

Ж.М. Есмұхан, Ж.Ж. Есмұханова

СЫЗБА ГЕОМЕТРИЯ

**Қазақстан Республикасы Білім, мәдениет және
денсаулық сақтау министрлігі оқулық ретінде ұсынған**

Жанұзақ Мұхитұлы Есмұхан, Жеміс Жанұзаққызы Есмұханова.
Сызба геометрия. Жоғары оқу орындарының студенттеріне арналған
оқулық. -Алматы: КазҰТУ. 1998. 264 б. ISBN 5-8380-1721-Х.

Оқулық жоғары оқу орындары үшін сызба геометрия курсының жаңа бағдарламасына сәйкес жазылған. Онда кескіндерді проекциялау әдісімен салу, қайтымды сызбалар алу жолдары қарастырылған. Түрлендіру тәсілдерін пайдаланып метрикалық есептерді шешу методикасы баяндалған. Позициялық есептерді шешу, қисықтар мен беттерді тұрғызу алгоритмдері келтірілген. Компьютерді пайдаланып кескіндерді салу, онда түрлі инженерлік жобалаудың мысалдары көрсетілген.

Сурет - 265, кесте - 9, өдебиеттер - 10.

Пікір жазғандар: - А.Т.Аймұрзаев, Алматы технологиялық институтының инженерлік графика кафедрасы (менгерушісі техника ғылымдарының кандидаты, доцент.
- Б.Б. Баймұханов, педагогика ғылымының докторы, Алматы мемлекеттік университетінің профессоры.

АЛҒЫ СӨЗ

Ұсынылып отырған сызба геометрияның мазмұны жоғары оқу орындары үшін Қазақстан Республикасының білім және мәдениет министрлігі бекіткен бағдарламаны толық қамтиды. Бұл сызба геометриядан қазақ тілінде басылып отырған алғашқы оқулық. Оқулықты жазуда авторлардың Қазақ ұлттық техникалық университетінде 20 жылдан астам уақыт ішінде оқылған дәрістері негізге алынды және 1968 жылы жарық көрген Ж. М. Есмұханов пен К. Қ. Қонақбаевтың және 1987 жылы жарық көрген Ж. М. Есмұхановтың «Сызба геометрия» атты оқу құралдарын пайдаланудағы тәжірибелер ескерілді.

Оқулық орта мектеп геометриясының жаңа бағдарламасына сәйкес және көтеріңкі талаптарға сай жазылды. Кітапта көптеген методикалық жаңалықтар бар. Алдымен аксонометрия қарастырылып, ал эпюр мен перспектива аксонометрияны пайдаланып түсіндіріледі. Сызба және аналитикалық геометриялардың арасындағы байланыстар ескеріліп, графикалық әдістердің алгоритмдері баяндалды. Геометриялық салудың динамикасы көрсетілді, сүйтіп кітаптағы суреттер қосымша түсіндіруді керек етпейтін «графикалық тілге» айналды.

Оқулық кіріспеден және он тараудан тұрады. Кіріспеде сызба геометрия пәні және оның негізгі әдісі туралы айтылып, кескіндердің қайтымдылығы туралы түсінік берілген және қайтымды кескіндерді алудың жолдары көрсетілген.

Бірінші тарауда аксонометриялық проекцияларды алудың теориялық негіздері, аксонометрияның кейбір қасиеттері және координаттарымен берілген фигуралардың аксонометрияларын салу қарастырылған.

Екінші және үшінші тарауларда нүктелердің, түзулердің және жазықтықтардың эпюрлерін салу, позициялық және метрлік есептердің алгоритмдері туралы жазылған.

Төртінші тарауда екі нүктенің ара қашықтығы және түзудің проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы анықталады. Нүктеден түзуге және жазықтыққа дейінгі аралық, екі түзудің және екі жазықтықтың ара қашықтығын табу, екі түзудің, түзу мен жазықтықтың, екі жазықтық арасындағы бұрышты салу есептері талданады.

Бесінші тарау жазық параллель ығыстыру, айналдыру және проекциялар жазықтығын алмастыру әдістерімен эпюрді түрлендіруге арналған. Сонымен қатар бұл тарауда эпюрді түрлендіру әдістерінің инварианттары және оларды есептер шешуде қолдану жолдары көрсетілген.

Қисық сызықтар мен беттердің кинематикалық әдіспен алынуы, беттердің анықтауыштары, айналу беттері, түзу сызықтық, бұрама,

циклдік және топографиялық беттер туралы мағлұматтар алтыншы тараудан табылады.

Жетінші тарауда беттердің жазықтықпен және өзара қиылысу сызықтарын, түзумен қиылысу нүктелерін және оларға жанама жазықтықтар жүргізу алгоритмдері мен мысалдары қарастырылған.

Сегізінші тарау беттердің жаймаларын графикалық жолмен салудың негізгі екі әдісі — үшбұрыштар және нормаль қима әдістеріне арналған. Жайылатын және жайылмайтын беттердің жаймаларын тұрғызуға мысалдар келтірілген.

Тоғызыншы тарауда сызықтық перспективаның элементтері, фигураның перспективасын архитекторлар әдісімен салу және сандық белгілері бар проекциялар туралы жазылған. Топографиялық беттердің жазықтықпен қиылысуы, горизонталь алаңдарды жобалау және эпюрге көлеңкелерді салу қарастырылған.

Соңғы тарау сызба геометрия есептерін компьютердің көмегімен шешу мәселелеріне арналған. Машиналық графикада пайдаланылып жүрген программалау жүйелерінің кейбіреуіне тоқталып, ГРАФОРдың подпрограммаларын пайдаланып беттердің қиылысу сызығы тұрғызылады.

Кітап оқушылардың өз беттерімен оқуына бейімделген. Әрбір тараудың соңында өзін-өзі сынауына арналған сұрақтар және оқылған материалдарды бекіту үшін жаттығулар келтірілген.

Оқулық қарапайым тілмен баяндалады. Сондықтан ол орта мектеп оқушылары, арнаулы орта оқу орындарының студенттері және математика мен сызу сабағының мұғалімдері үшін де пайдалы.

КІРІСПЕ

1. СЫЗБА ГЕОМЕТРИЯ ПӘНІ

Сызба геометрия пәні нені оқығады? Бұл әрбір пәнді оқытудағы басты сұрақ. Өмірде (өндірісте, ауыл шаруашылығында және ғылымда) әр түрлі заттың пішіндері мен өлшемдері туралы мәліметтерді ұзақ сақтауға немесе алысқа жеткізуге тура келеді. Осы мақсат үшін затты белгілі бір бетке кескіндейді. Кескіндеудің әдістері көп-ақ. Мысалы, заттың суретін салу, немесе оны фотоға түсіру секілді әдістер көпшілікке белгілі. Мәшине жасауда, үй тұрғызуда олардың сызбалары деп аталатын қағазға сызылған кескіндер пайдаланылады. Ал енді осы кескіндерді қалай салу керек? Сызба геометрия зерттейтін мәселелердің бірі - кескіндерді салу теориясы.

Кескіндер қандай болулары керек? Басқаша айтқанда оларға қандай талаптар қойылады? Әрине, түйенің суреті түйеге, баланың фотосы сол балаға ұқсас болулары керек. Үйді сызбасына қарап тұрғызу үшін кескінде оның ұзындығы, ені және биіктігі туралы мағлұматтар болуы шарт. Кескіндерге қойылатын талаптар олардың пайдаланылатын орнына және мақсатына байланысты болады. Жер бетін картаға түсіру үшін аэросъемка қолданылады. Аэросъемкада ұшақпен жүріп жерді фотоға түсіреді. Фотоға қарап жер бедерін (төбелерді, жазықтарды және ойпаттарды) анықтайды. Ал, жер бедерін оның фотосына қарап анықтау оңай емес. Ол үшін арнаулы оқу орындарын бітіру керек.

Сол сияқты күрделі мәшинелердің, құрылыстардың сызбаларын түсіну де оңайға соқпайды. Берілген заттың кескініне қарап оның пішінін және өлшемдерін анықтауды кескіндерді оқу дейді. Сызба геометрия зерттейтін екінші мәселе — кескіндерді оқу теориясы.

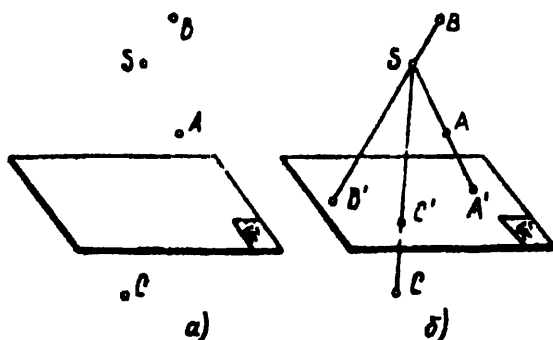
Штурмандар кеменің немесе ұшақтың жолын картаны пайдалана отырып белгілейді, яғни олар кескіндердің (картаның) көмегімен есептер шешеді. Архитекторлар сәнді қалалардың жоспарларын, үйлерді алдынала қағаз бетіне сызып, онда талай есептерді шығарудың нәтижесінде ғана алады. Сызба геометрия зерттейтін үшінші мәселе — кескіндердің көмегімен есептер шешу.

Кескіндер көбіне жазықтыққа (қағаз бетіне) салынады. Сызба геометрия көлемі бар денелерді жазықтыққа кескіндеуді, олардың кескіндері бойынша пішіндерін, өлшемдерін анықтауды және кескіндерде есептер шығаруды оқытады.

2. ЦЕНТРЛІК ПРОЕКЦИЯЛАУ ӘДІСІ

Сызба геометрияда кескіндерді салу үшін жазықтыққа проекциялау әдісі қолданылады. Берілген A нүктесінің кескінін салу үшін π' жазықтығын және S нүктесін ($S \notin \pi'$) алады. Сонда A нүктесінің кескіні ретінде оны S нүктесімен қосатын түзудің π' жазықтығымен қиылысу нүктесі A' қабылданады: $A' = (AS) \cap \pi'$. π' — проекциялар жазықтығы, S — проекциялау центрі, A' — берілген A нүктесінің центрлік проекциясы деп аталады. B нүктесінің центрлік проекциясы B' : $B' = (BS) \cap \pi'$. C нүктесінің центрлік проекциясы C' : $C' = (CS) \cap \pi'$ (1-сурет). Нүкте нүктеге проекцияланады.

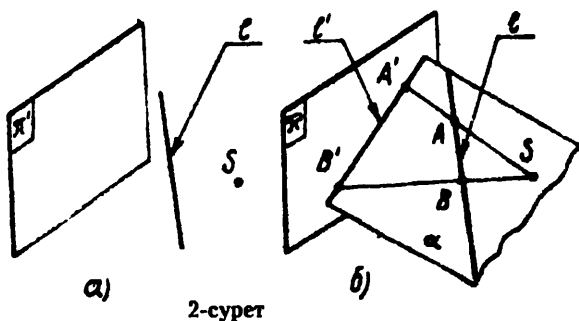
Берілген l түзуінің π' жазықтығындағы кескіні ретінде $\alpha(S, l)$ жазықтығының π' -пен қиылысу сызығы l' қабылданады: $l' = \alpha \cap \pi'$ (2-сурет). l' -ты l түзуінің центрлік проекциясы деп атайды. Сонымен, жалпы жағдайда түзудің проекциясы түзу болады. Егер түзу проекциялау центрі арқылы өтетін болса, онда ол нүктеге проекцияланады.



1-сурет

Түзудің проекциясын салу үшін оның бойынан алынған кез келген екі нүктенің проекцияларын табады да, оларды түзу сызықпен қосады: $A \in l$, $B \in l$, $A' = (AS) \cap \pi'$, $B' = (BS) \cap \pi'$, $(A'B') = l'$. Түзудің бойынан алынған нүктенің проекциясы сол түзу проекциясы бойында жатуы тиіс: $A \in l \Rightarrow A' \in l'$. Басқаша айтқанда, проекциялау кезінде өзара меншіктілік сақталады.

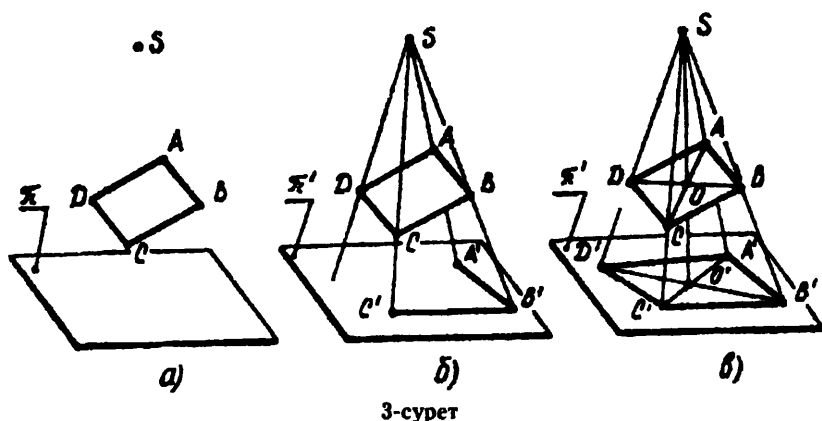
Кез келген геометриялық фигураның проекциясын оны анықтайтын нүктелер мен түзулердің проекцияларын салудың нәтижесінде алуға болады. Жазықтықты бір түзудің



2-сурет

бойында жатпайтын үш нүкте анықтайды. Олай болса жазықтықтың проекциясын алу үшін оның бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктесін проекциялау жеткілікті.

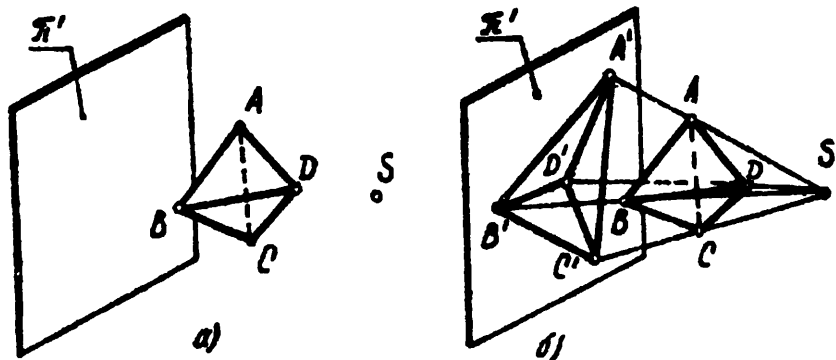
Параллелограмм $ABCD$ беріліп, оның проекциясын салу керек болсын (3-сурет). Проекциялаушы сәулелер $[SA)$, $[SB)$, $[SC)$ және $[SD)$ жүргізіледі. Олардың π' -пен қиылысу нүктелері A' , B' , C' және D' нүк-



телерінің проекцияларын береді: $A'=[SA)\cap\pi'$; $B'=[SB)\cap\pi'$; $C'=[SC)\cap\pi'$; $D'=[SD)\cap\pi'$. Жазықтықты үш нүкте анықтайтын болғандықтан бұл төрт нүктенің тек үшеуін ғана қалауымызша тағайындауымызға болады. Ал төртінші нүкте тұрғызылуы керек. Мысалы, A' , B' және C' нүктелерін қалауымызша белгілейік. D' -ты тұрғызу үшін параллелограмның диагональдарын жүргіземіз. Олар O нүктесінде қиылысады. $[AC]$ -ның проекциясы $[A'C']$ белгілі. Сондықтан O' нүктесін табуға болады: $O'=(SO)\cap(A'C')$. Осы O' нүктесін B' -пен қоссақ $[BD]$ -ның проекциясын аламыз. Өзара меншіктілік сақталатындықтан D' нүктесін $[SD)$ мен $(B'O)$ -тың қиылысу нүктесі ретінде табуға болады: $D'=[SD)\cap(B'O)$.

Көпжақтың проекциясы оның төбелері мен қырларының проекцияларынан тұрады. 4-суретте үшбұрышты пирамиданың проекциясын салу схемасы көрсетілген.

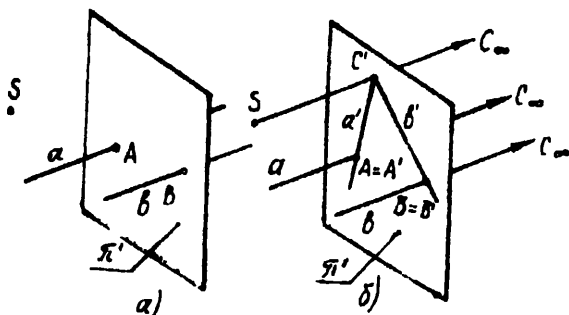
Сызба геометрияда параллель түзулері: шексіз қашықтықта жатқан нүктеде қиысады деп қарастырады. Шексіз қашықтықта жатқан нүктені басқа нүктелерден ажырату үшін оны белгілейтін әріптің төменгі жағына шексіздіктің белгісін қояды. Егер $a\parallel b$ болса, онда $a\cap b=C_\infty$. Берілген параллель a және b түзулері π' жазықтығымен A және B нүктелерінде қиылыссын (5-сурет). Бұл нүктелер өздеріне өздері проекцияланады: $A=A'$, $B=B'$. S нүктесі арқылы a мен b -ға параллель етіп жүргізілген түзу



4-сурет

де C_∞ нүктесі арқылы өтеді. Олай болса шексіз қашықтықта жатқан C_∞ нүктесі C' нүктесіне проекцияланады. Сонда a түзуінің проекциясы C' және A' , ал b түзуінің проекциясы B' және C' нүктелері арқылы өтеді:

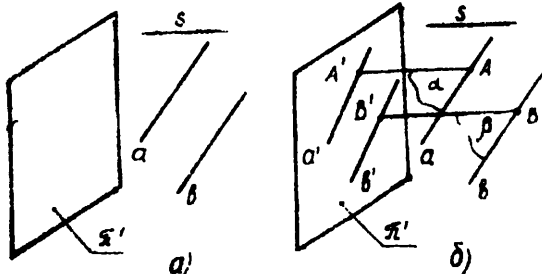
$a' = (A'C')$; $b' = (B'C')$. Олай болса, параллель түзулердің центрлік проекциялары бір нүктеде қиылысуы мүмкін.



5-сурет

3. ПАРАЛЛЕЛЬ ПРОЕКЦИЯЛАУ ӘДІСІ

Центрлік проекциялаудың проекциялау центрі шексіз қашықтықта жатқан нүкте болатын дербес түрін *параллель проекциялау әдісі* деп атайды. Заттың параллель проекциясын салу үшін проекциялар жазықтығын (π') және проекциялау бағытын (s түзуін) тағайындап алуымыз керек (6-сурет). Өзара параллель a және b түзулерінің проекцияларын салу үшін олардың бойынан қалауымызша A және B нүктелерін аламыз: $A \in a$, $B \in b$. Осы нүктелер арқылы проекциялау бағытына параллель етіп түзулер жүргізсек, олар π' -ты A' және B' нүктелерінде қияды. A' нүктесі A нүктесінің, B' нүктесі B нүктесінің параллель проекциясы деп аталады: $(AA') \parallel (BB') \parallel s$; $(AA') \cap \pi' = A'$; $(BB') \cap \pi' = B'$. Өзара қиылысатын екі түзу бір жазықтықты анықтайтынын білеміз. Олай болса A нүктесінде қиы-

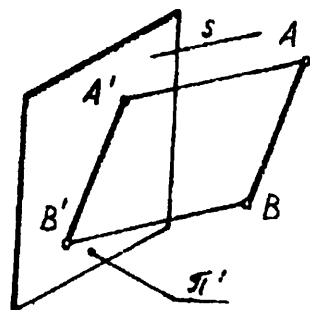


6-сурет

лысатын (AA') және a түзулері анықтайтын жазықтықты α деп, ал B нүктесінде қиылысатын (BB') және b түзулері анықтайтын жазықтықты β деп белгілейік. Осы жазықтықтардың π' -пен қиылы-

суы нәтижесінде алынатын түзулер берілген түзулердің параллель проекциялары болады: $a' = \alpha \cap \pi'$; $b' = \beta \cap \pi'$. Өзара параллель екі жазықтықты үшінші жазықтықпен қиып өткенде пайда болатын түзулер де өзара параллель болатынын білеміз. Сондықтан, *параллель түзулердің параллель проекциялары да параллель болады: $a \parallel b \Rightarrow a' \parallel b'$* . Баскаша айтқанда параллелограмның проекциясы параллелограмм, трапецияның проекциясы трапеция болады.

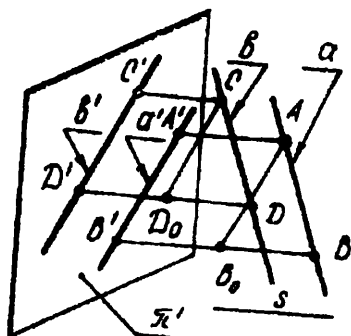
Проекциялар жазықтығына параллель AB кесіндісін және оның параллель проекциясы $A'B'$ кесіндісін қарастырайық (7-сурет). Төртбұрыш $ABB'A'$ -тың параллелограмм болатындығын дәлелдеу қиын емес. Параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары өзара тең болады: $|AB| = |A'B'|$. Кесінді өзіне параллель жазықтыққа ұзындығын сақтап проекцияланады.



7-сурет

Кез келген жазық фигура үшін де осыны айтуға болады. Мысалы ABC үшбұрышының жазықтығы π' -ке параллель болса, онда $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Параллель түзулер a мен b -ның бойларынан AB және CD кесінділерін алып, оларды π' жазықтығына параллель проекциялайық (8-сурет). $A'B'$ кесіндісі $[AB]$ -ның, $C'D'$ кесіндісі $[CD]$ -ның параллель проекциялары. Бұл екі түзу өзара параллель болады: $(A'B') \parallel (C'D')$. A нүктесі арқылы $(A'B')$ -қа параллель етіп жүргізілген түзу (BB') -ты B_0 нүктесінде



8-сурет

қияды. Сол сияқты $C \in (CD_0) \parallel (C'D')$; $(CD_0) \cap (DD') = D_0$. Алынған $AA'B'B_0$ төртбұрышы параллелограмм. Сондықтан, $|AB_0| = |A'B'|$. Осы сияқты $|CD_0| = |C'D'|$. Алынған үшбұрыштар AB_0B және CD_0D өзара ұқсас. Осы екі үшбұрыштың ұқсастығынан мына қатынасты аламыз:

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AB_0|}{|CD_0|} \Rightarrow \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}.$$

Егер a түзуін b түзуімен беттестірсек жоғарыда жазылған қатынас өзгермеген болар еді.

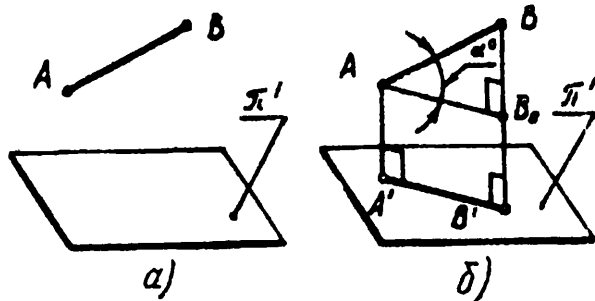
Параллель проекцияда параллель түзулердің немесе бір түзудің бойында орналасқан кесінділердің қатынастары өзгермейді.

4. ТІК БҰРЫШТАП ПРОЕКЦИЯЛАУ ӘДІСІ

Параллель проекциялау әдісінің проекциялау бағыты проекциялар жазықтығына перпендикуляр болып келетін дербес түрі *тік бұрыштап проекциялау әдісі* деп аталады. Тік бұрыштап проекциялауда $s \perp \pi'$.

Бізге π' жазықтығы және AB кесіндісі берілсін (9-сурет). Осы AB кесіндісінің π' жазықтығындағы тік бұрышты проекциясын салу үшін A

нүктесінен π' -қа перпендикуляр түсіріп, оның табанын A' деп белгілейміз. Сол сияқты B нүктесінен де π' -қа перпендикуляр түсіріп, оның табанын B' деп белгілейміз. A' нүктесі A нүктесінің, B' нүктесі B нүктесінің, ал $A'B'$ кесіндісі AB нүктесінің

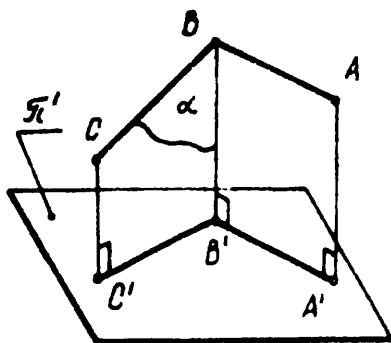


9-сурет

дісі $[AB]$ -ның тік бұрышты проекциясы. Енді AB кесіндісі және оның тік бұрышты проекциясы $[A'B']$ -тың арасындағы байланысты қарастырайық. A нүктесі арқылы $(A'B')$ -қа параллель түзу жүргізсек, ол (BB') -ты B_0 нүктесінде қияды. Сонда пайда болған AB_0B үшбұрышы тік бұрышты үшбұрыш. Ойткені $(AB_0) \parallel (A'B')$ және $(BB') \perp \pi'$. Олай болса $|A'B'| = |AB_0| = |AB| \cos \alpha$. Кесіндінің тік бұрышты проекциясы оның өзінен үлкен болуы мүмкін емес.

Бір қабырғасы проекциялар жазықтығына параллель $\widehat{ABC}$ тік бұрышын қарастырайық. $\widehat{A'B'C'}$ оның π' -тағы тік бұрышты проекциясы болсын

(10-сурет). Егер $(AB) \parallel \pi'$ болса, онда $(AB) \parallel (A'B')$, берілуі бойынша $(AB) \perp (BC)$ және тік бұрышты проекция болғандықтан $(AB) \perp (BB')$. Сондықтан AB түзуі B нүктесінде қиылысатын BC және BB' түзулері анықтайтын α жазықтығына перпендикуляр болады: $(AB) \perp \alpha((BC) \cap (BB'))$. Параллель түзулердің біреуіне перпендикуляр жазықтық олардың екіншісіне де перпендикуляр болады. Бізде $(AB) \parallel (A'B')$, олай болса $(A'B') \perp \pi'$. Егер түзу жазықтыққа перпендикуляр болса, онда ол түзу сол жазықтықта жатқан кез келген түзуге де перпендикуляр болады. Сондықтан $(A'B') \perp (B'C')$. Бұдан мынадай қорытынды жасауға болады: $(AB) \perp (BC), (AB) \parallel \pi', (BC) \perp \pi' \Rightarrow (A'B') \perp (B'C')$. Тік бұрыштың бір қабырғасы проекциялар жазықтығына параллель болса, ал екінші қабырғасы перпендикуляр болмаса, оның тік бұрышты проекциясы да тік бұрыш болады. Техникада көбіне тік бұрыштап проекциялау әдісі қолданылады.



10-сурет

5. ҚАЙТЫМДЫЛЫҚ ТУРАЛЫ ТҮСІНІК

Заттың кескінін проекциялау әдісімен салуда үш элементті ажыратқан дұрыс. Олар: 1) проекциялау аппараты, 2) заттың өзі — оригинал және 3) заттың проекциясы. Сызба геометрияда осы үш элементтің екеуі беріледі де үшіншісін табу керек болады.

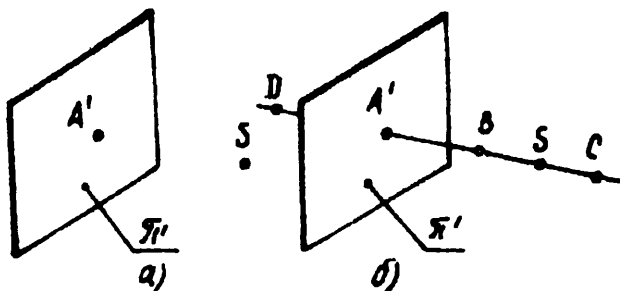
Проекциялау аппараты берілген деп септейік. Центрілік проекциялауда проекциялар жазықтығы π' пен проекция центрі S нүктесі, параллель проекциялауда проекциялар жазықтығы π' пен проекциялау бағыты s , ал тік бұрыштап проекциялауда проекциялар жазықтығы π' проекциялау аппаратын анықтайды.

Берілген заттың проекциясын салу *сызба геометрияның тура есебі*, ал проекциясы берілген заттың өзін (оригиналды) табу — *кері есебі* деп аталады.

Сызба геометрияның тура есебін шешуге әрқашанда болатынын біз жоғарыда көрсеттік. Шынында да, егер проекциялау аппараты мен оригинал берілсе, онда берілген оригиналдың (заттың) проекциясын салуға болады.

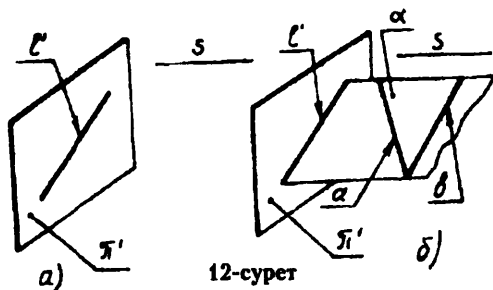
Сызба геометрияның кері есебін қарастырайық.

1-мысал. Проекциялау аппараты (π' проекциялар жазықтығы, S проекциялау центрі) және центрлік проекция A' берілсін (11-сурет). Проекциясы осы A' болатын нүктені, басқаша айтқанда A' -тың оригиналын табу керек. Осы мақсат үшін S нүктесін A' нүктесімен түзу сызық арқылы қосамыз. Осы екі нүкте анықтайтын түзуді a әрпімен белгілейік. Сонда a түзуінің барлық нүктелері бір ғана A' нүктесіне проекцияланатынын көреміз: A' -тың оригиналы B , C және D нүктелерінің кез келгені болуы мүмкін. A' нүктесі a түзуі бойында жатқан шексіз көп нүктелердің қайсысының проекциясы екендігін ажыратуға болмайды. Сонымен, тек бір ғана центрлік проекциясына (A' -қа) қарап A нүктесінің кеңістіктегі орнын анықтауға болмайды.



11-сурет

2-мысал. Түзуді π' жазықтығына s бағытында параллель проекциялаудың нәтижесінде алынған проекциясы l' берілген (12-сурет). Осы l' түзуінің кеңістіктегі орнын анықтау керек. Осы мақсат үшін l' түзуі арқылы проекциялау бағыты s -ке параллель α жазықтығын жүргіземіз. Сонда α жазықтығындағы түзулердің барлығы да бір ғана l' түзуіне проекцияланатынын көреміз: l' түзуі a түзуінің де, b түзуінің де проекциясы болуы мүмкін. Бірақ l' -тың α жазықтығында жатқан шексіз көп түзулердің қайсысының проекциясы екендігін ажыратуға болмайды, яғни тек бір ғана параллель проекциясына (l' -қа) қарап осы l' түзуінің кеңістіктегі орнын анықтауға болмайды.



12-сурет

Тек бір проекциядан тұратын кескінді пайдаланып сызба геометрияның кері есебін шешуге болмайды.

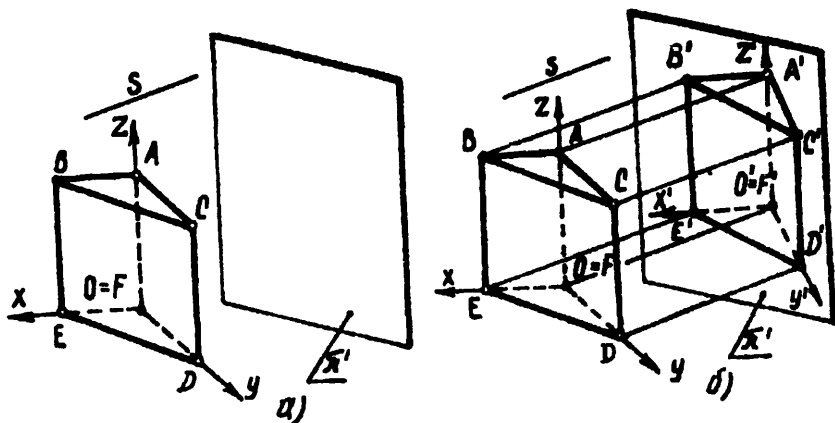
Сызба геометрияның кері есебін шешуге болмайтын кескіндерді қайтымсыз, ал шешуге болатын

кескіндерді қайтымды деп атайды. Оригиналдың бір проекциясынан тұратын кескіндер қайтымсыз болады. Қайтымсыз кескіндердің пайдасы аз. Сондықтан қайтымды кескіндер алу тәсілдеріне көшейік.

6. ҚАЙТЫМДЫ КЕСКІНДЕРДІҢ ТҮРЛЕРІ

Қайтымды кескіндер алу тәсілдері көп-ақ. Біз солардың көп тараған төрт түрін ғана қарастыралық.

1. **Аксонетриялық проекциялар.** Берілген заттың қайтымды кескінін алу үшін, ол затты тік бұрышты координаттар жүйесіне бекітеді. Содан кейін берілген затты тік бұрышты координаттар жүйесімен бірге π' жазықтығына параллель проекциялайды. 13-суретте параллель проекциялау аппараты және үш бұрышты призма $ABCDEF$ берілген. $Oxyz$ -ты натурал координаттар жүйесі деп атайды. Сонда берілген зат нүктелері үшін олардың натурал координаттарын анықтауға болады. Натурал координаттар жүйесінің ($Oxyz$ -тың) π' жазықтығындағы парал-

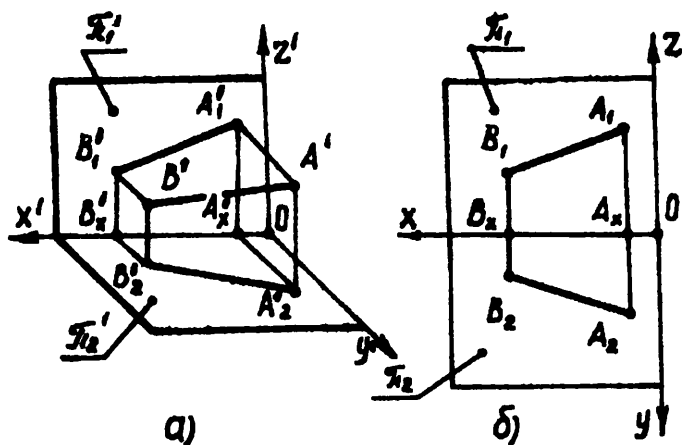


13-сурет

лель проекциясын ($O'x'y'z'$ -ты) аксонетриялық координаттар жүйесі деп атайды. Берілген призманың проекциясы $A'B'C'D'E'F'$ -ты аксонетриялық проекция, қысқаша аксонетрия деп атайды. Аксонетрияда нүктелердің аксонетриялық координаттарын анықтауға болады. Нүктенің натурал координаттары мен аксонетриялық координаттары (сан шамасы) бірдей болатындығын дәлелдеу қиын емес. Сондықтан аксонетриялық проекциялар қайтымды болады. Шынында да, егер нүктенің аксонетриясы берілсе (оның аксонетриялық координаттары белгілі болса), оның кеңістіктегі орнын оңай анықтар едік. Ол үшін

тік бұрышты натурал координаттар жүйесін алып, іздеп отырған нүктелік координаттары бойынша тұрғызар едік.

2. Монж эпюрі. Француз геометрі Госпар Монж (1746–1818) қайтымды кескін алудың тиімді тәсілін көрсетті. Фронталь және горизонталь орналасқан өзара перпендикуляр π_1 және π_2 жазықтықтарын алып, берілген затты оларға тік бұрыштап проекциялайды. Заттың фронталь проекциялар жазықтығындағы (π_1 -дегі) тік бұрышты проекциясын оның фронталь проекциясы немесе алдынан қарағандағы көрінісі, ал горизонталь проекциялар жазықтығындағы (π_2 -дегі) тік бұрышты проекциясын оның горизонталь проекциясы немесе үстінен қарағандағы көрінісі деп атайды. Горизонталь проекциялар жазықтығын олардың қиылысу сызығынан айналдырып фронталь проекциялар жазықтығымен беттестіреді. Сонда пайда болған жазық кескінді *Монж эпюрі* деп атайды. 14-суретте AB кесіндісі кескінделген. $[A_1B_1]$ оның фронталь проекциясы, ал $[A_2B_2]$ горизонталь проекциясы. Сол жақта аксонометрия, ал оң жақта Монж эпюрі кескінделген.



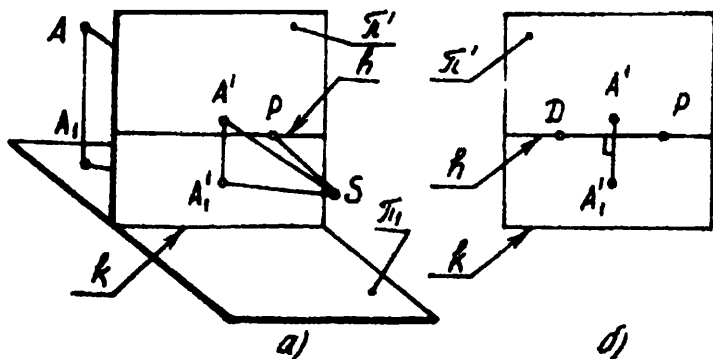
14-сурет

Енді Монж эпюрі қайтымды кескін екендігін көрсетелік. Кеністіктегі AB кесіндісінің орнын анықтау үшін қағазды x өсі бойынша бүгіп, оның жоғарғы π_1 және төменгі π_2 бөліктерін өзара перпендикуляр жағдайға келтірейік. Енді A_1 нүктесі арқылы π_1 -ге және A_2 нүктесі арқылы π_2 -ге перпендикуляр түзулер жүргізсек, олардың қиылысу нүктесі A -ны береді. Осылайша π_1 жазықтығының B_1 нүктесінде, π_2 жазықтығының B_2 нүктесінде перпендикуляр тұрғызу арқылы B нүктесін аламыз. Осы

A және B нүктелерін қосатын $[AB]$ эпюрге горизонталь $[A_2B_2]$ және фронталь $[A_1B_1]$ проекцияларымен берілген кеңістіктегі кесінді.

Мәшине бөлшектерінің, құрылыстардың сызбаларын Монж эпюрінде орындайды. Сондықтан, осындай екі немесе одан да көп тік бұрышты проекциялардан тұратын кескіндерді *сызба* деп атайды.

3. Сызықтық перспектива. Сызықтық перспективада проекциялар жазықтығын картина деп, ал проекциялау центрін қарау нүктесі деп атайды. Картинаға перпендикуляр горизонталь орналасқан π_1 жазықтығын заттық жазықтық дейді (15-сурет). Жазықтықтардың қиылысу сызығын k әрпімен белгілеп *картинаның табаны* дейді. π_1 -дегі A нүктесінің (оригиналдың) тік бұрышты проекциясын оның (нүктенің) табаны дейтін боламыз. Қарау нүктесінен картинаға перпендикуляр түсіріп, картинаның *бас нүктесін* (P -ны) аламыз. Осы бас нүкте арқылы картинаның табанына параллель етіп жүргізілген түзу h *көкжиек* (*горизонт*) *сызығын* береді. A нүктесін қарау нүктесі S -пен қосатын проекциялаушы түзу π' жазықтығын A' нүктесінде қияды. A' нүктесі A нүктесінің *перспективасы* деп аталады. A_1 нүктесін S центрінен картинаға проекцияласақ, A_1' нүктесін аламыз. Осы A_1' нүктесі A нүктесінің табанының перспективасын береді. Нүктенің перспективасы мен оның табанының перспективасын қосатын түзу көкжиек сызығына перпендикуляр болады: $(A_1A_1') \perp h$. $|PD| = |PS|$.

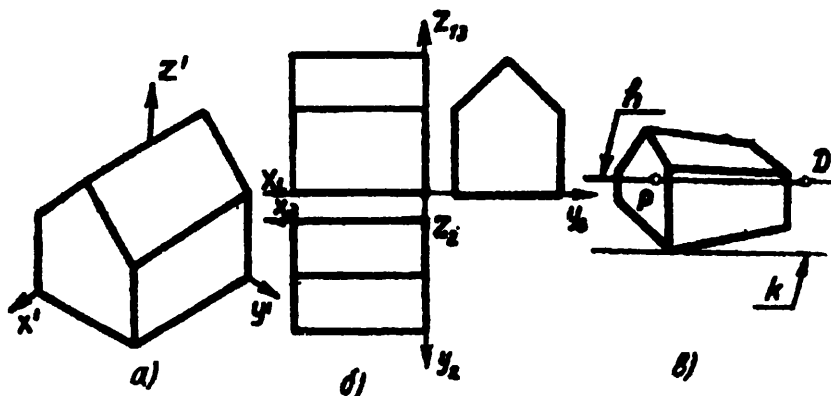


15-сурет

Берілген заттың картинадағы перспективасынан және оның табанының перспективасынан тұратын кескін *сызықтық перспектива* деп аталады.

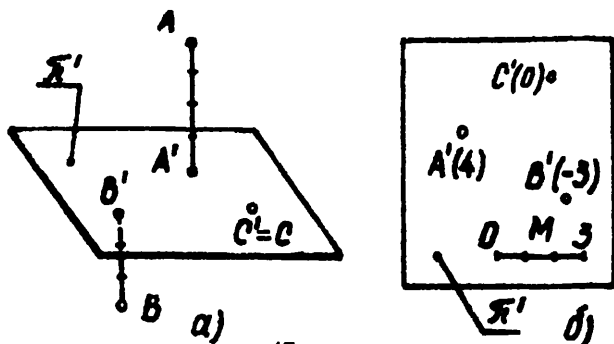
Сызықтық перспективаның қайтымды болатынына көз жеткізелік. Картинаға бас нүктесінен перпендикуляр тұрғызып, оған $|PD|$ -ға тең кесінді салсақ, қарау нүктесін (S -ті) аламыз. Заттық жазықтықты (π , ді) k түзуі арқылы π' -ке перпендикуляр етіп жүргіземіз. Енді проекциялаушы сәулелерді, $[SA']$ пен $[SA]$ -ті жүргізуге болады. SA' түзуі заттық жазықтықпен A_1 нүктесінде қиылысады. Осы A_1 нүктесі арқылы π -ге перпендикуляр етіп жүргізілген түзу SA' түзуімен іздеп отырған A нүктесінде қиылысады. Сонымен сызықтық перспективада да сызба геометрияның кері сәбін шешуге болады.

Қарастырылған қайтымды кескіндерді салыстыру, олардың ерекшеліктерін аңғару үшін 16-суретте бес бұрышты призманың аксонометриясы (a), эпюрі (b) және перспективасы ($в$) сызылған.



16-сурет

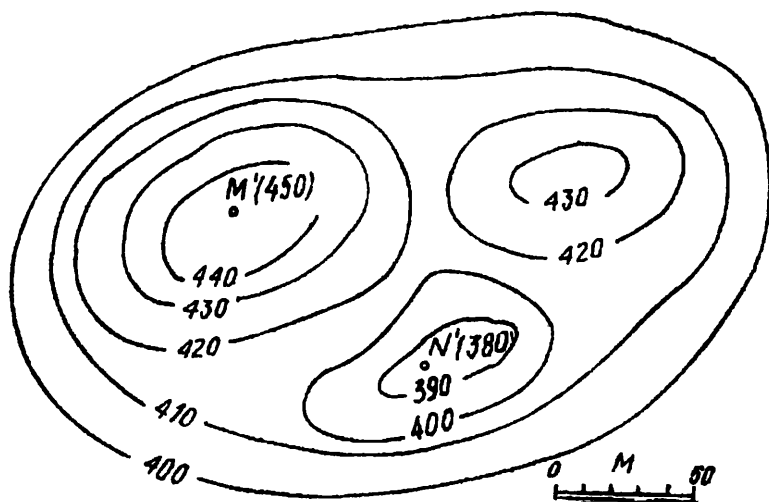
4. Сандық белгілері бар проекциялар. Горизонталь орналасқан π' проекциялар жазықтығына A, B және C нүктелерін тік бұрыштап проекциялайық. A', B' және C' нүктелері A, B және C нүктелерінің π' жазықтығындағы тік бұрышты проекциялары болсын (17-сурет). Нүктенің тек бір ғана проекциясы оның кеңістіктегі орнын анықтай ал-



17-сурет

майды. Сондықтан қайтымды кескін алу үшін нүкте проекциясының жанына оның проекциялар жазықтығынан қапшықтығын көрсететін санды жақшаның ішіне жазып қоямыз. Проекциялар жазықтығынан жоғары орналасқан нүктелердің сандық белгілерінің алдына ешқандай таңба қойылмайды, ал проекциялар жазықтығынан төмен орналасқан нүктелердің сандық белгілерінің алдына минус таңбасы қойылады. Проекциялар жазықтығында жатқан нүктелердің сандық белгілері 0 -ге тең. Сонда $A'(4)$, $B'(-3)$ және $C'(0)$ нүктелері A , B және C нүктелерінің сандық белгілері бар проекциялары. Кескінде масштаб көрсетілуі тиіс. Кеңістіктегі нүктенің орнын анықтау үшін оның проекциясы арқылы проекциялар жазықтығына перпендикуляр түзу жүргізіп, осы перпендикуляр бойына сандық белгіге тең кесіндіні масштабты пайдаланып салу керек. Егер сандық белгінің алдында таңба болмаса кесінді проекциялар жазықтығынан бастап жоғары қарай салынады да, ал сандық белгінің таңбасы минус болса — төмен қарай салынады.

Сандық белгілері бар проекциялар мектептегі жағрафия сабағынан белгілі. Топографиялық карталарға жер бетінің қыртысын кескіндеуде сандық белгілері бар проекцияларды қолдандыңыздар. Жерді горизонталь жазықтықтармен қияды, ал қиылысу сызықтарын горизонтальдар деп атайды (18-сурет). Горизонтальдар проекциялар жазықтығына өздерінің натурал шамаларын сақтап проекцияланады. Горизонтальдардың сандық белгілеріне қарап отырып, жер бетінің қаншалықты тегіс екенін ажырату қиын емес. Кескінде M' нүктесіне жақындаған сайын го-



18-сурет

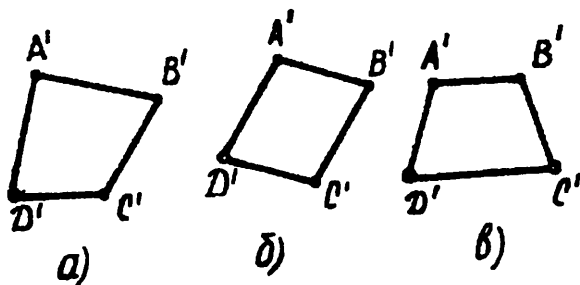
горизонтальдардың белгілері арта түседі, бұл M нүктесінің төбе екендігін анықтайды. N' нүктесіне жақындаған сайын горизонтальдардың белгілері кеми береді, олай болса N нүктесі ойпатта болғаны.

Ұшақтар мен кемелердің сызбаларын салуда да сандық белгілері бар проекциялар қолданылады.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН СҰРАҚТАР МЕН ЖАТТЫҒУЛАР

1. Сызба геометрияның негізгі мәселелері қандай?
2. Сызба геометрияда кескіндерді қандай әдістермен тұрғызады?
3. Берілген заттың центрлік, параллель, тік бұрышты проекцияларын қалай тұрғызады?
4. Центрлік, параллель және тік бұрышты проекциялардың басты қасиеттерін атап көрсетіңіздер және дәлелденіздер.
5. Проекциялау әдістерінің қайсысында параллель түзулер қиылысатын түзулерге проекциялануы мүмкін?
6. Жазық фигураның параллель проекциясы оның өзіне тең болуы үшін қандай шарт орындалуы керек?
7. Жазық фигураның тік бұрышты проекциясының ауданы оның өзінен ауданынан үлкен болуы мүмкін бе?
8. Тік бұрыштың тік бұрышты проекциясы да тік бұрыш болуы үшін қандай шарттар орындалуы керек?
9. Қандай есепті сызба геометрияның тура есебі, ал қандай есепті кері есебі деп атайды?
10. Қандай кескіндерді қайтымды және қандай кескіндерді қайтымсыз деп атайды?
11. Заттың тек бір ғана проекциясына қарап оның пішінін анықтауға бола ма?
12. Аксонометрияны, эпюрді және перспективаны қалай тұрғызады? Олардың қайтымды кескіндер екендіктерін дәлелденіздер.
13. Сандық белгілері бар проекцияларды қалай тұрғызады?

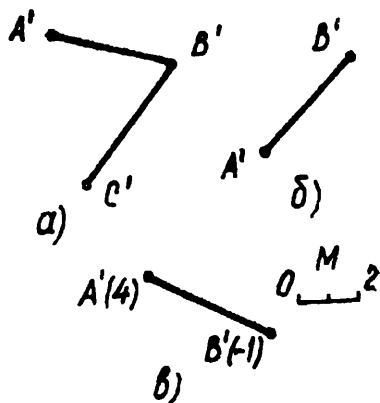
14. 19-суретте тік төртбұрыш $ABCD$ -ның үш проекциясы кескінделген: а) кез келген төртбұрыш; б) параллелограмм; в) трапеция. Осы кескіндердің қайсысы центрлік проекциялау, қайсысы парал-



19-сурет

лель проекциялау әдісімен тұрғызылған?

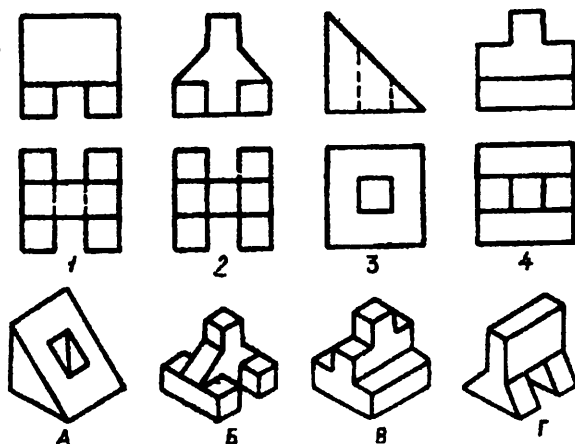
15. 20-суретте төрт бұрышты қиық пирамида проекциялау әдісімен кескінделген. Кескіннің дұрыстығын тексеру керек.



21-сурет

18. *A* және *B* нүктелерінің сандық белгілері бар проекциялары *A*(4) және *B*'(-1) берілген (21, в-сурет). *AB* кесіндісінің ұзындығын анықтау керек.

19. Заттардың аксонометрияларына қарап олардың эпюрлерін табу керек (22-сурет). Аксонометриялар әріптермен, эпюрлер цифрлармен белгіленген. 1-кестені толтырыңыз.

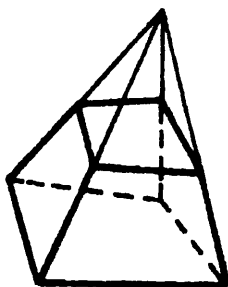


22-сурет

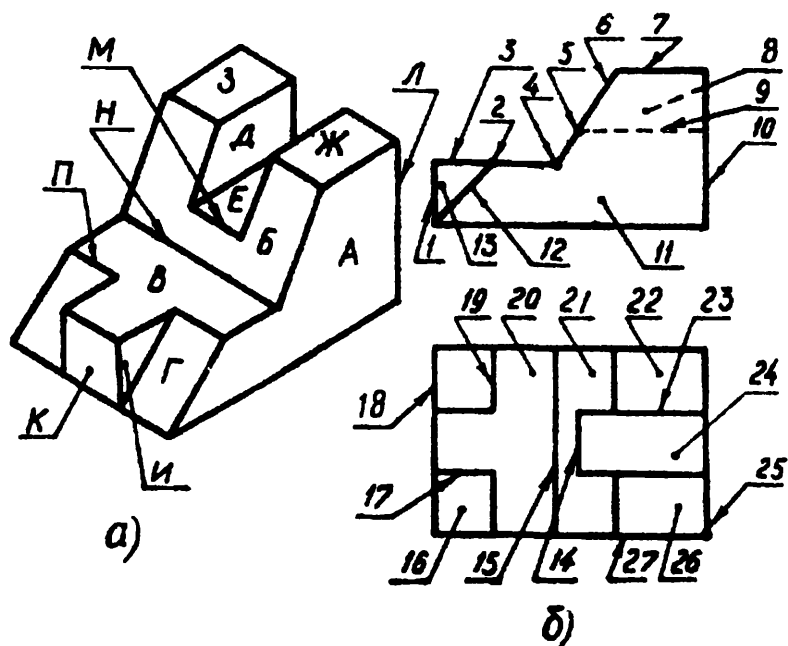
20. Көп жақты геометриялық дененің аксонометриясы (23, а-сурет) және эпюрі (23, б-сурет) кескінделген. Аксонометрияда әріптермен белгіленген жақтар мен қырлардың эпюрге проекцияларын табу керек. 2-кестені толтырыңыз.

16. *ABCD* параллелограмның үш төбесінің параллель проекциялары *A'*, *B'* және *C'* берілген (21, а-сурет). Параллелограмның проекциясын салуды аяқтау және *[BC]*-ны бірдің екіге қатынасындай етіп бөлетін *E* нүктесінің проекциясын табу керек.

17. *AB* қабырғасы проекциялар жазықтығына параллель және оған 45° -қа тең бұрыш жасап көлбейтін шаршы (квадрат) *ABCD*-ның тік бұрышты проекциясын салуды аяқтау керек (21, б-сурет).



20-сурет



23-сурет

1-кесте

Аксон.	А	Б	В	Г
Эпюр				

2-кесте

Аксонометрия		А	Б	және т. б.
Эпюр	гор. пр.	27		
	фр. пр.	11		

Бірінші тарау

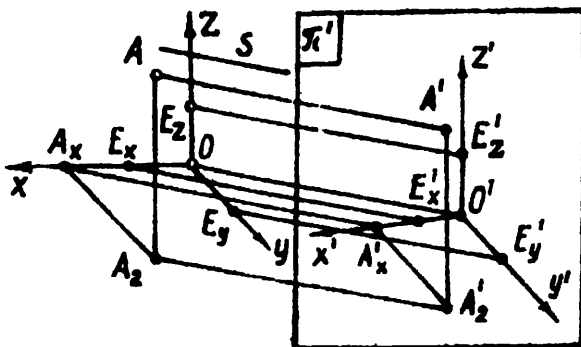
АКСОНОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОЕКЦИЯЛАР

7. АКСОНОМЕТРИЯНЫҢ НЕГІЗГІ ТҮСІНІКТЕРІ МЕН АНЫҚТАМАЛАРЫ

АксонOMETрия гректің екі сөзінен құралады: аксон (өс) және метрео (өлшеу). Қазақ тіліндегі аудармасы «өстер бойынша өлшеу» деген мағына береді.

АксонOMETриялық проекцияларды алу үшін берілген затты тік бұрышты координаттар жүйесіне бекітіп, оларды аксонOMETриялық проекциялар жазықтығына параллель проекциялайды деген болатынбыз. Кеңістіктен A нүктесін және $Oxyz$ тік бұрышты координаттар жүйесін алайық (24-сурет). Координаттар жүйесі абцисса x , ордината y және аппликата z деп аталатын өстерден және үш координаттар жазықтығынан (xOz , xOy , yOz) құралады. $Oxyz$ -ті *натурал координаттар жүйесі* деп атайды. A нүктесін координаттар жазықтықтарына тік бұрыштан проекциялауға болады. Біз оның xOy жазықтығындағы проекциясын (A_2) ғана көрсетелік.

A_2 нүктесі арқылы ордината өсіне параллель етіп жүргізген түзу абсцисса өсін A_x нүктесінде қияды. OA_x A_2A -ны координаталық сынық сызық дейді. Координаттарды өлшеу үшін ұзындық бірлігін (e) тағайындадық. Оны *натурал масштаб* дейді:
 $|OE_x| = |OE_y| = |OE_z| = e.$



24-сурет

Сонда A нүктесінің натурал координаттарын былай анықтауға болады:

$$x = \frac{|OA_x|}{|OE_x|}; \quad y = \frac{|A_2A_x|}{|OE_y|}; \quad z = \frac{|A_2A_z|}{|OE_z|}.$$

Енді аксонометриялық проекциялар жазықтығы π' -ты алып, оған берілген проекциялау бағытымен A нүктесін және $Oxyz$ координаттар жүйесін проекциялаймыз. Сонда A нүктесі A' нүктесіне, A_2 нүктесі A'_2 нүктесіне, $Oxyz$ координаттар жүйесі $O'x'y'z'$ координаттар жүйесіне проекцияланады. A' нүктесі A нүктесінің *аксонометриялық проекциясы*, A'_2 нүктесі оның *екінші* (вторичная) *проекциясы* деп аталады. $O'x'y'z'$ аксонометриялық координаттар жүйесі, $O'A'_1A'_2A'$ аксонометриялық координаталық сынық сызық және $|OE'_x| \neq |OE'_y| \neq |OE'_z|$ – аксонометриялық масштабтар. Жалпы жағдайда аксонометриялық масштабтар өзара тең болмайды.

Параллель проекциялау кезінде түзулердің параллельдігі сақталатындықтан $A'A'_2$ түзуінің z' -ке, $A'_2A'_x$ түзуінің y' -ке параллель болатындығын ескерте кетелік.

A нүктесінің аксонометриялық координаттарын анықталық:

$$x' = \frac{|OA'_x|}{|OE'_x|}; \quad y' = \frac{|A'A'_2|}{|OE'_y|}; \quad z' = \frac{|A_2A|}{|OE'_z|}. \quad (1)$$

Әрине нүктенің аксонометриялық координаттары оның сәйкес натурал координаттарына тең болады (неліктен?): $x=x', y=y', z=z'$.

Аксонометрияны салғанда аксонометриялық масштабтардан гөрі бұрмалану көрсеткіштері деп аталатын коэффициенттерді пайдаланған тиімді.

Бұрмалану көрсеткіші деп аксонометриялық масштабтың натурал масштабқа қатынасын айтады. x осі бағытындағы бұрмалану көрсеткішін u , y осі бағытындағы бұрмалану көрсеткішін v , z осі бағытындағы бұрмалану көрсеткішін w арқылы белгілейік. Сонда

$$u = \frac{|OE'_x|}{|OE_x|}; \quad v = \frac{|OE'_y|}{|OE_y|}; \quad w = \frac{|OE'_z|}{|OE_z|}. \quad (2)$$

Бұрмалану көрсеткіштері координаттар остеріне параллель кесінділердің ұзындықтары проекцияда қаншалықты өзгертіндіктерін көрсетеді.

8. АКСОНОМЕТРИЯНЫҢ ТҮРЛЕРІ ЖӘНЕ ОНЫҢ НЕГІЗГІ ТЕОРЕМАСЫ

1. Проекциялау бағыты s пен аксонометриялық проекциялар жазықтығы π' -тың өзара орналасуына қарай аксонометрияны екіге бөледі. Егер проекциялау бағыты s проекциялар жазықтығы π' -ке перпендикуляр болса, аксонометрия *тік бұрышты*, ал перпендикуляр болмаса, *қиғаш бұрышты* деп аталады.

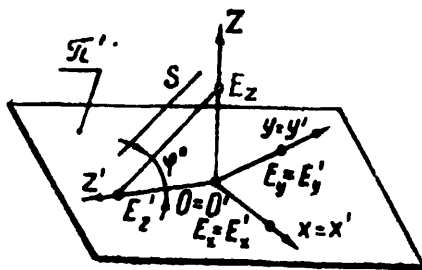
Бұрмалану көрсеткіштеріне қарай аксонометрия үшке бөлінеді: изометрия, диметрия және триметрия. Изометрияда бұрмалану көрсеткіштері өзара тең болады: $u=v=w$. Диметрияда бұрмалану көрсеткіштерінің екеуі өзара тең және олар үшіншісіне тең болмайды. Мысалы диметрияда $u=w \neq v$ болуы мүмкін. Триметрияда бұрмалану көрсеткіштері әр түрлі болады: $u \neq v \neq w \neq u$.

2. Проекциялар жазықтығына қарағанда натурал координаттар жүйесінің орналасуына және проекциялау бағытына байланысты аксонометриялық өстер түрліше орналасады және аксонометриялық масштабтар әр түрлі болады. Осыдан келіп «аксонометриялық өстерді және аксонометриялық масштабтарды қалауымызша ала беруге болмас па екен?» деген сұрақ туады. Бұл сұраққа аксонометрияның негізгі теоремасы болатын К. Польке теоремасы толық жауап береді. Ол былай оқылады: *Бір жазықтықта жататын және бір нүкте O' -тан бір-біріне қалауымызша алынған бұрыштар жасап тарайтын, кез келген ұзындықтағы үш кесінді $O'E'_x$, $O'E'_y$, $O'E'_z$ тік бұрышты координаттар өстеріне бас нүктеден (O -дан) бастап салынған өзара тең OE_x , OE_y , OE_z кесінділердің параллель проекциясы бола алады* (24-сурет).

Бұл теореманың дәлелденуін және аксонометрия туралы терең мағлұматты 1953 жылы Москва қаласында басылған Е. А. Глазунов пен Н. Ф. Четверухиннің «Аксонометрия» атты кітабынан оқуға болады.

К. Польке теоремасына сүйеніп, бір нүктеде қиылысатын жазықтықтағы кез келген үш түзуді аксонометриялық өстер ретінде, ал олардың бойындағы қалауымызша тағайындалған кесінділерді аксонометриялық масштабтар ретінде алуға болады.

3. Аксонометриялық масштабтарды қалауымызша алуға болғанымен, бұрмалану көрсеткіштерін түгелдей қалауымызша тағайындауға болмайды. Өйткені олардың шамалары проекциялау бағытына байланысты. Осы байланысты анықталық. Ол үшін аксонометриялық проекциялар жазықтығын xOy жазықтығымен беттескен деп қарастыралық (25-сурет). Бұл жағдайда аксонометриялық және натурал координаттардың бас нүктелері де, абсцисса мен ординага өстері де беттесіп кетеді: $O=O'$; $x=x'$; $y=y'$. Бұрмалану көрсеткіштерін анықталық: $u=1$; $v=1$; $w=ctg\varphi$. Бұрмалану көрсеткіштерінің квадраттарының қосындысын табалық:



25-сурет

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \sin^2 \varphi. \quad (3)$$

Бұл (3) теңдік дербес жағдай үшін қорытылғанмен, ол жалпы жағдай үшін де дұрыс болып қалады. Тік бұрышты аксонометрияда $\varphi = 90^\circ$, сондықтан $\sin \varphi = 0$. Енді жоғарыдағы (3) теңдік былай жазылады:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2. \quad (4)$$

Тік бұрышты аксонометрияда бұрмалану көрсеткіштерінің квадраттарының қосындысы екіге тең.

Қиғаш бұрышты аксонометрияда бұрмалану көрсеткіштерін тағайындауда (3) теңдікті, ал тік бұрышты аксонометрияда — (4) теңдікті ескеру керек.

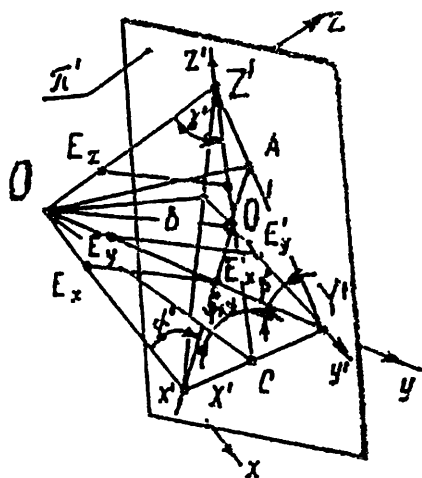
Аксонометрияға қойылатын басты талаптардың бірі — оның көрнекті болуы. Сондықтан қиғаш бұрышты аксонометрияда проекциялау бағыты координаттар жазықтығының біреуіне де параллель болмауы керек, ал тік бұрышты аксонометрияда натурал өстердің біреуі де проекциялар жазықтығына параллель немесе перпендикуляр болмауы керек.

9. ТІК БҰРЫШТЫ АКСОНОМЕТРИЯНЫҢ НЕГІЗГІ ҚАСИЕТТЕРІ

Тік бұрышты аксонометрияда проекциялар жазықтығы π' -ты натурал өстердің үшеуін де қиятындай етіп орналастырады (26-сурет). Аксонометриялық проекциялар жазықтығы мен x , y және z өстерінің қиылысу нүктелерін X' , Y' және Z' әріптерімен белгілейік. Бұл нүктелер натурал өстердің проекциялар жазықтығындағы іздері болады. Түзудің іздері туралы келесі тарауда айтылған (§16). $X'Y'Z'$ үшбұрышын іздер үшбұрышы деп атайды. O' нүктесі O нүктесінің тік бұрышты проекциясы: $(O'O) \perp \pi'$. Олай болса $O'X'$ түзуі x' өсін, $O'Y'$ түзуі y' өсін және $O'Z'$ түзуі z' өсін анықтайды:

$$(O'Z') = z; (O'X') = x; (O'Y') = y.$$

Натурал өстердің аксонометриялық проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрыштарын α° , β° және γ° деп белгілейік. Сонда: $\widehat{x'\pi'} = \alpha^\circ$; $\widehat{y'\pi'} = \beta^\circ$; $\widehat{z'\pi'} = \gamma^\circ$. Тік бұрыштап проекциялау кезіндегі кесінді мен оның проекциясының арасындағы байланысты ескеріп, былай жазуға болады: $|OE'| =$



26-сурет

$|OE_x|\cos\alpha^\circ; |O'E'_y|=|OE_y|\cos\beta^\circ; |O'E'_z|=|OE_z|\cos\gamma^\circ$. Осыдан (2) теңдікті ескеріп; мынаны аламыз:

$$u=\cos\alpha^\circ; v=\cos\beta^\circ; w=\cos\gamma^\circ. \quad (5)$$

Тік бұрышты аксонометрияда бұрмалану көрсеткіштері натурал өстердің аксонометриялық проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрыштарының косинусына тең.

Аксонометриялық өстер x', y' және z' іздер үшбұрышының қабырғаларымен A, B және C нүктелерінде қиылыссын: $x' \cap (Y'Z')=A$; $y' \cap (X'Z')=B$; $z' \cap (X'Y')=C$. OA, OB және OC түзулерін жүргізелік. Сонда біз xOy, xOz және yOz жазықтықтары мен π' жазықтығының арасындағы екі жақты бұрыштардың сызықтық бұрыштарын аламыз:

$$(xOy), \pi'=\varphi_{xy}^\circ; (xOz), \pi'=\varphi_{xz}^\circ; (yOz), \pi'=\varphi_{yz}^\circ.$$

$Z'OC, Y'OB$ және $X'OA$ тік бұрышты үшбұрыштарын қарастырсақ, мыналарды аламыз: $\varphi_{xy}^\circ=90^\circ-\gamma^\circ$; $\varphi_{xz}^\circ=90^\circ-\beta^\circ$; $\varphi_{yz}^\circ=90^\circ-\alpha^\circ$. Бұл бұрыштардың косинустарын есептелік:

$$\begin{aligned} \cos\varphi_{xy}^\circ &= \cos(90^\circ-\gamma^\circ) = \sin\gamma^\circ = \sqrt{1-\cos^2\gamma^\circ}, \\ \cos\varphi_{xz}^\circ &= \cos(90^\circ-\beta^\circ) = \sin\beta^\circ = \sqrt{1-\cos^2\beta^\circ}; \\ \cos\varphi_{yz}^\circ &= \cos(90^\circ-\alpha^\circ) = \sin\alpha^\circ = \sqrt{1-\cos^2\alpha^\circ}. \end{aligned} \quad (6)$$

Енді координаттар жазықтықтарының аксонометриялық проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрыштарының косинустарын бұрмалану көрсеткіштері арқылы өрнектелік. Бұл үшін (5) және (6) теңдіктерді салыстырамыз:

$$\begin{aligned} \cos\varphi_{xy}^\circ &= \sqrt{1-w^2}; \\ \cos\varphi_{xz}^\circ &= \sqrt{1-v^2}; \\ \cos\varphi_{yz}^\circ &= \sqrt{1-u^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Жоғарыдағы (4) және (5) теңдіктерден бұрмалану көрсеткіштерінің мәндері мына аралықта болатынын көреміз:

$$0 \leq u \leq 1; 0 \leq v \leq 1; 0 \leq w \leq 1; \quad (8)$$

және

$$1 \leq u^2 + v^2 \leq 2; 1 \leq u^2 + w^2 \leq 2; 1 \leq w^2 + v^2 \leq 2; \quad (9)$$

Тік бұрышты аксонометрияда бұрмалану көрсеткіштерінің мәндері нөл мен бірдің аралығында болуы тиіс. Бұрмалану көрсеткіштерінің кез келген екеуінің квадраттарының қосындысы бір мен екінің аралығында болады.

Енді тік бұрышты аксонометрияда аксонометриялық өстер іздер үшбұрышының биіктіктері болатындығын дәлелдедік. Шынында да, z өсі xOy жазықтығына перпендикуляр. Олай болса z түзуі осы жазықтықта жатқан $X'U'$ түзуіне де перпендикуляр. Көлбеуге перпендикуляр түзу көлбеудің проекциясына да перпендикуляр болады («үш перпендикуляр» туралы теорема бойынша). z көлбеу, ал z' оның проекциясы: $z \perp (X'U)$. Сондықтан $(X'U) \perp z'$. Осы сияқты: $(X'U) \perp y'$ және $(Y'Z) \perp x'$ (26-сурет).

Сонымен, аксонометриялық координаттар жүйесінің бас нүктесі O' іздер үшбұрышының ортоцентрі (биіктіктерінің қиылысу нүктесі) болады.

Іздер үшбұрышы әрқашан да сүйір бұрышты үшбұрыш болады. Шынында да, OC түзуін көлбеу, ал z' -ты оның проекциясы деп қарастыруға болады. $(X'U) \perp z'$ болатынын жоғарыда дәлелдедік. Көлбеудің (OC) проекциясына (z') перпендикуляр түзу ($X'U$) оның өзіне де перпендикуляр болады: $(OC) \perp (X'U)$. Сонда, C нүктесі тік бұрышты үшбұрыш $X'OY'$ -тың тік бұрышы төбесінен гипотенузаға түсірілген перпендикулярдың табаны болғаны. Олай болса, C нүктесі X' және Y' нүктелерінің аралығында орналасады. A және B нүктелері жөнінде де осыны айтуға болады. A нүктесі Y және Z нүктелерінің аралығында, ал B нүктесі X және Z нүктелерінің аралығында орналасады. Бұдан шығатын қорытынды: іздер үшбұрышының биіктіктері оның ішінде орналасады. Олай болса ортоцентр O' үшбұрыштың ішінде болғаны. Ал ортоцентр ішінде болатын үшбұрыш әрқашан да сүйір бұрышты болады.

Іздер үшбұрышының сүйір бұрышты болатындығынан шығатын негізгі қорытынды мынадай: жазықтықтың бір нүктеден тарайтын үш сәулесін тік бұрышты аксонометрияның өстері ретінде қарастыру үшін, олар бір бірімен доғал бұрыш жасап орналасулары керек.

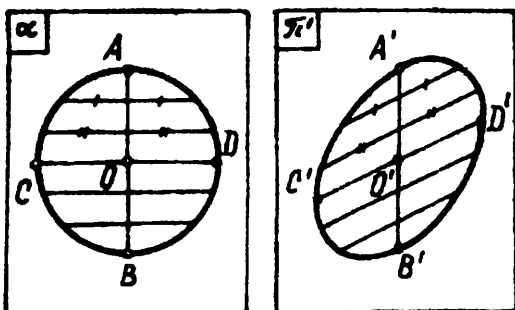
10. ШЕҢБЕРДІҢ ПАРАЛЛЕЛЬ ПРОЕКЦИЯСЫ

Центрі O нүктесі болатын және диаметрі $|d|$ -ға тең шеңбер α жазықтығында жатсын. Осы шеңберлі π' жазықтығына параллель проекциялап, алынған қисықтың негізгі қасиеттерін қарастыралық.

Шеңбердің нүктелерін проекциялайтын түзулердің жиыны цилиндр бетін береді. Осы проекциялаушы цилиндрдің π' жазықтығымен қиылысу сызығы шеңбердің параллель проекциясы болады. Цилиндрдің осіне көлбеу жазықтықпен қимасы эллипс болатыны белгілі. Олай болса, жалпы жағдайда шеңбердің параллель проекциясы эллипс болады. Проекциялау бағыты α жазықтығына параллель болса, шеңбер кесіндіге проекцияланады. Егер $\alpha \parallel \pi'$ болса, шеңбер өзіне тең шеңберге проекцияланады.

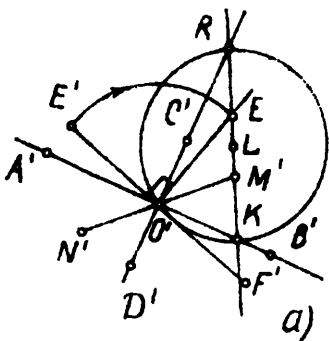
Шеңбердің центрі O эллипстің центрі O' -қа проецияланады. Шеңбердің өзара перпендикуляр екі диаметрі $[AB]$ мен $[CD]$ -ны қарастыралық (27-сурет). $[CD]$ -ға параллель хордаларды $[AB]$ диаметрі тең екі бөлікке бөледі, ал $[AB]$ -ға параллель хордаларды $[CD]$ диаметрі тең екі бөлікке бөледі.

Анықтама: Екі диаметрдің біріншісі, екіншісіне параллель хордаларды қақ бөлсе және екіншісі біріншісіне параллель хордаларды қақ бөлсе, онда оларды түйіндес диаметрлер дейді. Сондықтан шеңбердің түйіндес диаметрлері эллипстің түйіндес диаметрлеріне проекцияланады.

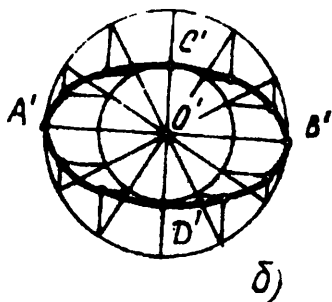


27-сурет

Шеңбердің түйіндес диаметрлері өзара перпендикуляр болады, ал эллипстің түйіндес диаметрлері өзара кез келген бұрыш жасайды. Шеңбердің диаметрлері өзара тең болады, ал эллипстің диаметрлері өзара тең болмайды. Эллипстің диаметрлерінің ішіндегі ең ұзынын *үлкен ос*, ал ең қысқасын *кіші ос* деп атайды. Үлкен ос пен кіші ос болатын диаметрлер түйіндес және өзара перпендикуляр болады.



Түйіндес диаметрлері $E'F'$ және $M'N'$ болатын эллипстің өстерін қалай тұрғызуға болатындығын көрсетелік (28-сурет). Түйіндес диаметрлердің қиылысу нүктесі O' эллипстің центрін береді. $E'O'$ кесіндісін M' нүктесіне қарай 90° -қа бұрып E нүктесін аламыз: $|E'O'| = |EO'|$; $(E'O') \perp (EO')$. E және M' нүктелері арқылы түзу жүргіземіз. EM' кесіндісінің ортасы болатын L нүктесін центр етіп алып O' нүктесі арқылы шеңбер жүргізелік. Осы шеңбер EM' түзуін K және R нүктелерінде қияды. Сонда $O'K$ және $O'R$ түзу-



28-сурет

лері эллипс өстерінің бағыттарын анықтайды, ал KE кесіндісі үлкен өстің жартысына және ER кесіндісі кіші өстің жартысына тең болады:

$$(OK)=(A'B); (OR)=(C'D); |A'B|=2|EK|; |C'D|=2|ER|.$$

Енді үлкен өсі $[A'B]$ және кіші өсі $[C'D]$ болатын эллипсті салуды қарастыралық. $[A'B]$ -ты диаметр етіп алып үлкен шеңбер және $[C'D]$ -ты диаметр етіп кіші шеңбер жүргіземіз. Үлкен шеңберді 12 немесе одан да көп тең бөліктерге бөліп, оның радиустарын жүргізсек, кіші шеңбер де соншалықты бөлікке бөлінеді. Үлкен шеңбердің бөліну нүктесі арқылы кіші оське параллель түзу, ал кіші шеңбердің сәйкес бөліну нүктесі арқылы үлкен оське параллель түзу жүргізелік. Бұл екі түзудің қиылысу нүктесі эллипстің бойында жатады. Осылайша эллипстің 12 немесе одан да көп нүктелерін тауып, оларды үлгісызғыштың (лекалоның) көмегімен жатық түйық сызықпен қосады.

Шеңбердің тік бұрышты проекциясы да эллипс болады. Бұл жағдайда эллипстің өстерін табу оңайлайды. Оның үлкен өсі шеңбердің проекциялар жазықтығына параллель диаметрінің проекциясы болады. Сондықтан үлкен өс шеңбердің диаметріне тең: $|A'B'|=|AB|=|d|$. Кіші өстің ұзындығы шеңбер жазықтығы мен проекциялар жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусына байланысты болады. Эллипстің кіші өсін $[C'D]$ деп белгілесек, онда: $[C'D]=|d|\cos(\alpha, \pi)$. Үлкен өс шеңбер жазықтығы мен проекциялар жазықтығының қиылысу сызығына параллель, ал кіші өс оған перпендикуляр болады. Жалпы жағдайда эллипстің параллель проекциясы да эллипс болады.

11. СТАНДАРТ АКСОНОМЕТРИЯЛАР

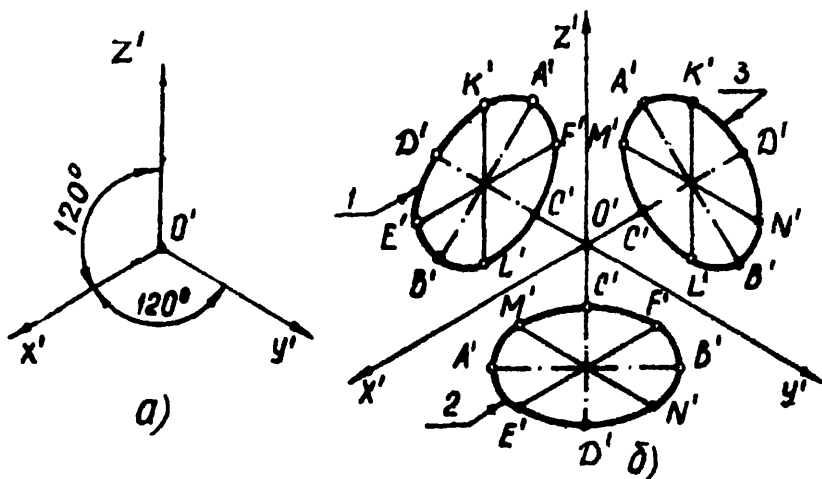
Жоғарыда аксонометриялық масштабтарды қалауымызша алып, өстерді қалауымызша орналастыруға болатындығын көрсеткенбіз. Олай болса, аксонометрияның түрлері шексіз көп. Бірақ олардың барлығы бірдей қолайлы және көрнекі бола бермейді. Сондықтан МЕСТ 2.317-69 аксонометриялық проекциялардың тек қана дербес бес түрін қолдануды ұсынады. Олар мыналар: 1) тік бұрышты изометрия, 2) тік бұрышты диметрия, 3) қиғаш бұрышты фронталь изометрия, 4) қиғаш бұрышты фронталь диметрия және 5) қиғаш бұрышты горизонталь изометрия.

1. Тік бұрышты изометрия. Изометрияда бұрмалану көрсеткіштері өзара тең $u=v=w$. Сондықтан, жоғарыдағы (5) теңдіктен: $\cos\alpha^\circ = \cos\beta^\circ = \cos\gamma^\circ$ және $\alpha^\circ = \beta^\circ = \gamma^\circ$ болады. Тік бұрышты OX' , OY' және OZ' үш-бұрыштарынан (26-сурет):

$$\begin{aligned} |OO'| &= |OX'| \cos \alpha^\circ; |OO'| = |OY'| \cos \beta^\circ; |OO'| = |OZ'| \cos \gamma^\circ; \\ |OX'| &= |OY'| = |OZ'|. \end{aligned} \quad (10)$$

Осыдан $X'OY'$; $X'OZ'$ және $Y'OZ'$ тік бұрышты үшбұрыштар және олардың катеттері өзара тең. Олай болса, олардың гипотенузалары да өзара тең болады: $|X'Y'| = |Y'Z'| = |Z'X'|$. Соңғы теңдіктер іздер үшбұрышының тең қабырғалы болатындығын көрсетеді. Тең қабырғалы үшбұрыштың биіктіктері бір-бірімен 120° -тық бұрыш жасайды. Осыдан тік бұрышты изометрияның өстері өзара 120° -қа тең бұрыштар жасайтындығын көреміз (29, а-сурет). (4) теңдіктен $u=v=w$ болғандықтан: $3u^2 = 3v^2 = 3w^2 = 2$;

$$u=v=w = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82.$$



29-сурет

Тік бұрышты изометрияда бұрмалану көрсеткіштері 0,82-ге тең. Бірақ мұндай көрсеткішпен пайдалану қолайсыз. Сондықтан, көбіне 1-ге тең келтірілген бұрмалану көрсеткіштері қолданылады: $U=V=W=1$. Келтірілген тік бұрышты изометрияда заттың өлшемдері $\frac{1}{0,82} = 1,22$ есе үлкейеді; екінші сөзбен айтқанда, мұндай кескіннің масштабы $M1,22:1$ болады.

Координаттар жазықтықтарында немесе оларға параллель жазықтықтарда орналасқан шеңберлердің проекциялары болатын эллипстерді салу жолын көрсетелік. Егер шеңбер xOz жазықтығында немесе оған параллель жазықтықта жатса, онда оның проекциясы болатын эллипстің (29, б-суреттегі 1-эллипс) кіші өсі y' осімен бағыттас, ал үлкен өсі оған перпендикуляр болады. Егер шеңбер xOy жазықтығында немесе оған параллель жазықтықта жатса, онда оның тік бұрышты изометрия-

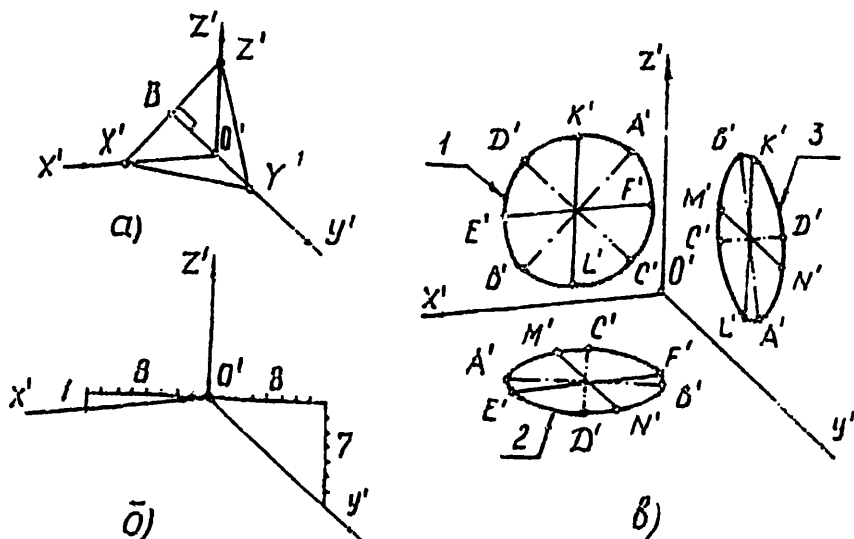
сы болатын эллипстің (29,б-суреттегі, 2-эллипс) кіші осі z' -пен бағыттас, үлкен осі z' -ке перпендикуляр болады. yOz жазықтығында немесе оған параллель жазықтықта жатқан шеңбердің тік бұрышты изометриясы болатын эллипстің (29,б-суреттегі 3-эллипс) кіші осі x' -пен бағыттас, ал үлкен осі x' -қа перпендикуляр болады. Бұл эллипстердің үлкен өстері диаметрге тең, ал кіші өстері (11) теңдіктен табылады:

$$|C'D| = |d| \cos(\alpha, \pi). \quad (11)$$

Келтірілген тік бұрышты изометрияда үлкен өс $|A'B| = |M|d \approx 1,22|d|$, ал кіші өс мына теңдіктен анықталады:

$$|C'D| = |M|d \cos \varphi_{xy} = 1,22|d| \sqrt{1-w^2} \approx 0,71|d|. \quad (12)$$

Үлкен және кіші өстері белгілі эллипсті салу әдісін жоғарыда көрсеттік. 29, б-суретте 1, 2 және 3-эллипстердің x' , y' және z' өстеріне параллель диаметрлері көрсетілген: $|EF| = |K'L| = |M'N'| = |d|$.



30-сурет

2. Тік бұрышты диметрия — шексіз көп. Бірақ оның ішінде $u=w$ және $v = \frac{u}{2}$ болатынын ғана МЕСТ пайдалануға ұсынады. Егер $u=w$ болса, онда (5) теңдіктен $\cos \alpha^\circ = \cos \gamma^\circ$ болады. Осыдан $\alpha^\circ = \gamma^\circ$, яғни x және z өстерінің проекциялар жазықтығына бірдей бұрышпен көлбейтіндерін көреміз. Сондықтан іздер үшбұрышы тең бүйірлі болады (30-сурет). Бұрмалану көрсеткіштерін есептелік. (4) теңдіктен мынаны аламыз:

$$u^2 + u^2/4 + u^2 = 2; u = w = \sqrt{8/9} \approx 0,94; v = u/2 \approx 0,47.$$

Келтірілген тік бұрышты диметрия үшін $U=W=1$ және $V=0,5$ болады, ал заттын өлшемдері $U/u = \sqrt{9/8} \approx 1,06$ есе үлкейеді, басқаша айтқанда мұндай кескіннің масштабы $M1,06:1$ болады.

Аксонометриялық өстердің арасындағы бұрыштарды анықталық. Тік бұрышты $O'BZ'$ үшбұрышынан

$$\sin \frac{\widehat{x', z'}}{2} = \frac{|BZ'|}{|O'Z'|} = \frac{|X'Z'|}{2|O'Z'|}. \quad (13)$$

$X'OZ'$ тең бүйірлі үшбұрыш. Ол тік бұрышты және тең бүйірлі $X'OZ'$ үшбұрышының (26-сурет) проекциясы.

$$|X'Z'| = |OZ'| \sqrt{2}. \quad (14)$$

Тік бұрышты $OO'Z'$ үшбұрышынан

$$|O'Z'| = |OZ'| \cos \gamma = |OZ'| w. \quad (15)$$

(14) және (15) теңдіктерден $|X'Z'|$ пен $|O'Z'|$ -тің мәндерін (13) теңдікке

койсақ, сонда $\sin \frac{\widehat{x', z'}}{2} = \sqrt{2} |OZ'| / 2 |OZ'| w = 3/4$. Осыдан $\frac{\widehat{x', z'}}{2} = 48^\circ 35'$;

$$\widehat{x', z'} = 97^\circ 10'; \quad \widehat{x', y'} = \widehat{z', y'} = 180^\circ - \frac{\widehat{x', z'}}{2} = 131^\circ 25'.$$

Егер z' өсін вертикаль орналастырсақ, x' өсі горизонталь бағытпен $7^\circ 10'$ -ке, ал y' өсі — $41^\circ 25'$ -ке тең бұрыштар жасайды. $\operatorname{tg} 7^\circ 10' = 1/8$ және $\operatorname{tg} 41^\circ 25' = 7/8$ болатындықтарын пайдаланып, тік бұрышты диметрияның өстерін былайша тұрғызуға болады. O' нүктесі арқылы z' -ке перпендикуляр түзу жүргізіп, оның бойына өзара тең сегіз кесіндіні оңға және солға қарай да өлшеп саламыз. Содан кейін, алынған кесінділердің ұштары арқылы вертикаль түзулер жүргізіп, олардың бойына бір және жеті кесінді саламыз да алынған нүктелерді O' пен түзу сызық арқылы қосамыз.

Координаттар жазықтықтарында немесе оларға параллель жазықтықтарда жағқан шеңберлердің тік бұрышты диметрияларын салу жолын көрсетелік. Жоғарыда көрсетілгендей, егер шеңбер xOz жазықтығында немесе оған параллель жазықтықта орналасқан болса, онда эллипстің үлкен өсі шеңбер жазықтығына перпендикуляр өстің проекциясына перпендикуляр болады. Кіші ос үлкен өске перпендикуляр болғандықтан, оның бағыты шеңбер жазықтығына перпендикуляр өстің проекциясымен бағыттас болады.

Келтірілген тік бұрышты диметриядағы эллипстердің үлкен және кіші өстері:

а) шеңбер жазықтығы xOz жазықтығына параллель орналасады (30, в-суреттегі 1-эллипс үшін).

$$\begin{aligned} |A'B| &= 1,06|d|; |C'D| = M|d|\cos\varphi_{xz}^{\circ} = 1,06|d|\sqrt{1-v^2} = \\ &= 1,06|d|\sqrt{1-\frac{8}{9}} \approx 0,95|d|; |C'D| = 0,95|d|; \end{aligned}$$

б) шеңбер жазықтығы xOy немесе yOz жазықтығына параллель орналасады (30, в-суреттегі 2 және 3-эллипстер).

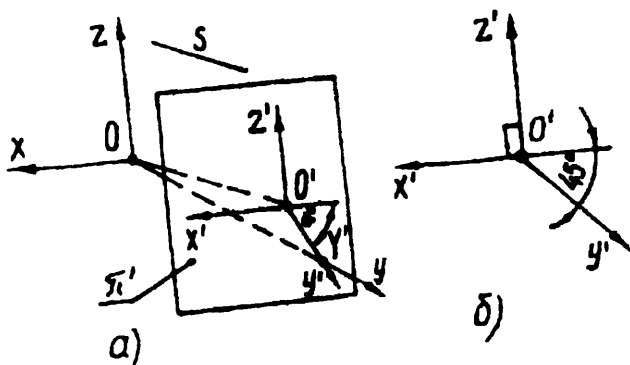
$$\begin{aligned} |A'B| &= 1,06|d|; |C'D| = M|d|\cos\varphi_{xy}^{\circ} = 1,06|d|\sqrt{1-u^2} = \\ &= 1,06|d|\sqrt{1-\frac{8}{9}} \approx 0,35|d|; |C'D| = 0,35|d|. \end{aligned} \quad (16)$$

30, в-суретте эллипстердің x' , y' және z' өстеріне параллель диаметрлері көрсетілген:

$$|EF| = |KL| = |d|; |MN| = 0,5|d|. \quad (17)$$

3. Қиғаш бұрышты фронталь изометрия. Аксонометриялық проекциялар жазықтығы π' -ты xOz жазықтығына параллель етіп орналастырады (31, а-сурет). Сондықтан, аксонометриялық өстер x' және z' өзара тік бұрыш жасайды және олардың бағытымен бұрмалану көрсеткіштері бірге тең болады: $u=w=1$. Үшінші өс y' -тің бағыты және бұрмалану көрсеткіші v -нің мәні проекциялау бағытына тәуелді. Осы себепті проекциялау бағыты тағайындалмаған болса, y' -тің бағытын және v -нің мәнін қалауымызша алуға болады. Қиғаш бұрышты фронталь изометрияда y осін горизонталь бағытпен 45° -қа тең бұрыш жасайтындай етіп орналастырады, ал бұрмалану көрсеткіші v -нің мәнін бірге тең деп алу керек. Сонда:

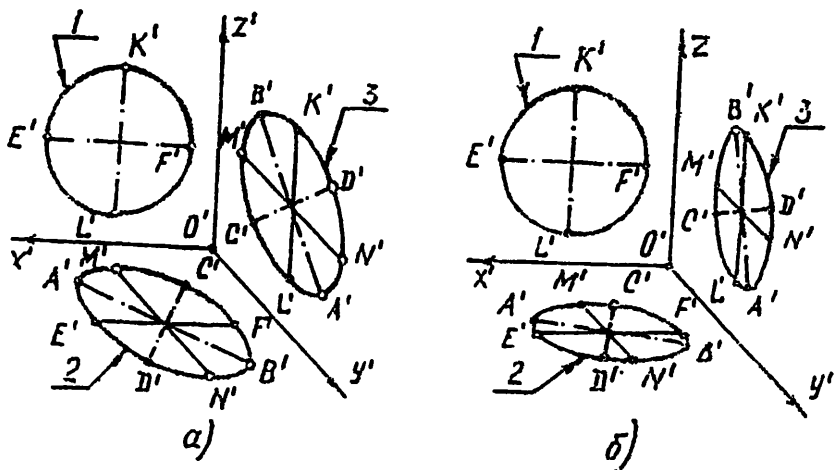
$$u=v=w=1; \quad x', z'=90^\circ; \quad x', y'=y', z'=135^\circ.$$



31-сурет

xOz жазықтығына параллель орналасқан шеңбер өзіне тең шеңберге кескінделеді (32, а-суреттегі 1-шеңбер). xOy жазықтығына параллель шеңбер 2-эллипске, ал yOz жазықтығына параллель шеңбер 3-эллипске проекцияланады. 2-эллипстің үлкен өсі x' өсімен $22^\circ 30'$ -ке тең бұрыш жасаса, 3-эллипстің үлкен өсі z' өсімен $22^\circ 30'$ -ке тең бұрыш жасайды. 2-және 3-эллипстердің үлкен өстері шеңбердің диаметрі мен 1,3-тің көбейтіндісіне, ал кіші өстері шеңбердің диаметрі мен 0,54-тің көбейтіндісіне тең.

$$|A'B'| = 1,3|d|; |C'D'| = 0,54|d|; |E'F'| = |K'L'| = |M'N'| = |d|.$$



32-сурет

4. Қиғаш бұрышты фронталь диметрия. Бұның қиғаш бұрышты фронталь изометриядан айырмашылығы тек бұрмалану көрсеткіштерінде ғана. $u=w=1$ болатынын жоғарыда көргенбіз, ал v -ні 0,5-ке тең деп аламыз. Сонда:

$$u=w=1; v=0,5; \hat{x', z'}=90^\circ; \hat{x', y'}=\hat{y', z'}=135^\circ.$$

xOy жазықтығына параллель орналасқан шеңбер мұнда да өзіне тең шеңберге кескінделеді (32, б-суреттегі 1-шеңбер). xOy және yOz жазықтықтарына параллель орналасқан шеңберлердің проекциялары болатын 2-және 3-эллипстердің орналасу ерекшеліктерімен өлшемдеріне тоқталайық. 2-эллипстің үлкен өсі x өсімен $7^\circ 14'$ -ке тең бұрыш жасаса, 3-эллипстің үлкен өсі z өсімен $7^\circ 14'$ -ке тең бұрыш жасайды. Олардың үлкен өстері шеңбердің диаметрі мен 1,07-нің көбейтіндісіне, ал кіші өстері шеңбердің диаметрі мен 0,33-тің көбейтіндісіне тең:

$$|A'B'| = 1,07|d|; |C'D'| = 0,33|d|; |E'F'| = |K'L'| = |d|; |M'N'| = 0,5|d|.$$

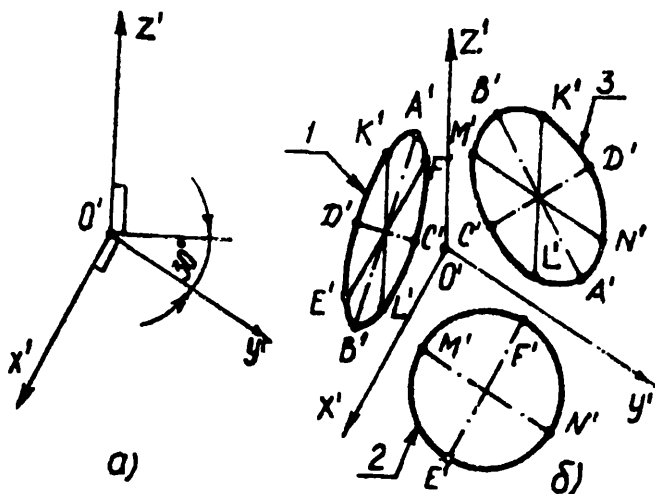
5. Қығаш бұрышты горизонталь изометрия. Аксонометриялық проекциялар жазықтығын π' -ты xOy жазықтығына параллель етіп орналастырады. Сондықтан, аксонометриялық өстер x' және y' өзара тік бұрыш жасайды және олардың бағытымен бұрмалану көрсеткіштері бірге тең болады: $u=v=1$. Олай болса үшінші бұрмалану көрсеткішін де бірге тең деп алу керек ($w=1$). $u=v=w=1$; $x'; y'=90^\circ$; $y'; z'=120^\circ$. xOy жазықтығына параллель орналасқан шеңбер өзіне тең шеңберге проекцияланады (33, б-суреттегі 2-шеңбер). xOz жазықтығына параллель орналасқан шеңбердің проекциясы болатын 1-эллипстің үлкен өсі z өсімен 15° -қа тең бұрыш жасайды, ал оның өлшемдері:

$$|A'B'|=1,37|d|; |C'D'|=0,37|d|; |E'F'|=|K'L'|=|d|.$$

yOz жазықтығына параллель шеңбердің проекциясы болатын 3-эллипстің үлкен өсі z өсімен 30° -қа тең бұрыш жасайды, ал оның өлшемдері:

$$|A'B'|=1,22|d|; |C'D'|=0,71|d|; |K'L'|=|M'N'|=|d|.$$

Аксонометриялық проекциялардың қарастырылған бес түрін стандарт аксонометриялар деп атайды.

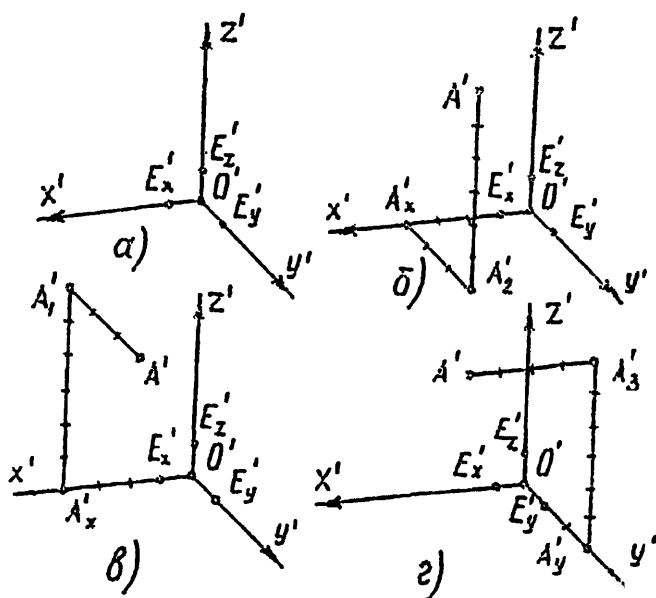


33-сурет

12. АКСОНОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОЕКЦИЯЛАРДЫ САЛУ

Геометриялық денелердің аксонометриясын салу үшін, сол денені анықтайтын нүктелердің аксонометриялық проекцияларын тұрғызып алу керек. Нүктелердің проекцияларын олардың координаттары бойынша тұрғызады. Берілген $A(4, 3, 6)$ нүктесінің аксонометриялық проекцияларын салуды қарастырайық. A нүктесінің жанындағы жақшаның

ішіндегі сандар — оның координаттары. Бірінші сан абсциссасы, екінші сан ординатасы және үшінші сан аппликаты болады. К. Польке теоремасына сүйеніп O' нүктесінде қиылысатын x', y' және z' түзулерін аксонометриялық өстер, ал олардың бойынан қалауымызша алынған $O'E'_x$, $O'E'_y$ және $O'E'_z$ кесінділерін аксонометриялық масштабтар ретінде аламыз (34, а-сурет). Сонда берілген нүктенің аксонометриясын әр түрлі жолдармен табуға болады. Суретте A' -ты табудың үш жолы көрсетілген. Абсцисса өсі бойына $|O'E'_x|$ -қа тең 4 кесінді салсақ, A'_x нүктесін аламыз. A'_x нүктесі арқылы ордината өсіне параллель түзу жүргізіп, оның бойына $|O'E'_y|$ -қа тең үш кесінді салсақ, A'_2 нүктесін аламыз. Содан кейін A'_2 нүктесі арқылы z' -ке параллель түзу жүргізіп, оның бойына $|O'E'_z|$ -қа тең алты кесінді салу арқылы A' нүктесінің аксонометриялық проекциясы A' нүктесін аламыз. A'_x нүктесі арқылы аппликата өсіне параллель түзу жүргізуге де болады. Осы түзудің бойына $|O'E'_z|$ -қа тең алты кесінді салсақ, A'_1 нүктесін аламыз. Ал A'_1 нүктесі арқылы y' -ке параллель түзу жүргізіп, оның бойына $|O'E'_y|$ -қа тең үш кесінді салсақ, тағы да A' нүктесін аламыз. 34,г-суретте алдымен y' -ке $|O'E'_y|$ -қа тең үш кесінді алып A'_y нүктесін таптық. Одан кейін A'_y нүктесі арқылы z' -ке параллель түзу жүргізіп, оның бойына $|O'E'_z|$ -қа тең алты кесінді салудың нәтижесінде A'_3 нүктесін тұрғыздық. Соңында, A'_3 нүктесі арқылы x' -ке параллель

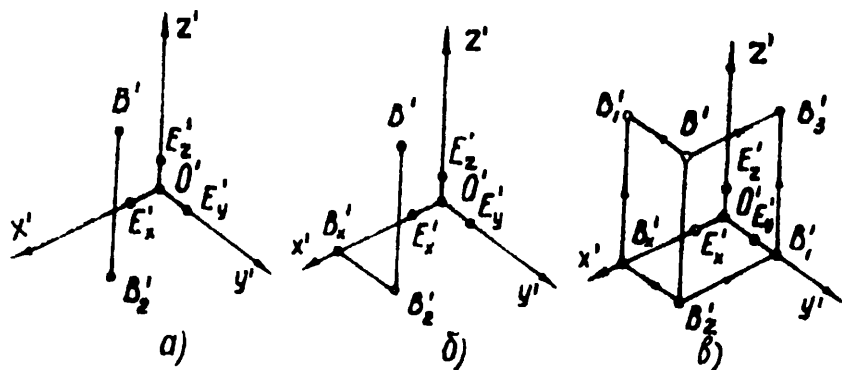


34-сурет

түзу жүргізіп, оның бойына $|O'E'_x|$ -ке тең төрт кесінді салу арқылы A' нүктесін алдық. Суреттегі A'_1 , A'_2 және A'_3 нүктелерін A нүктесінің *екінші проекциялары* деп атағанбыз. Аксонометрияда олардың біреуін көрсету жеткілікті. Шынында да, егер 34-суреттегі б, в және г фигураларын қайшымен қиып алып, олардағы сәйкес өстер бірігетіндей етіп беттестірсек, осы үш фигуралардағы A' нүктелері бір нүктеге кескінделер еді.

Аксонометриясы B' және екінші проекциясы B'_2 болатын B нүктесінің координаттарын анықтауды және оның қалған екінші проекциялары B'_1 пен B'_3 -ты тұрғызуды көрсетелік (35-сурет). Мұнда аксонометриялық өстер x' , y' , z' және аксонометриялық масштабтар $[O'E'_x]$, $[O'E'_y]$, $[O'E'_z]$ белгілі және $B'B'_2$ түзуі z' -ке параллель болуы керек. B'_2 нүктесі арқылы y' -ке параллель етіп жүргізілген түзу x' -ті B'_x нүктесінде қияды. B нүктесінің координаттарын (1) теңдікті пайдаланып табамыз:

$$x = \frac{|O'B'_x|}{|O'E'_x|}; \quad y = \frac{|B'_2B'_x|}{|O'E'_y|}; \quad z = \frac{|B'B'_2|}{|O'E'_z|}.$$



35-сурет

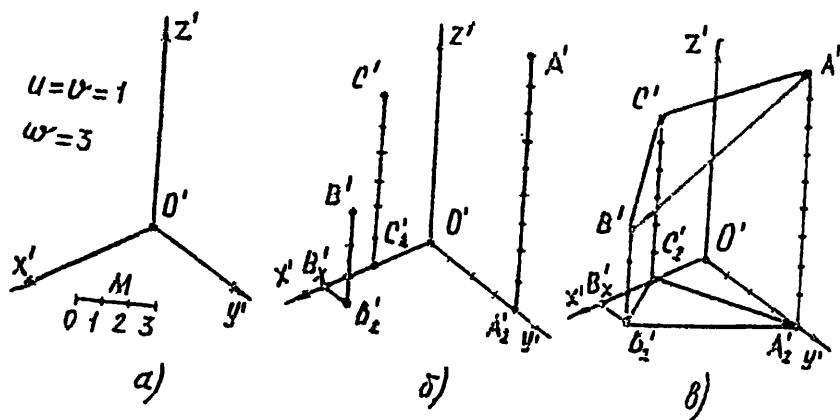
Екінші проекциялар B'_1 пен B'_3 -ты табу үшін B'_2 нүктесі арқылы x' және y' өстеріне параллель түзулер жүргізіп, B'_x және B'_y нүктелерін аламыз. B' нүктесі арқылы x' және y' өстеріне параллель етіп жүргізілген түзулер B'_x және B'_y нүктелері арқылы z' -ке параллель етіп жүргізілген сәйкес түзулермен B'_1 және B'_3 нүктелерінде қиылысады.

Координаттары белгілі нүктенің аксонометриясын салу үшін оның аксонометриялық координаталық сынық сызығын тұрғызу жеткілікті.

1-мысал. Төбелерінің координаттары белгілі ABC үшбұрышының қиғаш бұрышты аксонометриясын бұрмалану көрсеткіштерін пайдала-

нып салу керек болсын: $A(0, 4, 3)$, $B(1, 1, 1)$, $C(2, 0, 2)$. Проекциялау бағыты аксонометриялық проекциялар жазықтығына $18^\circ 26'$ бұрыш жасап көлбейтіні белгілі болсын.

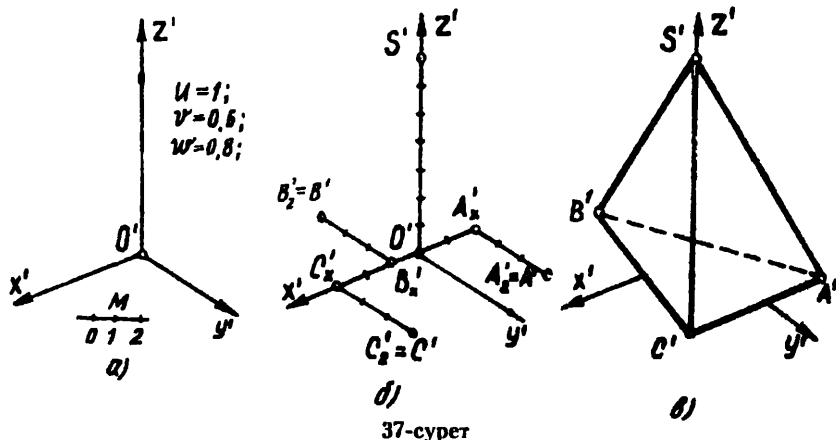
К. Подъке теоремасына сүйеніп аксонометриялық өстерді қалауымызша орналастыралық (36-сурет). Бұрмалану көрсеткіштерінің екеуін қалауымызша тағайындауға болады. Біздер $u=v=1$ деп аламыз. Сонда үшінші бұрмалану көрсеткішін (3) теңдікті пайдаланып табамыз: $w=3$. A нүктесінің координаталық сынық сызығы $O'A'_2A'$ -ты тұрғызамыз. Бұнда $|O'A'_2|=4$; $|A'_2A'|=wz=9$. Сондай-ақ B және C нүктелерінің координаталық сынық сызықтары $O'B'_1B'_2B'$ және $O'C'_2C'$ -тарды тұрғызамыз. $|O'B'_1|=4$; $|B'_1B'_2|=1$; $|B'_2B'|=3$; $|O'C'_2|=2$; $|C'_2C'|=6$. Аксонометрияда ABC үшбұрышы өзінің аксонометриялық $A'B'C'$ және екінші $A'_2B'_2C'_2$ проекциялармен кескінделеді.



36-сурет

2-мысал. Төбелерінің координаттары белгілі $SABC$ үш бұрышты пирамидасының тік бұрышты аксонометриясын салу керек болсын. $A(-2, 5, 0)$, $B(1, -5, 0)$, $C(3, 5, 0)$, $S(0; 0; 8,75)$.

Тағы да аксонометриялық өстерді қалауымызша орналастыралық (37-сурет). Бұрмалану көрсеткіштерінің екеуін (8) және (9) теңсіздіктерді ескере отырып қалауымызша тағайындайық. $u=1$ және $v=0,6$ болсын. Үшінші өс бойымен бұрмалану көрсеткішін (4) теңдікті пайдаланып табамыз: $w=0,8$. Суретте аксонометриялық өстердің оң бағыттары нұсқамамен көрсетілген. A нүктесінің абсциссасы минус таңбалы болғандықтан O' -тан оңға қарай x өсінің созындысына 2 кесіндіні масштабты пайдаланып саламыз. Ал ордината өсі бағытындағы бұрмалану көрсеткіші v бірден өзге болғандықтан нүктелердің ординаталарын осы v -нің



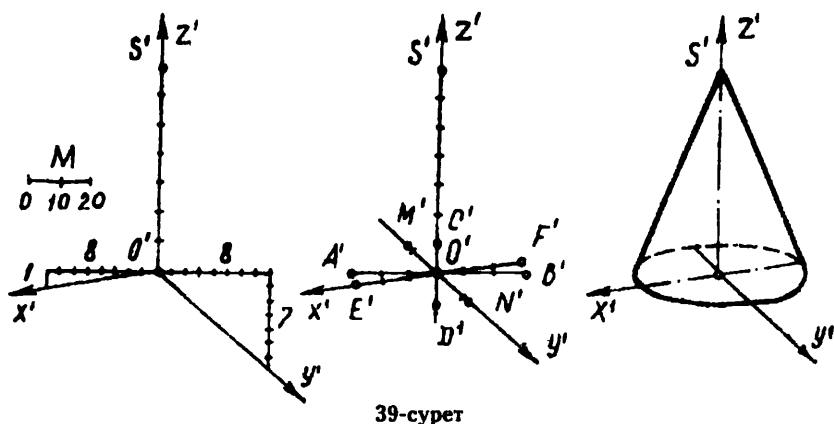
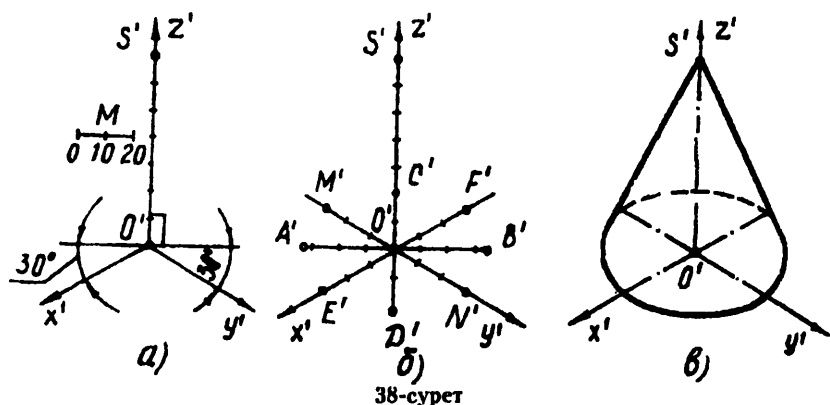
37-сурет

мәніне көбейтеміз. Сонда A нүктесінің ординатасы $y=0,6 \cdot 5=3$. Сондықтан A'_x нүктесі арқылы y' -ке параллель түзу жүргізіліп, одан оңға қарай 3 кесінді салсақ $A'_2=A'$ нүктесін аламыз. B , C және S нүктелерінде аксонометриялық координаталық сынық сызықтарын тұрғызу арқылы саламыз. Салынған A' , B' , C' және S' нүктелерін түзудің кесінділерімен қосып берілген пирамиданың аксонометриясын аламыз.

Көбіне стандарт аксонометриялар пайдаланылады. Сондықтан стандарт аксонометрияларды салуға бір-екі мысал келтірейік.

3-мысал. Биіктігі 70-ке және табанындағы шеңбердің диаметрі 60-қа тең конустың тікбұрышты стандарт аксонометрияларын салу керек.

Конустың өсін аппликата өсі ретінде және оның табанындағы шеңбердің центрін натурал координаттар жүйесінің бас нүктесі ретінде қабылдайық. Конустың төбесін S әрпімен, ал оның табанындағы шеңбердің центрін O әрпімен белгілейік. Сонда: $S(0, 0, 70)$, $O(0, 0, 0)$. Аксонометрияда z' өсін вертикаль орналастырады. Тік бұрышты изометрияда $x', z'=120^\circ$; $y', z'=120^\circ$; $y', x'=120^\circ$. Аксонометриялық өстерді жүргізгеннен кейін координаттары бойынша S' және O' нүктелерін тұрғызамыз (38-сурет). x' және y' өстері бойына O' -тан бастап 30-ға тең кесінділер салсақ, эллипстің $[EF]$ және $[MN]$ түйіндес диаметрлерін аламыз. (11) теңдікті ескеріп эллипстің үлкен өсін және (12) теңдікті ескеріп оның кіші өсін саламыз. Эллипсті өстері бойынша центрлес екі шеңбер өдісімен тұрғызамыз. S' нүктесінен эллипске жанамалар жүргізсек конустың тік бұрышты келтірілген изометриясын аламыз. Енді конустың тік бұрышты стандарт диметриясын тұрғызуды қарастыралық (39-сурет). Алдымен аксонометриялық өстерді жүргізіп аламыз және S пен O нүктелерінің аксонометрияларын саламыз. Конустың табаны болатын

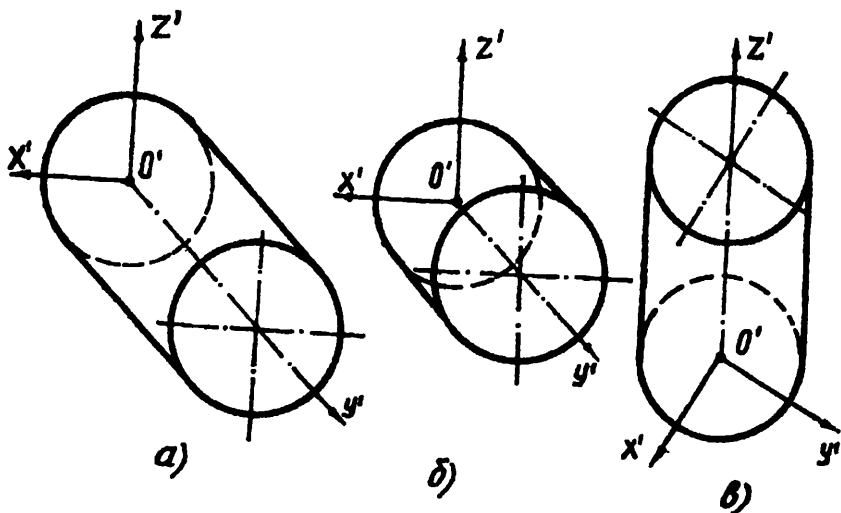


эллипстің үлкен өсі z' -ке перпендикуляр, кіші өсі онымен бағыттас болатынын ескеріп, (16) теңдіктен өстердің ұзындықтарын есептейміз. (17) теңдікті пайдаланып эллипстің тағы да 4 нүктесін табуға болады. Эллипсті центрлес екі шеңбер әдісімен салып оған жанамалар жүргізсек, конустың тік бұрышты келтірілген стандарт диметриясын аламыз.

4-мысал. Биіктігі 70-ке, табандары диаметрі 60-қа тең шеңберлер болатын цилиндрдің қиғаш бұрышты стандарт аксонометрияларын салу керек.

Қиғаш бұрышты фронталь изометрия мен диметрияны салу үшін цилиндр өсін ордината өсі ретінде қарастырған қолайлы. Сонда цилиндрдің табандары xOz жазықтығына параллель болады да, өздерінің шамаларын сақтап, бұрмаланбай проекцияланады. 40,а-суретте цилиндрдің қиғаш бұрышты фронталь изометриясы, ал 40,б-суретте ди-

метриясы кескінделген. Изометрияда цилиндрдің биіктігі бұрмаланбай, ал диметрияда екі есе кішірейіп кескінделеді. Қиғаш бұрышты горизонталь изометрияда цилиндрдің өсін аппликата өсі ретінде қарастыру қолайлы. Бұл жағдайда цилиндрдің табандары xOy жазықтығына параллель орналасатындықтан бұрмаланбай шенберлер түрінде кескінделеді (40, в-сурет).



40-сурет

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН СҰРАҚТАР МЕН ЖАТТЫҒУЛАР

1. Натурал координаттар жүйесі, натурал координаталық сынық сызық және натурал масштаб дегеніміз не?
2. Аксонометриялық координаттар жүйесі, аксонометриялық координаталық сынық сызық және аксонометриялық масштабтар дегеніміз не және олардың натурал жүйе, натурал сынық сызық, натурал масштабпен қандай байланыстары бар?
3. Берілген заттың аксонометриялық проекциясын және екінші проекциясын қалай алуға болады?
4. Нүктенің натурал және аксонометриялық координаттары өзара тең болатынын дәлелдеңіз. Бұрмалану көрсеткіштеріне анықтамалар беріңіз.
5. Аксонометриялық проекциялардың қандай түрлері бар?
6. Аксонометрияның негізгі теоремасы қалай оқылады және одан қандай қорытындылар шығады?

7. Бұрмалану көрсеткіштері мен проекциялау бағыты арасында қандай байланыс бар? Тік бұрышты аксонометрия үшін бұл байланыс қалай өзгереді?

8. Тік бұрышты аксонометрияның негізгі қасиеттерін атап, оларды дәлелденіз.

9. Шеңбер қандай жағдайларда эллипске, шеңберге, кесіндіге проекцияланады?

10. Шеңбер мен эллипстің түйіндес диаметрлері туралы не айтасыз? Эллипстің үлкен және кіші өстері өзара қалай орналасады?

11. Түйіндес диаметрлерімен берілген эллипстің үлкен және кіші өстерін тұрғызып көрсетіңіз және табылған өстері бойынша эллипсті салыңыз.

12. Стандарт тік бұрышты изометрия өстерінің арасындағы бұрыштарды және өстер бойынша бұрмалану көрсеткіштерін есептеңіз. Координаттар жазықтықтарына параллель шеңберлердің проекциялары болатын эллипстер қалай орналасады және олардың өлшемдері қандай?

13. Стандарт тік бұрышты диметрия өстерінің арасындағы бұрыштарды және өстер бойынша бұрмалану көрсеткіштерін есептеңіз. Координаттар жазықтықтарына параллель шеңберлердің проекциялары болатын эллипстер қалай орналасады және олардың өлшемдері қандай?

14. Стандарт қиғаш бұрышты фронталь изометрия өстері қалай орналасады, бұрмалану көрсеткіштерінің мәндері қандай, координаттар жазықтықтарына параллель шеңберлердің проекциялары қандай және қалай орналасады?

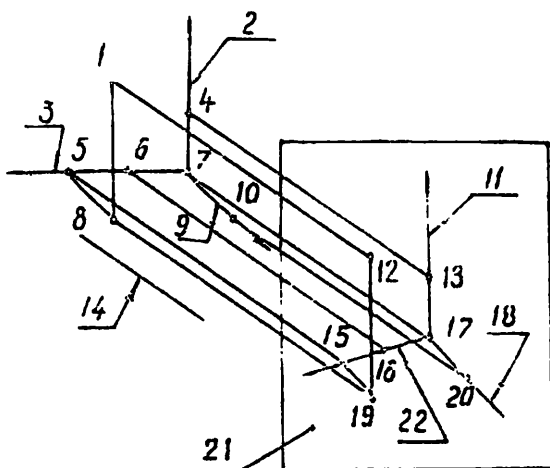
15. Стандарт қиғаш бұрышты фронталь диметрия өстері қалай орналасады, бұрмалану көрсеткіштерінің мәндері, координаттар жазықтықтарына параллель шеңберлердің проекциялары қандай және қалай орналасады?

16. Стандарт қиғаш бұрышты горизонталь изометрия өстері қалай орналасады, бұрмалану көрсеткіштерінің мәндері қандай, координаттар жазықтықтарына параллель шеңберлердің проекциялары қандай және қалай орналасады?

17. 41-суретте A нүктесінің аксонометриясын алу схемасы көрсетілген. Осы суретке сәйкес 3-ші кестені толтырыңыз.

18. Параллелепипедтің (42, а-сурет) және дұрыс төрт бұрышты пирамиданың (42, б-сурет) аксонометриялық проекцияларын салу керек.

19. Проекциялау бағыты мен аксонометриялық проекциялар жазықтығының арасындағы бұрыштың және бұрмалану көрсеткіштерінің мәндері 4-кестеде келтірілген. Осы кестені толтыруды аяқтау және аксонометриялардың түрлерін анықтау керек.

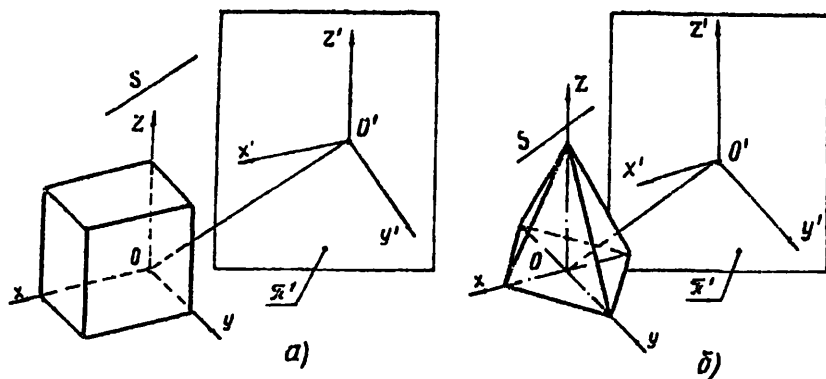


41-сурет

3-кесте

Кескінделген геометриялық фигуралардың

аттары	сандық таңбалары	өрпітік таңбалары
1. Натурал координаттық өстер		
2. Аксонометриялық координаттық өстер		
3. Натурал жүйенің бас нүктесі		
4. Аксонометриялық жүйенің бас нүктесі		
5. Натурал масштаб		
6. Аксонометриялық масштабтар		
7. Берілген нүкте (оригинал)		
8. Берілген нүктенің аксонометриясы		
9. Берілген нүктенің екінші проекциясы		
10. Проекциялау бағыты		
11. Аксонометриялық проекциялар жазықтығы		
12. Натурал координаталық сынық сызық		
13. Аксонометриялық координаттық сынық сызық		



42-сурет

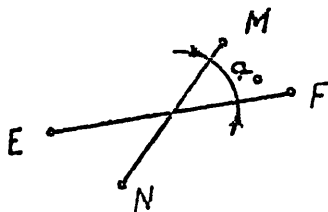
4-кесте

Бұрмалану көрсеткіштері			Проекциялау бағыты мен π' -тың арасындағы бұрыш	Аксонетрияның түрі
u	v	w		
1	$\sqrt{2}$		30°	
	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	60°	
$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$		90°	
0,6	0,8	1		
1		1	45°	

20. xOy координаттар жазықтығы аксонетриялық проекциялар жазықтығына (π' -қа) 30° -тық бұрыш жасап көлбейді, ал xOz жазықтығы 60° -қа тең бұрыш жасап көлбейді. yOz жазықтығының және x , y , z өстерінің π' жазықтығына көлбеулік бұрыштарын анықтаңыздар. Тік бұрышты аксонетриялық бұрмалану көрсеткіштерін табыңыздар.

21. Сүйір бұрышты кез келген үшбұрышты іздер үшбұрышы деп қарастырып, тік бұрышты аксонетрияның өстерін тұрғызу және бұрмалану көрсеткіштерін табу керек.

22. Эллипстің өзара α° -қа тең бұрыш жасап орналасқан $[EF]$ және $[MN]$ түйіндес диаметрлері берілген (43-сурет). Эллипстің өстерін тұрғызып, оны центрлес



43-сурет

скі шеңбер әдісімен салу керек: а) $|EH|=60$; $|MN|=40$; $\alpha^\circ=45^\circ$; б) $|EF|=70$; $|MN|=40$; $\alpha^\circ=60^\circ$; в) $|EF|=60$; $|MN|=30$; $\alpha^\circ=30^\circ$.

23. Диаметрі $|d|$ -ға тең шеңбер жазықтығы аксонометриялық проекциялар жазықтығына α° -қа тең бұрыш жасап көлбейді. Осы шеңбердің тік бұрышты аксонометриясы болатын эллипсті салу керек: а) $|d|=50$; $\alpha^\circ=0^\circ$; б) $|d|=60$; $\alpha^\circ=60^\circ$; в) $|d|=70$; $\alpha^\circ=90^\circ$.

24. $A(4; 3; 8)$, $B(6; 2; 10)$, $C(7; 4; 5)$, $M(10; 0; 5)$, $N(0; 5; 10)$ нүктелерінің аксонометриялық және екінші проекцияларын тұрғызыңыздар. Аксонометриялық өстер мен масштабтарды өздеріңіз таңдап алыңыздар. A , B және C нүктелерінің қайсысы (MN) түзуінің бойында жатады?

25. $ABCD$ үш бұрышты пирамида төбелерінің координаттары берілген: $A(0; -2; 7)$, $B(4; 6; 1)$, $C(1; -4; 2)$, $D(-2; 3; 0)$. Осы пирамиданың кездейсоқ аксонометриясын салу керек.

26. $A(3; 3; 7)$, $B(8; 1; 4)$ және $C(1; 8; 6)$ нүктелері берілген. A нүктесі арқылы өтетін үш түзудің аксонометриялық және екінші проекцияларын салу керек. Бұл түзулердің біріншісі BC түзуіне параллель, екіншісі xOz жазықтығына параллель және BC түзуімен қиылысады, ал үшіншісі yOz жазықтығына параллель және BC түзуімен қиылысады.

27. Бүйір қырының ұзындығы 60-қа, табан қырының ұзындығы 20-ға тең дұрыс: а) үш бұрышты призманың стандарт тік бұрышты диметриясын және б) алты бұрышты призманың стандарт қиғаш бұрышты фронталь диметриясын салу керек.

28. Қырының ұзындығы 50-ге тең текшепін (кубтың) жақтарына іштей сызылған шеңберлердің стандарт аксонометрияларын салыңыздар.

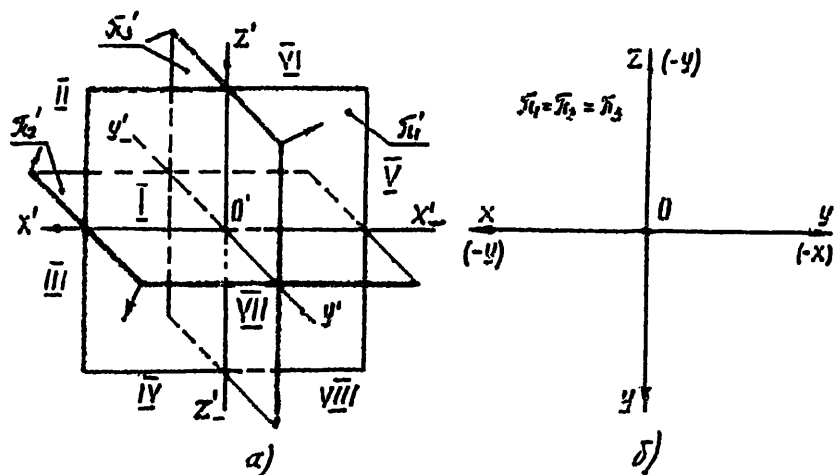
29. $M(5; 3; 6)$ нүктесі арқылы өтетін үш түзудің қиғаш бұрышты фронталь изометриясын салу керек. Бұл түзулердің біріншісі xOy , екіншісі xOz , ал үшіншісі yOz жазықтығына перпендикуляр болсын.

Екінші тарау

НҮКТЕНІҢ, ТҮЗУДІҢ ЖӘНЕ ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ЭПЮРИ

13. ОКТАНТТАР ЖӘНЕ НҮКТЕНІҢ ЭПЮРИ

1. Заттың сызбасын алу үшін оны өзара перпендикуляр үш жазықтыққа π_1 , π_2 және π_3 -ке тік бұрыштап проекциялайды, π_1 -ді фронталь проекциялар жазықтығы, ал π_2 -ні горизонталь проекциялар жазықтығы деп атауға жоғарыда (§ 6) келіскенбіз. π_1 фронталь, π_2 горизонталь орналасса, π_3 оларға перпендикуляр болғандықтан профиль орналасады. Сондықтан π_3 -ті *профиль проекциялар жазықтығы* деп атайды. Сонда заттың сызбасы фронталь, горизонталь және профиль проекциялар деп аталатын үш кескіннен тұрады. Фронталь проекцияны сызу сабағында заттың алдынан қарағандағы, немесе басты көрінісі. горизонталь проекцияны үстінен қарағандағы көрінісі және профиль проекцияны сол жағынан қарағандағы көрінісі деп атайды. Үш жазықтық π_1 , π_2 және π_3 кеңістікті октанттар деп аталатын сегіз бөлікке бөледі (44,а-сурет). Проекциялар жазықтығы координаттар жазықтығымен беттескен деп қара-



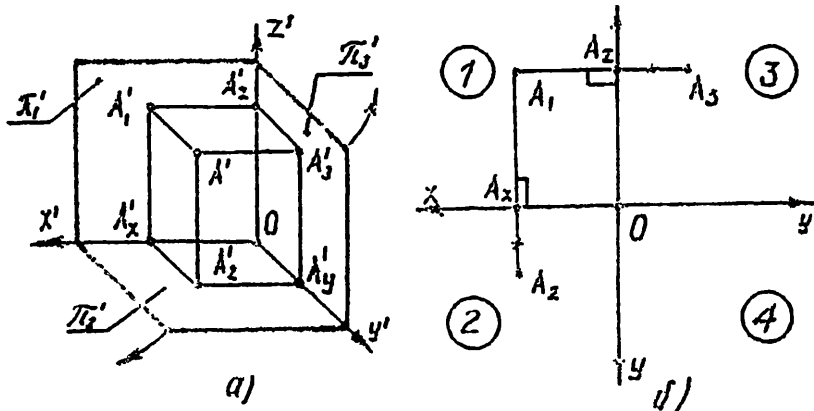
44-сурет

стыралық: $\pi_1 = xOz$; $\pi_2 = xOy$; $\pi_3 = xOz$. Сонда абсцисса өсін фронталь және горизонталь жазықтықтарының қиылысу сызығы ретінде алуға болады: $x = \pi_1 \cap \pi_2$. Сол сияқты $y = \pi_2 \cap \pi_3$ және $z = \pi_1 \cap \pi_3$. Проекциялар жазықтық-

тары мен өстердің ортақ нүктесі O координаттар өстерін екі сәулеге бөледі. Бұл сәулелердің бірі өстің оң бағытын, ал екіншісі — теріс бағытын анықтайды. Өстердің оң бағыттары суретте нұсқамамен көрсетілген: $[Ox)$; $[Oy)$; $[Oz)$. 44,а-суретте октанттар рим цифрларымен нөмірленген. Абсцисса өсі π_1 , ордината өсі π_2 , ал аппликата өсі π_3 жазықтығын екіге бөледі. Бірінші октант π_1 жазықтығының жоғарғы бөлігімен, π_2 жазықтығының сол жақтағы бөлігімен және π_3 жазықтығының алдыңғы бөлігімен шектеледі. Сонымен бірінші октантты өстердің оң бағыттары анықтайды. Екінші октант бірінші октанттың артында орналасады және $[Ox)$, $[Oy-)$, $[Oz)$ сәулелерімен анықталады. Екінші октантта орналасқан нүктенің абсциссасы мен аппликаты оң, ал ординаты теріс мәнді болады. Үшінші октант екінші октанттың астында орналасады және $[Ox)$, $[Oy-)$, $[Oz-)$ сәулелерімен анықталады. Үшінші октантта орналасқан нүктенің абсциссасы оң, ал ординаты мен аппликаты теріс мәнді болады. Төртінші октант бірінші октанттың астында орналасады және $[Ox)$, $[Oy)$, $[Oz-)$ сәулелерімен анықталады. Төртінші октанттағы нүктенің абсциссасы мен ординаты оң, ал аппликаты теріс мәнді болады. Бесінші октант бірінші октанттың оң жақ қатарында орналасады және $[Ox-)$, $[Oy)$, $[Oz)$ сәулелерімен анықталады. Бесінші октанттағы нүктенің абсциссасы теріс, ал ординаты мен аппликаты оң мәнді болады. Алтыншы октант бесінші октанттың артында екінші октанттың оң жақ қатарында орналасады және $[Ox-)$, $[Oy-)$, $[Oz)$ сәулелерімен анықталады. Алтыншы октанттағы нүктенің абсциссасы мен ординаты теріс, ал аппликаты оң мәнді болады. Жетінші октант алтыншы октанттың астында үшінші октанттың оң жақ қатарында орналасады және $[Ox-)$, $[Oy-)$, $[Oz-)$ сәулелерімен анықталады. Жетінші октанттағы нүктенің координаттарының үшеуі де теріс мәнді болады. Сегізінші октант бесінші октанттың астында төртінші октанттың оң жақ қатарында орналасады және $[Ox-)$, $[Oy)$, $[Oz-)$ сәулелерімен анықталады. Сегізінші октанттағы нүктенің абсциссасы мен аппликаты теріс, ал ординаты оң мәнді болады. 5-кестеде әр түрлі октанттарда орналасқан нүктелер координаттарының таңбалары көрсетілген. Жазық сызба алу үшін π_1 , π_2 және π_3 жазықтықтарын қағаз жазықтығымен беттестіру керек. Осы мақсат үшін π_2 жазықтығын абсцисса осінен айналдырып ордината өсінің оң бағыты аппликата өсінің теріс бағытымен, ал ордината өсінің теріс бағыты аппликата өсінің оң бағытымен бірігетіндей етіп горизонталь проекциялар жазықтығын фронталь проекциялар жазықтығы π_1 -мен беттестіреді. Профиль проекциялар жазықтығы π_3 -ті аппликата өсінен айналдырып, оны да π_1 жазықтығымен беттестіреді. π_3 -ті z өсінен айналдырудың нәтижесінде y өсінің оң бағыты x өсінің теріс бағытымен, ал y

осінің теріс бағыты x осінің оң бағытымен бірігеді. Алынған жазық сызбаны *эпюр* деп атайды (44, б-сурет).

2. Бірінші октантқа орналасқан A нүктесінің эпюрін қарастыралық (45-сурет). A нүктесінен π_1 , π_2 және π_3 жазықтықтарына перпендикуляр түсірсек, олар аталған жазықтықтарды A_1 , A_2 және A_3 нүктелерінде қия-



45-сурет

ды. A нүктесінің фронталь проекциялар жазықтығындағы (π_1 -дегі) тік бұрышты проекциясын оның *фронталь проекциясы*, ал горизонталь проекциялар жазықтығындағы (π_2 -дегі) тік бұрышты проекциясын — *горизонталь проекциясы* деп атайды деп жоғарыда айтқан болатынбыз. A_3 нүктесі A нүктесінің *профиль проекциясы*. A_1 нүктесінен π_2 жазықтығына түсірілген перпендикуляр A_2 нүктесінен π_1 -ге түсірілген перпендикулярмен абсцисса өсі бойында жататын A_x нүктесінде қиылысады. Осы A_x нүктесін A нүктесінің x осіндегі тік бұрышты проекциясы деп қарастыруға болады. Сондықтан A_x нүктесін, осы сияқты A_y және A_z нүктелерін A нүктесінің *өстік проекциялары* деп атайды. A нүктесі, координаттар жүйесінің бас нүктесі O және проекциялар A_1 , A_2 , A_3 , A_x , A_y , A_z параллелепипедтің төбелерін береді. $AA_1A_2A_3$ тік төртбұрышы осы параллелепипедтің жоғарғы табаны, ал $A_2A_xOA_y$ — төмендегі табаны. Сонда: $x = |OA_x| = |A_1A_2| = |AA_3| = |A_2A_y|$; $y = |OA_y| = |A_xA_2| = |AA_1| = |A_3A_z|$; $z = |OA_z| = |A_1A_x| = |AA_2| = |A_3A_y|$. Эпюре нүктенің фронталь және горизонталь проекциялары абсцисса өсіне перпендикуляр *вертикаль байланыс сызығы* деп аталатын бір түзудің бойында орналасады (45, б-сурет). Нүктенің фронталь және профиль проекциялары аппликата өсіне перпендикуляр

горизонталь байланыс сызығы деп аталатын бір түзудің бойында орнала-сады.

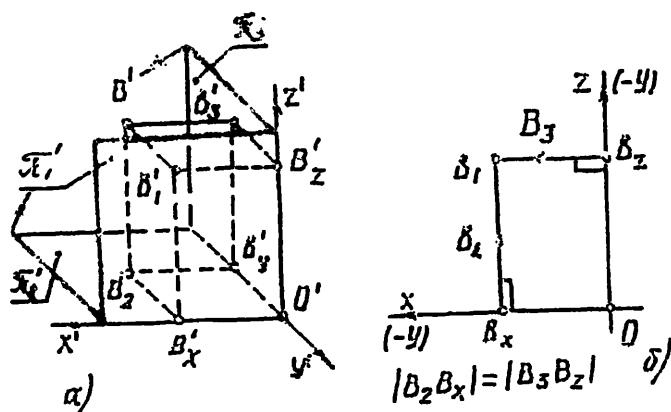
$$(A_1 A_2) \perp x; (A_1 A_3) \perp z; |A_2 A_x| = |A_3 A_z|.$$

Эпюрге x және z өстері жазықтықты ширектер деп аталатын төрт бөлікке бөледі. III ширектер 45, 6-суретте дөңгелектердің ішіне жазылған цифрлармен нөмірленген. Сонда бірінші октантта орналасқан нүктенің фронталь проекциясы бірінші ширекте, горизонталь проекциясы екінші ширекте және профиль проекциясы үшінші ширекте жатады.

5-кесте

Октанттар		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Координаттар мән-дерінің таңбалары	x	+	+	+	+	-	-	-	-
	y	+	-	-	+	+	-	-	+
	z	+	+	-	-	+	+	-	-

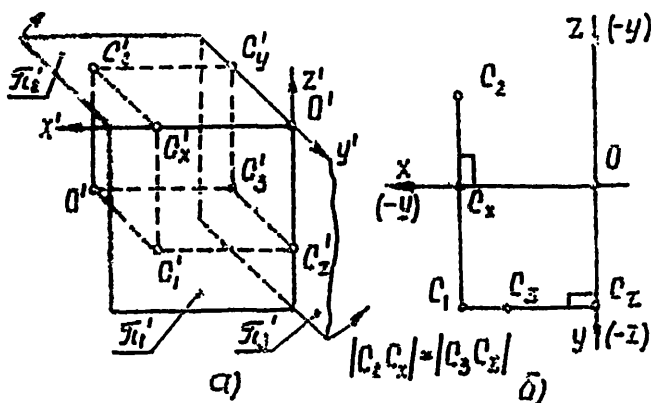
3. Екінші октантта орналасқан B нүктесінің эпюрін қарастыралық (46-сурет). Эпюр алу үшін π_2 жазықтығын x өсінен оның нұсқамамен аяқталған ұшынан қарағанда сағат тілінің қозғалу бағытында айналдырып π_1 жазықтығымен беттестіреміз. π_3 жазықтығын да z өсінен оның нұсқамамен аяқталған ұшынан қарағанда сағат тілінің қозғалу бағытына қарама-қарсы бағытта айналдырып π_1 жазықтығымен беттестіреміз. Сонда B нүктесінің үш проекциясы да (фронталь проекциясы B_1 , горизонталь проекциясы B_2 және профиль проекциясы B_3) бірінші ширекте



46-сурет

орналасатынын көреміз (46,б-сурет). B нүктесінің фронталь және горизонталь проекциялары (B_1 мен B_2 нүктелері) x өсіне перпендикуляр бір түзудің бойында орналасқан, ал оның фронталь және профить проекциялары (B_1 мен B_3 нүктелері) z өсіне перпендикуляр бір түзудің бойында орналасқан. (B_1B_2) — вертикаль байланыс сызығы, ал (B_1B_3) — горизонталь байланыс сызығы. Вертикаль байланыс сызығы абсцисса өсіне, ал горизонталь байланыс сызығы ашшиката өсіне перпендикуляр орналасады: (B_1B_2) $\perp x$; (B_1B_3) $\perp z$. Горизонталь проекцияның абсцисса өсінен қашықтығы профить проекцияның аппликата өсінен қашықтығына тең: $|B_2B_x| = |B_3B_z|$.

4. Үшінші октантта орналасқан C нүктесінің эпюрін қарастыралық (47-сурет). Бұл нүктенің горизонталь проекциясы C_2 абсцисса өсінен жоғары, ал фронталь проекциясы C_1 төмен орналасқан (47, б-сурет).

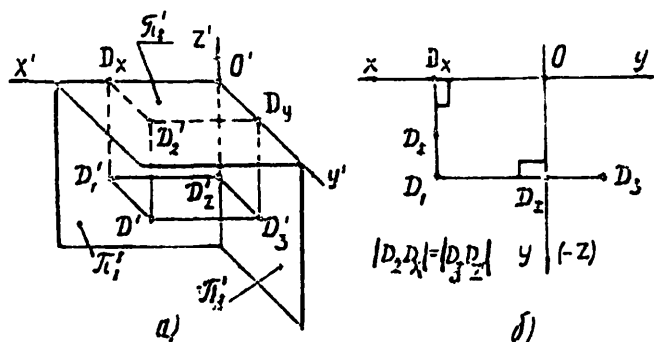


47-сурет

Нүктенің екі проекциясы берілсе, оның үшінші проекциясын әрқашан да тауып алуға болады. Мысалы, C нүктесінің фронталь және горизонталь проекциялары C_1 мен C_2 беріліп, оның профить проекциясы C_3 -ті табу керек болсын. Нүктенің фронталь проекциясы C_1 арқылы горизонталь байланыс сызығын жүргіземіз. Горизонталь байланыс сызығы z өсіне перпендикуляр болады дегенбіз. Байланыс сызығы z осін C_2 нүктесінде қияды. Осы байланыс сызығына C_2 нүктесінен бастап нүктенің ординатасын өлшеп салу керек. C нүктесінің ординағасы $|C_xC_2|$ -ге тең: $|C_2C_x| = |C_3C_z|$. Егер нүктенің горизонталь проекциясы C_2 абсцисса өсінен жоғары жатса, профить проекциясы C_3 ашшиката өсінің сол жағында жатады. Егер горизонталь проекция x өсінен төмен жатса, профить проекция z өсінің оң жағында жатады. Енді C нүктесінің фронталь

проекциясы C_1 және профиль проекциясы C_3 берілсін. C нүктесінің горизонталь проекциясы C_2 нүктесін салу керек болсын. C_1 нүктесі арқылы x осіне перпендикуляр түзу жүргізіп, C_x нүктесін табамыз. Осы түзудің бойына C_2C_3 кесіндісіне тең C_2C_x кесіндісін салып, іздеп отырған C_2 нүктесін (C нүктесінің горизонталь проекциясын) аламыз. Егер C нүктесінің горизонталь C_2 және профиль C_3 проекциялары берілсе, оның фронталь проекциясы C_1 нүктесін табу үшін C_2 нүктесі арқылы вертикаль байланыс сызығын, ал C_3 нүктесі арқылы горизонталь байланыс сызығын жүргіземіз. Жүргізілген байланыс сызықтары C_1 нүктесінде қиылысады. Сонымен үшінші октанттағы нүктенің горизонталь проекциясы бірінші ширекте, ал фронталь және профиль проекциялары екінші ширекте болады екен.

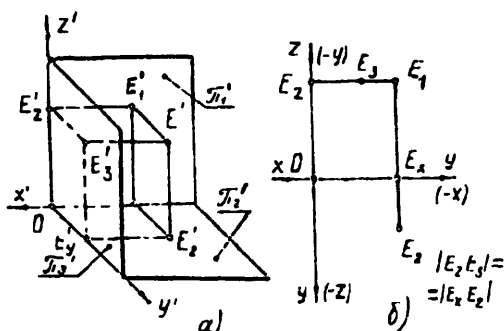
5. Төртінші октанттағы D нүктесінің фронталь және горизонталь проекциялары, D_1 мен D_2 нүктелері, эпюрге x осінен төмен екінші ширекте орналасады (48-сурет). Осы нүктенің профиль проекциясы D_3



48-сурет

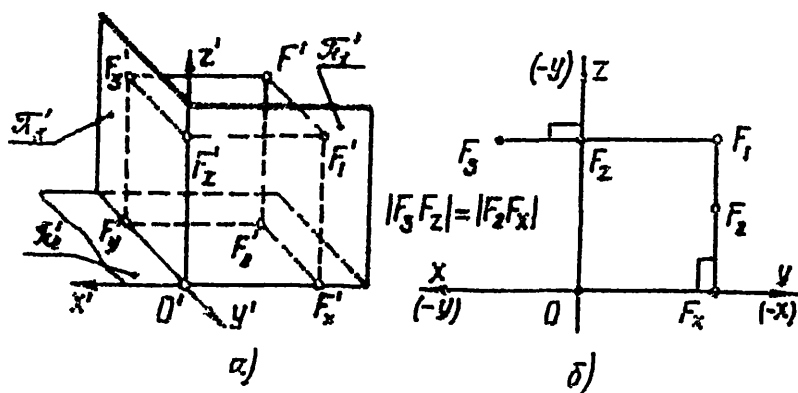
фронталь проекция арқылы z осіне перпендикуляр етіп жүргізілген горизонталь байланыс сызығына D_2D_x кесіндісіне тең D_3D_z кесіндісін салудың нәтижесінде табылады. Профиль проекция D_3 эпюрге төртінші ширекте орналасқан (48,б-сурет).

6. 49-суретте бесінші октантта орналасқан E нүктесінің аксонометриясы а) және эпюрі б) сызылған.



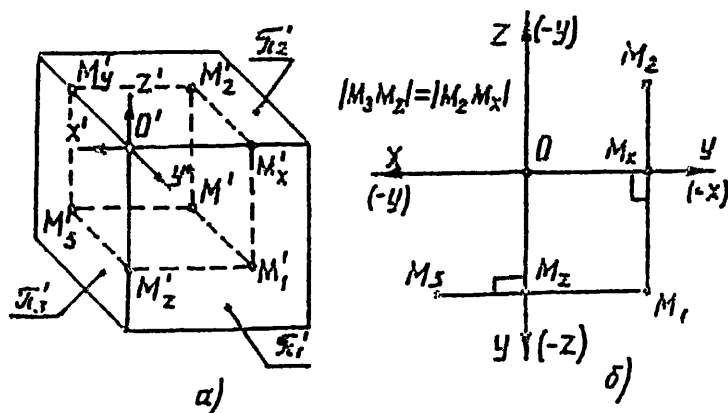
49-сурет

Бесінші октанттағы нүктенің фронталь және профиль проекциялары үшінші ширекте, ал горизонталь проекциясы төртінші ширекте орналасады. 50-суретте алтыншы октанттағы F нүктесінің аксонометриясы а) және энжүрі б) сызылған. Алтыншы октанттағы нүктенің фронталь



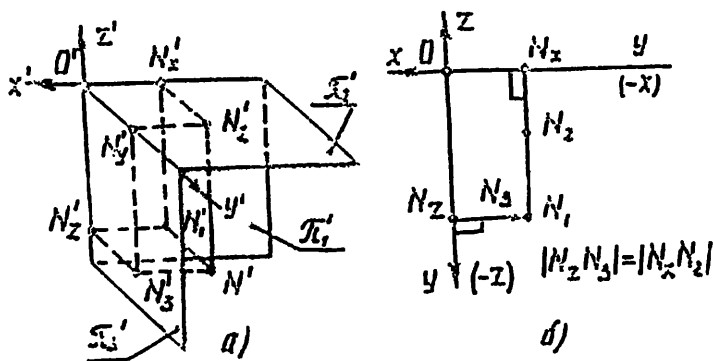
50-сурет

және горизонталь проекциялары үшінші ширекте, ал профиль проекциясы бірінші ширекте орналасады. 51-суретте жетінші октанттағы M нүктесінің аксонометриясы а) және энжүрі б) сызылған. Жетінші октанттағы нүктенің профиль проекциясы екінші ширекте, горизонталь проекциясы үшінші ширекте және фронталь проекциясы төртінші ширекте



51-сурет

орналасады. 52-суретте сегізінші октанттағы N нүктесінің аксонометриясы а) және эшпюрі б) сызылған. Сегізінші октанттағы нүктенің үш проекциясының үшеуі де төртінші ширекте орналасады.

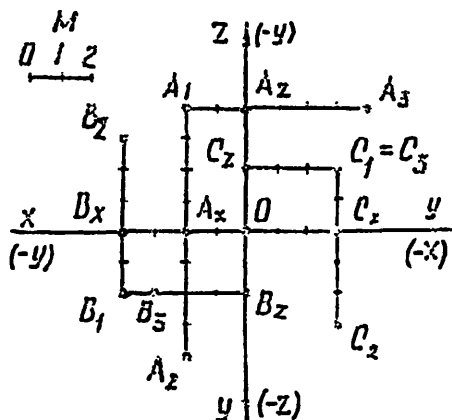


52-сурет

14. КООРДИНАТТАРЫМЕН БЕРІЛГЕН НҮКТЕНІҢ ЭПЮРІН САЛУ

Координаттарымен берілген нүктенің эпюрін салу оңай. Мысалы, $A(2; 4; 1)$, $B(4; -3; -2)$ және $C(-3; 3; 2)$ нүктелерінің проекцияларын табу-ды көрсетелік. Горизонталь түзу жүргізіп, оны абсцисса (x) өсі ретінде қабылдадық. Оған перпендикуляр вертикаль түзу жүргізіп, оны апплика-ката (z) өсі ретінде қарастыралық (53-сурет). Жүргізілген түзулердің қиылысу нүктесі O координат-

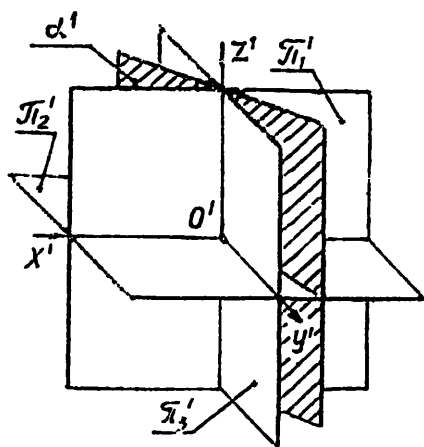
тар жүйесінің бас нүктесін бер-реді ($O=x \cap z$). Бас нүктеден со-лға қарай абсцисса өсінің оң ба-ғыты, ал оңға қарай теріс бағы-ты болады. Бас нүктеден жоға-ры қарай аппликата өсінің оң бағыты, ал томен қарай теріс бағыты болады. Ордината өсі горизонталь және профиль проекциялар жазықтықтары-ның қиылысу сызығы $y = \pi_2 \cap \pi_3$. Сондықтан π_2 жазықтығын π_1 жазықтығымен беттестірудің нәтижесінде y өсі z өсімен бет-теседі, ал олардың бағыттары



53-сурет

карама-қарсы болды. π_3 жазықтығын π_1 жазықтығымен беттестірудің нәтижесінде y осі x осімен беттеседі, ал олардың бағыттары бір-біріне карама-қарсы болады. Сондықтан нүктенің горизонталь проекциясын іздейтін болсақ, ордината өсін вертикаль орналасқан деп қарастыру керек, ал нүктенің профиль проекциясын іздейтін болсақ, ордината өсін горизонталь орналасқан деп қарастыру керек. Масштабты қалауымызша тандап аламыз. A нүктесінің координаттарының үшеуі де оң таңбалы, B нүктесінің абсциссасы оң, ординатасы мен аппликацасы теріс, ал C нүктесінің абсциссасы теріс, ординатасы мен аппликацасы оң таңбалы. 5-кестеден A нүктесі бірінші, B нүктесі үшінші, және C нүктесі бесінші октантта болатынын оңай анықтаймыз. A нүктесінің абсциссасы екіге тең, сондықтан O нүктесінен солға қарай екі кесінді салып A_x нүктесін аламыз. A_x нүктесі арқылы вертикаль байланыс сызығын x өсіне перпендикуляр етіп жүргіземіз. Осы түзудің бойына A_x нүктесінен жоғары қарай A нүктесінің аппликацасына тең кесінді салып A нүктесінің фронталь проекциясы A_1 нүктесін аламыз, ал төмен қарай ординатаға тең кесінді салып A -ның горизонталь проекциясы A_2 нүктесін аламыз. A_1 нүктесі арқылы горизонталь байланыс сызығын z өсіне перпендикуляр етіп жүргізіп, оның бойына A нүктесінің ординатасына тең A_4A_3 кесіндісін z осінен бастап салудың нәтижесінде профиль проекция A_3 нүктесін табамыз. B нүктесінің абсциссасы 4-ке тең, сондықтан O нүктесінен солға қарай 4-ке тең кесінді салып B_x нүктесін аламыз. B_x нүктесі арқылы x өсіне перпендикуляр жүргізіп, оның бойына жоғары қарай 3-ке тең кесінді салып оның горизонталь проекциясы B_2 нүктесін, ал төмен қарай 2-ге тең кесінді салып оның фронталь проекциясы B_1 нүктесін аламыз. B_1 нүктесі арқылы z өсіне перпендикуляр түсіріп, оның табаны B_2 нүктесін аламыз. B_2 нүктесінен солға қарай 3-ке тең кесінді салып (профиль проекциясы) B_3 нүктесін аламыз. Плюс таңбалы координаттар өстердің оң, ал минус таңбалы координаттар теріс бағытына салынады. C нүктесінің абсциссасы минус таңбалы, сондықтан горизонталь өске бас нүктеден оңға қарай 3-ке тең кесінді салып C_1 нүктесін табамыз. Жоғары қарай байланыс сызығына 2-ге тең кесінді салсақ C_1 нүктесін, ал төмен қарай 3-ке тең кесінді салсақ C_2 нүктесін аламыз. C нүктесінің профиль проекциясы оның фронталь проекциясымен беттесіп түседі: $C_1=C_2$.

Эпюрде фронталь және профиль проекциялары беттесетін нүктелердің жиынын анықталық. Нүктенің фронталь және профиль проекциялары беттесуі үшін, оның абсциссасы мен ординатасының абсолют шамалары тең, ал таңбалары карама-қарсы болулары керек. Мұндай нүктелер π_1 және π_3 жазықтықтарынан бірдей қашықтықтарда орналасатындықтан, олар π_1 мен π_3 жазықтықтары құрайтын екі жақты бұрыш-



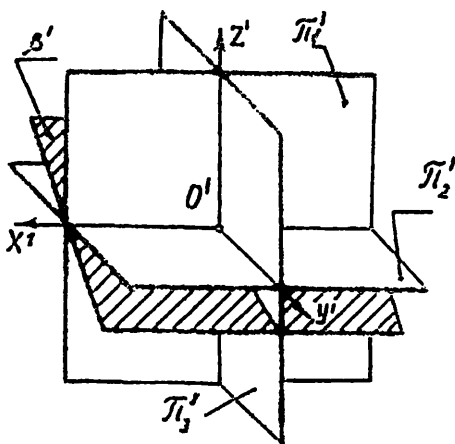
54-сурет

тың биссектор жазықтығында жағады. Сонымен эпюрге фронталь және профиль проекциялары беттесетін нүктелердің жиыны z өсі арқылы өтетін, π_1 мен π_3 жазықтықтарымен 45° -қа тең бұрыштар жасайтын α жазықтығын анықтайды (54-сурет). Бұл α жазықтығы екінші, үшінші, бесінші және сегізінші октанттарда орналасатындықтан, тек осы аталған октанттардағы нүктелердің фронталь және профиль проекциялары беттесуі мүмкін.

Эпюрге фронталь және горизонталь проекциялары беттесетін нүктелердің жиынын карасты-

райық. Нүктенің фронталь және горизонталь проекциялары беттесуі үшін, оның ординатасы мен аппликатының абсолют шамалары тең, ал таңбалары қарама-қарсы болулары керек. Мұндай нүктелер π_1 және π_2 жазықтықтарынан бірдей қашықтықтарда орналасатындықтан, олар π_1 мен π_2 жазықтықтары құрайтын екі жақты бұрыштың биссектор жазықтығында жатады. Сонымен эпюрге горизонталь және фронталь проекциялары беттесетін нүктелердің жиыны x өсі арқылы өтетін, π_1 мен π_2 жазықтықтарымен 45° -қа тең бұрыштар жасайтын β жазықтығын анықтайды (55-сурет). Бұл β жазықтығы екінші, төртінші, алтыншы және сегізінші октанттарда орналасатындықтан, тек осы аталған октанттардағы нүктелердің фронталь және горизонталь проекциялары беттесуі мүмкін.

Эпюрге үш проекциясы бір нүктеде беттесетін нүктелердің жиынын анықталық. Нүктенің фронталь және профиль проекциялары беттесуі үшін ол биссектор α жа-



55-сурет

зықтығында, ал фронталь және горизонталь проекциялары беттесуі үшін ол биссектор β жазықтығында жатуы керек. Олай болса нүктенің үш проекциясы беттесуі үшін ол осы биссектор жазықтықтар α мен β -ның қиылысу сызығында жатуы керек. α мен β жазықтықтарының қиылысу сызығын k әрпімен белгілейік: $\alpha \cap \beta = k$. Осы k түзуі бас нүкте O арқылы өтеді және екінші, сегізінші октанттарда орналасады. Сондықтан тек екінші және сегізінші октанттардағы нүктелердің үш проекциясы эпюреде бір нүктеге кескінделуі мүмкін.

15. НҮКТЕНІҢ ЭПЮРІНЕ ҚАРАП КЕҢІСТІКТЕГІ ОРНЫН АНЫҚТАУ

Нүктенің эпюредегі екі проекциясына (мысалы фронталь және горизонталь) қарап, оның қай октантта орналасқанын оңай анықтауға болады. Егер нүктенің фронталь проекциясы абсцисса өсінен жоғары, ал горизонталь проекциясы төмен орналасса, онда ол нүкте бірінші немесе бесінші октантта болуы мүмкін. Егер аталған проекциялары аппликата өсінің сол жағында болса, онда ол нүктенің бірінші октантта орналасқаны, ал егер аталған проекциялары аппликата өсінің оң жағында болса, онда ол нүктенің бесінші октантта орналасқаны. Егер нүктенің фронталь және горизонталь проекцияларының екеуі де x өсінен жоғары орналасса, онда ол нүкте екінші, немесе алтыншы октантта болуы мүмкін. Егер аталған проекциялары z өсінің оң жағында болса, нүкте алтыншы октантта, ал егер аталған проекциялары z өсінің сол жағында болса, онда нүкте екінші октантта орналасады.

Фронталь проекциясы x өсінен төмен, горизонталь проекциясы x өсінен жоғары орналасқан нүкте үшінші немесе жетінші октантта болады. Фронталь және горизонталь проекцияларының екеуі де абсцисса өсінен төмен орналасатын нүкте төртінші, немесе сегізінші октантта болады.

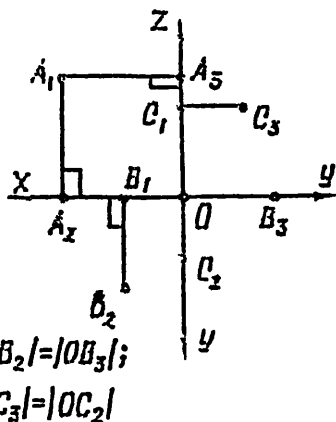
Аппликата осі (z) эпюрді екіге бөледі. I, II, III және IV октанттардағы нүктелердің фронталь және горизонталь проекциялары z өсінің сол жағында жатады. V, VI, VII және VIII октанттардағы нүктелердің фронталь және горизонталь проекциялары z өсінің оң жағында жатады.

Нүкте проекциялар жазықтықтары π_1 , π_2 және π_3 -тердің біреуінде жатуы мүмкін. Егер нүкте проекциялар жазықтығы π_1 -де жатса, онда оның ординатасы нөлге тең болады ($y=0$). Бұл нүктенің горизонталь проекциясы x өсінде жататындығын көрсетеді (56-суреттегі A нүктесі). Горизонталь проекциялар жазықтығында π_2 -де жатқан нүктенің аппликатасы нөлге тең ($z=0$), сондықтан оның фронталь проекциясы x өсінде жатады (56-суреттегі B нүктесі). Осылар сияқты профиль проекциялар жазықтығында жатқан нүктенің абсциссасы нөлге тең ($x=0$) болатын-

дықтан, оның фронталь проекциясы z осінде, ал горизонталь проекциясы y осінде жатады (56-суреттегі C нүктесі).

$$A \in \pi_1 \Leftrightarrow A_2 \in x, A_3 \in z; B \in \pi_2 \Leftrightarrow B_1 \in x, B_3 \in y; C \in \pi_3 \Leftrightarrow C_1 \in z, C_2 \in y.$$

Техникада заттардың сызбала-рын салу үшін еуропалық әдіспен америкалық әдістің біреуі қолданылады. Еуропалық әдісте зат бірінші октантта, ал америкалық әдісте жетінші октантта орналасқан деп қарастырылады. Еуропалық әдісті қысқартып E әдісі, ал америкалық әдісті A әдісі деп атайды. Еуропа елдерінде олардың ішінде біздің елімізде E әдісі қолданылады. Сондықтан, кейін тек бірінші октантты ғана қарастырамыз.

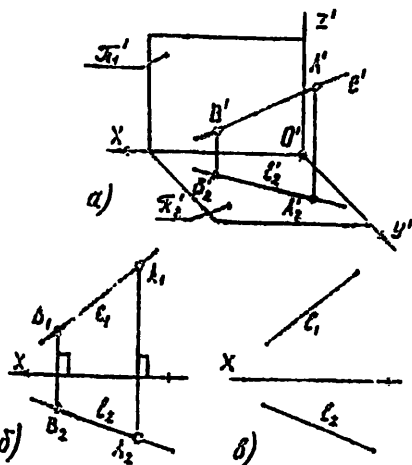


56-сурет

16. ТҮЗУДІҢ ЭПЮРИ МЕН ІЗДЕРІ

Жалпы жағдайда түзу сызықтың проекциясы да түзу сызық болатынын жоғарыда дәлелдегенбіз (§ 2). Түзуді екі нүкте анықтайтынын білеміз. Сондықтан сызбада түзуді беру үшін екі нүктесінің проекцияла-

рын көрсету қажетті және жеткілікті. Мысалы, түзуі өзінің екі нүктесі A мен B арқылы анықталатын болсын Аксонометрияда A және B нүктелерінің аксонометриялық проекцияларын A' пен B' -ты және екінші проекцияларын A_2 пен B_2 -ты көрсету керек (57-сурет). Эпюрде A және B нүктелерінің фронталь проекциялары A_1 мен B_1 -ді және горизонталь проекциялары A_2 мен B_2 -ні көрсету керек. Көрнектілікті арттыру үшін түзуді анықтайтын нүктелердің аттас проекцияларын түзу сызықтармен қосады. Эпюрде түзуді көбіне оны анықтайтын ке-



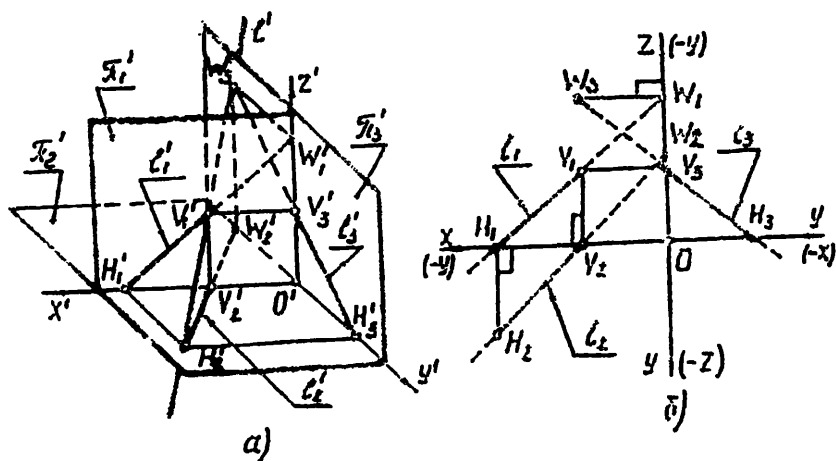
57-сурет

сіндінің проекцияларымен береді, ал ол кесіндіні анықтайтын нүктелерді көрсетпейді. Түзу нүктелерінің ішінде ерекше орналасқандары бар. Олардың қатарына түзудің проекциялар жазықтықтарымен қиылысу нүктелері жатады. *Түзудің проекциялар жазықтығымен қиылысу нүктесін оның ізі* деп атайды.

Проекциялар жазықтықтары π_1 , π_2 және π_3 үшеу болғандықтан түзудің үш ізі болады. Түзудің фронталь проекциялар жазықтығымен қиылысу нүктесін оның *фронталь ізі*, горизонталь проекциялар жазықтығымен қиылысу нүктесін — *горизонталь ізі* және профиль проекциялар жазықтығымен қиылысу нүктесін — *профиль ізі* деп атайтын боламыз. Кеңістіктегі l түзуін қарастыралық:

$$l \cap \pi_1 = V; l \cap \pi_2 = H; l \cap \pi_3 = W;$$

V — l түзуінің фронталь ізі, H — l түзуінің горизонталь ізі; W — l түзуінің профиль ізі (58-сурет). Түзудің фронталь ізі π_1 жазықтығында жатады,



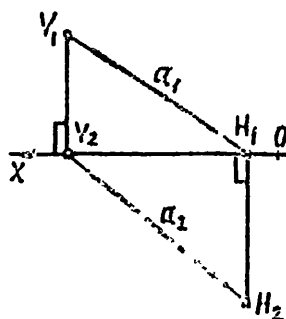
58-сурет

сондықтан V нүктесінің горизонталь проекциясы (V_2 нүктесі) абсцисса өсінде, ал профиль проекциясы (V_3 нүктесі) аппликата өсінде жатулары тиіс. Түзудің горизонталь ізі π_2 жазықтығында жатады, сондықтан H нүктесінің фронталь проекциясы (H_1 нүктесі) абсцисса өсінде ал профиль проекциясы (H_3 нүктесі) ордината өсінде жатулары тиіс. Түзудің профиль ізі π_3 жазықтығында жатады, сондықтан W нүктесінің горизонталь проекциясы (W_2 нүктесі) ордината өсінде, ал фронталь проекциясы (W_1 нүктесі) аппликата өсінде жатулары тиіс:

$$V \in \pi_1 \Rightarrow V_2 \in x, V_3 \in z; H \in \pi_2 \Rightarrow H_1 \in x, H_3 \in y; W \in \pi_3 \Rightarrow W_1 \in z, W_2 \in y. \quad (18)$$

Осы (18) өрнекті пайдаланып, эпюрде түзудің іздерін тұрғызу ережелерін тағайындауға болады. Фронталь іздің проекцияларын тұрғызуды оның горизонталь проекциясын табудан бастаймыз. Түзудің горизонталь проекциясын абсцисса өсімен қиылысқанша созамыз. Сонда біз түзудің фронталь ізінің горизонталь проекциясын аламыз: $V_2 = l_2 \cap x$. Табылған V_2 нүктесі арқылы x өсіне перпендикуляр түзу жүргізіп, оның l түзуінің фронталь проекциясымен қиылысу нүктесін саламыз. $(V_2 V_1) \perp x$; $(V_2 V_1) \cap l_2 = V_1$. Сонда фронталь іздің фронталь проекциясын аламыз. Енді V_1 нүктесінен z өсіне түсірілген перпендикулярдың табаны (V_3 нүктесі) іздің профиль проекциясын береді. Түзудің горизонталь ізіп салуды оның фронталь проекциясын табудан бастаймыз: $H_1 = l_1 \cap x$; $(H_1 H_2) \perp x$; $(H_1 H_2) \cap l_2 = H_2$. Бас нүктеден оңға қарай $H_1 H_2$ кесіндісіне тең OH_3 кесіндісін салып, горизонталь іздің профиль проекциясын саламыз. Профиль іздің фронталь проекциясы түзудің фронталь проекциясымен аппликата өсінің қиылысу нүктесі, ал горизонталь проекциясы түзудің горизонталь проекциясымен ордината өсінің қиылысу нүктесі болады: $W_1 = l_1 \cap z$; $W_2 = l_2 \cap y$. Түзудің профиль проекциясы мен W_1 нүктесі арқылы x өсіне параллель етіп жүргізілген түзудің қиылысу нүктесі профиль іздің профиль проекциясын береді: $W_3 = (W_1 W_2) \cap l_3$; $(W_1 W_3) \parallel x$.

Эпюрде горизонталь a_2 және фронталь a_1 проекцияларымен берілген a түзуінің фронталь және горизонталь іздерін тұрғызуды қарастыралық (59-сурет). a_1 түзуін x өсімен қиылысқанша созып горизонталь іздің фронталь проекциясы H_1 нүктесін аламыз, ал a_2 түзуін x өсімен қиылысқанша созып, фронталь іздің горизонталь проекциясы V_2 нүктесін аламыз. Абсцисса өсінің H_1 және V_2 нүктелерінен оған перпендикуляр тұрғызып, олардың түзудің горизонталь және фронталь проекцияларымен қиылысу нүктелерін табамыз. Тұрғызылған нүктелер H_2 мен V_1 берілген a түзуінің горизонталь ізінің горизонталь проекциясы мен фронталь ізінің фронталь проекциясын береді.



59-сурет

Іздер түзуді әр түрлі октанттарда орналасқан кесінділерге бөледі. l түзу H нүктесінде төртінші октанттан бірінші октантқа өтеді (58-сурет). V нүктесінде бірінші октанттан екінші октантқа, ал W нүктесінде екінші октанттан алтыншы октантқа өтеді. Басқаша айтқанда, l түзуінің HV кесіндісі бірінші октантта, VW кесіндісі екінші октантта, H нүктесі-

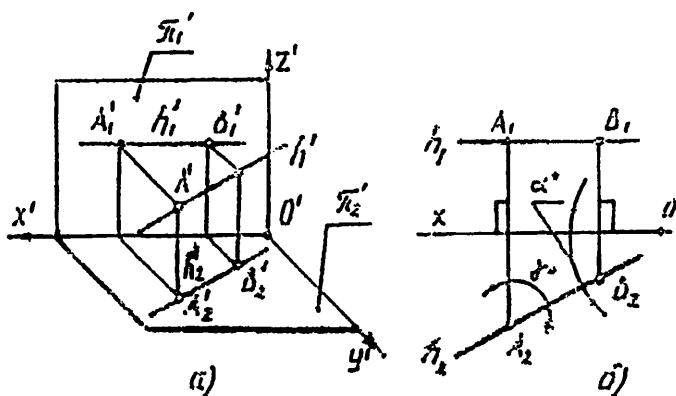
неп сол жағындағы бөлігі төртінші октантта, ал W нүктесінен оң жағындағы бөлігі алтыншы октантта жатады.

Егер түзу проекциялар жазықтықтарының үшеуімен де қиылысатын болса, онда оны *жалпы жағдайда орналасқан түзу* дейді. Жалпы жағдай түзуі π_1 , π_2 және π_3 жазықтықтарына көлбеу орналасады, яғни ол проекциялар жазықтықтарының біреуіне де параллель болмайды. Жоғарыда қарастырған түзулер (58-суреттегі l түзуі және 59-суреттегі a түзуі) жалпы жағдайда орналасқан.

17. ДЕРБЕС ЖАҒДАЙ ТҮЗУЛЕРІ

Дербес жағдайда орналасқан түзулерді екі топқа бөледі: деңгейлік түзулер және проекциялаушы түзулер.

Деңгейлік түзу деп проекциялар жазықтықтарының біреуіне параллель түзуді айтады. Деңгейлік түзулер үшеу: горизонталь, фронталь және профаль. *Горизонталь* деп горизонталь проекциялар жазықтығына параллель орналасқан түзуді айтады және оны h әршімен белгілейді (60-сурет). Горизонталь орналасқан түзудің барлық нүктелері π_2 жазықтығынан бірдей қашықтықта орналасқан, яғни олардың апликаталары



60-сурет

бірдей ($z = \text{const}$). Аксонометрияда горизонтальдың аксонометриялық проекциясы мен оның π_2 жазықтығындағы екінші проекциясы өзара параллель, ал π_1 жазықтығындағы екінші проекциясы абсцисса өсіне параллель: $h \parallel \pi_2 \Rightarrow h' \parallel h_2, h_1 \parallel x'$. Эпюрде горизонтальдың фронталь проекциясы абсцисса өсіне параллель, ал горизонталь проекциясы x өсімен α° -ге тең ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) бұрыш жасайды: $h_1 \parallel x; h_2, \alpha = \alpha^\circ$. Горизонталь түзу эпюрінің тамаша қасиеттері бар:

$$1) [AB] \subset h \Rightarrow |AB| = |A_2 B_2|;$$

$$2) h, \pi_1 = h_2, x = \alpha^\circ;$$

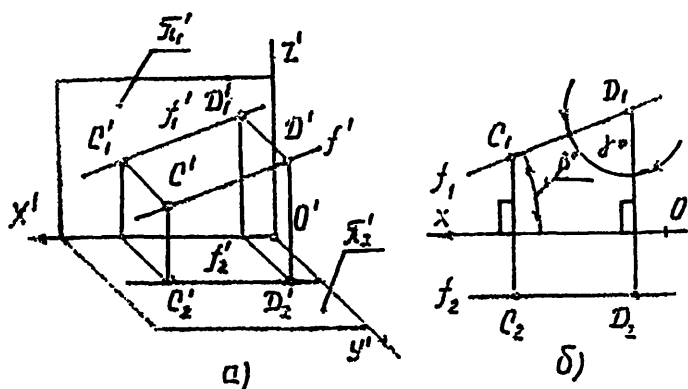
$$3) h, \pi_3 = h_2, (\angle_2 A_1) = \gamma^\circ.$$

1. Горизонталь түзу кесіндісінің ұзындығын горизонталь проекциядан өлшеп алуға болады.

2. Горизонтальдың фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын эпюрден горизонтальдың горизонталь проекциясы мен абсцисса өсінің арасындағы бұрышты өлшеп анықтауға болады.

3. Горизонтальдың π_3 жазықтығына көлбеулік бұрышын эпюрден горизонтальдың горизонталь проекциясы мен вертикаль байланыс сызығының арасындағы бұрышты өлшеп алуға болады.

Фронталь деп фронталь проекциялар жазықтығына параллель орналасқан түзуді айтады және оны f әрпімен белгілейді (61-сурет). Фронтальдың барлық нүктелері фронталь проекциялар жазықтығынан

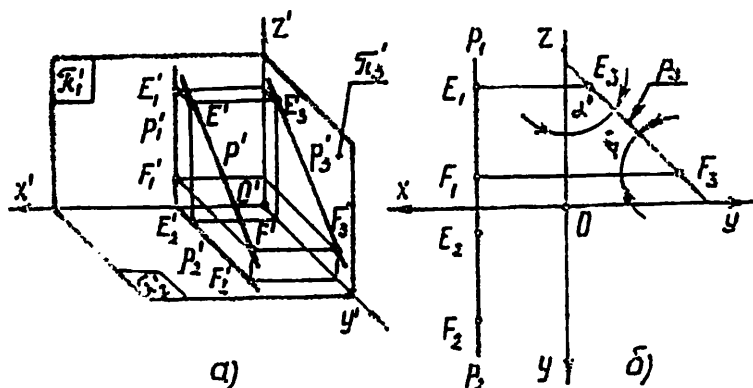


61-сурет

бірдей қашықтықта орналасқан, яғни фронталь түзу нүктелері үшін $y = \text{const}$. Аксонометрияда аксонометриялық проекция мен π_1 жазықтығындағы екінші проекция өзара параллель, ал π_2 жазықтығындағы екінші проекция абсцисса өсіне параллель: $f \parallel \pi_1 \Rightarrow f' \parallel x', f_2 \parallel x_2$. Эпюрде фронтальдың горизонталь проекциясы абсцисса өсіне параллель $f_2 \parallel x_2$. Фронталь түзу эпюрінің негізгі қасиеттері:

$$1) |CD| = |C_1 D_1|; 2) f, \pi_2 = f_1, x = \beta^\circ; 3) f, \pi_3 = f_1, (\angle_1 D_2) = \gamma^\circ. \quad (19)$$

Профиль деп профиль проекциялар жазықтығына параллель түзуді айтады және оны p әрпімен белгілейді (62-сурет). Профильдың қасиеттері горизонталь мен фронтальдың қасиеттеріне ұқсас. Аксонометрияда профильдың π_1 жазықтығындағы екінші проекциясы z өсіне, ал π_2 жа-

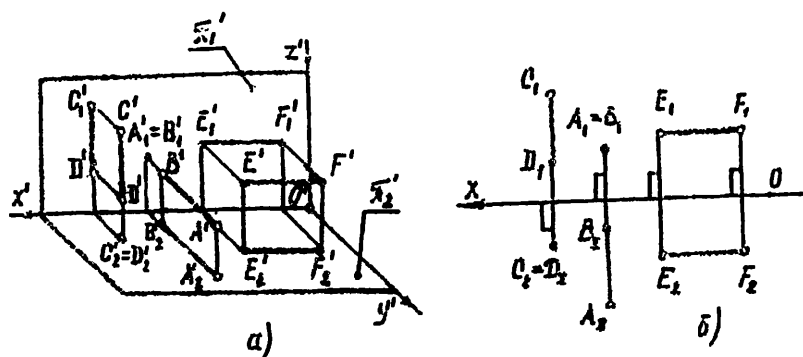


62-сурет

зықтығындағы екінші проекциясы y өсіне параллель: $p \parallel \pi_3 \Rightarrow p' \parallel z', p_2' \parallel y', p_1' \parallel p_3'$. Эпюрге профиль түзудің π_3 жазықтығындағы проекциясын көрсеткен дұрыс. Профиль түзу эпюрінің негізгі қасиеттері:

$$p_1' \parallel z, p_2' \parallel y, [EF] \subset p \Rightarrow |EF| = |E_3 F_3|; p, \pi_1 = p_3, z = \alpha^\circ; p, \pi_2 = p_3, (F_1 F_3) = \beta^\circ. \quad (20)$$

Проекциялар жазықтықтарының біреуіне перпендикуляр (немесе екеуіне параллель) түзуді *проекциялаушы түзу* деп атайды. Проекциялар жазықтықтары π_1, π_2 және π_3 үшеу болғандықтан проекциялаушы түзулер де үшеу: фронталь проекциялаушы түзу, горизонталь проекциялаушы түзу және профиль проекциялаушы түзу. *Фронталь проекциялаушы түзу* π_1 жазықтығына перпендикуляр болады. (AB) фронталь проекциялаушы түзу (63-сурет): $(AB) \perp \pi_1$. Бұндай түзу фронталь проекциялар жазықтығына бір нүктеге проекцияланады: $A_1 = B_1$. Горизонталь



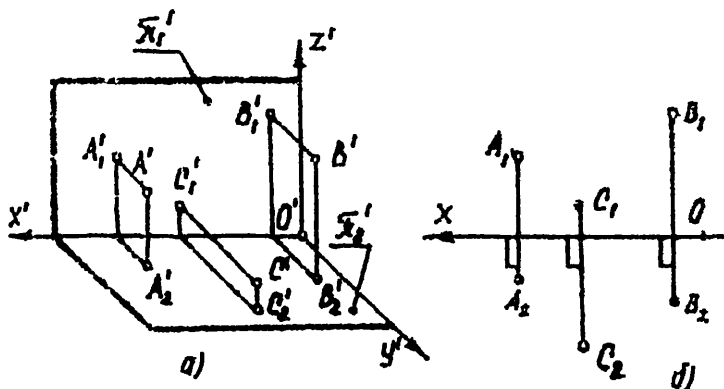
63-сурет

проекциялар жазықтығына перпендикуляр түзу *горизонталь проекциялаушы түзу* деп аталады. $CD \perp \pi_2$ сондықтан бұл түзу π_2 жазықтығына бір нүктеге проекцияланады: $C_2 = D_2$. Профиль проекциялар жазықтығына перпендикуляр (EF түзуі) *профиль проекциялаушы түзу* деп аталады. Проекциялаушы түзулердің негізгі қасиеттері: $(AB) \perp \pi_1 \Rightarrow A_1 = B_1$, $(A_2 B_2) \perp x$, $|AB| = |A_2 B_2|$; $(CD) \perp \pi_2 \Rightarrow C_2 = D_2$, $(C_1 D_1) \perp x$, $|CD| = |C_1 D_1|$; $(EF) \perp \pi_3 \Rightarrow (E_1 F_1) \parallel (E_2 F_2) \parallel x$, $E_3 = F_3$, $|EF| = |E_1 F_1| = |E_2 F_2|$. Дербес жағдай түзулерінің эпюрге қасиеттері сызба геометрияның есептерін шешуде кең түрде пайдаланылады.

18. ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ЭПИЮРІ МЕН ІЗДЕРІ

Проекциялар жазықтығына перпендикуляр орналаспаған жазықтықтың проекциясын қарастыралық. Бұндай жазықтықтың проекциясы проекциялар жазықтығын түгелдей жауып жатады. Сондықтан эпюрге жазықтық нүктелерінің бәрін түгелдей көрсетудің керегі де жоқ. Сызбада жазықтық оны анықтайтын геометриялық элементтердің проекцияларымен беріледі.

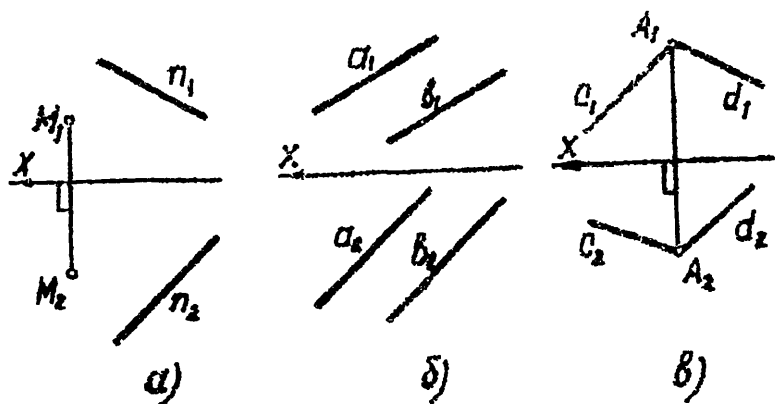
Жазықтықтың бір түзу бойында жатпайтын үш нүктесімен анықталатыны белгілі. Бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте A , B және C тек бір ғана жазықтықты анықтайды. Осы A , B және C нүктелері анықтайтын жазықтықты α әрпімен белгілеуіміз. Аксонометрияда α жазықтығы осы үш нүктенің аксонометриялық проекциялары A' , B' және C' , π_1 жазықтығындағы екінші проекциялары A'' , B'' және C'' , π_2 жазықтығындағы екінші проекциялары A_2' , B_2' және C_2' нүктелері арқылы берілген (64-сурет). π_1 немесе π_2 жазықтығының біреуіндегі екінші проекцияларды көрсету жеңілдікті екенін жоғарыда келтірген болатынбыз. Эпюр алу



64-сурет

үшін π_2 жазықтығын абсцисса өсінен айналдырып π_1 жазықтығымен беттестіреміз. Эпюрге A_1, B_1 және C_1 нүктелері жазықтықтың фронталь проекциясын, A_2, B_2 және C_2 нүктелері горизонталь проекциясын анықтайды.

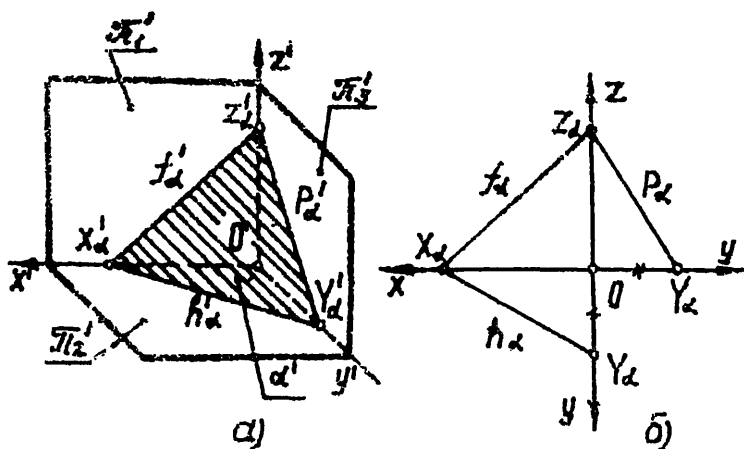
Жазықтықтың бір нүкте және осы нүкте арқылы өтпейтін түзу, параллель немесе қиылысатын екі түзу арқылы анықталатынын біз бұрыннан білеміз. Олай болса, эпюрге жазықтықты оны анықтайтын нүкте мен түзудің проекцияларымен, немесе параллель екі түзудің проекцияларымен беруге болады. Мысалы, A нүктесінде қиылысатын c және d түзулерінің проекциялары берілген болса, онда жазықтық берілген болады. 65-суретте үш жазықтық эпюрге көрсетілген: $\beta(M, n)$, $\chi(a||b)$, $\alpha(c||d)$.



65-сурет

Эпюрге жазықтықты жазық фигураның (үшбұрыш, параллелограмм, эллипс т. б.) проекцияларымен де беруге болады. Эпюрге жазықтықты кескіндеудің ерекше түрі оның іздерін көрсету. *Жазықтықтың ізі* деп оның проекциялар жазықтығымен қиылысу түзуін айтады. Проекциялар жазықтықтары үшеу π_1, π_2 және π_3 болғандықтан жазықтықтың іздері де үшеу болады. Берілген жазықтықтың фронталь проекциялар жазықтығымен қиылысу түзуін оның *фронталь ізі*, горизонталь проекциялар жазықтығымен қиылысу түзуін — *горизонталь ізі* және профиль проекциялар жазықтығымен қиылысу түзуін — *профиль ізі* деп атайды.

Егер α жазықтығын қарастырсақ (66, а-сурет), онда: $\alpha \cap \pi_1 = f_\alpha$; $\alpha \cap \pi_2 = h_\alpha$; $\alpha \cap \pi_3 = p_\alpha$. f_α — α жазықтығының фронталь ізі; h_α — α жазықтығының горизонталь ізі; p_α — α жазықтығының профиль ізі. Жазық-



66-сурет

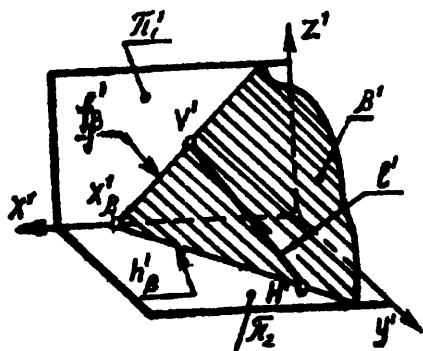
тықтың фронталь ізі мен горизонталь ізі абсцисса өсінде жататын нүктеде қиылысады. Жазықтықтың фронталь және профиль іздері аппликата өсінде, ал горизонталь және профиль іздері ордината өсінде жататын нүктеде қиылысады. $f_a \cap h_a \cap x = X_a$; $f_a \cap p_a \cap z = Z_a$; $h_a \cap p_a \cap y = Y_a$. X_a , Y_a , Z_a — нүктелері α жазықтығы іздерінің түйісу нүктелері деп аталады.

Эпюр алу үшін π_2 жазықтығын x өсінен, ал π_3 жазықтығын z өсінен айналдырып оларды π_1 жазықтығымен беттестіреміз. Эпюрге (66,6-сурет) жазықтықтың горизонталь және профиль іздерінің түйісу нүктесі Y_a екі нүктеге ажырап кескінделеді. Егер жазықтықтың екі ізі берілсе, онда оның үшінші ізін әрқашанда тұрғызуға болады. Сондықтан эпюрге жазықтықты оның екі ізімен беруге болады.

Сонымен эпюрге жазықтықты кескіндеудің алты тәсілімен таныстық. Сызбада жазықтықты: 1) бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте; 2) түзу және сол түзудің бойында жатпайтын нүкте; 3) параллель екі түзу; 4) қиылысушы екі түзу; 5) жазық фигураның проекциялары және 6) іздері арқылы беруге болады.

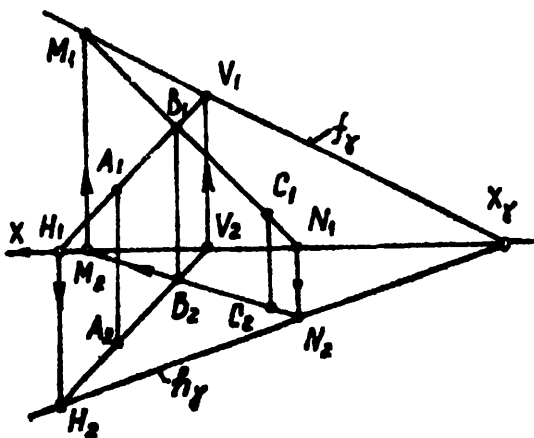
Жазықтықты кескіндеудің бір тәсілінен екінші тәсіліне көшу оңай. Шынында да, жазықтық үш A , B және C нүктелерімен анықталған болса, яғни бірінші тәсілмен берілсе, B және C нүктелерін түзу сызықпен қосу арқылы жазықтықты анықтаудың екінші тәсіліне, одан кейін A нүктесі арқылы BC түзуіне параллель түзу жүргізу арқылы — үшінші тәсіліне, ал A нүктесін B нүктесімен және B нүктесін C нүктесімен түзу сызықтар арқылы қосудың нәтижесінде — төртінші тәсіліне көшуге болады.

Жазықтықтың іздерін тұрғызуды қарастыралық. Аксонометрияда β жазықтығы берілсін (67-сурет). f_β осы жазықтықтың фронталь ізі, ал h_β горизонталь ізі. Осы β жазықтығында жатқан l түзуінің фронталь ізі V жазықтықтың фронталь ізі f_β -нің бойында, ал горизонталь ізі H жазықтықтың горизонталь ізі h_β -ның бойында жатады. Шынында да, егер берілген β жазықтығында жататын түзу l -дің іздері осы β



67-сурет

жазықтығының аттас іздерінде жатпайды деп жорысақ, онда V және H нүктелерінің l түзуінің бойында жатпағандығы, бірақ бұл мүмкін емес. Сондықтан мынадай қорытынды жасауға болады: *жазықтықта жатқан түзудің іздері жазықтықтың аттас іздерінде жатады.*



68-сурет

Осы қорытындыға сүйене отырып, жазықтықтың іздерін салу үшін жазықтықта жатқан екі түзудің іздерін тауып олар арқылы жазықтықтың аттас іздерін жүргізу керек. Мысалы A, B және C нүктелері анықтайтын γ жазықтығы берілсін (68-сурет): $\gamma(A, B, C)$. Алдымен AB және BC түзулерінің іздерін саламыз. Ол үшін (AB) -ның фронталь проекциясы (A_1B_1) -дің x

өсімен қиылысу нүктесін табамыз: $(A_1B_1) \cap x = H_1$. Абсцисса өсінің табылған H_1 нүктесінен перпендикуляр тұрғызамыз. Бұл перпендикуляр (A_2B_2) -мен H_2 нүктесінде қиылысады. H_2 нүктесі (AB) -ның горизонталь ізі. (AB) -ның горизонталь проекциясы (A_2B_2) -ні x өсімен V_2 нүктесінде қиылысқанша созамыз. Абсцисса өсінің V_2 нүктесінен перпендикуляр тұрғызсақ, ол перпендикуляр (A_1B_1) мен V_1 нүктесінде қиылысады. V_1 нүктесі AB түзуінің фронталь ізі. Енді BC түзуінің горизонталь ізі N_2 -ні

және фронталь ізі M_1 -ді саламыз. Берілген γ жазықтығының горизонталь ізін, яғни h_1 түзуін H_2 және N_2 нүктелері арқылы, ал фронталь ізін, яғни f_1 түзуін, V_1 және M_1 нүктелері арқылы жүргіземіз. Табылған іздердің түйісу нүктесі X_1 -ны сызбаны салудың дәлдігін арттыру үшін пайдалануға болады. Егер f_1 және h_1 түзулерінің қиылысу нүктесі x өсінде жатпаса сызбаны салудың дәлдігі нашар болғандығы. Мұндай жағдайда тұрғызудың дәлдігін тексеру керек.

Егер жазықтық x , y және z өстерінің үшеуімен де қиылысағын болса, яғни проекциялар жазықтықтарының біреуіне де перпендикуляр болмаса, онда оны жалпы жағдайда орналасқан дейді.

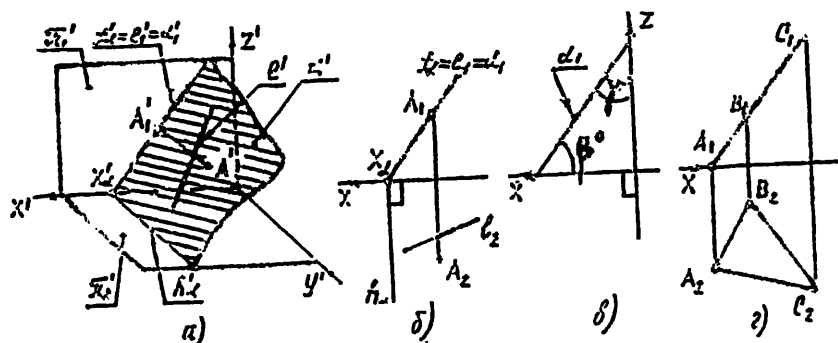
Осы параграфта қарастырылған жазықтықтар жалпы жағдайда орналасқан. Дербес жағдайда орналасқан жазықтықтар келесі параграфта қарастырылады.

19. ДЕРБЕС ЖАҒДАЙ ЖАЗЫҚТЫҚТАРЫ

Дербес жағдайда орналасқан жазықтықтарды проекциялаушы жазықтықтар және деңгейлік жазықтықтар деп екі топқа бөледі.

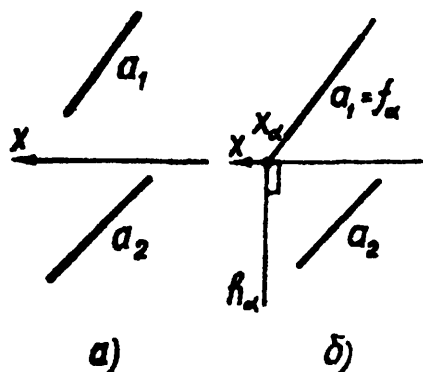
Проекциялаушы жазықтық деп проекциялар жазықтықтарының біреуіне перпендикуляр жазықтықты айтады. Проекциялар жазықтықтары π_1 , π_2 және π_3 үшеу болғандықтан проекциялаушы жазықтықтар да үшеу: фронталь проекциялаушы жазықтық, горизонталь проекциялаушы жазықтық және профиль проекциялаушы жазықтық.

Фронталь проекциялаушы жазықтық фронталь проекциялар жазықтығы π_1 -ге перпендикуляр орналасады. Сондықтан фронталь проекциялаушы α жазықтығы фронталь проекциялар жазықтығы π_1 -ге түзу сызық түрінде проекцияланады. Егер осы α жазықтығының фронталь проекциясын α' деп белгілесек, онда α' жазықтықтың фронталь ізі $f_{\alpha'}$ мен беттесіп бір түзуге кескінделеді (69, а және б-сурет). Осы α жазық-



69-сурет

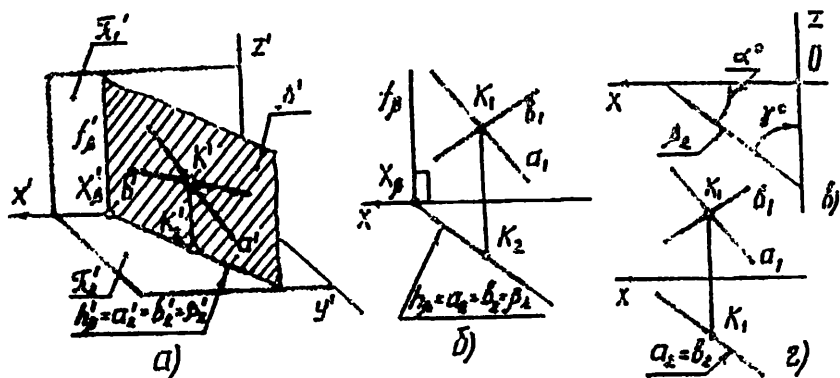
тығының горизонталь ізі h_a түйісу нүктесі X_a арқылы өтеді және ол аксонометрияда y' өсіне параллель, ал эпюрге x өсіне перпендикуляр орналасады. Фронталь проекциялаушы жазықтықта жатқан фигураның π , жазықтығындағы проекциясы осы жазықтықтың фронталь проекциясында жатады. Мысалы, егер $l \subset \alpha$ және $A \in \alpha$ болса, онда $l_f = a_f$, және $A_f \in a_f$ болады. Әдетте, фронталь проекциялаушы жазықтықты эпюрге оның түзу сызыққа проекцияланатын бір проекциясымен береді (69, в сурет) және жазықтықтың горизонталь ізін көбіне жүргізбейді. Эпюрден жазықтықтың горизонталь және профиль проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын анықтауға болады. Фронталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр α жазықтығының фронталь проекциясы a_f мен x өсінің арасындағы сүйір бұрыш β° оның горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын, ал a_f мен z өсінің арасындағы сүйір бұрыш γ° профиль проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтайды: $\alpha \perp \pi_1 \Rightarrow \widehat{a_f \pi_2} = x, \widehat{a_f \pi_1} = \beta^\circ$; $\widehat{a_f \pi_3} = z, \widehat{a_f \pi_1} = \gamma^\circ$. Эпюрге фронталь проекциялаушы жазықтықты кез келген жазық фигураның, мысалы ABC үшбұрышының проекцияларымен беруге болады (69, г-сурет). Бұл жағдайда жазықтықты анықтайтын A, B және C нүктелерінің фронталь проекциялары A_f, B_f және C_f бір түзудің бойында орналасулары қажет. Егер кеңістікте түзу берілсе, онда осы түзу арқылы тек бір ғана фронталь проекциялаушы жазықтық жүргізуге болады. Мысалы, 70-суретте жалпы жағдайда орналасқан a түзуінің эпюрі берілген. Енді осы a түзуі арқылы фронталь проекциялаушы α жазықтығын жүргізілдік. Фронталь проекциялаушы α жазықтығының фронталь ізі f_α берілген a түзуінің фронталь проекциясы a_f мен беттеседі. Сондықтан a_f мен x өсінің қиылысу нүктесі α жазықтығының фронталь және горизонталь іздерінің түйісу нүктесі X_α -ны береді. Осы X_α нүктесі арқылы абсцисса өсіне перпендикуляр етіп жүргізілген түзу α жазықтығының горизонталь ізі h_α -ны береді.



70-сурет

Горизонталь проекциялаушы жазықтық горизонталь проекциялар жазықтығына (π_2 -ге) перпендикуляр орналасады. Мысалы $\beta \perp \pi_2$ болса, онда β жазықтығының горизонталь проекциясы түзу сызық болады, яғни ол π_2 жазықтығына түзуге проекцияланады. Горизонталь проекци-

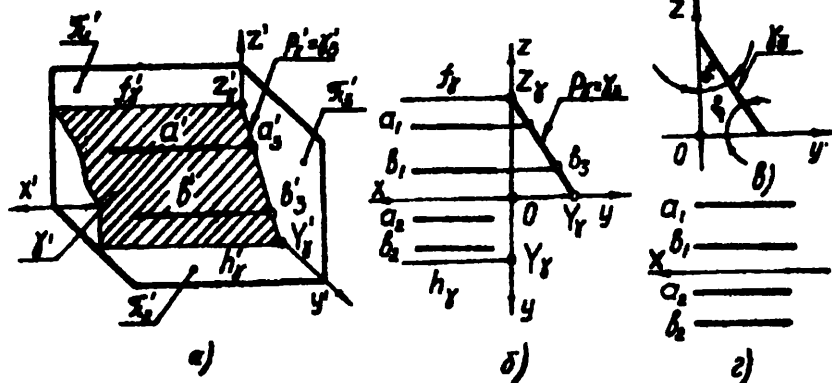
ялаушы жазықтықтың горизонталь ізі горизонталь проекциясымен беттесіп бір түзуге кескінделеді: $\beta_2 = h_p$. Ал оның фронталь ізі f_p аксонометрияда z' өсіне параллель (71,а-сурет) орналасады. Горизонталь проекциялаушы жазықтықта орналасқан жазық фигура π_2 жазықтығына түзу сызыққа проекцияланады. Егер $a < \beta$ және $b < \beta$ болса, онда $a_2 = b_2 = \beta_2$ болады. Горизонталь проекциялаушы жазықтықты эскирде түзу сызық



71-сурет

болатын горизонталь проекциясымен кескіндейтін боламыз (71,в-сурет) және оның фронталь және профиль проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын былайша анықтаймыз: $\beta \perp \pi_2 \Rightarrow \beta, \pi_1 = x, \beta_2 = \alpha^\circ$; $\beta, \pi_3 = z, \beta_2 = \gamma^\circ$. Горизонталь проекциялаушы жазықтықты да оны анықтайтын геометриялық элементтердің, мысалы K нүктесінде қиылысатын a және b түзулерінің проекцияларымен көрсетуге болады (71,г-сурет). Бұл жағдайда a және b түзуінің горизонталь проекциялары беттесіп кескінделеді.

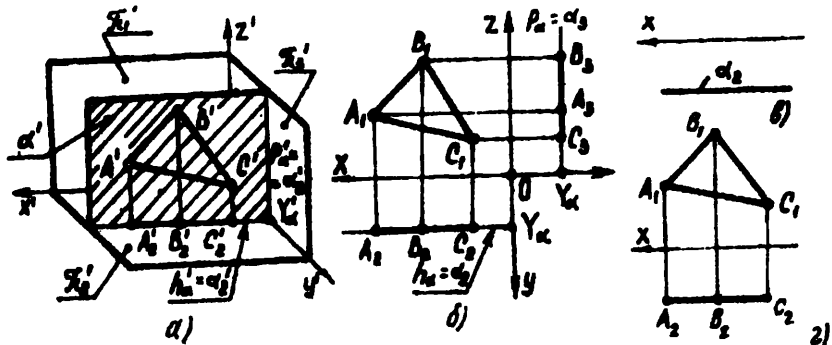
Профиль проекциялаушы жазықтық профиль проекциялар жазықтығына π_3 -ке перпендикуляр орналасады. Сондықтан мұндай u жазықтығы профиль проекциялар жазықтығына түзу сызыққа проекцияланады: $u_3 = p$. Оның фронталь және горизонталь іздері f_p мен h_p абцисса өсіне параллель орналасады. Профиль проекциялаушы u жазықтығының аксонометриясы 72,а-суретте, ал эскирі 72,б-суретте салынған. Алға қарай профиль проекциялаушы жазықтықты сызбада оның профиль проекциясымен (72,в-сурет), немесе оны анықтайтын геометриялық элементтердің проекцияларымен (72,г-сурет) көрсететін боламыз. Сызбадан профиль проекциялаушы жазықтықтың фронталь және горизонталь проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын анықтауға болады:



72-сурет

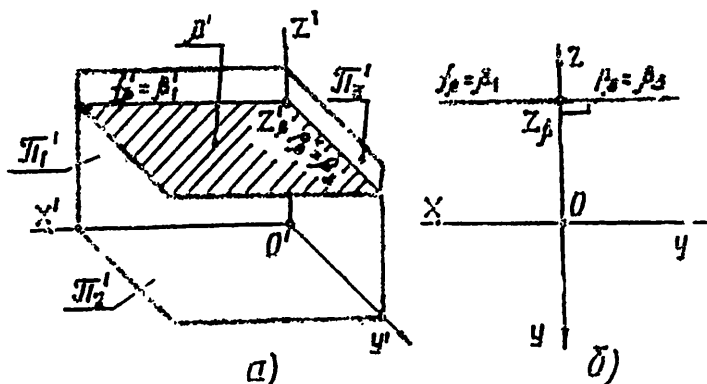
$$\gamma \perp \pi_3 \Rightarrow \gamma, \pi_1 = z, \gamma_3 = \alpha^\circ; \gamma, \pi_2 = y, \gamma_3 = \beta^\circ.$$

Деңгейлік жазықтық деп проекциялар жазықтықтарының біреуіне параллель жазықтықты айтады. Проекциялар жазықтықтары π_1 , π_2 және π_3 үшеу болғандықтан деңгейлік жазықтықтар да үшеу: фронталь, горизонталь және профиль жазықтықтар. π_1 , π_2 және π_3 жазықтықтарының біреуіне параллель жазықтық олардың қалған екеуіне перпендикуляр болады. Сондықтан деңгейлік жазықтықты проекциялаушы жазықтықтың жеке түрі ретінде қарастырған дұрыс. Осы себепті оларды *екі рет проекциялаушы жазықтықтар* деп те атайды. Деңгейлік фронталь жазықтық фронталь проекциялар жазықтығы π_1 -ге параллель болады. Сондықтан ол π_1 мен π_3 жазықтықтарына өздерінің сөйкес іздерімен беттесетін түзулерге проекцияланады: $h_\alpha = \alpha_3$ және $p_\alpha = \alpha_2$. Сызбада жазықтықтың горизонталь проекциясы x өсіне параллель орналасады (73,а және б-сурет). Фронталь жазықтықтағы фигура фронталь проек-

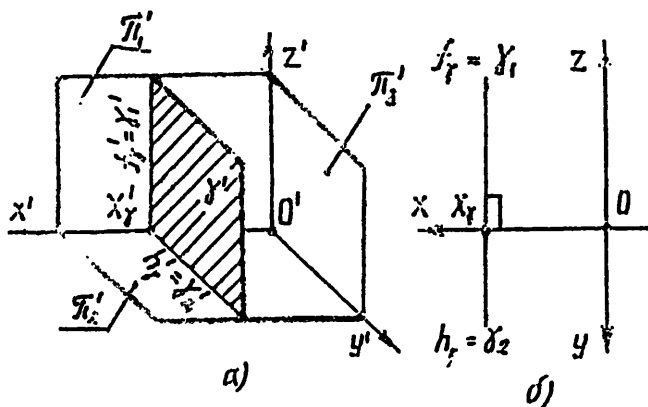


73-сурет

циялар жазықтығына өзінің натурал шамасын сақтап проекцияланады. Егер берілген фронталь α жазықтығында жағқан ABC үшбұрышын қарастырсақ, онда ол үшбұрыштың фронталь проекциясы $\Delta A_1 B_1 C_1$ оның өзіне тең болады. $\Delta ABC \subset \alpha \parallel \pi_1 \Rightarrow \Delta A_1 B_1 C_1 = \Delta ABC$. 74-суретте горизонталь жазықтық β , ал 75-суретте профиль жазықтық үкескінделген. Олардың қасиеттері фронталь жазықтық қасиеттеріне ұқсас болады. Деңгейлік горизонталь жазықтық горизонталь проекциялар жазықтығы π_2 -ге параллель болса, деңгейлік профиль жазықтық профиль проекциялар жазықтығына (π_3 -ке) параллель орналасады.



74-сурет



75-сурет

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН СҰРАҚТАР МЕН ЖАТТЫҒУЛАР

1. Фронталь, горизонталь және профиль проекциялар жазықтықтары қалай орналасады және оларды қандай өріптермен белгілейді?

2. Октанттар өзара қалай орналасқан және координаттар мәндерінің таңбалары қандай?

3. Эпюр қалай алынады? Әрбір октантта орналасқан нүктелердің эпюрлерін сызып, эпюрде проекциялардың қалай орналасатындарын түсіндіру керек.

4. Эпюрде горизонталь және фронталь проекциялары, фронталь және профиль проекциялары, үш проекциялары да беттесетін нүктелердің жиындары туралы не айтар едіңіз?

5. Түзудің ізі деп нені айтамыз? Түзудің іздерін қалай тұрғызуға болады?

6. Жалпы жағдайда орналасқан түзу қандай түзу?

7. Дербес жағдайда орналасқан түзулер қандай топтарға бөлінеді?

8. Фронталь, горизонталь және профиль деп қандай түзулерді айтады және олардың эпюрлерін салыңыз?

9. Проекциялаушы түзулерді атап, олардың эпюрін салып көрсетіңіз.

10. Жазықтықты эпюрде қандай тәсілдермен кескіндеуге болады?

11. Жазықтықтың ізі деп нені айтамыз? Жазықтықтың іздерін қалай тұрғызуға болады?

12. Жалпы жағдайда орналасқан жазықтық деп қандай жазықтықты айтады? Дербес жағдай жазықтықтары қандай топтарға бөлінеді?

13. Қандай жазықтықты горизонталь проекциялаушы жазықтық деп атайды және оның қасиеттері қандай?

14. Фронталь проекциялаушы және профиль проекциялаушы жазықтықтар туралы не айта аласыз?

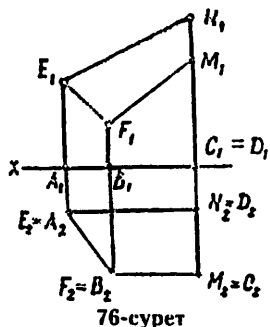
15. Фронталь, горизонталь және профиль жазықтықтарына анықтама беріңіз және олардың эпюрлерін салып көрсетіңіз.

16. Эпюрде $A(30; 15; 20)$, $B(35; 20; 10)$, $C(25; 10; 20)$ және $D(15; 20; -5)$ нүктелерінің фронталь, горизонталь және профиль проекцияларын салыңыздар. Берілген әр нүктенің қай октантта орналасқандығын анықтаңыздар.

17. Горизонталь проекциялар жазықтығында жатқан $E(20; 15; ?)$ нүктесінің, фронталь проекциялар жазықтығында жатқан $F(5; ?; 20)$ нүктесінің, екінші октантта $\pi_1 \pi_2$ екі жақты бұрыштың биссектор жазықтығында жатқан $M(10; ?; 15)$ нүктесінің және сегізінші октантта $\pi_2 \pi_3$ екі жақты бұрышының биссектор жазықтығында жатқан $N(?; 20; -30)$ нүктесінің эпюрлерін салыңыздар.

18. Берілген $M(15; 10; 25)$ нүктесіне π_2 жазықтығына қарағанда симметриялы N нүктесінің, π_3 жазықтығына қарағанда симметриялы E нүктесінің, абсцисса өсіне қарағанда симметриялы F нүктесінің эпюрлерін тұрғызыңыз.

19. 76-суретте төртбұрышты қиық призманың эпюрі берілген. 6-кестені пайдаланып, 7-кестені толтыру керек.



6-кесте

Түзудің

аттары	нөмірлері
Жалпы жағдай түзуі	1
Горизонталь	2
Фронталь	3
Профиль	4
Горизонталь проекциялаушы түзу	5
Фронталь проекциялаушы түзу	6
Профиль проекциялаушы түзу	7

20. Эпюрге $A(25; 15; 10)$ нүктесі арқылы өтетін төрт түзу: 1) z өсімен қиылысатын горизонталь, 2) x өсімен қиылысатын профиль, 3) горизонталь проекциялар жазықтығымен абсциссасы 35-ке тең нүктеде қиылысатын фронталь және 4) бас нүкте арқылы өтетін жалпы жағдай түзуін жүргізу керек.

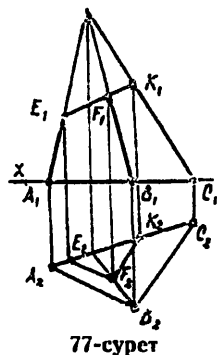
7-кесте

Түзулер(76-сурет)	AB	BC	CD	AD	EF	FM	MN	EN	AE	BF	CM	DN
Олардың нөмірлері (6-кесте)												

21. $A(10; 15; 10)$ және $B(30; 20; 30)$ нүктелері берілген. AB түзуінің іздерін және AB кесіндісін $|AB|/|BC|=2/3$ қатынасындай егіп бөлетін C нүктесінің эпюрін салу керек.

22. Берілген $E(30; 10; 20)$, $F(40; 30; 45)$ және $K(50; 20; 30)$ нүктелері анықтайтын α жазықтығының іздерін салыңыздар.

23. 77-суретте үш бұрышты қиық пирамиданың эпюрі берілген. 8-кестені пайдаланып, 9-кестені толтыру керек.



77-сурет

8-кесте

Жазықтықтың	
ағтары	нөмірлері
Жалпы жағдай жазықтығы	1
Фронталь проекциялаушы жазықтық	2
Горизонталь проекциялаушы жазықтық	3
Профиль проекциялаушы жазықтық	4
Фронталь жазықтық	5
Горизонталь жазықтық	6
Профиль жазықтық	7

9-кесте

Жазықтықтар (77-суреттегі пирамиданың жақтары)	<i>ABC</i>	<i>ABFE</i>	<i>BCKF</i>	<i>ACKE</i>	<i>EFK</i>
Олардың нөмірлері (8-кесте)					

24. Фронталь проекциялар жазықтығына параллель (AB) түзуі арқылы фронталь проекциялаушы β жазықтығын жүргізіп, оның іздерін тұрғызыңыз. $A(0; 10; 15)$ және $B(15; y; 5)$.

25. Горизонталь проекциялар жазықтығында тұрған тік бұрышты параллелепипедтің бір төбесі берілген $M(30; 10; 25)$ нүктесінде, ал бір қыры z өсінде орналасқан. Осы параллелепипедтің эпюрін салып, горизонталь, фронталь және профиль жазықтықтарда орналасқан жақтарын анықтаңыз.

26. 77-суретте берілген қиық пирамиданың қырлары үшін 6-кестені пайдаланып, 7-кестеге ұқсас кесте жасаңыз, ал 76-суреттегі призманың жақтары үшін 8-кестені пайдаланып, 9-кестеге ұқсас кесте жасаңыз.

27. $EFMN$ тік төртбұрышы фронталь проекциялар жазықтығына 30° -қа тең бұрыш жасап көлбейді. $E(40; 30; 0)$, $F(40; 30; 40)$, $M(10; y; 40)$ және $N(10; y; 0)$. Осы $EFMN$ төртбұрышының эпюрін салу керек.

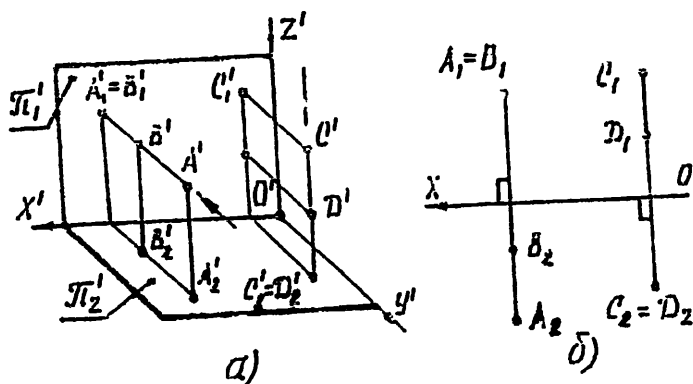
28. Тең қабырғалы ABC үшбұрышының эпюрін салыңыз. $A(0; 10; 15)$, $B(15; 0; 15)$ және $C(x; y; 15)$.

Үшінші тарау

НҮКТЕЛЕРДІҢ, ТҮЗУЛЕРДІҢ ЖӘНЕ ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ОРНАЛАСУЛАРЫ

20. БӘСЕКЕЛЕС НҮКТЕЛЕР. ЭПЮРДЕ КӨРІНЕТІНДІКТІ АНЫҚТАУ

Фронталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр түзудің бойында орналасқан нүктелерді *фронталь бәсекелес нүктелер* дейді. 78-суреттегі A және B нүктелері фронталь бәсекелес нүктелер. Олардың

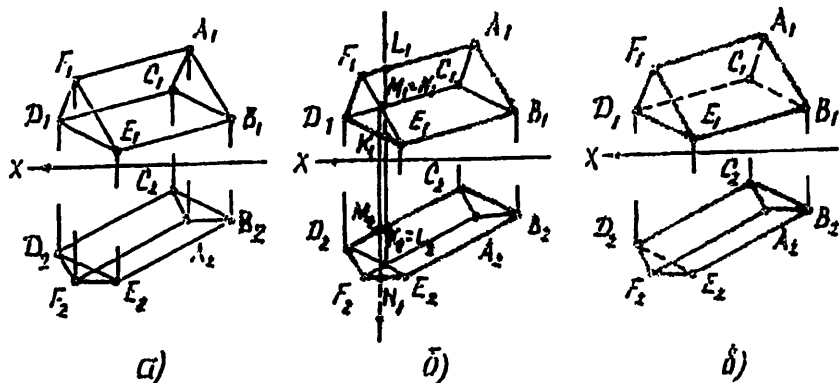


78-сурет

фронталь проекциялары бірігіп бір нүктеге кескінделген: $A_1=B_1$. Фронталь проекцияда A нүктесі көрінеді, ал B нүктесі көрінбейді. Оның себебі B нүктесі A нүктесінің тасасында қалады. Эпюрге фронталь бәсекелес нүктелердің қайсысы көрінетіндігін анықтау үшін олардың горизонталь проекцияларына қараймыз. Фронталь проекцияда фронталь бәсекелес екі нүктенің қайсысының горизонталь проекциясы абсцисса өсінен қашықтау орналасса (басқаша айтқанда қайсысының ординатасы үлкен болса), сонысы көрінеді. Горизонталь проекциялаушы түзудің нүктелерін *горизонталь бәсекелес нүктелер* дейді. C және D нүктелері горизонталь бәсекелес нүктелер (78-сурет). Олардың горизонталь проекциялары беттесіп бір нүктеге кескінделген: $C_2=D_2$. Горизонталь проекцияда горизонталь бәсекелес екі нүктенің қайсысының фронталь проекциясы абсцисса өсінен қашық орналасса (басқаша айтқанда қайсысының апликаты үлкен болса), сонысы көрінеді. 78-суретте C нүктесі көрінеді, өйткені C_1 нүктесі D_1 нүктесінен жоғарырақ орналасқан (C

нүктесінің аппликаты D нүктесінің аппликатынан үлкен). Бәсекелес нүктелерді эпюрге берілген фигураның көрінетін және көрінбейтін сызықтарын анықтау үшін пайдаланады. Сызбада көрінетін сызықтарды негізгі тұтас, ал көрінбейтін сызықтарды үзілме сызықтармен жүргізеді.

Үшбұрышты призма $ABCDEF$ -тің фронталь $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ және горизонталь $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ проекциялары беріліп, оның қырларының көрінетіндігін анықтау керек болсын (79,а-сурет). Призманың фронталь



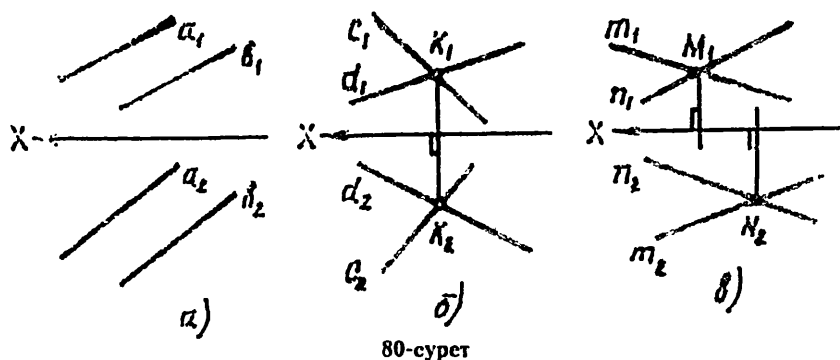
79-сурет

таль проекциясын шектейтін $A_1B_1E_1D_1F_1$ бесбұрышы және оның горизонталь проекциясын шектейтін $B_2C_2D_2F_2E_2$ бесбұрышы эпюрге көрінеді. Сондықтан бұл екі бесбұрышты бірден негізгі тұтас сызықпен жүргіземіз (79,б-сурет). Призманың қалған қырларының көрінетіндіктерін анықтау үшін бәсекелес нүктелер әдісін пайдаланамыз. Фронталь проекцияда көрінетіндікті анықтау үшін фронталь бәсекелес нүктелерді қарастыру керек. $[CD]$ және $[EF]$ қырларының фронталь проекцияларының қиылысу нүктесін M_1 және N_1 әріптерімен белгілелік, басқаша айтқанда аталған қырлардың бойынан фронталь бәсекелес M және N нүктелерін аламыз: $M \in [CD]$, $N \in [EF]$. Осы екі нүктенің горизонталь проекцияларына қарасақ N_2 нүктесінің M_2 нүктесінен төменірек, яғни абсцисса өсінен қашықтау, орналасқанын көреміз. Олай болса, фронталь проекцияда N нүктесі көрінеді. Сондықтан N нүктесі жатқан $[EF]$ қыры да көрінеді. Ал $[CD]$ қыры, сол сияқты $[AC]$ және $[BC]$ қырлары да көрінбейді. $[E_1F_1]$ қырын тұтас негізгі сызықпен, ал $[C_1D_1]$, $[A_1C_1]$ және $[B_1C_1]$ қырларын үзілме сызықпен жүргіземіз (79, в-сурет). Горизонталь проекцияда көрінетіндікті анықтау үшін горизонталь бәсекелес

нүктелерді қарастыру керек. Горизонталь проекциялары бір нүктеге кескінделетін $[AF]$ қырының бойынан L нүктесін, $[DE]$ қырының бойынан K нүктесін аламыз: $K_2 - L_2 = (A_2F_2) \cap (D_2E_2)$; $L \in (AF)$; $K \in (DE)$. Осы екі нүктенің фронталь проекцияларын тұрғызсақ, L_1 нүктесі K_1 нүктесінен абсцисса өсіне қарағанда қашықтау орналасқан. Сондықтан үстінен қарағандағы көріністе D_2E_2 кесіндісін үзілме, ал A_2F_2 , A_2C_2 және A_2B_2 кесінділерін тұтас негізгі сызықпен жүргізу керек (79,в-сурет).

21. ПАРАЛЛЕЛЬ, ҚИЙЛЫСАТЫН ЖӘНЕ АЙҚАС ТҮЗУЛЕРДІҢ ЭПИЮРЛЕРІ

Параллель түзулердің параллель проекциялары да параллель болатындығын § 3-те дәлелдеген болатынбыз. Сондықтан a түзуі b түзуіне параллель болса, онда олардың аттас проекциялары да өзара параллель болады: $a \parallel b \Rightarrow a_1 \parallel b_1, a_2 \parallel b_2, a_3 \parallel b_3$. Берілген a және b түзулері кеңістікте өзара параллель орналасулары үшін олардың горизонталь проекциялары өзара параллель және фронталь проекциялары өзара параллель болуы қажетті және жеткілікті: $a_1 \parallel b_1$ және $a_2 \parallel b_2 \Rightarrow a \parallel b$ (80,а-сурет). Бірақ



80-сурет

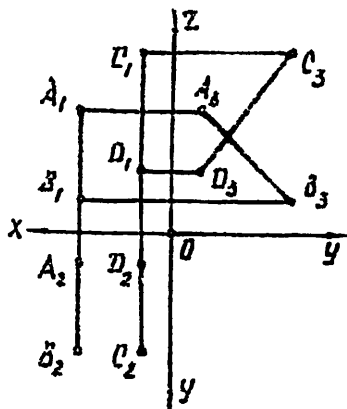
соңғы қорытынды профиль түзулер үшін орындалмайды. Берілген c және d түзулерінің фронталь проекциялары K_1 нүктесінде, ал горизонталь проекциялары K_2 нүктесінде қиылысады екен делік және осы түзулердің аттас проекцияларының қиылысу нүктелерін қосатын K_1K_2 түзуі абсцисса өсіне перпендикуляр болсын: $c_1 \cap d_1 = K_1, c_2 \cap d_2 = K_2, (K_1K_2) \perp X$ (80,б-сурет). Олай болса, кеңістікте c және d түзулері K нүктесінде қиылысады.

Өзара параллель емес және қиылыспайтын түзулерді *айқас түзулер* деп атайтынын бұрыннан білеміз. 80,в-суретте айқас m және n түзулерінің эпюрі сызылған. Шынында да m және n түзулері өзара па-

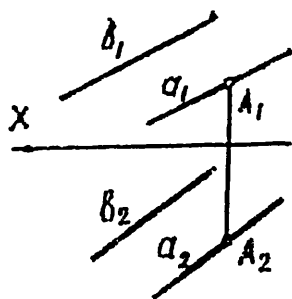
раллель емес. Егер олар параллель болса, олардың аттас проекциялары параллель болар еді. Бұл екі түзу қиылыспайды. Егер m және n түзулері қиылысса, олардың аттас проекцияларының қиылысу нүктелері M_1 мен N_2 абсцисса осіне перпендикуляр бір түзудің бойында орналасар еді.

$$(m_1 \cap n_1 = M_1, m_2 \cap n_2 = N_2, (M_1 N_2) \perp X) \Rightarrow m \parallel n.$$

Профиль проекциялар жазықтығы π_3 -ке параллель AB және CD түзулердің эпюрі берілген (81-сурет). Эпюріде олардың фронталь проекциялары өзара параллель және горизонталь проекциялары өзара параллель: $(A_1 B_1) \parallel (C_1 D_1)$ және $(A_2 B_2) \parallel (C_2 D_2)$. Бұл екі түзудің кеңістікте қалай орналасқанын анықтау үшін олардың профиль проекцияларын тұрғызу керек. Ол үшін вертикаль түзу жүргізіп, оны z осі деп қарастырайық. A, B, C және D нүктелерінің фронталь проекциялары арқылы горизонталь байланыс сызықтарын жүргізіп, олардың бойына ординаталарды өлшеп салсақ A_3, B_3, C_3 және D_3 нүктелерін аламыз. Тұрғызылған проекциялар $(A_3 B_3)$ пен $(C_3 D_3)$ өзара параллель емес. Сондықтан (AB) және (CD) айқас түзулер: $(AB) \nparallel (CD)$.



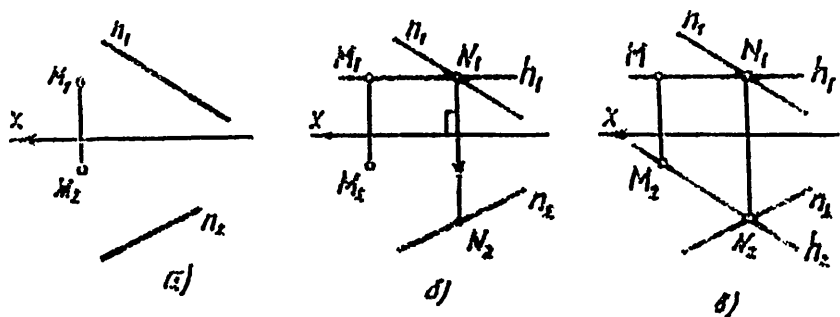
81-сурет



82-сурет

1-мысал. Берілген A нүктесі арқылы берілген b түзуіне параллель етіп a түзуін жүргізу керек (82-сурет). A нүктесі арқылы b_1 түзуіне параллель етіп a_1 түзуін, ал A_2 нүктесі арқылы b_2 түзуіне параллель етіп a_2 түзуін жүргіземіз. Горизонталь проекциясы a_2 , фронталь проекциясы a_1 түзуі болатын a түзуі іздеп отырған түзуіміз. Шынында да a түзуі A нүктесі арқылы өтеді, үйткені A нүктесінің горизонталь проекциясы A_2 осы a түзуінің горизонталь проекциясы a_2 -дің бойында, ал фронталь проекциясы A_1 жаңағы a түзуінің фронталь проекциясы a_1 -дің бойында жатады. Ал $a_1 \parallel b_1$ және $a_2 \parallel b_2$ болғандықтан $a \parallel b$ болады.

2-мысал. Берілген M нүктесі арқылы n түзуімен қиылысатын және горизонталь проекциялар жазықтығына параллель h түзуін жүргізу керек (83-сурет). Горизонталь проекциялар жазықтығына параллель түзудің фронталь проекциясы абсцисса осіне параллель орналасуы ке-



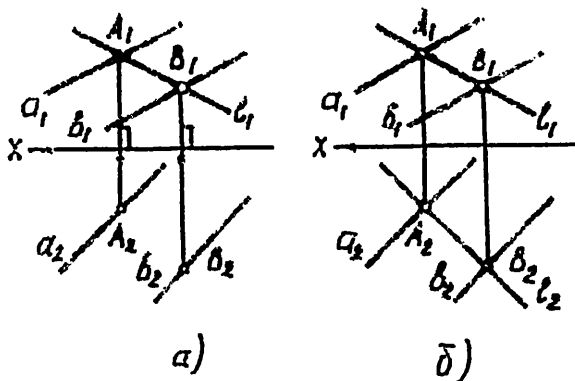
83-сурет

рек. Сондықтан h түзуінің фронталь проекциясы h_1 - ді M_1 нүктесі арқылы x осіне параллель етіп жүргіземіз: $h_1 \cap n_1 = N_1$. Осы N_1 нүктесі арқылы n_2 түзуімен N_2 нүктесінде қиылысқанша вертикаль байланыс сызығын жүргіземіз. M_2 және N_2 нүктелерін қосатын h_2 түзуін сызып, есепті шешуді аяқтаймыз. Шынында да, горизонталь проекциясы h_2 , фронталь проекциясы h_1 болатын h түзуі M нүктесі арқылы өтеді, n түзуімен N нүктесінде қиылысады және ол түзу горизонталь проекциялар жазықтығына параллель.

22. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ТҮЗУЛЕР МЕН НҮКТЕЛЕР

1. Стереометрияның 3-аксиомасы бойынша түзудің екі нүктесі жазықтықта жатса, онда ол түзудің өзі де сол жазықтықта жатады.

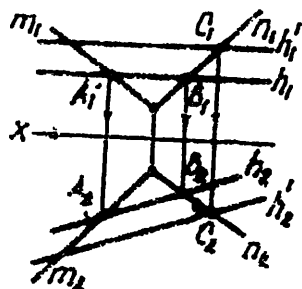
Параллель түзулер a мен b анықтайтын α жазықтығында жатқан l түзуінің проекцияларын салу керек болсын (84-сурет). Жазықтықта



84-сурет

жатқан көп түзулердің біреуін көрсетелік. l түзуінің бір проекциясын қалауымызша жүргізуге болады. Біздер l түзуінің фронталь проекциясы l_1 -ді қалауымызша a_1 және b_1 түзулерімен қиылысатындай етіп жүргіzelік. Осы l_1 түзуі a_1 түзуін A_1 нүктесінде, ал b_1 түзуін B_1 нүктесінде қияды: $l_1 \cap a_1 = A_1$; $l_1 \cap b_1 = B_1$. Вертикаль байланыс сызықтарын жүргізіп A және B нүктелерінің горизонталь проекциялары A_2 және B_2 нүктелерін a_2 және b_2 түзулері бойынан табамыз. Табылған A_2 және B_2 нүктелері анықтайтын түзу α жазықтығында жатқан l түзуінің горизонталь проекциясы l_2 . Шынында да l түзуі α жазықтығында жағыр, үйткені оның екі нүктесі A мен B осы α жазықтығында жатыр.

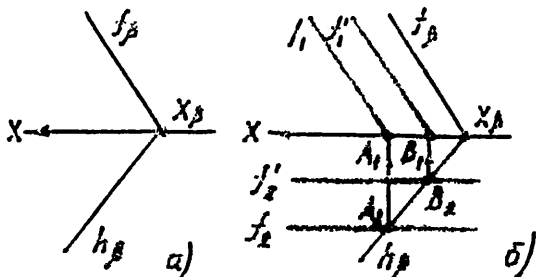
Түзу жазықтықта жатқан нүкте арқылы өтсе және осы жазықтықтағы түзуге немесе оған параллель түзуге параллель болса, онда бұл түзудің өзі де сол жазықтықта жатады. A нүктесі және b түзуі (82-сурет) β жазықтығын анықтасын: $\beta(A, b)$. Енді A нүктесі арқылы b түзуіне параллель a түзуін жүргіzelік: $A \in a \parallel b$. Жүргізілген a түзуі β жазықтығында жатады: $a \subset \beta$. Жазықтықта жатқан деңгейлік түзулерді қарастырамыз.



85-сурет

Жазықтықтың горизонталі деп осы жазықтықта жатқан және горизонталь проекциялар жазықтығына параллель түзуді айтады. Жазықтықтың горизонталін салуды оның фронталь проекциясын жүргізуден бастайды. Горизонтальдың фронталь проекциясы абсцисса өсіне параллель. Оның горизонталь проекциясын жазықтықта жату шартын пайдаланып табады. 85-суретте $\alpha(m \cap n)$ жазықтығы берілген. Горизонтальдың фронталь проекциясы h_1 -ді қалауымызша x өсіне параллель етіп жүргіземіз: $h_1 \cap m_1 = A_1$, $h_1 \cap n_1 = B_1$. Осы h_1 түзуінің m_1 және n_1 түзулерімен қиылысу нүктелері A_1 және B_1 арқылы вертикаль байланыс сызықтарын жүргізіп, олардың m_2 және n_2 түзулерімен қиылысу нүктелері A_2 мен B_2 -ні табамыз. Осы екі нүкте анықтайтын түзуді h_2 деп белгілейік: $(A_2 B_2) = h_2$. Сонда фронталь проекциясы h_1 , горизонталь проекциясы h_2 болатын h түзуі горизонталь проекциялар жазықтығына параллель және α жазықтығында жатады. Олай болса h түзуі α жазықтығының горизонталі. Жазықтықтың горизонтальдары шексіз көп. h түзуі α жазықтығының шексіз көп горизонтальдарының бірі. Бір жазықтықтың горизонтальдары өзара параллель болады. 85-суретте α -ның тағы бір горизонталі h' -ты салалық. Осы мақсат үшін n түзуі бойынан қалауымызша C нүктесін алуға болады. Осы C нүктесі арқылы h түзуіне параллель етіп h' түзуін жүргізсек болады.

Жазықтықтың фронталі деп осы жазықтықта жатқан және фронталь проекциялар жазықтығына параллель түзулі айтады. Жазықтықтың фронталін салуды оның горизонталь проекциясын жүргізуден бастайды. 86-суретте β жазықтығының горизонталь ізі h_β және фронталь ізі f_β берілген. Осы жазықтықтың фронталін салалық. Фронтальдың горизонталь проекциясын f_2 қалауымызша x осіне параллель етіп жүргіземіз. $x \parallel f_2 \cap h_\beta = A_2$. Фронтальдың горизонталь про-

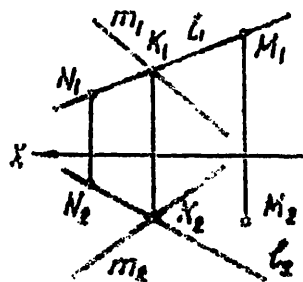


86-сурет

екциясы f_2 мен β жазықтығының горизонталь ізі h_β қиылысады. Қиылысу нүктесі A_2 арқылы байланыс сызығын жүргізіп, A нүктесінің фронталь проекциясы A_1 -ді табамыз. Осы A_1 нүктесі арқылы фронтальдың фронталь проекциясы f_1 -ді жазықтықтың ізі f_β -ға параллель етіп жүргіземіз.

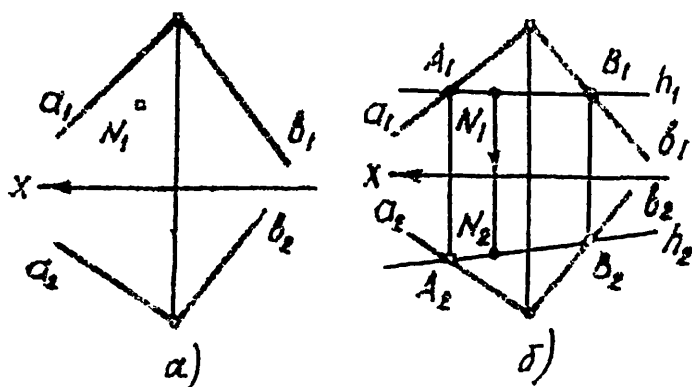
Жазықтықтың фронтальдары шексіз көп. f түзуі β жазықтығының шексіз көп фронтальдарының бірі. Бір жазықтықтың фронтальдары өзара параллель болады. 86-суретте β жазықтығының тағы бір фронталі салынған.

2. Берілген нүкте берілген жазықтықта жатуы үшін бұл нүкте жазықтықтың түзуі бойында жатуы керек. 87-суретте M нүктесі және N нүктесі мен t түзуі анықтайтын γ жазықтығы кескінделген. Осы M нүктесі $\chi(N, n)$ жазықтығында жата ма, әлде жатпай ма? Осы мақсат үшін M нүктесі арқылы γ жазықтығында жататын түзу жүргізіп көреміз. Егер мұндай түзу жүргізе алсақ, онда $M \in \gamma$. Ал мұндай түзуді жүргізуге болмайтын болса, онда M нүктесінің γ жазықтығында жатпағаны. Фронталь проекциясы N_1 және M_1 нүктелері арқылы өтетін γ жазықтығында жататын l түзуін саламыз: $l_1 = (M_1 N_1)$, $l \subset \gamma$. Одан кейін осы l түзуінің горизонталь проекциясы l_2 мен M нүктесінің горизонталь проекциясы M_2 -ге қараймыз. Бұл арада екі жағдай болуы мүмкін: 1) $M_2 \in l_2$; 2) $M_2 \notin l_2$. Бірінші жағдайда M нүктесі γ жазықтығында жатады, ал екінші жағдайда жатпайды.



87-сурет

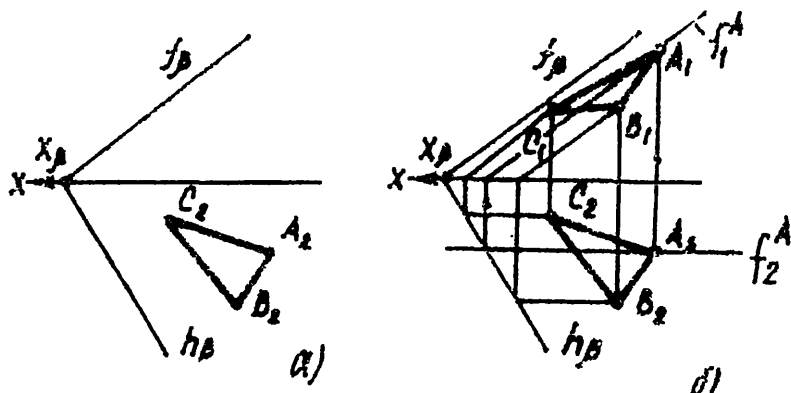
Көбіне жазықтықтың бір проекциясы белгілі нүктесінің екінші проекциясын салуға тура келеді. Мысалы $\alpha(a \cap b)$ жазықтығында жатқан N нүктесінің фронталь проекциясы N_1 беріліп оның горизонталь проекциясы N_2 -ні анықтау керек болсын (88-сурет). N нүктесі арқылы



88-сурет

өтетін α жазықтығының горизонтальін жүргіземіз. Алдымен горизонталь h -тың фронталь проекциясы h_1 салынады: $N_1 \in h_1 \parallel x$. Одан кейін h -тың горизонталь проекциясы h_2 түзуін тұрғызамыз. Іздеп отырған N_2 нүктесі h_2 түзуімен N_1 нүктесі арқылы жүргізілген вертикаль байланыс сызығының қиылысу нүктесі ретінде анықталады.

Мысал. 89-суретте β жазықтығының іздері f_β және h_β берілген. $\Delta A_1 B_1 C_1$ осы жазықтықта жатқан ABC үшбұрышының горизонталь про-

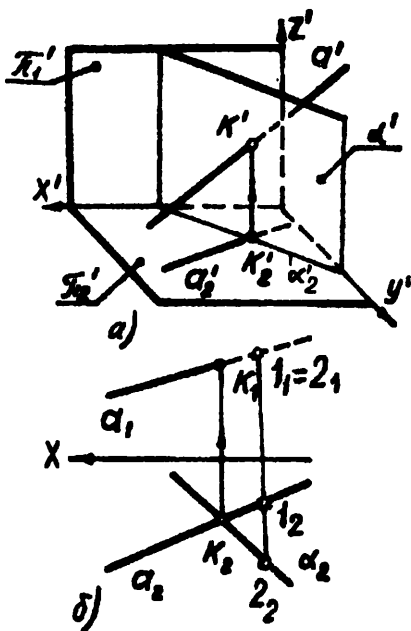


89-сурет

екциясы. ABC үшбұрышының фронталь проекциясын салу керек. Берілген үшбұрыштың A төбесі арқылы фронталь f^A жүргізілдік. A_2 нүктесі арқылы x өсіне перпендикуляр етіп жүргізілген түзу фронтальдың фронталь проекциясы f^A , түзуімен A_1 нүктесінде қиылысады. Осы A_1 нүктесі A нүктесінің фронталь проекциясы. B және C нүктелері арқылы β жазықтығының фронтальдарын жүргізіп, олардың фронталь проекциялары B_1 және C_1 нүктелерін аламыз. Табылған A_1, B_1 және C_1 нүктелерін кесінділермен қосып ABC үшбұрышының фронталь проекциясы $A_1B_1C_1$ үшбұрышын саламыз.

23. ЖАЛПЫ ЖАҒДАЙ ТҮЗУІ МЕН ЖАЗЫҚТЫҒЫНЫҢ ПРОЕКЦИЯЛАУШЫ ЖАЗЫҚТЫҚПЕН ҚИЫЛЫСУЫ

1. Жалпы жағдайда орналасқан a түзуінің және горизонталь проекциялаушы α жазықтығының аксонометриясы (90,а-сурет) және эпюрі (90,б-сурет) берілген. Осы α жазықтығы мен a түзуінің қиылысу нүктесін табу керек болсын. Берілген α жазықтығы горизонталь проекциялар жазықтығына түзу сызық түрінде α_2 проекцияланады. Қиылысу нүктесін K әрпімен белгілелік, оның горизонталь проекциясы K_2 нүктесі α_2 түзуі бойында жатуы тиіс. Сондай-ақ K_2 нүктесі a_2 түзуі бойында да жатуы тиіс. Олай болса K_2 нүктесі α_2 және a_2 түзулерінің қиылысу нүктесі болады: $K_2 = \alpha_2 \cap a_2$. Бұл нүктенің фронталь проекциясы K_1 нүктесін a_1 түзуі бойынан K_2 нүктесі арқылы абсцисса өсіне перпендикуляр етіп жүргізілген түзумен қиылысуы нәтижесінде аламыз (90,б-сурет). $K = a \cap \alpha$. Енді фронталь проекцияда a түзуінің көрінетін бөлігін анықталық. Ол үшін фронталь бәсекелес нүктелер қарастыруымыз керек. Түзудің фронталь проекциясы бойынан қалауымызша нүкте алып, оны 1 және 2 деп белгілелік. Мұндағы 1 нүктесі a түзуінде, ал 2 нүктесі α жазықтығында жатсын. Олардың горизонталь проекцияларын тауып, орналасуларын қарастыралық. 2_2 нүктесі 1_2 нүктесіне қарағанда x өсінен қашықтау. Олай болса,

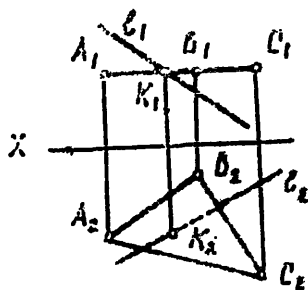


90-сурет

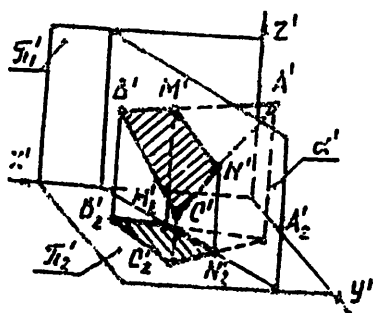
фронталь проекцияда 2 нүктесі көрінеді, ал 1 нүктесі оның тасасында болғандықтан көрінбейді. Осыдан фронталь проекцияда a түзуінің K нүктесінен оң жақтағы бөлігі жазықтықтың тасасында болатындығын анықтадық. Эпюреде a_1 түзуінің K_1 нүктесінен солға қарай бөлігі көрінеді, сондықтан оны тұтас негізгі сызықпен жүргізеді. Ал a_1 түзуінің K_1 нүктесінен оңға қарай бөлігі көрінбейді, сондықтан оны үзілме сызықпен жүргізеді.

1-мысал. Горизонталь жазықтықта жатқан ABC үшбұрышы мен l түзуінің қиылысу нүктесін салып, берілген түзудің көрінетіндігін анықтау керек (91-сурет). Қиылысу нүктесінің (K -ның) фронталь проекциясы K_1 оңай табылады: $l_1 \cap (A_1C_1) = K_1$. Берілген l түзуінде жатқан K нүктесінің фронталь проекциясы бойынша оның горизонталь проекциясы K_2 нүктесін табамыз. Горизонталь проекцияда l түзуінің ABC үшбұрышының астында жатқан бөлігі көрінбейді.

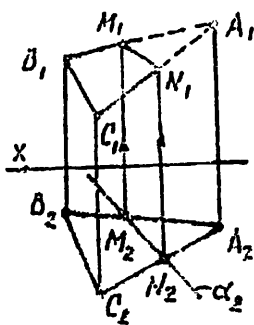
2. Жалпы жағдайда орналасқан жазықтықтың проекциялаушы жазықтықпен қиылысу сызығын салу есебін қарастырайық. Егер екі жазықтықтың ортақ нүктесі болса, онда олар түзу сызық бойынша қиылысатынын білеміз. Сондықтан екі жазықтықтың қиылысу түзуін салу үшін оларға ортақ екі нүктені тауып, осы нүктелер арқылы түзу жүргізу қажет және жеткілікті. Горизонталь проекциялаушы α жазықтығы мен ABC үшбұрышы анықтайтын β жазықтығының қиылысу түзуін салу керек болсын (92, а және б-сурет). ABC үшбұрышы жалпы жағдайда орналасқан. AB түзуінің α жазықтығымен қиылысу нүктесі M -ді, AC түзуінің α жазықтығымен қиылысу нүктесі N -ді табамыз:



91-сурет



а)

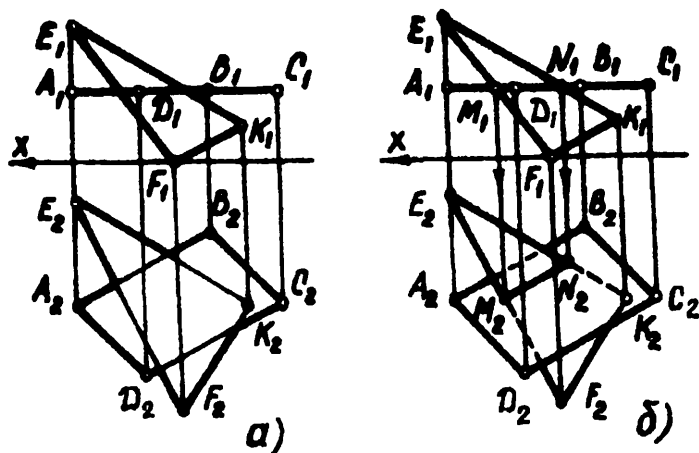


б)

92-сурет

$(AB) \cap \alpha = M$; $(AC) \cap \alpha = N$. Табылған M және N нүктелерін түзуімен қосамыз: $(MN) = \alpha \cap \beta$. Фронталь проекцияда $A_1 M_1 N_1$ үшбұрышы α жазықтығының тасасында болғандықтан көрінбейді.

2-мысал. Параллелограмм $ABCD$ мен үшбұрыш EFK берілген (93-сурет). Олардың қиылысу сызығын салу керек. Параллелограмм $ABCD$ деңгейлік горизонталь жазықтықта орналасқан. Алдымен EFK үшбұрышының қабырғалары EF пен KE кесінділерінің $ABCD$ параллелограмы-



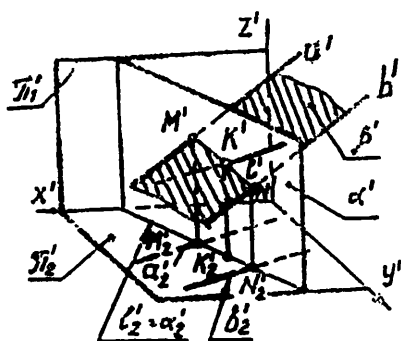
93-сурет

мен қиылысу нүктелерінің фронталь проекциялары M_1 және N_1 -ді анықтаймыз. Содан кейін осы нүктелердің горизонталь проекциялары M_2 және N_2 нүктелерін тауып, оларды кесіндімен қосамыз. Эпюрде көрінетіндікті анықтаймыз.

24. ТҮЗУ МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ҚИЫЛЫСУ НҮКТЕСІН САЛУ

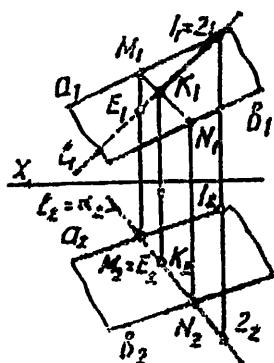
Жалпы жағдайда орналасқан түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін былай салуға болады: 1) берілген түзу арқылы көмекші проекциялаушы жазықтық жүргізеді; 2) берілген жазықтықтың көмекші проекциялаушы жазықтықпен қиылысу түзуін тұрғызады; 3) табылған қиылысу түзуі мен берілген түзудің қиылысу нүктесін анықтайды. Осы анықталған нүкте түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесі болады.

Мысал үшін l түзуі және $\beta(a \parallel b)$ жазықтығы беріліп, олардың қиылысу нүктесі K -ны салу керек болсын (94, а және б-сурет). l түзуі арқылы горизонталь проекциялаушы α жазықтығын жүргізелік: $l \in \alpha \perp \pi_2$. Бұл жазықтық горизонталь проекциялар жазықтығына l түзуінің горизонталь проекциясы l_2 мен беттесетін түзуіне проекцияланады: $l_2 = \alpha_2$. Гори-



a)

94-сурет



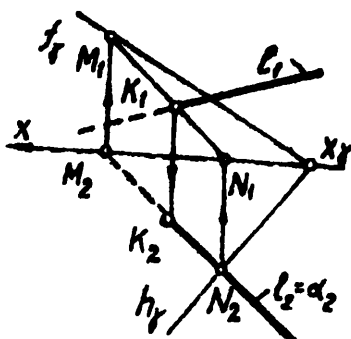
б)

зонталь проекциялаушы α жазықтығы мен берілген β жазықтығының қиылысу түзуін тұрғызамыз: $(MN) = \alpha \cap \beta$. Осыдан кейін жазықтықтардың қиылысу түзуі MN мен берілген түзу l -дің фронталь проекциялары (M_1, N_1) мен l_1 -дің орналасуын қарастырамыз. Үш жағдай болуы мүмкін:

- 1) M_1, N_1 және l_1 түзулері бірігеді. Бұл l түзуінің β жазықтығында жататынын көрсетеді: $(M, N, l) = l_1 \Rightarrow l \in \beta$.
- 2) M_1, N_1 және l_1 түзулері өзара параллель. Бұл l түзуінің β жазықтығына параллель болатынын көрсетеді: $(M, N, l) \parallel l_1 \Rightarrow l \parallel \beta$.
- 3) M_1, N_1 және l_1 түзулері K_1 нүктесінде қиылысады. Бұл l түзуінің β жазықтығымен K нүктесінде қиылысатынын көрсетеді: $(M, N, l) \cap l_1 = K_1 \Rightarrow l \cap \beta = K$.

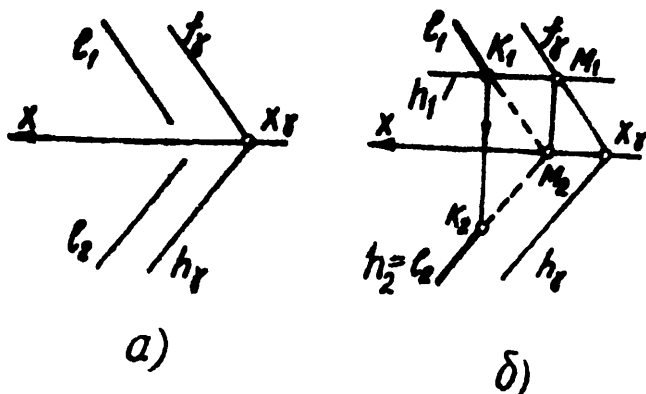
Сондықтан K_1 нүктесі l түзуі мен β жазықтығының қиылысу нүктесінің фронталь проекциясы. Оның горизонталь проекциясы K_2 нүктесін l_2 түзуі бойынан вертикаль байланыс сызығын жүргізіп табамыз. Горизонталь проекциядағы көрінетіндікті анықтау үшін горизонталь бәсекелес нүктелер E мен M -ді қарастыруға болады: $E \in l$, $M \in \alpha$. M нүктесінің фронталь проекциясы M_1 нүктесі E нүктесінің проекциясы E_1 нүктесінен жоғары орналасқан. Олай болса горизонталь проекцияда l түзуінің EK кесіндісі көрінбейді. Сондықтан $[EK]$ үзіліме сызықпен жүргізілген. Фронталь бәсекелес 1 және 2 нүктелерін қарастыралық: $1 \in \alpha$, $2 \in l$. Олардың горизонталь проекцияларына қарап, фронталь проекцияда l_1 түзуінің K_1 нүктесінен жоғары бөлігі көрінетінін, ал төменгі бөлігі көрінбейтінін анықтаймыз.

Енді фронталь ізі f_γ , горизонталь ізі h_γ болатын γ жазықтығы мен l түзуінің қиылысу нүктесі K -ны салалық (95-сурет). Берілген l түзуі арқылы өтетін горизонталь проекциялаушы α жазықтығын жүргізелік: $l_2 = \alpha$. Берілген γ жазықтығы мен проекциялаушы α жазықтығының қиылысу сызығын салалық: $(MN) = \alpha \cap \gamma$. Қиылысу сызығы (MN) және берілген l түзуінің қиылысу нүктесі K жазықтық пен түзудің ізделініп отырған қиылысу нүктесі болады: $K = l \cap \gamma$. Бәсекелес нүктелер әдісімен l түзуінің эпюрде көрінетін және көрінбейтін бөліктерін анықтаймыз.



95-сурет

Түзудің фронталь проекциясы l_1 жазықтықтың фронталь ізіне, ал горизонталь проекциясы l_2 жазықтықтың горизонталь ізіне параллель орналасқан ерекше жағдайға тоқтала кетелік (96-сурет): $l_1 \parallel f_\gamma$ және $l_2 \parallel h_\gamma$.

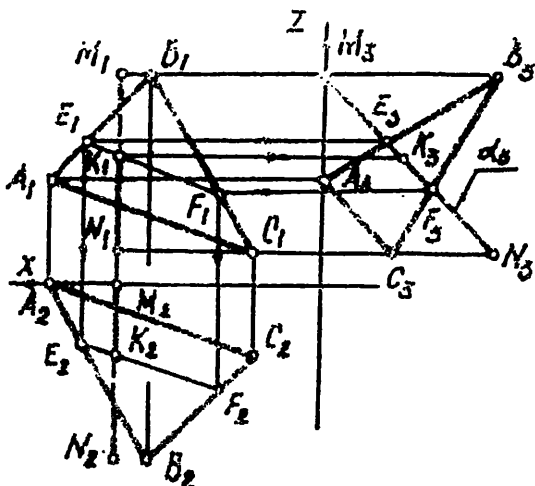


96-сурет

Көмекші жазықтықты l түзуі арқылы фронталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр етіп жүргізсек, онда көмекші жазықтық берілген жазықтықпен фронталь бойынша қиылысар еді. Біз l түзуі арқылы горизонталь проекциялаушы α жазықтығын жүргізелік. Көмекші α жазықтығы мен берілген γ жазықтығының қиылысу сызығы горизонталь проекциялар жазықтығына параллель болатынын аңғару қиын емес. Сонда α және γ жазықтықтары горизонталь бойынша қиылысады: $\alpha \cap \gamma = h$. Қиылысу сызығы h -тың горизонталь проекциясы h_2 берілген түзудің горизонталь проекциясы l_2 мен бірігеді, ал оның фронталь проекциясы M_1

нүктесі арқылы x өсіне параллель жүргізіледі: $l_2 = h_2$; $M_1 \in h_1 \parallel x$. Осы горизонталь h пен берілген l түзуінің қиылысу нүктесі K ізден отырған нүкте болады: $K = l \cap h$. Бәсекелес нүктелер әдісімен эпюрде l түзуінің көрінетін және көрінбейтін бөліктері анықталған.

Мысал. Берілген ABC үшбұрышы мен профиль проекциялар жазықтығына параллель орналасқан MN түзуінің қиылысу нүктесін салу керек (97-сурет). Алдымен берілген үшбұрыш пен түзудің профиль проекцияларын тұрғызып аламыз. Берілген MN түзуі арқылы профиль проекциялаушы α жазықтығын жүргіземіз. Көмекші α жазықтығы ABC үшбұрышын EF кесіндісі бойынша қияды. EF кесіндісінің горизонталь $[E_2F_2]$ және $[E_1F_1]$ фронталь проекцияларын тұрғызамыз. Олар MN түзуінің горизонталь проекциясымен K_2 нүктесінде, ал фронталь проекциясымен K_1 нүктесінде қиылысады. Табылған $K(K_1, K_2)$ нүктесі берілген ABC үшбұрышымен MN түзуінің қиылысу нүктесі.



97-сурет

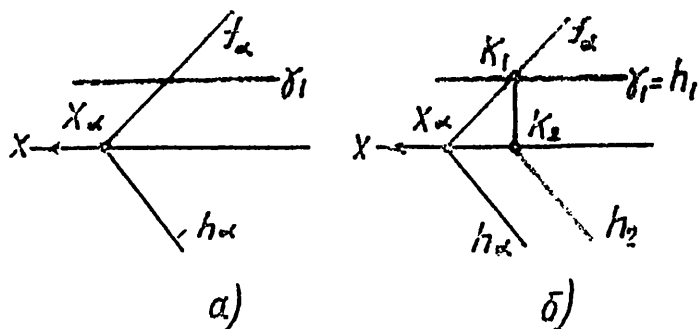
25. ПАРАЛЛЕЛЬ ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫ ЖӘНЕ ЕКІ ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ҚИЫЛЫСУ ТҮЗУІН САЛУ

1. Екі жазықтықтың параллельдігі туралы теореманы еске түсірейік: егер бірінші жазықтықтың қиылысатын екі түзуі екінші жазықтықтың екі түзуіне сәйкес параллель болса, онда бұл екі жазықтық өзара параллель болады.

1-мысал. M нүктесінде қиылысатын m және n түзулері анықтайтын α жазықтығы берілген. Берілген N нүктесі арқылы өтетін α жазықтығына параллель β жазықтығын салу керек (98-сурет). N нүктесі арқылы m түзуіне параллель a түзуін және n түзуіне параллель b түзуін жүргізейік: $N_1 \in a_1 \parallel m_1, N_2 \in a_2 \parallel m_2; N_1 \in b_1 \parallel n_1, N_2 \in b_2 \parallel n_2$. Енді N нүктесінде қиылысатын a және b түзулері анықтайтын β жазықтығы α жазықтығына параллель болатынына көз жеткізу қиын емес.

жолын былайша да түсіндіруге болады: берілгені $\alpha(h_\alpha \cap f_\alpha)$ және $\beta(h_\beta \cap f_\beta)$ жазықтықтары; табу керекі $k = \alpha \cap \beta$. Шешуі: 1) $\gamma = \pi_\gamma$, $\gamma \cap \alpha = h_\alpha$, $\gamma \cap \beta = h_\beta$, $h_\alpha \cap h_\beta = K$; 2) $\gamma' = \pi_{\gamma'}$, $\gamma' \cap \alpha = f_\alpha$, $\gamma' \cap \beta = f_\beta$, $f_\alpha \cap f_\beta = K'$; 3) $(KK') = k = \alpha \cap \beta$.

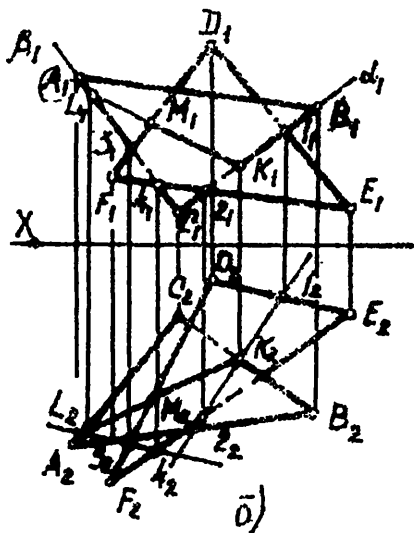
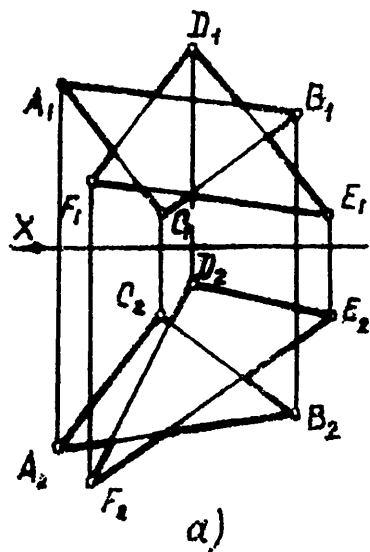
Берілген жазықтықтардың біреуі деңгейлік жазықтық болсын. 102-суретте берілген α және γ жазықтықтарының біріншісі жалпы жағдайда,



102-сурет

ал екінші горизонталь проекциялар жазықтығына параллель орналасқан. Бұл жағдайда екі жазықтыққа ортақ бір-ақ нүкте K -ны эпюрден көрсетуге болады, ал екінші нүкте эпюрге жок. Бірақ қиылысу сызығы γ жазықтығында жатуы керек. Олай болса, оның горизонталь болатынына көз жеткізу қиын емес. Сондықтан α және γ жазықтықтарының қиылысу сызығы h -тың фронталь проекциясы h_1 деңгейлік жазықтықтың проекциясы γ_1 мен беттеседі: $h_1 = \gamma_1$. Ал оның горизонталь проекциясы h_2 жалпы жағдай жазықтығының горизонталь ізіне параллель болады: $K_2 \in h_2 \parallel h_\alpha$.

Екі жазықтықтың қиылысу сызығын былай да салуға болады. Олардың біреуінде жатқан түзудің екіншісімен қиылысу нүктесін тапсақ, онда табылған нүкте берілген жазықтықтарға ортақ болар еді. Тұрғызуды қайталап, тағы екі жазықтыққа ортақ бір нүктені анықтауға болады. Басқаша айтқанда, екі жазықтықтың қиылысу сызығын салу үшін түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін салу (§ 24) есебін екі рет қайталау жеткілікті. Мысал үшін ABC және DEF үшбұрыштарының қиылысу сызығын тұрғызуды қарастыралық (103-сурет). ABC үшбұрышының (BC) қабырғасының DEF үшбұрышы жазықтығымен қиылысу нүктесі K -ны салалық. Ол үшін (BC) арқылы фронталь проекциялаушы α жазықтығы жүргізілген. Көмекші α жазықтығы DEF үшбұрышын [12] кесіндісі арқылы қияды. Осы табылған [12] кесіндісі мен (BC) -ның қиылысу нүктесі K болады. Енді ABC үшбұрышының келесі қабырғасы (AC) -ның DEF үшбұрышы жазықтығымен қиылысу нүктесі L -ді сала-



103-сурет

лык. Сонда берілген үшбұрыштар жазықтықтарының қиылысу сызығы KL түзуін аламыз. Берілген ABC және DEF үшбұрыштары кесінді бойынша қиылысады және ол кесінді табылған KL түзуі бойында жатады. Екі үшбұрыштың қиылысу сызығының проекциясы сол үшбұрыштардың аттас проекцияларының ортақ бөлігінде жатуы тиіс. Осы шартты ескеріп іздеп отырған кесіндіміз $[KM]$ болатындығын анықтаймыз: $M = (KL) \cap (DF)$. Бәсекелес нүктелер әдісімен эпюрге көрінетіндік анықталған.

26. ӨЗАРА ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚ

1. Алдымен өзара перпендикуляр түзулердің эпюрлерін қарастырайық. § 4-та тік бұрыштың тік бұрышты проекциясы да тік бұрыш болуы үшін оның бір қабырғасы проекциялар жазықтығына параллель, ал екінші қабырғасы перпендикуляр болмауы керек екендігін дәлелдесгенбіз. Осы қорытындыдан өзара перпендикуляр түзулердің проекциялары эпюрге қалай орналасатынын анықтауға болады.

Өзара перпендикуляр екі түзудің біреуі горизонталь болса, онда олардың горизонталь проекциялары тік бұрыш жасап орналасады.

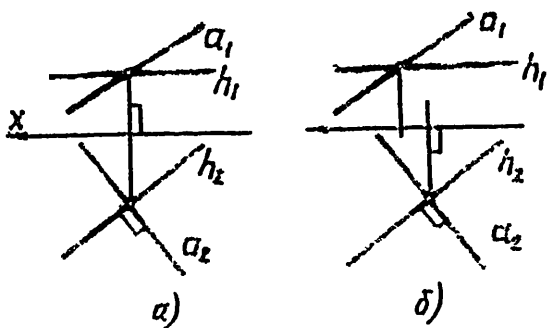
$$a \perp b \Rightarrow a_2 \perp b_2. \quad (21)$$

Екі түзудің горизонталь проекциялары эпюрге өзара перпендикуляр (104-сурет) және олардың біреуі горизонталь болса, онда олар кеңістікте де өзара перпендикуляр болады:

$$a_2 \perp h_2 \Rightarrow a \perp h. \quad (22)$$

Мұнда екі жағдай болады: а) берілген түзулер тік бұрыш жасап қиылысады (104,а-сурет); б) берілген түзулер тік бұрыш жасап айқасады (104,б-сурет).

Өзара перпендикуляр түзулердің біреуі фронталь болса, онда олардың фронталь проекциялары тік бұрыш жасап орналасады:



104-сурет

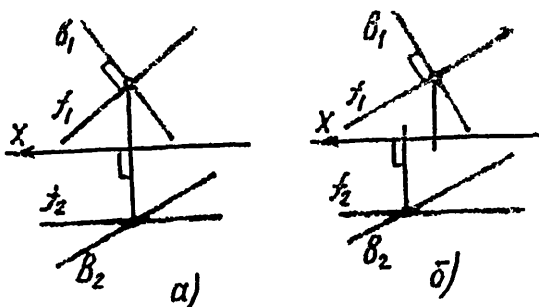
$$h \perp f \Rightarrow b_1 \perp f_1. \quad (23)$$

Екі түзудің фронталь проекциялары эпюрге өзара перпендикуляр және олардың біреуі фронталь болса, онда олар кеңістікте де өзара перпендикуляр болады:

$$b_1 \perp f_1 \Rightarrow b \perp f. \quad (24)$$

Мұнда да екі жағдай болады: а) берілген түзулер тік бұрыш жасап қиылысады (105,а-сурет); б) берілген түзулер тік бұрыш жасап айқасады (105,б-сурет).

1-мысал. Горизонталь h және A нүктесі берілген (106-сурет). A нүктесі арқылы берілген горизонталь h -ты тік бұрыш жасап қия-



105-сурет

тын l түзуін жүргізу керек. Алдымен l түзуінің горизонталь проекциясын жүргіземіз: $A_2 \in l_2 \perp h_2$. Жүргізілген l_2 түзуі h_2 түзуін B_2 нүктесінде қияды. Осы B_2 нүктесі арқылы x -ке перпендикуляр байланыс сызығын жүргізсек, ол h_1 түзуін B_1 нүктесінде қияды. Сонда A_1 және B_1 нүктеле-

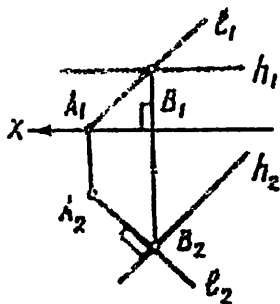
рін косатын түзу l , болады. Шынында да, тұрғызылған l түзуі A нүктесі арқылы өтеді және берілген горизонтальды тік бұрыш жасап қияды.

2-мысал. M нүктесі және l түзуі берілген (107-сурет). Берілген M нүктесі арқылы өтетін, l түзуіне перпендикуляр және фронталь проекциялар жазықтығына параллель түзу жүргізу керек. Есептің шарты бойынша іздеп отырған түзуіміз – фронталь. Сондықтан, оның горизонталь проекциясы M_2 нүктесі арқылы x өсіне параллель, ал фронталь проекциясы M_1 нүктесі арқылы берілген түзудің фронталь проекциясына перпендикуляр салынады: $M_2 \in f_2 \parallel x$; $M_1 \in f_1 \perp l_1$. Шынында да, салынған f түзуі M нүктесі арқылы өтеді, фронталь проекциялар жазықтығына параллель және l түзуіне перпендикуляр.

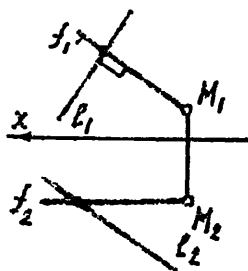
2. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы туралы теорема: *Түзу мен жазықтық өзара перпендикуляр болуы үшін эпюрге түзудің горизонталь проекциясы жазықтық горизонталінің горизонталь проекциясына перпендикуляр және түзудің фронталь проекциясы жазықтық фронталінің фронталь проекциясына перпендикуляр болуы қажетті және жеткілікті.*

Дәлелдеу. Қажеттілігі. l түзуі және оған перпендикуляр α жазықтығы берілсін: $l \perp \alpha$. Берілген α жазықтығының горизонталі h -ты және фронталі f -ті жүргізуге болады: $h \subset \alpha$; $f \subset \alpha$; $\alpha(h \cap f)$. Берілген l түзуі α жазықтығына перпендикуляр болғандықтан, ол осы жазықтықта жатқан барлық түзулерге де перпендикуляр. Осы түзулердің ішінде жоғарыда жүргізілген горизонталь мен фронталь да бар. Олай болса: $l \perp h$ және $l \perp f$. (21) және (23) шарттарды ескерсек: $l_2 \perp h_2$ және $l_1 \perp f_1$ болады. Сондықтан түзудің горизонталь проекциясының α жазықтығының горизонталінің горизонталь проекциясына перпендикуляр және түзудің фронталь проекциясының α жазықтығының фронталінің фронталь проекциясына перпендикуляр болуы қажетті екен.

Жеткіліктілігі. l түзуі және $\alpha(h \cap f)$ жазықтығы берілсін және эпюрге $l_1 \perp f_1$ және $l_2 \perp h_2$ болсын. Берілген түзу мен жазықтықтың перпендикуляр, яғни $l \perp \alpha$, екендігін дәлелдеу керек. $l_1 \perp f_1$ болғандықтан (24) шарт бойынша бұл екі түзу l мен f өзара перпендикуляр. $l_2 \perp h_2$ болғандықтан



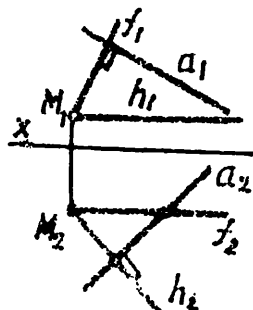
106-сурет



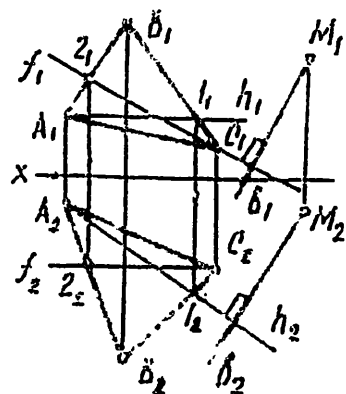
107-сурет

(22) шарт бойынша l және h түзулері өзара перпендикуляр. Оның үстіне $f \in \alpha, h \in \alpha$. Сөйтіп l түзуі α жазықтығының қиылысатын екі түзуіне (f пен h) перпендикуляр екен. Олай болса, l түзуі осы α жазықтығының өзіне де перпендикуляр болады. Сонымен, теорема толық дәлелденді.

Осы теореманы пайдаланып берілген түзуге перпендикуляр жазықтық салуға болады. Бізге a түзуі және M нүктесі берілсін (108-сурет). Осы M нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр α жазықтығын салу керек. Ол үшін M нүктесі арқылы екі түзу жүргіземіз. Бұл екі түзудің біреуі горизонталь, ал екіншісі фронталь болсын. Горизонтальдың фронталь проекциясы x өсіне параллель, ал горизонталь проекциясы берілген түзудің горизонталь проекциясына перпендикуляр етіп жүргізіледі: $M_1 \in h_1 \parallel x$; $M_2 \in h_2 \parallel a_2$. Фронтальдың фронталь проекциясы берілген түзудің фронталь проекциясына перпендикуляр, ал горизонталь проекциясы x өсіне параллель етіп жүргізіледі: $M_1 \in f_1 \perp a_1$; $M_2 \in f_2 \parallel x$. M нүктесінде қиылысатын екі түзу h пен f бір α жазықтығын анықтайды. Салынған α жазықтығы M нүктесі арқылы өтетініне және a түзуіне перпендикуляр болатынына көз жеткізу қиын емес.



108-сурет



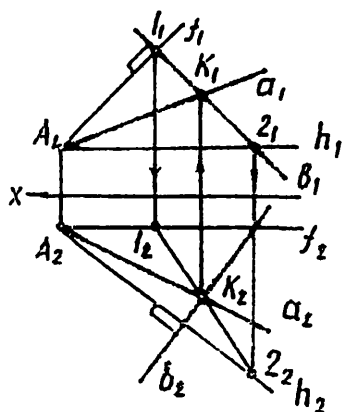
109-сурет

Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы туралы теоремаға сүйеніп нүктеден берілген жазықтыққа перпендикуляр түсіруге болады. M нүктесінен ABC үшбұрышы жазықтығына перпендикуляр түсірілік (109-сурет). Алдымен ABC үшбұрышы жазықтығының горизонталь h -ты және фронталь f -ті жүргізіп аламыз. Горизонталь A нүктесі, фронталь C нүктесі арқылы жүргізілген. M нүктесінен ABC үшбұрышы жазықтығына түсірілген перпендикулярды b әрпімен белгілесек, онда оның фронталь проекциясы M_1 нүктесі арқылы фронтальдың фронталь проекциясына перпендикуляр, ал горизонталь проекциясы M_2 нүктесі арқылы го-

ризонтальдың горизонталь проекциясына перпендикуляр жүргізіледі:

$$M_1 \in b_1 \perp f_1; M_2 \in b_2 \perp h_2.$$

3-мысал. Берілген A нүктесін бастыра b түзуін тік бұрыш жасап қиятын a түзуін салу керек (110-сурет). Берілген A нүктесін бастыра b



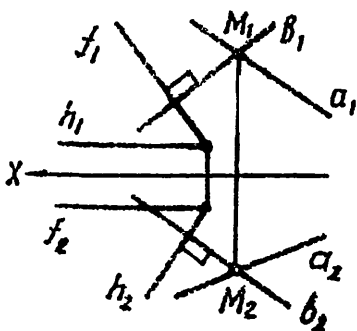
110-сурет

түзуіне перпендикуляр α жазықтығын жүргіземіз. α жазықтығын A нүктесінде қиылысатын горизонталь h және фронталь f түзулерімен анықтауға болады. Ізделіп отырған a түзуі α жазықтығында жатады. Көмекші α жазықтығы мен b түзуінің қиылысу нүктесі K -ны табамыз (§ 24). Табылған K нүктесін берілген A нүктесімен қосатын түзу ізделіп отырған a түзуін береді: $(AK) = a$. Шынында да, AK түзуі b түзуімен K нүктесінде қиылысады және оған перпендикуляр. Өйткені, AK түзуі b түзуіне перпендикуляр α жазықтығында жатыр.

27. ӨЗАРА ПЕРПЕНДИКУЛЯР ЖАЗЫҚТЫҚТАР

Екі жазықтықтың біреуі екіншісіне перпендикуляр арқылы өтсе, онда бұл екі жазықтық өзара перпендикуляр болатынын білеміз: $(\alpha \perp \beta, a \subset \alpha) \Rightarrow \alpha \perp \beta$. Басқаша айтқанда, екі жазықтықтың біреуі екіншісінде жатқан түзуге перпендикуляр болса, онда олар өзара перпендикуляр болады. Олай болса, екі жазықтықтың перпендикулярлығы туралы есеп түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығына келтіріледі.

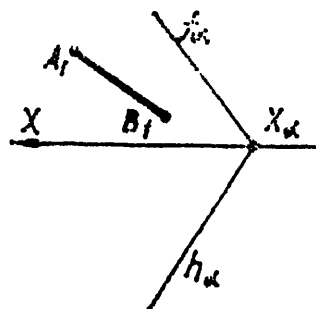
Мысалы берілген a түзуі арқылы $\alpha(h \cap f)$ жазықтығына перпендикуляр β жазықтығын салу керек болсын (111-сурет). Берілген a түзуі бойынан қалауымызша M нүктесін аламыз. M нүктесінен α жазықтығына перпендикуляр түсіреміз: $M \in a; M \in b \perp \alpha$. Сонда M нүктесінде қиылысатын a және b түзулері β жазықтығын анықтайды. Салынған β жазықтығы α жазықтығына перпендикуляр, өйткені ол α -ға перпендикуляр b түзуі арқылы өтеді. Енді β жазықтығының жалғыз екенін көрсетелік. Осы мақсат үшін a түзуі бойынан M нүктесінен өзге N нүктесін алалық. N нүктесінен α жазықтығына перпендикуляр c түзуін жүргізейік. c түзуі де β жазықтығында жатыр, оның себебі ол β жазықтығының N нүктесі арқылы өтеді және β жазықтығында жатқан b түзуіне параллель. Олай болса a түзуінен қандай нүкте алсақ та біз тек бір ғана β жазықтығына келеміз.



111-сурет

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН СҰРАҚТАР МЕН ЖАТТЫҒУЛАР

1. Фронталь бәсекелесс, горизонталь бәсекелесс нүктелер деп қандай нүктелерді айтады?
2. Эпюрге көрінетіндікті қалай анықтайды?
3. Параллель, қиылысатын және аяқас түзулер эпюрлерінің ерекшеліктерін айтып беріңіз.
4. Жазықтықтың фронталі дегеніміз не? Жазықтықтың горизонталі дегеніміз не?
5. Берілген жазықтықтың фронталін және горизонталін қалай салуға болады?
6. Жазықтықта жатқан нүктенің бір проекциясы бойынша екінші проекциясын қалай салады?
7. Түзудің проекциялаушы жазықтықпен қиылысу нүктесін қалай табады?
8. Жазықтықтың проекциялаушы жазықтықпен қиылысу сызығын қалай салады?
9. Түзудің жалпы жағдайда орналасқан жазықтықпен қиылысу нүктесін қалай табады?
10. Эпюрге параллель жазықтықтарды қалай салуға болады?
11. Екі жазықтықтың қиылысу түзуін салу жолдарын айтып беріңіздер?
12. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы туралы теореманы айтып дәлелдеңіз.
13. Өзара перпендикуляр түзулердің эпюрін қалай салуға болады?
14. Өзара перпендикуляр жазықтықтар және олардың эпюрлері туралы не айтасыз?
15. $A(40; 20; 30)$ нүктесімен горизонталь бәсекелес B нүктесінің горизонталь проекциялар жазықтығынан қашықтығы 10 өлшем, ал $C(10; 20; 30)$ нүктесімен фронталь бәсекелес D нүктесінің фронталь проекциялар жазықтығынан қашықтығы да 10 өлшем. $ABCD$ тетраэдрінің эпюрін салып, профиль проекциялар жазықтығында оның көрінбейтін қырын анықтау керек.
16. Эпюрге $A(50; 40; 20)$ нүктесі арқылы екі түзу жүргізу керек. Олардың біреуі BC түзуіне параллель болсын, ал екіншісі BC түзуімен қиылысып горизонталь орналассын: $B(30; 50; 40)$, $C(0; 10; 0)$. B нүктесі арқылы AC түзуін киятын және фронталь проекциялар жазықтығына параллель түзу жүргізіп, оның проекцияларын салыңыз.
17. α жазықтығында жатқан AB кесіндісінің горизонталь проекциясын салыңыз (112-сурет).



112-сурет

18. Алты нүкте берілген: $A(18; 10; 90)$, $B(83; 79; 25)$, $C(135; 48; 83)$, $D(67; 85; 110)$, $E(0; 36; 19)$ және $F(121; 0; 52)$. Эпюрде мына есептерді шығарыңыз:

1) AB түзуінің $\alpha(DEF)$ жазықтығымен қиылысу нүктесін салып, AB -ның көрінетін бөліктерін анықтау керек;

2) ABC және DEF үшбұрыштарының қиылысу сызығын салып, олардың көрінетіндігін анықтау керек;

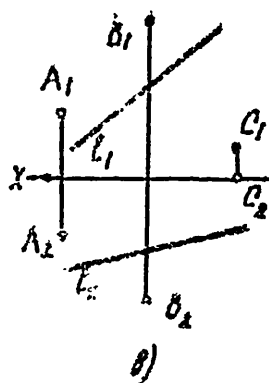
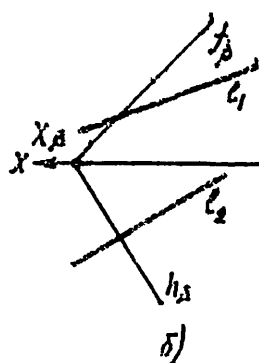
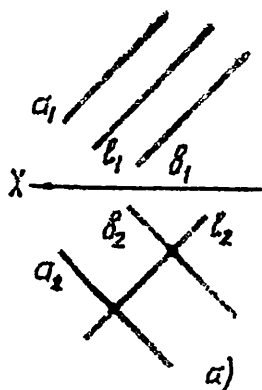
3) D нүктесі арқылы $\beta(ABC)$ жазықтығына параллель жазықтық жүргізу керек;

4) A нүктесін бастыра (BC) -ға перпендикуляр сіңіп жүргізілген γ жазықтығының іздерін салыңыз;

5) C нүктесінен $\alpha(DEF)$ жазықтығына түсірілген перпендикулярдың табанын анықтаңыз;

6) EF түзуін бастыра $\beta(ABC)$ жазықтығына перпендикуляр жазықтық салыңыз.

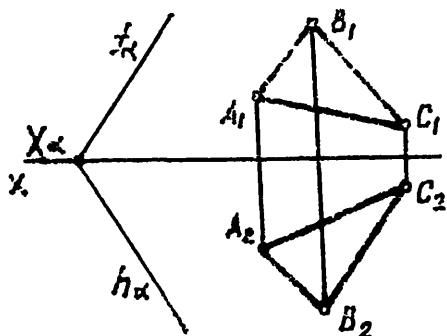
19. l түзуінің $\alpha(a \parallel b)$ (113,а-сурет), $\beta(h_f \cap f_p)$ (113,б-сурет) және $\gamma(A, B, C)$ (113, в-сурет) жазықтықтарымен қиылысу нүктелерін салып, түзудің көрінбейтін бөліктерін анықтау керек.



113-сурет

20. $A(30; 30; 40)$ нүктесі арқылы өтетін BC түзуіне перпендикуляр және онымен қиылысатын l түзуін салу керек: $B(80; 40; 20)$, $C(50; 10; 60)$.

21. Екі жазықтық берілген: $\alpha(h_a \cap f_a)$ және $\beta(ABC)$. Олардың қиылысу сызығын салыңыз және A нүктесін бастыра оларға перпендикуляр γ жазықтығын жүргізіңіз (114-сурет).



114-сурет

Төртінші тарау

АРА ҚАШЫҚТЫҚТЫ ЖӘНЕ КӨЛБЕУЛІК БҰРЫШТЫ АНЫҚТАУ. ТЕНДЕУІМЕН БЕРІЛГЕН ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ЭПИОРИН САЛУ

28. ЕКІ НҮКТЕНІҢ АРА ҚАШЫҚТЫҒЫН ЖӘНЕ ТҮЗУДІҢ ПРОЕКЦИЯЛАР ЖАЗЫҚТЫҚТАРЫНА КӨЛБЕУЛІК БҰРЫШТАРЫН АНЫҚТАУ

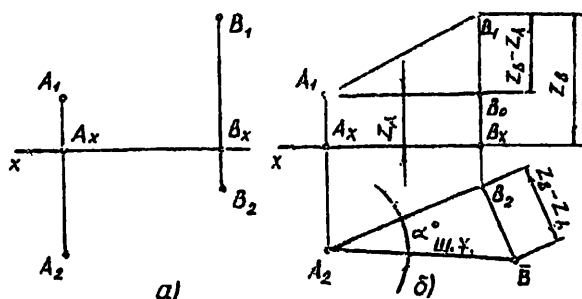
Екі нүктенің ара қашықтығы деп оларды қосатын түзу кесіндісінің ұзындығын айтады. Сондықтан түзу кесіндісінің ұзындығын анықтауды қарастырамыз. Түзудің жазықтыққа көлбеулік бұрышы деп оның сол жазықтықтағы тік бұрышты проекциясымен аралығындағы бұрышты айтады. 9, 6-суретті қараңыздар. Онда A және B нүктелері, олардың π' жазықтығындағы тік бұрышты проекциялары A' және B' кескінделген. A нүктесі арқылы $A'B'$ түзуіне параллель түзу жүргізіп, оның BB' түзуімен қиылысу нүктесі B_0 белгіленген. Сонда пайда болған $\triangle AB_0B'$ тік бұрышты үшбұрыш, ал оның бір катеті $[AB_0]$ проекцияға $[A'B']$ -ка, екінші катеті $[BB_0]$ берілген нүктелердің (A мен B) проекциялар жазықтығынан (π' -тан) қашықтықтарының айырымына тең. Осы AB_0B' үшбұрышының бір қабырғасы $[AB]$ берілген кесіндінің ұзындығына тең, ал гипотенуза мен проекцияға тең катет аралығындағы бұрыш $\alpha^0(AB)$, (AB_0) берілген AB түзуінің π' жазықтығына көлбеулік бұрышына тең.

Тік бұрышты үшбұрыш ережесі: *кесіндінің ұзындығын бір катеті проекцияға, екінші катеті кесінді ұштарының проекциялар жазықтығынан қашықтықтарының айырымына тең тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы ретінде, ал осы кесіндіні анықтайтын түзудің проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы осы үшбұрыштың проекцияға тең катеті мен гипотенузасы аралығындағы бұрыш ретінде анықтауға болады.* Енді осы ережеге сүйеніп, нүктелердің ара қашықтығын, түзудің проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрыштарын анықталық.

1-мысал. A және B нүктелерінің ара қашықтығын және AB түзуінің горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтау керек (115, а-сурет).

Берілген нүктелердің аттас проекцияларын түзу кесіндісімен қосалық. Сонда фронталь проекциясы A_1B_1 , горизонталь проекциясы A_2B_2 болатын AB кесіндісінің шын ұзындығын анықтауымыз керек, өйткені ол фронталь проекцияда да, сол сияқты горизонталь проекцияда да бұрмаланып, өзінің шын ұзындығын сақтамай кескінделген. Дәлірек ай-

тканда $|A, B_1| < |AB|$ және $|A, B_2| < |AB|$ болады. Бір катеті AB кесіндісінің горизонталь проекциясы $[A_2, B_2]$ -ға тең, ал екінші катеті A және B нүктелерінің горизонталь проекциялар жазықтығынан қашықтықтарының

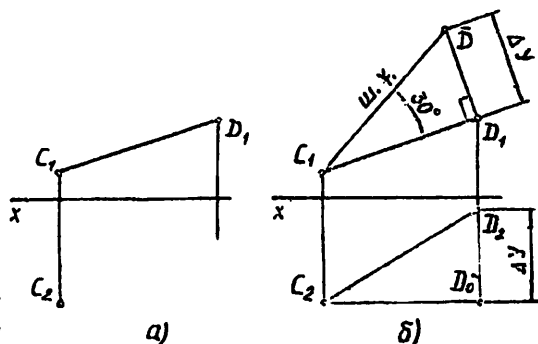


115-сурет

айырымына тең үшбұрыш салуымыз керек. A нүктесінің горизонталь проекциялар жазықтығынан қашықтығы $z_A - |A, A_x|$, ал B нүктесінің горизонталь проекциялар жазықтығынан қашықтығы $z_B - |B, B_x|$ болады (115,6-сурет). Сондықтан A_1 нүктесі арқылы x өсіне параллель түзу жүргізсек, ол түзу B_1, B_2 түзуімен B_0 нүктесінде қиылысады: $|z_A - z_B| = |A, A_x| - |B, B_x| = |B, B_0|$. B_2 нүктесі арқылы A_2, B_2 түзуіне перпендикуляр түзу жүргізіп, осы түзуге B_2 нүктесінен бастап $|B, B_0|$ -ге тең кесінді салып $\bar{B}$ нүктесін аламыз. Тұрғызылған $A_2, B_2, \bar{B}$ тік бұрышты үшбұрышының бір катеті проекцияға, екінші катеті A және B нүктелерінен π_2 жазықтығына дейінгі қашықтықтардың айырымына тең. Олай болса $A_2, B_2, \bar{B}$ үшбұрышының гипотенузасы $[A_2, \bar{B}]$ ізделініп отырған A және B нүктелерінің ара қашықтығын, ал проекцияға тең катет пен гипотенузаның арасындағы бұрыш AB түзуінің горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтайды:

$$|AB| = |A_2, \bar{B}|; (\angle A_2, B_2), (\angle A_2, \bar{B}) = \alpha^\circ.$$

2-мысал. Фронталь проекциялар жазықтығына 30° бұрышпен көлбейтін CD кесіндісінің фронталь проекциясы C_1, D_1 , және оның бір ұшының горизонталь проекциясы — C_2 нүктесі берілген (116, а-сурет). CD кесіндісінің ұзындығын анықтап, D нүктесінің горизонталь проекциясын (D_2 нүктесін) тауып оның эпюрін салуды аяқтау керек болсын. Ол үшін C_1, D_1 кесіндісі катеті бола-



116-сурет

тын және C_1 төбесіндегі бұрышы 30° болатын тік бұрышты $C_1D_1\bar{D}$ үшбұрышын саламыз (116,б-сурет). C_1 нүктесі арқылы C_1D_1 түзуімен 30° бұрыш жасайтындай стіп жүргізілген түзу мен D_1 нүктесі арқылы өтетін C_1D_1 түзуіне перпендикуляр түзудің қиылысу нүктесі $\bar{D}$ анықталады. Сонда $C_1D_1\bar{D}$ тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы CD кесіндісінің ұзындығына, ал оның $[D_1\bar{D}]$ катеті кесінді үштарының π_1 жазықтығынан қашықтықтарының айырымына тең болады: $|C_1\bar{D}| = |CD|$; $|D_1\bar{D}| = y_C - y_D = \Delta y$. D нүктесінің горизонталь проекциясын D_1 нүктесі арқылы жүргізілген вертикаль байланыс сызығы бойынан іздейміз. Осы байланыс сызығы мен C_2 нүктесі арқылы жүргізілген горизонталь түзу D_0 нүктесінде қиылысады. Байланыс сызығы бойына D_0 нүктесінен бастап $D_1\bar{D}$ кесіндісіне тең D_0D_2 кесіндісін салып, D_2 нүктесін аламыз. Есептің екі шешуі болатынын байқау қиын емес. Екінші шешуін алу үшін D_0D_2 кесіндісін D_0 нүктесінен төмен қарай салу керек.

29. НҮКТЕДЕН ТҮЗУГЕ НЕМЕСЕ ЖАЗЫҚТЫҚҚА ДЕЙІНГІ ҚАШЫҚТЫҚТЫ АНЫҚТАУ

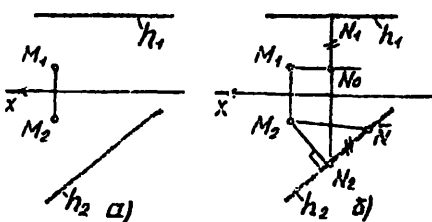
1. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық деп осы нүктеден сол түзуге түсірілген перпендикулярдың ұзындығын айтады. Сондықтан нүкте мен түзудің ара қашықтығын анықтау үшін нүктеден түзуге перпендикуляр түсіріп, оның табанын тұрғызу керек. Одан кейін берілген нүктемен перпендикулярдың табанын қосатын кесінді ұзындығын тік бұрышты үшбұрыш ережесіне сүйеніп анықтайды.

1-мысал. M нүктесі мен горизонталь орналасқан h түзуінің ара қашықтығын анықтау керек (117,а-сурет).

M_2 нүктесінен h_2 түзуіне түсірілген перпендикулярдың табанын N_2 деп белгілеп, вертикаль байланыс сызығының көмегімен h_1 түзуі бойынан N_1 нүктесін табамыз. Сонда M нүктесі мен h түзуінің ара қашықтығы MN кесіндісінің ұзындығына тең болады (117, б-сурет). $M_2N_2\bar{N}$ тік бұрышты үшбұрышын тұрғызамыз. Оның катеті $[N_2\bar{N}]$ фронталь проекциядағы N_1N_0 кесіндісіне тең, ал гипотенузасы M нүктесінен h түзуіне дейінгі қашықтықты анықтайды:

$$|Mh| = |MN| = |M_2\bar{N}|.$$

2-мысал. M нүктесінен жалпы жағдайда орналасқан l түзуіне дейінгі қашықтықты анықтау керек (118,а-сурет).

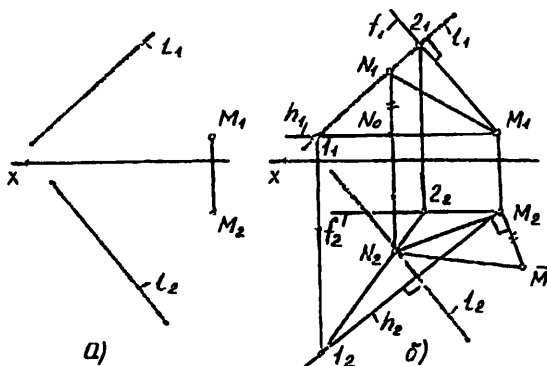


117-сурет

M нүктесінен l түзуіне түсірілген перпендикулярдың табанын (N нүктесін) салу үшін M нүктесі арқылы өтетін және l түзуіне перпендикуляр болатын α жазықтығын жүргіземіз. Осы α жазықтығының фронталі (f) мен горизонталін (h) салу оңай:

$$M_1 \in f_1 \perp l_1;$$

$$M_2 \in f_2 \parallel x; \quad M_1 \in h_1 \parallel x;$$

$$M_2 \in h_2 \perp l_2. \quad \text{Комекші } \alpha$$


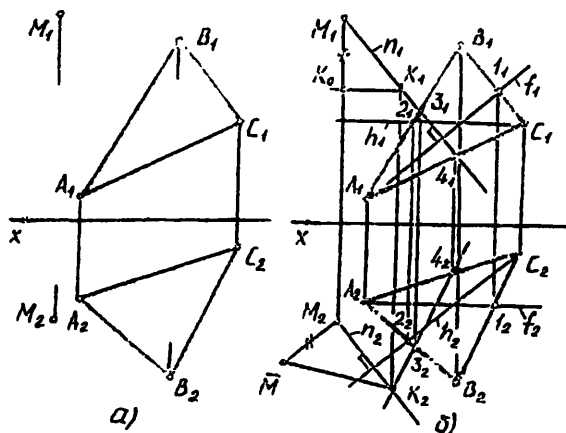
118-сурет

жазықтығы мен l түзуінің қиылысу нүктесін тұрғызамыз: $\alpha \cap l = N$. Сонда l түзуі мен MN түзуі өзара тік бұрыш жасап N нүктесінде қиылысады (118, б-сурет). Өйткені l түзуі α жазықтығына перпендикуляр, ал MN түзуі осы жазықтықта жатыр. Енді MN кесіндісінің ұзындығын тік бұрышты үшбұрыш ережесіне сүйеніп анықтауға болады. $\Delta N_2 M_2 \bar{M}$ -тік бұрышты үшбұрыш, ал оның катеті $[M_2 \bar{M}]$ фронталь проекциядағы $N_1 N_0$ кесіндісіне тең, ал гипотенузасы ізделініп отырған қашықтықты анықтайды: $|N_2 \bar{M}| = |NM| = |M\bar{M}|$.

2. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық деп осы нүктеден сол жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың ұзындығын айтады. Сондықтан нүкте мен жазықтықтың ара қашықтығын анықтау үшін нүктеден жазықтыққа перпендикуляр түсіріп, оның табанын тұрғызу керек. Одан кейін берілген нүктемен перпендикулярдың табанын қосатын кесінді ұзындығын тік бұрышты үшбұрыш ережесін пайдаланып анықтайды.

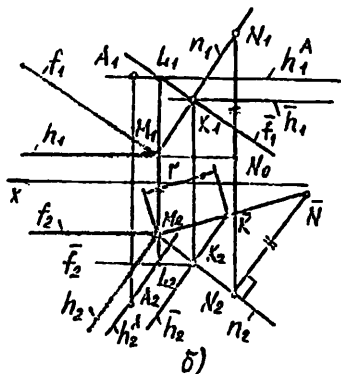
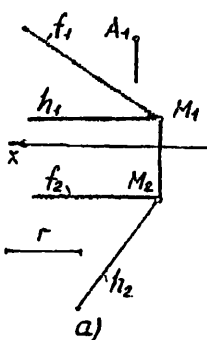
3-мысал. M нүктесінен $\alpha(ABC)$ жазықтығына дейінгі қашықтықты анықтау керек (119, а-сурет).

Алдымен $\alpha(ABC)$ жазықтығының фронтальдарының біреуін және горизонтальдарының біреуін салып аламыз (119, б-сурет): $A \in f \subset \alpha$; $C \in h \subset \alpha$. M нүктесі арқылы $\alpha(ABC)$ жазықтығына перпендикуляр n түзуін жүргіземіз. Бұл арада түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы туралы теореманы пайдалану керек, яғни n түзуінің фронталь проекциясы α жазықтығының фронталінің фронталь проекциясына және оның горизонталь проекциясы α жазықтығының горизонталінің горизонталь проекциясына тік бұрыш жасап орналасулары керек: $M_1 \in n_1 \perp f_1$ және $M_2 \in n_2 \perp h_2$. Осыдан кейін n түзуімен α жазықтығының қиылысу нүктесі табылады: $n \cap \alpha = K$. Сонда $[MK]$ берілген M нүктесінен $\alpha(ABC)$ жазық-



119-сурет

Берілген жазықтықтың фронталі мен горизонталінің қиылысу нүктесін M деп белгілеп, осы нүкте арқылы өтсін $\alpha(f|h)$ жазықтығына перпендикуляр n түзуін жүргіземіз: $M_1 \in n_1 \perp f_1$; $M_2 \in n_2 \perp h_2$. Осы түзудің бойынан кез келген N нүктесін алып, MN кесіндісінің шын ұзындығын



120-сурет

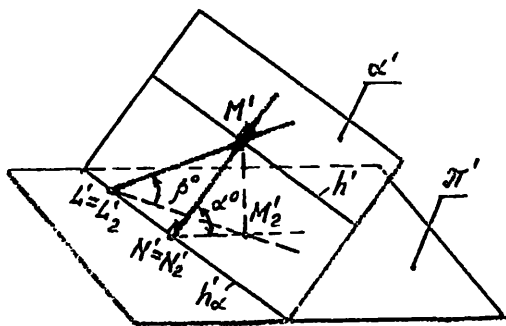
$[M_2\bar{N}]$ тұрғызамыз. $M_2\bar{N}$ түзуінің M_2 нүктесінен бастап берілген r -ге тең кесінді салып $\bar{K}$ нүктесін аламыз: $|M_2\bar{K}| = r$. $\bar{K}$ нүктесінен M_2N_2 түзуіне түсірілген перпендикулярдың табаны K_2 нүктесін анықтайды, ал вертикаль байланыс сызығын жүргізіп M_1N_1 түзуі бойынан K_1 нүктесін табамыз. Сонда табылған $K(K_1, K_2)$ нүктесінің $\alpha(f|h)$ жазықтығынан қалықтығы r өлшем болады. K нүктесі арқылы $\alpha(f|h)$ жазықтығына параллель $\beta(\bar{f} \cap \bar{h})$ жазықтығын жүргіземіз: $K_1 \in \bar{f}_1 \parallel f_1$; $K_1 \in \bar{h}_1 \parallel h_1$; $K_2 \in \bar{f}_2 \parallel f_2$; $K_2 \in \bar{h}_2 \parallel h_2$. Сонда A нүктесі β жазықтығында жатады, ал оның горизонталь проекциясын салу үшін A нүктесі арқылы β жазықтығының горизонталін (h^A түзуін) жүргіземіз: $A_1 \in h^A$, $h^A \cap \bar{f}_1 = L_1$;

тығына түсірілген перпендикуляр, ал оның ұзындығы $K_2M_2\bar{M}$ тік бұрышты үшбұрышының гипотенузасы ретінде анықталады. $|M\bar{K}_2| = |MK| = |Ma|$.

4-мысал. Берілген $\alpha(f|h)$ жазықтығынан r өлшем қашықтықта орналасқан $A(A_1)$ нүктесінің горизонталь проекциясын салу керек (120, а-сурет).

30. ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ДОМАЛУ СЫЗЫҒЫ ЖӘНЕ ПРОЕКЦИЯЛАР ЖАЗЫҚТЫҚТАРЫНА КӨЛБЕУЛІК БҰРЫШТАРЫ

Горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеу орналасқан α жазықтығын қарастыралық (122-сурет). Осы жазықтықтың M нүктесінде орналасқан ауыр домалақты босатып жіберсе, ол домалақ ауырлық күшінің әсерімен α жазықтығы бетімен домалап π_2 жазықтығына құлар еді. Сонда домалақтың жолы түзу сызық болады және ол түзу α жазықтығының горизонталь ізіне тік бұрыш жасап орналасады, ал жазықтықтың горизонтальдары оның горизонталь ізіне параллель орналасады. Сондықтан $(MN) \perp h$ болады. M нүктесінің горизонталь проекциясы M_2 , ал N нүктесі өзінің горизонталь проекциясымен біріккен, өйткені $N \in \pi_2$. MN түзуі α жазықтығының домалау сызығы болады, ал осы α жазықтығында шексіз көп домалау сызықтарын жүргізуге болады. Олар өзара параллель, яғни жазықтықтың ізіне перпендикуляр орналасады. Енді $\alpha^\circ = \angle MNM_2$ бұрышын қарастыралық. Оның бір қабырғасы (MN) -екі жазықтық α мен π_2 -нің қиылысу сызығы h_α -ге перпендикуляр болатыны туралы жоғарыда айтылды, ал екінші қабырғасы (NM_2) бірінші қабырғасының $((MN)$ -нің) π_2 жазықтығындағы тік бұрышты проекциясы. Көлбеуге перпендикуляр түзу сол көлбеудің проекциясына да перпендикуляр болады (үш перпендикулярлар туралы теорема), яғни $(NM_2) \perp h_\alpha$. Сонда α° жақтары α және π_2 , ал қыры h_α болатын екі жақты бұрыштың сызықтық бұрышы екенін көреміз. Ал h_α түзуі бойынан N нүктесінен өзге кез келген L нүктесін алып, сонда пайда болған $\beta^\circ = \angle LNM_2$ бұрышын қарастырсақ, онда $\beta^\circ < \alpha^\circ$ екенін байқаймыз. Осы айтылғанға байланысты жазықтықтың домалау сызығын оның ең үлкен көлбеулік сызығы деп те атайды.



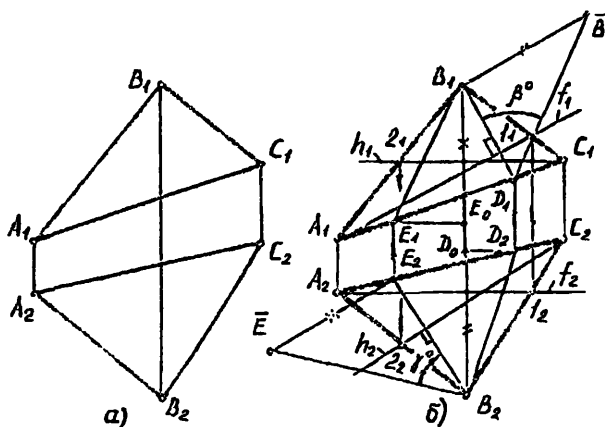
122-сурет

Жазықтықтың ең үлкен көлбеулік сызығы деп оның деңгейлік сызығына перпендикуляр орналасқан түзуін айтады. Жазықтықтың горизонталіне перпендикуляр орналасқан түзуін оның горизонталь проекциялар жазықтығына қарағандағы ең үлкен көлбеулік сызығы деп,

фронтальне перпендикуляр орналасқан түзуін оның фронталь проекциялар жазықтығына қарағандағы ең үлкен көлбеулік сызығы деп және профиліне перпендикуляр түзуін оның профиль проекциялар жазықтығына қарағандағы ең үлкен көлбеулік сызығы деп атайды. Ең үлкен көлбеулік сызық жазықтықтың проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрыштарын анықтауға мүмкіндік береді. Горизонталь проекциялар жазықтығына қарағандағы ең үлкен көлбеулік сызық сол жазықтықпен π_2 жазықтығының арасындағы бұрышты анықтайды. Фронталь проекциялар жазықтығына қарағандағы ең үлкен көлбеулік сызық пен π_1 жазықтығы арасындағы бұрыш берілген жазықтықтың фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышына тең. Жазықтықтың профиль проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы осы жазықтықтың π_3 -ке қарағандағы ең үлкен көлбеулік сызығы мен π_3 -тің арасындағы бұрышқа тең болады.

1-мысал. ABC үшбұрышы анықтайтын α жазықтығының фронталь және горизонталь проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын анықтау керек (123-сурет).

Ф р о н т а л ь
 п р о е к ц и я л а р
 п р о е к ц и я л а р
 ж а з ы қ т ы ғы н а
 к ө л б е у л і к
 б ұ р ы ш ы н
 а н ы қ т а у
 ү ш і н
 $\alpha(ABC)$ ж а з ы қ т ы
 ғы н ы ң π_1 -ге қ а р а
 ғ а н д а ғы е н ү л к е н
 к ө л б е у л і к с ы з ы
 ғы н (BD) с а л а м ы з.
 ABC ү ш б ұ р ы ш ы
 н ы ң A т ө б е с і а р қ ы
 л ы ө т е т і н ф р о н т а
 л ь н с а л ы п, о н ы ң
 ф р о н т а л ь п р о е к
 ц и я с ы н а B_1 н ү к т е с і н е н



123-сурет

циясына B_1 нүктесінен перпендикуляр түсіреміз. Осы B_1 нүктесі арқылы өтетін f_1 түзуімен тік бұрыш жасайтын түзу $[A_1C_1]$ -мен D_1 нүктесінде қиылысады, ал D_2 нүктесі D_1 нүктесін бастыра жүргізілген вертикаль түзумен $[A_2C_2]$ -нің қиылысу нәтижесінде табылады. $[B_1D_1]$ катеті болатын, ал екінші катеті $[B_1\bar{B}]$ -ның ұзындығы $|B_2D_2|$ -ге тең $D_1B_1\bar{B}$ тік бұрышты үшбұрышы салынған. Осы үшбұрыштың гипотенузасы мен проекцияға тең катеті аралығындағы бұрыш β° берілген $\alpha(ABC)$ жазық-

31. ТЕНДЕУІМЕН БЕРІЛГЕН ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ЭПИОРИН САЛУ. ТЕНСІЗДІКТЕР ЖҮЙЕСІМЕН АНЫҚТАЛҒАН КӨПЖАҚ

1. Тік бұрышты координаттар жүйесінде жазықтықтың жалпы теңдеуі былай жазылатынын білесіңдер: $Ax + By + Cz + D = 0$. Осы теңдіктің екі жағын да $(-D)$ -ға бөліп, $-D/A = a$, $-D/B = b$ және $-D/C = c$ деп белгілесек, жоғарыдағы теңдеу төмендегіше жазылады:

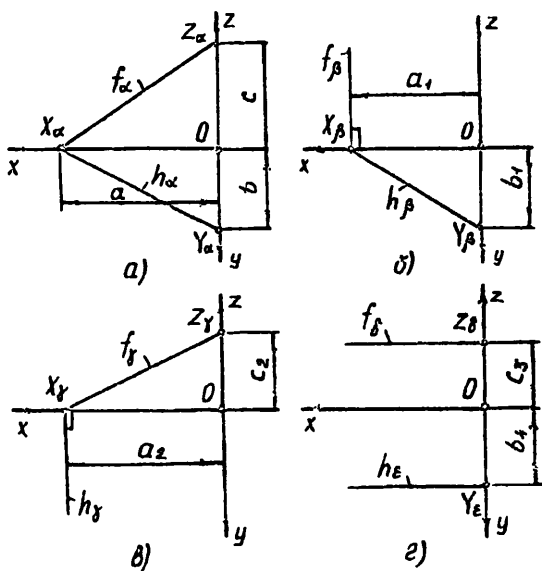
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (25)$$

Соңғы теңдеуді жазықтықтың кесінділер түріндегі теңдеуі дейді. (25) теңдеудің координаттар өстерімен қиылысу нүктелерін анықталық. Аб-

сциссалар өсінің теңдеуі $\begin{cases} y=0, \\ z=0; \end{cases}$ ординаталар өсінің теңдеуі $\begin{cases} x=0, \\ z=0; \end{cases}$ апп-

ликаталар өсінің теңдеуі $\begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases}$ болатыны белгілі. (25) теңдеуді абсцис-

салар өсі теңдеуімен бірге шешіп $X_a(a, 0, 0)$ нүктесінің, ординаталар өсі теңдеуімен бірге шешіп $Y_a(0, b, 0)$ нүктесінің және аппликаталар өсінің теңдеуімен бірге шешіп $Z_a(0, 0, c)$ нүктесінің координаттарын анықтаймыз. Сонда (25) теңдеуіне сәйкес α жазықтығының іздерін оңай салуға болатынын көреміз. Ол үшін координаттары бойынша X_a , Y_a және Z_a нүктелерін салып, X_a және Y_a нүктелерін қосатын түзу жүргізіп α жазықтығының горизонталь ізін h_α , ал X_a және Z_a нүктелерін қосатын түзу жүргізіп осы жазықтықтың фронталь ізін f_α аламыз (125, а-сурет). Эпиоріне қарап α жазықтығы жалпы жағдайда орналасқанын көреміз.



125-сурет

Горизонталь проекциялаушы β жазықтығы үшін $c_1 = \infty$, сондықтан Z_β нүктесі z өсінің шексіз қашықтықта жатқан нүктесі болады. Сонда горизонталь проекциялаушы жазықтықтың теңдеуі былай жазылады:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1 \quad (26)$$

және оның фронталь ізі f_β аппликалар өсіне параллель орналасады (125, б-сурет).

Фронталь проекциялаушы γ жазықтығы үшін $b_2 = \infty$, сондықтан Y_γ нүктесі y өсінің шексіз қашықтықта жатқан нүктесі болады. Сонда фронталь проекциялаушы жазықтықтың теңдеуі былай жазылады:

$$\frac{x}{a_2} + \frac{z}{c_2} = 1 \quad (27)$$

және оның горизонталь ізі h_γ ординаталар өсіне параллель орналасады (125, в-сурет).

Горизонталь жазықтық δ үшін $a_3 = \infty$ және $b_\infty = \infty$ болатындықтан, оның теңдеуі $z = c_3$ түрінде жазылады. Ал фронталь жазықтық ϵ үшін $a_4 = \infty$ және $c_4 = \infty$ болғандықтан, оның теңдеуі $y = b_4$ түрінде жазылады (125, г-сурет).

2. Жазықтық кеңістікті екіге бөледі. Егер жазықтық координаттар жүйесінің бас нүктесі арқылы өтпесе, онда бас нүкте орналасқан жарты кеңістіктің нүктелері мына теңсіздікті қанағаттандыра еді:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} < 1$. Сонда соңғы теңсіздікті координаттар жүйесінің бас нүктесі орналасқан жарты кеңістіктің теңдеуі деп қарастыруға болады. Ал бас нүкте орналаспаған жарты кеңістік нүктелерінің координаттары қана-

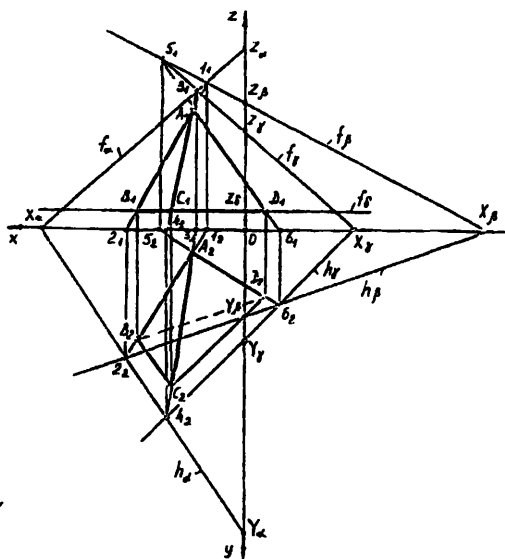
ғаттандыратын теңсіздік былай жазылады: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} > 1$. Жарты кеңістіктер тірелетін (25) теңдеумен анықталатын жазықтықты *түрелік жазықтық* деп атауға келіселік. Бірнеше теңсіздіктерден тұратын жүйені қарастырсақ оған кеңістікте қандай да болса белгілі бір көпжақ сәйкес болатынына көз жеткізу қиын емес.

1-мысал. Теңсіздіктер жүйесі берілген:

$$\begin{cases} \frac{x}{55} + \frac{y}{83} + \frac{z}{50} \leq 1, \\ \frac{x}{66} + \frac{y}{23} + \frac{z}{35} \geq 1, \\ \frac{x}{30} + \frac{y}{30} + \frac{z}{27} \leq 1, \\ z \geq 5. \end{cases}$$

Осы теңсіздіктер жүйесіне сәйкес көпжақтың фронталь және горизонталь проекцияларын салуды қарастыралық.

Қалауымызша координаттар өстерін жүргізіп, абсциссалар өсіне таңдап алынған масштабта 55-ке тең OX_α кесіндісін салып X_α нүктесін анықтаймыз. Ординаталар өсіне 83-ке тең OY_α кесіндісін салып Y_α нүктесін және аппликатаалар өсіне 50-ге тең OZ_α кесіндісін салып Z_α нүктесін анықтаймыз. X_α нүктесін Y_α нүктесімен қосатын түзу h_α және Z_α нүктесімен қосатын түзу f_α бірінші теңсіздікке сәйкес жарты кеңістіктің тіректік жазықтығы α -ның горизонталь және фронталь іздерін анықтайды (126-сурет). Екінші, үшінші және төртінші теңсіздіктердің тіректік жазықтықтарын β , γ және δ деп белгілейік. Аталған жазықтықтардың іздерін саламыз. Жазықтықтардың қиылысу сызықтарын саламыз: α және β жазықтықтары (12), α және γ жазықтықтары (34), β және γ жазықтықтары (56) түзулері бойымен қиылысады. Тұрғызылған үш түзу (12), (34) және (56) қиылысатын нүктені A деп белгілейік. Сонда A нүктесі жалпы жағдайда орналасқан үш жазықтықтың α , β және γ ортақ нүктесі болады. Төртінші δ жазықтығы горизонталь проекциялар жазықтығына параллель орналасқан деңгейлік жазықтық. Оның (12), (34) және (56) түзулерімен қиылысу нүктелерін табу қиын емес: $(12) \cap \delta = B$; $(34) \cap \delta = C$; $(56) \cap \delta = D$. Сонда берілген теңсіздіктер жүйесіне сәйкес көпжақ жақтары α , β , γ және δ жазықтықтарында жататын үшбұрышты пирамида $ABCD$ болатындығы анықталады.



126-сурет

2. Тік бұрышты үшбұрыш ережесін айтып беріңіз. Осы ережені пайдаланып кесіндінің шын ұзындығын және оның проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын қалай анықтайды?

3. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтықты және параллель скі түзудің ара қашықтығын қалай анықтауға болады?

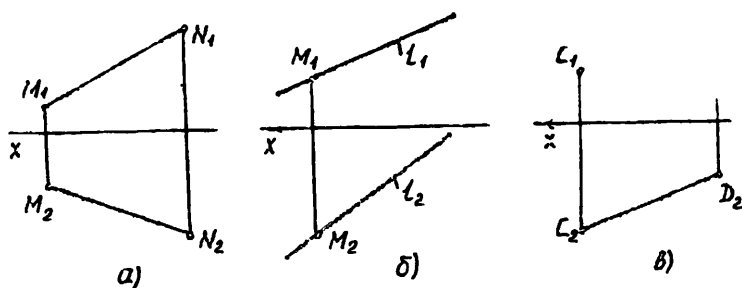
4. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты, параллель скі жазықтықтың ара қашықтығын және айқас түзулердің ең қысқа ара қашықтығын қалай табуға болады?

5. Жазықтықтың ең үлкен көлбеу сызығы туралы не айта аласыз және ең үлкен көлбеу сызықтар не үшін пайдаланылады?

6. Жазықтықтың кесінділер түріндегі теңдеуі қалай жазылады және теңдеуімен берілген жазықтықтың іздерін қалай салуға болады?

7. Теңсіздіктер жүйесімен берілген көпжақтың проекцияларын қалай салады? Тіректік жазықтық туралы не айта аласыз.

8. Берілген MN кесіндісінің ұзындығын, MN түзуінің фронталь және горизонталь проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын анықтаңыз (128, а-сурет).



128-сурет

9. Берілген l түзуіне оның M нүктесінен бастап ұзындығы 60 мм болатын MN кесіндісін салып, N нүктесінің фронталь және горизонталь проекцияларын тұрғызу керек (128, б-сурет).

10. Горизонталь проекциялар жазықтығына 30° -қа тең бұрышпен көлбейтін CD кесіндісінің эпюрін салуды аяқтаңыз (128, в-сурет).

11. A нүктесінен a түзуіне дейінгі қашықтықты тұрғызу керек (129, а-сурет).

12. M нүктесінен $a(a \parallel b)$ жазықтығына дейінгі қашықтықтың натурал шамасын анықтаңыз (129, б-сурет).

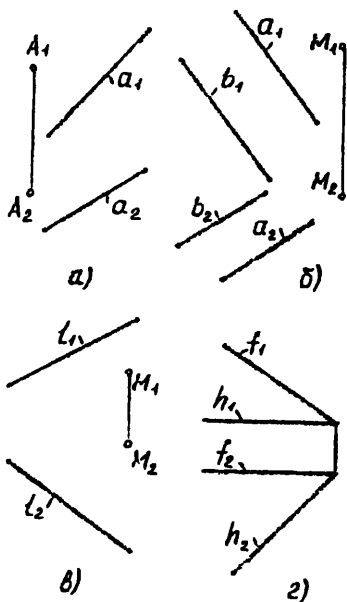
13. Түзу және оның бойында жатпайтын нүкте анықтайтын $\alpha(M, l)$ жазықтығының фронталь және горизонталь проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын анықтаңыз (129, в-сурет).

14. Берілген $\alpha(f \cap h)$ жазықтығына параллель және одан 20 мм қашықтықта орналасқан β жазықтығын салыңыз (129, г-сурет).

15. Теңсіздіктер жүйесі берілген:

$$\begin{cases} \frac{x}{90} + \frac{y}{65} + \frac{z}{50} \leq 1, \\ \frac{x}{65} + \frac{z}{110} \leq 1, \\ -\frac{x}{30} + \frac{z}{30} \leq 1, \\ \frac{x}{80} + \frac{z}{20} \geq 1, \\ y \geq 10. \end{cases}$$

Осы теңсіздіктер жүйесі анықтайтын көпжақтың фронталь және горизонталь проекцияларын салыңыз.



129-сурет

Бесінші тарау ЭПЮРДІ ТҮРЛЕНДІРУ

32. ЭПЮРДІ ТҮРЛЕНДІРУ ТУРАЛЫ ТҮСІНІК

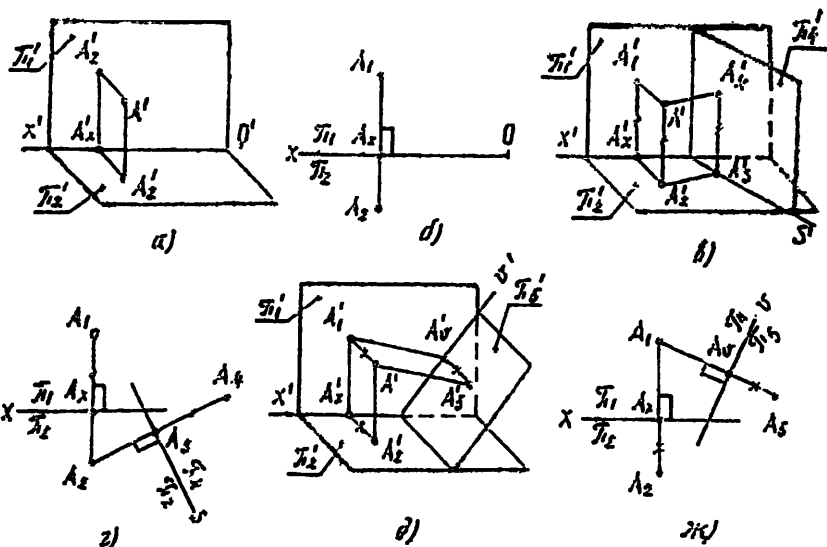
Жалпы жағдайда орналасқан түзудің эпюрін (57, 59-суреттер) дербес жағдайда орналасқан түзулердің эпюрлерімен (60, 61 және 63-суреттер) салыстыралық. Дербес жағдайда орналасқан түзулердің эпюрінен олардың проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын және кесінділердің ұзындықтарын анықтауға болады, ал жалпы жағдай түзуінің эпюріне қарап бұл айтылғандарды анықтауға болмайды. Сол сияқты проекциялаушы жазықтықтың эпюрінен (69, 71, 72-суреттер) оның проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын, ал деңгейлік жазықтықтың эпюрінен оның фигурасының ауданын (73-сурет) анықтауға болады. Жалпы жағдайда орналасқан жазықтықтың эпюрінен оның проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрыштарын, фигураларының ауданын бірден анықтай алмаймыз. Қорытып айтқанда, сызба геометрия есептерін шешудегі қиындықтар берілген фигура мен проекциялар жазықтықтарының өзара орналасуына байланысты болады.

Көбіне берілген фигураның жалпы жағдайда орналасуы есептерді шешуге ыңғайсыз болады. Керісінше, фигураның проекциялар жазықтықтарымен салыстырғанда дербес жағдайда орналасуы есептің шешуін әлдеқайда жеңілдетеді. Сондықтан есептің шешуін жеңілдету үшін, проекциялар жазықтықтарымен салыстырғандағы түзулердің және фигуралардың жалпы түрде орналасуынан дербес жағдайда орналасуына кошу керек.

Заттың берілген проекцияларын пайдаланып, оның есепті шешуге қолайлы проекцияларын салуды эпюрді түрлендіру деп атайды. Эпюрді түрлендірудің әдістері көп-ақ. Біз түрлендірудің төрт әдісіне ғана тоқталамыз: 1) проекциялар жазықтығын алмастыру; 2) айналдыру; 3) жазық параллель ығыстыру және 4) көмекші проекциялау әдістері.

33. ПРОЕКЦИЯЛАР ЖАЗЫҚТЫҒЫН АЛМАСТЫРУ

А нүктесінің аксонометриясын (130,а-сурет) және эпюрін (130,б-сурет) қарастыралық. Проекциялар жазықтығын алмастыру әдісін қолданғанда горизонталь π_2 және фронталь π_1 проекциялар жазықтықтарының біреуін жаңа проекциялар жазықтығымен алмастырады. Берілген заттың, біздің мысалымызда А нүктесінің, кеңістіктегі орнын өзгертпей қалдырады. Егер фронталь проекциялар жазықтығы π_1 -ді жаңа проекциялар жазықтығы π_4 -пен алмастыратын болсақ (130,в-сурет), онда



130-сурет

жаңа проекциялар жазықтығы π_4 -ті алмастырылмай сақталатын π_2 жазықтығына перпендикуляр орналастырады. Затты жаңа проекциялар жазықтығына тік бұрыштап проекциялайды. A нүктесінің π_4 жазықтығындағы проекциясы A_4 болсын. Мұнда π_4 -ді ескі проекциялар жазықтығы, A_4 -ді ескі проекция және x -ті ескі өс, ал π_2 -ті жаңа проекциялар жазықтығы, A_2 -ті жаңа проекция және s -ті жаңа өс деп атайтын боламыз. (A_1A_2) — ескі байланыс сызығы, (A_2A_4) — жаңа байланыс сызығы. Нүктенің кеңістіктегі орны өзгермейтіндіктен, оның горизонталь проекциялар жазықтығынан қашықтығы да өзгермейді: $|AA_2| = |A_1A_x| = |A_4A_s|$. Эпюр алу үшін жаңа проекциялар жазықтығы π_4 -ті өстен айналдырып горизонталь проекциялар жазықтығымен беттестіреміз. Сонда (A_2A_4) сызығының s -ке перпендикуляр болатынына көз жеткізу қиын емес. Эпюрде A нүктесінің жаңа проекциясы A_4 -ті салу үшін оның сақталатын проекциясы A_2 арқылы s түзуіне перпендикуляр жүргізіп, оған $|A_1A_x|$ -ке тең A_4A_s кесіндісін салса болғаны (130, г-сурет).

Егер горизонталь проекциялар жазықтығы π_2 -ні алмастыратын болсақ, онда жаңа проекциялар жазықтығы π_3 сақталатын π_1 жазықтығына перпендикуляр орналастырылады (130, д-сурет): $\pi_1 \cap \pi_3 = v$. A нүктесінің π_3 жазықтығындағы проекциясы A_3 -ті көрсетелік. Енді нүктенің фронталь проекциялар жазықтығынан қашықтығы өзгермейді: $|AA_1| = |A_xA_2| = |A_3A_5|$. Эпюр алу үшін π_3 жазықтығын v түзуінен айналдырып

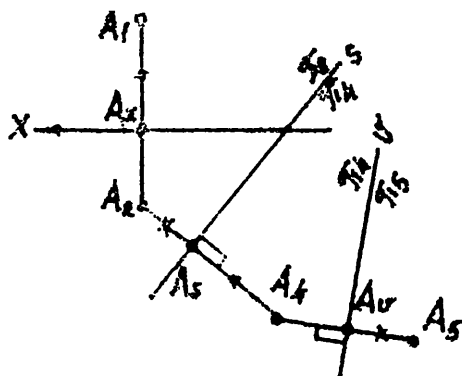
фронталь проекциялар жазықтығымен беттестіреміз. Сонда жаңа байланыс сызығы (A_1A_5) жаңа өске (v сызығына) перпендикуляр болады. Сондықтан эпюрге жаңа проекцияны салу үшін A_1 нүктесі арқылы v түзуіне перпендикуляр жүргізіп, оған $|A_1A_2|$ -ге тең A_1A_5 кесіндісін салу жеткілікті (130, ж-сурет).

Жаңа проекция тұрғызылғаннан кейін ескі проекцияны ескермеуге болады. Өзара перпендикуляр π_1 және π_2 жазықтықтарынан тұратын жүйені ескі жүйе, ал π_2 және π_4 немесе π_1 және π_5 жазықтықтарынан тұратын жүйені жаңа жүйе деп атауға болады. Біздер (π_1, π_2) жүйесінен (π_2, π_4) немесе (π_1, π_5) жүйесіне көштік. Заттың жаңа проекциясын салу үшін ескі жүйеден жаңа жүйеге көшкенде өзгермей қалатын қасиеттерін пайдалану керек. Осындай өзгермей қалатын қасиеттерді эпюрді *түрлендірудің инварианттары* дейді. Проекциялар жазықтықтарын алмастыру әдісінің инварианттары:

- 1) жаңа байланыс сызықтары жаңа өске перпендикуляр орналасады;
- 2) нүктенің ескі проекциясынан ескі өске дейінгі қашықтығы оның жаңа проекциясынан жаңа өске дейінгі қашықтығына тең болады.

Көптеген есептерді шығаруда ескі проекциялар жазықтықтарының біреуін ғана алмастыру жеткіліксіз. Сондықтан ескі жүйедегі проекциялар жазықтықтарының екеуін де бірте-бірте жаңа жазықтықтармен алмастыруға болады. Мысалы (π_1, π_2) жүйедегі π_1 жазықтығын π_4 жазықтығымен алмастырып аралық (π_2, π_4) жүйесіне, одан кейін (π_2, π_4) жүйесіндегі π_2 жазықтығын π_5 жазықтығымен алмастырып (π_4, π_5) жүйесіне көшуге болады. A нүктесінің эпюрі берілсін (131-сурет). Фронталь проекциялар жазықтығын π_4 жазықтығымен алмастыралық. Осы π_4 және π_2

жазықтықтарының қиылысу сызығын (жаңа өсті) калауымызша жүргізуге болады. A нүктесінің π_4 жазықтығындағы проекциясын проекциялар жазықтығын алмастыру әдісінің жоғарыда көрсетілген инварианттарына сүйеніп саламыз. Бірінші инвариантқа сәйкес жаңа байланыс сызығын жаңа өске перпендикуляр етіп жүргізейміз: $A_2 \in (A_1A_4) \perp s$. Екінші инвариантқа сүйеніп жаңа байланыс сызығына жаңа өстен бастап нүктенің ескі проекциясынан (A_1 ,



131-сурет

ден) ескі өске (x -ке) дейінгі қашықтыққа тең A_3A_4 кесіндісін саламыз. Сонда A нүктесінің π_4 жазықтықтағы проекциясын (A_4 -ті) аламыз. Енді горизонталь проекциялар жазықтығын π_4 -ке перпендикуляр π_5 жазықтығымен алмастырамыз. Заттын π_5 жазықтығындағы проекциясын салу кезінде A_1 мен x -ті ескермейміз. Нүктенің ескі проекциясы ретінде A_2 нүктесі, ал ескі өс ретінде s түзуі алынады: $v = \pi_4 \cap \pi_5$. Жана v өсін қалауымызша жүргіземіз: $A_4 \in (A_4A_5) \perp v$, $|A_4A_5| = |A_3A_4|$.

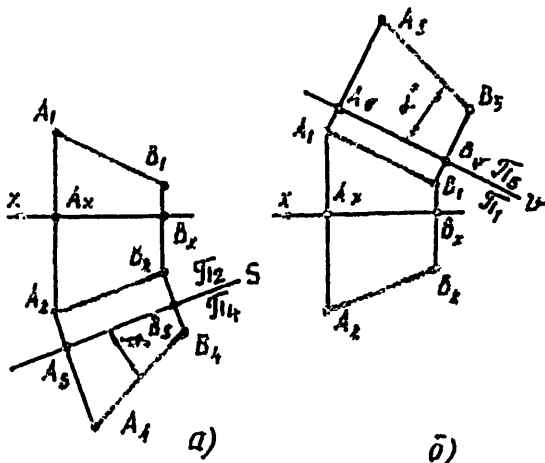
Керек болған жағдайда жазықтықтарды алмастыру процесін одан әрі жалғастыра береді. $(\pi_4\pi_5)$ жүйесін $(\pi_5\pi_6)$ жүйесіне, $(\pi_5\pi_6)$ жүйесін $(\pi_6\pi_7)$ жүйесіне т. с. с. көшуге болады.

34. ЭПИОРДІ ТҮРЛЕНДІРУ АРҚЫЛЫ ШЕШІЛЕТҮІ НЕГІЗГІ ТӨРТ ЕСЕП

Сызба геометрияда есептерді шешу үшін эпюрді түрлендіру кең түрде қолданылады. Әр түрлі есептерді түрлендіру әдістерімен шешу төмендегі негізгі төрт есепке келтіріледі.

1-есеп. Жалпы жағдайда орналасқан түзуді деңгейлік түзуге түрлендіру керек.

Жалпы жағдайда орналасқан AB түзуі берілсін (132,а-сурет). Деңгейлік түзу дең кандай да болсын проекциялар жазықтығына параллель түзуді айтатынын § 17-тан білеміз. Сондықтан жаңа проекциялар жазықтығын AB түзуіне параллель орналастыру керек. Егер фронталь проекциялар жазықтығын алмастырсақ, онда жаңа өс $s(s = \pi_2 \cap \pi_4)$ түзудің горизонталь проекциясы-



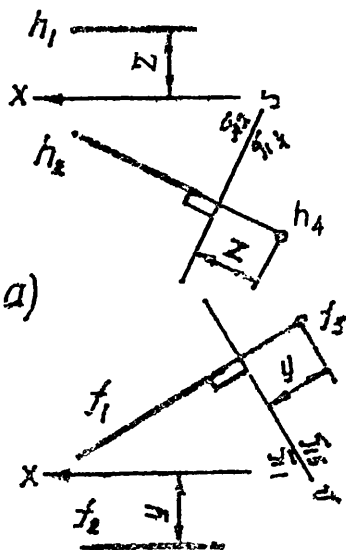
132-сурет

на параллель жүргізіледі (132,а-сурет): $s \parallel (A_2B_2)$. Бірінші инвариантқа сәйкес A_2 және B_2 нүктелері арқылы s түзуіне перпендикуляр түзулер жүргізіледі. Екінші инвариантты пайдаланып ($|A_2A_4| = |A_1A_x|$) және $|B_2B_4| = |B_1B_x|$) A_4, B_4 нүктелерін тауып, оларды түзудің кесіндісімен қосамыз. Сонда AB түзуі жана $(\pi_2\pi_4)$ жүйесінде деңгейлік түзу болады, өйткені $(AB) \parallel \pi_4$.

Горизонталь проекциялар жазықтығын алмастыруымызға да болады. (π_1, π_2) -ден (π_1, π_3) жүйесіне көшкенде жаңа өсті $(v = \pi_1 \cap \pi_3)$ түзудің фронталь проекциясына параллель етіп жүргізеді (132, 6-сурет). AB түзуі (π_1, π_3) жүйесінде де деңгейлік түзу, өйткені $(AB) \parallel \pi_3$; $|A_4B_4| = |A_5B_5| = |AB|$; $\alpha^\circ = (AB), \pi_1$; $\beta^\circ = (AB), \pi_2$. Сонымен 1-есепті шешудің нәтижесінде кесіндінің ұзындығы және оның проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштары анықталады.

2-есеп. Деңгейлік түзуді проекциялаушы түзуге түрлендіру керек.

Проекциялаушы түзу проекциялар жазықтықтарының біреуіне перпендикуляр түзу болғандықтан жаңа проекциялар жазықтығы берілген түзуге перпендикуляр болуы керек. Берілген деңгейлік түзу горизонталь (133, а-сурет), немесе фронталь (133, б-сурет) болуы мүмкін. Бірінші жағдайда фронталь проекциялар жазықтығын алмастыруымыз керек. Сондықтан жаңа ос s горизонтальдың горизонталь проекциясына перпендикуляр жүргізіледі: $s \perp h_2$. Түзудің π_4 жазықтығындағы проекциясы нүкте болатынын көреміз. Олай болса h түзуі (π_2, π_4) жүйесінде проекциялаушы түзу екен (133, а-сурет). Екінші жағдайда горизонталь проекциялар жазықтығын алмастыруымыз керек. Енді жаңа өсті (v)

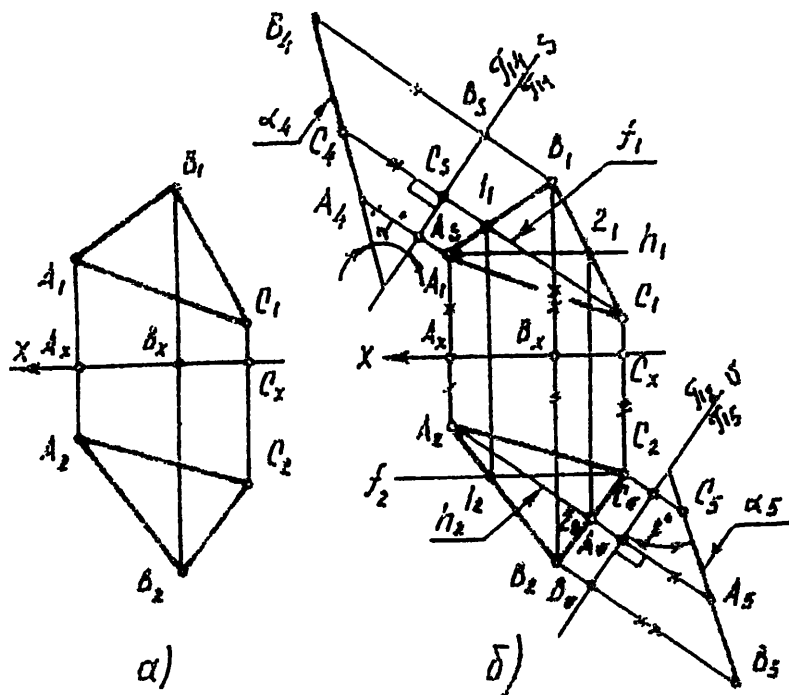


133-сурет

фронтальдың фронталь проекциясына перпендикуляр етіп жүргіземіз: $v \perp f_1$. Түзудің π_3 жазықтығындағы проекциясын салып, оның (π_1, π_3) жүйесінде проекциялаушы түзуге айналғанын байқаймыз (133, б-сурет).

3-есеп. Жалпы жағдайда орналасқан жазықтықты проекциялаушы жазықтыққа түрлендіру керек.

Бізге ABC үшбұрышы анықтайтын α жазықтығын проекциялаушы жазықтыққа түрлендіру керек болсын (134, а-сурет). Проекциялаушы жазықтық проекция жазықтығына перпендикуляр орналасатынын біз білеміз. Сондықтан жаңа проекциялар жазықтығы α -ға перпендикуляр болуы қажет. Есепті горизонталь немесе фронталь проекциялар жазықтықтарының біреуін алмастыру арқылы шешуге болады. Алдымен горизонталь проекциялар жазықтығын жаңа π_4 жазықтығымен алмастыра-



134-сурет

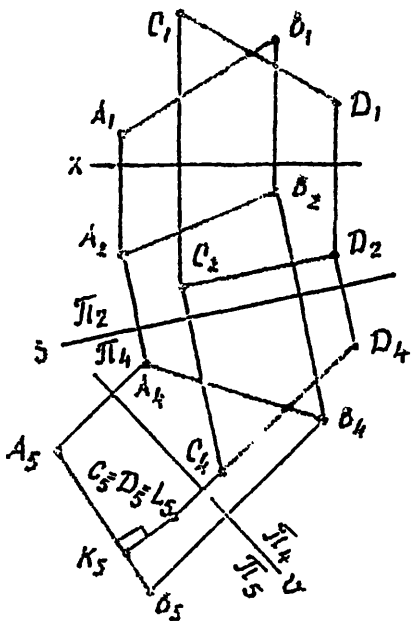
лық. Осы мақсат үшін α жазықтығының фронтальдарының біреуін жүргіземіз. Суретте C нүктесін басып өтетін фронталь көрсетілген. Жаңа өс s фронтальдың фронталь проекциясына f_1 -ге перпендикуляр: $s \perp f_1$. Мына теңдіктерді: $|A_1 A_s| = |A_2 A_x|$, $|B_1 B_s| = |B_2 B_x|$, $|C_1 C_s| = |C_2 C_x|$ ескере отырып ABC үшбұрышының π_4 жазықтығындағы проекциясын тапсақ, онда A_4 , B_4 және C_4 нүктелерінің бір түзудің бойында орналасқанын байқаймыз. Олай болса біз дегенімізге жеттік, α жазықтығы (π, π_4) жүйесінде проекциялаушы жазықтыққа айналды. Жазықтықтың түзуге айналған проекциясы α_4 пен s өсі аралығындағы бұрыш α жазықтығының фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтайды: $\alpha^\circ = \alpha_4^\circ = \alpha^\circ$, π_1 . Енді фронталь проекциялар жазықтығын жаңа π_2 жазықтығымен алмастыралық. Ол үшін A нүктесі арқылы α жазықтығының горизонталі h -ты жүргіземіз. Жаңа өс v горизонтальдың горизонталь проекциясына перпендикуляр: $v \perp h$. ABC үшбұрышының π_2 жазықтығындағы проекциясын табамыз. A_2 , B_2 және C_2 нүктелері бір түзудің бойында орналасқан. Олай болса α жазықтығы (π_2, π_3) жүйесінде де проек-

$\pi_3 \parallel \alpha(ABC); |A_1A_3|=|A_1A_x|; |B_4B_3|=|B_1B_x|; |C_4C_3|=|C_1C_x|;$
 $(A_2A_4) \parallel (B_2B_4) \parallel (C_2C_4) \perp \Sigma. ABC$ үшбұрышы π_4 жазықтығына өзінің шын
 мөлшерін сақтап проекцияланады: $\Delta ABC = \Delta A_4B_4C_4$. Егер берілген жазықтық фронталь проекциялаушы жазықтық болса, онда горизонталь проекциялар жазықтығын алмастырамыз. Жаңа өсті берілген DEF үшбұрышының түзуге кескінделген фронталь проекциясына параллель жүргіземіз. $\pi_3 \parallel \beta(DEF); (D_1D_3) \parallel (E_1E_3) \parallel (F_1F_3) \perp v; |D_1D_3|=|D_2D_x|; |E_1E_3|=|E_2E_x|;$
 $|F_1F_3|=|F_2F_x|$. DEF үшбұрышы π_3 жазықтығына өзінің ауданын сақтап проекцияланады: $\Delta DEF = \Delta D_3E_3F_3$.

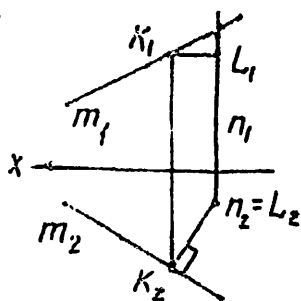
Мысалдар қарастырайық.

1-мысал. Берілген AB және CD түзулерінің ара қашықтығын анықтау керек (137-сурет).

Эпюрлеріне қарап AB және CD айқас түзулер екендіктерін анықтаймыз. Айқас түзулердің ара қашықтығы деп сол түзулерге жүргізілген ортақ перпендикулярмен қиылысу нүктелерін қосатын кесіндінің ұзындығын айтады. Айқас түзулердің ортақ перпендикуляры жалғыз болғандықтан есептің тек бір ғана шешуі болады. Алдымен берілген түзулердің біреуі проекциялаушы түзу болатын дербес жағдайын қарастыралық (138-сурет). m түзуі жалпы жағдайда орналасқан, ал n -горизонталь проекциялаушы түзу. KL түзуі осы берілген m және n түзулерінің ортақ перпендикуляры болсын. $(KL) \perp m; (KL) \perp n; (KL) \cap m = K;$
 $(KL) \cap n = L. n \perp \pi_2, n \perp (KL) \Rightarrow (KL) \parallel \pi_2$. Өзара перпендикуляр KL және m екі түзудің біреуі горизонталь проекциялар жазықтығына параллель. Олай болса олардың горизонталь проекциялары өзара тік бұрыш жасаулары керек. Сондықтан n_2 нүктесінен m_2 түзуіне перпендикуляр түсірміз. Осы перпендикулярдың табаны K_2 нүктесі. Сонда K_2 және $L_2 = n_2$ нүктелерінің ара қашықтығы берілген m және n түзулерінің ара қашықтығын береді. KL ке-



137-сурет

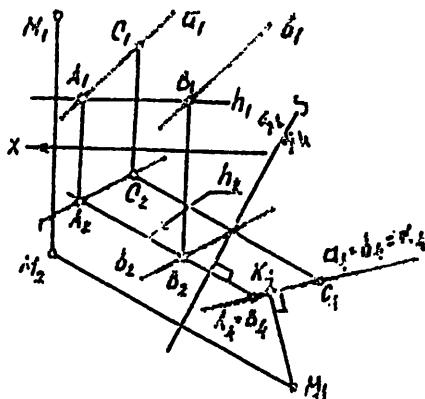


138-сурет

сіндісінің фронталь проекциясын, алдымен m_1 түзуі бойынан K_1 нүктесін тауып, x өсіне параллель жүргіземіз. Енді жалпы жағдайда орналасқан AB және CD түзулерінің ара қашықтығын анықтауға көшелік. Ол үшін берілген екі түзудің біреуін проекциялаушы түзуге түрлендіру керек. Жалпы жағдайда орналасқан түзуді бірден проекциялаушы түзуге түрлендіруге болмайды. Алдымен жалпы жағдайда орналасқан түзуді деңгейлік түзуге түрлендіріп алу керек (1-есеп). Содан кейін деңгейлік түзуді проекциялаушы түзуге түрлендіруге болады (2-есеп). 137-суретте (π_1, π_2) жүйесі (π_2, π_4) жүйесіне, одан кейін (π_2, π_4) жүйесі (π_4, π_5) жүйесіне түрлендірілген. (π_2, π_4) жүйесінде (CD) деңгейлік түзуге, ал (π_4, π_5) жүйесінде (CD) проекциялаушы түзуге түрлендірілген. π_5 жазықтығына CD түзуі нүктеге кескінделеді: $C_5 = D_5$. Осы нүктеден A_5B_5 түзуіне перпендикуляр түсіріп, берілген AB және CD түзулерінің ара қашықтығы $|K_5L_5|$ кесіндісін аламыз: $|(AB)(CD)| = |K_5L_5|$.

2-мысал. M нүктесінен $\alpha(a \parallel b)$ жазықтығына дейінгі қашықтықты анықтау керек (139-сурет).

Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық осы нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың ұзындығымен анықталады. Эпюрді түрлендіріп, жалпы жағдайда орналасқан жазықтықты проекциялаушы жазықтыққа айналдырамыз, яғни 3-есепті шешеміз. Фронталь проекциялар жазықтығын α -ға перпендикуляр π_4 жазықтығымен алмастырдық. Берілген нүктенің жана проекциясы M_4 нүктесінен $a_4 = b_4 = \alpha_4$ түзуіне перпендикуляр түсірілген. Осы перпендикулярдың табаны K_4 пен M_4 нүктесін қосатын кесіндінің ұзындығы M нүктесінен α жазықтығына дейінгі қашықтыққа тең болады: $|Ma| = |M_4K_4|$.



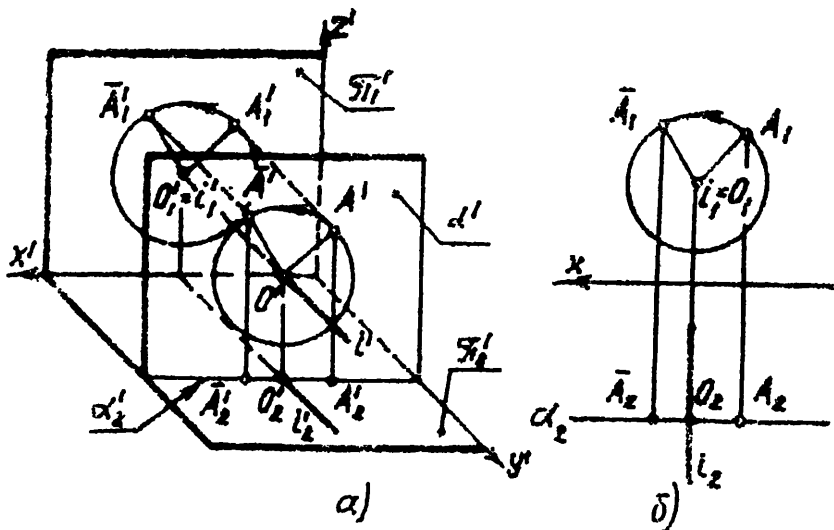
139-сурет

Егер жалпы жағдайда орналасқан жазық фигураның шын пішінін анықтау керек болса, онда проекциялар жазықтығын алмастыру әдісін екі рет қолданып берілген фигураның жазықтығын алдымен проекциялаушы жазықтыққа, одан кейін деңгейлік жазықтыққа түрлендіру керек.

35. ПРОЕКЦИЯЛАУШЫ ТҮЗУДЕН АЙНАЛДЫРУ

Айналдыру әдісінде проекциялар жазықтықтарына тимейді, ал берілген затты өс деп аталатын түзуден айналдырады. Заттын барлық

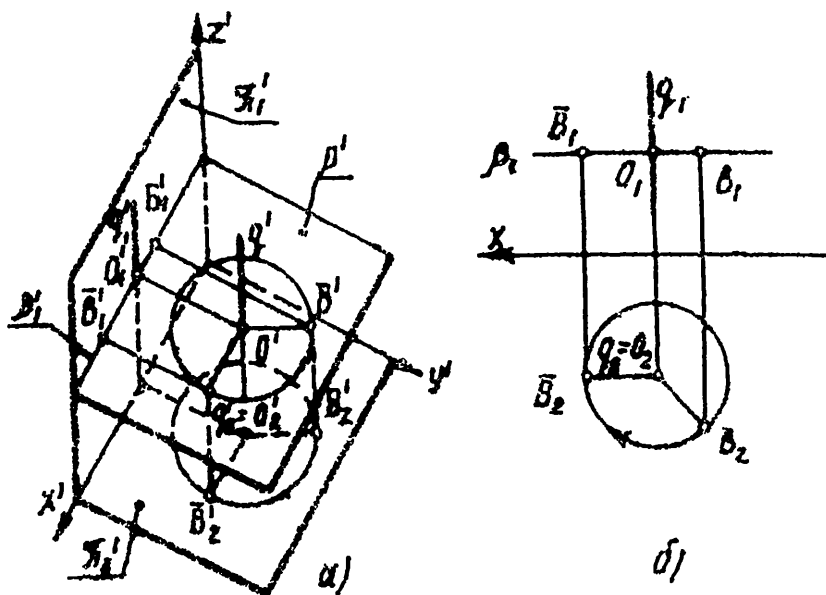
нүктелері айналу осінің айналасында бірдей бұрыштарға бұрылады. А нүктесін фронталь проекциялаушы i өсінен айналдыратын болсақ, онда ол нүкте центрі айналу өсінде жататын шеңбер сызар еді. Шеңбердің центрі O деп белгілесек, онда $O \in i$. Шеңбердің жазықтығы α фронталь проекциялар жазықтығына параллель және айналу өсіне перпендикуляр орналасады (140-сурет): $\pi \parallel \alpha \perp i$. Айналу шеңберінің центрі нүкте-



140-сурет

ден айналу өсіне түсірілген перпендикулярдың табаны ретінде анықтауға болады: $O = \alpha \cap i$. Айналу шеңберінің радиусы $|AO|$ -ға тең. $(O; |AO|)$ шеңбері фронталь проекциялар жазықтығына бұрмаланбай, натурал шамасын сақтап, проекцияланады. Эпюрге (140,б-сурет) нүктенің фронталь проекциясы центрі айналу өсінде болатын шеңбердің бойымен орнын ауыстырады, ал горизонталь проекциясы x өсіне параллель түзудің бойымен орнын ауыстырады. Нүктенің түрленгеннен кейінгі орнын оны белгілейтін әріптің үстіне қойылған сызықша белгісімен көрсетеді. В нүктесін горизонталь проекциялаушы q өсінен айналдырсақ, оның горизонталь проекциясы шеңбер, ал фронталь проекциясы абсцисса өсіне параллель түзу бойымен қозғалады (141-сурет). Проекциялаушы түзуден айналдыру өдісінің инварианттары:

- 1) нүктенің өске перпендикуляр жазықтықтағы проекциясы центрі айналу осінде болатын шеңбер бойымен қозғалады;
- 2) нүктенің айналу өсіне параллель жазықтықтағы проекциясы x өсіне параллель түзу бойымен қозғалады.

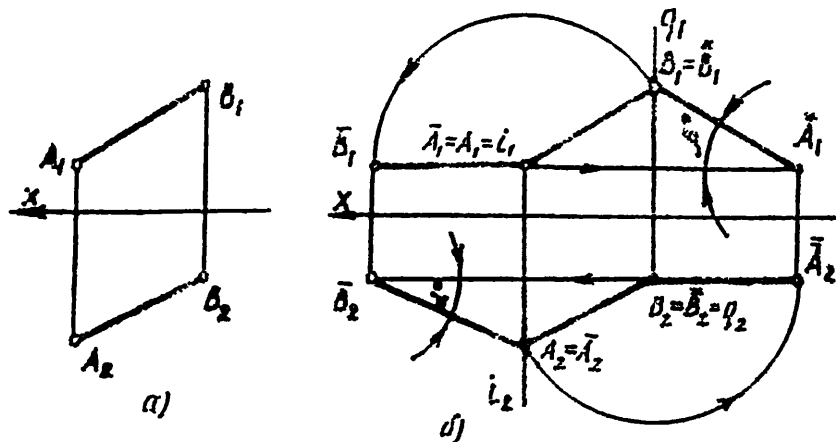


141-сурет

Кейбір есептерді шешу үшін тек бір өстен айналдыру жеткіліксіз болуы мүмкін. Мұндай жағдайларда айналдыру әдісін бірнеше рет қолдануға болады. Алдымен берілген затты проекциялар жазықтықтарының біріне перпендикуляр түзуден, одан кейін екіншісіне перпендикуляр түзуден айналдырады.

1-мысал. AB кесіндісінің ұзындығын және проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын анықтау керек (142, а-сурет).

Бұл эпюрді түрлендіру арқылы шешілетін негізгі төрт есептің (§ 34) біріншісі екенін аңғару қиын емес. Жалпы жағдайда орналасқан AB кесіндісін деңгейлік кесіндіге айналдыру керек. Фронталь проекциялаушы және A нүктесі арқылы өтетін i өсінен B нүктесін айналдыралық. Айналдыру әдісінің инварианттары бойынша B нүктесінің фронталь проекциясы центрі A_1 нүктесі болатын шеңбер бойымен, ал горизонталь проекциясы x өсіне параллель түзу бойымен қозғалады. Сондықтан A_1 нүктесі арқылы жүргізілген горизонталь түзу мен $(A_1; |A_1B_1|)$ шеңберінің қиылысу $\bar{B}_1$ нүктесі эпюрді түрлендіргеннен кейінгі B нүктесінің фронталь проекциясын береді. $\bar{B}_1$ нүктесінің горизонталь проекциясын $\bar{B}_2$ тауып, оны A_2 нүктесімен қосалық. Сонда берілген кесіндінің ұзындығын және оның фронталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын табамыз.



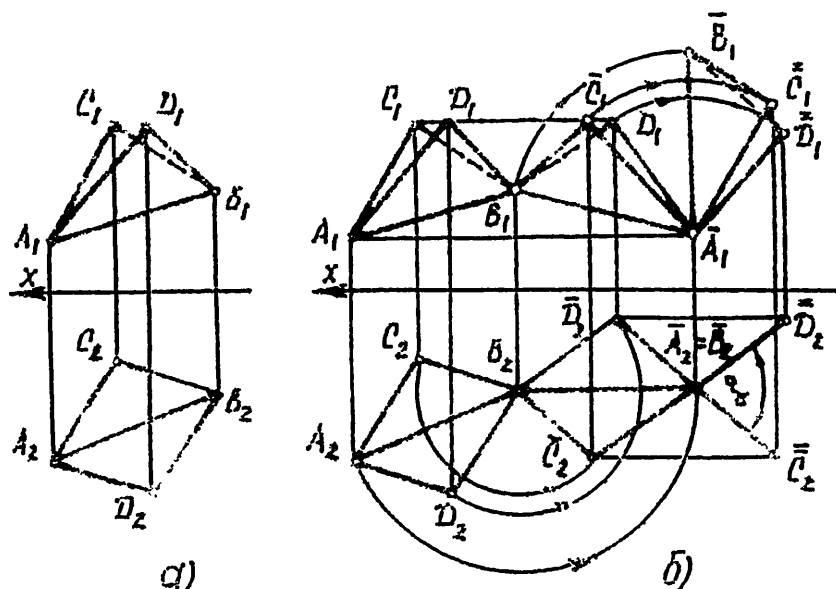
142-сурет

$$|A_2\bar{B}_2|=|AB|; (\bar{A}_2\bar{B}_2) \wedge (\bar{B}_2B_2) = (AB) \wedge \pi_1 = \alpha^\circ.$$

Түзудің горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтау үшін оны горизонталь проекциялаушы түзуден фронталь болғанша айналдыру керек. Айналдыру өсі q тұрғызуды жеңілдету үшін B нүктесі арқылы π_2 -ге перпендикуляр жүргізілген: $B \in q \perp \pi_2$ ($A_2\bar{B}_2$) $\parallel x$; $|\bar{A}_2\bar{B}_2|=|AB|$; $(AB) \wedge \pi_2 = \beta^\circ$.

2-мысал. (ABC) және (ABD) жазықтықтары арасындағы екі жақты бұрыштың мөлшерін табу керек (143, а-сурет).

Екі жақты бұрыштың мөлшері деп оның сызықтық бұрышын айтады. Екі жақты бұрыштың сызықтық бұрышы екі жақты бұрыштың қырына перпендикуляр жазықтыққа өзінің натурал шамасын сақтап проекцияланады. Эпюрді түрлендіру арқылы шешілетін төрт есептің біріншісін пайдаланып, екі жақты бұрышты оның қыры фронталь проекциялар жазықтығына параллель болғанша B нүктесі арқылы өтетін горизонталь проекциялаушы өстен айналдырамыз. Содан кейін екінші есепті пайдаланып, екі жақты бұрышты оның қыры горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр болғанша A нүктесі арқылы өтетін фронталь проекциялаушы өстен айналдырамыз. Суретте айналу остері көрсетілмеген. Түрлендіру нәтижесінде (ABC) және (ABD) жазықтықтары, олардың қиылысу сызығы горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр орналасады. Сондықтан $\angle \bar{C}_2\bar{A}_2\bar{D}_2 = \alpha^\circ$ бұрышы екі жақты бұрыштың мөлшерін анықтайды: $\angle \bar{C}_2\bar{A}_2\bar{D}_2 = (ABC) \wedge (ABD) = \alpha^\circ$.



143-сурет

Жалпы жағдайда түзуді айналдыру үшін оның екі нүктесін, ал жазықтықты айналдыру үшін оның бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктесін берілген бұрышқа бұру жеткілікті. Бірақ, айналу өсіне есепті шешуді жеңілдету үшін берілген түзуді немесе жазықтықты қиятындай етіп алуға болады. Сонда түзуді айналдыру оның бір нүктесін, ал жазықтықты айналдыру оның екі нүктесін айналдыруға келтіріледі. Өйткені түзудің немесе жазықтықтың айналу өсімен қиылысу нүктесі өзінің орнын өзгертпейді.

Фигураның айналу өсіне перпендикуляр жазықтықтағы проекциясы форма және шама жағынан өзгермейді. Айналдыру әдісін пайдалануда түрлендірудің бұл қасиеті жиі қолданылады. Мысалы осы қасиетті 143-суретте C_2 нүктесін салуда қолдандық. A_2 нүктесін анықтағаннан кейін C_2 нүктесін ($B_2; |B_2C_2|$) шеңбері бойынан іздейміз. Горизонталь проекцияның формасы және шамасы өзгермейтіндіктен $|A_2C_2| = |A_2C_2|$ болады. Сондықтан ($A_2; |A_2C_2|$) шеңберін жүргізіп, оның ($B_2; |B_2C_2|$) шеңберімен қиылысу нүктесі B_2 -ні саламыз.

36. ДЕНГЕЙЛІК ТҮЗУДЕН АЙНАЛДЫРУ

Бұл әдісті көбінесе берілген жазық фигураның натурал шамасын табу керек болған жағдайда ғана қолданады. Сондықтан берілген жазық фигураны деңгейлік түзулерінің біреуінің айналасында сәйкес проекциялар жазықтығына параллель болғанша бұрады. Фигураның айналу өсіне параллель жазықтықтағы проекциясы ғана эпюрге көрсетіледі, ал оның басқа проекциялары көрсетілмейді. Фигураның нүктелері центрі айналу өсінде болатын шеңберлер бойымен қозғалады. Шеңберлердің жазықтықтары айналу өсіне және өске параллель проекциялар жазықтығына перпендикуляр болады. Сондықтан аталған шеңберлер айналу өсіне параллель жазықтыққа сол оске перпендикуляр кесінділер болып кескінделеді.

Деңгейлік түзуден айналдыру әдісінің инварианттары:

1) нүктенің айналу өсіне параллель жазықтықтағы проекциясы өстің сол жазықтықтағы проекциясына перпендикуляр түзудің бойымен қозғалады;

2) кесіндінің айналу өсіне параллель жазықтықтағы жаңа проекциясы сол кесіндінің өзіне тең болады.

Мысалдар қарастыралық.

1-мысал. ABC үшбұрышының натурал шамасын салу керек (144, а-сурет). Деңгейлік түзуден айналдыру әдісін қолданалық. (ABC) жазықтығының A нүктесі арқылы өтетін фронталь f -ті жүргізілсек және оны айналу осі ретінде қабылдайық. A және 1 нүктелері айналу өсінде жатыр, сондықтан олар

қозғалмайды:

$A_1 = \bar{A}_1$; $1_1 = \bar{1}_1$. B

және C нүктелерінің жаңа фронталь

проекцияларын табу үшін

деңгейлік түзуден

айналдыру әдісі ин-

варианттарын пай-

даланамыз. Бірінші

инвариантқа сүйе-

ніп B_1 және C_1 нүк-

телері арқылы f_1 -ге

перпендикуляр тү-

зулер жүргіземіз. B

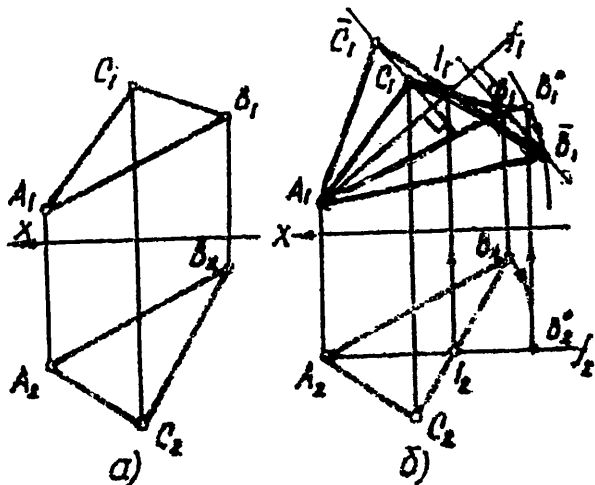
және C нүк-

телері арқылы f_1 -ге

перпендикуляр тү-

зулер жүргіземіз. B

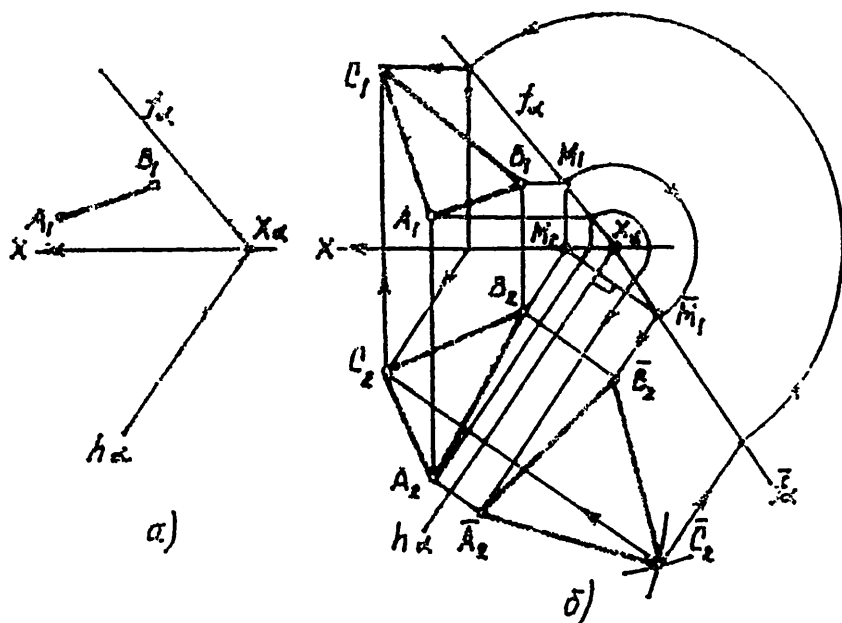
және C нүк-



144-сурет

телерінің жаңа проекцияларын осы түзулердің бойынан іздейміз. Екінші инвариантты пайдалану үшін AB кесіндісінің натурал шамасын горизонталь проекциялаушы i өсінен ($A \in i$) айналдыру әдісімен табамыз: $|A_1 B_1| = |AB|$. Центрі A_1 нүктесінде болатын радиусы $|A_1 B_1|$ -ге тең шеңбер жүргізсек, ол шеңбер B_1 нүктесі арқылы өтетін және f_1 -ге перпендикуляр түзумен $\bar{B}_1$ нүктесінде қиылысады. $\bar{B}_1$ нүктесі B нүктесінің түрленгеннен кейінгі жаңа проекциясы. $\bar{B}_1$ түзуі мен C_1 нүктесі арқылы айналу өсінің фронталь проекциясына перпендикуляр етіп жүргізген түзу C_1 нүктесінде қиылысады. Сонда $A_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1$ үшбұрышы ABC үшбұрышын деңгейлік түзуден айналдырғаннан кейінгі жаңа проекциясы және ол үшбұрыш берілген үшбұрыштың натурал шамасына тең: $\Delta A_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1 = \Delta ABC$

2-мысал. Іздерімен берілген α жазықтығында тең қабырғалы ABC үшбұрышын салу керек (145, а-сурет). ABC үшбұрышының бір қабырғасы $[AB]$ -ның фронталь проекциясы $[A_1 B_1]$ ғана берілген: $|AB| \subset \alpha$.



145-сурет

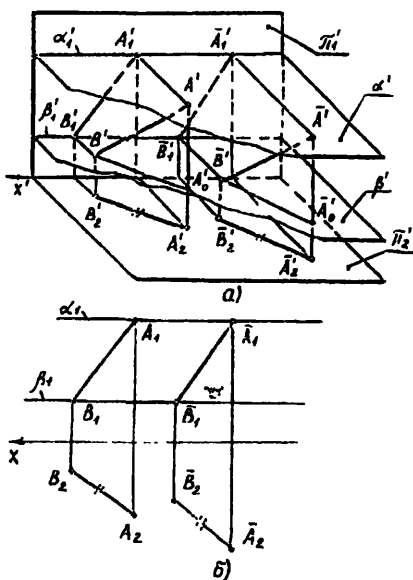
AB кесіндісінің горизонталь проекциясы $[A_2 B_2]$ -ны салып аламыз. Берілген α жазықтығын оның горизонталь ізі h_α -ден айналдырып горизонталь проекциялар жазықтығымен беттестіріп аламыз. Жазықтықты ізінен сәйкес проекциялар жазықтығымен біріккенше айналдыруды

беттестіру әдісі деп айтады α жазықтығының бетескеннен кейінгі орнын анықтау үшін оның бір нүктесінің жаңа проекциясын тапсақ болады. Жазықтықтың фронталь ізінде жатқан M нүктесін қарастыралық. Беттестіру деңгейлік түзуден айналдыру әдісінің дербес түрі. Сондықтан деңгейлік түзуден айналдыру әдісінің инварианттарын пайдалануға болады. M нүктесін алу үшін M_2 нүктесі арқылы айналу өсі h_α -ге перпендикуляр түзу және $(X_\alpha; |M, X_\alpha|)$ шеңберін жүргіземіз. Жүргізілген түзу мен шеңбер $\bar{M}$ нүктесінде қиылысады. X_α және $\bar{M}$ нүктелерін қосатын $\bar{f}_\alpha$ түзуі беттестірілген жазықтықтағы оның фронталь ізінің орнын анықтайды. Енді беттескен жазықтықтағы AB кесіндісін анықтайтын $\bar{A}_2\bar{B}_2$ кесіндісін алу үшін A және B нүктелері арқылы жүргізілген α жазықтығының горизонтальдарын пайдаланған дұрыс. Тең қабырғалы $\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2$ үшбұрышын саламыз. C нүктесі арқылы өтетін α жазықтығының горизонтальін пайдалана отырып, эпюрді кері түрлендірудің нәтижесінде C нүктесінің фронталь C_1 және горизонталь C_2 проекцияларын аламыз.

37. ЖАЗЫҚ ПАРАЛЛЕЛЬ ЫҒЫСТЫРУ

Жазық параллель ығыстыру әдісінде де берілген нәрсені кеңістікте қозғал, оны есепті шешуге қолайлы жағдайға әкеліп қоямыз. Одан кейін берілген нәрсені π_1 және π_2 жазықтықтарына тік бұрыштан проекциялаймыз. Нәрсені қалай болса солай қозғамай, оның нүктелері өзара параллель жазықтықтарда орын ауыстыратындай етіп жылжытамыз. Қолайлы болуы үшін горизонталь немесе фронталь проекциялар жазықтығына параллель ығыстыру пайдаланылады.

AB кесіндісін горизонталь проекциялар жазықтығына қарағанда жазық параллель ығыстыруды қарастыралық. A нүктесі арқылы горизонталь α жазықтығын, B нүктесі арқылы горизонталь β жазықтығын жүргізілсек (146, а-сурет). Берілген кесіндіні бір ұшы α жазықтығында, ал екінші ұшы β жазықтығында жататындай етіп қозғауымызға болады. Оны бастапқы AB жағдайынан $\bar{A}\bar{B}$



146-сурет

жағдайыңа жылжыталық. B нүктесі арқылы A_2B_2 түзуіне параллель түзу жүргізсек, онда ол түзу AA_2 түзуімен A_0 нүктесінде қиылысады. Сол сияқты $\bar{B}$ нүктесі арқылы $\bar{A}_2\bar{B}_2$ түзуіне параллель етіп жүргізілген түзу $\bar{A}\bar{A}_2$ түзуімен $\bar{A}_0$ нүктесінде қиылысады. Сонда пайда болған тік бұрышты үшбұрыштар AA_0B және $\bar{A}\bar{A}_0\bar{B}$ өзара тең болатынын дәлелдеу қиын емес. Шынында да, олардың гипотенузалары өзара тең ($|AB| = |\bar{A}\bar{B}|$) және катеттері өзара тең ($|AA_0| = |\bar{A}\bar{A}_0|$ α және β жазықтықтарының ара қашықтығы). Сондықтан $|A_0B| = |\bar{A}_0\bar{B}|$ болады. $A_0BB_2A_2$ және $\bar{A}_0\bar{B}\bar{B}_2\bar{A}_2$ параллелограмдарын қарастырсақ, мына теңдіктерді аламыз: $|A_0B| = |\bar{A}_0\bar{B}|$; $|\bar{A}_0\bar{B}| = |\bar{A}_2\bar{B}_2|$; $|A_2B_2| = |\bar{A}_2\bar{B}_2|$. Эпюр алу үшін π_2 жазықтығын x өсінен айналыдырып π_1 жазықтығымен беттестіреміз (146, 6-сурет).

Енді горизонталь проекциялар жазықтығына қатынасты жазық параллель ығыстыру әдісінің инварианттарын тұжырымдалық:

1) нәрсенің жаңа және ескі горизонталь проекциялары өзара тең болады;

2) нүктенің фронталь проекциясы x өсіне параллель түзудің бойымен орын ауыстырады.

Фронталь проекциялар жазықтығына қарағандағы жазық параллель ығыстыру әдісінің инварианттары бұған керісінше болады:

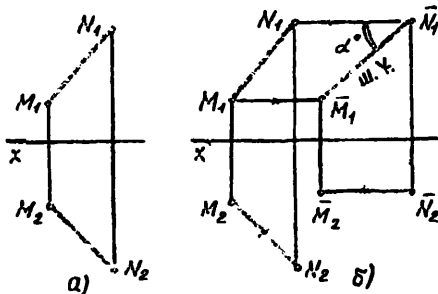
1) нәрсенің жаңа және ескі фронталь проекциялары өзара тең болады;

2) нүктенің горизонталь проекциясы x өсіне параллель түзудің бойымен орын ауыстырады.

Жазық параллель ығыстыру әдісі проекциялаушы түзуден айналыдыру әдісімен пара-пар. Оның тиімді жағы: проекцияларды бір-бірімен қиылыстырмай тиімді орналастыруға мүмкіндік береді. Мысалдар қарастыралық.

1-мысал. MN кесіндісінің горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын және оның шын ұзындығын анықтау керек (147, а-сурет).

Ол үшін горизонталь проекциялар жазықтығына қарағанда берілген кесіндіні жазық параллель ығыстырып фронталь проекциялар жазықтығына параллель жағдайға келтіреміз. Сонда жаңа жағдайдағы $\bar{M}\bar{N}$ кесіндісінің горизонталь проекциясы $\bar{M}_2\bar{N}_2$ абсцисса өсіне параллель орналасуы қажет. Түрлендірудің бірінші инвариантына сай оның

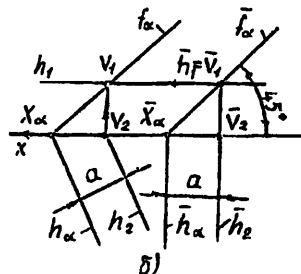
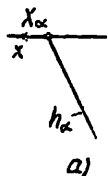


147-сурет

ұзындығы ескі проекция $[M_2N_2]$ -нің ұзындығына тең болады. $\bar{M}_2\bar{N}_2$ кесіндісін бос орынға x өсіне параллель етіп сызамыз, ал оның ұзындығын ескі проекциядан $[M_2N_2]$ -ні өлшеп анықтаймыз. $\bar{M}_2$ және $\bar{N}_2$ нүктелері арқылы вертикаль байланыс сызықтарын жүргізсек, екінші инвариантты пайдаланып аталған $\bar{M}$ және $\bar{N}$ нүктелерінің фронталь проекциялары, яғни $\bar{M}_1$ және $\bar{N}_1$ нүктелері оңай тұрғызылады (147, б-сурет). Сонда тұрғызылған $\bar{M}_1\bar{N}_1$ кесіндісінің ұзындығы берілген кесіндінің шын ұзындығына тең, ал оның горизонталь түзуге қолбеулік бұрышы α° ізделініп отырған MN түзуі мен π_2 жазықтығы арасындағы бұрышқа тең болады:

$$|\bar{M}_1\bar{N}_1|=|MN|; \angle N_1\bar{N}_1\bar{M}_1=\alpha^\circ=(MN), \pi_2$$

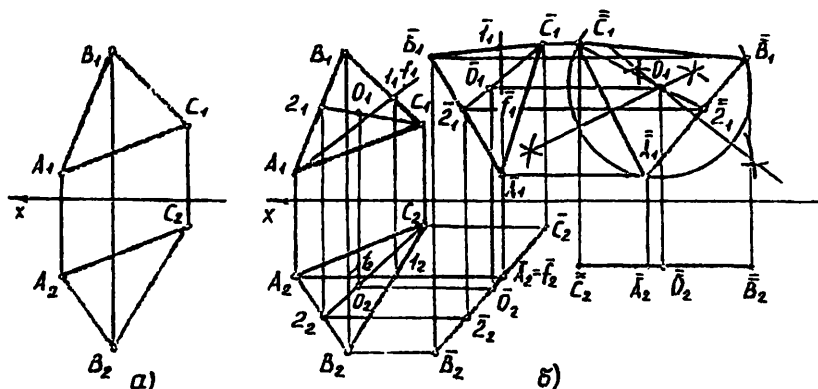
2-мысал. Жалпы жағдайда орналасқан α жазықтығының горизонталь ізі h_α берілген (148, а-сурет). Осы α жазықтығын горизонталь проекциялар жазықтығына 45° бұрышпен көлбейді деп есептеп, оның фронталь ізін салу керек.



148-сурет

Берілген жазықтық горизонтальдарының бірі h -тың горизонталь проекциясын h_2 -ні жүргізілдік. Ол жазықтықтың горизонталь ізіне параллель орналасады ($h_2 \parallel h_\alpha$), ал h_2 мен h_α -нің ара қашықтығы a -ға тең болсын (148, б-сурет). Горизонталь проекциялар жазықтығына карағанда жазық параллель ығыстыру әдісімен α жазықтығын фронталь проекциялаушы $\bar{\alpha}$ жазықтығына түрлендіреді. Осы $\bar{\alpha}$ жазықтығының горизонталь ізі h_α абсциссалар өсіне перпендикуляр жүргізіледі, ал оның фронталь ізі $\bar{f}_\alpha$ тоғысу нүктесі $\bar{X}_\alpha$ арқылы x өсіне 45° бұрышпен көлбеу жүргізіледі. Горизонталь h -тың жаңа горизонталь проекциясы $\bar{h}_2$ жазықтықтың жаңа горизонталь ізінен a -ға тең қашықтықта орналасады. Осы горизонтальдың жаңа фронталь проекциясы $\bar{h}_1$ және оның фронталь ізінің фронталь проекциясы жазықтықтың фронталь ізінде жатады: $\bar{h}_1 = \bar{V}_1 \in \bar{f}_\alpha$. Кері түрлендіріп горизонталь h -тың фронталь ізінің фронталь проекциясын (V_1 нүктесін) анықтаймыз. Енді X_α және V_1 нүктелерін қосатын түзу жүргізсек, ол іздеп отырған α жазықтығының фронталь ізі f_α болады.

3-мысал. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі O нүктесінің фронталь және горизонталь проекцияларын салу керек болсын (149, а-сурет).



149-сурет

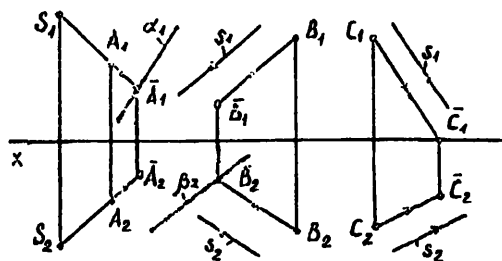
Алдымен ABC үшбұрышының натурал шамасын тұрғызып алуымыз керек. Ол үшін үшінші есепті шешіп жалпы жағдай жазықтығын проекциялаушы жазықтыққа, ал одан кейін төртінші есепті шешіп проекциялаушы жазықтықты деңгейлік жазықтыққа түрлендіруіміз керек. Берілген үшбұрышты фронталь проекциялар жазықтығына қарағанда жазық параллель ығыстыралық. Бірінші инвариант бойынша жаңа проекция $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$, сол үшбұрыштың ескі проекциясына $\Delta A, B, C$ тең болуы керек (149, б-сурет). $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ үшбұрышы горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр болуы үшін, оның фронталі горизонталь проекциялар жазықтығына тік бұрыш жасап орналасуы тиіс. ABC үшбұрышы жазықтығының A нүктесі арқылы өтетін фронталін салалық: $A \in f \subset \alpha(ABC)$. Қалауымызша вертикаль түзу жүргізіп, оны $\bar{f}$, деп белгілейік. Осы $\bar{f}$, түзуіне $[A, 1,]$ -ге тең $\bar{A}, \bar{1}$, кесіндісін салып, оған $\bar{A}, \bar{1}, \bar{B}$, және $\bar{A}, \bar{1}, \bar{C}$, үшбұрыштарын тұрғызамыз. Бұл арада $\bar{\Delta A}, \bar{1}, \bar{B} = \Delta A, 1, B$, және $\bar{\Delta A}, \bar{1}, \bar{C} = \Delta A, 1, C$, болатыны пайдаланылды. Дәлдікті қамтамасыз ету үшін B, C , және 1 , нүктелерінің бір түзудің бойында жататынын ескереміз. Екінші инвариантқа сай нүктенің горизонталь проекциясы абсциссалар өсіне параллель, яғни горизонталь түзудің бойымен орын ауыстырады. Сондықтан A_2, B_2 және C_2 нүктелері арқылы жүргізілген горизонталь түзулер сәйкес $\bar{A}, \bar{B}$, және $\bar{C}$, нүктелері арқылы жүргізілген вертикаль түзулермен $\bar{A}_2, \bar{B}_2$ және $\bar{C}_2$ нүктелерінде қиылысады және бұл үш нүкте бір түзудің бойында жатады. Олай болса, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ үшбұрышы π_2 жазықтығына перпендикуляр орналасқан екен. Енді екінші рет түрлендіріп, берілген үшбұрышты фронталь проекциялар жазықтығына параллель жағдайға келтіреміз. Ол үшін горизонталь проекциялар жазықтығына қатысты жазық парал-

лель ығыстырамыз. Қатауымызша горизонталь түзу жүргізіп, оған $\overline{A_2B_2}$ және $\overline{A_2C_2}$ кесінділеріне тең $\overline{A_2B_2}$ және $\overline{A_2C_2}$ кесінділерін саламыз. π_2 жазықтығына қатысты жазық параллель ығыстыру әдісінің екінші инвариантына сүйеніп $\overline{ABC}$ үшбұрышының фронталь проекциясын ($\overline{A_1B_1C_1}$ үшбұрышын) саламыз. Сонда $\Delta \overline{A_1B_1C_1} = \Delta \overline{ABC}$ болады. Үшбұрышқа сырттай сызылатын шеңбердің центрі оның қабырғаларына ортасы арқылы жүргізілген перпендикуляр түзулердің қиылысу нүктесі болады. $\overline{A_1B_1}$ кесіндісінің ортасы арқылы $\overline{A_1B_1}$ түзуімен тік бұрыш жасап өтетін түзу мен $\overline{B_1C_1}$ кесіндісінің ортасы арқылы өтетін және $\overline{B_1C_1}$ түзуімен тік бұрыш жасайтын түзудің қиылысу нүктесі $\overline{O_1}$ тұрғызылған $\overline{A_1B_1C_1}$ үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрін анықтайды. Табылған $\overline{O_1}$ нүктесі арқылы вертикаль байланыс сызығын жүргізіп, үшбұрыштың горизонталь орналасқан кесіндіге кескінделген проекциясы бойыннан $\overline{O_2}$ нүктесін алуға болады. $\overline{O_2}$ нүктесін кері түрлендіріп, оның бастапқы жағдайдағы проекцияларын ($\overline{O_1}$ және $\overline{O_2}$ нүктелерін) анықтау үшін осы нүкте арқылы өтетін $\overline{ABC}$ үшбұрышты жазықтығында жататын $\overline{C_2}$ кесіндісін жүргіземіз. $\overline{O_1}$ және $\overline{C_1}$ нүктелерін қосатын кесіндіні $\overline{A_1B_1}$ кесіндісімен $\overline{2_1}$ нүктесінде қиылысқанша созамыз. $\overline{2_1}$ нүктесін бастыра жүргізілген горизонталь түзу $\overline{A_1B_1}$ кесіндісімен $\overline{2_1}$ нүктесінде қиылысады. $\overline{C_1}, \overline{2_1}$ кесіндісімен $\overline{O_1}$ нүктесі арқылы χ өсіне параллель етіп жүргізілген түзу $\overline{O_1}$ нүктесінде қиылысады. Байланыс сызығын жүргізіп, түзуге проекцияланған $\overline{ABC}$ үшбұрышының горизонталь проекциясы бойыннан $\overline{O_2}$ нүктесін аламыз. Салудың дәлдігін тексеру үшін $\overline{B_2}, \overline{O_2}$ кесіндісінің ұзындығын $\overline{B_2}, \overline{O_2}$ кесіндісінің ұзындығымен салыстырамыз, олар өзара тең болулары керек. $\overline{2_1}$ нүктесі де осылайша анықталады. $\overline{2_2}$ нүктесі арқылы жүргізілген горизонталь түзу $\overline{A_2B_2}$ кесіндісімен $\overline{2_2}$ нүктесінде қиылысады, ал $\overline{O_2}$ нүктесі арқылы жүргізілген горизонталь түзу $\overline{C_2}, \overline{2_2}$ кесіндісімен $\overline{O_2}$ нүктесінде қиылысады. $\overline{ABC}$ үшбұрышында жатқан $\overline{O}$ нүктесінің фронталь проекциясын оның горизонталь проекциясы ($\overline{O_2}$ нүктесі) бойынша салу қосымша түсіндіруді керек етпейді.

38. КӨМЕКШІ ПРОЕКЦИЯЛАУ

Кейде есепті шешу үшін берілген геометриялық фигураларды әдейі таңдап алынған жазықтыққа центрден немесе параллель проекциялау қолайлы болады. Көмекші проекциялау әдісінде нәрсенің таңдап алынған жазықтықтағы қосымша проекциясының π_1 және π_2 жазықтықтарындағы проекциялары тұрғызылады. Көбіне қосымша проекциялар жазықтығы ретінде проекциялаушы немесе деңгейлік жазықтық алынады. Проекциялар жазықтығын алмастыру әдісін көмекші проекциялау әдісінің жеке түрі деп қарастыруға болады. Көмекші проекциялаудың негізгі мақсаты есептің шешуін анықтауға мүмкіндік беретін проекция-

ларды алу. Ондай проекцияларда түзу нүктеге, жазықтық түзуге, бет сызыққа кескінделеді. 150-суретте A нүктесін фронталь проекциялаушы α

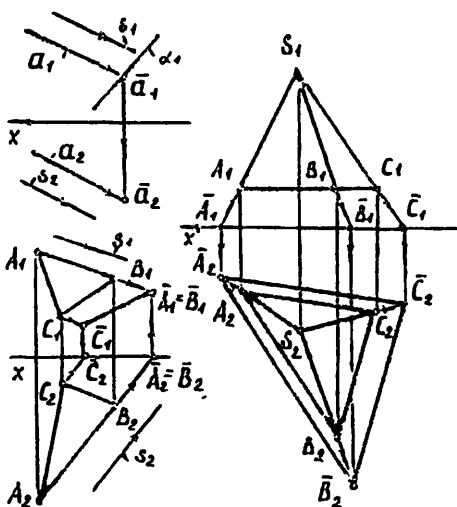


150-сурет

жазықтығына S центрінен көмекші центрлік проекциялау, B нүктесін горизонталь проекциялаушы β жазықтығына берілген s бағытында көмекші параллель проекциялау және C нүктесін s түзуі бағытында горизонталь проекциялар жазықтығына көмекші проекциялау көрсетілген. A_1 нүктесін

проекциялау центрінің фронталь проекциясымен қосатын түзу α_1 түзуімен $\bar{A}_1$ нүктесінде қиылысады. Сонда $\bar{A}_1$ нүктесі A нүктесінің көмекші проекциясы болатын $\bar{A}$ нүктесінің фронталь проекциясы. $\bar{A}_1$ нүктесі арқылы жүргізілген вертикаль байланыс сызығы A_2S_2 түзуімен $\bar{A}_2$ нүктесінде қиылысады. $\bar{A}_2$ нүктесі көмекші проекцияның горизонталь проекциясы. B нүктесі арқылы берілген бағытқа параллель түзу жүргізсек, онда ол түзу β жазықтығымен B нүктесінде қиылысады. Көмекші проекция $\bar{B}$ -ның фронталь $\bar{B}_1$ және горизонталь $\bar{B}_2$ проекциялары тұрғызылған. C нүктесінің s түзуі бағытындағы көмекші проекциясы ретінде C нүктесі арқылы s түзуіне параллель етіп жүргізілген түзудің горизонталь ізі қабылданған.

151-суретте түзудің, жазықтықтың және геометриялық дененің көмекші проекцияларын салу көрсетілген. Жалпы жағдайда орналасқан a түзуі фронталь проекциялаушы α жазықтығына өзіне параллель s түзуі бағытында проекцияланған, сондықтан a түзуі α жазықтығына нүктеге проекцияланады. ABC үшбұрышын оның қабырғаларының біреуіне параллель бағытта проекцияласак, онда бұл үшбұрыштың проекциясы кесінді болар еді. Сурет-



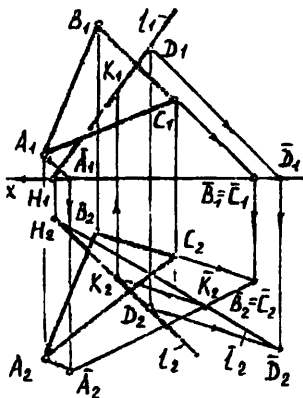
151-сурет

те проекциялау бағыты $[AB]$ қабырғасына параллель орналасқан және көмекші проекциялар жазықтығы ретінде фронталь проекциялар жазықтығы алынған. A және B нүктелерінің көмекші проекциялары бірігіп түседі: $\bar{A} = \bar{B}$. C нүктесінің көмекші проекциясын анықтап, оны AB түзуінің проекциясымен қосатын кесінді жүргіземіз. Көмекші проекцияның горизонталь проекциясы x осінде жатыр, ал оның фронталь проекциясын $\bar{A}, \bar{C}$ кесіндісі анықтайды. $SABC$ пирамидасын оның S төбесінен π_2 жазықтығына проекциялайық (151-сурет). AS түзуінің горизонталь ізі $\bar{A}$ нүктесі пирамиданың A төбесінің көмекші проекциясын, BS түзуінің горизонталь ізі пирамиданың B төбесінің көмекші проекциясын және CS түзуінің горизонталь ізі пирамиданың C төбесінің көмекші проекциясын анықтайды. Сонда $SABC$ пирамидасы S төбесінен горизонталь проекциялар жазықтығына $\bar{A}_2 \bar{B}_2 \bar{C}_2$ үшбұрышына проекцияланады екен.

1-мысал. ABC үшбұрышы анықтайтын α жазықтығы мен l түзуінің қиылысу нүктесін салу керек (152-сурет).

Қиылысу нүктесі жазықтық пен түзуге ортақ нүкте болғандықтан, егер жазықтық проекциялаушы жазықтық болса, оны салу оңай. Ол үшін проекциялау бағытын жазықтық түзуге кескінделетіндей етіп таңдап алу керек. Берілген ABC үшбұрышын және l түзуін BC түзуі бағытында горизонталь проекциялар жазықтығына проекциялайық. Сонда B және C нүктелері бір нүктеге $\bar{B}_2 = \bar{C}_2$ проекцияланады, ал ABC үшбұрышы $\bar{B}_2 = \bar{C}_2$ нүктесін A нүктесінің көмекші проекциясы болатын $\bar{A}_2$ нүктесімен қосатын кесіндіге проекцияланады. l түзуінің проекциясын тұрғызу үшін оның бойынан D және H нүктелерін аламыз. D нүктесі $\bar{D}_2$ нүктесіне проекцияланады, түзудің горизонталь ізі болатын H нүктесі өзі өзіне проекцияланады. Сонда $\bar{A}_2 \bar{B}_2$ түзуі мен $\bar{D}_2$ және H_2 нүктелерін қосатын $\bar{l}_2$ түзуінің қиылысу нүктесі $\bar{K}_2$ іздеп отырған қиылысу нүктесінің көмекші проекциясы болады. $\bar{l}_2 - l$ түзуінің BC түзуі бағытындағы π_2 жазықтығындағы көмекші проекциясы. Табылған K_2 нүктесін BC түзуі бағытында кері l түзуіне проекциялаудың нәтижесінде K_2 және K_1 нүктелерін анықтаймыз.

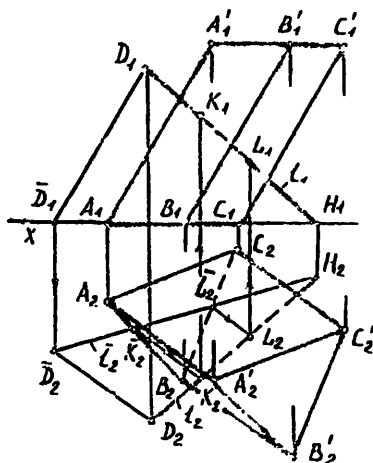
$\bar{K}_2 \in (\bar{K}_2 K_2) \parallel (B_2 C_2); (\bar{K}_2 K_2) \cap l_2 = K_2; K_2 \in (K_2 K_1) \parallel (A_2 A_1); (K_2 K_1) \cap l_1 = K_1$.
Сонда $K(K_1, K_2) = l \cap \alpha(ABC)$ болады.



152-сурет

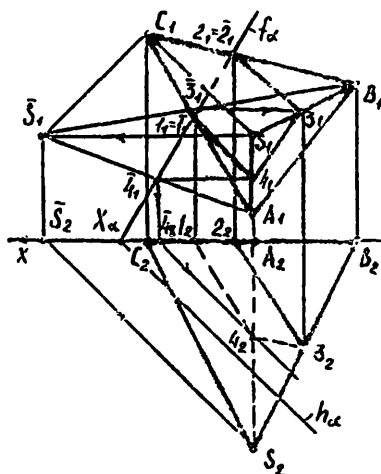
2-мысал. Үш бұрышты призма және түзуі берілген (153 сурет). Түзудің призманың бетімен қиылысу нүктелерін салу керек.

Ол үшін көмекші проекциялау әдісін пайдалануға болады. Призманы оның бүйір қырлары бағытында горизонталь проекциялар жазықтығына проекциялайық. Сонда оның көмекші проекциясы $A_2B_2C_2$ үшбұрышы болар еді. l түзуінің көмекші проекциясын салу үшін оның горизонталь ізін H анықтап, $De \in l$ нүктесін π_2 жазықтығына призманың бүйір қырларына параллель бағытта проекциялаймыз. $(\bar{D}_2H_2) \cap \bar{l}_2$ түзуі берілген l түзуінің көмекші проекциясы. Призманың бүйір жағы $AA'B'B$ A_2B_2 кесіндісіне кескінделген. Олай болса A_2B_2 және $\bar{l}_2$ түзулерінің қиылысу нүктесі $\bar{K}_2$ берілген түзумен $AA'B'B$ жағының қиылысу нүктесінің көмекші проекциясы болады. Сол сияқты l түзуімен $BB'C'C$ жағының қиылысу нүктесі $(B_2C_2) \cap \bar{l}_2 = \bar{L}_2$ болады. Осы $\bar{K}_2$ және $\bar{L}_2$ нүктелерін l түзуіне кері проекцияласақ, іздеп отырған қиылысу нүктелерін (K мен L) анықтаймыз.



153-сурет

3-мысал. $SABC$ пирамидасы және $\alpha(f_\alpha \cap h_\alpha)$ жазықтығы берілген (154 сурет). Пирамиданың берілген жазықтықпен қимасының проекцияларын салу керек. Пирамиданың табаны ABC фронталь проекциялар жазықтығында жатыр. Сондықтан көмекші проекцияны фронталь проекциялар жазықтығына қиюшы α жазықтығының горизонталь ізіне параллель проекциялау арқылы тұрғызу қолайлы. Сонда жазықтық α өзінің фронталь ізіне, ABC үшбұрышы $A_1B_1C_1$ үшбұрышына проекцияланады. S нүктесінің көмекші проекциясын салу үшін S_2 нүктесі арқылы h_α түзуіне параллель түзуді x өсімен $\bar{S}_2$ нүктесінде қиылысқанша жүргіземіз. Осы $\bar{S}_2$ нүктесі арқылы x



154-сурет

өсіне перпендикуляр етіп, S_1 нүктесі арқылы x осіне параллель етіп жүргізілген түзулер $\bar{S}$, нүктесінде қиылысады. $\bar{S}$, нүктесін A , B , және C , нүктелерімен қосатын түзудің кесінділерін жүргізіп пирамиданың көмекші проекциясын аламыз. Көмекші проекцияларда α проекциялаушы жазықтық болғандықтан оның пирамида қырларымен қиылысу нүктелері оңай анықталады. f_α түзуі AC , BC , SB және SA қырларының көмекші проекцияларымен $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, және $\bar{4}$, нүктелерінде қиылысады. Сонда қимада төртбұрыш 1234 алынатынын көреміз. Көмекші проекцияларды пайдаланып қиманың фронталь проекциясын оңай тұрғызамыз. $\bar{1}_1 = 1$, және $\bar{2}_1 = 2$, болатыны өзінен-өзі түсінікті. $\bar{3}$, және $\bar{4}$, нүктелері арқылы жүргізілген горизонталь түзулер S_1B , және S_1A , түзулерімен 3 , және 4 , нүктелерінде қиылысады. 1 , 2 және 3 нүктелерінің горизонталь проекциялары байланыс сызығының көмегімен сәйкес қырлардың горизонталь проекциялары бойынан табылады. Профиль проекциялар жазықтығына параллель SA қырының бойындағы 4 нүктесінің горизонталь проекциясын анықтау үшін $\bar{4}_2$ нүктесі арқылы h_α түзуіне параллель түзу жүргізілген. Осы түзу S_2A_2 түзуімен 4_2 нүктесінде қиылысады. Эпюрде корнетіндік бәсекелес нүктелер әдісімен анықталады.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН СҰРАҚТАР МЕН ЖАТТЫҒУЛАР

1. Эпюрді түрлендіру деп нені айтады? Түрлендіру қандай мақсатпен орындалады?

2. Фронталь проекциялар жазықтығын қалай алмастырады? Горизонталь проекциялар жазықтығын қалай алмастырады?

3. Проекциялар жазықтығын алмастыру әдісінің инварианттары туралы айтып беріңіз.

4. Проекциялар жазықтығын алмастыру әдісін бірнеше рет қайталап қолдануға бола ма? Проекциялар жазықтықтарының скеуін де жаңа жазықтықтарымен алмастыру үшін не істеу керек?

5. Эпюрді түрлендіру әдісімен шешілетін негізгі төрт есепті айтып және шешіп беріңіз.

6. Горизонталь проекциялаушы түзуден қалай айналдырады? Фронталь проекциялаушы түзуден қалай айналдырады?

7. Проекциялаушы өстен айналдыру әдісінің инварианттары туралы айтып беріңіз.

8. Деңгейлік түзуден айналдыру қандай мақсат үшін қолданылады және оның инварианттары қандай?

9. Беттестіру әдісін түсіндіріп беріңіз.

10. Горизонталь проекциялар жазықтығына қатысты жазық параллель ығыстыру әдісінің инварианттарын айтып беріңіз. Оның горизон-

галь проекциялаушы түзуден айналдыру әдісімен қандай байланысы бар?

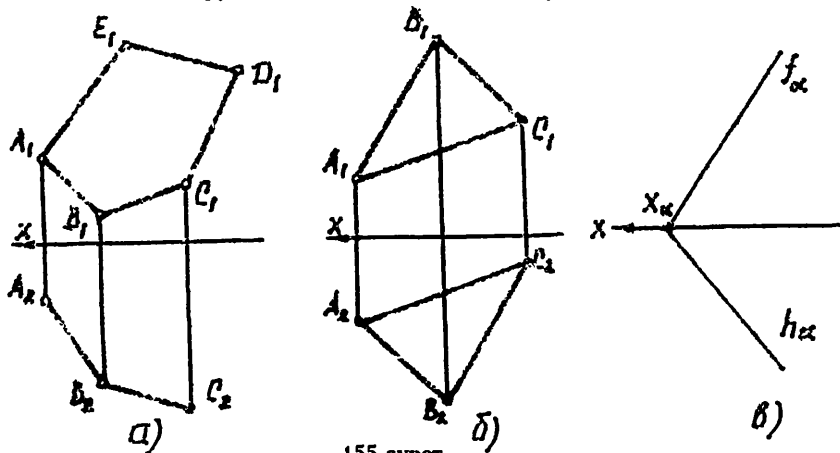
11. Фронталь проекциялар жазықтығына қарағандағы жазық параллель ығыстыру әдісінің инварианттарын айтып беріңіз. Оның фронталь проекциялаушы түзуден айналдыру әдісімен қандай байланысы бар?

12. Көмекші проекциялау әдісінің негізгі мақсаты қандай? Түзу нүктеге проекцияланушы үшін проекциялау бағытын қалай тандап алу керек? Жазықтық түзуге проекциялануы үшін проекциялау бағыты қалай орналасуы қажет?

13. $A(20; 30; 40)$, $B(60; 80; 20)$, $C(90; 20; 50)$ және $D(50; 40; 80)$ нүктелері берілген. Проекциялар жазықтығын алмастыру әдісімен мына есептерді шешіңіз: а) AB кесіндісінің ұзындығын және проекциялар жазықтықтарына (π_1 мен π_2 -ге) көлбеулік бұрыштарын анықтау керек; б) ADB және ADC жазықтықтары арасындағы екі жақты бұрыштың натурал шамасын салу керек; в) C нүктесінен ABD жазықтығына дейінгі қашықтықты табу керек; г) BCD үшбұрышының натурал шамасын салу керек.

Проекциялаушы түзуден айналдыру әдісімен мына есептерді шешіңіз: а) CD кесіндісінің ұзындығын және проекциялар жазықтықтарына (π_1 мен π_2 -ге) көлбеулік бұрыштарын анықтау керек; б) ACD және BCD жазықтықтары арасындағы екі жақты бұрыштың натурал шамасын салу керек; в) D нүктесінен ABC жазықтығына дейінгі қашықтықты табу керек; г) ABC үшбұрышының натурал шамасын салу керек.

14. $ABCDE$ жазық бесбұрышының натурал шамасын оны горизонтальдан айналдыру әдісімен салыңыз (155, а-сурет).

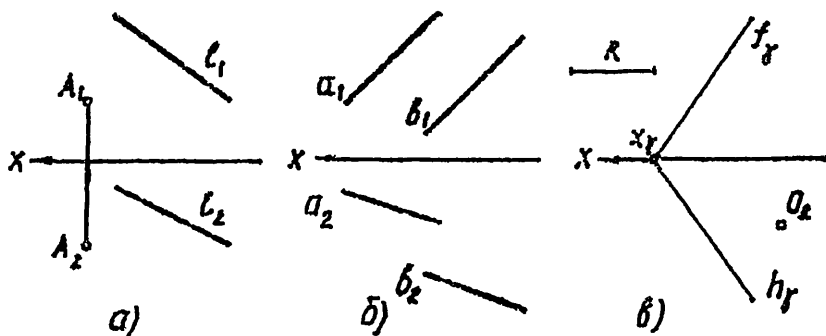


155-сурет

15. Алмастыру әдісімен ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің проекцияларын тұрғызыңыз (155,б-сурет).

16. Проекциялаушы түзуден айналдыру әдісімен α жазықтығынан 20 мм қашықтықтағы және оған параллель орналасқан β жазықтығының іздерін салу керек (155,в-сурет).

17. A нүктесінен l түзуіне дейінгі (156,а-сурет) және a түзуінен оған параллель b түзуіне дейінгі (156,б-сурет) қашықтықтарды анықтау керек.



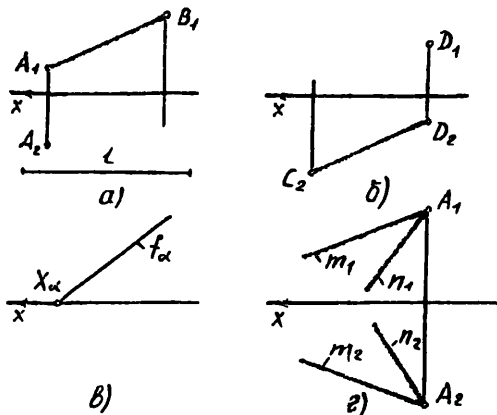
156-сурет

18. Беттестіру әдісімен γ жазықтығында жатқан $(0; |R|)$ шеңберінің горизонталь және фронталь проекцияларын саламыз (156 в-сурет).

19. Жазық параллель ығыстыру әдісімен төмендегі есептерді шешіңіз:

а) фронталь проекциясы A_1, B_1 және A төбесінің горизонталь проекциясы A_2 берілген, ұзындығы l -ге тең AB кесіндісінің горизонталь проекциясын салуды аяқтау керек (157, а-сурет);

б) горизонталь проекциялар жазықтығына 60° бұрышпен қолбейтін CD кесіндісінің фронталь проекциясын салу керек (157, б-сурет);

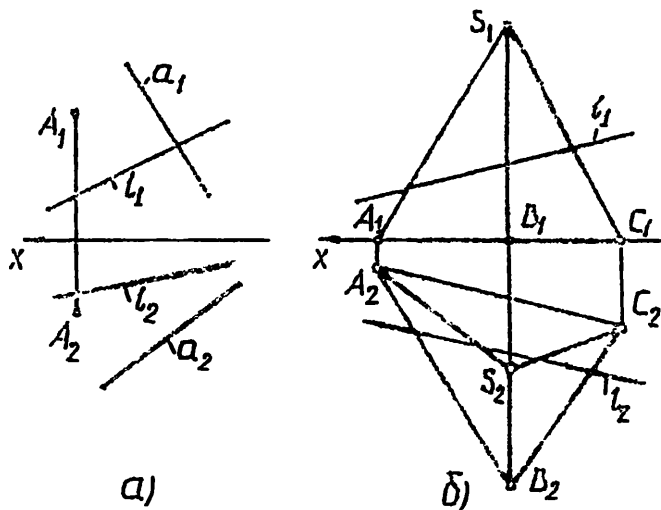


157-сурет

в) фронталь проекциялар жазықтығына 30° бұрышпен көлбейтін α жазықтығының горизонталь ізін салу керек (157, в-сурет);

г) A нүктесінде қиылысатын m және n түзулері құрайтын жазық бұрыштың биссектрисасы болатын l түзуінің фронталь және горизонталь проекцияларын салу керек (157, г-сурет).

20. Көмекші проекциялау әдісімен l түзуі мен $\alpha(A, a)$ жазықтығының қиылысу нүктесін салыңыз (158, а-сурет). Одан кейін l түзуі мен $SABC$ пирамидасының қиылысу нүктелерін көмекші проекциялау әдісімен салыңыз (158, б-сурет).



158-сурет

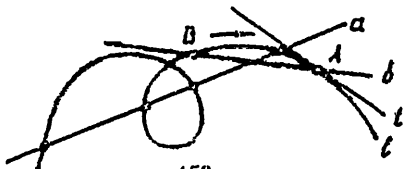
Алтыншы тарау

ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТАР МЕН БЕТТЕР

39. ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТАР

Сызба геометрияда сызықты кеңістікте үздіксіз қозғалатын нүктенің траекториясы ретінде қарастырады. Үздіксіз қозғалатын нүкте орындарының жиыны қисық сызықты анықтайды. Бұдан былай қисық сызық деудің орнына қысқаша қисық дейтін боламыз. Сыздықтарды кескіндеріне қарап зерттеу үшін оларды проекциялағанда сақталатын қасиеттерді білу керек.

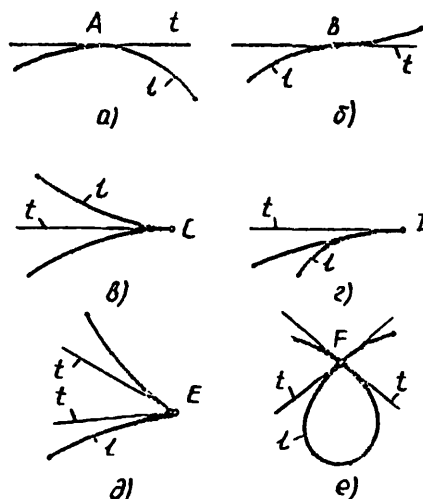
Қисықтың екі нүктесі (немесе одан да көп нүктелері) арқылы жүргізілген түзуді *қиюшы* дейді. Осы екі нүктенің біреуін сызықтың бойымен екіншісіне жақындатқандағы қиюшының шегін *жанама* дейді. Қиюшы қиюшыға, жанама жанамаға проекцияланатынын байқау қиын емес. 159-суретте l қисығы, оның қиюшылары a мен b және жанамасы t кескінделген. A және B нүктелерін басып өтетін b қиюшыны A нүктесінен сағат тілі бағытында біртіндеп айналдырсақ, онда B нүктесі l қисығы бойымен A нүктесіне жақындай түсер еді. Сөйтіп B нүктесі A нүктесімен біріккендегі қиюшының шегі t түзуін береді. Жанама t мен l сызығының ортақ нүктесі A *жанасу нүктесі* деп аталады.



159-сурет

Қисықтарды *жазық* және *кеңіс сызықтар* деп екі топқа бөледі. Жазық сызықтың барлық нүктелері бір жазықтықта жатады. Барлық нүктелері бір жазықтықта жатпайтын сызықты кеңіс сызық дейді.

Жазық қисық нүктелерін қарастыралық. Сызықтың берілген нүктесінің төңірегін зерттедік. Ол үшін қисықтың бойымен нүктенің қозғалу бағытын және осы нүктеден келесі оған өте жақын орналасқан қисықтың нүктесіне өткенде жанаманың айналу бағытын анықтаймыз. Егер нүктенің қозғалу бағыты және сол нүктеде қисыққа жүргізілген жанаманың айналу бағыты өзгермесе, онда нүктені қарапайым деп атайды (160, а-сурет). Қарапайым A нүктесін *иілу нүктесі* деп те атауға болар еді. Нүктенің қозғалу бағыты өзгермесе, ал жанаманың айналу бағыты өзгерсе, онда нүктені қисықтың *бұрылу нүктесі* деп атаған орынды (160, б-сурет). Суреттегі B нүктесі бұрылу нүктесінің мысалы бола алады. Нүктенің қозғалу бағыты өзгертін болса, онда қисықтың ондай нүктесін *қайту нүктесі* деп атайды. Қайту нүктесі екі түрлі болады. Бірінші түрдегі қайту нүктесінде жанаманың айналу бағыты өзгермейді, ал екінші түрдегі қайту нүктесінде жанаманың айналу бағыты да өзгереді.



160-сурет

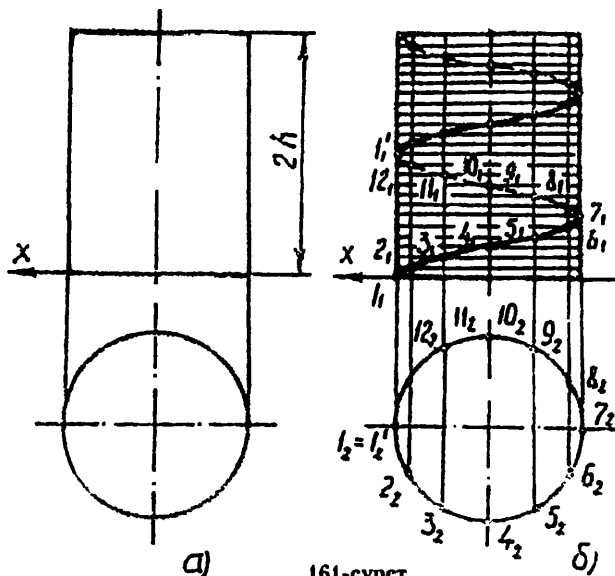
160, в-суреттегі C нүктесі — бірінші түрдегі қайту нүктесі және 160, г-суреттегі D нүктесі — екінші түрдегі қайту нүктесі. Бірінші түрдегі C нүктесін үш, ал екінші түрдегі D нүктесін *тұмсық* деп атауға болар еді. 160-суретте қисықтың сыну нүктесі E және тораптық нүктесі F көрсетілген. Сыну және тораптық нүктелерде сызыққа екі жанама жүргізуге болатыны көрініп тұр. Сыну нүктесінің бірінші түрдегі қайту нүктесінен айырмашылығы — сыну нүктесінде жанама-ның қозғалысында секірушілік байқалады, яғни сызықтың бір бөлігінен сыну нүктесі арқылы екінші бөлігіне өткенде жанама

секіріп орын ауыстырады. Тораптық нүктеде қисық өзімен өзі қиылысады. 160, е-суретте қисық F нүктесі арқылы екі-ақ рет өтеді, ал жалпы жағдайда тораптық нүкте арқылы қисық бірнеше рет өтуі мүмкін. Осыған байланысты тораптық нүкте екі еселі, үш еселі, ..., n еселі болып ажырайды. Еселі нүктелерге қисықтың өзімен өзі жанасатын нүктелерін де жатқызуға болады. Сонымен жазық сызықтың бұрылу, қайту, сыну және тораптық деп аталатын ерекше нүктелерімен таныстық. Аталған ерекше нүктелер кеңіс сызығын жазықтыққа проекциялағанда да пайда болуы мүмкін.

Эллипс, гиперболa және синусоида сияқты қисықтар бұрыннан белгілі. Олар — жазық сызықтар. Жазық сызықтарды салу сызу сабағында қарастырылады.

Кеңіс сызықтарының ішіндегі техникада көп қолданылып жүргені *бұрама сызықтар*.

Цилиндрлік бұрама сызық деп өзіне параллель түзуден бірқалыпты айналатын түзудің бойымен бірқалыпты қозғалатын нүктенің траекториясын айтады. Цилиндрлік бұрама сызықты салу үшін биіктігі $2h$ -қа тең цилиндр аламыз (161,а-сурет). Цилиндрдің горизонталь проекциясы болатын шеңберді тең 12 бөлікке бөлеміз, цилиндрдің фронталь проекциясын горизонталь түзулермен тең 24 бөлікке бөлеміз (161,б-сурет). Шеңбердің бөліну нүктелері арқылы вертикаль түзулер жүргіземіз. Үздіксіз қозғалатын нүктенің бастапқы орнын 1 деп, одан Δt уақыт өткеннен кейінгі орнын 2 деп, $2 \cdot \Delta t$ уақыт өткеннен кейінгі орнын



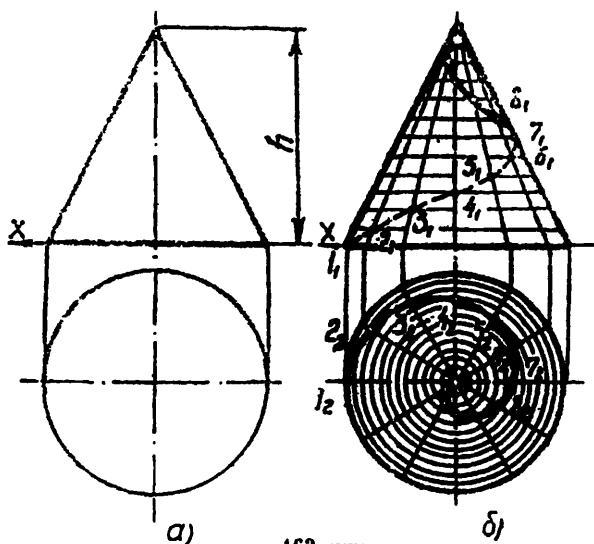
161-сурет

3 деп, ..., ал $n \cdot \Delta t$ уақыт өткеннен кейінгі орнын $n+1$ деп белгілесек, цилиндрлік бұрама сызықтың горизонталь проекциясы шеңбер, ал фронталь проекциясы синусоида болатынын көреміз. $|h|$ бұрама сызықтың адимы деп аталады, ал 161, б-суретте бұрама сызықтың екі орамы кескінделген. Бұрама сы-

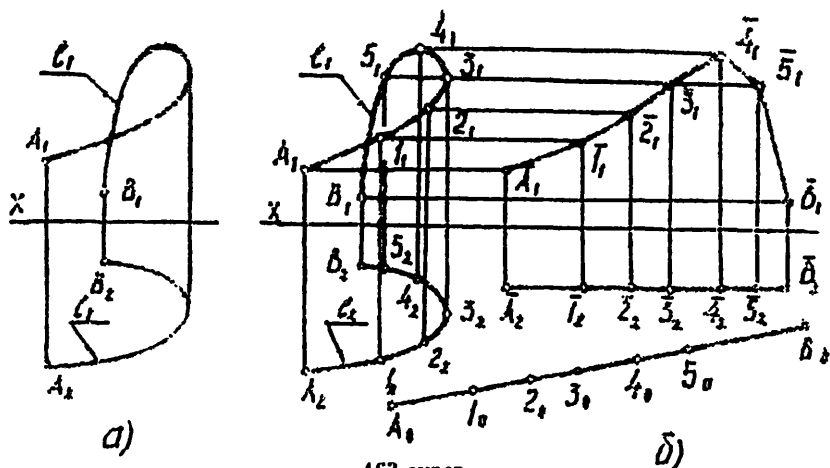
зықтарды оңқай және солақай деп ажыратады. Егер нүкте өстен сағат тілі бағытында айналғанда бізден қашықтай беретін болса, онда *бұрама сызық оңқай*, ал бізге жақындай беретін болса — *солақай* деп аталады. 161, б-суретте оңқай бұрама сызық кескінделген. Жаймада цилиндрлік бұрама сызық түзуге кескінделеді. Сондықтан цилиндрлік бұрама сызық цилиндр бетінің *геодезиялық* (ең қысқа) *сызығы* болады.

Конустық бұрама сызық деп өзімен қиылысатын түзуден бірқалыпты айналатын түзудің бойымен бірқалыпты қозғалатын нүктенің траекториясын айтады. Конустық бұрама сызықты салу үшін биіктігі h болатын конус алалық (162,а-сурет). Конустың табанын тең 12 бөлікке бөліп, оның жасаушыларын жүргіземіз (162,б-сурет). Конустың биіктігін де тең 12 бөлікке бөліп, конустың бетінде жататын шеңберлер жүргіземіз. Сонда нүктенің бастапқы кезеңдегі орны 1 болса және Δt уақыт өткеннен кейінгі орны 2 болса, онда $n \cdot \Delta t$ уақыт өткеннен кейінгі орны $n+1$ болады. Конустық бұрама сызықтың фронталь проекциясы амплитудасы кемімелі синусоида, ал горизонталь проекциясы Архимед спирали (шиырығы) болатынын көреміз. 162,б-суретте солақай конустық бұрама сызық кескінделген.

Сызықтың ұзындығын жуықтап салу әдісін қарастыралық. l сызығының A және B нүктелері аралығындағы бөлігінің ұзындығын салалық (163-сурет). Көршілес нүктелердің аралығындағы сызықтың бөлігін кесінді ретінде қарастыруға болатындай етіп, A мен B нүктелері аралы-



162-сурет



163-сурет

ғынан бірнеше нүкте 1, 2, 3,... аламыз. Абсцисса осіне параллель түзу жүргізіп, оған $\bar{A}_2\bar{1}_2, \bar{1}_2\bar{2}_2, \bar{2}_2\bar{3}_2, \dots$ кесінділерін саламыз. $|\bar{A}_2\bar{1}_2| = |A_21_2|$; $|\bar{1}_2\bar{2}_2| = |1_22_2|$; $|\bar{2}_2\bar{3}_2| = |2_23_2|$; ... $A_1, 1_1, 2_1, 3_1, \dots$ нүктелері арқылы горизонталь түзулер, ал $\bar{A}_2, \bar{1}_2, \bar{2}_2, \dots$ нүктелері арқылы вертикаль түзулер жүргіземіз. Аттас нүктелер арқылы жүргізілген түзулердің қиылысу нүктелерін белгілейміз: $\bar{A}_1, \bar{1}_1, \bar{2}_1, \bar{3}_1, \dots$. Қалауымызша түзу жүргізіп, оған $A_01_0 (|A_01_0| = |\bar{A}_1\bar{1}_1|)$, $1_02_0 (|1_02_0| = |\bar{1}_1\bar{2}_1|)$, $2_03_0 (|2_03_0| = |\bar{2}_1\bar{3}_1|)$, ... кесінді-

лерін саламыз. Сонда A_0B_0 кесіндісі l сызығының A және B нүктелері аралығындағы бөлігінің ұзындығын анықтайды.

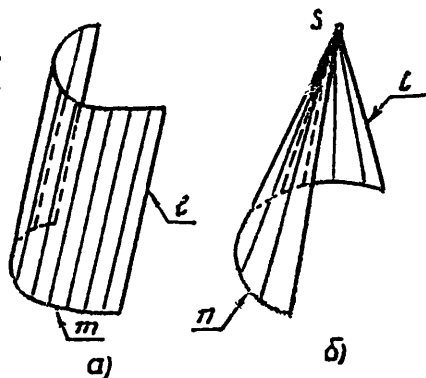
40. БЕТТЕРДІҢ ЖАСАЛУЫ ТУРАЛЫ ТҮСІНІК. БЕТТІҢ АНЫҚТАУЫШЫ ЖӘНЕ НҮСҚАСЫ

Сызба геометрияда беттер кеңістікте үздіксіз қозғалатын сызықтың көмегімен жасалады. Бұл сызықты *беттің жасаушысы* деп атайды. Жасаушының қозғалу нәтижесінде алатын орындарының жиыны бетті анықтайды. Мысалы m қисық сызығын қиып өтетін өзара параллель түзулердің жиыны *цилиндрлік бетті* береді (164,а-сурет). S нүктесі арқылы өтіп n қисық сызығын қиып өтетін түзулердің жиыны *конустық бетті* анықтайды (164,б-сурет). Цилиндрлік және конустық беттердің жасаушылары l_i -түзу сызықтар. Кеңістікте түзу сызықтың қозғалуы нәтижесінде алынатын беттерді *түзу сызықтық беттер* деп атайды.

Жасаушының қозғалысын бағыттайтын m және n қисықтарын *беттердің бағыттаушылары*, ал S нүктесін *конустық беттің төбесі* деп атайды.

Беттің кескінін салуға мүмкіндік беретін, бетті анықтайтын шарттарды *беттің анықтауышы* деп атайды.

Беттің анықтауышы екі бөліктен тұрады: 1) анықтауыштың геометриялық бөлігі; 2) анықтауыштың алгоритмдік бөлігі. Цилиндрлік бет үшін анықтауыштың геометриялық бөлігі бағыттаушы m



164-сурет

сызығы мен жасаушының бағытынан тұрады, ал алгоритмдік бөлігі «жасаушы бағыттаушы m сызығы бойынан алынған нүкте арқылы берілген бағытқа параллель жүргізіледі» деген сөйлемнен тұрады. Конустық бет үшін анықтауыштың геометриялық бөлігі S нүктесі мен бағыттаушы n сызығынан тұрады, ал алгоритмдік бөлігі «жасаушы S нүктесі арқылы өтеді және бағыттаушы n сызығын қияды» деген сөйлемнен тұрады. Қорытып айтқанда, анықтауыштың геометриялық бөлігі геометриялық фигуралардан — нүктелерден, түзулерден және сызықтардан тұрса, алгоритмдік бөлігі жасаушының қозғалу заңдылығын көрсететін жазбаша, немесе ауызша айтылатын сөйлемдерден тұрады.

Эпюре бет анықтауыштың геометриялық бөлігінің проекцияларымен беріледі. 165-суретте цилиндрлік беттің эпюрі кескінделген.

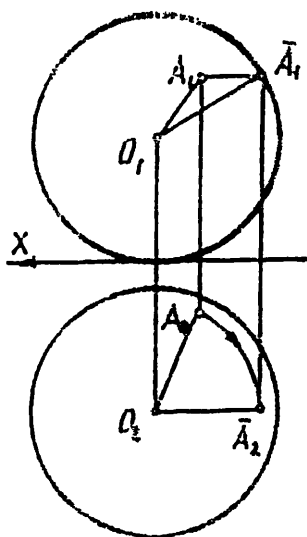
болса, онда бұл бет нүктесінің бір проекциясы бойынша екінші проекциясын салуға болады. Мысалға, суретте көрсетілген жасаушы l мен бағыттаушы m сызықтары цилиндрлік бетті анықтайтынын көрсетелік. Ол үшін $M(M_1) \in \alpha$ нүктесінің горизонталь проекциясын тұрғызу жеткілікті.

Табылған M_2 нүктесі цилиндрлік бетте $\alpha(l, t)$ -де жатқан M нүктесінің горизонталь проекциясы.

Беттің нұсқасы (очеркі) деп оның берілген проекциялар жазықтығына қарағандағы көріну сызығының проекциясын айтады (166-сурет). Қайсыбір ϕ бетін π' жазықтығына параллель проекциялау үшін осы ϕ бетін жәннайтын берілген бағытқа параллель проекциялаушы сәулелер жүргізеді. Осы проекциялаушы сәулелердің ϕ

бстімен жанасу нүктелері $A, B, C, \dots$ қайсыбір k сызығын анықтайды. Бұл k сызығын *көрінү сызығы* деп атайды. k' сызығы ϕ бетінің нұсқасы.

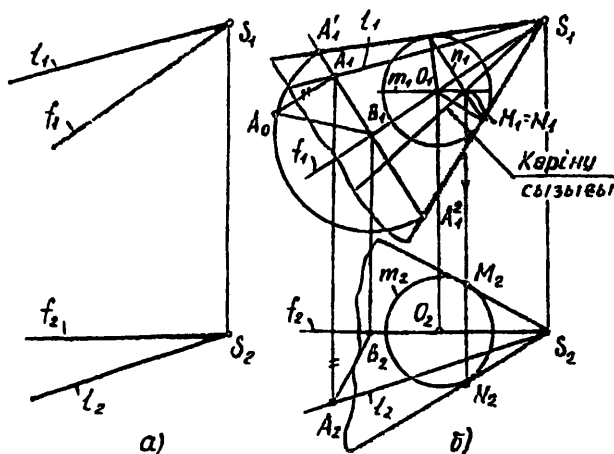
Сфера үшін анықтауыштың геометриялық бөлігі оның центрі O нүктесі мен бетте жатқан A нүктесінен тұрады. Сондықтан эпюрге сфераны екі нүктенің (O мен A) проекцияларымен беруге болады. Бірақ эпюрге қарап әр түрлі екі нүкте O мен A берілгенін немесе сфера берілгенін түсіну қиын. Сондықтан сфераның фронталь және горизонталь проекциялар жазықтықтарындағы нұсқаларын сызып көрсеткен дұрыс (167-сурет). Ол үшін AO кесіндісінің натурал шамасын айналдыру әдісімен тауып алуға болады. Сонда $|O_1\bar{A}_1|$ сфераның радиусын анықтайды. $(O_1; |O_1\bar{A}_1|)$ шеңбері сфераның фронталь проекциялар жазықтығындағы нұсқасы, ал $(O_2; |O_2\bar{A}_2|)$ шеңбері оның горизонталь проекциялар жазықтығындағы нұсқасы. Суретке қарап эпюрге берілген бет сфера екенін бірден түсінуге болады.



167-сурет

Эпюрге беттердің нұсқаларын салу — сызба геометрияның басты есептерінің бірі.

Мысал. S нүктесінде қиылысатын l және f түзулері берілген (168, а-сурет). l түзуін f түзуінен айналдырғанда айналудың конустық бет шектейтін конустық бет шығады.



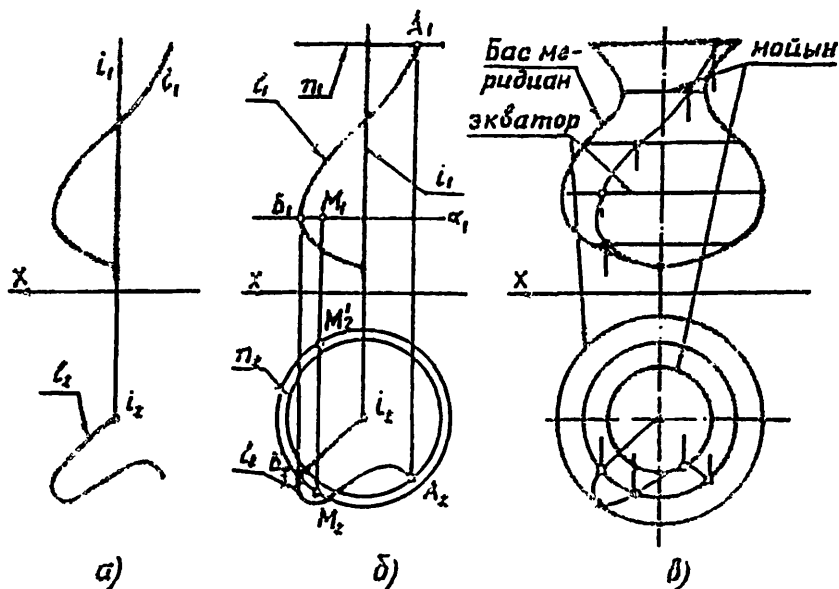
168-сурет

Айналудың конустық бет туралы жалпы білім беретін мектепке арналған геометрияның оқулығында толық түсінік берілген. f -конустың өсі, l -оның жасаушысы болады. Пайда болған конустық беттің ϕ фронталь және горизонталь

нұсқаларын салу керек. Ос f фронталь проекциялар жазықтығына параллель орналасқан, ал ос жалпы жағдайда орналасса эпюрді түрлендіру арқылы оны деңгейлік түзуге айналдырып алуға болар еді. Алдымен конустың фронталь нұсқасын салып аламыз. Ол үшін жасаушының бойынан қалауымызша A нүктесін ($A \in l$) алып, одан айналу өсіне перпендикуляр түсіреміз. Осы перпендикулярдың табаны B нүктесі болады. Жасаушыны өстен айналдырғанда A нүктесі центрі B нүктесі болатын фронталь проекциялаушы жазықтықта орналасқан шеңбер сызады. Осы шеңбер π , жазықтығына A^1, A^2 , кесіндісіне кескінделеді. A^1, A^2 , кесіндісін салу үшін AB кесіндісінің (тік бұрышты үшбұрыш ережесін пайдаланып) шын ұзындығы $[A_0B_1]$ анықталған, ал одан кейін ($B_1; |B, A_0|$) шеңбері A, B , түзуімен A^1 , және A^2 , нүктелерінде қиылысқанша жүргізілген. Табылған A^1 , және A^2 , нүктелерін S , нүктесімен қосатын түзулер (168, б-сурет) конустың фронталь проекциядағы нұсқасын анықтайды. Енді конустың горизонталь проекциядағы нұсқасын салуға көшелік. Осы мақсатта бет нұсқасының анықтамасын пайдалану тиімді болады. Беттің горизонталь проекциядағы нұсқасы деп оның π_2 жазықтығына қарағандағы көріну сызығының проекциясын айтатыныбыз. Конустың горизонталь проекциялар жазықтығына қарағандағы көріну сызығын былай салуға болады. Өстің бойынан қалауымызша алынған O нүктесін центр етіп алып, конусқа іштей сфера сызамыз. Сфера мен конусқа ортақ n шеңбері π , жазықтығына кесінді түрінде проекцияланады. n , -сфера мен конустың жанау шеңберінің фронталь проекциясы. Сфераны оның центрі арқылы өтетін горизонталь жазықтықпен қисақ, қиманы шектейтін шеңбер m горизонталь орналасқан m , кесіндісіне кескінделеді. Осы m шеңбері сфераның π_2 жазықтығына қарағандағы көріну сызығы болады, өйткені сфераның m шеңберінен жоғары орналасқан нүктелері горизонталь проекцияда көрінеді, ал одан төмен орналасқан нүктелері көрінбейді. m_2 шеңбері сфераның горизонталь проекциядағы нұсқасы. m және n шеңберлері M және N нүктелерінде қиылысады. Конустың төбесін M және N нүктелерімен қосатын жасаушылары оның горизонталь проекциялар жазықтығына қарағандағы көріну сызығы болады. Олай болса SM және SN жасаушыларының горизонталь проекциялары конустың горизонталь проекциядағы нұсқасын анықтайды. M және N нүктелерінің горизонталь проекцияларын (M_2 және N_2 нүктелерін) тауып, оларды S_2 нүктесімен қосатын түзулер жүргіземіз. Сонымен конустың фронталь проекциясын шектейтін нұсқалары S, A^1 , және S, A^2 , түзулері болса, онда оның горизонталь проекциясын шектейтін нұсқалары S_2M_2 және S_2N_2 түзулері болады.

41. АЙНАЛУ БЕТТЕРІ

Жасаушысы деп аталатын l сызығын айналу өсі деп аталатын қозғалмайтын i түзуінен айналдырғанда пайда болатын бетті *айналу беті* деп атайды. Айналу беті үшін анықтауыштың геометриялық бөлігі айналу өсі мен жасаушыдан тұрады: $\varphi(i, l)$, ал алгоритмдік бөлігі « l сызығы i түзуінен айналады» деген сөйлемнен тұрады. Эпюрде айналу бетін айналу өсі мен жасаушының проекцияларымен береміз (169, а-сурет). Жа-



169-сурет

саушыны өстен айналдырғанда оның нүктелері центрлері айналу өсінде болатын шеңберлер сызады. Мысалы $A \in l$ нүктесі n шеңберін сызады. Бұл шеңбер горизонталь жазықтықта жатқандықтан π_1 -ге x өсіне параллель кесінді түрінде, ал π_2 -ге бұрмаланбай шеңбер түрінде проекцияланады (169, б-сурет). Осы жасаушының нүктелері сызатын шеңберлерді *айналу бетінің параллельдері* деп атайды. Радиусы ең үлкен параллельді *экватор*, ал радиусы ең кіші параллельді *беттің мойыны* дейді (169, в-сурет).

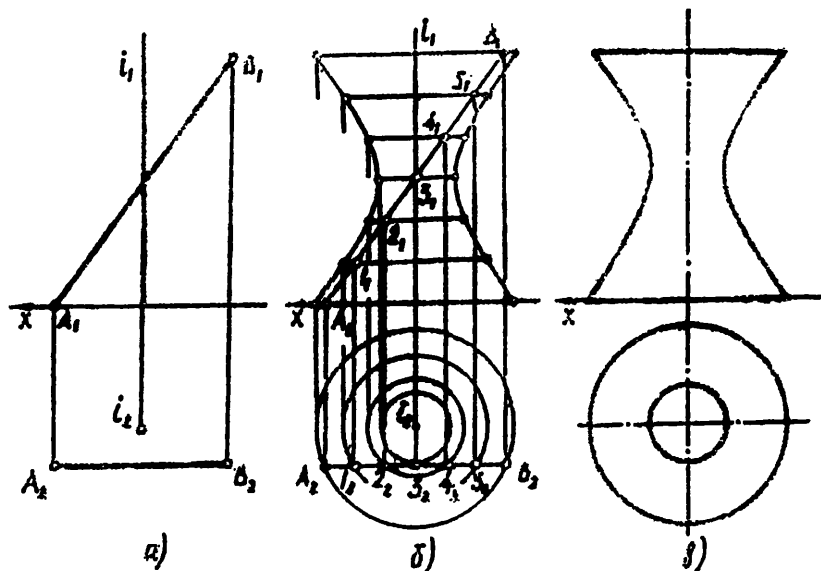
Айналу бетін эпюрде беру үшін оның жасаушысы мен өсінің проекцияларын көрсету жеткілікті екендігін дәлелделік. Осы мақсат үшін

беттің кез келген нүктесінің фронталь проекциясы бойынша горизонталь проекциясын салуды көрсетелік. Мысалға $M(M_1) \in \alpha(i, l)$ нүктесін аламыз (169,б-сурет). Оның горизонталь проекциясы M_2 нүктесін табу үшін α жазықтығын жүргіземіз: $M \in \alpha \perp i$. Бұл горизонталь жазықтық айналу бетін оның M нүктесі арқылы жүргізілген параллель бойымен қияды. $l \cap \alpha = B$. M нүктесі арқылы x өсіне перпендикуляр етіп жүргізілген байланыс сызығы $(i_2; |i_2 B_2|)$ шеңберімен екі нүктеде қиылысады. Олай болса, есептің екі шешімі болады екен. M_2 нүктесі M нүктесінің фронталь проекциясы M_1 көрінетін жағдайға сәйкес, ал M'_2 көрінбейтін жағдайға сәйкес.

Айналу бетінің өсі арқылы өтетін жазықтықпен қиылысу сызығын оның *меридианы* деп атайды. Айналу бетінің меридиандары өзара тең болады. Беттің фронталь проекциялар жазықтығына параллель меридианын *бас меридиан* деп атайды. Бас меридианды салу үшін беттің бірнеше параллельдерін жүргізу керек (161,в-сурет). Параллельдердің жиыны айналу бетінің қаңқасын береді. Параллельдердің фронталь проекциялары болатын кесінділердің ұштарын қосатын жазық сызық бас меридианның фронталь проекциясын береді. Қарастырылып отырған беттің нұсқасына көңіл бөделік. Экватордың горизонталь проекциясы оның горизонталь проекциялар жазықтығындағы нұсқасын, ал бас меридианның және ең жоғарғы параллельдің фронталь проекциялары оның фронталь проекциялар жазықтығындағы нұсқасын анықтайды.

Айналу беттерін техникада өте кең түрде пайдаланады. Оның себебі оларды алу және металл жонатын станоктарда өңдеу оңай.

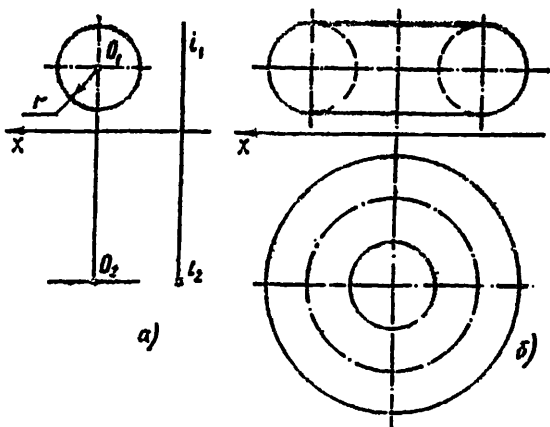
Эллипсті оның өстерінің біреуінен айналдырғанда *айналу эллипсоиды*, параболаны өсінен айналдырғанда *айналу параболоиды*, гиперболаны нақты өсінен айналдырғанда *екі қуысты айналу гиперболоиды* шығады. Гиперболаны жорамал өсінен айналдырғанда *бір қуысты айналу гиперболоиды* шығады. Бірақ құрылыста бір қуысты айналу гиперболоидын айқас түзулердің біреуін екіншісінен айналдыру арқылы алады. АВ кесіндісін горизонталь проекциялаушы i өсінен айналдырғанда пайда болатын бір қуысты айналу гиперболоидын салып көрсетелік (170-сурет). Алдымен айналу бетінің мойнын тұрғызып аламыз. Ол үшін i_2 нүктесінен $(A_2 B_2)$ -ге перпендикуляр түсіреміз. Бұл перпендикулярдың табанын 3_2 арқылы белгілесек, онда $(i_2; |i_2 3_2|)$ шеңбері мойынның горизонталь проекциясын, ал 3_2 нүктесі ортасы болатын абсцисса өсіне параллель ұзындығы $2 \cdot |i_2 3_2|$ -ге тең кесінді оның фронталь проекциясын анықтайды (170,б-сурет). АВ кесіндісін тең бөліктерге бөлетін 1, 2, 3, 4, 5 нүктелерін саламыз. А, 1, ..., В нүктелері арқылы беттің параллельдерін жүргіземіз. Осы параллельдердің фронталь проекцияларының ұштарын қосатын қисық сызық гипербола болатынын дәлелдеу қиын емес.



170-сурет

Беттің нұсқаларын бастырып, қалың жуан сызықпен, ал өстерін нүктелі үзілме сызықпен жүргізіп және көмекші сызықтарды өшіріп тастасақ бір қуысты гиперболоидтың сызбасын аламыз (170, в-сурет).

Шеңбердің центрі арқылы өтетін түзуден айналдырғанда сфера алынатынын біз бұрыннан білеміз. Ал шеңберді оның центрі арқылы өтпейтін түзуден айналдырғанда пайда болатын бетті *тор* деп атайды. Тордың *жабық* және *ашық* деп аталағын екі түрі бар. Айналу өсі жасаушы шеңберді қиятын болса, онда жабық тор, ал қимайтын болса ашық тор алынады. 171, а-суретте ашық тордың эпюрі берілген. Фронгаль жазықтықта орналасқан ($O; |r|$) шеңбері i өсінен айналады.

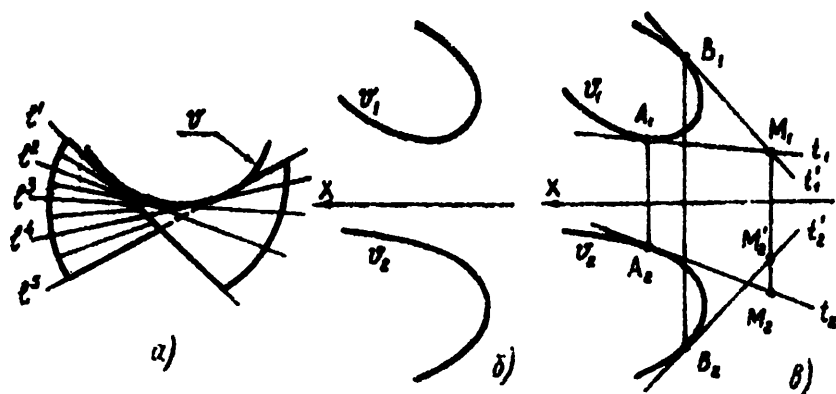


171-сурет

171,б-суретте ашық тордың сызбасы көрсетілген. Тор төртінші ретті беттерге жатады. Беттің реті деп оның алгебралық теңдеуіндегі белгісіздің ең жоғарғы дәреже көрсеткішінің айтатынын білеміз. Төртінші ретті бет жазықтықпен төртінші ретті қисық сызық бойынша, ал түзу мен гөрі нүктеде қиылысады.

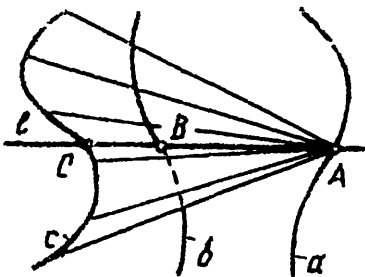
42. ТҰЗУ СЫЗЫҚТЫҚ БЕТТЕР

Түзу сызықтық беттің бір-біріне шексіз жақын орналасқан екі жасаушысының қиылысуы, немесе айқасуы мүмкін. Бір-біріне шексіз жақын орналасқан екі жасаушысы қиылысатын беттерді бүкілей және үзбей жайып, жазықтықпен беттестіруге болады. Сондықтан оларды *жайылатын беттер* деп атаймыз. Жайылатын беттер не бары үшеу: торс, конустық бет және цилиндрлік бет. Конустық және цилиндрлік беттермен біз бұрыннап таныспыз. Сондықтан торсқа тоқтайық. *Торс* деп кеңіс сызық v -ға жүргізілген жанамалардың жиыны жасайтын бетті айтады. (171.1,а-сурет). Бұл v сызығының өзі бір-біріне шексіз жақын орналасқан екі жасаушының қиылысу нүктелерінің жиыны болады. Бағыттаушы v сызығы торсты екі қанатқа бөледі, сондықтан v сызығын *торстың қыры* деп те атайды. Әлсізде торс өзінің қыры v -ның проекцияларымен толық анықталады (171.1,б-сурет). Торстың бетінде жатқан M нүктесінің фронталь проекциясы M_1 бойынша горизонталь проекциясы M_2 -ні салып көрсетелік (171.1,в-сурет): $M(M_1) \in \varphi(v)$. M нүктесі арқылы торстың жасаушысын жүргізеік. Жасаушылар торстың қырына жанамалар болады, ал жанамалар жанамаларға проекцияланады деп айтқан болатынымыз. M_1 нүктесі арқылы v_1 сызығына екі жанамалар t_1 және t'_1 жүргізуге бо-



171.1-сурет

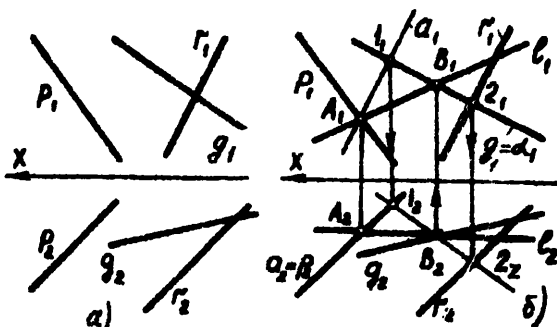
Жайылмайтын түзу сызықтық беті жалпы жағдайда бағыттаушылар деп аталатын үш сызық a, b және c -лармен қиылысатын түзулердің жиыны ретінде алуға болады (172-сурет): $\phi(a, b, c)$. Осындай беттің



жасаушысын қалай жүргізуге болатынын көрсетелік. Бағыттаушы a -ның бойынан қалауымызша A нүктесін алсақ, онда A нүктесі мен c сызығы конустық бетті анықтайды: $\alpha(A, c)$. Конустық бет α мен b сызығы B нүктесінде қиылыссын. Енді конустық бет α -ның B нүктесі арқылы өтетін жасаушысын салсақ, ол c сызығын C нүктесінде қияды. Сонда l түзуі a сызығын A нүктесінде, b сызығын B нүктесінде және c сызығын C нүктесінде қияды. Олай

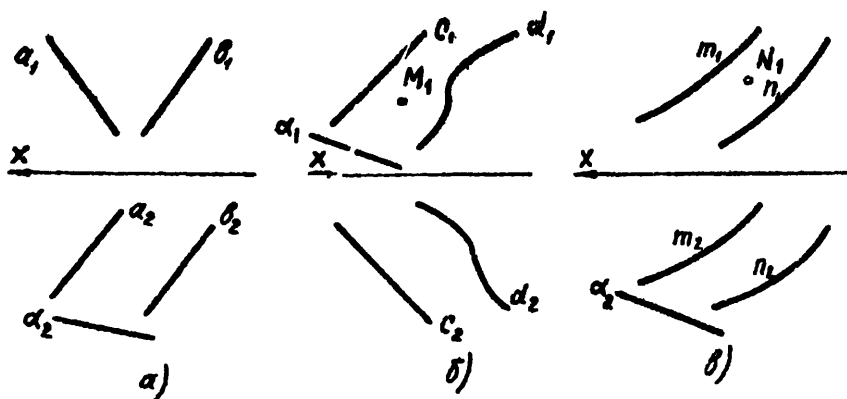
153

сызғанда, оған сәйкес l түзуі бір қуысты гиперболоидты сызды. Бір қуысты гиперболоид техниканың әр саласында кең түрде қолданылады. Бір қуысты гиперболоидты пайдаланудың негізін салған орыстың атақты инженері В. Г. Шухов (1853—1939) болатын.



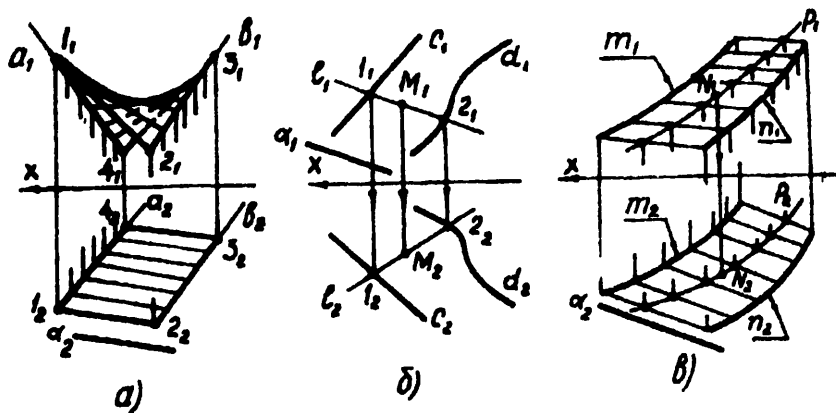
173-сурет

Енді бағыттаушыларының біреуі шексіз қашықтықта жатқан түзу болатын беттерді қарастыралық. Шексіз қашықтықта жатқан түзу жазықтықпен беріледі, өйткені жазықтықтың тек бір ғана шексіз қашықтықта жатқан түзуі болады. Беттің жасаушылары (түзулер) шексіз қашықтықта жатқан түзумен қиылысуы үшін олар берілген жазықтыққа параллель болулары тиіс. Сондықтан мұндай беттерді *параллелизм жазықтығы бар беттер* дейді. Параллелизм жазықтығы бар беттер үшеу: *қиғаш жазықтық, коноид және цилиндроид*. Қиғаш жазықтықтың қалған бағыттаушыларының біреуі түзу, ал екіншісі қисық сызықтар, коноидтың қалған бағыттаушыларының біреуі де қисық сызықтар. 174, а-суретте қиғаш жазықтық $\beta(a, b, \alpha)$ -ның, 174,б-суретте коноид $\chi(c, d, \alpha)$ -ның және 174,в-суретте цилиндроид $\delta(m, n, \alpha)$ -ның эпюрлері көрсетілген.



174-сурет

Қиғаш жазықтықтың берілген бөлігінің нұсқаларын салу үшін мүмкіндігінше жиі орналасқан жасаушыларын жүргіземіз. Басқаша айтқанда беттің қаңқасын саламыз (175, а-сурет). Алдымен жасаушылар-



175-сурет

дың горизонталь проекциялары жүргізіледі, олар өзара және α_2 -ге параллель болулары тиіс. Горизонталь проекциялары бойынша жасаушылардың фронталь проекцияларын табады. Жасаушылардың фронталь проекциялары жанамалары болатын сызық жүргіземіз. Бұл сызық парабола болады және беттің фронталь проекциясының нұсқасын береді. Қиғаш жазықтықтың фронталь проекциясына қарап, оның атқа салатын ер тәрізді бет екенін аңғарамыз. Аналитикалық геометрияда қиғаш жазықтықты *гиперболалық, параболоид* деп атайды. Оның себебі қиғаш жазықтықтың қималары парабола, немесе гипербола болады.

Беттің бір проекциясы берілген нүктесінің екінші проекциясын салуды қарастыралық. Нүктенің параллелизм жазықтығына перпендикуляр жазықтықтағы проекциясы берілсе, есепті шешу оңай, ал нүктенің параллелизм жазықтығына перпендикуляр емес жазықтықтағы проекциясы берілсе, есепті шешу күрделірек болады. 175, б-суретте коноид $\chi(c, d, \alpha)$ -ның параллелизм жазықтығы α -ге перпендикуляр жазықтықтағы проекциясы M_1 берілген. M нүктесінің горизонталь проекциясы M_2 -ні салу көрсетілген. Осы мақсат үшін коноидтың M нүктесі арқылы отетін жасаушысы l пайдаланылған. 175, в-суретте цилиндроид $\chi(m, n, \alpha)$ -ның параллелизм жазықтығына перпендикуляр емес жазықтықтағы проекциясы N_1 берілген. N нүктесінің горизонталь проекциясы N_2 -ні салу көрсетілген. Бұл жағдайда алдымен цилиндроидтың қаңқасы

тұрғызылған. M нүктесі арқылы отетін цилиндроидаың бегінде жатқан p сызыгының фронталь проекциясы калауымызша жүргізілген. Осы p сызыгының фронталь проекциясы p_1 бойынша горизонталь проекциясы p_2 -ні тұрғызып, оның бойынан N_2 нүктесін табамыз.

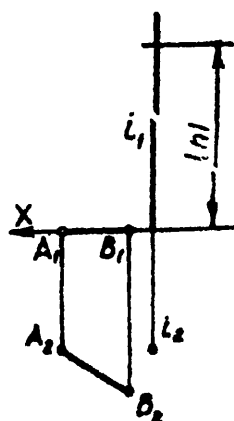
43. БҰРАМА БЕТТЕР

Бұрама бет жасаушы деп аталатын сызықтың бұрамалы қозғалысынан алынады. Бұрама беттің жасаушысы түзу сызық болса, онда оны *геликоид* деп атайды. Біз геликоидтарды ғана қарастырамыз. Бұрамалы қозғалыс күрделі қозғалыс. Ол қарапайым қозғалыстар: айналу мен параллель жылжудың қосындысынан тұрады. Геликоидты алу үшін l түзу сызығын бір уақытта i өсінен айналдыру және i өсіне параллель жылжыту керек. Геликоидтың жасаушысы l түзуінің бойында жатқан, бірақ айналу өсі i -дің бойында жатпайтын нүкте цилиндрлік бұрама сызық сызады. Жасаушының нүктелері сызатын цилиндрлік бұрама сызықтарды беттің бұрама параллельдері деп атайды. Барлық бұрама параллельдердің адымдары өзара тең болады, сондықтан бұрама параллельдің адымын *геликоидтың адымы* дейді.

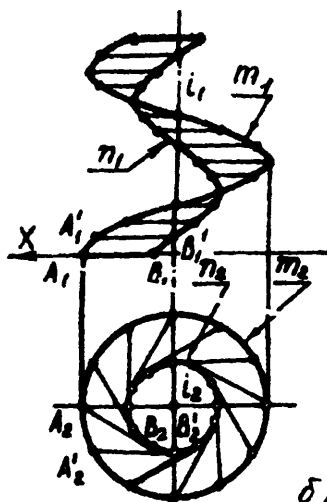
Геликоид үшін анықтауыштың геометриялық бөлігі беттің айналу өсінен i , жасаушысынан l және адымынан $|h|$ тұрады: $\varphi(i, l, |h|)$. Беттің өсі мен жасаушысы қиылысатын болса, геликоидты жабық, ал айқасатын болса — ашық деп атайды. *Жабық геликоид* үшін $i \perp l$, ал *ашық геликоид* үшін $i \nparallel l$ болады. Беттің өсі мен жасаушысының арасындағы бұрыштың мәніне қарай *геликоидты тік және көлбеу* деп ажырағады. Егер $i \perp l$ болса, геликоидты тік, ал $i \nparallel l$ болса, геликоидты көлбеу деп атайды. 176, а-суретте *ашық* және *тік геликоид* берілген. Эпюрге беттің өсі i — горизонталь проекциялаушы түзу, жасаушысы AB — горизонтальдың кесіндісі және адымы $|h|$ көрсетілген.

Берілген геликоидтың канқасын алу үшін A нүктесі сызатын m цилиндрлік бұрама сызығын және B нүктесі сызағын n цилиндрлік бұрама сызығын салу керек. Осы бұрама параллельдердің сәйкес нүктелерін қосатын кесінділер беттің жасаушылары болады (176, б-сурет). Жасаушылардың горизонталь проекциялар жазықтығына параллель сәкндіктерін көреміз. Олай болса, бұл бетті цилиндроида деп те қарастыруға болады.

177, а-суретте жабық және көлбеу геликоид берілген: $\varphi(i, [AB], |h|)$. Жасаушының A нүктесі цилиндрлік бұрама сызықтың бойымен қозғалса, B нүктесі айналу өсі i түзуі бойымен қозғалады (177, б-сурет). Жасаушы айналу өсінен $\pi/6$ бұрышына бұрылғанда оның A нүктесі өске параллель бағытта, ал B нүктесі өстің бойымен $h/12$ -ге көтеріледі. Бұрама



a)

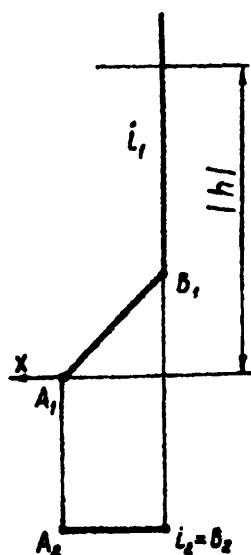


б)

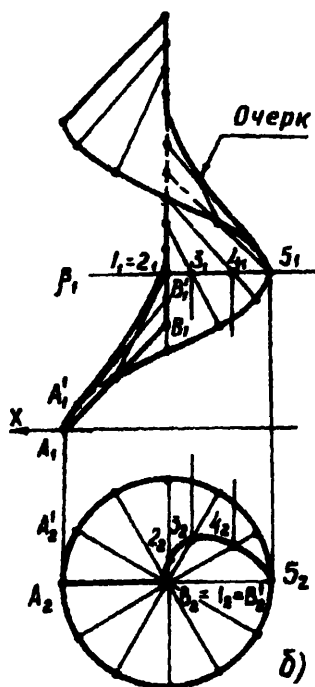
176-сурет

параллельдің $A, A', A'', \dots$ нүктелерін айналу өсінің сәйкес $B, B', B'', \dots$ нүктелерімен түзу сызықтардың көмегімен қоссақ, геликоидтың қаңқасын аламыз. Фронталь проекциялар жазықтығындағы беттің нұсқасын жасаушылар жанамалары болатын сызық ретінде тұрғызамыз. Жабық және көлбеу геликоидты горизонталь жазықтықпен қиғанда, қимада Архимед спиралі пайда болады. Осыған байланысты бұл бетті Архимед геликоиды деп те атайды.

Геликоидтар түзу сызықтық беттерге жатады. Сондықтан оларды түзудің үш бағыттаушылар бойымен қозғалуы нәтижесінде алуға болады. Беттің осін бағыттаушылардың біреуі, бұрама параллельдерінің



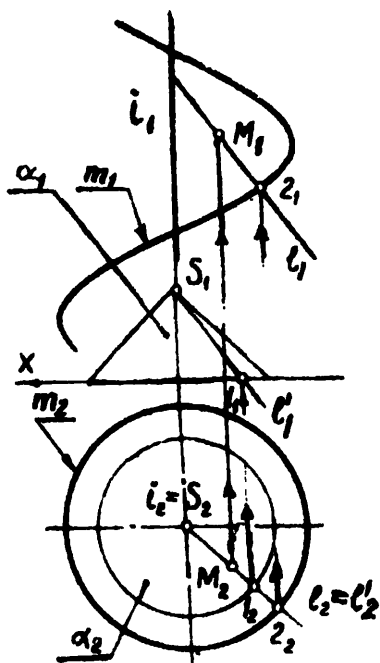
a)



б)

177-сурет

біреуін — екіншісі және өстес айналу конусын — үшіншісі ретінде қарастыруға болады. Сонда жасаушы айналу өсі i -ді және винттік параллель m -ді қиып өтуі және α конусының жасаушыларының біреуіне параллель болуы тиіс (178-сурет): $\varphi(i, m, \alpha)$. Геликоидтың горизонталь проекциясы M_2 нүктесі болатын M нүктесінің фронталь проекциясы M_1 -ді салу жолын көрсетелік. Ол үшін M нүктесі арқылы өтетін геликоидтың l жасаушысын және конустың оған параллель l' жасаушысын жүргізу керек. Бұл екі жасаушының горизонталь проекциялары S_2 және M_2 нүктелерімен ашықталады: $l_2 = l'_2 = (S_2 M_2)$. 1 және 2 нүктелерінің көмегімен конустың жасаушысы l' -тын және геликоидтың оған параллель жасаушысы l -дың фронталь проекцияларын тұрғызу керек. Содан кейін M_2 нүктесі арқылы жүргізілген байланыс сызығы l_1 түзуін M_1 нүктесінде қияды.



178-сурет

Бұрама беттер техникада көп тараған. Винттің, червяқтың, болттың бұрандалы бөліктері геликоидтармен шектеледі.

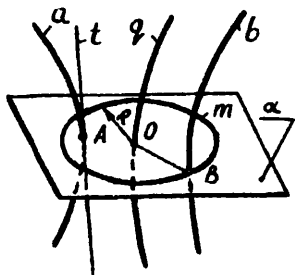
44. ЦИКЛДІК ЖӘНЕ ТОПОГРАФИЯЛЫҚ БЕТТЕР ТУРАЛЫ ТҮСІНІК

Радиусы өзгеріп отыратын, немесе өзгермейтін шеңбердің қозғалуынан алынатын беттерді *циклдік беттер* деп атайды. Жасаушы шеңбердің центрі сызып шығатын сызықты беттің бағыттаушысы деп атауға болады. Жасаушы шеңбер жазықтығын α деп, ал бағыттаушыны q деп белгілесек, онда α жазықтығы мен q сызығының арасындағы бұрыш та өзгеріп отыруы мүмкін: $\alpha \wedge q = \alpha^\circ$. Жасаушы шеңбердің радиусы $|r|$ болсын. Сонда циклдік бетті алу үшін оның бағыттаушысы q , бағыттаушы мен жасаушы шеңбер жазықтығының арасындағы бұрыштың өзгеру заңдылығы $\alpha^\circ = f(q)$ және жасаушы шеңбер радиусының өзгеру заңдылығы $r = F(q)$ берілулері қажет. Соңғы екі заңдылықты ($\alpha^\circ = f(q)$ мен

$r=F(q)$) аналитикалық жолымен тендеулер түрінде немесе графиктер ретінде көрсетуге болады.

Циклдік беттердің $\alpha=90^\circ$ болатын дербес түрлерін *түтік тәріздес беттер* деп атайды. Айналу беттерін бағыттаушысы q түзу сызық болатын түтік тәріздес беттер деп қарастыруға болады.

Циклдік бетті үш сызықтың көмегімен анықтауға болады: $\varphi(q, a, b)$ Олардың біреуі q -жасаушы шеңберлер центрлерінің геометриялық орны, яғни жоғарыда айтылғандай беттің бағыттаушысы, екіншісі a -жасаушы шеңбердің бағытын анықтайды. Жасаушы шеңбердің жазықтығы осы a сызығына тік бұрыш жасап орналасады. Ал үшіншісі b -жасаушы шеңбердің радиусын анықтайды. $A \in a$ нүктесін алып, осы нүкте арқылы a сызығына перпендикуляр α жазықтығын жүргізейік. Ол үшін a қисығына оның A нүктесі арқылы өтетін жанамасын t жүргізіп, α жазықтығын осы жанамаға перпендикуляр болатындай етіп тұрғызу керек: $\Lambda \in t; A \in \alpha \perp t$. Осы жазықтық q сызығымен O нүктесінде және b сызығымен B нүктесінде қиылысады (179-сурет). Центрі O нүктесі, радиусы $R=|OB|$ болатын және α жазықтығында жататын m шеңберін жүргіземіз. Осылайша тұрғызылған m шеңбері циклдік беттің жасаушы шеңберлерінің біреуі болады. A нүктесі үздіксіз қозғалып a қисығын сызғанда, оған сәйкес m шеңбері де үздіксіз қозғалып циклдік бетті жасайды.

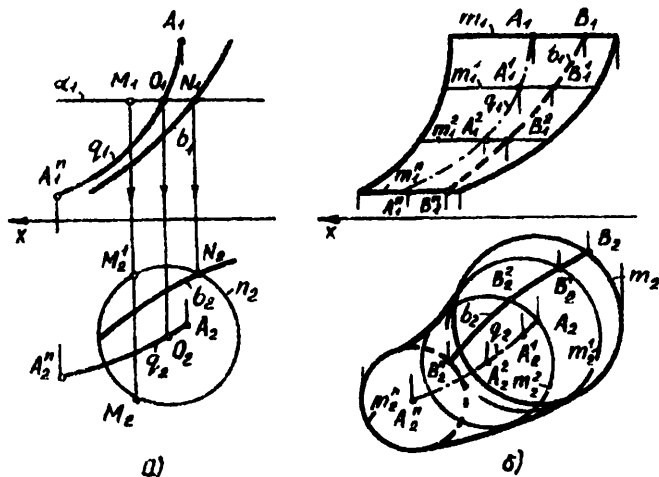


179-сурет

Егер циклдік беттің анықтаушысына кіретін a сызығы түзу сызық болса, онда жасаушы шеңберлер осы түзуге перпендикуляр орналасқан параллель жазықтықтарда жатар еді. Сонда параллелизм жазықтығы бар циклдік бет алынады: $\varphi(q, b, \beta)$; β — параллелизм жазықтығы.

Мысал. Параллелизм жазықтығы бар циклдік бет берілген: $\varphi(q, b, \pi_2)$. q — беттің бағыттаушысы; b — жасаушы шеңбердің радиусын анықтайтын сызық; π_2 — параллелизм жазықтығы. $M(M_1) \in \varphi$ нүктесінің горизонталь проекциясын және беттің (A және A'' нүктелері аралығындағы бөлігінің) нұсқасын салу керек (180, а-сурет).

$M(M_1)$ нүктесі арқылы π_2 жазықтығына параллель α жазықтығын жүргізейік. Сонда $q \cap \alpha = O$ және $b \cap \alpha = N$ нүктелері анықталады, ал $M(M_1)$ нүктесі центрі O нүктесі, радиусы $R=|ON|$ болатын горизонталь орналасқан n шеңберінің бойында жатады. Осы n шеңбері горизонталь проекцияда центрі O_2 нүктесі болатын және N_2 нүктесі арқылы өтетін π_2 шеңберіне кескінділерді (180, а-сурет). M , нүктесі арқылы жүргізілген бай-

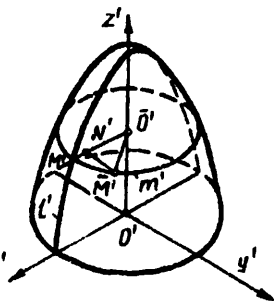


лапыс сызығы n_2 шеңберімен екі нүктеде (M_2 және M'_2) қиылысады. Егер M нүктесі беттің фронталь проекцияда көрінетін жағында жатса, онда оның горизонталь проекциясы M_2 нүктесі болады. Ал M нүктесі фронталь проекцияда көрінбейтін нүкте болса, онда оның горизонталь проекциясы M'_2 нүктесі болады.

Жасалуы ешқандай геометриялық заңдылыққа бағынбайтын беттер де кездеседі. Оларды *топографиялық беттер* деп атайды. Топографиялық беттерге кемелің корпусы, жер қыртысы, ұшақтар мен зымырандардың беттері жатады.

45. БЕТТІҢ ТЕНДЕУІН ҚҰРУ ЖӘНЕ ТЕНДЕУІМЕН БЕРІЛГЕН БЕТТІҢ ЭПЮРИН САЛУ

1. *Айналу бетінің теңдеуін құру.* Координаттар жазықтығы xOz -те орналасқан l сызығын z өсінен айналдырғанда пайда болатын айналу бетін қарастыралық. Айналу бетінің жасаушысы l сызығының теңдеуі $z=f(x)$ белгілі болсын (181-сурет). Жасаушының бойынан алынған $M(x; 0; z)$ нүктесін қарастыралық ($M \in l$). Жасаушыны z өсінен айналдырғанда M нүктесі айналу бетінің параллелі болатын m шеңберін сызады. Бұл шеңбердің центрі ($\bar{O}$ нүктесі) айналу өсінде жатады ($\bar{O} \in z$), ал оның жазықтығы xOy жазықтығына параллель болады. Қалауымызша алынған $\bar{M} \in m$ нүктесін қарастыралық. Оның координаттарын $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ деп белгілейік. M нүктесі мен $\bar{M}$ нүктелерінің аппликаталары бірдей: $z = \bar{z}$. $\bar{M}$ нүктесінен $\bar{O}M$



181-сурет

түзуіне перпендикуляр түсіріп, оның табанын N деп белгілейік. Сонда тік бұрышты $\bar{M}N\bar{O}$ үшбұрышы алынады. Оның гипотенузасы $[\bar{O}\bar{M}]$ параллельдің (m шеңберінің) радиусы болғандықтан $\bar{O}M$ кесіндісіне тең: $|\bar{O}M| = |\bar{O}\bar{M}| = \bar{x}$, ал катеттері $|\bar{O}N| = \bar{y}$ және $|\bar{M}N| = \bar{y}$ болады. Сондықтан $|\bar{O}M|^2 = |\bar{O}N|^2 + |\bar{M}N|^2$ немесе $\bar{x}^2 = \bar{y}^2 + \bar{z}^2$ болады. Енді x пен z -тің мәндерін жасаушының теңдеуіне апарып қоямыз. Сонда $z=f(x) \Rightarrow \bar{z}=f(\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2})$ теңдігі шығады. $\bar{M}$ нүктесі айналу бетінің кез келген нүктесі болғандықтан, $\varphi(z, l)$ бетінің теңдеуі мына түрде жазылады екен:

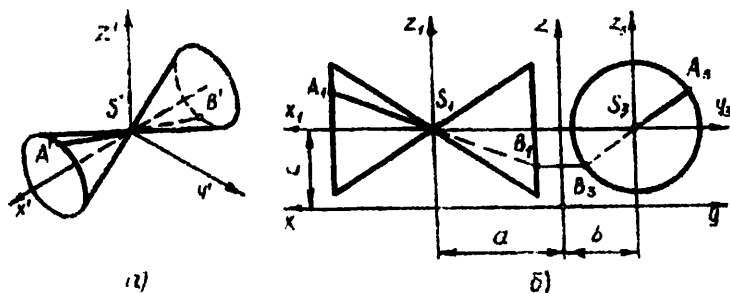
$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (28)$$

Ереже: xOz жазықтығында жатқан теңдеуі $z=f(x)$ болатын сызықты z өсінен айналдырғанда шығатын айналу бетінің теңдеуін алу үшін, жасаушы теңдеуіндегі x -ты $\sqrt{x^2 + y^2}$ -пен алмастыру керек.

Сонда xOy жазықтығында жатқан $y=f(x)$ теңдеуімен анықталған кисықты y өсінен айналдырғанда шығатын айналу бетінің теңдеуі $y=f(\sqrt{x^2 + z^2})$, ал $x=f(y)$ теңдеуімен анықталған кисықты x өсінен ай-

налдырғанда шығатын айналу бетінің тендеуі $x=f(\sqrt{y^2+z^2})$ болады екен.

1-мысал. Айналу конусының тендеуін құру керек болсын. Бас нүктеге қарағанда симметриялы орналасқан және xOz жазықтығында A және B нүктелерін қосатын кесіндіні x өсінен айналдырғанда пайда болатын айналу бетінің тендеуін құралық (182-а-сурет).



182-сурет

AB түзуінің тендеуін $x=kz$ түрінде жазуға болады. Түзуді онымен қиылысатын түзуден айналдырғанда айналу конусы алынады, ал A нүктесі центрі x өсінде жататын шеңбер сызады. B нүктесі де центрі x өсінде орналасатын шеңбер сызады. A және B нүктелері сызатын шеңберлер өзара тең болады. Айналу конусының тендеуін алу үшін жасаушы AB түзуінің тендеуіндегі z -тың орнына $\sqrt{y^2+z^2}$ -ты жазуымыз керек:

$x=k\sqrt{y^2+z^2}$. Соңғы теңдіктің екі жағында квадраттап, айналу конусының тендеуін аламыз: $x^2-k^2y^2-k^2z^2=0$. Осы теңдеумен анықталған конустың эңюрін салсақ, оның проекциялары беттесіп кетеді де, сызбаға түсіну қиын болып қалады. Сондықтан конустың төбесін $S(S=(AB) \cap x)$ координаттары a , b және c болатын нүктеге көшіру қолайлы болады. Сонда жоғарылағы конустың тендеуін былай жазуға болар еді:

$$(x-a)^2-k^2(y-b)^2-k^2(z-c)^2=0.$$

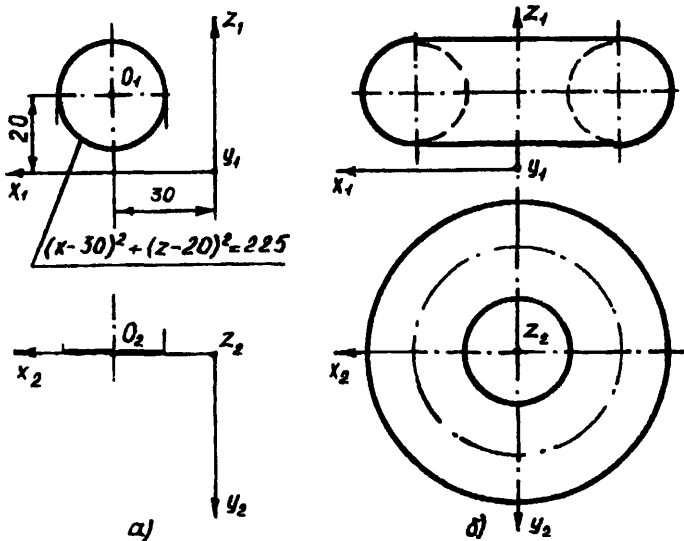
Қарастырылып отырған конусты профиль жазықтықпен (профиль жазықтықтың тендеуі $x=const.$) қисақ қимада шеңбер шығады, ал оның төбесі арқылы өтетін фронталь жазықтықпен қимасында қиылысатын екі түзу шығады. Шынында да, егер $y=b$ болса конустың тендеуінен мынаны аламыз:

$$(x-a)^2 - k^2(z-c)^2 = 0 \Rightarrow [(x-a) - k(z-c)] \cdot [(x-a) + k(z-c)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-a) - k(z-c) = 0, \\ (x-a) + k(z-c) = 0. \end{cases}$$

Конустың эпюрін салу үшін алдымен $S(a, b, c)$ нүктесінің фронталь S_1 және профиль S_2 проекцияларын салып аламыз (182,б-сурет). A нүктесі арқылы өтетін π шеңбері π жазықтығына бұрмаланбай шеңбер түрінде кескінделеді. B нүктесі A нүктесіне симметриялы болғандықтан B нүктесі арқылы өтетін параллельдің профиль проекциясы m_2 шеңберімен беттеседі. Фронталь проекцияда аталған шеңберлер вертикаль орналасқан ұзындықтары диаметрге тең екі кесіндіге проекцияланады. Конустың фронталь проекциядағы нұсқасы екі тең бүйірлі үшбұрыш, ал профиль проекциясы шеңбер болатынын көреміз.

2-мысал. Центрі $O(30; 0; 20)$ нүктесінде орналасқан, радиусы $R=15$ болатын және xOz жазықтығында жатқан шеңберді z өсінен айналдырғанда пайда болатын тордың теңдеуін құрып, эпюрін салу керек (183,а-сурет).



183-сурет

Тік бұрышты координаттар жүйесін xOz жазықтығы π_1 -ге, xOy жазықтығы π_2 -ге параллель орналасқан деп қарастырып, оның фронталь және горизонталь проекцияларын салалық. Сонда жасаушы шеңбер

фронталь проекцияда центрі O_1 нүктесі, радиусы $R=15$ болатын шеңберге, ал горизонталь проекцияда ортасы O_2 нүктесі болатын, ұзындығы 30-ға тең горизонталь орналасқан кесінді болады. Енді осы шеңберді z өсінен айналдырғанда пайда болатын тордың эпюрі салу оңай (183,6-сурет). Жасаушы шеңбердің теңдеуін былай жазуға болады: $(x-30)^2 + (z-20)^2 = 225$; $y=0$. Тордың теңдеуін алу үшін жасаушы теңдеуіндегі x -ты $\sqrt{x^2 + y^2}$ -пен алмастыру керек. Сонда тордың теңдеуі былай жазылады екен:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 30)^2 + (z-20)^2 = 225.$$

2. *Түзу сызықтық беттің теңдеуін құру.* Осындай беттің жасаушылары түзулер болатыны туралы жоғарыда айтылды. Жасаушы түзудің теңдеуін құру қиын емес. Одан кейін бағыттаушылардың теңдеулерін анықтап алуымыз керек. Бағыттаушылардың теңдеулерін пайдаланып жасаушы түзу теңдеуінің коэффициенттерін анықтайды. Табылған коэффициенттерді жасаушының теңдеуіне апарып қойып, түзу сызықтық беттің теңдеуін алады.

3-мысал. Айқас түзулер a мен b -ның және горизонталь проекциялаушы a жазықтығының эпюрі берілген (184-сурет). Бағыттаушылары a және b түзулері, a параллелизм жазықтығы болатын гиперболалық параболоидтың теңдеуін құру керек.

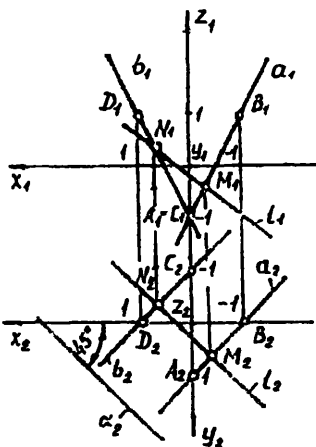
Эпюрден a түзуі $A(0; 1; -1)$ және $B(-1; 0; 1)$ нүктелері арқылы өтетінін, ал b түзуі $C(0; -1; -1)$ және $D(1; 0; 1)$ нүктелері арқылы өтетінін көреміз. Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі былай жазылатыны белгілі:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

мұндағы x_1, y_1, z_1 — бірінші нүктенің координаталары, ал x_2, y_2, z_2 — екінші нүктенің координаталары. Сонда A_1 және B_1 нүктелері арқылы өтетін a_1 түзуінің теңдеуі былай алынады:

$$\frac{x-0}{-1-0} = \frac{z+1}{1+1} \Rightarrow 2x = -z-1 \Rightarrow z = -2x-1.$$

Сол сияқты A_2 және B_2 нүктелері арқылы өтетін a_2 түзуінің теңдеуі $y = x+1$, C_1 және D_1 нүктелері арқылы өтетін b_1 түзуінің теңдеуі $z = 2x-1$, C_2



184-сурет

және D_2 нүктелері арқылы өтетін b_2 түзуінің теңдеуі $y = -x - 1$ алынады. Параллелизм жазықтығы фронталь проекциялар жазықтығына 45° бұрыш жасап көлбейді. $\alpha \perp \pi_2$, $\alpha, \pi_1 = 45^\circ$. Гиперболаалық параболоид жасаушыларының біреуінің горизонталь проекциясын (l_2 түзуін) жүргізілелік: $l_2 \parallel \alpha_2$. Ал l_2 түзуінің теңдеуін былай жазуға болады: $y = -x + p$; p - параметр. Осы жасаушы a түзуімен M нүктесінде және b түзуімен N нүктесінде қиылыссын. M нүктесінің координаттарын анықтау үшін l_2, a_2 және a, l_1 түзулерінің теңдеулерін бірге шешу керек:

$$\begin{cases} y = -x + p, \\ y = x + 1, \\ z = -2x - 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{p+1}{2}, \\ y = x + 1, \\ z = -2x - 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{p+1}{2}, \\ x_1 = \frac{p-1}{2}, \\ z = -2x - 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{p+1}{2}, \\ x_1 = \frac{p-1}{2}, \\ z_1 = -p. \end{cases}$$

N нүктесінің координаттарын анықтау үшін l_2, b_2 және b, l_1 түзулерінің теңдеулерін бірге шешу керек:

$$\begin{cases} y = -x + p, \\ y = x - 1, \\ z = 2x - 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = \frac{p-1}{2}, \\ y = x - 1, \\ z = 2x - 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = \frac{p-1}{2}, \\ x_2 = \frac{p+1}{2}, \\ z = 2x - 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = \frac{p-1}{2}, \\ x_2 = \frac{p+1}{2}, \\ z_2 = p. \end{cases}$$

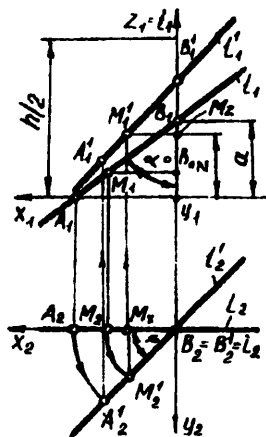
M және N нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазалық:

$$\frac{x - \frac{p-1}{2}}{\frac{p+1}{2} - \frac{p-1}{2}} = \frac{y - \frac{p+1}{2}}{\frac{p-1}{2} - \frac{p+1}{2}} = \frac{z + p}{p + p}.$$

Соңғы теңдіктерді ықшамдап белгісіз параметр p -ден құтылсақ, гиперболаалық параболоидтың теңдеуін аламыз:

$$z = x^2 - y^2.$$

4-мысал. Жабық көлбеу геликоид $\phi(i, l, |h|)$ берілген (185-сурет). Оның жасаушысы l бастапқы жағдайда фронталь проекциялар жазықтығына параллель орналасқан, ал өсі аппликаталар өсімен бірігеді: $i = z$. Жасаушы z өсі тоңірегінде бұрамалы қозғалғанда пайда болатын түзу сызықтық беттің теңдеуін жазу керек. Берілген түзу l абсцисса және аппликата өстерімен A және B нүктелерінде қиылысады. B нүктесінің биіктігін a деп, ал l және i түзулері арасындағы бұрышты α° деп белгілеп жасау-



185-сурет

шының кез келген нүктесі M -ді қарастыралық. M нүктесі l жасаушы түзуімен бірге қозғалып цилиндрлік бұрама сызық сызады. Оның i өсінен қашықтығын ρ деп белгілеміз. Жасаушы l өстен айналып φ° бұрышына бұрылғанда M нүктесі M' нүктесіне көшеді. M' нүктесінің координаттарын анықталық. $|B_2M_2|=|BM'_2|=\rho$; $x=|B_2M_x|$; $y=|M'_2M_x|$; $z=a-|B_1B_0|+|B_0M_2|$. $M'_2M_xM_2$, $M_1B_0B_1$ тік бұрышты үшбұрыштарын қарастырып, геликондтың параметрлік түрдегі теңдеуін аламыз:

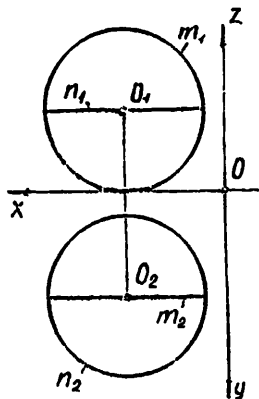
$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi^\circ, \\ y = \rho \cdot \sin \varphi^\circ, \\ z = a - \rho \cdot \operatorname{ctg} \alpha^\circ + \frac{h}{2\pi} \cdot \varphi^\circ. \end{cases}$$

Соңғы үш теңдікті бірге шешіп ρ және φ° белгісіздерден құтылсақ, геликондтың теңдеуін мына түрде жазуға болады:

$$z = a - \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha^\circ + \frac{h}{2\pi} \operatorname{Arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$$

3. Теңдеуімен берілген беттің эпюрін салу қиын емес. Мысалдар қарастыралық.

5-мысал. $(x-40)^2 + (y-40)^2 + (z-30)^2 = 900$ теңдеуі анықтайтын беттің эпюрін салу керек болсын. Беттің теңдеуіне қарап бізге центрі $O(40; 40; 30)$ нүктесінде орналасқан, радиусы $R=30$ болатын сфера берілгенін анықтаймыз. Эпюрге координаттар осьтерін жүргізіп, O нүктесінің координаттары бойынша фронталь 0_1 және горизонталь 0_2 проекцияларын тұрғыза-мыз (186-сурет). Центрі O_1 нүктесі, радиусы $r=30$ болатын шеңбер жүргіземіз. Бұл шеңбер m_1 сфераның фронталь нұсқасы болады, ал оның горизонталь проекциясы m_2 фронталь проекциялар жазықтығымен салыстырғандағы көріну сызығы болады. Центрі O_2 нүктесі, радиусы $R=30$ болатын n_2 шеңбері сфераның горизонталь нұсқасын, ал оның фронталь проекциясы n_1 көріну сызығын анықтайды.



186-сурет

6-мысал. $\frac{(x-50)^2}{40^2} + \frac{(y-40)^2}{30^2} + \frac{z^2}{30^2} = 1$ теңдеуі анықтайтын беттің

эпюрін салалық.

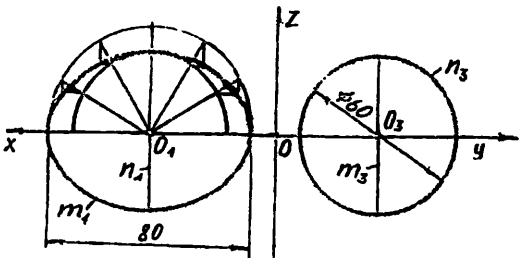
Беттің теңдеуіне қарап оның центрі $O(50; 40; 0)$ нүктесінде орналасқан айналу эллипсоиды екенін анықтаймыз. Координаттары бойынша O нүктесінің фронталь 0_1 және профиль 0_2 проекцияларын саламыз. Эллипсоидты оның центрі арқылы өтетін фронталь және профиль жазықтықтармен қиялық. Оны $y=40$ жазықтығымен қиғанда алынатын сы-

зықтың теңдеуі $\frac{(x-50)^2}{40^2} + \frac{z^2}{30^2} = 1$, яғни үлкен өсі 80 және кіші өсі 60 бо-

латын эллипс. Эллипсоидтың фронталь проекциядағы нұсқасы осы эллипске тең эллипс m_1 болатынына көз жеткізу қиын емес. Эллипсоидтың $x=50$ жазықтығымен қимасының теңдеуі

$\frac{(y-40)^2}{30^2} + \frac{z^2}{30^2} = 1$, яғни радиусы $R=30$ болатын шеңбер. Олай болса эл-

липсоидтың профиль проекциядағы нұсқасы центрі 0_2 нүктесі, радиусы $R=30$ болатын шеңбер екен (187-сурет). Эллипсоидтың фронталь проекциядағы нұсқасы m_1 эллипсін диаметрлері 80 және 60 болатын бір центрден жүргізілген екі шеңбер әдісімен салуға болады. Вертикаль орналасқан n_1 және m_2 кесінділері — эллипсоид проекцияларын көрінетін және көрінбейтін екі бөлікке бөлетін көріну сызықтары.

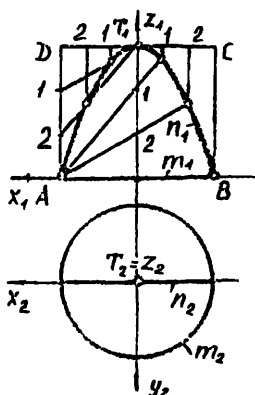


187-сурет

7-мысал. $\frac{x^2}{18^2} + \frac{y^2}{18^2} + z = 50$ теңдеуі анықтай-

тын беттің эңірін салу керек.

Берілген беттің фронталь және горизонталь жазықтықтармен қималарын зерттейміз. Оның фронталь жазықтықтармен қималары параболалар, ал горизонталь жазықтықтармен қималары шеңберлер болатынын көреміз. Олай болса бізге айналу параболоиды берілген екен. Беттің xOy жазықтығынан жоғары орналасқан бөлігінің эңірін салалық (188-сурет). Оның горизонталь координаттар жазықтығымен қимасында шығатын шеңбердің теңдеуі мынадай болады:



188-сурет

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 900, \\ z = 0. \end{cases}$$

Сондықтан π_2 жазықтығындағы параболоидтың нұсқасын радиусы $R=30$ болатын m_2 шеңбері анықтайды. Фронталь проекциялар жазықтығындағы параболоидтың нұсқасын алу үшін, оны $y=0$ жазықтығымен киямыз. Сонда пайда болатын параболаның теңдеуі:

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = -\frac{x^2}{18^2} + 50. \end{cases}$$

Осы n параболасының төбесі $T(0; 0; 50)$ нүктесінде орналасады. Ұзындығы m_2 шеңберінің диаметріне тең, ал ортасы y , нүктесінде болатын горизонталь орналасқан m , кесіндісін салып, A және B нүктелерін аламыз. Бір қабырғасы T , нүктесі арқылы өтетін, z , түзуі симметрия өсі болатын $ABCD$ тік төртбұрышын саламыз.

T, C, T, D, AD және T, y , кесінділерін тең бөліктерге бөлеміз. T, C кесіндісінің бөліну нүктелерін солдан оңға қарай, T, D кесіндісінің бөліну нүктелерін оңнан солға қарай, ал AD мен T, y , кесінділерінің бөліну нүктелерін жоғарыдан төмен қарай өлшеміз. Алғашқы екі кесіндінің бөліну нүктелері арқылы вертикаль түзулер, AD кесіндісінің бөліну нүктелерін T , нүктесімен қосатын және T, y , кесіндісінің бөліну нүктелерін A нүктесімен қосатын түзулер жүргізілген. Сәйкес түзулердің қиылысу нүктелері n , параболасын анықтайды. Әрине n , параболасын $z = -\frac{x^2}{18^2} + 50$ функциясының графигі ретінде де тұрғызуға болады.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН СҰРАҚТАР МЕН ЖАТТЫҒУЛАР

1. Сызба геометрияда сызықты қалай алады? Қиюшы және жаппама деген не?
2. Жазық және кеңіс сызықтарының айырмашылығы қандай?
3. Цилиндрлік және конустық бұрама сызықтар қалай алынады? Қандай бұрама сызықты оңқай, ал қандай бұрама сызықты солақай дейміз?
4. Эпюрге сызықтың ұзындығын жуықтап қалай салуға болады?
5. Сызба геометрияда беттер қалай жасалады? Беттің анықтаушы деген не? Анықтаушының геометриялық және алгоритмдік бөліктері туралы не айтасыз?
6. Беттің нұсқасы дегеніміз не және ол не үшін сызылады?
7. Айналу бетін қалай алуға болады? Параллель, экватор, мойын және меридиан деген не?

8. Айналу гиперboloиды мен тор беттері туралы не айтасыз?
 9. Жайылатын түзу сызықтық беттер туралы айтып беріңіз. Қандай бетті тор деп атайды?

10. Жайылмайтын түзу сызықтық беттерді қалай алуға болады? Қандай беттерді қисық цилиндрoid, қисық коноид және бір қуысты гиперboloид деп атаймыз?

11. Параллелизм жазықтығы бар беттер туралы айтыңыз.

12. Бұрама беттер қалай алынады? Ашық, жабық, тік және қолбеу геликоидтар туралы не айтасыз?

13. Циклдік және топографиялық беттер деп қандай беттерді айтады?

14. Геликоидты эпюрде қалай береді? Оның қаңқасын қалай тұрғызады?

15. Фронталь проекциялар жазықтығынан 10 мм қашықтықта, горизонталь проекциялар жазықтығында тұрған және биіктігі 60 мм, табанындағы шеңбердің радиусы 15 мм болатын цилиндр алып, цилиндрлік бұрама сызық тұрғызу керек болсын. Бұрама сызық оңқай және оның адымы 30 мм. Бұрама сызықтың тұрғызылған бөлігінің ұзындығын анықтау керек.

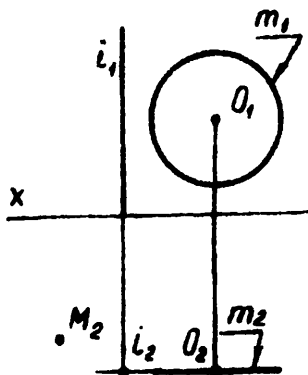
16. Бөбесі $S(15; 20; 40)$ нүктесі болатын және горизонталь проекциялар жазықтығында тұрған радиусы 15 -ке тең конустың бетіне оңқай конустық бұрама сызықтың бір орамын салып, салынған орамның ұзындығын анықтаңыз.

17. Центрі $O(20; 20; 15)$ нүктесі болатын және $A(25; 10; 8)$ нүктесі арқылы өтетін сфераның нұсқаларын салыңыз. Сфераның бетінде жатқан $B(15; 20; z)$ нүктесінің проекцияларын табыңыз.

18. AB кесіндісін A нүктесі арқылы өтетін фронталь проекциялаушы түзуден айналдырғанда пайда болатын беттің проекцияларын салыңыз: $A(20; 50; 15)$, $B(15; 5; 50)$.

19. Горизонталь проекциялаушы i түзуінен m шеңберін айналдырғанда пайда болған беттің нұсқаларын салыңыз (189-сурет). Экваторын және мойнын көрсетіңіз, $M(M_2) \notin \phi(i, m)$ нүктесінің фронталь проекциясын тұрғызыңыз.

20. 190-суретте торс (а), коноид (б) және геликоид (в) беттері берілген. Беттердің қаңқаларын және нұсқаларын тұрғызыңыз. Торс бетінде жатқан A нүктесінің,



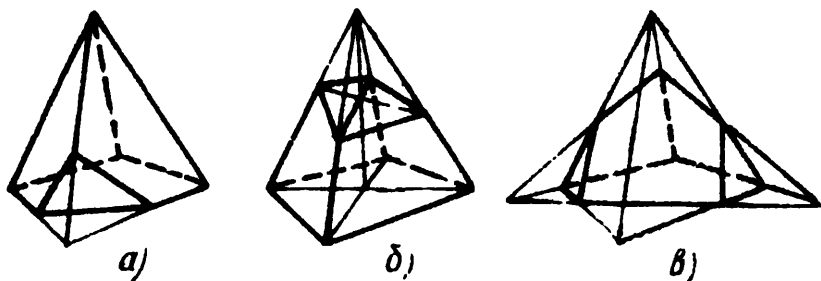
189-сурет

Жетінші тарау

БЕТТЕРДІҢ ЖАЗЫҚТЫҚПЕН ЖӘНЕ ТҮЗУ СЫЗЫҚПЕН ҚИЫЛЫСУЫ. ЖАНАМА ЖАЗЫҚТЫҚ. БЕТТЕРДІҢ ӨЗАРА ҚИЫЛЫСУЫ

46. КӨП ЖАҚТЫ БЕТТЕРДІҢ ЖАЗЫҚТЫҚПЕН ҚИЫЛЫСУЫ

Денені жазықтықпен қиғанда пайда болатын фигураны *қима* деп атайды. Көп жақты беттің қимасы көпбұрыш болады. Бұл көпбұрыштың қабырғаларының саны көпжақтың қиюшы жазықтықпен қиылысатын жақтарының санына, ал төбелерінің саны көпжақтың қиюшы жазықтықпен қиылысатын қырларының санына тең болады. Мысалы, төрт бұрышты пирамиданың қимасы үшбұрыш, төрт бұрыш немесе бесбұрыш болуы мүмкін (192-сурет). Көп жақты беттің жазықтықпен қи-

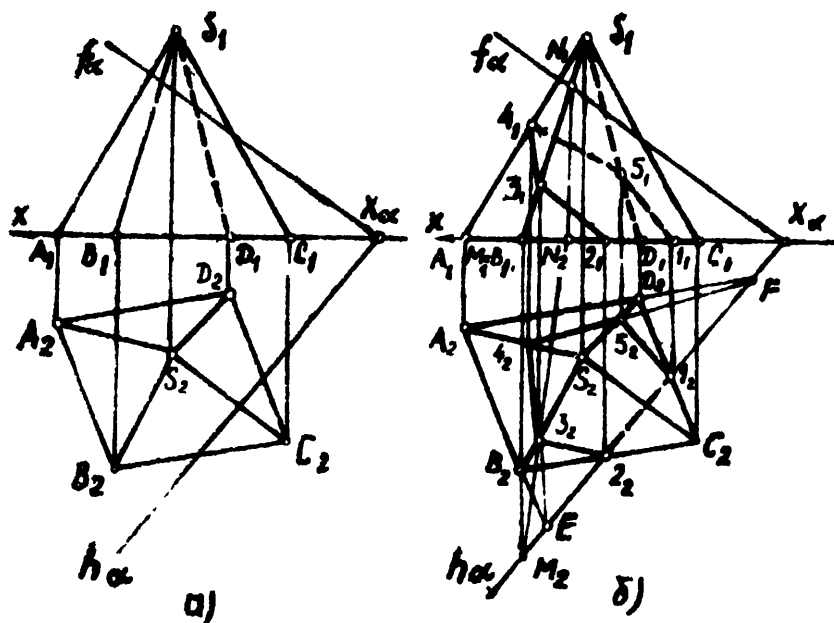


192-сурет

масын салудың екі тәсілі бар: төбелер және қабырғалар тәсілі. Бірінші тәсілді қолданғанда түзудің жазықтықпен қиылысу нүктесін бірнеше рет табады (§ 24). Мұндағы жазықтық біреу де ал түзулер (қырлар) бірнешеу. Екінші тәсілде де екі жазықтықтың қиылысу түзуін салу есебін бірнеше рет қайталап шығарады (§ 25). Көбіне бірінші тәсіл қолданылады, ал берілген көп жақты беттің жақтары проекциялаушы жазықтықтар болса, екінші тәсілді пайдаланған тиімді.

1-мысал. Төрт бұрышты $SABCD$ пирамидасының іздерімен берілген α жазықтығымен қимасын салу керек (193-сурет).

Пирамиданың бүйір жақтары жалпы жағдайда орналасқан, ал табаны горизонталь проекциялар жазықтығында жатыр. Қиюшы жазықтықтың горизонталь ізі h_α де π_2 жазықтығында жатыр. Сондықтан пирамиданың табаны α жазықтығымен [12] кесіндісі бойымен қиылысатынын оңай байқаймыз. Бірінші тәсілді қолданып SB қырының α жазық-

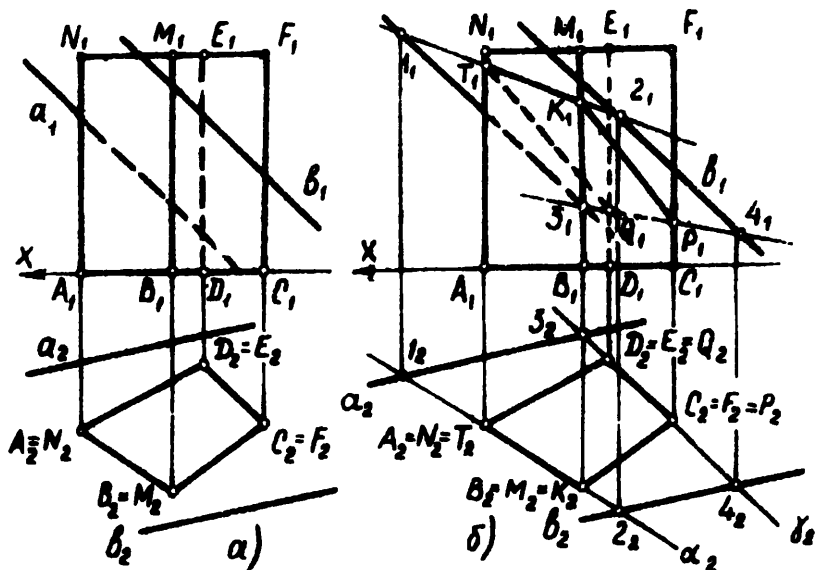


193-сурет

тығымен қиылысу нүктесін тұрғызамыз: $(SB) \cap \alpha = 3$. Осы 3 нүктесін алу үшін SB қыры арқылы фронталь проекциялаушы жазықтық жүргізсек, ол жазықтық берілген α жазықтығымен MN түзуі бойынша қиылысар еді. Енді қиманың қалған төбелері 4 және 5 нүктелерінің горизонталь проекцияларын былай тұрғызған дұрыс. $[A_2B_2]$ -ні h_α мен E нүктесінде қиылысқанға дейін созамыз. E нүктесін 3_2 нүктесімен қосамыз. Сонда $(E3_2) \cap (S_2A_2) = 4_2$ нүктесін аламыз. $[A_2D_2]$ -ні h_α мен F нүктесінде қиылысқанға созамыз. F нүктесін 4_2 нүктесімен қосамыз. Сонда $(F4_2) \cap (S_2D_2) = 5_2$ нүктесін аламыз. Табылған нүктелердің фронталь проекцияларын тұрғызып, қиманы салуды аяқтаймыз. Эпюре көрінбейтін сызықтарды анықтап, оларды үзілме сызықтармен жүргіземіз.

2-мысал. Төрт бұрышты тік призма $ABCDEFMN$ және жалпы жағдайдағы $\beta(\alpha|h)$ жазықтығы берілген. Призманың жазықтықпен қиылысу сызығының проекцияларын салу керек (194, а-сурет).

Призманың бүйір жақтары горизонталь проекциялаушы жазықтықтар. Сондықтан екінші тәсілді — қиманың қабырғаларын табуды қолданған тиімді. $ABMN$ жағы арқылы горизонталь проекциялаушы α жазықтығы жүргізілген екен делік. Көмекші α және берілген β жазық-



194-сурет

тықтары (12) түзуі бойынша қиылысады. Осы (12) түзуімен $ABMN$ төртбұрышының ортақ кесіндісі KT қиманың бір қабырғасы болады. Осы сияқты $CDEF$ жағы арқылы көмекші u жазықтығын жүргізіп, қиманың екінші қабырғасы PQ кесіндісін аламыз. Сонда қиманың фронталь проекциясы $K_1T_1Q_1P_1$ —төрт бұрыш болады. Көрінбейтін жақтарда орналасқан қабырғалар да көрінбейтін болғандықтан P_1Q_1 және T_1Q_1 кесінділері үзілме сызықтармен жүргізілген. Қиманың горизонталь проекциясы $K_2T_2Q_2P_2$ призманың горизонталь проекциясымен бірігіп кескінделеді.

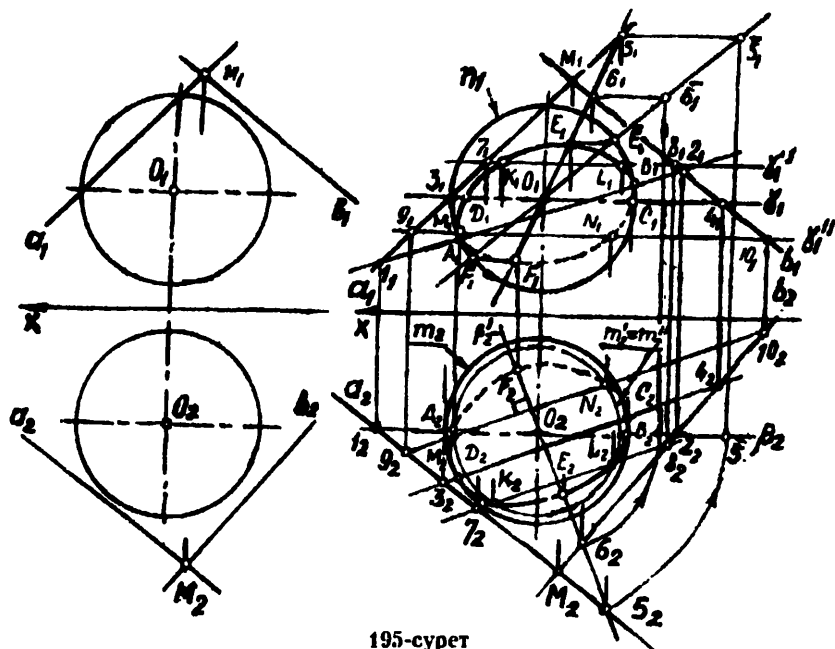
47. ҚИСЫҚ БЕТТЕРДІҢ ЖАЗЫҚТЫҚПЕН ҚИЫЛЫСУЫ

Қисық бетті жазықтықпен қиғанда пайда болатын қисық сызықты салу үшін бет пен жазықтықтың ортақ нүктелерін жеткілікті мөлшерде тауып алуымыз керек. Қиылысу сызығының нүктелерін табу үшін көмекші жазықтықтар әдісін қолданады. Бұл әдісте қандай да болмасын көмекші жазықтық жүргізіледі. Көмекші жазықтықпен берілген жазықтықтың қиылысу түзуін және көмекші жазықтықпен берілген беттің қиылысу сызығын табамыз. Табылған түзу мен сызықтың қиылысу нүктелері берілген бет пен жазықтыққа ортақ болады. Тұрғызуды бірнеше рет қайталаудың нәтижесінде іздеп отырған қиылысу сызығын анықтайтын

нүктелер жиынын аламыз. Табылған нүктелерді бастыра қиылысу сызығының проекцияларын саламыз.

Түзу сызықтық беттің жазықтықпен қиылысу сызығын салу үшін көмекші жазықтықтарды берілген беттің жасаушылары (түзу сызықтар) арқылы жүргіземіз де, ал айналу бетінің қимасын салу үшін көмекші жазықтықтарды айналу бетін параллельдері (шенберлер) бойымен қиятындай етіп таңдап аламыз. Мұндай жазықтықтар көбіне проекциялаушы немесе деңгейлік жазықтықтар болады. Бет пен жазықтықтың проекциялар жазықтықтарына қарағанда орналасуына байланысты қиылысу сызығының нүктелерін екі топқа бөледі. Бірінші топқа қиманың ерекше орналасқан нүктелерін жатқызып, оларды *тірек нүктелер* деп атайды. Екінші топқа қиманың тірек нүктелерінен басқа нүктелерін түгелдей жатқызып, оларды *аралық нүктелер* деп атайды. Тірек нүктелерге қиылысу сызығының проекциялар жазықтықтарынан ең қашық және ең жақын орналасқан (экстремаль нүктелер), оның көрінетін және көрінбейтін бөліктерін шектейтін нүктелер және т. б. жатады. Беттің қимасын салуда тірек нүктелерді анықтап алған дұрыс. Осыдан кейін жеткілікті мөлшердегі аралық нүктелердің проекциялары салынады.

1-мысал. Нұсқалары берілген сфераның (195-сурет) $\alpha(a \cap b)$ жазықтығымен қиылысу сызығын салу керек. Салуды тірек нүктелерді анықтаудан бастаймыз. Қиылысу сызығының фронталь проекциясын көрінетін және көрінбейтін бөліктерге ажырататын нүктелерді табу үшін сфераның центрі арқылы β жазықтығын жүргіземіз. Сфераны β жазықтығымен қиғанда n шенбері шығады, ал $\alpha \cap \beta = (12)$. Сонда α және β жазықтықтарының қиылысу түзуі n шенберімен A және B нүктелерінде қиылысады: $(12) \cap n = A, B$. Қиылысу сызығының горизонталь проекциясын көрінетін және көрінбейтін бөліктерге ажырататын нүктелерді табу үшін сфераның центрі арқылы горизонталь γ жазықтығын жүргіземіз. Осы горизонталь жазықтық сферамен m шенбері, ал α жазықтығымен (34) түзуі бойыша қиылысады: $(34) \cap m = C, D$. Горизонталь проекциялар жазықтығы π_2 -ден ең қашық және оған ең жақын орналасқан нүктелерді анықталық. Мұндай нүктелерді ең биік және ең аласа нүктелер деп атайды. Ол үшін беттің центрі арқылы өтіп, α жазықтығына перпендикуляр болатын горизонталь проекциялаушы β' жазықтығын жүргіземіз: $\alpha \cap \beta' = (56)$. Сфераны β' жазықтығымен қиғанда шығатын шенбер фронталь проекциялар жазықтығына бұрмаланып эллипс түрінде кескінделеді. Сондықтан β' жазықтығын O нүктесі арқылы өтетін горизонталь проекциялаушы түзуден айналдырып β жазықтығымен беттестірілдік. Сонда (56) түзуі $(5\bar{6})$ түзуіне түрленеді: $n \cap (5\bar{6}) =$



195-сурет

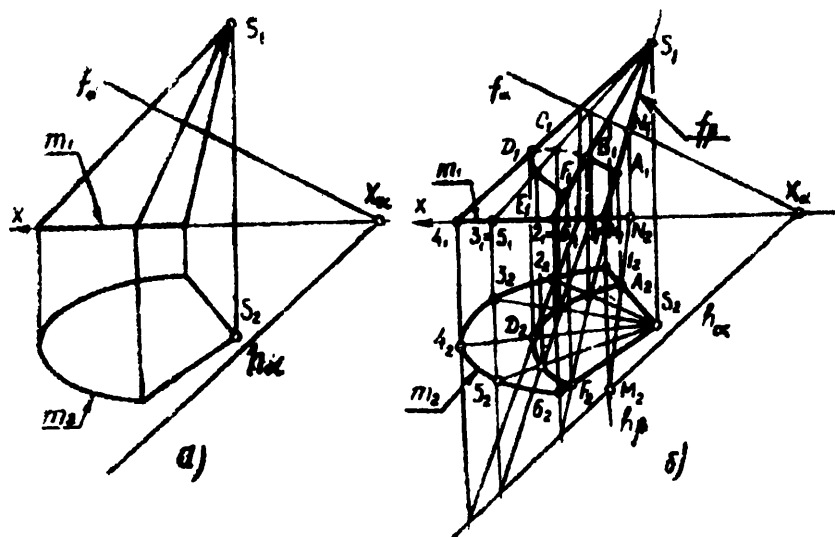
$\bar{E}$, $\bar{F}$, Табылған $\bar{E}$ және $\bar{F}$ нүктелерін кері түрлендіріп E және F нүктелерін аламыз.

Енді аралық нүктелерді табуға кірісеміз. Көмекші горизонталь γ' және γ'' жазықтықтарын жүрізілелік. Бұл жазықтықтар сфераның центрінсіз бірдей қашықтықтарда орналасқандықтан қимада пайда болатын шеңберлердің горизонталь проекциялары бірігеді: $m'_2 = m''_2$; $\gamma' \cap \alpha = (7\ 8)$; $\gamma'' \cap \alpha = (9\ 10)$; $m' \cap (7\ 8) = K, L$; $m'' \cap (9\ 10) = M, N$. Сонымен төрт аралық нүкте K, L, M және N табылады. Осындай аралық нүктелерді қанша керек болса, сонша табуға болады.

Табылған нүктелердің аттас проекцияларын жатық қисық сызықпен қоссақ, эпюрге қиманың проекциялары алынады. Біздер қарастырған мысалда қима шеңбер болатынын білеміз. Олай болса, қиылысу сызығының проекциялары — эллипстер. Эллипстердің үлкен және кіші осьтерін де тұрғызып алуға болады.

2-мысал. Конустық бет $\varphi(S, m)$ және жазықтық $\alpha(f_a \cap h_a)$ берілген (196-сурет). Қиылысу сызығының проекцияларын салу керек.

Конустық беттің бірнеше жасаушыларын $[S1], [S2], \dots, [S6]$ жүргіземіз. $[S1]$ жасаушысының α жазықтығымен қиылысу нүктесін табу үшін



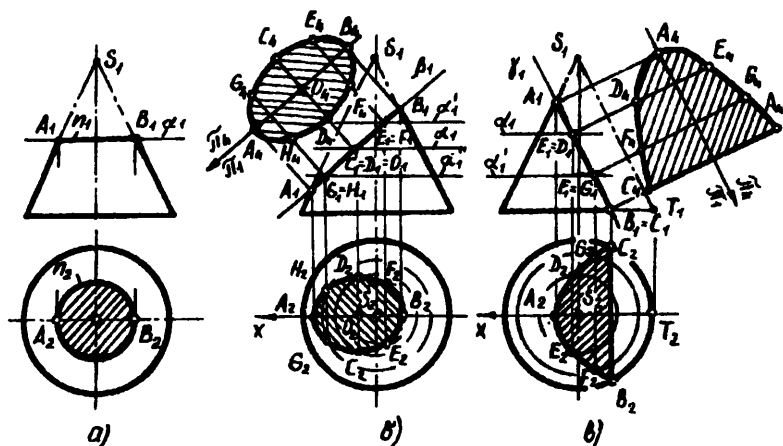
196-сурет

($S1$) аркылы фронталь проекциялаушы комокш β жазықтығын жүргіземіз: $\alpha \cap \beta = (MN)$; $(MN)(S1) = A$. Сонда табылган A нүктесі $[S1]$ жасаушысы мен α жазықтығының қиылысу нүктесі. Осылайша қалган жасаушылардың α жазықтығымен қиылысу нүктелері B, C, D, E және F -терді салып, олардың аттас проекцияларын жатык сызықпен қосып қиылысу сызығының проекцияларын аламыз.

48. КОНУСТЫҚ ҚИМАЛАР ЖӘНЕ КЕСІЛУ СЫЗЫҒЫ

Айналу конусының төбесі аркылы өтпейтін жазықтықтармен қималарын қарастыралық. Егер қиюшы жазықтық айналу конусының өсіне перпендикуляр болса, қимада шеңбер шығады. Конустың өсіне колбеу және оның жасаушыларымен гүгелдей қиылысатын жазықтықпен қимасы эллипс болады. Егер қиюшы жазықтық конустың тек бір ғана жасаушысына параллель болса — қимада парабола, ал екі жасаушысына параллель болса қимада гиперболо алынады. Екінші ретті қисықтарды (шеңбер, эллипс, парабола, гипербола) айналу конусын жазықтықтармен қиюдың нәтижесінде алуға болатындықтан оларды *конустық қималар*, қысқаша *коника* деп атайды.

Горизонталь жазықтықта тұрған конустың горизонталь α жазықтығымен қимасында *шеңбер* шығады (197,а-сурет). Бұл шеңбердің фронталь проекциясы A , және B , нүктелерімен шектелген және гори-

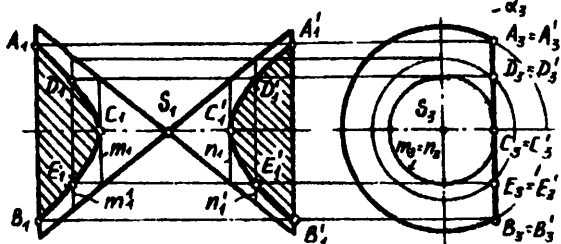


197-сурет

зонгаль орналасқан кесінді n , болады, ал горизонталь проекциялар жазықтығына қима бұрмаланбай өзінің натурал шамасын сақтап кескінделеді. Осы конустың горизонталь проекциялар жазықтығына көлбеу, бірақ оның табанымен қиылыспайтын фронталь проекциялаушы β жазықтығымен қимасында эллипс шығады (197,б-сурет). Қимадағы эллипстің фронталь проекциясы көлбеу орналасқан β жазықтығында жатқан A, B кесіндісі болады. A және B нүктелерінің горизонталь проекциялары x осінде жатыр. A, B кесіндісінің ортасы болатын нүкте эллипстің кіші өсінің фронталь проекциясын және оның центрінің фронталь проекциясын анықтайды: $|A, O_1| = |O_1, B_1|$; $O_1 = C_1 = D_1$. Сонда эллипстің үлкен өсі $[AB]$, кіші өсі $[CD]$ болады. C және D нүктелерінің горизонталь проекцияларын салу үшін горизонталь орналасқан α ($0 \in \alpha$) жазықтығын жүргіземіз. Конустың α жазықтығымен қимасында шығатын шеңбердің горизонталь проекциясы бойынан C_2 және D_2 нүктелері байланыс сызығының көмегімен анықталады. Суретте горизонталь орналасқан α' жазықтығының көмегімен E және F нүктелері, горизонталь орналасқан α'' жазықтығының көмегімен G және H нүктелері тұрғызылған. Қиманың натурал шамасы горизонталь проекциялар жазықтығын β жазықтығына параллель π_4 жазықтығымен алмастыру әдісі пайдаланып анықталған. Конустың жасаушысы ST түзуіне параллель γ жазықтығымен қимасын қарастыралық (197,в-сурет). Бұл жағдайда жоғарыда айтылғандай қимада парабола шығады. Қиюпы жазықтық фронталь проекциялаушы жазықтық болғандықтан қиманың фронталь проекциясы γ түзуінде жатқан A, B кесіндісі болады. A нүктесінен жүргізілген вертикаль түзу

х өсімен A_2 нүктесінде, ал B_1 нүктесі арқылы жүргізілген түзу конус табанының горизонталь проекциясымен B_2 және C_2 нүктелерінде қиылысады. Аралық нүктелер көмекші горизонталь жазықтықтарды пайдаланып тұрғызылған. Қиманың натурал шамасы тағы да π_2 жазықтығын γ -ға параллель π_3 жазықтығымен алмастырудың нәтижесінде анықталған.

198-суретте осы профиль проекциялаушы түзу болатын конустың төбесіне қарағанда симметриялы орналасқан екі профиль жазықтықтың аралығындағы бөлігі кескінделген. Осы конустың фронталь орналасқан α жазықтығымен қимасын қарастыралық. Қиюшы жазықтық α конустың фронталь орналасқан екі жасаушысына параллель болғандықтан қимада гипербола шығады. Конустың екі табанын шектейтін шеңберлермен α жазықтығы төрт нүктеде A, A', B және B' қиылысады. A және A' нүктелерінің профиль проекциялары бірігіп, бір нүктеге проекцияланады. B және B' нүктелерінің профиль проекциялары туралы да осыны айтуға болады. Қиманың профиль проекциясы белгілі — ол α_3 түзуінде орналасқан A_3B_3 кесіндісі болады. Алдымен гиперболаның төбелері болатын C және C' нүктелерін анықтап алған жөн. Ол үшін центрі S_3 нүктесі болатын және α_3 түзуімен жанасатын шеңбер жүргіземіз. Бұл шеңбер конустың m және n параллельдерінің профиль проекциясы: $m_3 = n_3$.



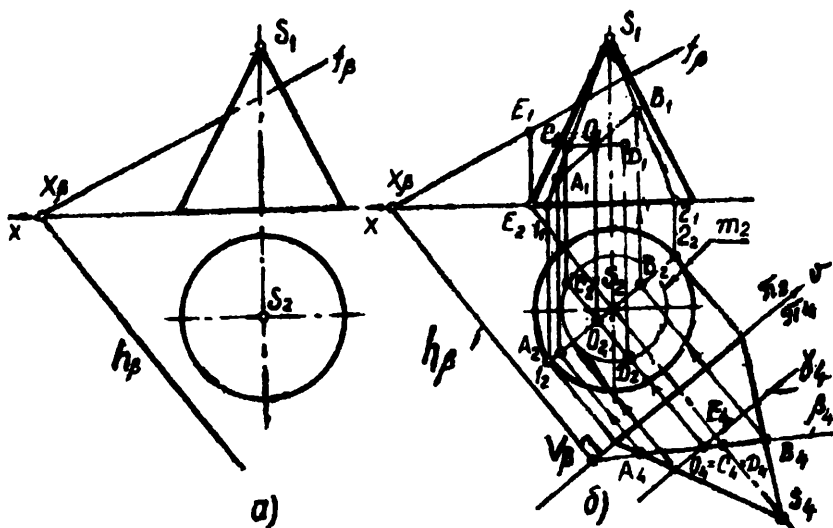
198-сурет

Оны α_3 түзуімен жанасу нүктесі $C_3 = C'_3$ ізделініп отырған гипербола төбелерінің профиль проекциясы болады. Аталған екі нүктенің C және C' нүктелерінің фронталь проекциялары C_1 және C'_1 параллельдер m мен n -нің фронталь проекцияларын (m_1 және n_1 түзулерін) салу арқылы анықталады. $m_3 = n_3$ шеңберінің S_3 нүктесі арқылы өтетін вертикаль өсімен қиылысу нүктесін бастыра горизонталь түзу жүргіземіз. Ол түзу конустың фронталь нұсқасымен екі нүктеде қиылысады. Табылған қиылысу нүктелері арқылы жүргізілген вертикаль екі түзу конус проекциясының өсімен C_2 және C'_2 нүктелерінде қиылысады. Осы тұрғызуды қайталап, яғни S_3 нүктесінен α_3 түзуімен қиылысатын шеңберлер жүргізіп, гиперболаны анықтайтын нүктелер жиынын анықтауға болады. Табылған нүктелерді бастыра жүргізілген қисық кимада пайда болатын гиперболаның фронталь проекциясын анықтайды. Бұл жағдайда кима

фронталь проекциялар жазықтығына бұрмаланбай өзінің натурал шамасын сақтап кескінделеді.

Егер қиюшы жазықтық конустың төбесі арқылы өтсе, онда үш жағдай болуы мүмкін: 1) қиюшы жазықтық конуспен қиылысады; 2) қиюшы жазықтық конуспен жанасады; 3) қиюшы жазықтық пен конустың оның төбесінен өзге ортақ нүктесі болмайды. Бірінші жағдайда коника бір нүктеде қиылысатын екі түзуге ажырайды дейді. Екінші жағдайда коника косарлаған түзуге, ал үшінші жағдайда нүктеге айналады дейді.

1-мысал. Нұскалары берілген конустың $\beta(f_\beta, h_\beta)$ жазықтығымен қимасының проекцияларын салу керек (199-сурет). Кониканың түрін



199-сурет

анықтау үшін және есепті шешуді жеңілдету мақсатында эпюрді түрлендіріп, қиюшы β жазықтығын проекциялаушы жазықтыққа айналдырып алалық. Проекциялар жазықтығын алмастыру әдісін қолданалық. Жаңа өсті β жазықтығының горизонталь ізіне h_β перпендикуляр орналастырамыз: $v \perp h_\beta$. Конустың және β жазықтығының жаңа проекциялар жазықтығы π_4 -тегі проекцияларын тұрғызамыз. Сонда β жазықтығы конустың барлық жасаушыларымен де қиылысатынын көреміз. Олай болса, коника эллипс болады. $[AB]$ — эллипстің үлкен өсі, ал оның кіші өсін табу үшін $[AB]$ -ны тең етіп екіге бөлеміз. Бөліну нүктесі O арқылы конустың өсіне перпендикуляр $\chi(\gamma)$ жазықтығын жүргізейік. Бұл γ жазықтығы конусты m шеңбері бойымен қияды. $[CD]$ — эллипстің кіші өсі. Эл-

үшін профиль жазықтық α -ны жүргіземіз. Бұл жазықтық берілген денені шеңбер бойымен қияды. Қимада пайда болған шеңбердің диаметрі $[3, 4]$ кесіндісіне тең және ол профиль проекциялар жазықтығына m , шеңбері түрінде кескінделеді. Осы шеңберді u жазықтығы A және E нүктелерінде қияды: $m_2 \cap u_2 = A_2, E_2$. Табылған A_2 және E_2 нүктелері арқылы жүргізілген горизонталь байланыс сызықтары α , сызығымен A және E , нүктелерінде қиылысады. Тұрғызуды қайталап қиылысу сызығын анықтайтын нүктелер жиынын тапқаннан кейін оларды жатық сызықпен қосу арқылы кесілу сызығын аламыз.

49. БЕТТЕРДІҢ ТҮЗУ СЫЗЫҚІЕН ҚИЫЛЫСУЫ

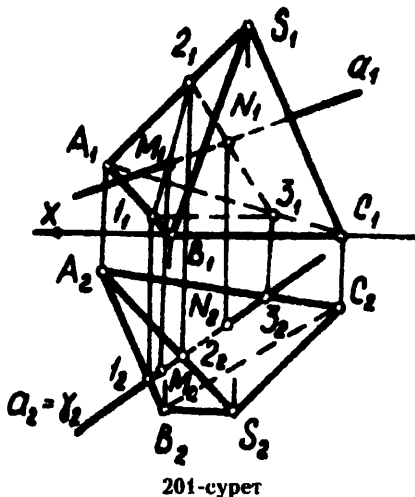
Түзудің бетпен қиылысу нүктелерін жалпы жағдайда төмендегідей жолмен шешеді: 1) берілген түзу арқылы көмекші жазықтық жүргізеді; 2) көмекші жазықтықтың берілген бетпен қиылысу сызығын салады; 3) салынған қиылысу сызығы мен берілген түзудің қиылысу нүктелері түзудің бетпен қиылысу нүктелері болады.

Берілген бір түзу арқылы шексіз көп жазықтық жүргізуге болады, бірақ олардың ішінен есепті шешуді оңайлагатын және тұрғызудың дәлдігі жоғары болатынын таңдап ала білу керек. Көбіне көмекші жазықтықты оның берілген бетпен қиылысу сызығы түзу немесе шеңбер болатындай етіп жүргізеді. Мысалдар қарастыралық.

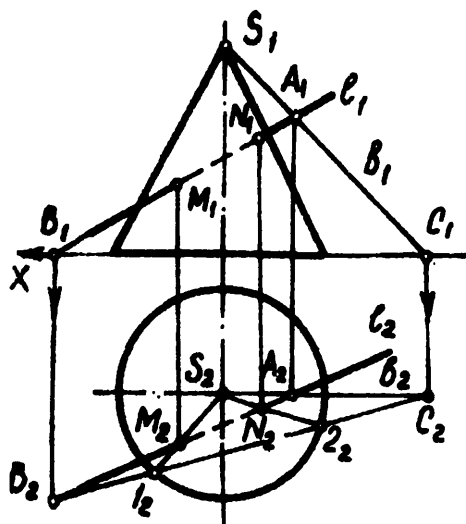
1-мысал. Берілген a түзуімен үш жақты $SABC$ пирамидасының қиылысу нүктелерін салу керек (201-сурет).

Берілген a түзуі арқылы горизонталь проекциялаушы u жазықтығын жүргіземіз: $a \subset u \perp \pi_2$; $a_2 = u_2$. Бұл жазықтық пирамиданы 123 үшбұрышы бойынша қияды: $\Delta 123 \cap a = M, N$. Қимада пайда болған үшбұрыштың a түзуімен қиылысу нүктелері M және N іздеп отырған нүктелеріміз болады.

2-мысал. Нұсқаларымен берілген конустың жалпы жағдайда орналасқан l түзуімен қиылысу нүктелерін салу керек (202-сурет).



Мұнда түзу арқылы проекциялаушы жазықтық жүргізу тиімді болмайды. Өйткені мұндай жазықтық конусты эллипс бойымен қияр еді,



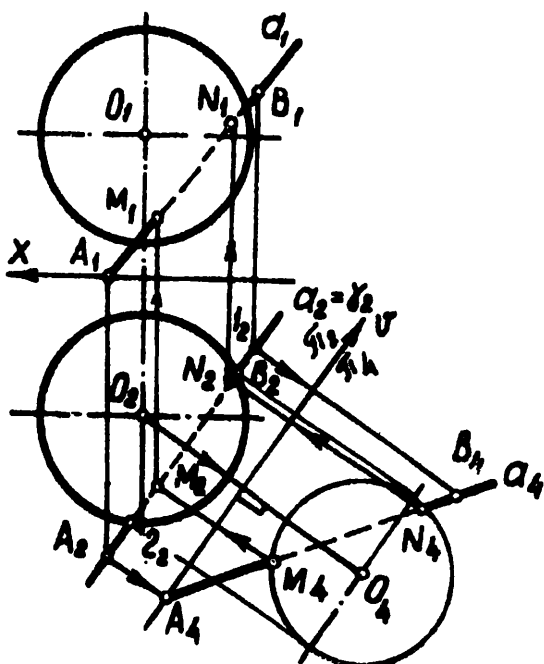
202-сурет

Берілген l түзуі конустың бетімен M және N нүктелерінде кездеседі.

3-мысал. Сфера мен түзуінің қиылысу нүктелерін салу керек (203 сурет).

Қарастырылып отырған мысалда проекциялар жазықтығын алмастыру әдісін қолданып берілген жалпы жағдайдағы a түзуін деңгейлік түзуге айналдыру тиімді. Жана өс u ны a түзуінің горизонталь проекциясы a_2 -ге параллель жүргіземіз: $u \parallel a_2$. Түзудің және сфера центрінің жаңа проекцияларын (a_4 пен O_4) тұрғызамыз. Берілген a түзуі

сондықтан салудың дәлдігі төмендейді. Көмекші жазықтықты берілген түзу l және конустың төбесі S арқылы жүргізілік: $\beta(S, l) \Rightarrow \beta(b, l)$. A нүктесінде қиылысатын b және l түзулері анықтайтын β жазықтығы горизонталь проекциялар жазықтығымен BC түзуі бойынша қиылысады: $\beta \cap \pi_2 = (BC)$. Горизонталь жазықтықта жатқан конустың табанындағы шеңбер мен BC түзуі екі нүктеде 1 және 2 қиылысады. Сонда жалпы жағдайда орналасқан β жазықтығы конусты $[S1]$ және $[S2]$ жасаушылары бойымен қияды: $(S1) \cap l = M$, $(S2) \cap l = N$.



203-сурет

арқылы өтетін горизонталь проекциялаушы u жазықтығы сфераны шеңбер бойымен қияды. Бұл шеңбердің диаметрі $[1_2 2_2]$ кесіндісіне тең және ол π_4 жазықтығына бұрмаланбай проекцияланады. M_4 және N_4 нүктелерін анықтағаннан кейін кері түрлендіреміз.

50. БЕТТЕРГЕ ЖАНАМА ЖАЗЫҚТЫҚТАР

Беттің кез келген нүктесі M арқылы осы бетте жататын қандайда болмасын сызық m жүргізілсін. Осы сызық m -ге жүргізілген жанама t берілген бетке де жанама болып есептеледі. Беттің нүктесі арқылы оған шексіз көп жанамалар жүргізуге болады және бұл жанама түзулердің барлығы да тек бір жазықтықта жатады. Осы жанама түзулер анықтайтын жазықтықты бетке жанама жазықтық деп атайды.

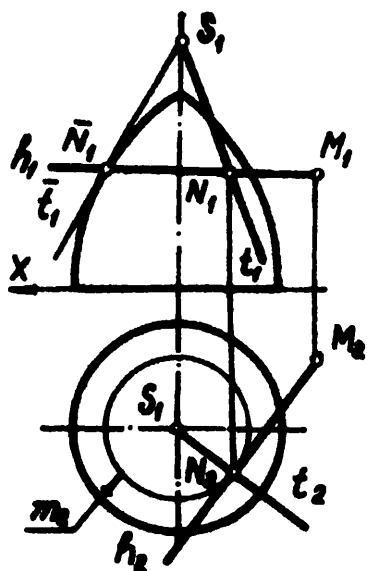
Беттің кез келген M нүктесі арқылы жүргізілген жанама жазықтықты анықтау үшін беттің осы нүкте арқылы өтетін екі сызығына жанамалар жүргізу жеткілікті. Жанама жазықтыққа жанасу нүктесі арқылы жүргізілген нормаль (перпендикуляр) берілген бетке де нормаль (перпендикуляр) болып табылады.

Беттің нүктесі арқылы ол бетке жанама болатын тек бір ғана жазықтық жүргізуге болатын болса, онда мұндай нүктені *қарапайым нүкте* деп атайды. Егер беттің нүктесі арқылы ол бетке бірнеше жанама жазықтық жүргізілетін болса, онда ол нүкте *ерекше нүкте* деп аталады. Мысалы конустың төбесі — *ерекше нүкте*.

Бет пен және оған жанама жазықтықтың өзара орналасуына қарай беттің қарапайым нүктелерін үш топқа бөледі: 1) *эллипстік нүктеде* бет пен осы нүкте арқылы жүргізілген жанама жазықтықтың тек бір ғана ортақ нүктесі болады; 2) *параболалық нүктеде* бет пен жанама жазықтықтың тек бір ғана ортақ сызығы болады; 3) *гиперболалық нүктеде* жанама жазықтық бетпен қиылысады және қиылысу сызығы жанасу нүктесі арқылы өтеді. Сфераның барлық нүктелері эллипстік, цилиндрлік беттің барлық нүктелері параболалық және бір қуысты гиперболоидтың барлық нүктелері гиперболалық нүктелер болады. Ал тор бетінде қарапайым нүктелердің аталған үш түрі де кездеседі. Параболалық нүктелер тордың өсіне перпендикуляр жанама жазықтық анықтайтын екі шеңбердің бойларында жатады. Бұл шеңберлер тордың сыртқы эллипстік бөлігін оның ішкі гиперболалық бөлігінен ажыратады.

1-мысал. Берілген M нүктесі арқылы өтетін және айналу бетіне жанама жазықтық салу керек (204-сурет).

Берілген M нүктесі арқылы беттің өсіне перпендикуляр жазықтық жүргізсек, ол жазықтық бетті m шеңбері бойымен қияды. Осы шеңберге M нүктесінен жанама h жүргізілсін. Осы жанама m шеңберімен N нүкте-

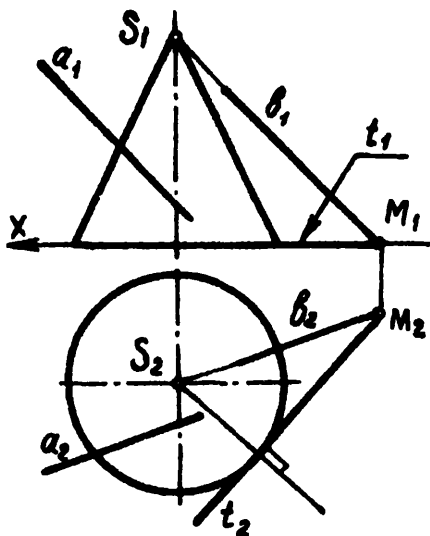


204-сурет

Конустың төбесі арқылы берілген a түзуіне параллель b түзуін жүргіземіз: $S \in b \parallel a$. Жүргізілген b түзуі конустың табан жазықтығымен M нүктесінде қиылысады. M нүктесі арқылы конустың табанында жатқан шеңберге жанама t түзуін жүргізелік. Сонда M нүктесінде қиылысатын h және t түзулері анықтайтын жазықтық есептің шартын толық қанағаттандырады. $\alpha(b \cap t)$ жазықтығы M нүктесі арқылы өтеді және берілген конусқа жанама жазықтық: $\alpha \parallel a$. Қарастырылған 1 және 2-мысалдардың шешулері екеуден болатынын байқау қиын емес. Біз есептің шарттарын қанағаттандыратын тек бір жазықтықты көрсеттік. Ал, бұл мысалдардың екінші шешімдерін табу оқушылардың өздеріне тапсырылады.

сінде жанасады. Айналу бетінің N нүктесі арқылы өтетін меридианын қарастыралық. Егер қарастырылып отырған меридианды беттің өсінен айналдырып бас меридианмен беттестірсек, N нүктесі $\bar{N}$ нүктесіне түрленер еді. Бас меридианның $\bar{N}$ нүктесіне жүргізілген жанама $\bar{t}$ беттің өсімен S нүктесінде қиылысады. S нүктесін N нүктесімен қосатын түзу t айналу бетінің N нүктесінде жүргізілген жанамалардың бірі. Сонда N нүктесінде қиылысатын h және t түзулері анықтайтын жазықтық M нүктесі арқылы өтеді және берілген айналу бетіне жанама жазықтық болады.

2-мысал. Конус және a түзуі берілген (205-сурет). Берілген a түзуіне параллель және конусқа жанама жазықтық салу керек.

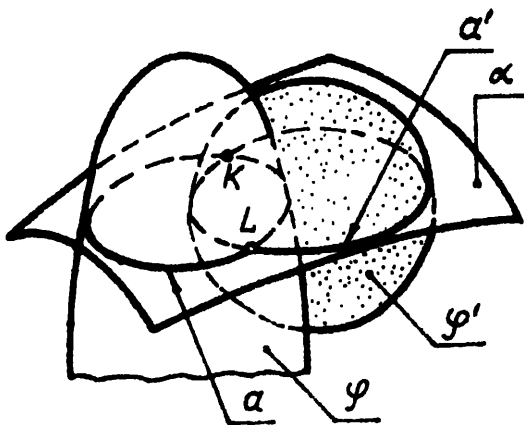


205-сурет

51. БЕТТЕРДІҢ ӨЗАРА ҚИЫЛЫСУ СЫЗЫҒЫН САЛУДЫҢ ЖАЛПЫ ӘДІСІ

Екі беттің қиылысу сызығы деп осы берілген беттерге ортақ нүктелердің жиынын айтады. Қиылысу сызығы екі немесе одан да көп сызықтарға ажырауы мүмкін. Беттердің өзара қиылысу сызығын салу үшін осы қиылысу сызығының бойында орналасқан нүктелерді тауып, оларды белгілі бір тәртіпке қосу керек. Ал енді мұндай нүктелерді табуын негізгі тәсілі — *көмекші аралық беттер әдісі*.

Көмекші аралық беттер әдісі төмендегі тәртіппен жүзеге асырылады. Айталық φ және φ' беттерінің өзара қиылысу сызығын салу керек болсын (206-сурет). Ол үшін: 1) берілген беттерді қиятын көмекші α бетін жүргіземіз; 2) қиюшы α бетінің берілген φ және φ' беттерімен қиылысу сызықтарын (a және a') саламыз: $\alpha \cap \varphi = a$; $\alpha \cap \varphi' = a'$; 3) салынған a және a' сызықтарының қиылысу нүктелерін белгілейміз: $a \cap a' = K, L$.



206-сурет

Табылған K және L нүктелері берілген φ және φ' беттеріне ортақ, олай болса, олар бұл беттердің қиылысу сызығының бойында жатады. Осы әдіспен көмекші бетті өзгерте отырып берілген беттердің қиылысу сызығын анықтайтын жеткілікті мөлшердегі нүктелерді тауып оларды бастыра сызық жүргізеді.

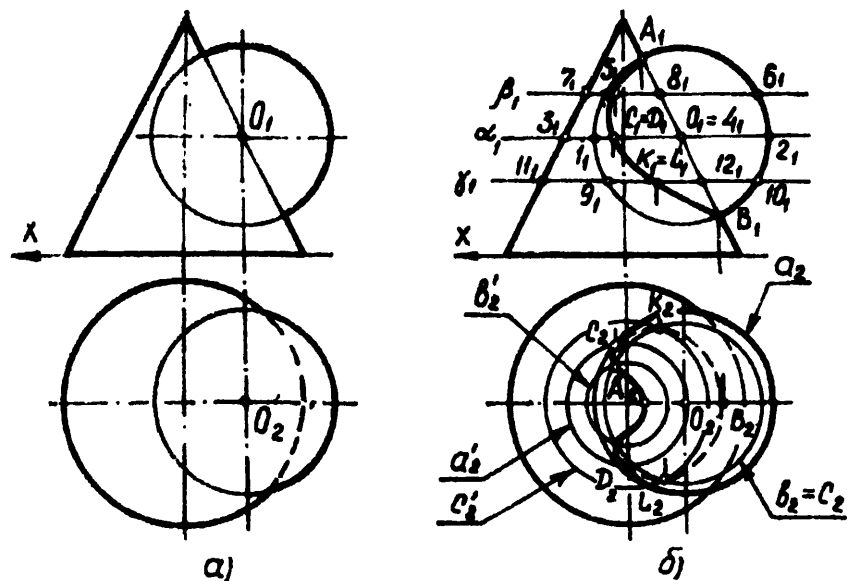
Көмекші аралық беттер әдісін біз бұдан бұрын да бірнеше рет пайдаланғанбыз. Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін салуда (§ 24), екі жазықтықтың қиылысу түзуін тұрғызуға (§ 25), беттердің жазықтықпен қималарын салуда (§ 47) және түзудің бетпен қиылысу нүктелерін анықтауда (§ 49) көмекші жазықтықты пайдаландық. Көмекші α бетін оның φ және φ' беттерімен қиылысу сызықтарын оңай салуға болатындай етіп, тандап алу керек. Көбіне α көмекші бетті берілген беттерді геометриялық қарапайым сызықтармен (түзу және шеңбер) қиятындай және бұл сызықтардың проекциялары да қарапайым сызық-

тар болагындай етіп жүргізу керек. Осы шарға сәйкес α аралық беті үшін көбіне жазықтық немесе сфера алынады.

52. БЕТТЕРДІҢ ҚИЫЛЫСУ СЫЗЫҒЫН КӨМЕКШІ ЖАЗЫҚТЫҚТАР ӨДІСІМЕН САЛУ

Мысалдар қарастыралық.

1-мысал. Шар мен конус беттерінің қиылысу сызығын салу керек (207, а-сурет).



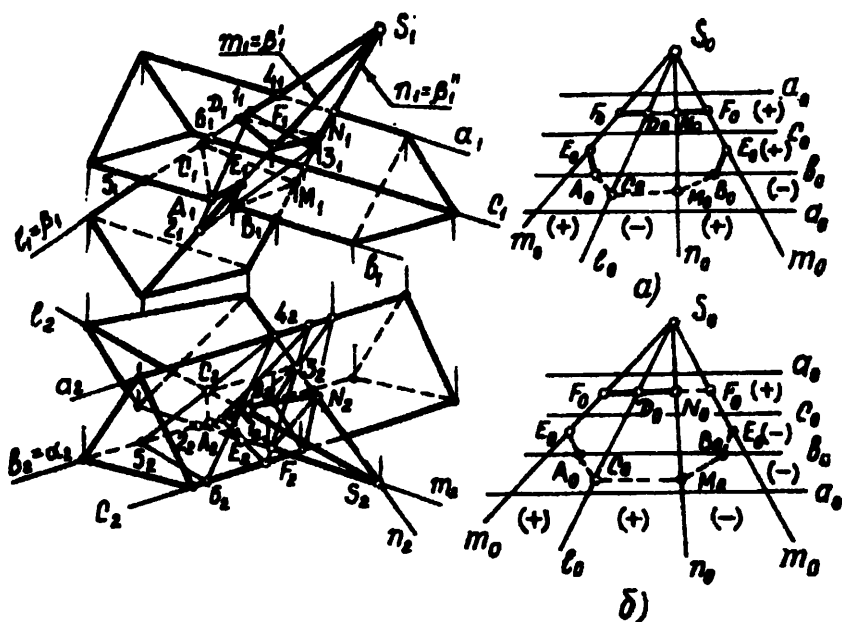
207-сурет

Шардың центрі O және конустың өсі анықтайтын жазықтық фронталь орналасқан. Сондықтан беттердің фронталь проекциялар жазықтығындағы нұсқаларының қиылысу нүктелері A мен B қиылысу сызығының тірек нүктелеріне жатады. Көмекші жазықтықтарды A нүктесінен жоғары, B нүктесінен төмен орналастырудың қажеті жоқ. Шардың центрі арқылы горизонталь орналасқан көмекші α жазықтығын жүргізелік (207, б-сурет). Ол шарды a шеңбері, ал конусты a' шеңбері бойымен қияды. Аталған шеңберлер π_1 жазықтығына $[1, 2]$ және $[3, 4]$ кесінділеріне, ал π_2 жазықтығына a_2 және a'_2 шеңберлеріне кескінделеді. Аталған шеңберлер екі нүктеде (C және D) қиылысады. C және D

нүктелері қиылысу сызығының горизонталь проекциясын көрінетін және көрінбейтін бөліктерге ажыратады.

Көмекші горизонталь β жазықтығын жүргізілдік. Бұл жазықтық шарды b шеңбері, конусты b' шеңбері бойымен қияды. Аталған шеңберлер фронталь проекциялар жазықтығына [5,6,] және [7,8,] кесінділеріне, ал горизонталь проекциялар жазықтығына b_2 және b'_2 шеңберлеріне проекцияланады: $b_2 \cap b'_2 = E, F$. Табылған E және F нүктелері де қиылысу сызығының бойында жатады. Осы сияқты u жазықтығын жүргізіп K және L нүктелерін алуға болады. Тұрғызуды көмекші жазықтықтың кеңістіктегі орнын өзгерте отырып бірнеше рет қайталасак, қиылысу сызығын толық анықтайтын нүктелер жиынын аламыз.

2-мысал. Үш бұрышты пирамида мен призманың қиылысу сызығын салу керек (208-сурет).



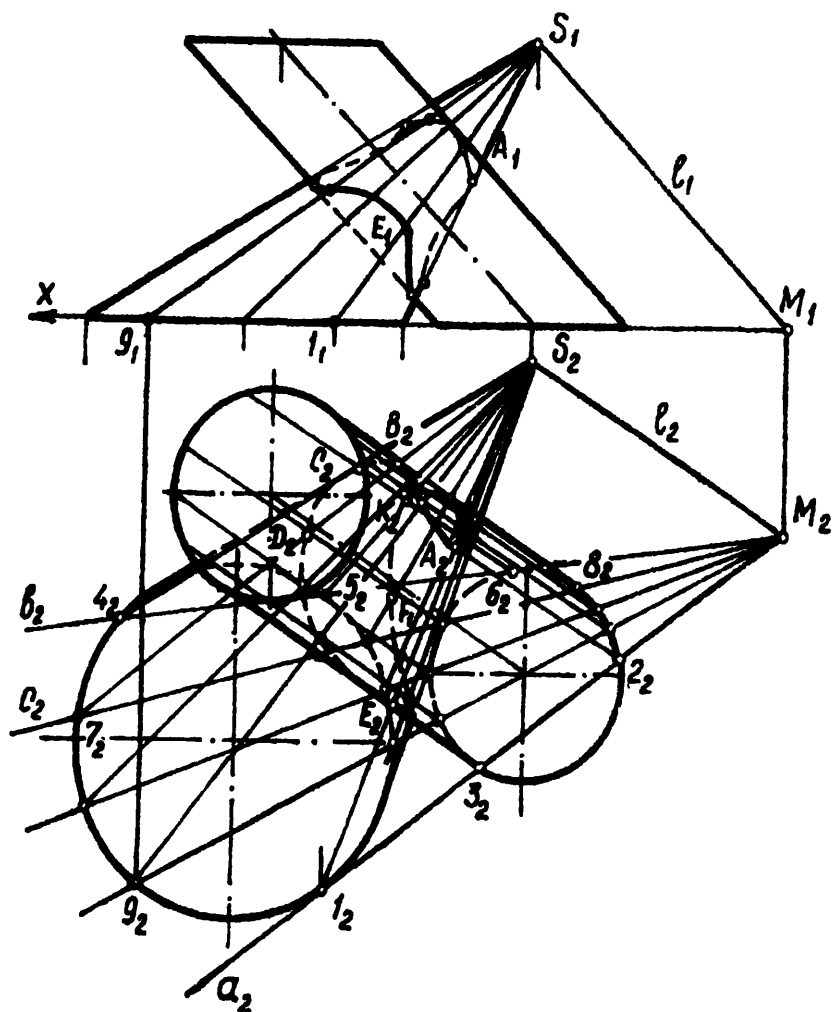
208-сурет

Қиылысу сызығының проекциялары берілген екі беттің аттас проекцияларының ортақ бөлігінде ғана орналасуы мүмкін. Пирамида қырларының призманың жақтарымен қиылысу нүктелерін, содан кейін призма қырларының пирамиданың жақтарымен қиылысу нүктелерін табалық. Берілген көп жақты беттің бірінің барлық қырлары екіншісінің

жақтарымен қиылыса бермейді. Біздер қарастырып отырған мысалда беттердің табан қырлары екіншісінің жақтарымен қиылыспайды. Призманың бүйір қырлары a , b және c болсын, ал пирамиданың бүйір қырлары l , m және n болсын. Призманың a мен c қырлары пирамидамен қиылыспайды, ал b қырының пирамидамен қиылысу нүктелерін салу үшін (§ 49, 1-мысал) осы b түзуі арқылы горизонталь проекциялаушы α жазықтығын жүргіземіз. Көмекші α жазықтығы пирамиданың 123 үшбұрышымен қияды. Қима үшбұрышы 123 және b түзуі екі нүктеде (A және B) қиылысады. Пирамиданың қыры l арқылы фронталь проекциялаушы β жазықтығын жүргізсек, бұл көмекші жазықтық призманың 456 үшбұрышымен қияды. Қимада пайда болған 456 үшбұрышы мен l түзуі C және D нүктелерінде қиылысады. Пирамиданың келесі қыры m арқылы жүргізілген β' көмекші жазықтығын пайдаланып, осы қырдың призмамен қиылысу нүктелері E және F табылады. Пирамиданың n қыры призмамен M және N нүктелерінде қиылысады. Енді табылған нүктелерді қосу және қиылысу сызығының көрінетін бөліктерін оның көрінбейтін бөліктерінен ажырату керек. Табылған нүктелерді қосу тәртібін білу және көрінетіндікті анықтау үшін диаграмма құралық. Қалауымызша алынған S_0 нүктесінен шығатын төрт сәуле m_0 , n_0 , l_0 және t_0 жүргізілсін. Осы сәулелерді қиятындай етіп a_0 , b_0 , c_0 және a_0 төрт түзу салалық (208, а және б-сурет). Бұл диаграммаларды пирамида мен призманың бүйір беттерінің жаймалары (масштабсыз салынған) деп қарастыруға болады. Диаграммаларға табылған нүктелерді A_0 , B_0 , ..., N_0 түсіреміз. 208, а-суреттегі диаграмманы фронталь проекциялардағы көрінетіндікті, ал 208, б суреттегі диаграмманы горизонталь проекциялардағы көрінетіндікті анықтау үшін пайдаланамыз. Көмекшінің көршілес қырлары анықтайтын жағы эпюрге көрінетін болса, онда оны (+) таңбасымен ал көрінбейтін болса (-) таңбасымен белгілейміз. Егер қиылысатын жақтардың екеуі де (+) болса, онда қиылысу сызығы негізгі тұтас сызықпен, ал олардың біреуі немесе екеуі де (-) таңбалы болса, қиылысу сызығын үзілме сызықпен жүргіземіз. Қиылысу сызығының негізгі тұтас сызықпен жүргізілген бөлігі эпюрге көрінеді, ал үзілме сызықпен жүргізілген бөлігі көрінбейді.

3-мысал. Көлбеу цилиндр мен конустың қиылысу сызығын салу керек (209-сурет).

Конустың төбесі S арқылы цилиндрдің жасаушыларына параллель етіп l түзуін жүргіземіз. Осы түзудің горизонталь ізі M нүктесін салалық. Енді l түзуі арқылы берілген конус пен цилиндрді қиятын жазықтықтар жүргізсек, олар конусты да, цилиндрді де жасаушылары бойымен қияды. M нүктесі арқылы өтетін конустың табанына жанама a



209-сурет

түзуін жүргізсек, онда M нүктесінде қиылысатын l және a түзулері көмекші жазықтықты анықтайды. Жалпы жағдайда орналасқан $\alpha(l \cap a)$ жазықтығы конусты $[S1]$, ал цилиндрді 2 және 3 нүктелері арқылы өтетін жасаушылары бойымен қияды. Конустың жасаушысы $[S1]$ цилиндрдің жасаушыларын A және E нүктелерінде қияды. A және E нүктелері конус пен цилиндрге ортақ нүктелер болғандықтан олар қиылысу

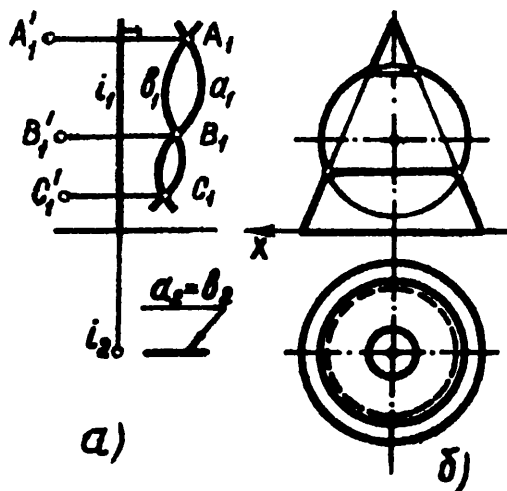
сызығында жатады. Енді цилиндр табының 6 нүктесінде жататын және M нүктесі арқылы өтетін b түзуі конустың табының 4 және 5 нүктелерінде қияды. Көмекші $\beta(l \cap b)$ жазықтығы конусты $[S4]$ және $[S5]$, ал цилиндрді 6 нүктесі арқылы өтетін жасаушылары бойымен қияды. Цилиндрдің 6 нүктесі арқылы өтетін жасаушысы $[S4]$ және $[S5]$ кесінділерімен C және K нүктелерінде қиылысады. M нүктесі арқылы a мен b түзулерінің арасында орналасқан $c, d, \dots$ түзулерін жүргізіп, қиылысу сызығының $B, L, D, \dots$ нүктелерін табуға болады. Табылған нүктелерді, көрінетіндікті ескере отырып, жатық сызықпен қосамыз.

Бірінші мысалда көмекші бет ретінде деңгейлік жазықтықтар, екінші мысалда-проекциялаушы жазықтықтар, ал үшінші мысалда-жалпы жағдай жазықтықтары пайдаланылды. Іс жүзінде көмекші деңгейлік немесе проекциялаушы жазықтықтар әдісі көп қолданылады. Соңғы мысалдағы жалпы жағдай жазықтықтарының ортақ түзуі (l) бар. Оларды жазықтықтар шоғы деп, ал l түзуін жазықтықтар шоғының қыры деп атайды. Жазықтықтар шоғының жазықтықтарын олардың біреуін l түзуімен айналдыру арқылы алуға болады. Сондықтан, 3-мысалды шешуде *айналмалы жазықтықтар әдісін* қолданамыз деп те айтады. Айнalmалы жазықтықтар әдісін екі конустың қиылысу сызығын салу үшін де пайдалануға болады. Ол үшін көмекші жазықтықтар берілген екі конус төбелерін қосатын түзу арқылы жүргізулері керек. Екі цилиндрдің қиылысу сызығын айнalmалы жазықтықтар әдісімен салуға болады. Цилиндрді төбесі шексіз қашықтықта жатқан нүкте болатын конус деп қарастыруға болады. Шексіз қашықтықта жатқан екі нүктені қосатын түзуде шексіз қашықтықта жатады. Шексіз қашықтықта жатқан түзуді анықтау үшін кеңістіктен кез келген нүкте алып, осы нүкте арқылы екі түзу жүргіземіз. Олардың біреуі берілген екі цилиндрдің біріншісінің жасаушысына, ал екіншісі екіншісінің жасаушысына параллель жүргізіледі. Сонда қиылысатын екі түзу анықтайтын жазықтық тек жалғыз шексіз қашықтықта жатқан түзуді анықтайды, ал көмекші жазықтықтар осы жазықтыққа параллель орналасулары қажет.

Айнalmалы жазықтықтар әдісін екі пирамиданың немесе пирамида мен призманың немесе екі призманың қиылысу сызықтарын салу үшін де пайдалануға болады.

53. БЕТТЕРДІҢ ҚИЫЛЫСУ СЫЗЫҒЫН КӨМЕКШІ СФЕРАЛАР ӘДІСІМЕН САЛУ

Бір өстен a және b сызықтарын айналдырудың нәтижесінде алынған беттерді қарастыралық. Мұндай беттерді *өстес айналу беттері* дейді. 210, а-суретте $\phi(i, a)$ және $\phi(i, b)$ өстес айналу беттері берілген. Бұл



210-сурет

санына тең болады. Сфераның центрі айналу бетінің осінде жатса, онда сфераны осы айналу бетімен өстес деуге болады. 210, б-суретте көрсетілген сфера мен конус өстес, сондықтан олардың қиылысу сызықтары екі шеңберге ажырайды.

Екі беттің қиылысу сызығын көмекші сфералар әдісімен салуда екі жағдай кездеседі. Бұл екі жағдайдың бірінде көмекші сфералардың бәрін де бір центрден жүргізеді, сондықтан оны *бір центрлік* (концентрлік) *сфералар әдісі* дейді. Екінші жағдайда көмекші сфералар әр түрлі центрден жүргізіледі, сондықтан оны *әр центрлік* (эксцентрілік) *сфералар әдісі* дейді.

Бір центрлік сфералар әдісі өстері қиылысатын айналу беттерінің қиылысу сызығын салу үшін қолданылады. Есептің шешуі жеңіл болу үшін қиылысатын беттердің өстері проекциялар жазықтығына параллель болуы керек. Егер берілген беттердің өстері жалпы жағдайда орналасқан болса, эпюрді түрлендіру арқылы оларды проекциялар жазықтығына параллель жағдайға келтіріп алуға болады.

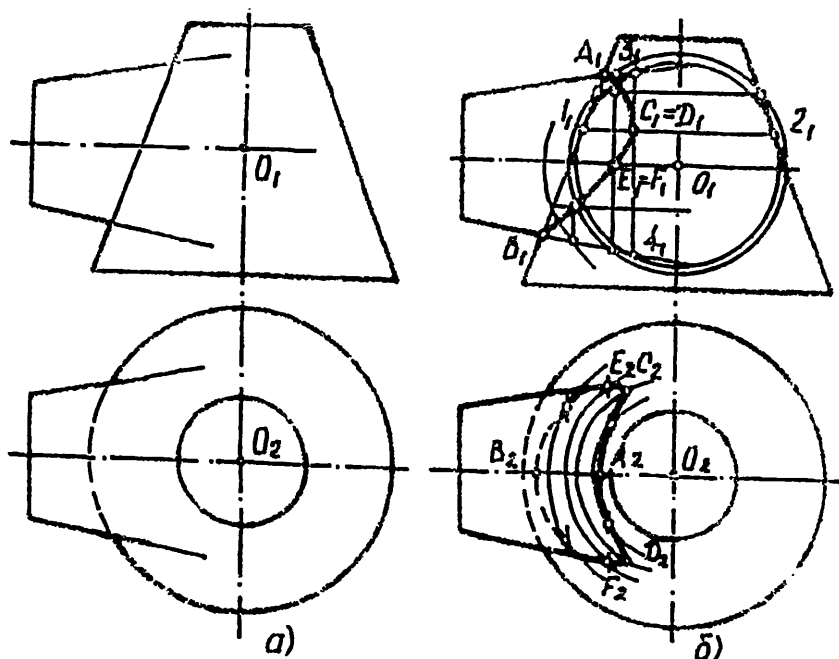
Мысалдар қарастыралық.

1-мысал. Екі қиық конустың қиылысу сызығын салу керек болсын (211-сурет).

Берілген айналу беттерінің өстері O нүктесінде қиылысады. Сондықтан бір центрлік сфералар әдісімен пайдалануға болады. Алдымен A және B тірек нүктелерін белгілеп аламыз. Өсі вертикаль орналасқан қиық конусқа іштей сфера жүргізілік. Радиусы $R_{\min} = |0,1|$ -деп кіші сфе-

беттердің бас меридиандары үш нүктеде (A , B және C) қиылысады. A , B және C нүктелері айналу бетінің нәтижесінде ϕ және ϕ' беттеріне ортақ шеңберлер сызады. A нүктесі сызатын шеңбер π , жазықтығына $[A, A']$, B нүктесі сызатын шеңбер $[B, B']$ және C нүктесі сызатын шеңбер $[C, C']$ кесіндісіне проекцияланады.

Қорытынды: *өстес беттер шеңберлер бойымен қиылысады және шеңберлердің саны меридиандардың қиылысу нүктелерінің*

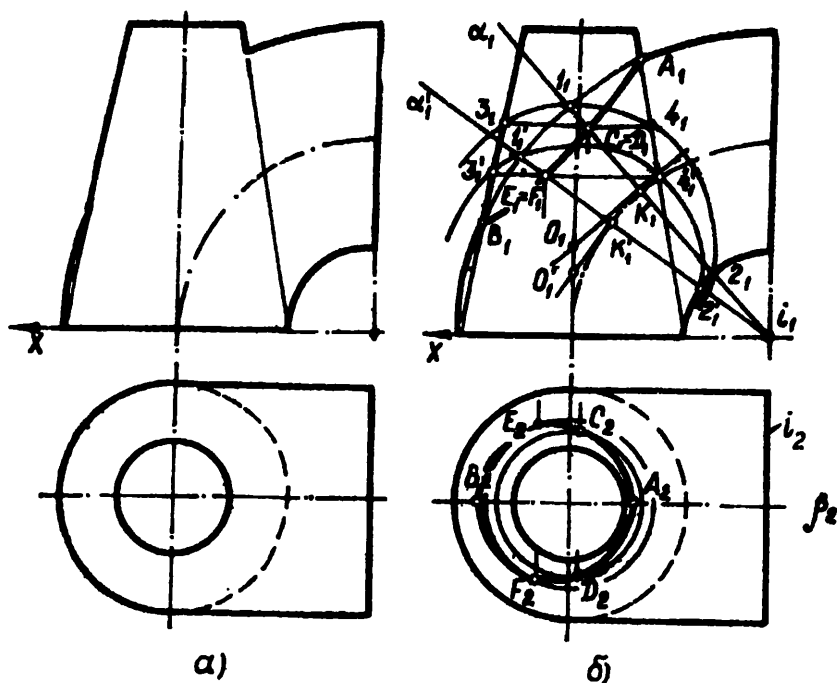


211-сурет

ра жүргізудің қажеті жоқ, өйткені ондай сфералар вертикаль қиық конуспен қиылыспаған да болар еді. Жүргізілген сфера берілген беттермен өстес, сондықтан ол қиық конустарды шеңберлер бойымен қияды. Вертикаль қиық конуспен радиусы R_{min} болатын сфераның қиылысуы нәтижесінде алынатын шеңбер π_i -ге $[1, 2_i]$ кесіндісі түрінде проекцияланады. Ал горизонталь орналасқан қиық конуспен сфераның қиылысуынан шығатын шеңбер фронталь проекциялар жазықтығына $[3, 4_i]$ кесіндісі түрінде проекцияланады. Бұл екі шеңбер C және D нүктелерінде қиылысады. Радиусы $R_{max} = |B, O_1|$ -деп үлкен сфера жүргізудің қажеті жоқ. Радиусы $R_{max} > R > R_{min}$ болатын сфералар жүргізіп, қиылысу сызығының $E, F, \dots$ сияқты нүктелерін табуға болады. Табылған нүктелерді бастыра қиылысу сызығын саламыз.

2-мысал. Конус пен тордың қиылысу сызығын салу керек болсын (212-сурет).

Конустың өсі арқылы фронталь β жазықтығын жүргізіп қиылысу сызығының тірек нүктелері A мен B -ны табамыз. Тордың өсі i арқылы A және B нүктелері аралығында орналасқан фронталь проекциялаушы α



212-сурет

жазықтығын жүргізетік. Осы көмекші α жазықтығы торды фронталь проекциясы $[1, 2,]$ кесіндісі болатын шеңбер бойымен қияды. Шеңбердің центрі K нүктесі арқылы α жазықтығына перпендикуляр жүргізсек, ол перпендикуляр конустың өсімен O нүктесінде қиылысады. Енді O нүктесін центр етіп алып 1 және 2 нүктелері арқылы өтетін сфера жүргізетік. Жүргізілген сфераның центрі конустың өсінде жатыр, сондықтан олар өстес айналу беттері болады. Өстес айналу беттері шеңберлер бойымен қиылысады. Фронталь проекциясы $[3, 4,]$ кесіндісі болатын шеңбер алдындағы центрі K нүктесіндегі шеңбермен екі нүктеде (C және D) қиылысады. Көмекші фронталь проекциялаушы α' жазықтығын пайдаланып E және F нүктелерін алуға болады. Осындай салуларды бірнеше рет қайталап, қиылысу сызығының жеткілікті мөлшердегі нүктелерін анықтаймыз да, оларды бастыра қиылысу сызығын жүргіземіз.

Көмекші сфералар әдісінің бір ерекшелігіне көңіл аударма кетелік. Қиылысу сызығының фронталь проекциясын салу үшін берілген бет-

тердің горизонталь проекцияларын пайдаланған жоқпыз. Қиылысу сызығының фронталь проекциясын тауып алған соң оның горизонталь проекциясын салу қиынға соқпайды.

54. ЕКІНШІ РЕТТІ БЕТТЕРДІҢ ҚИЫЛЫСУЫНДАҒЫ ЕРЕКШЕ ЖАҒДАЙЛАР

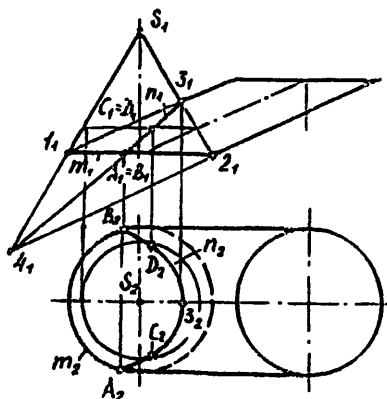
Біз осыған дейін беттердің қиылысу сызығын салуға көңіл болдік, ал қиылысу сызығы қандай болатынына тоқталмадық. Қиылысу сызығының қасиеттерін білу қиылысу сызығын салуды жеңілдетеді және оның теориялық маңызы бар. Екі екінші ретті беттің қиылысу сызығын қарастыралық. Өздеріңізге мәлім екінші ретті беттерге екінші ретті конус, екінші ретті цилиндр, эллипсоид, бір қуысты гиперболоид, екі қуысты гиперболоид, эллипстік параболоид және гиперболалық параболоид жатады. Жалпы m -ретті бет n -ретті бетпен қиылысқанда пайда болатын қиылысу сызығы $m \cdot n$ -ы ретті болады. Сондықтан екі екінші ретті беттің қиылысу сызығы төртінші ретті қисық сызық болады. Төртінші ретті қисық бірнеше сызыққа ажырауы мүмкін. Мынадай жағдайлар болуы мүмкін:

$$4=1+1+1+1; 4=1+1+2; 4=1+3; 4=2+2.$$

Бірінші жағдайда екі екінші ретті беттің қиылысу сызығы төрт түзуге, екінші жағдайда екі түзуге және екінші ретті қисыққа және үшінші жағдайда түзуге және үшінші ретті қисыққа ажырайды. Ал төртінші жағдайдың іс жүзіндегі маңызы зор, сондықтан төртінші ретті қисық екі екінші ретті қисыққа ажырауы үшін қандай шарттар орындалуы керектігіне тоқталық.

1-теорема. *Егер екі екінші ретті беттің ортақ коникасы болса, онда олар тағы бір коника бойынша қиылысады.*

Мысалға бағыттаушылары ортақ m шеңбері болагын конус пен көлбеу цилиндрдің қиылысу сызығын қарастыралық (213-сурет). Бізге ортақ коникасы (m шеңбері) бар екі екінші ретті бет берілген. 1-теоремаға сай олар тағы бір коника бойынша қиылысулары керек. Ортақ симметрия жазықтығы бар екі екінші ретті беттің қиылысу сызығы симметрия жазықтығына параллель жазықтыққа екінші ретті қисыққа проекцияланады. Берілген конус пен ортақ табаны m



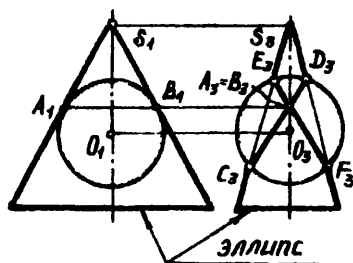
213-сурет

фронталь проекциялар жазықтығына m , түзуіне кескінделген. Сондықтан екінші коника да π -ге түзуге кескінделуі керек. Конус пен цилиндрдің фронталь нұсқалары төрт нүктеде 1, 2, 3, және 4, қиылысады. 1, және 2, нүктелерін қосатын түзу m , бізге бұрыннан белгілі. Олай болса 3, және 4, нүктелерін қосатын түзу екінші кониканың фронталь проекциясы болады, яғни төртінші ретті қиылысу сызығының фронталь проекциясы екі түзуге (1,2, және 3,4,) ажырайтын коника болады екен. Екі коника A және B нүктелерінде қиылысады. Қиылысу сызығының горизонталь проекциясын (n_2 қисығын) салу үшін, оның конустың бетінде жататын сызық екені пайдаланылады. 213-суретте n_2 қисығының екі нүктесі C_2 мен D_2 (осы нүктелер арқылы жүргізілген конус бетінің параллелін пайдаланып) анықталған.

2-теорема (қосарланып жанасатын екінші ретті беттер туралы теорема). *Егер екі екінші ретті бет екі нүктеде қосарланып жанасса, онда олардың қиылысу сызығы екі коникаға ажырайды және коника жазықтықтары жанасу нүктелерін қосатын түзу арқылы өтеді.*

Дәлелдеу. Екі екінші ретті бет A және B нүктелерінде қосарланып жанассын. Олай болса берілген беттердің A және B нүктелеріндегі жанама жазықтықтары бірігеді. A нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықты α деп, ал B нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықты β деп белгілейік. Қиылысу сызығының бойынан кез келген C нүктесін алып, үш нүкте A, B және C арқылы γ жазықтығын жүргізелік. Сонда γ жазықтығы бірінші бетпен k қисығы, ал екінші бетпен k' қисығы бойынша қиылыссын (k және k' коникалар). Осы жазықтық α және β жазықтықтарымен қиылысқанда пайда болатын түзулер k және k' сызықтарына ортақ жанамалар болады: $\alpha \cap \gamma = t$; $\beta \cap \gamma = t'$, яғни коникалар k мен k' бірігеді. Өйткені олардың үш ортақ нүктелері (A, B және C) екі ортақ жанамалары (t және t') бар. Сонымен берілген екі екінші ретті беттің ортақ коникасы болады екен. Олай болса 1-теоремаға сай олар тағы бір коника бойынша қиылысады. Теорема дәлелденді.

1-мысал. Табаны эллипс болатын (эллипстік) конустың фронталь және профиль проекциялары берілген (214-сурет). Конуспен шеңбер бойынша қиылысатын жазықтықтың бағытын анықтау керек. Конустың өсі бойынан O нүктесін алып, сфера жүргізелік. Сфераның центрі O нүктесі, ал оның фронталь нұсқасы конустың фронталь нұсқасымен A , және B , нүктелерінде жанасады. A және B



214-сурет

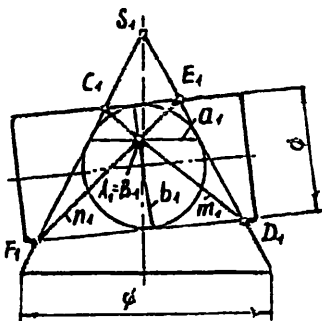
нүктелерінің профиль проекциялары $A_3 = B_3$ конустың профиль проекциясының өсінде жатыр. A және B нүктелерінде конус пен сфера қосарланып жанасады. Олай болса 2-теоремаға сай қиылысу сызығы екі коникаға ажырауы керек және олардың жазықтықтары AB түзуі бойынша қиылысады. $(AB) \perp \pi_3$ болғандықтан іздеп отырған жазықтықтарымыз профиль проекциялаушы жазықтық болады екен. Енді конустың өсі арқылы өтетін көмекші профиль орналасқан жазықтықты пайдаланып қиылысу сызығының төрт нүктесін C, D, E және F анықтаймыз. Сонда қиылысу сызығының профиль проекциясы C_3D_3 және E_3F_3 түзулеріне ажырайтын коника болады, ал қиылысу сызығының өзі екі коникаға ажырайды. Табылған коникалар сфера бетінде жатыр, ал сфера бетінде жатқан коника тек шеңбер болуы керек. Сонда C_3D_3 және E_3F_3 профиль проекциялаушы AB түзуі бойынша қиылысатын екі шеңбердің проекциялары екен. Сонымен $(AB) \cap (CD)$ жазықтығы және оған параллель жазықтықтар, сол сияқты $(AB) \cap (EF)$ жазықтығы және оған параллель жазықтықтар конусты шеңберлер бойымен қияды. Конустың кимасында шеңбер алу үшін оны осы екі бағыттың біреуіне параллель жазықтықпен қию керек.

3-теорема (Монж теоремасы). *Егер екі екінші ретті бет үшінші бір екінші ретті бетке іштей немесе сырттай сызылса, онда олардың қиылысу сызығы екі коникаға ажырайды.*

Бізге екінші ретті γ бетіне сырттай немесе іштей сызылған екі екінші ретті бет α мен β берілсін. Олай болса, α және γ беттерінің ортақ коникасы (a), сол сияқты β және γ беттерінің ортақ коникасы (b) болады. Бір бетке орналастырылған екі коника екі нүктеде қиылысады: $a \cap b = A, B$. Қиылысу нүктелері A мен B берілген беттерге ортақ нүктелер, ал осы нүктелер арқылы жүргізілген олардың жаппа жазықтықтары беттеседі. Сондықтан A және B нүктелерінде α және β беттері қосарланып жанасады, 2-теоремаға сай екі нүктеде қосарланып жанасатын екі екінші ретті беттің қиылысу сызығы екі коникаға ажырайды.

2-мысал. Сфераға сырттай сызылған конус пен цилиндрдің симметрия жазықтығына параллель жазықтықтағы проекциялары берілген (215 сурет). Олардың қиылысу сызығын салу керек.

Бұл жағдайда Монж теоремасы бойынша қиылысу сызығы екі коникаға ажырауы керек. Конус пен сфера a шеңбері бойымен, ал цилиндр мен сфера b шеңбері бойымен



215-сурет

жанасады. Бұл екі шеңбердің қиылысу нүктелері A мен B фронталь проекциялаушы түзудің бойында жатыр. Сондықтан коникалардың жазықтықтары AB түзуі арқылы отетін фронталь проекциялаушы жазықтықтар болады. Конус пен цилиндрдің нұсқалары қиылысу сызығына тиісті C, D, E және F нүктелерінде қиылысады. Сондықтан қиылысу сызығы фронталь проекциялары C, D , және E, F , кесінділері болатын, A және B нүктелерінде қиылысатын (m және n) екі эллипстен тұрады.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН СҰРАҚТАР МЕН ЖАТТЫҒУЛАР

1. Көп жакты беттердің қимасын салу үшін қолданылатын екі әдісті атап және түсіндіріп беріңіз.

2. Қисық беттің жазықтықпен қиылысу сызығын қандай әдіспен салады?

3. Конустық қималарды анықтаңыз және коникаға жататын қисықтарды атаңыз.

4. Конустың қимасында қандай жағдайда эллипс, қандай жағдайда парабола және қандай жағдайда гиперболола шығады?

5. Кесілу сызығы туралы не айтасыз?

6. Түзудің бетпен қиылысу нүктелерін қалай табады?

7. Бетке жанама жазықтықтар туралы айтып беріңіз.

8. Екі беттің қиылысу сызығын қалай табуға болады? Көмекші жазықтықтар және көмекші сфералар әдістерін түсіндіріңіз.

9. SAB пирамидасын $\alpha(P, Q, T)$ жазықтығымен қиғанда пайда болатын фигураның проекцияларын және натурал шамасын салу керек. $A(50; 20; 0)$, $B(30; 40; 0)$, $C(10; 5; 0)$, $S(25; 25; 50)$, $P(60; 0; 0)$, $Q(0; 50; 0)$, $T(0; 0; 10)$.

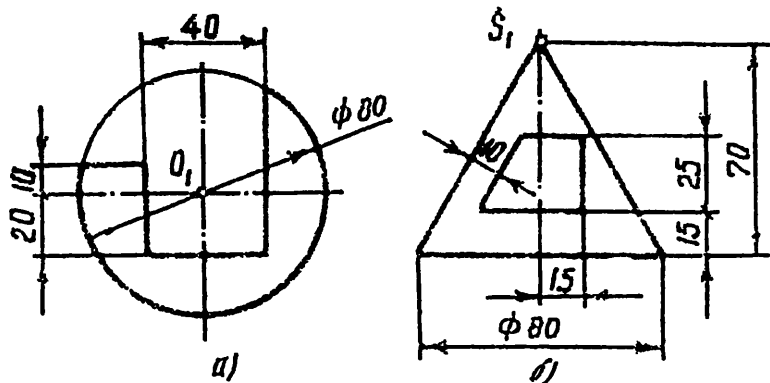
10. Диаметрі 40-қа, биіктігі 50-ге, фронталь проекциялар жазықтығынан қашықтығы 10-ға тең горизонталь проекциялар жазықтығында тұрған цилиндрдің $\beta(A, B, C)$ жазықтығымен қимасын (проекцияларын және натурал шамасын) салу керек: $A(30; 0; 50)$, $B(65; 30; 0)$, $C(0; 30; 30)$.

11. Шеңбер және түзу берілген:

$$\begin{cases} (x-15)^2 + (z-10)^2 = 100, \\ y = 30; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 30, \\ y = 30. \end{cases}$$

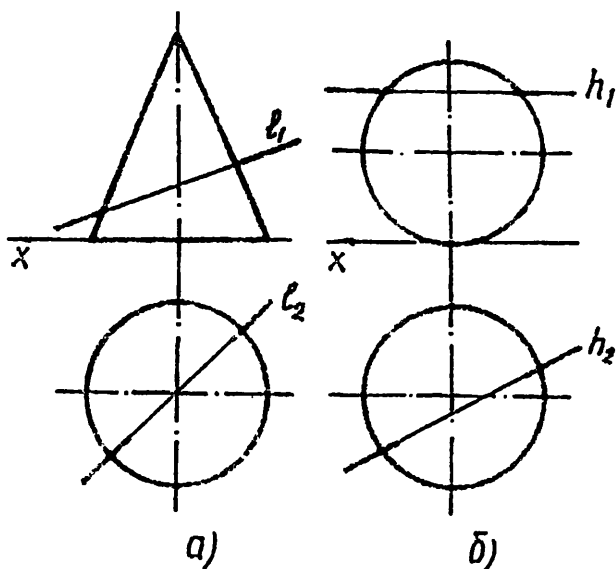
Берілген шеңберді берілген түзуден айналдырғанда пайда болатын беттің және оның $y=35$ жазықтығымен қиылысу сызығының проекцияларын салу керек.

12. 216, а-суретте ойығы бар шардың, ал 216, б-суретте тесігі бар конустың фронталь проекциялары берілген. Олардың горизонталь және профиль проекцияларын салу керек.



216-сурет

13. Конус пен l түзуінің (217, а-сурет) және сфера мен h түзуінің (217, б-сурет) қиылысу нүктелерін салыңыз.



217-сурет

14. $M(0; 10; 35)$ нүктесі арқылы өтетін және мына

$$\frac{(x-20)^2}{225} + \frac{(y-20)^2}{225} + \frac{(z-25)^2}{625} = 1$$

эллипсоидқа жанама жазықтық салу керек.

15. Сфера $(x-35)^2+(y-25)^2+(z-25)^2=400$ мен эллипсоидтын

$$\frac{(x-20)^2}{225} + \frac{(y-20)^2}{225} + \frac{(z-25)^2}{625} = 1$$

қиылысу сызығын салыңыз.

16. Айналу эллипсоиды

$$\frac{(x-30)^2}{900} + \frac{(y-30)^2}{400} + \frac{(z-24)^2}{400} = 1$$

мен бір қуысты гиперболоидтын

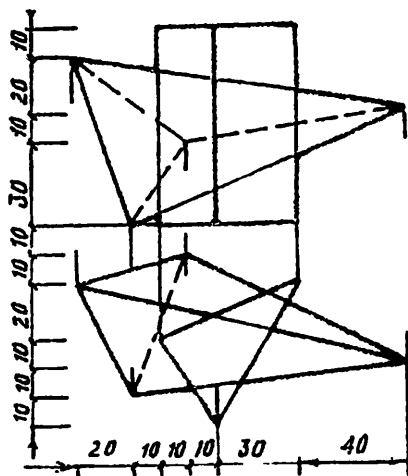
$$\frac{(x-30)^2}{100} + \frac{(y-30)^2}{100} - \frac{(z-24)^2}{192} = 1$$

қиылысу сызығын салыңыз.

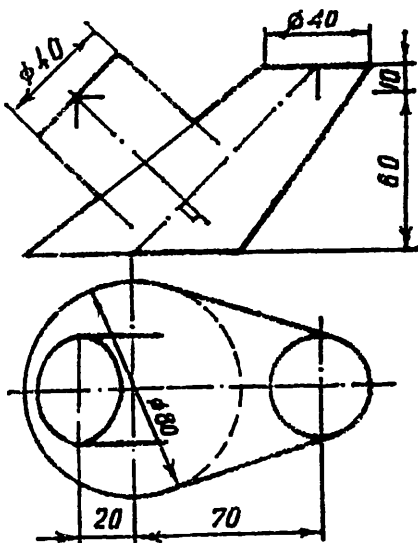
17. 218-суретте берілген үш бұрышты призма мен үш бұрышты пирамиданың қиылысу сызығын салу керек.

18. 219-суретте көрсетілген эллипстік қиық конус пен цилиндрдің қиылысу сызығын салу керек.

19. Алгебралық беттердің қиылысу сызығының ретін қалай анықтауға болады? Екі екінші ретті бет нешінші ретті қисық бойынша қиылысады? Төртінші ретті қисық нешінші ретті қисықтарға ажырауы мүмкін?



218-сурет

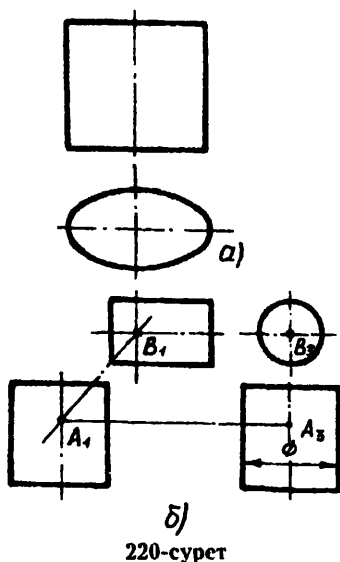


219-сурет

20. Қосарланып жанасатын беттер туралы теорема мен Монж теоремасы қалай оқылады? Осы екі теореманы дәлелдеңіз.

21. 220, а-суретте кескінделген цилиндрді шеңбер бойымен қиятын жазықтықтың бағытын анықтап, осындай бір жазықтық пен цилиндрдің қиылысу сызығының проекцияларын тұрғызыңыз.

22. Диаметрлері әр түрлі екі цилиндрді жалғастыратын қиық конустың өсі цилиндрлердің өстерімен A және B нүктелерінде қиылысады (220, б-сурет). Осы қиық конусты анықтап, оның берілген цилиндрлермен қиылысу сызықтарын салу керек.

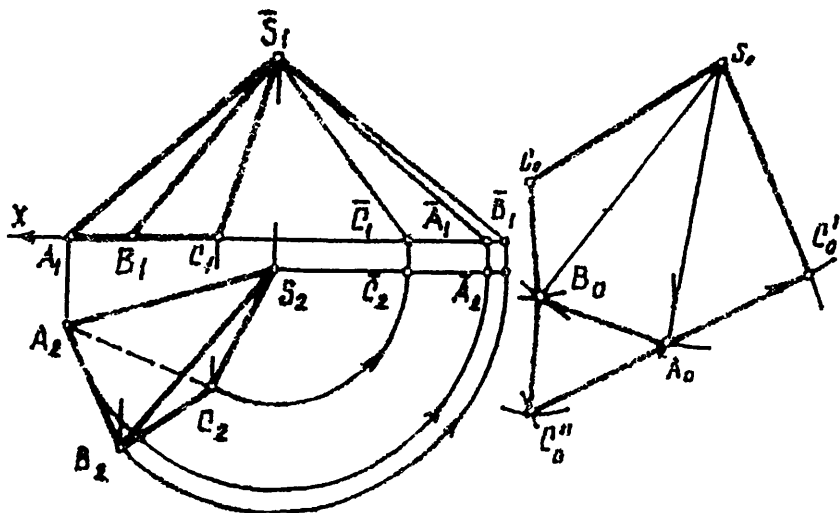


Сегізінші тарау БЕТТЕРДІҢ ЖАЙМАЛАРЫ

55. КӨП ЖАҚТЫ БЕТТЕРДІҢ ЖАЙМАЛАРЫ

Көп жақты беттердің жаймасы жайма жазықтығымен беттестірілген осы беттің жақтарынан тұрады. Жайманы алу үшін көпжақтың бір бүйір жағын жайма жазықтығымен беттестіріп алу керек. Содан кейін алынған фигураға тіркестіре басқа жақтарының натурал шамаларын саламыз. Жаймада фигураның барлық жақтары да өздерінің натурал шамаларын сақтап кескінделеді. Сондықтан ең алдымен беттің қырларының натурал шамаларын тауып аламыз. Жаймада беттің жақтарын түрліше орналастыруға болады. Беттің жақтарын жаймада орналастыру кезінде мүмкіндігінше жайма сызылатын жазықтықтың бетін тиімді түрде пайдалануға тырысу керек.

1-мысал. 221-суретте көрсетілген $SABC$ пирамидасының жаймасын салуды қарастыралық.



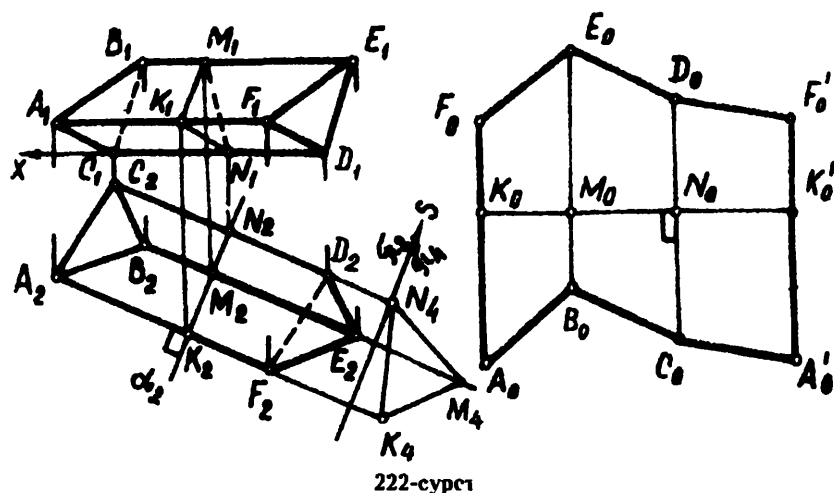
221-сурет

Алдымен пирамида қырларының натурал ұзындықтарын белгілі өдістердің біреуін пайдалана отырып тауып алуымыз керек. Біз қарастырып отырған мысалда пирамиданың табаны горизонталь проекциялар жазықтығында жатыр, сондықтан табан қырларының ұзындықтары

π , жазықтығына өздерінің натурал шамаларын сақтап кескінделген: $|A_1B_1| = |AB|$; $|B_2C_2| = |BC|$; $|C_2A_2| = |CA|$. Пирамиданың бүйір қырларының ұзындықтары S нүктесі арқылы өтетін горизонталь проекциялаушы өстен айналдыру әдісімен тұрғызылған: $|AS| = |\bar{A}_1S_1|$; $|BS| = |\bar{B}_1S_1|$; $|CS| = |\bar{C}_1S_1|$. Қалған жерімізден S_0 нүктесін алып табылған қабырғалары бойынша $A_0B_0S_0$ үшбұрышын саламыз. $|A_0B_0| = |A_2B_2|$; $|A_0S_0| = |\bar{A}_1S_1|$; $|B_0S_0| = |\bar{B}_1S_1|$. Осы $A_0B_0S_0$ үшбұрышының қабырғаларына $B_0C_0S_0$, $A_0C_0S_0$ және $A_0B_0C_0$ үшбұрыштарын салып пирамиданың жаймасын аламыз. $|A_0C_0| = |A_0C_2| = |A_2C_2|$; $|B_0C_0| = |B_0C_2| = |B_2C_2|$; $|C_0S_0| = |C_0S_2| = |\bar{C}_1S_1|$. Егер пирамиданың моделін жасау керек болса, онда жайманы шектейтін сызықтардың бойымен қиып алу, одан кейін оны пирамиданың қырларына сәйкес сызықтардың бойымен бүгін желімдеу керек.

Сонымен пирамиданың жаймасын алу үшін бірнеше үшбұрыштарды тіркестіре салдық. Беттердің жаймасын осылайша тұрғызуды *үшбұрыштар немесе триангуляция әдісі* дейді.

2-мысал. Үш бұрышты $ABCDEF$ қолбеу призманың жаймасын салу керек (222-сурет).



222-сурет

Бізге берілген $ABCDEF$ призмасының бүйір қырлары горизонталь орналасқан, сондықтан олар горизонталь проекциялар жазықтығына өздерінің натурал ұзындықтарын сақтап бұрмаланбай кескінделеді. Егер бұл бүйір қырлар жалпы жағдайда орналасқан болса, онда эпюрді түрлендіру арқылы оларды деңгейлік сызықтарға айналдырып алу қажет.

Призmayı оның бүйір қырларына перпендикуляр α жазықтығымен қиямыз. Призманың бүйір қырлары горизонталь орналасқандықтан оларға перпендикуляр α жазықтығы горизонталь проекциялаушы жазықтық болады. Призманың α жазықтығымен қимасында KMN үшбұрышы шығады. Призманы оның бүйір қырларына перпендикуляр жазықтықпен қиғанда пайда болатын фигураны *нормаль қима* деп атайды. KMN үшбұрышының (нормаль қиманың) натурал шамасын эпюрді түрлендіру әдістерінің бірімен тауып алу керек. 222-суретте проекциялар жазықтығын алмастыру әдісі қолданылған.

Қалауымызша түзу жүргізіп оның бойына K_0M_0 , M_0N_0 және N_0K_0 кесінділерін саламыз: $|K_0M_0| = |K_4M_4|$; $|M_0N_0| = |M_4N_4|$; $|N_0K_0| = |N_4K_4|$.

Бұл $K_0K'_0$ кесіндісі призманың нормаль қимасы болатын KMN үшбұрышының «жаймасы». K_0 , M_0 , N_0 және K'_0 нүктелерінен бастап, $K_0K'_0$ кесіндісінің екі жағында да оған перпендикуляр бағытта призманың бүйір қырларының бөліктерін саламыз. Призманың бүйір қырларының бөліктері оның горизонталь проекциясынан алынады. $|A'_0K'_0| = |A_0K_0| = |A_2K_2|$; $|K_0F_0| = |K'_0F'_0| = |K_2F_2|$; $|B_0M_0| = |B_2M_2|$; $|M_0E_0| = |M_2E_2|$; $|C_0N_0| = |C_2N_2|$; $|N_0D_0| = |N_2D_2|$.

Алынған нүктелерді сынық сызықтармен қосып берілген призманың жаймасы болатын $A_0B_0C_0A'_0F'_0D_0E_0F_0$ көпбұрышын аламыз. Беттің жаймасын осылайша салуды *нормаль қима әдісі* дейді.

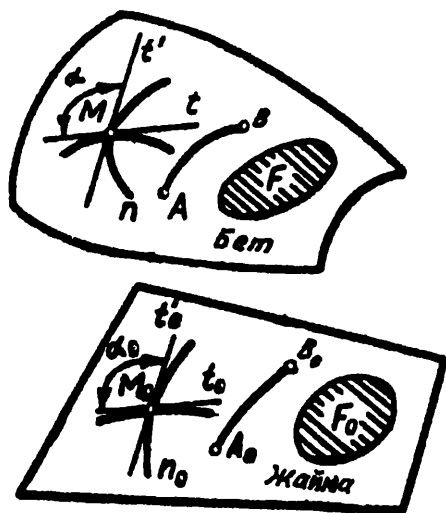
56. ҚИСЫҚ БЕТ ЖАЙМАЛАРЫНЫҢ НЕГІЗГІ ҚАСИЕТТЕРІ

Беттерді өте жұқа, созылмайтын және пілгіш қабықтан тұрада деп қарастырсақ, онда олардың кейбіреулерін біртіндеп деформацияға ұшырата отырып жазықтықпен бүктесінсіз үзбей беттестіруге болады. Мұндай беттерді жайылатын беттер деп атаймыз. Жайылатын беттерге торс, конустық және цилиндрлік беттер жатады. Бұл үшеуінен басқа қисық беттер жайылмайды.

Бетті және оның жаймасын нүктелер жиыны ретінде қарастырсақ, бұл екі жиынның арасында өзара бірмәнді сәйкестіліктің пайда болғанын көреміз. Толықтырып айтқанда, беттің кез келген нүктесіне жайманың тек бір ғана нүктесі, беттің кез келген сызығына жайманың тек бір ғана сызығы сәйкес және керісінше.

Бұл сәйкестіктің мынадай маңызды қасиеттері бар (223-сурет):

1. Беттің және оның жаймасының өзара сәйкес сызықтарының ұзындықтары біріне-бірі тең болады. Екінші сөзбен айтқанда, бетті жазықтыққа жайғанда оның сызықтарының ұзындықтары өзгермей сақталып қалады.



223-сурет

2. Жайманың кез келген екі сызығының арасындағы бұрыш беттің сәйкес сызықтарының арасындағы бұрышқа тең.

3. Беттің түйық сызығы және жайманың оған сәйкес түйық сызығы бірдей аудандарды қоршайды. Сондықтан қисық беттің ауданы опың жаймасының ауданына тең.

Жайманың бірінші қасиеті бетті созылмайтын және сығылмайтын жұқа қабық деп қарастыруымыздың нәтижесі екеніне көз жеткізу қиын емес. Шынында да, егер бет созылмайтын және сығылмайтын болса, ол бетті жазғанда оған салынған сызықтың

ұзарып немесе қысқаруы мүмкін емес. Ал қалған екі қасиетті бірінші қасиетке сүйене отырып, дәлелдуге болады. Осы себепті бірінші қасиетті ең басты шарт деп қарастыруымыз керек. Бұл үш қасиетті біріктіріп қысқаша былай айтуымызға болады: жаймада бет сызықтарының ұзындықтары, олардың арасындағы бұрыштардың шамалары және түйық сызықтармен қоршалған аудандарының шамалары сақталады. Осы негізгі үш қасиеттің салдары болатын жайманың тағы да маңызды екі ерекшелігін көрсетелік.

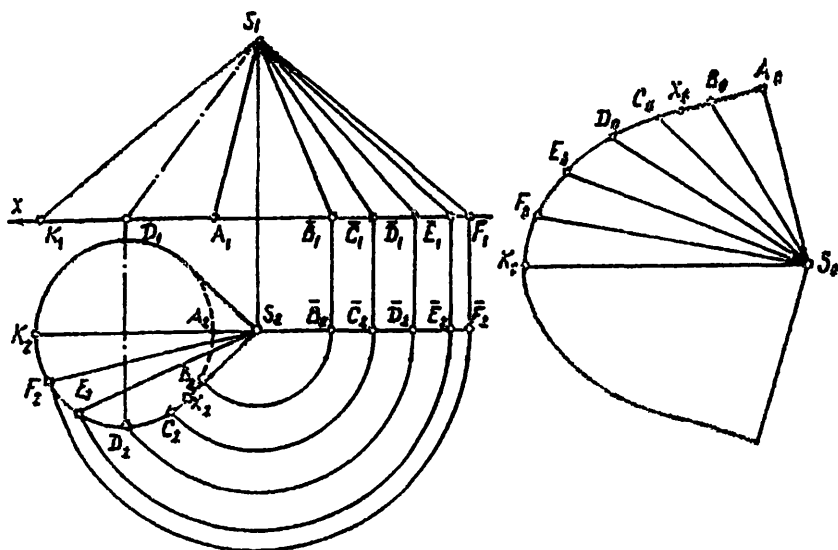
4. Беттің түзу сызығы жайманың түзу сызығына өзгереді. Бұл пікірдің дұрыстығына көз жеткізу үшін беттің A және B нүктелері өзара бірнеше сызықтармен жалғастырылған екен делік. Олардың бірі AB түзу сызығы болсын. Бұл екі нүктеге жаймада A_0 және B_0 нүктелері сәйкес, оларды қосатын қисық сызықтарға қисық сызықтар сәйкес болады. Бұл қисық сызықтардың ұзындықтары сақталуы тиіс. Ал AB кесіндісі A және B нүктелерінің ең қысқа аралығы, оған сәйкес A_0B_0 сызығы да жазықтықтағы A_0 және B_0 нүктелерінің ең қысқа аралығы болуы тиіс. Бұл A_0B_0 сызығы түзу сызық болу керек деген сөз. Бірақ керісінше айтуға болмайды, яғни жайманың түзу сызығына беттің түзу сызығы сәйкес бола бермейді.

5. Беттің параллель түзулері жайманың параллель түзулеріне өзгереді. Мұндай қорытынды беттің сызықтарының арасындағы бұрыштардың шамасының сақталатындығынан келіп туады.

57. ЖАЙЫЛАТЫН БЕТТЕРДІҢ ЖАЙМАЛАРЫ

Торс пен конустық беттердің жаймаларын триангуляция әдісімен салады. Цилиндрлік беттің жаймасын көбіне нормаль кима әдісімен тұрғызады.

1-мысал. 224-суретте берілген көлбеу конустың жаймасын салу керек. Конуска іштей табаны дұрыс он екі бұрыш болатын пирамида сыза-



224-сурет

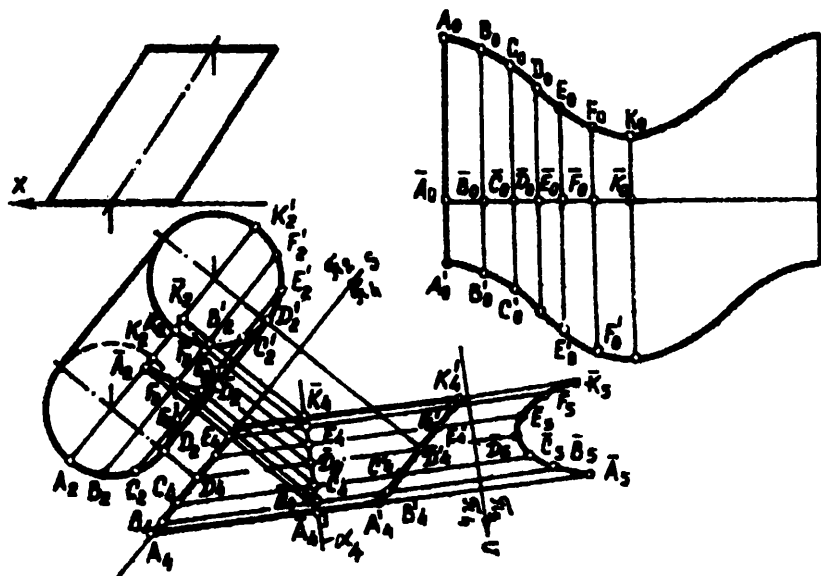
мыз. Сөйтіп конусты пирамидамен алмастыралық. Пирамиданың жақтарының саны неғұрлым көп болған сайын дәлдік арта түседі. Пирамида бетін жаюды § 55-те қарастырғанбыз. Конустың табаны горизонталь жазықтықта жатқандықтан пирамиданың табан қырлары π_2 жазықтығына натурал шамаларын сақтап проекцияланған: $|AB| = |A_2B_2|$; $|BC| = |B_2C_2|$; ..., $|FK| = |F_2K_2|$. Бүйір қырларының тек екеуі π_1 жазықтығына бұрмаланбай проекцияланған: $|AS| = |A_1S_1|$; $|KS| = |K_1S_1|$. Пирамиданың қалған бүйір қырларының ұзындықтары айналдыру әдісімен табылған. $|BS| = |B_1S_1|$; $|CS| = |C_1S_1|$; $|DS| = |D_1S_1|$; ..., $|FS| = |F_1S_1|$.

Қалауымызша түзу алып, ол түзудің бойына A_0S_0 кесіндісін саламыз ($|A_0S_0| = |A_1S_1|$). Бұл кесіндіні $A_0B_0S_0$ үшбұрышына толықтырамыз: $|A_0B_0| = |A_2B_2|$; $|B_0S_0| = |B_1S_1|$. Сонда $\Delta A_0B_0S_0$ пирамиданың бір жағы ABS үшбұрышының жаймасы болады. Дәл осы сияқты барлық жақтарын

біріне-бірі тіркестіре саламыз да, үлгісызышты (лекалоны) пайдалана отырып, $A_0, B_0, \dots$ нүктелерін жатық қисықпен қосамыз.

Жайманың X_0 нүктесіне көңіл аударып кеткен жөн. Бұл нүкте $A_0, B_0, \dots$ нүктелер жиыны анықтайтын қисық сызықтың бұрылу нүктесі. Осы бұрылу нүктесін табу үшін S_2 нүктесінен конус табанының горизонталь проекциясы болатын шеңберге жанама жүргізу керек. Жайманың X_0 нүктесіне горизонталь проекцияда жанасу нүктесі X_2 сәйкес болады.

2-мысал. 225-суретте берілген көлбеу цилиндрдің жаймасын салу керек.



225-сурет

Цилиндрдің жасаушылары жалпы жағдайда орналасқан. Сондықтан фронталь проекциялар жазықтығын цилиндрдің жасаушыларына параллель π_1 жазықтығымен алмастырып, π_1/π_2 жүйесінен π_2/π_1 жүйесіне көшіп аламыз. Цилиндрге ішкі дұрыс он екі бұрышты призма салалық. Сөйтіп, цилиндрдің орнына призманы қарастыралық. Призманың бүйір қырлары π_1 -ке, ал табан қырлары π_2 -ге бұрмаланбай кескіп-делген. $|AA'| = |A_1A'_1|$; $|BB'| = |B_1B'_1|$; $|AB| = |A_2B_2|$; $|BC| = |B_2C_2|$;...

Цилиндрдің жасаушыларына перпендикуляр жазықтықпен оны қиямыз. Осы нормаль қима жазықтығы α жаңа проекциялар жазықтығы π_1 -ке перпендикуляр, сондықтан α жазықтығы π_1 -ке түзу сызық

түрінде проекцияланады: $\alpha_4 \perp (A_4 A'_4)$. Нормаль қиманың натурал шамасын ату үшін π_2 жазықтығын α жазықтығына параллель π_5 жазықтығымен алмастырамыз.

Нормаль қиманы түзуге жазамыз. Қалауымызша түзу жүргізіп, оған $\overline{A_0 B_0}, \overline{B_0 C_0}, \dots$ кесінділерін саламыз: $|\overline{A_0 B_0}| = |\overline{A_5 B_5}|$; $|\overline{B_0 C_0}| = |\overline{B_5 C_5}|$; ... Бұл түзуге $A_0, B_0, \dots$ нүктелері арқылы перпендикуляр түзулер жүргіземіз. Осы түзулердің бойына цилиндрдің жасаушыларын саламыз: $|\overline{A_0 A_4}| = |\overline{A_4 A'_4}|$; $|\overline{B_0 B_4}| = |\overline{B_4 B'_4}|$; ... $|\overline{A_0 A'_0}| = |\overline{A_4 A'_4}|$; $|\overline{B_0 B'_0}| = |\overline{B_4 B'_4}|$; ... Алынған $A_0, B_0, \dots$ нүктелерін бастыра бір қисық сызық, ал $A'_0, B'_0, \dots$ нүктелерін бастыра екінші қисық сызық саламыз.

58. ЖАЙЫЛМАЙТЫН БЕТТЕРДІҢ ЖАЙМАЛАРЫ

Жайылмайтын беттердің дәл жаймалары болмайды. Бірақ, іс жүзінде жайылмайтын беттердің де «жаймаларын» салуға тура келеді. Әрине, мұндай жайманы шартты түрде жуықтап қана сала аламыз.

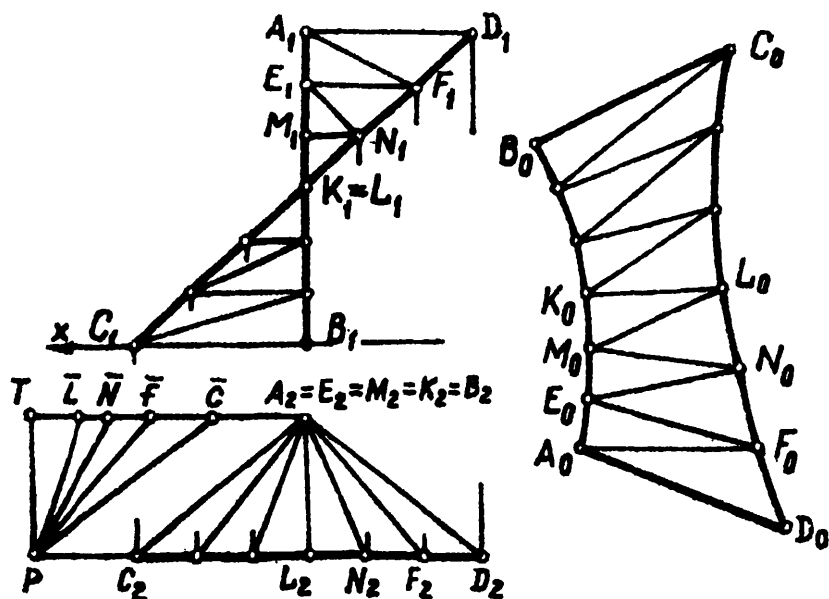
Егер жайылмайтын бет түзу сызықты бетке жататын болса, жаймасын салу үшін мұндай бетті жақтары үшбұрыштар болатын көп жақты бетпен аппроксимациялайды (алмастырады). Содан кейін үшбұрыштар әдісін қолдануға болады.

Айналу бетінің жаймасын салу үшін оны цилиндрлік беттермен аппроксимациялайды, ал цилиндрлік беттердің жаймаларын нормаль қима әдісімен тұрғызады.

1-мысал. Бағыттаушылары — AB және CD түзулері, параллелизм жазықтығы — π_2 болатын гиперболалық параболоидтың $\varnothing(AB), (CD)$, π_2 берілген AB және CD кесінділері шектейтін бөлігінің жаймасын салу керек (226-сурет).

Суретте параллелизм жазықтығы көрсетілмеген, $(AB) \perp \pi_2$ және $(CD) \parallel \pi_7$. Берілген қиғаш жазықтықтың бағыттаушылары жалпы жағдайда орналасса, эпюрді түрлендіріп осындай жағдайға келтіріп алуға болады.

Гиперболалық параболоидтың жасаушыларын жүргіземіз. Алдымен жасаушылардың фронталь проекциялары $[A_1 D_1]$, $[E_1 F_1], \dots, [B_1 C_1]$, одан кейін горизонталь проекциялары $[A_2 D_2]$, $[E_2 F_2], \dots, [B_2 C_2]$ салынады. A нүктесін F нүктесімен, E нүктесін N нүктесімен т. с. с. қосу арқылы ADF , AEF , EFN , т. с. с. үшбұрыштар аламыз. Сонда қиғаш жазықтықтың берілген бөлігін жақтары ADF , AEF , т. с. с. үшбұрыштар болатын көп жақты бетпен аппроксимацияладық. Енді жайылмайтын гиперболалық параболоидтың жаймасы үшін көп жақты беттің жаймасы алынады. ADF , AEF , т. с. с. үшбұрыштардың натурал шамаларын біріне-бірің тіркестіре саламыз. Мысалы ADF үшбұрышының натурал шамасын

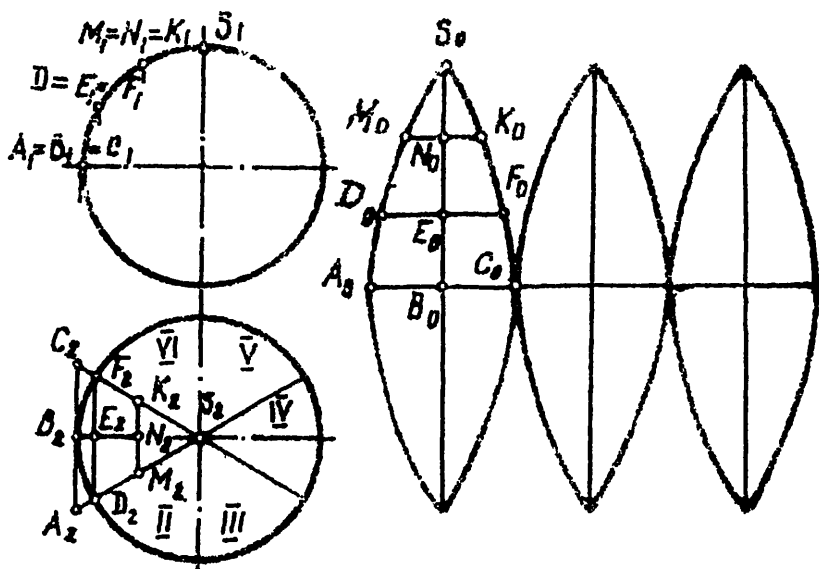


226-сурет

($\Delta A_1 D_0 F_0$) салғанда оның $[AD]$ кабырғасы горизонталь, ал $[DF]$ кабырғасы фронталь орналасатындықтан олардың ұзындықтарын горизонталь және фронталь проекциялардан аламыз: $|A_1 D_0| = |A_2 D_2|$; $|D_0 F_0| = |D_1 F_1|$. Ал $[AF]$ кабырғасының ұзындығын катеттерінің бірі осы кесіндінің фронталь проекциясы $|TF| = |A_1 F_1|$, ал екіншісі A және F нүктелерінің фронталь проекциялар жазықтығынан қашықтықтарының айырымы болатын үшбұрыштың гипотенузасы ретінде анықталады: $|A_0 F_0| = |PF|$. Осындай жолмен салынған барлық үшбұрыштардың натурал шамаларынан тұратын фигура гиперболалық параболоидтың бізге керекті бөлігінің жаймасы болады.

2-мысал. Сфераның жаймасын салу керек (227-сурет).

Айналу бетін оның меридиандарымен жіңішке және өзара тең бөліктерге бөледі. Бұл бөліктердің әрқайсысын цилиндрлік бетпен алмастырады. Цилиндрлік беттің жасаушылары бөліктің ортаңғы меридианының нүктелері арқылы өтетін бетке жаңама түзулер болады. Цилиндрлік беттің жасаушыларының ұштары қарастырып отырған бөлікті шектейтін меридиан жазықтықтарында жатады. Біз сфераны түсінікті болу үшін тек алғы бөлікке ғана бөлдік. Дәлдікті арттыру үшін бөліктер саны көбірек болған дұрыс (көм дегенде 12 бөлікке бөлу керек). Осы



227-сурет

бөліктердің $[S^{\sim}B]$ орта меридианы болатын бөлігін цилиндрлік бетпен алмастыралық. Бұл цилиндрлік беттің жасаушылары $[S^{\sim}B]$ меридианының нүктелері арқылы өтіп π_1 жазықтығына перпендикуляр орналасқан. $[S^{\sim}B]$ доғасын тең бөліктерге бөлетін E және N нүктелерін белгілеп цилиндрлік беттің $[AC]$, $[DF]$ және $[MK]$ жасаушыларын жүргіземіз. Одан әрі осы көрсетілген цилиндрлік беттің жаймасын саламыз. Бұл беттің нормаль қимасы болатын $[S^{\sim}B]$ меридианы белгілі. Сондықтан жайманы салу үшін нормаль қима әдісін пайдаланамыз. Қалауымызша түзу жүргізіп оған B_0 , E_0 , N_0 және S_0 нүктелерін саламыз: $|B_0E_0| = |E_0N_0| = |N_0S_0| = |B_1E_1| = |E_1N_1| = |N_1S_1|$. Осы B_0 , E_0 , N_0 және S_0 нүктелері арқылы S_0B_0 түзуіне перпендикуляр түзулер жүргіземіз. Соңғы түзулерге цилиндрлік беттің жасаушыларын саламыз: $|A_0B_0| = |B_0C_0| = |A_2B_2| = |B_2C_2|$; $|D_0E_0| = |E_0F_0| = |D_2E_2|$; $|M_0N_0| = |N_0K_0| = |N_2K_2|$. Салынған жасаушылардың ұштарын жатық сызықпен қоссақ, сфераның 6-дан бір бөлігінің жаймасын аламыз. 227-суретте сфераның тең жартысының жаймасы көрсетілген.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН СҰРАҚТАР МЕН ЖАТТЫҒУЛАР

1. Көп жақты беттердің жаймаларын қалай салады?
2. Қандай қисық беттер жайылады, ал қандай қисық беттер жайылмайды?

3. Қысық бет жаймаларының негізгі қасиеттерін атап, оларды дәлелдеп беріңіз.

4. Жайманы салудың негізгі екі әдісі қандай?

5. Жайылмайтын беттердің жаймаларын қалай салады?

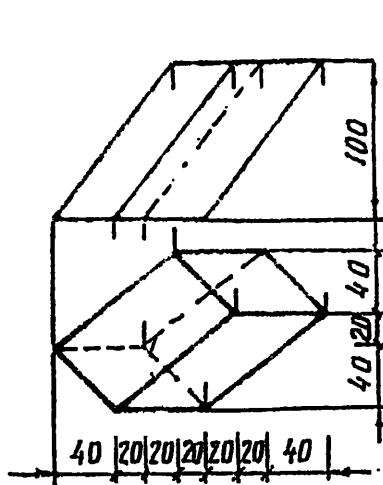
6. $SABCD$ пирамидасының жаймасын салу керек, $S(0; 10; 50)$, $A(10; 40; 0)$, $B(40; 25; 0)$, $C(20; 10; 0)$, $D(30; 40; 0)$.

7. 228-суреттегі көлбеу призманың жаймасын салу керек.

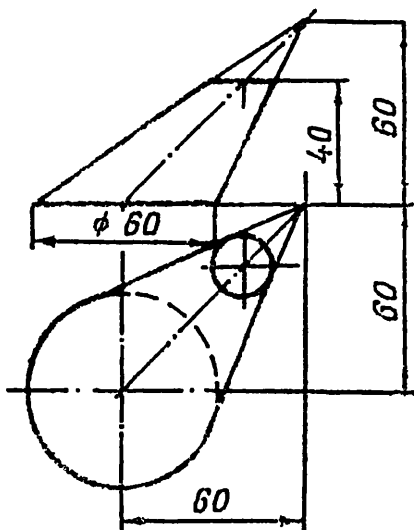
8. 229-суретте берілген қиық конустың жаймасын салу керек.

9. 230-суретте берілген цилиндрдің жаймасын салу керек.

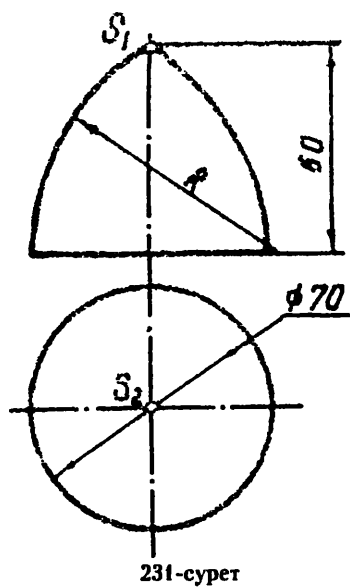
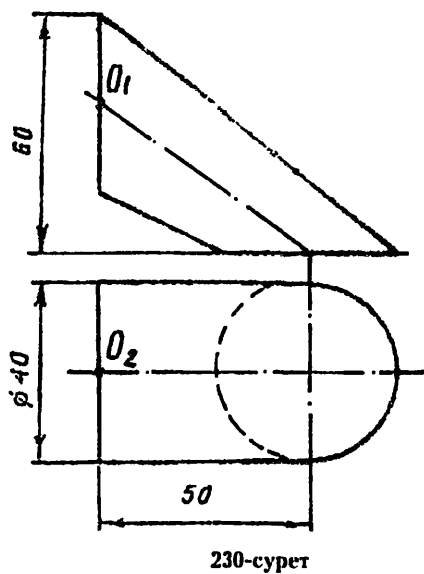
10. 231-суретте берілген айналу бетінің жаймасын салу керек.



228-сурет



229-сурет



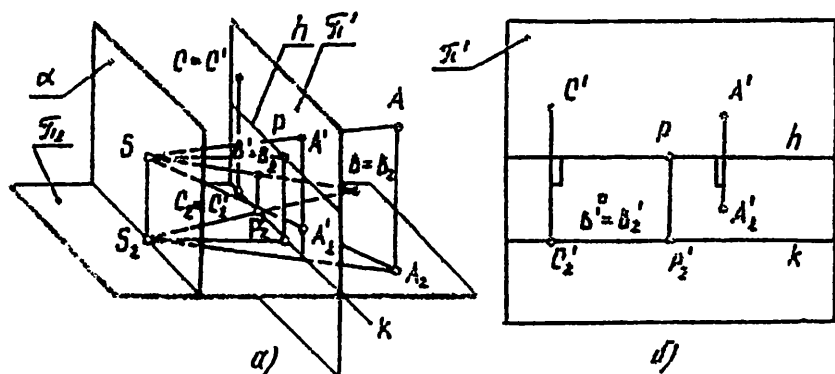
Тогызыншы тарау СЫЗЫҚТЫҚ ПЕРСПЕКТИВА. САНДЫҚ БЕЛГІЛЕРІ БАР ПРОЕКЦИЯЛАР. КӨЛЕҢКЕЛЕРДІ САЛУ

59. НҮКТЕНІҢ ЖӘНЕ ТҮЗУДІҢ ПЕРСПЕКТИВАСЫ

Перспектива латынның *perspectus* «анық көрінген» деген мағынадағы сөзінен шыққан. Перспектива деп заттың центрлік проекциялаудың жәрдемімен алынған кескінін айтады. Перспектива жазықтыққа салынған болса, онда оны *сызықтық перспектива* дейді. Перспективаны цилиндрлік немесе сфералық беттерге де салады. Цилиндрлік бетке салынған перспективаны *панорамалық*, ал сфералық бетке салынған кескінді *күмбездік перспектива* деп атайды. Бұдан былай әңгіме тек сызықтық перспектива туралы ғана болады.

Сызықтық перспективада алдымен фигураны горизонталь орналасқан заттық жазықтық π_2 -ге тік бұрыштап проекциялап алады. Фигураның π_2 жазықтығындағы тік бұрышты проекциясын оның табаны деп атайды. Содан кейін фигураны және оның табанын қарау нүктесі S -тен картина жазықтығы π' -қа проекциялайды. Осылайша алынған фигураның центрлік проекциясын оның перспективасы дейді. Проекциялау центрі S нүктесінің π' жазықтығындағы тік бұрышты проекциясын *картинаның бас нүктесі* деп атайды. π' және π_2 жазықтықтарының қиылысу сызығын *картинаның табаны*, ал бас нүкте арқылы картинаның табанына параллель етіп жүргізілген түзу *көкжиек* (горизонт) *сызығы* болады. Қарау нүктесінің π_2 жазықтығындағы тік бұрышты проекциясын *түру нүктесі* деп атайды. Сонымен, перспективаны алу үшін оның элементтері деп аталатын жазықтықтар, түзулер және нүктелер жүйесін тағайындау керек. Сызықтық перспективаның элементтері 232, а-суретте қиғаш бұрышты диметрияда кескінделген. $(SP) \perp \pi'$; $(SP) \cap \pi' = P$; $\pi' \cap \pi_2 = k$; $P \in h \parallel k$; $(SS_2) \perp \pi_2$; $(SS_2) \cap \pi_2 = S_2$; $S \in \alpha \parallel \pi'$; $(AA_2) \perp \pi_2$; $(AA_2) \cap \pi_2 = A_2$; $(AS) \cap \pi' = A'$; $(A_2S) \cap \pi' = A'$. Сонда S — қарау нүктесі (проекциялау центрі), π' — картина жазықтығы (қысқаша картина), π_2 — заттық жазықтық, P — картинаның бас нүктесі, P_2 — бас нүктенің табаны, k — картинаның табаны, h — көкжиек сызығы, S_2 — түру нүктесі, A — кеңістіктегі нүкте, A_2 — A нүктесінің табаны, A' — A нүктесінің перспективасы, A'_2 — A_2 нүктесінің перспективасы.

Кеңістікті π' және α жазықтықтары үшке бөледі. Осы екі жазықтықтың аралығын *аралық кеңістік*, α жазықтығының сол жағындағы



232-сурет

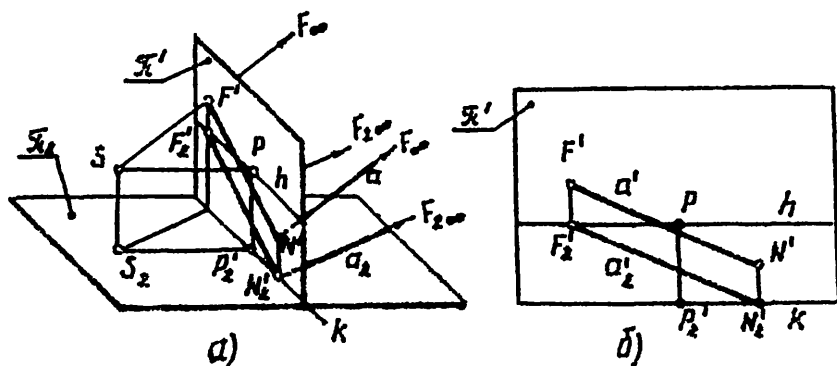
кеңістікті *жорамал кеңістік*, ал π' жазықтығының оң жағындағы кеңістікті *заттық кеңістік* деп атайды.

Жорамал кеңістікте орналасқан нүкте табанының перспективасы көкжиек сызығынан жоғары, ал аралық кеңістікте орналасқан нүкте табанының перспективасы k сызығынан төмен орналасатынын байқау қиын емес. Заттық кеңістікте орналасқан нүкте табанының перспективасы көкжиек сызығы мен картина табанының аралығында орналасады. Алға қарай перспективасы салынатын фигураны заттық кеңістікте орналастыратын боламыз.

232, б-суретте A , B және C нүктелері сызықтық перспективада кескінделген. Нүктенің перспективасын оның табанының перспективасымен қосатын түзу көкжиек сызығына перпендикуляр болатыны жайында кіріспеде айтқан болатынбыз. Егер нүкте заттық жазықтықта жатса, онда оның перспективалары бірігеді. Мысалы B нүктесі π_2 жазықтығында жатыр, сондықтан $B' = B'_2$. Картина жазықтығында жатқан нүкте табанының перспективасы картинаның табанының бойында жатады: $C \in \pi \Leftrightarrow C'_2 \in k$.

Түзудің перспективасын салу үшін оның кез келген екі нүктесінің перспективасын салу жеткілікті. Бірақ бұл екі нүктенің біреуі ретінде түзудің картина жазықтығымен қиылысу нүктесін, ал екіншісі ретінде түзудің шексіз қашықтықта жатқан нүктесін алу қолайлы болады. Түзудің картина жазықтығымен қиылысу нүктесінің, яғни оның ізінің перспективасы N' осы нүктенің өзімен беттесіп кетеді, ал оның табанының перспективасы картинаның табанында жатады (233, а-сурет):

$$a \cap \pi' = N; N' = N; a_2 \cap \pi' = N_2; N'_2 = N_2 \in k.$$



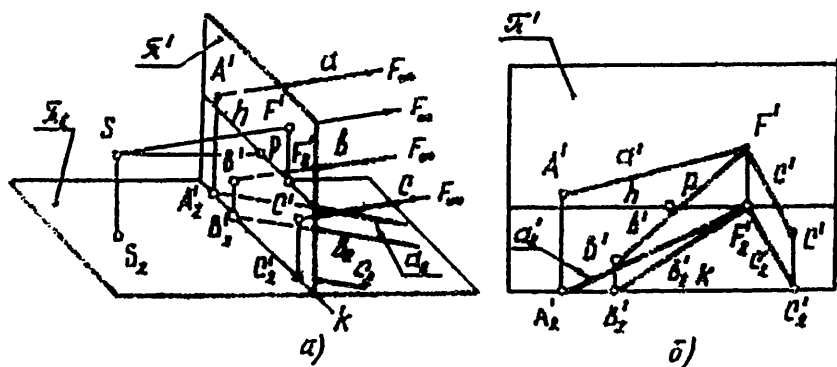
233-сурет

Түзудің шексіз қашықтықта жатқан нүктесінің перспективасын табу үшін проекциялау центрі арқылы осы түзуге параллель түзу жүргізіп, оның картина жазықтығымен қиылысу нүктесін салу жеткілікті. Берілген a түзуінің шексіз қашықтықта жатқан нүктесін F_∞ деп, ал оның табаны a_2 -нің шексіз қашықтықта жатқан нүктесін $F_{2\infty}$ деп белгілейік. Енді осы F_∞ және $F_{2\infty}$ нүктелерінің центрлік проекцияларын F' пен F'_2 -тарды тұрғызу керек. Осы мақсатта тұру нүктесі S_2 арқылы a_2 түзуіне параллель түзу жүргізіп, оның картинаның табаны k -мен қиылысу нүктесінде π_2 жазықтығына перпендикуляр тұрғызамыз. Бұл перпендикуляр картина жазықтығында жатады және көкжиек сызығын F'_2 нүктесінде, ал қарау нүктесі арқылы a түзуіне параллель етіп жүргізілген түзуді F' нүктесінде қияды. SF'_2 түзуі a_2 түзуіне параллель болатынын тексеру қиын емес. Сонда F' нүктесі a түзуінің шексіз қашықтықта жатқан нүктесінің перспективасы, ал F'_2 оның табанының перспективасы: $F'_2 \in h$.

Пресективада (233, 6-сурет) F' және N' нүктелерін қосатын түзу a түзуінің перспективасы, ал F'_2 және N'_2 нүктелерін қосатын түзу оның табанының перспективасы болады: $(F'N') = a'$; $(F'_2N'_2) = a'_2$. Мұндағы a' түзуі a түзуінің, a'_2 түзуі a_2 түзуінің перспективасы. Бұған керісінше, егер түзудің перспективалары берілсе, онда бұл түзудің картина жазықтығындағы ізін және шексіз қашықтықта жатқан нүктесінің перспективасын тұрғызып алуға болады. Айталық a түзуінің перспективасы a' және оның табанының перспективасы a'_2 берілсін. Осы a түзуінің ізін (N нүктесі) және оның шексіз қашықтықта жатқан F_∞ нүктесінің перспективасын (F' нүктесін) салу керек болсын. Берілген түзудің табанын a'_2 -ты картинаның табанымен қиылысқанша созамыз, сонда іздің табанын аламыз: $a'_2 \cap k = N'_2$. Осы N'_2 нүктесі арқылы k түзуіне перпендикуляр етіп жүргізілген түзу a' түзуін N' нүктесінде қияды: $(N'_2N) \perp k$; $a' \cap (N'_2N) = N'$.

Енді F нүктесін салу үшін a'_2 түзуін көкжиек сызығымен қиылысқанша созамыз: $a'_2 \cap h = F'_2$. Көкжиек сызығының F'_2 нүктесінде перпендикуляр тұрғызсақ, онда ол a' түзуін F нүктесінде қияды: $(F'_2 F) \perp h$; $(F'_2 F) \cap a' = F$.

Картинамен A' , B' және C' нүктелерінде қиылысатын өзара параллель a , b және c түзулерінің перспективаларын салалық (234, а-сурет). Ол үшін қарау нүктесі S арқылы берілген түзулерге параллель түзулер жүргізіп, осы a , b және c түзулерінің шексіз қашықтықта жатқан нүктелерінің перспективаларын тұрғызып алуымыз керек. Проекциялау центрі S арқылы өзара параллель түзулерге параллель етіп тек бір ғана түзу жүргізуге болады және ол түзу π' жазықтығын F нүктесінде қияды. Сондықтан F нүктесі берілген a , b және c түзулерінің перспективалары үшін ортақ болады. Олай болса барлық өзара параллель түзулердің перспективалары бір нүктеде қиылысады екен (234, б-сурет). Сондықтан түзудің шексіз қашықтықта жатқан нүктесінің перспективасын *тоғысу нүктесі* деп атайды.

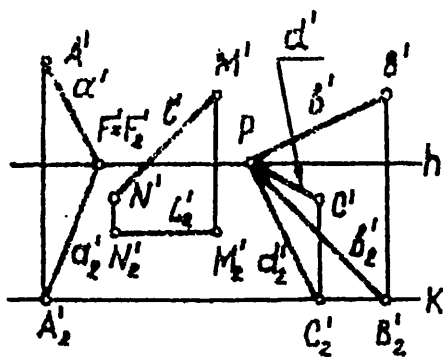


234-сурет

Қорытып айтқанда, түзудің перспективасын салу үшін оның ізі мен тоғысу нүктесін түзу сызық арқылы қосу керек.

Перспективадағы тоғысу нүктесінің орнына қарап, түзудің кеңістікте қалай орналасқандығын айыруға болады. Егер түзудің тоғысу нүктесі горизонт сызығының бойында жатса, онда ол түзудің кеңістікте горизонталь орналасқандығын көрсетеді. 235-суретте a түзуі өзінің перспективасы a' және табанының перспективасы a'_2 -пен берілген. Бұл түзудің тоғысу нүктесі F көкжиек сызығында жатыр: $F'_2 = F \in h$. Сондықтан кеңістікте a түзуі заттық жазықтыққа параллель болады: $a \parallel \pi_2$.

Картина жазықтығына перпендикуляр түзулердің перспективалары картинаның бас нүктесі арқылы өтеді. 235-суретте кескінделген b



және d түзулерінің перспективалары P нүктесінде тоғысады, яғни b және d түзулерінің шексіз қашықтықтағы нүктелерінің перспективалары картинаның бас нүктесімен біріккен. Сондықтан олар кеңістікте өзара параллель және картинаға перпендикуляр болады: $b \parallel d \perp \pi'$.

Картина жазықтығына параллель түзудің тоғысу нүктесі де, ізі де болмайды. Мысал ретінде 235-суретте / түзуі кескіні-

делген. Мұндай түзулердің табандарының перспективалары көкжиек сызығына параллель орналасады ($l'_2 \parallel h$), ал перспективаларының орналасуына шек қойылмайды: $l'_2 \parallel h \Rightarrow l \parallel \pi'$.

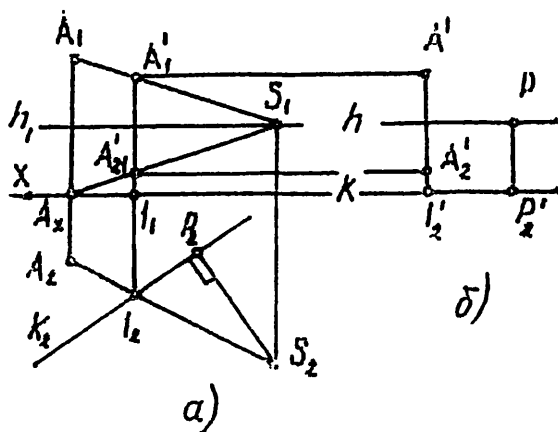
Заттық жазықтыққа перпендикуляр түзудің перспективасы көкжиек сызығына перпендикуляр, ал оның табанының перспективасы нүкте болады. Шынында да, π_2 -ге перпендикуляр түзу мен қарау нүктесі анықтайтын жазықтық заттық жазықтыққа перпендикуляр болады. Сондықтан бір жазықтыққа перпендикуляр екі жазықтықтың қиылысу сызығы да сол жазықтыққа перпендикуляр орналасады. Егер $n \perp \pi_2$ болса, онда $\alpha(S, n) \perp \pi_2$ және $\alpha \cap \pi' = n' \perp h$ болады. Ал π_2 -ге перпендикуляр түзудің табаны нүкте болады. Нүкте нүктеге проекцияланады.

60. ПЕРСПЕКТИВНЫ СЛУ

Перспектива көбіне объектінің берілген эңкүрі бойынша салынады. Сондықтан эңкүрден перспективаға көшуді карастыралық. Фронталь және горизонталь проекциялары берілген нүктенің, кесіндінің және жазық фигураның перспективаларын салуға мысалдар келтірелік.

1-мысал. Эпюрде $A(A_1, A_2)$ нүктесі, картина жазықтығының горизонталь проекциясы k_2 және қарау нүктесі $S(S_1, S_2)$ берілген. A нүктесінің перспективасын салу керек (236, а-сурет).

Түру нүктесі S_2 -ден картинаның табаны k_2 -ге перпендикуляр түсіру арқылы картинаның бас нүктесінің табанын P_2 табамыз. Қарау нүктесінің фронталь проекциясы S , арқылы абсцисса өсіне параллель етіп жүргізілген түзу h , көкжиек сызығының фронталь проекциясын береді: $S, \epsilon h \parallel x$. Көкжиек сызығының горизонталь проекциясы k_2 түзуімен беттеседі. Картина жазықтығы π' горизонталь проекциялаушы жазықтық болады. Проекциялау центрі S , проекциялар жазықтығы $\pi(k_2)$ және



236-сурет

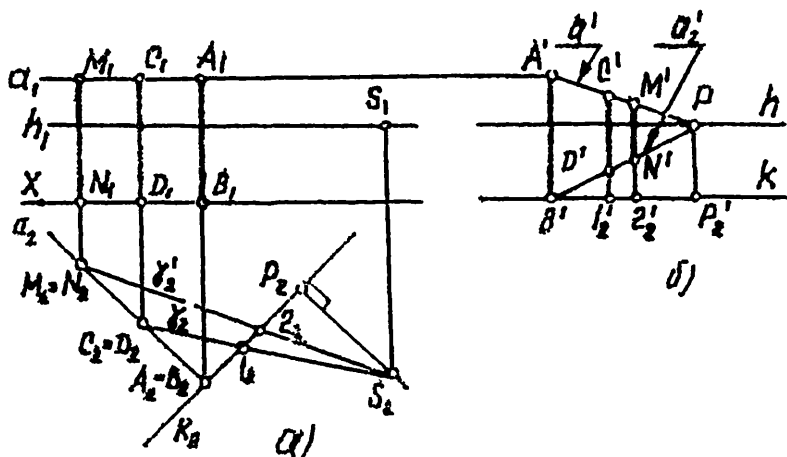
А нүктесі берілген. Берілген А нүктесін π' жазықтығына S центрінен проекциялау керек. Ол үшін проекциялаушы сәулелердің проекцияларын жүргіземіз: $[S_2A_2]$, $[S_1A_1]$ және $[S_1A_2]$. (S_2A_2) және k_2 түзулерінің қиылысу нүктесі 1_2 арқылы вертикаль (x өсіне перпендикуляр) түзу жүргізіледі. Осы түзудің S_1A_1 және S_1A_2 түзулерімен қиылысу

нүктелері A' және A'_2 берілген А нүктесінің және оның табанының перспективаларының фронталь проекцияларын береді. Енді эппорден перспективаға көшуге дайындықты толық аяқтадық.

Перспективаны салу үшін аралығы h , және x түзулерінің аралығына тең екі горизонталь түзу жүргізіледі. Бұлардың жоғарғысы көкжиек сызығы h , ал төменгісі картинаның табаны k ретінде алынады. Қалауымызша картинаның бас нүктесі P және оның табаны P_2 белгіленеді: $(PP_2) \perp h$. Картинаның табаны k түзуінің бойына P_2 нүктесінен солға қарай $[P_21_2]$ -ге тең кесінді салып, пайда болған 1_2 нүктесі арқылы көкжиек сызығына перпендикуляр түзу жүргізіледі. Осы түзудің бойына $1'_2$ нүктесінен бастап жоғары қарай $[1'_2A'_2]$ және $[1'_2A'_1]$ кесінділеріне тең кесінділер салудың нәтижесінде, бізге керекті А нүктесінің және оның табанының перспективалары A' және A'_2 (236, 6-сурет) табылады.

2-мысал. Ұзындықтары бірдей және вертикаль орналасқан AB , CD және MN кесінділерінің перспективаларын салу керек (237, а-сурет). Проекциялау центрі $S(S_1, S_2)$ және проекциялар жазықтығы π' берілген.

Картина жазықтығы π' горизонталь проекциялаушы жазықтық, сондықтан оны эппорде горизонталь проекциясы болатын k_0 түзуімен беруге болады. Картина жазықтығы AB кесіндісі арқылы өтіп, $a = (MC)$ түзуіне перпендикуляр орналасқан: $[AB] \in \pi' \perp a$. AB кесіндісі картина жазықтығында жатқандықтан оның перспективасы өзімен беттесіп кетеді. Қалған кесінділердің перспективаларын салу үшін олар арқылы S нүктесі жататын горизонталь проекциялаушы жазықтықтар $\chi(S, (CD))$ және $\gamma(S, (MN))$ жүргіземіз. Бұл χ және γ жазықтықтары π жазықтығымен вертикаль сызықтар (түзулер) бойынша қиылысады. Сондықтан



237-сурет

вертикаль түзулердің перспективалары да вертикаль түзулер болатынын көреміз: $\gamma_2 \cap k_2 = 1_2$; $\gamma'_2 \cap k_2 = 2_2$. Бұл нүктелерді картинаға көшіреміз. Көкжиек сызығын h және картинаның табанын k салып, олардың бойынан $P, P', 1', 2'$ және B' нүктелерін мына теңдіктерді пайдаланып табамыз (237, б-сурет): $|P'B'| = |P_2B_2|$; $|P'1'| = |P_21_2|$; $|P'2'| = |P_22_2|$; $(A'B') \parallel (PP') \perp h$; $|A'B'| = |A_2B_2|$, $[AB]$, $[CD]$ және $[MN]$ кесінділерінің ұштары арқылы түзулер жүргізсек, олар картина жазықтығына перпендикуляр болар еді: $A \in (MC)$; $B \in (ND)$; $(MC) \parallel (ND) \perp \pi'$. Ал картинаға перпендикуляр түзулердің тоғысу нүктесінің міндетін картинаның бас нүктесі P атқарады. Сондықтан C' және M' нүктелері $(A'P)$ түзуінің, ал D' және N' нүктелері $(B'P)$ түзуінің бойынан $1'_2$ және $2'_2$ нүктелері арқылы вертикаль түзулер жүргізудің нәтижесінде табылады.

3-мысал. Заттық жазықтықта орналасқан $ABCD$ тік төртбұрышының төбесі арқылы өтетін вертикаль жазықтықтағы перспективасын салу керек болсын (238, а-сурет).

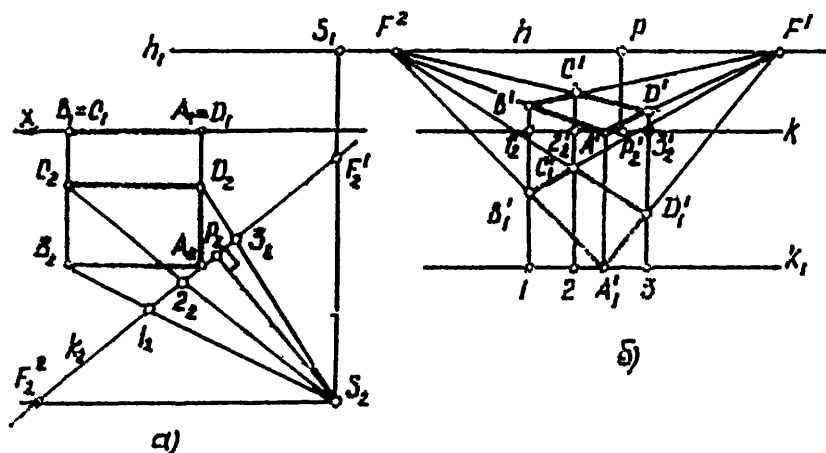
Қарау нүктесін $S(S_1, S_2)$ тағайындап, салуды томендегі реттілікпен орындаймыз:

1. B_2, C_2 және D_2 нүктелерін түзу сызықтар арқылы тұру нүктесімен қосамыз және осы тұру нүктесі S_2 арқылы төртбұрыштың қабырғаларына параллель түзулер жүргіземіз:

$$(F'_2 S_2) \parallel (A_2 D_2) \parallel (B_2 C_2); (S_2 F^2_2) \parallel (A_2 B_2) \parallel (D_2 C_2); (S_2 F^1_2) \cap k_2 = F^1_2;$$

$$(S_2 F^2_2) \cap k_2 = F^2_2.$$

Табылған F^1_2 және F^2_2 нүктелері тік төртбұрыш $ABCD$ -ның қабырғаларының тоғысу нүктелері болады.



238-сурет

2. Эпюрдегі $P_2, 1_2, 2_2, 3_2$ және A_2 нүктелеріне сәйкес перспективадағы $P'_2, 1'_2, 2'_2, 3'_2$ және A'_2 нүктелерін белгілеп, $1'_2, 2'_2$ және $3'_2$ нүктелері арқылы вертикаль түзулер жүргіземіз. $|P'_2 1'_2| = |P_2 1_2|$; $|P'_2 2'_2| = |P_2 2_2|$; ...; $(1'_2 B') \parallel (2'_2 C') \parallel (3'_2 D') \perp h$ (238, 6-сурет).

3. Көкжиек сызығының бойынан тік төртбұрыш қабырғаларының F' және F'' тоғысу нүктелерін анықтаймыз:

$$|PF'| = |P_2 F_1'|; |PF''| = |P_2 F_2'|.$$

4. A' нүктесін F' және F'' нүктелерімен қосу арқылы тік төртбұрыштың қабырғалары AB және AD кесінділерінің перспективаларын аламыз: $(A'F'') \cap (F'_2 B') = B'$; $(A'F') \cap (F'_2 D') = D'$.

5. B' нүктесін F' нүктесімен, D' нүктесін F'' нүктесімен қосу арқылы $[BC]$ және $[CD]$ қабырғаларының перспективаларын аламыз: $(B'F') \cap (D'F'') = C'$ және $2'_2$ нүктесі арқылы жүргізілген вертикаль түзу C' нүктесі арқылы өтуі тиіс.

Осындай горизонталь проекциялар жазықтығында жатқан жазық фигура ретінде объектінің горизонталь проекциясын алуымызға болады. Горизонталь проекцияны кейде *нұсқасызба* (план) деп те атайтынын білеміз. Сонда біз нұсқасызбаның перспективасын салу жолымен танысқан екенбіз.

Егер $ABCD$ төртбұрышы заттық жазықтықтан төмен орналасқан горизонталь жазықтықта болса да, оның перспективасын жоғарыда көрсетілген реттілікпен салуға болады. Тек бұл жағдайда төртбұрыш жазықтығының картинамен қиылысу сызығы k , картинаның бұрынғы табаны k сызығынан төмен орналасқан болар еді (238, 6 суреттері $A', 1, 2$ және 3

нүктелерін қараңыз). $A'B'C'D'$ және $A'B'C'D'$, тортбұрыштарын салыстырып, олардың екіншісі біріншісінен үлкен болатынын көреміз. Көпшілік жағдайда объектінің перспективасын салуды оның табанының (планының) перспективасын салудан бастайды. Сызба анық және түсінікті болу үшін объектінің табанының перспективасын оның өзінің перспективасынан тыс, төмен орналастырған тиімді болады. Осындай жағдайларда төмендетілген планның перспективасын салады.

Перспективаға қойылатын негізгі талап мынау: перспектива жобаланып отырған объектіні тұрғызғаннан кейінгі оның табиғи көрінісін дәл беруі тиіс. Перспектива осы айтылған талапқа сай болуы үшін қарау нүктесі мен картина жазықтығын тандап алуда төмендегі шарттарды қанағаттандыру қажет.

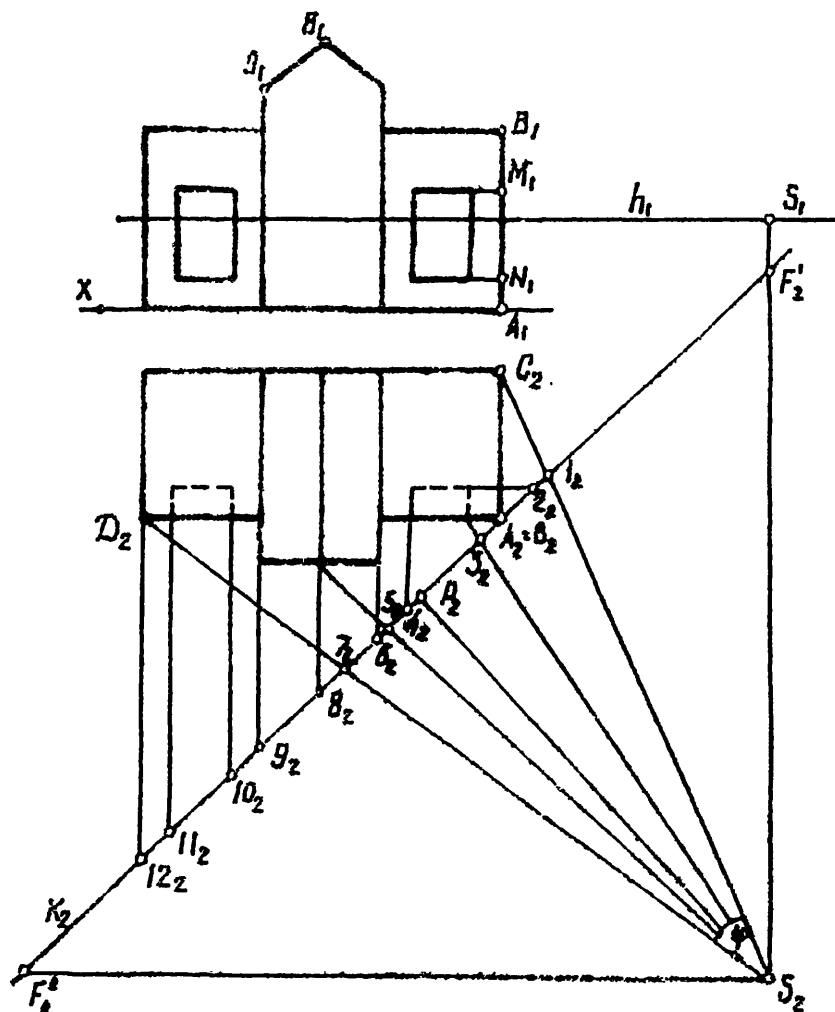
1. Қарау нүктесі объектіден оның ең үлкен көрінетін өлшемінен екі еседей қашықтықта орналасуы керек. Осы жағдайда қарау бұрышы φ° ең жақсы қору бұрышына, яғни 28° -қа тең болады. Қарау бұрышы φ° 18° -тан кіші және 53° -тан үлкен болмауы керек.

2. Картина жазықтығын объектінің бір қыры арқылы бас нүкте P кескіні енінің үштен бірінің ортаңғы бөлігінде орналасатындай етіп жүргізеді.

3. Көкжиек сызығын жерде тұрған кісінің көзінің деңгейінде жүргізеді, яғни h_1 сызығы мен абсцисса өсі x -тің аралығы $1,5$ метрдей болады.

Күрделірек мысал ретінде 239-суретте горизонталь және фронталь проекцияларымен берілген объектінің перспективасын салалық.

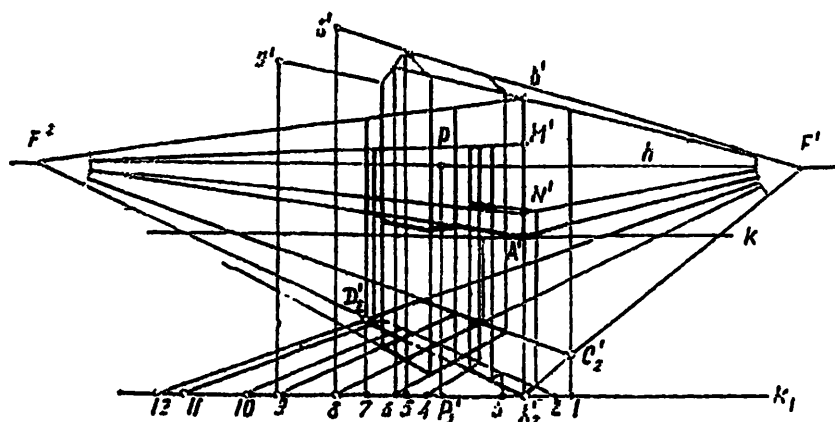
Қарау нүктесінің горизонталь проекциясын S_2 қарау бұрышы жоғарыдағы бірінші шартты қанағаттандыратындай етіп тағайындаймыз. Шамамен C_2S_2 және D_2S_2 түзулері арасындағы бұрыш 28° -қа тең. Картина жазықтығы π' -ты екінші шартты қанағаттандыратындай етіп орналастырамыз. Оны $[AB]$ қыры арқылы жүргіземіз. Сонда картина жазықтығының горизонталь проекциялар жазықтығымен қиылысу сызығы k осы AB кесіндісінің горизонталь проекциясы арқылы жүргізіледі: $k = \pi' \cap \pi_2; [AB] \perp \pi_2; (AB) \subset \pi'; k = k_2$. Енді S_2 нүктесінен k_2 түзуіне перпендикуляр түсіру арқылы P_2 нүктесін аламыз. Сонда $|1_2 7_2| \approx |S_2 P_2| : 2$ және $\frac{1}{3} < \frac{|1_2 P_2|}{|1_2 7_2|} < \frac{2}{3}$ болуы керек. Үшінші шартты пайдаланып қарау нүктесінің фронталь проекциясы S_1 -ді және көкжиек сызығын жүргіземіз. Қарау нүктесін және картина жазықтығын тандап алғаннан кейін біраз қосымша көмекші сызықтар жүргізіп, керекті нүктелерді белгілеп алуымыз керек. Тұру нүктесі S_2 -ні бастыра планның қабырғаларына параллель түзулер жүргізу арқылы екі басты тоғысу нүктелерін F'_2 мен F''_2 табамыз. Планның срекшес нүктелерін тұру нүктесімен қосамыз және план-



239-сурет

ның кейбір сызықтарын созып картина жазықтығымен қиылысу нүктелерін табамыз. Сонда пайда болған нүктелер $1_2, 2_2, \dots, 12_2$.

Перспективада (240-сурет) көкжиек сызығын h жүргізіп оның бойынан P, F^1 және F^2 нүктелерін белгілейміз. $|F^1P| = |F^1_2P_2|$; $|F^2P| = |F^2_2P_2|$. Картинаның табанын k және төмендетілген табанын k_1 белгілейміз. Мұнда



240-сурет

көкжиек сызығы h -пен картинаның табаны k -ның ара қашықтығы эпюрден алынады, ал төмендетілген табанды k_1 -ді қалауымызша алынған қашықтықта көкжиек сызығына, немесе k -ға параллель жүргізеді. Жоғарыда қарастырылған 3-мысалдағыдай төмендетілген планның перспективасы салынады. Ол былай орындалады. Бас нүкте P -дан k_1 түзуіне перпендикуляр түсіріп, оның табаны P'_2 нүктесін белгілейді. Төмендетілген табанның $A'_2, 1, 2, \dots, 12$ нүктелерін мына теңдіктерді $|P'_2 A'_2| = |P_2 A_2|$; $|P'_2 1| = |P_2 1|$; $\dots$; $|P'_2 12| = |P_2 12|$ сактай отырып белгілейді. Белгіленген A'_2 және 2 нүктелерін F^2 нүктесімен, ал $A'_2, 4, 6, 8, 9, 10, 11$ және 12 нүктелерін F^1 нүктесімен қосамыз. 1, 3, 5 және 7 нүктелері арқылы вертикаль түзулер жүргізілген, яғни k_1 түзуіне перпендикуляр тұрғызылған. Табылған C'_2 нүктесін және 5 нүктесінде тұрғызылған перпендикуляр мен $F^1 8$ түзуінің қиылысу нүктесін F^2 нүктесімен қосып төмендетілген планның перспективасын тұрғызуды аяқтаймыз.

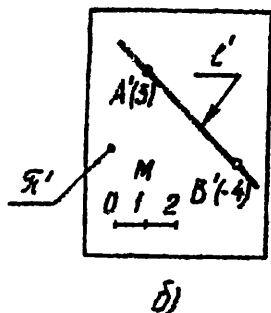
Төмендетілген планның төбелері $A'_2, C'_2, D'_2, \dots$ арқылы вертикаль түзулер жүргізіледі. A'_2 нүктесі арқылы жүргізілген түзудің бойынан A' және B' нүктелерін табамыз: $A' = (A'_2 A') \cap k$; $(A'_2 A') \perp k_1$; $|A' B'| = |A_1 B_1|$. Сонда $A' B'$ кесіндісі объектінің $[AB]$ қырының перспективасы. 8 және 9 нүктелерінің перспективаның табанынан қашықтықтары 8 және 9 нүктелерінің абсцисса өсінен қашықтықтарына тең. Алынған A' және B' нүктелерін F^2 нүктесімен, ал $A', B', 8$ және 9 нүктелерін F^1 нүктесімен қосамыз. Бұл түзулердің C'_2 және D'_2 нүктелері арқылы жүргізілген вертикаль түзулермен шектелген бөлігі объектінің алдыңғы және оң жақ бүйір жақтарының перспективаларын береді. Осылайша салуды әрі қарай жалғастыра отырып, объектінің перспективасын аламыз.

Перспективаны архитектура (сәулет) мен сурет өнерінде өте кен түрде қолданады. Архитекторлар жобаларын ең алдымен қағаз бетіне перспективаны пайдалана отырып сызу арқылы жүзеге асырады. Сызықтық перспективаны пайдаланудың нәтижесінде жобаны жүзеге асырғаннан кейін ол қандай болатындығын көруге болады. Сондықтан перспектива алдын ала қателерін түзетіп, жобаны жақсартуға бағытталған әр түрлі өзгерістерді енгізуге мүмкіндік береді. Суретшілер перспектива теориясын өздерінің картиналарын жасауда пайдаланулары тиіс. Бұл оларға реалистік суреттер салуға көмектеседі.

Шапшаң түсірілістің киносъемканы пайдаланып, өте тез өзгеретін құбылыстарды киноға түсіріп алуға болады. Сызба геометрияны пайдаланып, кинопланкаға талдау жасауға болады. Ал бұл мәселенің ғылыми зерттеу ісіндегі маңызы зор.

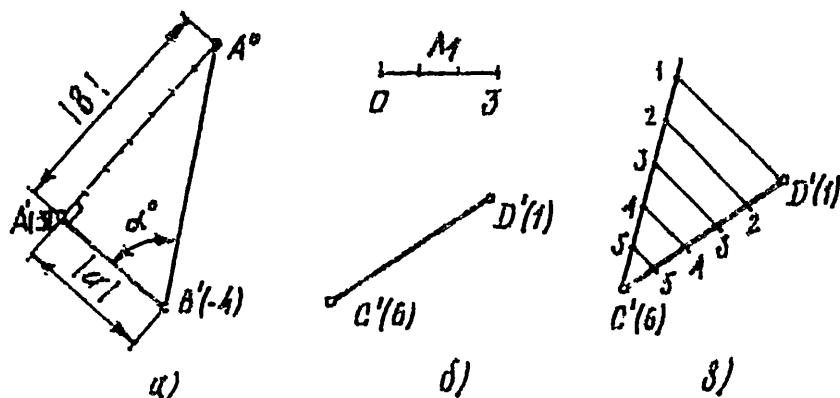
61. ТҮЗУДІҢ ЖӘНЕ ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ САНДЫҚ БЕЛГІЛЕРІ БАР ПРОЕКЦИЯЛАРЫ

Нүктенің сандық белгісі бар проекциясын алу жолын § 6-да қарастырғанбыз. Берілген l түзуінің сандық белгісі бар проекциясын алу үшін проекциялар жазықтығы π' -ты алып, оған l түзуінің кез келген екі нүктесін тік бұрыштап проекциялаймыз (241, а-сурет). $A\epsilon l$; $B\epsilon l$. A нүктесі проекция-



241-сурет

лар жазықтығынан 3 өлшем жоғары, ал B нүктесі — 4 өлшем төмен орналасқан. Сондықтан A нүктесінің проекциясы жанына 3, ал B нүктесінің проекциясы жанына минус 4 санын жазуымыз керек (241, б-сурет). Сонда l түзуінің сандық белгісі бар проекциясы l' -ты $A'(3)$ және $B'(-4)$ нүктелерін бастыра жүргіземіз. Сызбада міндетті түрде масштаб көрсетілген болуы керек. Кесінді проекциясының ұзындығын оның *табаны* дейді. Мысалы AB кесіндісінің табаны $[A'B']$ -қа тең (242, а-сурет). Кесіндінің шын ұзындығын және оның проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтау үшін тік бұрышты үшбұрыш салынады. Бұл тік бұрышты үшбұрыштың бір катеті кесіндінің табаны-



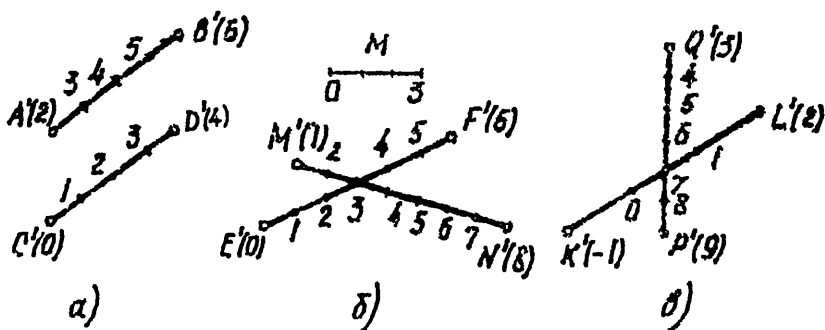
242-сурет

на тең, ал екінші катеті кесінді ұштарының сандық белгілерінің айырымына тең. Сонда кесіндінің шын ұзындығы осы тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы, ал оның проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышы гипотенуза мен табанның арасындағы бұрыш ретінде анықталады. AB кесіндісінің ұзындығын және проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын анықтау үшін $A'A'B'$ тік бұрышты үшбұрышын саламыз.

$$(A'A') \perp (A'B'); |A'A'| = 3 - (-1) = 7; |A'B'| = |AB|; \alpha = \widehat{(AB)}, \pi'.$$

Кейбір есептерді шешу кезінде түзудің бойынан сандық белгілері бүтін сандар болатын нүктелерді табу керек болады. Түзудің сандық белгілері бүтін сандар болатын нүктелерін салуды *түзуді бөліктеу* деп атайды. Берілген $C(6)$ және $D'(1)$ нүктелерін қосатын түзуді бөліктеу, яғни CD кесіндісінің табанын оның ұштарының сандық белгілерінің айырымына тең бөліктерге бөлу керек болсын (242, б-сурет). Осы мақсат үшін Фалес теоремасын пайдаланамыз. C' нүктесі арқылы түзу жүргізіп, оның бойына өзара тең кесінділер саламыз. Салынған кесінділердің ұштарын 5, 4, 3, 2 және 1 деп белгілеп, соңғы 1 нүктесін D' нүктесімен қосамыз. Бөліну нүктелері арқылы $1D'$ түзуіне параллель түзулер жүргізіледі (242, в-сурет). Сонда пайда болған проекцияның бөліктерін *интервал* деп атап, i әрпімен белгілейді. *Интервал белгілерінің айырымы бірге тең кесіндінің проекциясы*. Кесіндінің табанын $|a|$ деп, ал оның ұштарының белгілерінің айырымын $|b|$ деп белгілесек, интервал мынаған тең болады: $u = |a|/|b| = \operatorname{ctg} \alpha^\circ$. Интервалға кері шамапы *уклон* (еністік) деп атайды және уклонды i әрпімен белгілейді: $i = 1/u = |b|/|a| = \operatorname{tg} \alpha^\circ$. CD түзуінің интервалын анықтау үшін оның проекциясының ұзындығын масштабты пайдалана отырып өлшеу керек те, 5-ке бөлу керек.

Екі түзудің кеңістікте өзара қалай орналасқандығын олардың сандық белгілері бар проекцияларына қарап анықтауға болады. Егер екі түзудің проекциялары параллель, интервалдары тең және сандық белгілері бірдей бағытта кемитін (ұлғаятын) болса, онда бұл екі түзу кеңістікте параллель орналасады. 243, а-суреттегі AB және CD түзулері өзара параллель болады, өйткені $(AB) \parallel (CD)$; $|A'3| = |C'1|$ және олардың сандық белгілері бірдей бағытта кемиді.



243-сурет

Кеңістікте қиылысатын екі түзудің проекциялары да қиылысады және қиылысу нүктесінің сандық белгілері тең болады. 243, б-суреттегі EF және MN түзулерінің проекциялары қиылысады, ал қиылысу нүктесінің сандық белгісі EF түзуі үшін де, MN түзуі үшін де бірдей. Олай болса бұл екі түзу кеңістікте де қиылысады.

Айқас түзулердің проекциялары параллель орналасулары немесе қиылысуы мүмкін. Бірінші жағдайда олардың сандық белгілері әр түрлі бағытта кемиді, ал екінші жағдайда олардың қиылысу нүктесінің сандық белгілері өзара тең болмайды. Мысалы, 243, в-суреттегі KL және PQ түзулері айқас түзулер.

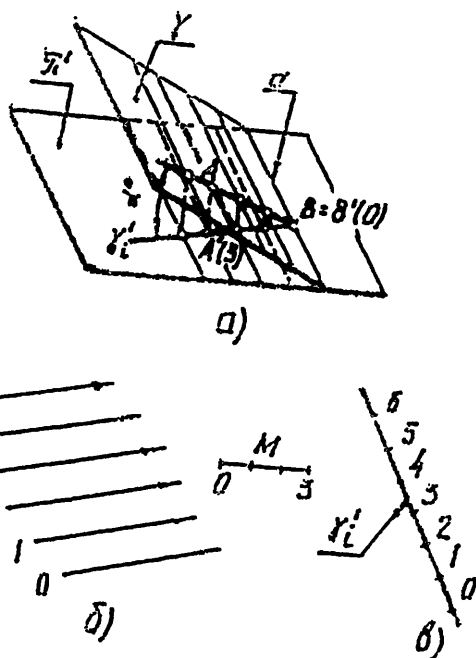
Проекциялар жазықтығы π' -қа α° -ге тең бұрыш жасап көлбейтін γ жазықтығын қарастыралық (244, а-сурет): $\gamma \cap \pi' = a$. Осы γ жазықтығында жатқан және π' пен γ жазықтықтарының қиылысу сызығы a -ға перпендикуляр AB түзуін жүргізелік: $(AB) \perp a$; $(AB) \subset \gamma$. A нүктесінің сандық белгісі 3-ке, ал B нүктесінің сандық белгісі 0-ге тең болсын. Сонда A нүктесі π' жазықтығына $A'(3)$ нүктесіне проекцияланады. AB түзуін γ жазықтығының ең үлкен көлбеу сызығы деп атайды, өйткені AB түзуінің π' жазықтығына көлбеулік бұрышы γ жазықтығының басқа түзулерінің барлығының да π' -қа көлбеулік бұрышынан үлкен: $\alpha^\circ = (AB), (\widehat{A'B})$. Оны γ жазықтығының құлама бұрышы, ең үлкен көлбеу сызығын құла-

ма сызық деп те атайды. Жазықтықтың сандық белгілерінің айырымы бірге тең және проекциялар жазықтығына параллель сызықтары оның *горизонтальдары* немесе *созылу сызықтары* деп аталады. Жазықтықтың горизонтальдары өзара параллель және ең үлкен көлбеу сызығына перпендикуляр орналасады.

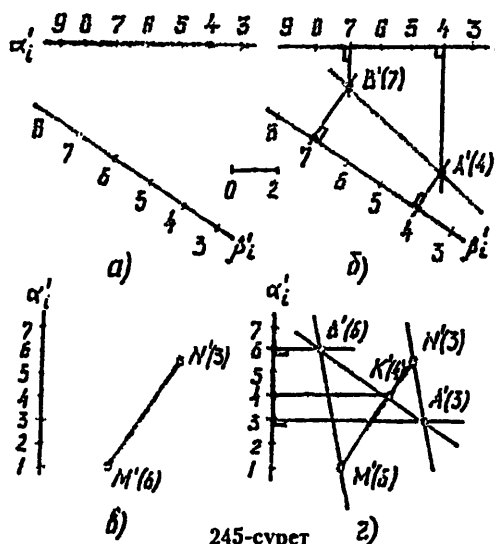
Сызбада жазықтық өзінің горизонтальдарының проекциялары арқылы беріледі (244, б-сурет). Горизонтальдардың

проекцияларының аралығы жазықтықтың интервалы болады. *Жазықтықтың интервалы оның ең үлкен көлбеу сызығының интервалына тең*. Интервалға бөлінген ең үлкен көлбеу сызықтың проекциясын *жазықтық уклонның масштабы* деп атайды. Біздегі γ жазықтығының уклонның масштабы γ' деп белгіленеді. Жазықтық сызбада уклонның масштабы арқылы да беріледі (244, в-сурет). Сонымен жазықтықты сандық белгілері бар проекцияларда горизонтальдарының проекцияларымен немесе уклонның масштабымен беруге болады.

Параллель жазықтықтардың құлама сызықтары өзара параллель, интервалдары тең және сандық белгілері бір бағытта өседі. 245, а-суретте уклондарының масштабтарымен α және β жазықтықтары берілген. Олардың қиылысу сызығын салу керек. Екі жазықтықтың қиылысу сызығы түзу сызық болатындықтан, оның екі нүктесін табу жеткілікті. Осы мақсат үшін жазықтықтардың сандық белгілері бірдей горизонтальдарын жүргізу керек. Жазықтықтың горизонтальдары оның уклонның масштабына перпендикуляр болатынын ескеріп белгілері 4-ке және 7-ге тең горизонтальдар жүргізілген (245, б-сурет). Олар $A'(4)$



244-сурет



245-сурет

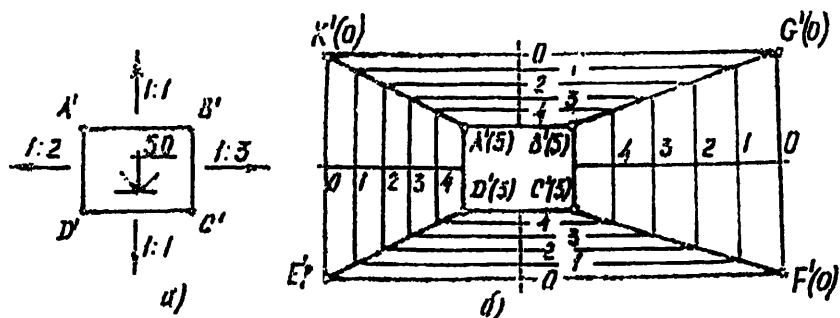
және $B'(7)$ нүктелерінде қиылысады. Сонда A және B нүктелері анықтайтын түзу берілген жазықтықтардың қиылысу сызығы болады.

Жазықтық пен түзудің қиылысу нүктесін салу да онша қиынға соқпайды. Эпюрдегі сияқты берілген түзу арқылы көмекші жазықтық жүргізіледі. Көмекші жазықтықтың берілген жазықтықпен қиылысу сызығы тұрғызылады. Сонда тұрғызылған қиылысу сызығы мен берілген түзудің қиы-

лысу нүктесі іздеп отырған нүктеміз болады. Мысалы, 245, в-суретте берілген α жазықтығымен MN түзуінің қиылысу нүктесін салалық. Берілген MN түзуі арқылы бірнеше жазықтық жүргізуге болады. Сондықтан $M'(6)$ және $N'(3)$ нүктелері арқылы параллель түзулер жүргізсек, оларды көмекші жазықтықтың горизонтальдары ретінде қарастыруға болады. Берілген α жазықтығының сандық белгілері 3 және 6 болатын горизонтальдарын жүргізіп, $A(3)$ және $B(6)$ нүктелерін аламыз. Сонда $(AB) \cap (MN) = K$ нүктесі алынады. Бұл нүктенің сандық белгісін табу үшін K нүктесінен α_i -ге перпендикуляр түсіреміз. $K(4)$ іздеп отырған нүктеміз: $K = (MN) \cap \alpha$.

Мысал. Проекциялар жазықтығында тұрған төрт бұрышты қиық пирамиданың проекциясын салуды аяқтау керек (246, а-сурет).

Қиық пирамиданың үстіңгі табаны — сандық белгісі 5-ке тең $ABCD$ тік төртбұрышы және бүйір жақтарының уклондары берілген. Қарама-қарсы жақтары $ABGK$ мен $CDEF$ -тердің уклондары 1:1, $ADEK$ жағының уклоны 1:2 және $BCFG$ жағының уклоны 1:3. Берілген қиық пирамида бүйір жақтарының интервалдарын оңай анықтауға болады. Интервал уклонға кері шама болғандықтан $ABGK$ мен $CDEF$ жақтарының интервалдары бірге, $ADEK$ жағының интервалы екіге және $BCFG$ жағының интервалы үшке тең. Бүйір жақтардың ең үлкен көлбеу сызықтарын $A'B'C'D'$ тік төртбұрышының қабырғаларына перпендикуляр жүргіземіз. Масштабты пайдаланып ең үлкен көлбеу сызықтарын интервалға (тең



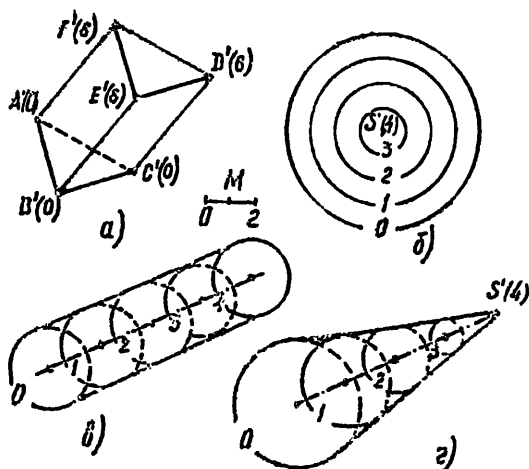
246-сурет

бөліктерге) бөліп, бөліну нүктелері арқылы жазықтықтардың горизонтальдарын жүргіземіз. Сандық белгілері тең горизонтальдардың қиылысу нүктелерін косу арқылы берілген қиық пирамиданың сандық белгілері бар проекциясын аламыз (246, б-сурет).

62. БЕТТЕРДІҢ САНДЫҚ БЕЛГІЛЕРІ БАР ПРОЕКЦИЯЛАРЫ. БЕТТЕРДІҢ ЖАЗЫҚТЫҚПЕН ЖӘНЕ ӨЗАРА ҚИЫЛЫСУЫ

Көп жақты беттер сандық белгілері бар проекцияда төбелерінің және қырларының проекциялары арқылы беріледі. Мысалы, 247, а-суретте төменгі табаны проекциялар жазықтығында, ал жоғарғы табаны проекциялар жазықтығынан 6 өлшем биік орналасқан үшбұрышты призма кескінделген.

Топографиялық беттерді проекциялау үшін оларды сандық белгілерінің айырымы бірге тең горизонталь жазықтықтармен қияды деп жоғарыда (§ 6) айтқан болатынбыз. Қимада пайда болған сызықтарды беттің горизонтальдары деп атағанбыз және олар проекциялар жазықтығына өздерінің натурал шамаларын сақтап, бұрмаланбай проекцияланатынын көрсеткенбіз. Горизонтальдардың жәрдемімен басқа



247-сурет

беттерді де кескіндеуге болады.

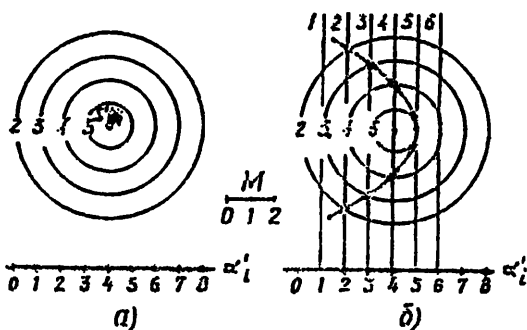
Мысал ретінде, 247, б-суретте айналудың конусы, 247, в-суретте қолбеу цилиндр және 247, г-суретте қолбеу конус кескінделген. Мұндағы айналудың конусының горизонтальдары өзара тең аралықтарда орналасқанын байқаймыз. Горизонтальдары өзара тең аралықтарда орналасқан беттерді бірдей қолбейтін беттер деп атайды. Сондықтан айналудың конусы бірдей қолбейтін беттердің мысалы бола алады.

Беттердің жазықтықпен қиылысу сызығын салуды қарастыралық. Қиылысу сызығы берілген бет пен жазықтықтың бірдей белгілері бар горизонтальдарының қиылысу нүктелерінің жиыны ретінде табылады.

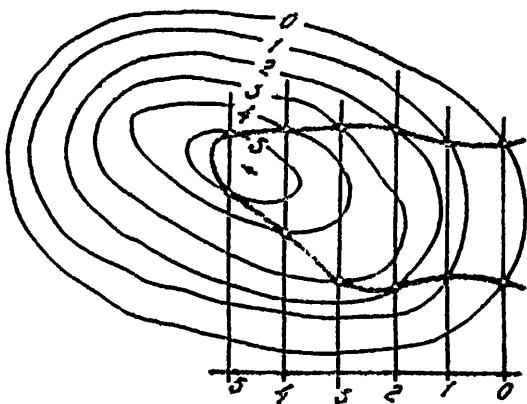
248, а-суретте кескінделген айналудың конусы мен α жазықтығының қиысу сызығын салу керек болсын. Берілген α жазықтығының горизонтальдарын жүргіземіз. Сандық белгілері тең конус пен жазықтықтың горизонтальдарының қиылысу нүктелерін белгілеп, оларды бастыра қисық сызық жүргіземіз (248, б-сурет). Мұнда үш жағдай болуы мүмкін: 1) конустың интервалы жазықтықтың интервалынан үлкен болса, қимада гиперболаның сызығын аламыз; 2) конус пен жазықтықтың интервалдары тең болса, қимада парабола қисығы шығады; 3) конустың интервалы жазықтықтың интервалынан кіші болса, қимада эллипс сызығы алынады.

248-суретте көрсетілген конус пен жазықтықтың интервалдары тең, сондықтан қиылысу сызығы парабола болады.

249-суретте горизонтальдары арқылы берілген топографиялық бетпен уклонның масштабымен берілген жазықтықтың қиылысу сызығын



248-сурет

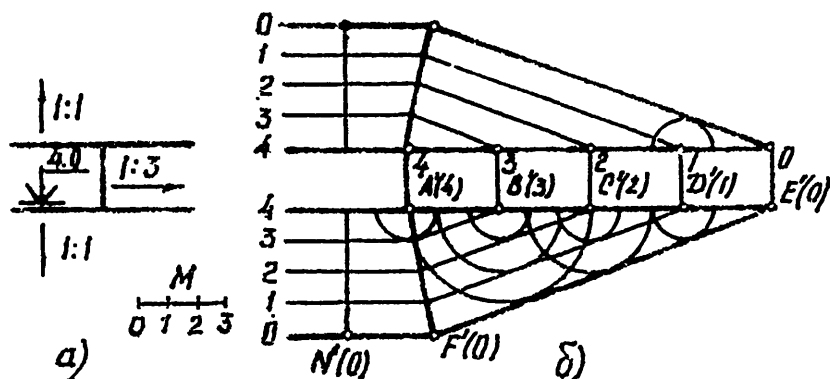


249-сурет

салу көрсетілген. Мұнда да жазықтықтың горизонтальдары жүргізіліп, олардың топографиялық беттің горизонтальдарымен қиылысу нүктелері табылған. Табылған нүктелерді бастыра кысық сызық жүргізілген.

Сандық белгілері бар проекцияларды жерден қазылып, немесе жерге үйіліп жасалатын инженерлік құрылыстарды кескіндеуде кең қолданады. Осындай құрылыстардың пішіндерін және істелетін жұмыстардың көлемін анықтауда үйінді және қазынды құламаларының жер бетімен қиылысу сызықтарын табады. Басқаша айтқанда, құлама беттерінің өзара қиылысу және топографиялық бетпен қиылысу сызықтарын салады. Екі мысал келтірелік.

1-мысал. Биіктігі төрт метр горизонталь алаңға көтерілетін жолдың горизонтальдарын, үйінді құламасының жермен (проекциялар жазықтығымен) қиылысу сызығын салу керек (250, а-сурет). Үйіндінің укло-



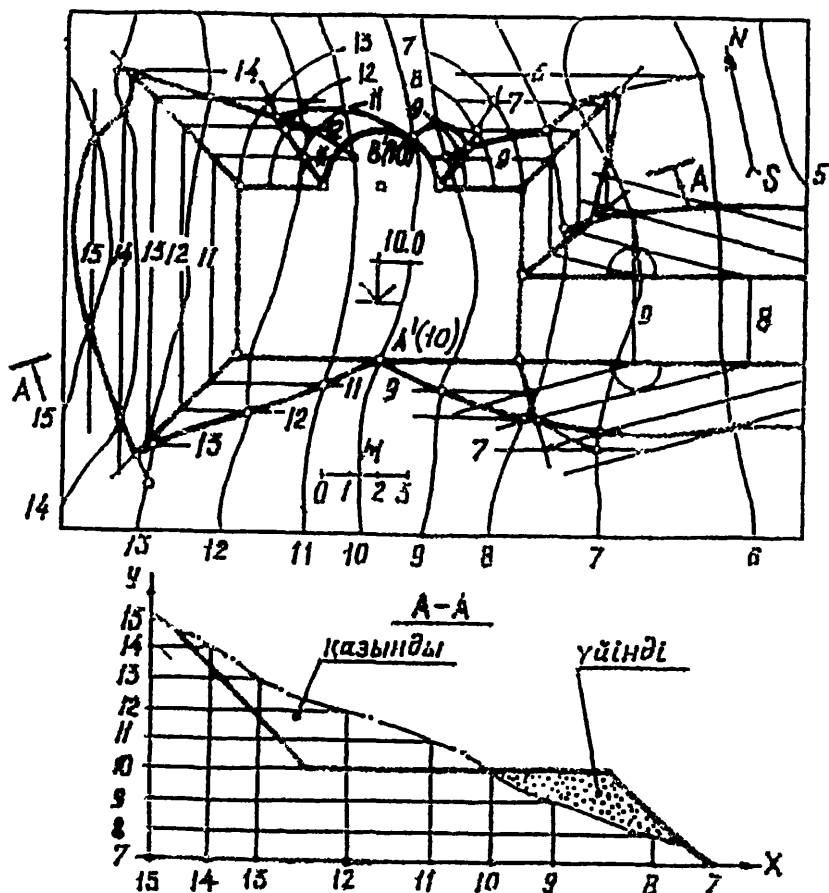
250-сурет

ны 1:1, ал жолдың уклоны 1:3. Осындай горизонталь орналасқан құрылыс алаңдарына көтерілген көлбеу жолды *аппарель* деп атайды. Үйіндінің интервалы бірге, аппарателдің интервалы үшке тең. Сандық белгілері 3-ке, 2-ге, 1-ге және 0-ге тең жолдың горизонтальдарын және құламаның горизонтальдарын жүргіземіз. Жолдың құламасын салу үшін центрі $D'(1)$ нүктесінде болатын радиусы бірге тең шеңбер, центрі $C'(2)$ нүктесінде болатын радиустары бірге және екіге тең екі шеңбер және центрі $B'(3)$ нүктесінде болатын радиустары бірге, екіге және үшке тең үш шеңбер жүргіземіз (250, б-сурет). Центрі $B'(3)$ радиусы үшке тең шеңберге $E'(0)$ нүктесінен жүргізілген жанама түзу центрі $C'(2)$ радиусы екіге тең және центрі $D'(1)$ радиусы бірге тең шеңберлерге де жанама болатынын дәлелдеу қиын емес. Сол сияқты центрі $B'(3)$ радиусы екіге тең және центрі $C'(2)$ радиусы бірге тең екі шеңберге ортақ жанама $D'(1)$

нүктесі арқылы өтеді. Төбелері $A'(4)$, $B'(3)$, $C'(2)$ және $D'(1)$ болатын конустардың сандық белгілері бірдей горизонтальдарына (шеңберлерге) жүргізілген жанамалар өзара параллель болады. Сондықтан жоғарыда айтылған шеңберлерді түгелдей жүргізіп жатудың керегі жоқ. Центрі $D'(1)$ нүктесі болатын радиусы бірге тең шеңбер жүргізіп, оған $E'(0)$ нүктесінен жанама жүргізсек болады. Осы жанамаға $D'(1)$, $C'(2)$, $B'(3)$ нүктелері арқылы параллель түзулер жүргізіледі. Сонда біз аппараттың құламасының горизонтальдарын аламыз. Алаң және аппараттың құламаларының сәйкес горизонтальдарының қиылысу нүктелері бір түзудің, (AF) -тың бойында жатады. Ал бұл түзу AF белгілері нөлге тең горизонтальдардың арасындағы бұрыштың, EFN -тың биссектрисасы болады. Аппараттың қисық болуы да мүмкін (жолдың бұрылыстары). Қисық аппараттың құламасын салуда қиынға соқпайды. Мұнда да айналу конустарын жүргізіп, олардың белгілері бірдей горизонтальдарына (шеңберлерге) ортақ жанама сызықтар жүргіземіз. Бұл жағдайда жанама сызықтар қисық сызықтар болады.

2-мысал. Тегіс емес жер беті горизонтальдардың көмегімен берілген. Осы жерге құрылыстар салу үшін белгісі 10 өлшем болатын горизонталь алаң және осы алаңға көтерілетін жол салу керек (251-сурет). Жолдың (аппараттың) интервалы үшке, ал қазынды мен үйіндінің интервалы бірге тең болсын.

Осындай горизонталь алаң жасау үшін жердің биік жағын қазу керек те, ой жағын қазылған топырақтарды төгу арқылы биіктету керек. Қазынды мен үйінді орнықты болу үшін олар тік жар жасамай тайпақ болулары тиіс. Сондықтан қазынды мен үйіндінің уклондарын тәжірибелердің нәтижесінде мамандар анықтап көрсетулері тиіс. Біз қазынды мен үйінді құламаларының өзара қиылысу және олардың жер бетімен қиылысу сызықтарын салуымыз керек. Берілген алаңның 10 -горизонтальмен қиылысу нүктелерін $A'(10)$ және $B'(10)$ табалық. Сонда осы нүктелердің батыс жағын қазып, босаған топырақты шығыс жағына төгіп жерді биіктету керек. Алаңның батыс жақ қабырғасына параллель түзулер жүргіземіз. Ол түзулердің аралықтары қазындының интервалы мен масштабтың көбейтіндісіне тең. Алаңның бұрыштары арқылы оның қабырғаларына 45° бұрыштар жасап көлбейтін түзулер (биссекторлар) жүргіземіз. Қазынды құламасының горизонтальдарымен алаңның сол жақтағы жоғарғы және төменгі төбелерінің биссекторларымен қиылысу нүктелері арқылы оның жоғарғы және төменгі қабырғаларына параллель түзулер жүргіземіз. Бұл түзулер алаңның оңтүстік пен солтүстік қазынды құламаларының горизонтальдарын кескіндейді. Дөңгелек алаңға тірелетін қазынды қиық конус бетімен шектеледі, ал қиық конус-



251-сурет

тың горизонтальдары берілген дөңгелекпен центрлес шеңберлер болады. Конустың жазықтықпен қиылу сызығын салуды 248-суретте көрсеткенбіз. Бұл жағдайда да конус бетімен құлама жазықтықтары парабола сызығы бойынша қиылысатынын айта кетелік. Сандық белгілері тең қазынды құламаларының және жердің (топографиялық беттің) горизонтальдарының қиылу нүктелерін тауып, оларды қисық сызықпен қосамыз. Алаңның $A'(10)$ және $B'(10)$ нүктелерінен басталатын шығыс бөлігіндегі үйінділердің және аппарельдің құламаларын салуды алдыңғы мысалда қарастырғанбыз.

Жердің (топографиялық беттің) вертикаль (проекциялар жазықтығына перпендикуляр) жазықтықпен қиылысу сызығын профиль деп атайды. Әр түрлі инженерлік есептерді іпешуде жердің профилін білу қажет болады. Мысал ретінде $A-A$ қимасын салып көрсетелік (251-сурет). Тік бұрышты координаттар жүйесін аламыз. Горизонталь орналасқан x өсіне жер горизонтальдарының, аланды, қазынды мен үйіндіні шектейтін сызықтардың қиюшы вертикаль жазықтықтың ізімен қиылысу нүктелерінің аралықтарына тең кесінділер саламыз. Вертикаль орналасқан y өсіне осы нүктелердің сандық белгілерінс тең кесінділер саламыз. Координаттары бойынша профильдің нүктелерін тауып, оларды бастыра сызық жүргіземіз. Профильді салуда горизонталь және вертикаль масштабтар әр түрлі болуы мүмкін.

Сандық белгілері бар проекциялар биіктігі ұзындығына және еніне қарағанда әлдеқайда кіші болатын заттарды кескіндеуде кең түрде қолданылады. Ол жер бетін, құрылыс алаңдарын, гидроузелдерді, каналдарды, аэродромдарды, темір жолдар мен тас жолдарды проекциялау үшін ең тиімді әдіс болады. Сандық белгілері бар проекциялар геология мен барлау және тау — кен ісінде де жиі пайдаланылады.

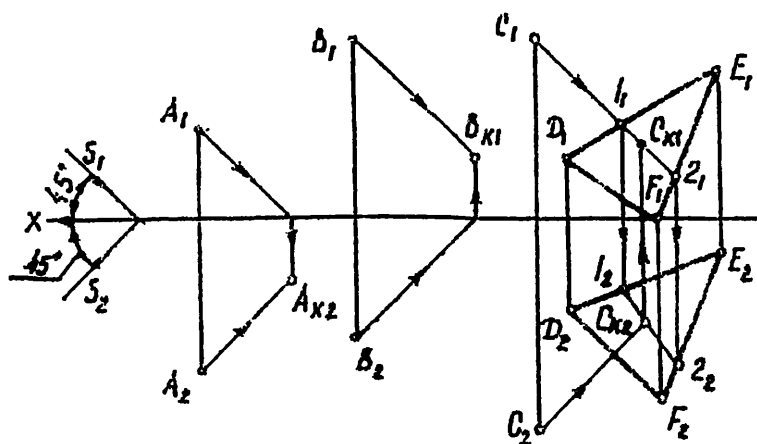
63. ЭПЮРДЕ КӨЛЕҢКЕЛЕРДІ САЛУ

Көлеңкелерді *өзіндік және құлама* деп екі топқа бөледі. Затқа жарық көзінен сәулелер түсірсек, ол заттың екінші беті күңгірт болатыны белгілі. Сонда заттың жарық түспеген бетінде көлеңке пайда болады. Осындай көлеңкені *өзіндік көлеңке* деп атайды. Ал енді осы заттан басқа бір заттын бетіне түсетін көлеңкені *құлама көлеңке* деп атайтын боламыз.

Жарық көзі қарапайым немесе шексіз қашықтықтағы нүктеде орналасуы мүмкін. Қарапайым нүктеде орналасқан жарық көзінен шығатын сәулелердің нәтижесінде алынатын көлеңкені *факельдық көлеңке*, ал шексіз қашықтықтағы нүктеден шығатын сәулелердің нәтижесінде алынатын көлеңкені күн көлеңкесі дейді.

Көбінесе жарық сәулелерін екі жағы горизонталь, екі жағы фронталь орналасқан кубтың (шаршының) диагоналіне параллель жүргізеді. Кубтың мұндай диагоналі ретінде оның алдыңғы жоғарғы сол жақтағы төбесін артқы төменгі оң жақтағы төбесімен қосатын диагоналі алынады. Сонда жарық сәулелерінің фронталь және горизонталь проекциялары x өсіне 45° бұрыш жасап көлбейді.

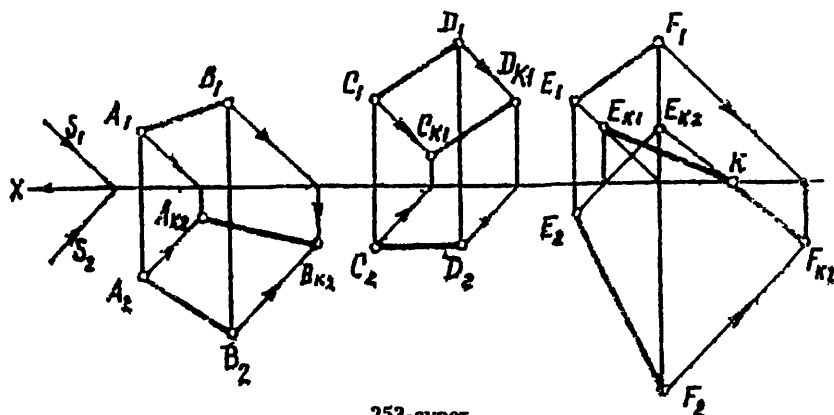
Нүктенің көлеңкесі осы нүкте арқылы жарық сәулесіне параллель етіп жүргізілген түзудің көлеңке түсетін бетпен қиылысу нүктесі түрінде табылады. 252-суретте A нүктесінен горизонталь проекциялар



252-сурет

жазықтығына, B нүктесінен фронталь проекциялар жазықтығына, C нүктесінен DEF үшбұрышына түскен көлеңкелер салынып көрсетілген.

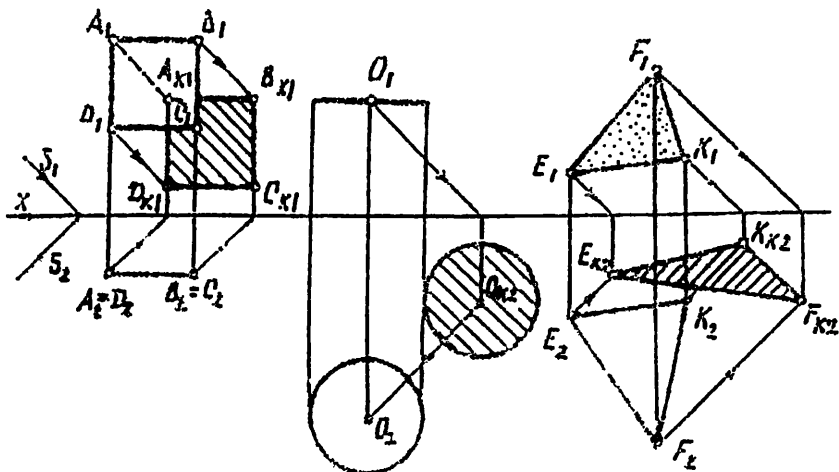
Түзу сызықтың көлеңкесі осы түзу арқылы жарық сәулесіне параллель етіп жүргізілген жазықтықтың көлеңке түсетін бетпен қиылысу сызығы ретінде салынады. 253-суретте AB кесіндісінен горизонталь проекциялар жазықтығына, ал CD кесіндісінен фронталь проекциялар жазықтығына түсетін көлеңкелерді салу көрсетілген. Егер кесінді проекциялар жазықтығына параллель болса, онда оның сол жазықтықтағы көлеңкесі, проекциясы кесіндінің өзіне тең болады. CD кесіндісі фронталь проекциялар жазықтығына параллель, сондықтан $|C_1D_1|=|C_{K1}D_{K1}|=$



253-сурет

$-|CD|$ болады. Кесіндінің ұштарынан түсетін көлеңкелер бір жазықтықта жатпаулары мүмкін. Егер EF кесіндісін қарастырсақ, оның F ұшынан көлеңке π_2 жазықтығына F_{K2} нүктесіне түседі, ал E ұшынан көлеңке π_1 жазықтығына E_{K1} нүктесіне түседі. Бұл жағдайда кесіндінің көлеңкесі сынық сызық болады. Көлеңкенің сыну нүктесін табу үшін былай істеуге болады. E нүктесінен горизонталь проекциялар жазықтығына түсетін жорамал көлеңке E_{K2} нүктесін тұрғызамыз. $E_{K2}F_{K2}$ кесіндісін жүргіземіз. Бұл кесінді x өсімен K нүктесінде қиылысады. Сонда көлеңкенің $[E_{K2}K]$ бөлігі жорамал болғандықтан үзілме сызықпен жүргізілген. K нүктесін E_{K1} нүктесімен қосамыз. EF кесіндісінен көлеңке жартылай горизонталь проекциялар жазықтығына, жартылай фронталь проекциялар жазықтығына түседі.

Жазық фигураның көлеңкесін салу үшін осы фигураны анықтайтын нүктелер мен сызықтардың көлеңкелерін тұрғызуымыз керек. Шаршы $ABCD$ -ның көлеңкесі (254-сурет) оның төбелерінің көлең-



254-сурет

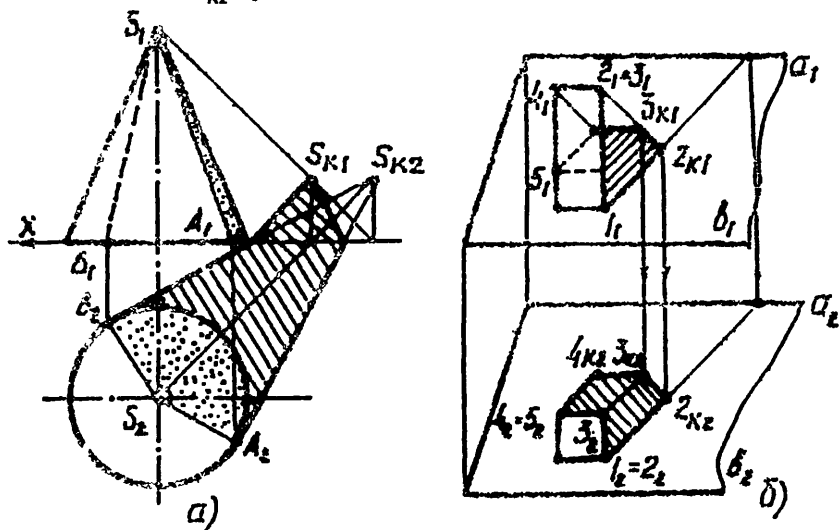
келері A_{K1} , B_{K1} , C_{K1} және D_{K1} бойынша салынады. Егер жазық фигура көлеңке түсетін жазықтыққа параллель болса, онда оның көлеңкесі осы фигураның өзіне тең болады. 254-суреттегі $ABCD$ шаршысы π_1 жазықтығына параллель, сондықтан оның көлеңкесі $A_{K1}B_{K1}C_{K1}D_{K1}$ берілген $ABCD$ -ға тең шаршы болады. Центрі O нүктесі, радиусы R -ге тең горизонталь проекциялар жазықтығына параллель дөңгелектің көлеңкесін

салу үшін, оның центрінің көлеңкесі O_{K2} нүктесін тауып, центрі осы O_{K2} нүктесі болагын радиусы R -ге тең дөңгелек жүргізсек болады.

Құлама көлеңке мен проекцияны айналып шығу бағыттары бірдей болса, онда біз проекцияда фигураның жарық түсіп тұрған бетін көреміз. Егер құлама көлеңке мен проекцияны айналып шығу бағыттары әртүрлі болса, онда біз проекцияда фигураның көлеңке бетін көреміз. 254-суретте EFK үшбұрышының көлеңкесі $E_{K2}F_{K2}K_{K2}$ тұрғызылған. Көлеңкені айналып шығу бағыты $E_{K2}F_{K2}K_{K2}$ сағат тілінің қозғалу бағытына қарсы. Біздің мысалымыздағы үшбұрыштың горизонталь проекциясын айналып шығу бағыты да $E_2F_2K_2$ сағат тілінің қозғалу бағытына қарсы, ал фронталь проекцияны айналып шығу бағыты $E_1F_1K_1$ сағат тілінің қозғалу бағытымен бірдей, сондықтан біз горизонталь проекцияда EFK үшбұрышының жарық бетін, ал фронталь проекцияда оның көлеңке бетін көреміз.

Құлама көлеңкені фигураның қиғаш бұрышты параллель проекциясы деп қарастыруға болады. Мұндағы проекциялаушы түзулер жарық сәулесіне параллель етіп жүргізілген объектіге жанамалардан құралады. Жанасу нүктелерінің жиыны өзіндік көлеңкені шектейді.

Айналу конусының көлеңкесін салу 255, а-суретте көрсетілген. Салудың тәртібі мынандай: конустың төбесінен горизонталь және фронталь проекциялар жазықтықтарына түсетін көлеңкелер S_{2K} және S_{K1} нүктелері салынады. Олардың біріншісі жорамал болатынын байқаймыз. Салынған S_{K2} нүктесінен конус табанының горизонталь проекция-



255-сурет

сына жанамалар жүргізу арқылы A_2 және B_2 нүктелерін аламыз. Осы жанамалардың x өсімен қиылысу нүктелерін S_K нүктесімен түзулердің кесінділері арқылы қосамыз. Сонда конустың құлама көлеңкесі шығады. $[AS]$ және $[BS]$ жасаушылары конустың өзіндік көлеңкесін шектейді. Бұдан біз құлама көлеңке өзіндік көлеңкенің проекциясы болатынын көреміз.

255, 6-суретте вертикаль орналасқан параллелепипедтен көлбеу жазықтық $\alpha(a||b)$ -ға түсетін көлеңке салынған. Өзіндік көлеңке 12345 сынық сызығымен шектеледі, ал құлама көлеңке осы сынық сызықтың проекциясымен шектеледі. Параллелепипедтің қырлары [12] және [45] горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр. Сондықтан олардан түсетін көлеңкелердің горизонталь проекциялары жарық сәулелерінің горизонталь проекцияларымен беттеседі, ал фронталь проекцияларын байланыс сызықтарының көмегімен анықтаймыз. Фронталь проекциялаушы [23] қырынан түсетін көлеңкенің фронталь проекциясы жарық сәулесінің фронталь проекциясымен бірігеді де, оның горизонталь проекциясы байланыс сызықтарының көмегімен салынады. Кесінді 34 көлеңке түсетін жазықтыққа параллель. Мұндай кесінділерден түсетін көлеңке сол кесінділердің өздеріне тең және параллель болады.

Көлеңке көбінесе сызба көрнекті және түсінікті болуы үшін салынады. Әр түрлі құрылыстардың архитектуралық жобаларын жасауда көлеңке салу өте кең түрде пайдаланылады. Көлеңкені салудың теориясын әр түрлі практикалық мазмұндағы ессиптерді шешу үшін де пайдаланады. Мысалы, бөлмелердің түрліше орналасқан жарық көздерінен түсетін сәулелерден жарықтау дәрежесін зерттеуде, кейбір құрылыстардың өлшемдерін олардың көлеңкелері бойынша анықтауда көлеңке теориясының маңызы зор.

Біз бұл параграфта көлеңкені эпюрге салуды ғана қарастырдық. Көлеңкені аксонометрияда, перспективада және сандық белгілері бар проекцияларда да салуға болады.

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН СҰРАҚТАР МЕН ЖАТТЫҒУЛАР

1. Сызықтық, панорамалық және күмбездік перспективалардың айырмашылықтары қандай?

2. Сызықтық перспективаның элементтерін атап, оларды сипаттаңыз. Картина, заттық жазықтық, қарау нүктесі, картинаның бас нүктесі, горизонт сызығы, картинаның табаны сияқты сызықтық перспективаның элементтеріне толығырақ тоқтаңыз.

3. Аралық, заттық және жорамал кесістіктер туралы айтып беріңіз. Аралық және жорамал кесістікте орналасқан фигуралардың перспективаларындағы ерекшеліктері қандай?

4. Түзудің тоғысу нүктесі деп қандай нүктені айтады? Параллель түзулердің перспективалары қалай орналасады?

5. Заттық жазықтыққа параллель (горизонталь) түзулердің және картина жазықтығына перпендикуляр түзулердің тоғысу нүктелері перспективада қалай орналасады?

6. Эпюрге берілген фигураның перспективасын қалай салуға болады? Қарау нүктесі мен картина жазықтығы берілген фигураға қарағанда қандай шарттарды қанағаттандыратындай болып орналасулары керек?

7. Төмендетілген планның (нұсқасызбаның) перспективасын қалай және неге салады?

8. Сандық белгілері бар проекцияларда кесіндінің ұзындығын және проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын қалай табады? Түзудің уклоны және интервалы туралы түсініктеме беріңіз.

9. Параллель, айқас және қиылысатын түзулерді сандық белгілері бар проекцияларына қарап қалай ажыратуға болады?

10. Сандық белгілері бар проекцияларда жазықтық қалай беріледі? Параллель жазықтықтардың уклондарының масштабтары қалай орналасады?

11. Жазықтықтардың қиылысу сызығын, жазықтық пен түзудің қиылысу нүктесін қалай салады?

12. Көп жақты және қисық беттер сандық белгілері бар проекцияларда қалай беріледі?

13. Беттердің жазықтықпен және өзара қиылысу сызықтарын қалай салады?

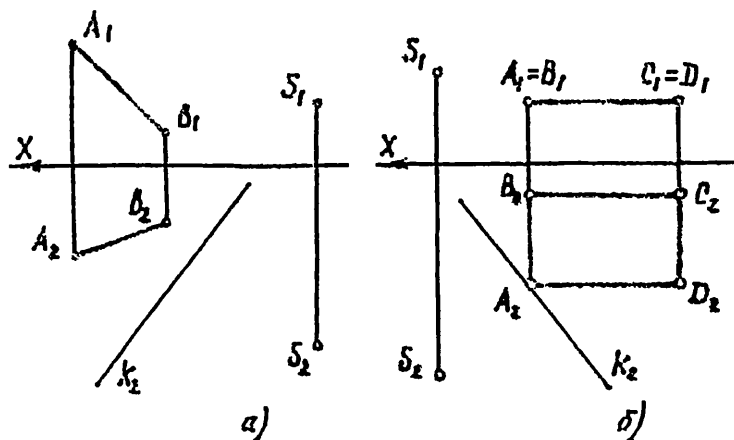
14. Қандай көлеңкелерді өзіндік және қандай көлеңкелерді құлама көлеңкелер деп атайды? Эпюрге көлеңкелерді қалай салады?

15. Кесіндінің және жазық фигураның жазықтықтағы көлеңкелері олардың өздеріне тең болуы үшін олар қалай орналасулары керек?

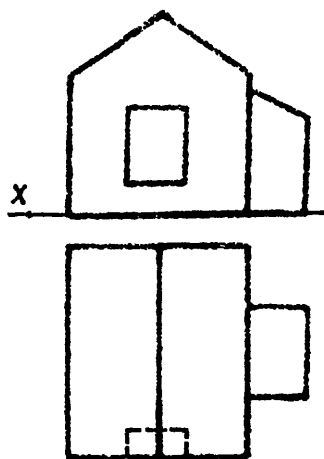
16. Өзіндік және құлама көлеңкелердің арасында қандай байланыс бар?

17. 256, а-суретте берілген AB кесіндінің перспективасын салыңыз. AB түзуінің ізін және тоғысу нүктелерін табыңыздар. Перспективада A нүктесі арқылы заттық жазықтыққа, ал B нүктесі арқылы картина жазықтығына перпендикуляр түзулер салыңыз.

18. 256, б-суретте берілген $ABCD$ тік төртбұрышының перспективасын салу керек.



256-сурет



257-сурет

19. 257-суретте эпюрге үй тәрізді көп жақты дене берілген. Картина жазықтығын және қарау нүктесін 60-параграфтағы үш шартты ескере отырып тағайындау және берілген дененің перспективасын салу керек.

20. 258-суретте A , B және C нүктелері берілген. 1) AB кесіндісінің ұзындығын және проекциялар жазықтығына көлбеулік бұрышын салу керек. 2) Берілген C нүктесі арқылы AB түзуіне

$\alpha(5)$

$A(2)$

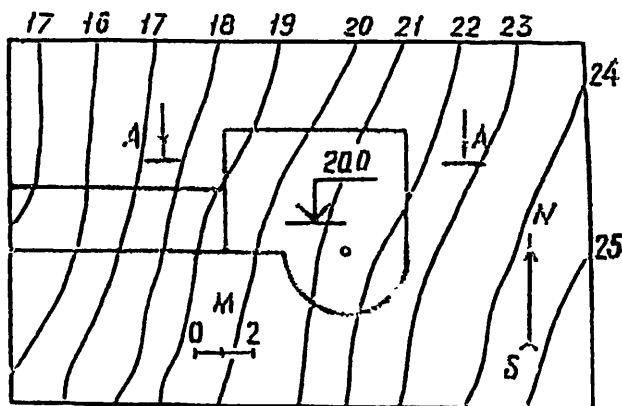
M
0 2 4

$C(3)$

258-сурет

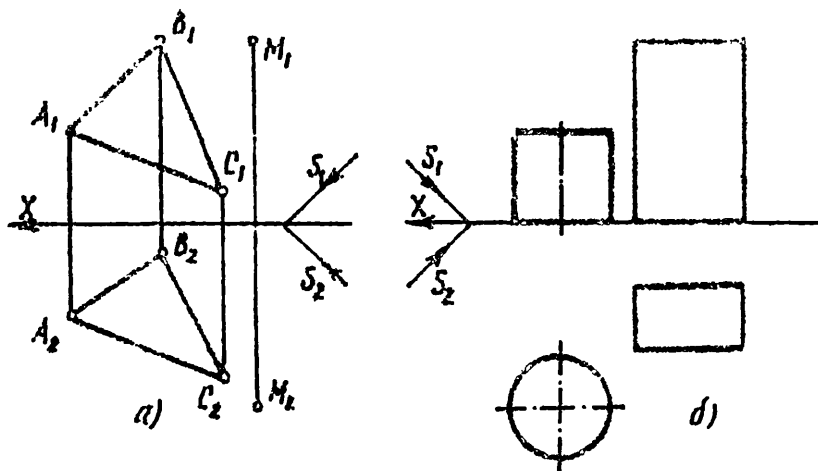
параллель түзу жүргізіп, оның уклонын және интервалын табу керек. 3) A , B және C нүктелері анықтайтын жазықтықтың горизонтальдарын жүргізу керек.

21. 259-суретте берілген жерге биіктігі 20 м болатын горизонталь алаңды және осы алаңға көтерілетін жолды дайындау керек. Қазындының уклоны $i=1:1$, үйіндінің уклоны $i=1:1,5$ және аппарельдің уклоны $i=1:3$. Көрсетілген $A-A$ профилін салу керек.


$$i_K = 1:1; \quad i_Y = 1:1,5; \quad i_a = 1:3$$

22. ABC үшбұрышынан проекциялар жазықтықтарына түсетін, ал M нүктесінен ABC үшбұрышына түсетін коленкелерді салу керек (260, а-сурет).

23. 260, 6-суретте берілген цилиндр мен параллелепипедтен проекциялар жазықтықтарына түсетін, цилиндрден параллелепипедке түсетін құлама коленцкелерді және цилиндрдің өзіндік көлеңкесін салу керек.



260-сурет

Оныпшы тарау

СЫЗБА ГЕОМЕТРИЯ ЕСЕПТЕРІНІ КОМПЬЮТЕРДІҢ КӨМЕГІМЕН ШЕШУ

64. ИНТЕРАКТИВТІК МАШИНАЛЫҚ ГРАФИКА ЖӘНЕ ОНЫҢ ТЕХНИКАЛЫҚ ҚҰРАЛДАРЫ ТУРАЛЫ ТҮСІНІК

1. Алғашқы компьютер бұдан 35—40 жылдай бұрын пайда болғанымен, ол өте тез дамыды. Бүгінгі күннің өзінде компьютерді пайдаланбайтын ғылымның, техниканың және өндірістің саласы жоқ деуге болады. Компьютерді инженер де, агроном да, мұғалім де, дәрігер де, сәулетші де, суретші де,... қолданады. Олар компьютердің көмегімен бұрын шешілмеген есептерді шешеді, ауылшаруашылық өнімін арттырады, сапасын жоғарылатады, аурудың түрін тез анықтайды, құрылыстарды жобалау барысын тездетеді. Сайып келгенде XX ғасырдың 90-жылдарынан жаңа дәуір басталды деуге болады. Осы жаңа дәуірді компьютердің дәуірі деп атауға толық дәлел бар.

Геометриялық және графикалық ақпаратты компьютерге кіргізу (түсіндіру), компьютердің көмегімен түрлендіру (есептеу) және сақтау, компьютерден есептеудің нәтижесін шығарып алу мәселелерімен шұғылданатын жаңа оқу пәнін *машиналық графика* деп атап жүр. Компьютермен бірге оған графикалық ақпаратты кіргізу және одан графикалық ақпаратты шығарып алу үшін керекті жабдықтар жатады. Осындай жабдықтар мен компьютердің жиынын машиналық графиканың техникалық құралдары дейді. Машиналық графиканың техникалық жабдықтарын дұрыс пайдалану, компьютерді басқару үшін математикалық заңдылықтарға сүйеніп программалар жасалады. Компьютерді тиімді пайдалануға мүмкіндік беретін программалардың жиынын машиналық графиканың программалық құралдары дейді. Программалық құралдың қатарына сызбаны да жатқызуға болады. Сызбаны пайдаланып жобалаушы компьютермен «әңгімелесе» алады. Машиналық графиканың жұмысын екі түрге ажыратады: пакеттік және интерактивтік режим. Пакеттік режимде кісі компьютердің жұмысына араласпайды, ол программа бойынша түрлі есептерді автоматты түрде шешеді және қорытындысын сызба түрінде орындайды. Интерактивтік режимде жобалаушы компьютермен «әңгімелесіп», оған қосымша нұсқаулар-ақпараттар енгізіп, оның жұмысын дұрыс жолға түсіріп отырады. Бұл режимде ақпаратты өңдеу, қабылдау, түрлендіру және оны компьютерден шығару жылдамдығы өте жоғары болуы керек. Қойылған сұраққа компьютер шамамен 10 с. ішінде жауап бергенде ғана диалог тиісті дәрежеде өтеді.

ні олар ақпаратты орналастыратын өте үлкен ес (память) керек етеді және сызбаны дайындау мен салуға арналған программаларда өте күрделі. Осы айтылғандарға байланысты көбіне графикалық ақпаратты жартылай автоматты кодылағыш (ГАЗАК) деп аталатын құрал пайдаланады. ГАЗАК тік төртбұрышты тақтадан және магниттік қарындаштан (МҚ) тұрады. Тік төртбұрышты тақтаның өлшемдері $A1$ пішімін орналастыруға мүмкіндік беретіндей болады. Тақтаның өзара тік бұрыш жасап, өте жиі орналасатын өткізгіштері (сымдары) болады. Олардың біреуі абсцисса өсінің, ал екіншісі ордината өсінің бағытын анықтайды. Горизонталь және вертикаль орналасқан өткізгіштердің қиылысу нүктелерінің координаттарын есептеуге (анықтауға) болады. МҚ-ты тақтаның бір нүктесіне тигізсек, ГАЗАК осы нүктенің координаттарын анықтайды және сәйкес байланыс каналдары арқылы компьютерге жеткізеді. Тақтаға сызба салынған қағазды бекітіп, сызбаның сызықтарын МҚ-пен жүргізеді. МҚ-пен жүргізілген сызба сызықтарын анықтайтын нүктелер жиынының координаттары есептеледі және олар компьютерге беріледі. Дисплейдің экранында осы сызық пайда болады. Өндірісте қолданылып жүрген ГАЗАКтар нүктенің координаттарын $0,1$ мм-ден кем болмайтын дәлдікпен есептей алады. Графикалық дисплейдің экранындағы кескінді түрлендіруге, ошіруге, өзгертуге болады дегенбіз. Ақырында экранда бізге керек кескін (сызба) алынады. Одан кейін осы сызбаның қағазға түсірілген көшірмелерін алуымыз керек. Осы мақсатта көбіне электромеханикалық сызбасалғыштарды қолданады. Электромеханикалық сызбасалғыштарды планшеттік және рулондық деп ажыратады. Планшеттік сызбасалғыш планшет деп аталатын тік төртбұрышты тақтадан тұрады. Осы тақтаға сызба салынатын қағаз бекітіледі. Планшеттің бір қабырғасына орналасқан, оның екінші қабырғасының бағытында қозғала алатын көлденең қимасы төртбұрыш болатын кішкентай бөренесі болады. Осы бөрене оны қуалай жылжи алатын 2...4 қалам қыстырылған арбашықпен жабдықталады. Егер бөрене горизонталь орналасса, онда оның қозғалысы нәтижесінде қалам вертикаль сызық сызады. Ал бөрене қозғалмай, оның бойымен арбашық қозғалғанда қалам горизонталь сызық сызады. Қисық сызық сызу үшін бөренеді, арбашықта қозғалулары керек. Рулондық сызбасалғышта планшет болмайды. Онда сызба салынатын қағаз барабанға бекітіледі, ал барабанды айналдырғанда онымен бірге қағазда қозғалады. Қаламдар бекітілген арбашық барабанның өсіне параллель орналасқан бөрененің бойымен қозғала алады. Сызбасалғышты тікелей компьютермен жалғастыруға болады (261-суреттегі үзілме сызықты қараңыз). Бірақ көбіне есептеудің нәтижесін, дисплейдің экранындағы графиктер мен сызба-

ларды салуға немесе басқа бір дисплейдің экранына кескіндеуге мүмкіндік беретін ақпаратты магниттік таспаға (МТ) жазып алу қолайлы. Осындай МТ-ны пайдаланып сызбасалғыштың көмегімен графиктерді, сызбаларды, схемаларды бірнеше дана етіп қағазға түсіруімізге болады.

Интерактивтік машиналық графикамен толығырақ танысу үшін осы тақырыпқа арналған кітаптарды оқуды ұсынамыз.

65. ИНТЕРАКТИВТІК МАШИНАЛЫҚ ГРАФИКАНЫҢ ПРОГРАММАЛЫҚ ҚҰРАЛДАРЫ

Есепті компьютердің көмегімен шешу үшін бастапқы деректерді және осы деректерді пайдаланып ізделініп отырған шаманы есептеу алгоритмдерін компьютер қабылдай алатын (түсінетін) түрдегі ақпаратқа түрлендіреді. Сызба геометрияда есептің бастапқы шартын анықтайтын деректер — нүктелер, түзу сызықтар, жазықтықтар, қисық сызықтар, қисық беттер және басқа да геометриялық фигуралар болады. Аталған геометриялық фигуралар туралы ақпаратты компьютерге кіргізу үшін оларды шектелген нүктелер жиынымен анықтау керек. Мысалы, белгілі бір бет қатын асатын есепті шешу үшін осы бет туралы мәліметті компьютерге түсіндіруіміз керек. Осы мақсатта беттің теңдеуін пайдалану тиісті нәтиже бермейді. Өйткені компьютердің есінде осы теңдеудің коэффициенттері туралы мағлұматты ғана сақтауға болады. Ал коэффициенттеріне қарап бетті компьютер құрастыра алмайды. Ол үшін бетке тиісті нүктенің координаттарын есептеу ережесін білу керек. Оның үстіне техникада кездесетін беттердің теңдеулерін анықтау көп жағдайда мүмкін болмайды. Сондықтан сызбада бетті оның дискретті қаңқасымен кескіндеу қолайлы. Әрине, қаңқа сызықтарын инженерлік тәжірибеге сүйеніп керек дәлдікті қамтамасыз ететіндей етіп орналастыру қажет. Кез келген геометриялық денені басқа фигураның туындысы болмайтын элементтерді пайдаланып сипаттауға болады. Осындай басқа фигураның туындысы болмайтын элементтердің жиынын сөздік деп атайды. Басқа фигураның туындысы болмайтын элементтерді пайдаланып жаңа геометриялық денелерді сипаттау ережелері мен алгоритмдерінің жиынын грамматика деп атайды. Ал берілген сөздік пен грамматиканы пайдаланып сипаттауға болатын фигуралардың (денелердің) жиынын тіл деп атайды. Бұл арада геометриялық денелерді сипаттауға мүмкіндік беретін тіл туралы әңгіме болып отыр. Сіздер жоғары сатылы алгоритмдік тілдер туралы білесіздер. Көп тараған алгоритмдік тілдерге алгол, кобол, ПЛ-1, бейсик, фокал, фортран, паскаль және т. б. жатады. Аталған тілдердің біреуін пайдаланып программалар да құра аласыздар. Бірақ оларды пайдаланып сызба геомет-

рияның есептерін шешу қиын. Геометрия мен графиканың талаптарына сай интерактивтік машиналық графиканың программалық құралдарын дайындауда жоғарыда аталған әмбебап алгоритмдік тілдерді негізге алып, оларды кеңейтеді. Осындай машиналық графикада қолданылып жүрген программалар пакетінің біразын аталық.

СМОГ (система математического обеспечения графического вывода) — ПЛ/1, фортран және ассемблер сияқты алгоритмдік тілдерді пайдаланып дайындалған программалардың пакеті (ПП). Ол не бәрі 22 оператордан тұрады, ал оның 14-і негізгі операторлар. Негізгі операторлардың параметрлері төртеуден аспайды. Сондықтан СМОГ-ты пайдалану қолайлы және түрлі сызықтардан тұратын сызбаларды салып, олардың өлшемдерін түсіруге және белгілер мен жазуларды түсіруге мүмкіндік береді. Қағазды пішімдерге бөлуге, сызбаны түрлендіруге (жазық параллель ығыстыруға, нүктеден немесе түзуден айналдыруға, масштабын өзгертуге) болады.

ФАП-КФ (формализованный аппарат геометрического моделирования на основе компилятора с языка фортран) — әмбебап алгоритмдік тіл фортранды кеңейту арқылы алынған, 200-ден астам геометриялық оператордан тұратын ПП. ФАП-КФ-ты пайдаланып сызықтарды, беттерді және басқа да геометриялық фигураларды сызуға, сызбаларды ығыстыруға, бұруға және біріктіруге болады. Оның операторларын пайдаланып геометриялық дене бетінің ауданын, инерция моменттерін, беттердің қиылысу сызықтарын, кимасын, проекциясын салуға болады. Берілген фигуралардың қалай орналасқанын анықтауға, қисықтар мен беттерді аппроксимациялауға және олардың жаймаларын салуға болады.

ГРАФСМ — кіші компьютерлерді (СМ-3, СМ-4) пайдаланатын жобалаушының автоматтандырылған жұмыс орнына (АРМ-С) арналған машиналық графиканың ПП. Оның түзу, доға, шеңбер, маркерлер сызатын, жазу жазатын программалары бар. Кескіндерді сегменттеуге және түрлендіруге болады. ГРАФСМ графикалық ақпаратты дисплейдің экранына кескіндеуге, сызбасалғышпен құрылыс сызбаларын салуға ыңғайлы. Ол ГРАФОР мен бірге пайдалануға бейімделген (ГРАФОР туралы кейінірек айтылады).

ГРАФАЛ — алгол тілінің негізінде машиналық графиканың процедураларын программалау комплексі. ГРАФАЛ процедураларын пайдаланып парақтың әр түрлі сызықтармен шектелген бөлігін штрихтау немесе экрандауға, графикалық объектілерді біріктіруге, осындай объектілермен жұмыс істеуге, үш өлшемді объектілердің түрлі проекцияларын

салуга және көрінбейтін сызықтарды өшіруге болады. Оның негізгі кемшілігі тек *CALCOMP* түріндегі сызбасалғышқа бағынбалған.

GKS — графикалық тамырлы жүйе. Оны дүние жүзілік стандарттау ұйымы (ISO) халықаралық графикалық стандарт ретінде қабылдаған. GKS сызбаны салу үшін нүктелер координаттарының тізбегі түріндегі жалпыланған примитивтерді пайдаланады. Машиналық графикада примитив деп ең кіші болынбайтын, басқа күрделі кескіндерді тұрғызуда қолданылатын графикалық элементті айтады. Примитивтерді геометриялық, символдық (маркерлер) және текстік деп ажыратады. Геометриялық примитивке нүктелер, түзу кесінділері, қисықтың доғалары, сынық сызықтар, беттің құрақтары жатады. Жалпыланған примитивте нүктелерді қосу тәсілдері көрсетіледі. сызықтардың түрін және жуандығын, қарыптар мен белгілердің өлшемдерін, жазу жолының бағытын, орналастыру тәртібін анықтайды. Кескінді сегменттеу кең түрде қолданылады. Әрбір сегмент бірнеше қарапайым примитивтерден тұрады.

Осындай графикалық паркеттерді пайдаланып күнделікті өмірде қолданылатын және әдейі дайындықты керек етпейтін программалау жүйелері де құрастырыла бастады. Мысалы, сызбаны дисплейдің экранына оңай кескіндеуге мүмкіндік беретін *AutoCAD* сияқты жүйелердің болашақта кең тарайтынына күмән жоқ.

66. ГРАФОР ТУРАЛЫ ТҮСІНІК ЖӘНЕ ОНЫҢ ПОДПРОГРАММАЛАРЫ

1. ГРАФОР — фортран тілінде жазылған күнделікті өмірде кең түрде қолданылып жүрген программалардың пакеті. Оны пайдаланып графиктерді, гистограммаларды, карталарды, геометриялық денелердің проекцияларын сызып түрліше геометриялық есептерді шешуге болады. Сызбада тіліктер мен кималарды штрихқауға, энжорді түрлендіруге және сызба геометрияның алгоритмдерін пайдаланып сызбадағы көрінетіндікті анықтауға мүмкіндік береді. Ол 400-ден астам подпрограммалардан тұрады.

Графор тілінде жазылған программа *GRINIT* подпрограммасынан басталып *GRFIN* подпрограммасымен аяқталуы тиіс. Өлшем бірлігін белгілеу үшін *MMS*, *CMS* және *INCIES* подпрограммаларының біреуімен пайдалануға болады. Олардың біріншісі өлшем бірлігін мм деп, екіншісі см деп, ал үшіншісі — дюйм деп тағайындайды. Егер программа аталған үш подпрограмманың біреуі де жазылмаған болса, онда автоматты түрде өлшем бірлігі см болып есептеледі.

Алдымен сызба орындалағын қағаздың бөлігін белгілеп алу қажет. Осындай тік төртбұрыштың өлшемдерін тағайындайтын подпрограмма

PAGE(XL, YL, NAME, N, J). Оның параметрлері: XL, YL — іріне сызба сызылатын тік төртбұрыштың ені мен биіктігі; NAME — атауы; N — атаудағы әріптердің саны; J=0 болса тік төртбұрыш сызылмайды, ал J=1 болса тік төртбұрыш сызылады. Егер программада PAGE подпрограммасы болмаса (жазылмаған болса), онда ГРАФОР-дың басқа подпрограммалары ескерілмейді, яғни компьютер оларды қабылдамайды. Қалам PAGE тағайындаған тік төртбұрыштың сол жақ төменгі бұрышында тұр деп есептеледі. Сондықтан бұл төртбұрыштың оң жақ жоғарғы бұрышының координаттары XL, YL болады. Қалам PAGE тағайындаған төртбұрыштан тыс шығып кетпейді. Сызбаның тағайындалған төртбұрыштан тыс орналасқан бөлігі болса, онда ол бөлік сызылмайды немесе сызба бұрмаланып қате сызылады. PAGE сызба салынатын бетті ашады дейді. Ашылған бетті жабу үшін ENDPG подпрограммасын пайдаланады. Сонда ГРАФОР-ды пайдаланып жазылған программаның құрамы мынадай болады:

```
CALL GRINIT
CALL MMS
CALL PAGE(XL, YL, NAME, N, J)
Программаның мазмұнды бөлігі
CALL ENDPG(NUMB)
CALL GRFIN
STOP
```

2. ГРАФОР-дың сызбалар сызуға арналған подпрограммаларын қарастыралық. Түзу сызықтарды MOVE және BROLIN подпрограммаларының біреуін, ал шеңберді және шеңбердің доғасын CIRC немесе ARCIB подпрограммаларының біреуін пайдаланып сызуға болады.

Подпрограмма MOVE(X, Y, J) қаламды оның тұрған нүктесінен координаттары X, Y болатын нүктеге көшіреді. Егер J=1 болса, онда қалам түсірілген, яғни ол қаламның тұрған нүктесін координаттары X, Y болатын нүктемен қосатын түзудің кесіндісін сызады. Егер J=0 болса, онда қалам түсірілмеген (көтеріліп тұр), яғни сызық сызылмайды.

Үзілме, үзілме нүктелі және үзілме қос нүктелі сызықтарды сызу үшін BROLIN(K, XS, YS, XF, YF, S1, S2) подпрограммасын пайдалануға болады. Подпрограммадағы K сызықтың түрін анықтайды.

K=1 болса үзілме сызық, K=2 болса үзілме нүктелі сызық және K=3 болса үзілме қос нүктелі сызық сызылады; XS, YS — сызықтың бастапқы ұшының координаттары; XF, YF — сызықтың ақырғы ұшының координаттары; S1 — үзік сызықтың ұзындығы; S2 — үзік сызықтардың ара қашықтығы.

CIRC(R) подпрограммасы центрі қалам тұрған нүкте және радиусы R болатын шеңбер сызады. Шеңберді сызып болғаннан кейін қалам центрге келіп тоқтайды. ARCIB(R, XF, YF, J) подпрограммасы қалам тұрған нүктені координаттары XF, YF болатын нүктемен радиусы |R|-ге тең шеңбердің доғасымен қосады. $R > 0$ болса қалам сағат тілінің қозғалысына қарсы бағытта, ал $R < 0$ болса сағат тілі қозғалысымен бағыттас қозғалады. $J = 0$ болса қысқа доға, $J = 1$ болса ұзын доға сызылады. Егер қалам тұрған нүктенің координаттары XF, YF болса, онда ARCIB шеңбер сызады. Қалам тұрған нүкте мен координаттары XF, YF болатын нүктенің ара қашықтығы $|2R|$ -ден көп болса, подпрограмма ARCIB орындалмайды.

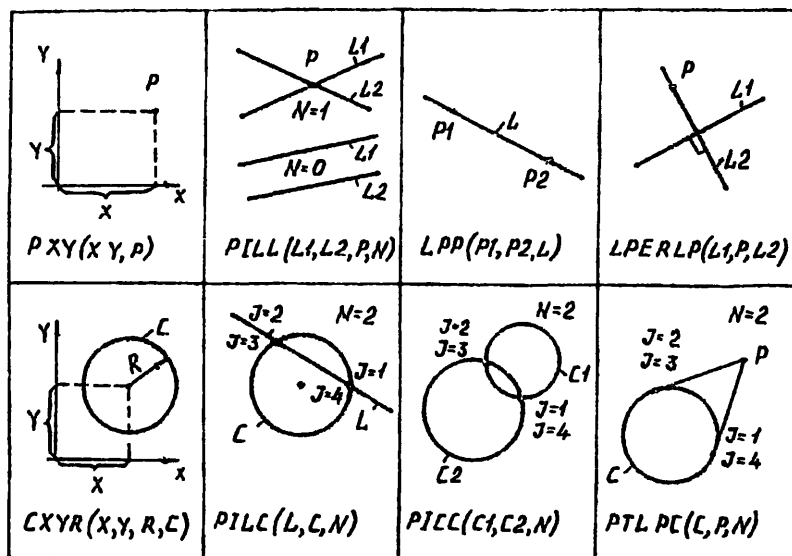
Сызбаны түрлендіруге мүмкіндік беретін подпрограммалар да бар. Сондай подпрограммалардың біреуін қарастыра кетелік. Сызбаны параллель ығыстыру TRANSL(DX, DY) подпрограммасының көмегімен іске асырылады. Ол координаттары X, Y болатын нүктені координаттары $X + DX$, $Y + DY$ болатын нүктеге түрлендіреді.

Берілген нүктелерді бастыра сынық сызық жүргізу үшін LINEO(X, Y, N) подпрограммасын пайдалануға болады. Мұндағы X, Y берілген нүктелердің абсциссаларынан және ординаталарынан тұратын массивтер; N — нүктелердің саны. LINEC(X, Y, N) подпрограммасы берілген нүктелерді бастыра түйық сызық сызады.

3. Берілген геометриялық ақпаратты пайдаланып түрлі есептеулерді жүзеге асыратын подпрограммалардың кейбіреуіне тоқталалық. Подпрограмма атының бірінші әріпі анықталатын геометриялық элементке сәйкес болады: P — нүкте; L — түзу; C — шеңбер. Мысалы, подпрограмманың аты PILC болса, онда былай талдау керек: P — подпрограммада нүкте анықталатынын көрсетеді; I — ол нүкте қиылысудың нәтижесі болатынын, ал қиылысуға L — түзу және C — шеңбер қатыналатынын көрсетеді. Подпрограмма CTLLP шеңберді анықтайды, ал ол шеңбер C берілген екі түзумен LL жанасады T және берілген нүкте P арқылы өтеді.

PXY(X, Y, P) — координаттары X және Y бойынша P нүктесін анықтайтын подпрограмма. PILI(L1, L2, P, N) берілген L1 және L2 түзулерінің қиылысу нүктесін (P) анықтайтын подпрограмма ($N = 0$ — берілген түзулер параллель орналасқанын, ал $N = 1$ — олардың бір нүктеде қиылысатынын көрсетеді). LPP(P1, P2, L) берілген P1 және P2 нүктелері арқылы өтетін L түзуін анықтайтын подпрограмма. LPERLP(L1, P, L2) — берілген P нүктесі арқылы өтетін және берілген L1 түзуіне перпендикуляр болатын L2 түзуін анықтайтын подпрограмма. CXYP(X, Y, R, C) подпрограммасы центрі (X, Y) нүктесінде орна-

ласқан және радиусы R болатын шеңберді анықтап, оны C деп белгілейді және компьютердің есінде сақтайды. $PILC(L, C, N)$ подпрограммасы түзу мен шеңбердің қиылысу нүктелерін анықтайды. Подпрограммадағы L берілген түзу, C берілген шеңбер, ал N қиылысу нүктелерінің саны. $N=0$ — түзу мен шеңбер қиылыспайды; $N=1$ — түзу берілген шеңберге жанама болады; $N=2$ — түзу мен шеңбер екі нүктеде қиылысады. Керекті шешімді $SORTP(I, P)$ подпрограммасының көмегімен таңдайды. $I=1$ — абсциссасы үлкен нүкте, $I=2$ абсциссасы кіші нүкте, $I=3$ — ординатасы үлкен және $I=4$ — ординатасы кіші нүкте таңдалады. $PICC(C1, C2, N)$ подпрограммасы берілген екі шеңбердің қиылысу нүктелерін анықтайды. Подпрограммадағы $C1$ және $C2$ берілген шеңберлер, ал N қиылысу нүктелерінің саны. $N=0$ — берілген шеңберлер қиылыспайды; $N=1$ — берілген шеңберлер жанасады; $N=2$ — берілген шеңберлер екі нүктеде қиылысады. Керекті шешімді $SORTP(I, P)$ подпрограммасының көмегімен таңдайды. Подпрограмма $PTLPC(C, P, N)$ берілген P нүктесінен берілген шеңберге (C) жүргізілген жанама мен сол шеңбердің жанасу нүктесін анықтайды. Егер берілген нүкте шеңбердің ішінде жатса, онда есептің шешімі болмайды $N=0$. Берілген нүкте шеңбердің бойында жатса есептің жалғыз шешімі болады ($N=1$), ал нүкте шеңбердің сыртында жатса есептің екі шешімі болады ($N=2$). Керекті шешімді $SORTP$ -ны пайдаланып таңдайды (262-сурет).



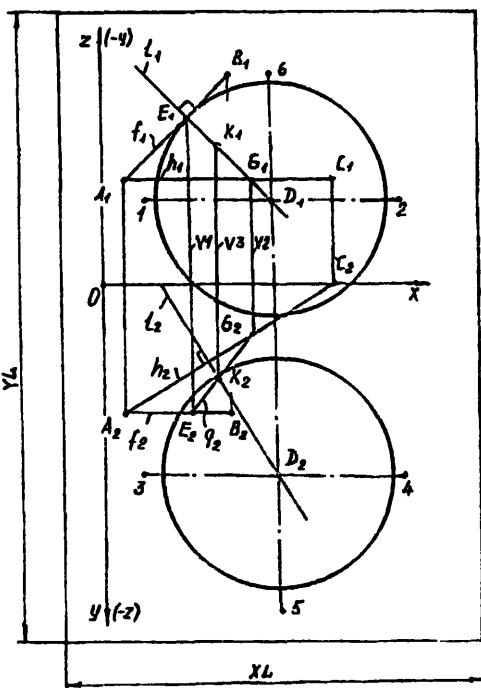
262-сурет

67. СЫЗБА ГЕОМЕТРИЯ ЕСЕПТЕРІН КОМПЬЮТЕРДІҢ КӨМЕГІМЕН ШЕШУГЕ АРНАЛҒАН ГРАФОР ТІЛІНДЕ ЖАЗЫЛҒАН ПРОГРАММАЛАРДЫ ҚҰРАСТЫРУДЫҢ МЫСАЛДАРЫ

Техникада кездесетін мәселелерді сызба геометрия есептеріне келтіруге болады. Компьютерді пайдалану үшін есептің шартын анықтайтын геометриялық фигураларды дискреттік ақпаратқа түрлендіріп алады. Одан кейін сызба геометрияның алгоритмдерін ескеріп программаларды құру қиын емес. Оқушылар фортран тілін пайдаланып, программалар жаза алады деп есептейміз.

1-мысал. $A(5; 30; 25)$, $B(30; 30; 50)$ және $C(55; 0; 25)$ нүктелері анықтайтын α жазықтығымен жанасатын, центрі $D(50; 45; 20)$ нүктесінде орналасқан сфераның фронталь және горизонталь проекцияларын салу керек.

Есепті графикалық әдіспен шешіп аламыз. Осы мақсатта A , B , C және D нүктелерінің эпюрдегі фронталь A_1 , B_1 , C_1 , D_1 және горизонталь A_2 , B_2 , C_2 , D_2 проекцияларын саламыз (263-сурет). AB және AC түзулерінің проекцияларына қарап олардың біріншісі фронталь, екіншісі горизонталь екенін көреміз. D нүктесінен α жазықтығына перпендикуляр түсіреміз: $DE \perp \alpha$. Осы перпендикулярдың α жазықтығымен қиылысу нүктесі K сфера мен α жазықтығының жанасу нүктесі болады. D және K нүктесінің арақашықтығын анықтасак, онда ол қашықтық ізделініп отырған сфераның радиусына тең болады: $R = |DK|$. Сонда сфераның фронталь проекциясы центрі D_1 нүктесі радиусы R болатын шеңбер, ал оның горизонталь проекциясы центрі D_2 нүктесі радиусы R болатын шеңбер болады. Енді программаны жазуға болады.



263-сурет

1 2 3 4 5 6 7

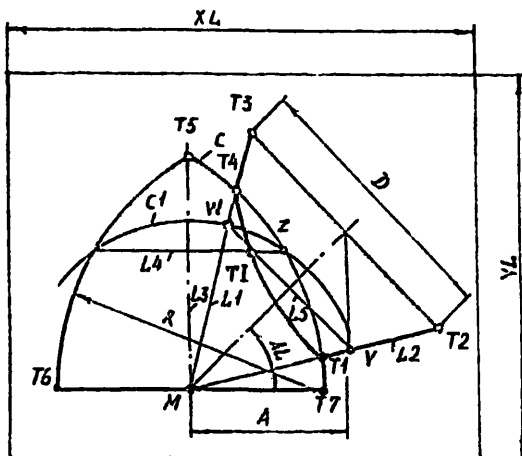
```

DATA X1|5|, Y1|30|, Z1|25|, X2|30|, Y2|30|, Z2|50|,
* X3|55|, Y3|0|, Z3|25|, X4|50|, Y4|45|, Z4|20|
REAL A1(2), A2(2), B1(2), B2(2), C1(2), C2(2), D1(2), D2(2),
* E1(2), E2(2), G1(2), G2(2), K1(2), K2(2), F1(3), F2(3), H1(3),
* H2(3), L1(3), L2(3), V1(3), V2(3), Q2(3), V3(3)
CALL GRINIT
CALL MMS
CALL PAGE (100., 150., 0, 0, 1)
CALL TRANSL (10., 95.)
CALL PXY(X1, Z1, A1)
CALL PXY(X1, -Y1, A2)
CALL PXY(X2, Z2, B1)
CALL PXY(X2, -Y2, B2)
CALL PXY(X3, Z3, C1)
CALL PXY(X3, -Y3, C2)
CALL PXY(X4, Z4, D1)
CALL PXY(X4, -Y4, D2)
CALL LPP (A1, B1, F1)
CALL LPP (A2, B2, F2)
CALL LPP (A1, C1, H1)
CALL LPP (A2, C2, H2)
CALL LPERLP (F1, D1, L1)
CALL LPERLP (H2, D2, L2)
CALL PILL(F1, L1, E1, N)
CALL PILL(H1, L1, G1, N)
CALL LPERLP(H1, E1, V1)
CALL LPERLP(H1, G1, V2)
CALL PILL(F2, V1, E2, N)
CALL PILL(H2, V2, G2, N)
CALL LPP(E2, G2, Q2)
CALL PILL(L2, Q2, K2, N)
CALL LPERLP(H1, K2, V3)
CALL PILL(L1, V3, K1, N)
R=SQRT((K1(1)-D(1))**2+(K2(2)-D2(2))**2+(K1(2)-D1(2))**2)
CALL MOVE(D1(1), D1(2), 0)
CALL CIRC(R)
CALL MOVE(D2(1), D2(2), 0)
CALL CIRC(R)
CALL BROLIN (2, X4-R-3., Z4, X4+R+3., Z4, 12., 2.)
CALL BROLIN (2, X4-R-3., -Y4, X4+R+3., -Y4, 12., 2.)
CALL BROLIN (2, X4, -Y4-R-3., X4, Z4+R+3., 12., 2.)
CALL ENDPG
CALL GRFIN
STOP
END

```

2-мысал. Тор және конус берілген. Тор радиусы R -ге тең шеңбер доғасын вертикаль өстен айналдырудың нәтижесінде алынған, ал конустың төбесі M айналу өсінде жатыр (264-сурет). Конустың табаны диаметрі D -ға тең шеңбер, ал оның өсі абсцисса өсіне AL бұрышымен көлбейді. Олардың симметрия жазықтығы фронталь орналасқан. Конус пен тордың қиылысу сызығын анықтап, олардың фронталь проекцияларын салу керек.

Сызбаны салу үшін $T1, T2, \dots, T7$ нүктелерінің координаттарын анықтап алуымыз керек. Одан кейін қиылысу сызығы тұрғызылады. Қиылысу сызығы $T1$ және $T4$ нүктелерін жалғастырады. Остері қиылысатын айналу беттерінің қиылысу сызығын салудағы ең тиімді әдіс көмекші бір центрден жүргізілетін сфералар әдісі болады. Геометриялық есептеулерге қатынасатын сызқтарды да белгілеп, оларды анықтап алуымыз керек. Сондай сызқтарға M нүктесін $T3$ нүктесімен қосатын $L1$ түзуі, $T2$ нүктесімен қосатын $L2$ түзуі, $T5$ нүктесімен қосатын $L3$ түзуі және центрі $T6$ нүктесінде орналасқан $T5$ және $T7$ нүктелері арқылы өтетін C шеңбері жатады. Қиылысу сызығында жатқан $T1$ нүктесін салу үшін центрі M нүктесінде орналасқан сфера жүргіземіз. Осы сфераның фронталь нұсқасы $C1$ шеңбері болады. Көмекші сфера және тор өстес айналу беттері болғандықтан олардың қиылысу сызығы шеңберлерге ажырайды. Сфера мен тордың қиылысу сызығы $L4$ түзуіне проекцияланады. Сондай-ақ сфера мен конуста өстес айналу беттері. Олардың қиылысу сызығы да шеңбер болады және ол шеңбер $L5$ түзуіне кескінделеді. Сонда $L4$ және $L5$ түзулері $T1$ нүктесінде қиылысады. Көмекші сфераларды $T1$ және $T4$ нүктелерінің аралығында жүргізуіміз керек. Осы аралықта 30 нүкте тауып, табылған нүктелер арқылы қисық сызқ жүргізелік. $C1$ шеңбері $L1$ түзуімен W нүктесінде, $L2$ түзуімен V нүктесінде және C шеңберімен Z нүктесінде қиылыссын. $L5$ түзуі W және V нүктелері арқылы өтеді, ал $L4$ түзуі Z нүктесі арқылы $L3$ түзуіне тік бұрыш жасап жүргізіледі. Енді программа жазалық.



264-сурет

Сызбаны салу үшін $T1, T2, \dots, T7$ нүктелерінің координаттарын анықтап алуымыз керек. Одан кейін қиылысу сызығы тұрғызылады. Қиылысу сызығы $T1$ және $T4$ нүктелерін жалғастырады. Остері қиылысатын айналу беттерінің қиылысу сызығын салудағы ең тиімді әдіс көмекші бір центрден жүргізілетін сфералар әдісі болады. Геометриялық есептеулерге қатынасатын сызқтарды да белгілеп, оларды анықтап алуымыз керек. Сондай сызқтарға M нүктесін $T3$ нүктесімен қосатын $L1$ түзуі, $T2$ нүктесімен қосатын $L2$ түзуі, $T5$ нүктесімен қосатын $L3$ түзуі және центрі $T6$ нүктесінде орналасқан $T5$ және $T7$ нүктелері арқылы өтетін C шеңбері жатады. Қиылысу сызығында жатқан $T1$ нүктесін салу үшін центрі M нүктесінде орналасқан сфера жүргіземіз. Осы сфераның фронталь нұсқасы $C1$ шеңбері болады. Көмекші сфера және тор өстес айналу беттері болғандықтан олардың қиылысу сызығы шеңберлерге ажырайды. Сфера мен тордың қиылысу сызығы $L4$ түзуіне проекцияланады. Сондай-ақ сфера мен конуста өстес айналу беттері. Олардың қиылысу сызығы да шеңбер болады және ол шеңбер $L5$ түзуіне кескінделеді. Сонда $L4$ және $L5$ түзулері $T1$ нүктесінде қиылысады. Көмекші сфераларды $T1$ және $T4$ нүктелерінің аралығында жүргізуіміз керек. Осы аралықта 30 нүкте тауып, табылған нүктелер арқылы қисық сызқ жүргізелік. $C1$ шеңбері $L1$ түзуімен W нүктесінде, $L2$ түзуімен V нүктесінде және C шеңберімен Z нүктесінде қиылыссын. $L5$ түзуі W және V нүктелері арқылы өтеді, ал $L4$ түзуі Z нүктесі арқылы $L3$ түзуіне тік бұрыш жасап жүргізіледі. Енді программа жазалық.

1 2 3 4 5 6 7

```

      REAL T1(2), T2(2), T3(2), T4(2), T5(2), W(2), V(2), Z(2),
      • L1(3), L2(3), L3(3), L4(3), L5(3), C(3), C1(3), X(30), Y(30)
      DATA A/35./, D/60./, R/60./, AL/45./
      CALL GRINIT
      CALL MMS
      XL=R/2+A+D/2+10.
      YL=A*TAN(AL)+D/2+40.
      CALL PAGE(XL, YL, KONSAR, 6, 1)
      CALL TRANSL(R/2+10., 15.)
      CALL KONSAR(35., 60., 60., 45.)
      CALL ENDPG
      CALL GRFIN
      STOP
      END
      SUBROUTINE KONSAR(A, D, R, AL)
      CALL PXI(0., 0., M)
      CALL PXI(A+D/2*SIN(AL), A*TAN(AL)-D/2*COS(AL), T2)
      CALL PXI(A-D/2*SIN(AL), A*TAN(AL)+D/2*COS(AL), T3)
      CALL LPP(M, T3, L1)
      CALL LPP(M, T2, L2)
      CALL LPARY(0., L3)
      CALL CXYP(-R/2, 0., R, C)
      CALL PILC(L2, C, N)
      CALL SORTP(1, T1)
      CALL PILC(L1, C, N)
      CALL SORTP(3, T4)
      CALL PILC(L3, C, N)
      CALL SORTP(3, T5)
      RMX=SQRT(T4(1)**2+T4(2)**2)
      RMN=SQRT(T1(1)**2+T1(2)**2)
      DR=(RMX-RMN)/30.
      DO I=1, 30
      CALL CXYP(0., 0., RMN, C1)
      CALL PILC(L1, C1, N)
      CALL SORTP(3, W)
      CALL PICC(C, C1, N)
      CALL SORTP(1, Z)
      CALL PILC(L2, C1, N)
      CALL SORTP(1, V)
      CALL LPP(W, V, L5)
      CALL LPERLP(L3, Z, L4)
      CALL PILL(L4, L5, TI, N)
      X(I)=TI(1)
      Y(I)=TI(2)
      RMN=RMN+DR
1 CONTINUE

```

```

CALL BROLIN(2, 0, 0., A+3., A*TAN(AL)+3., 12., 2.)
CALL BROLIN(2, T5(1), -3., T5(1), T5(2) '3., 12., 2.)
CALL MOVE(T1(1), T1(2), 0)
CALL MOVE(T2(1), T2(2), 1)
CALL MOVE(T3(1), T3(2), 1)
CALL MOVE(T4(1), T4(2), 1)
CALL ARCIB(R, T5(1), T5(2), 0)
CALL ARCIB(R, -R/2, 0., 0)
CALL MOVE(R/2, 0., 1)
CALL ARCIB(R, T1(1), T1(2), 0)
CALL LINEO(X, Y, 30)
RETURN
END

```

ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН СҰРАҚТАР МЕН ЖАТТЫҒУЛАР

1. Машиналық графика деп қандай оқу пәнін атайды және онда компьютерді қандай рәжимдерде пайдалануға болады?

2. Графикалық дисплейдің алфавиттік-цифрлық дисплейден қандай айырмашылығы бар? Сәуле қарынданы не үшін керек?

3. Графикалық ақпаратты жартылай автоматты кодылағыш (ГЛ-ЖАК) қалай жұмыс істейді? Магниттік қарындаш не үшін керек?

4. Электромеханикалық сызбасалғыштың негізгі бөліктерін атап, оның қандай түрлері болатыны туралы айтып беріңіз. Планшеттік және рулондық сызбасалғыштардың айырмашылықтары қандай?

5. 261-суретте интерактивтік машиналық графиканың шартты түрде ықшамдап кескінделген бөліктерін атап, олардың арасындағы байланысқа көңіл аударыңыз.

6. Интерактивтік машиналық графиканың программалық құралдары туралы айтып беріңіз. СМОГ, ФАП-КФ, ГРАФСМ, ГРАФАД, GKS және т. б. ПП-терің айырмашылығына тоқтап, ГРАФОР туралы айтып беріңіз.

7. ГРАФОР-дың негізгі подпрограммаларына түсініктер беріңіз. ГРАФОР-ды пайдаланып жазылған программаның құрамын көрсетіңіз.

8. Түзу (тұтас), үзілме, үзілме нүктелі сызықтарды, шеңберді, шеңбердің доғасын, сынық сызықты қандай подпрограммалар жүргізе алады? Сызбаны параллель ығыстыру үшін қандай подпрограмманы қолданады?

9. Геометриялық салу, есептеу жұмыстарын компьютердің көмегімен орындауға мүмкіндік беретін подпрограммаларды атаңыз. Координаталары бойынша нүктені анықтайтын, екі түзудің, түзу мен шеңбердің

және екі шеңбердің қиылысу нүктелерін анықтайтын подпрограммалар қалай жазылады?

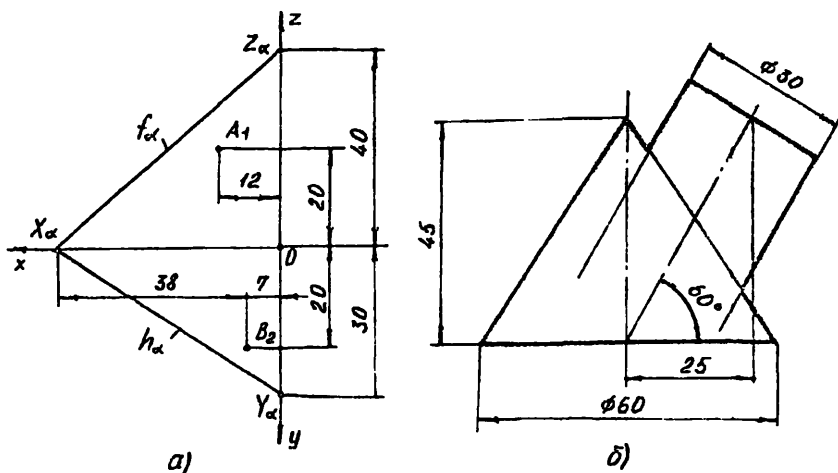
10. Екі нүкте арқылы өтетін түзуді, нүктені бастыра берілген түзуге перпендикуляр етіп жүргізілген түзуді және центрінің координаталары мен радиусы бойынша шеңберді анықтайтын подпрограммаларды жазып, олардың параметрлеріне түсініктер беріңіз.

11. $A(30; 40; 10)$ және $B(20; 20; 40)$ нүктелері берілген. Табаны AB кесіндісі болатын, төбесі абсцисса өсінде жататын тең бүйірлі ABC үшбұрышының фронталь және горизонталь проекцияларын салатын ГРАФОР тіліндегі программаны құру керек.

12. $A(5; 30; 25)$, $B(30; 30; 50)$ және $C(55; 0; 25)$ нүктелері берілген. Центрі C нүктесінде орналасқан және AB түзуі жанамаcы болатын сфераның фронталь және горизонталь нұсқамаларын сызатын программаны жазыңыз.

13. Іздерімен анықталған α жазықтығы, $A(A_1)$ және $B(B_2)$ нүктелері берілген (265, а-сурет). Берілген α жазықтығына перпендикуляр және онымен AB түзуі бойынша қиылысатын β жазықтығының іздерін тұрғызатын ГРАФОР тіліндегі программаны құрастырыңыздар.

14. Остері фронталь жазықтықта орналасқан конус пен цилиндрдің фронталь проекциялары берілген (265, б-сурет). Олардың қиылысу сызығын анықтайтын нүктелерін тауып, сызбаны сызбасалғыштың көмегімен сызатын программаны жазу керек.



265-сурет

Сызба геометрияның даму тарихынан

Сызба геометрия да, басқа ғылымдар сияқты, адамдардың практикалық өмірінен шыққан. Адамзат қоғамының дамуымен қатар сызба геометрия да дамыған. Өте ерте кезде пайда болған кескіндерлі салудың әр түрлі әдістері де көптеген өзгерістерге душар болды. Кеністік формаларының кескіндерін салудың жабайы әдістерінен әлдеқайда жетілдірілген әдістеріне көшіп отырды.

Проекциялық кескіндерді салу жайлы алғашқы мағлұматтар біздің дәуірімізге дейін белгілі болған. Антиқ дүниенің ұлы құрылыстарының сақталған қалдықтары, ол құрылыстарды салуда жоспарлармен қатар басқа да кескіндердің пайдаланылғанын көрсетеді. Бұл қарастырылып отырған ғылым саласындағы ертеде жазылған еңбекке біздің дәуірімізге дейінгі бірінші ғасырда жазылған рим архитекторы Марк Витрувийдің «Архитектура туралы 10 кітап» атты трактаты жатады. Осы кітаптан нәрселердің горизонталь және фронталь проекциялары туралы ұғымдарды табуға болады (олардың арасындағы проекциялық байланыс ескерілмеген). Сызбалардың басты нүктесі және көру нүктесі туралы ұғымдарды да осы кітаптан табуға болады.

Геометрия ғылымының дамуы ертедегі грек оқымыстылары Платон, Аристотель, Евклид, Архимед, Птоломей, Апполонийлердің еңбектерімен тығыз байланысты. Әсіресе Евклидтің «Негіздер» атты әйгілі еңбегінің, кейбір кемшіліктеріне қарамастан, әлі күнге дейін өзінің маңызын жоймағандығын айта кету керек.

Орта ғасырда ерте заманның классикалық мәдениеті араб елдерінде, әсіресе Орта Азия мен Қазақстанда, одан әрі қарай дамиы. Орта ғасырдың атақты архитектуралық ескерткіштерінің Орта Азия мен Қазақстан жерінде орналасуы, жоғарыда айтылғанға куә бола алады. IX ғасырдың аяғы мен X ғасырдың бас кезінде тұрғызылған Бұхара қаласындағы Исмаил Саманидің мавзолейі тек кірпішті ғана пайдаланып істелген өте әдсімі орнаменттерімен көз тартады. Мавзолей текше (куб) тәрізді етіп жасалып, күмбездеп жабылған. Бұл архитектураның тамаша туындысының пропорциялары өте дәл негізделген. 1397 жылы Түркістанда тұрғызылған Хожа Ахмед Яссавидің мавзолейі сол кезде салынған ең ірі құрылыс. Оның биіктігі 40 метрден, ауданы 3 000 шаршы метрден артығырақ. Онда 314 бөлме бар және оның орталық күмбезінің диаметрі 21 метрден асады. Самарқандтағы Гур-Эмир мавзолейі (XV ғ.), Регистан алаңындағы архитектуралық ансамбль (XV, XVII ғ.) көрген адамға ұмытпайтындай әсер қалдырады. Бұл құрылыстарды жасау жүздеген жылдарға созылғандығы белгілі. Сондықтан оларды жасау

кезінде сызбалар сызылып бұл сызбалардың ұрпақтан ұрпаққа беріліп отырғанына күмән келтіруге болмайды. Орта Азия мен Қазақстанның орта ғасырда мәдениеті алдыңғы қатарлы ел болғандығына дәлел болатын деректердің бірі мынау: XVII ғасырда Индияда тұрғызылған дүние жүзіне әйгілі Тадж-Махал мавзолейін салғанда оның күмбезін қалау жұмысына басшылық ету Самаркандтан әдейі шақырылған архитектор Шарифке тапсырылды.

Біздің жерлесіміз, Отырар қаласында туып, қыпшақ руынан шыққан Абунасыр Фараби (870—950) жоғарыда аталған грек оқымыстыларының геометриялық еңбектерін терең зерттеп, практикалық мақсаттар үшін кең түрде қолданған. Шығыстың Аристотелі атанған Фараби өзінің өртүрлі ғылымдар саласындағы еңбектерінде геометрияны кең пайдаланып, оны барлық ғылымдардың негізгі іргетасы ретінде қарастырған. Фараби өзінің күні бүгінге дейін жоғары бағаланып келген «Музыка туралы үлкен трактат» атты еңбегінде музыканың теориясын жасау үшін физика мен математиканы бір-бірімен ұштастыра отырып пайдаланады. Дыбыс интервалдарын тағайындауда үздіксіз пропорцияны пайдаланады, ал үздіксіз пропорцияны графикалық жолмен түсіндіреді. Фараби өзі тапқан музыкалық аспаптардың сызбаларын берген. Бұл сызбалар кононикалық ортогональ проекцияда және аксонометрияда орындалған. Абунасыр Фарабидің геометрия саласында дербес еңбектері де бар. Мысалы оның «Евклидтің бірінші және бесінші кітаптарының кіріспелеріндегі қиындықтарға түсінік» атты еңбегін атауға болады. Ол өзінің бұл еңбегінде негізгі геометриялық ұғымдарға материалистік тұрғыдан анықтамалар береді. Егер Евклид ең алдымен нүктеге, содан кейін сызыққа, содан кейін бетке, тек сонан соң ғана денеге анықтама беретін болса, ал Фараби бұған керісінше ең алдымен денеге, содан кейін бетке, содан кейін сызыққа, тек сонан соң ғана нүктеге анықтама берген дұрыс деп табады. Фараби денені сезімнің жәрдемімен анықтап, оған байланыссыз болатын нәрсе ретінде, бетті денелердің шекаралары, сызықты беттің шеті, ал нүктені сызықтың ұшы ретінде анықтайды.

Тәжіктің атакты математигі Абуль-Вафа Бузжанидің (940—998) «Қол өнершіге геометриялық салулардан не керектігі туралы» кітабының маңызы зор. Бұл кітап кіріспеден және 12 тараудан тұрады. Абуль-Вафа өзінің бұл еңбегінде маңызды көптеген геометриялық салуларды орындаған. Олардың ішінде Платонның дұрыс көпжақтарын салу және Архимедтің 13 жартылай дұрыс көпжақтарының бесеуі мен параболаны салудың екі әдісі келтірілген.

Өзбек халқының атақты ұлы Абурайхан Бируни (973–1057) өзінің көптеген ғылыми еңбектерінің арқасында даңқы дүние жүзіне әйгілі ғалымдардың бірі. Бирунидің сан алуан еңбектерінің ішінен біз тек скеуін ғана атамақпыз. «Масұғаттың кестелері» және «Өткен ұрпақтардың ескерткіштері». Бұл екі еңбектің біріншісінде ол геометрияны пайдаланып, Жердің шар тәрізді екендігін дәлелдейді. Триангуляция тәсілін пайдаланып, Бируни Жердің радиусын, ауданын және көлемін есептейді. «Откен ұрпақтардың ескерткіштері» атты еңбегінің бір бөлімі «Сфераны жазықтыққа кескіндеу және шок жұлдыздарды жазықтыққа проекциялау туралы трактат» деп аталады. Бұл еңбек сфераны жазықтыққа проекциялауға арналған. Бируни бұл мәселенің аспанды проекциялауда, астролябияларды конструкциялауда және жер бетін картаға түсіруде керектігін атап көрсетеді. Сфераның жазықтықтағы проекциясын стереографиялық проекция деп атайды. Стереографиялық проекция Гиппархқа (біздің эрамызға дейінгі 161–126 ж. ж.) белгілі болған. Бірақ Бируни бұл мәселені жан-жақты және терең зерттеу арқылы стереографиялық проекцияның көптеген жаңа түрлерін ұсынды.

Азербайжанның белгілі оқымыстысы Насреддин Тусидің (1201–1274) Евклидтің бесінші постулатын дәлелдеуге талпынған еңбектері параллель түзулер теориясын дамытты және Евклидтік емес геометриялардың пайда болуларына себепші болды. Ол қысықғы түзумен, жазық бетті қысық бетпен салыстыруға болатынын көрсетті. Насреддин Туси тербелмелі қозғалысты пайдалана отырып шеңберді түзулейді және цилиндрлік бет пен конустық беттердің жаймаларын салады.

Европада қайта өркендеу дәуірінде ғылым мен техника күшті қарқынмен дамиды. Архитектура мен живописьті дамытуда итальян оқымыстылары Леон Баттиста Альберти (1404–1472) және Леонардо да Винчи (1452–1519) бірталай еңбектер жасады. Осы аталған оқымыстыларға, тіпті қайта өркендеу дәуірін тұтас алғанда, жоғарыда қарастырылған Орта Азия мен Қазақстан ғалымдарының зор ықпалы болғандығын көреміз.

Француз геометрі Г. Монж (1746–1818) сызба геометрияның дамуында ерекше роль атқарды. Ол өз дәуіріне дейін жиналған практикалық тәжірибелер мен кеңістік пішіндерінің жазықтықтағы кескіндерін салу саласындағы теориялық білімдерді жинақтап, белгілі жүйеге келтірді. 1793 жылы оның «Сызба геометрия» деп аталатын алғашқы кітабы басылып шықты. Г. Монж екі проекциядан тұратын жазық сызбаны, өзара перпендикуляр екі проекциялар жазықтығының беттесуінің қорытындысы деп қарастыруды ұсынды. Ол проекциялар жазықтықтарын олардың қиылысу түзуінен айналдыру арқылы беттестірді.

Проекциялар жазықтықтарының қиылысу сызығын кейінірек проекция өсі деп атайды.

Сызба геометрияны проективтік геометрияның негізінде жазған австрия геометрі Винтер мен 1853 жылы аксонометрияның негізгі теоремасын тапқан неміс профессоры К. Польшенің (1810—1876) еңбектерінде сызба геометрия одан әрі қарай дамытылды. Ресейде бірінші рет сызба геометрия курсы 1810 жылдан бастап Санкт-Петербургтегі теміржол транспорт инженерлерін дайындайтын институтта оқылады. 1818 жылдан бастап бұл курсты орыс тілінде оқыған бірінші орыс профессоры Я. А. Севостьянов (1796—1849) болған. Одан кейін сызба геометрия курсын профессорлар Н. И. Макаров (1824—1904) пен В. И. Курдюмов (1853—1904) оқыған. Курдюмовтың «Сызба геометриясы» қазіргі кезге дейін кейбір бөліктері ескірмеген күрделі еңбек болып есептеледі. Атақты химик академик Н. С. Курнаков пен атақты кристаллограф академик Е. С. Федоровтың (1853—1919) еңбектерінде «көп өлшемді» сызба геометрияның негізі жасалған. Көп компонентті қоспалар мен ерітінділер системасын физика-химиялық зерттеулер кезінде кескін әдістерінің қолданылуына байланысты «көп өлшемді» сызба геометрия пайда болып, одан әрі тез дамыды.

Сызба геометрия саласындағы ғалымдарды дайындауға Н. Ф. Четверухиннің (1891—1974) қосқан үлесі мол. Оның көптеген еңбектерінің ішінде келісімді кескіндер туралы жаңа теория ерекше орын алады. Ол бұл еңбегінде кескіндерді зерттеудің параметрлік әдісін тауып, дәлелдеді. Н. Ф. Четверухин кескіндердің толықтығы туралы көптеген еңбектер жазды. Ол сызба геометрияны техникалық институттарда оқытудың педагогикалық және әдістемелік негізін қалады. Н. Ф. Четверухин өзінің докторлық диссертациясын 1941 жылы Алматы қаласында аяқтаған болатын.

Проективтік геометриядан қазақ тіліндегі студенттерге арналған алғашқы оқу құралын жазған Мыңбай Отежанұлы Исақов болатын. Оның «Проективтік геометриясы» екі бөлімнен тұратын. Бірінші бөлімі 1961 жылы, ал екінші бөлімі 1966 жылы жарық көрген еді. М. Ө. Исақов көп жылдар бойы Абай атындағы педагогикалық университетте доцент болып, мұғалімдер дайындау ісіне үлкен үлес қосқан ғалым. Проективтік геометрия саласында ғылыми еңбек жазып диссертация қорғаған Арон Хамидоллаұлы Наубетов (1930—1979) болатын. Ол Қазақ ауылшаруашылық институтында жоғары математика кафедрасының меңгерушісі болып біраз жұмыс істеп еді.

Сызба геометриядан қазақ тіліндегі студенттерге арналған алғашқы оқу құралын жазған осы оқулықтың авторы мен К. Қ. Қонақбаев бола-

тын. Олардың «Мектеп» баспасында 1968 жылы жарық көрген кітабы өте жоғары бағаланды. Сызба геометриядан қазақ тілінде жазылған екінші кітап 1971 жылы, ал үшінші кітап 1987 жылы басылып шықты. Бірақ, олар өте аз данамен көбейтілгендіктен кітапханаларда жоқ. Қазақстан республикасы тәуелсіз мемлекет болғаннан бері сызба геометрияның даму тарихында жаңа дәуір басталды.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Ю. М. Баяковский и др. Графор. Графическое расширение фортрана. — М.: «Наука», 1985.
2. Ж. М. Есмұханов, К. Қ. Қонақбаев. Сызба геометрия. — А.: «Мектеп», 1968.
3. Ж. М. Есмұханов. Сызба геометрия. — А.: «Мектеп», 1987.
4. Ж. М. Есмұханов. Сызба. Бірінші бөлім. — А.: «Мектеп», 1986. Екінші бөлім. — А.: «Рауан», 1990.
5. М. Исақов. Проективтік геометрия. Бірінші бөлім. — А.: Қазақтың мемлекеттік оқу-педагогика баспасы, 1961. Екінші бөлім. — А.: «Мектеп», 1966.
6. Курс начертательной геометрии на базе ЭВМ. Под ред. д-ра техн. наук, проф. А. М. Тевлина. — М.: «Высшая школа», 1983.
7. К. Қ. Қонақбаев. Сызба геометрия. — А.: «Мектеп», 1971.
8. Справочник по машинной графике в проектировании. Под редакцией В. Е. Михайленко и А. А. Лященко. — К.: «Будівельник», 1984.
9. С. А. Фролов. Начертательная геометрия. — М.: «Машиностроение», 1978.
10. Н. Ф. Четверухин и др. Начертательная геометрия. — М.: «Высшая школа», 1963.

МАЗМҰНЫ

АЛҒЫ СӨЗ	3
КІРІСПЕ	5
1. Сызба геометрия пәні	5
2. Центрілік проекциялау әдісі	6
3. Параллель проекциялау әдісі	8
4. Тік бұрыштап проекциялау әдісі	10
5. Қайтымдылық туралы түсінік	11
6. Қайтымды кескіндердің түрлері	13
Қайталауға арналған сұрақтар мен жаттығулар	18
Бірінші тарау	
АКСОНОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОЕКЦИЯЛАР	21
7. Аксонометрияның негізгі түсініктері мен анықтамалары	21
8. Аксонометрияның түрлері және оның негізгі теоремасы	22
9. Тік бұрышты аксонометрияның негізгі қасиеттері	24
10. Шеңбердің параллель проекциясы	26
11. Стандарт аксонометриялар	28
12. Аксонометриялық проекцияларды салу	35
Қайталауға арналған сұрақтар мен жаттығулар	40
Екінші тарау	
НҮКТЕНІҢ, ТҮЗУДІҢ	
ЖӘНЕ ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ЭПЮРІ	45
13. Октанттар және нүктенің эпюрі	45
14. Координаттарымен берілген нүктенің эпюрін салу	52
15. Нүктенің эпюріне қарап кеңістіктегі орнын анықтау	55
16. Түзудің эпюрі мен іздері	56
17. Дербес жағдай түзулері	59
18. Жазықтықтың эпюрі мен іздері	62
19. Дербес жағдай жазықтықтары	66
Қайталауға арналған сұрақтар мен жаттығулар	71
Үшінші тарау	
НҮКТЕЛЕРДІҢ, ТҮЗУЛЕРДІҢ ЖӘНЕ ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ	
ОРНАЛАСУЛАРЫ	74
20. Басекелес нүктелер. Эпюрге көрінетіндікті анықтау	74
21. Параллель, қиылысатын және айқас түзулердің эпюрлері	76
22. Жазықтықтағы түзулер мен нүктелер	78
23. Жалпы жағдай түзуі мен жазықтығының проекциялаушы жазықтықпен қиылысуы	82
24. Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін салу	84
25. Параллель жазықтықтарды және екі жазықтықтың қиылысу түзуін салу	87
26. Өзара перпендикуляр түзулер мен жазықтық	91
27. Өзара перпендикуляр жазықтықтар	95
Қайталауға арналған сұрақтар мен жаттығулар	96

Төртінші тарау

АРА ҚАШЫҚТЫҚТЫ ЖӘНЕ КӨЛБЕУЛІК БҰРЫШТЫ АНЫҚТАУ. ТЕНДЕУІМЕН БЕРІЛГЕН ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ЭПЮРІН САЛУ	99
28. Екі нүктенің ара қашықтығын және түзудің проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын анықтау	99
29. Нүктеден түзуге немесе жазықтыққа дейінгі қалыптықты анықтау	101
30. Жазықтықтың дөңгелек сызығы және проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштары	105
31. Тендеуімен берілген жазықтықтың эпюрін салу. Тендіздіктер жүйесімен анықталған көпжақ	108
Қайталауға арналған сұрақтар мен жауаптар	111

Бесінші тарау

ЭПЮРДІ ТҮРЛЕНДІРУ	114
32. Эпюрді түрлендіру туралы түсінік	114
33. Проекциялар жазықтығын алмастыру	114
34. Эпюрді түрлендіру арқылы шешілген негізгі төрт есеп	117
35. Проекциялаушы түзуден айналдыру	122
36. Дөңгелек түзуден айналдыру	127
37. Жазық параллель ығыстыру	129
38. Көмекші проекциялау	133
Қайталауға арналған сұрақтар мен жауаптар	137

Алтыншы тарау

ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТАР МЕН БЕТТЕР	141
39. Қисық сызықтар	141
40. Беттердің жасалуы туралы түсінік. Беттің анықтаушы және нұсқасы	145
41. Айналу беттері	149
42. Түзу сызықтық беттер	152
43. Бұрама беттер	156
44. Циклдік және топографиялық беттер туралы түсінік	158
45. Беттің тендеуін құру және тендеуімен берілген беттің эпюрін салу	161
Қайталауға арналған сұрақтар мен жауаптар	168

Жетінші тарау

БЕТТЕРДІҢ ЖАЗЫҚТЫҚПЕН ЖӘНЕ ТҮЗУ СЫЗЫҚПЕН ҚИЫЛЫСУЫ. ЖАНАМА ЖАЗЫҚТЫҚ. БЕТТЕРДІҢ ӨЗАРА ҚИЫЛЫСУЫ	171
46. Көп жақты беттердің жазықтықпен қиылысуы	171
47. Қисық беттердің жазықтықпен қиылысуы	173
48. Конустық қималар және кесілу сызығы	176
49. Беттердің түзу сызықпен қиылысуы	181
50. Беттерге жанاما жазықтықтар	183
51. Беттердің өзара қиылысу сызығын салудың жалпы әдісі	185
52. Беттердің қиылысу сызығын көмекші жазықтықтар әдісімен салу	186
53. Беттердің қиылысу сызығын көмекші сфералар әдісімен салу	190
54. Екінші ретті беттердің қиылысуындағы ерекше жағдайлар	194
Қайталауға арналған сұрақтар мен жауаптар	197

Сегізінші тарау

БЕТТЕРДІҢ ЖАЙМАЛАРЫ	201
55. Көп жақты беттердің жаймалары	201
56. Қисық бет жаймаларының негізгі қасиеттері	203
57. Жайылатын беттердің жаймалары	205

58. Жайылмайтын беттердің жаймалары	207
Қайталауға арналған сұрақтар мен жаттығулар	209
Тоғызыншы тарау	
СЫЗЫҚТЫҚ ПЕРСПЕКТИВА. САНДЫҚ БЕЛГІЛЕРІ	
БАР ПРОЕКЦИЯЛАР. КӨЛЕҢКЕЛЕРДІ САЛУ	212
59. Нүктенің және түзудің перспективасы	212
60. Перспективаны салу	216
61. Түзудің және жазықтықтың сандық белгілері бар проекциялары	223
62. Беттердің сандық белгілері бар проекциялары.	
Беттердің жазықтықпен және өзара қиылысуы	228
63. Эпюрге көлеңкелерді салу	233
Қайталауға арналған сұрақтар мен жаттығулар	237
Оныншы тарау	
СЫЗБА ГЕОМЕТРИЯ ЕСЕПТЕРІН	
КОМПЬЮТЕРДІҢ КӨМЕГІМЕН ШЕШУ	241
64. Интерактивтік машиналық графика және оның техникалық құралдары туралы түсінік	241
65. Интерактивтік машиналық графиканың программалық құралдары	244
66. ГРАФОР туралы түсінік және оның подпрограммалары	246
67. Сызба геометрия есептерін компьютердің көмегімен шешуіе арналған ГРАФОР тілінде жазылған программаларды құрастырудың мысалдары	250
Қайталауға арналған сұрақтар мен жаттығулар	254
Сызба геометрияның даму тарихынан	256
Әдебиеттер	260

Құрама жоспар 1998 ж.

Жанұзақ Мұхитұлы Есмұхан
Жем іс Жанұзаққызы Есмұханова

СЫЗБА ГЕОМЕТРИЯ

Жоғары оқу орындарының студенттеріне арналған оқулық

Редакторы

Т. О. Бекмағамбетова

Техникалық редакторы

С. П. Полтавец

Басуға қол қойылды 20.10 1998 ж.

Таралымы 500 дана. Пішімі 60×84. 1/16.

№ 1 типографиялық қағаз. Көлемі 16 оқу баспа табақ. Тапсырыс _____

Бағасы келісім бойынша.

Қазақ ұлттық техникалық университетінің басылымы, ҚазҰТУ-дың
баспа көбейту лабораториясы. Алматы қаласы, Сәтпаев көшесі, 22 үй.