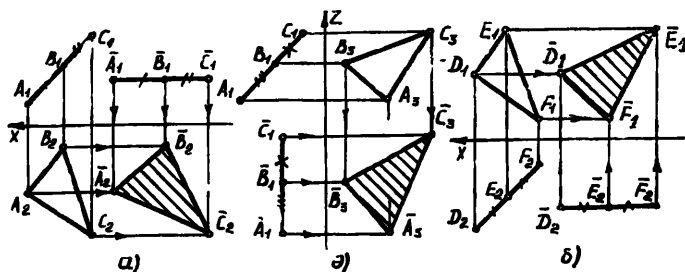
3 - е с е п. Жалпы жағдайда орналасқан  $ABC$  үшбұрышы анықтайтын жазықтықты проекциялаушы жазықтыққа айналдыру қажет (206-сурет).

Ш с ш у і. Берілген жалпы жағдайдағы жазықтықты фронталь проекциялаушы, немесе горизонталь проекциялаушы, немесе профиль проекциялаушы жазықтыққа айналдыруға болады.  $ABC$  үшбұрышын  $\pi_1$  жазықтығына перпендикуляр жағдайға келтіру үшін оны горизонталь ығыстыруымыз керек. Алдымен жазықтықтың горизонтальдарының біреуін, мысалы  $A$  нүктесі арқылы өтетін

горизонталін салып аламыз (206, а-сурет). Фронталь проекциялаушы жазықтықтың горизонтальдарының горизонталь проекциялары  $Ox$  осіне перпендикуляр орналасулары қажет. Сондықтан вертикаль түзу жүргізіп, оны  $h$  горизонталінің түрленгеннен кейінгі горизонталь проекциясы деп қарастыралық:  $\bar{h}_2 \perp x$ ;  $|\bar{A}_2\bar{I}_2| = |A_2I_2|$ . Енді  $A_1B_1C_1$  үшбұрышына тең  $\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2$  үшбұрышын салуға болады.  $A_1, B_1, C_1$  нүктелері арқылы жүргізілген горизонталь түзулер  $\bar{A}_2, \bar{B}_2, \bar{C}_2$  нүктелері арқылы жүргізілген сәйкес вертикаль түзулермен  $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1$  нүктелерінде қиылысады. Соңғы үш нүкте бір түзудің бойында жатыр, олай болса,  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  үшбұрышы фронталь проекциялаушы жазықтықты анықтайды. Эпюрден жазықтықтың горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын ( $\alpha^\circ$ ) көрсетуге болады.  $ABC$  үшбұрышын  $\pi_2$  жазықтығына перпендикуляр жағдайға келтіру үшін оны фронталь ығыстыруымыз керек. Олай болса,  $ABC$  үшбұрышының фронталь проекциясы өзінің өлшемдерін және формасын өзгертпей орын ауыстырады. Алдымен оның фронтальдарының біреуін жүргізіп аламыз. Фронтальдың фронталь проекциясын вертикаль орналастырып,  $A_1B_1C_1$  үшбұрышына тең  $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$  үшбұрышын саламыз (206, ә-сурет). Фронталь ығыстыруда нүктелердің горизонталь проекциялары  $Ox$  осіне параллель бағытта қозғалатынын ескеріп  $\bar{A}_2, \bar{B}_2$  және  $\bar{C}_2$  нүктелерін анықтаймыз. Бұл үш нүкте бір түзудің бойында орналасқан, яғни жазықтық горизонталь проекциялаушы жазықтыққа айналды. Эпюрден  $ABC$  үшбұрышы жазықтығының фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын ( $\beta^\circ$ ) анықтай аламыз. 206, б-суретте фронталь және профиль проекцияларымен берілген  $ABC$  үшбұрышын профиль проекциялаушы  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  үшбұрышына түрлендіру көрсетілген. Бұл сызбадан да берілген жазықтықтың фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын ( $\beta^\circ$ ) анықтауға болады. Сонымен, жалпы жағдай жазықтығын фронталь ығыстыру нәтижесінде оны горизонталь проекциялаушы, немесе профиль проекциялаушы жазықтыққа айналдыруға болады. Горизонталь ығыстыру нәтижесінде оны фронталь, немесе профиль проекциялаушы жазықтыққа, ал профиль ығыстыру нәтижесінде фронталь, немесе горизонталь проекциялаушы жазықтыққа айналдыруға болады.

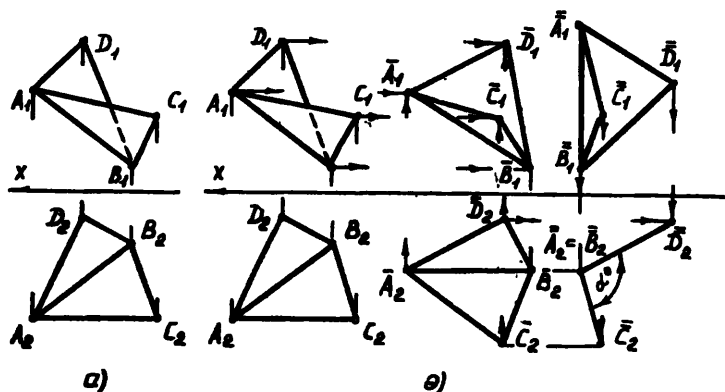
4 - е с е п. Берілген проекциялаушы жазықтықты деңгейлік жазықтыққа айналдыру керек (207-сурет).

Ш е ш у і. Берілген жазықтықтың фронталь проекция-



207-сурет.

лаушы, немесе горизонталь проекциялаушы, немесе профиль проекциялаушы жазықтық болуы мүмкін. Егер берілген жазықтық фронталь проекциялаушы жазықтық болса, онда оны горизонталь, немесе профиль жазықтыққа түрлендіруге болады.  $ABC$  үшбұрышының фронталь проекциясы кесіндіге кескінделген. Фронталь ығыстыру арқылы фронталь проекцияны горизонталь орналасқан кесіндіге түрлендіріп, одан кейін үшбұрыштың горизонталь проекциясын тұрғызамыз (207, а-сурет):  $(\bar{A}_1\bar{C}_1) \parallel x$ ;  $|\bar{A}_1\bar{B}_1| = |A_1B_1|$ ;  $|\bar{A}_1\bar{C}_1| = |A_1C_1|$ ;  $(A_2\bar{A}_2) \parallel (B_2\bar{B}_2) \parallel (C_2\bar{C}_2) \parallel x$ ;  $(\bar{A}_1\bar{A}_2) \parallel (\bar{B}_1\bar{B}_2) \parallel (\bar{C}_1\bar{C}_2) \perp x$ ;  $(A_2\bar{A}_2) \cap (\bar{A}_1\bar{A}_2) = \bar{A}_2$ ;  $(B_2\bar{B}_2) \cap (\bar{B}_1\bar{B}_2) = \bar{B}_2$ ;  $(C_2\bar{C}_2) \cap (\bar{C}_1\bar{C}_2) = \bar{C}_2$ ;  $\Delta\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2 = \Delta ABC$ . Горизонталь проекцияда  $(\Delta\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2)$  үшбұрыштың натурал шамасы табылады, яғни горизонталь жазықтық алынады. Енді профиль жазықтық алу үшін оның кескіні болатын фронталь проекциясын вертикаль орналастырумыз қажет (207, ә-сурет).  $(\bar{A}_1\bar{C}_1) \parallel z$ ;  $|\bar{A}_1\bar{B}_1| = |A_1B_1|$ ;  $|\bar{A}_1\bar{C}_1| = |A_1C_1|$ . Нүктелердің профиль проекциялары  $Oz$  осіне параллель бағытта қозғалатынын ескеріп,  $\bar{A}_1$ ,  $\bar{B}_1$  және  $\bar{C}_1$  нүктелері арқылы жүргізілген горизонталь байланыс сызықтары бойынан  $\bar{A}_3$ ,  $\bar{B}_3$  және  $\bar{C}_3$  нүктелері табылады. Сонда  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  ( $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$ ,  $\bar{A}_3\bar{B}_3\bar{C}_3$ ) үшбұрышы профиль жазықтықты анықтайды және  $\Delta\bar{A}_3\bar{B}_3\bar{C}_3 = \Delta ABC$  болады. Егер берілген жазықтық горизонталь проекциялаушы жазықтық болса, онда оны горизонталь ығыстыру арқылы фронталь, немесе профиль жазықтыққа түрлендіруге болады. 207, б-суретте  $D$ ,  $E$  және  $F$  нүктелері анықтайтын горизонталь проекциялаушы жазықтықты  $\bar{D}$ ,  $\bar{E}$  және  $\bar{F}$  нүктелері анықтайтын фронталь жазықтыққа түрлендіру көрсетілген. Онда  $\Delta\bar{D}_1\bar{E}_1\bar{F}_1 = \Delta DEF$ . Егер берілген жазықтық профиль проекциялаушы жазықтық болса, онда оны профиль ығыстырудың нәтижесінде фронталь, немесе горизонталь жазықтыққа түрлендіруге болады.



208-сурет.

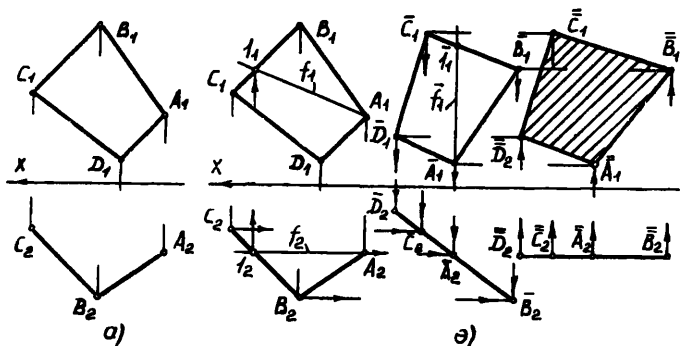
6.2.1 - есеп. Қыры  $AB$  түзуі, жақтары  $ABC$  және  $ABD$  үшбұрыштары болатын екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышының натурал шамасын салу керек (208, а-сурет).

Шешуі. Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышын анықтау үшін оны қырына перпендикуляр жазықтықпен қию, немесе қырына перпендикуляр жазықтыққа проекциялау керек. Сондықтан  $AB$  кесіндісін горизонталь бағытта жазық-параллель ығыстырып, фронталь проекциялар жазықтығына параллель  $\overline{AB}$  кесіндісіне, одан кейін фронталь ығыстырып горизонталь проекциялаушы  $\overline{AB}$  кесіндісіне түрлендіруге болады. Басқа сөздермен айтқанда, жалпы жағдайда орналасқан  $AB$  түзуін бірінші есептегідей деңгейлік түзуге, одан кейін деңгейлік түзуді екінші есептегідей проекциялаушы түзуге айналдыру қажет. Горизонталь ығыстырудың бірінші инвариантына сай берілген екіжақты бұрыштың горизонталь проекциясы өзінің өлшемдерін және формасын өзгертпей орын ауыстырады: ұзындығы  $A_2B_2$  кесіндісінің ұзындығына тең  $\overline{A_2B_2}$  кесіндісін  $Ox$  осіне параллель орналастырып саламыз;  $A_2B_2C_2$  үшбұрышына тең  $\overline{A_2B_2C_2}$  үшбұрышын,  $A_2B_2D_2$  үшбұрышына тең  $\overline{A_2B_2D_2}$  үшбұрышын тұрғызамыз (208, ә-сурет). Горизонталь ығыстырудың екінші инварианты бойынша берілген фигура нүктелерінің фронталь проекциялары  $Ox$  осіне параллель бағытта қозғалады.  $A_1, B_1, C_1$  және  $D_1$  нүктелері арқылы  $Ox$  осіне параллель түзулер жүргізіп, олардың  $\overline{A_2}, \overline{B_2}, \overline{C_2}$  және  $\overline{D_2}$  нүктелерін бастыра жүргізілген байланыс сызықтарымен қиылысу

нүктелерін ( $\bar{A}_1$ ,  $\bar{B}_1$ ,  $\bar{C}_1$  және  $\bar{D}_1$ ) анықтаймыз. Табылған  $\bar{A}_1$ ,  $\bar{B}_1$ ,  $\bar{C}_1$  және  $\bar{D}_1$  нүктелерін кесінділермен қоссақ, екі-жақты бұрыштың жаңа фронталь проекциясы алынады. Сонда жалпы жағдайдағы  $\bar{AB}$  түзуі фронталь түзу ( $\bar{AB}$ )-ға түрленді. Енді фронталь ығыстыру тәсілін пайдаланып, фронталь орналасқан  $\bar{AB}$  түзуін горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр  $\bar{A}\bar{B}$  түзуіне түрлендіру керек.  $\bar{A}_1\bar{B}_1$  кесіндісіне тең вертикаль орналасқан  $\bar{A}_1\bar{B}_1$  кесіндісін, одан кейін  $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$  үшбұрышына тең  $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$  үшбұрышын және  $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{D}_1$  үшбұрышына тең  $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{D}_1$  үшбұрышын саламыз. Екінші инвариантқа сай  $\bar{A}_2$ ,  $\bar{B}_2$ ,  $\bar{C}_2$  және  $\bar{D}_2$  нүктелері арқылы горизонталь түзулер жүргізіледі және олардың сәйкес байланыс сызықтарымен қиылысуы нәтижесінде  $\bar{A}_2$ ,  $\bar{B}_2$ ,  $\bar{C}_2$  және  $\bar{D}_2$  нүктелері табылады.  $\bar{A}_2$  нүктесімен  $\bar{B}_2$  нүктесі бірігіп кетеді. Сонда пайда болған  $\alpha^\circ = \angle \bar{C}_2\bar{A}_2\bar{D}_2 = \angle \bar{C}_2\bar{B}_2\bar{D}_2$  бұрышы берілген екі-жақты бұрыштың сызықтық бұрышының натурал шамасын анықтайды. Біз екіжақты бұрыштың қырын горизонталь ығыстырып фронталь түзуге, одан кейін оны фронталь ығыстырып горизонталь проекциялаушы түзуге түрлендірдік. Алдымен екіжақты бұрыштың қырын фронталь ығыстырып горизонталь түзуге, одан кейін оны горизонталь ығыстырып фронталь проекциялаушы түзуге түрлендіруге де болады. Одан нәтиже өзгермейді.

6.2.2 - е с е п. Берілген жазық  $ABCD$  төртбұрышының натурал шамасын салу қажет (209, а-сурет).

Ш е ш у і. Деңгейлік жазықтықта орналасқан фигура өзінің натурал шамасын сақтап кескінделетінін білеміз. Сондықтан берілген фигура анықтайтын жалпы жағдай

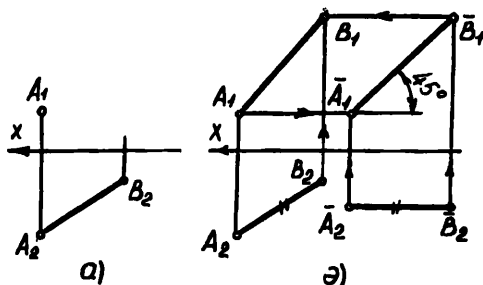


209-сурет.

жазықтығын деңгейлік жазықтыққа айналдыруымыз керек. Ол үшін алдымен үшінші, одан кейін төртінші негізгі есептердің шешімдерін пайдаланамыз. Сонда фигураны екі рет жазық-параллель ығыстырамыз. Бірінші ығыстыру нәтижесінде проекциялаушы жазықтық, ал екінші ығыстыру нәтижесінде деңгейлік жазықтық алынады. 209, ә-суретте берілген төртбұрышты фронталь ығыстырып горизонталь проекциялаушы жазықтыққа түрлендірілген.  $A$  нүктесі арқылы  $ABC$  үшбұрышы жазықтығының фронталі жүргізілген. Фронтальдің фронталь проекциясын вертикаль орналастырып,  $A_1B_1C_1$  үшбұрышына тең  $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$  үшбұрышы салынады. Осы  $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$  үшбұрышын  $A_1B_1C_1D_1$  төртбұрышына тең  $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1\bar{D}_1$  төртбұрышына толықтырады. Нүктелердің горизонталь проекциялары фронталь ығыстыруда  $Ox$  осіне параллель бағытта қозғалатынын ескеріп,  $\bar{A}_2$ ,  $\bar{B}_2$  және  $\bar{C}_2$  нүктелері табылады. Бұл үш нүкте бір түзу бойында орналасқан, яғни  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  үшбұрышы  $\pi_2$ -ге перпендикуляр.  $\bar{D}_2$  нүктесін  $\bar{B}_2\bar{C}_2$  түзуі мен  $\bar{D}_1$  нүктесі арқылы жүргізілген байланыс сызығының қиылысу нүктесі ретінде табады. Горизонталь проекциялаушы жазықтықта орналасқан  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  төртбұрышын фронталь проекциялар жазықтығына параллель орналасқан  $\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{C}}\bar{\bar{D}}$  төртбұрышына түрлендірген. Горизонталь орналасқан  $\bar{\bar{B}}_2\bar{\bar{D}}_2$  кесіндісін және оның бойындағы  $\bar{A}_2$ ,  $\bar{C}_2$  нүктелерін  $|\bar{\bar{B}}_2\bar{\bar{D}}_2| = |\bar{B}_2\bar{D}_2|$ ,  $|\bar{\bar{A}}_2\bar{\bar{B}}_2| = |\bar{A}_2\bar{B}_2|$ ,  $|\bar{\bar{B}}_2\bar{\bar{C}}_2| = |\bar{B}_2\bar{C}_2|$  болатындай етіп салады. Горизонталь ығыстыруда нүктелердің фронталь проекциялары  $Ox$  осіне параллель бағытта қозғалатынын ескеріп,  $\bar{\bar{A}}_1$ ,  $\bar{\bar{B}}_1$ ,  $\bar{\bar{C}}_1$  және  $\bar{\bar{D}}_1$  нүктелерін анықтайды. Сонда табылған  $\bar{\bar{A}}_1\bar{\bar{B}}_1\bar{\bar{C}}_1\bar{\bar{D}}_1$  төртбұрышы берілген  $ABCD$  төртбұрышының натурал шамасын анықтайды.

**6.2.3 - есеп.**  $AB$  кесіндісінің горизонталь проекциясы  $A_2B_2$ , оның ұшы  $A$  нүктесінің фронталь проекциясы  $A_1$  және горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы ( $\alpha^\circ = 45^\circ$ ) берілген (210, а-сурет).  $B$  нүктесінің фронталь проекциясын салу қажет.

**Шешуі.** Берілген  $AB$  түзуі фронталь проекциялар жазықтығына параллель болса, онда оның фронталь проекциясы  $Ox$  осіне  $45^\circ$ -қа тең бұрышпен көлбер еді. Горизонталь ығыстыру тәсілін қолданып,  $AB$  кесіндісін фронталь орналастырамыз. Фронталь кесіндінің горизонталь проекциясы горизонталь орналасады. Ұзындығы  $A_2B_2$  кесіндісінің ұзындығына тең, горизонталь орналасқан



210-сурет.

$\bar{A}_2\bar{B}_2$  кесіндісін саламыз.  $A$  нүктесінің жаңа фронталь проекциясын ( $\bar{A}_1$  нүктесін) анықтап, осы  $\bar{A}_1$  нүктесі арқылы  $Ox$  осімен  $45^\circ$ -қа тең бұрыш жасайтын түзу жүргіземіз. Осы түзу  $\bar{B}_2$  нүктесі арқылы жүргізілген вертикаль түзумен  $\bar{B}_1$  нүктесінде қиылысады.  $\bar{B}_1$  нүктесі арқылы горизонталь,  $B_2$  нүктесі арқылы вертикаль түзулер жүргізіп, олардың қиылысу нүктесін ( $B_1$ ) анықтаймыз. Табылған  $B_1$  нүктесі іздеп отырған  $B$  нүктесінің фронталь проекциясы. Есептің екі шешуі болатынын байқау қиын емес (екінші шешуін табу оқушылардың өздеріне тапсырылады).

### 6.3. ПРОЕКЦИЯЛАУШЫ ТҮЗУДЕН АЙНАЛДЫРУ

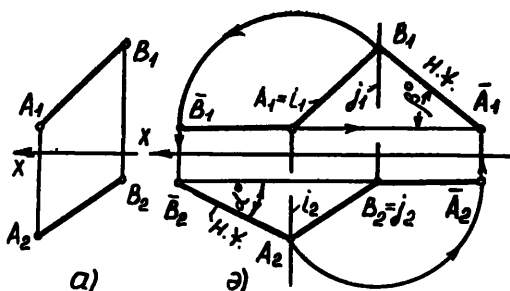
Фигураны түзуден айналдырғанда оның әрбір нүктесі шеңбер сызады. Бұл шеңбердің центрі нүктеден түзуге түсірілген перпендикулярдың табаны, ал радиусы нүктеден түзуге дейінгі қашықтыққа тең болады. Мысалы,  $ABC$  үшбұрышын  $i$  түзуінен айналдыратын болсақ, онда  $A, B$  және  $C$  нүктелері центрлері  $i$  түзуінде жататын шеңберлер сызар еді. Сонда  $i$  түзуін *айналу осі* деп атайды.  $A \in a \perp i$ ;  $a \cap i = A^\circ$ ;  $B \in b \perp i$ ;  $b \cap i = B^\circ$ ;  $C \in c \perp i$ ;  $c \cap i = C^\circ$ .  $A, B$  және  $C$  нүктелері сызатын шеңберлер жазықтықтарын  $\alpha, \beta$  және  $\gamma$  деп белгілесек, онда  $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma \perp i$  болады. Аталған шеңберлердің радиустары  $AA^\circ, BB^\circ$  және  $CC^\circ$  кесінділерінің ұзындықтарымен анықталады. Сызбада салуды жеңілдету үшін айналу осін проекциялар жазықтықтарының біреуіне перпендикуляр орналастырады. Егер  $i \perp \pi_1$  болса, онда  $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma \parallel \pi_1$ , ал  $i \perp \pi_2$  болса, онда  $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma \parallel \pi_2$  болады. Сондықтан фронталь проекциялаушы түзуден айналдыру фронталь ығыстыру тәсілінің жеке түрі, ал горизонталь проекциялаушы түзуден айналдыру горизонталь ығыстыру тәсілінің жеке түрі екенін көре-

міз. Сол сияқты профиль проекциялаушы түзуден айналдыру профиль ығыстыру тәсілінің жеке түрі болады. Жазық-параллель ығыстыру тәсілінде нүктелер траекториялары ескерілмейді, ал айналдыру тәсілінде нүктелер траекториялары шеңберлер болады.

Фронталь проекциялаушы түзуден айналдыруды қарастыратын болсақ, онда айналу осінің фронталь проекциясы нүктеге кескінделеді және берілген фигура нүктелерінің фронталь проекциялары центрлері айналу осінің проекциясы болатын нүктедегі шеңберлер бойымен қозғалады, ал олардың горизонталь проекциялары фронталь ығыстырудағы сияқты  $Ox$  осіне параллель бағытта орындарын ауыстырады. Айналдыруда фигураның бір нүктесі айналу осі төңірегінде белгілі бір бағытта  $\alpha^\circ$  бұрышына бұрылса, онда оның қалған нүктелері де осы бағытта  $\alpha^\circ$  бұрышына бұрылулары қажет. Егер фигураның бір нүктесі сағат тілінің қозғалу бағытында айналу осінен айналатын болса, онда фигураның қалған нүктелері де осы сағат тілінің қозғалу бағытында айналулары керек. Оның үстіне фигураның сәйкес проекциясы өзінің өлшемдерін және формасын өзгертпейді. Сол сияқты горизонталь немесе профиль проекциялаушы түзуден айналдыру тәсілінің инварианттарын анықтап алуға болады. Горизонталь проекциялаушы түзуден айналдыру тәсілінің инварианттары: фигура нүктелерінің 1) горизонталь проекциялары центрі нүктеге кескінделген айналу осінде болатын шеңберлер бойымен қозғалады және горизонталь проекцияның өлшемдері мен формасы өзгермейді; 2) фронталь проекциялары  $Ox$  осіне параллель бағытта қозғалады. Профиль проекциялаушы түзуден айналдыру тәсілінің инварианттары: фигура нүктелерінің 1) профиль проекциялары центрлері нүктеге кескінделген айналу осінде болатын шеңберлер бойымен қозғалады және профиль проекцияның өлшемдері мен формасы өзгермейді; 2) фронталь проекциялары  $Oz$  осіне параллель бағытта қозғалады.

**6.3.1 - е с е п.** Берілген  $AB$  кесіндісінің натурал ұзындығын, оның фронталь және горизонталь проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын анықтау керек (211, а-сурет).

**Ш е ш у і.** Түзудің фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтау үшін оны горизонталь түзуге түрлендіру қажет. Ол үшін фронталь проекциялаушы осьтен айналдырады. Айналу осін  $A$  нүктесі арқылы  $\pi_1$  жазықтығына перпендикуляр жүргіземіз:  $A \in$



211-сурет.

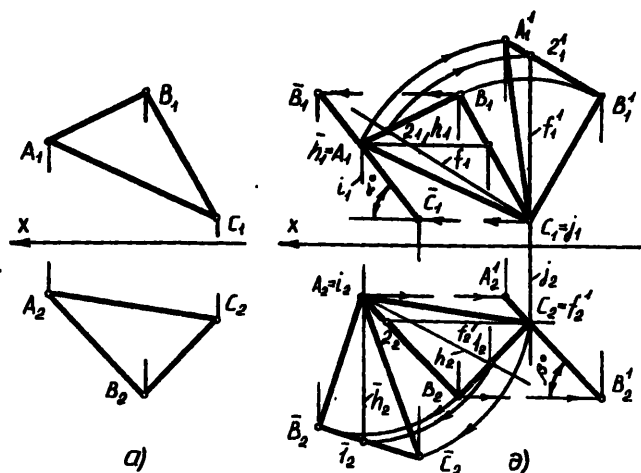
$\in i \perp \pi_1$ . Сонда  $B$  нүктесін ғана айналдыруымыз керек. Центрі  $A_1$  нүктесі болатын және  $B_1$  нүктесі арқылы өтетін шеңбер жүргізсек, онда  $B$  нүктесінің жаңа проекциясын осы шеңбер бойынан алуымыз керек. Горизонтальдің фронталь прсекциясы  $Ox$  осіне параллель болатынын ескеріп  $A_1$  нүктесі арқылы горизонталь түзу жүргіземіз. Сонда осы горизонталь түзу шеңбермен  $\bar{B}_1$  нүктесінде қиылысады (211, ә-сурет).  $B_2$  нүктесі арқылы  $Ox$  осіне параллель түзу жүргізіп, екінші инвариантқа сай  $B$  нүктесінің жаңа  $\bar{B}_2$  горизонталь проекциясын осы түзудің бойынан іздейміз.  $\bar{B}_1$  нүктесін бастыра вертикаль түзу жүргізіп,  $\bar{B}_2$  нүктесін анықтаймыз. Сонда  $|A_2\bar{B}_2| = |AB|$

және  $A_2\hat{B}_2B_2 = \alpha^\circ = (AB)^\wedge, \pi_1$  болады. Түзудің горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтау үшін оны фронталь түзуге түрлендіру қажет. Ол үшін горизонталь проекциялаушы осьтен айналдырады. Салуды оңайлату үшін айналу осін  $B$  нүктесі арқылы  $\pi_2$  жазықтығына перпендикуляр жүргіземіз:  $B \in j \perp \pi_2$ . Центрі  $B_2 = j_2$  болатын  $A_2$  нүктесі арқылы өтетін шеңбер саламыз. Осы шеңбер  $B_2$  нүктесін бастыра горизонталь бағытта жүргізілген түзумен  $\bar{A}_2$  нүктесінде қиылысады:  $A_1 \in (A_1\bar{A}_1) \parallel x$ ;  $\bar{A}_2 \in (\bar{A}_2\bar{A}_1) \perp x$ ;  $(A_1\bar{A}_1) \cap (\bar{A}_2\bar{A}_1) = \bar{A}_1$ . Сонда  $AB$  кесіндісінің натурал ұзындығы және горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы анықталады:

$|\bar{A}_1B_1| = |AB| = |A_2\bar{B}_2|$ ;  $B_1\hat{A}_1A_1 = \beta^\circ = (AB)^\wedge, \pi_2$ .

6.3.2 - е с е п. Берілген  $ABC$  үшбұрышы анықтайтын жазықтықтың горизонталь және фронталь проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын анықтау қажет (212, а-сурет).

Ш е ш у і. Жазықтықтың горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтау үшін оны



212-сурет.

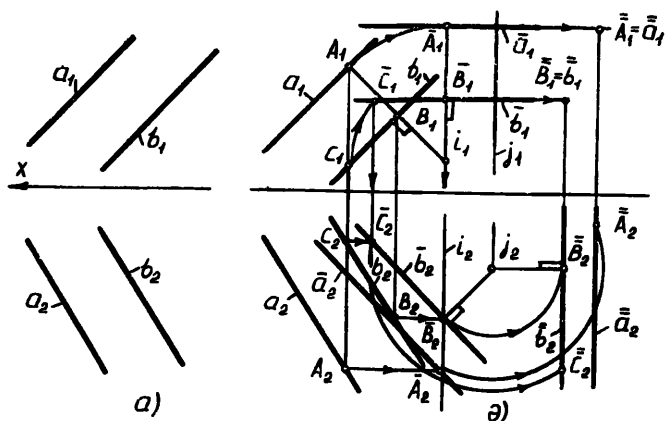
фронталь проекциялаушы жазықтыққа түрлендіру қажет. Үшбұрыштың  $A$  нүктесі арқылы өтетін горизонтальді жүргіземіз. Айналу осі  $i$  горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр және  $A$  нүктесін басып өтеді. Сонда  $B$  және  $C$  нүктелерін айналдырамыз. Айналу бұрышы жүргізілген горизонтальдің көмегімен анықталады, яғни айналдырғаннан кейін горизонталь фронталь проекциялаушы түзу болады.  $B_2, C_2$  және  $l_2$  нүктелерін бастыра центрі  $A_2$  нүктесі болатын шеңберлер жүргіземіз.  $A_2$  нүктесі арқылы вертикаль түзу жүргізіп, оны горизонтальдің түрленгеннен кейінгі жаңа проекциясы ретінде қабылдаймыз:  $A_2 \in \bar{h}_2 \perp x$ . Осы  $\bar{h}_2$  түзуі  $l_2$  нүктесі арқылы өтетін шеңбермен  $\bar{l}_2$  нүктесінде қиылысады. Енді  $A_2\bar{l}_2$  кесіндісіне  $A_2\bar{l}_2\bar{B}_2$  және  $A_2\bar{l}_2\bar{C}_2$  үшбұрыштарын оларға сәйкес  $A_2l_2B_2$  және  $A_2l_2C_2$  үшбұрыштарына тең болатындай етіп саламыз (бұл арада горизонталь проекциялаушы осьтен айналдыру тәсілінің бірінші инварианты ескеріледі). Екінші инвариантқа сай  $B$  және  $C$  нүктелерінің жаңа фронталь проекцияларын  $B_1$  және  $C_1$  нүктелері арқылы  $Ox$  осіне параллель етіп жүргізілген түзулердің бойынан іздейміз. Проекциялық байланысты ескеріп  $\bar{B}_1$  және  $\bar{C}_1$  нүктелерін анықтаймыз. Сонда  $A_1, \bar{B}_1$  және  $\bar{C}_1$  нүктелері бір түзудің бойында орналасқанын көрсеміз (212, ә-сурет).  $ABC$  үшбұрышының жаңа фронталь проекциясы түзуге кескінделеді, ал осы түзу мен  $Ox$  осі арасындағы бұрыш оның горизонталь проекциялар

жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтайды:

$\alpha(ABC), \hat{\pi}_2 = \alpha^\circ$ .  $ABC$  үшбұрышының фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтау үшін оны горизонталь проекциялаушы жағдайға дейін түрлендіреміз.  $C$  нүктесі арқылы  $ABC$  үшбұрышының фронтальдіні жүргіземіз. Айналу осі  $C$  нүктесі арқылы өтіп,  $\pi_1$  жазықтығына перпендикуляр орналасқан:  $C \in j \perp \pi_1$ . Фронталь проекциялаушы түзуден айналудың бірінші инварианты бойынша  $A_1, B_1$  және  $2_1$  нүктелері центрі  $C_1$  нүктесі болатын шеңберлер бойымен қозғалады және фронталь проекцияның өлшемдері мен формасы өзгермейді. Сонда  $ABC$  үшбұрышының жаңа фронталь проекциясы  $A_1 B_1 C_1$  оның ескі проекциясына ( $A_1 B_1 C_1$  үшбұрышына) тең болады және  $C_1 2_1^1$  кесіндісі вертикаль орналасады. Екінші инвариант бойынша  $A_2$  және  $B_2$  нүктелері  $Ox$  осіне параллель бағытта қозғалады. Проекциялық байланысты ескеріп,  $A_2^1$  және  $B_2^1$  нүктелерін саламыз. Сонда  $A_2^1, B_2^1$  және  $C_2$  нүктелері бір түзудің бойында жатады. Олай болса,  $ABC$  үшбұрышы түрленгеннен кейін түзуге кескінделеді. Осы түзу мен абсциссалар осі арасындағы бұрыш жақтары  $\alpha(ABC)$  және  $\pi_1$  жазықтықтары болатын екіжақты бұрыштың натурал шамасына тең

болады:  $\alpha(ABC), \hat{\pi}_1 = \beta^\circ$ . Егер  $ABC$  үшбұрышының натурал шамасын анықтау қажет болса, онда тағы бір түрлендіріп оны деңгейлік жазықтыққа айналдыру керек.

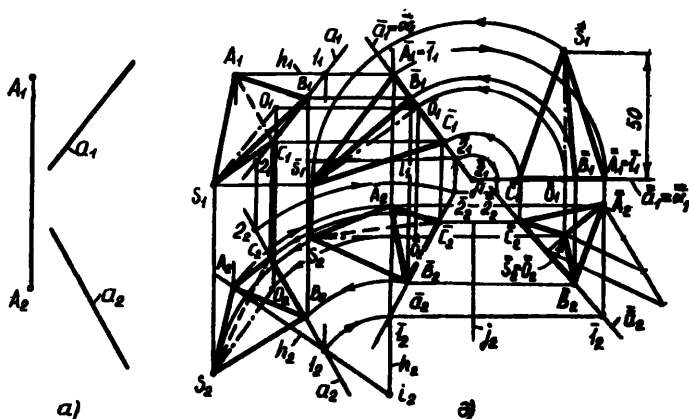
6.3.3 - е с е п. Жалпы жағдайда орналасқан параллель



213-сурет.

түзулер  $a$  және  $b$  берілген (213, а-сурет). Осы екі түзудің ара қашықтығын анықтау керек.

**Шешуі.** Есепті шешу үшін эпюрді екі рет түрлендіру қажет: бірінші түрлендіру нәтижесінде берілген жалпы жағдайда орналасқан түзулерді деңгейлік түзулерге, ал екінші түрлендіру нәтижесінде деңгейлік түзулерді проекциялаушы түзулерге айналдырамыз (213, ә-сурет). Қалауымызша фронталь проекциялаушы түзу алып, оны айналу осі ретінде қарастырамыз.  $i(\perp \pi_1)$  — айналу осі. Айналу осінің фронталь проекциясы нүктеге кескінделген. Осы  $i_1$  нүктесінен  $a_1$  және  $b_1$  түзулеріне түсірілген перпендикулярдың табандары  $A_1$  мен  $B_1$  нүктелерін және  $C_1(\in b_1)$  нүктесін айналу осінен айналдырып, оларды  $\bar{A}_1$ ,  $\bar{B}_1$  және  $\bar{C}_1$  нүктелеріне түрлендіреміз. Сонда  $\bar{a}_1 \parallel \bar{b}_1 (\bar{B}_1 \bar{C}_1) \parallel x$  болады. Бұл арада фронталь проекциялаушы түзуден айналдыру тәсілінің бірінші инварианты, яғни фигура нүктелерінің фронталь проекциялары центрлері нүктеге кескінделген айналу осінде болатын шеңберлер бойымен қозғалатыны және фронталь проекцияның өлшемдері мен формасы өзгермейтіні ескерілді. Екінші инвариантын, яғни фигура нүктелерінің горизонталь проекциялары  $Ox$  осіне параллель бағытта қозғалатынын ескеріп,  $\bar{A}_2 \bar{B}_2$  және  $\bar{C}_2$  нүктелерін табамыз. Сонда  $\bar{B}_2$  мен  $\bar{C}_2$  нүктелері  $\bar{b}_2$  түзуін анықтайды, ал  $\bar{a}_2$  түзуі  $\bar{A}_2$  нүктесі арқылы  $\bar{b}_2$  түзуіне параллель жүргізіледі. Сонда жалпы жағдай түзулері ( $a$  мен  $b$ ) горизонталь түзулерге ( $\bar{a}$  мен  $\bar{b}$ ) түрленеді. Енді горизонталь проекциялаушы  $j$  түзуін айналу осі деп қарастырып  $\bar{a}$  және  $\bar{b}$  түзулерін фронталь проекциялаушы  $\bar{a}$  және  $\bar{b}$  түзулеріне түрлендіреміз. Салуды оңайлату үшін  $j_2$ -ні  $\bar{b}_2$  түзуіне оның  $\bar{B}_2$  нүктесінде тұрғызылған перпендикулярдың бойынан аламыз. Горизонталь проекциялаушы түзуден айналдыру тәсілінің инварианттарын пайдаланып  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  және  $\bar{C}$  нүктелерінің алдымен горизонталь проекцияларын, одан кейін фронталь проекцияларын саламыз.  $\bar{B}$  нүктесін  $j$  осінен оның горизонталь проекциясы  $\bar{B}_2$  айналу осінің горизонталь проекциясымен бір деңгейде орналасқанша бұрамыз:  $(j_2 \bar{B}_2) \parallel x$ . Ал  $\bar{a}_2$  және  $\bar{b}_2$  түзулері вертикаль орналасады. Бұл түзулер ( $\bar{a}$  мен  $\bar{b}$ ) фронталь проекциялаушы түзулер болғандықтан олардың фронталь проекциялары нүктелерге кескінделеді. Сонда іздеп отырған ара қашықтық  $\bar{A}_1 \bar{B}_1$  кесіндісінің ұзындығына тең болады:  $|ab| = |\bar{A}_1 \bar{B}_1|$ .



214-сурет.

6.3.4 - е с е п. Биіктігі 50 мм, табаны  $\alpha(A; a)$  жазықтығында жататын дұрыс үшбұрышты пирамиданың проекцияларын салу керек (214, а-сурет). Іздеп отырған  $SABC$  пирамидасының табаны болатын үшбұрыштың бір қабырғасы  $a$  түзуінде жатады ( $[BC] \subset a$ ).

**Ш е ш у і.** Егер алдыңғы есепті шешуде бірінші және екінші есептердің шешулері пайдаланылса, ал бұл есепті шешуде үшінші және төртінші есептердің шешулерін пайдаланамыз. Жалпы жағдайда орналасқан  $\alpha(A; a)$  жазықтығын алдымен проекциялаушы жазықтыққа, одан кейін деңгейлік жазықтыққа түрлендіреміз.  $A$  нүктесі арқылы өтетін  $\alpha(A; a)$  жазықтығының горизонталін  $h$  жүргіземіз. Айналу осі ретінде горизонталь проекциялаушы,  $h$  горизонталімен қиылысатын  $i$  түзуін аламыз:  $h \cap a = 1$ . Берілген  $a$  түзуі бойынан 1 нүктесінен өзге тағы бір 2 нүктесін белгілейміз. Фронталь проекциялаушы жазықтықтың горизонталі  $\pi_1$  жазықтығына перпендикуляр болады. Сондықтан  $h$  түзуін  $i$  осінен айналдырып, фронталь проекциялаушы  $\bar{h}$  түзуіне түрлендіреміз. Сонда оның горизонталь проекциясы  $\bar{h}_2$  вертикаль орналасады.  $A$  нүктесін  $i$  осінен қанша бұрышқа бұрсак, 2 нүктесін де сол бағытта сонша бұрышқа бұруымыз керек:  $\Delta \bar{A}_2 \bar{1}_2 \bar{2}_2 = \Delta A_2 1_2 2_2$ . Екінші инвариантқа сай нүктелердің фронталь проекциялары  $Ox$  осіне параллель бағытта қозғалатынын ескеріп, вертикаль байланыс сызықтарын пайдаланып  $\bar{A}_1, \bar{1}_1$  және  $\bar{2}_1$  нүктелерін анықтаймыз. Олар бір түзудің бойында орналасқан, яғни  $\bar{\alpha}(\bar{A}; \bar{a})$  фронталь

проекциялар жазықтығына перпендикуляр. Енді айналу осін  $j$  осы  $\alpha$  жазықтығында жататын фронталь проекциялаушы түзу болатындай етіп тағайындаймыз. Фронталь проекциялаушы  $\alpha$  жазықтығын  $j$  осінен горизонталь  $\alpha$  жазықтығына түрленгенше айналдырамыз.  $\alpha$  жазықтығының фронталь проекциясы горизонталь орналасқан түзу болады, ал оның горизонталь проекциясын  $\overline{A}_2$  нүктесі мен  $\overline{a}_2$  түзуі анықтайды. Пирамиданың табаны болатын дұрыс үшбұрыш  $\alpha$  жазықтығында жататындықтан  $\pi_2$  жазықтығына натурал шамасын сақтап кескінделеді.  $\overline{A}_2$  нүктесі арқылы  $\overline{a}_2$  түзуімен  $60^\circ$ -қа тең бұрыш жасайтын екі түзу жүргіземіз. Олар  $\overline{a}_2$  түзуімен  $\overline{B}_2$  және  $\overline{C}_2$  нүктелерінде қиылысады.  $\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{C}_2$  тең қабырғалы үшбұрыштың ортоцентрін —  $\overline{O}_2$  нүктесін саламыз.  $SABC$  дұрыс пирамида болғандықтан  $\overline{S}$  нүктесі де  $\overline{O}_2 (= \overline{S}_2)$  нүктесіне кескінделеді.  $\overline{A}$ ,  $\overline{B}$  және  $\overline{C}$  нүктелерінің фронталь проекцияларын  $\overline{S}_1$  нүктесімен қоссақ, пирамиданың фронталь проекциясы табылады.  $\overline{S}_1$  нүктесі  $|\overline{S}_1\overline{O}_1| = 50$  мм болатындай етіп салынады. Сонда іздеп отырған пирамиданы екі рет түрлендіргеннен кейінгі оның фронталь  $\overline{S}_1\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$  және горизонталь  $\overline{S}_2\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{C}_2$  проекциялары табылады.

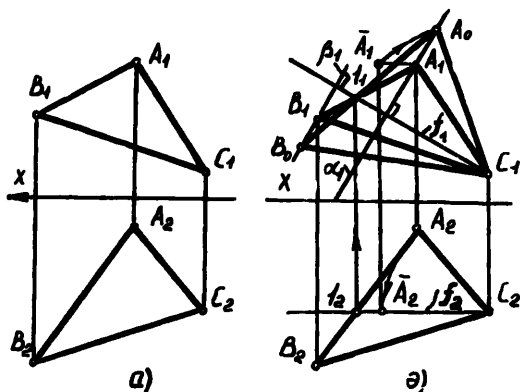
Енді  $\overline{SABCS}$  пирамидасын кері түрлендіріп  $\overline{SABCS}$  пирамидасының, ал одан кейін  $SABC$  пирамидасының проекцияларын салуымыз керек, яғни «келген ізімізбен кері оралуымыз керек».  $\overline{B}_1$ ,  $\overline{C}_1$  және  $\overline{O}_1$  нүктелері арқылы центрі  $j_1$  нүктесі болатын шеңберлер жүргізсек, олар  $\overline{a}_1$  түзуімен  $\overline{B}_1$ ,  $\overline{C}_1$  және  $\overline{O}_1$  нүктелерінде қиылысады.  $\overline{O}_1$  нүктесін бастыра  $\overline{a}_1$  түзуіне перпендикуляр етіп жүргізілген түзу  $j_1$  центрінен  $\overline{S}_1$  нүктесі арқылы жүргізілген шеңбермен  $\overline{S}_1$  нүктесінде қиылысады.  $\overline{S}_1$  нүктесін  $\overline{A}_1$ ,  $\overline{B}_1$  және  $\overline{C}_1$  нүктелерімен қосып  $\overline{SABCS}$  пирамидасының фронталь проекциясын аламыз. Осы пирамиданың горизонталь проекциясын салу оңай:  $\overline{B}_2$ ,  $\overline{C}_2$  және  $\overline{S}_2$  нүктелері арқылы жүргізілген горизонталь түзулердің  $\overline{B}_1$ ,  $\overline{C}_1$  және  $\overline{S}_1$  нүктелері арқылы жүргізілген сәйкес вертикаль байланыс сызықтарымен қиылысу нүктелерін  $\overline{B}_2$ ,  $\overline{C}_2$  және  $\overline{S}_2$  өзара және  $\overline{A}_2$  нүктесімен көрінетіндікті ескере отырып қосамыз.  $\overline{S}_2\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{C}_2$  пирамиданың аралық жағдайдағы горизонталь проекциясы. Сөйтіп  $\overline{SABCS}$  пирамидасын

аралық пирамидаға  $\overline{SABC}$  түрлендірдік.  $B_2$ ,  $C_2$  және  $S_2$  нүктелері арқылы центрі  $i_2$  нүктесі болатын шеңберлер жүргіземіз. Бұл шеңбердің біріншісі  $a_2$  түзуімен  $B_2$  нүктесінде, ал екіншісі —  $C_2$  нүктесінде қиылысады. Үшінші шеңбер центрі  $A_2$  нүктесі, радиусы  $|\overline{A_2S_2}|$  болатын шеңбермен  $S_2$  нүктесінде қиылысады. Пирамиданың горизонталь проекциясы  $S_2A_2B_2C_2$  табылды, ол  $S_2\overline{A_2B_2C_2}$  фигурасына конгруэнтті болады.  $B_1$ ,  $C_1$  және  $S_1$  нүктелерін бастыра жүргізілген горизонталь түзулер  $B_2$ ,  $C_2$  және  $S_2$  нүктелерін бастыра жүргізілген сәйкес вертикаль түзулермен  $B_1$ ,  $C_1$  және  $S_1$  нүктелерінде қиылысады.  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  және  $S_1$  нүктелерін көрінетіндікті ескере отырып өзара қоссақ, пирамиданың фронталь проекциясы шығады (214, ә-сурет).

#### 6.4. ДЕНГЕЙЛІК ТҮЗУДЕН АЙНАЛДЫРУ

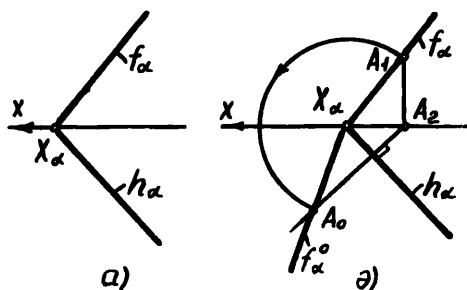
Денгейлік түзу фронталь, горизонталь немесе профиль болуы мүмкін. Айналу да фигура нүктелері центрі айналу осінде болатын шеңберлер сызатыны және бұл шеңберлер айналу осіне перпендикуляр жазықтықтарда жататыны туралы жоғарыда айтылды. Айналу осі деңгейлік түзу болса, онда оған перпендикуляр жазықтықтар проекциялаушы жазықтықтар болады. Осы айтылғаннан деңгейлік түзуден айналдыру тәсілінің негізгі инварианты шығады. Фронтальдан айналдыруда фигура нүктесінің фронталь проекциясы айналу осінің фронталь проекциясына перпендикуляр түзу бойымен қозғалады; горизонтальдан айналдыруда фигура нүктесінің горизонталь проекциясы айналу осінің горизонталь проекциясына перпендикуляр түзу бойымен қозғалады; профиль түзуден айналдыруда фигура нүктесінің профиль проекциясы айналу осінің профиль проекциясына перпендикуляр түзу бойымен қозғалады. Бұл тәсілді көбіне жазық фигураның натурал шамасын анықтауда пайдаланады. Сондықтан фигура айналу осіне сәйкес жазықтыққа параллель орналасқанша айналдырылады, ал бұдан екінші инвариант келіп шығады. Фронтальдан айналдыруда фронталь проекцияда, горизонтальдан айналдыруда горизонталь проекцияда және профильдан айналдыруда профиль проекцияда фигураның кез келген кесіндісі өзінің натурал шамасын сақтап кескінделеді.

6.4.1 - е с е п. Берілген  $ABC$  үшбұрышының натурал шамасын фронтальдан айналдыру тәсілімен анықтау керек (215, а-сурет).



215-сурет.

**Шешуі.** Үшбұрыш  $ABC$  жазықтығы фронтальдарының біреуін жүргіземіз.  $C$  нүктесі арқылы жүргізілген фронталь  $f$  үшбұрыштың  $AB$  қабырғасымен  $l$  нүктесінде қиылысады. Осы  $f$  түзуінен  $ABC$  үшбұрышын  $\pi_1$  жазықтығына параллель болғанша айналдырамыз.  $C$  және  $l$  нүктелері айналу осінде жатыр. Сондықтан олар түрлендірудің қозғалмайтын нүктелері болады. Түрлендірудің бірінші инвариантына сай  $A$  нүктесінің жаңа фронталь проекциясын  $A_1$  нүктесі арқылы  $f_1$  түзуіне перпендикуляр жүргізілген түзудің бойынан іздейміз. Сол сияқты  $B$  нүктесінің жаңа фронталь проекциясын  $B_1$  нүктесі арқылы  $f_1$  түзуіне перпендикуляр жүргізілген түзудің бойынан іздейміз. Екінші инвариантқа сай түрлендіру нәтижесінде фигураның кез келген кесіндісі  $\pi_1$  жазықтығына өзінің натурал шамасын сақтап кескінделеді. Мысалы,  $AC$  кесіндісінің шын ұзындығын  $|A_1C_1|$  оны  $C$  нүктесі арқылы өтетін горизонталь проекциялаушы түзуден айналдыру тәсілімен анықтаймыз. Центрі  $C_1$  нүктесі радиусы  $\bar{A}_1C_1$  кесіндісіне тең шеңбер жүргізсек, онда бұл шеңбер  $A_1$  нүктесі арқылы  $f_1$ -ге перпендикуляр етіп жүргізілген түзумен  $A_0$  нүктесінде қиылысады.  $A_0$  нүктесін  $l_1$  нүктесімен қосатын түзу  $B_1$  нүктесі арқылы  $f_1$ -ге перпендикуляр етіп жүргізілген түзумен  $B_0$  нүктесінде қиылысады. Сонда табылған  $A_0B_0C_1$  үшбұрышы  $ABC$  үшбұрышының натурал шамасына тең болады:  $\Delta A_0B_0C_1 = \Delta ABC$ . Түрлендіру нәтижесінде алынған үшбұрыштың горизонталь проекциясы көрсетілмеген. Егер түрлендіру нәтижесінде алынған үшбұрыштың горизонталь проекциясын салу керек болса, онда  $A_0$  және  $B_0$  нүктелері арқылы верти-



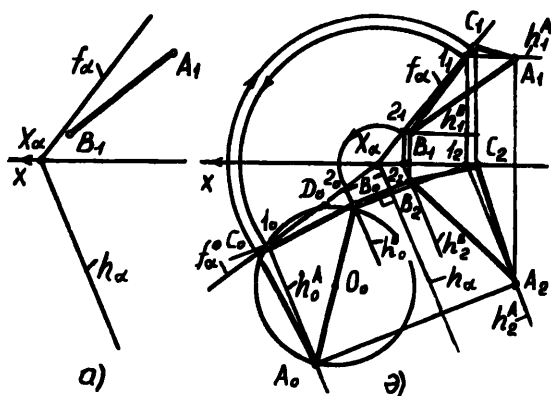
**216-сурет.**

каль байланыс сызықтарын жүргізер едік. Бұл байланыс сызықтары  $f_2$  түзуімен  $A_{02}$  және  $B_{02}$  нүктелерінде қиылысар еді. Сонда үшбұрыштың жаңа горизонталь проекциясы  $Ox$  осіне параллель кесінді болатынын көреміз.

Іздерімен берілген  $\alpha(f_a, h_a)$  жазықтығын оның деңгейлік түзулерінің бірі болатын горизонталь ізінен айналдыруды қарастыралық. Деңгейлік түзуден айналдыру тәсілінің осындай жеке түрін *беттестіру тәсілі* деп атайды (216-сурет). Сонда  $\alpha$  жазықтығын оның горизонталь ізі  $h_a$  -дан айналдырып  $\pi_2$  жазықтығымен беттестіру үшін жазықтықтың фронталь ізі бойынан  $A$  нүктесін аламыз. Бірінші инвариант бойынша  $A$  нүктесінің жаңа горизонталь проекциясын  $A_2$  нүктесі арқылы  $h_a$  түзуіне перпендикуляр етіп жүргізілген түзу бойынан іздейміз.  $AX_a$  кесіндісі екінші инвариантқа сай  $\pi_2$  жазықтығына өзінің натурал шамасын сақтап кескінделеді. Ал  $|AX_a| = |A_1X_a|$  болғандықтан центрі  $X_a$  болатын және  $A_1$  нүктесі арқылы өтетін шеңбер  $A_2$  нүктесін бастыра  $h_a$  -ға перпендикуляр жүргізілген түзумен  $A_0$  нүктесінде қиылысады. Сонда  $A_0$  нүктесі  $A$  нүктесінің жаңа горизонталь проекциясы, ал  $X_a$  қозғалмайтын нүкте.  $A_0$  нүктесін тоғысу нүктесі  $X_a$  -мен қосатын түзу  $f_a^0$  берілген  $\alpha$  жазықтығын горизонталь проекциялар жазықтығымен беттестіргеннен кейінгі фронталь іздің алатын орны.

**6.4.2 - есеп.** Іздерімен берілген  $\alpha$  жазықтығында жатқан  $AB$  кесіндісінің фронталь проекциясы берілген (217, а-сурет).  $ABC$  тікбұрышты үшбұрышының фронталь және горизонталь проекцияларын салу керек. Тік бұрыштың төбесі болатын  $C$  нүктесі  $\alpha$  жазықтығының фронталь ізінде жататын болсын.

**Шешуі.** Алдымен  $AB$  кесіндісінің горизонталь проекциясын салып аламыз. Ол үшін  $A$  және  $B$  нүктелері

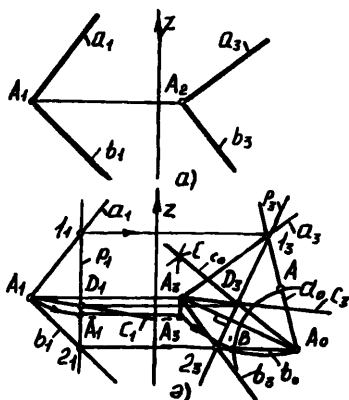


217-сурет.

арқылы өтетін  $\alpha$  жазықтығының горизонтальдарын пайдаланамыз.  $A$  нүктесі арқылы өтетін горизонталь  $f_{\alpha}$  түзуімен 1 нүктесінде, ал  $B$  нүктесі арқылы өтетін горизонталь — 2 нүктесінде қиылысады. Беттестіру тәсілін қолданамыз, яғни  $\alpha$  жазықтығын оның горизонталь ізінеі айналдырып  $\pi_2$  жазықтығымен беттестіріп аламыз. Беттескеннен кейінгі фронталь іздің ( $f_{\alpha}^0$  түзуінің) центрлері  $X_{\alpha}$  нүктесі болатын, 1<sub>1</sub> және 2<sub>1</sub> нүктелері арқылы өтетін шеңберлермен қиылысу нүктелері (1<sub>0</sub> және 2<sub>0</sub>) арқылы  $h_{\alpha}$  түзуіне параллель түзулер жүргіземіз. Бұл түзулер ( $h_0^A$  және  $h_0^B$ ) жоғарыда айтылған горизонтальдардың беттескеннен кейінгі орындарын анықтайды. Осы түзулерді  $A_2$  және  $B_2$  нүктелері арқылы  $h_{\alpha}$ -ға перпендикуляр етіп жүргізілген түзулер  $A_0$  және  $B_0$  нүктелерінде қияды. Сонда  $A_0B_0$  кесіндісі  $AB$  кесіндісінің беттескеннен кейінгі орны. Енді осы  $A_0B_0$  кесіндісін диаметр етіп алып шеңбер саламыз. Осы шеңбер  $f_{\alpha}^0$  түзуіне қатысты үш жағдайда орналасуы мүмкін: 1) шеңбер мен  $f_{\alpha}^0$  түзуі қиылыспайды; 2) шеңбер мен  $f_{\alpha}^0$  түзуі жанасадy; 3) шеңбер мен  $f_{\alpha}^0$  түзуі екі нүктеде қиылысады. Бірінші жағдайда есептің нақты шешімі болмайды. Екінші жағдайда есептің жалғыз ғана шешімі болады. Үшінші жағдайда есептің екі шешімі болады. 217, ә-сурет осы үшінші жағдайға сәйкес, яғни шеңбер мен  $f_{\alpha}^0$  түзуі  $C$  және  $D$  нүктелерінде қиылысады. Біз  $C$  нүктесін ғана пайдаланалық.  $C$  нүктесін кері түрлендіріп, оның фронталь және горизонталь проекцияларын анықтаймыз. Ол үшін

$C_0$  нүктесі арқылы өтетін, центрі  $X_a$  нүктесі болатын шеңбер жүргіземіз. Осы шеңбер  $f_a$  түзуін  $C_1$  нүктесінде қияды.  $C_1$  нүктесінен  $Ox$  осіне түсірілген перпендикулярдың табаны  $C_2$  нүктесі болады.  $C_1$  нүктесін  $A_1$  және  $B_1$  нүктелерімен, ал  $C_2$  нүктесін  $A_2$  және  $B_2$  нүктелерімен қосып, салуды аяқтаймыз.

**6.4.3 - е с е п.**  $A$  нүктесінде қиылысатын  $a$  және  $b$  түзулерінің фронталь және профиль проекциялары берілген (218, а-сурет). Берілген бұрыштың биссектрисасы болатын  $c$  түзуінің проекцияларын салу керек.



218-сурет.

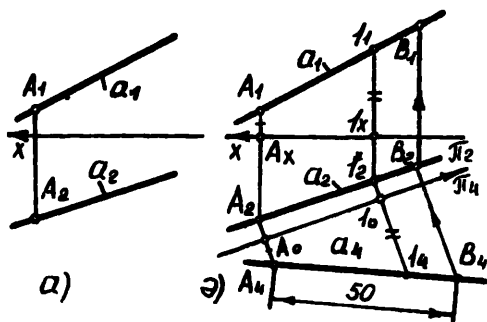
**Ш е ш у і.** Профиль түзуден айналдыру тәсілін пайдаланамыз.  $A$  нүктесі арқылы өтпейтін профиль түзудің фронталь проекциясын жүргіземіз:  $p_1 \parallel z$ ;  $p_1 \cap a_1 = 1_1$  және  $p_1 \cap b_1 = 2_1$ . Көрсетілген 1 және 2 нүктелерінің профиль проекцияларын бастыра  $p_3$  түзуі жүргізіледі. Осы  $p(p_1, p_3)$  түзуінен  $A$  нүктесінде қиылысатын  $a$  және  $b$  түзулері анықтайтын жазықтықты  $\pi_3$  жазықтығына параллель болғанша айналдырамыз. Сонда  $A$  нүктесінің жаңа профиль проекциясын  $A_3$  нүктесі арқылы  $p_3$  түзуіне перпендикуляр етіп жүргізілген түзу бойынан іздейміз.  $A_1$  кесіндісінің шын ұзындығын 1 нүктесі арқылы өтетін фронталь проекциялаушы түзуден айналдыру тәсілімен анықтап аламыз.  $\bar{A}_3$  нүктесін бастыра  $l_3$  центрінен жүргізілген шеңбер  $A_3$  нүктесін бастыра  $p_3$ -ке перпендикуляр етіп жүргізілген түзумен  $A_0$  нүктесінде қиылысады (218, ә-сурет).  $l_3$  және  $2_3$  қозғалмайтын нүктелерін  $A_0$  нүктесімен қоссақ, онда  $a_0$  және  $b_0$  түзулерін аламыз. Сонда  $A_0 l_3 2_3$  үшбұрышы  $A_1 2_1$  үшбұрышының натурал шамасы болғандықтан, осы  $A_0 l_3 2_3$  үшбұрышының  $A_0$  төбесіне сәйкес биссектрисасын ( $c_0$  түзуін) саламыз. Ол үшін центрі  $A_0$  нүктесі болатын қалауымызша шеңбер жүргіземіз. Осы шеңбер  $a_0$  және  $b_0$  түзулерімен  $A$  және  $B$  нүктелерінде қиылысады. Центрлері  $A$  және  $B$  нүктелері болатын, радиустары тең екі шеңбер  $C$  нүктесінде қиылысады.  $A_0$  және  $C$  нүктелерін қосатын түзу  $A_0 C$  бұрышының биссектрисасы болады.  $c(A_0, C)$  түзуі  $p_3$  тү-

зуімен  $D_3$  нүктесінде қиылысады, ал  $D_3$  нүктесі арқылы жүргізілген горизонталь түзу  $p_1$  сызығымен  $D_1$  нүктесінде қиылысады.  $A$  және  $D$  нүктелерінің аттас проекцияларын қосып, іздеп отырған  $s$  түзуінің фронталь  $c_1$  және профиль  $c_3$  проекцияларын аламыз.

### 6.5. ПРОЕКЦИЯЛАР ЖАЗЫҚТЫҒЫН АЛМАСТЫРУ

Өзара перпендикуляр фронталь  $\pi_1$  және горизонталь  $\pi_2$  проекциялар жазықтықтарынан тұратын системаны қарастырамыз. Бізге фигураның осы  $\pi_1$  және  $\pi_2$  жазықтықтарындағы тікбұрышты проекцияларынан тұратын эпюр беріледі. Осы  $\pi_1/\pi_2$  системасына жаңа проекциялар жазықтығын енгіземіз. Жаңа проекциялар жазықтығы  $\pi_4$  система жазықтықтарының біреуіне ( $\pi_1$ -ге, немесе  $\pi_2$ -ге) перпендикуляр болуы керек. Фигураны осы  $\pi_4$  жазықтығына тікбұрыштап проекциялаймыз. Егер  $\pi_4$  жазықтығы  $\pi_1$ -ге перпендикуляр болса, онда  $\pi_4$  жазықтығын осы екі жазықтықтың қиылысу сызығынан айналдырып,  $\pi_1$  жазықтығымен, ал  $\pi_4$  жазықтығы  $\pi_2$  жазықтығына перпендикуляр болса, онда  $\pi_4$  жазықтығын  $\pi_4$  және  $\pi_2$  жазықтықтарының қиылысу сызығынан айналдырып  $\pi_2$  жазықтығымен беттестіреміз. Бірінші жағдайда горизонталь проекциялар жазықтығы, ал екінші жағдайда фронталь проекциялар жазықтығы жаңа  $\pi_4$  жазықтығымен алмастырылады. Сонда  $\pi_1/\pi_2$  системасынан  $\pi_1/\pi_4$  немесе  $\pi_4/\pi_2$  системасына көшеміз.  $\pi_1$  және  $\pi_2$  жазықтықтарының біреуі сақталады да, екіншісі жаңа проекциялар жазықтығымен алмастырылады.  $\pi_1$  және  $\pi_2$  жазықтықтарының қиылысу сызығы *ескі ось*, ал жаңа проекциялар жазықтығы  $\pi_4$ -пен сақталатын жазықтықтың қиылысу сызығы *жаңа ось* деп аталады.  $\pi_1/\pi_2$  системасынан  $\pi_1/\pi_4$  системасына көшкенде фигура мен  $\pi_1$  жазықтығының өзара орналасуы өзгермейді, ал  $\pi_4/\pi_2$  системасына көшкенде фигура мен  $\pi_2$  жазықтығының өзара орналасулары өзгермейді. Енді проекциялар жазықтығын алмастыру тәсілінің инварианттарын тұжырымдауға болады. Бірінші инвариант: нүктенің жаңа проекциясы мен сақталатын проекциясы жаңа оське перпендикуляр түзудің бойында орналасады. Екінші инвариант: нүктенің жаңа проекциясынан жаңа оське дейінгі қашықтық оның ескі проекциясынан ескі оське дейінгі қашықтыққа тең болады.

Жаңа проекциялар жазықтығын есепті шешуде қолайлы болатындай етіп тандап алады. Егер проекциялар



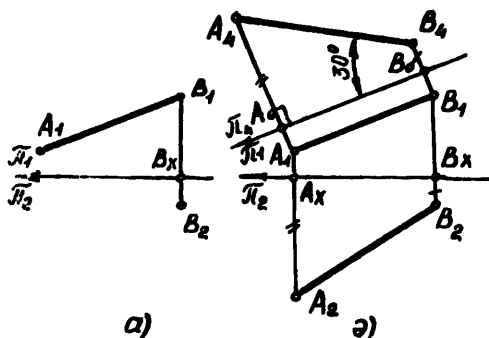
219-сурет.

жазықтығының біреуін алмастыру жеткілікті болмаса, онда екіншісін де жаңа проекциялар жазықтығына алмастыруға болады. Бір системадан екінші системаға көшуді біртіндеп орындау қажет, яғни системаның тек бір жазықтығын жаңа жазықтыққа алмастыруға болады. Мысалы  $\pi_1/\pi_2$  системасынан  $\pi_1/\pi_4$  системасына, одан кейін  $\pi_1/\pi_4$  системасынан  $\pi_5/\pi_4$  системасына көшуге болады. Жалпы жағдайда  $\pi_1/\pi_2 \rightarrow \pi_1/\pi_4 \rightarrow \pi_5/\pi_4 \rightarrow \pi_5/\pi_6 \rightarrow \dots$  немесе  $\pi_1/\pi_2 \rightarrow \pi_4/\pi_2 \rightarrow \pi_4/\pi_5 \rightarrow \pi_6/\pi_5 \rightarrow \dots$ . Жалпы проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілін есептің шешімі алынғанша жалғастыра беруге болады.

**6.5.1 - е с е п.** Берілген  $a$  түзуіне ұзындығы 50 мм  $AB$  кесіндісін салу керек (219, а-сурет).

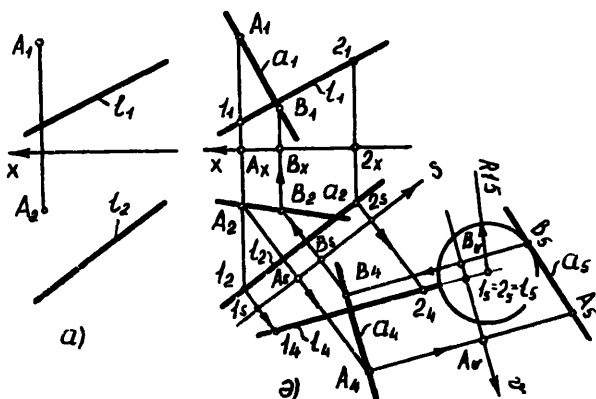
**Ш е ш у і.** Фронталь проекциялар жазықтығын  $a$  түзуіне параллель  $\pi_4$  жазықтығымен алмастырамыз. Жаңа ось  $a_2$  түзуіне параллель жүргізіледі (219, ә-сурет). Бірінші инвариантты ескеріп жаңа байланыс сызықтарын  $A_2$  және  $l_2$  нүктелері арқылы жаңа оське перпендикуляр жүргіземіз:  $(A_2A_4) \parallel (l_2l_4) \perp (A_0l_0)$ . Екінші инвариантты ескеріп,  $A_4$  және  $l_4$  нүктелерін  $|A_4A_0| = |A_1A_x|$  және  $|l_4l_0| = |l_1l_x|$  болатындай етіп табамыз. 1 нүктесі —  $a$  түзуінің  $A$  нүктесінен өзге кез келген нүктесі.  $A_4$  және  $l_4$  нүктелерін қосатын түзу  $a$  түзуінің жаңа проекциясы.  $a$  түзуі  $\pi_4$  жазықтығына параллель болғандықтан осы түзу кесінділері натурал шамаларын сақтап кескінделеді. Ұзындығы 50 мм  $A_4B_4$  кесіндісін  $a_4$  түзуіне салып,  $B$  нүктесінің фронталь  $B_1$  және горизонталь  $B_2$  проекцияларын кері түрлендіру нәтижесінде анықтаймыз.

**6.5.2 - е с е п.** Фронталь проекциялар жазықтығына  $30^\circ$ -қа тең бұрышпен көлбейтін  $AB$  кесіндісінің горизонталь проекциясын салуды аяқтау керек (220, а-сурет).



220-сурет.

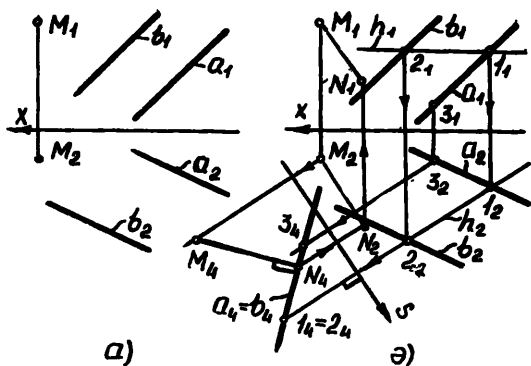
**Шешуі.** Горизонталь проекциялар жазықтығын  $AB$  кесіндісіне параллель  $\pi_4$  жазықтығымен алмастырамыз (220, ә-сурет).  $A_1$  және  $B_1$  нүктелері арқылы жаңа байланыс сызықтарын жаңа оське перпендикуляр етіп жүргіземіз, ал жаңа ось  $A_1B_1$  түзуіне параллель жүргізілген. Екінші инвариантты ескеріп, яғни  $|B_2B_x| = |B_4B_0|$  шартын пайдаланып,  $B_4$  нүктесін анықтаймыз.  $B_4$  нүктесі арқылы жаңа оське  $30^\circ$ -қа тең бұрышпен көлбейтін түзу  $A_1$  нүктесін бастыра жүргізілген жаңа байланыс сызығымен  $A_4$  нүктесінде қиылысады. Сонда  $A_4B_4$  берілген  $AB$  кесіндісінің  $\pi_4$  жазықтығындағы проекциясы. Кері түрлендіреміз.  $B_4$  нүктесі  $B_2$  нүктесіне,  $A_4$  нүктесі  $A_2$  нүктесіне түрленеді. Бұнда  $|A_4A_0| = |A_2A_x|$  болатыны ескеріледі.



221-сурет.

**6.5.3** - е с е п.  $A$  нүктесі және  $l$  түзуі берілген (221, а-сурет).  $A$  нүктесі арқылы өтетін және  $l$  түзуінен қашықтығы 15 мм болатын  $a$  түзуін салу керек.

**Ш е ш у і.** Фронталь проекциялар жазықтығын  $l$  түзуіне параллель  $\pi_4$  жазықтығымен алмастырамыз. Сонда  $l$  түзуі деңгейлік түзуге түрленеді. Жаңа ось  $l_2$  түзуіне параллель жүргізіледі.  $l$  түзуі бойынан қалауымызша 1 және 2 нүктелерін аламыз. Жаңа байланыс сызықтары жаңа оське перпендикуляр жүргізіледі. Ескі проекциядан ескі оське дейінгі қашықтықтың жаңа проекциядан жаңа оське дейінгі қашықтыққа тең болатынын пайдаланып,  $A_4, 1_4$  және  $2_4$  нүктелері анықталады:  $(A_2A_4) \parallel (1_21_4) \parallel (2_22_4) \perp s$ ;  $|A_1A_x| = |A_4A_s|$ ;  $|1_11_x| = |1_41_s|$ ;  $|2_12_x| = |2_42_s|$ ;  $l_4 = (1_42_4)$ . Одан кейін горизонталь проекциялар жазықтығын  $l$  түзуіне перпендикуляр  $\pi_5$  жазықтығымен алмастырамыз. Сонда  $l$  түзуі проекциялаушы түзуге түрленеді, яғни оның жаңа проекциясы нүктеге айналады. Жаңа ось  $l_4$  түзуіне перпендикуляр орналастырылады:  $l_4 \perp v$ . Ескі проекциялар ретінде берілген нүкте мен түзудің горизонталь проекциялары алынады, ал  $s$  түзуі ескі ось болып есептеледі.  $A_4, 1_4$  және  $2_4$  нүктелері арқылы жаңа оське ( $v$  түзуіне) перпендикуляр проекциялық байланыс сызықтары жүргізіледі. Осы сызықтарға жаңа осьтен бастап ескі осьтен сәйкес ескі проекцияға дейінгі қашықтыққа тең кесінділер салып,  $A_5, 1_5$  және  $2_5$  нүктелерін аламыз және  $1_5 = 2_5$  болатынын көреміз. Шынында да  $l$  түзу  $\pi_4/\pi_5$  системасында проекциялаушы түзу, яғни оның  $\pi_5$  жазықтығындағы проекциясы нүкте болады. Енді центрі  $l_5$  нүктесі болатын радиусы 15 мм-ге тең шеңбер жүргіземіз. Осы шеңбер мен  $A_5$  нүктесінің орналасуына қарай үш жағдайды ажырату керек. Бірінші жағдайда  $A_5$  нүктесі шеңбердің ішінде орналасады. Бұл жағдайда есептің шешімі болмайды. Екінші жағдайда  $A_5$  нүктесі шеңбердің бойында жатады. Бұл жағдайда есептің шексіз көп шешімі болады. Үшінші жағдайда  $A_5$  нүктесі шеңберден тыс орналасады (221, ә-сурет). Бұл жағдайда есептің екі шешімі бар:  $A_5$  нүктесінен шеңберге екі жанама жүргізуге болады. Біз олардың біреуін ғана көрсетелік. Жанасу нүктесін  $B_5$  деп белгілесек, онда  $(A_5B_5) = a_5$  түзуі — іздеп отырған  $a$  түзуінің  $\pi_5$  жазықтығындағы проекциясы. Енді есепті кері түрлендіріп  $a_1$  және  $a_2$  түзулерін жүргіземіз. Ол үшін  $B$  нүктесінің  $\pi_4$  жазықтығындағы проекциясын анықтауымыз қажет. Бұл арада  $a$  түзуінің  $\pi_5$  жазықтығына параллельдігі ескеріледі, яғни  $a_4$  түзуі  $v$  түзуіне параллель



222-сурет.

жүргізіледі. Одан кейін  $B_4$  нүктесін бастыра  $s$  түзуіне перпендикуляр жүргізіп, оған  $s$  түзуінен бастап  $|B_5B_0|$ -ға тең  $B_5, B_2$  кесіндісін салып,  $B_2$  нүктесін аламыз.  $B_2$  нүктесін бастыра  $x$  түзуіне перпендикуляр жүргізіп,  $|B_4B_5|$ -ке тең  $B_x, B_1$  кесіндісін салып,  $B_1$  нүктесін аламыз. Сонда  $(A_1B_1) = a_1$  және  $(A_2B_2) = a_2$  болады. Шынында да  $a$  түзуі  $A$  нүктесі арқылы өтеді және айқас түзулер ( $a$  мен  $l$ ) аралығы 15 мм.

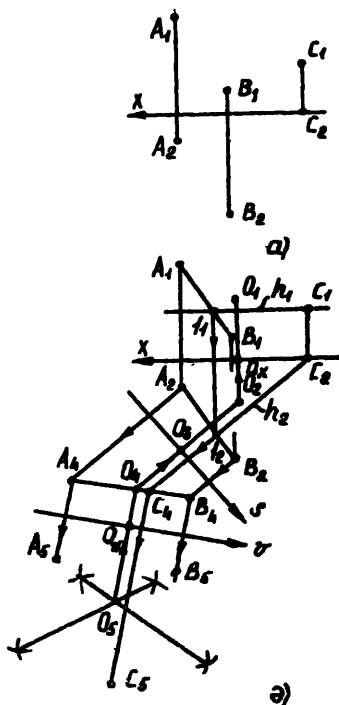
6.5.4 - есеп. Берілген  $M$  нүктесінен  $\alpha(a \parallel b)$  жазықтығына дейінгі қашықтықты анықтау керек (222, а-сурет).

Шешуі. Фронталь проекциялар жазықтығын  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр  $\pi_4$  жазықтығымен алмастырамыз. Сонда  $\alpha$  жазықтығы  $\pi_4$  жазықтығына түзуге кескінделер еді.  $M$  нүктесінің  $\pi_4$  жазықтығындағы проекциясынан түзуге кескінделген  $\alpha$  жазықтығының проекциясына перпендикуляр түсіреміз. Егер осы перпендикулярдың табаны  $N$  нүктесі болса, онда  $|MN|$  іздеп отырған қашықтықты анықтайды. Осы мақсатта  $\alpha$  жазықтығының горизонталі  $h$  жүргізіледі. Жаңа ось  $s$  горизонтальдың горизонталь проекциясына перпендикуляр жүргізіледі. Сонда  $a$  және  $b$  түзулерінің  $\pi_4$  жазықтығындағы проекциялары бірігіп түседі:  $a_4 = b_4$ .  $M_4$  нүктесінен  $a_4 = b_4$  түзуіне түсірілген перпендикулярдың табаны  $N_4$  нүктесі. Сонда  $|M_4N_4|$  болады.  $N$  нүктесінің горизонталь проекциясын салуда  $M_2N_2$  түзуі  $s$  түзуіне параллель болатыны ескеріледі.

6.5.5 - есеп.  $A, B$  және  $C$  нүктелері арқылы өтетін шеңбердің центрін анықтау керек (223, а-сурет).

Шешуі.  $ABC$  үшбұрышы анықтайтын жазықтықты

деңгейлік жазықтыққа түрлендіреміз. Сонда  $ABC$  үшбұрышы натурал шамасын сақтап кескінделеді. Есептің шешімі болатын нүктені анықтаймыз. Одан кейін қайта түрлендіріп, табылған нүктенің проекцияларын саламыз.  $A$ ,  $B$  және  $C$  нүктелері анықтайтын жазықтықтың горизонталін жүргіземіз:  $C \in h \parallel \pi_2$ ;  $h \subset \alpha(ABC)$ . Фронталь проекциялар жазықтығын  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр  $\pi_4$  жазықтығымен алмастырамыз.  $\alpha$  жазықтығы  $\pi_4$  жазықтығына түзу түрінде кескінделеді. Одан кейін  $\pi_2$  жазықтығын  $\alpha$  жазықтығына параллель  $\pi_5$  жазықтығымен алмастырамыз,  $\alpha$  жазықтығы  $\pi_5$  жазықтығына натурал шамасын сақтап проекцияланады:  $\triangle ABC = \triangle A_5 B_5 C_5$ . Үш нүкте арқылы өтетін шеңбердің центрі ортаңғы перпендикулярлардың қиылысу нүктесінде болады.  $A_5 C_5$  кесіндісінің ортаңғы перпендикуляры  $B_5 C_5$  кесіндісінің ортаңғы перпендикулярымен  $O_5$  нүктесінде қиылысады.  $O_5 - A_5, B_5$  және  $C_5$  нүктелері арқылы өтетін шеңбердің центрі болады.  $O_5$  нүктесі арқылы  $\sigma$  түзуіне перпендикуляр жүргізіп  $A_4 B_4$  түзуі бойынан  $O_4$  нүктесін,  $O_4$  нүктесі арқылы  $s$  түзуіне перпендикуляр жүргізіп,  $|O_5 O_\sigma|$ -ға тең  $O_s, O_2$  кесіндісін салсақ  $O_2$  нүктесі алынады.  $O_2$  нүктесін бастыра вертикаль байланыс сызығын жүргізіп,  $O_4 O_s$  кесіндісіне тең  $O_x O_1$  кесіндісін салып,  $O_1$  нүктесін аламыз. Сонда  $O(O_1, O_2)$  нүктесі  $A, B, C$  нүктелері анықтайтын шеңбердің центрі болады (223, ә-сурет).

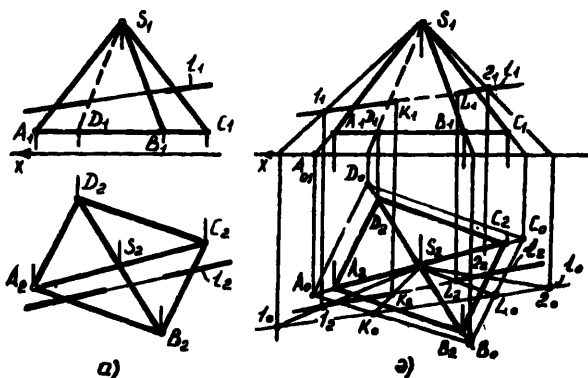


223-сурет.

#### 6.6. ҚОСЫМША ПРОЕКЦИЯЛАР ЖАЗЫҚТЫҒЫНА ПРОЕКЦИЯЛАУ

Проекциялар жазықтығын алмастыру тәсілінде қосымша проекциялар жазықтығы ретінде проекциялаушы жазықтықтар алынып, оған фигура тікбұрыштап проек-





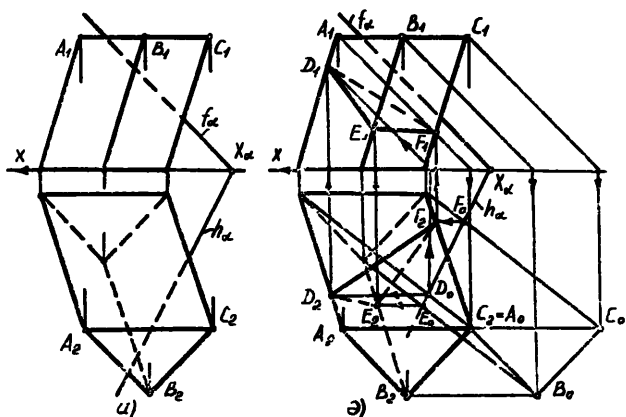
225-сурет.

екциясы  $l_0$  екі нүктеде ( $K_0$  және  $L_0$ ) қиылысады. Енді  $K_0$  және  $L_0$  нүктелерін призманың бүйір қырлары бағытында қайтадан  $l$  түзуіне проекциялап, қиылысу нүктелері  $K$  мен  $L$ -дің фронталь ( $K_1$  мен  $L_1$ ) және горизонталь ( $K_2$  мен  $L_2$ ) проекцияларын анықтаймыз (224, ә-сурет). Бұл екі нүктенің аралығында орналасқан  $l$  түзуінің бөліктері эпюре көрінбейді.

6.6.2 - е с е п. Берілген  $l$  түзуінің  $SABCD$  пирамидасының бетімен қиылысу нүктелерін анықтау керек (225, а-сурет).

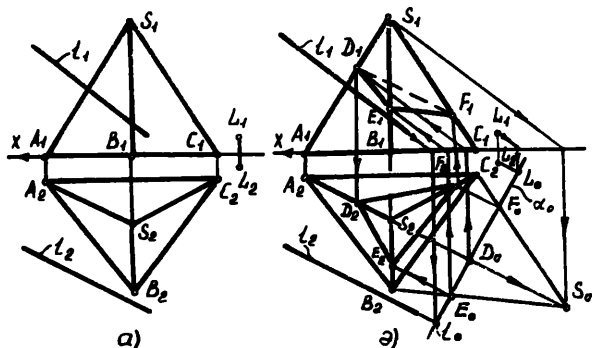
Ш е ш у і.  $S$  нүктесін проекциялау центрі деп қарастырып, пирамиданы және  $l$  түзуін горизонталь проекциялар жазықтығына проекциялаймыз. Мысалы,  $A$  нүктесінің проекциясын былай табамыз:  $(S_1A_1) \cap x = A_{01}$ ;  $A_{01} \in (A_{01}A_0) \perp x$ ;  $(A_{01}A_0) \cap (S_2A_2) = A_0$ . Табылған  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  және  $D_0$  нүктелері төбелері болатын төртбұрыш пирамиданың жаңа проекциясы, ал  $l_0$  және  $2_0$  нүктелерін қосатын түзу  $l_0$  болады.  $l_0$  түзуі  $A_0B_0C_0D_0$  төртбұрышымен  $K_0$  және  $L_0$  нүктелерінде қиылысады. Табылған  $K_0$  және  $L_0$  нүктелерін  $S$  центрінен  $l$  түзуіне қайта проекциялап, қиылысу нүктелерінің ( $K$  және  $L$  нүктелерінің) горизонталь және фронталь проекцияларын табамыз:  $(S_2K_0) \cap l_2 = K_2$ ;  $(S_2L_0) \cap l_2 = L_2$ ;  $K_2 \in (K_2K_1) \perp x$ ;  $(K_2K_1) \cap l_1 = K_1$ ;  $L_2 \in (L_2L_1) \perp x$ ;  $(L_2L_1) \cap l_1 = L_1$ . Сонда  $K(K_1, K_2)$  және  $L(L_1, L_2)$  іздеп отырған нүктелеріміз (225, ә-сурет).

6.6.3 - е с е п. Горизонталь проекциялар жазықтығында тұрған үшбұрышты тік призманың проекциялары және жалпы жағдай жазықтығы  $\alpha(f, \cap h_x)$  іздерімен берілген (226, а-сурет). Призманың  $\alpha$  жазықтығымен қимасының проекцияларын салу керек.



226-сурет.

Шешуі. Тағы да  $\pi_2$  жазықтығына қосымша проекциялау тәсілін пайдаланамыз. Жазықтықтың фронталь ізін проекциялау бағыты деп қарастырсақ, онда призманың жоғарғы табаны  $A_0B_0C_0$  үшбұрышына,  $\alpha$  жазықтығы  $h$  түзуіне проекцияланады. Қимада пайда болатын  $DEF$  үшбұрышы  $F_0E_0$  кесіндісіне ( $D_0 \in [F_0E_0]$ ) проекцияланады. Қиманың горизонталь проекциясы —  $\Delta D_2E_2F_2$ . Қиманың фронталь проекциясын салу үшін  $D_0$ ,  $E_0$  және  $F_0$  нүктелерін қайтадан  $j$  түзуі бағытында призманың сәйкес бүйір қырларына проекциялаймыз.  $D_0$  нүктесінен  $Ox$  осіне перпендикуляр түсіріп, осы проекциялардың табаны арқылы  $j$  түзуіне параллель түзу жүргізсек, ол түзу ( $D_2D_1$ ) сызығын  $D_1$  нүктесінде қияды. Осындай салуларды  $E_0$  және  $F_0$  нүктелері үшін қайталап,  $E_1$  және  $F_1$



227-сурет.

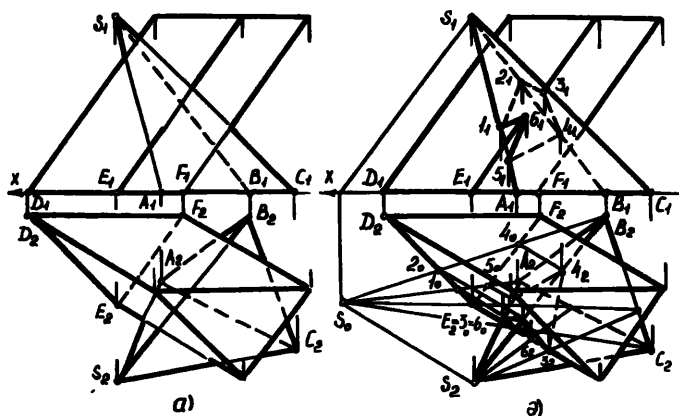
нүктелерін аламыз (226, ә-сурет). Табылған  $D_1$ ,  $E_1$  және  $F_1$  нүктелерін қосуда көрінетіндік ескерілу қажет. Көрінетін жақта жатқан кесінді көрінеді де көрінбейтін жақта жатқан кесінді көрінбейді. 226, ә-суретте көрінетін кесінділер  $D_1E_1$  және  $E_1F_1$  тұтас сызықпен, ал  $D_1F_1$  кесіндісі үзілме сызықпен жүргізілген.

6.6.4 - е с е п.  $SABC$  пирамидасының  $\alpha(L; l)$  жазықтығымен қимасының проекцияларын салу керек (227, а-сурет).

Ш е ш у і. Тағы да  $\pi_2$  жазықтығына қосымша проекциялау тәсілін пайдаланалық. Проекциялау бағыты үшін  $l$  түзуінің бағытын аламыз. Сонда  $l$  түзуі  $l_0$  нүктесіне,  $L$  нүктесі  $L_0$  нүктесіне және  $S$  нүктесі  $S_0$  нүктесіне, ал  $A$  нүктесі  $A_2$ ,  $B$  нүктесі  $B_2$  және  $C$  нүктесі  $C_2$  нүктесіне проекцияланады. Пирамиданың проекциясы  $S_0A_2B_2C_2$ , ал  $\alpha$  жазықтығының проекциясы  $\alpha_0(L_0, l_0)$  болады. Қимада пайда болатын көпбұрыш  $\alpha_0$  түзуінде жататын кесіндіге кескінделеді. Бұл жағдайда қима үшбұрыш болады және бұл үшбұрыш төбелерінің қосымша проекциялары  $D_0$ ,  $E_0$ ,  $F_0$  нүктелері  $\alpha_0$  түзуімен  $S_0A_2$ ,  $S_0B_2$ ,  $S_0C_2$  түзулерінің қиылысуы нәтижесінде табылады. Енді  $D_0$ ,  $E_0$ ,  $F_0$  нүктелерін  $l$  түзуі бағытында призманың сәйкес қырларына кері проекциялаймыз.  $E_0$  және  $F_0$  нүктелері арқылы  $l_2$  түзуіне параллель түзулер жүргізсек, олар  $S_2B_2$  және  $S_2C_2$  түзулерімен  $E_2$  және  $F_2$  нүктелерінде қиылысады.  $F_2$  нүктесі арқылы вертикаль байланыс сызығын жүргізіп  $S_1C_1$  түзуі бойынан  $F_1$  нүктесін табамыз.  $E$  нүктесінің фронталь проекциясын табу үшін  $E_0$  нүктесі арқылы  $Ox$  осіне перпендикуляр, ал осы перпендикулярдың табаны арқылы  $l_1$  түзуіне параллель түзу жүргізіледі. Соңғы түзу  $S_1B_1$  түзуімен  $E_1$  нүктесінде қиылысады.  $D$  нүктесінің фронталь проекциясы да  $E$  нүктесінің проекциясын салуға ұқсас табылады, ал оның горизонталь проекциясы вертикаль байланыс сызығының көмегімен анықталады (227, ә-сурет). Қиманың горизонталь проекциясын шектейтін үшбұрыш  $D_2E_2F_2$  эпюрге көрінетін болғандықтан тұтас сызықпен, ал фронталь проекциясын шектейтін  $D_1E_1F_1$  үшбұрышының көрінетін қабырғалары  $D_1E_1$  мен  $E_1F_1$  тұтас сызықпен және көрінбейтін қабырғасы  $D_1F_1$  үзілме сызықпен жүргізіледі.

6.6.5 - е с е п. 228, а-суретте берілген призма мен пирамиданың қиылысу сызығын салу керек.

Ш е ш у і. Екі көпжақтың беттері қиылысқанда кеңістік көпбұрышы пайда болады. Кеңістік көпбұрышы деп төбелері бір жазықтықта жатпайтын көпбұрышты



228-сурет.

айтады. Берілген көпжақтардың өзара орналасуларына байланысты бұл кеңістік көпбұрышы (қиылысу сызығы) екі көпбұрышқа ажырауыда мүмкін. Қиылысу сызығы болатын кеңістік көпбұрышын алуда екі жол бар. Бұл екі жолдың біріншісінде ізден отырған көпбұрыштың төбелері анықталады, яғни бірінші көпжақ қырларының екінші көпжақтың жақтарымен және екінші көпжақ қырларының бірінші көпжақтың жақтарымен қиылысу нүктелері тұрғызылады. Екінші жолда ізделіп отырған көпбұрыштың қабырғалары анықталады, яғни берілген көпжақтардың жақтарының қиылысу сызықтары табылады. Сонда бірінші жолда түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін, ал екінші жолда екі жазықтықтың қиылысу сызығын салу есебі бірнеше рет қайталанылып шығарылады.

Біз бұл есепті де косымша проекциялау тәсілімен шығарамыз. Осы мақсатта призманың бүйір қырлары бағытында горизонталь проекциялар жазықтығына проекциялайық. Сонда призма  $D_2E_2F_2$  үшбұрышына, пирамиданың табаны  $A_2B_2C_2$  үшбұрышына және пирамиданың төбесі  $S_0$  нүктесіне проекцияланатынын көреміз (228, ә-сурет). Эпюрден пирамиданың  $AS$  қыры призма жақтарымен 1 және 5 нүктелерінде, ал  $BS$  қыры 2 және 4 нүктелерінде қиылысатынын көреміз. Призманың  $E$  нүктесі арқылы өтетін қыры пирамиданың жақтарымен 3 және 6 нүктелерінде қиылысады. Табылған нүктелерді (1<sub>0</sub>, 2<sub>0</sub>, 3<sub>0</sub>, 4<sub>0</sub>, 5<sub>0</sub> және 6<sub>0</sub>) призманың бүйір қырлары бағытында қайтадан көпжақтардың сәйкес қырларына

проекциялаймыз. Сонда қиылысу сызығы болатын кеңістік көпбұрышының төбелері —  $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2$  және  $6_2$  нүктелеріне (горизонталь проекцияда) кескінделетінін көреміз. Бұл нүктелердің фронталь проекциялары вертикаль проекциялық байланыс сызықтарының көмегімен анықталады. Енді осы табылған нүктелерді қалай қосу керек? Егер екі нүкте бірінші көпжақтың бір жағында және екінші көпжақтың да бір жағында жататын болса, онда бұл екі нүктені кесіндімен қосуға болады, өйткені бұндай екі нүкте қиылысу көпбұрышының іргелес төбелері. Мысалы, 1 және 2 нүктелерін кесіндімен қосуға болады, өйткені олар пирамиданың  $SAB$  жағында және призманың  $D$  мен  $E$  нүктелері арқылы өтетін бүйір қырлары анықтайтын жағында жатыр. Сол сияқты 4 және 5 нүктелерін де кесіндімен қосуға болады, өйткені олар пирамиданың  $SAB$  жағында және призманың  $E$  мен  $F$  нүктелері арқылы өтетін қырлары анықтайтын жағында жатыр. Сызда көрінетіндікті анықтауда мынаны ескеру қажет: егер қиылысу көпбұрышының қабырғасы берілген көпжақтардың көрінетін жақтарының қиылысу сызығы болса, ол көрінеді (эпюрде тұтас жуан сызықпен жүргізіледі); ал қиылысу көпбұрышының қабырғасы берілген көпбұрыштардың көрінбейтін жақтарының, немесе көрінетін жақтың көрінбейтін жақпен қиылысу сызығы болса, ол көрінбейді (эпюрде үзілме сызықпен жүргізіледі).

### Есептер

1.  $AB$  кесіндісінің ұзындығын және оның проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын жазық-параллель ығыстыру, проекциялаушы түзуден айналдыру және проекциялар жазықтығын алмастыру тәсілдерімен анықтаңыздар.  $A$  және  $B$  нүктелерінің координаталарын 5-кестеден алыңыздар.

2.  $AB$  және  $CD$  түзулерінің ара қашықтығын жазық-параллель ығыстыру, проекциялаушы түзуден айналдыру және проекциялар жазықтығын алмастыру тәсілдерімен анықтаңыздар.  $A, B, C$  және  $D$  нүктелерінің координаталарын 5-кестеден алыңыздар.

3.  $A$  нүктесінен  $BCD$  үшбұрышы жазықтығына дейінгі қашықтықты жазық-параллель ығыстыру, проекциялаушы түзуден айналдыру және проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілдерімен анықтаңыздар. Тағы да 5-кестесін пайдаланыңыздар.

4.  $ABC$  үшбұрышының натурал шамасын жазық-па-

раллель ығыстыру, проекциялаушы түзуден айналдыру, деңгейлік түзуден айналдыру, проекциялар жазықтығын алмастыру тәсілдерімен анықтаңыздар. Тағы да 5-кестені пайдалану керек.

5. 5-кестені пайдаланып  $DEF$  үшбұрышы жазықтығының фронталь, горизонталь және профиль проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын салыңыздар.

6. 5-кестені пайдаланып жақтары  $ABC$  және  $ABD$  үшбұрыштары болатын екіжақты бұрыштың натурал шамасын салыңыздар.

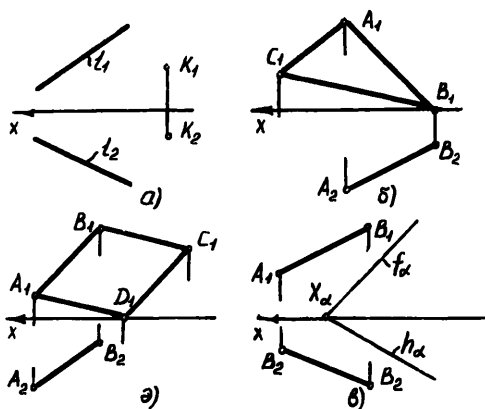
7. 6.5.3-есепті жазық-параллель ығыстыру тәсілімен шешіңіздер (221, а-сурет). Төбесі  $A$  нүктесі болатын, ал оған қарсы табаны  $I$  түзуінде жататын теңқабырғалы үшбұрыш салыңыздар.

8. Фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы  $60^\circ$  болатын  $AB$  кесіндісінің проекцияларын салуды аяқтаңыздар (220, а-сурет). Есепті шешу үшін проекциялаушы түзуден айналдыру тәсілін пайдалану керек.

9. Жазық төртбұрыш  $ABCD$  берілген (209, а-сурет). Осы төртбұрыштың натурал шамасын горизонталь түзуден айналдыру тәсілімен салыңыздар.

10. 6.3.4-есепті проекциялар жазықтығын алмастыру тәсілімен шығарыңыздар (214, а-сурет). Пирамиданың орнына биіктігі пирамиданың биіктігіне тең тік призма салыңыздар.

11. Берілген  $K$  нүктесінен  $l$  түзуіне дейінгі қашық-



229-сурет.

тықты эпюрді түрлендіру тәсілдерін пайдаланып табу керек (229, а-сурет).

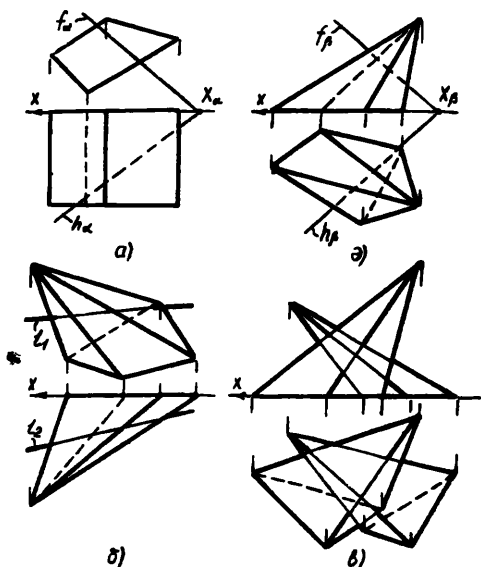
12. Берілген  $l$  түзумен тікбұрыш жасап қиылысатын және  $K$  нүктесі арқылы өтетін  $a$  түзуін түрлендіру тәсілдерінің біреуін пайдаланып салыңыздар (229, а-сурет). Қиылысу нүктесі ортасы болатын  $a$  түзуінің  $KL$  кесіндісін көрсетіңіздер.

13.  $ABCD$  тіктөртбұрышының фронталь проекциясы  $A_1B_1C_1D_1$  және қабырғасы  $AB$ -ның горизонталь проекциясы берілген (229, а-сурет). Осы тіктөртбұрыштың горизонталь проекциясын салуды аяқтау керек.

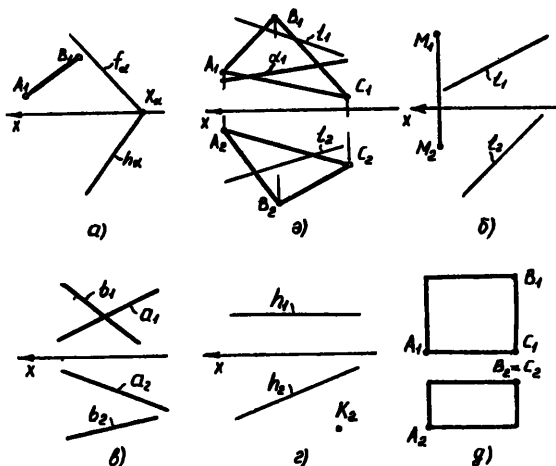
14.  $ABC$  тікбұрышты үшбұрыш. Оның фронталь проекциясы  $A_1B_1C_1$  және  $AB$  қабырғасының горизонталь проекциясы берілген (229, б-сурет). Осы үшбұрыштың тікбұрышы  $A$  төбесінде деп қарастырып, оның горизонталь проекциясын салуды аяқтаңыздар.

15.  $AB$  кесіндісі және  $\alpha$  жазықтығы берілген.  $AB$  кесіндісінің  $\alpha$  жазықтығындағы тікбұрышты проекциясын салыңыздар (229, в-сурет).

16. 229, в-суретті пайдаланып табаны  $AB$  кесіндісі, төбесі  $\alpha$  жазықтығындағы  $C$  нүктесі және биіктігі ең қысқа кесінді болатын  $ABC$  теңбүйірлі үшбұрышын салыңыздар.



230-сурет.



231-сурет.

17. Төртбұрышты призма және іздерімен анықталған  $\alpha$  жазықтығы берілген (230, а-сурет). Призма беті мен  $\alpha$  жазықтығының қиылысу сызығы проекцияларын салыңыздар.

18. Төртбұрышты пирамиданың  $\beta$  жазықтығымен қиылысу сызығын салыңыздар (230, ә-сурет).

19. Берілген  $l$  түзуі мен төртбұрышты пирамида бетінің қиылысу нүктелерін салыңыздар (230, б-сурет).

20. Берілген екі пирамида беттерінің қиылысу сызығын салыңыздар (230, в-сурет).

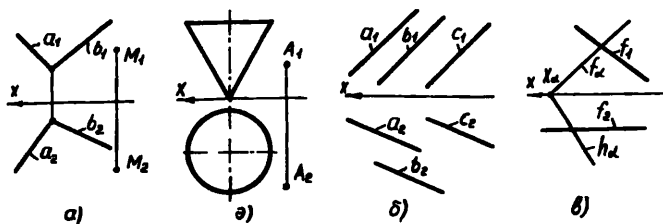
21. Эпюрде іздерімен берілген  $\alpha$  жазықтығында жататын  $AB$  түзуінің фронталь проекциясы көрсетілген (231, а-сурет).  $AB$  түзуінің  $\alpha$  жазықтығы іздерінен бірдей қашықтықта жатқан нүктесін салу керек.

22. Фронталь проекциялаушы  $\alpha(\alpha_1)$  жазықтығы,  $ABC$  үшбұрышы анықтайтын  $\beta$  жазықтығы және  $l$  түзуі берілген. Осы  $l$  түзуінің  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарынан бірдей қашықтықта орналасқан нүктесін салу керек (231, ә-сурет).

23.  $M$  нүктесі  $l$  түзуінен айналғанда шеңбер сызады (231, б-сурет). Осы шеңбердің горизонталь және фронталь проекцияларын салыңыздар.

24. Осі берілген  $l$  түзуі, биіктігі 50 мм болатын және табанындағы шеңбер  $M$  нүктесі арқылы өтетін конустың проекцияларын салыңыздар (231, б-сурет).

25. Берілген  $a$  және  $b$  түзулерімен  $M$  және  $N$  нүкте-



232-сурет.

лерінде қиылысатын,  $a$  түзуіне перпендикуляр және  $MN$  кесіндісінің ұзындығы 40 мм болатын  $l$  түзуін салыңыздар (231, в-сурет).

26. Горизонталь түзу  $h$  және  $K$  нүктесінің горизонталь проекциясы берілген (231, г-сурет).  $K$  нүктесінен  $h$  түзуіне дейінгі қашықтықты 35 мм деп алып,  $K$  нүктесінің фронталь проекциясын салу керек.

27. Тік параллелепипед берілген (231, д-сурет). Оның  $A$  төбесінен 50 мм қашықтықта және  $BC$  қырында жататын  $D$  нүктесінің проекцияларын салыңыздар.

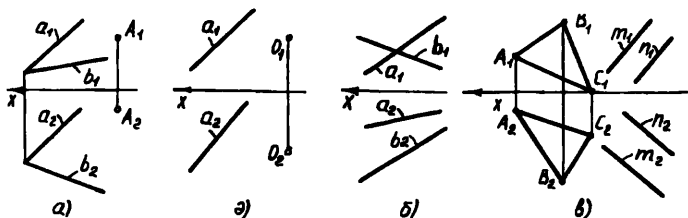
28.  $M$  нүктесі мен  $\alpha(a \cap b)$  жазықтығынан бірдей қашықтықта және  $\alpha(a \cap b)$  жазықтығына параллель  $\beta$  жазықтығын салыңыздар (232, а-сурет).

29. Айналу конусы бетінің берілген  $A$  нүктесіне ең жақын орналасқан нүктесін анықтаңыздар (232, ә-сурет).

30. Үш параллель түзулер  $a$ ,  $b$  және  $c$  кескінделген (232, б-сурет). Оларға параллель және олардан қашықтықтары бірдей  $d$  түзуін салыңыздар.

31. Фронталь  $f$  және жазықтық  $\alpha(h_2 \cap f_2)$  берілген (232, в-сурет). Осы  $f$  түзуінің  $\alpha$  жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтаңыздар.

32. Қиылысатын  $a$  және  $b$  түзулері арасындағы бұрыштың биссектрисасы бойынан берілген  $A$  нүктесінен қашықтығы 50 мм болатын  $B$  нүктесін табыңыздар (233, а-сурет).



233-сурет.

33. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың ( $SABCD$ ) проекцияларын салыңыздар (233, ә-сурет). Пирамиданың биіктігі 60 мм. Табанының центрі  $O$  нүктесі болады және қабырғасы  $AB$  берілген  $a$  түзуінде жатады.

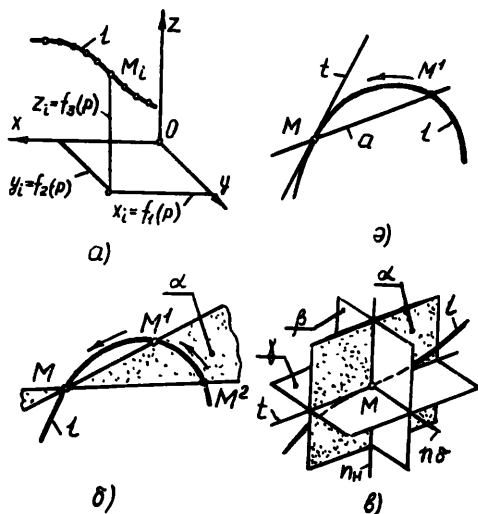
34. Айқас түзулер  $a$  және  $b$  берілген (233, б-сурет). Осы айқас түзулер аралығындағы бұрыштың натурал шамасын анықтаңыздар.

35. Екі жазықтық  $\alpha(A, B, C)$  және  $\beta(m||n)$  берілген (233, в-сурет). Осы  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтары аралығындағы екі жақты бұрыштың натурал шамасын салыңыздар.

## 7-тарау. ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТАР [ҚИСЫҚТАР]

### 7.1. ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТАР [ҚИСЫҚТАР] ТУРАЛЫ ЖАЛПЫ ТҮСІНІКТЕР

*Қисық сызықтар* немесе *қисықтар* деп бір параметрлі нүктелер жиынын айтады. Тікбұрышты декарттық координаталар системасында қисықтың теңдеуін былай жазуға болады:  $x=f_1(p)$ ;  $y=f_2(p)$ ;  $z=f_3(p)$ , мұндағы  $p$  — параметр. Біртіндеп өзгеріп отыратын параметрдің әрбір мәніне кеңістікте белгілі бір нүкте сәйкес келеді. Біз қисықты кинематикалық тәсілмен алу жолын ғана қарастырамыз. Бұл тәсілде қисықты кеңістікте үздіксіз қозғалатын нүктенің траекториясы ретінде анықтайды.



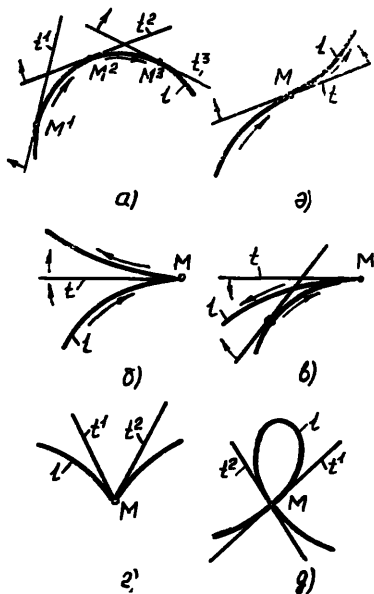
234-сурет.

Мысалы,  $M$  нүктесі кеңістікте үздіксіз қозғалатын болса, онда осы нүкте орындарының жиыны  $l$  қисығын береді (234, а-сурет). Параметрдің кез келген  $p_1$  шамасына координаталардың анықталған шамалары  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  сәйкес, ал  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  шамаларына кеңістікте  $M_1$  нүктесі сәйкес болады.

Қисықтың екі нүктесі арқылы өтетін түзуді оның қиюшысы дейді. 234, ә-суретте  $l$  қисығының  $M$  және  $M^1$  нүктелері арқылы өтетін қиюшысы  $a$  кескінделген. Енді  $M^1$  нүктесін біртіндеп  $M$  нүктесіне жақындатамыз. Сонда  $M^1$  нүктесі  $M$  нүктесімен беттескендегі қиюшы шекті жағдайда  $t$  түзуін анықтайды, ал  $t$  түзуін  $l$  қисығына оның  $M$  нүктесінде жүргізілген жанама деп атайды. Қисықтарды зерттеуде жанаманың алатын орны ерекше.

Қисықтарды тендеулеріне қарай *трансценденттік* және *алгебралық* деп екі топқа бөледі. Егер тендеулеріне тригонометриялық функциялар қатынасса, онда қисық *трансценденттік* деп, ал тендеулері алгебралық болса, онда қисық *алгебралық* деп аталады. Тендеулеріндегі белгісіздердің ең үлкен дәреже көрсеткіші алгебралық қисықтың ретін анықтайды. Геометриядан қисықтың реті оның жазықтықпен қиылысу нүктелерінің санына тең болатыны белгілі. Мысалы, шеңбер, эллипс, гипербол, парабола — екінші ретті алгебралық қисықтар, ал синусоида — трансценденттік қисық.

Барлық нүктелері бір жазықтықта жатпайтын қисықтарды *кеңістік қисықтары*, ал барлық нүктелері бір жазықтықта жататын қисықтарды *жазықтық қисықтары* деп атайды. Кеңістік қисығы  $l$ -дің бойынан үш нүкте  $M$ ,  $M^1$  және  $M^2$  алалық. Бұл үш нүкте  $\alpha$  жазықтығын анықтасын (234, б-сурет). Енді  $M^1$  және  $M^2$  нүктелерін біртіндеп  $M$  нүктесіне жақындата берелік. Сонда  $M^1$  және  $M^2$  нүктелері  $M$  нүктесімен беттескендегі осы үш нүкте анықтайтын  $\alpha$  жазықтығы  $M$  нүктесінде  $l$  қисығымен беттесіп жанасатын жазықтық деп аталады. Қисықтың  $M$  нүктесінде онымен беттесіп жанасатын жазықтық осы нүктеде қисыққа жүргізілген жанама арқылы өтеді. Егер  $t$  түзуі  $l$  қисығының  $M$  нүктесінде жүргізілген жанамасы болса, онда  $t$  түзуі  $l$  қисығының  $M$  нүктесінде беттесіп жанасатын  $\alpha$  жазықтығында жатады.  $M$  нүктесі арқылы өтетін және жанамаға перпендикуляр жазықтықты *нормаль жазықтық* деп атайды. Берілген  $l$  қисығының  $M$  нүктесіндегі нормаль жазықтығы  $\beta$  болса, онда  $\beta$  жазықтығы осы нүктедегі беттесіп жанасатын  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр болады. Нормаль және бет-



235-сурет.

тесіп жанасатын жазықтықтардың қиылысу сызығын қисықтың негізгі нормалі деп атап,  $n_n$  әрпімен белгілейді. Сонда  $n_n = \alpha \cap \beta$  болғандықтан  $n_n \perp t$  (234, в-сурет).  $M$  нүктесі арқылы өтетін және негізгі нормальға перпендикуляр ү жазықтығын қисықты түзететін жазықтық деп атайды. Түзететін және нормаль жазықтықтардың қиылысу сызығын бинормаль деп атап,  $n''$  әрпімен белгілейді. Сонда  $\beta \cap \gamma = n''$  және  $\alpha \cap \gamma = t$  болады. Бинормаль негізгі нормальға және жанамаға перпендикуляр болатынын аңғару қиын емес. Кеңістік қисығының әрбір нүкте

тесінде жанама, негізгі нормаль және бинормаль деп аталатын үш түзу қарастырылады. Осы үш түзудің жұптары анықтайтын үш жазықтық (беттесіп жанасатын, нормаль және түзететін) үшжақты анықтайды. Осы  $\alpha(t \cap n_n)$ ,  $\beta(n_n \cap n''_n)$  және  $\gamma(t \cap n''_n)$  жазықтықтарынан тұратын үшжақты Френе үшжағы деп те атайды (Френе француз ғалымы, ол 1847 жылы бірінші болып кеңістік қисықтарын зерттеуде беттесіп жанасатын, нормаль және түзететін жазықтықтардан тұратын үшжақты пайдалануды ұсынған).

Үздіксіз қозғалатын  $M$  нүктесі  $l$  жазықтық қисығын сызатын болсын (235, а-сурет).  $M$  нүктесі  $M^1$  нүктесінен оған шексіз жақын  $M^2$  нүктесіне, одан кейін  $M^2$  нүктесінен оған шексіз жақын  $M^3$  нүктесіне ... өтсін (235, а-суретте көрнектілік үшін  $M^1, M^2, M^3, \dots$  нүктелері әдейі сирек орналастырылған). Сонда нүктенің қисық бойымен қозғалу бағыты қарастырылып отырған нүкте төңірегінде жанама бойымен қозғалу бағытына сәйкес болады, ал жанаманы қисық бойымен сырғанамай домалайды деп қарастырамыз. Нүкте оған көрші нүктеге өткенде жанама осы нүктеден өте аз бұрышқа айналады. Қисық ерекшелігі екі қозғалысқа байланысты болады. Бұл екі

қозғалыстың бірі — нүктенің қисық бойымен қозғалуы, ал екіншісі — жанаманың қисық бойымен домалауы. Егер осы екі қозғалыстың екеуінің де бағыттары өзгермейтін болса қисықтың нүктесі *қарапайым* деп аталады. 235, а-суреттегі *I* қисығының нүктелері  $M^1, M^2, M^3, \dots$  қарапайым нүктелердің мысалдары бола алады. Ал бұл екі қозғалыстың біреуінің немесе екеуінің де қозғалу бағыттары өзгертін болса, онда нүкте *ерекше* болғаны. *Бұрылу нүктесінде* нүктенің қисық бойымен қозғалысының бағыты өзгермейді, ал жанаманың айналу бағыты өзгереді. 235, ә-суреттегі *M* нүктесінің сол жағындағы қисықты қарастырсақ, онда *M* нүктесіне жақындаған сайын жанама сағат тілі бағытында қозғалады, ал *M* нүктесінің оң жағындағы қисықтың бөлігі үшін жанама сағат тіліне қарсы бағытта қозғалады. Егер нүктенің қисық бойымен қозғалу бағыты өзгертін болса, онда нүктені *қайту нүктесі* деп атайды. Қайту нүктесі екі түрлі болады. *Бірінші текті қайту нүктесінде* жанаманың қозғалу бағыты өзгермейді (235, б-сурет), *екінші текті қайту нүктесінде* — өзгереді (235, в-сурет). Бірінші текті нүктеде жүргізілген жанама қисық нүктелерін екі топқа бөледі, бірінші топтағы нүктелер жанаманың бір жағында жататын болса, екінші топтағы нүктелер жанаманың екінші жағында жатады. Қисық нүктелері түгелдей екінші текті нүктеде жүргізілген жанаманың тек бір жағында орналасады. Бірінші текті қайту нүктесін *қисықтың шошағы*, ал екінші текті қайту нүктесін *қисықтың тұмсығы* деп атайды. Қарастырылған ерекше нүктелерде қисыққа тек жалғыз жанама жүргізуге болады. Төменде қисыққа екі немесе одан да көп жанамалар жүргізуге болатын ерекше нүктелер қарастырылады. *Сыну нүктесінде* қисыққа екі жанама жүргізуге болады және жанаманың қозғалысы бұл нүктеде секірмелі түрде өзгереді (235, г-сурет). *Тораптық нүктеде* қисық өзі-өзімен қиылысады (235, д-сурет) (өзін-өзі екі, үш, төрт, ...,  $n$  рет қиюы мүмкін, ал осыған сәйкес тораптық нүктедегі қисыққа жүргізілетін жанамалар да екеу, үшеу, төртеу, ...,  $n$  болады).

Кеністік қисықтарын зерттеуде үш қозғалысты қарастыруға тура келеді: жоғарыда қарастырылған екі қозғалысқа беттесіп жанасатын жазықтықтың қозғалысы косылады. Қисықтың бір-біріне шексіз жақын орналасқан нүктелерінің біреуінен екіншісіне өткендегі беттесіп жанасатын жазықтықтың қозғалысын *жанамадан өте аз бұрышқа айналу* деп қарастыруға болады. Егер аталған

| Қозғалатын элемент          | Түрлі жағдайлар |   |   |   |   |   |   |   |
|-----------------------------|-----------------|---|---|---|---|---|---|---|
|                             | 1               | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Нүкте                       | +               | + | + | + | — | — | — | — |
| Жанама                      | +               | + | — | — | + | + | — | — |
| Беттесіп жанасатын жазықтық | +               | — | + | — | + | — | + | — |

үш қозғалыстың бағыттары өзгермейтін болса, онда кеңістік қисығының нүктесін *қарапайым нүкте* деп атайды. Қозғалыс бағыты өзгермейтін болса, «+» таңбасын, ал өзгеретін болса, «—» таңбасын қойып, кеңістік қисығы нүктелері үшін 6-кестені құрастыруға болады. Не бәрі 8 жағдай болуы мүмкін. 1-жағдайда нүктенің, жанаманың және беттесіп жанасатын жазықтықтың бағыттары өзгермейді. Бұл жағдай қарапайым нүктеге сәйкес болады. Ал қалған 7 жағдай *ерекше нүктелерге* сәйкес: 2-жағдайда тек беттесіп жанасатын жазықтықтың жанамадан айналу бағыты; 3-жағдайда тек жанаманың бағыты; 4-жағдайда жанама мен беттесіп жанасатын жазықтықтың қозғалу бағыттары және т. с. с.; 8-жағдайда нүктенің де, жанаманың да, беттесіп жанасатын жазықтықтың да қозғалу бағыттары өзгереді.

## 7.2. ҚИСЫҚТАРДЫҢ ПРОЕКЦИЯЛАРЫ

Қисықты кескіндеу үшін де проекциялау әдісі пайдаланылады. Қисықты проекциялағанда оның қиюшысы қиюшыға, жанамасы жанамаға, тораптық нүктесі тораптық нүктеге кескінделеді. Бұл айтылғандар проекциялауда өзара меншіктілік сақталатындықтан келіп туады. Егер  $A$  және  $B$  нүктелері  $l$  қисығына меншікті болса, онда бұл екі нүктенің проекциялары  $A'$  және  $B'$  берілген  $l$  қисығының проекциясы болатын  $l'$  қисығына меншікті болуы тиіс, яғни  $l$  қисығының қиюшысы  $AB$  түзуіне оның проекциясы болатын  $l'$  қисығының қиюшысы  $A'B'$  түзуі сәйкес болады.  $l$  қисығының  $M$  нүктесінде оған жүргізілген жанамасы  $t$  түзуі болса, онда кескінде  $l$  қисығының проекциясы болатын  $l'$  қисығының  $M'$  нүктесінде жүргізілген  $t'$  жанамасы сол  $t$  түзуінің проекциясы болады. Егер  $l$  қисығы  $A$  нүктесінде өзін-өзі  $n$  рет қиып өтетін болса, онда  $A$  нүктесінің проекциясы болатын  $A'$  нүкте-

сінде  $l$  қисығының проекциясы  $l'$  қисығы да өзін-өзі  $n$  рет қиып өтеді. Алгебралық қисықтың реті проекциялау кезінде сақталады. Мысалы, екінші ретті қисықтың проекциясы да (жалпы жағдайда) екінші ретті қисық болады. Параллель проекцияда өзіндік нүкте өзіндік нүктеге, өзіндік емес (шексіз қашықтықта жатқан) нүкте өзіндік емес (шексіз қашықтықта жатқан) нүктеге проекцияланады. Соңғы қорытындыдан эллипстің параллель проекциясы эллипс, параболаның параллель проекциясы парабола, гиперболаның параллель проекциясы гипербола болатынын көреміз. Ал центрлік проекцияда екінші ретті қисықтың біреуінің проекциясы центр мен проекциялар жазықтығына қатысты орналасуына байланысты екінші ретті қисықтың басқа түріне проекциялануы мүмкін. Мысалы, шеңбердің центрлік проекциясы эллипс те, парабола да, гипербола да болуы мүмкін. Сол сияқты параболаның центрлік проекциясы эллипс те, парабола да, гипербола да болуы мүмкін. Бұл айтылғандар негізінде центрлік проекциялауда өзіндік нүкте өзіндік немесе өзіндік емес нүктеге, ал өзіндік емес нүкте де өзіндік немесе өзіндік емес нүктеге проекциялана алады. Параллель проекциялауда (тікбұрыштап проекциялауда да) өзіндік нүкте тек өзіндік нүктеге, ал өзіндік емес нүкте тек өзіндік емес нүктеге проекцияланады. Эллипс өзіндік емес нүктесі жоқ, парабола жалғыз өзіндік емес нүктесі бар, гипербола екі өзіндік емес нүктесі бар екінші ретті қисық екені белгілі. Сондықтан параллель проекцияда эллипс проекциясының өзіндік емес нүктесі болмауы, парабола проекциясының жалғыз өзіндік емес нүктесі, гипербола проекциясының екі өзіндік емес нүктесі болуы тиіс.

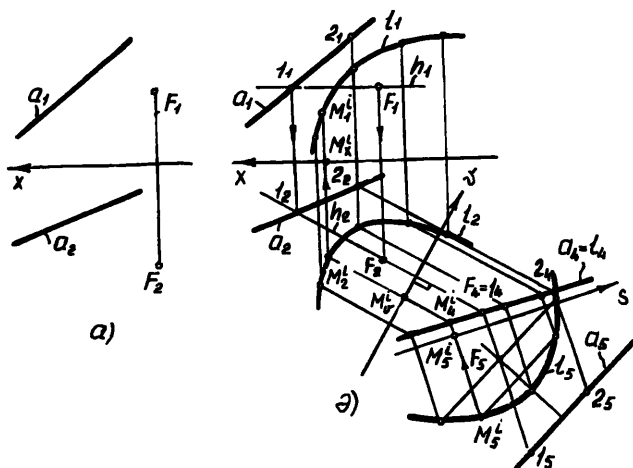
Шеңбердің эпюріне толығырақ тоқталалық. Шеңбер жазықтығы үш жағдайда (деңгейлік жазықтық, проекциялаушы жазықтық, жалпы жағдай жазықтығы) орналасуы мүмкін. Деңгейлік жазықтықта орналасқан шеңбер өзіне параллель жазықтыққа бұрмаланбай өзіне тең шеңберге, ал басқа проекциялар жазықтықтарына ұзындығы шеңбер диаметріне тең кесінділерге кескінделеді. 236, а-суретте фронталь жазықтықта орналасқан шеңбердің эпюрі берілген. Эпюрде шеңбер центрі  $O$  нүктесінің фронталь  $O_1$  және горизонталь  $O_2$  проекциялары белгіленген. Шеңбердің фронталь проекциясы  $l_1$  центрі  $O_1$  нүктесі болатын сол шеңбердің өзіне тең шеңбер, ал горизонталь проекциясы ұзындығы шеңбердің диаметріне тең  $Ox$  осіне параллель орналасқан  $l_2$  кесіндісі және



үлкен осін аламыз. Шеңбердің горизонталь проекциясы болатын  $l_2$  эллипсінің үлкен осі горизонталь  $h$ -тың горизонталь проекциясы  $h_2$  түзуінде жатады:  $|E_2O_2| = |O_2F_2| = R$ . Сонда  $E_2F_2$  кесіндісі  $l_2$  эллипсінің үлкен осін анықтайды.  $F$  нүктесінің фронталь проекциясы ( $F_1$  нүктесі) эллипс  $l_1$ -дің бойында жатады. Сонда  $l_1$  эллипсі өзінің үлкен осі  $A_1B_1$  кесіндісімен және  $F_1$  нүктесімен анықталады. Енді  $l_1$  эллипсінің кіші осін анықтауымыз керек. Кіші осьтің бағыты белгілі: ол  $O_1$  нүктесі арқылы  $A_1B_1$  түзуіне перпендикуляр жүргізіледі. Үлкен осьті диаметр етіп алып, шеңбер жүргіземіз, ал  $F_1$  нүктесі арқылы  $A_1B_1$  түзуіне перпендикуляр және параллель екі түзу жүргіземіз. Перпендикулярдың шеңбермен қиылысу нүктесін центрмен ( $O_1$  нүктесімен) қосатын түзу  $A_1B_1$  түзуіне параллель түзуді  $F_0$  нүктесінде қияды. Центрі  $O_1$  нүктесі болатын және  $F_0$  нүктесі арқылы өтетін шеңбер жүргізсек, онда бұл шеңбер кіші осьтің бағытымен  $C_1$  және  $D_1$  нүктелерінде қиылысады. Сонда  $C_1D_1$  кесіндісі  $l_1$  эллипсінің кіші осі болады. Осьтері бойынша  $l_1$  эллипсі салынады. Шеңбердің горизонталь проекциясы болатын  $l_2$  эллипсі де осы айтылғанға ұқсас салынады, яғни  $E_2F_2$  кесіндісін диаметр деп қарастырып, шеңбер ( $l_0$ ) тұрғызылады.  $A$  нүктесінің горизонталь проекциясы  $A_2$  нүктесін бастыра  $E_2F_2$  түзуіне перпендикуляр  $A_2I$  түзуін және  $E_2F_2$  түзуіне параллель  $A_2A_0$  түзуін жүргіземіз.  $A_2I$  түзуі  $l_0$  шеңберін 1 нүктесінде қияды, ал  $A_2A_0$  түзуі 1 нүктесін  $O_2$  нүктесімен қосатын түзумен  $A_0$  нүктесінде қиылысады. Центрі  $O_2$  нүктесі болатын және  $A_0$  нүктесі арқылы өтетін шеңбер жүргіземіз. Соңғы шеңбер  $O_2$  нүктесін бастыра  $E_2F_2$  түзуіне перпендикуляр етіп жүргізілген түзумен  $M_2$  және  $N_2$  нүктелерінде қиылысады. Сонда пайда болған  $M_2N_2$  кесіндісі —  $l_2$  эллипсінің кіші осі.

7.2.1 - есеп.  $F$  нүктесі және  $a$  түзуі берілген (237, а-сурет). Берілген  $F$  нүктесінен қашықтығы берілген  $a$  түзуінен қашықтығына тең және  $\alpha(F; a)$  жазықтығында жататын нүктелер жиынын салу керек.

Шешуі. Есептің шартын қанағаттандыратын нүктелер жиыны *парабола* деп аталатын қисық болатынын аңғару қиын емес. Сонда бізге сол параболаның фронталь және горизонталь проекцияларын салу керек. Ол үшін эпюрді түрлендіріп  $\alpha(F; a)$  жазықтығын деңгейлік жазықтыққа айналдырамыз. 237, ә-суретте проекциялар жазықтығын алмастыру тәсілі қолданылған. Алдымен  $\alpha$  жазықтығын проекциялаушы жазықтыққа, ал одан кейін деңгейлік жазықтыққа түрлендіреміз. Жаңа  $\pi_5$

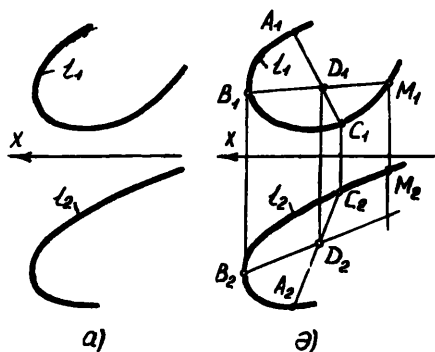


237-сурет.

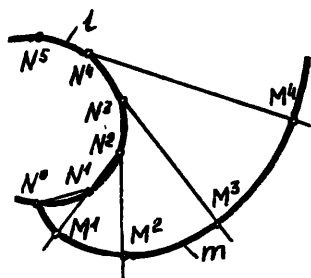
жазықтығына  $\alpha(F; a)$  жазықтығы параллель, сондықтан  $F_5$  нүктесінен және  $a_5$  түзуінен бірдей қашықтықтағы нүктелерді тауып, оларды бастыра  $l_5$  параболасын саламыз. Бұл парабола  $\pi_4$  жазықтығына  $a_4$  түзуімен беттесетін сәулеге кескінделеді:  $l_4 = a_4$ . Эпюрді кері түрлендіріп  $l_2$  және  $l_1$  қисықтарын анықтаймыз. Ол үшін  $l_5$  қисығының  $M'_5$  нүктесі арқылы  $s$  түзуіне перпендикуляр жүргізсек, онда осы перпендикуляр  $l_4$  түзуін  $M_4$  нүктесінде қиып өтеді.  $M'_4$  нүктесі арқылы  $o$  осіне перпендикуляр жүргізіп, оған  $M_5 M'_5$  кесіндісіне тең  $M'_2 M'_5$  кесіндісін салып,  $M'_2$  нүктесін аламыз. Осындай  $M'_2$  нүктесі сияқты нүктелер жиыны  $l_2$  қисығын анықтайды.  $M'_2$  нүктесі арқылы  $Ox$  осіне перпендикуляр түзу жүргіземіз. Осы түзуге  $M'_4 M'_5$  кесіндісіне тең  $M'_1 M'_5$  кесіндісін салып,  $M'_1$  нүктесін аламыз. Осындай  $M'_1$  нүктелер жиыны  $l_1$  қисығын анықтап береді.

Жазықтық қисықтарын зерттеу үшін олардың жазықтығына параллель жазықтықтағы параллель проекцияларын пайдаланған тиімді, ал кеңістік қисықтарымен танысуда олардың кем дегенде екі проекциясынан тұратын кескінді пайдалану қажет.

7.2.2 - е с е п. Эпюрде  $l$  қисығының фронталь  $l_1$  және горизонталь  $l_2$  проекциялары берілген (238, а-сурет). Оның жазықтық немесе кеңістік қисығы екенін анықтау керек.



238-сурет.



239-сурет.

**Шешуі.** Берілген  $l$  қисығы бойынан үш нүкте  $A, B, C$  аламыз. Енді  $l$  қисығының кез келген  $M$  нүктесі осы  $A, B, C$  нүктелері анықтайтын жазықтықта жататынын немесе жатпайтынын тексереміз.  $A_1C_1$  және  $B_1M_1$  түзулері  $D_1$  нүктесінде қиылыссын (238, ә-сурет). Байланыс сызығының көмегімен  $A_2C_2$  түзуі бойынан  $D$  нүктесінің горизонталь проекциясы болатын  $D_2$  нүктесін табамыз. Сонда екі жағдай болуы мүмкін. Бірінші жағдайда  $M_2 \in (B_2D_2)$  болады, яғни  $M$  нүктесі  $\alpha(A, B, C)$  жазықтығында жатады. Ал екінші жағдайда  $M_2 \notin (B_2D_2)$  болады, яғни  $M$  нүктесі  $\alpha(A, B, C)$  жазықтығында жатпайды. Екінші жағдайда берілген қисықтың кеңістік қисығы екені анықталады. Бірінші жағдайда да берілген қисықты кеңістік қисығы емес деп айта алмаймыз. Берілген қисықтың жазықтық қисығы болатынын графиктік жолмен дәлелдеуге болмайды. Бірақ қисықтың берілген бөлігі бір жазықтықта жататынын немесе жатпайтынын анықтауға болады. Ол үшін қисықты оның үш нүктесі анықтайтын жазықтыққа перпендикуляр жазықтыққа проекциялау керек. Сонда қисықтың проекциясы бір түзудің бойында жатса, онда қисықтың қарастырып отырған бөлігі де бір жазықтықта жатады.

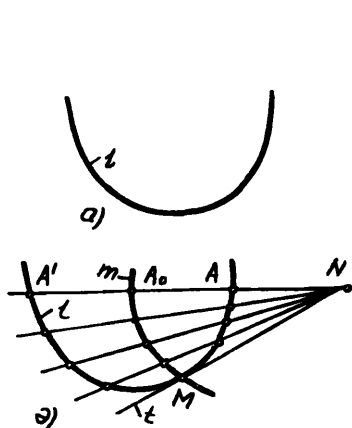
### 7.3. ҚИСЫҚТАРҒА БАЙЛАНЫСТЫ ЖУЫҚТАП САЛУЛАР

Берілген  $l$  қисығын  $N^0N^1N^2\dots$  сынық сызығымен алмастыралық (239-сурет).  $N^1$  нүктесін центр етіп алып  $N^0$  нүктесінен бастап  $N^1N^2$  түзуімен  $M^1$  нүктесінде қиылысқанша шеңбер доғасын жүргізелік.  $N^2$  нүктесін центр етіп алып  $M^1$  нүктесінен бастап  $N^2N^3$  түзуімен қиылыс-

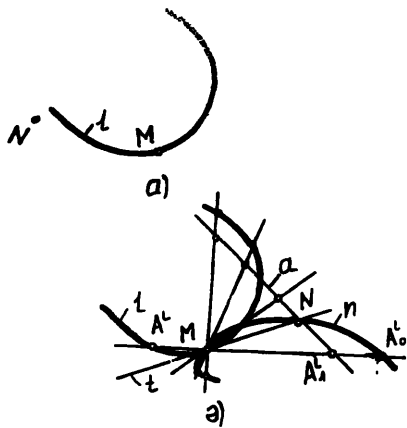
қанша тағы да шеңбер доғасын жүргізелік. Осылайша салуларды жалғастыра берелік. Сонда  $N^0$  нүктесі өзіне өзі,  $N^1$  нүктесіне  $M^1$  нүктесі,  $N^2$  нүктесіне  $M^2$  нүктесі,  $N^3$  нүктесіне  $M^3$  нүктесі, ..., ал  $N^0N^1N^2N^3...$  сынық сызығына шеңбер доғаларынан тұратын  $N^0M^1M^2M^3...=t$  қисық сызығы сәйкес болады. Енді  $l$  қисығының бойынан алынған  $N^0, N^1, N^2, N^3, ...$  нүктелерінің ара қашықтығын шексіз азайтып олардың санын шексіз көбейтсек, онда  $N^0N^1N^2N^3...$  сызық сызығы  $l$  қисығына айналар еді.  $N^0N^1N^2N^3...$  сынық сызығы  $l$  қисығына айналғандағы  $t$  сызығының шегін *эвольвента* деп атайды. Егер  $l$  сызығының эвольвентасы  $t$  қисығы болса, онда  $l$  сызығын  $t$  қисығының *эволютасы* деп атайды.  $N^1$  нүктесін  $N^2$  нүктесіне шексіз жақындатқанда  $l$  қисығының  $N^1N^2$  қиюшысы оның  $N^1$  нүктесінде жүргізілген жанамасына айналады. Сонда эволютаға жүргізілген жанама эвольвентаға нормаль болатынын көреміз. Жалпы алғанда эвольвента мен эволюта — қисықтың *қисықтығына* байланысты ұғымдар.

7.3.1 - е с е п. Берілген қисыққа берілген нүкте арқылы өтетін жанама салу (240, а-сурет) керек.

Ш е ш у і. Берілген  $N$  нүктесі арқылы  $l$  қисығының қиюшылары болатын түзулер шоғын жүргіземіз. Осындай шоқтың бір түзуі  $l$  қисығын  $A$  және  $A^1$  нүктелерінде қияды.  $AA^1$  хордасының ортасы  $A_0$  нүктесі болсын. Осындай басқа хордалардың орталары арқылы өтетін  $t$  қисығын жүргіземіз. Сонда  $t$  және  $l$  қисықтары  $M$  нүктесінде қиылысады (240, ә-сурет). Табылған  $M$  нүктесін



240-сурет.



241-сурет.

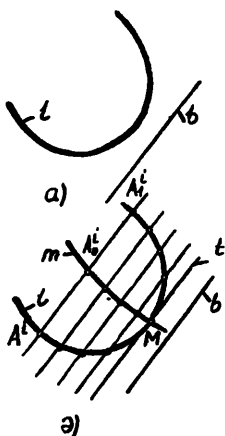
берілген  $N$  нүктесімен қосатын түзу  $l$  қисығына жанама болады:  $(MN) = t$  — іздеп отырған жанамамыз.

**7.3.2 - е с е п.** Берілген қисықтың нүктесі арқылы өтетін жанамасын салу (241, а-сурет) керек.

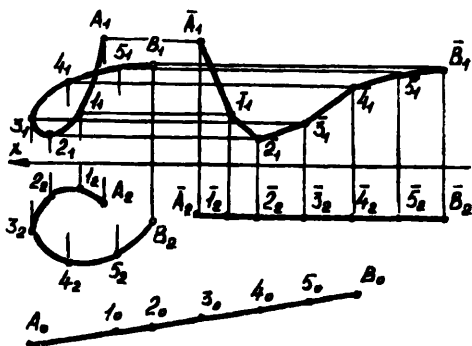
**Ш е ш у і.** Берілген  $l$  қисығының  $M$  нүктесі арқылы өтетін оның жанамасын салу керек. Ол үшін тұрғызылатын жанаманың бағытына шамамен перпендикуляр болатындай етіп  $a$  түзуін жүргіземіз. Сонда  $M$  нүктесі арқылы өтетін түзулер шоғының біреуі  $l$  қисығын  $A'$  нүктесінде, ал түзуді  $A'_1$  нүктесінде қияды. Осы  $A'A'_1$  түзуіне  $A'_1$  нүктесінен бастап хордаға тең кесінді салып,  $A'_0$  нүктесін аламыз ( $|MA'| = |A'_1 A'_0|$ ). Сондай салуды қарастырылып отырған түзулер шоғының басқа түзулері үшін де қайталаймыз. Сонда  $A'_0$  нүктелері сияқты нүктелер жиынын аламыз. Осы нүктелер жиыны анықтайтын қисық  $n$   $M$  нүктесі арқылы өтеді және  $a$  түзуін  $N$  нүктесінде қияды.  $(MN) = t$  түзуі  $l$  қисығының  $M$  нүктесі арқылы жүргізілген жанамасы болады (241, ә-сурет).

**7.3.3 - е с е п.** Берілген қисықтың берілген түзуге параллель жанамасын салу (242, а-сурет) керек.

**Ш е ш у і.** Бізге  $l$  қисығы,  $b$  түзуі берілсін және  $l$  қисығының  $b$  түзуіне параллель жанамасын салу керек болсын. Ол үшін  $b$  түзуіне параллель және  $l$  қисығымен қиылысатын түзулер жүргіземіз. Бұл түзулер  $l$  қисығымен қиылысқанда алынатын хордалардың орталарын табамыз. Мысалы,  $l$  қисығы  $b$  түзуіне параллель түзумен  $A'$  және  $A'_1$  нүктелерінде қиылыссын, ал  $A'A'$  хордасының ортасы  $A'_0$  нүктесі болсын. Осылайша табылған  $A'_0$  нүктелердің жиыны  $m$  қисық сызығын анықтайды. Сонда  $m$  және  $l$  сызықтары  $M$  нүктесінде қиылысады. Бұл іздеп отырған жанамамыздың  $l$  қисығымен жанасу нүктесі, сондықтан  $M$  нүктесі арқылы  $b$  түзуіне параллель етіп жүргізілген түзу  $t$  есеп шарттарын түгел қанағаттандырады (242, ә-сурет). Сонда берілген қисыққа ( $l$ ) берілген бағыттағы ( $b$ ) жанаманы ( $t$ ) былай салады екен:  $b$  түзуіне параллель  $a'$  түзуін жүргізеді;  $a'$  түзуі  $l$  қисығын  $A'$  және  $A'_1$  нүктелерінде қияды;  $A'A'_1$  кесіндісінің ортасы болатын  $A'_0$  нүктесін тұрғызады ( $|A'A'_0| = |A'_0 A'_1|$ ); тұрғызуды қайталай отырып нүктелер жиынын табады және табылған нүктелерді бастыра  $m$  қисығын жүргізеді;  $m \cap l = M$ ;  $M \in t \parallel b$ ;  $t$  — іздеп отырған жанама.



242-сурет.



243-сурет.

7.3.4 - е с е п. Қисық кесіндісінің ұзындығын анықтау (243-сурет) керек.

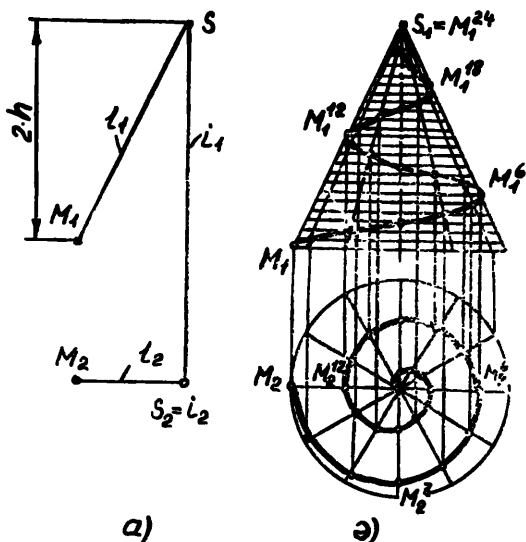
Ш е ш у і. Берілген  $l$  қисығының  $A$  және  $B$  нүктелері аралығындағы бөлігінің ұзындығын салу керек болсын. Қарастырып отырған қисықтың кеңістік қисығы екенін ажырату қиын емес. Шынында да, фронталь проекциядағы тораптық нүктеге горизонталь проекцияда әртүрлі екі нүкте сәйкес болады. Егер қисық жазықтық болса, онда ол фронталь проекциялаушы жазықтықта орналасуы қажет еді. Сондықтан кеңістік қисықтарының проекцияларындағы ерекше нүктелерге оның қарапайым нүктелері сәйкес болуы мүмкін. Кеңістік қисығын оның көршілес екі нүктесінің аралығындағы бөлігін түзудің кесіндісі деп қарастыруға болатындай сынық сызықпен аппроксимациялаймыз (алмастырамыз). Одан кейін қисықтың ұзындығын салудың орнына оған сәйкес сынық сызықтың ұзындығын саламыз. Ал сынық сызықтың ұзындығын анықтау үшін жазық-параллель ығыстыру әдісін қолдануға болады. 243-суретте горизонталь ( $Ox$  осіне параллель) түзу жүргізілген. Осы түзудің  $\bar{A}_2$  нүктесінен бастап ұзындықтары  $A_2\bar{1}_2, \bar{1}_2\bar{2}_2, \bar{2}_2\bar{3}_2, \dots$  кесінділерінің ұзындықтарына тең  $\bar{A}_2\bar{1}_2, \bar{1}_2\bar{2}_2, \bar{2}_2\bar{3}_2, \dots$  кесінділерін саламыз. Бұл нүктелерді  $A_1\bar{1}_2\bar{2}_2\bar{3}_2\bar{4}_2\bar{5}_2\bar{6}_2$  сынығын горизонталь ығыстырып, оның бөліктерін фронталь проекциялар жазықтығына параллель орналастырғаннан кейінгі горизонталь проекциясы деп қарастырып, осы сынықтың фронталь проекциясын —  $\bar{A}_1\bar{1}_1\bar{2}_1\bar{3}_1\bar{4}_1\bar{5}_1\bar{6}_1$  сынығын саламыз.

Енді соңғы сынықты  $A_0B_0$  кесіндісіне түзетіп, іздеп отырған ұзындықты анықтаймыз. Сонда  $|\overset{\sim}{AB}| \cong |A_0B_0|$  болады. Қисықтың ұзындығын қарастырылған графиктік тәсілмен анықтау өте қарапайым және оны әрқашан қолдануға болады (универсал тәсіл). Ал оның кемшілігі — ол тәсілдің дәлдігі нашар.

#### 7.4. ВИНТТІК СЫЗЫҚТАР

Кеңістік қисықтары әлі күнге дейін толық зерттелмеген. Тіпті олардың алыну жолдарына да талдаулар жасалмаған. Сондықтан біз техникада көп тараған *винттік сызықтар* туралы ғана әңгіме етеміз. Өмірде бұрандалы бөлшектер (детальдар) жиі кездеседі. Бұрандалы беттерді алуда винттік сызықтардың алатын орны ерекше. Винттік сызықты да кинематикалық тәсілмен алуда оны үздіксіз қозғалатын нүктенің кеңістікте сызатын траекториясы деп қарастырамыз. Сонда нүктенің қозғалу заңдылығы қисықтың түрін анықтайды. Бұрыннан белгілі екі қарапайым қозғалысты еске түсірелік. Әңгіме сызықтық және айналмалы қозғалыстар туралы болып отыр.  $M$  нүктесі қисық сызық  $l$ -дің бойымен қозғалсын, ал  $l$  сызығы  $i$  түзуінен айналсын. Сонда  $M$  нүктесінің  $i$  түзуіне қатысты қозғалысы күрделі қозғалыс болады. Осындай күрделі қозғалысты *винттік қозғалыс* дейді. Винттік қозғалатын нүктенің траекториясын *винттік сызық* деп атайды. Осындағы  $i$  түзуін *винттік қозғалыстың осі* деп атайды. Нүктенің винттік қозғалысы нәтижесінде алынатын қисық трансценденттік қисық болады. Қисық  $i$  осінен толық бір айналғанда  $M$  нүктесі сызатын винттік сызықтың бөлігін *орам* деп атайды. Орамның шеткі нүктелері арасындағы қашықтықтың осьтегі проекциясын винттік сызықтың *адымы* дейді.

Енді  $l$  сызығы  $i$  түзуімен  $S$  нүктесінде қиылысатын түзу болсын. Сонда  $l$  түзуі осі  $i$  болатын айналу конусын сызады. Осыған байланысты  $M$  нүктесінің траекториясын *конустық винттік сызық* дейді. Конустық винттік сызықтың сызбасын салуды қарастыралық. Салуды оңайлату үшін фронталь проекциялар жазықтығын  $i$  осіне параллель, ал горизонталь проекциялар жазықтығын перпендикуляр орналастырамыз (244, а-сурет). Төбесі  $l$  және  $i$  түзулерінің қиылысу нүктесі  $S$  болатын, радиусы  $M$  нүктесінің бастапқы жағдайынан  $i$  осіне дейінгі қашықтыққа тең болатын конусты сызып аламыз.

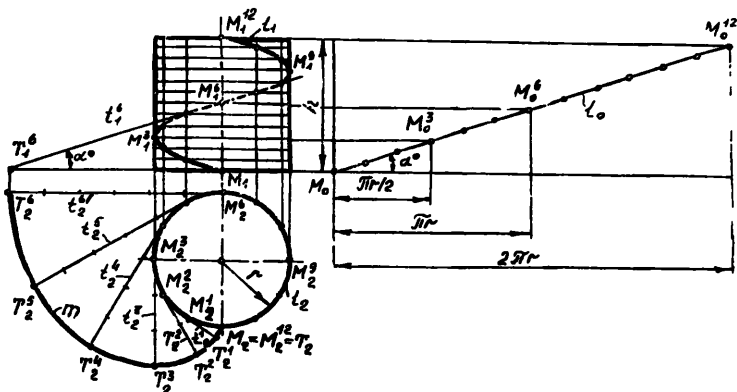


244-сурет.

Бұл конус фронталь проекциялар жазықтығына тенбүйірлі үшбұрышқа, ал горизонталь проекциялар жазықтығына дөңгелекке кескінделеді. Винттік сызықтың адымы белгілі болуы керек. Адымды  $h$  әрпімен белгілейді. Біз қарастырып отырған конустың биіктігі  $2h$  болсын. Конустың табанындағы шеңберді тең бөліктерге, мысалы 12 бөлікке бөледі. Әрбір бөліну нүктесі арқылы конустың жасаушысын жүргізеді. Конус табанын қанша бөлікке бөлсек, онда адымды да сонша тең бөліктерге бөлеміз. Конустың биіктігі екі адымға тең болғандықтан оны тең 24 бөлікке бөлуіміз керек. Бөліну нүктелері арқылы жүргізілген горизонталь жазықтықтар конусты шеңберлер бойымен қияды. Бұл шеңберлер фронталь проекциялар жазықтығына горизонталь орналасқан кесінділерге, ал горизонталь проекциялар жазықтығына бұрмаланбай шеңбер түрінде проекцияланады. Винттік сызықтың алдымен фронталь проекциясын салып алу ыңғайлы болады. Горизонталь кесінділердің сәйкес жасаушылар проекцияларымен қиылысу нүктелері конустық винттік сызықтың фронталь проекциясында жататын нүктелер екеніне көз жеткізу қиын емес. Енді аталған нүктелерді бастыра қисық жүргізуіміз керек. Бұл қисық  $S_1$  нүктесі арқылы өтеді және ол амплитудасы біртіндеп

кемитін синусоида болады. Горизонталь проекцияда жасаушылар мен сәйкес шеңберлердің қиылысу нүктелерін қосатын қисық сызық конустық винттік сызықтың горизонталь проекциясын береді. Бұл сызық *Архимед спиралі* болады (244, ә-сурет). Сонда  $M$  нүктесі алдымен  $M^1$  нүктесіне, одан кейін  $M^2$  нүктесіне,  $M^2$  нүктесінен  $M^3$  нүктесіне т. с. с. ауысып конустық винттік сызықты сызады. Нүкте  $M$  жасаушы  $l$  бойымен бірқалыпты түзу сызықты қозғалады, ал жасаушы  $l$  осьтен ( $i$ ) бірқалыпты айналады. Айналу екі бағытта болуы мүмкін: сағат тілі қозғалысы бағытында және оған қарсы бағытта. Егер нүкте жасаушыны осьтен сағат тілі бағытында айналдырғанда қашықтай беретін болса, онда винттік сызықты *оңқай* деп атайды. Егер жасаушыны осьтен сағат тілі бағытында айналдырғанда нүкте жақындай түсетін болса, онда винттік сызықты *солақай* деп атайды. 244, ә-суреттегі конустық винттік сызық оңқай болады. Винттік сызықтың сызбасына қарап оның бағытын анықтау үшін мына ережені еске сақтау керек: винттік сызықтың фронталь проекциядағы көрінетін бөлігі солдаң оңға қарай көтерілетін болса, онда винттік сызықтың оңқай болғаны. Егер бұған керісінше эпюрге винттік сызықтың фронталь проекциядағы көрінетін бөлігі оңнан солға қарай көтерілетін болса, онда ол солақай винттік сызық болады.

Енді  $l$  сызығы  $i$  осіне параллель түзу болсын. Сонда  $l$  түзуі  $i$  осінен айналғанда айналу цилиндрін сызады. Винттік қозғалатын  $M$  нүктесі сызатын қисық цилиндрдің бетінде орналасады. Бұл жағдайда  $M$  нүктесінің траекториясы *цилиндрлік винттік сызықты* анықтайды. Цилиндрлік винттік сызықты конустық винттік сызықтың  $S$  нүктесі өзіндік емес нүкте болатын дербес түрі деп те қарастыруға болады.  $M$  нүктесі горизонталь проекциялар жазықтығында тұрған, радиусы  $r$ , биіктігі  $h$  болатын цилиндрдің бетінде винттік қозғалсын (245-сурет). Сонда пайда болатын цилиндрлік винттік сызықтың горизонталь проекциясы шеңберге, ал фронталь проекциясы синусоидаға кескінделеді. Фронталь проекцияда винттік сызықтың көрінетін бөлігі оңнан солға қарай көтеріледі, яғни 245-суреттегі винттік сызық солақай. Цилиндрдің бүйір бетінің жазбасын салсақ, ол жазба биіктігі  $h$ , ұзындығы цилиндр табанындағы шеңбердің ұзындығына тең тіктөртбұрыш болады. Цилиндрлік винттік сызық осы тіктөртбұрыштың диагоналіне кескінделеді. Жазықтықтағы екі нүктені қосатын сызықтардың ең қысқасы түзудің кесіндісі болатынын білесіздер. Олай болса, ци-



245 сурет.

линдірлік винттік сызық цилиндрдің бүйір бетінде орналасқан екі нүктені қосатын сызықтардың ішіндегі ең қысқасы болады. Бет нүктелерін ең қысқа жолмен қосатын сызықты осы беттің *геодезиялық сызығы* деп атайды. Сонда цилиндрлік винттік сызық цилиндр бетінің геодезиялық сызығы болады екен. Беттің геодезиялық сызығының техникада алатын орны ерекше.

Цилиндрлік винттік сызыққа оның  $M^6$  нүктесінде жанама  $t^6$  тұрғызалық. Жанаманың фронталь проекциясы  $t_1^6$  винттік сызықтың фронталь проекциясы  $l_1$ -ге, ал горизонталь проекциясы  $t_2^6$  винттік сызықтың горизонталь проекциясы  $l_2$ -ге жанама болады. Бұл жанаманың ерекшелігі — ол фронталь проекциялар жазықтығына параллель орналасқан ( $t^6 \parallel \pi_1$ ). Жанама  $t^6$ -ның горизонталь ізін тұрғызалық ( $t^6 \cap \pi_2 = T^6$ ). Сонда жанаманың горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы

$\alpha^\circ$  фронталь проекциядан табылады:  $M_1 \widehat{T_1^6} M_1 = \alpha^\circ$ . Бұл бұрыштын шамасын жазбадан оңай анықтауға болады:  $\operatorname{tg} \alpha^\circ = \frac{h}{2\pi r} = \frac{p}{r}$ ,  $p = \frac{h}{2\pi}$  — *цилиндрлік винттік сызықтың параметрі* деп аталады. Цилиндрлік винттік сызыққа жүргізілген басқа жанамалар да горизонталь проекциялар жазықтығына  $\alpha^\circ$  бұрышына тең бұрышпен көлбейді. Мысалы,  $M^5$  нүктесіне жүргізілген жанама  $t^5$  горизонталь проекциялар жазықтығына  $\alpha^\circ$  бұрышпен көлбейді. Жазбамен салыстыра отырып,  $M^6 T^6$  кесіндісінің горизонталь проекциясының ұзындығын анықтауға

болады:  $|M_2^6 T_2^6| = |M_1 T_1^6| = \pi r$ . Сол сияқты  $t^3$  жанама-сының кесіндісі  $M^3 T^3$  горизонталь проекциялар жазықтығына  $M_2^3 T_2^3$  кесіндісіне проекцияланады және  $T^3 M_1^3$  кесіндісінің ұзындығы  $0,5\pi r$  болады ( $|M_2^3 T_2^3| = 0,5\pi r$ ). Винттік сызықтың  $M$  нүктесіндегі жанамасы горизонталь проекциялар жазықтығымен осы  $M$  нүктесінде қиылысады.  $M^1$  нүктесінде жүргізілген жанаманың горизонталь ізінің горизонталь проекциясын салу үшін  $M_2^1$  нүктесінде шеңберге жанама жүргізу керек те жанасу нүктесінен ( $M_2^1$  нүктесінен) бастап шеңбердің  $M_2 M_2^1$  доғасының ұзындығына тең кесінді салу керек. Сонда  $T_2^1$  нүктесі алынады. Винттік сызықтың  $M^2$  нүктесінде жүргізілген жанамасының горизонталь ізінің горизонталь проекциясын да осылай табады: шеңбердің  $M_2^2$  нүктесінде жанама тұрғызылады да оған  $M_2 M_2^2$  доғасының ұзындығына тең кесінді салынады. Табылған  $T_2^2$  нүктесі үшін мына теңдік орындалады:  $|T_2^2 M_2^2| = 2 \cdot |T_2^1 M_2^1|$ . Осындай салуларды қайталап  $T_2^1, T_2^4, T_2^5, \dots$  нүктелерін анықтаймыз, одан кейін аталған  $M_2, T_2^1, T_2^2, \dots$  нүктелерін бастыра  $m$  қисығын жүргіземіз. Осылай тұрғызылған қисық ( $m$ ) винттік сызықтың горизонталь проекциясы болатын ( $l_2$ ) шеңбердің эвольвентасы болатынын көреміз. Бұдан мынадай қорытынды шығады: осі горизонталь проекциялаушы түзу болатын цилиндрлік винттік сызықтың жанамаларының горизонталь іздері шеңбер эвольвентасы бойында жатады.

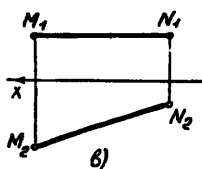
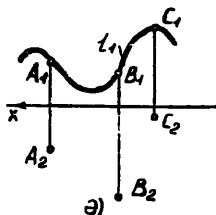
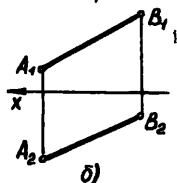
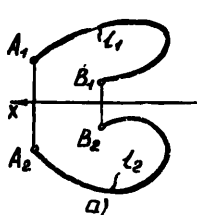
Винттік сызықтарды сфера, бірқуысты айналу гипер-болоиды, жалпы алғанда кез келген айналу бетіне де салуға болады.

## Есептер

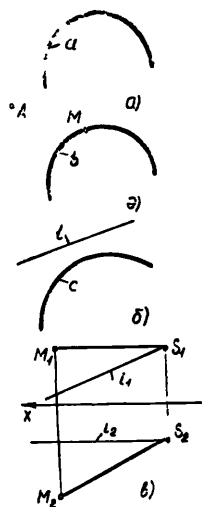
1.  $M(80; 95; 85)$  нүктесі  $EF$  түзуінен айналғанда пайда болатын шеңбердің фронталь және горизонталь проекцияларын салыңыздар:  $E(0; 60; 15)$ ,  $F(120; 60; 60)$ .

2. Центрі  $O(18; 75; 40)$  нүктесі болатын,  $A(10; 100; 130)$  нүктесі арқылы өтетін және  $\alpha(0, A, B)$  жазықтығында жататын шеңбердің эпюрін салыңыздар:  $B(40; 50, 80)$ .

3. Фронталь  $l_1$  және горизонталь  $l_2$  проекцияларымен берілген  $l$  қисығының кеңістік немесе жазықтық қисығы екенін анықтау керек (246, а-сурет).



246-сурет.



247-сурет.

4. Берілген  $\alpha(A, B, C)$  жазықтығында жатқан  $l$  қисығының фронталь проекциясы бойынша оның горизонталь проекциясын және оның  $B$  нүктесінде жүргізілген жанамасын салыңыздар (246, а-сурет).

5. Берілген  $AB$  кесіндісі диаметрі болатын және горизонталь проекциялаушы жазықтықта орналасқан шеңбердің проекцияларын салыңыздар (246, б-сурет).

6. Берілген  $MN$  кесіндісі диаметрі және  $Ox$  осімен жалғыз ортақ нүктесі болатын шеңбердің проекцияларын салыңыздар (246, в-сурет).

7. Горизонталь проекциялар жазықтығында тұрған диаметрі 50 мм, биіктігі 40 мм цилиндр бетіне оңқай цилиндрлік винттік сызықтың екі орамын салыңыздар.

8. Табаны фронталь проекциялар жазықтығында орналасқан диаметрі 50 мм, биіктігі 40 мм конус бетіне оңқай конустық винттік сызықтың бір орамын салыңыздар.

9. 246, а-суретте берілген  $l$  қисығының  $A$  және  $B$  нүктелері аралығындағы бөлігінің шын ұзындығын анықтаңыздар.

10. Жазықтықта  $a$  қисығы және одан тыс орналасқан  $A$  нүктесі берілген (247, а-сурет). Берілген  $l$  қисығына  $A$  нүктесі арқылы өтетін жанама салу керек.

11. Жазықтықта  $b$  қисығы және оның  $M$  нүктесі бе-

рілген (247, ә-сурет). Берілген  $b$  қисығына оның  $M$  нүктесі арқылы өтетін жанама салу керек.

12. Жазықтықта  $c$  қисығы және  $l$  түзуіне берілген (247, б-сурет). Берілген  $c$  қисығының  $l$  түзуіне параллель орналасқан жанамасын салу керек.

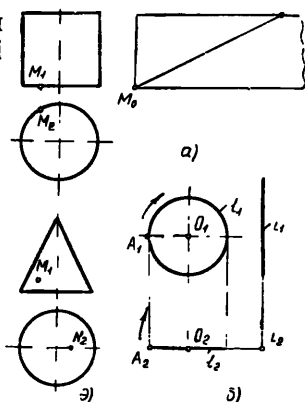
13.  $M$  нүктесін  $MS$  түзуі бойымен  $S$  нүктесіне қарай бірқалыпты қозғалады, ал  $MS$  түзуі  $i$  ( $S \in i$ ) түзуінен бірқалыпты (сағат тілі бағытында) айналады.  $M$  нүктесі  $S$  нүктесіне жеткенде  $MS$  түзуі  $i$  түзуінен толық бір рет айналып шығады.  $M$  нүктесінің траекториясын салыңыздар (247, в-сурет). Пайда болған винттік сызықтың адымын және оңқай немесе солақай болатынын анықтаңыздар.

14. Цилиндрдің екі проекциясы және жазбасы берілген (248, а-сурет).  $M$  нүктесінің траекториясы болатын цилиндрлік винттік сызық жазбада түзу кесіндісіне кескінделеді. Осы винттік сызықтың фронталь проекциясын салу керек.

15. Конус бегінде  $M$  және  $N$  нүктелері берілген (248, ә-сурет). Осы  $M$  және  $N$  нүктелері арқылы өтетін конустық винттік сызықтың проекцияларын салыңыздар.

16. Алдыңғы есепте салынған конустық винттік сызықтың  $M$  және  $N$  нүктелері аралығындағы бөлігінің шын ұзындығын анықтаңыздар.

17.  $A$  нүктесі  $l$  шеңбері бойымен 248, б-суретте көрсетілген бағытта бірқалыпты айналады, ал  $l$  шеңбері оның жазықтығында жатқан горизонталь проекциялаушы түзуден ( $i$ ) көрсетілген бағытта бірқалыпты айналады. Шеңбер  $i$  түзуінен толық бір айналғанда,  $A$  нүктесі де осы шеңбер бойымен қозғалып өзінің бастапқы орнына (шеңбер бойындағы) келеді.  $A$  нүктесі сызатын сызықтың проекцияларын салыңыздар.



248-сурет.

## МАЗМУНЫ

|                                                                                       |          |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Кіріспе</b>                                                                        | <b>3</b> |
| <b>1-тарау. Геометриялық салу есептері</b>                                            |          |
| 1.1. Түзулер және олардың өзара орналасуы                                             | 6        |
| 1.2. Өзара параллель немесе перпендикуляр түзулерді салу                              | 10       |
| 1.3. Кесіндіні және шеңберді тең бөліктерге бөлу                                      | 12       |
| 1.4. Үшбұрыштарды салу                                                                | 16       |
| 1.5. Жазықтықтағы координаталар системасы                                             | 21       |
| 1.6. Жазық қисықтар туралы алғашқы ұғымдар                                            | 26       |
| 1.7. Салу есептерін шешу методикасы                                                   | 34       |
| 1.8. Геометриялық түрлендірулер                                                       | 39       |
| <b>2-тарау. Проекциялау және проекциялау нәтижесінде пайда болатын сәйкестіктер</b>   |          |
| 2.1. Центрлік проекциялау                                                             | 54       |
| 2.2. Жазықтықты жазықтыққа проекциялау. Гомология                                     | 58       |
| 2.3. Параллель проекциялау. Шеңбердің параллель проекциясы                            | 65       |
| 2.4. Тектес сәйкестік. Шеңбердің параллель проекциясы болатын эллипстің осьтерін салу | 69       |
| 2.5. Тікбұрыштап проекциялау. Тік бұрыштың тікбұрышты проекциясы                      | 76       |
| 2.6. Қайтымдылық туралы түсінік. Техникада жиі кездесетін қайтымды кескіндер          | 78       |
| <b>3-тарау. Аксонометриялық проекциялар</b>                                           |          |
| 3.1. Аксонометриялық координаталар системасы                                          | 85       |
| 3.2. Түзудің және жазықтықтың аксонометриялық проекциясын салу                        | 91       |
| 3.3. Аксонометрияда көпжақты және оның жазықтықпен қимасын салу                       | 94       |
| 3.4. Бұрмалану көрсеткіштері. Аксонометрияның түрлері                                 | 99       |
| 3.5. Стандарт аксонометриялар                                                         | 103      |
| <b>4-тарау. Нүктенің, түзудің және жазықтықтың эпюрлері. Позициялық есептер</b>       |          |
| 4.1. Октанттар Нүктенің эпюрі                                                         | 111      |
| 4.2. Түзудің эпюрі                                                                    | 120      |
| 4.3. Жазықтықтың эпюрі                                                                | 124      |
| 4.4. Түзулер мен жазықтықтардың іздері                                                | 128      |
| 4.5. Нүктелердің және түзулердің өзара орналасуы                                      | 134      |
| 4.6. Жазықтықтағы түзулер мен нүктелер                                                | 138      |
| 4.7. Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін салу                                       | 143      |
| 4.8. Екі жазықтықтың өзара орналасуы                                                  | 148      |

## 5 - т а р а у   Метрикалық есептер. Өзара перпендикуляр түзу- лер мен жазықтықтар

|                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1. Метрикалық есептер туралы жалпы мәліметтер . . . . .                                          | 160 |
| 5.2. Кесіндінің ұзындығын анықтау және оны есептер шешуде пайдалану . . . . .                      | 162 |
| 5.3. Қиылысатын екі түзудің арасындағы бұрышты анықтау және оны есептер шешуде пайдалану . . . . . | 166 |
| 5.4. Өзара перпендикуляр түзулерді салу . . . . .                                                  | 171 |
| 5.5. Өзара перпендикуляр түзу мен жазықтықты салу . . . . .                                        | 174 |
| 5.6. Жазықтықтың проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын салу . . . . .                    | 182 |
| 5.7. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты анықтау . . . . .                                        | 188 |
| 5.8. Өзара перпендикуляр жазықтықтарды салу . . . . .                                              | 193 |
| 5.9. Екі жазықтық арасындағы бұрышты салу . . . . .                                                | 197 |

## 6 - т а р а у.   Эпюрді түрлендіру тәсілдері

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.1. Эпюрді түрлендіру тәсілдері туралы жалпы мағлұматтар . . . . . | 208 |
| 6.2. Жазық-параллель ығыстыру . . . . .                             | 210 |
| 6.3. Проекциялаушы түзуден айналдыру . . . . .                      | 221 |
| 6.4. Деңгейлік түзуден айналдыру . . . . .                          | 229 |
| 6.5. Проекциялар жазықтығын алмастыру . . . . .                     | 234 |
| 6.6. Қосымша проекциялар жазықтығына проекциялау . . . . .          | 239 |

## 7 - т а р а у.   Қисық сызықтар (қисықтар)

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.1. Қисық сызықтар (қисықтар) туралы жалпы түсініктер . . . . . | 250 |
| 7.2. Қисықтардың проекциялары . . . . .                          | 254 |
| 7.3. Қисықтарға байланысты жуықтап салулар . . . . .             | 259 |
| 7.4. Винттік сызықтар . . . . .                                  | 263 |

Учебное издание

**Есмуханов Жанузак Мухитович,  
Макишев Есимхан Макишевич,  
Есмуханов Ербол Жанузакович**

## **ЗАДАЧИ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

*(на казахском языке)*

**Редакторы Ш. Баспақова  
Суретшісі С. Әлиев  
Көркемдеуші редакторы С. Әлиев  
Техникалық редакторы О. Рысалиева**

ИБ № 5

Теруге 30.09.93 берілді. Басуға 13.10.94 қол қойылды. Пішімі 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>.  
Баспаханалық қағаз № 2 Әріп түрі «Әдеби». Шығыңқы басылыс. Шартты  
баспа табағы 14,28. Шартты бояулы беттаңбасы 14,49. Есептік баспа табағы  
11,03. Таралымы 5000 дана. Заказы 1764. Бағасы келісім бойынша.

Қазақстан Республикасы Баспасөз және бұқаралық ақпарат министрлігінің  
«Білім» баспасы, 480124, Алматы қаласы, Абай даңғылы, 143-үй.

Қазақстан Республикасы Баспасөз және бұқаралық ақпарат министрлігінің  
«Қытап» полиграфиялық кәсіпорындары өндірістік бірлестігінің Қытап фабри-  
касы, 480124, Алматы қаласы, Гагарин даңғылы, 93-үй.