

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН  
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

О.П. Волобуева

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ САУ

Утверждено Научно-методическим советом  
университета в качестве учебного пособия

АЛМАТЫ 1999

О.П.Волобуева. Исследование динамики САУ: Учеб.пособие.  
- Алматы: КазНТУ, 1999. 86 с. JSBN 9965-487-06-5.

Учебное пособие состоит из четырех глав, в которых рассматриваются вопросы математического описания динамических САУ в терминах “вход-выход” в виде передаточных функций и в пространстве состояний в виде дифференциальных уравнений в форме Коши, а также вопросы исследования свойств САУ.

В первой главе кратко представлены учебные материалы по разделам курса “Основы теории управления”.

Во второй главе помещены задания для контрольных работ по выделенным темам.

Третья глава содержит задания по курсовой работе; приведены краткие методические указания и рекомендуемая специальная литература.

В последней главе приведен достаточно подробный пример выполнения курсовой работы по одной из предлагаемых тем.

В приложение вынесена программа курса с библиографией.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей 37.02 - АСОИУ, 37.01 - ЭВМ, 37.04 - ПОС, 36.01 - АТМ, 36.03 - АТП и другие. Кроме того, им могут пользоваться специалисты по управлению техническими системами.

Ил.36. Табл.12. Библиогр.: 18 назв.

Рецензенты: А.Д.Джангозин, зам.нач.Алматинского технического института МВД РК, канд.техн.наук, доц.  
Ю.В.Шевяков, АИЭиС, канд. техн.наук, доц.

Печатается по плану издания Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан на 1999 год

Утверждено Научно-методическим советом университета в качестве учебного пособия (Протокол N 4 от 01.06.1998)

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Это учебно-методическое пособие родилось из стремления дать студентам заочного обучения, изучающим основы теории управления техническими системами, некоторый инструментарий в решении практических и научных задач.

Основной вопрос, который интересовал автора, состоял в том, чтобы показать, как использовать два математических аппарата (в терминах «вход - выход» и в пространстве состояний) для описания и исследования динамики САУ.

Что касается стиля этого пособия, то следует отметить, что автор старался найти наиболее целесообразный способ изложения материала с той целью, чтобы затем были четко поняты конкретные задания по курсовой и контрольным работам.

Предполагается, что студенты имеют представление об элементарных методах математического анализа, основных правилах дифференциального и интегрального исчисления и современной матричной алгебре.

В пособии основное внимание уделено устойчивости и качеству линейных и нелинейных САУ, что явилось основным предметом учебных материалов по разделам. При этом доказательства опущены.

Учебно-методическое пособие построено на достаточно-современном уровне.

Необходимо также отметить, что поскольку к настоящему времени имеется достаточно литературы по теории автоматического управления, то приведенная в конце пособия библиография ни в коей мере не носит исчерпывающий характер.

При работе над учебно-методическим пособием положительную роль сыграли обсуждения с Шукаевым Д.Н. и Бегдуллаевым К. Б. , которым автор выражает свою признательность. Автор благодарен также студентам Елеманову Т. и Айтмагамбетовой Л.С. , которые оказали большую помощь в подготовке рукописи.

## ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Современные автоматизированные системы представляют собой сложные технические комплексы, оснащенные различными автоматическими приборами и устройствами, в том числе с применением ЦВМ и микропроцессоров. Грамотная эксплуатация таких систем и устройств требует от инженера глубокого понимания принципа их действия, а также навыков анализа и исследования. Эти знания и навыки студенты приобретают при изучении дисциплины «Основы теории управления» (ОТУ).

Цель дисциплины - дать студентам знания об общих принципах построения, методах расчета и экспериментального исследования систем автоматического управления (САУ) и регулирования, об устройстве и принципах действия элементов автоматики, о методах анализа и синтеза систем управления на основе средств современной вычислительной техники.

Изучение этой дисциплины требует знаний ряда разделов из курсов «Высшая математика», «Физика», «Теоретические основы электротехники», «Электрические измерения», «Вычислительная техника и программирование» и др. ОТУ является одной из основных дисциплин для изучения курсов «Проектирование систем», «Модели и методы автоматизированного управления», «Моделирование систем» и др.

В результате изучения курса «Основы теории управления» студент должен знать основные понятия и принципы построения автоматических систем управления; принципы действия, конструкцию, параметры, методы расчета, динамические свойства и эксплуатационные особенности элементов автоматики; методы математического описания, анализа и синтеза автоматических систем, в том числе с ЦВМ в контуре управления; методы оптимизации структуры и параметров систем. Студенту необходимо научиться экспериментально и расчетным путем определять статические характеристики и передаточные функции элементов автоматики; составлять функциональную схему и математическую модель автоматической системы управления; изучить методы экспериментального определения временных и частотных характеристик системы; применять теоретические сведения для анализа устойчивости и качества конкретных систем.

Важное значение для усвоения курса имеет самостоятельное выполнение контрольных заданий и курсовой работы. Контрольные задания рекомендуется выполнять по частям после изучения соответствующих тем.

Следует отметить, что две контрольные работы включают решение 4-х задач из соответствующих тем. Правило выбора задач следующее:

студенты, у которых последняя цифра зачетной книжки является нечетной, выбирают задачи из тем 1,3,5,7; номер варианта задачи берется по последней цифре зачетной книжки. Например: последняя цифра зачетной книжки студента «9»; это означает, что студент выбирает из тем 1,3,5,7 девятый вариант задач. Если же последняя цифра зачетной книжки студента является четной цифрой, то он выбирает задачи из тем 2,4,6,8; вариант - также по последней цифре зачетной книжки. Выполненные контрольные работы следует направить на проверку на кафедру за две недели до сессии.

Курсовую работу рекомендуется выполнять в конце изучения курса. Работа оформляется в виде пояснительной записки с включением схем, расчетов, графиков и высылается для предварительной проверки на кафедру. Защита курсовой работы происходит в период лабораторно-экзаменационной сессии.

При выполнении лабораторных работ студенты получают навыки оценки работоспособности и настройки элементов автоматики и систем автоматического управления, знакомятся с приборами, необходимыми для снятия временных и частотных характеристик элементов и систем, исследуют влияние изменения параметров управляющего устройства на устойчивость и качество систем управления. После изучения курса студенты сдают экзамен, к которому они допускаются после защиты контрольных заданий, курсовой работы и выполнения лабораторных работ. На экзамене студент должен показать знания по всем разделам курсов и уметь решать задачи по анализу систем управления.

## 1. УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО РАЗДЕЛАМ

Основной учебный материал в пособии представлен семью разделами, задачи, по которым затем включены в контрольные работы.

В каждом разделе учебно-методического пособия даны основные формулы решения задач. Примеры решенных задач следует смотреть в сборниках задач по теории автоматического регулирования и управления [4],[5].

В данном пособии достаточно полно приведен пример курсовой работы, а именно : решение задачи синтеза двухконтурной нелинейной САУ по заданным показателям качества переходного процесса. Эта работа как составные части включает в себя решение многих типовых задач.

### 1.1. ПОЛУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ САУ

В соответствии с принятыми в теории регулирования и управления способами получают математическое описание САУ в виде дифференциальных, разностных, алгебраических и т.д. уравнений.

В данном разделе рассматривается получение математического описания корректирующего устройства , имеющего вид R-C-L - цепочек. Принципиальная схема корректирующего устройства и конструктивные параметры заданы.

Укрупненный алгоритм получения математического описания корректирующего устройства:

1) Выделить контуры R-C-L - цепочек.

2) Используя второй закон Кирхгофа, записать для каждого контура уравнения равновесия. Следует вспомнить, что падения напряжения на активном, индуктивном и емкостном сопротивлении равны  $i(t)R$ ,  $L \frac{di}{dt}$ ,

$\frac{1}{C} \int i(t) dt$  соответственно (R, L, C заданные постоянные конструктивные параметры устройства ).

3) Записать систему уравнений для контуров в операторной форме, используя прямое интегральное преобразование Лапласа.

4) Переписать систему уравнений, введя обозначения для коэффициентов перед неизвестными токами, через  $Z(s)$ . Например,  $Z(s)=(R_1 + L_2 S + \frac{1}{CS})$ .

5) Исключив из системы уравнений неизвестные переменные токи, получают передаточную функцию в виде :

$$W(S)=\frac{E_2(S)}{E_1(S)} .$$

6) Используя обратное преобразование Лапласа  $L^{-1}\{E_2(S)\} = L^{-1}\{W(S)E_1(S)\}$ , можно записать зависимость выходной координаты  $e_2(t)$  от входной  $e_1(t)$  и конструктивных параметров устройства.

Подробное решение задач такого типа приведено в [5, с.15-24, 38-39, 543-544]; [4, с.10-20]

**Пример.** Принципиальная схема корректирующего устройства имеет вид

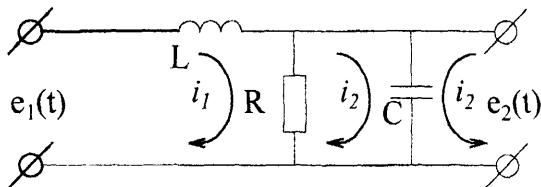


Рис. 1.1

Конструктивные параметры устройства считать постоянными и заданными.

Получить математическое описание устройства; за вход взять  $e_1(t)$ , за выход  $e_2(t)$ .

**Решение**

$$1) \begin{cases} L \frac{di_1}{dt} + i_1(t)R - i_2(t)R = e_1(t) \\ i_2(t)R + \frac{1}{C} \int i_2(t)dt - i_1(t)R = 0 \\ \frac{1}{C} \int i_2(t)dt = e_2(t) \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} E_1(s) = I_1(s)Ls + I_1(s)R - I_2(s)R \\ 0 = I_2(s)R + \frac{1}{Cs} I_2(s) - I_1(s)R \\ E_2(s) = \frac{1}{Cs} I_2(s) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} E_1(s) = I_1(s)(Ls + R) - I_2(s)R \\ 0 = I_2(s)(R + \frac{1}{cs}) - I_1(s)R \\ E_2(s) = \frac{1}{cs} I_2(s) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} E_1(s) = I_1(s)z_1(s) - I_2(s)z_2(s) \\ 0 = I_2(s)z_3(s) - I_1(s)z_2(s) \\ E_2(s) = I_2(s)z_4(s), \end{cases}$$

где  $z_1(s) = Ls + R$ ;  $z_2(s) = R$ ;  $z_3(s) = R + \frac{1}{cs}$ ;  $z_4(s) = \frac{1}{cs}$ .

5) Выразим  $I_1(s)$  через  $I_2(s)$  из второго выражения и подставим в первое и второе выражения:

$$I_1(s) = I_2(s) \frac{z_3(s)}{z_2(s)}$$

$$\begin{cases} E_1(s) = I_2(s) \left( \frac{z_1(s)z_3(s)}{z_2(s)} - z_2(s) \right) \\ E_2(s) = I_2(s)z_4(s) \end{cases}$$

$$W(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{I_2(s)z_4(s)z_3(s)}{I_2(s)(z_1(s)z_3(s) - z_2^2(s))}.$$

$$6) E_2(s) = W(s) E_1(s)$$

$$E_2(s) = \frac{z_4(s)z_3(s)}{z_1(s)z_3(s) - z_2^2(s)} E_1(s).$$

$$E_2(s) = \frac{\frac{1}{cs}R}{(Ls + R)(R + \frac{1}{cs}) - R^2} E_1(s).$$

$$\{(Ls + R)(R + \frac{1}{cs}) - R^2\} E_2(s) = \frac{1}{cs} R E_1(s)$$

$$\{LsR + \frac{1}{c}L + \frac{1}{cs}R\} E_2(s) = \frac{1}{cs} R E_1(s)$$

$$L^{-1} \{ (Ls^2R + \frac{1}{c}Ls + \frac{1}{c}R) E_2(s) \} = L^{-1} \{ \frac{R}{c} E_1(s) \}$$

$$LR \frac{d^2 e_2}{dt^2} + \frac{L}{c} \frac{d^2 e_2}{dt^2} + \frac{R}{c} e_2(t) = \frac{R}{c} e_1(t)$$

$$Lc \frac{d^3 e_2}{dt^3} + \frac{L}{R} \frac{d^2 e_2}{dt^2} + e_2(t) = e_1(t)$$

$$a_0 \frac{d^3 e_2}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 e_2}{dt^2} + e_2(t) = e_1(t),$$

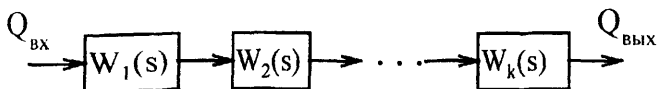
$$\text{где } a_0 = Lc; a_1 = \frac{L}{R}.$$

## 1.2 АЛГЕБРА СТРУКТУРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Пользуясь правилами структурных преобразований, можно любую систему автоматического регулирования привести к расчетному виду, исключаящему перекрестные связи и позволяющему получить передаточные функции разомкнутых и замкнутых систем регулирования. Следует отметить, что в данном разделе рассматриваются структурные преобразования только линейных САУ.

### Основные правила

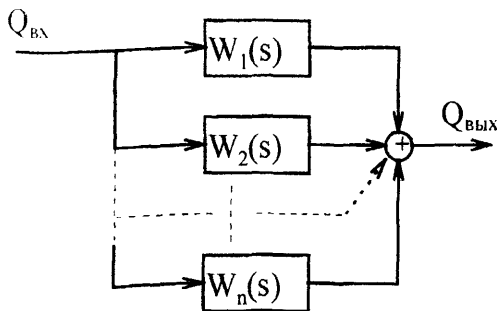
1)



$$W(s) = \prod_{i=1}^k W_i(s)$$

Рис. 1.2

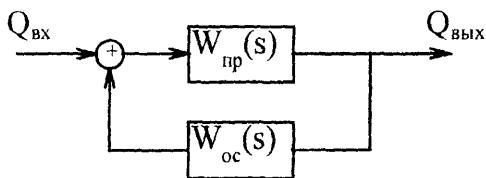
2)



$$W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s)$$

Рис. 1.3

3)



$$W(s) = \frac{W_{пр}(s)}{1 \pm W_{пр}(s)W_{ос}(s)}$$

Рис.1.4

**Примечание:** знак плюс ставится, если отрицательная обратная связь; знак минус, если положительная.

4) Перенос узла через звено:

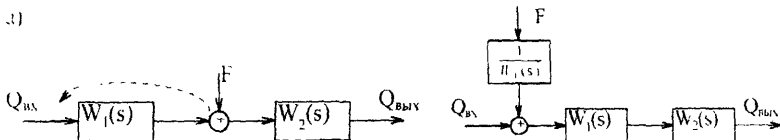


Рис.1.5

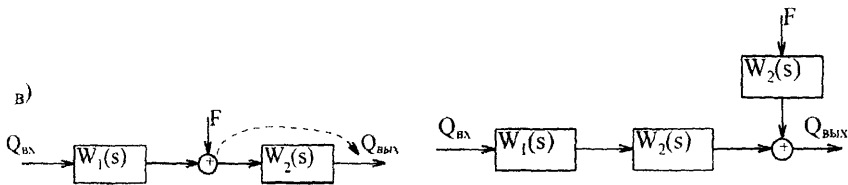


Рис.1.6

5) Перенос точки ветвления:

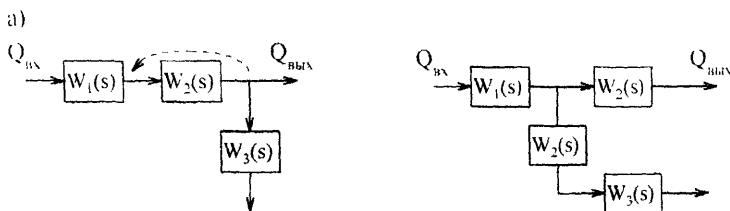


Рис. 1.7

В)

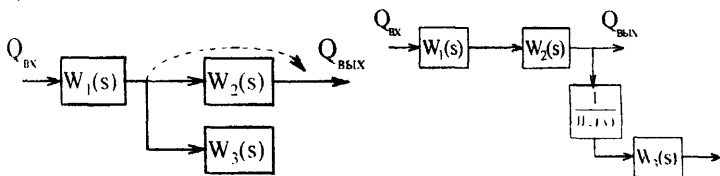


Рис.1.8

Более подробно можно посмотреть в [5, с.162-171; приложение 1, с.516]; [4, с.25-36].

**Пример.** Задана структурная схема следующего вида :

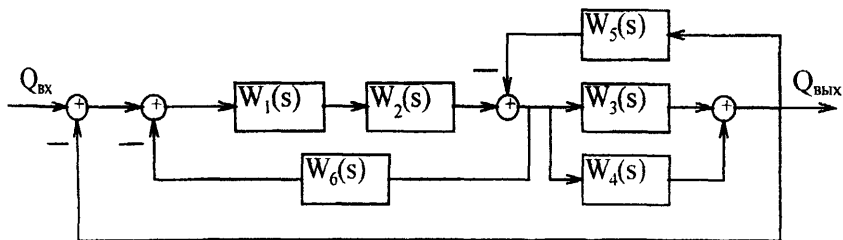


Рис. 1.9

Получить передаточную функцию системы, если передаточные функции отдельных звеньев заданы  $W_1(s) \div W_6(s)$ .

**Решение**

1)  $W_7(s) = W_3(s) + W_4(s)$

2)  $W_8(s) = W_1(s) W_2(s)$

3)

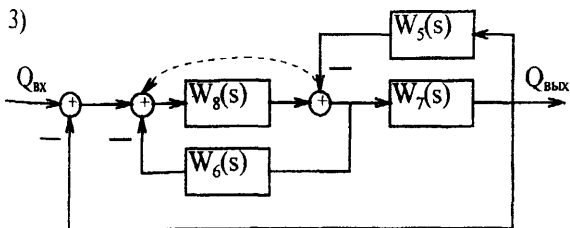


Рис. 1.10

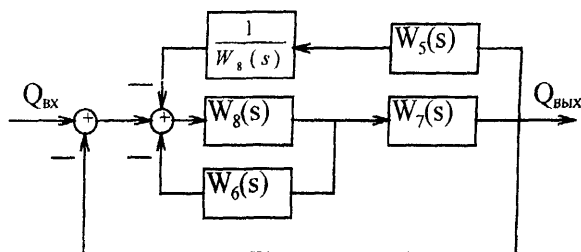


Рис. 1.11

$$4) W_9(s) = \frac{W_8'(s)}{1 + W_6'(s)W_8'(s)} = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_6(s)}$$

$$W_{10}(s) = W_7(s) W_9(s) = [W_3(s) + W_4(s)] W_9(s)$$

$$W_{11}(s) = \frac{W_{10}(s)}{1 + \frac{W_5(s)W_{10}(s)}{W_8(s)}} = \frac{W_8(s)W_{10}(s)}{W_8(s) + W_5(s)W_{10}(s)}$$

$$W(s) = \frac{W_{11}(s)}{1 + W_{11}(s)}$$

Подставив заданные передаточные функции отдельных звеньев, получим

$$W(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)[W_3(s) + W_4(s)]}{1 + W_1(s)W_2(s)W_6'(s) + W_5(s)[W_3(s) + W_4(s)] + W_1(s)W_2(s)[W_3(s) + W_4(s)]}$$

### 1.3. ПРОВЕРКА УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО АЛГЕБРАИЧЕСКИМ И ЧАСТОТНЫМ КРИТЕРИЯМ

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица применяется для замкнутых систем. Однако, как правило, известна  $W(s)$  разомкнутой САУ. В этом случае надо "мысленно" замкнуть систему единичной обратной отрицательной связью (ООС), найти передаточную функцию замкнутой системы по формуле

$$W_3(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{Q_1(s)}{Q_2(s)}$$

и записать характеристическое уравнение системы

$$Q_2(s) = 0, \\ a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0.$$

Формулировка критерия устойчивости Гурвица: для устойчивости замкнутой САУ необходимо и достаточно, чтобы при  $a_0 > 0$  все миноры, расположенные по главной диагонали определителя Гурвица, были строго положительны.

Определить Гурвица строится по коэффициентам характеристического уравнения следующим образом:

$$\Delta(n \times n) = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} > 0,$$

где  $n$ -порядок системы.

Из формулировки критерия устойчивости Гурвица следует, что при  $a_0 > 0$  для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} > 0 \\ \Delta_3 &= \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} > 0 \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Различают три типа границы устойчивости системы из условия  $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} = 0$ .

Это следующие границы:

1) первый тип границы устойчивости, который называется апериодической границей устойчивости  $a_n = 0$ ;

2) второй тип границы устойчивости, который называется колебательной границей устойчивости  $\Delta_{n-1} = 0$ ;

3) третий тип границы устойчивости называется бесконечной  $a_0 = 0$ , когда один из корней характеристического уравнения равен бесконечности, т.е.

$$s_j = \infty \quad (j=1).$$

Следует отметить, что наиболее опасной является нахождение системы на колебательной границе устойчивости.

К частотным критериям устойчивости относятся критерии устойчивости Михайлова и Найквиста.

Критерий устойчивости Михайлова применяется для замкнутых систем. Поэтому надо "мысленно" замкнуть систему единичной ООС, найти  $W(s)$  и записать характеристическое уравнение замкнутой системы. Затем необходимо получить аналитическое выражение годографа Михайлова, который обозначается как  $D(j\omega)$ . Для этого в характеристическое уравнение замкнутой системы надо подставить  $s=j\omega$ , разбить  $D(j\omega)$  на вещественную и мнимую части и построить кривую в координатах  $Jm-Re$  по контрольным точкам, т.е.

$$D(j\omega) = Re D(j\omega) + j Im D(j\omega).$$

Формулировка критерия устойчивости Михайлова : для того, чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова начинался на вещественной положительной оси, последовательно проходил  $n$ -квадратов и уходил в бесконечность в  $n$ -том квадрате, где  $n$  - порядок системы.

Принято различать три типа нахождения системы на границе устойчивости:

1) аperiодическая

2) колебательная

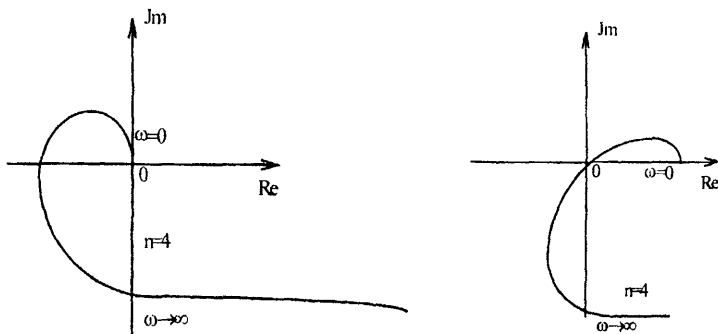


Рис. 1.12

### 3) бесконечный корень

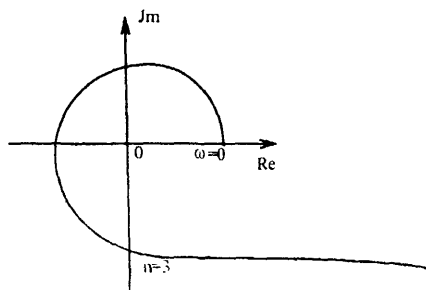


Рис. 1.13

Критерий устойчивости Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовой характеристике (АФХ) разомкнутой системы. Это главное преимущество критерия устойчивости Найквиста, благодаря которому он имеет широкое применение на практике.

АФХ разомкнутой САУ построить достаточно просто по контрольным точкам. Для этого в  $W(s)$  подставить  $s=j\omega$ , разбить на мнимую и вещественную части

$$W(s)_{s=j\omega} = W(j\omega) = \text{Re } W(j\omega) + j \text{Im } W(j\omega)$$

и построить в координатах  $\text{Im}-\text{Re}$ .

Формулировка критерия устойчивости Найквиста : для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой САУ не охватывала точку с координатами  $(-1; j0)$ .

Подробное решение задач проверки систем на устойчивость даны в [4, с. 86-101]; [5, с. 184-200].

**Пример.** Проверить динамическую систему на устойчивость по критериям Гурвица, Михайлова и Найквиста, если передаточная функция разомкнутой САУ задана в виде

$$W(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{T_3 s(T_1 s + 1)^2},$$

где  $K > 0$ ,  $T_i > 0 \quad \forall i = \overline{1,3}$ .

## Решение

### 1) Проверка на устойчивость по критерию Гурвица

$$W_i(s) = \frac{K(T_3 s + 1)}{T_1 s(T_1 s + 1)^2 + K(T_2 s + 1)}$$

$$Q_2(s) = T_3 s (T_1 s + 1)^2 + K(T_2 s + 1) = 0$$

$$T_1^2 T_3 s^3 + 2T_1 T_3 s^2 + (T_3 + K T_2) s + K = 0$$

$$a_0 = T_1^2 T_3; a_1 = 2T_1 T_3; a_2 = T_3 + K T_2; a_3 = K$$

$$\Delta(3 \times 3) = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} > 0 \quad \Delta = \begin{bmatrix} 2T_1 T_3 & K & 0 \\ T_1^2 T_3 & T_3 + K T_2 & 0 \\ 0 & 2T_1 T_3 & K \end{bmatrix} > 0$$

$$a_0 = T_1^2 T_3 > 0, \text{ так как по условию } T_1 > 0, \quad \forall i = \overline{1, 3};$$

$$\Delta_1 = a_1 = 2T_1 T_3 > 0, \text{ так как по условию } T_1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 2T_1 T_3 & K \\ T_1^2 T_3 & T_3 + K T_2 \end{bmatrix} > 0;$$

$$2T_1 T_3 (T_3 + K T_2) - K T_1^2 T_3 > 0;$$

$$(*) \quad K < \frac{2T_3}{T_1 - 2T_2}.$$

**Вывод:** при выполнении условия со (\*) система устойчива по Гурвицу.

**Примечание:**  $\Delta_3$  можно не вычислять, как только найдено (\*) соотношение между коэффициентом усиления и постоянными времени, т.е.  $K$  и  $T_i$  ( $\forall i = \overline{1, n}$ ), при котором система устойчива по Гурвицу.

### 2) Проверка на устойчивость по критерию Михайлова

$$D(j\omega) = T_1^2 T_3 s^3 + 2T_1 T_3 s^2 + (T_3 + K T_2) s + K =$$

$$= -j T_1^2 T_3 \omega^3 - 2T_1 T_3 \omega^2 + j(T_3 + K T_2) \omega + K =$$

$$= K - 2T_1 T_3 \omega^2 + j[(T_3 + K T_2) \omega - T_1^2 T_3 \omega^3];$$

$$\operatorname{Re} D(j\omega) = K - 2T_1 T_3 \omega^2;$$

$$\operatorname{Im} D(j\omega) = (T_3 + K T_2) \omega - T_1^2 T_3 \omega^3.$$

| $\omega$        | $\operatorname{Re} D(j\omega)$ | $\operatorname{Im} D(j\omega)$ |
|-----------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 0               | K                              | 0                              |
| $\frac{1}{T_1}$ | K-2                            | K                              |
| $\infty$        | $-\infty$                      | $-\infty$                      |

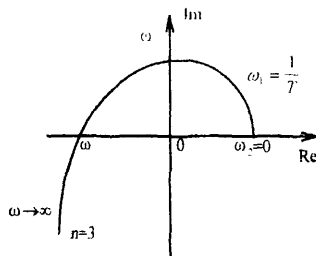


Рис. 1.14

**Вывод:** система устойчива, так как годограф Михайлова начинается на вещественной положительной оси (координаты точки (K;0),  $K > 0$  по условию), последовательно проходит квадранты  $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$  и уходит в бесконечность в III квадранте, что совпадает с порядком системы  $n=3$ .

### 3) Проверка на устойчивость по критерию Найквиста

$$\frac{K(T_2 s + 1)}{T_3 s(T_1 s + 1)^2} \Big|_{s=j\omega} = W(j\omega) = \frac{K(1 + jT_2\omega)}{jT_3\omega(1 + jT_1\omega)^2}.$$

Разбиваем  $W(j\omega)$  на мнимую и вещественные части:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{jK(1 + jT_2\omega)(1 - jT_1\omega)^2}{-T_3\omega(1 + jT_1\omega)^2(1 - jT_1\omega)^2} = \frac{KT_1^2 T_2 \omega^3 + K(2T_1 - T_2)\omega + jK[1 + T_1(2T_2 - T_1)\omega^2]}{-T_3\omega(1 + T_1^2\omega^2)^2} = \\ &= \frac{K[1 + T_1(2T_2 - T_1)\omega^2]}{-T_3\omega(1 + T_1^2\omega^2)^2} + j \frac{KT_1^2 T_2 \omega^3 + K(2T_1 - T_2)\omega}{-T_3\omega(1 + T_1^2\omega^2)^2} \end{aligned}$$

Строим по контрольным точкам

| $\omega$        | $\operatorname{Re} D(j\omega)$ | $\operatorname{Im} D(j\omega)$ |
|-----------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 0               | 0                              | $-\infty$                      |
| $\frac{1}{T_1}$ | $-\frac{K}{2}$                 | $-\frac{K}{2}$                 |
| $\infty$        | 0                              | 0                              |

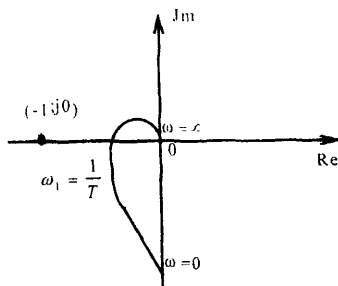


Рис. 1.15

**Вывод:** замкнутая система устойчива, если  $K < 2$ , а если точнее, то если  $K < \frac{2T_1}{T_1 - 2T_2}$  по критерию Гурвица.

#### 1.4. ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОМ D-РАЗБИЕНИЯ В ОБЛАСТИ ОДНОГО ИЛИ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ

При расчете и проектировании САУ иногда бывает необходимым исследовать влияние ее различных параметров на устойчивость. Для решения этой задачи служит построение областей устойчивости, т.е. определение таких областей значений параметров, при которых система оказывается устойчивой.

Различают построение областей устойчивости в плоскости одного параметра и в области двух параметров. Как правило, таковыми параметрами являются коэффициенты усиления звеньев и постоянные времени.

Метод D-разбиения используется для замкнутых систем управления.

##### Алгоритм метода D-разбиения в плоскости одного параметра

1) Находят передаточную функцию замкнутой единичной ООС системы:

$$W_1(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{Q_1(s)}{Q_2(s)}$$

2) Определяют из характеристического уравнения замкнутой системы искомый параметр как функцию от остальных :

$Q_2(s)=0$ ; например,  $K=f(T_i)$  при заданных  $T_i = \text{const } \forall i=\overline{1,n}$ .

3) Разбивают функцию на вещественную и мнимую части

$$K(s)|_{s=j\omega} = K(j\omega) = \text{Re} K(j\omega) + j \text{Im} K(j\omega) \quad .$$

4) Строят кривую D-разбиения в плоскости одного комплексного параметра в координатах  $\text{Im}-\text{Re}$ .

5) Для выделения области устойчивости используют правило штриховки: идя вдоль кривой при изменении  $-\infty \leq \omega < 0$  и от  $0 \leq \omega \leq +\infty$ , D-кривую штрихуют слева.

6) Выбор параметров осуществляют на вещественной оси. так как  $K$  и  $T$  ( $i=\overline{1,n}$ ) реально вещественные числа.

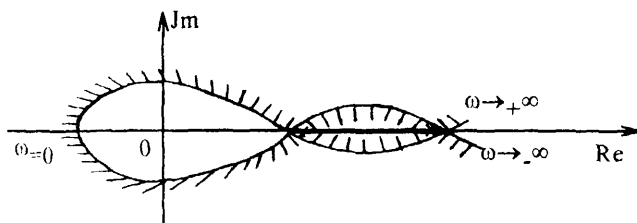


Рис. 1.16

### Алгоритм метода D-разбиения в области двух параметров

- 1) Находят передаточную функцию замкнутой единичной ООС системы:

$$W_3(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{Q_1(s)}{Q_2(s)}.$$

- 2) Разбивают характеристическое уравнение замкнутой системы на вещественную и мнимую части:

$$Q_2(s)|_{s=j\omega} = 0.$$

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = 0.$$

- 3) Выражают искомые параметры как функции от остальных заданных параметров, решая совместно два уравнения следующего вида :

$$\begin{cases} X(\omega) = 0 \\ Y(\omega) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = f_1(\omega, T_i), i = \overline{1, n} \\ T_i = f_2(\omega, T_i) \end{cases}$$

- 4) Строят кривую D-разбиения в плоскости искомых параметров, давая значения  $-\infty \leq \omega \leq +\infty$ .

- 5) Область устойчивости определяют штриховкой. Для этого вычисляют якобиан как функцию от  $\omega$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial K} & \frac{\partial X}{\partial T_1} \\ \frac{\partial Y}{\partial K} & \frac{\partial Y}{\partial T_1} \end{vmatrix} = f_3(\omega, T_1).$$

Затем задают значения  $-\infty \leq \omega < 0$  и  $0 \leq \omega \leq +\infty$ . Если знак якобиана положительный ( $\Delta > 0$ ), то D- кривую штрихуют слева; если знак якобиана отрицательный ( $\Delta < 0$ ), то D- кривую штрихуют справа.

б) Внутри выделенной области устойчивости берут любую точку и проверяют систему на устойчивость по любому критерию.

**Примечание:** так как теоретически доказано, а практически показано в [2], что система будет устойчива в выделенной области, то в контрольных работах можно не проверять, т.е. п.б не делать.

Решение задач методом D- разбиения приведены в [4, с.107-113]; [5, с. 231-235].

**Пример.** Построить кривую D- разбиения в области двух параметров K и  $T_3$  для системы с передаточной функцией следующего вида

$$W(s) = \frac{K(1 + T_2 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_3 s)},$$

где  $K > 0, T_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}, T_1, T_2 = \text{const (заданы)}; T_1 > T_2$ .

**Решение**

$$1) W_3(s) = \frac{K(1 + T_2 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_3 s) + K(1 + T_2 s)};$$

$$2) D(j\omega) = K - (T_1 + T_3)\omega^2 + j(1 - T_1 T_3 \omega^2 + K T_2)\omega = 0;$$

$$3) \begin{cases} X(\omega) = K - (T_1 + T_3)\omega^2 = 0 \\ Y(\omega) = (1 - T_1 T_3 \omega^2 + K T_2)\omega = 0 \end{cases}.$$

$$4) K = \frac{1 + T_1^2 \omega^2}{T_1 - T_2}; \quad T_3 = \frac{1 + T_1 T_2 \omega^2}{(T_1 - T_2)\omega^2}.$$

| $\omega$      | K                     | $T_3$                    |
|---------------|-----------------------|--------------------------|
| 0             | $\frac{1}{T_1 - T_2}$ | $\infty$                 |
| $\frac{1}{T}$ | $\frac{2}{T_1 - T_2}$ | $\frac{2T_1}{T_1 - T_2}$ |
| $\infty$      | $\infty$              | 0                        |

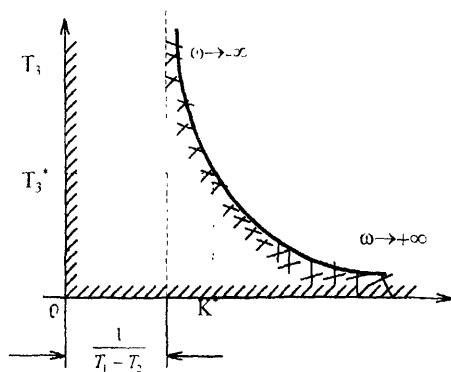


Рис.1.17

$$5) \text{ Якобиан } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\omega \\ T_2' & -T_1\omega \end{vmatrix} = -T_1\omega^3 + T_2\omega^3 = (T_2 - T_1)\omega^3$$

Правило штриховки :  $T_1 > T_2$  по условию

а) при  $-\infty \leq \omega < 0$   $\Delta > 0$  - штригуем слева;

б) при  $0 \leq \omega \leq +\infty$   $\Delta < 0$  - штригуем справа;

(на рис. 1.17 двойная штриховка).

$$6) K = \frac{1}{T_1 - T_2} - \text{асимптота};$$

Особые прямые: а)  $a_n = 0$ , т.е.  $K = 0$  (показано штриховкой);

б)  $a_n = 0$ , т.е.  $T_3 = 0$  (показано штриховкой).

**Вывод:** параметры  $K$  и  $T_3$  следует выбирать в выделенной области устойчивости, например,  $K^*$  и  $T_3^*$ .

## 1.5. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Все процессы (ОУ) в природе нелинейные. Решать задачи анализа и синтеза САУ для нелинейных ОУ достаточно сложно. Поэтому, если это возможно, нелинейные процессы линеаризуют, а затем для решения различных задач используют классический математический аппарат линейных САУ.

Итак, пусть нелинейный процесс описывается следующим уравнением

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1)$$

где  $x$  ( $n \times 1$ ) - мерный вектор состояния;

$u$  ( $n \times 1$ ) - мерный вектор управления;

$f$  ( $n \times 1$ ) - мерная вектор-функция.

Нелинейный процесс можно линеаризовать относительно некоторого рабочего состояния, если на вход подать небольшое возмущение  $\delta u$ .

Если на входе процесса  $\delta u$ , то приращение получат и вектора  $x$ ,  $f$ , т.е

$$\dot{x} + \delta \dot{x} = f(x + \delta x, u + \delta u). \quad (2)$$

Вычитая из уравнения (2) уравнение (1), получим

$$\delta \dot{x} = f(x + \delta x, u + \delta u) - f(x, u) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x_0, u_0} \delta x + \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{x_0, u_0} \delta u, \quad (3)$$

где  $[...]_{x_0, u_0}$  означает частная производная в окрестности рабочей точки  $(x_0, u_0)$ .

Обозначим

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

Тогда уравнение (3) переписывается в следующем виде:

$$\dot{\delta x} = A \delta x + B \delta u,$$

которое называется линеаризованным при малых возмущениях.

Достаточно подробно этот материал изложен в [8, с.50-55].

**Пример.** Линеаризовать нелинейный процесс, математическое описание которого в пространстве состояний задано в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^2 + 2x_1u \\ \dot{x}_2 = x_1x_2 - u^3 \end{cases}$$

**Решение**

$$\begin{cases} f_1(x, u) = -x_1^2 + 2x_1u \\ f_2(x, u) = x_1x_2 - u^3 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}$$

$n=2; m=1; m < n$ .

$$A = \begin{bmatrix} -2x_{1,0} + 2u_0 & 0 \\ x_{2,0} & x_{1,0} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2x_{1,0} \\ -3u_0^2 \end{bmatrix};$$

$$\dot{\delta x} = A \delta x + B \delta u$$

$$\dot{\delta x} = \begin{bmatrix} -2x_{1,0} + 2u_0 & 0 \\ x_{2,0} & x_{1,0} \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \delta u$$

$$\dot{\delta x}_1 = (-2x_{1,0} + 2u_0) \delta x_1 + 2x_{1,0} \delta u$$

$$\dot{\delta x}_2 = x_{2,0} \delta x_1 + x_{1,0} \delta x_2 - 3u_0^2 \delta u$$

## 1.6. ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ. ПРОВЕРКА ЗАДАННОЙ СИСТЕМЫ НА УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Понятие управляемости и дуальное ему понятие наблюдаемости впервые введены Калманом в 1960 году. Хотя при обсуждении методов идентификации понятие наблюдаемости важнее понятия управляемости, оба они ввиду их дуальности рассматриваются совместно [2], [6], [8].

Говорят, что система является вполне управляемой, если она может быть переведена из любого состояния  $X(t)$  при  $t=t_0$  в любое другое желаемое состояние  $x(t_1)$  за конечный интервал времени  $\tau$  ( $\tau = t_1 - t_0$ ) путем приложения кусочно-непрерывного входного воздействия  $u(t)$ ,  $t \in (t_0, t_1)$ .

Система наблюдаема, если ее состояние можно непосредственно или косвенно определить по выходному вектору системы. Поэтому, когда определенное состояние (или изменение этого состояния) не влияет на выходной вектор, система ненаблюдаема, точно так же как отсутствие влияния вектора выходного сигнала на определенное состояние означает, что система неуправляема.

Пусть линейная система описывается следующими векторным уравнением состояния (5) и наблюдения (6) :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5)$$

$$y = C^T x, \quad (6)$$

где  $x$  ( $n \times 1$ ) - вектор состояния ;  $U$  ( $m \times 1$ ) - вектор возмущающих воздействий, или, выходной вектор, компоненты которого могут быть независимыми функциями времени;  $y$  ( $r \times 1$ ) - вектор выходных координат ;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  - постоянные матрицы коэффициентов соответствующих размерностей.

### Формулировка критерия управляемости Калмана

Для управляемости системы (5) необходимо и достаточно, чтобы ранг блочной матрицы управляемости

$$K_u = (b, Ab, A^2 b, \dots, A^{n-1} b)$$

был равен  $n$ , где  $n$  - порядок системы.

Здесь  $b$  ( $n \times 1$ ) - вектор столбец ;  $u \in R^1$ .

Этот критерий легко распространяется на системы с векторным управлением. Если  $U$  ( $m \times 1$ ) - вектор управления, то блочная матрица управляемости  $K_u$  размера  $(n \times m \times n)$  имеет вид

$$K_u = (B, A B, A^2 B, \dots, A^{n-1} B),$$

где  $B$  -  $(n \times m)$  матрица. Если из столбцов матрицы  $K_u$  можно составить все возможные матрицы размера  $(n \times n)$  и среди них найдется хотя бы одна, ранг которой равен  $n$ , то система с векторным управлением является вполне управляемой, в противном случае неуправляемой.

Согласно введенному определению управляемости можно сделать следующие выводы. Во-первых, если система вполне управляема, то описание ее посредством передаточных функций и уравнениями состояния эквивалентны. Во-вторых, если система не управляема, то ее описание уравнениями состояния является более полным, так оно учитывает управляемую и неуправляемую части системы, а описание системы в терминах «вход-выход» в виде передаточной функции - только управляемую часть.

Для проверки управляемости системы по критерию Гильберта необходимо систему (5) ÷ (6) привести к канонической форме [6], [12].

Используя  $V$ , как матрицу преобразования, получим описание системы в канонической форме:

$$\dot{x}^* = A x^* + B^* u \quad (7)$$

$$y = C^* x^*, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{где } A &= V^{-1} A V; & B^* &= V^{-1} B; \\ C^* &= C V; & x^* &= V^{-1} x; \end{aligned}$$

здесь  $V$ - матрица собственных векторов исходной матрицы  $A$ .

### Формулировка критерия управляемости Гильберта

Система (7) ÷ (8) вполне управляема, если ни одна из строк матрицы  $B^*$  не является нулевой (т.е. для управляемости в каждой строке должен быть по меньшей мере один не нулевой элемент  $B^*$ ). Следовательно, если хотя бы одна строка матрицы  $B^*$  является нулевой, система неуправляема.

### Формулировка критерия наблюдаемости Калмана

Система (5) ÷ (6) вполне наблюдаема, если ранг блочной матрицы наблюдаемости

$$K_o = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$$

равен  $n$ , где  $n$  - порядок системы.

## Формулировка критерия наблюдаемости Гильберта

Система (7) ÷ (8) вполне наблюдаема, если ни один из столбцов матрицы  $C^*$  не является нулевым, т.е. если в матрице  $C^*$  присутствуют все  $x_i$  ( $i=\overline{1,n}$ ). Если по крайней мере один столбец  $C^*$  нулевой, то система становится ненаблюдаемой.

Достаточно подробно этот материал изложен в [6, с.3-51].

**Пример.** Пусть динамическая система описывается системой уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = C^T x, \end{cases}$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Необходимо проверить систему на управляемость и наблюдаемость по критериям Гильберта и Калмана.

### Алгоритм и решение

1) Находят собственные числа матрицы  $A$ , решая характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda I) = 0, \lambda_1 = -2; \lambda_2 = 3.$$

2) Определяют собственные вектора  $V_i \forall i = \overline{1,n}$  из следующего тождества

$$\lambda_i V_i = A V_i,$$

$$\text{где } V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{n2} \\ v_{13} & v_{23} & \dots & v_{n3} \end{bmatrix};$$

для  $i=1$

$$-2 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}$$

запишем в скалярной форме:

$$\begin{cases} -2v_{11} = 4v_{11} - 3v_{12} \\ -2v_{12} = 2v_{11} - 3v_{12} \end{cases} \quad \begin{cases} 6v_{11} = 3v_{12} \\ 2v_{12} = v_{11} \end{cases} \quad v_{11}=1, \text{ тогда } v_{12}=2.$$

$$\text{Следовательно, } V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Для } i=2 \text{ имеем } \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}; \text{ пусть } v_{22}=1, \text{ тогда } v_{21}=3. \text{ Следовательно, } V_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Получим матрицу собственных векторов

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

### 3) Нахождение обратной матрицы $V^{-1}$ .

Нахождение обратной матрицы осуществляется в три этапа :

а) строится матрица алгебраических дополнений, элементы которой получаются вычеркиванием строки и столбца и умножением на  $(-1)^{i+j}$ , где  $i$ - номер вычеркнутой строки,  $j$ - номер вычеркнутого столбца;

в) записывается присоединенная матрица, равная транспонированной  $D^T$  матрице алгебраических дополнений. В примере  $D^T = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ ;

с) находится обратная матрица по формуле

$$V^{-1} = \frac{D^T}{\det V}.$$

$$\text{В примере } V^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix}$$

$$\text{Проверка : } V^{-1} V = I; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

### 4) Проверка на управляемость

$$\Lambda = \text{diag} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

$$B^* = \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}; \text{ следовательно,}$$

$$\dot{X}^* = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} X^* + \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} u \quad \begin{cases} \dot{x}_1^* = -2x_1^* + u_1 \\ \dot{x}_2^* = 3x_2^* - u_2. \end{cases}$$

**Вывод:** система вполне управляема по критерию Гильберта.

### 5) Проверка на наблюдаемость

$$C^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$y^* = \begin{vmatrix} 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = 3x_1^* + 4x_2^*$$

**Вывод:** система вполне наблюдаема по критерию Гильберта, так как  $y^*$  содержит полный вектор состояния.

## Проверка на управляемость и наблюдаемость по критерию Калмана

1) Определяется ранг блочной матрицы управляемости:

$$K_u = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 25 \end{bmatrix};$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 1 \neq 0$ ;  $\Delta_2 = 60 \neq 0$ , следовательно ранг  $K_u = 2$ , т.е. порядку системы.

**Вывод:** система вполне управляема по Калману.

2) Определяется ранг блочной матрицы наблюдаемости:

$$K_n = [C' \quad A' C'] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$A' C' = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 1 \neq 0$ ;  $\Delta_2 = 4 \neq 0$ , следовательно ранг  $K_n = 2$ , т.е. порядку системы.

**Вывод:** система вполне наблюдаема по Калману.

**Примечание.** Если исследуемая система вполне управляема и наблюдаема по одному критерию, то она обязана быть вполне управляемой и наблюдаемой по другому критерию. Противоречий быть не может, так как физику процесса мы не меняем.

## 1.7. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВТОРЫМ (ПРЯМЫМ) МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

Первый метод Ляпунова позволяет определять устойчивость исходной системы с помощью линеаризованных уравнений динамики. Анализ устойчивости по этому методу производится с помощью характеристического уравнения замкнутой линеаризованной системы

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

Если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части ( $\lambda = -\alpha \pm j\beta$ ), то решение автономного уравнения динамики системы асимптотически устойчиво; если среди корней имеется хотя бы один с положительной вещественной частью ( $\lambda = +\alpha \pm j\beta$ ), то решение не устойчиво ;

если среди корней имеются корни с нулевой вещественной частью ( $\lambda = \pm j\beta$ ), то установить устойчивость системы по линеаризованным уравнениям (по уравнениям первого приближения) невозможно.

С помощью второго метода Ляпунова можно анализировать устойчивость линейных и нелинейных САУ, задавшись определенной формой функции Ляпунова.

Сущность этого метода заключается в следующем : зная математическое описание динамики системы в пространстве состояний и задав квадратичную форму функции Ляпунова  $V(x)$ , анализируют знак ее полной производной.

Функция  $V(x)$  должна быть знакоопределенной положительной, т.е. удовлетворять следующим условиям :

$$\begin{cases} V'(x) = 0 & \text{при } x = 0 \\ V'(x) > 0 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

### **Теорема 1**

Если полная производная от функции Ляпунова  $V(x)$ , взятая в силу уравнений динамики системы, будет знакоопределенной отрицательной, то система асимптотически устойчива по Ляпунову, т.е. если

$$\begin{cases} V'(x) < 0 \\ \frac{dV}{dt} < 0 \end{cases}, \text{ то } \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t) = 0.$$

### **Теорема 2**

Если полная производная от функции Ляпунова  $V(x)$ , взятая в силу уравнений динамики системы, будет знакопостоянной отрицательной, то система устойчива по Ляпунову, т.е. если

$$\begin{cases} V(x) > 0 \\ \frac{dV}{dt} \leq 0 \end{cases}, \text{ то } \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t) = \alpha_k, \alpha_k > 0.$$

### **Теорема 3**

Если полная производная от функции Ляпунова  $V(x)$ , взятая в силу уравнений динамики системы, будет того же знака, что и функция  $V(x)$  Ляпунова, то система неустойчива :

$$\begin{cases} V'(x) > 0 \\ \frac{dV}{dt} > 0 \end{cases}.$$

### Алгоритм

1) Записывается полная производная функции Ляпунова

$$\frac{dV}{dt} = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)' \dot{x}$$

2) В аналитическое выражение полной производной подставляются уравнения динамики системы, т.е.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

где  $a_{ij}$  ( $i=\overline{1,n}$  ;  $j=\overline{1,n}$ ) - известные коэффициенты.

3) Исследуется знак полной производной и в соответствии с теоремами Ляпунова делается вывод об устойчивости или неустойчивости заданной системы.

**Пример.** Исследовать на устойчивость вторым (прямым) методом Ляпунова линейную САУ, описание которой задано в пространстве состояний

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -3x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 5x_2\end{aligned}$$

Функция Ляпунова имеет следующий вид :

$$V(x) = \frac{1}{4} (x_1^4 + x_2^4).$$

### Решение

1) Записывается полная производная функции Ляпунова

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2$$

$$\frac{dV}{dt} = x_1^2 \dot{x}_1 + x_2^2 \dot{x}_2 \quad .$$

2) Подставляются уравнения динамики системы

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= x_1^3(-3x_1+2x_2) + x_2^3(2x_1-5x_2) = -3x_1^4 + 2x_1^3x_2 + 2x_1x_2^3 - 5x_2^4 = \\ &= -(3x_1^4 + 5x_2^4) + 2x_1x_2(x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}$$

3) Для асимптотической устойчивости системы необходимо, чтобы

$$\frac{dV}{dt} < 0, \text{ поэтому } \frac{dV}{dt} = -(3x_1^4 + 5x_2^4) + 2x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) < 0.$$

Первое слагаемое при любых значениях  $x_i$  ( $i=1,2$ ), будет отрицательным, а второе - положительным.

Исследуемая система будет асимптотически устойчива при выполнении следующего условия:

$$3x_1^4 + 5x_2^4 > 2x_1x_2(x_1^2 + x_2^2).$$

Достаточно подробно решение подобных задач приведены в [2, с.331-337]; [4, с.175-183].

## 1.8. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВТОРЫМ (ПРЯМЫМ) МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

Сущность метода показана в п.1.7 настоящего пособия. Данный метод дает лишь достаточные условия устойчивости для автономных САУ и не определяет общих принципов формирования функции  $V(x)$  и способов выбора знака производной при нескольких переменных  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Однако известны разные формы функции Ляпунова и методы определения знака полной производной для определенных классов задач, предложенных А И Лурье, Т. Сеге, Д. Шульцом, Д. Гибсоном. Ниже будет рассмотрен один из предложенных методов - метод Шульца - Гибсона.

Для применения рассматриваемого метода необходимо выполнение следующего условия : векторное поле функции Ляпунова должно быть потенциальным, т.е.

$$\frac{\partial \nabla V}{\partial x_i} = \frac{\partial \nabla V_k}{\partial x_j}, \quad \forall i = \overline{1, n} \quad k = \overline{1, n}.$$



2) Записывается градиент функции Ляпунова в форме Шульца - Гибсона:

$$\nabla V = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n \end{pmatrix},$$

где  $\alpha_{ij}$  ( $i=\overline{1,n}; j=\overline{1,n}$ ) -неизвестные коэффициенты.

3) Записывается полная производная функции Ляпунова через градиент

$$\frac{dV}{dt} = (\nabla V)^T \dot{x}$$

4) Необходимо определить такие  $\alpha_{ij}$ , при которых полная производная Ляпунова будет знакоопределенной или знакопостоянной отрицательной, т.е.

$$\frac{dV}{dt} < 0 \quad \text{или} \quad \frac{dV}{dt} \leq 0.$$

5) Определяется функция Ляпунова по формуле

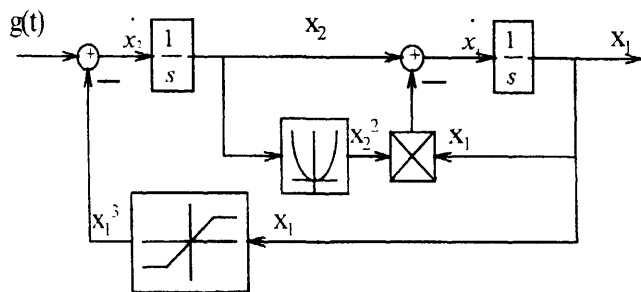
$$V = \int_0^{x_1} \nabla V^T dx = \int_0^{x_1} \nabla V_1(\xi_1, 0, \dots, 0) d\xi_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, \xi_2, 0, \dots, 0) d\xi_2 + \dots + \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_n) d\xi_n.$$

6) Найти условия, при которых функция Ляпунова будет знакоопределенной положительной, т.е.

$$V(x) > 0.$$

И только после этого можно сделать вывод в соответствии с теоремами Ляпунова об устойчивости системы.

**Пример.** Пусть нелинейная САУ задана следующей схемой



$g(t) \equiv 0$ .

Рис.1.18

Используя метод Шульца - Гибсона, исследовать нелинейную САУ на устойчивость.

### Решение

- 1) Записываются уравнения динамики системы в пространстве состояний с заданной схемой :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2^2 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 \end{cases} : x \in \mathbb{R}^2.$$

- 2) Записывается градиент функции Ляпунова в форме Шульца - Гибсона

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 \end{bmatrix}.$$

- 3) Записывается полная производная функции Ляпунова

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \nabla V^T \dot{x} = \nabla V_1^T \dot{x}_1 + \nabla V_2^T \dot{x}_2 = (\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2)(-x_1 x_2^2 + x_2) - (\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2)x_1^3 = \\ &= -\alpha_{11} x_1^2 x_2^2 + \alpha_{11} x_1 x_2 - \alpha_{12} x_1 x_2^3 + \alpha_{12} x_2^2 - \alpha_{21} x_1^4 - \alpha_{22} x_1^3 x_2 < 0. \end{aligned}$$

- 4) Необходимо определить  $\alpha_n$  такие, чтобы  $V'(x) < 0$ .

Пусть  $\alpha_{11}=1$ ;  $\alpha_{12}=-\alpha_{21}$ ;  $\alpha_{12}=-1$ ;  $\alpha_{21}=1$ .

Тогда

$$\frac{dV}{dt} = -x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 (1 + x_2^2) - x_2^2 - x_1^4 - \alpha_{22} x_1^3 x_2 < 0 \quad .$$

Слагаемые  $-x_1^2 x_2^2 < 0$

$$-(x_1^2 + x_2^4) < 0 \quad \text{при любых } x_i \neq 0 \ (i=1,2).$$

Следовательно, надо

$$x_1 x_2 (1 + x_2^2 - \alpha_{22} x_1^2) = 0.$$

Так как  $x_1 \neq 0$  ;  $x_2 \neq 0$  , то

$$1 + x_2^2 - \alpha_{22} x_1^2 = 0.$$

Отсюда  $\alpha_{22} = \frac{1 + x_2^2}{x_1^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2}.$

При таком выборе  $\alpha_{ij}$

$$\frac{dV}{dt} = -x_1^2 x_2^2 - x_1^2 - x_2^4 < 0.$$

5) Определим теперь функцию Ляпунова  $V(x)$

$$\nabla V^T = \left[ \begin{array}{c} x_1 - x_2 \\ x_1 + \frac{x_2}{x_1^2} + \frac{x_2^3}{x_1^2} \end{array} \right].$$

$$V(x) = \int_0^x \nabla V^T dx = \int_0^{x_1} \nabla V_1(\xi_1, 0) d\xi_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, \xi_2) d\xi_2 =$$

$$= \int_0^{x_1} \xi_1 d\xi_1 + \int_0^{x_2} \left( x_1 + \frac{\xi_2}{x_1^2} + \frac{\xi_2^3}{x_1^2} \right) d\xi_2 = \frac{1}{2} x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2x_1^2} + \frac{x_2^4}{4x_1^2} > 0 \quad .$$

Следовательно, исходная система асимптотически устойчива по Ляпунову.

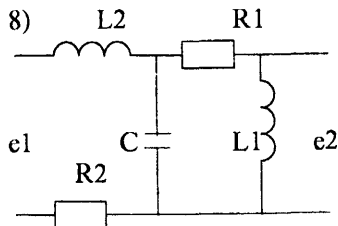
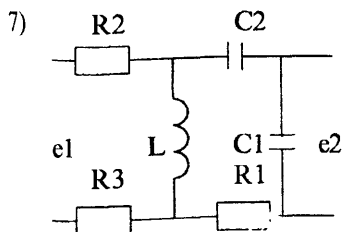
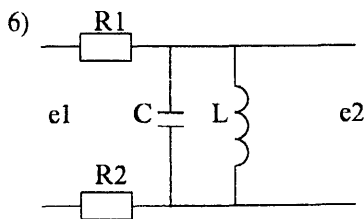
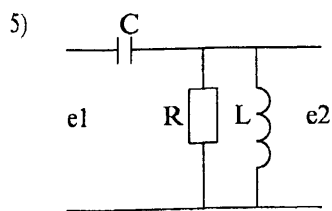
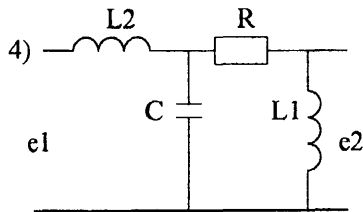
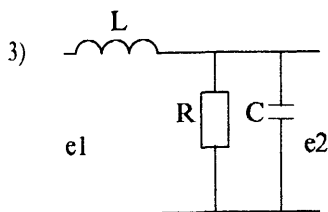
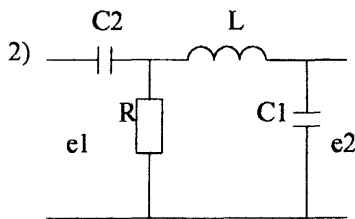
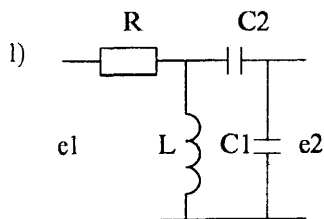
Достаточно подробно решение подобных задач даны в [4, с.328-343]; [2, с.337-344].

## 2. ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

### 2.1. ПОЛУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ

**Задание :** Получить математическое описание корректирующего устройства, схема которого задана (рис 2.1). Конструктивные параметры устройства считать постоянными и заданными; за вход взять  $e_1(t)$ , за выход  $-e_2(t)$ .

**Варианты:**



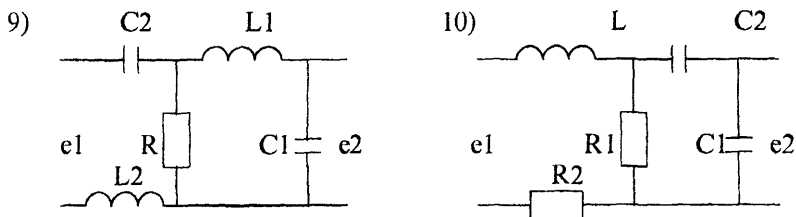


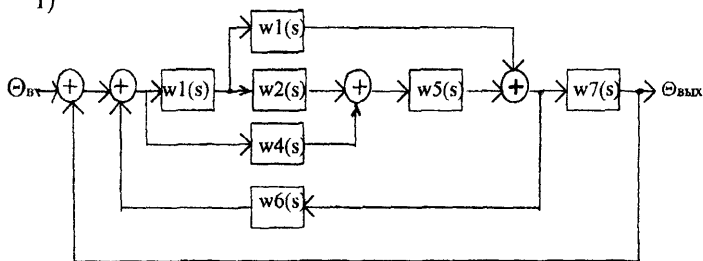
Рис. 2.1

## 2.2. АЛГЕБРА СТРУКТУРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

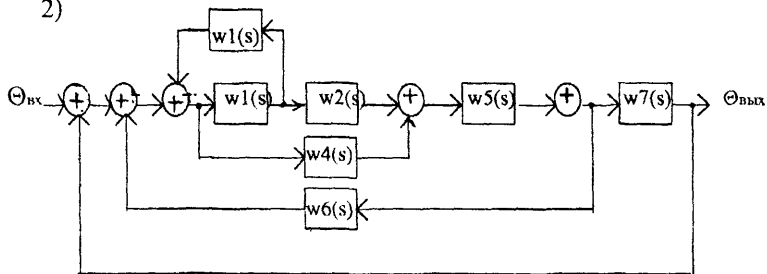
**Задание :** Получить передаточную функцию системы, если заданы передаточные функции отдельных звеньев (рис. 2.2).

**Варианты:**

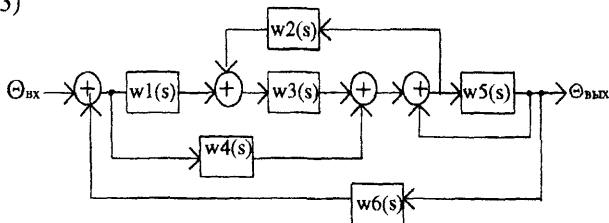
1)



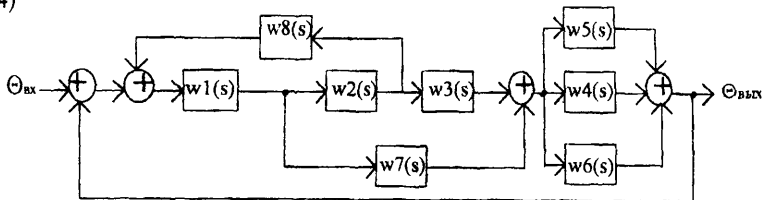
2)



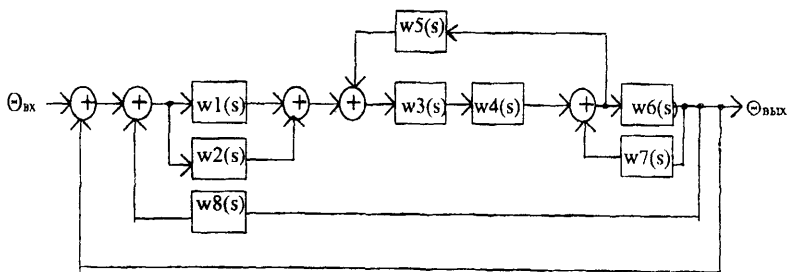
3)



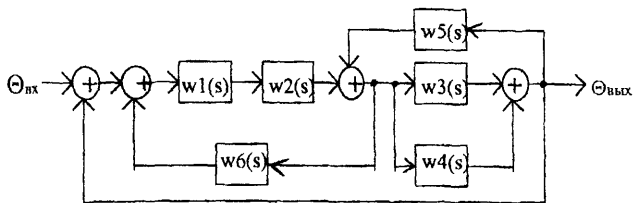
4)



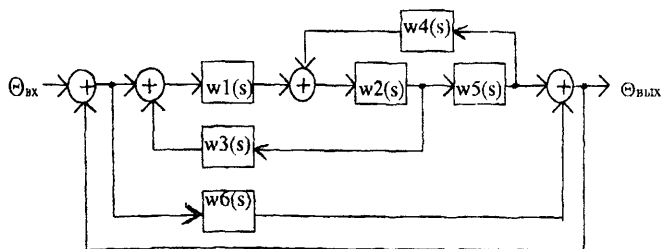
5)



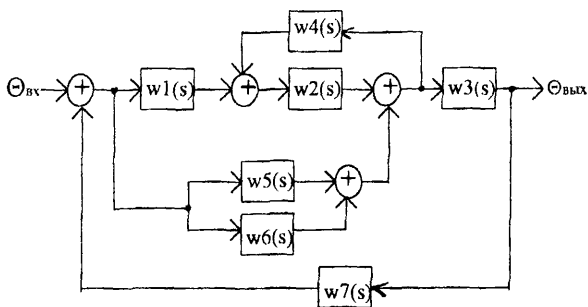
6)



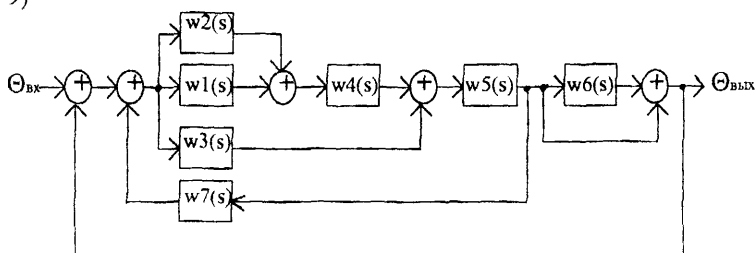
7)



8)



9)



10)

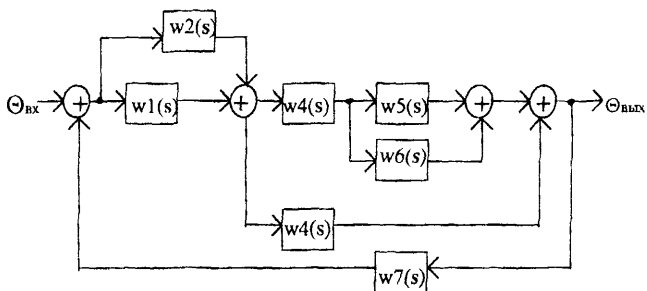


Рис. 2.2

## 2.3. ПРОВЕРКА УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО АЛГЕБРАИЧЕСКИМ И ЧАСТОТНЫМ КРИТЕРИЯМ

**Задание :** Проверить динамическую систему на устойчивость по критериям Найквиста, Михайлова и Гурвица, если передаточная функция разомкнутой системы (САУ) задана.

**Варианты:**

1)

$$W(S) = \frac{K}{T_1 S (T_2 S + 1) (T_3 S + 1)}, \text{ где } K > 0, T_i > 0, i = \overline{1, 3};$$

2)

$$W(S) = \frac{K (T_3 S + 1)}{(T_1 S + 1) (T_2 S + 1)}, \text{ где } K > 0, T_i > 0, i = \overline{1, 3};$$

3)

$$W(S) = \frac{K}{T_1 S (T_2^2 S^2 + 1)}, \text{ где } K > 0, T_i > 0, i = \overline{1, 2};$$

4)

$$W(S) = \frac{K (T_1 S + 1)}{(T_2 S + 1)^2 (T_3 S + 1)^2}, \text{ где } K > 0, T_i > 0, i = \overline{1, 3};$$

5)

$$W(S) \approx \frac{K (T_1 S + 1)}{(T_2 S + 1)^2 T_3 S}, \text{ где } K > 0, T_i > 0, i = \overline{1, 3};$$

6)

$$W(S) \approx \frac{K (T_2 S + 1)}{(T_1^2 S^2 + 2 T_1 S + 1) (T_3 S + 1)}, \text{ где } K > 0, T_i > 0, i = \overline{1, 3};$$

7)

$$W(S) = \frac{K (T_3 S + 1)^2}{T_2 S (T_1 S + 1)^3}, \text{ где } K > 0, T_i > 0, i = \overline{1, 3};$$

8)

$$W(S) = \frac{K}{T_1 S (T_2 S + 1)^2}, \text{ где } K > 0, T_1 > 0, i = \overline{1, 2};$$

9)

$$W(S) = \frac{K}{(T_1 S + 1) (T_2 S + 1)^2}, \text{ где } K > 0, T_1 > 0, i = \overline{1, 2};$$

10)

$$W(S) = \frac{K}{(T_1 S + 1)^2 (T_2 S + 1)}, \text{ где } K > 0, T_1 > 0, i = \overline{1, 2};$$

## 2.4. ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОМ Д-РАЗБИЕНИЯ В ОБЛАСТИ ОДНОГО ИЛИ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ

**Задание :** Построить кривую Д-разбиения в области одного или двух параметров , в зависимости от варианта, для системы с передаточной функцией (разомкнутой ) заданного вида.

**Варианты:**

1) В области одного параметра  $K$  для функции

$$W(S) = \frac{K}{T_1 S (T_2 S + 1)}, \text{ где } K > 0, T_1 > 0, i = \overline{1, 2};$$

$T_1$  - заданные const.

2) В области одного параметра  $T_1$  для функции

$$W(S) = \frac{K (T_2 S + 1)}{(T_1 S + 1) (T_3 S + 1)}, \text{ где } K > 0, T_1 > 0, i = \overline{1, 3};$$

$K, T_2, T_3$  - заданные const.

3) В области одного параметра  $T_2$  для функции

$$W(S) = \frac{K(T_2 S + 1)}{T_3 S(T_1 S + 1)}, \text{ где } K > 0, T_i > 0, i = \overline{1, 3};$$

$K, T_1, T_3$  - заданные const.

4) В области одного параметра  $T_3$  для функции

$$W(S) = \frac{K(T_3 S + 1)}{T_1 S(T_2 S + 1)}, \text{ где } K > 0, T_i > 0, i = \overline{1, 3};$$

$K, T_1, T_2$  - заданные const.

5) В области двух параметров  $K$  и  $T_1$  для функции

$$W(S) = \frac{K(T_3 S + 1)}{(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)}, \text{ где } K > 0, T_i > 0, i = \overline{1, 3};$$

$T_3, T_2$  - заданные const.

6) В области двух параметров  $K$  и  $T_1$  для функции

$$W(S) = \frac{K}{(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)(T_3 S + 1)}, \text{ где } K > 0, T_i > 0, i = \overline{1, 3};$$

$T_2, T_3$  - заданные const.

7) В области двух параметров  $K$  и  $T_2$  для функции

$$W(S) = \frac{K(T_2 S + 1)}{T_1 S(T_3 S + 1)^2}, \text{ где } K > 0, T_i > 0, i = \overline{1, 3};$$

$T_1, T_3$  - заданные const.

8) В области двух параметров  $K$  и  $T_2$  для функции

$$W(S) = \frac{K}{(T_1 S + 1)^2 (T_2 S + 1)}, \text{ где } K > 0, T_1 > 0, i = \overline{1, 2};$$

$T_1$  - заданная const.

9) В области двух параметров  $K$  и  $T_3$  для функции

$$W(S) = \frac{K (T_2 S + 1)}{(T_1 S + 1)(T_3 S + 1)}, \text{ где } K > 0, T_1 > 0, i = \overline{1, 3};$$

$T_1, T_2$  - заданные const.

10) В области двух параметров  $K$  и  $T_3$  для функции

$$W(S) = \frac{K (T_3 S + 1)}{T_1 S (T_2 S + 1)}, \text{ где } K > 0, T_i > 0, i = \overline{1, 3};$$

$T_1, T_2$  - заданные const.

## 2. 5 ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

**Задание :** Линеаризовать нелинейный процесс, математическое описание которого в пространстве состояний задано в следующем виде.

**Варианты:**

$$1) \dot{X}_2 = -3X_1^2 + 5X_2 + 3X_2 U_2^2$$

$$\dot{X}_1 = 2X_1 X_2 + 3X_2^2 - X_1 U_1^2$$

$$2) \dot{X}_1 = 3X_1^2 X_2 - 5X_2 + U_1$$

$$\dot{X}_2 = 2X_1 + 3X_2^2 - 3X_1 U_2^2$$

$$3) \dot{X}_1 = -X_1^2 - 4X_1X_2^2 + X_2U_1^2$$

$$\dot{X}_2 = X_1X_2 + 3X_2^2 + 2X_2U_2$$

$$4) \dot{X}_1 = -X_1^2X_2 + 7X_2^2 - 3U_1$$

$$\dot{X}_2 = -X_1^2X_2^2 - 4X_1X_2 + U_2^2$$

$$5) \dot{X}_1 = -7X_1^2 + 3X_1X_2^2 - 2U_1^2$$

$$\dot{X}_2 = -4X_1X_2 + 5X_2^2 + 3X_1X_2U_2$$

$$6) \dot{X}_1 = X_1X_2^2 - 3X_2 + 2X_1U_1^2$$

$$\dot{X}_2 = -X_1 - 5X_2^2 - U_2^2$$

$$7) \dot{X}_1 = -X_1^2 - 3X_1X_2^2 + U_1$$

$$\dot{X}_2 = -X_1 + 5X_2^2 - 3U_2$$

$$8) \dot{X}_1 = -X_1X_2 + 5X_2^2 + 2U_1^2$$

$$\dot{X}_2 = X_1^2 + X_1X_2 - 2U_2^2$$

$$9) \dot{X}_1 = X_1^2 - 2X_1X_2^2 + 3X_2U_1^2$$

$$\dot{X}_2 = -X_1 + X_2^2 - X_1U_2^2$$

$$10) \dot{X}_1 = -X_1 + 2X_1X_2^2 + 2X_1U_1^2$$

$$\dot{X}_2 = X_1^2 + X_2^2 + X_2U_2$$

## 2.6. ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ. ПРОВЕРКА ЗАДАННОЙ СИСТЕМЫ НА УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

**Задание :** Математическое описание системы задано в пространстве состояний. Проверить заданную систему на полную управляемость и наблюдаемость по критериям Гильберта и Калмана.

### Варианты:

1).

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ y &= CX \end{aligned} \quad , \text{ где } A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

2).

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ y &= CX \end{aligned} \quad , \text{ где } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} ; C = [0 \ 1 \ 0] .$$

3).

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ y &= CX \end{aligned} \quad , \text{ где } A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

4).

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ y &= CX \end{aligned} \quad , \text{ где } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

5).

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ y &= CX \end{aligned} \quad , \text{ где } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

6).

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ y &= CX \end{aligned} \quad , \text{ где } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} ; C = [0 \ 1 \ 3] .$$

7).

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ y &= CX \end{aligned} \quad , \text{ где } A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} ; C = [1 \ 0 \ 2] .$$

8).

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ y &= CX \end{aligned} \quad , \text{ где } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} ; C = [2 \ 1 \ 3] .$$

9).  
 $\dot{X} = AX + BU$   
 $y = CX$ , где  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $C = [1 \ 2 \ 0]$ .

10).  
 $\dot{X} = AX + BU$   
 $y = CX$ , где  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ;  $C = [2 \ 0 \ 3]$ .

## 2.7. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВТОРЫМ (ПРЯМЫМ) МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

**Задание :** Исследовать на устойчивость вторым (прямым) методом Ляпунова линейную САУ, описание которой задано в пространстве состояний.

**Варианты:**

1) .  
 $\dot{X}_1 = -X_1 + 3X_2$   
 $\dot{X}_2 = 2X_1 - X_2$   
 Функция Ляпунова  $V(X) = 1/4 (X_1^4 + X_2^4)$ ;  $V(X) > 0$  при  $X \neq 0$ ,  
 $V(X) = 0$  при  $X = 0$ .

2) .  
 $\dot{X}_1 = -5X_1 - 3X_2$   
 $\dot{X}_2 = 4X_1 + 7X_2$   
 Функция Ляпунова  $V(X) = 1/4 (X_1^4 + X_2^4)$

3) .  
 $\dot{X}_1 = -2X_1 + 2X_2$   
 $\dot{X}_2 = -7X_1 + 3X_2$   
 Функция Ляпунова  $V(X) = 1/2 (X_1^2 + X_2^2)$

$$\begin{aligned}
 &4) \quad \begin{cases} \dot{X}_1 = 3X_1 - 7X_2 \\ \dot{X}_2 = 5X_1 - 2X_2 \end{cases} \\
 &\text{Функция Ляпунова} \quad V(X) = 1/2 (X_1^2 + X_2^2) .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &5) \quad \begin{cases} \dot{X}_1 = 5X_1 + 3X_2 \\ \dot{X}_2 = -X_1 - 2X_2 \end{cases} \\
 &\text{Функция Ляпунова} \quad V(X) = 1/4 (X_1^4 + X_2^4) .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &6) \quad \begin{cases} \dot{X}_1 = 8X_1 + 9X_2 \\ \dot{X}_2 = -X_1 + X_2 \end{cases} \\
 &\text{Функция Ляпунова} \quad V(X) = 1/4 (X_1^4 + X_2^4) .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &7) \quad \begin{cases} \dot{X}_1 = 3X_1 - 2X_2 \\ \dot{X}_2 = X_1 + X_2 \end{cases} \\
 &\text{Функция Ляпунова} \quad V(X) = 1/2 (X_1^2 + X_2^2) .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &8) \quad \begin{cases} \dot{X}_1 = -7X_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 = -X_1 + 3X_2 \end{cases} \\
 &\text{Функция Ляпунова} \quad V(X) = 1/2 (X_1^2 + X_2^2) .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &9) \quad \begin{cases} \dot{X}_1 = 4X_1 + 3X_2 \\ \dot{X}_2 = -X_1 + 7X_2 \end{cases} \\
 &\text{Функция Ляпунова} \quad V(X) = 1/4 (X_1^4 + X_2^4) .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &10) \quad \begin{cases} \dot{X}_1 = -8X_1 + 3X_2 \\ \dot{X}_2 = 2X_1 - 5X_2 \end{cases} \\
 &\text{Функция Ляпунова} \quad V(X) = 1/2 (X_1^2 + X_2^2) .
 \end{aligned}$$

## 2.8. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВТОРЫМ(ПРЯМЫМ) МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

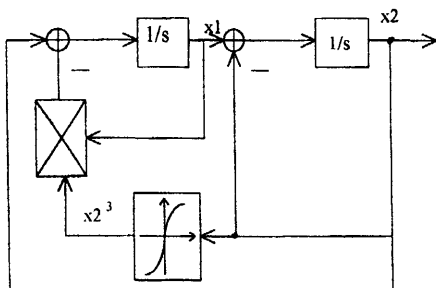
**Задание :** Используя метод Шульца-Гибсона, исследовать нелинейную САУ, заданную схемой (рис. 2.3), на устойчивость вторым (прямым) методом Ляпунова.

**Варианты:**

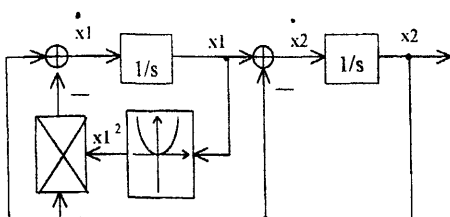
$\dot{x}_1$

$\dot{x}_2$

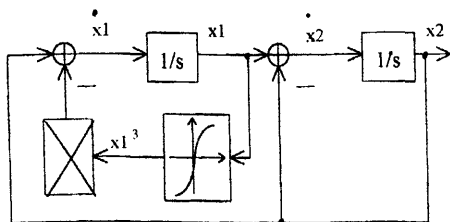
1)



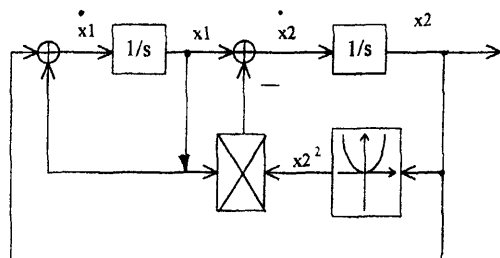
2)



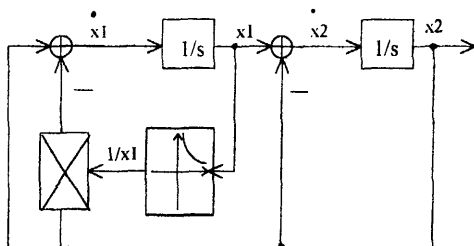
3)



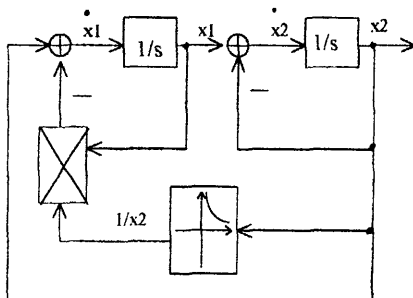
4)



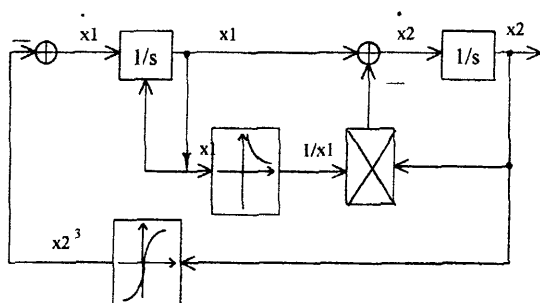
5)



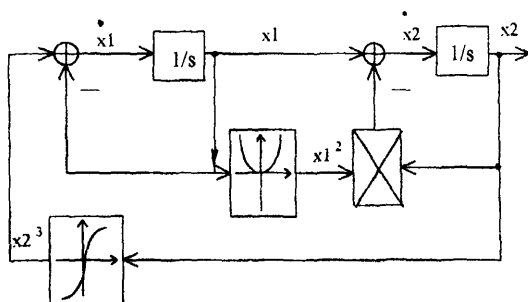
6)



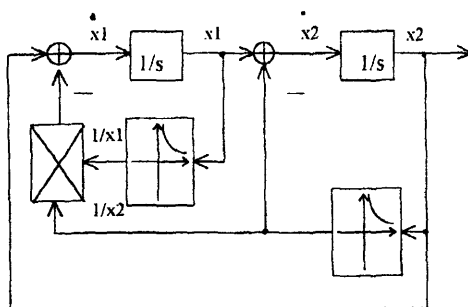
7)



8)



9)



10)

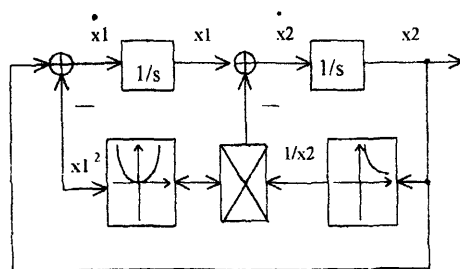


Рис. 2.3

### 3. ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСОВОЙ РАБОТЕ

#### 3.1. РАСЧЕТ ИНТЕГРИРУЮЩЕЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ

##### Задание

1. Составить уравнение основных элементов системы и определить их передаточные функции (рис. 3.1 ).

2. Определить необходимое значение передаточного коэффициента усилителя.

3. Выбрать последовательное корректирующее устройство (пассивный электрический четырехполюсник постоянного тока), необходимое для удовлетворения требований к системе.

4. Составить структурную схему скорректированной системы и определить ее передаточную функцию (по управляющему воздействию , по возмущающему воздействию и по ошибке) .

5. Построить переходную характеристику скорректированной системы, определить показатели ее качества и их соответствие требованиям.

6. Выяснить существование автоколебаний при наличии в усилителе скорректированной системы зоны нечувствительности и насыщения; определить среднеквадратическое значение ошибки, создаваемое в скорректированной схеме.

7. Сделать выводы о свойствах скорректированной системы и возможностях их улучшения.

8. Провести моделирование на ПЭВМ и сравнить результаты моделирования с расчётным.

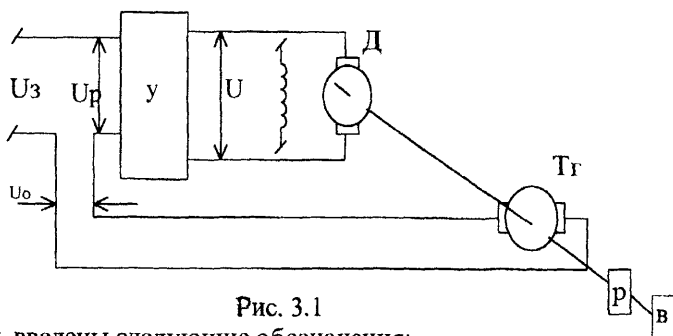


Рис. 3.1

Здесь введены следующие обозначения:

Р-редуктор; В-выходное устройство; У-усилитель;

Д - двигатель; Тг- тахогенератор;

$$U_p = U_z - U_0$$

### Тип нелинейности

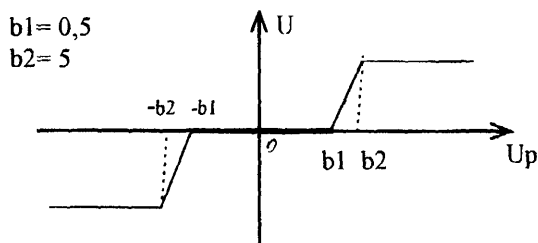


Рис. 3.2

### Исходные данные

1) Марка электродвигателя, сумарный момент инерции  $J$  якоря электродвигателя и нагрузки, приведенный к валу двигателя, электромагнитная постоянная времени  $T_\alpha$  цепи якоря электродвигателя в передаточный коэффициент тахогенератора  $K_\alpha$  указаны в таблице 3.1

Таблица 3.1

| № п/п | Марка электродвигателя | $J$<br>[кгм.сек]    | $T_\alpha$<br>[сек] | $K_\alpha$<br>[н.сек.рад] |
|-------|------------------------|---------------------|---------------------|---------------------------|
| 1     | СЛ-161                 | $1 \cdot 10^{-6}$   | 0.003               | 0.5                       |
| 2     | СЛ-161                 | $0.6 \cdot 10^{-6}$ | 0.001               | 0.45                      |
| 3     | СЛ-361                 | $30 \cdot 10^{-6}$  | 0.004               | 0.4                       |
| 4     | СЛ-521                 | $60 \cdot 10^{-6}$  | 0.003               | 0.5                       |
| 5     | СЛ-521                 | $50 \cdot 10^{-6}$  | 0.004               | 0.4                       |

Номинальные данные электродвигателя приведены в таблице 3.2

Таблица 3.2

| Марка электродвигателя | Полезная мощность $P$ [Вт] | Номинальный момент на валу $M_n$ [кгм] | Номинальная скорость вращения $n$ [об.мин] | Номинальное напряжение питания якоря $U_n$ [В] | Номинальный ток якоря $I_n$ [А] | Сопротивление обмотки якоря $R_\alpha$ [Ом] |
|------------------------|----------------------------|----------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------|
| СЛ-161                 | 8.5                        | $21 \cdot 10^{-4}$                     | 4000                                       | 110                                            | 0.15                            | 170                                         |
| СЛ-361                 | 50                         | $160 \cdot 10^{-4}$                    | 3000                                       | 110                                            | 0.55                            | 23.3                                        |
| СЛ-521                 | 77                         | $250 \cdot 10^{-4}$                    | 3000                                       | 110                                            | 1.1                             | 8.5                                         |

2) Требования к системе: коэффициент статизма  $S$ , время регулирования  $t_p$  и перерегулирование  $X_m$  в таблице 3.3. Студент должен проводить расчет по варианту номер которого равен последней цифре его номера зачетной книжке

Таблица 3.3

| № вар. | $S$   | $t_p$ [сек.] | $X_m$ [%] |
|--------|-------|--------------|-----------|
| 0      | 0.008 | 0.2          | 30        |
| 1      | 0.01  | 0.15         | 35        |
| 2      | 0.012 | 0.12         | 30        |
| 3      | 0.008 | 0.15         | 35        |
| 4      | 0.01  | 0.12         | 30        |
| 5      | 0.012 | 0.15         | 35        |
| 6      | 0.008 | 0.12         | 30        |
| 7      | 0.01  | 0.15         | 35        |
| 8      | 0.012 | 0.15         | 30        |
| 9      | 0.008 | 0.15         | 35        |

3) Статистическая характеристика усилителя с зоной нечувствительности и насыщением показана на рис.3.2. Значение параметров нелинейности  $b_1$  и  $b_2$  брать по предпоследнему номеру зачетной книжки в таблице 3.4.

Таблица 3.4

| Вариант параметр | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $b_1$            | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| $b_2$            | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |

4) Помеха, действующая на входе следящей системе, представляет собой белый шум со спектральной плотностью  $N_b^2$  сек.

### Библиографический список

1. Воронов А.А. и др. Теория автоматического управления. Часть 1,2 - М.: Высшая школа, 1986.
2. Васильев Д.В., Чуич В.Г. Системы автоматического управления (примеры расчета). - М: Высшая школа, 1967.
3. Бесекерский В.А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. - М.: Наука, 1977.
4. Попов С Л. Следящие системы - М.: Высшая школа, 1968.

## 3.2 РАСЧЕТ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### Задание

1. Составить функциональную схему системы.
2. Вывести дифференциальные уравнения элементов и определить их передаточные функции.
3. Составить структурную схему системы и определить ее передаточные функции по заданному воздействию  $U_0$  и по возмущению (нагрузке)  $I_n$ .
4. Построить асимптотические, амплитудную и фазовую логарифмические, частотные характеристики и по ним исследовать устойчивость системы.
5. Определить коэффициент усиления электронного усилителя  $K_1$ , обеспечивающего заданную статическую точность.
6. Построить переходный процесс в системе при ступенчатом изменении тока нагрузки  $I_n$  от 0 до его номинального значения и определить основные показатели качества: время регулирования, статическую и номинальную динамическую ошибку. Сделать заключение о системе и указать возможные пути улучшения ее качества.
7. Найти параметры (амплитуду и частоту) автоколебаний нелинейной системы, получаемой из рассматриваемой линейной системы включением между электронным усилителем и ЭМУ релейного элемента.
8. Найти граничное значение передаточного коэффициента усиления электронного усилителя, при котором нелинейная система устойчива, определить максимальную статическую ошибку системы  $\Delta U = ( \Delta U = U_0 - U_T )$ , указать возможные пути ее уменьшения.
9. Осуществить моделирование системы на ПЭВМ при ступенчатом изменении тока нагрузки от нуля до его номинального значения.

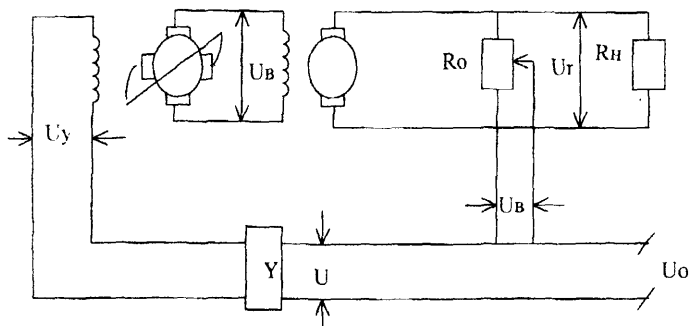


Рис. 3.3

## Исходные данные

Таблица 3.5

| N<br>вар | K1   | K2  | K3   | Ty<br>[сек] | Tq<br>[сек] | Tв<br>[сек] | Rя<br>[Ом] | S<br>[%] | $\beta$ | b1    | b2    |
|----------|------|-----|------|-------------|-------------|-------------|------------|----------|---------|-------|-------|
| 0        | 8.0  | 5.6 | 1.6  | 0.013       | 0.045       | 0.45        | 0.22       | 0.20     | 0.6     | -0.5  | +0.5  |
| 1        | 10.0 | 7.0 | 1.5  | 0.020       | 0.050       | 0.52        | 0.25       | 0.25     | 0.8     | -0.3  | +0.3  |
| 2        | 5.0  | 6.2 | 1.2  | 0.017       | 0.037       | 0.35        | 0.27       | 0.30     | 0.9     | -0.7  | +0.7  |
| 3        | 7.3  | 4.5 | 0.9  | 0.022       | 0.043       | 0.47        | 0.29       | 0.27     | 0.75    | -0.4  | +0.4  |
| 4        | 5.5  | 4.7 | 1.35 | 0.025       | 0.035       | 0.50        | 0.31       | 0.15     | 0.7     | -0.45 | +0.45 |
| 5        | 6.0  | 4.0 | 0.8  | 0.015       | 0.048       | 0.33        | 0.21       | 0.22     | 0.6     | -0.6  | +0.6  |
| 6        | 6.5  | 5.0 | 1.1  | 0.019       | 0.039       | 0.37        | 0.23       | 0.19     | 0.65    | -0.55 | +0.55 |
| 7        | 7.8  | 5.3 | 0.95 | 0.021       | 0.047       | 0.49        | 0.24       | 0.29     | 0.85    | -0.75 | +0.75 |
| 8        | 9.0  | 6.5 | 1.4  | 0.023       | 0.052       | 0.55        | 0.30       | 0.26     | 0.80    | -0.80 | +0.80 |
| 9        | 8.5  | 6.3 | 1.45 | 0.014       | 0.034       | 0.34        | 0.28       | 0.24     | 0.90    | -0.85 | +0.85 |

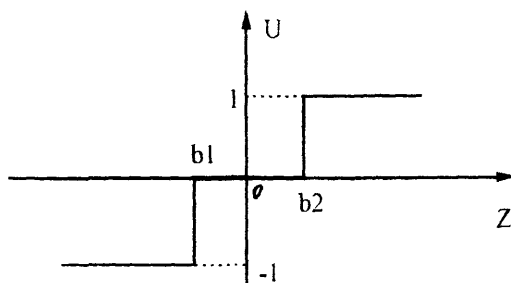


Рис. 3.4

Здесь введены следующие обозначения:

- K1 – коэффициент усиления электрической цепи;
  - K2 – передаточный коэффициент по напряжению ЭМУ;
  - K3 – передаточный коэффициент генератора (это отношение ЭДС  $E$  генератора к напряжению возбуждения  $U_v$  в установившемся режиме);
  - Ty – постоянная времени обмотки управления ЭМУ;
  - Tв – постоянная времени обмотки возбуждения генератора;
  - Rя – активное сопротивление обмотки якоря генератора.
- Номинальное значение сопротивления  $R_n = 0,1 R_y$ .

Относительная статическая ошибка  $S$ , вызываемая изменением тока нагрузки от нуля до номинального значения, не должна превышать 0,20%

**Примечание:** общее сопротивление потенциометра обратной связи  $R_0$  велико, а величина тока через  $R_0$  пренебрежительно мала.

При определении параметров автоколебаний (п.7 задания) принять передаточный коэффициент линейной части  $K=100$

При вычислении критического коэффициента усиления  $K$  (п. 8 задания) и максимальной статической ошибки (п. 9 задания) положить  $\beta=1$ .

Характеристика релейного элемента имеет вид, приведенный на рис 3 4.

### Библиографический список

- 1 Воронов А.А. и др. Теория автоматического управления Ч I,II - М. Высшая школа, 1986.
- 2 Васильев Д.В., Чуич В.Г. Системы автоматического управления (примеры расчета) - М.: Высшая школа, 1967.
3. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. - М.. Наука, 1977.
4. Попков С.Л. Следящие системы. - М.: Высшая школа, 1968

### 3.3. РАСЧЁТ ЛИНЕЙНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ДВУХКОНТУРНОЙ САУ ПО ЗАДАНЫМ ТРЕБОВАНИЯМ К КАЧЕСТВУ ЕЁ РАБОТЫ

Функциональная схема исследуемой системы представлена на рис 3.5

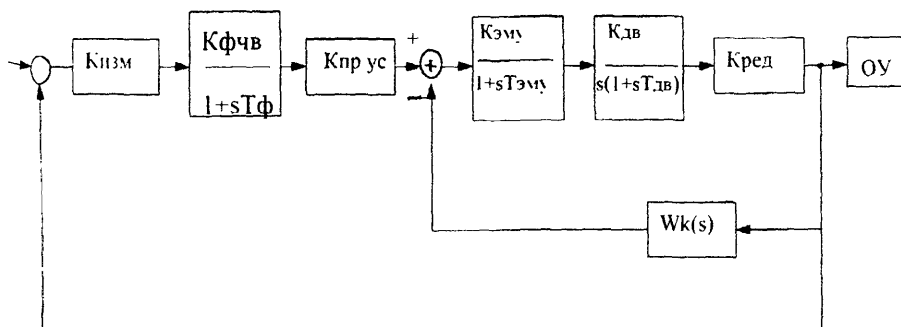


Рис 3.5

Исходные данные для расчета приведены в таблице 3.6

Таблица 3.6

| N<br>вар | Кизм<br>[в/град] | Кэму<br>[в/ма] | Тфчв<br>[сек] | Тэму<br>[сек] | Кдв<br>[I/в.сек] | Тдв<br>[сек] | Кред  | Тип<br>ЛАХ | Wmax<br>[град/<br>сек] |
|----------|------------------|----------------|---------------|---------------|------------------|--------------|-------|------------|------------------------|
| 0        | 30               | 4,0            | 0,008         | 0,025         | 1,0              | 0,1          | 0,002 | 2/1        | 15                     |
| 1        | 18               | 2,2            | ,007          | 0,019         | 2,25             | 0,2          | 0,001 | 3/1        | 28                     |
| 2        | 15               | 2,0            | 0,004         | 0,015         | 2,15             | 0,3          | 0,003 | 2/1        | 17                     |
| 3        | 22               | 3,2            | 0,0075        | 0,02          | 1,5              | 0,13         | 0,005 | 2/1        | 30                     |
| 4        | 28               | 2,8            | 0,008         | 0,003         | 2,0              | 0,12         | 0,002 | 3/1        | 22                     |
| 5        | 15               | 2,6            | 0,005         | 0,03          | 3,5              | 0,1          | 0,005 | 2/1        | 28                     |
| 6        | 20               | 4,2            | 0,007         | 0,025         | 2,22             | 0,15         | 0,004 | 2/1        | 18                     |
| 7        | 17               | 3,5            | 0,006         | 0,017         | 1,7              | 0,17         | 0,007 | 3/1        | 16                     |
| 8        | 25               | 2,5            | 0,009         | 0,022         | 2,5              | 0,19         | 0,008 | 2/1        | 25                     |
| 9        | 21               | 3,0            | 0,0055        | 0,035         | 3,0              | 0,25         | 0,006 | 3/1        | 19                     |

Таблица 3.7

| N<br>вар | $\varepsilon_{\max}$<br>[град<br>/с] | $z_v$<br>[град] | $z_{\omega}$<br>[град] | $\Delta\varphi(\omega_c)$<br>[град] | $t_p$<br>[сек] | H<br>[%] | $t_y$<br>[сек] | $\omega_p$<br>[сек] | $\mu$ |
|----------|--------------------------------------|-----------------|------------------------|-------------------------------------|----------------|----------|----------------|---------------------|-------|
| 0        | 2,0                                  | 0,12            | 0,06                   | 45                                  |                |          |                |                     |       |
| 1        | 4,5                                  | 0,25            |                        |                                     | 2              | 15       |                |                     |       |
| 2        | 2,8                                  | 0,1             |                        |                                     | 0,7            | 35       |                |                     |       |
| 3        | 3,8                                  | 0,22            |                        |                                     |                | 25       | 0,6            |                     |       |
| 4        | 4,0                                  | 0,18            |                        |                                     |                |          |                | 12                  | 1,4   |
| 5        | 2,0                                  | 0,14            |                        |                                     |                |          |                | 10                  | 1,25  |
| 6        | 4,0                                  | 0,22            |                        |                                     | 1,8            | 25       |                |                     |       |
| 7        | 2,5                                  | 0,24            |                        |                                     | 0,6            | 30       |                |                     |       |
| 8        | 3,0                                  | 0,17            | 0,05                   | 30                                  |                |          |                |                     |       |
| 9        | 3,5                                  | 0,20            |                        |                                     |                | 27       | 0,7            |                     |       |

Здесь приняты следующие обозначения:

Кизм., Кпр.ус., Кред. – коэффициенты преобразования измерительного устройства, предварительного усилителя и редуктора соответственно;

Кфчв., Тфчв - коэффициент преобразования и постоянная времени фазочувствительного выпрямителя;

Кэму, Тэму – коэффициент преобразования и постоянная времени электромашинного усилителя;

Кдв., Тдв - коэффициент преобразования и постоянная времени исполнительного двигателя;

$W_k(s)$  – передаточная функция корректирующего устройства;

$\omega_{\max}$ ,  $\varepsilon_{\max}$  - максимальные скорость и ускорение входного сигнала;

$z_v, z_\omega$  – ошибка по скорости и ускорению соответственно;

$\Delta\varphi(\omega_c)$  – запас устойчивости по фазе;

$t_p, t_y$  – время регулирования и установления переходной функции;

$N$  – перерегулирование выходной функции;

$\mu$  – показатель колебательности АЧХ;

$\omega_p$  – резонансная круговая частота.

### Задание

1. Провести анализ устойчивости системы, состоящей из функционально необходимых элементов.
2. Сделать расчет параметров типовой (желаемой) ЛАХ системы.
3. Осуществить выбор и расчет параметров корректируемой обратной связи.
4. Провести расчет скорректированной САУ:
  - а) расчет устойчивости;
  - б) оценку качества и построение переходного процесса.
5. Осуществить моделирование скорректированной САУ на ПЭВМ с целью уточнения структуры и параметров корректирующей обратной связи.

### Краткие методические указания

1. Для системы управления объектом, состоящей из функционально необходимых элементов (рис.3.5), определить необходимый  $K_{пр}$ , который обеспечивал бы заданное качество ее работы. Определить  $W\phi(s)$  разомкнутой системы с учетом  $K_{пр}$  и построить ее ЛАХ и ФЧХ. Качественно построить АФХ; оценить устойчивость системы. Сделать вывод о работоспособности системы.

2. Произвести расчёт параметров типовой (желаемой) ЛАХ по заданным требованиям к качеству работы следящей системы. Определить  $Wж(s)$  типовой (желаемой) системы, построить её ЛАХ и ФЧХ. Качественно построить АФХ. Оценить устойчивость замкнутой системы по построенным характеристикам. Сделать вывод.

3. По известным  $Wж(s)$  и  $W\phi(s)$  или  $Lж(s)$  и  $L\phi(s)$  определить  $Wк(s)$ , выбрать схему и рассчитать параметры корректирующей обратной связи, которые обеспечивают желаемый тип ЛАХ. В качестве дифференцирующего звена выбрать тахогенератор или тахомост. Составить принципиальную схему реализации цепи корректирующей обратной связи.

4. Провести моделирование скорректированной схемы на ПЭВМ. Сопоставить переходные функции, полученные по модели и расчетным путем.

## Библиографический список

1. Васильев Д.В., Чуич В.Г. Системы автоматического управления (примеры расчета). - М.: ВШ, 1967.
2. Расчет автоматических систем. /Под ред. А.В. Фатеева. М.: ВШ, 1973.
3. Справочное пособие по теории систем автоматического регулирования и управления. /Под ред. Е.А. Санковского.- Минск: Наука, 1973.
4. Печорина И.Н. Расчет САУ. Справочное пособие. - Свердловск: 1962.

### 3.4.АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И КАЧЕСТВО ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ДВУХКОНТУРНОЙ САУ

Структурная схема нелинейной двухконтурной САУ представлена ниже на рисунках 3.6÷3.9

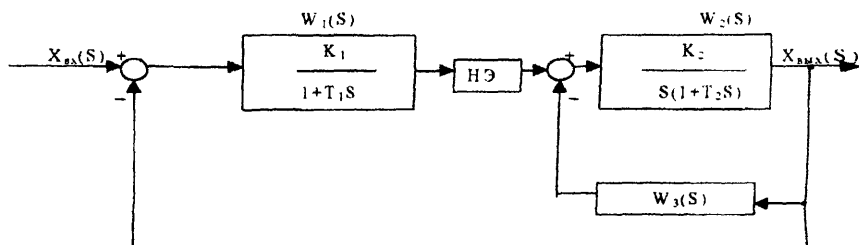


Рис. 3.6

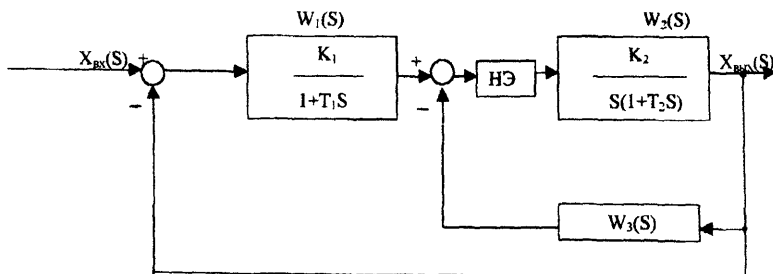


Рис. 3.7

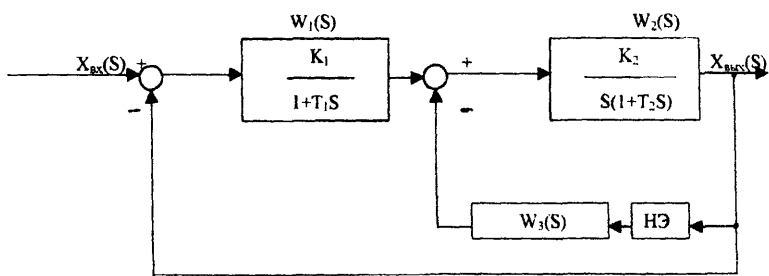


Рис. 3.8.

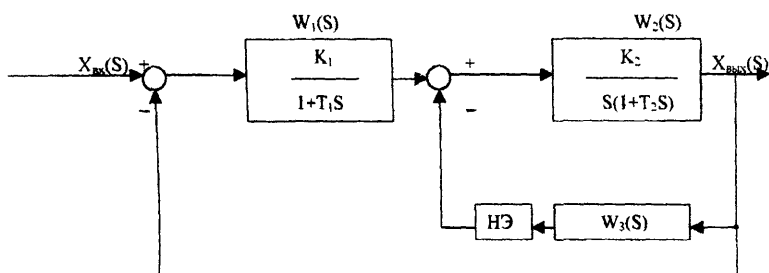


Рис. 3.9.

### Статические характеристики нелинейных элементов

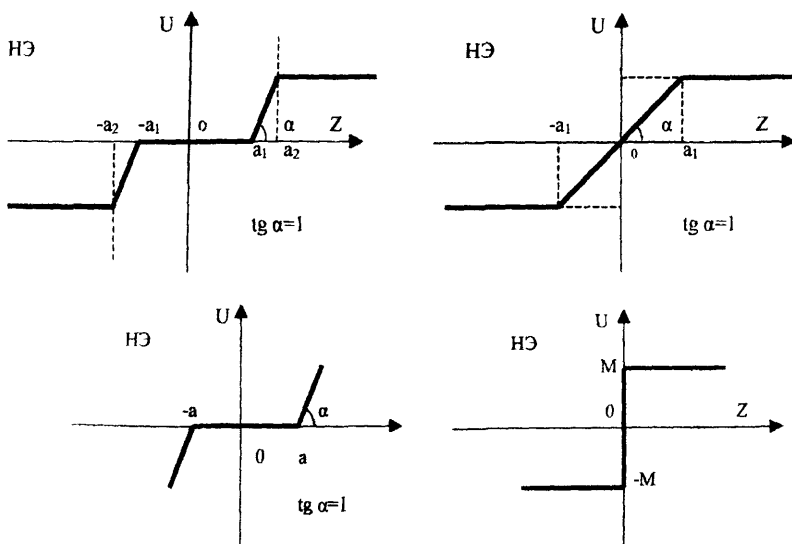


Рис. 3.10

Таблица 3.8

| N | Параметры НЭ |                |                |    |                |      |    |      |      |      |     |   | W <sub>3</sub> (S)                      |
|---|--------------|----------------|----------------|----|----------------|------|----|------|------|------|-----|---|-----------------------------------------|
|   | а            | а <sub>1</sub> | а <sub>2</sub> | М  | К <sub>1</sub> |      |    |      |      |      |     |   |                                         |
| 0 | -            | 5              | 10             | 1  | 50             | 0,02 | 10 | 0,1  | 16,6 | 0,2  | 0,0 | 2 | $\frac{K_3 S^2}{(1+T_3 S)(1+T_4 S)}$    |
| 1 | -            | 10             | -              | -  | 20             | 0,05 | 10 | 0,25 | 6,6  | 0,5  | 0,0 | 5 | «-»                                     |
| 2 | 10           | -              | -              | -  | 6,7            | 0,15 | 10 | 0,75 | 9,0  | 3,0  | 0,1 | 5 | $\frac{K_3 S^1}{(1+T_3 S)^2 (1+T_4 S)}$ |
| 3 | -            | -              | -              | 30 | 4,0            | 0,25 | 10 | 1,25 | 1,32 | 0,75 | 0,2 | 5 | $\frac{K_3 (1+T_3 S)}{(1+T_4 S)}$       |
| 4 | -            | 5              | 15             | -  | 4,0            | 0,25 | 10 | 1,25 | 5,4  | 5,0  | 0,2 | 5 | $\frac{K_3 S^1}{(1+T_3 S)^2 (1+T_4 S)}$ |
| 5 | -            | 5              | 10             | -  | 50             | 0,02 | 10 | 0,1  | 16,6 | 0,06 | 0,0 | 2 | $\frac{K_3 (1+T_3 S)}{(1+T_4 S)}$       |
| 6 | -            | -              | -              | 20 | 5,0            | 0,30 | 10 | 1,5  | 1,30 | 0,80 | 0,2 | 0 | «-»                                     |
| 7 | -            | 10             | -              | -  | 15             | 0,07 | 10 | 0,35 | 7,0  | 0,3  | 0,0 | 4 | $\frac{K_3 (1+T_4 S)}{(1+T_3 S)}$       |
| 8 | 10           | -              | -              | -  | 8              | 0,20 | 10 | 0,80 | 10,0 | 4,0  | 0,2 | 0 | «-»                                     |
| 9 | -            | 3              | 6              | 1  | 40             | 0,01 | 10 | 0,15 | 19,0 | 0,4  | 0,0 | 4 | $\frac{K_3 S}{(1+T_3 S)(1+T_4 S)}$      |

### Задание

1. Провести анализ возможности возникновения устойчивых автоколебаний (или потери устойчивости), обусловленных наличием заданного нелинейного элемента (НЭ).

2. Сделать расчет амплитуды и частоты автоколебаний (или потери устойчивости).

3. Произвести оценку параметров НЭ на амплитуду, частоту автоколебаний (или потери устойчивости) и показатели качества переходной функции.

4. Произвести оценку влияния величины рассогласования на входе НЭ на устойчивость, форму и показатели качества переходной функции.

5. Осуществить моделирование нелинейной САУ на ПЭВМ с целью сопоставления результатов, полученных на модели и расчетным путем.

## **Краткие методические указания**

Исследования нелинейной системы провести графоаналитическим способом.

Графоаналитический расчет возможности возникновения автоколебаний и их параметров или потери устойчивости заключается в преобразовании структурной схемы для приведения ее ко входу НЭ, в получении частотных характеристик линейной части системы и гармонических характеристик НЭ и их совместном исследовании на комплексной или логарифмической плоскости. При моделировании проводится сопоставление характеристик, полученных на модели и расчетным путем.

## **Библиографический список**

1. Вавилов А.А. Частотные методы расчеты нелинейных систем. - М.: Наука, 1970.
2. Криницкий И.И. Расчет нелинейных автоматических систем. - Киев.: Наука, 1968.
3. Васильев Д.В., Чуич В.Г. Системы автоматического управления (примеры расчета). - М.: ВШ, 1967.
4. Расчет автоматических систем. /Под ред. А.В.Фатеева/. М.: ВШ, 1973.
5. Справочное пособие по теории систем автоматического регулирования и управления /Под ред. Е.А.Санковского /. Минск.: ВШ, 1973.

## 4.ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

### 4.1. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ

1. Объем пояснительной записки должен быть не менее 25 страниц
2. Писать надо все полностью без сокращений, кроме общепринятых.
- 3 В содержание должны быть включены следующие разделы:
  - а) введение и задание;
  - б) кратко теоретическая часть;
  - с) постановка задачи и укрупненный алгоритм решения;
  - д) расчеты, графики, таблицы;
  - е) заключение.
4. В конце курсовой работы указать, какой литературой студент пользовался при выполнении работы.

### 4.2.КУРСОВАЯ РАБОТА

**Тема: "Анализ влияния нелинейных элементов на устойчивость и качество переходного процесса двухконтурной САУ"**

Структурная схема нелинейной двухконтурной САУ:

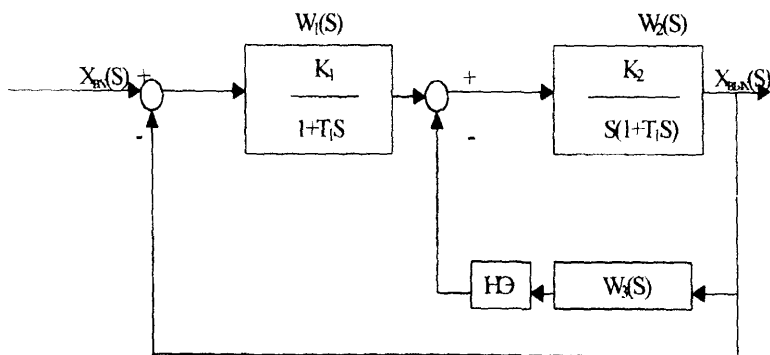


Рис.3.11

Таблица 3.9

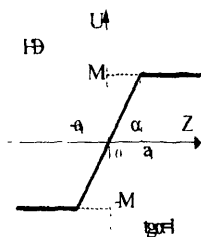
| Параметры НЭ |                |                |   | Параметры линейной части |                  |                |                  |                |                  | $W_3(S)$         |                                      |
|--------------|----------------|----------------|---|--------------------------|------------------|----------------|------------------|----------------|------------------|------------------|--------------------------------------|
| a            | a <sub>1</sub> | a <sub>2</sub> | M | K <sub>1</sub>           | T <sub>1,с</sub> | K <sub>2</sub> | T <sub>2,с</sub> | K <sub>3</sub> | T <sub>3,с</sub> | T <sub>4,с</sub> | $\frac{K_1 S^2}{(1+T_1 S)(1+T_2 S)}$ |
| -            | 10             | -              | - | 20                       | 0,05             | 10             | 0,25             | 6,6            | 0,5              | 0,05             |                                      |

### Задание

1. Анализ возможности возникновения устойчивых автоколебаний (или потери устойчивости), обусловленных наличием заданного нелинейного элемента (НЭ).

2. Расчет амплитуды и частоты автоколебаний (или потери устойчивости).

3. Оценка влияния параметров НЭ на амплитуду, частоту автоколебаний (или потери устойчивости) и показатели качества переходной функции.



4. Оценка влияния величины рассогласования на входе НЭ на устойчивость, форму и показатели качества переходной функции.

Рис.3.12

### Словесная формулировка задачи

Произвести структурное преобразование схемы, т.е. представить ее в виде двух последовательно соединенных частей: линейной и нелинейной. Осуществить гармоническую линеаризацию для нелинейности типа насыщения. Далее составить уравнения движения этих двух последовательно соединенных частей САУ. Затем определить уравнения движения разомкнутой системы и замкнутой. Подставляя в уравнение замкнутой системы вместо корня характеристическое уравнение  $S=j\omega$ , решить его относительно  $W(j\omega)$ . С помощью полученного основного уравнения графически исследовать устойчивость регулирования.

Разрешить характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы относительно частоты и амплитуды автоколебаний. Аналитическим критерием Михайлова проверить на устойчивость периодическое решение.

Частотными методами произвести оценку влияния параметров НЭ на амплитуду, частоту и показатели качества переходной функции.

Оценить влияние величины рассогласования на входе НЭ на устойчивость, форму и показатели качества переходной функции.

## Математическая постановка задачи

Пусть нелинейная двухконтурная САУ задана:

$$\text{ЛЧ: } X = AX + Bu \quad (1)$$

$$y = C'X \quad (2)$$

$$\text{НЧ: } u = f(y) \quad (3)$$

$$\text{НЭ: } y = \begin{cases} a_1 & x \geq a_1 \\ x & -a_1 < x < a_1 \\ -a_1 & x \leq -a_1 \end{cases}$$

$$X = (A - SI)^{-1} Bu$$

$$Y = C(A - SI)^{-1} Bu$$

$$W(S) = \frac{y(S)}{u(S)} = C(A - SI)^{-1} B,$$

$$\text{где } W_1(S) = \frac{K_1}{1 + T_1 S} \quad (4)$$

$$W_2(S) = \frac{K_2}{S(1 + T_2 S)} \quad (5)$$

$$W_3(S) = \frac{K_3^2}{(1 + T_3 S)(1 + T_4 S)} \quad (6)$$

Необходимо:

1) Получить передаточную функцию ЛЧ системы

$$W_{\text{ЛЧ}} = \frac{M(S)}{N(S)} \quad (7)$$

2) Получить передаточную функцию НЭ системы

$$W_{\text{НЭ}}(S).$$

3) Получить математическое описание гармонически линеаризованной системы

$$[N(S) - M(S)(q + \frac{q'}{\omega})S]y = 0 \quad (8)$$

$$X(A_0, \omega_0) + jY(A_0, \omega_0) = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) найти  $A_0$  и  $\omega_0$ .

4) Проверить на устойчивость периодическое решение аналитическим критерием Михайлова:

$$\begin{matrix} * & * & * & * \\ \left[ \frac{\partial X}{\partial A} \right] \left[ \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right] - \left[ \frac{\partial X}{\partial \omega} \right] \left[ \frac{\partial Y}{\partial A} \right] > 0 \end{matrix} \quad (10)$$

5) Решить уравнения гармонически линеаризованной системы [2]:

$$W_{\text{лч}}(\xi+j\omega)W_{\text{лч}}(A)=-1$$

$$\text{или } W_{\text{лч}}(\xi+j\omega)=\frac{-1}{W_{\text{нч}}(A)}=-Z(A) \quad (11)$$

6) Определить время затухания переходного процесса  $t_1$  от амплитуды  $a_0$  до  $A$ , величину перерегулирования  $a_n$ , число колебаний  $m$  за время переходного процесса.

При ограничениях

$$\text{ЛЧ: } X(0)=X_0 \neq 0$$

$$\text{НЧ: } \alpha \leq \pi/2; A^2 a_1^2 > 0$$

$$f(-y)=-f(y); \quad q'(A, \omega)=0 \quad (12)$$

### Укрупненный алгоритм

1. Осуществить преобразование структурной схемы (рис.3.11).
2. Осуществить гармоническую линеаризацию нелинейной двухконтурной САУ.
3. Аналитическим методом определить частоту и амплитуду автоколебаний. При помощи аналитического критерия Михайлова проверить найденные периодические решения на устойчивость.
4. Графическим методом Гольдфарба исследовать устойчивость нелинейной двухконтурной САУ.
5. Оценить влияние параметров НЭ на амплитуду? Оценить частоту автоколебаний (или потери устойчивости) и показатели качества переходной функции.
6. Оценить влияние величины рассогласования на входе НЭ на устойчивость? Оценить форму и показатели качества переходной функции.

### Решение задачи

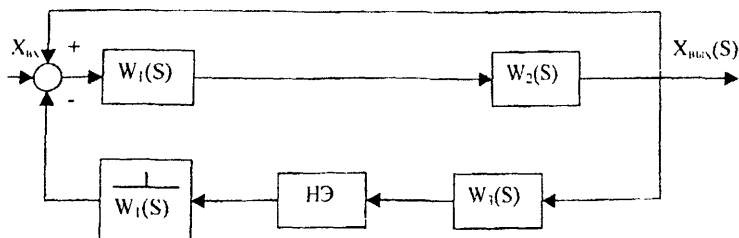


Рис.3.13

Преобразуем структурную схему нелинейной САР (рис.3.11). Для этого перенесем сравнивающий элемент за звено  $W_1(S)$ . Далее объединим линейные звенья в одно, после чего выделим линейные звенья из цепи обратной связи и получим расчетную схему [5] (рис.3.14).

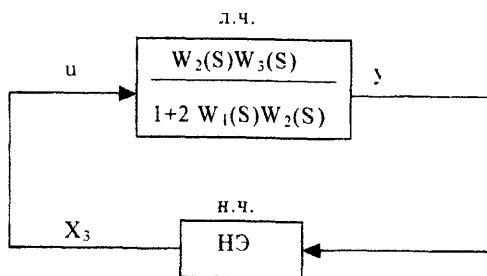
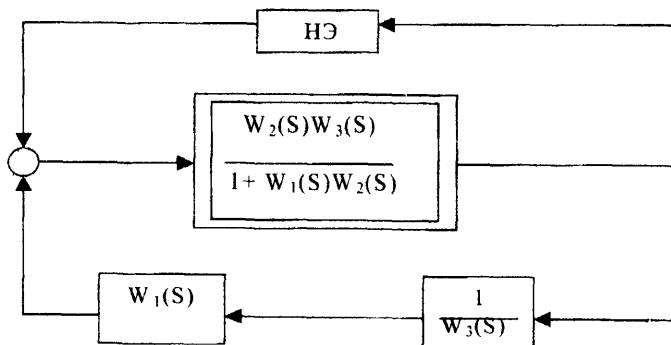
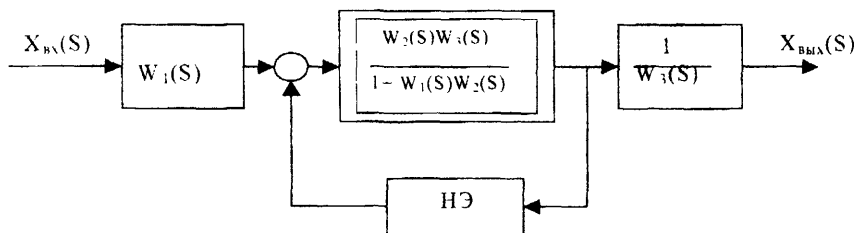


Рис. 3.14.

Пусть нелинейная САУ описывается уравнением вида

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ u = f(y) \\ y = C^T X \end{cases} \quad (13)$$

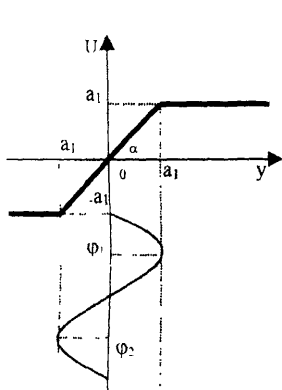
На входе нелинейной части гармонический сигнал вида  $y = A \sin \omega t$ .

(14)

Осуществим гармоническую линейризацию нелинейной САУ

$$U = \begin{cases} +a_1, & y \geq a_1 \\ y, & -a_1 < y < a_1 \\ -a_1, & y \leq -a_1 \end{cases} \quad (15)$$

Переключение происходит в точках  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :



$$\varphi_1 = \arcsin \frac{a_1}{A}, \quad \varphi_2 = \pi - \arcsin \frac{a_1}{A}$$

$$W_{HЧ} = q(A) = \frac{2}{\pi A} \int_0^{\varphi_2} f(A \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t)$$

Вычислим коэффициент гармонической линейризации:

$$\begin{aligned} q &= \frac{2}{\pi A} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} a_1 \sin \varphi d\varphi = \frac{2a_1}{\pi A} (-\cos \varphi) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \\ &= \frac{2a_1}{\pi A} \left[ \cos \arcsin \frac{a_1}{A} - \cos \left[ \pi - \arcsin \frac{a_1}{A} \right] \right] = \frac{4a_1}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{A^2}}. \end{aligned}$$

где  $\varphi = \omega t$ .

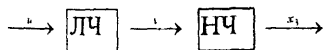
$$\text{Следовательно, } u = y \frac{4a_1}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{A^2}}, \quad (16')$$

Рис. 3.15

По определению  $\frac{y}{u} = \frac{W_2(S)W_3(S)}{1 + 2W_1(S)W_2(S)}$

Откуда  $y - u = \frac{W_2(S)W_3(S)}{1 + 2W_1(S)W_2(S)}, \quad (16)$

Найдем уравнение движения разомкнутой системы:



$$\frac{x_1}{y} W_{HЧ} = \frac{4a_1}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{A^2}},$$

Пользуясь уравнениями (16') и (16), получим

$$X_1 = u \frac{W_2(S)W_3(S)}{1 + 2W_1(S)W_2(S)} * \frac{4a_1}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{A^2}}.$$

Составим уравнение движения замкнутой системы (при  $-X_3=u$ )

$$\frac{W_2(S)W_3(S)}{1+2W_1(S)W_2(S)} * \frac{4a_1\sqrt{A^2 - a_1^2}}{\pi A^2} = -1$$

$$\frac{W_2(S)W_3(S)}{1-2W_1(S)W_2(S)} = -\frac{\pi A^2}{4a_1\sqrt{A^2 - a_1^2}} \quad (*)$$

Подставим значения функций  $W_1(S)$ ,  $W_2(S)$  и  $W_3(S)$  в выражение (\*)

$$\frac{K_2 K_3 S(1+T_1 S)}{(S(1+T_1 S)(1+T_2 S)+2K_1 K_2(1+T_3 S)(1+T_4 S))} = \frac{-\pi A^2}{4a_1\sqrt{A^2 - a_1^2}}, \quad (17)$$

т.е.  $W_{нч} = \frac{-1}{W_{пч}}$

В уравнении (17) левая часть является передаточной функцией линейной части системы, а правая часть - величина, обратная передаточной функции нелинейной части, взятой с обратным знаком.

Проанализируем возможность возникновения устойчивых автоколебаний, обусловленных наличием заданного нелинейного элемента.

Характеристическое уравнение системы после гармонической линеаризации имеет вид:

$$(S(1+T_1 S)(1+T_2 S)+2K_1 K_2)(1+T_3 S)(1+T_4 S) + \left[ \frac{4a_1\sqrt{A^2 - a_1^2}}{\pi A^2} (K_2 K_3 S^2(1+T_1 S)) \right] = 0$$

Подставим параметры линейной части и значение  $S=j\omega$ . Разделим на мнимую и вещественную части:

$$14.375 * 10^{-3} \omega^4 - \omega^2(10.85 + \frac{4 * 66a_1}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - a_1^2}) + 400 +$$

$$+ j(3.125 * 10^{-4} \omega^5 - \omega^3(202.5 * 10^{-3} + \frac{4 * 66a_1}{20\pi A^2} \sqrt{A^2 - a_1^2}) + 221) = 0.$$

Комплексное число равно нулю, если его мнимая и вещественная части равны нулю. Разделим последнее уравнение на мнимую и вещественную части, приравняв каждую часть к нулю:

$$\begin{cases} 14.375 * 10^{-3} \omega^4 - \omega^2(10.85 + \frac{4 * 66a_1}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - a_1^2}) + 400 = 0. \\ 3.125 * 10^{-4} \omega^5 - \omega^3(202.5 * 10^{-3} + \frac{4 * 66a_1}{20\pi A^2} \sqrt{A^2 - a_1^2}) + 221 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Чтобы решить систему (18) состоящую из двух уравнений с двумя неизвестными, домножим второе уравнение системы на 20, чтобы затем избавиться от членов, содержащих  $A$ :

$$14\,375 \cdot 10^{-3} \omega^4 - \omega^2 (10.85 + \frac{4 \cdot 66 a_1}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - a_1^2}) + 400 = 0$$

$$(6.25 \cdot 10^{-1} \omega^5 - \omega^3 (4.0 \cdot 10^{-1} + \frac{4 \cdot 66 a_1}{20 \pi A^2} \sqrt{A^2 - a_1^2}) + 4420 = 0 \quad (18')$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$8\,125 \cdot 10^{-3} \omega^4 - 6 \omega^2 - 4020 = 0.$$

Решим биквадратное уравнение:

$$D = 14.24 + 130.65 = 176.89 = 13.3^2$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{6.8 \pm 13.3}{2 \cdot 8\,125 \cdot 10^{-3}} = \begin{cases} -400 \\ 1236.9 \end{cases}$$

Так как частота - есть величина, принадлежащая множеству вещественных чисел, то частоты  $\omega_{3,4} = \pm j20$  мы отбрасываем. Следовательно,

$$\omega_{3,4} = \sqrt{1236.9} = \pm 35.17 \text{ с}^{-1}$$

Частота автоколебаний не может быть числом отрицательным, следовательно, частоту  $\omega_2 = -35 \text{ с}^{-1}$  мы не берем во внимание.

Частота автоколебаний  $\omega = 35.17 \text{ с}^{-1}$

Подставим найденную частоту во второе уравнение системы (18')

$$9562.46 - 5004.56 - \frac{103996.57 a_1}{A^2} \sqrt{A^2 - a_1^2} + 4420 = 0$$

$$8972.9 = \frac{103996.57 a_1}{A^2} \sqrt{A^2 - a_1^2}$$

$$\frac{0.086 A^2}{a_1} \sqrt{A^2 - a_1^2}$$

Возведем в квадрат левую и правую часть последнего уравнения

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{7.44 \cdot 10^{-3}}{a_1^2} A^4 - A^2 + a_1^2 &= 0 \\ A^2 - a_1^2 &> 0 \end{aligned} \right.$$

Подставим в полученное уравнение системы значение  $a_1 = 10$

$$\left\{ \begin{aligned} 7.44 \cdot 10^{-1} A^4 - A^2 + a_1^2 &= 0 \\ A^2 - a_1^2 &> 0 \end{aligned} \right.$$

$$7.44 \cdot 10^{-1} A^4 - A^2 + a_1^2 = 0 \quad (19)$$

$$D = 1 - 2.976 = -1.976; D < 0.$$

Так как дискриминант отрицательный, то корни уравнения (19) получаются комплексно-сопряженными, чего быть не может. Следовательно, при заданных начальных параметрах НЭ система автоматического управления

устойчива. Для того, чтобы в системе существовали автоколебания, необходимо изменить параметры нелинейного элемента.

Выясним условия существования автоколебаний в данной системе.

Пусть  $tg\alpha \neq 1$ , а  $tg\alpha = \frac{c}{a_1}$ , т.е.  $c \neq a_1$ .

Второе уравнение системы (18') примет вид:

$$6.25 \cdot 10^{-3} \omega^4 - \omega^2 (4.05 \cdot 10^{-3} + \frac{4 \cdot 66 \cdot c}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - a_1^2}) + 4420 = 0.$$

При изменении параметров НЭ частота автоколебаний  $\omega = 35.17^{c-1}$  не изменится

Подставим это значение  $\omega$  в последнее уравнение:

$$9562.46 - 5004.56 - \frac{103996.57 \cdot c}{A^2} \sqrt{A^2 - a_1^2} + 4420 = 0$$

$$8972.59 - \frac{103996.57 \cdot c}{A^2} \sqrt{A^2 - a_1^2}$$

$$\begin{cases} \frac{7.44 \cdot 10^{-3}}{c^2} A^2 + a_1^2 = 0 \\ A^2 - a_1^2 > 0 \end{cases}$$

$$\frac{7.44 \cdot 10^{-3} A^4}{c^2} - A^2 + a_1^2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot \frac{7.44 \cdot 10^{-3}}{c^2} \cdot a_1^2 \geq 0 \quad (20)$$

Выражение (20) условие существования автоколебаний в системе.

Возьмем  $a_1 = 1/2$ ;  $c = 1/3$ , т.е. числа, удовлетворяющие неравенству (20).

Тогда  $D = 1 - 7.44 \cdot 10^{-3} \cdot 9 = 0.933 = 0.966^2$

$$A_{1,2}^2 = \left[ \frac{1 \pm 0.966}{9 \cdot 2 \cdot 7.44 \cdot 10^{-3}} \right] = \begin{bmatrix} 14.68 \\ 0.2539 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = 0.5$$

$$A_2 = 3.83$$

Отрицательные амплитуды  $A_3 = -0.5$  и  $A_4 = -3.83$  мы отбрасываем, т.к.  $A > 0$ . При найденных амплитудах условие  $A^2 - a_1^2 > 0$  выполняется.

Таким образом, найдено два периодических решения системы; теперь возникает вопрос об устойчивости их.

Проверим на устойчивость периодические решения аналитическим критерием Михайлова. Периодическое решение устойчиво, если выполняется условие (10)

$$\begin{matrix} * & * & * & * \\ \left[ \frac{\partial X}{\partial A} \right] \left[ \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right] - \left[ \frac{\partial X}{\partial \omega} \right] \left[ \frac{\partial Y}{\partial A} \right] \Big|_0 \end{matrix}.$$

В нашем случае

$$\begin{cases} X(\omega, A) = 14\,375 \cdot 10^{-3} \omega^4 - \omega^2 (10\,85 + \frac{28\,03}{A^2}) \sqrt{A^2 - 0.25} + 400 = 0 \\ Y(\omega, A) = 3\,125 \cdot 10^{-4} \omega^5 - \omega^3 (202\,5 \cdot 10^{-3} + \frac{1 \cdot 4}{A^2}) \sqrt{A^2 - 0.25} + 221\omega = 0 \end{cases}$$

$$\left[ \frac{\partial X}{\partial A_a} \right]^* = \frac{-28 \cdot 03 \omega^2 (1 - 2A \frac{2}{a})}{2A^3 \sqrt{A^2 - 0.25}},$$

$$\left[ \frac{\partial X}{\partial \omega_a} \right]^* = 4 \cdot 14 \cdot 375 \cdot 10^{-3} \omega^3 \frac{3}{a} - 2\omega_a (10 \cdot 85 - \frac{28 \cdot 03}{A^2}) \sqrt{A^2 - 0.25};$$

$$\left[ \frac{\partial Y}{\partial A_a} \right]^* = \omega^3 \frac{1}{a} \cdot 4 \cdot \frac{(1 - 2A \frac{2}{a})}{2A^3 \sqrt{A^2 - 0.25}};$$

$$\left[ \frac{\partial Y}{\partial \omega_a} \right]^* = 5 \cdot 3 \cdot 125 \cdot 10^{-4} \omega^4 \frac{4}{a} - 3\omega^2 \frac{2}{a} (202 \cdot 5 \cdot 10^{-3} + \frac{1 \cdot 4}{A^2}) \sqrt{A^2 - 0.25} + 221.$$

Проверим на устойчивость периодическое решение

$$\begin{cases} \omega_a = 35 \cdot 17 c^{-1} \\ A_a = 0.5 \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{Имеем } \left[ \frac{\partial X}{\partial A_a} \right]^* = -1093873.7 \quad \left[ \frac{\partial Y}{\partial A_a} \right]^* = -1921518.1,$$

$$\left[ \frac{\partial X}{\partial \omega_a} \right]^* = 1253.27, \quad \left[ \frac{\partial Y}{\partial \omega_a} \right]^* = 1434.25.$$

Поставим найденные значения частных производных в формулу (10)  
 $-1.6888 \cdot 10^9 + 2.0818 \cdot 10^9 = 8393 \cdot 10^5 > 0.$

Следовательно, периодическое решение (21) устойчиво.

Проверим на устойчивость второе периодическое решение

$$\begin{cases} \omega_a = 35 \cdot 17 c^{-1} \\ A_a = 3 \cdot 83 \end{cases}$$

Имеем:

$$\left[ \frac{\partial X}{\partial A_a} \right]^* = 2301.94 \left[ \frac{\partial Y}{\partial A_a} \right]^* = 4019.66$$

$$\left[ \frac{\partial X}{\partial \omega_a} \right]^* = 12283.03; \left[ \frac{\partial Y}{\partial \omega_a} \right]^* = 515.86.$$

Подставим найденные значения частных производных в формулу (10)

$$2301.4 * 1515. - 1228.3 * 4019.6 = -3748784. < 0.$$

Следовательно, второе периодическое решение неустойчиво.

Задача нахождения частоты и амплитуды колебаний может быть решена графически. Для этого воспользуемся уравнением (17):

$$\frac{K_2 K_3 S^2 (1 + T_1 S)}{(S(1 + T_1 S)(1 + T_2 S) + 2K_1 K_2)(1 + T_3 S)(1 + T_4 S)} = \frac{-\pi A^2}{4c \sqrt{A^2 - a_1^2}}.$$

Годограф левой части при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  представляет собой АФЧХ линейной части разомкнутой системы следующего вида.

$$\frac{-K_2 K_3 \omega^2 (1 + jT_1 \omega)}{(j\omega(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) + 2K_1 K_2)(1 + j\omega T_3)(1 + j\omega T_4)} = \frac{-\pi A^2}{4c \sqrt{A^2 - a_1^2}}.$$

Годограф правой части этого уравнения при изменении амплитуды от 0 до  $\infty$  представляет собой амплитудную характеристику НЭ системы. Точка пересечения АФЧХ и амплитудной характеристики НЭ определяет частоту и амплитуду возможных автоколебаний.

$$W_{14}(j\omega) = \frac{-K_2 K_3 \omega^2 (1 + jT_1 \omega)}{(j\omega(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) + 2K_1 K_2)(1 + j\omega T_3)(1 + j\omega T_4)}.$$

Умножим и числитель, и знаменатель данного уравнения на сопряженные знаменателю выражения, чтобы избавиться от мнимой единицы в знаменателе. Приведем подобные члены

$$W_{14}(j\omega) = \frac{-K_2 K_3 \omega^2 (1 + jT_1 \omega)(1 + jT_3 \omega)(-T_1 \omega^2 - T_2 \omega^2 + 2K_1 K_2 + jT_1 T_3 \omega^3 - j\omega)}{(T_1^2 T_2^2 \omega^6 + (T_1^2 + T_2^2) \omega^4 - \omega^2 (4T_1 K_1 K_2 + 4K_1 K_2 T_2 - 1) + 4K_1^2 K_2^2)(1 + T_3^2 \omega^2)(1 + T_4^2 \omega^2)}$$

Подставим значения параметров линейной части и разделим последнее уравнение на мнимую и действительную части:

$$\operatorname{Re}(\omega) = \frac{-66\omega^2[(1+2.5 \cdot 10^{-3}\omega^2)(400-0.3\omega^2) + (0.5\omega + 1.25 \cdot 10^{-3}\omega^3) * (12.5 \cdot 10^{-3}\omega^3 - \omega)]}{(1+56 \cdot 10^{-4}\omega^5 + 0.065\omega^4 - 239\omega^2 + 160000)(1+0.25\omega^2) * (1-0.0025\omega^2)}$$

$$\operatorname{Im}(\omega) = \frac{-66\omega^2[(1+2.5 \cdot 10^{-3}\omega^2)(12.5 \cdot 10^{-3} * 10^{-3}\omega\omega^2) + (400-0.3\omega^2) * (0.5\omega - 12.5 \cdot 10^{-3}\omega^3)]}{(1+56 \cdot 10^{-4}\omega^5 + 0.065\omega^4 - 239\omega^2 + 160000)(1+0.25\omega^2) * (1+0.0025\omega^2)}$$

Подставляя различные значения  $\omega$ , подсчитаем значения мнимой и действительной частей:

Таблица 3.10

| $\omega$ | $\operatorname{Re}(\omega)$ | $\operatorname{Im}(\omega)$ |
|----------|-----------------------------|-----------------------------|
| 0        | 0                           | 0                           |
| 1        | -0.13                       | 0.066                       |
| 3        | -0.47                       | -65                         |
| 5        | -0.6                        | 1.55                        |
| 10       | -0.7                        | 3.42                        |
| 15       | -1.94                       | 8.95                        |
| 20       | -2.22                       | 4.5                         |
| 25       | -8.35                       | 8.87                        |
| 30       | -11.2                       | 3.88                        |
| 35.2     | -9.094                      | 0.01                        |

Амплитудную характеристику НЭ построим при помощи функции

$$Z(A) = \frac{-1}{W_H} = \frac{-2.36A^2}{\sqrt{A^2 - 0.25}}$$

Для функции  $Z(A)$  область допустимых значений аргумента  $A - (0.5; \infty)$ .  
Найдем минимальное значение функции  $Z(A)$ .

Производная  $Z(A)$  равна

$$Z'(A) = \frac{-2.36A^3 + 1.18A}{\sqrt{(A^2 - 0.25)^3}}$$

$Z'(A)$  не определена и равна нулю в точках  $A = \pm\sqrt{1/2}$ ;  $A = \pm 0.5$ ;  $A = 0$ .

Значения  $(\pm 0.5$  и  $0)$  не входят в область допустимых значений аргумента функции  $Z(A)$ . Следовательно, максимальное значение функция принимает в точке  $A = \sqrt{1/2}$ ; ( $A = -\sqrt{1/2}$  не входит в область допустимых значений).

Осуществим проверку: действительно ли в точке  $A = \sqrt{1/2}$  функция  $Z(A)$  достигает своего максимума:  $A = \sqrt{1/2} \approx 0.707$ .

Таблица 3.11

| A       | $(0.5; \sqrt{1/2})$ | $\sqrt{1/2}$ | $(\sqrt{1/2}; \infty)$ |
|---------|---------------------|--------------|------------------------|
| $Z'(A)$ | +                   | 0            | -                      |
| $Z(A)$  | $\nearrow$          | -2.36        | $\searrow$             |

Из таблицы 3.11 видно, что максимальное значение функции  $Z(A)$  принимает в точке  $A=\sqrt{1/2}$ :  $Z(\sqrt{1/2})=-2.36$ ;  $Z(0.5)=-9.67$ ;  $Z(3.83)=-9.12$

Используя полученные данные, построим годографы в координатах  $I_m, \text{Re}$ .

Годографы  $W_{\text{лч}}(j\omega)$  и  $-Z(A)$  пересекаются в двух точках. Это означает, что уравнение  $W_{\text{лч}}(j\omega) = \frac{-1}{W_H(A)} = -Z(A)$

имеет два периодических решения

$$y=A_1 \sin \omega t, y=A_2 \sin \omega t,$$

параметры которых определены  $\omega=35.17 \text{ c}^{-1}$ ,  $A_1=0.5$ ;  $A_2=3.83$  (рис.3.15)

Для устойчивости периодического решения требуется, чтобы АФЧХ линейной части системы  $W_{\text{лч}}(j\omega)$  охватывала часть годографа  $-Z(A)$ , соответствующую меньшим амплитудам. Поэтому первое решение является устойчивым, а второе - неустойчивым. Следовательно, в системе устанавливаются автоколебания с амплитудой  $A_0=0.5$  и частотой  $\omega_0=35.17 \text{ c}^{-1}$ , т.е.  $y_0=0.5 \sin(35.17t)$ .

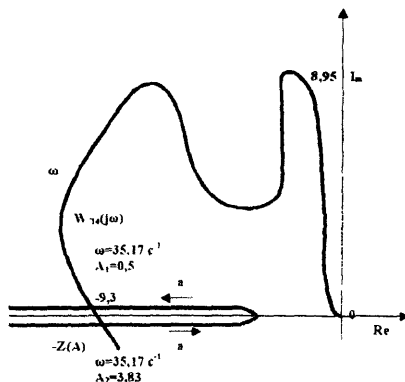


Рис.3.15

Исследование качества переходного процесса проведем частотными методами

Коэффициент затухания  $\xi$  и частоту колебаний  $\omega$  переходного процесса в нелинейной системе будем отыскивать путем решения гармонически линеаризованного уравнения:

$$W_{\text{лч}}(j\omega + \xi) W_{\text{нч}}(A) = -1 \quad (22')$$

$$\text{или } W_{\text{лч}}(j\omega + \xi) = \frac{-1}{W_{\text{нч}}(A)} = \frac{-1}{-Z(A)}, \quad (22)$$

где  $W_{\text{лч}}(j\omega + \xi)$  получается из передаточной функции линейной части системы  $W_{\text{лч}}(S)$  подстановкой  $S = (j\omega + \xi)$ . Уравнение (22) будем решать графически. Для этого в передаточной функции линейной части системы

$$W_{\text{лч}}(S) = \frac{K_2 K_3 S^2 (1 + T_1 S)}{(S(1 + T_1 S)(1 + T_2 S) + 2K_1 K_2)(1 + T_3 S)(1 + T_4 S)}$$

произведем подстановку  $S = (j\omega + \xi)$ . Получим

$$W_{\text{лч}}(S) = \frac{K_2 K_3 (j\omega + \xi)^2 (1 + T_1 \xi + j\omega T_1)}{(j\omega + \xi)(1 + T_1 \xi + j\omega T_1)(1 + T_2 \xi + j\omega T_2) + 2K_1 K_2)(1 + T_3 \xi + j\omega T_3)(1 + T_4 \xi + j\omega T_4)}$$

Модуль этой функции

$$A(\xi, \omega) = \frac{K_2 K_3 (\omega^2 + \xi^2) \sqrt{(1 + T_1 \xi)^2 + \omega^2 T_1^2}}{\sqrt{(1 + T_1 \xi)^2 + \omega^2 T_1^2} \sqrt{(1 + T_2 \xi)^2 + \omega^2 T_2^2} (\xi + \xi^2 (T_1 + T_2) - \omega^2 (T_1 + T_2) -$$

$$+ T_1 T_2 \xi^3 - 3\omega^2 T_1 T_2 \xi + 2K_1 K_2)^2 + (\omega + 2\omega \xi (T_1 + T_2) + 3\omega T_1 T_2 \xi^2 - \omega^3 T_1 T_2)^2}$$

и фаза

$$\varphi(\xi, \omega) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\xi} - \operatorname{arctg} \frac{\omega + 2\omega T_1 \xi + 2\omega T_2 \xi + 3\omega T_1 T_2 \xi^2 - \omega^3 T_1 T_2}{\xi + \xi^2 (T_1 + T_2) - \omega^2 (T_1 + T_2) + T_1 T_2 \xi^3 - 3\omega^2 T_1 T_2 \xi + 2K_1 K_2} -$$

$$- \operatorname{arctg} \frac{\omega T_1}{1 + T_1 \xi}.$$

Подставим в последние выражения численные значения параметров:

$$A = \frac{66(\xi^2 + \omega^2)}{\sqrt{\left[ \left( (1 + 0,5\xi^2) + 0,25\omega^2 \right) \left( (\xi + 0,3\omega^2 + 12,5 \cdot 10^{-3} \xi^3 - 37,5 \cdot 10^{-3} \omega^2 \xi + 400)^2 + (\omega + 2\xi\omega \cdot 0,3 + 37,5 \cdot 10^{-3} \omega^2 \xi - 12,5 \cdot 10^{-3} \omega^3)^2 \right) \right]}}$$

$$\varphi(\xi, \omega) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\xi} - \operatorname{arctg} \frac{\omega + 0,6\omega\xi + 37,5 \cdot 10^{-3} \omega \xi^2 - 12,5 \cdot 10^{-3} \omega^3}{\xi + \xi^2 \cdot 0,3 - 0,3\omega^2 + 12,5 \cdot 10^{-3} \xi^3 - 37,5 \cdot 10^{-3} \omega^2 \xi + 400} -$$

$$- \operatorname{arctg} \frac{0,5\omega}{1 + 0,5\xi}$$

Построим несколько кривых, задаваясь различными постоянными значениями показателя затухания  $\xi$ . При  $\xi=-1$  имеем

$$A = \frac{66(1 + \omega^2)}{\sqrt{[0.25 + 0.25\omega^2][399.29 - 0.26\omega^2]^2 + (0.44\omega - 0.013\omega^3)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = 2\arctg(-\omega) - \arctg\omega - \arctg\left[\frac{0.4375\omega - 0.013\omega^3}{399.29 - 0.2625\omega^2}\right].$$

При  $\xi=3$  имеем

$$A(\omega) = \frac{66(9 + \omega^2)}{\sqrt{4 + 0.25\omega^2} \sqrt{(406.04 - 0.41\omega^2)^2 + (3.14\omega - 0.13\omega^3)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = 2\arctg\frac{\omega}{5} - \arctg\frac{3.14\omega - 0.13\omega^3}{406.04 - 0.41\omega^2}.$$

Получаем

$\xi=-1$

| $\omega$ | $\varphi$ | $A$    |
|----------|-----------|--------|
| 0        | -0.14     | 0.33   |
| 1        | -13.5     | 0.47   |
| 3        | -214.7    | 1.1    |
| 5        | -236.4    | 1.7    |
| 8        | -248.7    | 2.78   |
| 10       | -254.1    | 3.55   |
| 15       | -264      | 5.79   |
| 20       | -278.6    | 8.55   |
| 25       | -300      | 11.0   |
| 30       | 0327      | 27.78  |
| 35       | -345.6    | 117.79 |

Таблица 3 12

$\xi=3$

| $\omega$ | $A$   | $\varphi$ |
|----------|-------|-----------|
| 0        | 0.73  | 0         |
| 1        | 0.78  | 25.87     |
| 3        | 1.18  | 57.7      |
| 5        | 1.77  | 71        |
| 10       | 3.65  | 80.2      |
| 15       | 6.34  | 84        |
| 20       | 10.8  | 95.72     |
| 25       | 16.0  | 121.8     |
| 27       | 18.42 | 144.2     |
| 30       | 16.15 | 173       |
| 32       | 13.66 | 0.72      |

Кривая при  $\xi=0$  совпадает с кривой, представленной на рисунке 3 15. Кривые  $W_{\text{лп}}(\xi=j\omega)$  при  $\xi=0$ ,  $\xi=-1$ ,  $\xi=3$  представлены на рисунке 6. На этом же графике

нанесена обратная амплитудно-фазовая характеристика  $-Z(a) = \frac{-2.36A^3}{\sqrt{A^2 - 0.25}}$

Согласно кривым на графике для любого  $\xi \geq 0$  в системе существуют периодические решения, соответствующие автоколебаниям.

Произведем грубую оценку основных качественных показателей. Пусть начальное значение амплитуды  $a=a_0=0.6$ . Время переходного процесса, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается от  $a=0.6$  до значения  $A=0.5038$ , приближенно оценим по формуле (расчеты ведутся для  $W_{\text{лп}}(0, j\omega)$  [5]:

$$t_1 \approx \frac{1}{\xi_{cp}} \ln \frac{A}{a_0}, \text{ где } \xi = 1 \text{ с}^{-1}, t_1 \approx 0.18 \text{ с}.$$

Оценку величины перерегулирования произведем по формуле

$$a_n \approx a_0 \exp \frac{\xi_{cp}}{\omega_{cp}},$$

где  $\omega_{cp}$  - среднее значение частоты колебаний

$$\omega_{cp} = \frac{32 + 35.17}{2} = 33.59 \text{ с}^{-1} \quad a_n \approx 0/66^2$$

Число колебаний за время переходного процесса

$$m \approx \frac{\omega_{cp}}{2\pi\xi_{cp}} \ln \frac{A}{a_0} \quad m \approx 0.94 \approx 1.$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы после подстановки  $S=3+j\omega$  и разделения на мнимую и вещественную части можно представить в виде системы

$$X: 0.02\omega^4 - 15.56\omega^2 + 1169.4 + \frac{27.97}{A^2} \sqrt{A^2 - 0.25(10.35 - 1.45\omega^2)} = 0$$

$$Y: 3 \cdot 10^{-4}\omega^5 - 0.4\omega^3 + 293.27\omega + \frac{27.97}{A} \sqrt{A^2 - 0.25(7.35 - 0.05\omega^2)} = 0$$

$$\left[ \frac{\partial X}{\partial A_a} \right]^* = \left[ \frac{1 - 2A_a^2}{2A_a^3 \sqrt{A_a^2 - 0.25}} \right] * 27.97(10.35 - 1.45\omega_a^2)$$

$$\left[ \frac{\partial Y}{\partial A_a} \right]^* = \left[ \frac{1 - 2A_a^2}{2A_a^3 \sqrt{A_a^2 - 0.25}} \right] * 27.97(17.35\omega_a - 0.05\omega_a^3)$$

$$\left[ \frac{\partial X}{\partial \omega_a} \right]^* = 0.08^3 - 31.21\omega - 2.9\omega \frac{27.97}{A^2} \sqrt{A_a^2 - 0.25}$$

$$\left[ \frac{\partial Y}{\partial \omega_a} \right]^* = 15 \cdot 100^{-3}\omega^4 - 123\omega^2 + 293.27 + \frac{205.58}{A^2} \sqrt{A^2 - 0.25} \frac{4.2}{A^2} \sqrt{A^2 - 0.25\omega^2}$$

Подставим частные производные в формулу (10). Для первого периодического решения получим:

$$-1.15992 \cdot 10^9 + 2.0026 \cdot 10^9 > 0$$

Следовательно, первое решение устойчиво.

Для второго периодического решения имеем

$$761707.4 - 1683979.3 < 0.$$

Следовательно, второе решение неустойчиво.

Время переходного процесса, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается от значения  $a_0=0.61$  до значения  $A=0.502$ , равно  $t_1=0.195$  с. Величина перерегулирования  $a_p \approx 0.56$ . Число колебаний за время переходного процесса  $m=0.99 \approx 1$ , т.е. одно колебание.

Параметры устойчивых автоколебаний, найденные графически, совпадают с параметрами, полученными аналитически.

### Основные выводы

В данной работе проведен анализ влияния нелинейного элемента на устойчивость переходного процесса двухконтурной САУ.

При заданных параметрах нелинейного элемента система автоматического управления устойчива. Для того, чтобы в системе существовали автоколебания, потребовалось изменить параметры нелинейного элемента. Было найдено условие - при каких значениях параметров  $a_1$  и  $c$  в системе будут автоколебания. Взяв конкретные значения  $a_1$  и  $c$ , было найдено два периодических решения системы. Вопрос об устойчивости решен при помощи аналитического критерия Михайлова. Периодическое решение оказалось устойчивым, а решение неустойчивым. Параметры устойчивых автоколебаний, полученных аналитическим, следующие:  $\omega_0=35.17\text{с}^{-1}$ ,  $A_0=0.50$ .

Задача нахождения частоты и амплитуды колебаний была также решена графически методом Гольдфарба. Построенные годографы линейной части и нелинейной части пересеклись в точке  $\text{Re}(\omega)=-9.094$ ;  $I_m=0.001$ ,  $\omega=35.2\text{с}^{-1}$ . Частота  $\omega_0=35.2\text{с}^{-1}$  совпадает с частотой автоколебаний, найденной аналитическим путем. Амплитудная характеристика нелинейного элемента системы принимает значение - 9.094 в двух точках:  $A_2=3.81$  и  $A_1=0.504$ , что примерно совпадает с амплитудами автоколебаний, найденными аналитическим методом. По графику, представленному на рисунке 5 мы определили, что периодическое решение  $\omega_0=35.2\text{с}^{-1}$ ;  $A_0=0.504$  является устойчивым, так как АФЧХ линейной части системы охватывает часть годографа нелинейной части, соответствующую меньшим амплитудам. Второе же решение  $\omega_0=35.2\text{с}^{-1}$ ;  $A_2=3.81$  является неустойчивым. Этот вывод об устойчивости совпадает с выводом об устойчивости, сделанным при помощи аналитического критерия Михайлова.

Исследование качества переходного процесса было проведено частотными методами. Частотные характеристики линейной части системы и нелинейной части представлены на рисунке 5. Кривые  $W_{\text{лч}}(\xi, j\omega)$  при  $\xi < 0$  не пересекают частотную характеристику нелинейного элемента. Согласно этому графику, периодическое решение  $A_0=0.50$ ;  $\omega=35.17\text{с}^{-1}$  действительно соответствует автоколебаниям, т.к.

любое увеличение амплитуды колебаний приводит к  $\xi < 0$ , а любое уменьшение ее -  $\xi > 0$ .

Была произведена грубая оценка основных качественных показателей переходного процесса. Время затухания переходного процесса от  $a_0=0.6$  до  $A=0.5038$   $t_1 \approx 0.18$  с. Величина перерегулирования  $a_n \approx 66$ . Число колебаний за время переходного процесса  $m \approx 0.94=1$ .

При  $\xi=3$  периодические решения, найденные графическим путем, следующие

$$1) \begin{cases} A = 0.502 \\ \omega = 32c^{-1} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} A = 5.77 \\ \omega = 32c^{-1} \end{cases}.$$

При  $\xi=3$  время переходного процесса и число колебаний увеличиваются и равны соответственно  $t_1=0.1995$  с,  $m=0.99=1$ . Величина перерегулирования  $a_n \approx 56$ .

Таким образом, изменение  $\xi$  приводит к незначительному изменению амплитуды и частоты колебательных режимов, а также изменению времени переходного процесса и числа колебаний. Устойчивость автоколебаний системы при изменении  $\xi$  не нарушается.

### Библиографический список

1. Вавилов А.А. Частотные методы расчета нелинейных систем. - М.: Наука, 1970.
2. Кринецкий И.Н. Расчет нелинейных автоматических систем. - Киев: ВПШ, 1968.
3. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования - М.: Наука, 1972.
4. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.А. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. - М.: Машиностроение, 1985.
5. Топчеев Ю.И., Цыпляков А.П. Задачник по теории автоматического регулирования. - М.: Машиностроение, 1977.
6. Справочник по теории автоматического управления // под ред. А.А. Красовского - М.: Наука, 1987.
7. Теория автоматического управления // под ред. А.А. Воронова, ч. I, II - М.: Высшая школа, 1986.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В настоящее время курс «Основы теории управления» является одним из важных курсов, изучаемых в высших технических учебных заведениях и университетах. На его основе изучаются далее теоретические основы автоматизированных систем, проектирование информационных систем, теория АСУ ТП, теория автоматизированных систем переработки информации и организационно-экономического управления и др.

Получение практических навыков расчета и проектирования систем требует от студентов решения довольно большого количества задач. В пособие включены задачи по основным разделам теории автоматического управления.

Учебные материалы по разделам и примеры решенных задач позволят студентам-заочникам лучше справиться с выполнением контрольных и курсовой работ, а также облегчат освоение теоретического курса лекций. Кроме того, приведенный пример курсовой работы поможет студентам освоить методику проектирования (расчета) системы.

В целом материал учебного пособия направлен на то, чтобы студенты в инженерной практике смогли бы для конкретных промышленных систем получить математическое описание их, правильно установить допустимые запасы устойчивости, показатели качества и решить задачу параметрического синтеза системы оптимального управления.

Автор будет благодарен за все замечания по содержанию и методическому построению учебного пособия.

**Программа курса «Основы теории управления»**

**Цель и задачи дисциплины**

Целью дисциплины является освоение принципов и методов анализа и синтеза системы автоматического управления .

Курс базируется на знании студентами ранее изучавшихся следующих дисциплин: высшая математика, физика, теория электрических цепей, вероятностные методы, программирование.

В результате изучения курса студенты должны:

- знать методы математического описания САУ и свойства ее элементов; критерии устойчивости и качества САУ; принципы и методы анализа и синтеза САУ;
- уметь использовать методы теории управления в проектировании САУ различных классов; проводить исследования систем автоматического регулирования на вычислительных машинах ( аналоговых и цифровых ); дать правильную интерпретацию полученным результатам;
- иметь представления о перспективных направлениях ОТУ.

**Содержание курса**

**1. Предмет курса, его задачи, основные понятия и определения**

Роль автоматизации на современном этапе научно-технического прогресса. Примеры систем управления ( САУ, АСУ ТП, АСНИ, САПР и т.д. ). Место курса "ОТУ" в учебном процессе.

Объект и система управления. Постановка задач управления, цель и критерии качества управления.

Функциональная схема САУ. Классификация САУ. Принципы управления по отклонению и по возмущению. Комбинированные схемы.

**2. Математическое описание САУ и ее элементов, характеристики линейных САУ**

Требования, предъявляемые к динамическим свойствам САУ. Типовые динамические звенья САУ.

Передаточные функции типовых звеньев. Алгебра передаточных функций. Использование преобразования Лапласа в построении математических моделей. Описание САУ методами пространства состояний.

Линеаризация уравнений. Статические и астатические САУ. Временные и частотные характеристики типовых звеньев, их построение.

### **3. Исследование устойчивости линейных САУ**

Понятие устойчивости. Алгебраические критерии устойчивости (Гурвица, Раussa). Частотные критерии устойчивости ( Михайлова, Найквиста ). Определение областей устойчивости ( метод Д-разбиения). Возмущенное движение. Устойчивость по А.А.Ляпунову. Построение функций Ляпунова для линейных САУ.

### **4. Исследование качества управления линейных САУ**

Основные понятия и показатели качества переходного процесса. Корневые методы оценки качества. Интегральные критерии качества.

### **5. Синтез линейных САУ**

Постановка задачи синтеза. Законы управления. Управляемость, наблюдаемость, стабилизируемость. Размещение собственных чисел и стабилизирующая обратная связь.

### **6. Нелинейные САУ, устойчивость нелинейных САУ, синтез нелинейных САУ**

Определение, классификация. Особенности функционирования. Классификация точек покоя на фазовой плоскости. Фазовые портреты нелинейных систем и их особенности.

Второй метод Ляпунова. Методы построения функции Ляпунова. Задача абсолютной устойчивости. Метод В.М. Попова. Метод гармонической линеаризации. Периодическое решение устойчивости периодического решения. Синтез нелинейной САУ с помощью второго метода Ляпунова.

### **7. Системы оптимального управления**

Понятие оптимальных САУ. Методы оптимального управления: вариационное исчисление, принцип максимума Понтрягина, динамическое программирование Беллмана. Аналитическое конструирование оптимального регулятора(АКОР).

### **8. Дискретные САУ**

Управление в дискретных САУ. Устойчивость и критерии устойчивости дискретных САУ. Синтез законов управления.

### **9. Тенденции развития ТУ**

Основные направления развития современной теории автоматического управления.

Современные САУ с использованием микропроцессорной техники (промышленные АСУ ТП, ГАП).

### **Перечень тем лабораторных работ**

1. Моделирование элементов САУ на АВК-6.
2. Определение параметров объекта управления по кривой переходного процесса на АВК-6.
3. Исследование линейной САУ методами пространства состояний. Синтез САУ с заданным качеством переходного процесса на ПЭВМ.
4. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов (АКОР) для дискретных линейных САУ на ПЭВМ.
5. Исследование динамики цифровой системы управления на ПЭВМ.

### **Перечень тем практических занятий**

1. Получение дифференциальных уравнений элементов САУ.
2. Линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений САУ.
3. Критерий устойчивости. Построение областей устойчивости методом Д-разбиения.
4. Проверка на наблюдаемость и управляемость по критериям Гильберта и Калмана.
5. Определение устойчивости прямым методом Ляпунова.
6. Исследование устойчивости нелинейных систем методом Попова, методом Шульца.

### **Перечень тем курсовых работ**

1. Расчёт интегрирующей следящей системы.
2. Расчёт системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока.
3. Расчёт линейной непрерывной двухконтурной САУ по заданным требованиям к качеству её работы.
4. Анализ влияния нелинейных элементов на устойчивость и качество переходного процесса двухконтурной САУ.

### **Библиографический список**

1. Солодовников В.В. и др. Основы теории и элементов САУ. - М.: Машиностроение, 1985.
2. Теория автоматического управления /под ред. Воронова А.А. , ч. 1,2. - М. : Высшая школа, 1986.

3. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. - М.: Наука, 1986.
4. Сборник задач по ТАУ и управления /под ред. Бесекерского В.А. - М.: Наука, 1978.
5. Топчиев Ю.И., Цыпляков А.П. Задачник по ТАУ. - М.: Машиностроение, 1977.
6. Бегдуллаев К.Б. Анализ и синтез САУ методами пространства состояний. Учебное пособие. - Алма-Ата: КазПТИ, 1982, с. 89.
7. Бегдуллаев К.Б. Автоматизация исследования систем управления. Учебное пособие. - Алма-Ата: КазПТИ, 1985, с.75.
8. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. - М.: Наука, 1977.
9. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. - М.: Энергия, 1975.
10. ТАУ /под ред. Нетушила. - М.: ВШ, 1976.
11. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. - М.: Наука, 1977.
12. Изерман Р. Цифровые системы управления. - М.: Мир, 1984.
13. Квакуернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. - М.: Мир, 1977.

### **Перечень методических работ**

14. Бегдуллаев К.Б. Алгоритмы и программы расчёта САУ. - Алма-Ата: КазПТИ, 1984, с.67.
15. Хисаров Б.Д., Волобуева О.П. Руководство к лабораторным работам по ТАУ, ч.3.- Алма-Ата: КазПТИ, 1987, с.30.
16. Волобуева О.П. Исследование линейных автономных дискретных САУ.- Алматы: КазНТУ, 1995, с. 29.
17. Волобуева О.П. Исследование динамики непрерывных САУ на аналоговом персональном компьютере АВК-6. Метод. указания к лабор. работам. - Алматы: Академия ГА, 1997, с.40.
18. Волобуева О.П. Исследование динамики дискретных линейных автономных САУ. Метод. указания к лабор. работам. - Алматы: Академия ГА, 1998, с.58.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ.....                                                                                                              | 3  |
| ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.....                                                                                              | 4  |
| 1 УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО РАЗДЕЛАМ.....                                                                                          | 6  |
| 1.1 Получение математического описания элементов САУ.....                                                                     | 6  |
| 1.2 Алгебра структурных преобразований.....                                                                                   | 10 |
| 1.3 Проверка устойчивости динамических систем по алгебраическим.....<br>и частотным критериям.....                            | 13 |
| 1.4 Построение областей устойчивости методом D- разбиения в области<br>одного или двух параметров.....                        | 17 |
| 1.5 Линеаризация нелинейных процессов.....                                                                                    | 20 |
| 1.6 Описание динамических систем в пространстве состояний. Проверка<br>заданной системы на управляемость и наблюдаемость..... | 21 |
| 1.7 Исследование линейной динамической системы на устойчивость.....<br>вторым (прямым) методом Ляпунова.....                  | 26 |
| 1.8 Исследование нелинейной динамической системы на устойчивость<br>вторым (прямым) методом Ляпунова.....                     | 29 |
| 2 ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ.....                                                                                 | 35 |
| 3. ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСОВОЙ РАБОТЕ.....                                                                                    | 50 |
| 3.1 Расчет интегрирующей следящей системы.....                                                                                | 50 |
| 3.2 Расчет системы автоматического регулирования напряжения .....<br>генератора постоянного тока.....                         | 53 |
| 3.3 Расчет линейной непрерывной двухконтурной САУ по заданным.....<br>требованиям к качеству ее работы.....                   | 55 |
| 3.4 Анализ влияния нелинейных элементов на устойчивость и .....<br>качество переходного процесса двухконтурной САУ.....       | 58 |
| 4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ.....                                                                                     | 62 |
| 4.1 Основные требования к оформлению пояснительной записки.....                                                               | 62 |
| 4.2 Курсовая работа.....                                                                                                      | 62 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....                                                                                                               | 80 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ. Программа курса ОТУ для 37.02 - АСОИУ.....                                                                        | 81 |

Учебное издание  
Волобуева Ольга Петровна

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ САУ

Учебное пособие

|                                 |                  |
|---------------------------------|------------------|
| Зав. РИО                        | З.А. Губайдулина |
| Редактор                        | Г.А. Аймбетова   |
| Техн. редактор                  | С.П. Полтавец    |
| Компьютерный набор<br>и верстка | О.П.Волобуева    |

Подписано в печать 29.04.1999 г.

Тираж 500 экз. Формат 60х84 1/16. Бумага типографская № 1.  
Объем 6,0 уч. - изд. л. Заказ № Цена договорная

Издание Казахского национального технического университета,  
Печатно-множительный участок КазНТУ,  
Алматы, Сатпаева, 22.