ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ ХАЛЫҚҚА БІЛІМ БЕРУ МИНИСТРЛІГІ
ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

З. М. Рахымбекова

МАТЕРИАЛДАР КЕДЕРГІСІ АНЫҚТАМАЛЫҒЫ



АЛМАТЫ
„ҒЫЛЫМ"
1995

ӦДК 539 3 539 1 620 17/031/

Жауапты редакторы
техника ғылымдарының докторы М. Т. ӨЛІМЖАНОВ

Рецензенттері:

техника ғылымдарының кандидаттары — *Ж. Б. Шегенова* мен *К. М. Тоқтыбаев*

Рахымбекова З. М. Материалдар кедергісі анықтамалығы — Алматы: Ғылым, 1995. — 368 б.

Бұл анықтамалықта материалдар кедергісінің заңдары мен теориялары, материалдардың физика-химиялық қасиеттері сондай-ақ олардың тәжірибе жүзінде дәлелденген қорытындылары қарастырылады. Әрбір тарауда негізгі теориялық түсініктер келтірілген, есептеу формулаларының ақырғы түжырымдары өрнектелген. Көтерілген мәселеге қатысы бар есептеу кестелері мен графиктер, суреттер, мысалдар да елеулі орын алады.

Кітап техникалық жоғары оқу орындарының оқытушылары мен аспиранттарына, студенттеріне, инженерлер мен конструкторларға арналған.

ISBN 5-628-00932-6

© Рахымбекова З. М. 1995

Аяулы анам
Назкен Айнабекқызына
арнаған ескерткішім болсын.
Автор.

АЛҒЫ СӨЗ

Материалдар кедергісі жалпы білім беретін инженерлік пәндердің негізі, аса маңыздылардың бірі бола отырып мамандар қалыптасуында елеулі роль атқарады. Әсіресе механикалық, машина жасау және құрылыс инженерлері мамандықтарында материалдар кедергісіне зор маңыз беріледі.

Жоғары оқу орындары қайта құру кезеңінде дәрістердің сағатын азайтып, студенттердің өз бетінше іздену ine, жұмыс істеуіне мол мүмкіндіктер туғызуы керек. Ал аталған курс бойынша ана тілінде жазылған оқу-әдістемелік әдебиеттер жоқтың қасы. Ұсынылып отырған еңбек — осы міндетті шешуге деген талпыныс қана.

Бұл еңбек автордың ұзақ жылдар бойы Қазақ ұлттық университетінде оқыған дәрістері, педагогтік тәжірибелері негізінде жазылды. Оқу құралы ретінде пайдаланылатын анықтамалық техникалық жоғары оқу орындарының бағдарламасымен ғана шектелмейді, оған көптеген қосымша материалдар енгізілді. Осы пәннің негізгі заңдары мен теориялары, атап айтқанда: созылу, сығылу, бұралу, иілу, статикалық анықталмаған жүйелер (күштер әдісі), көрнеулік күй, беріктік теориялары, созымды деформация, орнықтылық, жылжығыштық, күштердің динамикалық әсері, сонымен бірге олардың тәжірибе жүзінде дәлелденген тұжырымдары мен қорытындылары қарастырылады.

Анықтамалыққа серпімді-созымды және сызықты емес серпімді материалдан жасалған арқалықтардың иілу теориясы, — деп аталатын жаңа тақырып енгізіліп, ол нақты мысалдармен тұжырымдалды. Әр тақырып түсінікті, әрі көрнекі болуы үшін қосымша суреттер мен жаттығу мысалдары берілді. Анықтама беруші формулалардың ақырғы қорытындылары, кестелер, әрбір тарауда қысқаша жалпы теориялық түсініктер беріле отырып, негізгі болжамдарға сай ережелер, маңызды қорытындылар мен кеңестер ұсынылады.

Материалдар кедергісі анықтамалығы қазақ тілінде жазылған алғашқы еңбектердің бірі болғандықтан, ол кемшіліксіз де емес. Әрине, бұған дейін жарық көрген кітаптарымыз ("Материалдар кедергісі", 1987; „Деформацияның қарапайым түрлері", 1988; „Материалдар кедергісі терминдерінің түсіндірме сөздігі", 1993) осыған алып келген жолдар ғана еді. Сондықтан, оқырман қолына тиғелі отырған еңбегіме орай айтылған сын ескертпелерді, ұсыныстарды, талап-тілектерді ризашылықпен қабыл аламын.

I тарау

ЖАЛПЫ ТҮСІНІКТЕР

§ 1. МАТЕРИАЛДАР КЕДЕРГІСІ ЖӘНЕ ОНЫҢ НЕГІЗГІ МІНДЕТТЕРІ

Материалдар кедергісі құрылыстар мен машиналар бөліктерінің беріктігі, қатандығы және орнақтылығы мәселелерін зерттейтін ғылым саласы болып табылады.

Беріктік—деп құрылманың немесе оның жеке бөліктерінің сыртқы күш әсеріне кирамай, қарсыласу қабілетін айтамыз.

Қатаңдық—құрылманың немесе оның жеке бөліктерінің сыртқы күш әсерінен болатын деформацияға қарсыласу қабілеті.

Орнықтылық—құрылманың, немесе оның жеке бөліктерінің сыртқы күштің әсерінде серпімді тепе-теңдік бастапқы қалпын сақтау болып табылады.

Материалдар кедергісінде физиканың, математиканың және теориялық механиканың негізгі ережелері пайдаланылады. Материалдар кедергісі теориялық және эксперименттік деректерге негізделеді. Нақты мәселелерді шешкен кезде, есептеу формалары теориялық әдіспен қорытылады. Ал, материалдың негізгі механикалық сипаттамасы эксперименттік әдіспен анықталады.

Инженерлік практикада кездесетін сан алуан құрылма элементтері формалары мен өлшемдеріне байланысты негізгі топтарға бөлінеді. Бұлар — білеу, пластина мен қабықшалар, кеністік денелер.

Білеу деп бір өлшемі (ұзын-дығы) басқа екеуіне қарағанда анағұрлым үлкен болатын призма не цилиндр калыпты денені айтады. Білеуге призма қалыпты емес тік өсті денелер де жатады. Білеу өсі деп көлденең қималардың ауырлық центрі арқылы өтетін сызықты айтады, (1.1-сурет). Өлшемнің қатынасымен әсер ететін күш сипатына орай білеу сырыққа (стерженге) және арқалыққа ажыратылады. Сырық деп жіңішке ұзын білеуді (әдетте тік өсті) айтады. Ол созылады және сығылады (1.2 а-сурет). Арқалық деп көлденең және шамалы көлбеу қалыпта болатын қалың білеуді айтады. Ол иілуге негізделеді



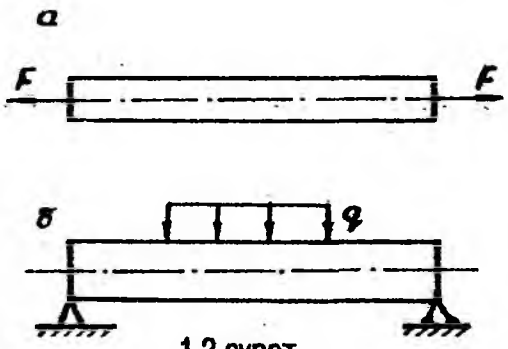
1.1-сурет

(1.2 б-сурет). Құрылыс практикасында сырықтың біріктірілген түрлері кездеседі. Олар: ферма, жақтау.

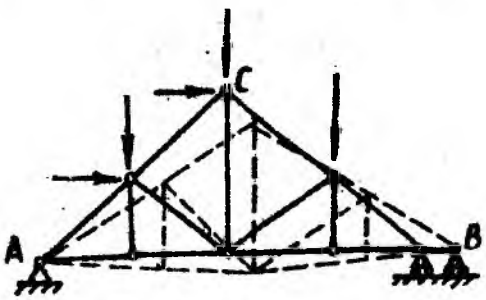
Ферма-геометриялық формасы өзгермейтін, үштары топсамен бекітілген бірнеше сырықтардан құрастыралған жүйе. Күш тек оның түйініне түседі. Деформация кезінде түйіндер орын ауыстырады. Ал сырықтар бір-біріне байланысты бұрылып, майыспай сол қалпында қалады. 1.3-суретте әсер ететін күш пен ферма бейнеленген. Ферма түйіндері мен сырықтардың деформациядан кейінгі орны үзік сызықпен көрсетілген.

Түйіндерде өзара қатаң біріктірілген сырықтар жүйесін жақтау деп атайды. Жақтауға әсер ететін күштер сырықтың бойындағы әртүрлі нүктеге түсуі мүмкін. Жақтаудың деформациясы кезінде бұл сырықтар иілгенімен, олардың түйіндегі бұрыштары өз шамасын өзгертпейді. 1.4-суретте деформацияға дейінгі және деформациядан кейінгі жақтау көрсетілген.

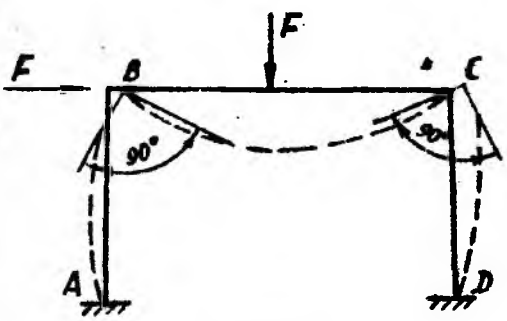
Қалыңдығы деп аталатын бір өлшемі өзге екеуінен едәуір кіші және қисық беттермен шектелетін дене қабықша деп аталады. Егер дене параллель жазықтармен шектелсе, онда оны тақта (плита), пластина, мембрана (қалыңдығына байланысты) деп атайды.



1.2-сурет



1.3-сурет



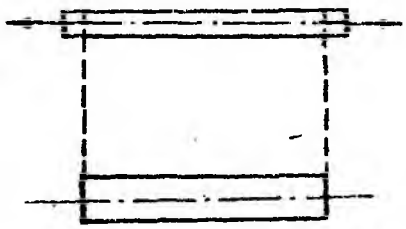
1.4-сурет

Үш өлшемі де шамалас денелер шомбал іргетасы немесе кеністік денелер деп те аталады.

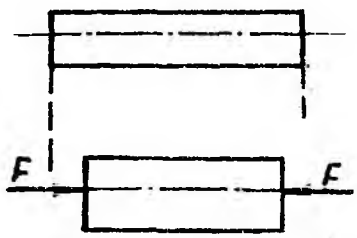
„Материалдар кедергісі" пәнінде әдетте, құрылманы немесе оның жеке бөліктерін есептеудің жолын жеңілдету үшін бірқатар болжамдар қабылданады, математикалық қарапайым әдістер пайдаланылады. Көбінесе білеу тәріздес денелер немесе олардан құрылған қарапайым жүйелер қарастырылады.

§ 2. ДЕФОРМАЦИЯ ТҮРЛЕРІ

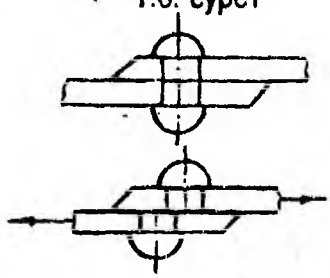
Барлық нақты денелер деформацияланады (қалыпсызданады), яғни өзінің өлшемдері мен қалыптарын өзгертеді. Денелердің деформациясы сыртқы күш әсерінен немесе температура өзгеруінен және басқа себептерден де болады. Егер күш белгілі бір мәннен аспаса, деформация күштің өсуіне пропорционал артады, ал күш әсерін тоқтатса, дене бастапқы қалпына келеді. Денелердің бұл



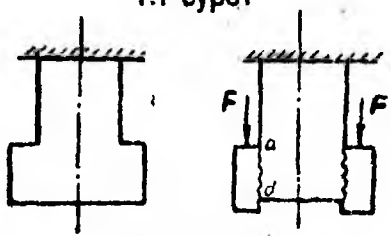
1.5-сурет



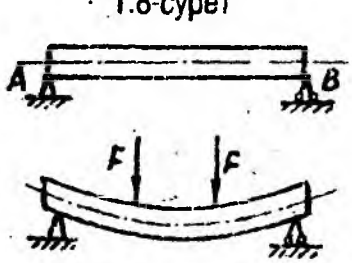
1.6.-сурет



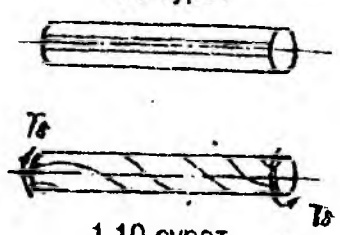
1.7-сурет



1.8-сурет



1.9-сурет



1.10-сурет

қасиетін серпімділік дейді. Шамасы айтарлықтай үлкен сыртқы күш әсерінен дененің қирамай, қайтым-сыз деформациялану қасиетін созылымдылық деп атаймыз.

Күш әсері тоқталған кезде денелерде пайда болатын деформацияның жойылуын серпімді деформация, ал жойылмаса серпімсіз, созылымды не қалдық деформация дейді.

Материалдар кедергісінде деформацияның негізгі түрлері: созылу және сығылу, ығысу, иілу, бұралу, бойлық иілу қарастырылады және солардың нәтижесінде пайда болатын күрделі деформациялар да зерттеледі.

Созылу мен сығылу тік білеудің өсі мен қарама-қарсы бағытталған сыртқы күш әсерінен болады. Созылу кезінде (1.5-сурет) білеу ұзарады, ал сығылу кезінде (1.6-сурет) қысқарады, бірақ екі жағдайда да өс тік күйінде өзгеріссіз қалады.

Ығысу немесе кесу білеудің бір бөлігі келесісімен салыстырғанда жылжуға ұмтылатын деформация түрлері болып табылады. Бұған мысал ретіне 1.7 және 1.8-суреттерде тойтарманың кесігі және ағаш білеудің пайда болуы көрсетілген.

Иілу кезінде күштер білеу өсіне перпендикуляр бағытталып, оның симметрия жазықтығында жатады (1.9)-сурет). Иілу кезінде білеу өсі майысады.

Бұралу тік білеудің ұштарына түсірілген қос күштің әсерінен пайда болады да (1.10-сурет), білеу өсіне перпендикуляр бағытталады. Бұралу кезінде білеу өсі тік түзу күйінде қалады, ал оның сыртқы беттері бұрандалы сызыққа айналады.

Деформацияның бойлық сығу күші әсеріне негізделген түрі де бар. Өс бойымен сығылған ұзын тік сырық күш әсері белгілі бір мәннен артып кеткенде майысуы мүмкін. Бұл құбылысты бойлық иілу деп атайды.

Күрделі кедергі-білеуге күш әсерінің екі немесе бірнеше түрі әсер етуі нәтижесінде: екі жазықтықтағы иілу, созылу (сығылу) мен иілу, бұралу мен иілу және т. б. пайда болады.

§ 3. НЕГІЗГІ БОЛЖАМДАР МЕН ҚАҒИДАЛАР

Материалдар кедергісі теорияларын құру үшін материалдар құрылымы, қасиеттері туралы, деформация мен күштер және т. б. деректер туралы бірнеше болжамдар мен қағидалар қабылданады.

1. *Түтас орта туралы болжам.* Кез келген дене үздіксіз орта деп қарастырылып, оның дискреттік (атомдық) құрылымы ескерілмейді.

2. *Біртектілік және изотроптылық туралы болжамдар.* Материалдардың қасиеттері барлық нүктелерінде біртекті, материалдар изотропты, яғни олардың механикалық қасиеттері барлық бағытта бірдей болады.

3. *Бастапқы өлшемдердің қағидасы.* Бұл қағида бойынша статикалық теңдеулерді (тепе-теңдік) құру кезінде күш түскенге дейін дененің геометриялық өлшемдерін алады.

4. *Күш әсерлерінің тәуелсіздік қағидасы* (суперпозиция қағидасы). Бұл қағида бойынша денедегі топ күштер әсерлерінің нәтижесі сол топтағы жеке күштер әсерлері нәтижелерінің қосындысына тең.

5. *Сен-Венан қағидасы.* Бұл қағида бойынша құрылма элементтеріне түсірілген сыртқы күш әсерінен белгілі бір қашықтықта пайда болатын ішкі кернеу сыртқы күштің түсуіне байланысты болмайды. Созылған сырықты зерттеу кезінде сыртқы күштердің тең әсерін ескеріп, оның түсіру әдісіне көңіл бөлмейміз. Бұл үшін сырықтың сыртқы күшті түсіру аумағын алып тастап, есептеу схемасын қарастырамыз.

§ 4. СЫРТҚЫ КҮШТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ТҮРЛЕРІ

Денеге әсер ететін күштер бірнеше түрге бөлінеді. *Беттік күш* деп денеге беті арқылы берілетін күшті айтады. Мысалы, арқалықта не тақтада жатқан жүк және оған тіреуіш тарапынан болатын қарсы әсер.

Көлемдік күш деп дененің көлемі арқылы берілетін, әрі ішкі нүктеге түсетін күшті айтады. Мысалы, шомбал арқалықтың салмағы немесе үдемелі қозғалған денеде пайда болған инерция күштері осыған жатады. Көлемдік күш $Н/м^3$ немесе $кН/м^3$ пен өлшенеді.

Қадалған күш деп өз өлшемімен салыстырғанда өте шағын бетке түсетін күшті айтады. Кейбір есептерде бұл нүктеге түскен күш деп те түсіндіріледі. Қадалған күш ньютонмен $Н$, килоньютонмен $кН$ және меганьютонмен $кН$ өлшенеді.

Таралған жүктеме күш деп дене бетінің ауданына немесе беттік сызыққа әсер ететін салмақты айтады. Мысалы, үй шатырындағы қар қысымы шатыр ауданына жайылады. Ол қарқындылығымен сипатталады. Қарқындылық деп

жүктеме күштің бірлік ауданға немесе бірлік ұзындыққа түсірілген шамасын айтады. Таралған жүктеме күштің ауданға қатысты өлшем бірлігі: $Н/м^2$ немесе $кН/м^2$, ал ұзындыққа — $Н/м$ немесе $кН/м$.

Дененің бірлік ауданына, не оның бөлігіне түсетін жүктеме күштің қарқындылығы бірдей болса, оны *тең таралған жүктеме күш* дейді.

Әсер ететін уақытына қарай жүктеме күштер *тұрақты, уздіксіз, уақытша* болып бөлінеді. Мысалы, темір жолдың көпірге түсіретін жүктеме күші тұрақты, ал көпір үстімен өтетін поездің салмағы уақытша жүктеме күш болып табылады.

Әсер ету жылдамдығына қарай сыртқы күштер *статикалық және динамикалық күштерге* бөлінеді.

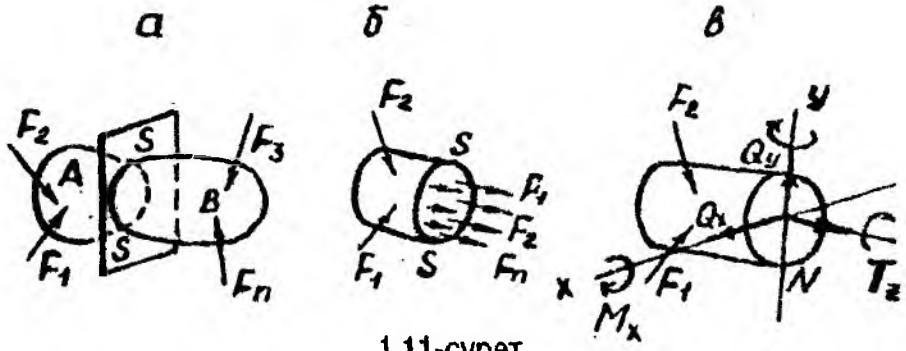
Статикалық жүктеме күш деп соңғы шамасына жеткенше жылдамдығы баяу, жеткен соң тұрақты болып қалатын жүктеме күшті айтады. Мұндай жүктеме күштердің үдеу шамасы ескерілмейді.

Динамикалық жүктеме күштің әсер ету жылдамдығы шапшаң болады да, бұл жағдайда үдеу және үйкеліс күштері ескеріледі. Динамикалық жүктеме күштерді *соққы, айнымалы-қайталанбалы* және т. б. жүктеме күштерге бөледі. Бір дененің екінші денеге соқтығысуы арқылы берілетін жүктеме күшті соққы деп атайды. Машина бөлшектеріне уақытша тәуелді, периодты түрде қайталанып түсетін жүктеме күштерді айнымалы-қайталанбалы жүктеме күштер деп атайды. Мәселен, қозғалыстағы машинаның шатун, бірлік сияқты бөліктеріне немесе темір жол вагонының өсіне түсетін жүктеме күштер айнымалы-қайталанбалы жүктеме күштерге жатады.

§ 5. ІШКІ КҮШТЕР. ҚИМАЛАР ӘДІСІ. КЕРНЕУ

Сыртқы күштің әсерінен білеу деформацияланып, ол ішкі күштерді, яғни білеудің жеке бөліктері арасында өзара әрекет етуші күштерді тудырады. Ішкі күштерді зерттеу барысында оларды алдын ала қарастырады да сыртқы күштерге түрлендіріп, анықтайды. Ішкі күштерді зерттеуде пайдаланылатын негізгі тәсілді қималар әдісі деп атайды.

Ішкі күштерді дененің кез келген нүктесінен табу үшін берілген білеуді жазықтықпен ойша қияды (1.11-сурет), бір бөлігін алып тастайды. Бөліктің бүкіл S—S қимаға таралған әсерін ішкі күштермен алмастырады. Кез келген күштер жүйесі тәрізді ішкі күштерді де бір нүктеге (әдетте қиманың ауырлық центріне) жинайды. Соның нәтижесінде қимада ішкі күштердің бас векторы мен бас моментін x, y, z өстеріне проекцияласақ, онда қиманың ар жағында алты статикалық шама: үш әсер N_1, Q_x, Q_y және үш момент M_x, M_y, $T_б$ (1. 11 в-сурет) пайда болады. Осы шамаларды білеу қимасындағы ішкі әсерлері мен моменттері дейді. Олар тепе-теңдік теңдеулері арқылы анықталады.



1.11-сурет

Қиманың ішкі күш әсерлері мен моменттері үшін мынадай анықтамаларды беруге болады:

N — бойлық немесе өстік, өс бойымен бағытталған күш;

Q_x, Q_y — x және y өстері бағытына сәйкес кима жақтарының ығысуын туғызатын көлденең (кесіп өтетін) күштер;

$\mathrm{T_б}$ — бұраушы момент;

$\mathrm{M}_x, \mathrm{M}_y$ — июші моменттер.

Дененің тұтас құрылымы туралы болжамға сүйеніп, ішкі күштер бүкіл кима бойына таралған деуге болады. Оларды анықтау үшін дененің S—S кимасында өте кішкентай ΔA ауданды бөліп алайық (1.12-сурет). Бұл ауданға түсетін ішкі күштердің жиынтығы ΔF болсын. ΔF -нің ΔA -ға қатынасы ауданның орта кернеуі деп аталады. Сонда, $P_{\text{ор}} = \dfrac{\Delta F}{\Delta A}$. Аудан ΔA шексіз азайғанда, оған сәйкес ΔF күш те азаяды. Аудан нөлге жуықтағанда, бұл қатынас нүктенің толық кернеуін сипаттайды:

$$p_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}.$$

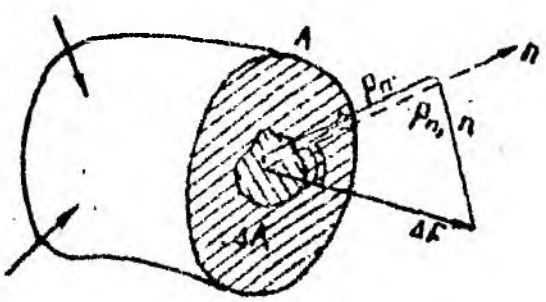
Сонымен, ішкі күштің кернеуі бірлік ауданға әсер ететін ішкі күштің қаркындылығын білдіреді. Кернеу $\mathrm{Н/м^2}$, $\mathrm{кН/м^2}$ және МПа өлшенеді.

σ_n тік кернеу p_n векторының n тік проекциясына тең:

$$\sigma_n = p_n \cos\left(\hat{p_n}, n\right).$$

τ_n жанама кернеуі p_n толық кернеудің аудан жазықтығы проекциясына тең:

$$\tau_n = p_n \sin\left(\hat{p_n}, n\right).$$



1.12-сурет

II тарау

КӨЛДЕНЕҢ ҚИМАЛАРДЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

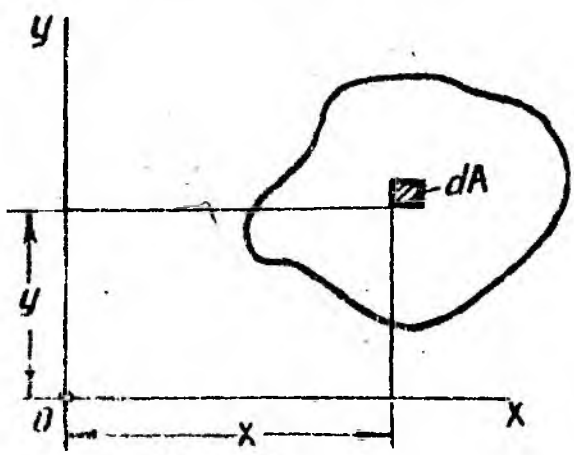
Білеулердің деформацияға қарсыласу қабілеттері олардың материалдары мен өлшемдеріне ғана емес, сонымен қатар көлденең қималарының аудандары мен формаларына байланысты. Созылу және сығылу теориясында білеудің көлденең қимасының өлшемі мен формасы қарапайым геометриялық сипаттама арқылы анықталады, яғни қима ауданымен өрнектеледі. Иілу және бұралу теориясында қиманың күрделі геометриялық сипаттамалары: статикалық моменттері, инерция моменттері, кедергі моменттері, инерция радиусы қарастырылады.

§ 1. ҚИМАНЫҢ СТАТИКАЛЫҚ МОМЕНТТЕРІ

Білеудің қайсыбір көлденең қимасын аламыз (2.1-сурет). Оны x, y координаттар жүйесімен байланыстырып, мынадай екі интегралды қарастырамыз:

$$S_x = \int_A y\mathrm{d}A, \quad S_y = \int_A x\mathrm{d}A, \tag{2.1}$$

мұндағы интегралдың A индексі интегралдау бүкіл қима ауданында болатындығын көрсетеді. Әрбір интеграл $\mathrm{d}A$ элементар аудандарының өстегі x не y-ға дейінгі қашықтығы көбейтіндісінің жиыны болып саналады. Бірінші интеграл қиманың x өсіне сәйкес, ал екінші y өсіне *статикалық момент* деп аталады. Статикалық моменттің өлшемі — см^3, м^3.



2.1-сурет

Өстерді параллель көшіру кезінде статикалық моменттердің шамалары өзгереді. x_1, y_1 және x_2, y_2 параллель өстердің кос жұбын қарастырамыз. x_1 және x_2 өстерінің арасы b-ға, ал y_1 және y_2 өстерінікі a-ға тең болсын (2.2-сурет). Қима ауданы A пен x_1 және y_1 өстеріне қатысты статикалық момент, яғни S_{x_1} және S_{y_1} берілген деп үйғарайық. S_{x_2} және S_{y_2} анықтау керек.

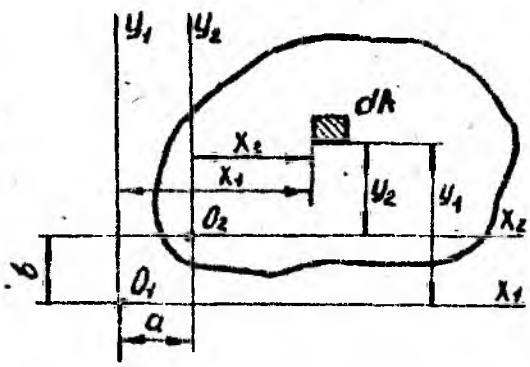
Яғни $x_2 = x_1 - a$, $y_2 = y_1 - b$. Ізделіп

отырған статикалық моменттер мынаған тең:

$$S_{x_2} = \int_A (y_1 - b)\mathrm{d}A, \quad S_{y_2} = \int_A (x_1 - b)\mathrm{d}A;$$

немесе

$$S_{x_2} = S_{x_1} - bA, \quad S_{y_2} = S_{y_1} - aA.$$



22 - сурет

Сонымен, өстерді параллель көшіргенде статикалық моменттер A ауданы мен өстердің ара қашықтығының көбейтіндісіне тең болады.

Бірінші қорытылған өрнекті

$$S_{x_2} = S_{x_1} - bA,$$

деп алып, карастырайық. b шамасы оң да, теріс те болуы мүмкін. Сондықтан оны таңдағанда бір-ақ рет bA көбейтіндісі S_{x_1} -ге тең болатындай етіп алуға болады. Сонда S_{x_2} статикалық моменті x_2 өсіне қатысты нөлге айналады.

Статикалық моменті нөлге тең болатын өсті *центрлік өс* деп атайды. Параллель өстердің ішінде ол жеке дара болады және оған дейін кез келген x_1 өстің қашықтығы былай анықталады:

$$b = y_c = \frac{S_{x_1}}{A}. \tag{2.2}$$

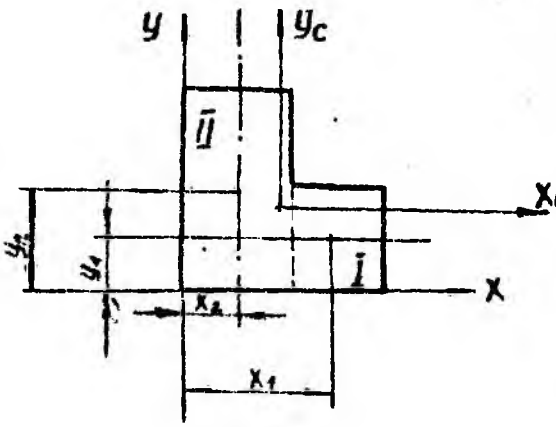
Ал, басқа параллель өстер үшін де осыған ұқсас теңдеу құрылады:

$$a = x_c = \frac{S_{y_1}}{A}. \tag{2.3}$$

Центрлік өстердің қиылысу нүктесі қиманың *ауырлық центрі* деп аталады. Қиманың центрлік өске қарағандағы статикалық моменті нөлге тең. Қиманың белгілі бір өске қарағандағы статикалық моментін табу үшін оны қарапайым фигураларға (үшбұрыш, тік төртбұрыш, дөңгелек т. б.) жіктеген ыңғайлы. Сонда қиманың статикалық моменті оның қарапайым бөліктерінің сәйкес статикалық моменттері қосындысына тең. Мұндай қималарды фигура деп атайды.

Статикалық моменттердің формулаларын пайдаланып, кез келген күрделі фигураның ауырлық центрінің координаттарын табуға болады. Мәселен, күрделі қима екі тік төртбұрыштардан құрылсын делік (2.3-сурет). Күрделі фигураның x, y өстеріне қарағандағы статикалық моменттері келесі формулалармен анықталады:

$$S_x = y_c A = y_1 A_1 + y_2 A_2, \quad S_y = x_c A = x_1 A_1 + x_2 A_2;$$



2.3-сурет

мұндағы: A_1 — бірінші тік төртбұрыштың, A_2 — екінші төртбұрыштың, A — күрделі қиманың аудандары; x_1, y_1 — бірінші тік төртбұрыштың, x_2, y_2 — екінші тік төртбұрыштың, ал x_c, y_c — күрделі фигураның ауырлық центрлерінің координаттары (2.2) және (2.3) формулалардан:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2}{A_1 + A_2},$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2}{A_1 + A_2},$$

күрделі фигураның ауырлық центрлерінің координаттарын анықтаймыз.

§ 2. ҚИМАНЫҢ ИНЕРЦИЯ МОМЕНТТЕРІ

Берілген қиманың x, y өстеріне қатысты төрт интегралды қарастырайық:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA, \\ I_{xy} &= \int_A xy dA; \quad I_\rho = \int_A \rho^2 dA, \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

x және y арқылы кез келген x, y координаттар жүйесіндегі dA элементар алаңның координаттары белгіленеді (2.1-сурет). Алғашқы екі интеграл қиманың x және y өстеріне қатысты *өстік инерция моменттер* деп аталады. Үшінші интеграл қиманың x және y өстеріне қатысы бар центрден тепкіш *инерция моменті* деп аталды, төртінші интеграл — *өрістік инерция моменті.* Инерция моменттерінің өлшем бірлігі: $см^4, м^4$.

Алаң dA оң болғандықтан, өстік және өрістік инерция моменттері әрқашан оң болады. Центрден тепкіш инерция моменті қиманың x, y өстері жүйесіне қатысты орналасуына сәйкес оң және теріс болуы мүмкін.

§ 3. ӨСТЕРДІ ПАРАЛЛЕЛЬ КӨШІРУ КЕЗІНДЕГІ ИНЕРЦИЯ МОМЕНТТЕРІ

Қиманың өзара перпендикуляр x_1, y_1 центрлік өстеріне қарағандағы инерция және статикалық моменттер берілсін делік. x_2 және y_2 өстеріне қатысты инерция моменттерін анықтау кажет (2.2-сурет)

$$I_{x_2} = \int_A y_2^2 \mathrm{dA}; \quad I_{y_2} = \int_A x_2^2 \mathrm{dA};$$

$$I_{x_2 y_2} = \int_A x_2 y_2 \mathrm{dA};$$

$x_2 = x_1 - a$ және $y_2 = y_1 - b$ орнына койсак

$$I_{x_2} = \int_A (y_1 - b)^2 \mathrm{dF}; \quad I_{y_2} = \int_A (x_1 - a)^2 \mathrm{dA};$$

$$I_{x_2 y_2} = \int_A (x_1 - a)(y_1 - b)\mathrm{dA}.$$

Жақшаларды ашып, жоғары формулалардағы белгілеу бойынша мына тендіктерді жазамыз:

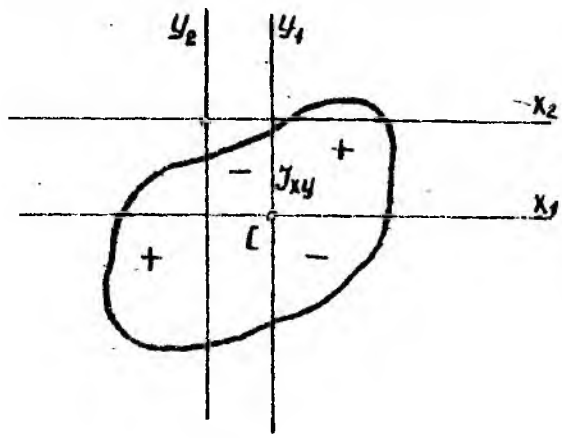
$$\left.\begin{aligned} I_{x_2} &= I_{x_1} - 2bS_{x_1} + b^2 A; \\ I_{y_2} &= I_{y_1} - 2aS_{y_1} + a^2 A; \\ I_{x_2 y_2} &= I_{x_1 y_1} - aS_{x_1} - bS_{y_1} + abA \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

Егер x_1 және y_1 центрлік өстер болса, онда $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$ және табылған өрнектер ықшамдалады:

$$\left.\begin{aligned} I_{x_2} &= I_{x_1} + b^2 A, \\ I_{y_2} &= I_{y_1} + a^2 A, \\ I_{x_2 y_2} &= I_{x_1 y_1} + abA. \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Сонымен, өстерді параллель көшірген кезде (олардың біреуі—центрлік) өстік инерция моменті A ауданы мен өстердің ара қашықтығы квадратының көбейтіндісіне тең шамаға өзгереді.

(2.6) формуласының алғашқы екеуінен параллель өстердің ішінде минималь инерция моменті центрлік өске ($a=0$ немесе $b=0$) қатысты пайда болады. Сонымен, центрлік өстерден центрлік емес өстерге ауысқанда өстік инерция моменті артса, оған a^2A, b^2A шамаларды қосу қажет, ал центрлік емес өстерден центрлік өске ауысса, азайту керек.



2.4-сурет

Центрден тепкіш моментті анықтау кезінде a және b шамаларының таңбасын ескеру керек. Кейде өстерді параллель көшіру кезінде I_{xy} шамасы қай бағытқа өзгеретіндігін бірден білуге болады. Ол үшін ауданның бөлігі x_1y_1 координат жүйесінің I және III квадратында (2.4-сурет) центрден тепкіш инерция моменті оң, ал II және IV квадратында теріс мәнге ие болатындығын естен шығармау керек. Сондықтан, өстерді параллель көшіру кезінде abA қосылғышының таңбасын қосылатын төрт ауданның қайсысының үлкейетініне және азаятынына сәйкес анықтау оңай. Мысалы, x_1y_1 центрлік өстерден (2.4-сурет) x_2y_2 өстерге көшсе, онда IV квадраттың ауданы кенет үлкейеді де, инерция моменті азаяды. Демек $I_{x_1y_1}$ моменттен abA көбейтіндісін шегеру қажет.

§ 4. ҚАРАПАЙЫМ ҚИМАЛАРДЫҢ ӨСТЕРГЕ ҚАТЫСТЫ ИНЕРЦИЯ МОМЕНТТЕРІ

Жоғарыдағы формулаларды пайдаланып, карапайым қималардың өстерге қатысты инерция моменттерін анықтаймыз.

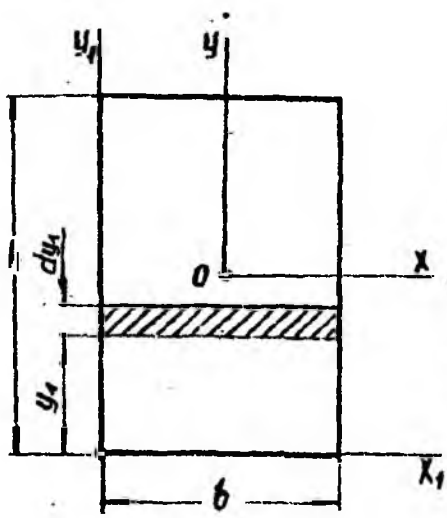
Тікбұрыш (2.5-сурет). $\mathrm{d}A = b\mathrm{d}y$ теңдігін өске алып x_1 өсіне сәйкес инерция моментін былай табамыз:

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 \mathrm{d}A = \int_0^h y_1^2 b \mathrm{d}y_1;$$

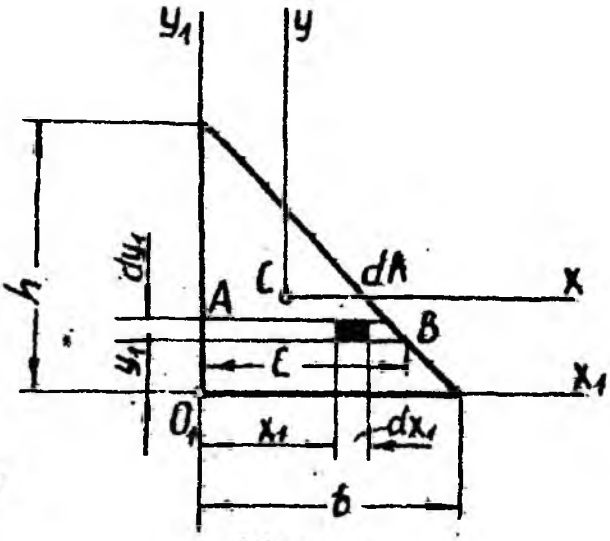
немесе

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{3};$$

көшіру формуласын пайдаланып центрлік өске инерция моментін анықтаймыз:



2.5-сурет



2.6-сурет

$$I_x = I_{x_1} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 A;$$

немесе

$$I_x = \frac{bh^3}{12}. \qquad (2.7)$$

Үшбұрыш (2.6-сурет). $b(y) = \frac{b}{h}(h-y)$; $\mathrm{dA} = \frac{b}{h}(h-y)\mathrm{dy}$ еске алып, x_1 өсіне қатысты инерция моментін мынадай жолмен шығарамыз:

$$I_{x_1} = \frac{b}{h}\int_0^h (h-y_1)y_1^2 \mathrm{dy}_1$$

немесе

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12}.$$

Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерімен үйлесетін өстерге қатысты центрден тепкіш инерция моментін анықтаймыз:

$$I_{x_1y_1} = y_1\mathrm{dy}_1\int_0^b x_1\mathrm{dx}_1 = y_1\mathrm{dy}_1\frac{b^1}{2}.$$

Бірақ $b_1 = \frac{b}{h}\left(h - y_1\right)$, сондықтан:

$$I_{x_1 y_1} = \frac{b^2}{2h^2}(h - y_1)^2 y_1 \mathrm{d}y_1.$$

Бүл өрнекті 0-ден h-қа дейін y_1 бойынша интегралдайық:

$$I_{x_1 y_1} = \frac{b^2}{2h^2}\int_0^h (h - y_1)^2 y_1 \mathrm{d}y_1,$$

немесе

$$I_{x_1 y_1} = \frac{b^2 h^2}{24}.$$

x, y центрлік өстер жүйесіне көшкенде, II және III квадраттардың аудандары үлкейіп, центрден тепкіш моменттің теріс мәнін береді. Сондықтан $I_{x_1 y_1}$ шамасын азайту үшін көшіру формуласы бойынша көбейтіндіні шегереміз

$$I_{xy} = I_{x_1 y_1} - \frac{h}{3}\frac{b}{3}A$$

немесе

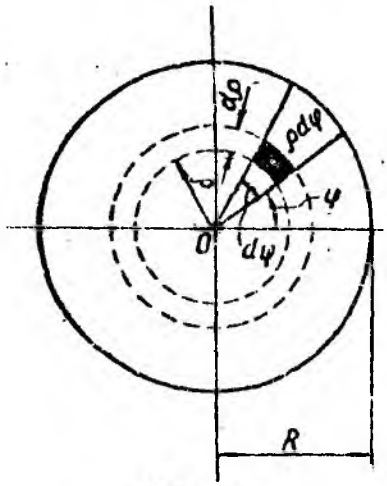
$$I_{xy} = -\frac{b^2 h^2}{72}.$$

Шенбер (2.7-сурет). Екі радиуспен және екі параллель шенбермен бөлініп алынған элементар аудан көрсетілген $\mathrm{d}A = \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$. Бүкіл ауданды интегралдауды қос интегралдаумен ауыстырсақ, өрістік моментін аламыз:

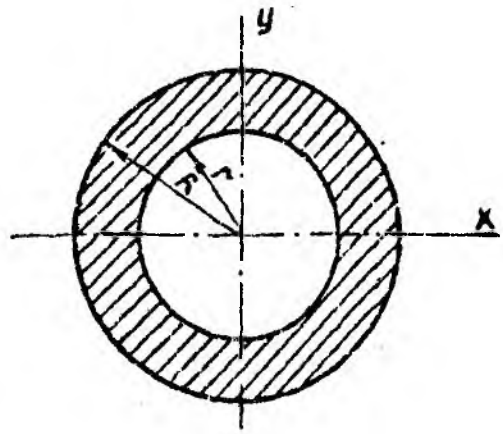
$$I_\rho = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \iint_A \rho^2 \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \rho^2\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi R^4}{2}. \qquad (2.8)$$

$\rho^2 = \left(x^2 + y^2\right)$ болғандығынан, өрістік инерция моменті қос өстік инерция моменттерінің қосындысына тең:

$$I_\rho = I_x + I_y \qquad (2.9)$$



2.7-сурет



2.8-сурет

мұнан

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}. \qquad (2.10)$$

Сақина (2.8-сурет). Сақинаның инерция моментін сыртқы және ішкі екі шеңбер арқылы инерция моменттерінің айырмасы түрінде табуға болады.

Өрістік инерция моменті мына формула бойынша анықталады:

$$I_\rho = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - r^4\right).$$

Өстік инерция моменті келесі формуламен анықталады

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4}\left(R^4 - r^4\right). \qquad (2.11)$$

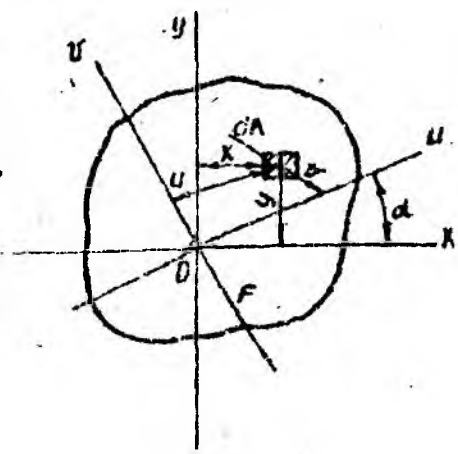
§ 5. ӨСТЕРДІ БҰРУ КЕЗІНДЕГІ ИНЕРЦИЯ МОМЕНТТЕРІ

Ox және Oy өстерге сәйкес инерция моменттері берілген делік. Өстердің алғашқы жүйесіне сәйкес α бұрышқа бұрылған Ou және Ov өстерінің инерция моменттерін (2.9-сурет) табайық.

Кез келген dA ауданын аламыз да оның координаттарын жаңа өстердегі координатымен өрнектейміз:

$$v = y\cos\alpha - x\sin\alpha;$$

$$u = y\sin\alpha + x\cos\alpha.$$



2.9-сурет

Ou өсіне сәйкес инерция моментін табамыз:

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dA;$$

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA; \quad I_{xy} = \int_A xy dA,$$

екенін ескерсек, төмендегі теңдеуді шығарамыз:

$$I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha. \qquad (2.12)$$

Дәл осылайша

$$I_v = I_x \sin^2\alpha + I_y \cos^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha, \qquad (2.13)$$

екенін табуға болады.

Центрден тепкіш инерция моменті мына түрде жазылады:

$$I_{uv} = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)(y\sin\alpha + x\cos\alpha)dA =$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha\int_A y^2 dA - \sin\alpha\cos\alpha\int_A x^2 dA + \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\int_A xy dA,$$

немесе

$$I_{uv} = I_{xy}\cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha. \qquad (2.14)$$

Егер өстік моменттерін қоссақ, онда

$$I_u + I_v = I_x + I_y = I_\rho.$$

Яғни, өзара перпендикуляр өстерге қарағандағы инерция моменттерінің қосындысы осы өстерді кез келген бір бұрышқа бұрғаннан өзгермей, тұрақты болып қалады.

Енді, өстік инерция моменттерінің айырмасын қарастырсақ

$$I_u - I_v = \left(I_x - I_y\right)\cos 2\alpha - 2I_{xy}\sin 2\alpha = \left(I_x - I_y\right)\cdot\frac{1}{\cos 2\alpha_0}.$$

Сөйтіп өзара перпендикуляр өстерге қатысты өстік инерция моменттерінің айырмасы осы өстерге қатысты центрден тепкіш инерция моментінің шамасына тең екенін көреміз.

§ 6. ИНЕРЦИЯ БАС ӨСТЕРІ, БАС МОМЕНТТЕРІ

Алдыңғы параграфта алынған (2.12) формуласынан кез келген өске сәйкес инерция моментінің шамасы өстің α көлбеу бұрышына байланысты екендігі байқалады. Яғни инерция моменті экстремаль шамаға жететіндей α_0 бұрышын табуға болады. Экстремумды табу үшін (2.12) өрнегіндегі бірінші туындыны нөлге теңестіріп және $\alpha = \alpha_0$ деп алып,

$$\frac{\mathrm{d}I_u}{\mathrm{d}\alpha} = 2I_x \cos\alpha_0 \sin\alpha_0 + 2I_y \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 - 2I_{xy}\cos\alpha_0 = 0;$$

немесе

$$\left(I_x - I_y\right)\sin 2\alpha_0 + 2I_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0,$$

бұдан

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}. \qquad (2.15)$$

Алынған формула α_0 бұрыш үшін екі мағына береді: α_0' және $\alpha_0'' = \alpha_0' + 90^\circ$, олай болса, инерция моменттері экстремаль мәнге ие болатындай екі қарама-қарсы перпендикуляр өстер пайда болады. Мұндай өстерді инерция бас өстері; ал осы өстерге сәйкес инерция моменттерін бас инерция моменттері деп атайды. Бас өстерге сәйкес центрден тепкіш инерция моменті де нөлге тең.

Тиянақты зерттеулер инерция бас өстерінің біреуіне сәйкес инерция моменті экстремаль мәнге, екіншісіне сәйкес минималь мәнге ие болатындығын көрсетеді:

$$I_{\max} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha,$$

$$I_{\min} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) - \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha.$$

Бұл формулаларды түрлендіру үшін төмендегі тендеулерді

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}}, \quad \sin 2\alpha = \frac{\mathrm{tg}2\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}}$$

еске түсірейік.

(2.15) өрнегінің көмегімен α бұрышын алып тастаймыз. Сонда

$$I_{\substack{\max\\\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \qquad (2.16)$$

Жоғарғы таңба максималь, ал төменгісі минималь инерция моменттеріне сәйкес келеді.

Егер қиманың симметрия өсі болса, онда ол әрқашан бас өс болады. Өстің екі жағында жатқан қима бөліктерінің центрден тепкіш инерция моменттері шамасы жағынан тең ал таңбасы жағынан қарама-қарсы болады. Демек, $I_{xy} = 0$ және x, y бас өстер болады.

§ 7. ИНЕРЦИЯ ЭЛЛИПСІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Өстік инерция моменті мен қима ауданының арасындағы байланыс арқылы табылатын шаманы:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}, \qquad (2.17)$$

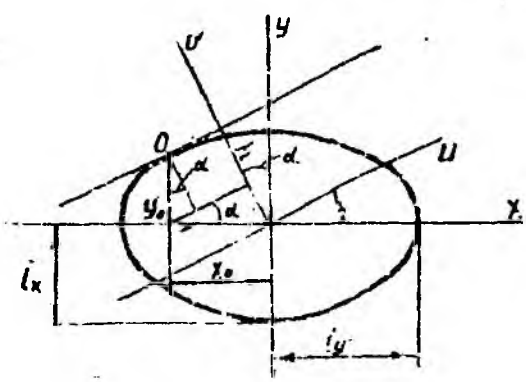
қиманың инерция радиусы деп атайды.

Кез келген фигура үшін Oy және Ox өстері бас центрлік өстер болсын делік. Инерцияның бас өспен салыстырғанда α бұрышқа көлбеу орналасқан өске сәйкес инерция моменті өрнегін жазайық:

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha.$$

Барлық қосылғыштарды A -ға бөлсек:

$$i_u^2 = i_x^2 \cos^2 \alpha + i_y^2 \sin^2 \alpha. \qquad (2.18)$$



2.10 сурет

Жарты өс үшін фигураның инерция радиусын алып, координат өстерінде эллипс саламыз (2.10-сурет). Ox өсінің бойынан i_y радиус, ал Oy өсіне сәйкес i_x инерция радиусын белгілейік. Осы эллипстің тендеуін жазамыз:

$$\frac{y^2}{i_x^2} + \frac{x^2}{i_y^2} = 1. \qquad (2.19)$$

Осы эллипс фигураның инерция эллипсі деп аталады. Эллипске жанаманың теңдеуін жазып:

$$\frac{yy_0}{i_x^2}+\frac{xx_0}{i_y^2}=1, \tag{2.20}$$

оны Ou өсіне параллель жүргіземіз (мұндағы y_0 және x_0 жанасу нүктесінің координаттары). Одан ары жанамамен Ou өсінің қашықтығын табамыз. Суреттен

$$h=y_0\cos\alpha+x_0\sin\alpha,$$

тең екендігі көрінеді.

Барлық мүшелерін h -қа бөліп

$$\frac{y_0\cos\alpha}{h}+\frac{x_0\sin\alpha}{h}=1, \tag{2.21}$$

(2.21) және (2.20) теңдеулерін салыстырсақ:

$$\frac{y}{i_x^2}=\frac{\cos\alpha}{h};\quad \frac{x}{i_y^2}=\frac{\sin\alpha}{h};$$

немесе

$$\frac{y^2}{i_x^2}=\frac{i_x^2\cos^2\alpha}{h^2};\quad \frac{x^2}{i_y^2}=\frac{i_y^2\sin^2\alpha}{h^2}.$$

Инерция эллипсінің теңдеуіне алынған өрнектерді қойсақ, онда

$$\frac{i_x^2\cos^2\alpha}{h^2}+\frac{i_y^2\sin^2\alpha}{h^2}=1$$

болады, бұдан

$$h^2=i_x^2\cos^2\alpha+i_y^2\sin^2\alpha.$$

Алынған тәуелділікті (2.18) өрнегімен салыстырғанда h шамасы көлбеу өске сәйкес инерция радиусына сан мәні бойынша тең екендігін көреміз. Инерция эллипсінің тұжырымдалған қасиеті координат басы арқылы өтетін кез келген өске сәйкес инерция моментін графиктік түрде анықтауға мүмкіндік береді. Ол үшін кез келген өске параллель етіп эллипске жанама жүргізіп, жанама мен өстің ең жақын ара қашықтығын елшеу жеткілікті. Бұл h қашықтық қарастырылған өстің инерция радиусына тең болады. Инерция моменті мына

теңдік көмегімен анықталады:

$$I_u = h^2 A.$$

Егер инерция моменттері екі бас өске сәйкес өзара тең болса, онда инерция эллипсі шеңберге айналады. Бұл ауырлық центрі арқылы өтетін барлық өстерге қатысты инерция моменттері өзара тең болады деген сөз. Мұндай қималар үшін барлық өстер бас өстер болады. Мұндай қималарға сақина, шеңбер, квадрат және т. б. жатады.

§ 8. КЕДЕРГІ МОМЕНТТЕРІ

Қиманың кедергі моменті арқалықтың иілуге қарсыласуын сипаттайды:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}},$$

I_x — x өсіне қатысты инерция моменті, $y_{\max}$ — қиманың шеткі нүктесіне дейін қашықтық.

Кедергі моменттерінің өлшем бірлігі $см^3$, $м^3$. Ол қолданған қиманың түрі мен өлшеміне байланысты.

1. Тікбұрыш үшін (2.5):

$$W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6};$$

$$W_y = \frac{I_y}{b/2} = \frac{hb^2}{6}.$$

2. Шеңбер үшін (2.7):

$$W_x = W_y = W;$$

$$W = \frac{I_x}{d/2} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

3. Сақина үшін (2.8):

$$W_x = W_y = W = \frac{I_x}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32}\left(1-\alpha^4\right) \approx 0,1D^3\left(1-\alpha^4\right).$$

мұндағы d — ішкі диаметрі, D — сыртқы диаметрі

$$\alpha = \frac{d}{D}.$$

Өрістік кедергі моменті I_ρ өрістік инерция моментінің ρ радиусы қатынасына тең:

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho}.$$

Бұл шама дөңгелек қима беріктігінің бұрау кезіндегі геометриялық сипаттамасы болады, өлшемі: $см^3$, $м^3$.

Өрістік кедергі моменті

1. Дөңгелек қима үшін

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3.$$

2. Сақина тәріздес қима үшін

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right) \approx 0,2D^3\left(1-\alpha^4\right).$$

§ 9. КҮРДЕЛІ ҚИМАЛАРДЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

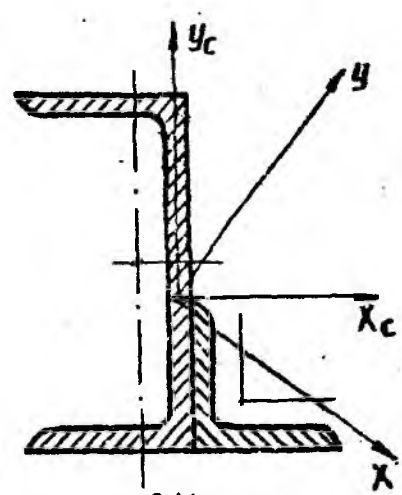
Күрделі қималардың геометриялық сипаттамаларын анықтау тәртібі келесі мысалда көрсетілген.

Берілген күрделі қиманың бас өстерінің орны мен оларға сәйкес инерция моменттерін анықтау керек (2.11-сурет).

Шешімі. Швеллер мен бұрыштың O_1 және O_2 ауырлық центрлерінен $x_б, y_б$ және $x_ш, y_ш$ центрлік өстерді жүргіземіз.

80х80х10 тең бүйірлі бұрыштың үшін түрлер жиынтығынан $A_1 = 15,1см^2$, $I_x = I_{1y} = 88,4см^4$, $I_{max} = 140см^4$, $I_{min} = 36,5см^4$, $x_{0,1} = 2,35см$.

№ 18в швеллер үшін түрлер жиынтығынан $A_2 = 29,29см^2$, $I_{x2} = 1369,9$, $I_{2y} = 111см^4$, $x_{0,2} = 1,84см$.



2.11-сурет

1. Көмекші x, y өстерін қабылдап, күрделі

қиманың статикалық моменттерін анықтаймыз:

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 = 15,1 \cdot 2,35 + 29,29 \cdot 9 = 299,5 \text{см}^3.$$

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 = 29,29(6,8 - 1,84) + 15,1 \cdot (6,8 + 2,35) = 283 \text{см}^3.$$

2. Ауырлық центрінің координаттары келесі формула бойынша анықталады:

$$y_0 = \frac{299,5}{44,39} = 6,75 \text{см},$$

$$x_0 = \frac{283}{44,3} = 6,38 \text{см}.$$

Анықталған ауырлық центрі арқалы (0 нүктесі) қосымша өстерге параллель, центрлік x_c және y_c өстерін жүргіземіз.

3. Енді центрлік өстерге сәйкес инерция моменттерін анықтайық:

$$I_{x_c} = I_{x\text{б}} + a_1^2 A_\text{б} + I_{x\text{ш}} + a_2^2 A_\text{ш};$$

$$I_{x_c} = 1369,9 + 29,29(9 - 6,38)^2 + 88,4 + 15,1(6,38 - 2,35)^2 =$$

$$= 1369,9 + 202 + 88,4 + 244 = 1904,3 \text{см}^4.$$

$$I_{y_c} = I_{y\text{б}} + b_1^2 A_\text{б} + I_{y_\text{ш}} + b_2^2 A_\text{ш};$$

$$I_{y_c} = 111 + 29,29 + 1,8^2 + 88,4 + 15,1 \cdot 2,4^2 =$$

$$= 111 + 95 + 88,4 + 86,6 = 381 \text{см}^4$$

$$I_{x_c y_c} = A_\text{ш} \cdot a_2 b_2 + A_\text{б} \cdot a_1 b_1 + \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \sin 2\beta =$$

$$= 29,29 \cdot 2,62 \cdot 1,8 + 15,1 \cdot 4,03 \cdot 2,4 + \frac{140 - 36,5}{2} \cdot 1 =$$

$$= 138,5 + 146 + 51,7 = 336,3 \text{см}^4.$$

4. Центрлік басты инерция өстерінің орнын табайық:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} = \frac{2 \cdot 336,3}{381 - 1904,3} = -0,44.$$

$$2\alpha = -23^\circ 50'; \quad \alpha = 11^\circ 50', \quad \sin\alpha = -0,205,$$

$$\sin 2\alpha = -0,404; \quad \cos\alpha = 0,984; \quad \cos 2\alpha = 0,919.$$

Анықталған теріс таңбалы бұрышты центрлік өстерден сағат тілінің бағытына қарай өлшеп салып центрлік бас өстерді жүргіземіз.

5. Центрлік бас инерция өстеріне сәйкес бас өстік инерция моменттерінің мәндері келесі формулалар бойынша анықталады:

$$I_x = I_x \cdot \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha =$$

$$= 1904,30 \cdot 0 \cdot 984^2 + 381 \cdot 0,205^2 + 336 \cdot 0,404 =$$

$$= 1830 + 15,24 + 136 = 1981,24 \text{см}^4$$

$$I_y = I_y \cdot \cos^2\alpha + I_x \sin^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha =$$

$$= 381 \cdot 0,984^2 + 1904,3 \cdot 0,205^2 - 336 \cdot 0,404 =$$

$$= 366 + 80 - 136 = 310 \text{см}^4.$$

6. Анықталған инерция моменттерінің дұрыстығын тексеру үшін мына теңдеулерді пайдаланамыз:

$$I_{x_c} + I_{y_c} = I_y + I_x.$$

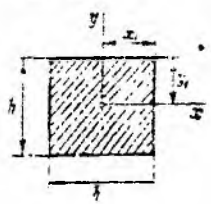
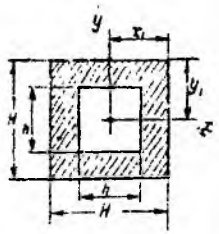
$$1904,3 + 381 = 1981,24 + 310; \quad 2285,3 \approx 2291,24.$$

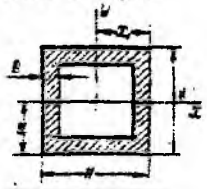
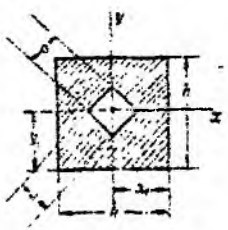
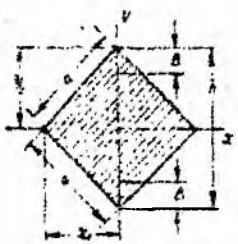
$$I_{xy} = \frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\sin 2\alpha + 2I_{x_c y_c}\cos 2\alpha = 0.$$

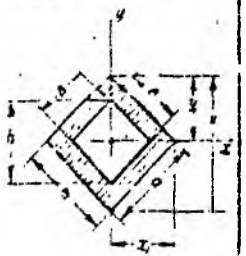
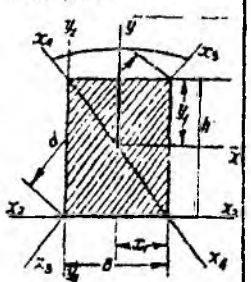
$$I_{xy} = \frac{1904,3 - 381}{2}(-0,404) + 363,3 \cdot 0,919 = -304 + 304 = 0.$$

2.1 — 2.5 — кестелерде әр түрлі жазық және сығылған білеулер түрлерінің жиынтығы үшін геометриялық сипаттамалары келтірілген.

2. 1 - к е с т е. ЖАЗЫҚ ҚИМАЛАРДЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

Қиманың түрлері	Қиманың ауданы	Қиманың шеткі нүктелерінің координаталары	I_x, I_y — өстік I_{xy} — центрден тепкіш, I_ρ — өрістік және I_S еркін бұралу кезіндегі инерция моменттері	W_x, W_y — өстік, W_ρ — өрістік және W_S еркін бұралу кезіндегі кедергі моменттері: τ — жанама кернеу	$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$; $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ инерция радиустары
1	2	3	4	5	6
Квадрат 	$A = h^2$	$x_1 = y_1 = \frac{h}{2}$	$I_x = I_y = \frac{h^4}{12} = \frac{h^2 A}{12}$, $I_{x2} = \frac{h^4}{3} = \frac{h^2 A}{3}$ $I_\delta = 0,1406 h^4$	$W_x = W_y = \frac{h^3}{6}$, $W_\delta = 0,208 h^3$ τ_{max} — жақтардың ортасында. $\tau = 0$ бұрыштарында.	$i_x = i_y = \frac{h}{\sqrt{12}} =$ $= 0,289 h$ Инерция эллипсі — шеңбер
Қуыс квадраты 	$A = H^2 - h^2$	$x_1 = y_1 = \frac{H}{2}$	$I_x = I_y = \frac{H^4 - h^4}{12} =$ $= \frac{H^2 + h^2}{12} A$	$W_x = W_y = \frac{H^4 - h^4}{6H}$	$i_x = i_y =$ $= \sqrt{\frac{H^2 + h^2}{12}} =$ $= 0,289\sqrt{H^2 + h^2}$ Инерция эллипсі — шеңбер

1	2	3	4	5	6
Қуыс жұқа қабырғалы квадрат 	$A = 4H\delta$ $\delta < \frac{H}{15}$	$x_1 = y_1 = \frac{H}{2}$	$I_x = I_y = \frac{2}{3}H^3\delta = \frac{AH^2}{6}$	$W_x = W_y = \frac{4}{3}H^2\delta$	$i_x = i_y = \frac{H}{\sqrt{6}} = 0,408H$ Инерция эллипсі — шеңбер
Қуыс квадрат 	$A = h^2 - a^2$	$x_1 = y_1 = \frac{h}{2}$	$I_x = I_y = \frac{h^4 - a^4}{12} = \frac{h^2 - a^2}{12}A$	$W_x = W_y = \frac{h^4 - a^4}{6h}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{h^2 + a^2}{12}} = 0,289\sqrt{h^2 + a^2}$ Инерция эллипсі — шеңбер
Қырынан қойылған квадрат 	$A = a^2$	$x_1 = y_1 = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a = 0,71a$	$I_x = I_y = \frac{a^4}{12} = \frac{a^2A}{12} = \frac{h^4}{48}$	$W_x = W_y = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3 = \frac{h^3}{24} = 0,118a^3 = 0,042h^3$ Жоғары және төменгі бұрыштары $b = h/18$ шамаға кішірейгенде W_x максималь мәнге $W_{кор} = 0,124a^3 - 0,044h^3$ жетеді	$i_x = i_y = 0,208a$ Инерция эллипсі — шеңбер

1	2	3	4	5	6
Қырынан қойылған куыс квадрат 	$A=a^2-b^2$	$x_1=y_1=\frac{H}{2}=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}a=0,71a$	$I_x=I_y=\frac{a^4-b^4}{12}=$ $=\frac{H^4-h^4}{48}=$ $=\frac{a^2+b^2}{12}A$	$W_x=W_y=$ $=\frac{\sqrt{2}}{12}\frac{a^4-b^4}{a}=$ $=0,118\frac{a^4-b^4}{a}=$ $=\frac{H^4-h^4}{24H}=$ $=0,042\frac{H^4-h^4}{H}$	$i_x=i_y=$ $=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}}=$ $=0,289\sqrt{a^2+b^2}$ Инерция эллипсі — шеңбер
Тікбұрыш 	$A=bh$	$x_1=\frac{b}{2}$ $y_1=\frac{h}{2}$	$I_x=\frac{bh^3}{12}=\frac{Ah^2}{12}$ $I_y=\frac{hb^3}{12}=\frac{A\cdot b^2}{12}$ $I_{x_2}=\frac{bh^3}{3}=\frac{Ah^2}{3}$ $I_{y_2}=\frac{hb^3}{3}=\frac{Ab^2}{3}$ $I_{x_2y_2}=\frac{b^2h^2}{4}$ $I_{x_3}=I_{x_4}=\frac{b^3h^3}{6d^2}=$	$W_x=\frac{bh^2}{6}=\frac{Ah}{6}$ $W_y=\frac{hb^2}{6}=\frac{Ab}{6}$	$i_x=0,289h$ $i_y=0,289b$

1	2	3	4	5	6
			$=\frac{b^3h^3}{6\left(b^2+h^2\right)}=\frac{d^4\sin^3\alpha}{48}=$	$W_б=\xi b^3$	
			$=\frac{Ad^2\sin^2\alpha}{24}$;	$\tau_{max}=M_б/W_б$ —	
			$I_ρ=\frac{bh}{12}\left(b^2+h^2\right)$	— узын жақтардың	
			$\frac{h}{b}=n>1$	ортасында, $\tau=\zeta\tau_{max}$	
			$I_б=\eta b^4$	— қысқа жақтардың ор-	
				тасында, $\tau=0$ —	
				— бұрыштарында.	

n	1	1,5	2	3	4	6	8	10
ξ	0,208	0,346	0,493	0,801	1,150	1,789	2,456	3,123
η	0,1404	0,2936	0,4572	0,7899	1,1232	1,789	2,456	3,123
ζ	1,0	0,8588	0,7952	0,7533	0,7447	0,7426	0,7425	0,7425

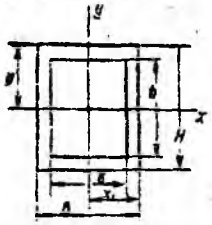
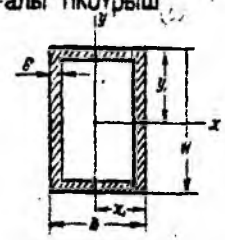
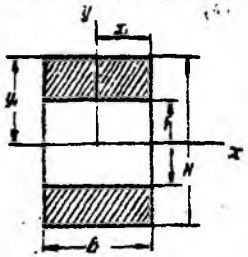
$I_б=\frac{1}{3}(n-0.63)b^4$

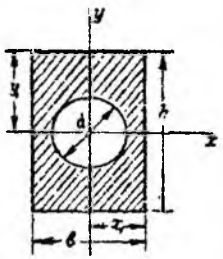
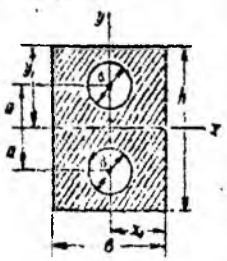
$\frac{h}{b}=n>4$

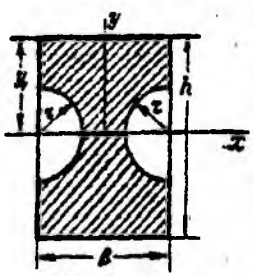
$W_б=\frac{1}{3}(n-0,63)b^3=$

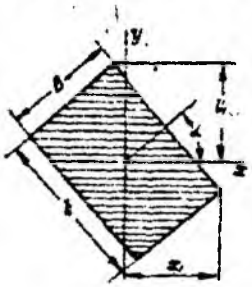
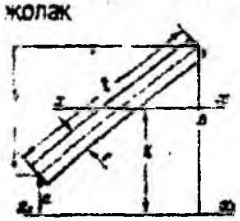
$=\frac{I_б}{b}$

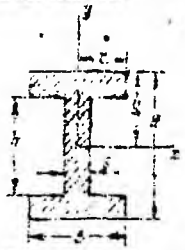
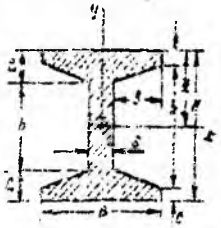
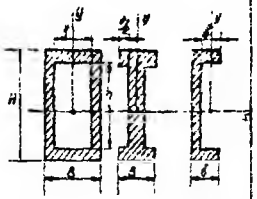
τ_{max} — узын қабырға-
сының нүктелерінде (үш-
тары ерекше), $\tau=0,7425\tau_{max}$
кіші қабырғасының ортасын-
да $\tau=0$ бұрыштарында.

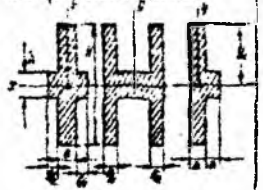
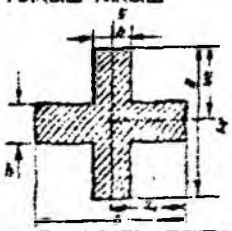
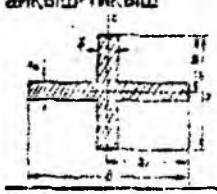
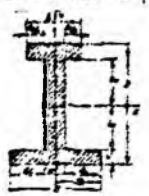
1	2	3	4	5	6
Қуыс тіктөрт бұрыш 	$A=BH-bh$	$x_1=\frac{B}{2}$ $y_1=\frac{H}{2}$	$I_x=\frac{BH^3-bh^3}{12}$ $I_y=\frac{HB^3-hb^3}{12}$	$W_x=\frac{BH^3-bh^3}{6H}$ $W_y=\frac{HB^3-hb^3}{6B}$	$i_x=\sqrt{\frac{BH^3-bh^3}{12(BH-bh)}}$ $i_y=\sqrt{\frac{HB^3-hb^3}{12(BH-bh)}}$
Қуыс, жұқа қабырғалы тіктөрт бұрыш 	$A=2\delta(B+H)$ $\delta<\frac{H}{15}$	$x_1=\frac{B}{2}$ $y_1=\frac{H}{2}$	$I_x=\frac{\delta H^3}{6}\left(3\frac{B}{H}+1\right)$ $I_y=\frac{\delta B^3}{6}\left(3\frac{H}{B}+1\right)$	$W_x=\frac{\delta H^2}{3}\left(3\frac{B}{H}+1\right)$ $W_y=\frac{\delta B^2}{3}\left(3\frac{H}{B}+1\right)$	$i_x=0{,}289H\times$ $\times\sqrt{\frac{3B+H}{B+H}}$ $i_y=0{,}289H\times$ $\times\sqrt{\frac{3H+B}{H+B}}$
Ойықты тіктөрт бұрыш 	$A=b(H-h)$	$x_1=\frac{b}{2}$ $y_1=\frac{H}{2}$	$I_x=\frac{b}{12}\left(H^3-h^3\right)$ $I_y=\frac{b^3}{12}(H-h)$	$W_x=\frac{b}{6H}\left(H^3-h^3\right)$ $W_y=\frac{b^2}{6H}(H-h)$	$i_x=\sqrt{\frac{H^2+Hh+h^2}{12}}=$ $=0{,}289H\times$ $\times\sqrt{H^2+Hh+h^2}$; $i_y=0.289b$
Дөңгелек тесігі	$A=bh-\frac{\pi d^2}{4}=$	$x_1=\frac{b}{2}$	$I_x=\frac{1}{4}\left(\frac{bh^3}{3}-\frac{\pi d^4}{16}\right)=\frac{bh^3}{12}\times$	$W_x=\frac{1}{2h}\left(\frac{bh^3}{3}-\frac{\pi d^4}{16}\right)=$	$i_x=0.289h\times$

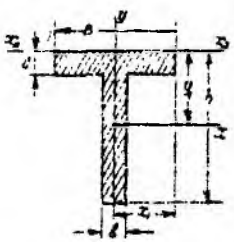
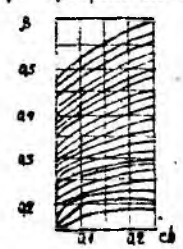
1	2	3	4	5	6
бар тікбұрыш 	$=bh\left(1-0{,}785\frac{d^2}{bh}\right)$	$y_1=\frac{h}{2}$	$\times\left(1-0{,}59\frac{d^4}{bh^3}\right);$	$=\frac{bh^2}{6}\left(1-0{,}59\frac{d^4}{bh^3}\right)$	$\times\sqrt{\frac{1-0{,}59\frac{d^4}{bh^3}}{1-0{,}785\frac{d^2}{bh}}};$
			$I_y=\frac{1}{4}\left(\frac{hb^3}{3}-\frac{\pi d^4}{16}\right)=$	$W_y=\frac{1}{2b}\left(\frac{hb^3}{3}-\frac{\pi d^4}{16}\right)=$	$i_y=0{,}289b\times$
			$=\frac{hb^3}{12}\left(1-0{,}59\frac{d^4}{hb^3}\right)$	$=\frac{hb^2}{6}\left(1-0{,}59\frac{d^4}{hb^3}\right)$	$\times\sqrt{\frac{1-0{,}59\frac{d^4}{hb^3}}{1-0{,}785\frac{d^2}{bh}}}$
Кос тесігі бар тікбұрыш 	$A=bh-\frac{\pi d^2}{2}=$	$x_1=\frac{b}{2}$	$I_x=\frac{bh^3}{12}\left[1-1{,}18\frac{d^4}{bh^3}(1+\right.$	$W_x=\frac{bh^2}{6}[1-$	$i_x=0{,}289h\times$
	$=bh\left(1-1{,}57\frac{d^2}{bh}\right)$	$y_1=\frac{h}{2}$	$\left.+16\frac{a^2}{d^2}\right)\Big]$	$-1{,}18\frac{d^4}{bh^3}(1+$	$\times\sqrt{\frac{1-1{,}18\frac{d^4}{bh^3}\left(1+16\frac{a^2}{d^2}\right)}{1-1{,}57\frac{d^2}{bh}}}$
			$I_y=\frac{hb^3}{12}\left(1-1{,}18\frac{d^4}{hb^3}\right)$	$\left.+16\frac{a^2}{d^2}\right)\Big]$	$i_y=0{,}289b\times$

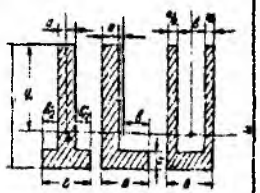
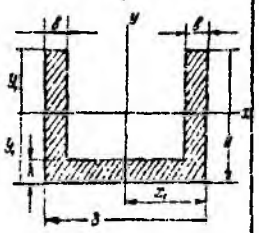
1	2	3	4	5	6
				$W_y=\frac{hb^2}{6}\left(1-\right.$ $\left.-1{,}18\frac{d^4}{hb^3}\right)$	$\times\sqrt{\frac{1-1{,}18\frac{d^4}{hb^3}}{1-1{,}57\frac{d^2}{bh}}}$
Жарты дөңгелекті ойықты тікбұрыш 	$A=bh-\pi r^2$	$x_1=\frac{b}{2}$ $y_1=\frac{h}{2}$	$I_x=\frac{bh^3}{12}-\frac{\pi r^4}{4}$ $I_y=\frac{hb^3}{12}-2\left[0{,}11r^4+\right.$ $\left.+\frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{b}{2}-\frac{4r}{3\pi}\right)^2\right]$	$W_x=\frac{bh^2}{6}-\frac{\pi r^4}{2h}$ $W_y=\frac{hb^2}{6}-$ $-\frac{4}{b}\left[0{,}11r^4+\right.$ $\left.+\frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{b}{2}-\frac{4r}{3\pi}\right)^2\right]$	$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$ $i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$

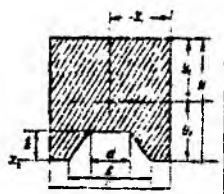
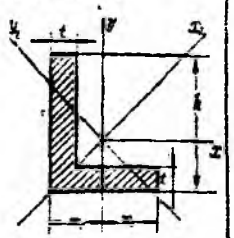
1	2	3	4	5	6
Бұрылған тікбұрыш 	$A=bh$	$y_1=\frac{1}{2}\left(h\cos\alpha+\right.$ $\left.+b\sin\alpha\right)$ $x_1=\frac{1}{2}\left(b\cos\alpha-\right.$ $\left.-h\sin\alpha\right)$	$I_x=\frac{bh}{12}\left(h^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\right)$ $I_y=\frac{bh}{12}\left(h^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha\right)$ $I_{xy}=\frac{bh}{24}\left(b^2-h^2\sin 2\alpha\right)$	$W_x=\frac{bh}{6}\times$ $\times\frac{h^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}{h\cos\alpha+b\sin\alpha}$ $W_y=\frac{bh}{6}\times$ $\times\frac{h^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}{b\cos\alpha-h\sin\alpha}$	$i_x=$ $=\sqrt{\frac{h^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}{12}}=$ $=0.289\times$ $\times\sqrt{h^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}$ $i_y=0.289\times$ $\times\sqrt{h^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}$
Төртбұрышты тар жолақ 	$A=lt$	$y_0=\frac{a+b}{2}$ $y_1=\frac{h}{2}$	$I_x=\frac{lth^2}{12}=\frac{Ah^2}{12}$ $I_{x_2}=\frac{lt}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$	$W_x=\frac{lth}{6}$ $W_{x_2}=\frac{lt}{3b}\left(a^2+ab+b^2\right)$	$i_x=0.289h$
Тікбұрыштардан құрылған симметриялық қоставр	$A=ah+b\left(H-h\right)$	$x_1=\frac{b}{2}$ $y_1=\frac{H}{2}$	$I_x=\frac{ah^3}{12}+\frac{b}{12}\left(H^3-h^3\right)$ $I_y=\frac{a^3h}{12}+\frac{b^3}{12}(H-h)$	$W_x=\frac{ah^3}{6H}+$ $+\frac{b}{6H}\left(H^3-h^3\right)$	$i_x=$ $=\sqrt{\frac{ah^3+b\left(H^3-h^3\right)}{12\left[ah+b(H-h)\right]}}=$

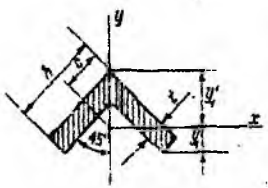
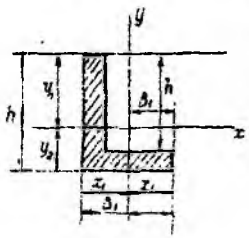
1	2	3	4	5	6
				$W_x=\frac{a^2h}{6b}+\frac{b^2}{6}(H-h)$	
Қоставр 	$A=aH+$ $+2b(c+c_1)$ $b=\frac{1}{2}(B-a)$	$x_1=\frac{B}{2}$ $y_1=\frac{H}{2}$	$I_x=\frac{1}{12}\left[BH^3-\frac{1}{4\alpha}\left(h^4-h_1^4\right)\right]$ $I_y=\frac{1}{12}\left[B^3(H-h)+h_1a^3+\frac{\alpha}{4}\left(B^4-a^4\right)\right]$ $\alpha=\frac{h-h_1}{2b}$ Стандарт қоставр үшін $\alpha=\frac{1}{6}$	$W_x=\frac{1}{6H}\left[BH^3-\frac{1}{4\alpha}\left(h^4-h_1^4\right)\right]$ $W_y=\frac{1}{6B}\left[B^3(H-h)+h_1a^3+\frac{\alpha}{4}\left(B^4-a^4\right)\right]$	$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$ $i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$
Тікбұрыштардан құрылған симметриялық кима 	$A=BH-bh$	$y_1=\frac{H}{2}$	$I_x=\frac{BH^3-bh^3}{12}$	$W_x=\frac{BH^3-bh^3}{6H}$	$i_x=\sqrt{\frac{BH^3-bh^3}{12(BH-bh)}}$

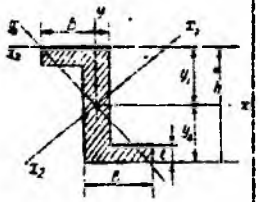
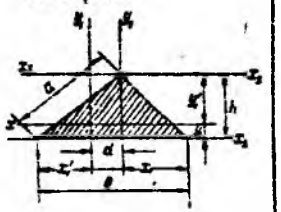
1	2	3	4	5	6
Тікбұрыштан құрылған симметриялық қима 	$A=BH-bh$	$y_1=\frac{H}{2}$	$I_x=\frac{BH^3-bh^3}{12}$	$W_x=\frac{BH^3-bh^3}{6H}$	$i_x=\sqrt{\frac{BH^3-bh^3}{12(BH-bh)}}$
Айқыш-үйқыш 	$A=Hb+$ $+(B-b)h$	$x_1=\frac{B}{2}$ $y_1=\frac{H}{2}$	$I_x=\frac{bH^3+(B-b)h^3}{12}$ $I_y=\frac{hB^3+(H-h)b^3}{12}$	$W_x=\frac{bH^3+(B-b)h^3}{6H}$ $W_y=\frac{hB^3+(H-h)b^3}{6B}$	$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$ $i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$
Жұқа қабырғалы айқыш-үйқыш 	$A=h\delta+$ $+(b-\delta)\delta$	$x_1=\frac{b}{2}$ $y_1=\frac{h}{2}$	$I_x=\frac{1}{12}\left[h^3\delta+\delta^3(b-\delta)\right]$ $I_y=\frac{1}{12}\left[b^3\delta+\delta^3(h-\delta)\right]$	$W_x=\frac{h^3\delta+\delta^3(b-\delta)}{6h}$ $W_y=\frac{b^3\delta+\delta^3(h-\delta)}{6b}$	$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$ $i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$
Тікбұрыштардан құрылған симметриялық емес көстаар 	$A=bc_1+$ $a(h+h_1)+$ $+Bc$	$b_1=b-a$ $B_1=B-a$ $x_1=\frac{B}{2}$ $y_1=\frac{1}{2}$	$I_x=\frac{1}{3}\left(By_1^3-B_1h^3+\right.$ $\left.+by_1^3-b_1h_1^3\right)$ $I_y=\frac{1}{12}\left[B^3c+b^3c_1+\right.$ $\left.+a^3(h+h_1)\right]$	$W_{x\max}=\frac{I_x}{y_1}$ (жоғары талшықтар үшін) $W_{x\min}=\frac{I_x}{y_1}$ (төменгі талшықтар үшін)	$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$ $i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$

1	2	3	4	5	6
		$*\dfrac{aH^2+B_1c^2+b_1c_1(2H-c_1)}{aH+B_1c+b_1c_1}$ $y_1'=H-y_1$ $h=y_1-c$ $h_1=y_1'-c_1$		$W_y=\dfrac{1}{6B}\left[B^3c+h^3c_1+\right.$ $\left.+a^3(h+h_1)\right]$	$i_y=\sqrt{\dfrac{I_y}{A}}$
Тікбұрыштардан құрылған симметриялық тавр 	$A=(B-b)c+$ $+bh$	$x_1=\dfrac{B}{2}$ $y_1'=\dfrac{1}{2}*$ $*\dfrac{(B-b)c^2+bh^2}{(B-b)c+bh}$ $y_1=h-y_1'$	$I_x=I_{x_2}+y_1'^2A$ $I_{x_2}=\dfrac{1}{3}\left[(B-b)c^3+bh^3\right]$ $I_y=\dfrac{1}{12}\left[B^3c+b^3(h-c)\right]$ $I_x=\beta\dfrac{Bh^3}{12}$ β графиктен табылады 	$W_{x\text{ж}}=\dfrac{I_x}{y_1'}=\dfrac{I_{x_2}}{y_1'}=y_1'A$ (жоғары талшықтар үшін) $W_{x\text{т}}=\dfrac{I_x}{y_1}=\dfrac{I_x}{h-y_1}$ (төменгі талшықтар үшін) $W_y=\dfrac{1}{6B}\left[B^3c+\right.$ $\left.+b^3(h-c)\right]$	$i_x=\sqrt{\dfrac{I_x}{A}}$ $i_y=\sqrt{\dfrac{I_y}{A}}=$ $=\dfrac{1}{2}\times$ $\times\sqrt{\dfrac{\left(B^3-b^3\right)c+b^3h}{3\left[(B-b)c+bh\right]}}$

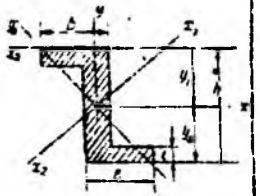
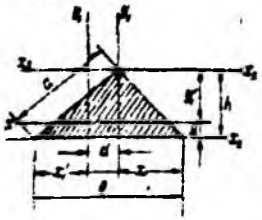
1	2	3	4	5	6
Тікбұрыштардан құрылған симметриялық емес қима 	$A=aH+bc$	$y_1=\frac{aH^2+bc^2}{2(aH+bc)}$ $y_1'=H-y_1=$ $=\frac{aH^2+bc(2H-c)}{2(aH+bc)}$	$I_x=\frac{1}{3}\left(By_1^3-bt^3+\right.$ $\left.+ay_1'^3\right)$	$W_т=\frac{I_x}{y_1}$ (төменгі талшықтар үшін) $W_{жж}=\frac{I_x}{y_1'}=\frac{I_x}{H-y_1}$ (жоғары талшықтар үшін) $W_{ст}>W_{жж}$	$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$
	$A=Bh+$ $+2b(H-h)$	$x_1=\frac{B}{2}$ $y_1=\frac{Bh^2+2b\left(H^2-h^2\right)}{2\left[Bh+2b(H-h)\right]}$ $y_1'=H-y_1$	$I_x=\frac{Bh^3+2b(H-h)^3}{12}+$ $=Bh\left(y_1-\frac{h}{2}\right)^2+$ $+2b(H-h)\left(\frac{H-h}{2}+\right.$ $\left.+h-y_1\right)^2$ $I_y=\frac{B^3H-(H-h)(B-2b)^3}{12}$	$W_x=\frac{I_x}{y_1}$ (төменгі талшықтар үшін) $W_x=\frac{I_x}{y_1'}$ (жоғары талшықтар үшін) $W_y=$ $=\frac{B^3H-(H-h)(B-2b)^3}{6B}$	$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$ $i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$
Көпірдің тіреуі	$A=BH-$	$x_1=\frac{B}{2}$	$I_x=I_{x_2}-Ay_1^2$	$W_x=\frac{I_x}{y_1}$	$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$

1	2	3	4	5	6
	$\frac{a+b}{2}h$	$y_1=$ $=\frac{3BH^2-h^2(b+2a)}{6BH-3h(a+b)};$ $y_1'=H-y_1$	$I_{x_2}=\frac{BH^3}{3}-\frac{h^3}{12}(b+3a)$ $I_y=\frac{HB^3}{3}-\frac{h}{48}\frac{b^4-a^4}{b-a}$	(төменгі талшықтар үшін) $W_x=\frac{I_x}{y_1'}$ (жоғары талшықтар үшін) $W_y=\frac{HB^2}{6}-\frac{h}{24b}\frac{b^4-a^4}{b-a}$	$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$
Теңбүйірлі бұрыштық 	$A=t(2h-t)$	$x_1=y_1=$ $=\frac{h^2+t(h-t)}{2(2h-t)}$ $x_1'=y_1'=$ $=h-x_1=h-y_1$	$I_x=I_y=$ $=\frac{1}{3}\left[t(h-y_1)^3+hy_1^3-\right.$ $\left.-(h-t)(y_1-t)^3\right]$ $I_{x_2}=\frac{t}{6}(2h-3t)\left(h^2+t^2\right)$ $I_{y_2}=\frac{1}{12}\left[7h^4-5(h-t)^4\right]-$ $-2h^2y_1(h+y_1)+2(h-t)\times$ $\times(h-y_1)(y_1+t)-4hy_1(h-t)^2.$	$W_x=W_y=\frac{I_x}{y_1}$ (сол және төменгі талшықтар үшін) $W_x=W_y=\frac{I_x}{y_1'}$ (жоғары және оң талшықтар үшін)	$i_{\min}=i_{y_2}=$ $=\sqrt{\frac{I_{y_2}}{A}}$

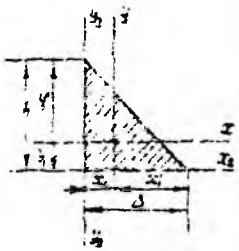
1	2	3	4	5	6
Теңбүйірлі бұрыштық 	$A=t(2h-t)$	$y_1=\frac{h+t-2c}{\sqrt{2}}$ $y_1'=\frac{h^2+ht-t^2}{(2h-t)\sqrt{2}}$ $c=y_1'\frac{\sqrt{2}}{2}$	$I_x=\frac{1}{3}\left[2c^4-2(c-t)^4+\right.$ $\left.+t\left(h-2c+\frac{t}{2}\right)^3\right];$ $I_y=\frac{h^4-(h-t)^4}{12},$	$W_{ж}=\frac{I_x}{y_1}$ (жоғары талшықтар үшін) $W_{т}=\frac{I_x}{y_1}$ (төменгі талшықтар үшін)	$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$ $i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$
Бүйірлері тең емес бұрыштық 	$A=t(b+h_1)=$ $=t(h+b_1)$	$x_1=\frac{b^2+h_1t}{2(b+h_1)}$ $x_1'=b-x_1=$ $=\frac{b^2+h_1(2b-t)}{2(b+h_1)}$ $y_1=\frac{h^2+b_1t}{2(h+b_1)};$ $y_1'=h-y_1=$ $=\frac{h^2+b_1(2h-t)}{2(h+b_1)}$	$I_x=\frac{1}{3}\left[t(h-y_1)^3+\right.$ $\left.+by_1^3-b_1(y_1-t)^3\right]$ $I_y=\frac{1}{3}\left[t(b-x_1)^3+\right.$ $\left.+hx_1^3-h(x_1-t)^3\right]$ $I_{xy}=-\frac{bb_1hh_1t}{4(b+h_1)}=$ $=-\frac{bb_1hh_1t}{4(h+b_1)};$	$W_{ж}=\frac{I_x}{y_1'}$ (жоғары талшықтар үшін) $W_{т}=\frac{I_x}{y_1}$ (төменгі талшықтар үшін) $W_{он}=\frac{I_y}{x_1'}$ (оң талшықтар үшін) $W_{сол}=\frac{I_y}{x_1}$ (сол талшықтар үшін)	$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}=$ $=0,29h$ $i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=$ $=0,32b$

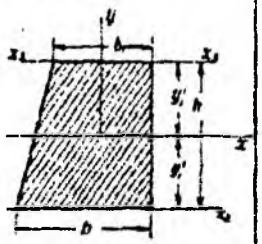
1	2	3	4	5	6
z-тәрізді кима 	$A=ht_1+$ $+2t(b-t_1)$	$x_1=b-\frac{t_1}{2}$ $y_1=\frac{h}{2}$	$I_x=\frac{bh^3-(b-t_1)(h-2t)^3}{12}+$ $+ht_1^3+6tb^2(b-t_1)$ $I_y=\frac{2t(b-t_1)^3}{12}$ $I_{x_2}=\frac{I_x\cos^2\alpha-I_y\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}$ $I_{y_2}=\frac{I_y\cos^2\alpha-I_x\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}$ $tg2\alpha=\frac{bt(b-t_1)(h-t)}{I_x-I_y}$	$W_x=$ $=\frac{bh^3-(b-t_1)(h-2t)^3}{6h}$ $W_y=$ $=ht_1^3+6th^2(b-t_1)=$ $=\frac{2t(b-t_1)^3}{6(2b-t_1)}$	$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$ $i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$
Үшбұрыш 	$A=\frac{1}{2}bh$	$y_1=\frac{1}{3}h$ $y_1'=\frac{2}{3}h$ $d=\frac{1}{3}(x_1'-x_1)$	$I_x=\frac{bh^3}{36}=\frac{Ah^2}{18}$ $I_{x_2}=\frac{bh^3}{12}=\frac{Ah^2}{6}$ $I_{x_3}=\frac{bh^3}{4}=\frac{Ah^2}{2}$ $I_y=\frac{bh(b^2-x_1'x_1)}{36}=$	$W_{xt}=\frac{bh^3}{12}$ (төменгі талшықтар үшін) $W_{xж}=\frac{bh^2}{24}$ (жоғары талшықтар	$i_x=\frac{h}{3\sqrt{2}}=$ $=0.2357h$ $i_y=\frac{1}{3\sqrt{2}}\times$ $\times\sqrt{b^2-x_1'x_1}=$

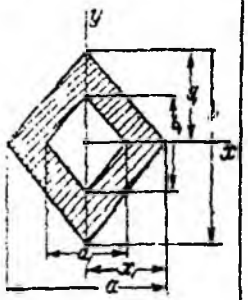
1	2	3	4	5	6
			$=\frac{A\left(b^2-x_1'x_1\right)}{18}$	үшін)	$=0,2357\times$
			$I_2=\frac{h}{12}\left(x_1'^3+x_1^3\right)$	$W_{\text{оң}}=\frac{bh\left(b^2-x_1'x_1\right)}{36x_1}$	$\times\sqrt{b^2-x_1'x_1}$
			$I_p=\frac{bh}{36}\left(h^2+x_1'^2+\right.$	(он талшықтар үшін)	
			$\left.+x_1'x_1+x_1^2\right)$	$W_{\text{сол}}=\frac{bh\left(b^2-x_1'x_1\right)}{36x_1'}$	
			$I_{pA}=\frac{h}{12}\left(3bh^2+x_1'^3+x_1^3\right)$	(сол талшықтар үшін)	
			$I_y=I_{y2}=\frac{hb^3}{48}=\frac{Ah^2}{24}$	$W_{\text{оң}}=W_{\text{сол}}=\frac{hb^2}{12}$	$i_y=\frac{b}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}=$
			$I_6=\frac{h^4}{25,981}=\frac{b^4}{46,188}$	$W_6=0,005b^3=$	$=0,204b$
				$=\frac{h^3}{12,99}=\frac{2I_6}{h}$	
				τ_{max} — қабырғаларының ортасында, $\tau=0$	
			b — табаны, h — биіктігі және төбесіндегі бұрышы $\alpha<15^\circ$ теңбүйірлі үшбұрыш үшін		
			$I_6=\frac{1}{12}hb^3-0,105b^4$	$W_6=\frac{1}{12}hb^2-$	
				$-0,105b^3=\frac{I_6}{b}$	
				τ_{max} — табанына жақын үзын қабырғалардың нүктелерінде	

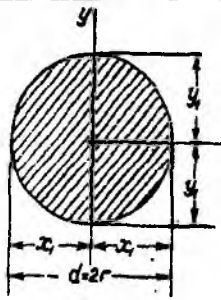
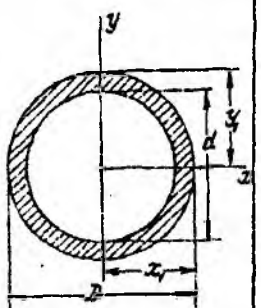
1	2	3	4	5	6
2-тәрізді кима 	$A=ht_1+$ $+2t(b-t_1)$	$x_1=b-\frac{t_1}{2}$ $y_1=\frac{h}{2}$	$I_x=\frac{bh^3-(b-t_1)(h-2t)^3}{12}+$ $+ht_1^3+6tb^2(b-t_1)$ $I_y=\frac{2t(b-t_1)^3}{12}$ $I_{x_2}=\frac{I_x\cos^2\alpha-I_y\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}$ $I_{y_2}=\frac{I_y\cos^2\alpha-I_x\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}$ $tg2\alpha=\frac{bt(b-t_1)(h-t)}{I_x-I_y}$	$W_x=$ $=\frac{bh^3-(b-t_1)(h-2t)^3}{6h}$ $W_y=$ $=ht_1^3+6th^2(b-t_1)=$ $=\frac{2t(b-t_1)^3}{6(2b-t_1)}$	$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$ $i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$
Үшбұрыш 	$A=\frac{1}{2}bh$	$y_1=\frac{1}{3}h$ $y_1'=\frac{2}{3}h$ $d=\frac{1}{3}(x_1'-x_1)$	$I_x=\frac{bh^3}{36}=\frac{Ah^2}{18}$ $I_{x_2}=\frac{bh^3}{12}=\frac{Ah^2}{6}$ $I_{x_3}=\frac{bh^3}{4}=\frac{Ah^2}{2}$ $I_y=\frac{bh(b^2-x_1'x_1)}{36}=$	$W_{xr}=\frac{bh^3}{12}$ (төменгі талшықтар үшін) $W_{xж}=\frac{bh^2}{24}$ (жоғары талшықтар	$i_x=\frac{h}{3\sqrt{2}}=$ $=0,2357h$ $i_y=\frac{1}{3\sqrt{2}}\times$ $\times\sqrt{b^2-x_1'x_1}=$

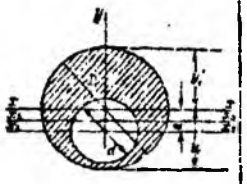
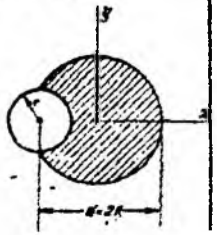
1*	2	3	4	5	6
			$=\frac{A\left(b^2-x_1'x_1\right)}{18}$	үшін)	$=0,2357\times$
			$I_2=\frac{h}{12}\left(x_1'^3+x_1^3\right)$	$W_{\text{ион}}=\frac{bh\left(b^2-x_1'x_1\right)}{36x_1}$	$\times\sqrt{b^2-x_1'x_1}$
			$I_p=\frac{bh}{36}\left(h^2+x_1'^2+\right.$	(он талшықтар үшін)	
			$\left.+x_1'x_1+x_1^2\right)$	$W_{\text{усол}}=\frac{bh\left(b^2-x_1'x_1\right)}{36x_1'}$	
			$I_{pA}=\frac{h}{12}\left(3bh^2+x_1'^3+x_1^3\right)$	(сол талшықтар үшін)	
			$I_y=I_{y2}=\frac{hb^3}{48}=\frac{Ah^2}{24}$	$W_{\text{ион}}=W_{\text{усол}}=\frac{hb^2}{12}$	$i_y=\frac{b}{6\sqrt{2}}\sqrt{3}=$
			$I_6=\frac{h^4}{25.981}=\frac{b^4}{46,188}$	$W_6=0,005b^3=$	$=0,204b$
				$=\frac{h^3}{12,99}=\frac{2I_6}{h}$	
				τ_{max} — қабырғаларының ортасында, $\tau=0$	
			b — табаны, h — биіктігі және төбесіндегі бұрышы $\alpha<15^\circ$ теңбүйірлі үшбұрыш үшін		
			$I_6=\frac{1}{12}hb^3-0,105b^4$	$W_6=\frac{1}{12}hb^2-$	
				$-0,105b^3=\frac{I_6}{b}$	
				τ_{max} — табанына жақын үзын қабырғалардың нүктелерінде	

1	2	3	4	5	6
Пікбұрышты үшбұрыш 	$A=\frac{1}{2}bh$	$x_1'=\frac{1}{3}b$ $x_1=\frac{2}{3}b$ $y_1=\frac{1}{3}h$ $y_1'=\frac{2}{3}h$	$I_x=\frac{bh^3}{36}=\frac{Ah^2}{18}$ $I_{x_2}=\frac{bh^3}{12}=\frac{Ah^2}{6}$ $I_{x_3}=\frac{bh^3}{4}=\frac{Ah^2}{2}$ $I_y=\frac{b^3h}{36}=\frac{Ab^2}{18}$ $I_{y_2}=\frac{b^3h}{12}=\frac{Ab^2}{6}$ $I_{xy}=-\frac{b^2h^2}{72}$ $I_{x_2y_2}=\frac{b^2h^2}{24}$ $I_{x_3y_2}=-\frac{b^2h^2}{8}$ $I_\rho=\frac{bh}{36}\left(h^2+b^2\right)=\frac{bhc^2}{36}$ $c=h^2+b^2$ $I_{\rho A}=\frac{bh}{12}\left(h^2+b^2\right)=\frac{bhc^2}{12}$ $I_{\rho B}=\frac{bh}{12}\left(3h^2+b^2\right)$	$W_{xт}=\frac{bh^2}{12}$ (төменгі талшықтар үшін) $W_{xж}=\frac{bh^2}{24}$ (жоғарғы талшықтар үшін) $W_{усол}=\frac{b^2h}{12}$ (сол талшықтар үшін) $W_{уон}=\frac{b^2h}{24}$ (он талшықтар үшін)	$i_x=\frac{h}{3\sqrt{2}}=$ $=0,2357h$ $i_y=\frac{b}{3\sqrt{2}}=$ $=0,2357b$

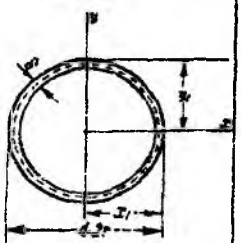
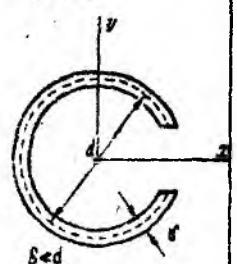
1	2	3	4	5	6
Трапеция 	$A=\frac{1}{2}(b_1+b)h$	$y_1=\frac{b+2b_1}{3(b+b_1)}h$	$I_x=\frac{h^3(b^2+4bb_1+b_1^2)^2}{36(b+b_1)}=$	$W_{x\text{т}}=\frac{h^2(b^2+4bb_1+b_1^2)}{12(b+2b_1)}$	$i_x=$
		$y_1'=\frac{2b+b_1}{3(b+b_1)}h$	$=\frac{Ah^2(b^2+4bb_1+b_1^2)}{18(b+b_1)^2}$	$W_{x\text{ж}}=\frac{h^2(b^2+4bb_1+b_1^2)}{12(2b+b_1)}$	$=\frac{h}{6(b+b_1)}\times$
			$I_{x_2}=\frac{h^3}{12}(b+3b_1)=$		$\times\sqrt{2(b^2+4bb_1+b_1^2)}$
			$=\frac{Ah^2(b+3b_1)}{6(b+b_1)}$		
			$I_{x_3}=\frac{h^3(3b+b_1)}{12}=$		
			$=\frac{Ah^2(3b+b_1)}{6(b+b_1)}$		
			b_1 үстінгі және $b_1+b_0=b$ төменгі табандарымен тең бүйірлі трапеция үшін		
		$y_1'=\frac{3b_1+2b_0}{3(2b_1+b_0)}h$	$I_x=\frac{h^3(6b_1^2+6b_1b_0+b_0^2)}{36(2b_1+b_0)}$	$W_{x\text{ж}}=\frac{h^2(6b_1^2+6bb_0+b_0^2)}{12(3b_1+2b_0)}$	$i_x=\frac{h}{6(2b_1+b_0)}\times$
		$x_1=\frac{b}{2}$	$I_y=\frac{h}{48}\frac{b^4-b_1^4}{b-b_1}$	$W_y=\frac{h}{24}\frac{b^4-b_1^4}{b^2-bb_1}$	$\times\sqrt{2(6b_1^2+6bb_0+b_0^2)}$
					$i_y=\sqrt{\frac{b^2+b_1^2}{24}}$

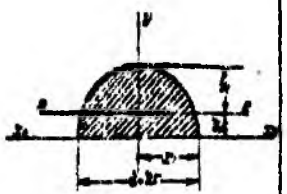
1	2	3	4	5	6
			b үлкен, b_1 кіші табандарымен, биіктігі $h>4h$ сына тәрізді $I_б=\frac{h\left(b^4-b_1^4\right)}{12\left(b-b_1\right)}$ $-0{,}105\left(b^4+b_1^4\right)$	$W_б=\frac{I_б}{b}=$ $=\frac{h\left(b^4-b_1^4\right)}{12b\left(b-b_1\right)}$ $-0{,}105\frac{b^4+b_1^4}{b}$ $\tau_{max}=\frac{M_б}{W_б}$ — үлкен табанына жақын үзын қабырғаларының нүктелерінде	
	$A=\frac{1}{2}(ab-$ $-a_1b_1)$	$x_1=\frac{a}{2}$ $y_1=\frac{b}{2}$	$I_x=\frac{ab^3-a_1b_1^3}{48}$ $I_y=\frac{a^3b-a_1^3b_1}{48}$	$W_x=\frac{ab^3-a_1b_1^3}{24b}$; $W_y=\frac{a^3b-a_1^3b_1}{24a}$	$i_x=$ $\sqrt{\frac{ab^3-a_1b_1^3}{24\left(ab-a_1b_1\right)}}$ $i_y=$ $\sqrt{\frac{a^3b-a_1^3b_1}{24\left(ab-a_1b_1\right)}}$
	$A=\frac{\pi d^2}{4}=$	$x_1=y_1=$	$I_x=I_y=\frac{\pi d^4}{64}=\frac{\pi r^4}{4}=$	$W_x=W_y=\frac{\pi d^3}{32}=\frac{\pi r^3}{4}=$	$i_x=i_y=$

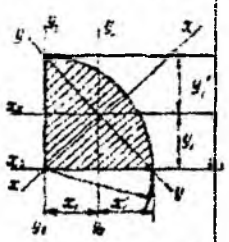
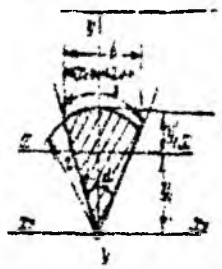
1	2	3	4	5	6
	$=\pi r^2\approx$ $\approx 0{,}785d^2$	$=\frac{d}{2}=r$	$=\frac{Ad^2}{16}=\frac{Ar^2}{4}\approx$ $\approx 0{,}05d^4\approx 0{,}785r^4.$ $I_\rho=I_б=2I_x=2I_y\approx$ $=\frac{\pi d^4}{32}=\frac{\pi r^4}{2}\approx$ $\approx 0{,}1d^4\approx 1{,}57r^4.$	$\approx 0{,}1d^3\approx 0{,}785r^3.$ $W_\rho=W_б=\frac{\pi d^3}{16}=\frac{\pi r^3}{2}\approx$ $\approx 0{,}2d^3\approx 1{,}57r^3.$ τ_{max} — периметрдің барлық нүктелерінде	$=\frac{d}{4}=\frac{r}{2}$
	$A=\frac{\pi\left(D^2-d^2\right)}{4}=$ $=\frac{\pi D^2}{4}\left(1-\alpha^2\right)\approx$ $\approx 0{,}785D^2\left(1-\alpha^2\right);$ $\alpha=\frac{d}{D}$	$x_1=y_1=\frac{D}{2}$	$I_x=I_y=\frac{\pi\left(D^4-d^4\right)}{64}=$ $=\frac{\pi D^4}{64}\left(1-\alpha^4\right)=\frac{A\left(D^2+d^2\right)}{16}=$ $=\frac{AD^2}{16}\left(1+\alpha^2\right)\approx 0{,}05D^4\left(1-\alpha^4\right)$ $I_\rho=I_б=\frac{\pi\left(D^4-d^4\right)}{32}=$ $=\frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right)\approx$ $\approx 0{,}1D^4\left(1-\alpha^4\right)$	$W_x=W_y=\frac{\pi\left(D^4-d^4\right)}{32D}=$ $=\frac{\pi D^3}{32}\left(1-\alpha^4\right)\approx$ $\approx 0{,}1D^3\left(1-\alpha^4\right);$ $W_\rho=W_б=\frac{\pi\left(D^4-d^4\right)}{16D}=$ $=\frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right)\approx$ $\approx 0{,}2D^3\left(1-\alpha^4\right);$ τ_{max} — шеңбердің барлық нүктелерінде	$i_x=i_y=$ $=\frac{1}{4}\sqrt{D^2+d^2}$ $=\frac{D}{4}\sqrt{1+\alpha^2}$

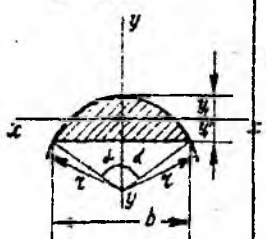
1	2	3	4	5	6
Центрлес емес ойықты шеңбер 	$A=\frac{\pi D^2}{4}\left(1-\alpha^2\right)$ $\alpha=\frac{d}{D}$	$x_1=\frac{D}{2}$ $y_0=\beta D\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$ $y_1=\frac{D}{2}\frac{1-\alpha^2(1-2\beta)}{1-\alpha^2}$ $y_1'=\frac{D}{2}\frac{1-\alpha^2(1+2\beta)}{1-\alpha^2}$ $\beta=\frac{a}{D}$	$I_x=\frac{\pi D^4}{64}\left(1-\alpha^4-16\frac{\alpha^2\beta^2}{1-\alpha^2}\right)$ $I_y=\frac{\pi D^4}{64}\left(1-\alpha^4\right)$	$W_x=\frac{\pi D^3}{32}\times$ $\times\left(\frac{\left(1-\alpha^2\right)\left(1-\alpha^4\right)-16\alpha^2\beta^2}{1-\alpha^2(1+2\beta)}\right)$ (жоғары талшықтар үшін) $W_x=\frac{\pi D^3}{32}\times$ $\times\left(\frac{\left(1-\alpha^2\right)\left(1-\alpha^4\right)-16\alpha^2\beta^2}{1-\alpha^2(1-2\beta)}\right)$ (төменгі талшықтар үшін) $W_y=\frac{\pi D^3}{32}\left(1-\alpha^4\right)$	$i_x=\frac{D}{4}\times$ $\times\sqrt{1+\alpha^2-16\left(\frac{\alpha\beta}{1-\alpha}\right)^2}$ $i_y=\frac{D}{4}\times\sqrt{1+\alpha^2}$
Дөңгелек ойығы бар шеңбер 			$I_6=k_1R^4$	$W_6=\frac{R^3}{k_2}$	—

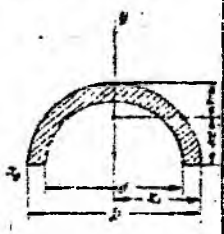
$\frac{r}{R}$	0	0,005	0,1	0.2	0,4	0,6	0,8	1	1.5

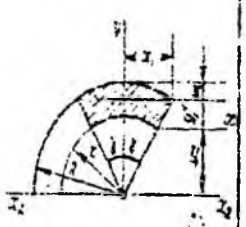
1	2	3	4			5					6		
			k_1	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0.63	0.38	0,07	
			k_2	0.64	1,22	1,22	1,23	1,31	1,52	1,91	2.63	7.14	
Жұқа қабырғалы сақина $\delta<0,1d$ 	$A=\pi\delta d$	$x_1=y_1=\frac{d}{2}=r$	$I_x=I_y=\frac{\pi\delta d^3}{8}=$ $=\pi\delta r^3=\frac{Ad^2}{8}=$ $\approx 0,393\delta d^3$ $I_\rho=I_\delta=\frac{\pi\delta d^3}{4}=$ $=2\pi\delta r^3\approx 0,785d^3$			$W_x=W_y=\frac{\pi\delta d^2}{4}=$ $=\pi\delta r^2\approx 0,785\delta d^2$ $W_\rho=W_\delta=\frac{\pi\delta d^2}{2}=$ $=2\pi\delta r^2\approx 1,57\delta d^2$ τ_{max} — периметрдің барлық нүктелерінде					$i_x=i_y=\frac{d}{2\sqrt{2}}=$ $=\frac{r}{\sqrt{2}}\approx 0,353d$		
Жұқа қабырғалы ашық сақина $\delta<<d$  	—	$x_1=y_1=\frac{d+\delta}{2}$	$I_\delta=\frac{\pi d\delta^3}{3}$			$W_\delta=\frac{(\pi d\delta)^2}{3\pi d+1,8\delta}\approx$ $\approx\frac{\pi d\delta^2}{3}$ $\tau_{max}=\frac{3\pi d+1,8\delta}{(\pi d\delta)^2}M_\delta$ Қиманың ішкі және сыртқы контурлары нүктелерінде							

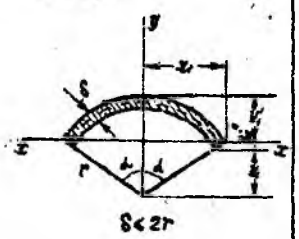
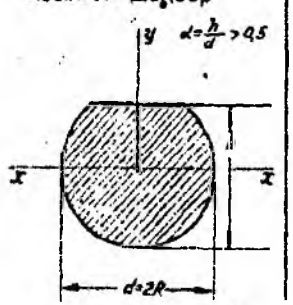
1	2	3	4	5	6
Жарты шеңбер 	$A=\frac{\pi d^2}{8}=\frac{\pi r^2}{2}=$ $=0,393d^2$	$x_1=\frac{d}{2}=r$ $y_1=\frac{2d}{3\pi}=$ $=\frac{4r}{3\pi}=0.212d$ $y_1'=0.288d$	$I_x=\frac{d^4}{16}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)=$ $=0,0068d^4=0,11r^4$ $I_y=I_{x_2}=\frac{\pi d^4}{128}=\frac{\pi r^4}{8}=$ $=\frac{Ad^2}{16}=\frac{Ar^2}{4}=0,0246d^4=$ $=0,393r^4$	$W_x=0,0324d^3=0,259r^3$ (төменгі талшықтар үшін) $W_x=0,0239d^3=0,191r^3$ (жоғары талшықтар үшін) $W_y=\frac{\pi d^3}{64}=\frac{\pi r^3}{8}=$ $=0,05d^3=0,393r^3$	$i_x=0,132d$ $i_y=\frac{d}{4}$

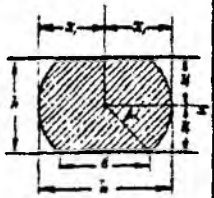
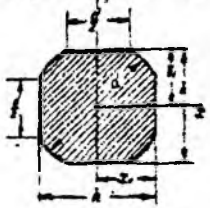
1	2	3	4	5	6
Ширек шеңбер 	$A=\frac{\pi r^2}{4}\approx 0,785r^2$	$x_1=y_1=\frac{4r}{3\pi}\approx$ $\approx 0,424r$ $x_1'=y_1'\approx 0,576r$	$I_{x\max}\approx 0,0714r^4$ $I_{y\min}\approx 0,0384r^4$ $I_{x_2}=I_{y_2}\approx 0,0549r^4$ $I_{x_3}=I_{y_3}=\frac{\pi r^4}{16}\approx 0,196r^4$ $I_{x_2y_2}=-0,016r^4$ $I_{x_3y_3}=\frac{r^4}{8}$	$W_{x_2}=W_{y_2}=\frac{\pi^2 r^3}{48}\times$ $\times\frac{9\pi^2-64}{3\pi-4}\approx 0,923r^3$ (жоғары және он талшықтар үшін) $W_{x_2}=W_{y_2}=\frac{\pi^2 r^3}{192}\times$ $\times\left(9\pi^2-64\right)\approx 1,245r^3$ төменгі және сол талшық тар үшін)	$i_{x\max}\approx 0,302r$ $i_{y\min}\approx 0,221r$
Дөңгелек сектор 	$A=\frac{sr}{2}=\alpha r^2$ $s=2r\alpha$ $\alpha=\frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$	$x_1=\frac{b}{2}=r\sin\alpha$ $y_1=\frac{2rb}{3s}=$ $=\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}=$ $=38,2\frac{r\sin\alpha}{\alpha^\circ}$	$I_x=\frac{r^4}{8}\left(2\alpha+\sin 2\alpha-\right.$ $\left.-\frac{32\sin^2\alpha}{9\alpha}\right)=\frac{Ar^2}{8\alpha}\times$ $\times\left(2\alpha+\sin 2\alpha-\frac{32\sin^2\alpha}{9\alpha}\right)$ $I_{x_2}=\frac{r^4}{8}(2\alpha+\sin 2\alpha)$	$W_x=\frac{r^3}{8}\times$ $\times\frac{2\alpha+\sin 2\alpha-\frac{32\sin^2\alpha}{9\alpha}}{1-\frac{2\sin\alpha}{3\alpha}}$ (жоғары талшықтар үшін)	$i_x=\frac{r}{2}\times$ $\times\sqrt{1+\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}-\frac{16\sin^2\alpha}{9\alpha^2}}$ $i_y=\frac{r}{2}\times$ $\times\sqrt{1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}}$

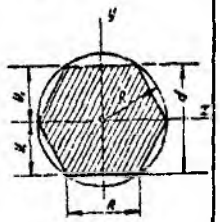
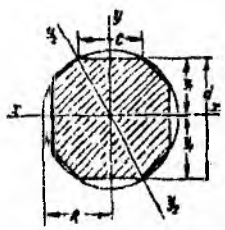
1	2	3	4	5	6
		$y_1'=r\left(1-\frac{2\sin\alpha}{3\alpha}\right)$ $b=2r\sin\alpha$	$I_y=\frac{r^4}{8}(2\alpha-\sin 2\alpha)=$ $=\frac{Ar^2}{8\alpha}(2\alpha-\sin 2\alpha).$	$W_x=\frac{3r^3\alpha}{16\sin\alpha}\times$ $\times\left(2\alpha+\sin 2\alpha-\frac{32\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right)$ (төменгі талшықтар үшін) $W_y=r^3\frac{2\alpha-\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$	
Дөңгелек сегмент 	$A=\frac{r^2}{2}\times$ $\times(2\alpha-\sin 2\alpha)$ $\alpha=\frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$	$x_1=\frac{b}{2}$ $b=2r\sin\alpha$ $y_0=\frac{4r\sin^3\alpha}{3(2\alpha-\sin 2\alpha)}$ $y_1=r\left(\frac{4}{3}\times\right.$ $\left.\times\frac{\sin^3\alpha}{2\alpha-\sin 2\alpha}-\cos\alpha\right)$ $y_1'=r\left(1-\frac{4}{3}\times\right.$	$I_x=\frac{r^4}{8}(2\alpha-\sin 2\alpha+$ $+4\cos\alpha\sin^3\alpha)=\frac{Ar^2}{4}\times$ $\times\left(1+\frac{4\cos\alpha\sin^3\alpha}{2\alpha-\sin 2\alpha}\right)$ $I_y=\frac{r^4}{8}(2\alpha-\sin 2\alpha-$ $-\frac{4}{3}\cos\alpha\sin^3\alpha)=\frac{\pi r^2}{4}\times$ $\times\left(1-\frac{4\cos\alpha\sin^3\alpha}{3\ 2\alpha-\sin 2\alpha}\right)$	$W_x=\frac{I_x}{y_1}$ (төменгі талшықтар үшін) $W_x=\frac{I_x}{y_1'}$ (жоғары талшықтар үшін)	$i_x=\frac{r}{2}\times$ $\times\sqrt{1+\frac{4\cos\alpha\sin^3\alpha}{2\alpha-\sin 2\alpha}}$ $i_y=\frac{r}{2}\times$ $\times\sqrt{1-\frac{4\cos\alpha\sin^3\alpha}{3\ 2\alpha-\sin 2\alpha}}$

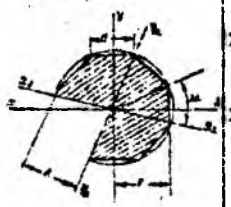
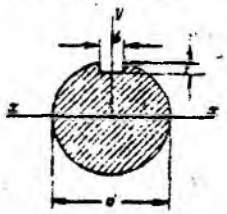
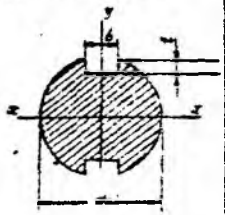
1	2	3	4	5	6
		$\times\frac{\sin^3\alpha}{2\alpha-\sin 2\alpha}\Big)$	$I_{x_2}=\frac{r^4}{8}\times$ $\times(2\alpha-\sin 2\alpha\cos 2\alpha)$	$W_y=\frac{r^3}{8\sin\alpha}(2\alpha-\sin 2\alpha-\frac{4}{3}\cos\alpha\sin^3\alpha\Big)$	
Жарты сақина 	$A=\frac{\pi}{8}\left(D^2-d^2\right)=$ $=\frac{\pi D^2}{8}\left(1-\alpha^2\right)=$ $=0,393D^2\times$ $\times\left(1-\alpha^2\right)$ $\alpha=\frac{d}{D}$	$x_1=\frac{D}{2}$ $y_1=\frac{2}{3\pi}\times$ $\times\frac{D^2+Dd+d^2}{D+d}=$ $=\frac{2}{3\pi}\frac{D(1+\alpha+\alpha^2}{1+\alpha}=$ $=0,212D\frac{1+\alpha+\alpha^2}{1+\alpha}$ $y_1'=D\times$ $\times\left(0,288-0,212\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\right)$	$I_x=0,00686\left(D^4-d^4\right)-$ $\frac{0,0177D^2d^2(D-d)}{D+d}=$ $=0,00686D^4\times$ $\times\left(1-\alpha^4-2,54\alpha^2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$ $I_y=\frac{\pi}{128}\left(D^4-d^4\right)=\frac{\pi D^4}{128}\times$ $\times\left(1-\alpha^4\right)=0,0246D^4\left(1-\alpha^4\right)$	$W_x=0,00686D^3\times$ $\times\left(1-\alpha^4\right)(1+\alpha)\times$ $\times\frac{-2,54\alpha^2(1-\alpha)}{0,288\left(1+\alpha-0,212\alpha^2\right)}$ (жоғары талшықтар үшін) $W_x=0,0324D^3\left(1-\alpha^4\right)\times$ $\times(1+\alpha)\frac{-2,54\alpha^2(1-\alpha)}{1+\alpha+\alpha^2}$ (төменгі талшықтар үшін) $W_y=\frac{\pi D^3}{64}\left(1-\alpha^4\right)=$ $=0,05D^3\left(1-\alpha^4\right).$	$i_x=\sqrt{I_x/A}$ $i_x=\frac{1}{4}\sqrt{D^2+d^2}=$ $=\frac{D}{4}\sqrt{1+\alpha^2}$

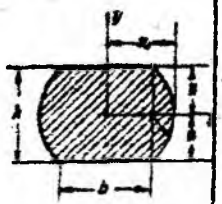
1	2	3	4	5	6
Сақинаның секторы 	$A=\gamma\left(R^2-r^2\right)=$ $=\gamma R^2\left(1-\alpha^2\right)$ $\gamma=\frac{\pi\gamma^\circ}{180^\circ}$ $\alpha=\frac{r}{R}$	$x_1=R\sin\gamma$ $y_1=\frac{2}{3}\times$ $\times\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\frac{\sin\gamma}{\gamma}=$ $=\frac{2}{3}\frac{R\sin\gamma}{\gamma}\frac{1-\alpha^3}{1-\alpha^2}$ $y_1'=R\left(1-\frac{2}{3}\frac{\sin\gamma}{\gamma}\times\right.$ $\left.\times\frac{1-\alpha^3}{1-\alpha^2}\right)$ $y_1''=\frac{2R\sin\gamma}{3\gamma}\times$ $\times\left(\frac{1-\alpha^3}{1-\alpha^2}-\frac{3}{2}\alpha\gamma\operatorname{ctg}\gamma\right)$	$I_x=\frac{R^4-r^4}{8}(2\gamma+\sin2\gamma-$ $-\frac{32\sin^2\gamma}{9\gamma})=\frac{R^4}{8}\left(1-\alpha^4\right)\times$ $\times\left(2\gamma+\sin2\gamma-\frac{32\sin^2\gamma}{9\gamma}\right)=$ $=\frac{AR^2}{8\gamma}\left(1+\alpha^2\right)\times$ $\times\left(2\gamma+\sin2\gamma-\frac{32\sin^2\gamma}{9\gamma}\right)$ $I_{x_1}=\frac{R^4-r^4}{8}(2\gamma+\sin2\gamma)=$ $=\frac{R^4}{8}\left(1-\alpha^4\right)(2\gamma+\sin2\gamma)$ $I_y=\frac{R^4-r^4}{8}(2\gamma-\sin2\gamma)=$ $=\frac{R^4}{8}\left(1-\alpha^4\right)(2\gamma-\sin2\gamma)=$ $=\frac{AR^2}{8\gamma}\left(1+\alpha^2\right)(2\gamma-\sin2\gamma)$	$W_x=\frac{I_x}{y_1'}$ (жоғары талшықтар үшін) $W_x=\frac{I_x}{y''}$ (төменгі талшықтар үшін) $W_y=\frac{R^3}{8}\left(1-\alpha^4\right)\times$ $\times\frac{2\gamma-\sin2\gamma}{\sin2\gamma}$	$i_x=\frac{R}{2}\times$ $\times\sqrt{\left(1+\alpha^2\right)\left(1+\frac{\sin2\gamma}{2\gamma}-\right.}$ $\left.-\frac{16\sin^2\gamma}{9\gamma^2}\right)}$ $i_y=\frac{R}{2}\times$ $\times\sqrt{(1+\alpha)^2\left(1-\frac{\sin2\gamma}{2\gamma}\right)}$

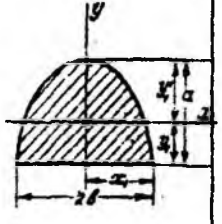
1	2	3	4	5	6
Жука қабырғалы сақинаның сектары 	$A=2\alpha r\delta$ $\alpha=\frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$	$x_1=r\sin\alpha$ $y_1=r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $y_1'=r\left(1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$ $y_1''=r\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\cos\alpha\right)$	$I_x=\frac{\delta r^3}{2}(2\alpha+\sin 2\alpha-$ $-\frac{4\sin^2\alpha}{\alpha})=\frac{Ar^2}{4\alpha}\times$ $\times\left(2\alpha+\sin 2\alpha-\frac{4\sin^2\alpha}{\alpha}\right)$ $I_y=\frac{\delta r^3}{2}(2\alpha-\sin 2\alpha)=$ $=\frac{Ar^2}{4\alpha}(2\alpha-\sin 2\alpha)$	$W_x=\frac{\delta r^2}{2}\times$ $\times\frac{2\alpha+\sin 2\alpha-\frac{4\sin^2\alpha}{\alpha}}{1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$ (жоғары талшықтар үшін) $W_y=\frac{\delta r^2}{2}\times$ $\times\frac{2\alpha+\sin 2\alpha-\frac{4\sin^2\alpha}{\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\cos\alpha}$ $W_y=\frac{\delta r^2}{2}\frac{2\alpha-\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$	$i_x=\frac{r}{2}\times$ $\times\sqrt{2+\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}-\frac{4\sin^2\alpha}{\alpha}}$ $i_y=\frac{r}{2}\times$ $\times\sqrt{2-\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}}$
Жоғары жағы кесілген шеңбер 	—	—	$I_6=\frac{d^4}{16}\left(2,6\frac{h}{d}-1\right)=$ $=\frac{d^4}{16}(2,6\alpha-1)$	$W_6=\frac{d^3(2,6\alpha-1)}{8(0,3\alpha+0,7)}$ τ_{max} — жазық кесіктің ортасында,	

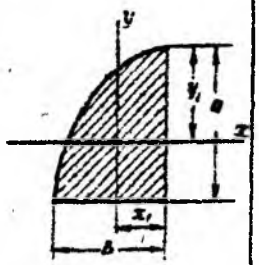
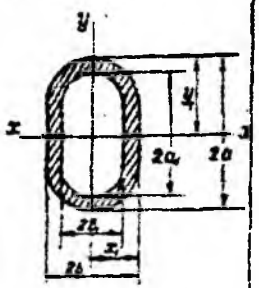
1	2	3	4	5	6
				$\tau=0$ — бұрыштарында	
Жоғары және төменгі алып тастаған сегменттері бар шенбер 	а) $b=d\cos\alpha$ $h=d\sin\alpha$ $A=\frac{d^2}{4}\times$ $\times(2\alpha+\sin 2\alpha)$	$x_1=\frac{d}{2}$ $y_1=\frac{d}{2}\sin\alpha$	$I_x=\frac{d^4}{32}\left(\alpha-\frac{\sin 4\alpha}{4}\right)$ $I_y=\frac{d^4}{32}\left(\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{2}+\frac{\sin 2\alpha\cos^2\alpha}{3}\right)$	$W_x=\frac{d^3}{16\sin\alpha}\left(\alpha-\frac{\sin 4\alpha}{4}\right)$ $W_y=\frac{d^3}{16}\left(\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{2}+\frac{\sin 2\alpha\cos^2\alpha}{3}\right)$	$i_x=\sqrt{I_x/A}$ $i_y=\sqrt{I_y/A}$
	б) $b=\frac{d}{2}$; $h=0{,}866d$ $A=0{,}74d^2$	$x_1=\frac{d}{2}$ $y_1=0{,}433d$	$I_x=0{,}0395d^4$ $I_y=0{,}0485d^4$	$W_x=0{,}0912d^3$ $W_y=0{,}097d^3$	$i_x=0{,}231d$ $i_y=0{,}256d$
	в) $b=\frac{d}{3}$; $h=0{,}943d$	$x_1=\frac{d}{2}$ $y_1=0{,}471d$	$I_x=0{,}0461d^4$ $I_y=0{,}049d^4$	$W_x=0{,}0978d^3$ $W_y=0{,}098d^3$	$i_x=0{,}244d$ $i_y=0{,}252d$
Төрт жақтан кесілген сегменттері бар шенбер 	$A=0{,}773d^2$ $A=\frac{\pi d^2}{12}\times$ $\times\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right)=$ $=0{,}694d^2$	$x_1=y_1=0{,}433d$	$I_x=I_y=0{,}038d^4$	$W_x=W_y=0{,}087d^3$	$i_x=i_y=0{,}234d$

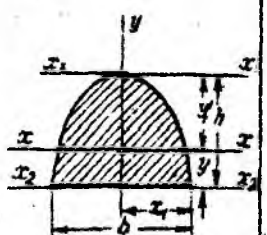
1	2	3	4	5	6
Дұрыс алты бұрыш 	$A=0{,}866d^2=$ $=2{,}598R^2$	$y_1=\frac{d}{2}$	$I_x=I_y=\frac{5\sqrt{3}}{16}R^4=$ $=0{,}5413R^4=0{,}06d^4$ $I_б=0{,}533A\frac{d^2}{4}$	$W_x=\frac{5}{8}R^3=$ $=0{,}625R^2=0{,}12d^3$ $W_y=0{,}5413R^3=0{,}06d^3$ $W_б=0{,}436A\frac{d}{2}$ τ_{max} — жақтардың ортасында; $\tau=0$ — бұрыштарында	$i_x=i_y=0{,}456R=$ $=0{,}263d$
Дұрыс сегіз бұрыш 	$A=0{,}828d^2=$ $=4{,}828c^2$	$x_1=y_1=\frac{d}{2}$	$I_x=I_y=I_{y_2}=\frac{1+2\sqrt{2}}{6}R^4=$ $=0{,}638R^4=0{,}0547d^4$ $I_б=0{,}52A\frac{d^2}{4}$	$W_x=W_y=0{,}690R^3=$ $=0{,}1095d^3$ $W_{y_2}=0{,}638R^3=0{,}1012d^3$ — диагоналге сәйкес $W_б=0{,}447A\frac{d}{2}$ τ_{max} — жақтардың ортасында; $\tau=0$ — бұрыштарында	$i_x=i_y=i_{y_2}=$ $=0{,}257d$

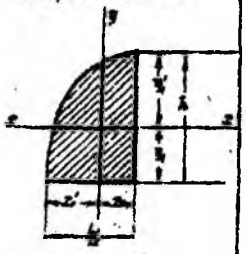
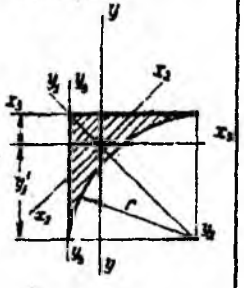
1	2	3	4	5	6
n жақты дұрыс көп бұрыш 	$A=\frac{1}{4}na^2\times$ $\times ctg\alpha=nr^2\times$ $\times tg\alpha=\frac{nar}{2}$	$R=\frac{a}{2\sin\alpha}$ $r=\frac{a}{2tg\alpha}$	$I_x=I_{x_2}=\frac{A}{24}\left(6R^2-a^2\right)=$ $=\frac{nar}{48}\left(6R^2-a^2\right)$ $I_x=I_{x_2}=\frac{A}{48}\left(12r^2+a^2\right)=$ $=\frac{A}{96}\left(12r^2+a^2\right)$		$i_x=\sqrt{\frac{6R^2-a^2}{24}}$ $i_{x_2}=\sqrt{\frac{12r^2+a^2}{48}}$
Сынар шпонкалы ойықты дөңгелек кима 	$A=\frac{\pi d^2}{4}-bt$	$x_1=y_1=\frac{d}{2}$	$I_x=\frac{\pi d^4}{64}-\frac{bt(d-t)^2}{4}$ $I_6=\frac{\pi d^4}{32}-\frac{bt(d-t)^2}{4}$	$W_x=\frac{\pi d^3}{32}-\frac{bt(d-t)^2}{2d}$ $W_6=\frac{\pi d^3}{16}-\frac{bt(d-t)^2}{2d}$	$i_x=\sqrt{I_x/A}$
Кос шпонкалы ойықты дөңгелек кима 	$A=\frac{\pi d^2}{4}-2bt$	$x_1=\frac{d}{2}$ $y_1=\frac{d}{2}$	$I_x=\frac{\pi d^4}{64}-\frac{bt(d-t)^2}{2}$ $I_6=\frac{\pi d^4}{32}-\frac{bt(d-t)^2}{2}$	$W_x=\frac{\pi d^3}{32}-\frac{bt(d-t)^2}{d}$ $W_6=\frac{\pi d^3}{16}-\frac{bt(d-t)^2}{d}$	$i_x=\sqrt{I_x/A}$

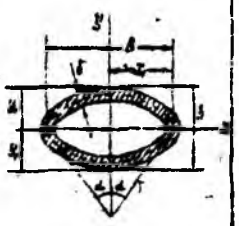
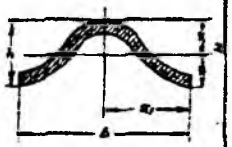
1	2	3	4	5	6
Жұмыр келген кепір тіреуші 	$A=bh+\pi r^2=$ $=bh\left(1+\frac{\pi}{4}a\right)$ $r=\frac{h}{2}$ $a=\frac{h}{b}$	$x_1=\frac{b+h}{2}=$ $=\frac{b}{2}(1+a)$ $y_1=\frac{h}{2}$	$I_x=\frac{bh^3}{12}\left(1+\frac{3\pi}{16}a\right)$ $I_y=\frac{hb^3}{12}\left[1+0{,}165a^3+\right.$ $\left.+3\pi a(0{,}5+0{,}212a)^2\right]$	$W_x=\frac{bh^2}{12}\left(1+\frac{3\pi}{16}a\right)$ $W_y=\frac{hb^2}{6(1+a)}\left[1+0{,}165a^3+\right.$ $\left.+3\pi a(0{,}5+0{,}212a)^2\right]$	$i_x=\sqrt{I_x/A}$ $i_y=\sqrt{I_y/A}$
Эллипс 	$A=\pi ab$ $\frac{a}{b}>1$	$x_1=b$ $y_1=a$	$I_x=\frac{\pi a^3 b}{4}=\frac{Aa^2}{4}=$ $=0{,}785a^3b$ $I_y=\frac{\pi ab^3}{4}=\frac{Ab^2}{4}=$ $=0{,}785a^3b$ $I_\rho=\frac{\pi ab}{4}\left(a^2+b^2\right)=$ $=\frac{A}{4}\left(a^2+b^2\right)$	$W_x=\frac{\pi a^2 b}{4}=0{,}785a^2b$ $W_y=\frac{\pi ab^2}{4}=0{,}785ab^2$ $W_\kappa=\frac{\pi b^2 a}{2}$ $\tau_{max}=\frac{M_\kappa}{W_\kappa}=\frac{2M_\kappa}{\pi b^2 a}$ кіші өстің ұштары бойынша	$i_x=\frac{a}{2}$ $i_y=\frac{b}{2}$

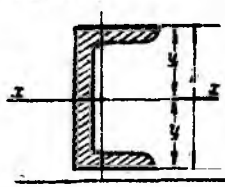
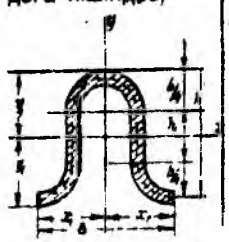
1	2	3	4	5	6
			$I_\rho=\frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}=\frac{A^3}{\pi^2\left(a^2+b^2\right)}=$ $=\frac{A^4}{4\pi^2 I_\rho}$	$\tau=\frac{b\tau_{max}}{a}$ үлкен өстің үштары бойынша	
Жарты эллипс 	$A=\frac{\pi ab}{2}$	$x_1=b$ $y_1=\frac{4}{3\pi}a$ $y_1'=\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)a$	$I_x=ba^3\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)=$ $=2Aa^2\left(\frac{1}{8}-\frac{8}{9\pi^2}\right)$ $I_y=\frac{\pi ab^3}{8}=\frac{Ab^2}{4}$	$W_x=\frac{3}{4}ba^2\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{8}{9}\right)$ төменгі талшықтар үшін) $W_x=\frac{ba^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)}{1-\frac{4}{3\pi}}$ (жоғарғы талшықтар үшін) $W_y=\frac{\pi ab^2}{8}=0.392ab^2$	$i_x=\frac{a}{2}\times$ $\times\sqrt{1-\left(\frac{8}{3\pi}\right)^2}$ $i_y=\frac{b}{2}$

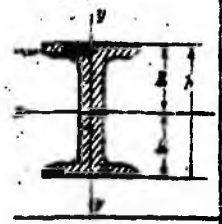
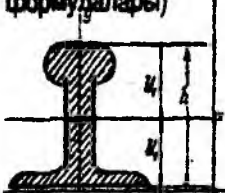
1	2	3	4	5	6
Ширек эллипс 	$A=\frac{\pi ab}{4}$	$x_1=\frac{4}{3\pi}b$ $y_1=\frac{4}{3\pi}a$	$I_x=ba^3\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right)=$ $=4Aa^2\left(\frac{1}{16}-\frac{4}{9\pi^2}\right)$ $I_y=ab^3\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right)=$ $=4Ab^2\left(\frac{1}{16}-\frac{4}{9\pi^2}\right)$	$W_{x\min}=\frac{3}{4}ba^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{4}{9}\right)$ (Төменгі талшықтар үшін) $W_{y\min}=\frac{3}{4}ab^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{4}{9}\right)$ (оң талшықтар үшін)	$i_x=\frac{a}{2}\times$ $\times\sqrt{1-\left(\frac{8}{3\pi}\right)^2}$ $i_y=\frac{b}{2}\times$ $\times\sqrt{1-\left(\frac{8}{3\pi}\right)^2}$
Қуыс эллипс 	$A=\pi\times$ $\times\left(ab-a_1b_1\right)$	$x_1=b$ $y_1=a$ $a-a_1=$ $=b-b_1=\delta$	$I_x=\frac{\pi}{4}\left(a^3b-a_1^3b_1\right)=$ $=\frac{\pi}{4}a^2(a+3b)\delta$ $I_y=\frac{\pi}{4}\left(ab^3-a_1b_1^3\right)=$ $=\frac{\pi}{4}b^2(b+3a)\delta$	$W_x=\frac{\pi a^3b-a_1^3b_1}{4\quad a}=$ $=\frac{\pi}{4}a(a+3b)\delta$ $W_y=\frac{\pi ab^3-a_1b_1^3}{4\quad b}=$ $=\frac{\pi}{4}b(b+3a)\delta$	$i_x=\sqrt{I_x/A}$ $i_y=\sqrt{I_y/A}$
		$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=$ $=n>1$ $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=$ $=\alpha<1$	Егер де $\delta:a_1$ және $\delta:b_1$ шағын болса, онда I және W жуық мәндері жарымды болады $I_б=\frac{\pi b^4n^3}{n^2+1}\left(1-\alpha^4\right)$	$W_б=\frac{\pi b^3n}{2}\left(1-\alpha^4\right)$ Кіші жарты өстің үшында $\tau_{max}=M_б/W_б$ үлкен жарты өстің	

1	2	3	4	5	6
				үшында $\tau=\frac{\tau_{max}}{n}$ $\tau=M_б/2Aб$ — қалыңдығы шағын болғанда қима бойынша тең таралған көрнеуді алуға болады	
Параболалық сегмент 	$A=\frac{2}{3}bh$	$x_1=\frac{b}{2}$ $y_1=\frac{2}{5}h$ $y_1'=\frac{3}{5}h$	$I_x=\frac{8}{175}bh^3=\frac{12Ah^2}{175}$ $I_{x_2}=\frac{16}{105}bh^3=\frac{8Ah^2}{35}$ $I_{x_3}=\frac{2}{7}bh^3=\frac{3}{7}Ah^2$ $I_y=\frac{hb^2}{30}=\frac{Ab^2}{20}$	$W_x=\frac{4}{35}bh^2$ (төменгі талшықтар үшін) $W_x=\frac{8}{105}bh^2$ (жоғары талшықтар үшін) $W_y=\frac{hb^2}{15}$	$i_x=\frac{2}{5}h\sqrt{\frac{3}{7}}$ $i_y=\frac{b}{2\sqrt{5}}$

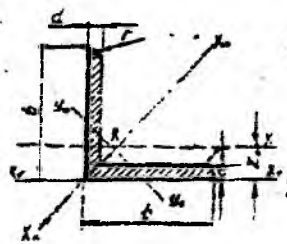
1	2	3	4	5	6
Параболалық жарты сегмент 	$A=\frac{bh}{3}$	$x_1=\frac{3}{16}b$ $x_1'=\frac{5}{16}b$ $y_1=\frac{2}{5}h$ $y_1'=\frac{3}{5}h$	$I_x=\frac{4}{175}bh^3=\frac{12Ah^2}{175}$	$W_{x\min}=\frac{2}{35}bh^2$ (төменгі талшықтар үшін)	$i_x=\frac{2}{5}h\sqrt{\frac{3}{7}}$
Айналма үшбұрыш 	$A=0,215r^2$	$x_1=y_1=0,233r$ $x_1'=y_1'=0,777r$	$I_x=I_y=0,00755r^4$ $I_{x_2}=0,003r^4$ $I_{x_3}=I_{y_3}=0,0181r^4$ $I_{y_2}=0,0121r^4$	$W_{x_2\min}=0,0097r^3$	$i_{x_2\min}=0,187r$
Жасымық түрінде куыс кима	$A=\alpha\times$ $\times\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\times$	$x_1=$ $=\sqrt{(\delta+h)\left(r+\frac{\delta-h}{4}\right)}$	$I_x=r^3\delta[2\alpha(2+\cos2\alpha)-$ $-3\sin2\alpha]=\frac{Ar^2}{4\alpha}[2\alpha(2+$	$W_x=\frac{I_x}{y_1}=\frac{2I_x}{\delta+h}$ $W_y=\frac{I_y}{x_1}$	$i_x=r\times$ $\times\sqrt{\frac{2+\cos2\alpha}{2}\frac{3\sin2\alpha}{4}\alpha}$

1	2	3	4	5	6
	$\times h\delta=\frac{\alpha\delta}{h}\times$ $\times\left(h^2+b^2\right)=$ $=4\alpha r\delta$ $b=h\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ $r=\frac{h}{4}\times$ $\times\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$	$y_1=\frac{\delta+h}{2}$	$+\cos 2\alpha)-3\sin 2\alpha]$ $\tilde{I}_y=r^3\delta(2\alpha-\sin 2\alpha)=$ $=\frac{Ar^2}{4\alpha}(2\alpha-\sin 2\alpha)$		$i_y=r\times$ $\times\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sin 2\alpha}{4\alpha}}=$ $=\frac{r}{2}\sqrt{2-\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}}$
Ирек темір (иректері параболалық доға пішіндес) 	$A=12{,}5\delta\times$ $\times\frac{b}{h}\left\{\frac{4h}{b}\times\right.$ $\times\sqrt{1+\left(\frac{4h}{b}\right)^2}+$	$x_1=\frac{b}{2}$ $y_1=\frac{h+\delta}{2}$ $y_1'=\frac{h-\delta}{2}$	$I_x=\frac{1280}{21}\frac{1}{6}\left(b_1y_1^3-b_2y_1'^3\right)=$ $=\frac{64}{105}\left(b_1y_1^3-b_2y_1'^3\right)=$ $=\frac{16}{105}\left[b\left(y_1^3-y_1'^3\right)+\right.$	$W_x=\frac{2I_x}{h+\delta}$	$i_x=$ $=\sqrt{\frac{3I_x}{\delta(2b+5{,}2h)}}\approx$ $\approx 1{,}35\times$

1	2	3	4	5	6
	$+\ln\left[\frac{4h}{b}+\sqrt{1+\left(\frac{4h}{h}\right)^2}\right]\approx\frac{1}{3}\delta(2b+5{,}2h)$	$b_1=\frac{b+2{,}6\delta}{4}$ $b_2=\frac{b-2{,}6\delta}{4}$	$+2{,}6\delta\left(y_1^3-y_1'^3\right)\Big]$		$\times\sqrt{\frac{b_1y_1^3-b_2y_1'^3}{\delta(2b+5{,}2h)}}$
Қырынан қойылған стандарттық прокат профильді швеллер 	—	$y_1=\frac{h}{2}$	$I_x=\frac{\delta}{4}\left(\frac{\pi b^3}{16}+b^2h_1+\frac{\pi bh_1^2}{2}+\frac{2}{3}h_1^3\right)$	$W_x=\frac{2I_x}{h+\delta}$	$i_x=\sqrt{I_x/A}$
Ирек темір (иректері шенбер доға пішіндес) 	$A=2\delta\left(\frac{\pi b}{4}+h_1\right)$ $h_1=h-\frac{b}{2}$	$x_1=\frac{b}{2}$ $y_1=\frac{h+\delta}{2}$	$I_x=\frac{h(h+5)^3}{162}$	$W_x=\frac{(h+5)^3}{81}$	$i_x=\sqrt{I_x/A}$

1	2	3	4	5	6
Қырынан қойылған стандарттық қоставр 		$y_1=\frac{h}{2}$	$J_x=\frac{h(h+2)^3}{102}$	$W_x=\frac{(h+2)^3}{51}$	$i_x=\sqrt{I_x/A}$
Темір жолдың қимасы (жуық формулалары) 	$A\approx0,238h^2$	$y_1\approx0,5h$	$I_x\approx0,032h^4$	$W_x\approx0,064h^3$	$i_x\approx0,37h$
Кез келген қиманың түрі	A — қиманың сыртқы пішінінің ішкі ауданы	h — биіктігі b — ені S — және t (қуыс қима үшін периметр мен қалыңдығы)	$I=\frac{A^2h}{12b}$ — тұтас қима үшін. Қатесі 15% Қуыс қима үшін $I=\frac{Ah}{6b}\left[S+\frac{A(b-h)}{bh}\right]t$ Қатесі 25%	$W=\frac{A^2}{6b}$ — тұтас симметриялық қима үшін Қуыс симметриялық қима үшін $W=\frac{A}{3b}\left[S+\frac{A(b-h)}{bh}\right]t$	— —

2.2 - к е с т е. Сығымдалған болаттан жасалған білеулер түрлерінің жиынтығы
Тең бүйірлі бұрыштар (ГОСТ 8509-57 бойынша)



Профилдің №	Өлшемдер b	d	R	r	Профилдің ауданы	1 м салмағы	Өстер үшін анықтама шамалар $x-x$		x_0-x_0				x_1-x_1	z_0
						бойы	I_x	i_x	I_{x_0} макс	i_{x_0} макс	I_{y_0} мин	i_{y_0} мин	I_{x_1}	
	мм				$см^2$	кг	$см^4$	см	$см^4$	см	$см^4$	см	$см^4$	см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4			1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4			1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4			2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4			2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04

2.2 - кестенің жалғасы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	40	3	5	1,7	2,35	1,85	3,55	1,23	5,53	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4			3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
4,5	45	3	5	1,7	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4			3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5			4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	50	3	5,5	1,8	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,30
		4			3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5			4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	3,5	6	2	3,86	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4			4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5			5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	63	4	7	2,3	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5			6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6			7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78

2.2 кестенің жалғасы

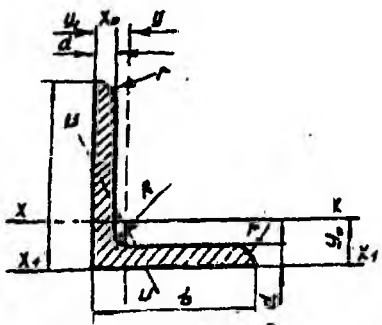
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	70	4,5	8	2,7	6,2	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1.88
		5			6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,8	1,90
		6			8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7			9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,92
		8			10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,09
7.5	75	5	9	3	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6			8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,05
		7			10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,46	98,3	2,10
		8			11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,16
		9			12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
8	80	5,5	9	3	8,63	6,78	52,7	2,47	85,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6			9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7			10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8			12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
9	90	6	10	3,3	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7			12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8			13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9			15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
		6,5			12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7			13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8			15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
10	100	10	12	4	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12			22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14			26,3	20,6	237	3	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16			29,7	23,3	264	2,98	416	3,73	112	1,94	542	3,06
11	110	7	12	4	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8			17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3
12,5	125	8	14	4,6	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36

2.2 - кестенің жалғасы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		9			22	17,3	327	4,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10			24,3	19,1	360	3,85	571	4,48	149	2,47	649	3,45
		12			28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14			33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	245	916	3,61
		16			37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	14	4,6	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10			27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12			32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	10	16	5,3	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11			34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12			37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14			43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16			49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18			54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		20			60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	16	5,3	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12			42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	12	18	6	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13			50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14			54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16			62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20			76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,62	1182	3,93	5355	5,70
		25			94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30			111,5	87,6	4020	6	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	21	7	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16			68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6.02
25	250	16	24	8	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18			87,7	68,9	5247	7,73	8337	9.75	2158	4,96	9342	6,83
		20	24	8	97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		22			106,1	83.3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,0
		25			119,7	94,0	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28			133,1	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30			142	111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31

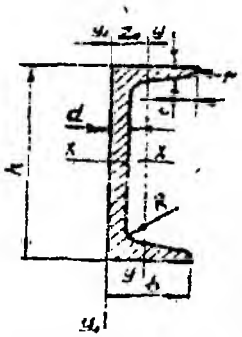


2.3-к е с т е. Бүйірлері тең емес бұрыштар.
(ГОСТ 8510-57 бойынша)

Профильдің нөмірлері	Өлшемдер					Профильдің ауданы	Салмағы, 1 м бойы	Өс үшін анықтама шамалар										Көлбеу бұрыш $tg\alpha$
								$x-x$		$y-y$		x_1-x_1		y_1-y_1		$u-u$		
	B	b	d	R	r			I_x	i_x	I_y	i_y	I_{x_1}	ауырлық центрінің қашықтығы y_0	I_{y_1}	ауырлық центрінің қашықтығы x_0	I_u мин	i_u мин	
			мм			$см^2$	кг	$см^4$	см	$см^4$	см	$см^4$	см	$см^4$	см	$см^4$	см	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0.34	0,392
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382
			4			1,94	1,52	1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	0,12	0,53	0,35	0,43	0,374
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
			4			2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,60	0,382
			4			2,80	2,20	5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,61	0,379
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	1,90	6,17	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
			4			3,17	2,49	7,98	1,59	2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401
5,6/3,6	56	36	3,5	6	2	3,16	2,48	10,1	1,79	3,30	1,02	20,3	1,8	5,43	0,82	1,95	0,79	0,407
			4			3,58	2,81	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
			5			4,11	3,46	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,76	0,404
6,3/4,0	63	40	4	7	2,3	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
			5			4,98	3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,73	0,86	0,396
			6			5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393
			8			7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,396
7/4,5	70	45	4,5	7,5	2,5	5,07	3,98	25,3	2,23	8,25	1,28	51,0	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407
			5			5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406
7,5/5	75	50	5	8	2,7	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
			6			7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
			8			9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,60	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			6			7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,86	1,08	0,386
9/5,6	90	56	5,5	9	3	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
			6			8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
			8			11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,38
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,59	7,53	96,3	3,20	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
			7			11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8			12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10			15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,6	1,58	28,3	1,35	0,387

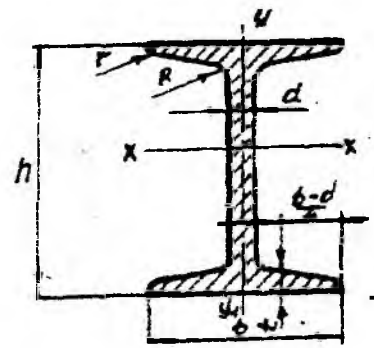
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11,7	110	70	6,5	10	3,3	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2,00	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			7			12,3	9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,60	28,8	1,53	0,402
			8			13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,1	11,0	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,80	43,4	1,76	0,407
			8			16,0	12,5	256	4,00	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10			19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12			23,4	18,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	220	2,00	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	12	4	18,0	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10			22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409
16/10	160	100	9	13	4,3	22,9	18,0	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	100	2,20	0,391
			10			25,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	122	2,19	0,390
			12			30,0	23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14			34,7	27,3	897	5,08	272	2,80	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385
18/11	180	110	10	14	4,7	28,3	22,2	952	5,80	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12			33,7	26,4	1123	5,77	324	3,10	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2920	6,50	718	2,79	264	2,75	0,392
			12			37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392
			14			43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
			16			49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	18	6	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1654	3,53	604	3,54	0,410
			16			63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
			18			71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407
			20			78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405



2-4 кесте. Швеллерлер (ГОСТ 8240-56 бойынша)

Профильдің нөмірлері	Салмағы 1м бойы	Өлшемдер						Кима ауданы	Өс үшін анықтама шамалар							z_c
									x—x				y—y			
		h	b	d	t	r	r_1		I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y	
	кг			мм				$см^2$	$см^4$	$см^3$	см	$см^3$	$см^4$	$см^3$	см	см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6	2,5	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	3	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	10	4	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12	5	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,58
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

2.5. кесте. Кос таврлы арқалықтар (ГОСТ 8239-72)



Профиль нөмірлері	Салмағы 1 м бойы	Өлшемдер						Қима ауданы	Өс үшін анықтама шамалар						
									x — x				y — y		
		h	b	d	t	R	r		I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y
	кг	мм						$см^2$	$см^4$	$см^3$	см	$см^3$	$см^4$	$см^3$	см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8	3	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9	3,5	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	19,9	180	100	5,1	8,3	9	3,5	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	22,7	200	110	5,2	8,5	9,5	4	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10	4	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	25,8	220	120	5,4	8,9	10	4	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
27	31.5	270	125	6,0	9,8	11	4,5	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	39,9	270	135	6.0	10,2	11	4,5	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36.5	300	135	6,5	10,2	12	5	46.5	7080	472	12,3	268	337	49.9	2,69
30a	39.2	300	145	6,5	10,7	12	5	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	44,2	330	140	7,0	11,2	13	5	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14	6	61,9	13380	743	14,7	423	416	71,1	2,89
40	56,1	400	155	8,0	13,0	15	6	71,4	18930	947	16,3	540	666	85,9	3,05
45	65,2	450	160	8,6	14.2	16	7	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12
50	76,8	500	170	9,5	15,2	17	7	97.8	39290	1570	20.0	905	1040	122	3,26
55	89,8	550	180	10,3	16,5	18	7	114	55150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44
60	104	600	190	11,1	17,8	20	8	132	75450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60
65	120	650	200	12,0	19,2	22	9	153	101400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77
70	138	700	210	13,0	20,8	24	10	176	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94
70a	158	700	210	15,0	24,0	24	10	202	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01
70б	184	700	210	17,5	28,2	24	10	234	175370	5010	27,4	2910	3910	373	4,09

III тарау

МАТЕРИАЛДАРДЫҢ МЕХАНИКАЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

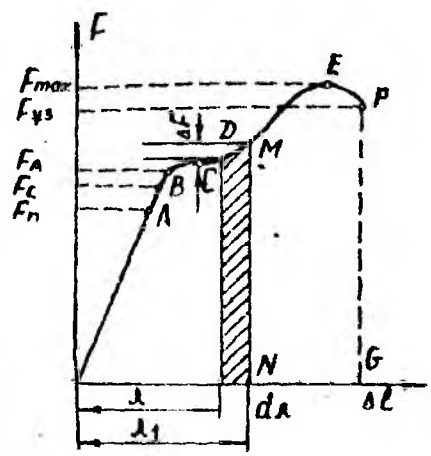
§ 1. СОЗЫЛУ ДИАГРАММАСЫ

Сыртқы күш әсер ететін құрылмалардың беріктігін анықтау үшін қолданылатын материалдардың негізгі қасиеттерін және олардың қирауға дейінгі өзгеріс күйін зерттеу қажет. Бұл мақсатта пайдаланылатын материалдар үлгілерін лабораторияларда арнаулы машиналар арқылы сынайды.

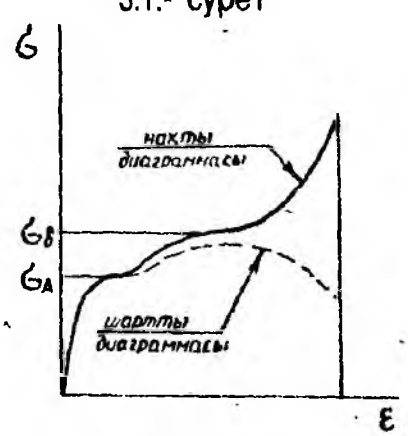
Күш түсірмей тұрып үлгінің сынау жүргізілетін бөлігінің көлденең қима ауданын A_0 және ұзындығын l өлшейді. Құралдардың жәрдемімен созу күшінің шамасын және Δl абсолют ұзаруды анықтайды.

Сынау арқылы созу күші мен сырықтың ұзару шамаларының тәуелдігін дәлелдеуге болады. Нәтижені графикте көрсету үшін абцисса өсіне ұзаруды, ал ордината өсіне күшті саламыз. Мұндай графикті *созылу диаграммасы* деп атайды (3.1-сурет).

Созылу диаграммасы қарастырылған үлгінің күйін сипаттайды. Зерттелетін материалды тікелей сипаттау үшін диаграмманы қайта құру керек: абцисса өсіне әдетте процентпен өрнектелген салыстырмалы ұзаруды $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100\%$, ал ордината өсіне кернеуді $\sigma = F / A_0$ саламыз. Мұндай график *кернеулердің шартты диаграммасы* деп аталады. Диаграмманың шартты деп аталу себебі, оны құрғанда үлгінің көлденең қима ауданының кішіреюі ескерілмейді. Егер кернеулерді есептегенде формуладағы бастапқы қима ауданының орнына дәл сол сәттегі күш мәніне сәйкес нақты ауданын қойса, онда ол нақты диаграмма болады. Сонымен, ординатасы үлгінің көлденең жіңішкеруіне сай есептелген кернеулер диаграммасы *кернеулердің нақты диаграммасы* деп аталады. 3.2-суретте тұтас сызықпен нақты, ал үзік сызықпен шартты диаграммалар көрсетілген.



3.1.- сурет



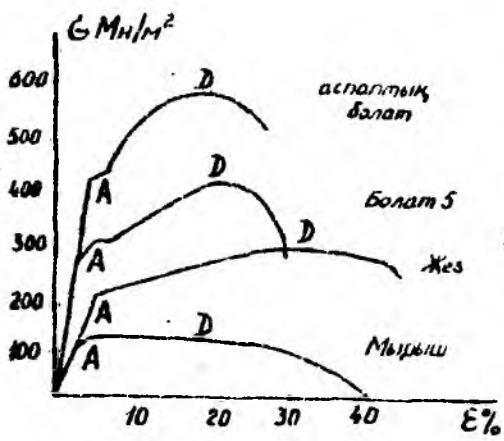
3.2. - сурет

Шартты созылу диаграммасында бес ерекше нүктелер бар:

1. *Пропорционалдық шегі* $\sigma_n = \frac{F_n}{A_0}$ — тік кернеу салыстырмалы ұзаруға Гук заңы бойынша пропорционал өсетін ең үлкен кернеу.

2. *Серпімділік шегі* $\sigma_c = \frac{F_c}{A_0}$ — материалдың күш әсеріне төзімді ең үлкен кернеуі, бірақ бұл жағдайда қалдық деформация байқалмайды.

3. *Ағу шегі* $\sigma_A = \frac{F_A}{A_0}$ материалдың жұмсару кезіндегі кернеуі күш артпаса да үлгі ұзара береді. Материалдардың құрылымын нақты зерттеу жұмыстары созымды деформация дамығанда материалдың құрылысы өзгеріске ұшырайтындығын, атап айтқанда жеке кристалдардың біріккен жазықтықтарында ығысу пайда болатындығын дәлелдейді. Өңдеп жалтыратылған үлгі бетінде ығысуға сәйкес көлбеу сызықтар болғанын байқаймыз. Оларды Людерс — Чернов сызықтары деп атайды.



3.3. - сурет

Кейбір материалдардың нақты ағу ауданы болмайды, сондықтан $\sigma_{0,2}$ деген *шартты аққыштық шегін* алады. $\sigma_{0,2}$ кернеу кезінде үлгінің қалдық салыстырмалы ұзаруы $\varepsilon \approx 0,2\%$ тең болады (3.3-сурет).

4. Құрылманың өзгерісі материалдың өздігінінен қатаюына ықпал етіп, үлгіні одан әрі деформациялағанда күш әсерін арттыру қажет болады. F_{max} ең үлкен күші немесе кирату әсері кезінде материалдың ішкі байланыстары қирауға жақын болады. Бұл кезде созымды деформациялар үлгі ұзындығының кішкентай бөлігінде шоғырланады. Соның нәтижесінде „қылта мойын" пайда болады. Ең үлкен күшке сай келетін кернеуді *беріктік шегі* $\sigma_б$, не уақытша қарысуы деп атайды.

5. Үзілген үлгінің әрбір бөлігінде деформацияның серпімді бөлісі болмайды, оның қалдық бөлігі ғана сақталады. Сондықтан үзілгеннен кейін екі бөліктен құралған үлгінің ұзындығы l_Y үзілу алдындағы ұзындықтан кем болады. Үзілуден кейінгі үлгінің *салыстырмалы қалдық ұзаруын* $\delta = \frac{l_Y - l}{l} = \frac{\Delta l_Y}{l}$ (болат-3 үшін $\sigma = 21 - 23\%$) және қылта мойынының көлденең қимасы ауданының *салыстырмалы қалдық кішіреюін* анықтайды $\varphi = \frac{A_0 - A_Y}{A_0} = \frac{\Delta A_Y}{A_0}$, мұндағы A_0

— деформацияға дейінгі кима ауданы, A_y — қылта мойын қимасының ауданы (болат-3 үшін $\varphi = 60 - 70\%$) σ және φ үлгілердің сынауға дейінгі және одан кейінгі диаметрі мен ұзындығын өлшейтін белгілер. Толық салыстырмалы қалдық ұзару және үзілу кезінде пайда болатын салыстырмалы көлденең қиманың қалдық кішіреюі *материалдық созылымдық сипаттамалары* деп аталады. Олар материалдың қырауға дейінгі деформациялық қабілетін білдіреді.

Созылу диаграммасы материалдардың беріктік және созылымдылық сипаттамаларынан басқа, энергетикалық сипаттамаларын да анықтайды. Мәселен, оның ауданы үлгіні созуға кеткен жұмысты бейнелейді λ_1 деформацияланғанға дейін созылу үшін жұмысты әрі қарай жалғастыру керек:

$$A_1 = \int_0^{\lambda_1} (F + dF)d\lambda \approx \int_0^{\lambda_1} Fd\lambda;$$

ол OABCДMN ауданымен, ал үлгіні қырауға жеткізетін жұмыс OABCДEFG-мен анықталады (3.1-сурет).

Серпімділік шегінде *деформациялау жұмысы* келесі формуламен анықталады $A_c = \frac{F\Delta l}{2}$. ал *деформациялаудың меншікті жұмысы* мына формуламен есептеледі:

Созуға орай жүргізілген сынау нәтижелерінен алынған шекті кернеулер мен оларға сәйкес салыстырмалы ұзарулар 3.1-кестеде келтірілген.

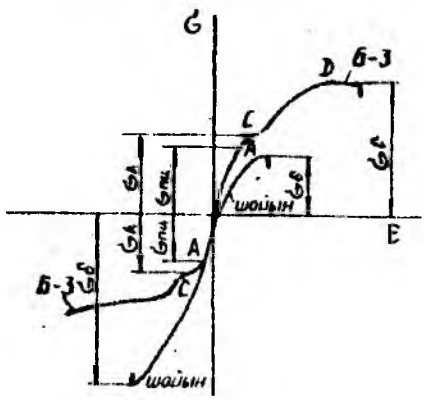
3.1.- к е с т е. **Материалдың механикалық сипаттамалары**

Материал аты	Маркасы	σ_A	$\sigma_б$	δ
		МН/м^2		(%)
1	2	3	4	5
Көміртекті болат	Болат-3	240	380 470	23-21
Көміртекті болат	Болат-6	310	600—720	15 13
Хромдалған болат	20Х	650	800	12
Хромкреммарганецтелген болат	1400	35хАГС	1650	10
Сұр шойын	Сч	—	120—330	—
Дюралюминий	Д-16	330	450—500	12
Титан қорытпасы	ВТ4	700—800	800—900	22-15
Қарағайдың бойлық талшықтары	—	8	80	—
Текстолит	ПТК	10	100	0,8-0.12
Шыны талшықты пластик	СВАМ	26—48	260—480	1,4-2

§ 2. СЫҒЫЛУ ДИАГРАММАСЫ

Сығылу кезіндегі материалдың күйін зерттеу үшін сығылу диаграммасын құрады.

Металдардың сығылуын сынауды биіктігі диаметріне тен цилиндр түріндегі үлгілерге жасайды. Басқа материалдар үшін үлгілерді куб түрінде қарастырады. Болат пен шойынның сығылу диаграммасы 3.4-суретте көрсетілген. Бірінші ширекте созылу, үшіншісінде — сығылу диаграммалары көрсетілген.

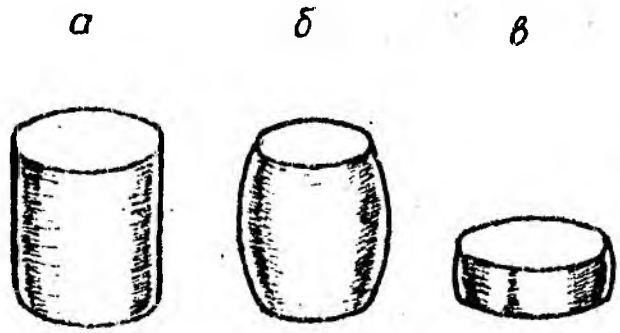


3.4. - сурет

Күш әсерінің бастапқы кезінде аз көміртекті созымды болат-3-тің сығылу кезіндегі кернеу диаграммасы созылу диаграммасындай көлбеу сызықты болады, содан кейін диаграмма сызығы қисайып, оның көлденеңге көлбеулігі азаяды. Бұл — ағу бөлігіне сәйкес. Сығылуда аққыштық ауданы созылудағыдай анық болмайды. Сығылу кезінде болаттың серпімділік, пропорционалдық және аққыштық шектері созылу кезіндегіге жуықтайды. Диаграмманың тік сызықты бөлігінің көлбеу бұрышы созылу және сығылу кездерінде бірдей болады, демек, олардың серпімділік модульдері де тең.

Сығылу кезіндегі үлгісі (3.5а-сурет) қысқарады да, көлденең әсіресе ортаңғы бөлігінің өлшемдері артады. Үлгі ұштары сынау машинасының жазықтығымен жанасуы барысында үйкеліске түсетіндіктен, олардың көлденең өлшемдерін анықтау қиын. Сығылу кезінде цилиндр бөшке түрінде болады (3.5б-сурет). Одан әрі күш түсірілгенде үлгі біртіндеп жалпаяды (3.5в=сурет), бірақ қирамайды, демек беріктік шегін тағайындауға болмайды. Сығылу кезіндегі беріктік шегін созылу кезіндегідей шартты түрде алады.

Басқа созымды металдардың (мыс, алюминий) үлгілері созылған кездегі болат үлгілері сияқты деформацияланады және олардың сығылу кезіндегі кернеу диаграммасы да үқсас болады.

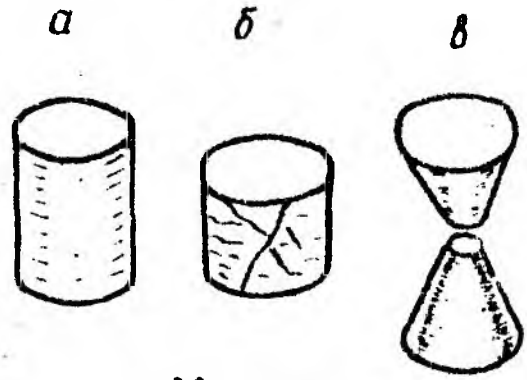


3.5. - сурет

Шойынның сығылу диаграммасы оның созылу диаграммасына үқсас. Бұл диаграммалар алғашқы сәттен қисық сызықты түрге ие болады, күштің шамасы өте үлкен болғанда кенет үзіледі (3.4-сурет).

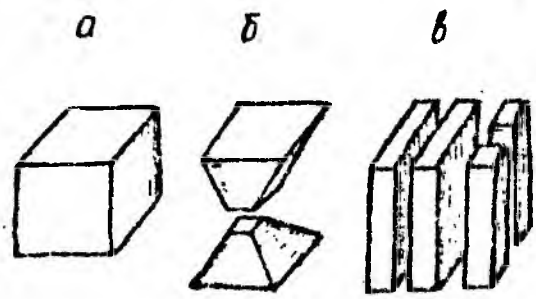
Дегенмен, сығылу кезіндегі кернеу диаграммасының ординаталары созылу кезіндегіге қарағанда бірнеше есе үлкейеді. Шойынның сығылу кезіндегі беріктік шегі

$\sigma_б = 500 - 1500 МПа$, яғни созылу кезіндегіге қарағанда 4-5 есе үлкен. Шойынның сығылуы созылуға қарағанда біршама артықтау. Сығылу кезінде шойын үлгінің бойлық деформациясы шамалы (3.6а-сурет) болады. Үлгінің ортаңғы бөлігі сәл ғана дөңестеніп, бөшке тәрізді түрге келеді, іле-шала үлкен жанама кернеуі бар ауданшалар өсінде 45° бұрышпен сызаттар пайда болады (3.6б-сурет). Бұл кезде күш тез кеміп, диаграмма үзіледі. Қирау сәтінде үлгінің бүйір бөліктері ажырап, ол екі қиық конус түріне енеді (3.6в-сурет).



3.6. - сурет

Морт үзілетін көптеген материалдар (бетон, тас) сығылу кезінде шойын сияқты қирайды, олардың сығылу диаграммалары үқсас болады. Мұндай материалдар сығылуға қарағанда біршама үлкен (бетон үшін 20 еседей). Морт үзілетін барлық материалдар нашар созылады.

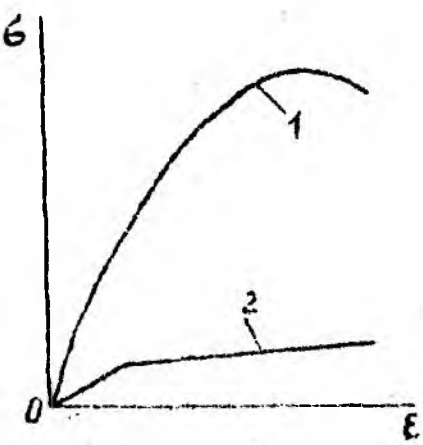


3.7. - сурет

Бетон не цемент кубтары жаншығанда олар екі қиық пирамида түріне енеді. 3.7а,б-суреттерде бетон кубтың қирауға дейінгі және одан кейінгі түрі көрсетілген. Егер бетон куб пен машина жазықтығының арасындағы үйкелістің ықпалын ескермесе, мысалы оны балауызбен майласа, онда бетон күш куб әсеріне параллель қирайды (3.7в-сурет).

Ағаштың сығылуын сынау кезінде ол анизотропты материал екендігін, сондай бойлық және көлденең талшықтарының әрекеті әр түрлі болатындығын ескеру керек. Сығылу кезінде бойлық 1 және көлденең 2 ағаш талшықтарының кернеулер диаграммасы 3.8-суретте көрсетілген.

Ағаштың көптеген түрлері талшықтар бойымен сығылғанда айтарлықтай кернеуге шыдай алады, мысалы қарағайдың беріктік шегі $\sigma_б = 40 - 80 МН/м^2$ жетеді. Ағаш кубтың бір бөлігі екіншіге сәйкес ығысқанда қирайды (3.9а-сурет). Ағаш талшықтарын көлденең қысқанда ол қирамайды, бірақ қатты жаншылады (3.9б-сурет). 3.2-кестеде созылу және сығылу кезіндегі кейбір материалдардың беріктік шектері салыстыру үшін келтірілген.



3.8. - сурет

3.2- к е с т е. Материалдың беріктік шектері

Материалдардың аты	Беріктік шегі МН/м^2	
	созылу кезінде	сығылу кезінде
Болат-3	380—470	—
Хромды болат	800	—
Дюралюминий	450—500	—
Титан қорытпасы	800—900	—
Сүр шойын	120—380	500—1500
Қарағайдың бойлық талшықтары	80	40
Гранит	3	120—260
Қиыртас	2	40—150
Кірпіш	0,7—3	7—30
Бетон	0,25—1,75	5—35
Бакелит	20—30	80—100
Текстолит ПТК	100	250
Ағаш қабатты пластик	210	360
СВАМ 1:1	480	420
Гетинакс	150—170	150—180
Полиэтилен	6,5	—
Целлулоид	50—70	2
Винипласт	50	—

§ 3. МАТЕРИАЛДЫҢ СЕРПІМДІЛІК СИПАТТАМАЛАРЫ

Шамалар E — созылу кезіндегі серпімділік модулі (бірінші текті модулі); G — ығысу кезіндегі серпімділік модулі (екінші текті серпімділік модулі) және μ — көлденең деформация коэффициенті, Пуассон коэффициенті, материалдардың серпімділік тұрақтылары немесе серпімділік сипаттамалары деп аталады. *E және G* өлшемі кернеудікімен бірдей болады — $\text{Н/м}^2, \text{МПа}; \mu$ — өлшемсіз шама; E, G және μ тұрақтылары материалдардың серпімділік қасиеттерін сипаттайды. Олар өзара байланысты: $E = 2(1+\mu)G$. E, G және μ кейбір материалдар үшін 3.3-кестеде келтірілген.

3.3- к е с т е. Материалдардың серпімділік қасиеттері

Материалдардың аты	Серпімділік модуль		Пуассон коэффициенті
	E МПа	G МПа	μ
Көміртекті болат	$2,1x10^5$	$8,1x10^4$	0,24—0,28
Легирленген болат	$2,1x10^5$	$8,1x10^4$	0,25—0,30
Болат күймасы	$1,75x10^5$	—	—
Мыс	$1,1x10^5$	$4,0x10^4$	0,31—0,34
Мырыш	$0,84x10^5$	$3,2x10^4$	0,27
Қорғасын	$0,17x10^5$	$0,70x10^4$	0.42
Алюминий қорытпасы	$0,72x10^5$	$2,7x10^4$	0,26x0,36
Титан қорытпасы	$1,12x10^5$	—	—
Жез	$(1,0—1,3)x10^5$	$3,7x10^4$	0,31x0,34
Платина	$1,7x10^5$	—	0,39
Шойын	$(1,15—1,16)x10^5$	$4,5x10^4$	0,23—0,27
Қарағай	$(0,1—0,12)x10^5$	$0,055x10^4$	—
Текстолит	$(0,07—0,13)x10^5$	—	—
Бетон	$(0,15—0,23)x10^5$	—	0,16—0,18
Шыны	$0,56x10^5$	$2,2x10^4$	0,25
Мұз	$0,10x10^5$	$(0,28—0,3)x10^4$	—
Резеңке	$0.00008x10^5$	—	0,5

§ 4. ЖАҢА МАТЕРИАЛДАР ТУРАЛЫ ТҮСІНІК

Іс жүзінде пайдаланып жүрген материалдардың (болат, алюминий қорытпалары және т. б.) жаман қасиеті сол, температура артқанда тұтқырлығы төмендейді, коррозияға ұшырайды. Сондықтан машиналардың, құралдардың сапасын көтеру тек қана композиттер көмегімен жүзеге асырылмақ.

Композитті ғасырдың жаңалығы, болашақ материалы деп атайды. Композит — бір-бірінен өзінің күйімен ажыратылатын әр түрлі заттар үйлесуі. Композиттің негізі — матрица мен толықтырғыш. Матрица бөлшектерді немесе толықтырғыш құрылмаларды біріктіріп, ішкі кернеулерді өзара тең таратып, сыртқы орта ықпалынан қорғайды. Композит жоғары механикалық сипаттамаларына ие болу үшін жүк түсетін элементтер берік және қатаң талшықтардан істелуі қажет. Бұл жағдайда композиттік құрылымы сызаттарды болдырмайтын механизм ретінде істейді. Қатаң талшықтарды матрицамен үйлестіру материалдың морт кірауын болдырмайды және олардың жоғары беріктігін, төзімділігін қамтамасыз етеді.

Композиттердің көпшілігін шартты үш топқа (матрица түрі бойынша): полимерлік, металдық және керамикалық деп бөледі.

Полимерлік композиттерге шыны пластик, көмір пластик және ағаш кабатты пластик жатады. Байланыстыру ретіне термореактивтік полимерді алады. Полимерлік композиттер қазір кеңінен пайданылып келеді. Оларды жасау кезінде композитке керекті қасиеттерді беруге болады. Полимерлік композиттер технологиялық жағдайларымен ерекшеленеді, оларды пайдалану тиімді және бастапқы компоненттерін алу үшін шикізат базаларымен қамтамасыз етілген. Полимерлік композиттер басқа материалдармен салыстырғанда өзінің беріктігімен, қатандығымен және тығыздығымен белгілі. Көміртекті пластиктер меншікті беріктігі бойынша алюминий және титаннан асып кетеді, олар жеңіл, берік құрылмаларды жасау үшін пайдаланылады. Мысалы: авиацияда және космос техникасында. Полимерлік материалдар коррозияға үшырамайды. Сондықтан олар химия өнеркәсібінде құбырларды, реакторларды жасау үшін кеңінен пайдаланылады. Мысалы эпоксид шыны пластиктен жасалған құбырдың жұмыс істеу мерзімі металмен салыстырғанда он есе ұзақ болады.

Металл матрица негізінде жасалған *композиттер* — таза металл немесе алюминий, магний, титан қорытпалары созымды деформацияға үшырамайтын талшықтармен (бор, көміртек және т. б.) немесе созымды талшықтармен (берилий, вольфрам, молибден, болат) күшейтіледі. Бірінші топқа жататындар үлкен беріктікке, ең жоғары меншікті сипаттамаларына ие бола алады. Екінші топтағылар салыстырмалы үлкен емес беріктік және серпімділік модулдері кезінде технологиялық артықшылықтарын айқын байқатады. Металл композиттерді авиа және космос техникаларында қолданады.

Керамикалық матрица негізіндегі *композиттер* боросиликат, шынылар, көміртек және т. б. материалдардың негізінде құрылады. Керамикалық композиттердің көп күнды қасиеттері бар: беріктігі тұрақты болады, тығыздығы төмен және коррозияға шыдамды. Бірақта олар морт сынады және температура өзгерісіне төзімді. Күшейтілген элементтері соққы тұтқырлығын және температура өзгерісіне шыдамдылығын жақсартады. Бұл композиттер де авиа және космос техникасында пайдаланылады.

Соңғы уақытта будан композиттер де кең таралған. Бір матрицаға екі немесе бірнеше талшықтардың түрі енгізіледі. Қарапайым композиттерге қарағанда будан да әмбебап қасиеттерге ие. Мәселен олардың тығыздығы аз болған кезде беріктігі тұрақты болады, төзімділігін және соққыға шыдамдылығын жақсартады. Будан композиттер биомеханикада, медицинада пайдаланылады.

Аса ірі транспорт самолеті „Русланда" 5,5 т композиттер пайдаланылған. Соның нәтижесінде 15 т металл үнемделген және оның жұмыс істеу кезінде 15 мың тонна жұық сұйық отын үнемделетіндей жағдай жасалған. Композиттердің бірегей қасиеттері бар: олар керекті қасиеті бар материалды құрауға мүмкіндік береді.

3.4-кестеде құрылма материалдың балқу температурасы, тығыздығы, шекті беріктігі және салыстырмалы қатандығы келтірілген.

3.4 к е с т е. Құрылма материалдың сипаттамалары

Заттар	t°, C балқу	ρ г/см^3	E ГПа	$\sigma_б$ МПа	$\frac{E}{\gamma}(\frac{E}{\gamma})\frac{-1}{Al}$
Темір	1536	7,87	200	500—2500	1
Магний	650	1,74	45	200—350	1,02
Алюминий	660	2,74	71	300—600	1,03
Титан	1665	4,50	100	600—1200	0,87
Никель	1455	8,9	200		0,88
Молибден	2620	10,2	300		1,27
Вольфрам	3400	19,3	410	1200—2400	0,84
Берилий	1287	1,85	200	300—600	5,70
Ниобий	2415	8,57	82	500—1000	0,38
Полимерлер аморфтық		1,5	0,5—5	10—100	0,02—0,1
Полимерлер кристалдық		1,5	100-120	2000—3000	2,6
Сапфир Al_2O_3	2046	3,97	400	300*)	3,96
Гранат $Al_5V_3O_{12}$	1950	4,55	330	200—20000**)	2,85
$Mg\ O$	1870	3,65	290	500*) 1000**)	3,13
Рутил $Ti\ O_2$	1870	4,24	290	100*)	2,69
$Si\ C$	2600	3,2	450	3000**)	5,53
B_4C	2470	2,5	450	3000**)	7,08
$Si_3\ N_4$	1800	3,2	47	500—1000**)	0,58
Бор талшықтар	2300	2,7	400	3000 **)	5,83
Көмір талшық	—	1,7—2,2	300—500	2000—3000**)	5—9

*) — поликристал

**) — талшықтар

3.5 - к е с т е. **Полимерлердің механикалық сипаттамалары**

Полимерлер	ρ, т/м^3	$E \times 10^{-2}$	$\sigma_б$	$\sigma_{сыг}$	$\sigma_и$	*НВ*	δ, %
		МПа					
Полиэтилен:							
қысымы жоғарысы	0,900—0,939	1,4—2,5	10—17	12	12—20	14—25	400—600
қысымы төмені	0,948—0,959	6,0—8,5	20—45	20—33	20—40	45—60	300—600
қысымы орташасы	0,948—0,976	8,0—12,5	18—40	—	25—40	60—80	200—1300
Полипропилен	0,90—0,91	6,7—12,3*1	25—40	50—70	70—80	40—70	200—800
Политетрафторэтилен:							
фторопласт—3	2,09—2,16	11,6—15,0*1	35—45	55—60	60—80	10—13	—
4	2,15—2,22	4,7—8,5*1	14—35	10—12	14—18	30—40	250—500
4Д	2,21—2,26	4,5—8,5*1	12—23	12	11—14	30—40	100—330
4М	2,14—2,16	5,5—6,0*1	16—31	20	20—30	30—40	250—400
40	1,65—1,70	8—10*1	25—50	—	33—34	58—63	150—400
42	1,91—2,00	4—8*1	25—50	—	25—35	—	250—500
4НА	2,0—2,1	4*1	15—30	—	20	30—35	200—450

*1 $E_и \times 10^{-2}$ МПа серпімділік модулі көрсетілген

3.6 - к е с т е. Полимерлердің механикалық сипаттамалары

Полимер	ρ, т/м^3	$E \times 10^{-2}$	$\sigma_б$	$\sigma_{сыг}$	$\sigma_и$	НВ	δ, %
		МПа					
Полистирол	1,05—1,10	30	35—45	80—100	65—100	140—160	1,5—3,0
Полиметиленоксид:							
гомополимер	1,43	2,9	68—71	110—120	150—180	150—180	—
сополимер	1,39—1,41	22—30	65—70	105—145	100—125	100—130	15—20
Полифениленоксид:							
арилокс № 100	1.06	—	60	40	40	165	3
PPO (АКШ)	1,06	25	74	106	107	—	20—40
норил (АКШ)	1,06	23	61	113	87	—	20—30
Полиэтилентере-фталатлавсан	1,34—1,41	30	60—70	80—100	80—150	90—120	4—20
Поликарбонат	1,20	24—28	57—70	80—90	90—100	110—160	50—100
Полиакрилат U—1060 (Жапон)	1,11—1,21	18,8	75	96	—	200—250	62
Полиоксибензоат:							
экксел 1—2000 (АКШ)	1,40—1,45	25,5	99	127	120	—	8
экксел С—1000 (АКШ)	1,40—1,45	13,3	70	140	106	—	7—8
эконол Р—300 (АКШ)	1,40—1,45	72	—	—	75	—	—

3.7 - кесте. Алюминийға негізделген ДКМ-лардың (дисперсия-нығайтылған композиттік материалдар) механикалық қасиеттері

Материалдар	$t^\circ C$	$\sigma_{0,2}$ МПа	$\sigma_б$ МПа	δ, %
САП—1	20	200	290—310	7—9
	250	—	180—190	4—6
	350	—	140—150	3—4
	500	—	100	2
САП—2	20	230	320	4
	250	—	190	3
	350	—	150	2
	500	—	100	1
САП—3	20	340	400	3
	250	—	240	1,5
	350	—	190	1
	500	—	130	1
SAP—ISML—930	20	175	250	14,5
	300	95	110	8,5
	400	75	85	4,5
	500	65	70	—
SAP—ISML—895	20	215	310	10,5
	300	120	150	5,5
	400	100	110	2,5
	500	85	90	—
SA—ISML—865	20	65	380	7,0
	300	155	175	3,5
	400	120	130	2,0
	500	105	105	—

3.8 - к е с т е. Алюминийге негізделген ДКМ-ның беріктігі мен жылжымалық шектері

Марка	$t^\circ C$	σ_{100}	σ_{1000}	$\sigma_{0.2/100}$	$\sigma_{0.5/100}$	$\sigma_{0.2/1000}$	$\sigma_{0,5/100}$
		МПа					
САП–1	200	120	120	90	105	80	90
	310	80	75	60	75	50	65
	430	45	45	35	45	—	40
САП–2	250	110	—	—	—	90	115
	350	80	—	70	—	63	—
	500	50	—	40	—	—	—
САП–3	250	120	—	—	—	99	125
	350	90	—	—	—	—	—
	500	55	—	—	—	36	—

3.9 - к е с т е. Be-BeD негізделген ДКМ-ның механикалық қасиеттері

BeO-ның жалпы үлесі %	$t^\circ C$	$\sigma_{0\,2}$	$\sigma_б$	δ, %
		МПа		
	25	195	275	2
0,8	400	145	245	14
	600	115	200	15
	25	240	310	2
1,8	400	175	240	4
	600	140	185	6,5
	25	245	325	1
3,0	400	210	325	7
	600	175	285	14,5

3.10 - к е с т е. Никель және оның қорытпаларына негізделген ДКМ-ның механикалық сипаттамалары

$t^\circ C$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_б$	δ	% ψ
	МПа			
	ВДУ—1			
20	390—410	540—570	20—24	70—75
400	260—270	350—370	21—24	—
600	210—230	280—300	21—24	40—60
800	150—160	200—220	12—18	20—35
1000	120—130	140—160	10—13	20—25
1200	100—110	120—130	7—9	15—20
	ВДУ—2			
20	300—350	450—500	20—24	70—75
500	180—200	220—250	21—24	40—45
800	120—140	140—160	12—18	25—35
1000	95—100	105—120	10—13	25—30
1100	80—85	95—100	8—10	20—25
1200	75—78	80—85	7—9	15—20
	ТD—НИХРОМ			
20	440—460	800—850	18—19	25
400	380—390	650—700	18—19	20
600	250—260	480—500	20—23	23
800	200—220	240—260	20—22	30
1000	110—120	130—140	15—16	25
1100	85—90	95—105	14—15	25
1200	75—80	80—90	10—12	15

3.11 - кесте. *TRW* фирмамен алынған металл матрицасы бар композиттік материалдардың созылу кезіндегі қасиеттері

Талшықтардың диаметрі, мкм	Талшықтардың жалпы үлесі, %	Матрица (талшықтардың түрі)	Материал күйі	Бойлық бағытта			Көлденең бағытта		
				$\sigma_в$, МПа	$E \times 10^{-3}$, МПа	δ, %	$\sigma_в$, МПа	$E \times 10^{-3}$, МПа	δ, %
100	40	Алюминий корытпасы 6061 (БОР)	А*1	1,20	0,2	0,7	0,11	0,11	0,3
	40	—"—"—"—	Б*2	1,3	—	—	0,17	—	—
	50	—"—"—"—	А	1,47	0,23	0,7	0,11	0,14	0,3
	50	—"—"—"—	В	1,51	—	—	0,15	—	—
	60	—"—"—"—	А	1,78	0,26	0,7	0,11	0,160,3	
	60	—"—"—"—	Б	1,72	—	—	0,15	—	—
	50	Алюминий корытпасы 7075 (бор)	А	1,36	0,23	0,6	0,11	—	—
	50	—"—"—"—	Б	1,54	0,22	0,7	0,23	—	—
140	40	Алюминий корытпасы 6061 (бор)	А	1,28	—	—	0,16	0,11	0,4
	40	—"—"—"—	Б	1,39	—	—	0,23	0,12	0,5
	50	—"—"—"—	А	—	—	—	0,15	0,11	0,4
	50	—"—"—"—	Б	—	—	—	0,30	0,14	0,6
	60	—"—"—"—	А	1,79	—	—	0,19	0,16	0,3
	60	—"—"—"—	Б	1,75	—	—	0,32	0,16	0,4
200	50	Алюминий корытпасы 6061 (бор)	А	1,54	0,23	0,8	0,13	0,14	0,7
	50	—"—"—"—	Б	1,63	0,23	0,8	0,25	0,14	0,2
106	30	Титан корытпасы Ti + 6Al + 4W (борсик)	А	1,06	0,19	0,6	—	—	—
106	40	Титан корытпасы Ti + 6Al + 4W (борсик)	А	1,10	—	—	—	—	—
	50	—"—"—"—	А	1,13	0,26	0,5	0,27	0,20	0,4
145	30	—"—"—"—	А	1,21	0,20	0,7	0,58	0,18	2,7

*1 А — материал, қыздырып өңделмеген түрі
*2 Б — материал, қыздырып өңделген түрі

3.12 - к е с т е. Ti+6Al+4V қорытпадан жасалған матрица берилий сыммен күшейтілгендегі бөлме температурасы және созылу кезіндегі композиттік материалдардың қасиеттері

Материалды алу тәсілі	Бериллий сым		Композиттік материалдар				Құрамы (%)
	Құрамы	Диаметр (мм)	$\sigma_б$ ГПа	$\sigma_б$ ГПа	$\sigma_{0,2}$ ГПа	Ex10^{-3} ГПа	
Вакуум ыстықтай сығылсымдар мен табақтар	Химиялық таза металл	1,5	0,64	0,70	0,62	0,19	50
сымдар мен фольга —"—"—	—"—"—	1,5	0,64	0,41	—	0,13	50
	2% BeO қосылған металл	0,5	0,96	0,92	0,60	0,18	43
экструзия мен сығылу бірлескен әсері	—"—"—	0,95	0,60	0,75	—	0,17	38

3.13 - к е с т е. Ti+6Al+4V титан қорытпасының (матрица ретінде пайданылатын) қасиеттері

ρ, т/м^3	4.43
E x 10^{-3}, ГПа, $C°$ температура кезінде	
20	0,11
205	0,10
315	0,09
425	0,08
540	0,06
$\sigma_{0,2}$, ГПа, $C°$ температура кезінде	
20	0,90
205	0,69
315	0,55
425	0,59
540	0,41
$\sigma_{0,2\,100}$, $C°$ температура кезінде	
370	0,34
425	0,15
455	0,09

3.14 - к е с т е. Никель және кобальт ЭКМ-лардың (эвтектикалық композиттік материалдар) қасиеттері

Матрица	Нығайтқыш	Нығайт-қыштың жалпы үлесі, %	Балқу $t^\circ C_*$	ρ, т/м^3	E, ГПа	$\sigma_б$, ГПа	δ, %
Ni	Ni Be	38—40	1157	—	-215	918	9,0
Ni	Ni_3 Nb	26	1270	8,8	—	745	12,4
Ni	Cr	23	1345	8,0	—	718	29,8
Ni	Ni Mo	50	1315	9,5	—	1250	1
Ni	Ni_3 Ti	29	1300	8,2	—	—	1
Ni	W^3	6	1500	—	—	830	45
Ni	Ti C	5,5	1307	—	—	—	—
Ni	Hf C	15—28	1260	—	—	—	—
Ni	Nb C	11	1328	8,8.	—	890	9,5
Ni	Ta C	~10	—	—	—	—	—
Ni—Cr	Nb C	11	1320	—	—	—	—
Ni—Co—Cr—Al	Ta C	~9	—	8,8	—	1650	5,0
Ni_3—Al	Ni_3 Nb	44	1280	8,44	242	1240	0,8
Ni_3—Al	Ni_3 Nb	32	1280	—	—	1230	2,0
Ni—Ni_3 Al	Ni_3 Nb	—	1270	—	—	1140	2,3
Ni_3—Al	Ni_3Ta	~65	1360	10,8	—	930	1
Ni—N_3Al	Ni_3Ta	—	1360	—	—	1060	5
Ni_3 Al	Ni_7 Zr_2	42	1192	—	—	—	—
Ni_3 Al	Mo	26	1306	8,18	138	1120	21
Ni_3 Al	Cr	34	1450—1455	6,4	182	1240	1
Ni—Cr	$(Cr, Ni)_7$ C_3	30	1305	—	200 290	685 960	2—11
Co	Co Al	35	1400	—	172	500,585	6
Co	Co Be	23	1120	—	—	—	—
Co	Co_3 Nb	~50	1235	—	—	—	—
Co	Co_2 Ta	35	1276	—	—	—	—
Co	Co_7 W_6	23	1480	—	—	750	—
Co	Nb C	12	1365	8,8	—	1030	2
Co—Cr	Ta C	~9	1360	9,0	210	1035	16—20
Co—Cr	$(Cr, Co)_7$ C_3	30	1304	8,0	296	1280	1,5
Co—Cr	$(Cr, Co)_{23}$ C_6	40	1340	7,91	276	1200	0,96
Co—Cr—Al	$(Cr, Co)_7$ C_3	28	1295	7,8	283 2011	1730 1,0	2,5

3.15 - к е с т е. As-4 талшыққа негізделіп (талшықтың көлем үлесі 60%) жасалған көмір пластиктердің механикалық сипаттамалары

Сипаттамалар	Күрғақ үлгілер			2 апта 71°С суда ұсталғаннан кейін		
	Байланыстырғыш					
	эпоксидтік	к— I	к— II	эпоксидтік	к— I	к— II
$\sigma_и$, ГПа, °С температура кезінде:						
23	1,67	1,36	1,53	1,76	1,42	—
93	1,55	1,26	—	1,39	1,15	1,41
121	1,46	1,22	—	1,19	1,11	—
149	1,33	1,04	1,23	1,03	0,95	1,33
177	1,19	1,12	1,04	0,64	0,80	0,92
204	—	—	0,97	—	—	0,92
232	—	—	0,90	—	—	0,84
$E \times 10^{-3}$, ГПа, °С температура кезінде:						
20	0,10	0,11	0,12	0,12	0,11	0,11
121	0,12	0,11	0,12	0,12	0,10	0,11
177	0,12	0,11	0,12	0,11	—	0,10
232	—	—	0,12	—	—	0,12
τ, ГПа, °С температура кезінде:						
20	0,11	0,10	0,09	0,10	0,09	—
93	0,08	0,08	—	0,07	0,07	0,08
121	0,08	0,07	—	0,06	0,06	—
149	0,07	0,06	0,07	0,05	0,05	0,06
177	0,06	0,05	0,05	0,04	0,05	0,06
204	—	—	0,06	—	—	0,06
232	—	—	0,05	—	—	0,04

§ 5. МАТЕРИАЛДАРДЫҢ МЕХАНИКАЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫНА ТЕМПЕРАТУРАНЫҢ, РАДИОАКТИВТІ СӘУЛЕНІҢ, ТЕРМИЯЛЫҚ ӨҢДЕУДІҢ ЖӘНЕ БАСҚА ФАКТОРЛАРДЫҢ ӘСЕРІ

Жоғарыда аталған эксперименттік деректер үлгілерді бөлме температурасында $\left(t = 20^\circ C\right)$ сынағанда алынған. Бірақ машиналардың көп бөлшектері (газ турбиналары, бу қазандары, іштен жанатын двигательдер, реактивтік двигательдер) өте жоғары, ал кейбір құрылыс құрылғылары төменгі температураларда жұмыс істейді. Материалдардың көпшілігінің беріктік сипаттамалары (беріктік шегі $\sigma_б$, аққыштық шегі σ_A және пропорционалдық шегі $\sigma_{пц}$) температура жоғарылағанда төмендеп, ал температура азайғанда артады. Созылымдылық сипаттамалары (қалдық деформация және үзілу кезінде көлденең салыстырмалы жіңішкеруі) температура жоғарылағанда артып, керісінше төмендегенде азаяды. Температураның жоғарылауымен серпімділік модулі E кемиді және Пуассон коэффициенті μ артады, ал температура төмендегенде керісінше болады.

Кейбір материалдар бұл ережеге бағынбайды, сондай-ақ басқаларының да өз ерекшеліктері бар. Мысалы, көміртекті болаттарды қыздырғанда беріктік шектері бастапқыда артады, ең жоғарғы мәніне $\sigma_{б300^\circ} = 1,2\sigma_{б20^\circ}$ $300^\circ C$ да ие болады, содан кейін қарқынды түрде төмендей бастайды $\left(\sigma_{б400^\circ} = \sigma_{б20^\circ},\ \sigma_{б600^\circ} = 0,4\sigma_{б20^\circ}\right)$.

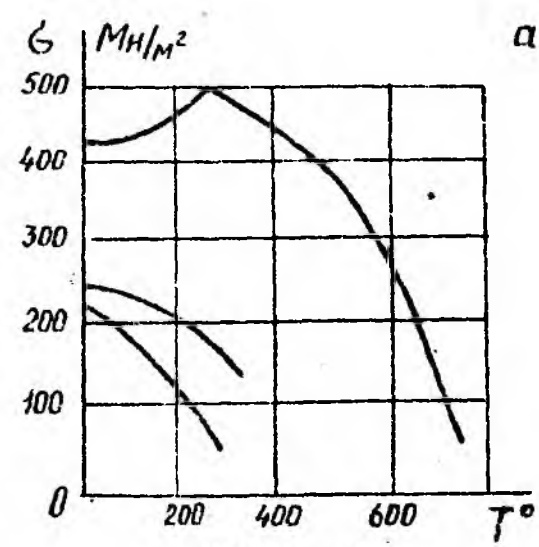
Аққыштық шегі температураның жоғарылуымен кеміп, аққыштық алаңы кішірейеді де, 300° С-да жоғалып кетеді. Болаттарды салқындатқанда олардың беріктік сипаттамалары жоғарылайды.

Болаттарды қыздырғанда созылымдылық сипаттамалары бастапқыда азаяды да, $\sim 300^\circ C$-да ең аз мәнге ие болады. Температураны одан ары жоғарылатқанда қайтадан артады.

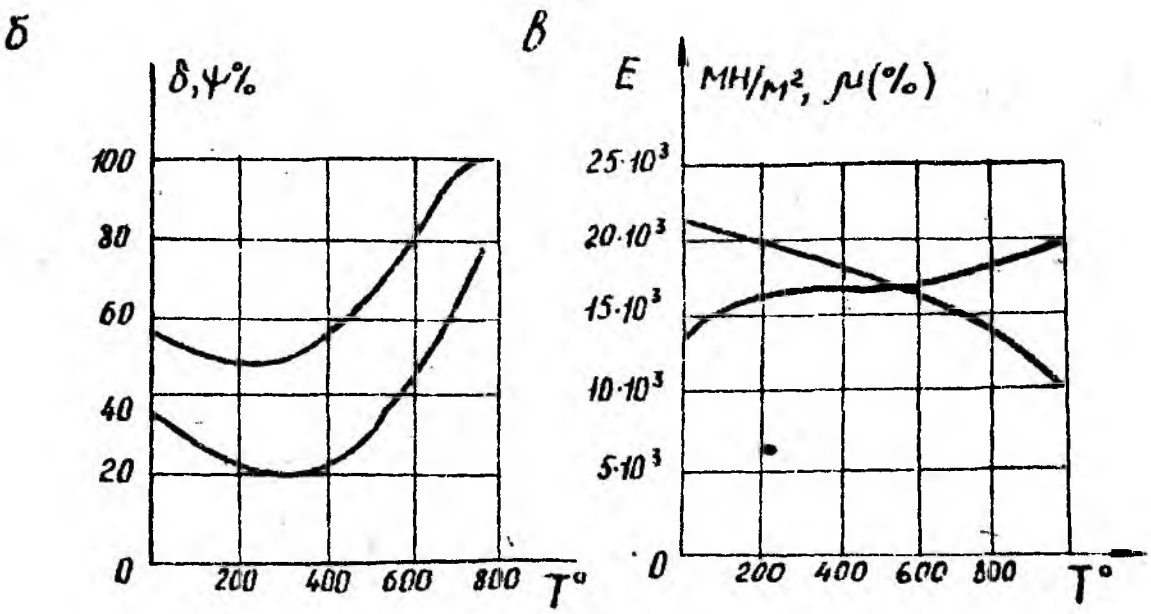
Болатты қыздырғанда серпімділік модулі бастапқыда өте баяу кеміп, содан кейін өсе бастайды

$$\left(E_{600^\circ} = 0,7E_{20^\circ},\ E_{800^\circ} = 0,5E_{20^\circ}\right).$$

Пуассон коэффициенті болаттарды қыздырғанда артады да, салқындатқанда кемиді. Созымды көміртекті болаттың беріктік сипаттамалары $\sigma_б, \sigma_а$ және $\sigma_{пц}$ (3.10а-сурет), созылымдылық сипаттамалары σ және ψ (3.10б-сурет)



3.10(а) - сурет



3.10(б,в) - сурет

және физикалық тұрақтылары E және μ (3.10в-сурет) температураға байланысты өзгеретіні көрсетілген.

Қыздыру кезінде түсті металдардың беріктік шектері тез төмендеп $600^\circ C$ -да бөлме температурасындағы беріктік шегінің тек бірнеше процентін қамтиды. Тек алюмотермиялық хром ғана басқаша. Оның беріктік шегі жоғарылап, $1100^\circ C$ -да ең үлкен мәнге $\left(\sigma_{б1100^\circ} = 2\sigma_{б20^\circ}\right)$ ие болады.

Кейбір түсті металдарды (мыс, никель) қыздырғанда созылымдылық сипаттамасы төмендейді, ал кейбірінікі (алюминий, мыс, магний) артады. Салқындатқанда керісінше болады.

Пластмассаларды қыздырғанда олардың беріктік шегі шапшаң төмендейді (мысалы, шыны текстолиттікі) $\sigma_{б200^\circ} = 0,75\sigma_{б20^\circ}$, фторпласт 4-тікі $\sigma_{б100^\circ} = 0,75\sigma_{б28^\circ}$ винипласт пен органикалық шынынікі $\sigma_{б100^\circ} = 0$. Бұл материалдарды салқындатқанда олар сынады, созылымдылық сипаттамалары нашарлайды.

Радиоактавтік сәуленің атом реакторларын атом электор станцияларының, синхрофазотрондардың құрылмаларындағы және т. б. әсерін карастырайық. Сәуле әсерінен металдардың беріктік сипаттамалары (беріктік шегі $\sigma_б$, әсеріне аққыштық шегі $\sigma_а$) артып, созылымдылық сипаттамалары кемиді. Яғни, сәуленің беріктік және созылымдылық сипаттамаларға ететін әсері температураны арттыру

кезіндегіге ұқсас. Пластмассаларға сәуле әсер еткенде созылымдылық сипаттамалары төмендейді. Пластмассалардың беріктік шегіне сәуле түрліше әсер етеді: кейбірінде беріктік шегі өзгермейді (мысалы полиэтиленде), енді біреулерінде беріктік шегі айтарлықтай кемиді (мысалы, каталинде), ал басқаларында беріктік шегі айтарлықтай артады(мысалы, селектронда). Әрине, барлық жағдайда өзгерістер сәуленің мөлшеріне де байланысты болады.

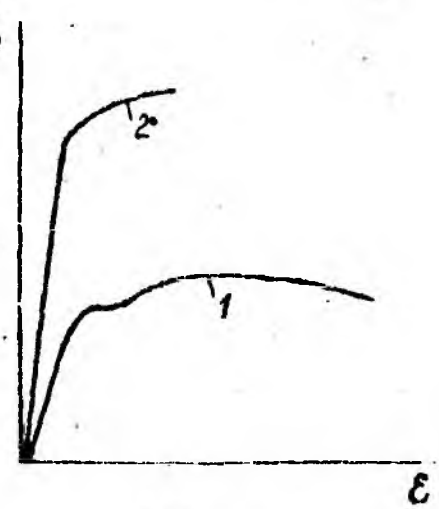
Металдардың беріктік және созылымдық сипаттамаларын өзгерту үшін оларды термиялық әдіспен өңдейді. Ол металл құрылымын қыздыру және салқындату режимінен құралады. Құрылымдық өзгеріс лезде өтпейді, оған біраз уақыт қажет болады. Болаттарды термиялық өңдеудің маңызды түрлері болатты босату, шыныктыру, жұмсарту.

Болатты босату. Салқын өңдеу кезінде пайда болатын бастапқы ішкі кернеулерді жою үшін болатты белгілі бір температураға дейін қыздырады да, сол температурада ұзақ ұстайды. Содан кейін баяу салқындатады. Босату процесі беріктік сипаттамаларын арттырады. Осының нәтижесінде болатты кесу және қысым арқылы өңдеу мүмкін болады.

Қаттылығын арттыру үшін болатты шыныктырады. Ол үшін болатты белгілі бір температураға дейін қыздырып, суда немесе майда тез салқындатады. Сонда болаттың беріктік сипаттамалары артып, оның есесіне созылымдылығы кемиді.

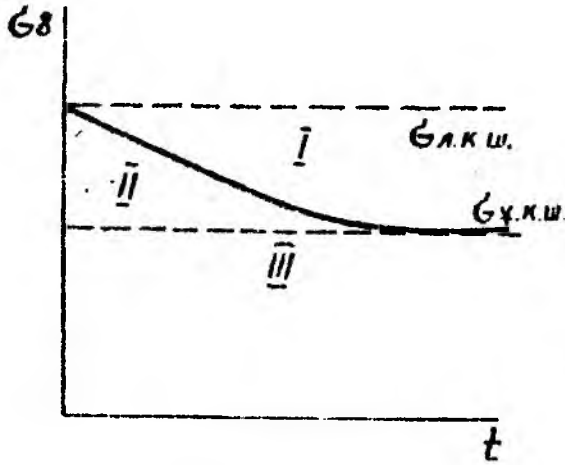
Шыныктырудан кейін болаттың созылымдылығын жақсарту мақсатында оны жұмсартады. Ол үшін шыныктырған болатты тездете қыздырып, белгілі бір температурада ұстайды. Сонда оның созылымдылық сипаттамалары артып, беріктігі біршама нашарлайды.

Манадан бері үлгідегі статикалық күштің әсерін, яғни созу күші баяу өсетін жағдайды қарастырғанбыз. Егер созылу процесі қысқа уақыт аралығында өтсе, онда созылымдылық деформация толық дами алмайды. 3.11-суретте созылымды болат 3-тің екі созылу диаграммасындағы 1-ші статикалық және 2-ші тез әсер ету жағдайлары көрсетілген. Екі диаграммада да болаттың беріктік және созымдылық сипаттамалары күш әсерінің жылдамдығына байланысты екендігі байқалады. Күш әсерінің жылдамдығын арттырса, созымды материал өзінің касиеттері бойынша морт сынатын материалға жуықтайды.

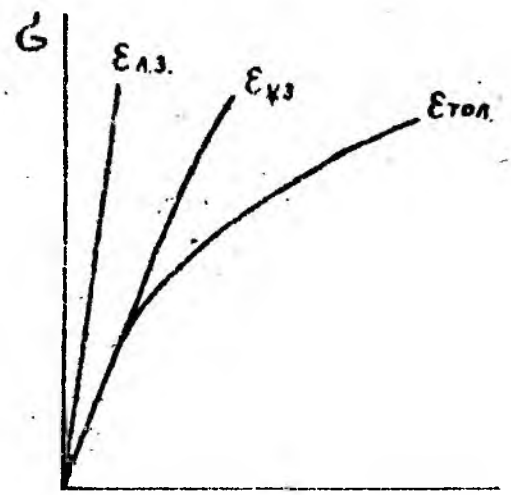


3.11 - сурет

Күш ұзақ әсер еткенде пластмассалардың беріктік шегі айтарлықтай кемиді. Ол беріктік шегінің уақытқа байланысты өзгеруімен, яғни



3.12 - сурет



3.13 - сурет

ұзақ қарсыласу қисығымен сипатталады (3.12-сурет). Мұндағы $\sigma_{с.к.ш.}$ бір сәттік деформацияға қарсыласу шегі. $\sigma_{ұқш}$ — ұзақ қарсыласу шегі. Графиктен үш аймақты қарастыруға болады: сырық қабылдай алмайтын кернеулерге сәйкес нүктелердің I-ші аймағы, өйткені $\sigma > \sigma_б$, сырық белгілі бір уақыт аралығында қабылдайтын қирау кернеулеріне сәйкес нүктелердің II-ші аймағы: $\sigma < \sigma_б$ теңсіздігі ылғи сақталатын, яғни қирау болмайтын нүктелердің III-ші аймағы.

Бір сәттік күш әсеріне сәйкес бір сәттік деформацияны $\varepsilon_с$ күш ұзақ әсер еткенде туындайтын серпімді тұтқырлық деформациядан $\varepsilon_{с.т.}$ ажырата білу қажет. Бұл деформациялардың қосындысы ұзақ деформацияға тең:

$$\varepsilon_у = \varepsilon_с + \varepsilon_{с.т.}$$

Мұндай жағдайда кернеу ұзақ қарсыласу шегінен жоғары болса, онда созымдылық деформацияда $\varepsilon_{соз}$ пайда болады, ол $\varepsilon_у$ -мен қосылып толық деформацияны береді: $\varepsilon_{тол} = \varepsilon_у + \varepsilon_{соз}$.

3.13-суретте ағаш қабаты пластиктің ДСП-Г талшық бойымен әр түрлі кездегі сығылу диаграммасы көрсетілген.

§ 6. ҚОР КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ. МҮМКІН КЕРНЕУЛЕР

Беріктікті, қатандықты немесе орнықтылықты есептеу жүйесінің нақты кернеулік деформацияланған күйі іс жүзінде қауіпті күйіне сәйкес келмеуін талап етеді. Бұл үшін беріктік қор коэффициентін енгізеді. Оны қабылдауды мына жағдайлармен түсіндіруге болады.

а) берілген материал үшін тәжірибеде анықталған шамалардың $\sigma_д, \sigma_б$ және шашырандылығы; б) әсер ететін күштерді дәл анықтаудың мүмкін еместігі; в) қабылданған есептеу әдістерінің дәл еместігі, яғни, жергілікті кернеулердің

ескерілмейтіндігі; г) бөлшектерді дәл жасамау салдарынан болған жайт. Қор коэффициенттерінің шамамен алынған мәндері 3.16-кестеде көрсетілген.

3.16 - к е с т е. Қор коэффициенттері шамамен алынған мәндері

Күш ерекшелігі	Материалдың күйі	к
1. Статикалық күш	Созымды материал	2,4—2,6
	Морт сынатын материал	3,0—9,0
2. Соққы кезіндегі күш	Созымды материал	2,8—5,0
3. Айнымалы күш (созылу-сығылу кезінде мәндері тең)	Созымды материал болат	5,0—15,0

Мүмкін кернеу қауіпті кернеудің $\sigma_{\text{қау}}$ беріктік қор коэфициентіне қатысымен анықталады:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{қау}}}{n}$$

Морт сынатын материалдың қауіпті кернеуі үшін беріктік шегі $\sigma_{\text{қау}} = \sigma_{\text{б}}$ алынады, яғни $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{б}}}{n_1}$, ал созымды материал үшін аққыштық шегі $\sigma_{\text{қау}} = \sigma_A$ алынады, яғни $[\sigma] = \frac{\sigma_A}{n_2}$.

Негізгі мүмкін кернеулердің шамамен алынған мәндері 3.17-кестеде келтірілген.

3.17. - к е с т е. Мүмкін кернеулердің шамамен алынған мәндері

Материалдың аты	Мүмкін кернеу (МН/м^2, МПа)	
	созылу кезінде	сығылу кезінде
1	2	3
Сұр шойын	28—30	120—150
Болат ОС және болат-2		140
Болат-3		160
Болат-3 (көпірлер салуда пайдаланылады)		140
Көміртекті болат құрылмалары (машина жасау		

3.17 - кестенің жалғасы

1	2	3
саласында)	60—250	
Легирленген болат құрылмалары	100—140 және одан да жоғары	
Мыс	30—120	
Жез	70—140	
Қола	60—120	
Алюминий	30—80	
Дюралюминий	80—150	
Текстолит	30—40	
Гетинакс	50—70	
Қарағайдың бойлық талшықтары	7—10	10—12
Қарағайдың көлденең талшықтары	—	1,5—2,0
Тас қалау	0,3 дейін	0,4—4
Кірпіш қалау	0,2 дейін	0,6—2,5
Бетон	0,2—0,7	1—9

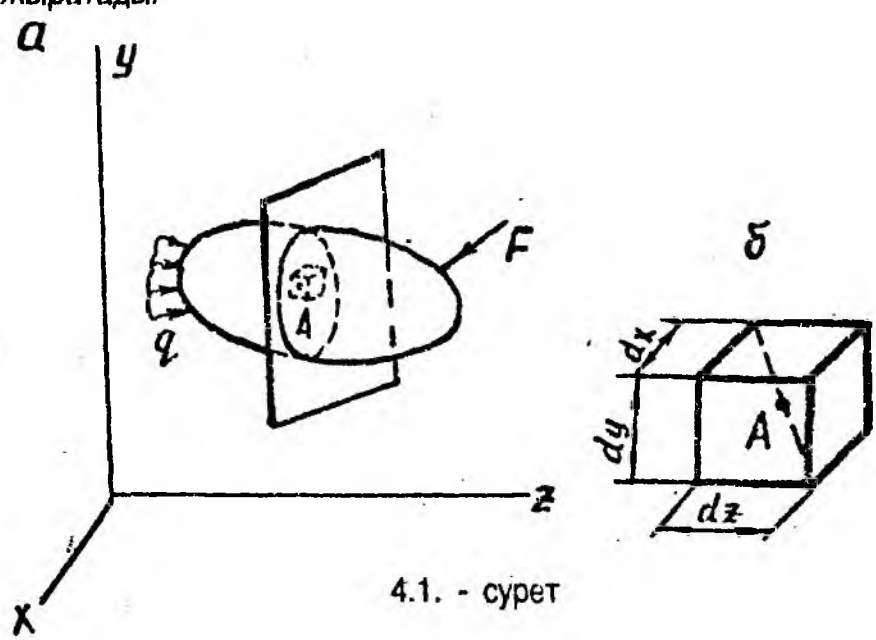
IV тарау

НҮКТЕДЕГІ КЕРНЕУЛІК ЖӘНЕ ДЕФОРМАЦИЯЛЫҚ КҮЙЛЕР КЕРНЕУЛІК КҮЙ

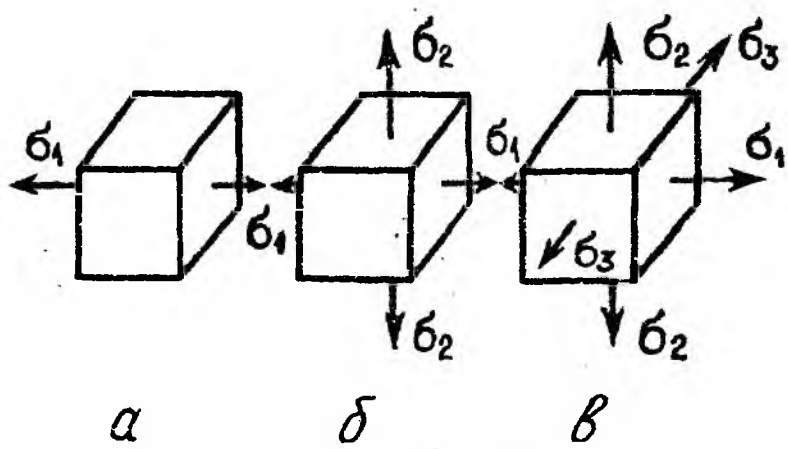
§ 1. НЕГІЗГІ ТҮСІНІКТЕР. СЫЗЫҚТЫ КЕРНЕУЛІК КҮЙ

Нүктедегі кернеулік күй деп, сол нүкте арқылы өтетін барлық алаңдар бойынша әсер етуші кернеулердің жиынтығын айтады.

Жалпы жағдайда (4.1а-сурет) денеде кернеулік күй біртекті емес, ол әр нүктеде өзгеріп отырады. Сондықтан осы дененің кез келген қимасында кернеулер біртекті таралмайды. Демек, кез келген А нүктеде кернеулік күйді зерттеу үшін сол нүктенің маңынан ойша dx, dy, dz қабырғалары бар (4.1б-сурет) параллелепипедті кесіп алады. Параллелепипед өте кішкентай болғандықтан, оның барлық нүктесінде кернеулік күй біртекті әрі ол А нүктесінің кернеулік күйіне сәйкес деп санаймыз. Сондықтан, барлық жақтары бойынша және кез келген қималарында кернеулер бірдей таралған деп санауға болады. Параллелепипед бір, екі және үш өзара перпендикуляр бағыттарда созылуға, сығылуға байланысты нүктеде сызықтық немесе бір өстік 4.2а-сурет, жазық немесе екі өстік (4.2б-сурет), көлемдік немесе үш өстік (4.2в-сурет) кернеулік күйлерді ажыратады.



4.1. - сурет



4.2. - сурет

Ең карапайым жағдай — сызықтық кернеулік күй (центрлік созылу немесе сығылу).

Көлбеу қималарындағы толық кернеу келесі формула бойынша анықталады (4.3-сурет);

$$p_\alpha = \sigma_x \cos\alpha;$$

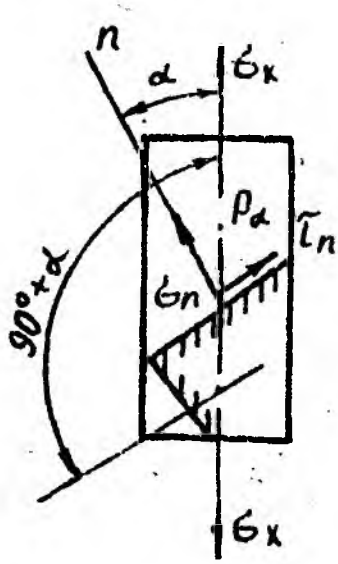
толық кернеудің нормаль құраушысы — тік кернеу былай есептеледі:

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha;$$

толық кернеудің екінші құраушысы — жанама кернеу төмендегі теңдеу түрінде шешіледі:

$$\tau_n = \frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\alpha.$$

Егер де тік кернеу сыртқы нормаль вектормен бағыттас болса, онда ол оң деп саналады. Егер сырткы нормаль векторын τ_n вектордың бағытымен беттестіру үшін 90°-қа сағат тілі бойынша бұру керек болса, онда жанама кернеу оң деп саналады. 4.3 суреттегі σ_n және τ_n оң.



4.3. - сурет

Өзара перпендикуляр аудандарда кернеулер:

$$\sigma_{n'} = \sigma_x \sin^2 \alpha, \quad \tau_{n'} = -\frac{\sigma_x}{2}\sin 2\alpha.$$

Жанама кернеу үлкен және кіші мәндерге білеу әсіне $45°, 135°$ бұрыштарда орналасқан аудандарда ие болады: $\tau_{\substack{\max \\ \min}} = \pm\frac{1}{2}\sigma_x$.

Б а с к е р н е у л е р. Жанама кернеулер нөлге тең болатын аландар бас аландар деп аталады. Бас аландарда әсер ететін тік кернеулер экстремаль мәндерге жетеді және олар бас тік кернеулер деп аталады. Оларды $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ деп белгілейді. Сонда $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Сызықтық кернеулі күй кезінде $\sigma_1 \neq 0;\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (4.2а-сурет), жазық кернеулі күй кезінде $\sigma_1 \neq 0;\ \sigma_2 \neq 0,\ \sigma_3 = 0$ (4.2б-сурет), көлемдік кернеулі күй кезінде $\sigma_1 \neq 0;\ \sigma_2 \neq 0,\ \sigma_3 \neq 0$ (4.2в-сурет). Өзара перпендикуляр аландарда әсер ететін тік кернеулердің қосындысы тұрақты шама болады және ол бас кернеулердің қосындысына тең: $\sigma_n + \sigma_{n'} = \sigma_1$.

Жанама кернеулердің жұптық қасиеті. Екі өзара перпендикуляр аландарда жанама кернеулер шамасы жағынан тең, ал бағыты жағынан қарама-қарсы болады: $\tau_n = -\tau_{n'}$.

§ 2. ЖАЗЫҚ КЕРНЕУЛІК КҮЙ

Жазық кернеулік күй материалдар кедергісі есептерінде жиі кездеседі. Оның ерекше белгісі — параллелепипедтің екі жағында кернеулердің болмайтындығында. Кернеулерді белгілеу кезінде индекстеріне назар аудару керек. Жанама кернеуде екі индекс, мысалы τ_{zy} бар. Бірінші индекс жанама кернеу аланда z өсіне параллель нормальмен бірге әсер ететіндігін, ал екінші индекс жанама кернеу векторы У өсіне параллель екендігін білдіреді. Тік кернеудің екі белгісі бірдей болатындықтан, тек бір индекс алынады.

Кернеулер таңбасын мынадай ережемен қарастырамыз. Созылудың тік кернеуі — оң, ал сығылудікі — теріс деп саналады. Жанама кернеулердің белгісі координаттар өсінің бағыттарына байланысты: егер аланның сыртқы нормалі координат өсінің сәйкес бағытымен үйлессе, онда бұл аланда кернеу τ сәйкес өстің бағытымен үйлесіп, оң болады.

n нормалі аланында кернеулер мына жағдайларда кездеседі:

тік

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha;$$

жанама

$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha.$$

Бас кернеулер

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Бас кернеулердің бағыттары α_1 және α_2 бұрыштарымен анықталады:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}};\quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}.$$

σ_1 және σ_2 бас кернеулер берілген кезінде n нормалі бар көлбеу алаңындағы (4.4-сурет) кернеулері келесі формулалар бойынша анықталады:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha;$$

$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\alpha;$$

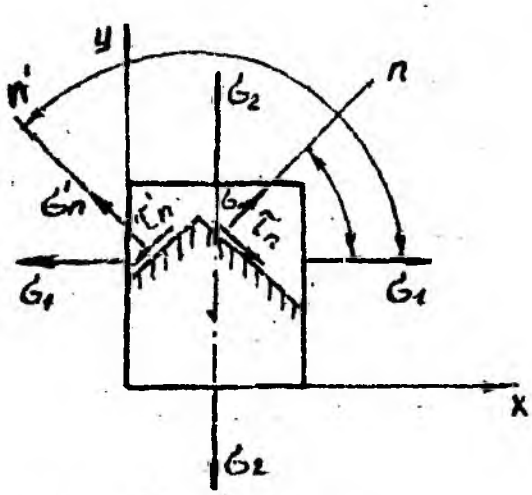
$\alpha = 0$ болғанда, $\sigma_{n\max} = \sigma_1$; $\alpha = 90^\circ$ болғанда, $\sigma_{n\min} = \sigma_2$;

n' алаңында n алаңға перпендикуляр кернеулер мына түрде болады:

$$\sigma_{n'} = \sigma_1 \sin^2\alpha - \sigma_2 \cos^2\alpha;\quad \tau_{n'} = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\alpha.$$

Өзара перпендикуляр алаңдарда әсер ететін тік кернеулердің қосындысы тұрақты шама болады және де ол бас кернеулердің қосындысына тең:

$$\sigma_n + \sigma_{n'} = \sigma_1 + \sigma_2.$$



4.4. - сурет

Экстремаль жанама кернеулер бас алаңдарға 45° бұрышпен орналасқан алаңдарда болады:

$\sigma_1 > 0;\ \sigma_2 > 0$ болғанда

$$\tau_{\substack{\max \\ \min}} = \pm\frac{\sigma_1}{2};$$

$\sigma_1 < 0;\ \sigma_2 < 0;\ (|\sigma_1| < |\sigma_2|)$ болғанда

$$\tau_{\substack{\max \\ \min}} = \pm\frac{\sigma}{2};$$

Ең үлкен және ең кіші жанама кернеулерді бастапқы кернеулер арқылы өрнектеуге болады:

$$\tau_{\substack{max\\min}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

§ 3. БАС КЕРНЕУЛЕР ТРАЕКТОРИЯЛАРЫ ТУРАЛЫ ТҮСІНІК

Күш түсірілген денедегі ішкі күштер ағыны туралы нақты мағлұматты бас кернеулер траекториясы бере алады. Яғни бұл сызықтың әрбір нүктесіндегі жанама кернеу бас кернеу бағытымен дәл келеді.

Білеудің қарапайым созылуы кезінде бас кернеулердің траекториялары оның өсіне параллель және перпендикуляр сызықтар болуы мүмкін. Егер құбырдың барлық нүктесінде бас кернеулердің бағытын белгілесек, онда өзара ортогональ қисықтар торын сығатын және созатын бас кернеулердің траекторияларын аламыз (4.5-сурет). Траекториялармен бөлінген тік бұрышты элемент перпендикуляр бағытта созылуға, сығылуға бейім болып, оның жақтарында жанама кернеулер кездеспейді.

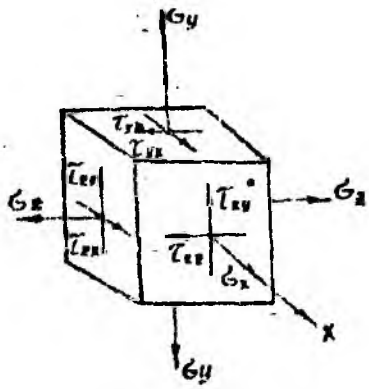


4.5. - сурет

Көрсетілген мысалдарда басты кернеулердің шамасы дененің барлық нүктесінде бірдей. Жалпы жағдайда бас кернеу шамасын траектория бойымен қозғалу өзгертеді. Бас кернеулердің траекториясын білу көп жағдайда жобаланған бөлшек немесе құрылма бөлігінің тиімді формасын алуға мүмкіндік береді.

§ 4. КӨЛЕМДІК КЕРНЕУЛІК КҮЙ

Егерде үш бас кернеудің біреуі де нөлге тең болмаса: $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 \neq 0$ онда кернеулік күй көлемдік кернеулік күй деп аталады. 4.6-суретте көрсетілген кернеулер бұрын қабылданған таңба ережесіне сәйкес он болады.



4.6 - сурет

Жанама кернеулердің жұптық қасиеті бойынша:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx};\quad \tau_{yz} = \tau_{zx};\quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

нормальді аланда тік кернеу:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2(n,x) + \sigma_y \cos^2(n,y) + \sigma_z \cos^2(n,z) +$$

$$+2\tau_{xy}\cos(n,x)\cos(n,y) + 2\tau_{yz}\cos(n,y)\cos(n,x) +$$

$$+2\tau_{xz}\cos(n,z)\cos(n,x).$$

n нормаль аланында әсер ететін толық кернеу векторының координат өстеріне проекциялары:

$$X_n = \sigma_x \cos(n,x) + \tau_{yx}\cos(n,y) + \tau_{zx}\cos(n,z);$$

$$Y_n = \tau_{xy}\cos(n,x) + \sigma_y \cos(n,y) + \tau_{zy}\cos(n,z);$$

$$Z_n = \tau_{zx}\cos(n,x) + \tau_{yz}\cos(n,y) + \sigma_z \cos(n,z).$$

n нормаль аланындағы толық кернеу:

$$p_n = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Қаралатын нүктеде бас кернеулер куб теңдеудің түбірі ретінде анықталады

$$\sigma^3_\nu - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2_\nu + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau^2_{xy} -$$

$$-\tau^2_{yz} - \tau^2_{zx})\sigma_\nu - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau^2_{yz} - \sigma_y\tau^2_{zx} -$$

$$\sigma_z\tau^2_{xy}) = 0.$$

Бұл теңдеудің үш түбірі әрқашанда нақты. Бас аландардың бағыттары бағыттаушы косинустарымен сипатталады. Бағыттаушы косинустар теңдеулердің жүйесінен анықталады [n_ν — бас нормаль ($\nu = 1,2,3$)]

$$\left.\begin{aligned}
(\sigma_x - \sigma_\nu)\cos(n_\nu,x) + \tau_{yx}\cos(n_\nu,y) + \tau_{zx}\cos(n_\nu,z) = 0;\\
\tau_{xy}\cos(n_\nu,x) + (\sigma_y - \sigma_\nu)\cos(n_\nu,y) + \tau_{zy}\cos(n_\nu,z) = 0;\\
\tau_{xz}\cos(n_\nu,x) + \tau_{yz}\cos(n_\nu,y) + (\sigma_z - \sigma_\nu)\cos(n_\nu,z) = 0;\\
\cos^2(n_\nu,x) + \cos^2(n_\nu,y) + \cos^2(n_\nu,z) = 1.
\end{aligned}\right|$$

Үш бас кернеудің бағытына көлбеулігі бірдей алаң октаэдрлік алаң деп, ал оған әсер ететін кернеулер октаэдрлік кернеулер деп аталады және мына формулалар бойынша анықталады:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3);$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}.$$

Бас кернеулердің біреуіне параллель аланда кернеулерді аталған бас кернеуді есептемей анықтайды. Ең үлкен жанама кернеу бас кернеулерге 45° бұрышқа көлбеу жатқан диагональ алаңдарға сәйкес келеді және мына формуламен анықталады:

$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2};$$

қалған екі экстремаль жанама кернеулер:

$$\tau_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Кернеулік күй инварианттары деп координат өстерін бұрғанда өзгермейтін шамаларды айтады:

бірінші инвариант $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$;

екінші инвариант $I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$;

үшінші инвариант $I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$.

Нүктедегі кернеу қарқындылығының формуласы:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{\text{окт}}$$

§5. АЗ ДЕФОРМАЦИЯЛАРДЫҢ КОМПОНЕНТТЕРІ

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ — элементтердің салыстырмалы сызықтық деформациясы, $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ — салыстырмалы ығысу. Егерде элементтердің арасында тік бұрыш ығысу кезінде кішірейсе, онда салыстырмалы ығысу оң деп саналады.

Деформациялардың компоненттері нүктелердің u, v және w орын ауыстыруы (4.7-сурет) арқылы өрнектеледі:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

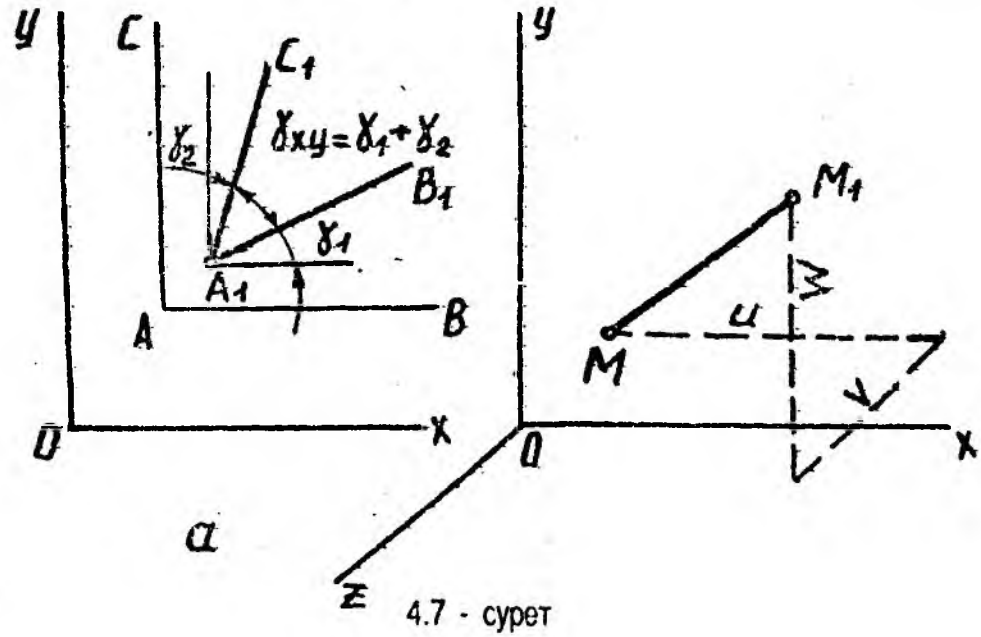
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

r бағытта салыстырмалы ұзару (r өстермен x,y,z бұрыштарды α, β, γ құрады):

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_{xy}\cos\alpha\cos\beta +$$

$$+\gamma_{yz}\cos\beta\cos\gamma + \gamma_{zx}\cos\gamma\cos\alpha.$$

Егер де r_1 және r_2 екі өзара перпендикуляр бағыттары берілген болса, онда бұл бағыттардың өзара бұрыш өзгеруі (деформацияның нәтижесінде) былай анықталады



4.7 - сурет

$$\left[\left(\hat{r_1}, x\right) = \alpha_1; \left(\hat{r_2}, x\right) = \alpha_2 \left(\hat{r_1}, y\right) = \beta_1, \ldots\right]:$$

$$\gamma_{r_1 r_2} = 2\varepsilon_x \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + 2\varepsilon_y \cos\beta_1 \cos\beta_2 + 2\varepsilon_z \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 +$$

$$\gamma_{xy}\left(\cos\alpha_1 \cos\beta_2 + \cos\beta_1 \cos\alpha_2\right) + \gamma_{yz}\left(\cos\beta_1 \cos\gamma_2 + \cos\gamma_1 \cos\beta_2\right) +$$

$$+\gamma_{zx}\left(\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_1 \cos\gamma_2\right).$$

Деформация кезінде өзара бұрыштары өзгермейтін үш өзара перпендикуляр бағыттар қаралатын нүктедегі деформацияның бас бағыттары деп аталады.

Бас бағыттар бойынша сызықтық деформациялар бас деформациялар деп аталады және $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ және ε_3 деп белгіленеді. Сонда $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$.

Бас деформациялар $\varepsilon_\nu (\nu = 1,2,3)$ куб теңдеудің түбірі ретінде анықталады

$$\varepsilon_\nu^3 - \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\varepsilon_\nu^2 + \left[\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)\right]\varepsilon_\nu -$$

$$-\left[\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \frac{1}{4}\left(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2\right)\right] = 0.$$

Мұндағы

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z;$$

$$I_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right);$$

$$I_3 = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \frac{1}{4}\left(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2\right).$$

Шамалар координат түрлендендіруіне тәуелді емес, сондықтан оларды деформациялық күйдің инварианттары деп атайды.

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_z\right)^2 + \left(\varepsilon_z - \varepsilon_x\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)^2 + \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_3\right)^2 + \left(\varepsilon_3 - \varepsilon_1\right)^2};$$

шама деформациялардың қарқындылығы деп аталады. Немесе

$$\varepsilon_i = \sqrt{2}\gamma_{\text{окт}},$$

мұндағы

$$\gamma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2},$$

октаэдрлік ығысу.

Кернеу қарқындылығы деформация қарқындылығымен өзара байланысты

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i,$$

мұндағы G — ығысу модулі.

§ 6. СЕРПІМДІЛІК ШЕГІНДЕГІ КЕРНЕУЛЕР МЕН ДЕФОРМАЦИЯЛАРДЫҢ ӨЗАРА БАЙЛАНЫСТАРЫ. ГУК ЗАҢЫ

Серпімділік деформациянын компоненттері кернеулер арқылы келесі түрде өрнектеледі:

сызықты деформация

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right];$$

бұрыштық деформация

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};\quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};\quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Бас бағыттар бойынша салыстырмалы сызықтық деформациялар — бас деформациялар деп аталады. Оны төмендегіше өрнектеуге болады:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)\right];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)\right].$$

§ 7. КӨЛЕМНІҢ САЛЫСТЫРМАЛЫ ӨЗГЕРУІ

Созылу кезінде серпімділік шегінде материалдардың көлемі үлғаяды, сығылу кезінде кішірейеді.

Кернеулер күйінің жалпы жағдайында көлемнің салыстырмалы өзгеруі мына формуламен анықталады:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\sigma}{K};$$

мұндағы

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3};$$

K көлем деформацияның модулі (көлемдік модулі):

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)};$$

немесе

$$K = \frac{2}{3} \cdot \frac{1+\mu}{1-2\mu} G.$$

Тік кернеулердің компоненттерін көлемнің салыстырмалы өзгеруі арқылы өрнектесек:

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2G\varepsilon_x;$$

$$\sigma_y = \lambda\theta + 2G\varepsilon_y;$$

$$\sigma_z = \lambda\theta + 2G\varepsilon_z$$

Жазудың басқа түрі:

$$\sigma_x - \sigma = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon);$$

$$\sigma_y - \sigma = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon);$$

$$\sigma_z - \sigma = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon),$$

мұндағы

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$ — Ляме коэффициенті.

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right).$$

Жанама кернеулердің компоненттері:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy};\ \ \tau_{yz} = G\gamma_{yz};\ \ \tau_{zx} = G\gamma_{zx}.$$

Сызықтық кернеулік күйдің дербес жағдайында сырықтың материал көлемін табамыз: $V_1 = V\left[1 + \varepsilon(1 - 2\mu)\right]$;

мұндағы

$V = Al$ — деформацияға дейінгі көлемі.

Көлемнің абсолют өзгеруі:

$$\Delta V = V_1 - V = (1 - 2\mu)V\varepsilon.$$

Көлемнің салыстырмалы өзгеруі келесі формуламен анықталады:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1 - 2\mu).$$

Көлденең қима ауданының өзгеруі: абсолют $\Delta A = -2\mu\frac{\sigma}{E}A$, салыстырмалы

$$\frac{\Delta A}{A} = -2\mu\frac{\sigma}{E}.$$

§ 8. СЕРПІМДІЛІК ДЕФОРМАЦИЯНЫҢ ПОТЕНЦИЯЛЫҚ ЭНЕРГИЯСЫ

Деформация кезінде сыртқы күш жұмысы ішкі потенциялық энергиясына ауысады. Серпімділік шегінде потенциялық энергия шамасы күштердің түсу тізбегіне байланысты емес, ол олардың ақырғы нәтижесіне байланысты болады.

Көлем бірлігінде жиналған u меншікті потенциялық энергиясы қатынастарымен өрнектеледі:

кернеулер компоненттері арқылы

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right) + 2(1+\mu)\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right];$$

деформациялар компоненттер арқылы

$$u = G\left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\mu}{1-2\mu}\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \lambda_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)\right];$$

немесе бас деформациялар арқылы

$$u = G\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{\mu}{1-2\mu}\theta^2\right);$$

мұндағы $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

Деформацияның меншікті потенциялық энергиясын екі құраушының қосындысы ретінде қарастыруға болады:

$$u = u_v + u_ф;$$

мұндағы u — толық энергия,

u_v — көлем өзгеруіне жұмсалатын энергия.

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2$$

$u_ф$ — форма өзгеруіне жұмсалатын энергия

$$u_ф = \frac{1+\mu}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right).$$

Сызықтық кернеулі күй дербес жағдайында

$$u = \frac{\sigma^2}{2E};$$

$$u_ф = \frac{1+\mu}{3E}\sigma^2;$$

$$u_v = \frac{(1-2\mu)}{6}\sigma^2.$$

Ығысу кезіндегі потенциялық энергиясы

$$u = \frac{\tau^2}{2G} \quad \text{немесе} \quad u = \frac{\tau^2(1+\mu)}{E}.$$

V тарау

БЕРІКТІК ТЕОРИЯЛАРЫ

§ 1. НЕГІЗГІ ТҮСІНІКТЕР

Әр түрлі құрылмалар мен машиналардың беріктігін сынау кезінде олардың көптеген элементтері мен бөлшектері күрделі кернеулік күйде жұмыс істейтінін өскеру қажет.

Әсер ететін күштің үлғаюына бас кернеулер де өсіп, белгілі бір мәнінде материалдың зерттеу нүктесінде қауіпті немесе шекті кернеулік күйге ие болады.

Созылмды материал үшін шекті кернеулік күйге анық байқалатын қалдық деформация кернеулік күйі жатады. Морт сынатын материал үшін шекті болып кірау басы болатын кернеулік күй алынады.

Кернеулік күйдің қауіптілігін бағалау және соған сәйкес қор коэффициентін анықтау үшін шекті кернеулік күй пайда болатын бас кернеулердің мәнін тәжірибе жүзінде табуға тура келеді. Мұндай есепті шешу тек бір өсті созылу (сығылу) кезінде ғана мүмкін болмақ.

Бұл жағдайда бас кернеудің шекті мәні тікелей тәжірибе арқылы анықталып, ол созылмды материал үшін σ_A аққыштық шегі, ал морт сынатын материал үшін $\sigma_б$ беріктік шегі алынады. Сонымен, σ кернеудің есептеу шамасы белгілі болса, онда қабылданған шектер бойынша қор коэффициенттері

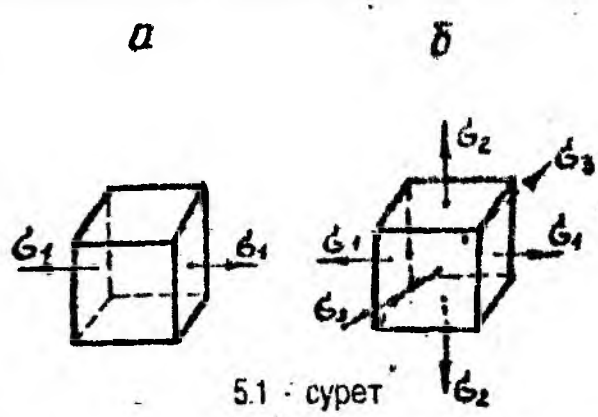
$$n_A = \frac{\sigma_A}{\sigma}; \quad n_б = \frac{\sigma_б}{\sigma},$$

тең болады. Сызықты кернеулік күй кезінде ұзақ уақыт жүргізілген көптеген тәжірибелердің нәтижелері әртүрлі материалдар үшін шекті кернеулердің шамасы туралы жеткілікті дәрежеде мағлұмат бере алады. Ал жазық және көлемді кернеулік күй кезіндегі жағдай басқашырақ. Бұл жағдайда деформация дамуы және материалдың кірау шамасы таңбасы әртүрлі болып келетін екі немесе үш бас кернеудің әсерінен болады. Сол себепті кернеудің шекті мәнін анықтау үшін көптеген тәжірибелер жүргізуге тура келеді, мұндай тәжірибелер қиын болғандықтан орындалуы да онай емес. Күрделі кернеулік күйлерді эксперименттік зерттеуге арналған қазіргі техникалар бас кернеулердің дербес қатынастарының тек бір қатарын ғана анықтауға жарамды.

Көрсетілген жағдайға байланысты кез келген материалдың кернеулік күйінің қауіптік деңгейін анықтау негізінен созылу және сығылу кезіндегі тәжірибеге сүйене отырып бағалайтын есептеу әдістемелігін жасауға тіреледі. Бұл маңызды міндетті беріктік теориясының көмегімен шешеді.

Кейінгі уақытта мұндай теорияларды шекті кернеулік күйлер теориялары деп атайды. Сондықтан оны бұрын қалыптасқан „беріктік теориялары" деп шартты түрде атаймыз.

Мұндай теориялар: егер бас кернеулерді белгілі пропорционал бір санға арттырғанда, олар бір мезгілде шекті болса, кез келген екі кернеулік күйдің беріктігі мен осалдығы бірдей болып саналады делінген алғышарттар негізінде құрылады. Беріктік қоры коэффициенттері екі кернеулік күй үшін қарастырылған жағдайда бірдей болады. Қауіптілігі бірдей кернеулік күйдің бірі ретінде эксперимент жүзінде жан-жақты зерттелген (5.1-сурет) бір өстік созылу, ал екіншісі материалдың осалдығын анықтау үшін қажет болатын кернеулі күй алынады. Алдағы уақытта зерттелетін кернеулік күйі беріледі, мына теңсіздік $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ сақталғанда ғана $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ үш бас кернеумен (5.1б-сурет) беріледі деп санаймыз.



5.1 - сурет

Қабылданған алғы шартты пайдалану үшін қауіптілігі бірдей екі күйдің бас кернәулерін белгілі бір тәуелділікпен байланыстыру қажет. Ол қарастырылатын екі күйге де материал қирауының немесе шекті кернеулік күйге ауысуының себебі белгілі болғанда мүмкін деп есептеледі.

Бірақ материал қирауының нақты себебін анықтау өте қиын және де ол әлі шешілмеген есеп.

Бұл жағдай беріктіктің жалпы бір теориясын ғана негіздеп қоймайды. Шекті кернеулік күйдің пайда болуы әр түрлі болжамдар негізінде көп теориялар тудырады.

§ 2. НЕГІЗГІ БЕРІКТІК ТЕОРИЯЛАРЫ

БІРІНШІ БЕРІКТІК ТЕОРИЯСЫ: Беріктіктің бірінші теориясы мынандай болжамға негізделеді: шекті кернеулік күйдің тууына ең жоғарғы тік кернеулер себепші болады. Әдетте бұл теорияны ең жоғарғы тік кернеулер теориясы деп атайды.

Алынған болжамға сәйкес келесі шарт сақталуы керек:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 < \sigma_0$$

мұндағы σ_1 — зерттелетін кернеулік күй үшін бас кернеулердің ең жоғарғы мәні;

σ_0 — бір өсті созылу тәжірибесінен алынған шекті кернеу. Ең жоғарғы тік кернеулер теориясының басты кемшілігі: басқа екі σ_2, σ_3 бас кернеулер ескерілмей қалады. Ал, шын мәнінде бұл кернеулер материал беріктігіне айтарлықтай әсер етеді. Мысалы, цемент кубты барлық жағынан сығу гидростатикалық тәжірибесінде оның қирамай, беріктік шегінен асып кететін үлкен кернеуге шыдамдылығын қамтамасыз етеді. Басқа материалдар да дәл осындай жағдайда сондай күйде болады. Бұл теорияның тұжырымын морт сынатын материалға тәжірибе жүргізу арқылы дәлелдейді. Қазіргі уақытта бірінші теория қолданылмайды.

ЕКІНШІ БЕРІКТІК ТЕОРИЯСЫ. Беріктіктің екінші теориясы мынадай болжамға негізделеді: материалда шекті кернеулік күйдің тууына ең үлкен ұзару себепші болады. Бұл теория ең үлкен ұзару теориясы деп аталады.

Көлемдік кернеулік күй үшін бас деформациялар $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ болғанда, алынған болжамды қанағаттандыратын жалпы шарт былай жазылады:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 < \varepsilon_0;$$

мұндағы ε_1 — зерттелетін кернеулік күй үшін ең үлкен ұзару шамасы;

ε_0 — бір өсті созылу тәжірибесінен алынған салыстырмалы ұзарудың шекті мәні.

ε_1 және ε_0-ді анықтау кезінде Гуктың белгілі тәуелділігі қолданылады:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right]$$

және

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 / E;$$

бұл тәуелділіктерді шекті кернеулік күй туғанға дейін дұрыс болады. Яғни ол шамалы созымдылық деформация байқалатын материалдың морт кірауына сай келеді.

ε_1 және ε_0 жоғарғы шартына қойсақ:

$$\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) < \sigma_0$$

теңсіздігі қабылдаған болжамға сай үлкен ұзаруды тудыруға себепші болады, сол жақ оң болғанда, дұрыс. Теңсіздіктің сол жағын $\sigma_{есеп}$ есептеу кернеуі деп санасақ, онда

$$\sigma_{есеп} = \sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) \leq [\sigma].$$

Жазық кернеулік күй үшін бас кернеу өрнегін пайдаланып, келесі шартты жазуға болады:

$$\sigma_{\text{есеп}} = \frac{1-\mu}{2}\left(\sigma_z + \sigma_y\right) + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\left(\sigma_z + \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{zy}^2} \le [\sigma].$$

Екінші теорияның біріншіге қарағанда артықшылығы, барлық бас кернеулердің ықпалын ескереді. Бірінші сияқты, екінші теориясы да морт кирайтын материалдар үшін дұрыс.

ҮШІНШІ БЕРІКТІК ТЕОРИЯСЫ. Беріктіктің үшінші теориясы мынадай болжамға негізделеді: шекті кернеулік күйдің тууына ең үлкен жанама кернеулер себепші болады. Сондықтан оны ең үлкен жанама кернеулер теориясы деп атайды.

Созымды деформация кезінде ығысу және сәйкес жанама кернеулердің болатындығы эксперимент жүзінде дәлелденгендіктен, қабылданған болжамды созымды деформациялардың дамуымен байланыстырған жөн.

Теорияны қанағаттандыратын жалпы шарт мына түрде болады:

$$\tau_{\max} = \tau_0;$$

мұндағы $\tau_{\max}$ — зерттелетін кернеулік күй үшін ең үлкен жанама кернеу шамасы; τ_0 — жанама кернеудің қарапайым созылу тәжірибесінен анықталған шекті мәні.

Көлемдік кернеулік күй үшін $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ болғанда ең үлкен жанама кернеу максимал және минимал бас кернеулердің жарты айырымымен анықталады:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

τ_0 кернеуі $\tau_0 = \sigma_0 / 2$ теңдеуінен табылады.

Сонымен, беріктіктің үшінші теориясының шартын былай жазуға болады:

$$\sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_0.$$

Теңсіздіктің сол жағын $\sigma_{\text{есеп}}$ деп белгілеп, есептеу формуласын мына түрде жазамыз:

$$\sigma_{\text{есеп}} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma].$$

Жазық кернеулік күй бұл шартқа сәйкес бас кернеулердің өрнектерін қойсақ

$$\sigma_{\text{есеп}} = \sqrt{\left(\sigma_z + \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{zy}^2} \le [\sigma].$$

болады. Іс жүзінде $\sigma_y = 0$ жиі кездеседі. Енді $\sigma_z = 0$ және $\tau_{zy} = \tau$ десек

$$\sigma_{\text{есеп}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma].$$

Үшінші теорияның негізгі кемшілігі: көлемдік кернеулік күйде онымен σ_2 бас кернеудің ықпалы ескерілмей қалады.

Ең үлкен жанама кернеулер теориясы созылуға және сығылуға бірдей қарсыласатын созымды материалдар·тәжірибесінде жақсы дәлелденеді. Ол осындай материалдардың беріктігін сынауда де кең пайдаланылады.

БЕРІКТІКТІҢ ЭНЕРГЕТИКАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫ. Энергетикалық теория мынадай үйғарымға негізделеді: материалдың шекті кернеулік күйінің пайда болу мезетінде деформацияның меншікті потенциялық энергиясының мөлшері кез келген күрделі кернеулік күйде ері қарапайым созылу кезінде де бірдей болады.

Бұл теорияны тұжырымдау кезінде алғашында мынадай болжам ұсынады: сәйкес шекті кернеулік күйдің тууына өзінің ең үлкен мәніне жеткен толық меншікті потенциялық энергия себепші болады.

Бұл болжамды қанағаттандыратын шарт келесі түрде жазылады:

$$u < u_0;$$

мұндағы u — толық меншікті энергия, ол көлемдік кернеулік күйдің жалпы жағдайы үшін мына формула бойынша анықталады:

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right];$$

u_0 — қарапайым созылу тәжірибесінен алынған энергияның мәні. Оны анықтау үшін (а) теңдеудің оң жағын $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ деп алсақ және σ_1 орнына созылу кезінде шекті кернеуді, яғни σ_0 -ді қойсақ, сонда келесі теңдеу шығады:

$$u_0 = \frac{\sigma_0^2}{2E}.$$

(а) және (б) ескерсек, бұл болжамның шартын былай жазуға болады:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)} \le \sigma_0.$$

Бірақ қарастырылған болжам тәжірибе жүзінде дәлелденбегендіктен, оған негізделген теория іс жүзінде пайдаланылмайды.

Сонымен, жан жақты сығылу салдарынан көлемнің өзгеруін туғызатын теория беріктік критерийі бола алмайды.

Ұсынылған жаңа энергетикалық теорияның алғы шарты ретінде мынадай болжам қабылданды: шекті кернеулік күйдің тууына барлық меншікті энергия

емес, тек қана қабырғасы бірге тең куб формасының өзгеру кезінде жинақталатын бөлігі себепші болады. Көріп отырғанымыздай, жана энергетикалық теория дене формуласының өзгерісін сипаттап, оның көлем өзгерісін тудырмайтын созымды деформациялар дамуымен байланысты.

Теорияны қолдану кезінде қанағаттандыратын шарт мына тенсіздікпен өрнектеледі:

$$u_{\text{т}} < u_{\text{то}};$$

мұндағы $u_{\text{т}}$ — зерттелетін кернеулік күй кезінде куб формасы өзгеруіне байланысты пайда болатын энергия;

$u_{\text{то}}$ — қарапайым созылу тәжірибесінен алынған энергияның шекті мәні.

Жалпы кернеулік күй үшін форма өзгерісі кезінде энергияны тікелей есептеу қиындық туғызады. Сондықтан оны мына өрнек арқылы табуға болады:

$$u = u_{\text{к}} + u_{\text{т}};$$

одан

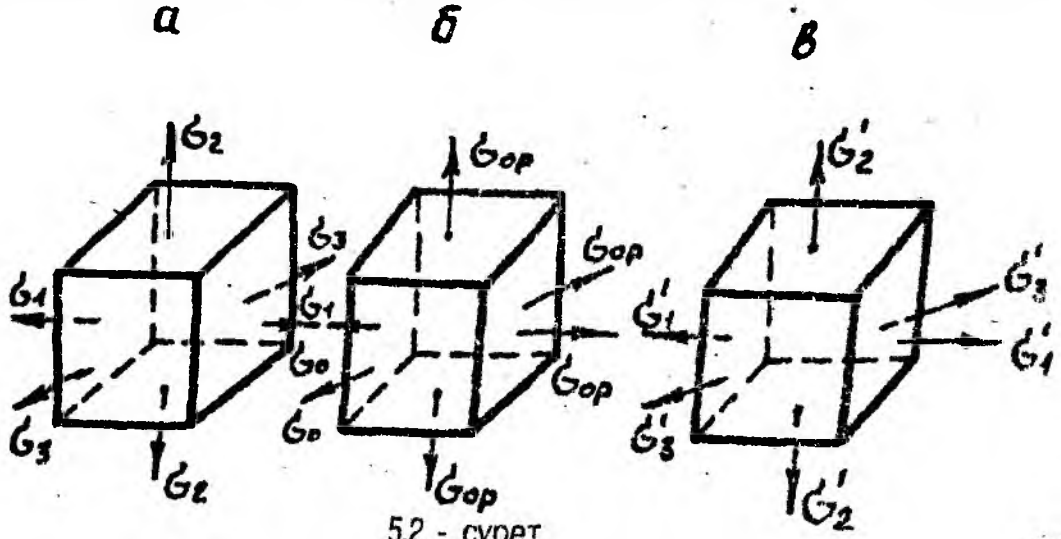
$$u_{\text{т}} = u - u_{\text{к}};$$

мұндағы u — толық энергия;

$u_{\text{к}}$ — көлем өзгеруіне жұмсалатын энергия.

Көлемдік кернеулік күйдің жалпы жағдайында деформация екіге бөлінеді:
1/ тек көлем өзгеруіне байланысты деформацияға;
2/ тек форма түрі өзгеруінә байланысты деформацияға.

Бұл үшін $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ бас кернеулермен анықталатын берілген кернеулік күйді-(5.2а-сурет) екі кернеулі күйлер қосындысы ретінде қарастырамыз (5.2б,в-суреттер). Олар бірінші кубтың барлық жақтарына бірдей орташа кернеулер



5.2 - сурет

әсер ететін гидростатикалық созылуға (сығылуға) сәйкес болса

$$\sigma_{op} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Бұл жағдайда кубтың барлық қабырғаларының ұзындықтары бірдей шамаға өзгеретіндіктен, кубтың формасы емес, тек оның көлемі өзгереді.

Екінші кернеулік күйдің кернеулерін σ_1', σ_2' және σ_3' арқылы белгілейміз. Олар мына тендеулермен анықталады:

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_{op};\ \sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_{op};\ \sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_{op}.$$

σ_1', σ_2' және σ_3' кернеулерінде көлем өзгерісі нөлге тең болатындығын онай көрсетуге болады.

Шынында бұл кернеулердің мәндерін көлемдік деформация формуласына қойсақ:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'\right) = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right) = 0.$$

Сондықтан σ_1', σ_2' және σ_3' кернеулерден дененің тек формасы өзгеретін болады.

$u_к$ энергияны анықтаймыз:

$$u_к = \frac{1-2\mu}{2E} 3\sigma_{op}^2.$$

Өрнекке σ_{op} мәнін қойып төмендегі тендеуді күрамыз:

$$u_к = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Түрі өзгеруіне байланысты энергиясы

$$u_т = \frac{1+\mu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\right].$$

Ол мына түрге онай келтіріледі:

$$u_т = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right].$$

Қарапайым созылу жағдайы үшін $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ кезінде жоғары формулаға сәйкес

$$u_т = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_1^2.$$

Теорияның шарты келесі түрде жазылады:

$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right] < 2\sigma_0^2;$$

мұндағы σ_0 — қарапайым созылу кезінде тәжірибеден алынған шекті көрнеу.

Есептеу формуласы мынадай түрде жазылады:

$$\sigma_{\text{есеп}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]} \le [\sigma].$$

Жазық кернеулік күйдің бұл формуласындағы бас кернеулерді олардың σ_x, σ_y және τ_{xy} сәйкес өрнектерімен алмастырсақ

$$\sigma_{\text{есеп}} = \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\tau_{zy}^2\right]} \le [\sigma].$$

$\sigma_y = 0$ кезінде $\tau_{zy} = \tau$ және $\sigma_z = \sigma$ десек

$$\sigma_{\text{есеп}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma].$$

Энергетикалық теория үшінші теория тәрізді созымды материалдар тәжірибелерімен дұрыс дәлелденді әрі іс жүзінде кең қолданылады. Созымды материалдар үшін бұл теориялар созымды деформациялар пайда болатын шарттарды анықтайтын белгілерді тұжырымдайды. Сондықтан осы теорияларға негізделген $\tau_{\max} < \tau_0$, $u_г < u_{го}$ теңсіздіктерін кейде созылымдық шарттары деп атайды.

Энергетикалық теорияны таза ығысу кезіндегі аққыштық шегін теориялық түрғыда анықтау үшін қолданамыз. Бұл жағдайда $\sigma_0 = 0$, $\tau = \tau_A$ және аққыштық шарты мына формуламен өрнектеледі:

$$\sigma_{\text{есеп}} = \sqrt{0 + 3\tau_A^2} = \sigma_A;$$

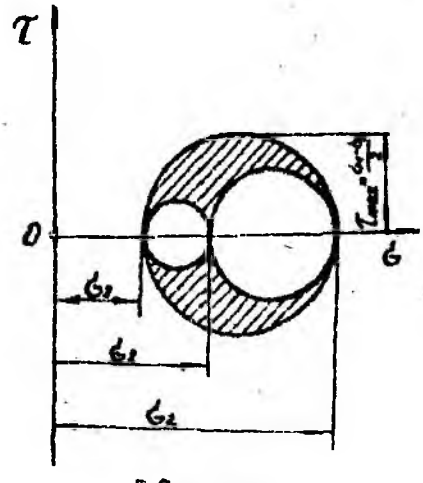
осыдан мына өрнекті құрамыз: $\tau_A = \frac{\sigma_A}{\sqrt{3}} = 0,58\sigma_A$. Осыған ұқсас үшінші теория бойынша $\tau_A = 0,5\sigma_A$ болады. Сонымен, таза ығысу кезінде энергетикалық теория үшінші теорияға қарағанда тәжірибе жүзінде біршама дәл үйлеседі.

МОРДЫҢ БЕРІКТІК ТЕОРИЯСЫ. Шекті кернеулік күйдің туу себебін анықтайтын болжам ретінде қарастырылған жоғарыдағы теориялар негізінде көз келген бір фактордың шамасы, кернеу, үзару, энергия алынды.

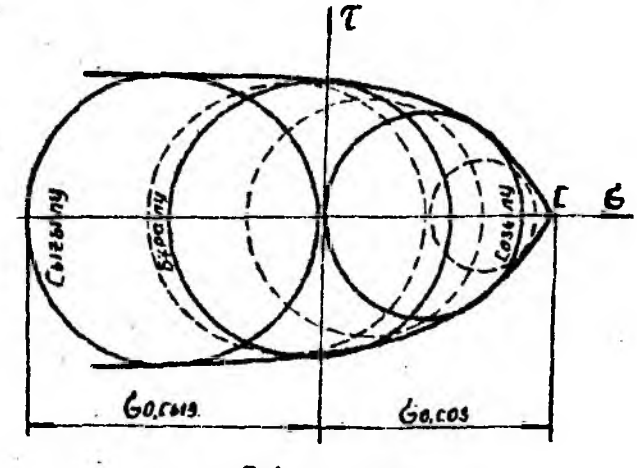
Мор теориясының айтылған теориялардан өзгешелігі сол, онда жеке болжамдар қарастырылмай, эксперименттік деректер негізінде материалдың беріктік қасиеттерінің кернеулік күйі түріне белгілі бір тәуелділігі анықталады. Мұндай тәуелділікті алу және негіздеу үшін Мор үсынған кернеулер шеңберін пайдаланады. Көлемдік кернеулік күй үшін әдетте шеңбер салады (5.3-сурет). Бірақ тәжірибелерге сүйеніп σ_2 кернеу ықпалын ескермей жуықтап алады, сонда материалдың беріктік қасиеттері тек σ_1 және σ_2 кернеулеріне байланысты болады. Сондықтан үш шеңбердің тек ең үлкенін қарастырады. Оны *Мор бас шеңбері* деп атайды.

σ_1 және σ_3 кернеулері материалдың шекті кернеулік күйін білдіргенде сәйкес бас шеңбер де шекті делінеді.

Мысал ретінде 5.4 суретте сынақтан өткізілген материалдың созылу, сығылу және бұралу кезінде анықталған күйі бойынша үш шекті шеңбер бейнеленген. Бұл жағдайда сығылу кезіндегі $\sigma_{осыг}$ шекті кернеулер созылу кезіндегіден $\sigma_{осоз}$ үлкен болады, яғни $\sigma_{осыг} > \sigma_{осоз}$. Егер шеңберлерге жанай қисық сызық жүргізсек, оны шектеу қисығы деп атайды. Жалпы жағдайда ол



5.3 - сурет



5.4 - сурет

қисықпен σ өсін қайсыбір C нүктеде қиып өтеді. Бұл нүкте C нүктесінің абсцисасымен анықталатын шекті кернеуі бар жан-жақты созылуға сәйкес келеді. Бұл жағдайда Мор шеңбері σ_1, σ_2 және σ_3 кернеулері өзара тең болғандықтан нүктеге айналып кетеді.

Сонымен, бірнеше шекті шеңберлер мен оларды шектеу қисығы болса, онда бас шеңбері шектеу қисығымен жанасатын кернеулік күй де шекті болады.

Шекті шеңберлердің барлық мүмкін кернеулік күйі үшін нақты шектеу қисығын алу мүмкін емес. Ол үшін көрсетілген кернеулік күйлерді тәжірибе жүзінде зерттеу қажет болар еді. Сондықтан іс жүзінде нақты шектеу қисығын созылуға және сығылуға негізделген екі бас шеңберге жанама болатын түзумен алмастырады. Бұл түзулер беріктік күйі аймағының шекаралары болады. Сонымен бірге олар кез келген кернеулік күйдің σ_1 және σ_3 кернеулерінің өзара сызықты тәуелділігін дәлелдейді:

$$\sigma_1 = a + b\sigma_3.$$

Бұл тәуелділік $\Delta A_3C_3C_2$ және $\Delta A_1C_1C_2$ үшбұрыштардың ұқсастығынан шығатын қарапайым геометриялық қатынастар негізге алынады. Үшбұрыштарды қарастырып былай жазуға болады:

$$\frac{A_3C_3}{C_2C_3} = \frac{A_1C_1}{C_1C_2},$$

мұндағы

$$A_3C_3 = K_3C_3 - K_2C_2 = \frac{\sigma_1 + |\sigma_3|}{2} - \frac{\sigma_{осоз}}{2};$$

$$C_2C_3 = OC_2 - OC_3 = \frac{\sigma_{осоз}}{2} - \frac{\sigma_1 + |\sigma_3|}{2};$$

$$A_1C_1 = K_1C_1 - K_2C_2 = \frac{1}{2}|\sigma_{осыр}| - \frac{1}{2}|\sigma_{осоз}|;$$

$$C_1C_2 = C_1O + OC_2 = \frac{1}{2}|\sigma_{осыр}| + \frac{1}{2}\sigma_{осоз}$$

Созылу кезінде $\sigma_3 = 0$, ал $\sigma_1 = \sigma_{осоз}$. Кернеулердің осы мәндерін өрнекке қойсақ: $a = \sigma_{осоз}$.

Сығылу кезінде $\sigma_1 = 0$ және $\sigma_3 = \sigma_{осығ}$. Демек:

$$\sigma_{0созу} - b\sigma_{осығ} = 0,$$

осыдан мына тендік алынады:

$$b = \frac{\sigma_{0созу}}{\sigma_{осығ}}.$$

Сонымен σ_1 және σ_3 кернеулерінің өзара тәуелдігін төмендегіше көрсетуге болады:

$$\sigma_1 = \sigma_{0созу} + \frac{\sigma_{0созу}}{\sigma_{осығ}}\sigma_3,$$

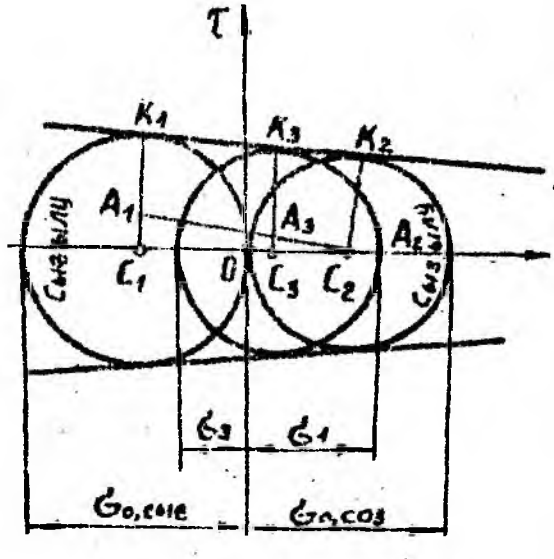
немесе

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{0созу}}{\sigma_{осығ}}\sigma_3 = \sigma_{0созу}.$$

Есептеу формуласы былай жазылады:

$$\sigma_{есеп} = \sigma_1 - K\sigma_3 \le [\sigma].$$

K коэффициенті созылу және сығылу кезінде материалдың әр түрлі кедергісін есептеуге мүмкіндік береді. Егер кедергілер шамасы бірдей болса, онда коэффициент $K = 1$ бас шеңберлерге жанамалар σ өсіне параллель болады (5.5-сурет). Жоғары шарт бұл жағдайда үшінші беріктік теориясына ұқсас болады. Демек, ол морт және созымды материалдар үшін жарамды. Яғни морт сынатын материалдар үшін $\sigma_{0созу}$ мен $\sigma_{осығ}$ орнына сәйкес беріктік шектері, ал созымды материалдар үшін аққыштық шектері алынады.



5.5 - сурет

Сонымен, Мор теориясында тұжырымдалғандай, созылу және сығылу бас шеңберлерінің аралығында жатқан кернеулік күй неғұрлым дұрыс нәтижелер береді.

§ 3. ЖАҢА БЕРІКТІК ТЕОРИЯЛАР ТУРАЛЫ ТҮСІНІКТЕР

БЕРІКТІКТІҢ БІРІККЕН ТЕОРИЯСЫ. Бұл теорияда материалдар қырауының екі: үзілу жолымен болатын морт сынатын және (ығысу) қирайтын жолымен болатын тұтқыр түрі қарастырылады.

Бұл теорияның идеясын 1936 жылы профессор Н. Н. Давиденков айтып, кейін Я. Б. Фридман дамытты.

Үзу кернеуін $\sigma_{үз}$, ал ығысу кезінде қырауға сәйкес кернеуді $\tau_{кир}$ деп белгілейік.

Морт сыну мысалы ретінде бұралуы кезінде шойын сырықтың қырауын (оған бас кернеулері бар аудандар бойынша үзілу тән) керсетуге болады. Тұтқыр қырау созылымды болат біліктің бұралуы кезінде болады. Айтылғандардан шекті кернеулік күйдің бірінші және екінші теориялары материалдың қырауы үзілу құбылысына, ал үшінші және энергетикалық теориялары қырау, кесу (ығысу) құбылысына жататын теориялар тобы болады деп санаймыз.

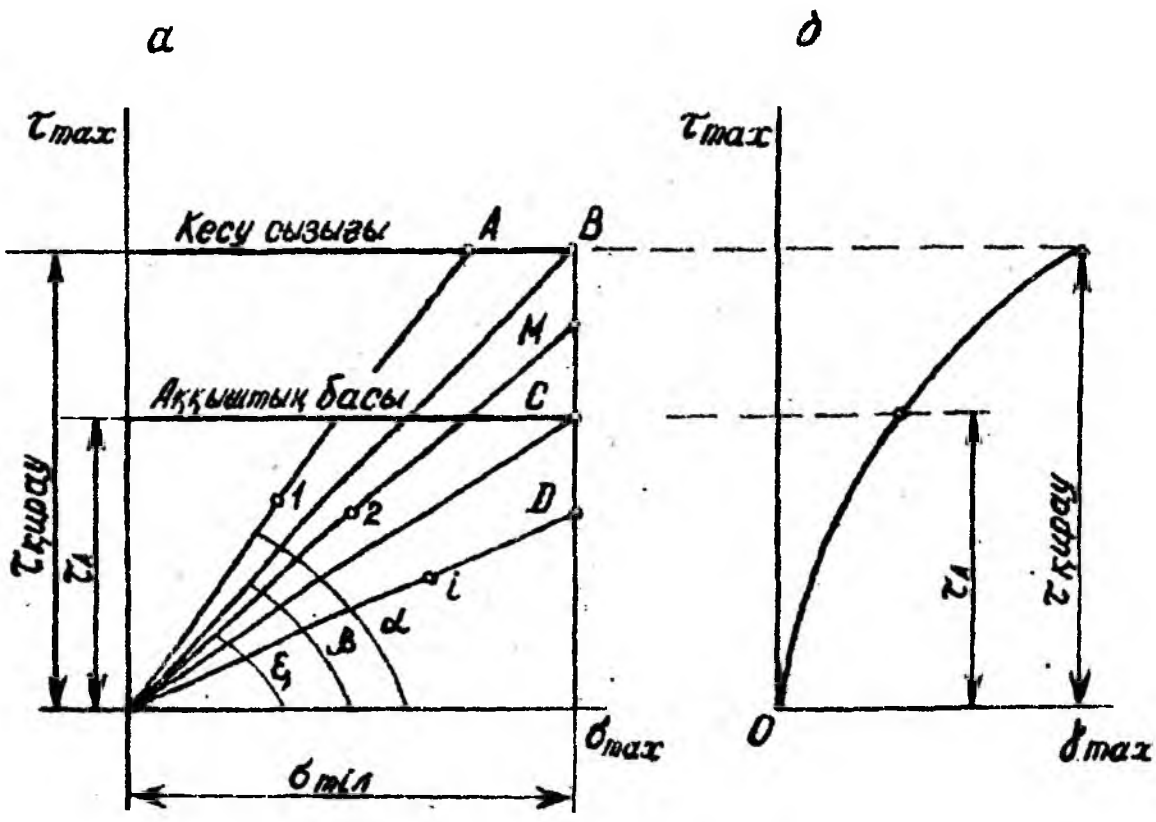
Беріктіктің бірікken теориясы экспериментке негізделген болжамнан шығады: жұмыс жағдайы мен кернеулік күйге байланысты белгілі материалдың қырауы үзілу жолымен де болуы мүмкін. Бұл болжамға сәйкес екінші және үшінші теориялар біріктіріледі.

Механикалық күй диаграммасы көмегімен екі теорияны біріктіру арқылы материалдың бір мезгілде үзілуін және ығысуын әрі мүмкін қырауын зерттеуге болады.

Аталған диаграмманың негізгі элементі τ_{max} және σ_{max} өстер жүйесіне берілген материалдың беріктік күйін шектейтін төртбұрыш салынатын график болады (5.6а-сурет). Оны салу әр материал үшін тәжірибеден алынған $\sigma_{үз}$ және $\tau_{кир}$ мәндері тұрақты және олар кернеулік күй түріне байланыссыз деген үйғарымға негізделеді.

Бұдан басқа графикте материалдың аққыштық шегіне сәйкес түзу беріледі. Оның орны τ_A аққыштық шегінің шамасымен анықталады. Бұл түзу беріктік күй аймағын екі бөлікке бөледі де, олардың біреуі, түзуден төмен орналасқан жағы (серпімді жоғарғы жағы) созылымды деформацияға тең. 5.6б-суретте τ_{max} және γ_{max} координаттар жүйесінде тәжірибе ретінде қисық жүргізіледі. Қисықта аққыштық шегіне, яғни созылымды деформациялар мен метериал қырауының басталуы сәйкес келетін нүктелер белгіленеді. Керсетілген сипаттамалар 5.6а-суретте бейнеленген графикті салуға пайдаланылады.

Кез келген кернеулік күйді зерттеу кезінде σ_{max} өсі бойынша созу кернеуінің



5.6 - сурет

ең үлкен шамасы салынады. Ол екінші теорияға сәйкес мына формуламен анықталады:

$$\sigma_{max} = E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3).$$

τ_{max} өсі бойынша үшінші теорияға сәйкес

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

болатын жанама кернеудің ең үлкен шамасы салынады.

Сонымен, әрбір кернеулік күй графикте координаттарының $m = \frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}}$ белгілі қатынасы бар нүктемен, мысалы, 5.6а-суреттегідей 1,2 немесе, i нүктелерімен бейнеленеді. Аталған қатынас m кернеулік күйдің негізгі сипаттамасы болады. Кернеулік күйдің қарқындылығын $m = \text{const}$ кезінде өзгертсек, графикте координат басынан шығатын және σ_{max} өсіне α бұрышпен көлбеу тангенсі m-ге тең сәулені аламыз. Мұндай сәулені салғанда ол созылымды деформация

аймағына көшу кезінде, яғни материалдың қирау моментіне дейін түзу болады деп үйғарамыз.

Егер графикте σ_{max} өсіне β және ξ бұрыштармен $\frac{\tau_{кир}}{\sigma_{уз}}$ және $\frac{\tau_A}{\sigma_{уз}}$ қатынастарына сәйкес ОВ және ОС сәулелерді жүргізсек (5.6а-сурет), m қатынасымен сипатталатын әр түрлі кернеулік күйлер үшін:

а) $\alpha > \beta$ кезінде — кесу арқылы қирау (ОА сәуле);

б) $\beta > \alpha > \xi$ кезінде — созылымды деформация дамуынан кейін үзу арқылы қирау (ОМ сәуле);

в) $\alpha > \xi$ кезінде — созылымды деформацияның дамуынсыз үзу арқылы қирау (ОД сәуле) болады.

Көптеген материалдарға және олардың жұмыс жағдайының түрліше болуына байланысты кернеулердің шекті мәндері бірдей болмайтындықтан, үзу және кесу сызықтары координат өстерінен әр түрлі қашықтықта орналасады. Демек, бір кернеулік күйде қираудың әр түрі болуы мүмкін, сондықтан қор коэффициенттері де бірдей болмайды.

Сонымен m қатынасы әрбір дербес жағдайда қираудың ықтимал түрін жуықтап тағайындауға, сондай-ақ оның басқа түрге үқсастық дәрежесін анықтауға, сол негізде қажетті қор коэффициентін қабылдауға мүмкіндік береді.

Егер кернеулік күй ОА сәулемен сипатталса, онда қор коэффициентін τ_A аққыштық шегіне қатысты деп біліп, ОД сәуле кезінде $\sigma_{уз}$ қатысты тағайындау керек.

Қарастырылған теория материалдар қирауының мүмкін түрін және әр түрлі жағдайда олардың күйін анықтауды жуықтап шешу үшін пайдаланылады.

ЯГН — БУЖИНСКИЙ БЕРІКТІК ТЕОРИЯСЫ. Бұл теориясында кернеулік күйлердің болу шарттары σ_1, σ_2 және σ_3 бас кернеулер арқылы функцияның екінші дәрежелі тендеуімен ернектеледі:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + m(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + n(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = l.$$

Тендеудегі қажетті m, n, l коэффициенттері созылу, сығылу және бұралу (таза ығысу) жөніндегі сынауларға негізделіп анықталуы керек. Тәжірибелер нәтижесінде шекті кернеулерді және қор коэффициенттерін $[\sigma_{соз}], [\sigma_{сығ}]$ және $[\tau_б]$ мүмкін кернеулерді табады. Бұл тендеуді созылу үшін

$\sigma_1 = [\sigma_{соз}]$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; сығылу үшін $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -[\sigma_{сығ}]$, $\sigma_3 = 0$ және бұралу үшін $\sigma_1 = -\sigma_2 = [\tau_б]$, $\sigma_3 = 0$ жеке пайдаланып, үш теңдеу аламыз:

$$\left.\begin{array}{c} 2[\sigma_{соз}]^2 + m[\sigma_{соз}]^2 + n[\sigma_{соз}] = l; \\ 2[\sigma_{сығ}]^2 + m[\sigma_{сығ}]^2 - n[\sigma_{сығ}] = l; \\ 6[\tau_б]^2 = l. \end{array}\right\}$$

Теңдеулер жүйесін шешіп, коэффициенттердің мәндерін табамыз:

$$\left.\begin{array}{c} m = \dfrac{6[\tau_б]^2 - 2[\sigma_{соз}][\sigma_{сығ}]}{[\sigma_{соз}][\sigma_{сығ}]}; \\ n = \dfrac{6[\tau_б]^2([\sigma_{сығ}] - [\sigma_{соз}])}{[\sigma_{соз}][\sigma_{сығ}]}; \\ l = 6[\tau_б]^2. \end{array}\right\}$$

Коэффициенттердің мәндерін жоғары теңдеуге қойып, Ягн — Бужинский беріктік теория шартын аламыз:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \frac{6[\tau_б]^2 - 2[\sigma_{соз}][\sigma_{сығ}]}{[\sigma_{соз}][\sigma_{сығ}]} +$$

$$+ \frac{6[\tau_б]^2([\sigma_{сығ}] - [\sigma_{соз}])}{[\sigma_{соз}][\sigma_{сығ}]}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \le 6[\tau_б]^2.$$

Бұл теорияның ерекшелігі сол, Мор теориясы сияқты материалдың созылуы және сығылуы кезінде оның кедергісінің бірдей болмайтындығын, сонымен бірге материалдардың ығысу кедергісін ескереді. Егерде жоғарғы шартқа $[\sigma_{соз}] = [\sigma_{сығ}] = [\tau_б]\sqrt{3}$ қойсақ, қарапайым түрлендіруден кейін энергетикалық теорияны қанағаттандыратын шартын аламыз. Демек, ол Ягн — Бужинский теориясының дербес жағдайы болады.

ПИСАРЕНКО — ЛЕБЕДЕВ БЕРІКТІК ТЕОРИЯСЫ Бұл теория мынадай болжамға негізделеді: шекті кернеулік күйдің тууына материалдың жанама және тік кернеулерге қарсыласу қасиеттері себепші болады Беріктік критерийін жанама кернеулер функциясы кернеулік күйіне инвариант түрінде алу ұсынылады Беріктік критерий мынадай түрде жазылады:

$$\tau_{\text{окт}} + m_1\sigma_i \le m_2,$$

немесе, кернеу қарқындылығы

$$\chi\sigma_i + (1-\chi)\sigma_1 \le \sigma^{\circ}_{\text{сж}};$$

мұндағы $\chi = \sigma^{\circ}_{\text{сж}} / \sigma^{\circ}_{\text{сыг}}$. $0 < \chi \le 1$ кезінде көптеген нақты құрылма материалдарға сәйкес келеді.

Бұл теория бір текті құрылма материалдар үшін тәжірибе жүзінде дәлелденген. Құрамы біртекті емес материалдар үшін келесі шартты ұсынған:

$$\chi\sigma_i + (1-\chi)\sigma_1 A^{1-I} = \sigma^{\circ}_{\text{сж}};$$

мұндағы $I = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/\sigma_i$ — кернеулік күйінің параметрі,

A — материал құрамы параметрі, аталған материалдардың класс үшін орта статикалық мәні 0,7 — 0,8

A параметрін бұрау жөніндегі сынау көрсеткішіне негізделіп анықтайды:

$$A = \frac{\varphi - \sqrt{3}\chi}{1-\chi},$$

мұндағы $\varphi = \sigma^{\circ}_{\text{сж}} / \sigma^{\circ}_{\text{сыг}}$; $\tau_{\text{б}}$ — бұрау кезіндегі шекті кернеу.

Бар теориялар тәжірибе жолымен әлі жеткілікті тексерілген жоқ. Шекті кернеулік күйлердің жаңа теорияларын жасау кезінде теориялардың, сондай-ақ деформацияның даму механизмі мен қатты денелердің кирау проблемасына қатысты зерттеулер және идеялардың кемшіліктері ескеріледі.

Белгілі теориялардың басты кемшіліктерінің бірінде көлемдік кернеулік күйлердің жалпы жағдайында нақты теорияның дұрыстығын сенімді бағалауға мүмкіндік беретін қажетті эксперименттік мәліметтердің жоқтығы жатады. Бұл кемшілік қажетті тәжірибелерді жүзеге асырудың техникалық қиындығына байланысты туып отырады, сондықтан қазіргі кезде бар теориялар тек жазық кернеулік күй үшін эксперименттік түрғыда тұжырымдалған. Дегенмен, көптеген жаңа материалдар әлі де жеткілікті зерттелмеген. Теориялардың келесі басты кемшілігі мынау: бұл теорияларды жасағанда материалдар тұтас біртекті орта ретінде, оның микрокұрылымы ескерілмей қарастырылады Материалдың осындай идеал үлгісі күрделі кернеулік күй кезінде іс жүзінде есептеу әдістемелігін жүзеге

асырғанда ыңғайлы болады. Соңғы кезде жүргізілген эксперименттік және теориялық зерттеулер нақты қатты денелердің микроқұрылымы олардың деформациясына әрі қирауына ықпалы зор екендігін дәлелдеп берді. Бұл ықпалды ескермесе, беріктік теориясының кез келгені есептеу нәтижесіне өз әсерін тигізері сөзсіз. Оған қоса аталған ықпалды ескеру өте қиын мәселе, өйткені оны анықтау түрлі күрделі-кернеулік күйде жұмыс істейтін материалдың созылымды деформациялық қатаюын және қирауын сапалық әрі сандық түрғыда бағалауға мүмкіндік берер еді. Бұл міндетті шешу жолында бүгінгі таңда тек алғашқы қадам жасалуда.

VI тарау

СОЗЫЛУ ЖӘНЕ СЫҒЫЛУ

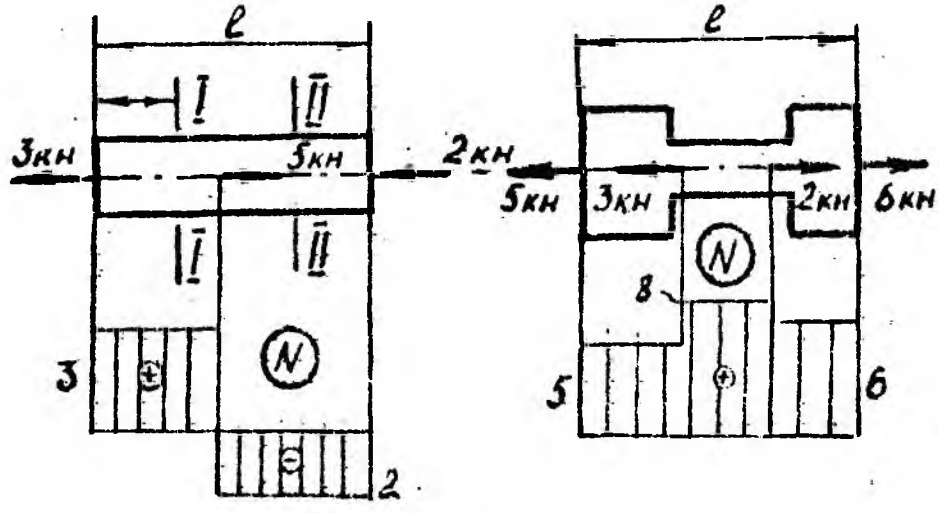
§ 1. ІШКІ ӘСЕРЛЕР

Созылу және сығылу тік білеудің өсімен бағытталған сыртқы F күш әсерінен болады. Білеудің көлденең қималарындағы ішкі әсерлер оның бойлық өсі бойынша бағытталған бір тең әсерлеріне келтіріледі. Ол *бойлық күш* деп аталады. Бойлық күш сан мәні бойынша қиылған сырықтың кез келген бөлігіне (сол, не оң), сырық өсіне әсер ететін барлық сыртқы күштер проекциясының алгебралық қосындысына тең, яғни

$$N = \sum F_i .$$

Созу бойлық күшті оң деп санаймыз.

Бойлық күш сырықтың ұзындығы бойынша өзгеру заңын көрнекті бейнелеу үшін график құрады. Оны *бойлық күш эпюрасы* деп атайды. Бұл графикті құру кезінде абсцисса өсіне көлденең қима координатасын, ал ордината өсіне бойлық күш шамасын салады. Бойлық күш эпюралар салу мысалдары 6.1-суретте көрсетілген.

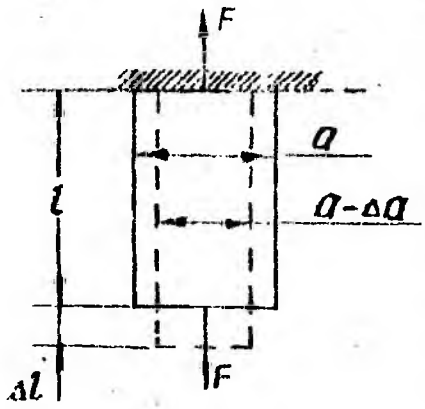


6.1. - сурет

§ 2. КЕРНЕУЛЕР МЕН ДЕФОРМАЦИЯЛАР

6.2-суретте созылатын сырық көрсетілген. Тепе-тендік шартынан кез келген қимадағы бойлық күшті ішкі күштердің тең әсерлері ретінде бейнелеуге болады. Жазық қималар жөніндегі болжамға сүйеніп сырықтың барлық көлденең талшықтары бірдей созылады, немесе қысқарады деп айтуға болады. Созылу немесе сығылу кезінде тік кернеулер сырықтың көлденең қимасында біркалыпты таралғандықтан: $\sigma = \text{const}$, сондықтан $\sigma A = N$ -ге тең және $\sigma = \frac{N}{A}$ болады.

Сырықтың ұзындығы бойынша өзгерісін Δl *толық* не *абсолют ұзаруы* (қысқаруы) деп айтады. Толық ұзару (қысқару) сырықтың ұзындығы сияқты сызықтық бірлікпен өлшенеді (см, мм).



6.2 - сурет

Абсолют бойлық ұзарудың (қысқару) сырықтың ұзындық бірлігіне сәйкес келетін үлесін *салыстырмалы ұзару* деп атайды:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Бойлық деформация кезінде сырықтың көлденең өлшемдері өзгеріп отырады: созылу кезінде олар кішірейеді, ал сығылу кезінде үлкейеді, сырықтың көлденең өлшемдерінің езгеруі көлденең деформация деп аталады. Сырықтың көлденең өлшемдерінің өзгерісін *абсолют көлденең жіңішкеру* деп атайды.

Абсолют көлденең жіңішкерудің бастапқы өлшеміне қатынасын *салыстырмалы көлденең жіңішкеру* деп атайды:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}.$$

Салыстырмалы көлденең жіңішкеру салыстырмалы бойлық деформацияға тура пропорционал, ал танбасы жағынан қарама-қарсы:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon,$$

мұндағы, — *көлденең деформация коэффициенті* немесе Пуассон коэффициенті, ол материалдың механикалық сипаттамаларының бірі болып саналады. Бұл коэффициент салыстырмалы көлденең деформацияның салыстырмалы бойлық деформацияға арақатынасының абсолют шамасын көрсетеді:

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|,$$

μ коэффициенті әрбір материалдар үшін $0 \le \mu \le 0,5$ шегінде өзгереді. Кейбір материалдар үшін μ коэффициенттердің мәндері 3.3-ші кестеде келтірілген.

Серпімділік шегіндегі кернеулер мен деформациялардың өзара байланысы Гук заңына сәйкес созылу немесе сығылу кезінде келесі түрде болады:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

яғни созылу (не сығылу) кезінде тік кернеу салыстырмалы ұзаруға тура пропорционал. Мұндағы E — *бойлық серпімділік модулі* (немесе қарапайым серпімділік модулі) деп аталатын пропорционалдық коэффициент. Ол материалдың физикалық тұрақтысы бола отырып, тәжірибе жүзінде анықталады. Өлшем бірлігі $\text{МН}/\text{м}^2$. Жиі пайдаланылатын кейбір материалдардың серпімділік модулінің мәндері 3.3-кестеде келтірілген.

Кернеуді $\sigma = \frac{F}{A}$, салыстырмалы ұзаруды $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ формулалары бойынша өрнектеп, Гук заңын түрлендіруге болады:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA};$$

мұндағы EA — *созылу және сығылу кезіндегі қатаңдығы* делінеді.

Мысал. Ұшы қатаң бекітілген дөңгелек болат сырыққа бойлық күш әсер етеді (6.3а-сурет). Бойлық күшінің, тік кернеудің және абсолюттік ұзарудың эпюраларын тұрғызыңыз.

Шешімі. Қималар әдісін пайдаланып, бойлық күшті табамыз:

$$\sum Z = 0, \quad N = 40\text{кН};$$

кернеулер

$$\sigma_1 = \frac{4 \cdot 10^4}{3,14 \cdot 10^2} = 127,6\text{Н}/\text{мм}^2; \quad \sigma_2 = \frac{4 \cdot 10^4}{3 \cdot 14 \cdot 20^2} = 31,9\text{Н}/\text{мм}^2$$

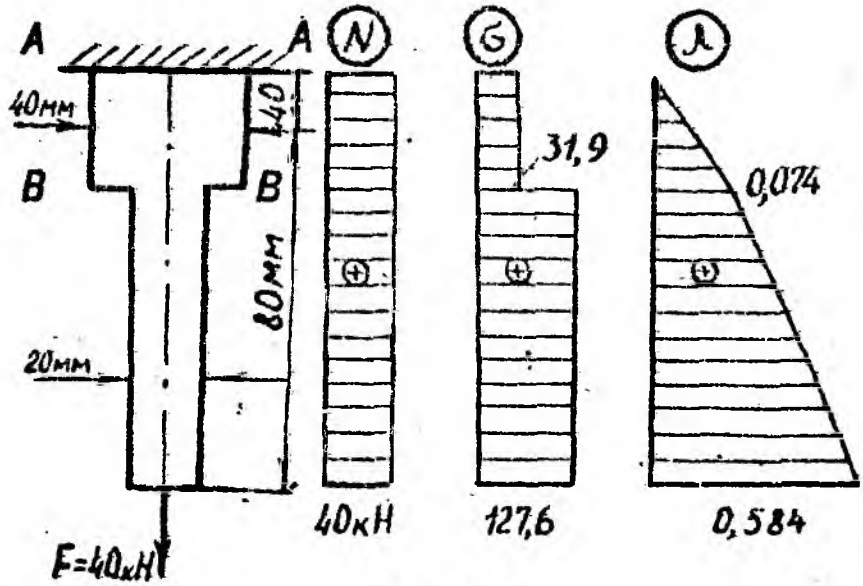
Сырықтың көлденең қималарының орын ауыстыру шамалары оның ұзаруына тең болып, келесі формулаларменен анықталады:

$$\Delta l_{AA} = 0;$$

$$\lambda_1 = \Delta l_{BB} = \frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{31,9 \cdot 4 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^5} = 0,074 \text{мм};$$

$$\lambda_2 = \Delta l_{BB} + \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{127,6 \cdot 8 \cdot 10^2}{2 \cdot 105} + 0,074 = 0,584 \text{мм}.$$

6.3б,в,г-суреттерде N, σ, λ және λ эпюралары көрсетілген.



6.3 - сурет

Эпюраларды салу кезінде келесі ережелер кабылданады:

1. Эпюраның өсін сырықтың бойлық өсіне параллель немесе онымен дәл тандап алады.

2. Сырықтың бойлық өсіне параллель өстер жүргізіліп, осы өстерге кималардағы N мен σ, λ табылған мәндерін белгілі бір масштабпен перпендикуляр бағытта өлшеп салады.

3. Эпюралар өсіне перпендикуляр штрих сызықтар жүргізіледі, әрбір сызық сырықтың бұл қимадағы N немесе σ, λ мәнін көрсетеді.

4. Эпюраларда сипатты ординаталардың саны қойылады олар N, σ немесе λ мәнін көрсетеді, эпюралардың аныктамаларын дөңгелекке алады, мысалы N, σ, λ.

§ 3. СОЗЫЛУ (СЫҒЫЛУ) КЕЗІНДЕГІ СЫРЫҚ ӨЛШЕМДЕРІН АНЫҚТАУ ЖӘНЕ БЕРІКТІГІН ТЕКСЕРУ

Материалдар кедергісінің негізгі есебі: бөлшектердің көлденең қимасының өлшемдерін таңдау. Бұл кезде материалдардың беріктік және үнемдеу проблемасы туындайды. Оларды шешуде екі әдіс қолданылады:

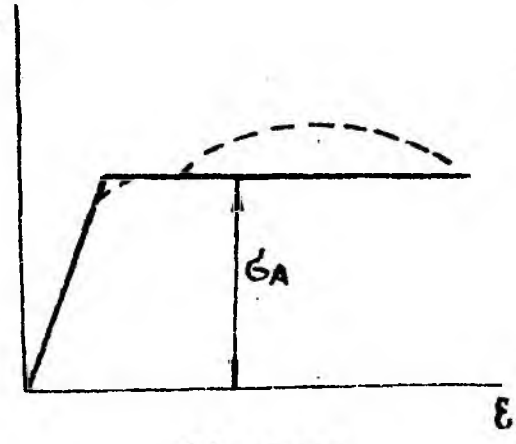
1) қирату күштері бойынша есептеу: сырық өлшемі берілген жағдайда оның ұзақ мерзім жұмыс істеуі кезінде ешқандай өзгеріске ұшырамайтынын, яғни күш әсеріне төзімділігін анықтау есептері қарастырылады;

2) мүмкін кернеу бойынша есептеу.

Бұл едістер машиналар мен құрылыстың беріктігін және төзімділігін қамтамасыз ету максатын көздейді. Бірінші әдіс құрылысты қирату күшінің ең аз мәнін анықтау барысында, оны салынып жатқан құрылысқа үйғарылған күшпен салыстыру үшін керек. Екінші әдіс соңғы кезге дейін құрылыс жұмыстарында пайданылады және қазіргі кезге дейін машина жасауда қолданылады.

1. Қирату күштерінің әдісі. Бұл әдіспен есептегенде беріктік шарты ретінде құрылысқа түсетін ең үлкен қирату (қауіпті) күшінің қайсыбір беріктік коэффициенті деп аталатын шама $n > 1$ қатынасы мүмкін күштен $[F]$ аспауы қарастырылады:

$$F_{max} = \frac{F_к}{n} \le [F].$$



6.4 - сурет

Қор коэффициенті n мүмкін кернеуді есептеу әдісінде жан-жақты қарастырылатын бірқатар пайымдаулар негізінде алынады.

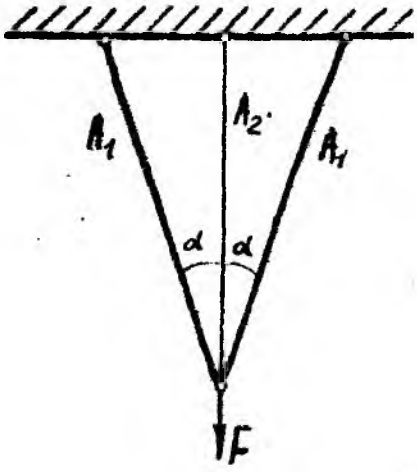
Созымды келген материалдар құрылмасында қирату күштерін анықтау үшін 6.4-суретте аққыштық ауданы шексіз тарайтын созылу (сығылу) диаграммасы — Прандтль диаграммасы қарастырылған.

Бұл жағдайда центрлік созылу немесе сығылу кезіндегі қирату күші былай анықталады:

$$F_к = \int_A \sigma_A dA = \sigma_A A.$$

Морт сынатын материалдар үшін аққыштық шегінің орнына беріктік шегін алу керек:

$$F_к = \sigma_б \cdot A$$



6.5 - сурет

Созылымды материалдардың статикалық анықталмайтын жүйелерінде аққыштық күш ең көп түсірілген бір элементте пайда болғанда жүйе қирамайды. Мысалы, 6,5-суретте статикалық анықталмайтын жүйелерде F күшінің артуымен аққыштық шегіне тең кернеу алдымен ортаңғы немесе шеткі сырықтарда пайда болғанның өзінде құрылма қирамайды. Өйткені басқа сырықтардың кернеулері аққыштық шегінен кем болады.

Құрылманың толық кирауы үшін аққыштық барлық сырықтарда пайда болуы керек. Бұл жағдайда кирату күші тепе-тендік шартынан табылады:

$$F_к = 2N_1\cos\alpha + N_2 = 2A_1\sigma_A\cos\alpha + A_2\sigma_A.$$

2. Мүмкін кернеулер әдісі. Мүмкін кернеулер әдісі бойынша сырықтағы ең үлкен кернеу таңбасымен белгіленетін кернеуден аспауы талап етіледі:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \le [\sigma]$$

Бұл теңсіздік созылған (сығылған) сырықтардың *беріктік шарты* деп аталады.

Іс жүзінде беріктікті есептеудің үш түрі кездеседі:

1. Сырықтың беріктігін тексеру. Бұл жағдайда беріктік шарты мына формуламен өрнектеледі:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \le [\sigma];$$

мұндағы σ_{max}, F_{max} ең қауіпті қиманың тік кернеуі мен бойлық күші. Егерде $[\sigma], A, N_{max}$ белгілі болса, онда бұл формула бойынша сырықтық беріктігі камтамасыз етілгенін білуге болады.

2. Сырықтың көлденең қима өлшемдерін анықтау (жобалау есебі). Күштер және мүмкін кернеу белгілі болса, беріктік шартына сүйеніп, сырықтың көлденең қима ауданын келесі теңсіздікпен анықтауға болады:

$$A \ge \frac{N}{[\sigma]}.$$

3. Сырықтың мүмкіндік күштер немесе жүк көтеру қабілетін анықтау. Көлденең қима өлшемдері мен мүмкін кернеу белгілі болса, онда күштің мүмкін мәні келесі формуламен анықталады:

$$N = [\sigma]A.$$

Келтірілген формулалар бойынша есептеу қауіпті қима үшін жүргізіледі.

§ 4. СОЗЫЛУ ЖӘНЕ СЫҒЫЛУ КЕЗІНДЕГІ СЫРЫҚТЫҢ САЛМАҒЫН ЕСЕПТЕУ

Түсірілген созу күшін және сырықтың салмағын (6.6а-сурет) ескеріп, жазық қималар болжамға сүйене отырып, кернеуді келесі формула бойынша анықтайды:

$$\sigma = \frac{N(z)}{A};$$

мұндағы

$$N(z) = F + \gamma A z;$$

A — қиманың ауданы, γ — материалының бірлік көлемдегі салмағы. Күштің ең үлкен мәні: $|N(z)|_{max} = F + \gamma A l$;

кернеудің ең үлкен мәні

$$\sigma_{max} = \frac{|N(z)|_{max}}{A} = \frac{F}{A} + \gamma l.$$

Беріктік шарты

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma l \le [\sigma];$$

немесе

$$A \ge \frac{F}{[\sigma] - \gamma l}.$$

$F = 0$ болғанда $\sigma_{max} = \gamma l$, ал беріктік шарты мынадай түрде болады:

$$\gamma l \le [\sigma].$$

Бұдан сырық салмағының әсерінен қирамайтын ең шекті ұзындығын табамыз:

$$l_ш = \frac{[\sigma]}{\gamma},$$

ал сырық салмағының әсерінен қирайтын кризистік ұзындығын төмендегіше анықтайды:

$$l_{кр} = \frac{\sigma_б}{\gamma}.$$

Сырықтың салмағын ескере отырғанда, онын үзаруы мына формула бойынша анықталады:

$$\lambda(z) = \int_z^l \frac{N(\zeta)}{EA} d\zeta = \int_z^l \frac{\left(F + \gamma F(\zeta)\right)}{EA} d\zeta = \frac{F(l-z)}{EA} + \frac{\gamma}{2E}\left(l^2 - z^2\right).$$

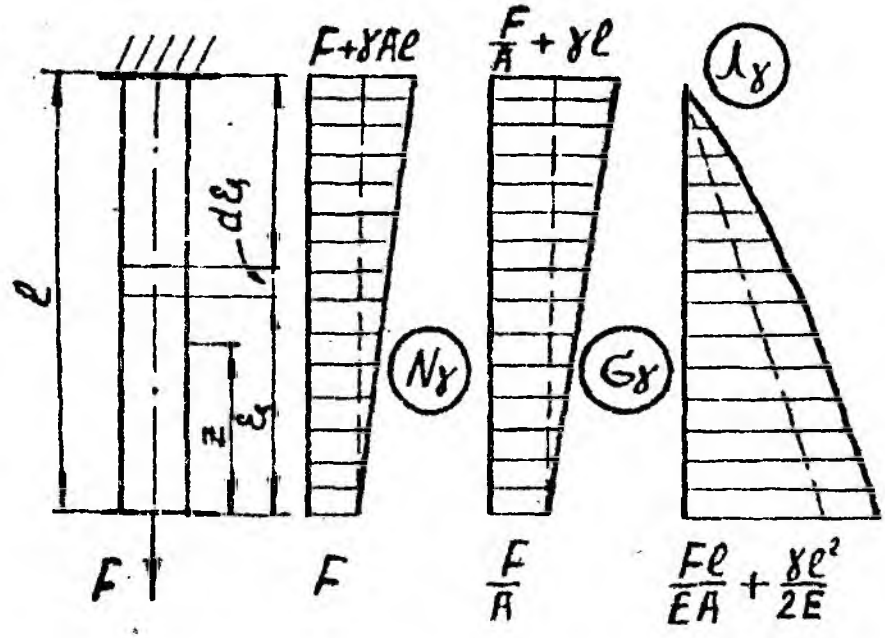
Сырықтың төменгі үшынын орын ауыстыруы онын толық үзаруына тең болады және келесі формула бойынша анықталады:

$$\lambda(z)_{z=0} = \frac{Fl}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

Сырықтың салмағы $Q = \gamma lA$ ескеріп, шешімін төмендегіше табамыз:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{Ql}{2EA}.$$

6.6б,в,г-суреттерде бойлық күш, кернеулер орын ауыстыру эпюралары көрсетілген.



6.6 - сурет

§ 5. ТЕҢ КЕДЕРГІЛІ ЖӘНЕ САТЫЛЫ БІЛЕУЛЕР

Тең кедергілі білеу деп әрбір көлденең қимасында тік кернеулер біркелкі және мүмкін кернеуге тең білеуді айтады. Осындай білеудің көлденең қима ауданы (6.7а-сурет) келесі заң бойынша өзгереді:

$$A(z) = A_0 e^{\frac{\gamma z}{[\sigma]}},$$

мұндағы $A_0 = \frac{F}{[\sigma]}$ — білеудің күш түсіретін орнындағы минималь қимасы, γ — меншікті салмақ, z — ағыс координатасы, e — нақты логарифм негізі.

Қиманың ең үлкен ауданы

$$A_{max} = A_0 e^{\frac{\gamma z}{[\sigma]}} = \frac{F}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma z}{[\sigma]}}.$$

Q білеудің салмағы мынадай шарттан анықталады:

$$F + Q = [\sigma] A_{max},$$

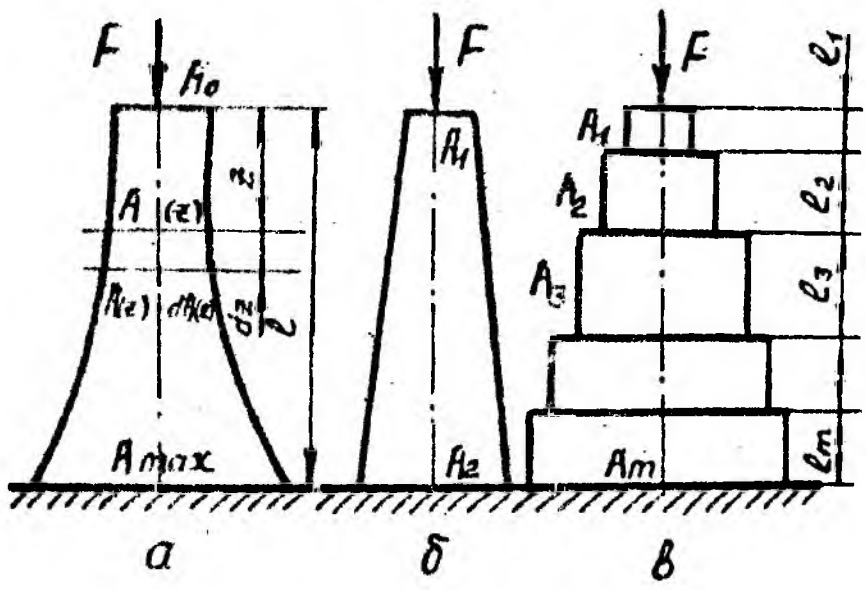
одан $Q = [\sigma] A_{max} - F$, немесе $Q = F\left(e^{\frac{\gamma z}{[\sigma]}} - 1\right)$.

Білеудің салыстырмалы қысқаруы $\varepsilon = \frac{[\sigma]}{E}$, ал абсолют қысқаруы

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{[\sigma]}{E} \cdot l.$$

Тең кедергілі білеуді дайындауға материал аз жұмсалады, бірақ олардың бүйір беттері қисық сызықпен шектелгендіктен жасау қиынға соғады. Тең кедергілі білеу орнына көйде пирамидалы және қиық конусты (6.7б-сурет) немесе сатылы (6.7в-сурет) білеудер қолданылады.

Сатылы білеу деп әрбір бөлек бөліктердің көлденең қима ауданы тұрақты болатын білеуді айтады. Сатылы білеуге мысал ретінде көп ғимараттың қабырғасын айтуға болады. Оның қалыңдығы жоғары қабаттарда жұқа болады да, төменгі қабаттарда қалыңдай түседі.



6.7-сурет

Кез келген n -інші бөлігінің қима ауданы мына формула бойынша анықталады:

$$A_n = \frac{F[\sigma]^{n-1}}{([\sigma]-\gamma_1)([\sigma]-\gamma_2)\ldots([\sigma]-\gamma_n)}.$$

Егер де барлық бөліктердің ұзындықтары тең болса:

$$l_1 = l_2 = l_3 = \ldots = l_n = \frac{l}{m},$$

онда

$$A_n = \frac{F[\sigma]^{n-1}}{\left([\sigma]-\gamma\frac{l}{m}\right)^n} = \frac{F}{[\sigma]\left(1-\frac{\gamma}{[\sigma]}\frac{l}{m}\right)^n},$$

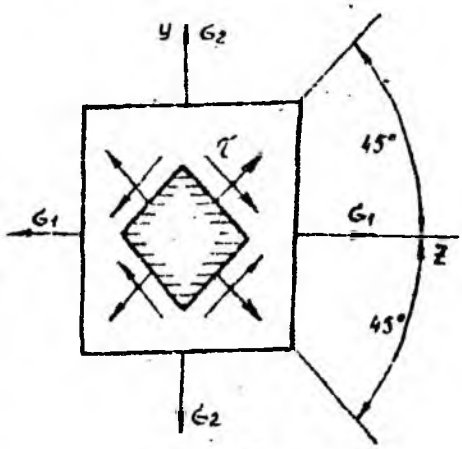
мұндағы m — білеудегі сатылар саны, l — білеудің ұзындығы.

VII тарау

ЫҒЫСУ ЖӘНЕ БҰРАЛУ

§ 1. ТАЗА ЫҒЫСУ

Ығысу — жазық кернеулік күйдің дербес жағдайы. Екі өзара перпендикуляр анық бағдарланған алаңдардағы тек қана жанама кернеулер әсер ететін жазық кернеулік және деформациялық күйді *таза ығысу* деп атайды. Таза ығысу кезінде қайсыбір нүктенің төңірегінде бөліп алынған және анық бағдарланған тікбұрышты элемент тек қана ығысу деформациясына ұшырайды да, қабырғаларының ұзаруы болмайды (7.1-сурет). Бұл алаңдар таза ығысу алаңдары деп аталады. 7.2-суретте ΔS шама — *абсолют ығысу*, ал шама $\frac{\Delta S}{a} \approx \gamma$ *салыстырмалы ығысу* немесе ығысу бұрышы деп аталады. Таза ығысу алаңдары мен 45° бұрыш алаңдарда бас кернеулер әсер етеді және олар $\sigma_1 = \tau;\ \sigma_2 = 0;\ \sigma_3 = -\tau$ болады.



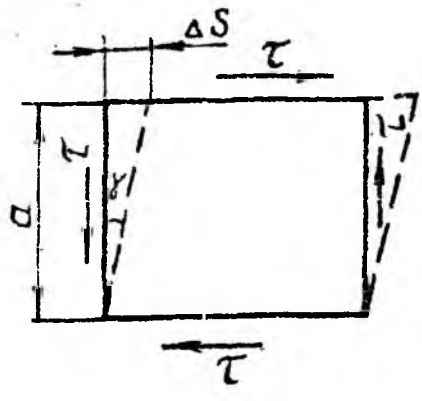
7.1 - сурет

Ығысу кезінде Гук заңы τ жанама кернеу мен ығысу бұрышының арасындағы пропорционалдықты көрсетіп мынадай түрде болады:

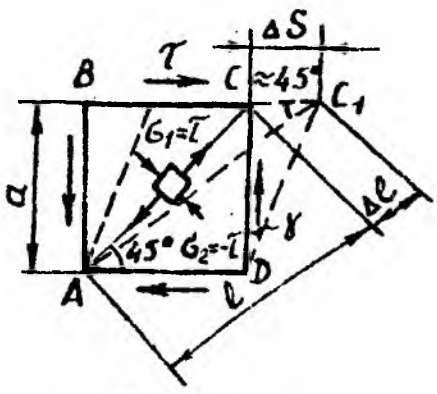
$$\tau = G\gamma;$$

мұндағы G — *ығысу кезіндегі серпімділік модулі* немесе созылу (сығылу) кезіндегі екінші текті серпімділік модулі (III тарауды қараңыз). 7.3 суреттен $AC = l = a\sqrt{2}$ диагональдің ұзаруы Δl тең екенін көреміз:

$$\Delta l = CC_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \approx CC_1 \cos 45^\circ = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}},$$



7.2 - сурет



7.3 - сурет

диагональдің салыстырмалы сызықтық ұзаруы (σ_1 бағытында) төмендегіше көрсетіледі:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta S}{2a} = \frac{\gamma}{2},$$

немесе Гук заңын ескерсек:

$$\varepsilon = \frac{\tau}{2G}.$$

Жалпылама Гук заңы таза ығысуға пайдаланылса, онда

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1+\mu}{E}\tau.$$

Екі теңдіктің оң жақтарын теңестіріп, төмендегі теңдеуді құрамыз:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

$\mu = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ болғанда, $G = (0,375 \div 0,4)E.$

Гук заңын абсолют ығысу арқылы өрнектесек

$$\Delta S = \frac{Qa}{GA}.$$

Таза ығысу кезіндегі потенциялық энергиясы келесі формуламен анықталады:

$$U = \frac{Q\Delta S}{2} = \frac{Q^2 a}{2GA}.$$

Таза ығысу кезіндегі меншікті потенциялық энергиясы былай есептеп шығарылады:

$$U = \frac{U}{V} = \frac{Q^2 a}{2GA \cdot aA} = \frac{\tau^2}{2G},$$

мұндағы $V = a^2 l$ — элемент көлемі.

Таза ығысу кезіндегі беріктік теориялары мынадай түрде болады:

бірінші беріктік теория бойынша

$$\sigma_1 = \tau \le [\sigma];$$

екінші беріктік теория бойынша

$$\sigma_1 - \mu\sigma_3 \le [\sigma].$$

Бас кернеулердің мәндерін қойып, қабатынымыз төмендегі теңдік болмақ:

$$\tau \le \frac{[\sigma]}{1+\mu} = [\tau].$$

Металдар үшін $\mu = 0,25 - 0,42$, сондықтан $[\tau] = (0,7 \div 0,8)[\sigma]$. Бетон үшін $\mu = 0,16$, сондықтан $[\tau] = 0,86[\sigma]$.

Үшінші беріктік теория бойынша

$$\sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma].$$

Одан төмендегі теңдік шығады:

$$\tau \le \frac{[\sigma]}{2} = [\tau],$$

мүмкін кернеу

$$[\tau] = 0,5[\sigma].$$

Төртінші беріктік теория бойынша

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \le [\sigma];$$

Сондықтан

$$\tau \le \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}; \quad [\tau] \approx 0,6[\sigma].$$

Ығысу кезіндегі мүмкін кернеулер мәндері 7.1-7.5 кестелерде келтірілген.

7.1 - к е с т е. Прокат металл үшін τ мүмкін кернеулердің шамамен алынған мәндері (МПа)

Әсерлердің түрі	Б.5	Б.4, Б.3 КП	Б.2, Б.3, Б.1
	Негізгі мүмкін тік кернеулер кезінде		
	175—210	140—170	120—145
Қиылу	120—150	90—110	80—100
Кесіктің жаншылуы	260—315	210—255	180—220

7.2 - к е с т е. Құйма болат және шойын үшін τ мүмкін кернеулердің шамамен алынған мәндері (МПа)

Әсерлердің түрі	Болат						Шойын	
	$к_2$		$к_2$ төмендеткен		$к_1$			
	Негізгі мүмкін тік кернеулер кезінде							
	180	210	150	180	120	150	100	120
Қиылу	135	160	115	135	90	115	25	30
Жанасу кезіндегі жерлікті жаншылу:								
тығыз жанасу	130	150	110	130	85	110	65	80
еркін жанасу								
А	700	800	600	700	500	600	350	420
Б	500	600	400	500	335	430	250	300

Ескерту. Еркін жанасу кезіндегі жаншылуы: А — тұрақты құрылыстардың жылжымалы тіректеріне, Б — жылжымалы көпірлерге, кран жабдықтарға жатады.

§ 2. ЫҒЫСА ДЕФОРМАЦИЯЛАНҒАН ҚҰРЫЛМА ЭЛЕМЕНТТЕРІН ЕСЕПТЕУ

Күштердің статикалық әсері кезінде болтты, тойтармалы қосылыстарға әсер етуші сырткы күш оларда бірдей таралады деп қарастырып, қиылудың беріктік шартын келесі түрде жазамыз (7.4а-сурет):

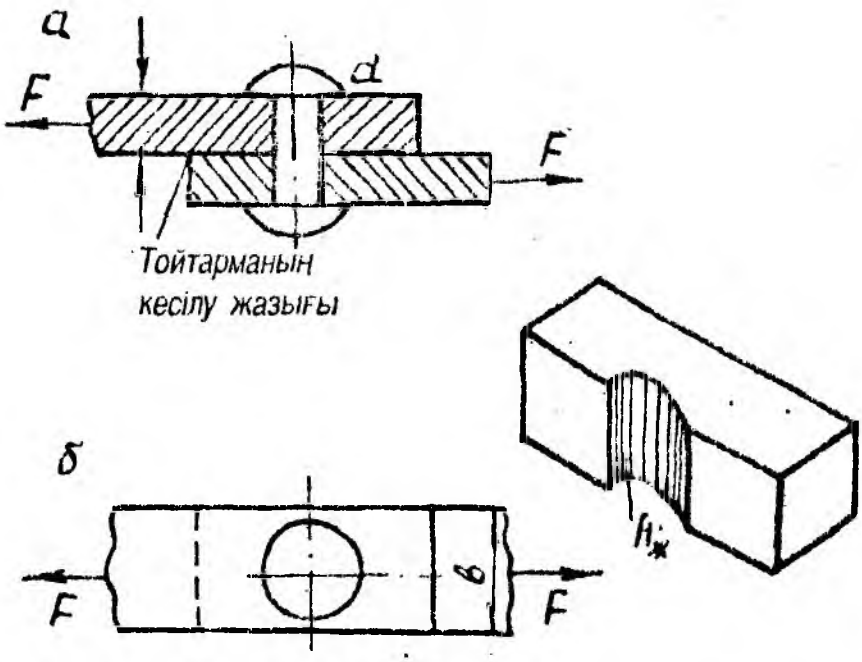
$$\tau = \frac{Q}{A_к} \le [\tau]_к,$$

немесе

$$\tau = \frac{4Q}{n_к n_т \pi d^2} \le [\tau]_к.$$

Тойтармалар немесе болттардың диаметрі

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{n_к n_т \pi [\tau]_к}},$$



7.4 - сурет

мұндағы

$n_к$ — тойтарма немесе болттар саны;

$n_т$ — қиылу жазықтығының саны;

$[\tau]_к$ — қиылудың мүмкін кернеуі;

d — болттар немесе тойтармалар диаметрі.

Болттар немесе тойтармалы қосылыстар қиылуға, сондай-ақ олардың қосылатын элементтері мен тойтарма шегелердің жанасу беттері жаншылуға есептеледі.

Жаншылу деп жанасу беттерінде пайда болған созылымды деформацияны айтады (7.4б-сурет).

Жаншылудың беріктік шарты келесі түрде жазылады:

$$\sigma_ж = \frac{Q}{A_ж} \le [\sigma]_ж,$$

немесе

$$\sigma_ж = \frac{Q}{\delta d} \le [\sigma]_ж,$$

осыдан

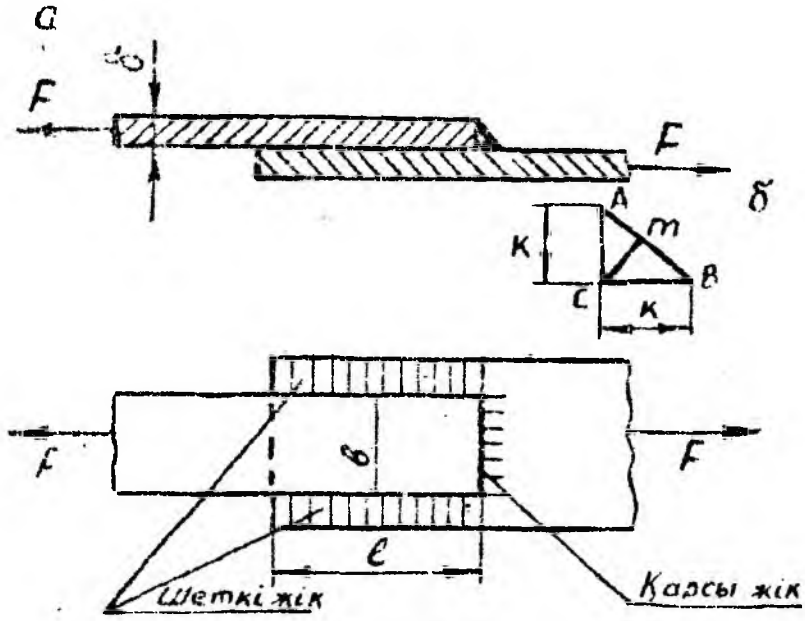
$$d = \frac{Q}{[\sigma]_ж \delta},$$

мұндағы $A_ж$ — жаншылу бетінің ауданы; δ — қосылатын элементтің қалыңдығы. Жаншылудың мүмкін кернеуі тәжірибе жүзінде анықталады. Кесілу мен жаншылуға есептелін табылған тойтарма шегінің немесе болттың диаметрлерінің үлкені қабылданады.

Дәнекерлеп қосылған элементтер тек қиылуға есептелінеді:

$$\tau = \frac{Q}{A_{жік}} \le [\tau]_д,$$

мұндағы $[\tau]_д$ — электрлік дәнекерленген жік қиылуының мүмкін кернеуі. Шеткі және қарама-қарсы жіктерді есептеуде (7.5а-сурет) жіктің қауіпті қимасы ретінде ABC үшбұрышының mc биссектрисасы арқылы өтетін кима қабылданады (7.5б сурет). Олай болса $A_{жік} = b \cdot 0,7\delta$. Қарама-қарсы жіктің мүмкін күші: $[F_{қ.ж}] = b \cdot 0,7\delta[\tau]_д$.



7.5 - сурет

Шеткі жіктің мүмкін күші: $[F_{ш.ж}] = b \cdot 0,7\delta[\tau]_д$. Қосылыс сенімді қызмет атқаруы үшін оның сыртқы күшке қарсыласу қабілеті жеткілікті болуы тиіс, яғни

$$2[F_{қ.ж}] + 2[F_{ш.ж}] \ge F.$$

7.3 - к е с т е. Негізгі күштер әсері кезінде болтты, тойтармалы қосылыстарды есептеу кезінде пайда болатын мүмкін кернеулер (МПа)

Бүйым	әсердің түрі	Б 4	Б.3 КП, Б.3	Б. 2
Тойтармалар	Қиылу	140	95-тен 140-дейін	95 тен 140-ка дейін
	Жаншылу	350	280-нен 320-дейін	240-тан 280-дейін
Болттар				
жонылған (таза)	Қиылу	140	120	12
	Жаншылу	350	320	280
жонылмаған (қара	Қиылу	140	80	70
	Жаншылу	350	200	170

7.4 - к е с т е. Дәнекерлеу кезіндегі мүмкін кернеулер, МПа

Кернеулер түрі	Қол дәнекерлеу		Автогендік дәнекерлеу
	жүқа	калын	
Созылу	100	130	130
Сығылу	110	145	145
Қиылу	80	110	110

7.5 - к е с т е. Ағаш үшін (қарағай) мүмкін кернеулер

Кернеулер түрі	Белгісі	Шамасы (МПа)
Иілу	$[\sigma_и]$	10
Талшықтар бойынша созылу	$[\sigma_{с.а}]$	7
Бойлық талшықтардың сығылуы және жаншылуы	$[\sigma_{сж}]$;$[\sigma_ж]$	10
Көлденен талшықтардың жаншылуы (10 см-ден кем емес)	$[\sigma_ж]_{90}$	2,5
Талшықтар бойынша сындыруы:		
иілу кезінде	$[\tau_и]$	2,0
қуыстарда	$[\tau]$	1.0
Қуыстардағы көлденен талшықтардың сындырылуы	$[\tau]_{90}$	0,5

§ 3. БҮРАЛУ КЕЗІНДЕГІ КЕРНЕУЛЕР МЕН ДЕФОРМАЦИЯЛАР

Бұралу кернеулік күйі: білеуде тек қана ішкі әсерімен — бұралу момент $M_z = M_б$ сипатталады. Бұралуға қызмет ететін білеу *білік* деп аталады.

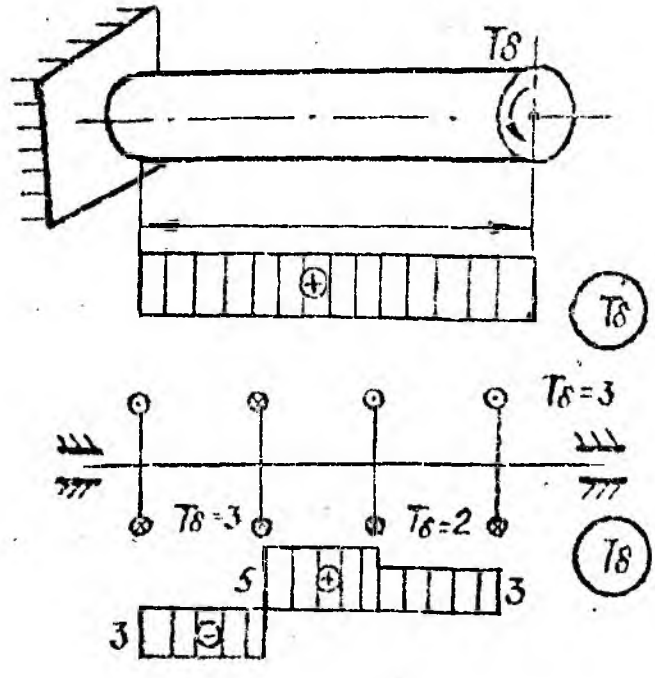
Бұралу деформациясын іс жүзінде өте жиі кездестіруге болады. Мысалы, машиналардың жетекші дөңгелектері отырғызылған өстерде, трансмиссиялық біліктерде, көністіктегі құрылма элементтерде т. б.

$T_б$ — бұралу моменті, ол сан мәні бойынша білік өсімен салыстырғанда қиылған біліктің кез келген бөлігіне (сол не оң) әсер ететін барлық сыртқы моментінің алгебралық қосындысына тең:

$$T_б = \sum_{к.б.} T_z.$$

Егер бұраушы момент қаралатын бөлікті (қима жағынан қарағанда) сағат тілі бағытына қарсы айналдырса, онда қимадағы бұралу моменті оң деп саналады.

Бұралу моменті біліктің ұзындығы бойынша өзгеру заңын бейнелеу үшін график құрады. Оны *бұралу моментінің эпюрасы* деп атайды. Бұл графикті құру кезінде абсцисса өсіне көлденең қима ординатасын, ал ордината өсіне бұралу моменті шамасын салады. 7.6-суретте $T_б$ эпюралары көрсетілген.



7.6 - сурет

Бұраушы моментті машина қуаты бойынша анықтау. Әдетте, біліктегі күш машина қуатымен анықталады. Егер де W қуаты киловаттпен берілсе, онда

$T_б = 974\frac{W}{n}$ кНм. ал машина қуаты N ат күшімен берілсе (n -бір минуттағы айналыс саны)

$$T_б = 7027\frac{N}{n}\text{ н.м} = 7,027\frac{N}{n}\text{ кНм.}$$

Жұмыр біліктер: Идеал — серпімді және біртекті материалдардан жасалған жұмыр біліктердің бұралу теориясында мынадай негізгі болжамдар қабылданған:

1) жазық қималар болжамы: бұралуға дейінгі жазық көлденең қима бұралғаннан кейін де жазық болып қалады;

2) бұралу кезінде білік өсі қисаймайды;

3) бойлық талшықтары ұзармайды;

4) әрбір көлденең қима басқасымен салыстырғанда біртұтас бұрылып, оның деформацияға дейінгі түзу радиусы деформациядан кейін сол күйінде қалады;

5) біліктің көлденең қимасында тек қана жанама кернеулер пайда болады.

Сонымен, бұралуды біліктің көлденең қималарының таза ығысуы ретінде қарастыруға болады.

Бұл жағдайда көлденең қимасында тек қана жанама кернеулер туады. (7.7а-сурет) олар мына формуламен анықталады:

$$\tau_\rho = \frac{T_б\rho}{J_\rho};$$

мұндағы τ_ρ — қиманың кез келген нүктесіндегі жанама кернеуі;

$T_б$ — зерттеу қимасындағы бұралу моменті;

ρ — зерттелетін нүктеден өсіне дейінгі қашықтық;

J_ρ — қиманың өрістік инерция моменті.

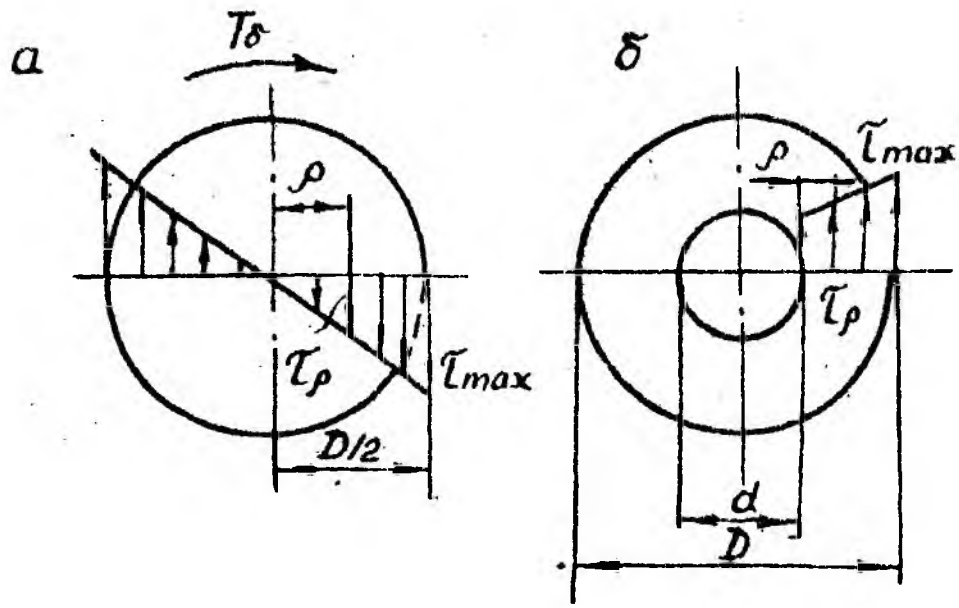
Қиманың өрістік инерция моменті мынадай түрде болады:

шеңбер үшін

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4;$$

ортасы қуыс сақина тәріздес қималар үшін (7.7б-сурет)

$$J_\rho = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-c^4\right) \approx 0,1D^4\left(1-c^4\right);$$



7.7 - сурет

мұндағы

$$c = \frac{d}{D}.$$

Ең үлкен жанама кернеу қиманың шеткі нүктелерінде болып, мына формула бойынша анықталады:

$$\tau_{max} = \frac{T_б}{W_\rho};$$

мұндағы $W_\rho = {}^{J_\rho}/_{d/2}$ өрістік кедергі моменті. Ол өрістік инерция моментінің радиуска қатынасына тең. Бұл шама жұмыр көлденең қима беріктігінің бұрау кезіндегі сипаттамасы болады (II-ші тарауды қараңыз).

Кедергі моменті тұтас қима үшін $W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$; ортасы қуыс жұмыр қима үшін $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}\left(1 - c^4\right) \approx 0,2D^3\left(1 - c^4\right)$. 7.7а,б-суреттерде тұтас және ортасы қуыс жұмыр қималардың жанама кернеулер эпюралары көрсетілген. Жанама кернеудің жұптық заңына сәйкес олар бойлық қималарында да болады. Тік кернеулер көлденең және бойлық қималарында нөлге тең. Кернеулердің

траекториясын жасау үшін 45° бұрышпен көлбеуленген бұрандалы сызықты бейнелейді. Егер біліктің бетін бұрандалы сызықтармен тік бұрышты торларға белсе, онда торлар бір бағытта созылатын, ал келесі бағытта сығылатын болады (7.8-сурет). Бас кернеулер σ_1 және σ_2 шамасы жағынан қиманың барлық нүктесінде жанама кернеулерге тең.



7.8 - сурет

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{max} = \frac{T_б}{W_\rho}; \quad \sigma_3 = 0.$$

Бұралу бұрышын анықтау. Қатандықты есептеу және статикалық анықталмаған есептерді шешу үшін көлденең қиманың бұралу бұрышын есептеп шығару керек.

Жалпы жағдайда бұралу бұрышы мына формуламен есептеледі:

$$\varphi = \sum \int_{l_i} \frac{T_б dz}{GJ_\rho}.$$

$\sum$ белгісі әрбір бөліктің интегралын есептеп, содан кейін нәтижесін жинақтау керектігін білдіреді. Бір ғана бөлігі бар біліктің бұралу бұрышы мына формуламен анықталады:

$$\varphi = \int_0^l \frac{T_б dz}{GJ_\rho}.$$

0 ден *l*-ге дейін шекте интегралдағанда

$$\varphi = \frac{T_б l}{GJ_\rho}.$$

Бұл формуласы бұралу бұрышының шамасын радианмен береді. Оны градуска көшіру үшін φ -ді π -ге бөліп 180° -қа көбейтеді:

$$\varphi^\circ = \varphi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{T_б l}{GJ_\rho};$$

мұндағы GJ_ρ — *бұралу кезіндегі қатандық.*

Ұзындық бірлігін, мысалы 1 метрге сәйкес бұралу бұрышы *салыстырмалы бұралу бұрышы* деп аталады. Ол θ болып белгіленеді де, келесі өрнекпен анықталады:

$$\theta = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{T_б}{GJ_\rho}.$$

Бұралу кезінде деформацияның потенциялық энергиясы төмендегі формулалар бойынша анықталады:

жалпы жағдайда $T_б$ және J_ρ айнымалы кезінде

$$U = \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{T_б^2}{J_\rho} dx;$$

$M_б$ бұралу моменті және GJ_ρ қатандық l ұзындығында тұрақты болатын кезде

$$U = \frac{T_б^2 l}{2GJ_\rho}.$$

Меншікті потенциалық энергия:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\tau^2}{2G}.$$

§ 4. БІЛІКТЕРДІҢ БҰРАЛУЫН ЕСЕПТЕУ

Біліктердің бұралу кезіндегі беріктігін есептеу. Біліктің беріктік шарты бойынша қауіпті қимадағы ең үлкен жанама кернеу мүмкін болатын жанама кернеуден аспауы талап етіледі:

$$\tau_{max} \le [\tau],$$

мұндағы $[\tau]$ — бұралу кезіндегі мүмкін жанама кернеу. Ол материалға, құрылманың жұмыс істейтін жағдайына т. б. байланысты болады және 7.1-7.5-кестелерде мәндері келтірілген.

Беріктік шарты материалдың беріктігін есептеудің үш түрін ерекшелейді:

1. Беріктігін тексеру:

$$\tau_{max} = \frac{T_{бmax}}{W_\rho} \le [\tau].$$

Ең үлкен жанама кернеу мен мүмкін жанама кернеудің арасындағы айырма 5%-тен кем, не артық болмауы керек.

2. Көлдөнең қима өлшемдерін анықтау (жобалау есебі). Жобалау есебіне керекті кедергі моментін келесі теңсіздікпен анықтауға болады:

$$W_\rho \ge \frac{T_{бmax}}{[\tau]}.$$

Біліктің керекті диаметрі келесі тәуелділіктермен анықталады:

а) тұтас қима үшін

$$d = \sqrt[3]{\frac{16T_{бmax}}{\pi[\tau]}};$$

б) ортасы қуыс қима үшін (сақиналық қима)

$$D = \sqrt[3]{\frac{16T_{бmax}}{\pi[\tau](1-c^4)}}; \quad c = \frac{d}{D}.$$

3. Мүмкін деп саналатын бұраушы момент мына формула бойынша анықталады:

$$[T_б] = W_\rho[\tau].$$

Біліктердің бұралу кезіндегі қатаңдығын есептеу. Біліктің және онымен байланысты бөлшектердің әдеттегідей жұмыс істеуі үшін ол жеткілікті түрде қатаң болуы керек, яғни салыстырмалы бұралу бұрышы θ есептелетін біліктің пайдалануына тәуелді мүмкін бұралу бұрышынан $[\theta]$ асып кетпеуі қажет:

$$\theta_{max} = \frac{T_{бmax}}{GJ_\rho} \le [\theta],$$

немесе

$$\theta_{max} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{T_{бmax}}{GJ_\rho} \le [\theta^\circ],$$

мұндағы $[\theta]$ және $[\theta^\circ]$ мүмкін салыстырмалы бұралу бұрыштары рад/м, град

м сәйкес шамалармен өлшенеді.

Қатандығына жобалау есебі кезінде

$$J_\rho \geq \frac{T_{б\max}}{G[\theta]};$$

немесе

$$J_\rho \geq \frac{180^\circ T_{б\max}}{\pi G\left[\theta^\circ\right]}.$$

Біліктің қатандық шарты бойынша керекті диаметрі келесі формуламен анықталады:

а) тұтас кима үшін

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32T_{б\max}}{\pi G[\theta]}};$$

немесе

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180^\circ T_{б\max}}{\pi^2 G[\theta]}};$$

б) ортасы қуыс кима үшін

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32\,T_{б\max}}{\pi G[\theta]\left(1-c^4\right)}}.$$

Қатандық шартына сәйкес мүмкін бұраушы моментті анықтауға болады:

$$\left[T_{б\max}\right] = GJ_\rho[\theta] = \pi GJ_\rho\left[\theta^\circ\right]/180^\circ.$$

Мүмкін салыстырмалы бұралу бұрышы техникалық шарттары бойынша анықталады. Оның мәні әртүрлі құрылманың және біліктің жұмыс істеуіне қарай мынадай шектерінде болады:

$$\left[\theta^\circ\right] = (0,25-1.0)\text{град}/\text{м},$$

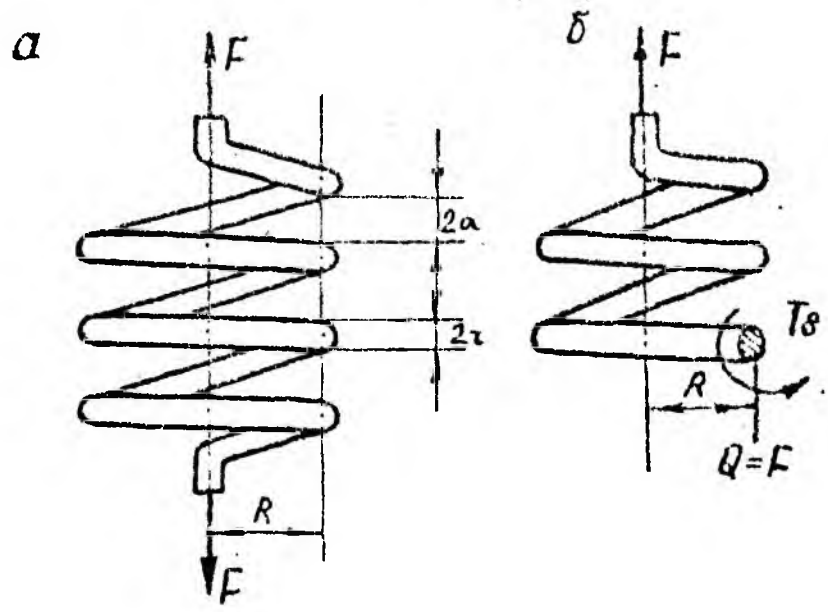
немесе

$$[\theta] = (0,43-1,75)\ 10^{-2}\text{рад}/\text{м}.$$

Қатандық пен беріктік жағдайларын есептеу кезінде табылған екі диаметрдің үлкенін алу керек.

§ 5.БҰРАНДАЛЫ СЕРІППЕЛЕРДІ ЕСЕПТЕУ

Цилиндрлік серіппелер. Орамның аз қадамды деп орамның α көтерілу бұрышы 15° -тен аспаған қадамды айтады. 7.9-суретте көрсетілгендей, қабылданған



7.9 - сурет

белгілер мыналар: d, r -дайындалған серіппе сымның диаметрі және радиусы; D — серіппенің орташа диаметрі, R — серіппе орамының радиусы, n — орам саны. Серіппенің көлденең қимасында жанама кернеулер, $Q = F$ көлденең күшті теңестіретін және бұралу моменті $T_б = FR$ пайда болады. Орамның ішкі бетінде ең үлкен кернеулер әсер етеді және олар мына формула бойынша анықталады:

$$\tau_{max} = \frac{2FR}{\pi r^3}\left(1 + \frac{r}{2R}\right);$$

әдетте, орамның аз қадамды серіппелерінде $\frac{r}{2R}$ қатынасы бірмен салыстырғанда өте аз, сол себепті оны ескермейді, тек бұралу кернеулерін қарастырады. Сонда беріктік шарты келесі түрде болады:

$$\frac{2FR}{\pi r^3} \le [\tau].$$

Жалпы жағдайда *серіппенің шегуі* төменгі формула бойынша анықталады:

$$\lambda = \frac{4FR^3n}{Gr^4}.$$

а, б, в формулалары — жуық болады, өйткені оларды алғанда серіппелердің өсі арқылы өтетін жазықтық орам келденең қимасымен үйлеседі деп есептелінген. Дәл есептеу мына формулалар бойынша жүргізіледі:

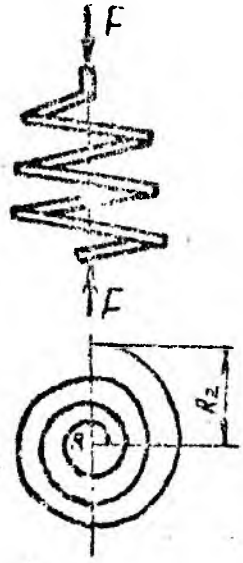
$$\tau_{max} = k_1 \frac{2FR}{\pi r^3};$$

$$\lambda = k_2 \frac{4FR^3n}{Gr^4};$$

мұндағы k_1 және k_2 -түзету коэффициенттері. Олар $\frac{R}{r}$ радиустар қатынастарына байланысты және 7.6-кестеде келтірілген.

7.6 - к е с т е. Түзету коэффициенттері k_1 және k_2.

R/r	3	4	5	6	8	10
k_1	1,58	1,40	1,31	1,25	1,18	1,14
k_2	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,05



7.10 - сурет

Конустық серіппелер. Цилиндрлік серіппелермен салыстырғанда конустық серіппелер орнықтылау және шегуі де үлкендеу болуы мүмкін. 7.10-суретте көрсетілгендей, қабылданған белгілер мыналар: R_1 және R_2 — жоғарғы және төменгі орамдардың радиустары; ағымдағы радиус $R = R_1 + \alpha \frac{R_2 - R_1}{2\pi n}$; α — ағымдағы бұрыш; n — орам саны; r — дайындалған серіппе сымның радиусы.

Серіппенің кез келген қимасында бұраушы момент $T_б = FR$ тең. Ең үлкен бұралу моменті орам бойынша ең үлкен радиус қимасында былай көрсетіледі:

$$T_{б\max} = FR_2.$$

Ең үлкен жанама кернеу

$$\tau_{\max} = \frac{2FR_2}{\pi r^3}.$$

Толық шегуі төмендегі теңдеу түрінде беріледі:

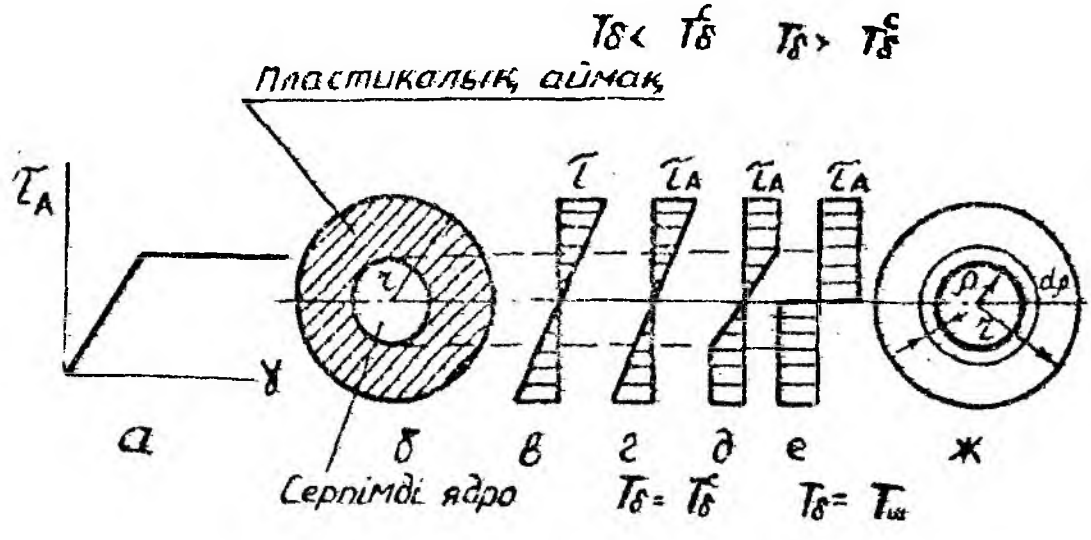
$$\lambda = \frac{Fn}{r^4 G}\left(R_2^2 + R_1^2\right)\left(R_2 + R_1\right).$$

§ 6. ДӨҢГЕЛЕК БІЛІКТІҢ СЕРПІМДІЛІК ШЕГІНЕН АСҚАН БҰРАЛУЫ

Материалдың идеал диаграммасын (7.11а-суретте көрсетілген) пайдаланамыз. Бұл диаграммадан ығысу кезінде пайда болатын ең үлкен кернеулер τ ығысу кезіндегі аққыштық шегіне тең болады; деформация шамасы шексіз. Дөңгелек қималы білікке барлық кернеулер аққыштық шегінен төмен болатындай шамада $T_б$ бұраушы моментті түсіреміз (7.11б-сурет). Білік таза серпімді күйде болып, кернеу эпюрі 7.11в-суретте көрсетілген түрге енеді.

Шекті талшықтағы кернеулер τ_A аққыштық шегіне жетуі үшін $T_б$ шамасын үлкейтеді (7.11г-сурет). Шеткі талшықтан басқалары серпімді болғандықтан, бұраушы моментті анықтауға мына формуланы пайдаланады:

$$T_б^c = \tau_A W_\rho.$$



7.11 - сурет

Бұл моменттің білік түтастай (тек шекті бір талшықтан басқасы) серпімді облыста болғандығын білдіретін ең үлкен мәні. Серпімділік теориясы бойынша оны шектік момент деп атайды. Білік моменттің бұл мәнінде қирамайды, оның әсерді қабылдау мүмкіндігі әлі бар. Егерде $T > T_6^c$ болса, онда серпімді ядро жойылып, қимада аққыштық аймағы таралады (7.11д,е-суреттер), мұндай жағдайда біліктің бұраушы моменттің үлкеюін қабылдауға мүмкіндігі болмайды. Бұл күйге сәйкес $T_{ш}$ моменті деп аталады және мына формула бойынша анықталады:

$$T_{ш} = \int_0^r 2\pi\rho^2 d\rho = \frac{2}{3}\pi r^3 \tau_A,$$

мұндағы $W_A = \frac{2}{3}\pi r^3$ созылымды кедергі момент.

W_A шамасын серпімді кедергі моментімен W_ρ салыстырғанда

$$\frac{W_A}{W_\rho} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^3}{\frac{\pi r^3}{2}} = \frac{4}{3}.$$

Онда

$$T_{ш} = W_A \tau_A = \frac{4}{3} W_\rho \tau_A.$$

Сонымен, созылымды шекті момент серпімді кедергі моментінен 1,33 есе үлкен болады. Дөңгелек қималы емес білеулердің созылымды кедергі моментін мынадай формулалармен анықтайды:

жақтары b және $h(h < b)$ тікбұрышты үшін $W_A = \frac{h^2}{6}\left(b - \frac{h}{3}\right)$, қабырғасы a тең қабырғалы үшбұрыш үшін $W_A = \frac{a^3}{12}$.

§ 7. ТІКБҰРЫШТЫ ҚИМАЛЫ БІЛІКТІҢ БҰРАЛУЫ

Көлденең қимасы жұмыр не қуыс біліктер үшін бұралу кезінде жазық қима болжалып жарамсыз болып табылады, сондықтан көп жағдайда кернеу мен бұралу бұрышын анықтауға берілген есептер серпімділік теориясы әдістерімен шешіледі.

Кернеулер мен бұралу бұрыштары былай анықталады:

$$\tau_{max} = \frac{T_б}{W_б};$$

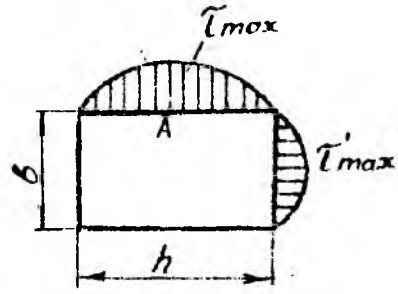
$$\varphi = \frac{T_б l}{GI_б}.$$

Бұралу кезінде $I_б$ инерция моменттерінің және $W_б$ кедергі моменттердің шамалары, сондай-ақ ең үлкен кернеулердің мәндері қималардың әрбір түрлері үшін 7.7-кестеде келтірілген.

$h > b$ болғанда тікбұрышты білік үшін (7.12-сурет).

$$W_б = \alpha h b^2;$$

$$I_б = \beta h b^3.$$



7.12 - сурет

C нүктесіндегі кернеу

$$\tau_c = \gamma \tau_{max}.$$

7.8-кестеде α, β, γ өлшемсіз коэффициенттердің жуық мәндері келтірілген.

7.7 - к е с т е. **Бұралу кезіндегі дөңгелек емес қималар бойынша мәліметтер**

Қиманың түрі	$J_б$ см^4	$W_б$ см^3	Ең үлкен жанама кернеу $\tau_{max} = \frac{T_б}{W_б}$
1	2	3	4
Квадрат	$J_б = 0{,}140a^4$	$W_б = 0.208a^3$	Жақтардың ортасында $\tau_{max} = \frac{T_б}{0{,}208a^3}$; бұрыштарда $\tau = 0$

7.7 - кестенің жалғасы

1	2	3	4
Кесілген шеңбер $\frac{h}{d}>0,5$	$J_б=\frac{d^4}{16}(2,6\frac{h}{d}-1)$	$W_б=\frac{d^3}{8}\frac{(2,6\frac{h}{d}-1)}{(0,3\frac{h}{d}+0,7)}$	Кесілген жазықтығының ортасында $\tau_{max}=\frac{T_б}{W_б}$.
Эллипс	$J_б=\frac{16A^4}{\pi^2 bh(b^2+h^2)}$	$W_б=\frac{\pi hb^2}{16}$	Ең үлкен жанама кернеу $\tau_{max}=\frac{T_б}{W_б}$; кіші жарты жарты өстің ішінде $\tau=\frac{b\cdot\tau_{max}}{h}$
Тең қабырғалы үшбұрыш	$J_б=\frac{\sqrt{3}}{80}a^4$	$W_б=\frac{a^3}{20}$	Жақтардың ортасында $\tau_{max}=\frac{20T_б}{a^3}$ бұрыштарда $\tau=0$
Дұрыс сегізбұрыш	$J_б=kd^2A$ k = 0,133 — алтыбұрыш үшін k = 0,130 — сегізбұрыш үшін	$W=k^1dA$ k^1 = 0,217 — алтыбұрыш үшін k^1 = 0,223 — сегізбұрыш үшін	Жақтардың ортасында $\tau_{max}=\frac{T_б}{k^1dA}$; бұрыштарда $\tau=0$

1	2	3	4
Сына түрі	$J_б = \frac{a(b_1^4 - b_2^4)}{12(b_1 - b_2)}$ $\approx 0{,}105(b_1^4 - b_2^4)$	$W_к = \frac{a(b_1^4 - b_2^4)}{12b_1(b_1 - b_2)}$ $\approx 0{,}105\frac{b_1^4 + b_2^4}{b_1}$	Кең табанына жақындау үзын қабырғалар нүктелерінде: $\tau_{max} = \frac{T_б}{W_б}$
Қуыс эллипсті қима	$J_б = \frac{\pi m^3}{16(m^2+1)} \times$ $\times b_1^4(1-\alpha^4)$; $m = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} (m>1)$; $\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} (a<1)$	$W_б = \frac{\pi b_1^3}{16}(1-\alpha^4)m$	Кіші жарты өстің ішінде: $\tau_{max} = \frac{T_б}{W_б}$ үлкен — $\tau = \frac{\tau_{max}}{Mag}$ қалыңдығы кезінде σ - қима бойынша $\tau = \frac{T_б}{2A_б}$ тең таралған
Ашық қуысты $\delta \ll r$ қима	$J_б = \frac{2}{3}\pi r\delta^3$	$W_б = \frac{(2\pi r\delta)^2}{6\pi r + 1{,}8\delta}$	Қиманың сыртқы және ішкі беттерінің нүктелерінде $\tau_{max} = \frac{6\pi r + 1{,}8\delta}{(2\pi r\delta)^2} T$

7.8 - к е с т е. Тікбұрышты қималар үшін α, β және γ коэффициенттердің мәндері

$\frac{h}{b}$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0 және артық
α	0,208	0,219	0,228	0,234	0,240	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,333
β	0,140	0,166	0,187	0,204	0,217	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,333
γ	1,000	0,932	0,865	0,845	0,821	0,796	0,774	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743

Дөрбес жағдайда $\frac{h}{b} \geq 10$ болғанда инженерлік есептерде $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ тең деп алады, онда:

$$W_б = \frac{hb^2}{3}; \quad I_б = \frac{hb^3}{3};$$

$$\tau_{max} = \frac{3T_б}{hb^2}; \quad \varphi = \frac{T_б l}{hb^3 G}.$$

§ 8. АШЫҚ ПРОФИЛЬДІ ЖҰҚА ҚАБЫРҒАЛЫ БІЛІКТЕРДІҢ БҰРАЛУЫ

Егерде қабырғаның ені мен қалыңдығының арақатынасы $\frac{b}{\delta} > 5 \div 10$ болса, онда бұл жұқа қабырғалы білік. Жанама кернеулер қабырғаның ені бойынша сызықтық таралады. Орта сызығында $\tau = 0$, ал үштарында — ең үлкен болады.

Ашық профильдердің бұралу туралы есебінде профильдерді тар бірнеше тікбұрыштарға бөліп, жуық мәнінде шешеді және мынадай формулаларды пайдаланады:

$$\tau_{max} = \frac{3T_б}{I_б}; \quad \varphi = \frac{T_б l}{GI_б}.$$

Бұл кезде профильдердің инерция және кедергі моменттерін анықтау үшін

аталған шамаларды әрбір тік бұрыш үшін тауып, сосын олардың қосындысы ретінде қарастырады:

$$I_б = \alpha \frac{1}{3} \int_s [\delta(s)]^3 ds.$$

Қабырғалары қалыңдығы бойынша тұрақты учаскелерінде

$$I_б = \alpha \sum_{i=1} \frac{b_i \delta_i^3}{3};$$

мұндағы b_i және δ_i — ең үлкен және ең кіші қиманың өлшемдері. α коэффициенті профильдің түріне байланысты: бұрыштар үшін — 1,10, швеллер — 1,12, таврлар — 1,15, қос тавр — 1,20-ға тең болады.

VIII тарау

ИІЛУ

§ 1. НЕГІЗГІ ТҮСІНІКТЕР. ІШКІ ӨСЕРЛЕР

Көп жағдайларда білеу көлденең күштің әсеріне ұшырайды. Оның әсер ету жазықтығы білеудің өсі арқылы өтеді де, күш әсерінен өсі иіледі. Деформацияның бұл түрі *иілу* деп аталады. Негізінен иілу деформациясына ұшырайтын білеу әдетте *арқалық* деп аталады.

Күштерді түсіру және білеуді бекіту тәсілдеріне байланысты иілу әртүрлі болуы мүмкін.

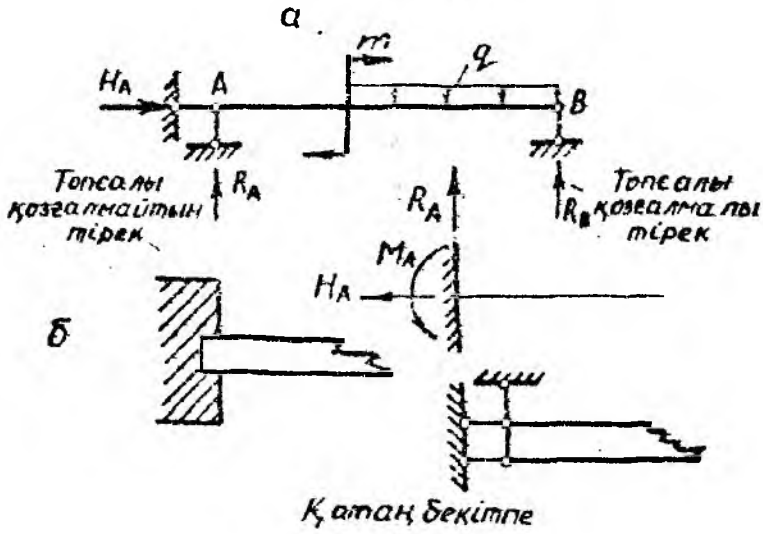
Егер де иінді момент қимаға әсер ететін жалғыз ғана күш әсері болса, онда *таза иілу* деп аталады. Егер көлденең қимада иілу моментімен қатар көлденең күштер пайда болса, онда *көлденең иілу* ұғымы енгізіледі. Іс жүзінде көлденең қимасында бір ғана симметрия болатын арқалықтар жиі кездеседі. Егер барлық күштер оның ішінде тірек әсерлерде қиманың симметрия өсімен дәл келетін жазықтықта жатса, онда иілген арқалықтар өсі жазықтықта жатады. Мұндай иілу *жазық иілу* деп аталады.

Түсірілген күштерді қабылдау, оларды табанына жеткізу үшін арқалықтарды тірек байланыстармен қосу қажет. Іс жүзінде тірек байланыстар немесе тіректердің бірнеше түрі пайдаланылады. Тірек әсерлері тірек құрылғысына байланысты. Тіректердің негізгі үш түрін қарастырайық:

1. Топсалы қозғалмайтын тірек (8.1а-сурет). Топсалы қозғалмайтын тірек нобайы арқалықпен топсалы қосылған екі сырық түрінде көрсетілген. Топса арқалықтың өзіне тірелетін қимасының айналуына кедергі келтірмейді деп қарастырылады. Осындай тіректе тірек әсерінің H_A және R_A екі құраушысы пайда болады.

2. Топсалы қозғалмалы тірек (8.1а-сурет). Бұл тірек тек бір бағытта жылжуды (мысалы, көлденені бойынша) қамтамасыз етеді. Топсалы қозғалмалы тіректің нобайы бір сырық түрінде көрсетілген. Осындай тіректе тірек әсері R_B пайда болады.

3. Қатаң бекітпе (8.1б-сурет). Мұндай тірек екі бағытта бұралуға және жылжуға мүмкіндік бермейді. Қатаң бекітпе R_A тік әсерден, H_A көлденең күштен және m_A моменттен құрылады. Кейде қатаң бекітпені суреттегідей үш



8.1 - сурет

сызықты байланыс түрінде бейнелейді. Үш сызықты байланыстар пайда болатын H_A, R_A және M_A әсерлерін тудырады.

Арқалықтардың иілуін есептеу үшін барлық әсер ететін күштерді білу керек. Әдетте сыртқы күштер алдын-ала берілетіндіктен, арқалыққа әсер ететін барлық күштерді есептеу үшін белгісіз тірек әсерлерді анықтау керек. Бұл мәселе теориялық механика курсында толық қарастырылады. Әсерлерді анықтау әдістерін қысқаша еске түсірейік. Жазық күш жүйесі түсірілген денелердің тепе-теңдік теңдеулерін үш түрде жазуға болады:

1) $\sum Z = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum m_0 = 0,$

мұнда моменттер қосындысы күш әсерінің жазықтығында жататын кез келген 0 нүктесіне сәйкес алынады;

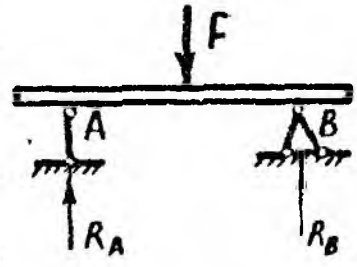
2) $\sum m_a = 0; \sum m_b = 0; \quad \sum Z = 0;$

бұл жағдайда Oz өсі ab түзуіне перпендикуляр болмауы қажет;

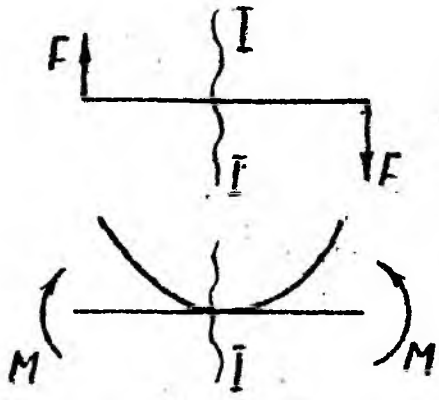
3) $\sum m_a = 0; \sum m_b = 0; \quad \sum m_c = 0,$

бұл вариантты қабылданғанда „а", „в" және „с" нүктелері бір түзудің бойында жатпауы керек.

Тепе-теңдік теңдеулерінің саны барлық тірек әсерлерді анықтауға жеткілікті болса, жүйелерді *статикалық анықталатын жүйе* деп атайды (8.2-сурет). Ююші моменттер мен көлденең күштер үшін төмендегі таңбалар ережелерін қабылдаймыз:



8.2 - сурет



8.3 - сурет

егер қиманың сол жағына түсірілген сыртқы күштер төменнен жоғары қарай, ал оң жағында жоғарыдан төмен қарай бағытталса, ол қимадағы көлденең күш оң таңбалы болады (8.3-сурет). Кері жағдайда көлденең күш теріс таңбалы болады;

егер қиманың сол жағына түсірілген сыртқы күштердің қосынды моменттері сағат тілімен бағыттас, ал оң жағына сағат тілінің бағытына қарсы болса, егер төменгі талшықтарды созса, қимадағы июші момент (8.3-сурет) оң таңбалы деп саналады. Кері жағдайда июші момент теріс таңбалы. Момент эпюрасының оң ординатасын өстен жоғары қарай, яғни сығылған талшыққа салады.

M июші момент, Q көлденең және q сыртқы күштердің қарқындылығы өзара белгілі тәуелділікте болады:

$$\frac{dM}{dz} = Q; \qquad \text{(а)}$$

M июші моменттің z бойынша алынған бірінші туындысы қимадағы көлденең күшке ; ал екінші туынды

$$\frac{d^2M}{dz^2} = q; \qquad \text{(б)}$$

қимадағы таралған күштің қарқындылығына тең.

$$\frac{dM}{dz} = q; \qquad \text{(в)}$$

көлденең күштің абсцисс бойынша алынған бірінші туындысы сол қимадағы таралған күштің қарқындылығына тең.

(а), (б), (в) формулаларды арқалықтардың иілуіне қатысты кейбір мәселелерді талдауда қолданады және де олар иілу кезіндегі дифференциалдық тәуелділіктер деп аталады. Олар көлденең күш және иілу момент эпюралардың ерекшелігін дәлелдеуге көмектеседі.

Кез келген қимадағы Q көлденең күш кесілген сол бөлігіне түсірілген барлық сыртқы күштердің алгебралық қосындысының арқалық тік өсіне түсетін проекциясына тең болады:

$$Q = \sum Y^c. \qquad \text{(г)}$$

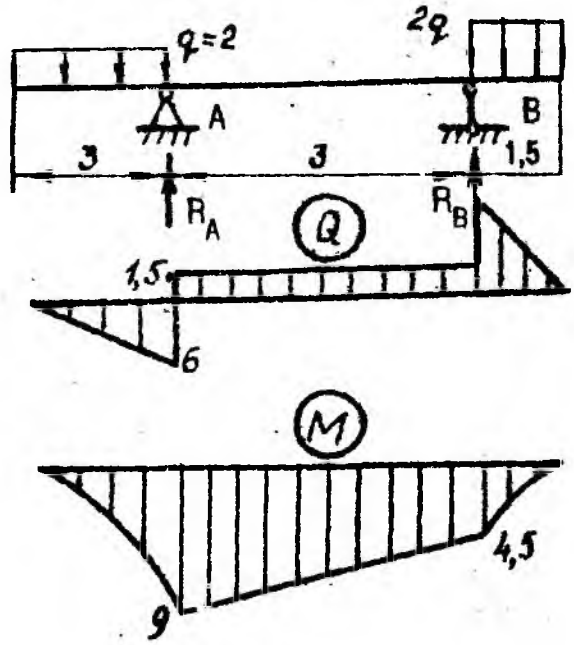
Кез келген қимасындағы M июші момент сол қиманың ауырлық центріне

қатысты кесілген сол бөлігіне түсірілген барлық сыртқы күштер моменттерінің алгебралық қосындысына тең болады:

$$M = \sum m^c. \quad (д)$$

(г) және (д) формулалар негізінде кез келген қима үшін Q және M мәндерін оңай анықтауға болады, содан кейін олардың эпюраларын салады.

Мысал. Берілген арқалық үшін Q және M эпюраларын түрғызыңыз (8.4-сурет).



8.4 - сурет

Шешімі. Тірек реакцияларының әсерлерін анықтау. Тірек реакцияларды анықтау үшін оларды Y, Z өстерімен бағыттас деп қарастырып, статиканың тендеулерін пайдаланамыз:

$$\sum Z = 0; \; H_A = 0.$$

Бойлық өс бойымен әсер етуші сыртқы күш жоқ болғандықтан А тірегіндегі реакцияның көлденең құраушысы H_A нөлге тең. Топсалы қозғалмайтын тірек реакциясын анықтау үшін қозғалмалы тіректің топсасынан гөрі, сыртқы күштердің моменттерінің қосындысын нөлге теңестіреміз:

$$\sum M_B = 0; \quad -q \cdot 3 \cdot 4,5 + R_A \cdot 3 + 2q \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 0;$$

$$R_A = 7,5 \text{кН}.$$

Дәл осылай R_B реакциясын анықтаймыз:

$$\sum M_A = 0; \; R_B \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 3,75 \cdot 1,5 = 0;$$

$$R_B = 4,5 \text{кН}.$$

Қозғалмалы тіректің R_B реакциясын анықтау үшін $\sum M_A = 0$ тендеуінің орнына статикалық басқа $\sum Y = 0$ тендеуін пайдалануға болады. Көбінесе, $\sum Y = 0$ тендеуді тірек реакцияларын анықтау үшін емес, анықталған реакциялардың дұрыстығын тексеру үшін қолданады:

$$\sum Y = 0; \; q \cdot 3 - 2q \cdot 1.5 = R_A + R_B; \; 12 = 12.$$

Көлденең күштер мен иіу моменттерін анықтау. Арқалықтың көлденең күштері мен иіуші моменттерінің тұрақты заңдылықтармен өзгеретін бөлігі аралық деп аталады.

Бірінші аралық: $0 \le z_1 \le 3$

мұндағы z_1 — координат басынан ішкі күштер анықталатын қимаға дейінгі ара қашықтық. Көлденең күш пен иілу моментінің анықтамалары мен таңбалары туралы ережелерге сүйеніп, олардың өрнектерін құрамыз:

$$Q_1 = qz, \quad z = 0 \text{ болғанда } Q_1 = 0; \; M_1 = 0;$$

$$M_1 = q\frac{z_1^2}{2}; \quad z = 3 \text{ болғанда } Q_1 = -6\text{кН}; \; M_1 = -9\text{кНм}.$$

Бірінші аралықта $Q_1(z_1) - z$-ке тәуелді сызықтық функция, ал $M_1(z_1)$ квадратты парабола заңдылығымен өзгереді.

Екінші аралық: $0 \le z_2 \le 1,5$.

Көлденең күш пен иілу моментінің өрнектерін құрамыз:

$$Q_2 = 2qz_2; \quad M_2 = -2q\frac{z_2^2}{2} = -qz_2^2.$$

$z_2 = 0$ болғанда, $Q_2 = 0; \quad M_2 = 0$.

$z_2 = 1,5$ болғанда, $Q_2 = 6\text{кН}; \; M_2 = -4,5\text{кНм}$.

Екінші аралықта $Q_2 - z_2$-ге тәуелді сызықтық функция, ал $M_1(z_4)$ — квадратты парабола заңдылығымен өзгереді.

Үшінші аралық: $1,5 \le z_3 \le 4,5$.

Көлденең күш пен иілу моментінің өрнектерін келесі түрде жазамыз:

$$Q_3 = 2q \cdot 1,5 - 4,5 = 1,5\text{кН}.$$

$$M_2 = -2q \cdot 1,5(z_1 - 0,75) + R_B(z_3 - 1,5).$$

$z_3 = 1,5$ болғанда, $M_3 = -4,5\text{кНм}$;

$z_3 = 4,5$ болғанда, $M_3 = -9\text{кНм}$.

Үшінші аралықтағы $Q_3(z_3) - z_3$-ке тәуелсіз тұрақты шама, ал $M_3(z_3)$ z-ке тәуелді сызықтық функция.

Енді арқалықтың бойлық өсіне параллель өсін жүргізіп, осы өстерге қималардағы $Q(z)$ пен $M(z)$-тің табылған мәндерін белгілі бір масштабпен

перпендикуляр бағытта өлшеп саламыз. Табылған нүктелерді қосып, көлденең күш пен моментінің эпюраларын құрамыз (8.4-сурет).

Тікелей қималар әдісі мен q, Q және M арасындағы дифференциалдық тәуелділіктен туындайтын көлденең күштер мен июші моменттердің эпюраларын салу ережесін тиянақты білу қажет:

1) бөлікте таралған күш болмаса, көлденең күш тұрақты, ал июші момент сызықтық заңдылықпен өзгереді;

2) бөлікте бірдей таралған күш болса, көлденең күш сызықты заңдылықпен, ал июші момент квадраттық парабола заңдылығымен өзгереді. Бұл жағдайда парабола таралған күшке дөнес жағымен бағытталады.

3) бөлікте сызықтық заңдылықпен өзгеретін таралған күш болса, күш эпюрасы — үшбұрыш, көлденең күш квадраттық парабола заңдылығымен, ал июші момент кубтық парабола заңдылығымен өзгереді;

4) көлденең күш нөлге тең болатын қимада июші момент экстремаль мәнге максимал ие болады;

5) қимаға элемент өсіне перпендикуляр сыртқы қадалған күш түсірілсе, Q эпюрасы күш шамасына сәйкес өседі, ал M эпюрасы сынуды тудырады (эпюралардың аралас учаскелерінде баяу жанасу болмайды);

6) қимаға сыртқы қадалған момент түсірілсе, M эпюрасы сол момент шамасына өседі. Q эпюрасында бұл байқалмайды;

7) арқалықтардың үштарындағы қималарда көлденең күш пен июші момент қимаға түсірілген сыртқы қадалған (активті не реактивті) күшке және қадалған жүп моментке сәйкес келеді;

8) таралған күш басталатын не аяқталатын қималарда (қимаға қадалған күш түсірілмеуі керек), июші моменттердің эпюрасында сыну болмайды (бұл нүктеде парабола мен түзудің ортақ жанамасы болады);

9) Көлденең күш нөлге тең болатын қимада июші моментінің жанамасы эпюраның өсіне параллель;

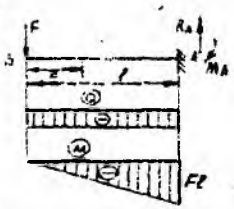
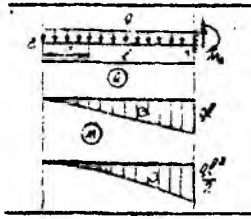
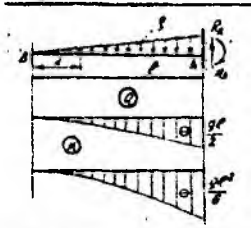
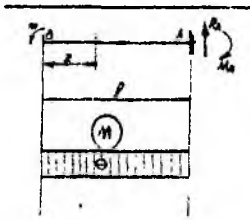
10) $Q > 0$ болған бөлікте момент артады, ал $Q < 0$ кемиді.

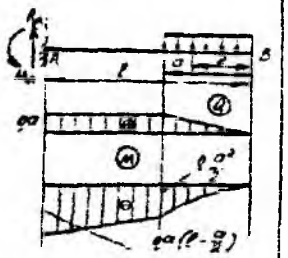
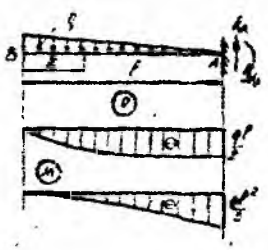
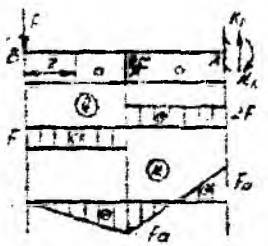
11) Q эпюрасы M эпюрасының туындысы болғандықтан, Q ординаталары M эпюрасының жанама түзуі мен абсцисса өсінің арасындағы тангенсіне пропорционал;

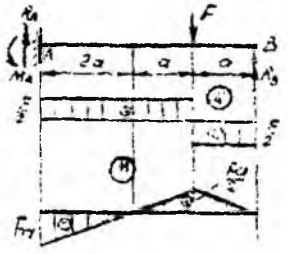
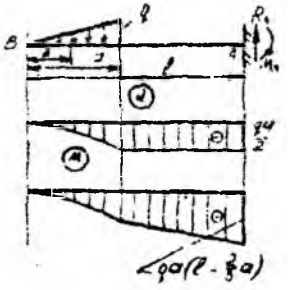
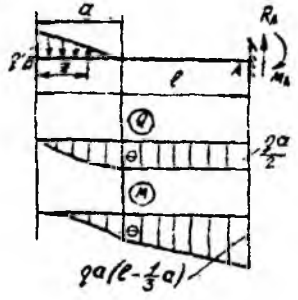
12) аралық топсаларда сыртқы момент әсер етпесе, июші моменті нөлге тең болады.

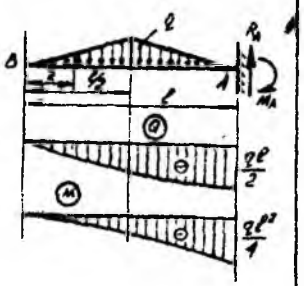
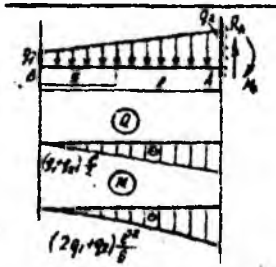
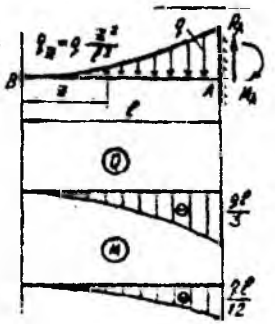
Үштары әртүрлі бекітілген арқалықтар үшін көлденең күш және момент эпюралары 8.1-кестеде келтірілген.

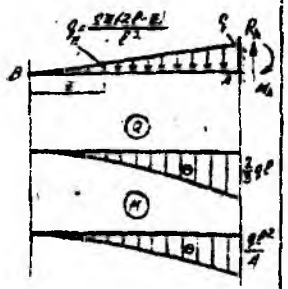
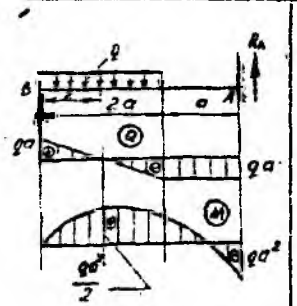
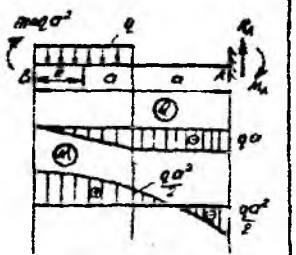
8.1 - к е с т е. СТАТИКАЛЫҚ АНЫҚТАЛҒАН АРКАЛЫҚТАРДАҒЫ ТІРЕК РЕАКЦИЯЛАР, КӨЛДЕНЕҢ КҮШТЕР, ИЮШІ МОМЕНТТЕР

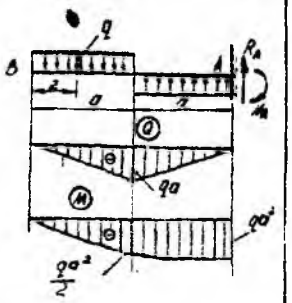
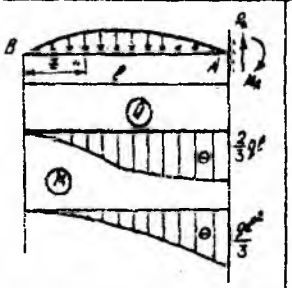
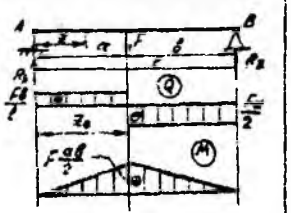
Аркалықтың жүктеме нобайы Q және M эпюралары	Тірек реакциялары	Q көлденең күш	M июші момент	Қауіпті кимасының z_0 координатасы мен M_{max} максималь моменті
1	2	3	4	5
	$R_a=F$ $M_a=Fl$	$0\le z\le l$ $Q=-F$	$0\le z\le l$ $M=-Fz$	$z_0=l$ $M_{max}=-Fl$
	$R_a=ql$ $M_a=\frac{ql^2}{2}$	$0\le z\le l$ $Q=-qz$	$0\le z\le l$ $M=-\frac{qz^2}{2}$	$z_0=l$ $M_{max}=-\frac{ql^2}{2}$
	$R_a=\frac{ql}{2}$ $M_a=\frac{ql^2}{6}$	$0\le z\le l$ $Q=-\frac{qz^2}{2l}$	$0\le z\le l$ $M=-\frac{qz^3}{6l}$	$z_0=l$ $M_{max}=-\frac{ql^2}{6}$
	$R_a=0$ $M_a=m$	$0\le z\le l$ $Q=0$	$0\le z\le l$ $M=-m$	—

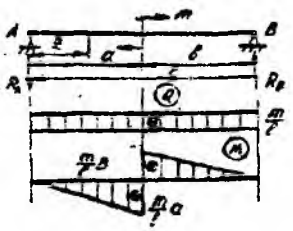
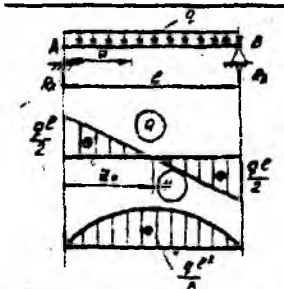
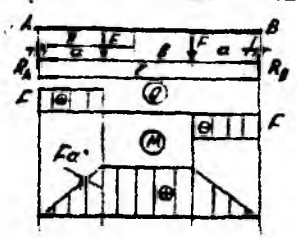
1	2	3	4	5
	$R_a=qa$ $M_a=qa\left(l-\frac{a}{2}\right)$	$0\le z\le a$ $Q=-qz$ $a\le z\le l$ $Q=-qa$	$0\le z\le a$ $M=-\frac{qz^2}{2}$ $a\le z\le l$ $M=-qa\left(z-\frac{a}{2}\right)$	$z_0=l$ $M_{max}=-qa\left(l-\frac{a}{2}\right)$
	$R_a=\frac{ql}{2}$ $M_a=\frac{ql^2}{3}$	$0\le z\le l$ $Q=-ql\left(\frac{z}{l}-\frac{1}{2}\frac{z^2}{l^2}\right)$	$0\le z\le l$ $M=\frac{ql^2}{2}\left(\frac{z^2}{l^2}-\frac{1}{3}\frac{z^3}{l^3}\right)$	$z_0=l$ $M_{max}=-\frac{ql^2}{3}$
	$R_a=2F$ $M_a=Fa$	$0\le z\le a$ $Q=-F$ $a\le z\le 2a$ $Q=2F$	$0\le z\le a$ $M=-Fz$ $a\le z\le 2a$ $M=-Fz+3F(z-a)$	$z_0=a$ $M=-Fa$ $z_0=2a$ $M=Fa$

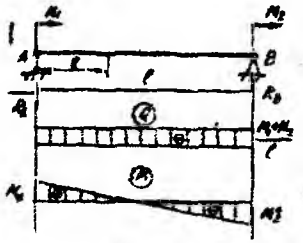
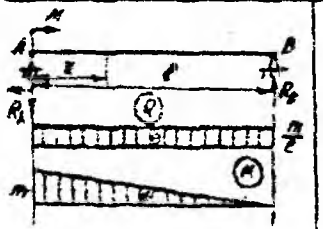
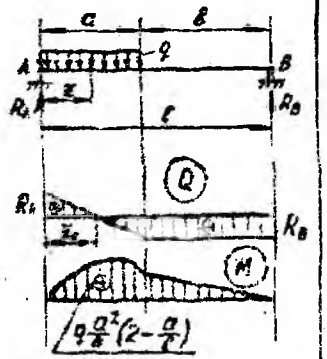
1	2	3	4	5
	$R_a=\frac{F}{2}$ $M_a=Fa$ $R_b=\frac{F}{2}$	$0\le z\le a$ $Q=-\frac{F}{2}$ $a\le z\le 4a$ $Q=\frac{F}{2}$	$0\le z\le a$ $M=Fz$ $a\le z\le 4a$ $M=\frac{F}{2}\cdot z-F(z-a)$	$z_0=4a$ $M_{max}=Fa$
	$R_a=\frac{qa}{2}$ $M_a=\frac{qa}{2}\left(l-\frac{2}{3}a\right)$	$0\le z\le a$ $Q=-\frac{qz^2}{2a}$ $a\le z\le l$ $Q=-\frac{qa}{2}$	$0\le z\le a$ $M=-\frac{qz^3}{6a}$ $a\le z\le l$ $M=-\frac{qa}{2}\left(z-\frac{2}{3}a\right)$	$z_0=l$ $M_{max}=-\frac{qa}{2}\left(l-\frac{2}{3}a\right)$
	$R_a=\frac{qa}{2}$ $M_a=\frac{qa}{2}\left(l-\frac{a}{3}\right)$	$0\le z\le a$ $Q=-\frac{qa}{2}\left(2\frac{z}{a}-\frac{z^2}{a^2}\right)$ $a\le z\le l$ $Q=-\frac{qa}{2}$	$0\le z\le a$ $M=-\frac{qa^2}{2}\left(\frac{z^2}{a^2}-\frac{1}{3}\frac{z^3}{a^3}\right)$ $a\le z\le l$ $M=-\frac{qa}{2}\left(z-\frac{a}{3}\right)$	$z_0=l$ $M_{max}=-\frac{qa}{2}\left(l-\frac{a}{3}\right)$

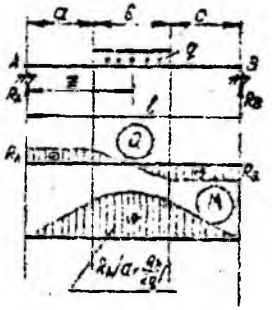
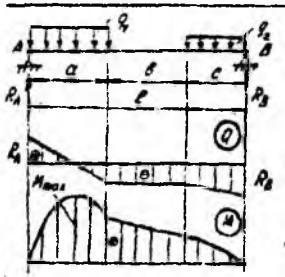
1	2	3	4	5
	$R_a=\frac{ql}{2}$ $M_a=\frac{ql^2}{4}$	$0\le z\le\frac{l}{2}$ $Q=-\frac{qz^2}{2}$ $\frac{l}{2}\le z\le l$ $Q=-ql\times$ $\times\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{z}{l}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{z}{l}-\frac{1}{2}\right)^2\right]$	$0\le z\le\frac{l}{2}$ $M=-\frac{qz^3}{3l}$ $\frac{l}{2}\le z\le l$ $M=-\frac{ql^2}{4}\left[\left(\frac{z}{l}-\frac{1}{3}\right)+\right.$ $\left.+2\left(\frac{z}{l}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{4}{3}\left(\frac{z}{l}-\frac{1}{2}\right)^3\right]$	$z_0=l$ $M_{max}=-\frac{ql^2}{4}$
	$R_a=\frac{q_1+q_2}{2}l$ $M_a=(2q_1+q_2)\frac{l^2}{6}$	$0\le z\le l$ $Q=-q_1z-\frac{q_2-q_1}{2l}z^2$	$0\le z\le l$ $M=-\frac{q_1z^2}{2}-\frac{q_2-q_1}{6l}z^3$	$z_0=l$ $M_{max}=(2q_1+q_2)\frac{l^2}{6}$
	$R_a=\frac{ql}{3}$ $M_a=\frac{ql^2}{12}$	$0\le z\le l$ $Q=-\frac{qz^3}{3l^2}$	$0\le z\le l$ $M=-\frac{qz^4}{12l^2}$	$z_0=l$ $M_{max}=-\frac{ql^2}{12}$

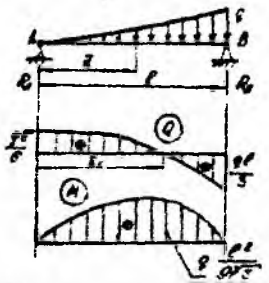
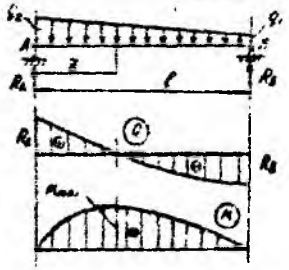
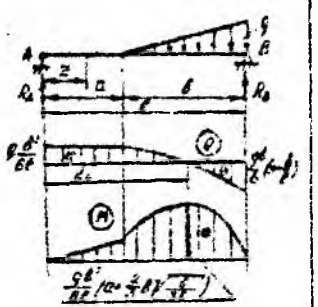
1	2	3	4	5
	$R_a=\frac{2}{3}ql$ $M_a=\frac{ql^2}{4}$	$0\le z\le l$ $Q=-ql\left(\frac{z^2}{l^2}-\frac{1}{3}\frac{z^3}{l^3}\right)$	$0\le z\le l$ $M=-\frac{ql^2}{3}\left(\frac{z^3}{l^3}-\frac{z^4}{4l^4}\right)$	$z_0=l$ $M_{max}=-\frac{ql^2}{4}$
	$R_a=qa$ $M_a=qa^2$	$0\le z\le 2a$ $Q=qa-qz$ $2a\le z\le 3a$ $Q=-qa$	$0\le z\le 2a$ $M=qaz-\frac{qz^2}{2}$ $2a\le z\le 3a$ $M=qaz-q\cdot 2a(z-a)$	$z=3a$ $M_{max}=-qa^2$
	$R_a=qa$ $M_a=\frac{qa^2}{2}$	$0\le z\le a$ $Q=-qz$ $a\le z\le 2a$ $Q=-qa$	$0\le z\le a$ $M=qa^2-\frac{qz^2}{2}$ $a\le z\le 2a$ $M=qa^2-qa\left(z-\frac{a}{2}\right)$	$z_0=0$ $M_{max}=+qa^2$

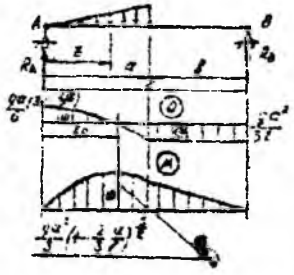
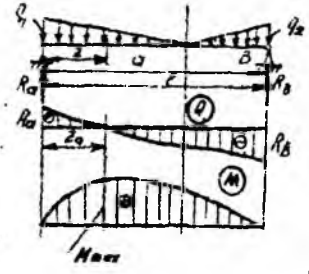
1	2	3	4	5
	$R_a=0$	$0\le z\le a$	$0\le z\le a$	$z_0=2a$
		$Q=-qz$	$M=-q\frac{z^2}{2}$	
	$M_a=qa^2$	$a\le z\le 2a$	$a\le z\le 2a$	$M_{max}=-qa^2$
		$Q=-qa+q(z-a)$	$M=-qa\left(z-\frac{a}{2}\right)+q\left(\frac{z-a}{2}\right)^2$	
	$R_a=\frac{2}{3}ql$	$0\le z\le l$	$0\le z\le l$	$z_0=l$
	$M_a=\frac{ql^2}{3}$	$Q=-2ql\left(\frac{z^2}{l^2}-\frac{2}{3}\frac{z^3}{l^3}\right)$	$M=-\frac{ql^2}{3}\cdot\left(2\frac{z^3}{l^3}-\frac{z^4}{l^4}\right)$	$M_{max}=-\frac{ql^2}{3}$
	$R_a=F\frac{b}{l}$	$0\le z\le a$	$0\le z\le a$	$z_0=a$
		$Q=F\frac{b}{l}$	$M=F\frac{bz}{l}$	
	$R_b=F\frac{a}{l}$	$a\le z\le l$	$a\le z\le l$	$M_{max}=F\frac{ab}{l}$
		$Q=-F\frac{a}{l}$	$M=F\frac{a}{l}(l-z)$	

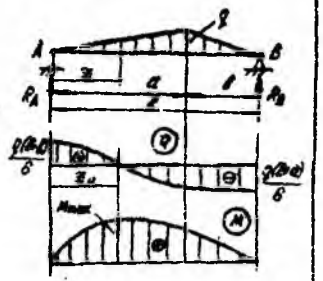
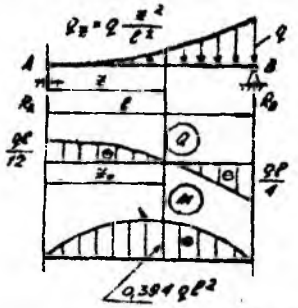
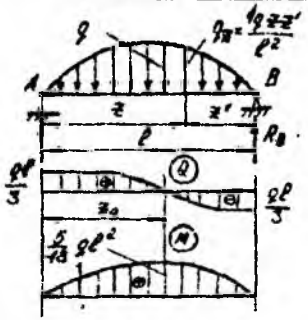
1	2	3	4	5
	$R_a=\frac{m}{l}$ $R_b=\frac{m}{l}$	$0\le z\le l$ $Q=-\frac{m}{l}$	$0\le z\le l$ $M=-\frac{m}{l}z$ $a\le z\le l$ $M=\frac{m}{l}(l-z)$	I $a<\frac{l}{2}$ $z_0=a$ $M_{max}=m\frac{l-a}{l}$ II $a>\frac{l}{2}$ $z_0=a$ $M_{max}=-m\frac{a}{l}$
	$R_a=\frac{ql}{2}$ $R_b=\frac{ql}{2}$	$0\le z\le l$ $Q=ql\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{l}\right)$	$0\le z\le l$ $M=\frac{ql^2}{2}\left(\frac{z}{l}-\frac{z^2}{l^2}\right)$	$z_0=\frac{l}{2}$ $M_{max}=\frac{ql^2}{8}$
	$R_a=F$ $R_b=F$	$0\le z\le a$ $Q=F$ $a\le z\le l-a$ $Q=0$ $l-a\le z\le l$ $Q=-F$	$0\le z\le a$ $M=Fz$ $a\le z\le l-a$ $M=Fa$ $l-a\le z\le l$ $M=F(l-z)$	$a\le z_0\le l-a$ $M_{max}=Fa$

1	2	3	4	5
	$R_a=\frac{M_1+M_2}{l}$ $R_b=\frac{M_1+M_2}{l}$	$0\le z\le l$ $Q=-\frac{M_1+M_2}{l}$	$0\le z\le l$ $M=M_1-\frac{M_1+M_2}{l}z$	*I*) $M_1>M_2$ $z_0=0;\ M_{max}=-M_1$ *II*) $M_1<M_2$ $z_0=l;\ M_{max}=-M_2$
	$R_a=\frac{m}{l}$ $R_b=\frac{m}{l}$	$0\le z\le l$ $Q=-\frac{m}{l}$	$0\le z\le l$ $M=\frac{m}{l}(l-z)$	$z_0=0$ $M_{max}=m$
	$R_a=\frac{qa}{l}\left(\frac{a}{2}+b\right)$ $R_b=\frac{qa^2}{2l}$	$0\le z\le a$ $Q=qa\left(\frac{a}{2l}+\frac{b}{l}-\frac{z}{a}\right)$ $a\le z\le l$ $Q=\frac{qa^2}{2l}$	$0\le z\le a$ $M=qa^2\left[\left(\frac{a}{2l}+\frac{b}{l}\right)\times\right.$ $\left.\times\frac{z}{a}-\frac{z^2}{2a^2}\right]$ $a\le z\le l$ $M=\frac{qa^2}{2}\left(1-\frac{z}{l}\right)$	$z_0=\frac{a}{2}\left(2-\frac{a}{l}\right)=$ $=\frac{a}{l}\left(\frac{a}{2}+b\right)$ $M_{max}=\frac{qa^2}{8}\left(2-\frac{a}{l}\right)^2$

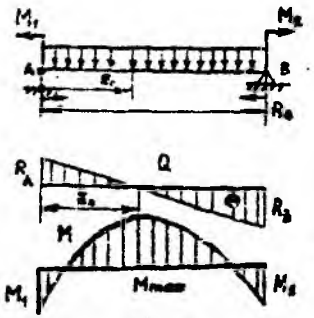
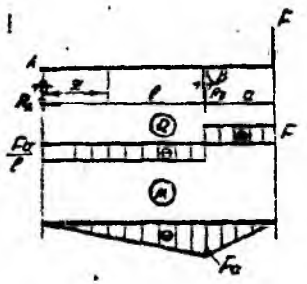
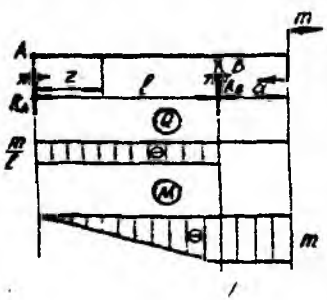
1	2	3	4	5
	$R_a=\frac{qb(2c+b)}{2l}$ $R_b=\frac{qb(2a+b)}{2l}$	$0\le z\le a$ $Q=\frac{qb(2c+b)}{2l}$ $a\le z\le a+b$ $Q=qb\left(\frac{2c+b}{2l}-\frac{z-a}{b}\right)$ $a+b\le z\le l$ $Q=-\frac{qb(2a+b)}{2l}$	$0\le z\le a$ $M=qb\frac{2c+b}{2l}z$ $a\le z\le a+b$ $M=\frac{qb^2}{2}\left[\frac{2c+b}{l}\frac{z}{b}-\frac{(z-a)^2}{b^2}\right]$ $a+b\le z\le l$ $M=qb\frac{2a+b}{2l}(l-z)$	$z_0=a+\frac{b(2c+b)}{2l}$ $M_{max}=qb\frac{2c+b}{2l}\times$ $\times\left\{a+\frac{b(2c+b)}{4l}\right\}$
	$R_a=q_1a-F$ $R_b=q_2c+F$ мұнда $F=\frac{q_1a^2-q_2c^2}{l}$	$0\le z\le a$ $Q=q_1(a-z)-R$ $a\le z\le a+b$ $Q=-F$ $a+b\le z\le l$ $Q=q_2(a+b-z)-F$	$0\le z\le a$ $M=q_1a^2\left(\frac{z}{a}-\frac{F}{q_1a}\times\right.$ $\left.\times\frac{z}{a}-\frac{z^2}{2a^2}\right)$ $a\le z\le a+b$ $M=q_1\frac{a^2}{2}-Fz$ $a+b\le z\le l$ $M=q_2c(l-z)\left(1+\frac{F}{q_2c}-\frac{l-z}{2c}\right)$	*I*) $F>0$; $z_0=a-\frac{F}{q_1}$ $M_{max}=\frac{q_1}{2}\left(a-\frac{F}{q_1}\right)^2$ *II*) $F<0$; $z_0=c+\frac{F}{q_2}$ $M_{max}=\frac{q_2}{2}\left(c+\frac{F}{q_2}\right)^2$

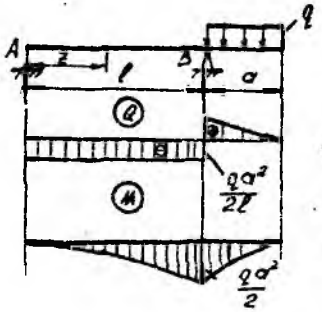
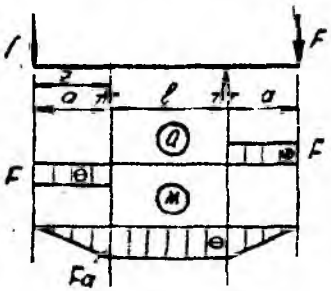
1	2	3	4	5
	$R_a=\frac{ql}{6}$ $R_b=\frac{ql}{3}$	$0\le z\le l$ $Q=\frac{ql}{6}\left(1-3\frac{z^2}{l^2}\right)$	$0\le z\le l$ $M=\frac{ql^2}{6}\left(\frac{z}{l}-\frac{z^3}{l^3}\right)$	$z_0=\frac{l}{\sqrt{3}}=0{,}577l$ $M_{max}=\frac{ql^2}{9\sqrt{3}}=0{,}0642ql^2$
	$R_a=\frac{2q_1+q_2}{6}l$ $R_b=\frac{q_1+2q_2}{6}l$	$0\le z\le l$ $Q=R_a-q_1z+\frac{q_1-q_2}{2l}z^2$	$0\le z\le l$ $M=R_az-\frac{q_1z^2}{6}+\frac{q_1-q_2}{6l}z^3$	$z_0=\frac{1-F}{1-K}l$ $M_{max}=\frac{q_1l^2}{6}\cdot\frac{2F^2-k(1+k)}{(1-k)^2}$, мұнда $k=q_2/q_1$ $F=\sqrt{\frac{1}{3}\left(1+k+k^2\right)}$
	$R_a=\frac{qb^2}{6l}$ $R_b=\frac{qb}{6}\left(3-\frac{b}{l}\right)$	$0\le z\le a$ $Q=\frac{qb^2}{6l}$ $a\le z\le l$ $Q=\frac{qb}{6}\left[\frac{b}{l}-3\frac{(z-a)^2}{b^2}\right]$	$0\le z\le a$ $M=\frac{qb^2}{6l}z$ $a\le z\le l$ $M=\frac{qb^2}{6l}\left(\frac{z}{l}-\frac{(z-a)^3}{b^3}\right)$	$z_0=a+b\sqrt{\frac{b}{3l}}$ $M_{max}=\frac{qb^2}{6l}\left(a+\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3l}}\right)$

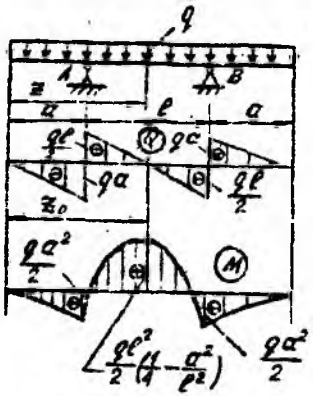
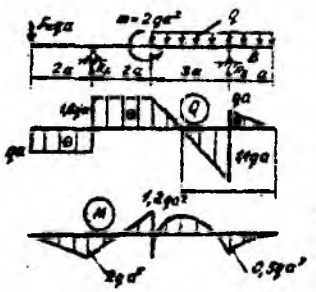
1	2	3	4	5
	$R_a=\frac{qa}{6}\left(3-2\frac{a}{l}\right)$ $R_b=\frac{qa^2}{3l}$	$0\le z\le a$ $Q=\frac{qa}{6}\left(3-2\frac{a}{l}-3\frac{z^2}{l^2}\right)$ $a\le z\le l$ $Q=-\frac{qa^2}{3l}$	$0\le z\le a$ $M=\frac{qa^2}{6}\left[\left(3-2\frac{a}{l}\right)\frac{z}{a}-\frac{z^3}{a^3}\right]$ $a\le z\le l$ $M=\frac{qa^2}{3}\left(1-\frac{z}{l}\right)$	$z_0=a\sqrt{1-\frac{2a}{3l}}$ $M_{max}=\frac{qa^2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\frac{a}{l}\right)^{3/2}$
	$R_a=\frac{q_1a}{2}-F$ $R_b=\frac{q_2b}{2}+F$ $F=\frac{q_1a^2-q_2b^2}{6l}$	$0\le z\le a$ $Q=R_a-\frac{q_1z}{2}\left(2-\frac{z}{a}\right)$ $a\le z\le l$ $Q=-R_b+q_2\frac{(l-z)}{z}\times$ $\times\left(2-\frac{l-z}{b}\right)$	$0\le z\le a$ $M=R_a\cdot z-\frac{q_1z^2}{6}\times\left(3-\frac{z}{a}\right)$ $a\le z\le l$ $M=R_b(l-z)-$ $-\frac{q_2(l-z)^2}{6}\left(3-\frac{l-z}{b}\right)$	*I)* $F>0$; $z_0=a-\sqrt{\frac{2Fa}{q_1}}$ $M_{max}=M^*+\frac{2}{3}F\sqrt{\frac{2Fb}{q_1}}$ *II)* $F<0$; $z_0=a+\sqrt{-\frac{2Fa}{q_2}}$ $M_{max}=M^*-\frac{2}{3}F\sqrt{\frac{-2Fl}{q_2}}$ $M^*=\frac{q_1a^2}{6}-Fa=\frac{q_2b^2}{6}+Fb$

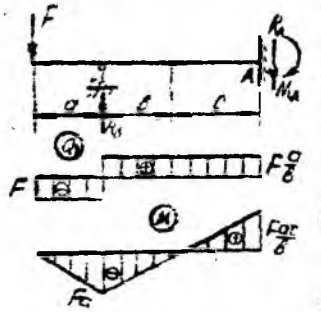
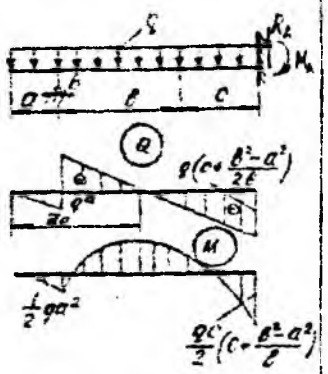
1	2	3	4	5
	$R_a=\frac{q(l+b)}{6}$ $R_b=\frac{q(l+a)}{6}$	$0\le z\le a$ $Q=\frac{qa}{6}\left(\frac{l+b}{a}-3\frac{z^2}{a^2}\right)$ $a\le z\le l$ $Q=-\frac{qb}{6}\left[\frac{l+a}{b}-3\frac{(l-z)^2}{c^2}\right]$	$0\le z\le a$ $M=\frac{qaz}{6}\left(\frac{l+b}{a}-\frac{z^2}{a^2}\right)$ $a\le z\le l$ $M=-\frac{qb(l-z)}{6}\left[\frac{l+a}{b}-\frac{(l-z)^2}{b^2}\right]$	*I*) $a>b$; $z_0=\sqrt{\frac{a(l-b)}{3}}$ $M_{max}=\frac{q(l+b)}{9}\times\sqrt{\frac{a(l-b)}{3}}$ *II*) $a<b$; $z_0=l-\sqrt{\frac{1}{3}c(l-a)}$ $M_{max}=\frac{q(l+a)}{9}\times\sqrt{\frac{1}{3}b(l-a)}$
	$R_a=\frac{ql}{12}$ $R_b=\frac{ql}{4}$	$0\le z\le l$ $Q=\frac{ql}{12}\left(1-4\frac{z^3}{l^3}\right)$	$0\le z\le l$ $M=\frac{ql^2}{12}\left(\frac{z}{l}-\frac{z^4}{l^4}\right)$	$z_0=0{,}63l$ $M_{max}=0{,}0394ql^2$
	$R_a=\frac{ql}{3}$ $R_b=\frac{ql}{3}$	$0\le z\le l$ $Q=\frac{ql}{3}\left(1-6\frac{z^2}{l^2}+4\frac{z^3}{l^3}\right)$	$0\le z\le l$ $M=\frac{ql^2}{3}\left(\frac{z}{l}-2\frac{z^3}{l^3}+\frac{z^4}{l^4}\right)$	$z_0=\frac{l}{2}$ $M_{max}=\frac{5}{48}ql^2$

8.1-кестенің жалғасы

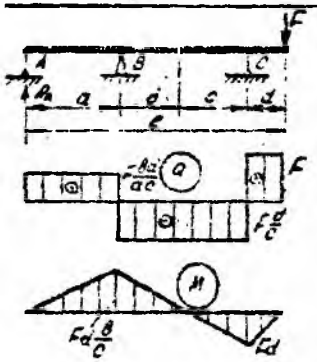
1	2	3	4	5
	$R_a=\frac{ql}{2}-\frac{\Delta M}{l}$ $R_b=\frac{ql}{2}+\frac{\Delta M}{l}$ $\Delta M=M_2-M_1$	$0\le z\le l$ $Q=\frac{ql}{2}\left(1-2\frac{z}{l}\right)-\frac{\Delta M}{l}$	$0\le z\le l$ $M=\frac{ql^2}{2}\left(\frac{z}{l}-\frac{z^2}{l^2}\right)-$ $-\Delta M\frac{z}{l}-M_1$	$z_0=\frac{l}{2}-\frac{\Delta M}{ql}$ $M_{max}=\frac{ql^2}{8}+\frac{(\Delta M)^2}{2ql^2}-$ $\frac{M_2+M_1}{2}$
	$R_a=F\frac{a}{l}$ $R_b=F\left(1+\frac{a}{l}\right)$	$0\le z\le l$ $Q=-F\frac{a}{l}$ $l\le z\le l+a$ $Q=F$	$0\le z\le l$ $M=-F\frac{a}{l}z$ $l\le z\le l+a$ $M=-F(l+a-z)$	$z_0=l$ $M_{max}=-Fa$
	$R_a=\frac{m}{l}$ $R_b=\frac{m}{l}$	$0\le z\le l$ $Q=-\frac{m}{l}$ $l\le z\le l+a$ $Q=0$	$0\le z\le l$ $M=-m\frac{z}{l}$ $l\le z\le l+a$ $M=-m$	$l\le z_0\le l+a$ $M_{max}=-m$

1	2	3	4	5
	$R_a=\frac{qa^2}{2l}$ $R_b=\frac{qa^2}{2l}\left(1+2\frac{l}{a}\right)$	$0\le z\le l$ $Q=-\frac{qa^2}{2l}$ $l\le z\le l+a$ $Q=q(l+a-z)$	$0\le z\le l$ $M=-\frac{qa^2}{2}\frac{z}{l}$ $l\le z\le l+a$ $M=-\frac{q(l+a-z)^2}{2}$	$z_0=l$ $M_{max}=-\frac{qa^2}{2}$
	$R_a=F$ $R_b=F$	$0\le z\le a$ $Q=-F$ $a\le z\le a+l$ $Q=0$ $a+l\le z\le l+2a$ $Q=F$	$0\le z\le a$ $M=-Fz$ $a\le z\le a+l$ $M=-Fa$ $a+l\le z\le l+2a$ $M=-F(l+2a-z)$	$a\le z_0\le l+a$ $M_{max}=-Fa$
	$R_a=R_b=q\left(\frac{l}{2}+a\right)$	$0\le z\le a$ $Q=-qz$ $a\le z\le a+l$	$0\le z\le a$ $M=\frac{qz^2}{2}$ $a\le z\le a+l$	*1. $l>2\sqrt{2}a$; $z_0=a+\frac{l}{2}$ $M_{max}=\frac{ql^2}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{a^2}{l^2}\right)$

1	2	3	4	5
		$Q=\frac{ql}{2}\left(1+2\frac{a}{l}-2\frac{z}{l}\right)$ $a+l\le z\le l+2a$ $Q=q(l+2a-z)$	$M=\frac{ql^2}{2}\left[\left(1+2\frac{a}{l}\right)\times\right.$ $\left.\times\left(\frac{z}{l}-\frac{a}{l}\right)-\frac{z^2}{l^2}\right]$ $a+l\le z\le l+2a$ $M=-\frac{1}{2}q(l+2a-z)^2$	*II.* $l<2\sqrt{2}a$; $z_0=a$, $z_0=a+l$ $M_{max}=-\frac{qa^2}{2}$
	$R_a=2,6qa$ $R_b=2,4qa$	$0\le z\le 2a$ $Q=-qa$ $2a\le z\le 4a$ $Q=1,6qa$ $4a\le z\le 7a$ $Q=-1,4qa$ $0\le z\le a$ $Q=qz$	$0\le z\le 2a$ $M=-Fz$ $2a\le z\le 4a$ $M=-Fz+R_a(z-2a)$ $4a\le z\le 7a$ $M=-Fz+R_a(z-2a)-$ $-m-q\frac{(z-4a)^2}{2}$ $a\le z\le a$ $M=-\frac{qz^2}{2}$	$z_0=2a$ $M_{max}=2qa^2$

1	2	3	4	5
	$R_a=F\left(1+\frac{a}{b}\right)$	$0\le z\le a$	$0\le z\le a$	I. $c>b$; $z_0=l$
		$Q=-F$	$M=-Fz$	$M_{max}=F\frac{ac}{b}$
	$R_b=F\frac{a}{b}$	$a\le z\le l$	$a\le z\le l$	II. $c<b$; $z_0=a$
	$M_b=F\frac{ac}{b}$	$Q=F\frac{a}{b}$	$M=-Fa\left(1-\frac{z-a}{b}\right)$	$M_{max}=-Fa$
	$R_b=q\frac{(l-c)^2}{2b}$	$0\le z\le a$	$0\le z\le a$	$z_0=q\frac{(l-c)^2}{2b}$
		$Q=-qz$	$M=-\frac{1}{2}qz^2$	$M_{max}=-\frac{q}{2}\left[z_0^2-\right.$
				$\left.-(l-c)^2\frac{z_0-a}{b}\right]$
	$R_a=q\left[l-\frac{(l-c)^2}{2b}\right]$	$a\le z\le l$	$a\le z\le l$	
	$M_a=\frac{q}{2}\left[c^2+\left(b^2-a^2\right)\frac{c}{b}\right]$	$Q=q\left[\frac{(l-c)^2}{2b}-z\right]$	$M=-\frac{1}{2}q\left[z^2-(l-c)^2\frac{z-a}{b}\right]$	

8.1-кестенің жалғасы

1	2	3	4	5
	$R_a=F\frac{bd}{ac}$	$0\le z\le a$	$0\le z\le a$	*I*. $c>b$; $z_0=l-d$
			$M=F\frac{bd}{ac}z$	$M_{max}=-Fd$
		$Q=F\frac{bd}{ac}$		
	$R_b=F\frac{d}{c}\left(1+\frac{b}{a}\right)$	$a\le z\le a+b+c$	$a\le z\le l-d$	*II*. $b>c$; $z_0=a$
		$Q=-F\frac{d}{c}$		$M_{max}=Fd\frac{b}{c}$
	$R_c=F\left(1+\frac{d}{c}\right)$	$l-d\le z\le l$	$l-d\le z\le l$	
		$Q=F$	$M=-F(l-z)$	

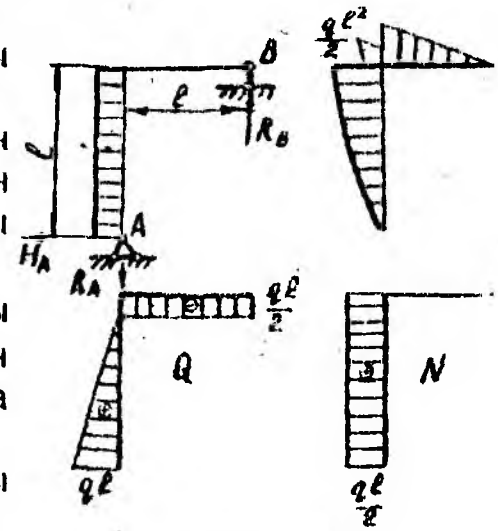
Статикалық анықталған жақтаулар үшін эпюраларды құру. Бірнеше сырықтардың өзара қатаң біріктірілген жүйесін *жақтау* деп атайды. Жақтаудың деформациясы кезінде бұл сырықтар иілгенімен, олардың түйіндегі бұрыштары өз шамасын өзгертпейді. Жақтаудың өсі — сынық сызық, оның әрбір бөлігін арқалық ретінде қарастыруға болады. Жақтаудың тік сырығы *тіреуіш*, көлденең сырығы — *ригель* деп аталады. Жақтаудың арқалықтан айырмашылығы, оның көлденең қималарында иіуші моменттер мен көлденең қималарынан басқа, бойлық күштер пайда болуы мүмкін. Сондықтан, жақтау үшін M, Q және N эпюраларын құру керек. Бойлық және көлденең күштер мен иіуші моменттің таңбаларын, жоғарыда қабылданған ережелерге сүйеніп аламыз:

1) бойлық созушы күш оң, ал сығушы күш теріс таңбалы деп саналады;

2) егер қиманың сол жағына түсірілген сыртқы күштердің қосындысы сағат тілімен бағыттас болса, көлденең күш оң таңбалы деп саналады;

3) егер M иіуші моментті оң таңбалы деп санасақ, онда оның оң ординатасын өстен жоғары қарай, яғни сығылған талшыққа саламыз.

Эпюраларды құру алдында реакцияларды анықтау керек. Жақтау үшін N, Q және M эпюраларын құру мысалы 8.5 суретте көрсетілген.



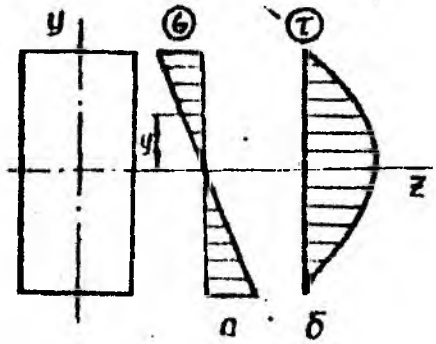
8.5 - сурет

§ 2. ИІЛУ КЕЗІНДЕГІ ТІК КЕРНЕУЛЕР

Иіуші моменттің әсер ететін жазықтығы көлденең қималардың симметрия жазықтығымен дәл келеді. Арқалықтардың материалы Гук заңына бағынады, созылуға және сығылуға серпімділік модульдері бірдей деп алынады. Бейтарап өсі қиманың ауырлық центрінен өтеді, сығылған талшықтарды созылған бөлігінен бөледі. Арқалықтың көлденең қимасындағы тік кернеулер бейтарап өстен қашықтыққа пропорционал өседі.

Қиманың кез келген нүктесіндегі тік кернеулер төменгі формуламен (8.6а-сурет) анықталады:

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z}.$$



8.6 - сурет

мұндағы σ — қиманың кез келген нүктесіндегі тік кернеу;

M_z — зерттеу қимасындағы июші моменті;

y — зерттелетін нүктеден бейтарап өске дейінгі қашықтық;

I_z — көлденең қиманың инерция моменті.

Бұл формуладан тік кернеу y шамасымен сызықты байланыста екендігі көрінеді. Қиманың биіктігі бойынша кернеулердің өзгерісін көрсететін график кернеу эпюрасы деп аталады. Ең үлкен тік кернеу y шамасының ең үлкен мәнінде, яғни шекті талшықта болады.

Егерде бейтарап сызық қиманың симметрия өсі болса, онда

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z};$$

мұндағы W_z — геометриялық сипаттамасы, қиманың кедергі моменті деп аталады. Қиманың инерция моменттері және кедергі моменттер туралы толық II таруда қаралған.

Егерде бейтарап өсі қиманың биіктігін қақ бөлмесе, онда шет талшықтардың созу және сығылу кезіндегі кернеулері бөлек анықталады:

$$\max \sigma_1 = \frac{M_z}{I_z} y_{1\max}; \max \sigma_2 = \frac{M_z}{I_z} y_{2\max}.$$

§ 3. ИІЛУ КЕЗІНДЕГІ ЖАНАМА КЕРНЕУЛЕР

Жанама кернеулер Д. И. Журавский формуласы бойынша (8.6б-сурет) есептеп шығарылады:

$$\tau = \frac{Q_y S_z^{тіл}}{I_z b(y)};$$

мұндағы τ — қиманың кез келген нүктесіндегі жанама кернеуі;

Q_y — зерттеу қимасындағы арқалықтың көлденең күші;

$S_z^{тіл}$ — z бейтарап өсіне қатысты тілінген бөліктің статикалық моменті;

I_z — z бейтарап есіне қатысты қиманың инерция моменті;

$b(y)$ — жанама кернеулер анықталатын нүктедегі көлденең қиманың ені.

Қиманың биіктігі бойынша жанама кернеулердің таралуы қиманың формасына (қалпына) байланысты.

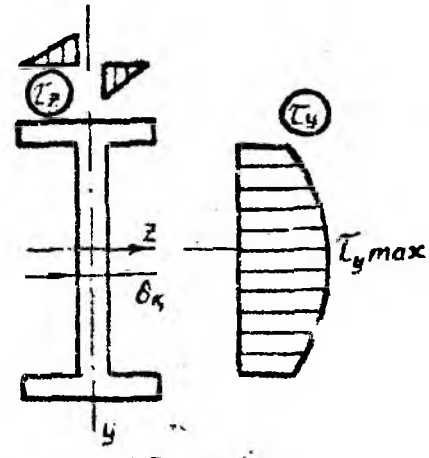
Тікбұрышты қима. Жанама кернеулер квадрат парабола заңы бойынша өзгереді. τ эпюрасы 8.6б-суретте көрсетілген. Ең үлкен жанама кернеулер $y = 0$ болғанда

$$\tau_{max} = \frac{3Q_y}{2b \cdot h}. \qquad (а)$$

Қос таврлы қима. Көлденең күшті негізінде қос таврдың қабырғасы қабылдайды. $y = 0$ болғанда жанама кернеу ең үлкен мәнге ие болады:

$$\tau_{max;y} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y S_{z\,max}}{I_z \delta_к};$$

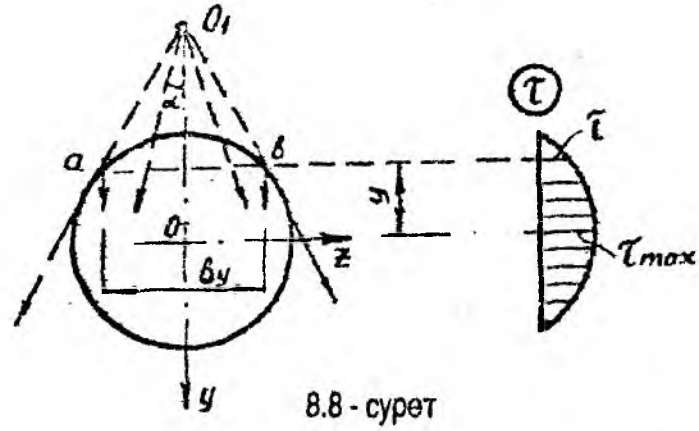
мұндағы $S_{z\,max}$ — жарты қиманың статикалық моменті. Табанның горизонталь аландарында жанама кернеулердің шамасымен таралуы туралы заң әлі анықталмаған. Ал, бұл қималарда τ_z жанама кернеулер аз болғандықтан іс жүзінде арқалықтың беріктігіне әсері болмайды (8.7-сурет).



8.7 - сурет

Шеңберлі қима. y деңгейіндегі жанама кернеулер O_1 қиылысу нүктеден шығып сәулелер бойынша бағытталады деп аламыз. Кез келген C нүктеде y деңгейінде мына формула бойынша анықталады (8.8-сурет):

$$\tau = \frac{Q_y S_z^{тіл}}{I_z b_y \cos\alpha}.$$

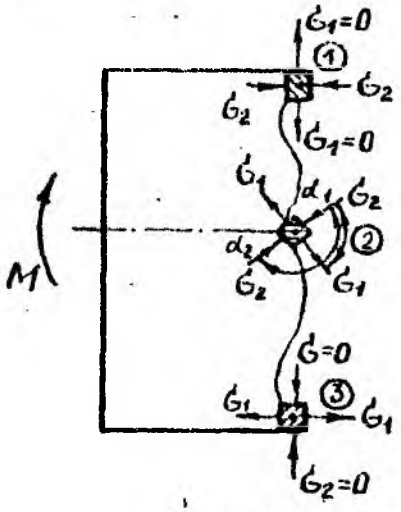


8.8 - сурет

Жанама кернеулердің тік проекциялары қиманың ені бойынша тең таралады деп үйғарамыз. Бұл құраушылар (а) формула бойынша анықталады. Бірақта ең үлкен кернеулер $y = 0$ болғанда $\tau_{max} = \frac{4Q_y}{3A}$.

§ 4. ИІЛУ КЕЗІНДЕГІ БАС КЕРНЕУЛЕР

Жанама кернеулер нөлге тең болатын өзара перпендикуляр алаңдар *бас алаңдар* деп аталады. Онда әсер ететін тік кернеулер *бас кернеулер* деп аталады. Олардың біреуі максимал, ал екіншісі минимал болады (8.9-сурет):



8.9 - сурет

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2};$$

$$\sigma_2 = \sigma_{min} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

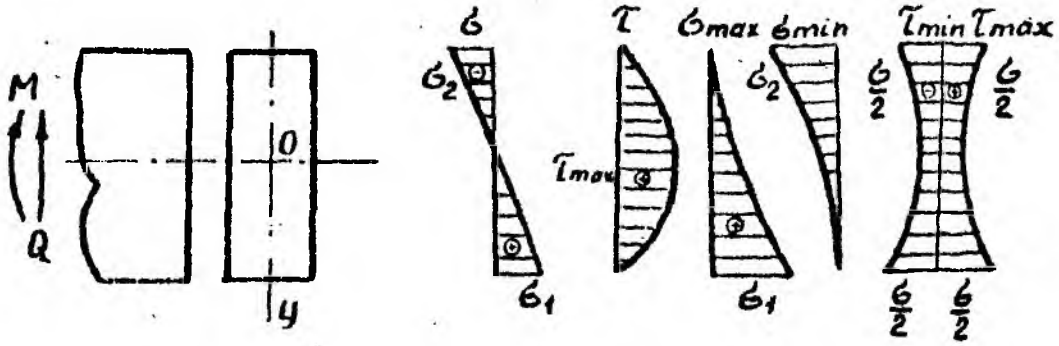
Бас кернеулердің бағыты α_1 және α_2 бұрыштарымен анықталады:

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 = \frac{\tau}{\sigma_{max} - \sigma}; \quad \operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{\tau}{\sigma_{min} - \sigma}.$$

α_1 бұрыш σ_{max} бағытты анықтайды, ал α_2 бұрыш — σ_{min}. Ең үлкен жанама кернеулер:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

8.10 суретте көлденең қимасы тік бұрышты арқалықтың тік, жанама және басқа



8.10 - сурет

кернеулері эпюраларының жалпы түрі көрсетілген. Барлық эпюралардың бейтарап өстегі ординаталарының сан мәні (тік кернеулер эпюрасынан басқасы) бірдей болады.

§ 5. ИІЛУ КЕЗІНДЕГІ ҚИМАЛАРДЫ ТАҢДАУ ЖӘНЕ БЕРІКТІГІН ТЕКСЕРУ

Мүмкін кернеулер өдісі бойынша иілген арқалықтарды есептеу үшін қауіпті қиманы іздестіреді. *Қауіпті қима* деп июші моменттердің (абсолют шамасы) ең үлкені M_{max} өсер етіп түрған қиманы айтады. Қауіпті қимадағы қауіпті кернеу келесі формуламен анықталады:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_z} y_{max}.$$

Созу мен сығылуға бірдей қарсыласатын созылымды материалдар үшін беріктік шарты былай есептеп шығарылады:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \le [\sigma]. \qquad (б)$$

Созу мен сығуға қарсыласу қабілеті әртүрлі материалдардың беріктігі ең үлкен созушы және сығушы кернеулер бойынша есептеледі:

Созушы кернеу бойынша беріктік шарты

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \le [\sigma_{соз}].$$

Сығушы кернеу бойынша беріктік шарты

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \le [\sigma_{сыг}].$$

Керекті кедергі момент бойынша көлденең қималардың өлшемдері тағайындалады:

$$W_z = \frac{M_{max}}{[\sigma]}.$$

Тікбұрыш қима үшін

$$h = \sqrt[3]{\frac{6M_{max}}{c[\sigma]}} \approx 1,82\sqrt[3]{\frac{M_{max}}{c[\sigma]}}; \qquad c = \frac{b}{h}.$$

Шеңбер үшін

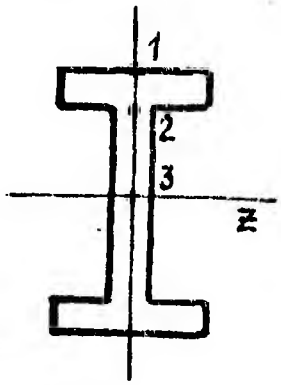
$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{max}}{\pi[\sigma]}} \approx 2{,}17\sqrt[3]{\frac{M_{max}}{[\sigma]}}.$$

Сақина үшін

$$D = \sqrt[3]{\frac{32M_{max}}{\pi[\sigma](1-\alpha^4)}} \approx 2{,}17\sqrt[3]{\frac{M_{max}}{[\sigma](1-\alpha^4)}}; \qquad \alpha = \frac{d}{D}.$$

Кейбір жағдайда, мысалы қос таврлы арқалық үшін оның көлденең қимасындағы қажетті нүктелердің беріктігін тексеру қажет.

8.11 суретте көрсетілгендей, 1 нүктедегі жанама кернеулер нөлге тең болғандықтан, (б) формулаға сәйкес тексеру тік кернеу бойынша жүргізіледі. Ал, 2 нүктеде керісінше кернеулер нөлге тең, ал жанама кернеулер ең жоғары мәнге ие болатындықтан, тексеруді жанама кернеулер бойынша жүргізеді:



8.11 - сурет

$$\tau_{max} = \frac{QS_z^{тіл}}{I_z \cdot b} \le [\tau].$$

2-нүктеде тік және жанама кернеулер пайда болады, олардың шамасы да әжептәуір болады. Бұл жағдайда беріктікті тексеру бас кернеулер бойынша жүргізіледі:

$$\sigma_{max}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma];$$

$$\sigma_{max}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma].$$

§ 6. СОЗЫЛУ ЖӘНЕ СЫҒЫЛУ КЕЗІНДЕГІ СЕРПІМДІЛІК МОДУЛЬДЕРІ ӘР ТҮРЛІ АРҚАЛЫҚТАРДЫҢ ИІЛУІ

Кейбір материалдардың, мысалы, пластмассалар, бетон т. б. созылу және сығылу кезіндегі серпімділік модульдері әртүрлі болады. Серпімді деформациялар шегінде мұндай арқалықтың иілуіне жазық қималар заңын қолдануға болады. Жалпы жағдайда бейтарап сызық қиманың ауырлық центрінен өтпейді. Әртүрлі материалдардан жасалған арқалықтың қимасын келтірілген геометриялық сипаттамалар және серпімділік модульдері арқылы біртекті қимасына келтіруге болады.

Егер де A_k және E_k — қиманың келтірілген ауданы мен серпімділік модулі; ал A_i және E_i сәйкес әр түрлі материалдардан жасалған қиманың ауданы мен серпімділік модульдері болса, онда арқалықтың келтірілген көлденең қимасының ауданын мына төңдеу арқылы шешеміз:

$$A_k = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{E_i}{E};$$

Келтірілген ауданын анықтаған соң, басқа да геометриялық сипаттамаларын табуға болады.

Созылу кезіндегі серпімділік модулін E_1-деп, ал сығылудікін — E_2 деп белгілейік. Бейтарап өсінің орнын қиманың статикалық өсі арқылы теңестіріп анықтаймыз:

$$S_k = E_1 S_1 + E_2 S_2 = 0.$$

Қиманың келтірілген қатаңдығын келтірілген серпімділік модулі арқылы өрнектеуге болады:

$$(EI)_k = I\left(E_1 \frac{I_1}{I} + E_2 \frac{I_1}{I}\right) = E_k I;$$

мұндағы I — центрлік өске қатысты қиманың инерция моменті, ал

$$E_k = E_1\left(\frac{I_1}{I} + E_2 \frac{I_2}{I}\right);$$

немесе келтірілген инерция моменті арқылы көрсетейік:

$$(EI)_k = E_1\left(I_1 + \frac{E_2}{E_1} I_1\right) = E_1 I_k;$$

мұндағы

$$I_k = I_1 + \frac{E_2}{E_1} I_2.$$

Онда жағдайда көрнеулер созылған немесе сығылған аймақтарында мына формулалар бойынша анықталады:

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{E_k} \frac{M}{I} y_1; \quad \sigma_1 = \frac{E_2}{E_k} \frac{M}{I} y_2,$$

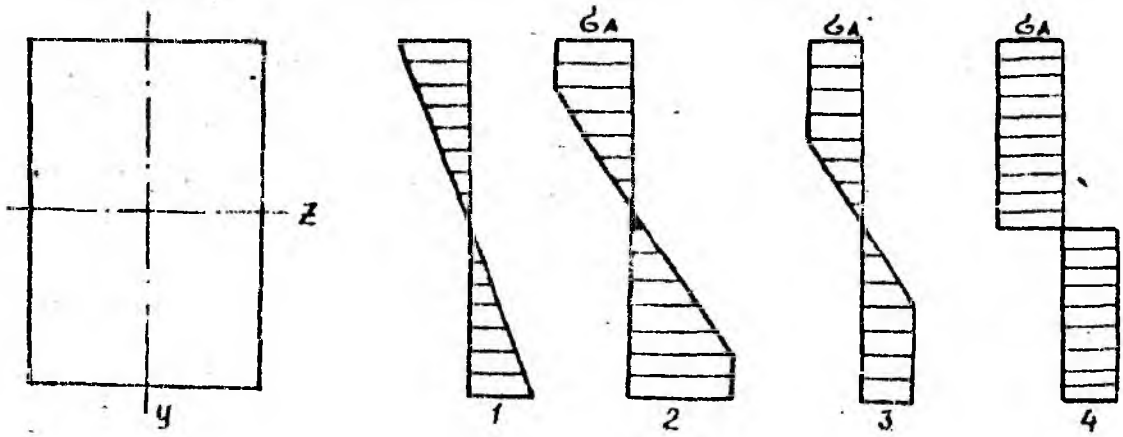
мұндағы y_1 және y_2 — созылған және сығылған аймақтардағы зерттелетін нүктеден бейтарап өске дейінгі қашықтық.

§ 7. АРҚАЛЫҚТАРДЫҢ СЕРПІМДІЛІК ШЕГІНЕН АСҚАН ИІЛУІ КЕЗІНДЕГІ ҚИРАТУ КҮШТЕРІН АНЫҚТАУ

Арқалықтарды мүмкін кернеулер әдісі бойынша есептеу кезінде оның қауіпті күйі: арқалықтың жоғары кернеулі кимасындағы ең үлкен тік кернеуі аққыштық шегіне, ал морт сынатын материалдар үшін — беріктік шегіне жетеді деп алынады. Бірақта бұл кезде арқалықтың күш көтеру қабілеті жойылмайды, өйткені оның басқа кималарындағы кернеулер қауіпті кернеуден кем болады. Күш көтеру қабілетін табу үшін қирату күштерінің әдісі пайдаланылады.

Қирату күштерінің әдісі бойынша есептеу үшін шартты диаграммадағы аққыштық алаңы шексіз созылады деп алады. Бұл диаграмманы Прандтльдің *идеал диаграммасы* деп атайды.

Күш үлғайған сайын созылымды аймақ біртіндеп кима ішіне терендей түседі. Кимада кернеу эпюрасы 8.12-суретте көрсетілген сатылардан өтеді: кименің

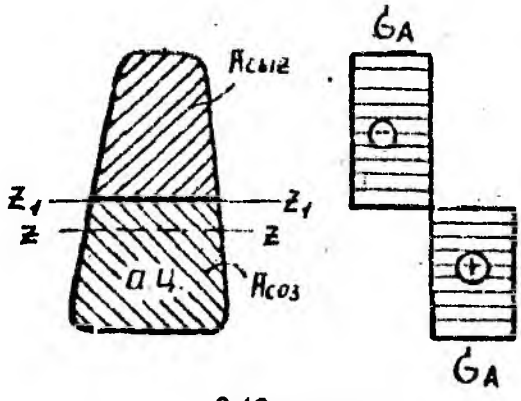


8.12 - сурет

серпімді бөлігі кішірейе түседі. Дәл шекке келгенде серпімді ядро жойылады да, кименің барлық нүктелерінде аққыштық пайда болады. Қарқынды өсетін деформация ең кернеулік кима жағдайында күш әсерінде шоғырланады, бұл жерде созылымды толса пайда болады. Кимада момент өзінің шекті шамасына, яғни қиратушы моменттің шамасына дейін жетеді.

Созылымды толса пайда болғаннан соң арқалық механизм түріне ауысады. Арқалықтың көтеру қабілетін жоятын, яғни іс жүзінде қирауды тудыратын күшті *қиратушы күш* деп атайды.

Егер кимада күш жазықтығымен үйлесетін бір ғана симметрия өсі болса (8.13-сурет), онда алдын ала бейтарап өстің орнын анықтау қажеттігі туады. Бұл жағдайда бейтарап өс кименің ауырлық центрімен дәл келмейді. Деформация кезінде бейтарап өс біртіндеп ауырлық центрінен қашықтайды да, ол иілудің шекті күйінде тік күш нөлге тең болады деген шарт бойынша табылады:



8.13 - сурет

$$N = \int_{A_{сыг}} \sigma_A dA - \int_{A_{соз}} \sigma_A dA = 0,$$

мұндағы $A_{сыг}, A_{соз}$ — созылу және сығылу аймақтарының аудандары. Бұдан $A_{сыг} = A_{соз}$. Сонымен, бейтарап өс қиманы тең шамалы екі бөлікке бөледі. Егер қиманың екі симметрия өсі болса, онда бейтарап өс zz өсімен дәл келеді.

Қиратушы момент келесі формуламен анықталады:

$$M_{кир} = \sigma_A \left(S_{z_1}^{сыг} + S_{z_1}^{соз} \right);$$

мұндағы $S_{z_1}^{сыг}, S_{z_1}^{соз}$ — қиманың сығылған және созылған бөліктердегі $z_1 z_1$ өске қатысты статикалық моменттері ;
немесе

$$M_{кир} = \sigma_A W_c;$$

мұндағы $W_c = S_{z_1}^{сыг} + S_{z_1}^{соз}$ — қиманың қарсыласуының созылымдылық моменті.

Тікбұрышты қима үшін. Арқалық үшін жоғары кернеулі талшықта ақкыштық пайда болатын қиратушы моменттің M_1 моментке қатынасы:

$$\beta = \frac{M_{кир}}{M_1} = \frac{W_n}{W} = \frac{bh^2 \cdot 6}{4 \cdot bh^2} = 1,5,$$

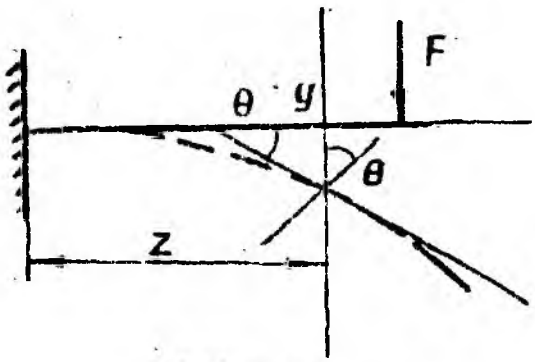
яғни біржарым есе үлкен болады.

Қос таврлы қима үшін: $\beta = \frac{W_n}{W} = 1,15 + 1,20$, яғни күш көтеру қабілетін 15-20%-ке арттыруға болады.

§ 8. ИІЛУ КЕЗІНДЕГІ ОРЫН АУЫСТЫРУ

Иілу моменттері әсер ететін жазықтық арқалықтың бас жазықтығымен дәл келетін және аз деформация жағдайлары қарастырылады. Иілуге дейінгі түзу өсі иілу кезінде үзармай $y = f(z)$ қисық бойынша майысады. Бұл қисық арқалықтың *серпімді сызығы* немесе *иілген өсі* деп аталады. Қиманың ауырлық

центрінің арқалықтың өсіне тіке ауысуы (y) оның бұл кимадағы орын ауыстыруы деп аталады. Ең үлкен ауыстыруды $y_{\max} = f$ *бүгілу жебесі* деп атайды. Қиманың *бұралу бұрышы* деп арқалықтың иілген өсіне жүргізілген жанама мен иілмеген өсі арасындағы бұрышты атайды. Бұл бұрыштың тангенсі айтарлықтай аз (8.14-сурет). Сондықтан



8.14 - сурет

$$\operatorname{tg}\theta = \theta = \frac{dy}{dz}.$$

Серпімділік шегіндегі деформация кезінде серпімді сызықтың қисықтығы былай есептеледі:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}.$$

Ал, қозғалмайтын yz координат жүйесіндегі (8.14-сурет) қисықтығы мынадай түрде болады:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}.$$

Инженерлік есептердің көбінде y' шамасының квадратын бірмен салыстырғанда ескермеуге болады: $\frac{1}{\rho} \approx y''$, осыдан көрінетіндей:

$$y'' = \frac{M}{EI}.$$

Бұны серпімді сызықтың немесе *иілген өстің дифференциал теңдеуі* деп атайды.

Берілген қимадағы орын ауыстыру, бұралу бұрышы, иілу моменті, көлденең күші және күштің қарқындылығы арасындағы дифференциалдық тәуелділіктер мына түрде болады:

$$\frac{dy}{dz} = \theta;$$

$$EIy'' = M;$$

$$\frac{dM}{dz} = \theta;$$

$$\frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = -q.$$

Таңбалар ережесі. Қима сағат тілі бойынша бұралған кезінде θ бұрышы, ал, төменге бүгілу кезінде y оң деп саналады.

Арқалықтың иілген өсін зерттеу екі жағдайда керек болады:

1) қатандығын есептегенде (ең үлкен орын ауыстыруы мүмкін шегінен асып кетпеуі қажет);

2) статикалық анықталмаған арқалықтарды есептеу кезінде.

Арқалықтың иілген өсінің дифференциалдық теңдеуін шешу үшін келесі әдістер: тікелей интегралдау әдісі, Клебш әдісі, бастапқы параметрлер әдісі пайдаланылады.

Тікелей интегралдау әдісі. Бұл — аналитикалық әдіс, арқалықтың иілген есінің дифференциалдық теңдеуін тікелей интегралдауына негізделеді.

Серпімді сызықтың теңдеуін:

$$EIy'' = M,$$

бір рет интегралдап, көлденең қималардың бұралу бұрышының теңдеуін аламыз:

$$EIy' = \int_0^z Mdz + C_1;$$

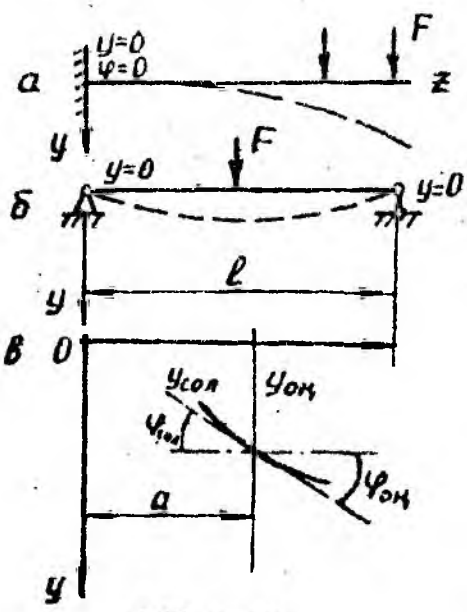
екінші рет интегралдап, бүгілулердің теңдеуін аламыз:

$$EIy = \int_0^z \left(\int_0^z Mdz \right) dz + C_1 z + C_2,$$

мұндағы C_1, C_2 — интегралдаудың тұрақтылары.

Интегралдау бөліктер бойынша жүргізіледі. Арқалықтың әрбір бөлігі үшін июші моментінің өрнегін құрады. Сонымен, әрбір бөлік үшін M июші моментінің өзгеру заңы белгілі болса, арқалықтың иілген өсін тікелей интегралдау әдісімен анықтауға болады. Екі рет интегралдау нәтижесінде иілген өстің теңдеуіне C_1 және C_2 тұрақтылары кіреді. Егер арқалық n бөлікке бөлінсе, онда иілген өстің теңдеуінде $2n$ интегралдау тұрақтылыры болады. Олар шекаралық және

арқалықтың көрші бөліктеріне сәйкес деформациялану шарттары арқылы анықталады. Шекаралық шарттар арқалықты қатаң бекіту шарттарына байланысты. Егер арқалықтың үшы қатаң бекітілсе (8.15а-сурет), онда y бүгілу мен бұралу бұрышы нөлге тең. Егер де арқалықтың үшы топсалы бекітілсе (8.15б-сурет), онда y бүгілу нөлге тең, ал φ бұралу бұрышы белгісіз күйінде қалады.



8.15 - сурет

Сөйтіп, консолдік арқалық үшін шекаралық шарттар мынадай түрде жазылады:

$$x = 0 \text{ болғанда } y = 0;\ \varphi = 0;$$

қос топсалы тіректі арқалық үшін

$$x = 0 \text{ болғанда } y = 0;\ x = l \text{ болғанда } y = 0.$$

Сонымен, есепті тікелей интегралдау әдісімен шешу кезінде кез келген арқалық үшы екі шекаралық шарттарын қоюға болады. Олар y бүгілу және θ бұралу бұрышы арқылы өрнектелгендіктен геометриялық шарттары деп аталады.

Егер арқалық бірнеше бөліктерге бөлінсе, онда интегралдау тұрақтыларын анықтау үшін шекаралық шарттары жеткілікті емес. Бұл жағдайда оларға арқалықтың көрші бөліктерінің бірлесіп деформациялану шартын қосу керек. Арқалықтың иілген өсі қисық сызыққа (8.15в-сурет) айналып үздіксіз күйінде қалатындықтан, бөліктер шекарасында оң және сол бөліктер үшін бүгілу мен бұралу бұрышы жалпы ортақ болады. Сондықтан, бөліктер шекарасында

$$y_{сол} = y_{он},\ x = a \text{ болғанда } \varphi_{сол} = \varphi_{он}.$$

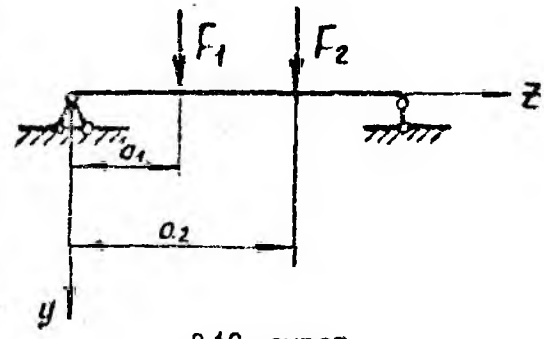
К л е б ш ә д і с і. Арқалықтың серпімді сызығының дифференциалдық теңдеуін интегралдау кезінде екі ережені ұсынған, олар есепті ықшамдап, шешімін бөліктер санына қарамай-ақ екі тұрақтыларын анықтауына келтіріледі: 1) июші моментінің өрнегін учаскелер бойынша қүрғанда координат жүйесінің бас орнын өзгертуге болмайды, сол немесе оң қиманың жағындағы сыртқы күштер түгел ескерілуі тиіс (8.16-сурет). Әрбір бөліктегі июші моменттің өрнегі келесі түрде жазылады:

бірінші бөлікте $M_1 = A \cdot z;$

екінші бөлікте $M_2 = A \cdot z - F(z - a_1);$

үшінші бөлікте $M_3 = A \cdot z - F(z - a_1) - F(z - a_2).$

2) арқалықтың серпімді сызығының дефференциалдық теңдеулерін бөлік бойынша жақшалары ашылмай, ал a — күш түсіру нүктесінің координатасы кіретін әрбір мүшесін жаңа айнымалы $(z-a_i)$ бойынша интегралдау керек. Бұл екі ережені пайдаланса бірінші интегралдау кезінде тұрақтылары бір-біріне тең болады, келесі интегралдау кезінде де тұрақтылары бір-біріне тең болады.



8.16 - сурет

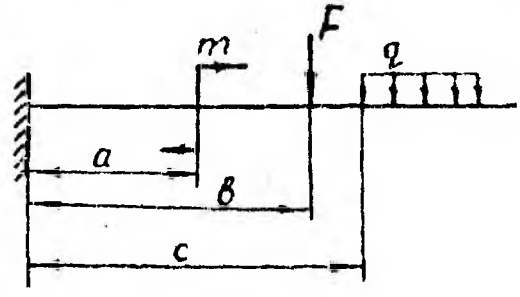
Бастапқы параметрлер әдісі. Бұл жағдайда тұрақты қималы арқалықтар қарастырылады. Бастапқы параметрлер әдісі келесі тұжырымдарға негізделеді:

1) білеудің барлық бөліктерінде координат жүйесінің басы ортақ болу керек;

2) кез келген қимадағы иіюші моменттің өрнегін құрғанда бөлік бойынша жақшаларын ашпай интегралдау керек;

3) иіюші моментінің өрнегіндегі сыртқы момент бірге тең $(z-a_1)^0$ көбейтке көбейтіледі, мұндағы $a_1 - m$ моментін түсіру нүктесінің координатасы (8.17-сурет);

4) белгілі бір заңдылықпен үздіксіз таралған күш z-тің бір мәнінде үзілсе, онда оны қарастырылған қимаға дейін сол заңдылықпен, өзара тең бағыттары қарама-қарсы таралған күштермен жалғастыру керек.



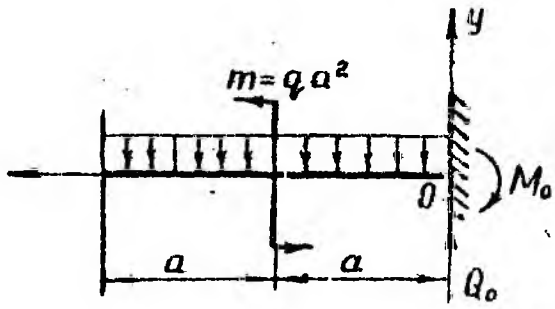
8.17 - сурет

Бастапқы параметрлер арқылы өрнектелген серпімді сызықтың әмбебап теңдеуі мына түрде болады:

$$EIy(z) = EIy_0 + EI\theta_0 z + M_0\frac{z^2}{2!} + Q_0\frac{z^3}{3!} + \frac{m(z-a_1)^2}{2!} + \frac{F(z-b)^3}{3!} + \frac{q(z-c)^4}{4!};$$

мұндағы M_0 — иіюші моменті, Q_0 — көлденең күш, y_0 — бүгілу шамасы, θ_0 — бұралу бұрышы, яғни бұлар координат жүйесінің басындағы параметрлер.

Мысал. Берілген арқалық үшін серпімді сызықтың және бұралу бұрыштарының теңдеулерін жазып, K нүктенің орын ауыстыру мен бұралу бұрыштарын табу керек (8.18-сурет).



8.18 - сурет

Шешімі. Тірек реакцияларын анықтау:

$$M_0 = -2qa^2 - qa^2 = -3qa^2; \quad Q_0 = q \cdot 2a.$$

Бастапқы параметрлерді анықтау. Бұл үшін шекаралық шарттарын қолданамыз. Координат жүйесінің бас нүктесі ретінде арқалықтың оң үшын (0 нүктесі) қабылдамыз. Сондықтан

$$y_0 = 0, \quad \theta_0 = 0.$$

Серпімді сызықтың теңдеуі мына түрде болады:

$$EIy(z) = \frac{M_0 z^2}{2!} + \frac{Q_0 z^3}{3!} + \frac{m(z-c)^2}{2!} - \frac{q(z-b)^4}{4!};$$

K нүктесінің бүгілуі былай беріледі:

$$EIy_k = -\frac{3qa^2(2a)^2}{2} + \frac{q \cdot 2a \cdot 8a^3}{6} - \frac{qa^2 a^2}{2} - \frac{q \cdot 16a^4}{24} = -\frac{27}{6}qa^4.$$

Бұралу бұрыштарының теңдеуі төмендегідей:

$$EI\theta(z) = M_0 z + Q_0 \frac{z^2}{2} - \frac{q(z-b)^3}{6} + m(z-c).$$

K нүктесінің бұралу бұрышы:

$$EI\theta(z) = -3qa^2 \cdot 2a + q \cdot 2a \cdot \frac{4a}{2} - q\frac{8a^3}{6} - qa^2 \cdot a = -\frac{8}{3} \cdot qa^3.$$

§ 9. ОРЫН АУЫСТЫРУЛАРҒА КӨЛДЕНЕҢ КҮШТЕРДІҢ ЫҚПАЛЫ

Әдетте, нақты арқалықтар үшін $\frac{l}{h} > 10$. Бұл жағдайларда орын ауыстыруларға көлденең күштердің ықпалы өте аз (4%-тен кем). Қыска арқалықтар үшін $\frac{l}{h} < 10$, бұл ықпал үлғаятын болады. Әдетте, $\frac{l}{h} = 4$ кезінде осы ықпалды ескеру қажет. Бұл кезде серпімді сызықтың дифференциалдық теңдеуіне ығысу ықпалын ескеріп мына түрде жазады:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M}{EI} - k\frac{d}{dz}\left(\frac{Q}{GA}\right),$$

мұндағы Q — қиманың көлденең күші, G — материалдың ығысу модулі, A — арқалықтың көлденең қимасының ауданы, k — өлшемсіз коэффициенті, мұның өзі көлденең қиманың түріне байланысты. Тікбұрышты қима үшін $k = \frac{6}{5}$, дөңгелек қима үшін $k = \frac{10}{9}$, жұқа қабырғалы құбыр үшін $k = 2$.

Дербес жағдайда арқалықтың тұрақты қималар үшін серпімді сызығының дифференциалдық теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$-\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M}{EI} - \frac{k}{GA}\cdot\frac{dQ}{dz}.$$

Егер де арқалықтың кейібір бөліктерінде тең таралған жүктеме болса, онда $\frac{dQ}{dz} = q$ шоғырланған күш әсер етсе, онда $q_i = \frac{F}{\varepsilon}$; мұндағы ε — бөліктің ұзындығы арқалықтың жарты биіктігіне тең алынады.

§ 10. ИІЛУ КЕЗІНДЕГІ СЕРПІМДІ ДЕФОРМАЦИЯНЫҢ ПОТЕНЦИАЛДЫҚ ЭНЕРГИЯСЫ

Көлденең иілу кезінде арқалықта жиналатын потенциалдық энергиясы формула бойынша анықталады:

$$U = \sum\int\frac{M_x^2dz}{2EI_x} + \sum k\int\frac{Q_y^2dz}{2GA},$$

мұндағы k — арқалықтың көлденең қима биіктігі бойынша жанама кернеулердің бірқалыпылықсыздығын сипаттайтын өлшемсіз коэффициент.

k коэффициенттің шамасы қиманың геометриялық түріне байланысты және формула бойынша анықталады:

$$k = \frac{A}{I_x^2}\int\frac{\left(S_c^{тіл}\right)^2}{b(y)^2}dA.$$

Кейбір қималар үшін коэффициенттің мәндері 8.2-кестеде келтірілген.

8.2 - к е с т е. Кейбір қималар үшін k коэффициенттің мәндері

Көлденең қимасы	Мәні
Тікбұрыш	1,2
Тең қабырғалы үшбұрыш	1,2
Шеңбер	32 27=1,18
Сақиналық қима	2,0
Қос тавр	A — қоставрдың ауданы A — қоставрдың табан ауданы

Іс жүзінде кездесетін кептеген жүйелердегі ығысу энергиясы, әдетте иілу энергиясынан айтарлықтай аз болады, сондықтан оны елемейді.

§ 11. МОР ИНТЕГРАЛЫ

Сырықтар жүйелердің кез келген бағытта сызықтық және бұрыштық орын ауыстыруларын анықтаудың жалпы формуласы — Мор интегралдары бойынша жүргізіледі.

Мор интегралдары келесі түрде жазылады:

$$\Delta_{iF} = \sum \int_s \frac{M_F^x M_i^x}{EI_x} dS + \sum k \int_s \frac{Q_F Q_i^x dS}{GA} + \sum \int_s \frac{N_F N_i dS}{EA} +$$

$$+ \sum \int_s \frac{M_F^y M_i^y}{EI_y} dS + \sum \int_s \frac{T_F^{бур} T_i^{бур}}{GI_{бур}} dS + \sum k_y \int_s \frac{Q_F^y Q_i^y}{GA} dS;$$

мұндағы Δ_{iF} — F берілетін күш әсерінен, i — берілетін бағыты бойынша іздеелетін (сызықтық немесе бұрыштық) орын ауыстыру;

M_F, Q_F, N_F — берілген күштерден білеудің қаралатын бөлігінің көлденең қимасындағы ішкі әсерлердің ағым мәндері;

T_i, Q_i, N_i — бірлік күштерден орын ауыстыруды нүктеде түсірілген ішкі әсерлердің ағым мәндері;

k — өлшемсіз коэффициент;

EI, EA, GA — білеу кимасының иілу, созылу және ығысу кезіндегі қатандығы;

dS — білеу өсіндегі элементтің ұзындығы. Тік сызықты үшін $dS = dz$

Сызықтық орын ауыстыруды анықтау кезінде бірлік күш, ал бұрыштық орын ауыстыруды анықтау кезінде — бірлік моменті түсіріледі.

Кейбір дербес жағдайда Мор формуласы мына қарапайым түрде болады:

1. Түйінде жүктеленген ферма үшін, оның сырықтары тек қана созылу немесе сығылу деформациясына ұшырайды, сондықтан Мор формуласында тек қана соңғы қосылғышы қалады:

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{N_F N_1}{EA} dz.$$

Егерде N_F және N_1 күштердің және A ауданы ферма сырықтарда тұрақты болса, онда

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{N_F N_1}{EA} l.$$

Бұл формула Максвелл формуласы деп аталады.

2. Тік сызықты сырықтардан құрылған арқалықтар мен жақтаулар үшін Мор формуласы келесі түрде жазылады:

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M_F M_1}{EI} ds.$$

Мор формуласы бойынша орын ауыстыруларды анықтау кезінде:

1) құрылмаға әсер ететін барлық күштердің әр бөлігі үшін M_F иілу моменттерінің өрнектерін жазады;

2) барлық сырткы күштерді алып тастап, орын ауыстыру іздейтін нүктеде бірлік әсерді түсіреді;

3) құрылманың әрбір бөлігінде M_1 бірлік моменттің өрнегін құрады.

4) M_F және M_1 өрнектерін Мор формуласына қойып, оларды интегралдап, іздейтін орын ауыстыруды табамыз.

Егер есептелген орын ауыстыру теріс болса, онда нақты орын ауыстыру алынған бірлік күш бағытына қарама-қарсы болады деп түсіну керек.

Мысал. Қисық білеу үшін F күш түсіретін қиманың тік, көлденең және бұралу орын ауыстыруын анықтаңыз.

Шешімі. Кез келген қимада жүктелген моменттің өрнегі:

$$M_F = -FR\sin\varphi.$$

Тік орын ауыстыруды анықтау үшін B төмен бағытталған бірлік күшті түсіргіземіз. Кез келген қимада бірлік күшке сәйкес иілу моменті төмендегідей болады:

$$M_{B1} = -1 \cdot R\sin\varphi.$$

Мор формуласына қойып, B нүктедегі тік орын ауыстыруды табамыз:

$$\Delta_{BF}^{\text{тік}} = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2}(F \cdot R\sin\varphi)(R\sin\varphi)\cdot R\,d\varphi = \frac{\pi FR^3}{4EI};$$

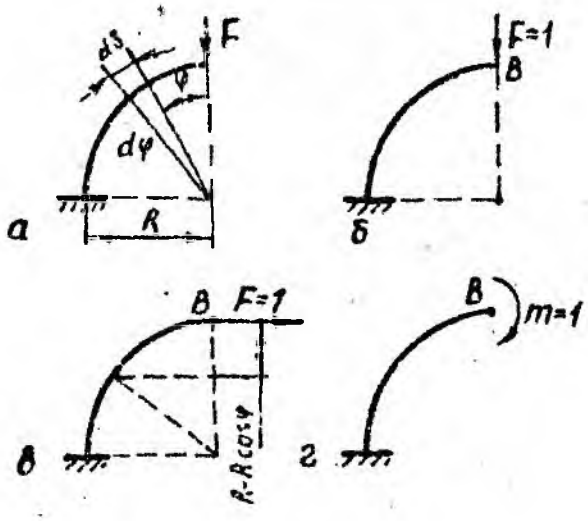
мұндағы $dS = Rd\varphi$ доғаның дифференциалы.

Көлденінен орын ауыстыруды анықтау үшін B-де көлденең бағытталған бірлік күшті түсіргізіп, иілу моменттің ернегін құрамыз:

$$M_{B1} = -1(R - R\cos\varphi).$$

Көлденең орын ауыстыру:

$$\Delta_{BF}^{\text{гор}} = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2}(F \cdot R\sin\varphi)(R - R\cos\varphi)Rd\varphi = \frac{FR^3}{2EI}.$$



8.19 - сурет

B қиманың бұралу бұрышын анықтау үшін нүктеге бірге тең моментті түсіргіземіз:

$$\Delta_{BF}^{\text{бұр}} = \int_0^{\pi/2}(F \cdot R\sin\varphi)\cdot 1\cdot Rd\varphi = \frac{FR^2}{EI}.$$

8.19а,б,в,г-суреттерде берілген нобайымен бірлік күштердің әсерлері көрсетілген.

§ 12. МОР ИНТЕГРАЛДАРЫН ВЕРЕЩАГИН ТӘСІЛІ БОЙЫНША ЕСЕПТЕУ

Егер қатандығы тұрақты білеулер тік бөліктерден құрылса, онда интегралдардың есептеуін оңайлатуға болады.

Мор интегралын Верещагин тәсілі бойынша графо—аналитикалық әдіспен есептейді, яғни эпюраларды көбейту тәсілімен есептейді:

$$\int M_F M_1 dz = \omega\eta.$$

Табылған интегралдың мәнін Мор формуласына қойып, орын ауыстыру формуласын аламыз:

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{\omega\eta}{EI};$$

мұндағы ω — июші моменттің сызық емес эпюра ауданы;

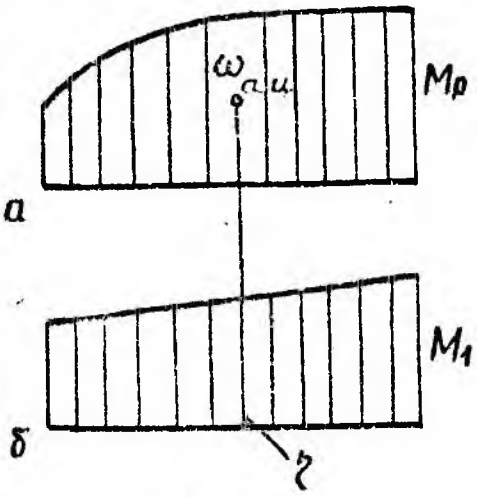
η — M_F эпюрасы ауданының ауырлық центрі түсындағы бірлік момент эпюрасының ординатасы.

Сонымен, Верещагин тәсілі бойынша қиманың орын ауыстыруы сызықты емес, M_F эпюрасының ауданы өзінің ауырлық центрінің түсындағы бірлік июші моментінің эпюра ординатасына көбейтумен анықталады (8.20а,б-сурет). Егер M_F және M_1 эпюралар білеу өсінің бір жағында орналасса, онда $\omega\eta$ көбейтіндісі плюс, ал өстің әр түрлі жағында орналасса — минус болады.

Егер білеудің қаралатын бөлігінде M_F және M_1 эпюралары сызықтық болса, онда бір эпюрасының ауданын екінші эпюрасының ординатасын алуға тура (коммутативтік қасиеті) келеді.

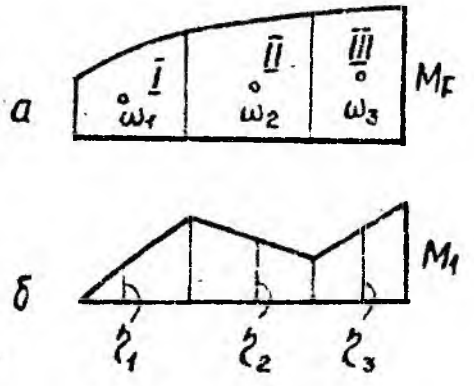
Қисық білеу үшін Верещагин тәсілін пайдалануға болмайды, ал сатылы-айнымалы көлденең қимада пайдалануға болады. Егер де бірлік эпюрасы сынық сызықпен шектелсе, онда Верещагин тәсілі бойынша (8.21а,б-сурет) мынадай тендеу құруға болады:

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI}\left(\omega_1\eta_1 + \omega_2\eta_2 + \omega_3\eta_3\right).$$



8.20 - сурет

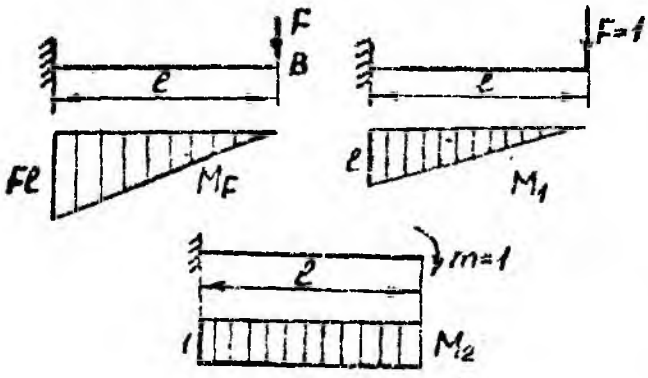
8.3 кестеде кейбір элементар қима түрлерінің аудандары мен ауырлық центрлердің координаттары келтірілген. 8.4-кестеде кейбір M_i және M_F эпюралардың үйлесуіндегі Мор интегралының өрнектері жазылған.



8.21 - сурет

Мысал. Бір ұшы қатаң бекітілген арқалықтың екінші ұшындағы (В нүктесі) орын ауыстыруларды анықтаңыз (8.22а-сурет).

Шешімі. Түсірілген F күштегі июші моменттің эпюрасын салайық — M_F эпюрасы.



8.22 - сурет

Содан кейін аркалықтың B нүктесіне тек қана $F=1$ күш түсіріп, M_1 эпюрасын құрамыз (8.22б-сурет), $m=1$ момент түсіріп M_2 эпюрасын (8.22в-сурет) тұрғызамыз.

Верацагин тәсілі бойынша тік орын ауыстыру тендеуін былай құрамыз:

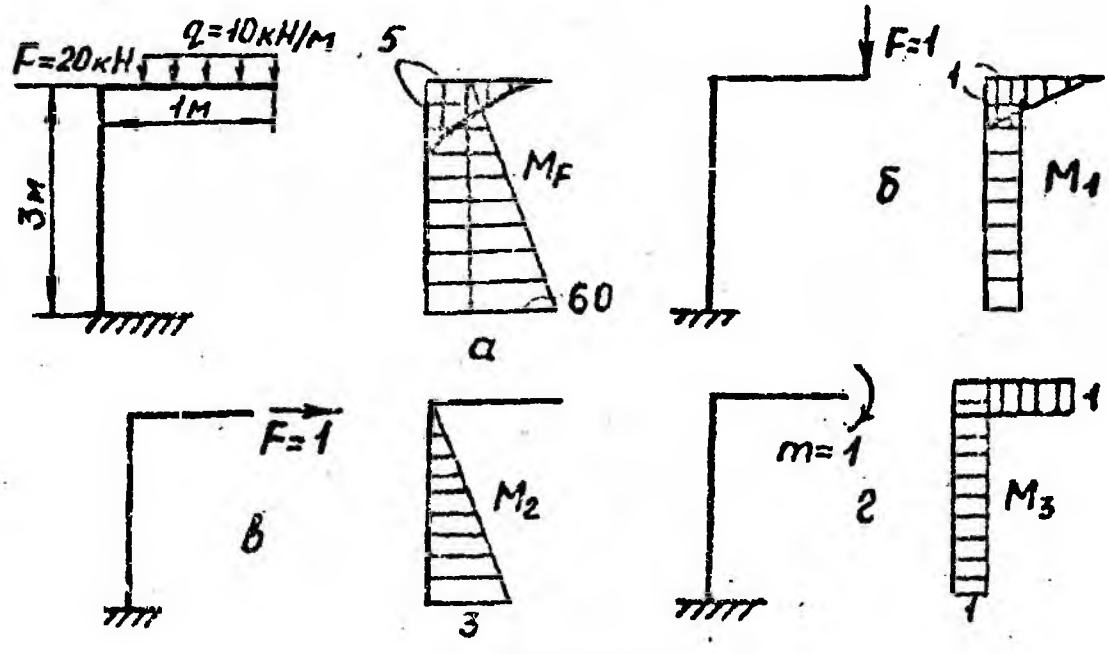
$$\delta_{\text{тік}}^{B} = \frac{1}{2} F \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{1}{EI} = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

B нүктенің көлденең орын ауыстыруы төмендегідей:

$$\Delta_{\text{көр}}^{B} = \frac{1}{2} F \cdot l \cdot l \cdot \frac{1}{EI} = \frac{Fl^2}{2EI}.$$

Мысал. Берілген жақтау үшін B нүктенің тік, көлденең және бұралу орын ауыстыруларын анықтаңыз (8.23-сурет).

Шешімі. Түсірілген күштерден, бірлік күштер мен бірлік моменттен B нүктесіне түсірілген моменттердің эпюраларын саламыз (8.23а,г-сурет).



8.23 - сурет

Верещагин тәсілі бойынша тік орын ауыстыру былай беріледі:

$$D_{1F}^{B}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\cdot 5\cdot 1\cdot\frac{3}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+5\cdot 3\cdot 1+\frac{1}{2}60\cdot 3\cdot 1\right)=\frac{106,1}{EI};$$

көлденең орын ауыстыру төмендегідей:

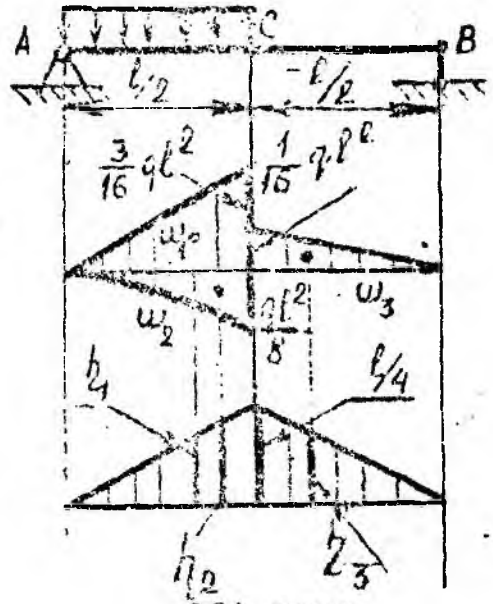
$$D_{2F}^{B}=\frac{1}{EI}\left(5\cdot 3\cdot\frac{1}{2}3+\frac{1}{2}60\cdot 3\cdot\frac{2}{3}\cdot 3\right)=\frac{202,5}{EI};$$

B нүктенің бұралу бұрышын былай ернектейміз:

$$\Delta_{3F}^{B}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}5\cdot 1\cdot 1+5\cdot 3\cdot 1+\frac{1}{2}60\cdot 3\cdot 1\right)=\frac{106,6}{EI}.$$

Мысал. Топсалы тиянақталған арқалықта q қарқындылығымен бірдей таралған жүктеме күш әсер етеді (8.24а,б-сурет). C нүктесінің орын ауыстыруын анықтау керек.

Шешімі. Түсірілген күштерден, C нүктесіне түсірілген бірлік күштен моменттер эпюраларын саламыз. Эпюраларды кебейту арқалықтың оң және сол бөліктері бойынша жүргізеді. Бірақ сол жақ үшін түсірілген күштер моментінің эпюрасы параболалық трапецияны бейнелейді, ал онын ауданы мен ауырлық центрінін орны белгісіз болады. Сондықтан эпюраны жіктейміз. Сол бөлікте параболалық трапеция орнына үшбұрыш және параболалық үшбұрыш қосалқастырамаз.



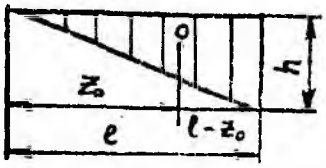
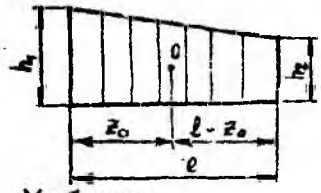
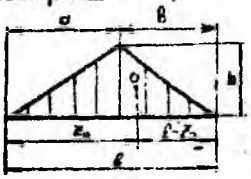
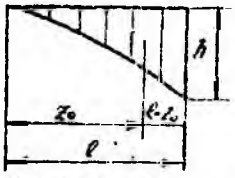
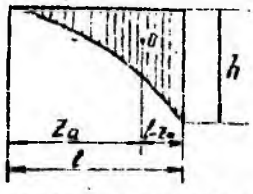
8.24 - сурет

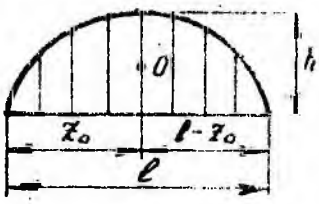
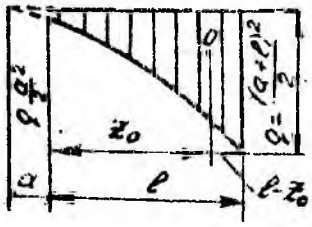
Верещагин тәсілі бойынша C нүктесінің бүгілуін мына формулалар арқылы табамыз:

$$\Delta_{1K}^{B}=\left(\omega_1\eta_1-\omega_2\eta_2+\omega_3\eta_3\right)\cdot\frac{1}{EI}=\frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{3}{16}ql^2\right)\frac{2}{3}\frac{l}{4}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{3}\frac{l}{2}\cdot\frac{ql^2}{8}\right)\frac{3}{4}\frac{l}{4}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{16}ql^2\right)\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{4}\right]=\frac{5}{768}\frac{ql^4}{EI}.$$

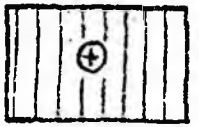
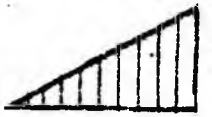
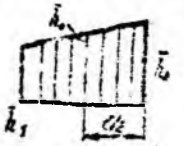
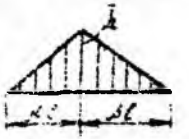
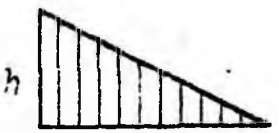
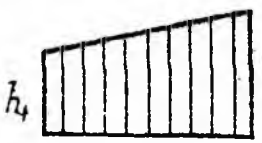
8.3 - к е с т е. Кейбір элементар қима түрлерінің аудандары мен ауырлық центрлерінің координаттары

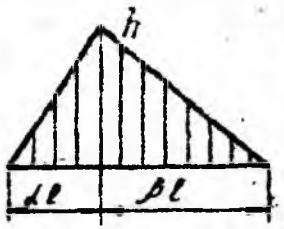
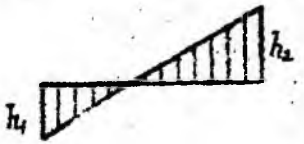
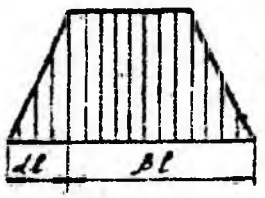
M эпюрасы	Ауданы	Ауырлық центрінің координаттары	
1	2	3	4
Үшбұрыш 	$\frac{1}{2}lh$	$\frac{2}{3}l$	$\frac{1}{3}l$
Трапеция 	$\frac{1}{2}l(h_1+h_2)$	$\frac{h_1+2h_2}{3(h_1+h_2)}l$	$\frac{h_2+2h_1}{3(h_1+h_2)}l$
Үшбұрыш 	$\frac{1}{2}lh$	$\frac{1}{3}(a+l)$	$\frac{1}{3}(b+l)$
Квадрат парабола 	$\frac{1}{3}lh$	$\frac{3}{4}l$	$\frac{1}{4}l$
Куб парабола 	$\frac{1}{4}lh$	$\frac{4}{5}l$	$\frac{1}{5}l$
Квадраттық параболаның жартысы 	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{5}{8}l$	$\frac{3}{8}l$

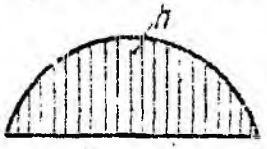
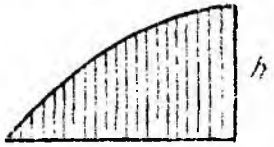
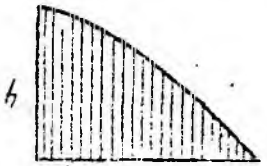
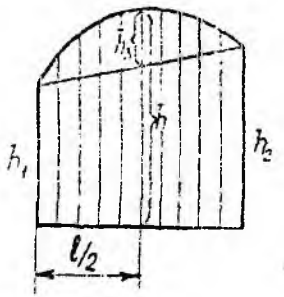
1	2	3	4
Квадраттық парабола 	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{1}{2}l$	$\frac{1}{2}l$
Параболалық трапеция 	$\frac{ql}{6}\left[l^2+3a(a+l)\right]$	$z_0=\frac{l}{4}\frac{6a^2l+8al^2+3l^3}{3a^2l+3al^2+l^3}$ $l-z_0=\frac{l}{4}\frac{6a^2l+4al^2+l^3}{3a^2l+3al^2+l^3}$	

8.4 - к е с т е. Кейбір $\overline{M_i}$ және M_F эпюралардың үйлесуіндегі $\int \overline{M_i} M_F dz$

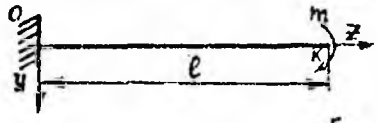
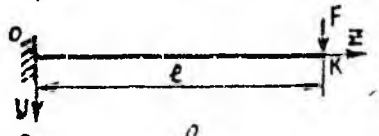
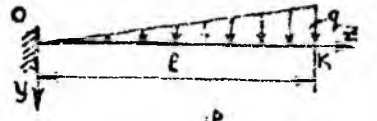
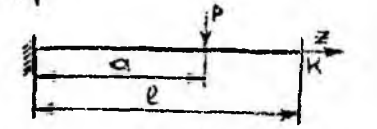
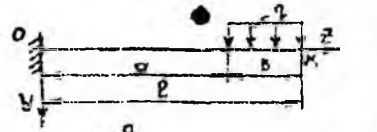
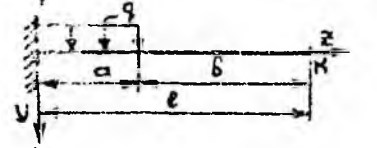
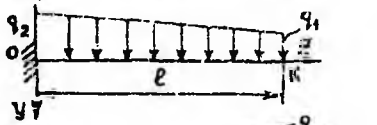
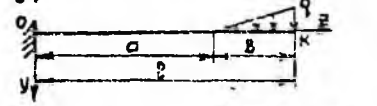
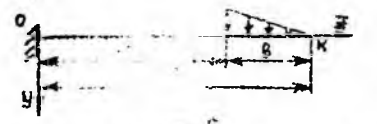
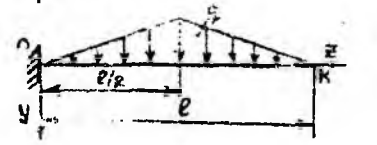
Мор интегралдың өрнектері l (— эпюраның табаны)

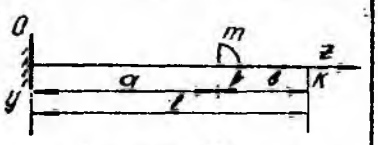
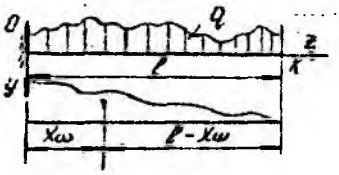
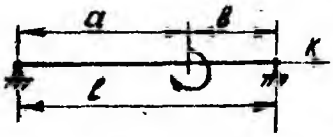
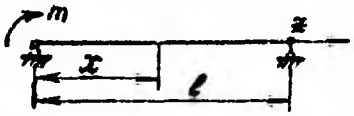
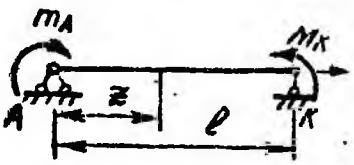
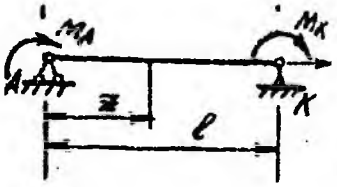
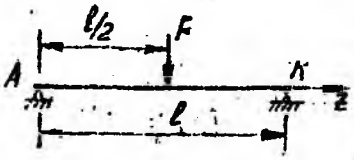
M_i эпюрасы M_F эпюрасы					
1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{2}h\bar{h}l$	$\frac{1}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}h(\bar{h}_1+2\bar{h}_2)l$	$\frac{1}{6}h(2\bar{h}_2-\bar{h}_1)l$	$\frac{1}{6}h\bar{h}(1+\bar{\alpha})l$
	$\frac{1}{2}h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}h(2\bar{h}_1+\bar{h}_2)l$	$\frac{1}{6}h(\bar{h}_2-2\bar{h}_1)l$	$\frac{1}{6}h\bar{h}(1+\bar{\beta})l$
	$\frac{1}{2}(h_1+h_2)\bar{h}l$	$\frac{1}{6}(h_1+2h_2)\bar{h}l$	$\frac{1}{6}[h_1(2\bar{h}_1+\bar{h}_2)+$ $+h_2(2\bar{h}_2+\bar{h}_1)]l$	$\frac{1}{6}[h_1(\bar{h}_2-2\bar{h}_1)+$ $+h_2(2\bar{h}_2-\bar{h}_1)]l$	$\frac{1}{6}[(1+\bar{\beta})h_1+$ $+(1+\bar{\alpha})h_2]\bar{h}l$

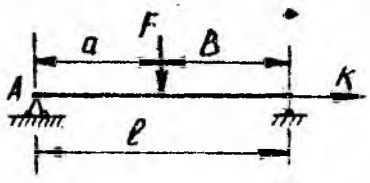
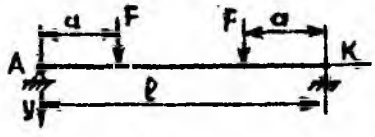
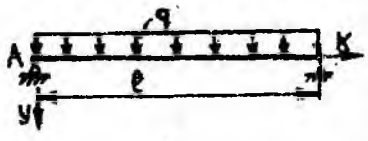
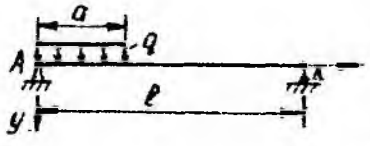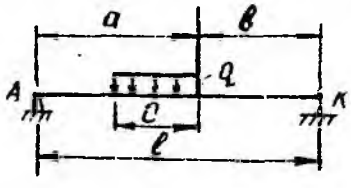
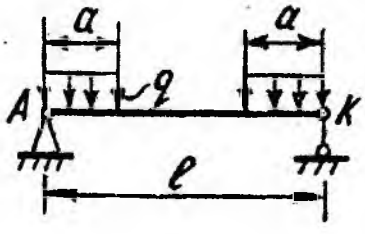
1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{2}h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}(1+\alpha)h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}\left[(1+\beta)\bar{h}_1+(1+\alpha)\bar{h}_1\right]hl$	$\frac{1}{6}\left[(1+\alpha)\bar{h}_2-\right.$ $\left.-(1+\beta)\bar{h}_1\right]4l$	$\frac{1}{3}h\bar{h}l$ $\alpha=\bar{\alpha}$ болғанда
	$\frac{1}{2}(h_2-h_1)\bar{h}l$	$\frac{1}{6}(2h_2-h_1)\bar{h}l$	$\frac{1}{6}\left[h_2(2\bar{h}_2+\bar{h}_1)-\right.$ $\left.-h_1(2\bar{h}_1+\bar{h}_2)\right]l$	$\frac{1}{6}\left[h_2(2\bar{h}_2-\bar{h}_1)-\right.$ $\left.-h_1(\bar{h}_2-2\bar{h}_1)\right]l$	$\frac{1}{6}\left[(1+\bar{\alpha})h_2-\right.$ $\left.-(1+\bar{\beta})h_1\right]\bar{h}l$
	$h\bar{h}\beta l$	$\frac{1}{2}h\bar{h}\beta l$	$\frac{1}{2}h(\bar{h}_1+\bar{h}_2)\beta l$	$\frac{1}{2}h(\bar{h}_2-\bar{h}_1)\beta l$	$\frac{h\bar{h}}{6\bar{\beta}}\left(3-3\alpha\frac{\bar{\alpha}^2}{\alpha}\right)l$ $\bar{\alpha}<\alpha$ болғанда
					$\frac{h\bar{h}}{6}\left(3-\frac{\alpha^2}{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\right)l$ $\bar{\alpha}>\alpha$ болғанда
	$\frac{1}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{4}h\bar{h}l$	$\frac{1}{12}h(\bar{h}_1+3\bar{h}_2)l$	$\frac{1}{12}h(3\bar{h}_2-\bar{h}_1)l$	$\frac{1}{12}h\bar{h}(1+\bar{\alpha}+\bar{\alpha}^2)l$

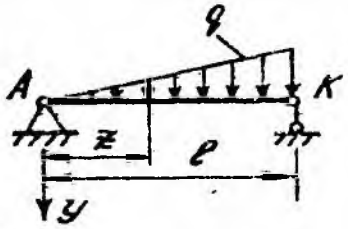
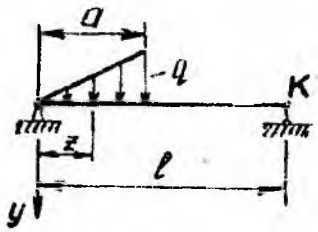
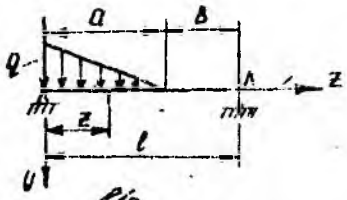
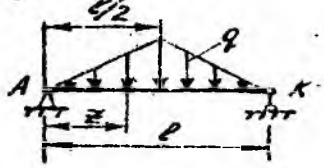
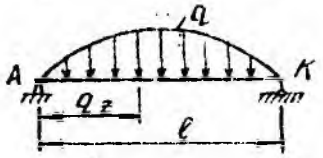
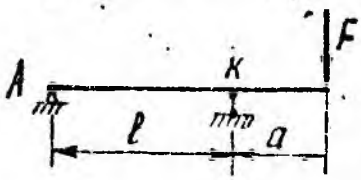
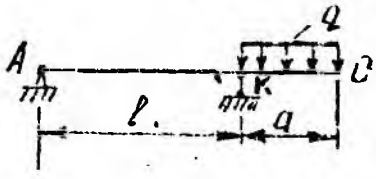
1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{12}h\bar{h}l$	$\frac{1}{12}h\left(3\bar{h}_1+\bar{h}_2\right)l$	$\frac{1}{12}h\left(\bar{h}_2-3\bar{h}_1\right)l$	$\frac{1}{12}h\bar{h}\left(1+\beta+\beta^2\right)l$
	$\frac{2}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{3}h\left(\bar{h}_1+\bar{h}_2\right)l$	$\frac{1}{3}h\left(\bar{h}_2-\bar{h}_1\right)l$	$\frac{1}{3}\left(1+\bar{\alpha}\bar{\beta}\right)h\bar{h}l$
	$\frac{2}{3}h\bar{h}l$	$\frac{5}{12}h\bar{h}l$	$\frac{1}{12}h\left(3\bar{h}_1+5\bar{h}_2\right)l$	$\frac{1}{12}h\left(5\bar{h}_2-3\bar{h}_1\right)l$	$\frac{1}{12}\left(5-\beta-\beta^2\right)h\bar{h}l$
	$\frac{2}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{4}h\bar{h}l$	$\frac{1}{12}h\left(5\bar{h}_1+3\bar{h}_2\right)l$	$\frac{1}{12}h\left(3\bar{h}_2-5\bar{h}_1\right)l$	$\frac{1}{12}\left(5-\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^2\right)h\bar{h}l$
	$\frac{1}{6}\bar{h}\left(h_1+h_2+\right.$ $\left.+4h\right)l$	$\frac{1}{6}\bar{h}\left(h_2+2h\right)l$	$\frac{1}{6}\left(\bar{h}_1h_1+4h\bar{h}_0+\right.$ $\left.+h_2\bar{h}_2\right)l$	$\frac{1}{6}\left(h_2\bar{h}_2+4h\bar{h}_0-\right.$ $\left.-h_1\bar{h}_1\right)l$	$\frac{1}{6}\left[h_1\left(1+\bar{\beta}\right)+h_2\left(1+\bar{\alpha}\right)+\right.$ $\left.+2h_3\left(1+\alpha\bar{\beta}\right)\right]\bar{h}l$

8.5 - к е с т е. Ең үлкен бүгілу мен бұралу бұрышы

Арқалықтардың және күштердің схемалары	Бүгілу бұрышы	Бұралу бұрышы
	$f_k = \frac{ml^2}{2EJ}$	$\theta_k = -\frac{ml}{EJ}$
	$f_k = \frac{Fl^3}{3EJ}$	$\theta_k = -\frac{Fl^2}{2EJ}$
	$f_k = \frac{ql^4}{8EJ}$	$\theta_k = -\frac{ql^3}{6EJ}$
	$f_k = \frac{ql^4}{30EJ}$	$\theta_k = -\frac{ql^3}{24EJ}$
	$f_k = \frac{11ql^4}{120EJ}$	$\theta_k = -\frac{ql^3}{8EJ}$
	$f_k = \frac{Fa^2}{6EJ}(3l-a)$	$\theta_k = -\frac{Fa^2}{2EJ}$
	$f_k = \frac{ql^4}{24EJ}\left(3-4\frac{a^3}{l^3}+\frac{a^4}{l^4}\right)$	$\theta_k = -\frac{ql^3}{6EJ}\left(1-\frac{a^3}{l^3}\right)$
	$f_k = \frac{qa^3}{24EJ}(4l-a)$	$\theta_k = -\frac{qa^3}{6EJ}$
	$f_k = \frac{l^4}{120EJ}(11q_1+4q_2)$	$\theta_k = -\frac{3q_1+q_2}{24EJ}$
	$f_k = \frac{ql^3b}{120EJ}\left(20-10\frac{b}{l}+\frac{b^3}{l^3}\right)$	$\theta_k = -\frac{qb}{24EJ}\left(6l^2-4lb+b^2\right)$
	$f_k = \frac{ql^3b}{30EJ}\left(5-5\frac{b}{l}+\frac{b^3}{l^3}\right)$	$\theta_k = -\frac{qb}{24EJ}\left(6l^2-8lb+3b^2\right)$
	$f_k = \frac{11}{192}\cdot\frac{ql^4}{EJ}$	$\theta_k = -\frac{7}{96}\cdot\frac{ql^3}{EJ}$

1	2	3
	$f_k = \frac{ma(l+b)}{2EJ}$	$\theta_k = -\frac{ma}{EJ}$
	$f_k = \frac{\omega}{EJ}(l - z\omega)$ ω — M эпюрасының ауданы z_ω — M эпюра ауданының ауырлық центрінің абсциссасы	$\theta_k = -\frac{\omega}{EJ}$
	$x = a$ болғанда $f = \frac{mab}{3EJ}\left(\frac{a-b}{l}\right)$	$\theta_a = \frac{ml}{6EJ}\times\left(1-3\frac{b^2}{l^2}\right)$; $\theta_k = \frac{ml}{6EJ}\left(1-\frac{3a^2}{l^2}\right)$
	$x = 0{,}423l$ көзінде $f = 0{,}0642\frac{ml^2}{EJ}$ $x = \frac{l}{2}$ көзінде $y = \frac{ml^2}{16EJ}$	$\theta_a = \frac{ml}{3EJ}$ $\theta_k = \frac{ml}{6EJ}$
	$x = \frac{l}{2}$ $f = \frac{(m_a + m_k)l^2}{16EJ}$	$\theta_a = \frac{m_a l}{3EJ} + \frac{m_k l}{6EJ}$ $\theta_k = \frac{m_a l}{3EJ} + \frac{m_k l}{6EJ}$
	$x = \frac{l}{2}$ $f = \frac{(m_a - m_k)l^2}{16EJ}$	$Q_A = \frac{m_A l}{3EJ} - \frac{m_K l}{6EJ}$ $Q_K = \frac{m_A l}{6EJ} - \frac{m_K l}{3EJ}$
	$x = \frac{l}{2}$ $f = \frac{Fl^3}{48EJ}$	$\theta_a = \theta_k = \frac{Fl^2}{16EJ}$

1	2	3
	$x=a$ $f=\frac{Fa^2b^2}{3EJl}$	$\theta_a=\frac{Fl^2}{6EJ}\times\left(\frac{b}{l}-\frac{b^3}{l^3}\right)$; $\theta_k=\frac{Fl^2}{6EJ}\left(\frac{a}{l}-\frac{a^3}{l^3}\right)$
	$x=\frac{l}{2}$ $f=\frac{Fl^3}{24EJ}\left(3\frac{a}{l}-4\frac{a^3}{l^3}\right)$	$\theta_a=\theta_k=\frac{Fa}{2EJ}(l-a)$
	$x=\frac{l}{2}$ $f=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EJ}$	$\theta_a=\theta_k=\frac{ql^3}{24EJ}$
	$x=a$ $f=\frac{qa^3b}{24EJ}\left(4-3\frac{a}{l}\right)$ $a>0{,}547l$	$\theta_a=\frac{qa^2l}{6EJ}\left(1-\frac{a}{2l}\right)^2$ $\theta_k=\frac{qa^2l}{12EJ}\left(1-\frac{a^2}{2l^2}\right)$
	$x=a$ $f=\frac{qc}{6EJ}\left[\frac{ab}{l}\times\right.$ $\left.\times\left(2al-2a^2-\frac{c}{4}\right)+\frac{c^3}{64}\right]$	$\theta_a=\frac{qbc}{24EJl}\left[4a(l+b)-c^2\right]$; $\theta_k=\frac{qac}{24EJl}\times$ $\times\left[4b(l+a)-c^2\right]$
	$x=\frac{l}{2}$ $f=\frac{ql^4}{48EJ}\frac{a^2}{l^2}\left(3-2\frac{a^2}{l^2}\right)$	$\theta_a=\theta_k=\frac{qa^2}{12EJ}(3l-2a)$

1	2	3
	$x=0{,}5191$ $f=0{,}00652\frac{ql^4}{EJ}$	$\theta_a=\frac{7}{360}\frac{ql^3}{EJ}$ $\theta_k=\frac{8}{360}\frac{ql^3}{EJ}$
	$x=a$ $f=\frac{qa^3l}{45EJ}\left(5-9\frac{a}{l}+4\frac{a^2}{l^2}\right)$	$\theta_a=\frac{qa^2l}{360EJ}\left(12\frac{a^2}{l^2}-45\frac{a}{l}+40\right)$ $\theta_k=\frac{qa^2l}{90EJ}\left(5-3\frac{a^2}{l^2}\right)$
	$x=a$ $f=\frac{qa^3bl}{360EJ}\left(20\frac{a}{l}-13\frac{a^2}{l^2}\right)$	$\theta_a=\frac{qa^2l}{360EJ}\left(3\frac{a^2}{l^2}-15\frac{a}{l}+20\right)$ $\theta_k=\frac{qal^2}{360EJ}\left(10-3\frac{a^2}{l^2}\right)$
	$x=\frac{l}{2}\qquad f=\frac{ql^4}{120EJ}$	$\theta_a=\theta_k=\frac{5ql^3}{192EJ}$
	$x=\frac{l}{2}\qquad f=\frac{61}{5760}\frac{ql^4}{EJ}$	$\theta_a=\theta_k=\frac{ql^3}{30EJ}$
	$y_c=\frac{Fa^2}{3EJ}(l+a);$ $x=0{,}577l$ $y_{max}=f=-0{,}00642\frac{Fal^2}{EJ}$	$\theta_a=-\frac{Fal}{6EJ}$ $\theta_k=-\frac{Fal}{3EJ}$ $\theta_c=\frac{F}{6EJ}\left(2la+3a^2\right)$
	$y=\frac{qa^2}{24EJ}(4l+3a);$ $x=0{,}577l$ $y_{max}=f=-0{,}0321\frac{qa^2l^2}{EJ}$	$\theta_a=-\frac{qa^2l}{12EJ}$ $\theta_b=-\frac{qa^2l}{6EJ}$ $\theta_c=\frac{qa^2}{6EJ}(a+l)$

§ 13. СЕРПІМДІ ТАБАНДАҒЫ АРҚАЛЫҚ

Түтас деформацияланатын ортаға орналасқан арқалықты *серпімді табандағы арқалық* деп атайды. Фусс — Винклер болжамы бойынша q_R қаркындылығы y бүгілуге пропорционал, (рис. 8.25):

$$q_R = -\kappa y;$$

мұндағы κ — серіппе қатандығына және олардың орналасу жиілігіне байланысты болатын пропорционалдық коэффициент, яғни серпімді табанның коэффициенті деп аталады. „Минус" таңбасы әсердің бүгілуге қарама-қарсы бағытталғанын көрсетеді.

Серпімді табандағы арқалықтың иілуінің дифференциалдық теңдеуі $y^{IV} = \frac{q}{EI}$ өрнегінен алынады. q шамасының орнына $q - q_R$ айырмасын аламыз. Онда q шамасы сыртқы таралған күш ретінде, ал q_R серпімді табанның әсері ретінде қарастырылады. Қатандығы тұрақты білеу үшін

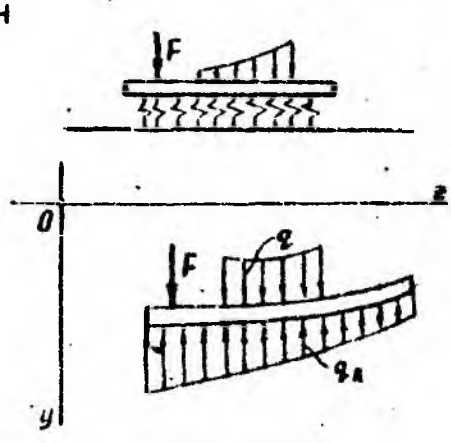
$$EIy^{IV} + \kappa y = q;$$

немесе мынадай белгілеу енгіресек:

$$\frac{\kappa}{EI} = 4k^4;$$

сонда

$$y^{IV} + 4k^4 y = \frac{q}{EI};$$



8.25 - сурет

серпімді табандағы арқалықтың иілуінің дифференциалдық теңдеуін аламыз.

Егер сыртқы таралған күш q жоқ болса, онда теңдеудің оң жағы нөлге тең, ал қадалған күштер мен моменттер интегралдау тұрақтыларын анықтау кезінде сәйкес шекаралық шарттарын салу жолымен есептеледі.

(а) теңдеудің шешімін мына түрде жазуға болады:

$$y = e^{-kz}\left(C_1 \sin kz + C_2 \cos kz\right) + e^{+kz}\left(C_3 \sin zk + C_4 \cos kz\right) + y^*;$$

мұндағы y^* — теңдеудің дербес шешуі. Бұл теңдеуді келесі түрде былай жазады:

$$y = C_1 \sin kz\,\mathrm{sh}kz + C_2 \sin kz\,\mathrm{ch}kz + C_3 \cos zk\,\mathrm{sh}kz + C_4 \cos kz\,\mathrm{ch}kz + y^*;$$

мұндағы $\mathrm{sh}kz$ және $\mathrm{ch}kz$ гиперболалық синусты және косинусты сипаттайды. Егер y функциясы анықталған болса, онда иіуші моменттер мен көлденең күштерді оңай табамыз.

IX тарау

КҮРДЕЛІ КЕДЕРГІ

Қарапайым кернеулік күйлердің (созылу, сығылу, ығысу, бұралу, иілу) әр түрлі үйлесуі *күрделі кедергі* деп аталады.

Тәуелсіздік қағидасына сүйеніп жеке қарапайым кернеулік күйлерін қосу арқылы білеудің кернеулік күйін табады. Осыған ұқсас деформацияларды да, орын ауыстыруларды да әрбір күш есерінен болған деформацияларды қосу арқылы алады. Тәуелсіздік қағидасын немесе суперпозиция қағидасын материал Гук заңына бағынғанда және деформация аз кезінде пайдалануға болады.

Мысал. Сынық өсті білеу үшін (9.1а-сурет) ішкі әсерлердің эпюраларын құрыңыз.

Шешімі. Әрбір бөлікте координат өстерін белгілейміз. Эпюраларды құру үшін кималар әдісін пайдаланамыз. *N* бойлық күш таңбасын VI тараудағыдай, ал *Q* және M_u таңбаларын VIII тараудағыдай аламыз. Реакцияларды іздемеу үшін ішкі әсерлерді анықтауды білеудің бос ұшынан бастайды.

АВ бөлігінде

$$M_{u1} = F \cdot u_1;\ Q_1 = -F;\ N = 0.$$

ВС бөлігінде ішкі әсерлерді анықтау үшін *F* күшті *A* нүктеден *B* нүктеге өзіне параллель көшіруіміз керек. ВС бөлігінде:

$$M_{u2} = F \cdot u_2;\ Q_1 = -F;\ T_б = Fl_1.$$

Осыған ұқсас СД бөлігінде де *F* күшті *B* нүктеден *C* нүктеге көшіреміз.
СД бөлігінде:

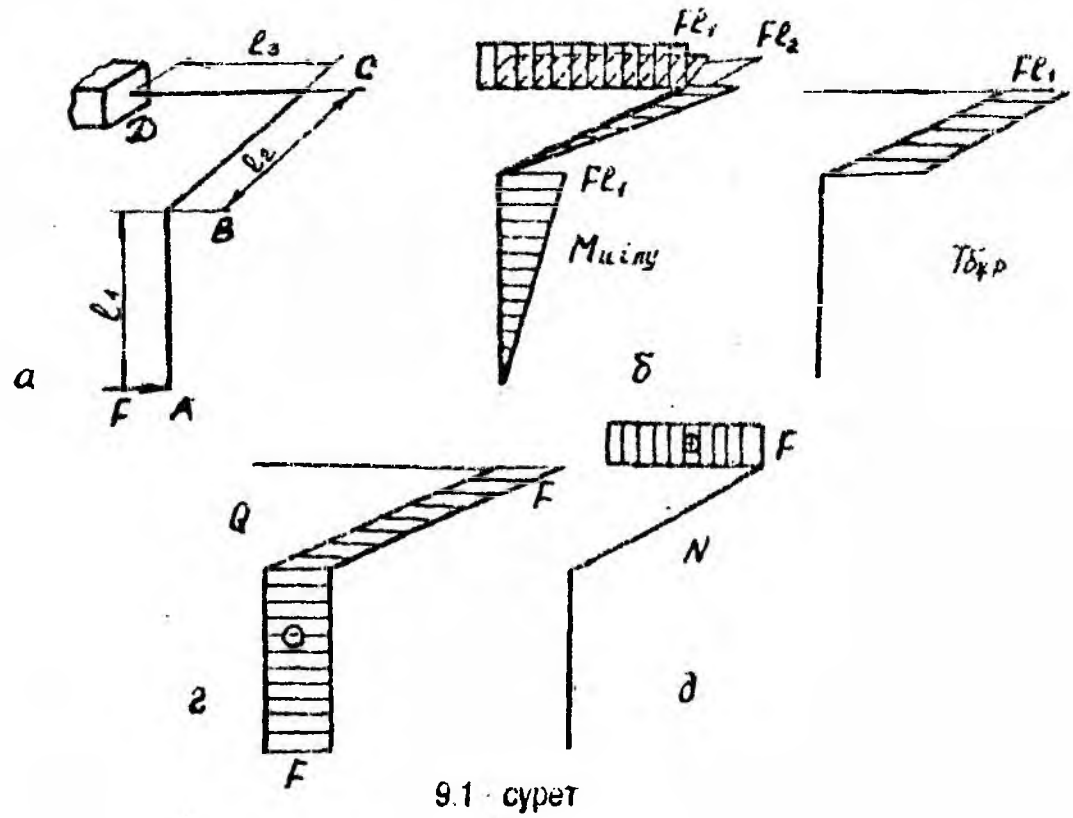
$$M_{yz} = Fl_1;\ M_{xy} = Fl_2;\ N = F.$$

Эпюраларды талдағанда мынадай қорытындыға келеміз (9.1б,в,г,д-сурет):

1) АВ бөлігінде көлденең иілу болады, себебі оған M_u иілу моменті мен Q көлденең күш әсер етеді;

2) ВС бөлігінде көлденең иілу мен бұралу болады, өйткені иілу моменті көлденең күш және бұралу моменті әсер етеді;

3) СД бөлігінде қиғаш иілу мен созылу болады, онда екі жазықтық бойында моменттер мен бойлық күш әсер етеді.



9.1 - сурет

§ 1. КИҒАШ ИІЛУ

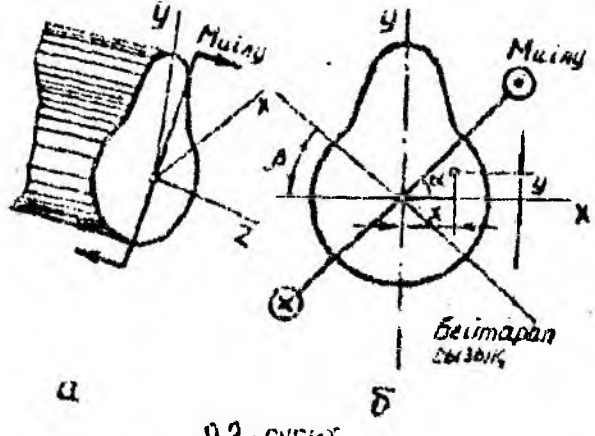
Июші момент жазықтығы қиманың бас өсімен үйлеспеген кездегі иілу жағдайын *қиғаш иілу* деп атайды. Оны білеудің бір мезгілде екі бас жазықтықта zx және zy (9.2а-сурет) иілуі түрінде карастырған ыңғайлы. Ол үшін $M_и$ июші моментін x және y өстеріне қатысты құраушыларға жіктейді:

$$M_x = M_и \sin\alpha; \qquad M_y = M_и \cos\alpha.$$

Тік кернеулер. Координаттары X және У болатын нүктеде тік кернеу M_x, M_y моменттерімен өрнектелетін кернеулер жиынтығымен анықталады:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

немесе



9.2 - сурет

$$\sigma = M_u\left(\frac{y}{I_x}\sin\alpha + \frac{x}{I_y}\cos\alpha\right);$$

мұндағы I_x және I_y — қиманың бас инерция моменттері.

Бейтарап сызығы — қиманың ауырлық центрінен өтетін сызық, ол қосынды иіуші момент жазықтығына перпендикуляр болмайды. Қимадағы бейтарап сызықтың теңдеуін $\sigma = 0$ десек, мына теңдікті аламыз:

$$\frac{y}{I_x}\sin\alpha + \frac{x}{I_y}\cos\alpha = 0;$$

оның орны келесі формула бойынша анықталады:

$$\mathrm{tg}\beta = -\frac{I_y}{I_x}\mathrm{tg}\alpha;$$

мұндағы β — бейтарап сызығының OX бас өспен құратын бұрышы (9.26-сурет).

Есептеу формулалары. Беріктікті тексеруді қауіпті қимадағы бейтарап сызықтан барынша қашық нүктеде пайда болатын ең үлкен тік кернеулер бойынша жүргізеді.

Беріктік шарты мына түрде болады:

$$\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma].$$

Егер созылу және сығылу кезіндегі мүмкін кернеулер әр түрлі болса, онда созылу және сығылу аймақтарында беріктікті тексеруді бөлек жүргізеді. Қималарды беріктік шарты арқылы тандайды:

$$W_x \ge \frac{1}{[\sigma]}\left(M_x + kM_y\right),$$

немесе

$$W_x \ge \frac{M}{[\sigma]}(\cos\alpha + k\sin\alpha),$$

мұндағы $k = \frac{W_x}{W_y}$ білеудің көлденең қимасының түріне байланысты. Тік бұрыш

үшін $k = \frac{h}{b}$, қос тавр үшін $k \approx 8$, швеллер үшін $k \approx 6,5$.

Қ и ғ а ш и і л у к е з і н д е г і б ү г і л у. Қиғаш иілу инерция бас жазықтарындағы екі қарапайым иілулердің үйлесуі болғандықтан, бұл жазықтықтарда бүгілу келденең иілу жағдайындағыдай анықталады. Тәуелсіздік принципі бойынша қосынды бүгілу геометриялық қосындысы ретінде табылады:

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}.$$

Қосынды бүгілудің бағыты бейтарап сызыққа перпендикуляр болады. Бүгілу жазықтығы сыртқы күш жазықтығымен үйлеспейді.

§ 2. БІЛЕУДІҢ ЦЕНТРДЕН ТЫС СОЗЫЛУЫ ЖӘНЕ СЫҒЫЛУЫ

Егер келденең күш центрден тыс және білеудің бойлық өсіне параллель түсірілсе, онда білеу *центрден тыс созылу және сығылу* жағдайында болады.

Келденең күштер білеудің өсіне дейінгі е қашықтығы *эксцентриситет* деп аталады (9.3а-сурет). Қимадағы сыртқы күштерге тең әсерлі күш түсірілген А нүктесінің координаттары x_A және y_A болсын. Сонда сәйкес бас өстерге қатысты F тең әсерлі күш $M_y = Fx_A$ және $M_x = Fy_A$ моменттерді береді. Бұны центрден тыс созылудың (сығылу) және таза қиғаш иілудің (9.3б-сурет) үйлесуі ретінде қарастыруға болады.

Тік кернеулер қиманың кез келген В нүктесіндегі Х,У координаттары бойында мынадай өрнекпен анықталады:

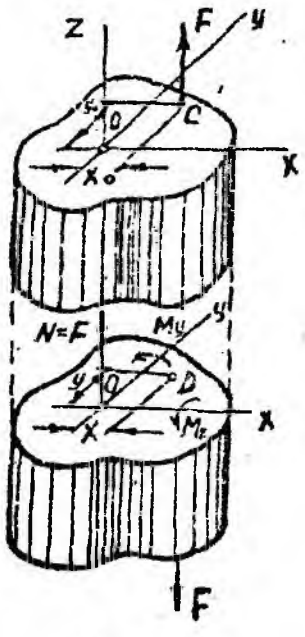
$$\sigma = +\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x;$$

немесе

$$\sigma = \frac{N}{A}\left[1 + \frac{y_A y}{i_x^2} + \frac{x_A x}{i_y^2}\right];$$

мұндағы i_x және i_y бас өстерге қатысты қиманың инерция радиустары.

Бейтарап сызығы — түзу сызығының теңдеуімен



9.3 - сурет

анықталады:

$$1+\frac{y_A y_0}{i_x^2}+\frac{x_A x_0}{i_y^2}=0;$$

мұндағы x_0 және y_0 бейтарап сызығының нүктелер координаттары. Бейтарап сызық жүргізу арқылы a_x және a_y өстерден мынадай кесінділерді кесіп алады:

$$a_x=-\frac{i_y^2}{x_F};\quad a_y=-\frac{i_x^2}{y_F}.$$

Есептеу формулалары. Беріктік шарты мына түрде болады:

$$\sigma_{\max}=\frac{N}{A_{\text{нт}}}+\frac{M_x}{I_x}y+\frac{M_y}{I_y}x\le[\sigma].$$

Егер созылу және сығылу кезіндегі мүмкін кернеулер әр түрлі болса, онда созылу және сығылу аймақтарында беріктік шарттары келесі түрде енеді:

$$\sigma_{\max}=\frac{N}{A_{\text{нт}}}+\frac{M_x}{I_x}y+\frac{M_y}{I_y}x\le[\sigma_{\text{соз}}];$$

$$\sigma_{\min}=\frac{N}{A_{\text{нт}}}+\frac{M_x}{I_x}y+\frac{M_y}{I_y}x\le[\sigma_{\text{сығ}}].$$

Дербес жағдайда күш қиманың бас өстерінің біреуіне орналасады. Бейтарап сызық бұл өске перпендикуляр болады. Бұл кезде бойлық күштің центрден тыс әсері центрлік созылу (сығылу) және келденең иілу кезіндегіге келтіріледі. Симметриялық қиманың шеткі нүктелеріндегі кернеулер формула бойынша анықталады:

$$\sigma=\frac{N}{A_{\text{нт}}}+\frac{Ne}{W};$$

мұндағы W — иілу жазықтығының перпендикуляр өсіне қатысты қиманың кедергі моменті. b және h өлшемдерімен тікбұрышты қима үшін алынатын кернеулер мына түрде болады:

$$\sigma=\frac{N}{hb}\left[1+\frac{6e}{h}\right].$$

Беріктікті тексеру келесі формула бойынша жүргізіледі:

$$\frac{N}{A_{нт}}+\frac{M}{W}\le[\sigma]_u.$$

Егер созылу және сығылу мүмкін кернеулердің иілуге дейінгі кернеуден елеулі айырмашылығы болса, онда беріктікті тексерудің келесі формулалары пайдаланылады:

центрден тыс созылу кезінде

$$\frac{N}{A_{нт}}\cdot\frac{[\sigma]_u}{[\sigma_{соз}]}+\frac{M}{W}\le[\sigma]_u;$$

центрден тыс сығылу кезінде

$$\frac{N}{A_{нт}}\cdot\frac{[\sigma]_u}{[\sigma_{сыг}]}+\frac{M}{W}\le[\sigma]_u;$$

мұндағы $A_{нт}$ — көлденең қиманың нетто (өлсірету ауданын алып тастағандағы ауданы, мәселен, тесіктердің ауданы) ауданы.

Мысал. Берілген қимаға (9.4а-сурет) центрден тыс F күш түсірілген.

Егер $x_A=25$см, $y_A=30$см, $[\sigma_{сыг}]=20$МПа, $[\sigma_{соз}]=2$МПа, $b_1:h_1=20:40$;

$b_2:h_2=20:40$, болса, сығылу кезіндегі F күштің мүмкін мәнін табыңыз.

Шешімі. Көлденең қиманың ауырлық центрінің орнын табамыз:

$$x_c=20\text{см},\ y_c=\frac{\sum S_x}{\sum A};\sum S_x=A_1y_1+A_2y_2=40\cdot10^3\text{см}^3;\ y_c=25\text{см}.$$

Берілген қиманың центрлік өстерге қатысты инерция өсі моменттерін есептейміз:

$$I_{x_c}=I_{x_1}+a_1^2A_1+I_{x_2}+a_2^2A_2=493333\text{см}^4;$$

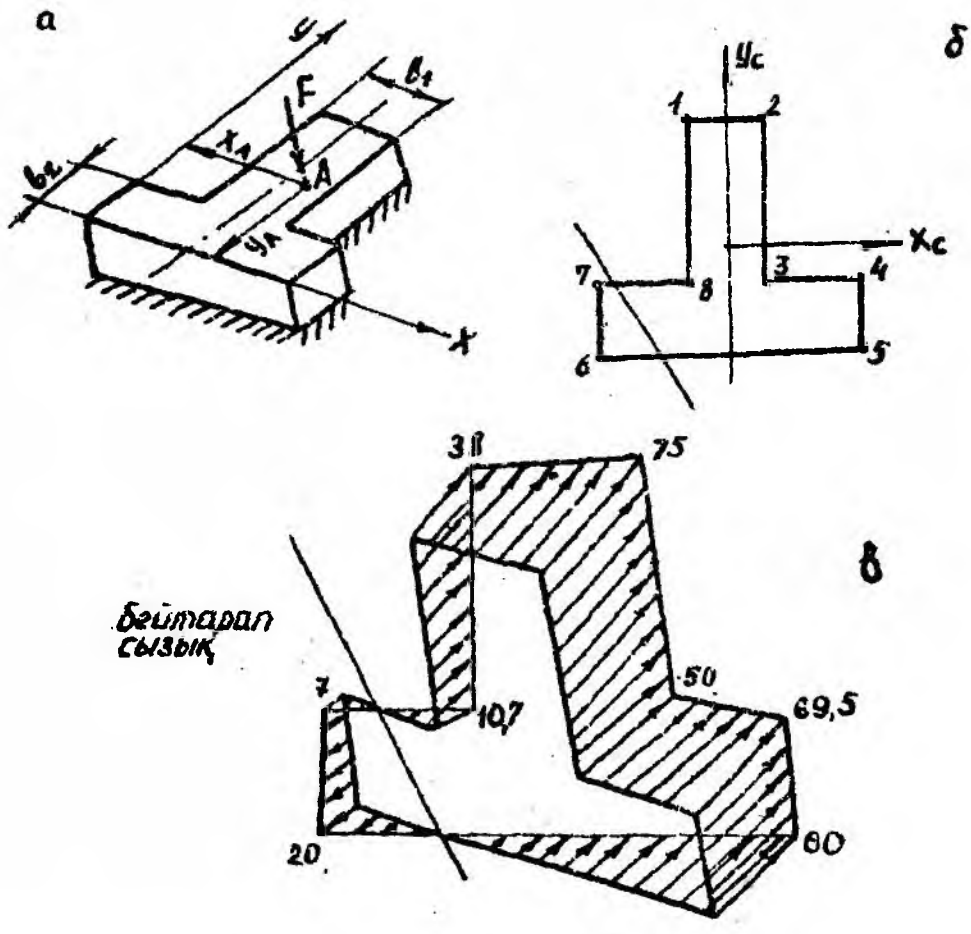
$$I_{y_c}=I_{y_1}+I_{y_2}=133333\text{см}^4.$$

Центрлік өстерге қатысты А нүктенің координаттарын былай табамыз:

$$y_A^0=y_A-y_c=5\text{см};\quad x_A^0=x_A-x_c=5\text{см}.$$

Бейтарап сызығының орнын анықтаймыз (9.4б-сурет):

$$1+\frac{y_A^0y_0}{i_x^2}+\frac{x_A^0x_0}{i_y^2}=0;\ y_0=-\frac{i_x^2}{y_A^0};\ x_0=\frac{i_y^2}{x_A^0};$$



9.4 - сурет

$$x_0 = -16,6\text{см}; \quad y_0 = -60,6\text{см}.$$

Қиманың ең үлкен сығу және созу кернеулерін есептейміз:

$$\sigma = -F\left[\frac{1}{A} + \frac{y_A^0 y}{I_{x_c}} + \frac{x_A^0 x}{I_{y_c}}\right],$$

$$\sigma_2 = -1,4\cdot 10^{-3} F; \quad \sigma_6 = 0,375\cdot 10^{-3} F.$$

Беріктік шарты арқылы мүмкін күшті табамыз:

$$\max \sigma_2 \le \left[\sigma_{\text{сығ}}\right] = -1,4\cdot 10^{-3} F;$$

$$\left[F_{\text{сығ}}\right] = 143\text{кН}.$$

$$\max \sigma_6 \le [\sigma_{соз}] = 0{,}375\ 10^{-3} F.$$

$$[F_{соз}] = 53\text{кН}.$$

Бұдан мүмкін күшті $[F] = 53\text{кН}$ аламыз. 9.4в-суретте кернеудің кеңістік **б** эпюрасы көрсетілген.

К и м а н ы н я д р о с ы. Таңдап алған қимада қандай эксцентриситет рұқсат етеуге болады деген сұрақ іс жүзінде өте маңызды. Өйткені, қимада әртүрлі таңбалы кернеулер әсер етуі мүмкін. Бұл есепті қиманың ядросын анықтай отырып шешуге болады.

Қима ядросы деп ауырлық центрінің маңындағы ауданды айтады. Оның ерекшелігі: егер оның ішінде F күш әсер етсе, онда қиманың барлық нүктесінде де кернеулер бір таңбалы болады. Бұл жәйт, мысалы, сығылатын кірпіш бағаналарын есептеуде маңызды. Кірпіш созылу кезінде нашар қарсыласады. Сондықтан центрден тыс сығылу кезінде барлық қима үшін алынатын кернеулер сығатын болуы және бейтарап сызық қимадан өтпеуі қажет. Қиманың ядросын сызу үшін бейтарап сызығының қасиетін пайдаланамыз. Ол үшін бейтарап сызығын қима контурына жанастырып, қима ядросының нүктелерін табамыз:

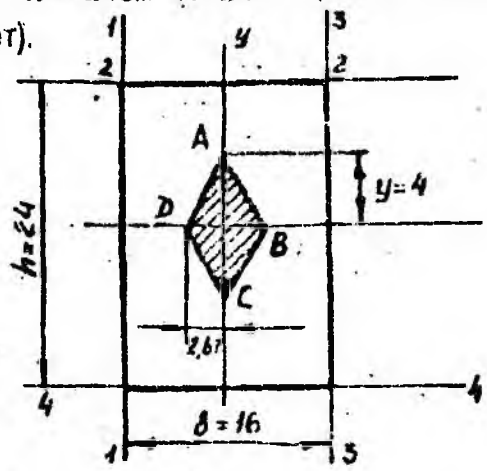
$$y_F = -\frac{i_x^2}{a_y}; \quad x_F = -\frac{i_y^2}{a_x}.$$

Алынған нүктелерді түзумен қосып, қима ядросын сызамыз.

Мысал. Қабырғалары $b = 16\text{см}$ және $h = 24\text{см}$ болатын қималы келген білеудің қима ядросын анықтаңыз (9.5-сурет).

Шешімі. Бейтарап сызықты тікбұрыштың қабырғаларыменен үйлестіреміз: контурді тіл бағыты бойынша нөмірлейміз, бұл кезде I—I жанама сол қабырғамен үйлеседі.

I—I бейтарап сызық X бас өске перпендикуляр болғандықтан, күш түсіру нүктесі X өсінде болады. Оның орнын келесі ара қатынастардан табуға болады:



9.5 - сурет

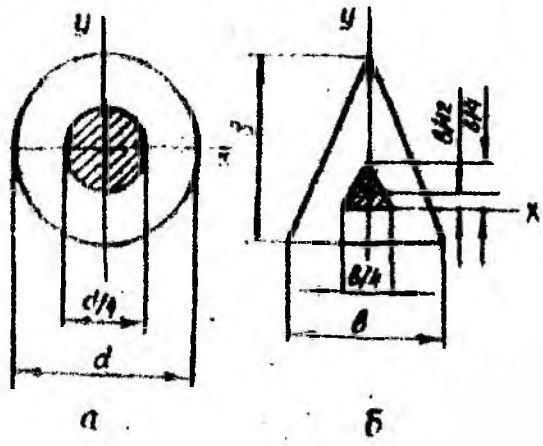
$$a_B = \frac{i_y^2}{x_B}; \quad a_B = -8\text{см}; \quad i_y^2 = \frac{b^2}{12} = 21{,}3\text{см}^2;$$

$$x_B = -\frac{21{,}3}{-8} = 2{,}67\text{см}.$$

B нүктесін аламыз. Бұған сәйкес C

нүктесін табамыз:

$$a_c = \frac{i_x^2}{y_c}; \quad a_c = 12\text{см}; \quad i_x^2 = \frac{h^2}{12} = 48\text{см}^2; \quad y_c = -\frac{48}{12} = -4\text{см}.$$



а б

9.6 - сурет

Бұларға үқсас Д және А нүктелерді анықтаймыз. Алынған нүктелерін түзумен қоссақ, қима ядросы ромб түрінде болады.

Кейбір қималар үшін алынатын шеңбер, тең қабырғалы үшбұрыш ядроларының түрімен өлшемдері 9.6-суретте көрсетілген.

§ 3. ИІЛУ МЕН БҰРАЛУДЫҢ БІРЛЕСКЕН ӘСЕРІ

Иілу мен бұралу бірлескені күрделі кедергінің дербес жағдайын бейнелейді, бұл кезде білеуде иілу және бұралу моменттері әсер етеді. Білеудің қауіпті нүктелерінде жазықтық кернеулік күйі болады, сондықтан беріктікті есептеу кезінде беріктік теориялары пайдаланылуы қажет.

Шеңбер қималы білеулерді есептеу. M_u қосынды иіуші моментті M_y және M_x екі иіуші моменттердің геометриялық қосындысы ретінде қарастыруға болады:

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Қосынды иілу моменті және $T_б$ бұралу моменті эпюраларын құрып, қауіпті қиманы табамыз. Алынған беріктік теория бойынша қауіпті қимадағы M_k келтірілген моментті анықтайды. Бұл момент есептеуді жүргізеді. Беріктік шарты мынадай түрде болады:

$$\sigma_k = \frac{M_k}{W} \le [\sigma];$$

мұндағы $W = \frac{\pi d^3}{32}$ — шеңберлі қиманың өстік кедергі моменті. Тұтас біліктің диаметрі формула бойынша анықталады:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_k}{\pi[\sigma]}};$$

қуыс білік үшін сырткы диаметрі мынадай түрде болады.

$$D = \sqrt[3]{\frac{32M_k}{\pi[\sigma](1-\alpha^4)}};$$

мұндағы $\alpha = \frac{d}{D}$, d — ішкі диаметр.

Негізгі теориялар бойынша келтірілген кернеулер мен моменттер формулалары мына кестеде көрсетілген:

9.1 - к е с т е. **Негізгі теориялар бойынша мәліметтер**

Беріктік теориясы	σ_k келтірілген кернеулер	M_k келтірілген моменттер
I (ең үлкен тік кернеулер)	$0,5\sigma + 0,5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$0,5M_u + 0,5\sqrt{M_u^2 + T_0^2}$
II (ең үлкен ұзару)	$\frac{1-\mu}{2}\sigma + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$\frac{1-\mu}{2}M_u + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{M_u^2 + T_0^2}$
III (ең үлкен жанама кернеу)	$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$\sqrt{M_u^2 + T_0^2}$
IV Форма өзгеруінің ең үлкен потенциалдық энергиясы	$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$	$\sqrt{M_u^2 + 0,75T_0^2}$
Мор теориясы	$(1-k)\sigma + k\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$(1-k)M_u + k\sqrt{M_u^2 + T_0^2}$

Бұл кестедегі σ және τ — тік және жанама кернеулер; μ — Пуассон коэффициенті; $k=\frac{\sigma_A}{2\tau_A}$ — созылымды материалдар үшін, $k=\frac{\sigma_б}{2\tau_б}$ — морт сынатын материалдар үшін.

Мысал. Үшінші беріктік теория бойынша біліктің диаметрін анықтаңыз. Берілген мәліметтер: $D_1=60$см, $D_2=40$см, $D_3=30$см, $a=100$см, $\alpha_1=120^\circ$, $\alpha_2=45^\circ$, $n=300$орам/мин, $N_2=20$а.к., $N_3=30$а.к. $[\sigma]=80$МПа (9.7а-сурет).

Шешімі. Білік бұралу мен иілу процестерінен тұрады. Әрбір шкив пен білікке берілген бұралу моменттері мынадай ара қатынастардан анықталады:

$$T_{3.б}=7{,}027\frac{N}{n}=0{,}477\text{кНм};$$

$$T_{2.б}=0{,}716\text{кНм};$$

$$T_{1.б}=T_{2.б}+T_{3.б}=1{,}193\text{кНм}.$$

Бұралу моменттері эпюрасы 9.7б-суретте бейнеленген.

Бельдіктердегі тартылыс күштерін мына формулалармен анықтаймыз:

Бірінші шкив: $T_{1.б}=(T_1'-t_1')\frac{D_1}{2}=t_1'\cdot\frac{D_1}{2}$;

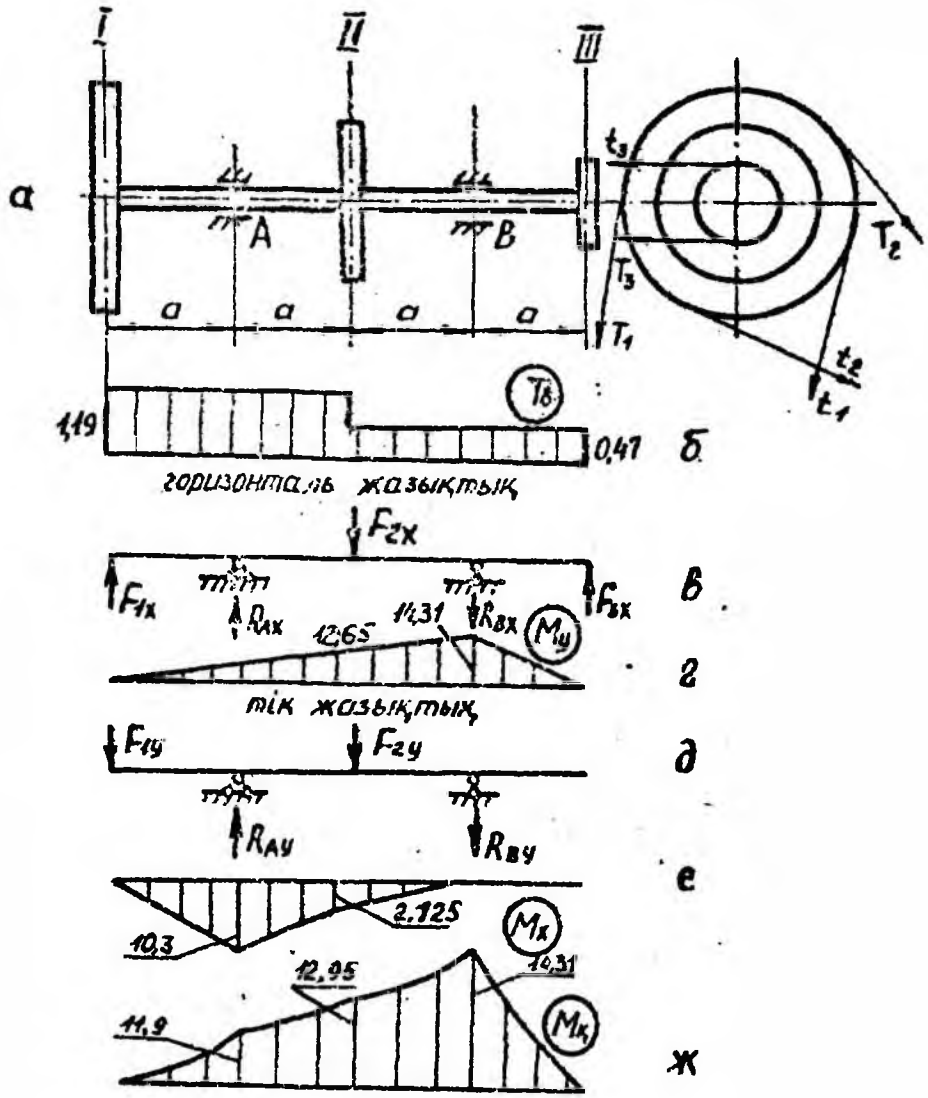
$$t_1'=2\frac{T_{1.б}}{D_1}=3{,}97\text{кН};$$

$$T_1'=2t_1'\leqq 7{,}94\text{кН}.$$

Екінші шкив:

$$t_2'=2\frac{T_{2.б}}{D_2}=2{,}385\text{кН};\quad T_2'=4{,}77\text{кН}.$$

Үшінші шкив:



9.7 - сурет

$$t_3' = \frac{2 \cdot T_{3.б}}{D_3} = 4,77\text{кН}; \quad T_3' = 9,54\text{кН}.$$

Шкивтен білікке есер ететін күштерді тік және көлденен құраушыларға жіктейміз:

$$F_{1y} = (T_1' + t_1')\sin 60^\circ = 10,3\text{кН}; \quad F_{2y} = (T_2' + t_2')\sin 45^\circ = 5.05\text{кН},$$

$$F_{1x} = (T_1' + t_1')\cos 60^\circ = 5,95\text{кН}; \quad F_{2x} = (t_2' + T_2')\sin 45^\circ = 5,05\text{кН}.$$

$$F_{3x} = \left(T_3' + t_3'\right) \cdot 1 = 14,\ 31\text{кН}.$$

Күш әсерінен білік тік және көлденең жазықтарда иіледі (9.7в,д сурет) Осы жазықтардағы эпюралар 9.7г,ж суреттерде көрсетілген.
Қосынды иіюші моменттердің мәндерін формула бойынша табамыз:

$$M_K = \sqrt{M_y^2 + M_x^2};\quad x = 1 \text{ болғанда } M_K = 11,9\text{кНм};$$

$x = 2$ болғанда $M_k = 12,95$кНм; $x = 3$ болғанда $M_K = 14.31$кНм.

Қауіпті қима деп В нүктедегі қиманы аламыз, себебі ондағы $M_K = 14,31$кНм иілу моменті және $T_6 = 0,47$ бұралу моменті бірлесіп әсер етеді.

Үшінші беріктік теория есептеу моменті мына формулада беріледі

$$M_e = \sqrt{M_K^2 + T_6^2} = 14,33\text{кНм}$$

Біліктің керекті диаметрі былайша анықталады:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_e}{\pi[\sigma]}} = 12,2\text{см}$$

$d = 125$мм деп аламыз

X тарау

ҚИСЫҚТЫҒЫ ҮЛКЕН БІЛЕУЛЕР

§ 1. НЕГІЗГІ ТҮСІНІКТЕР

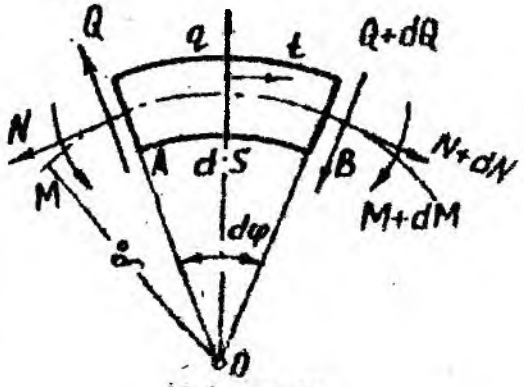
Бүл тарауда қисықтығы үлкен білеулер қарастырылады. Олардың қисық сызықты өсі жазық қисығын бейнелейді. Көлденең қималары — симметриялық болып келеді және олардың симметрия өстері білеудің қисықтық жазықтығында жатады. Қисықтығы үлкен білеу үшін $\frac{\rho}{h} < 5$, мүндағы ρ — білеу өсінің қисықтық радиусы, h — білеудің көлденең қимасының радиус бағытындағы өлшемі.

Осы жағдайда қисық білеудің кез келген қимасында барлық ішкі әсерлер үш түрлі компаненттерге келтіріледі: қисықтық жазықтығында әсер ететін иүші моментке, білеудің өсіне жанама бойынша бағытталған бойлық күшке және қиманың симметрия өсі бойынша бағытталған көлденең күшке.

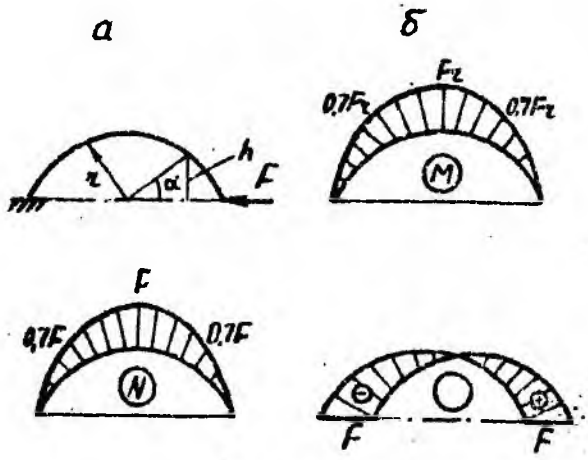
Қисық білеу (10.1-сурет) бөлігінің тепе-тендік шарттары былай беріледі:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM}{dS} + Q = 0; \\ \frac{dQ}{dS} - \frac{N}{\rho} + q = 0; \\ \frac{Q}{\rho} + \frac{dN}{dS} + t = 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(а)}$$

мүндағы q және t таралған күштердің радиал және жанама қарқындылықтары. Иүші момент білеудің өс қисықтығын үлғайтса, ал бойлық күш созса, онда олар оң деп саналады. Көлденең күш белгісі (а) қатынастарымен анықталады. Қисық білеудің ішкі күштерінің таралуын зерттеу үшін M,N және Q эпюраларды құрады. Оларды тексеру үшін (а) тәуелділіктермен қолданады.



10.1- сурет



10.2 - сурет

Мысал. Қисық сызықты білеу үшін $M(\alpha), N(\alpha)$ және $Q(\alpha)$ эпюраларын тұрғызыңыз (10.2а-сурет).

Шешімі. Арқалық пен жақтауды есептегенде декарттық координат жүйесін пайдаландық, ал қисық сызықты білеу үшін өрістік координат жүйесін пайдалану ыңғайлы. Қисық сызықты білеулер үшін ішкі күштерді анықтау тәртібі өзгеріссіз қалады.

Кез келген α және r координаттарымен анықталатын қимадағы иілу моменті, көлденең күш және бойлық күштер өрнектері мына түрлерде болады:

$$M(\alpha) = +Fr\sin\alpha;\ N = -F\sin\alpha;\ Q = F\cdot\cos\alpha.$$

Ішкі күштердің эпюраларын құру үшін олардың бірнеше қимадағы мәндерін табу керек. Бұрыштың әр түрлі мәндеріне сәйкес ішкі күштердің шамалары былай болады:

$\alpha = 0$ болғанда $M = 0;\ N = 0;\ Q = F;$

$\alpha = 45^\circ$ болғанда $M = 0,7Fr;\ N = -0,7F;\ Q = 0,7F.$

$\alpha = 90^\circ$ болғанда $M = Fa;\ N = F;\ Q = 0;$

$\alpha = 180^\circ$ болғанда $M = 0;\ N = 0;\ Q = -F.$

Табылған иілу моменттерінің және бойлық күш пен көлденең күштердің эпюралары 10.2б,в,г суретте көлтірілген.

§ 2. ЖАЗЫҚ ҚИСЫҚ БІЛЕУДІҢ ТАЗА ИІЛУІ КЕЗІНДЕГІ КЕРНЕУЛЕР

Қисық білеуде тік кернеулерді анықтау үшін келесі болжамдар пайдаланылады:

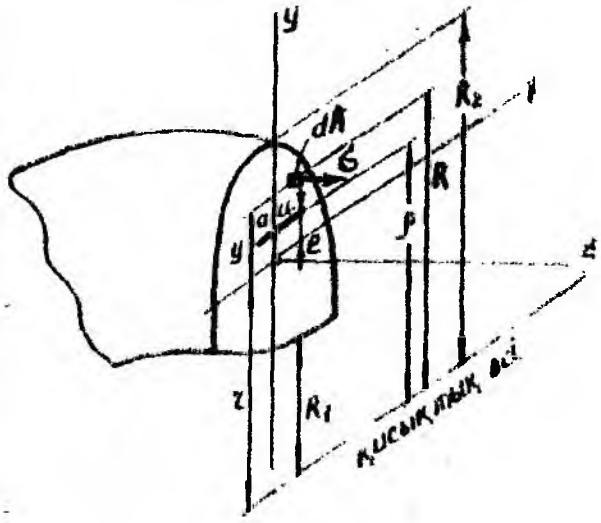
1) жазық қималар болжамы;

2) білеудің бойлық талшықтары бір бірін қыспайды.

Иілу моменті теңестіретін тік кернеулердің формуласы мынадай:

$$\sigma = \frac{M(\rho - r_0)}{Ae(r+y)} = \frac{My}{S\cdot R};$$

мұндағы ρ — өсінің қисықтық радиусы; r — бейтарап сызықтың радиусы; y — бейтарап сызықтан зерттейтін талшыққа дейінгі қашықтық; $e = \rho - r$ — қиманың ауырлық центрінен бейтарап сызығына дейін қашықтық; $S = Ae$ — бейтарап сызыққа қатысты барлық көлденең қима ауданның статикалық моменті (10.3-сурет).



10.3-сурет

Қисық білеуде бейтарап сызық қиманың ауырлық центрінен өтпейді. Ол ауырлық центрі мен қисықтық центрінің арасында орналасады. Бейтарап сызығының қисықтық радиусы кез келген қима үшін оның түріне байланысты және жалпы жағдайдағы өрнекпен анықталады:

$$r = \frac{A}{\int\limits_A \frac{dA}{R}}.$$

Кейбір қима түрлері үшін бейтарап сызығының қисықтық радиустердің мәндері 10.1-кестеде келтірілген.

Қисық білеулердің ең кең таралған түрлеріне арналған е-ны кестелер бойынша анықтауға болады; жалпы $e = k\rho$ болады. 10.2-кестеде k коэффициент мәндері ρ/a ара қатыска байланысты келтірілген, мұндағы a — ауырлық центрінен шеткі талшықтарға дейінгі қашықтық.

Тік кернеулер көлденең қима жағдайында гипербола заңы бойынша өзгереді. Ең үлкен кернеулер білеудің ішкі қисықтығы бойынша болады:

$$\sigma_1 = \frac{M(R_2 - r)}{AR_2(\rho - r)}$$

Сыртқы қисықтық бойынша кернеулер:

$$\frac{M(R_1 - r)}{AR_1(\rho - r)}$$

Тікбұрышты және шеңбер қималы қисық білеулердің жуық шамадағы есептерінде мына формуланы пайдалануға болады:

$$\sigma_i = -k_i \frac{M}{W}; \quad \sigma_c = k_c \frac{M}{W},$$

мұндағы W — өстік кедергі моменті. Шеңбер үшін $W = \frac{\pi d^3}{32}$, тік бұрыш үшін $W = \frac{bh^2}{6}$, k_i және k_c — коэффициенттер (10.3-кесте). $\frac{\rho}{h} > 1$ болғанда тікбұрыштық қималарға арналған коэффициентті шамалап алуға болады:

$$k_i = \frac{6\frac{\rho}{h} - 1}{6\frac{\rho}{h} - 3};$$

$\frac{\rho}{d} > 1$ болғанда шеңберлі қималар үшін

$$k_i = \frac{8\frac{\rho}{d} - 1}{8\frac{\rho}{d} - 4}.$$

Келденең қималардың күрделі түрлері үшін бейтарап сызығының қисықтық радиусын жуық анықтауға болады, ол үшін қиманы сызықтармен алқаптарға бөледі, сосын әр алқаптар аудандарын қосады:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta A_i}{R_i}};$$

мұндағы i — алқаптың номері (i=1,2,3,...n), n — алқаптардың саны.

§ 3. ИІЛУ КЕЗІНДЕГІ ЖАЛПЫ ЖАҒДАЙДА ПАЙДА БОЛАТЫН ЖАЗЫҚ ҚИСЫҚ БІЛЕУДІҢ КЕРНЕУЛЕРІ

Қисық білеудің көлденең қимасындағы тік кернеулер M және N тік кернеулерінің алгебралық қосындысына тең:

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_N; \quad \sigma = \frac{M_y}{SR} + \frac{N}{A};$$

мұндағы S — бейтарап сызыққа қатысты қиманың статикалық моменті,

R — зерттейтін талшықтардың қисықтық радиусы.

Тік кернеулер бойынша беріктік шарт былай анықталады:

$$\max \sigma \le [\sigma].$$

Қисық білеудегі жанама кернеулер тік білеудің көлденең қимасына үксас таралады, сондықтан жанама кернеулер бойынша беріктік шартты табамыз:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{bI} \le [\tau].$$

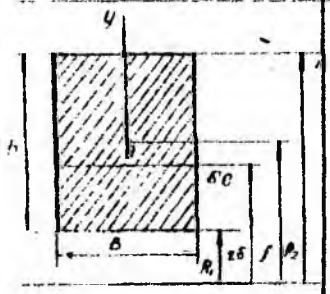
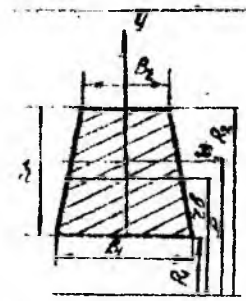
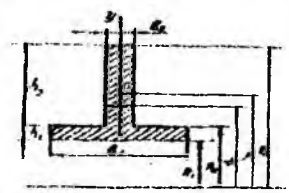
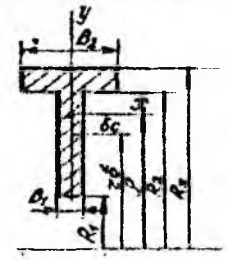
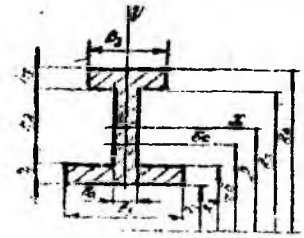
§ 4. ҚИСЫҚ БІЛЕУЛЕРДІҢ ДЕФОРМАЦИЯСЫ

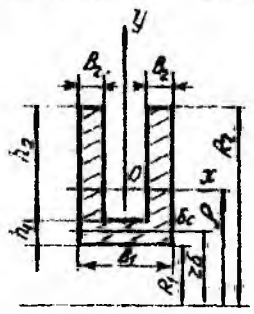
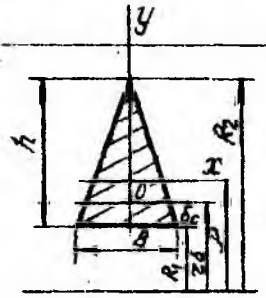
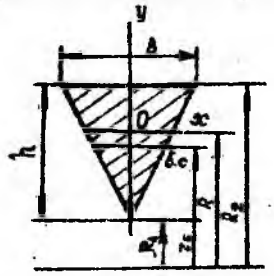
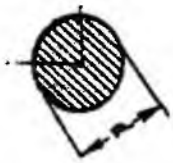
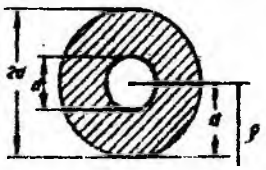
Потенциалдық энергиясы жазықтық иілудің жалпы жағдайында келесі түрде болады:

$$U = \int_S \frac{M^2 dS}{2EA\rho} + \int_S \frac{N^2 dS}{2EA} + \int_S \frac{MN dS}{EA\rho} + \int_S \frac{Q^2 dS}{2GA}.$$

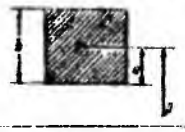
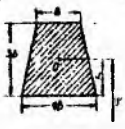
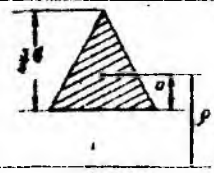
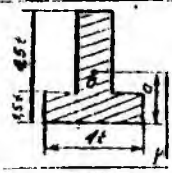
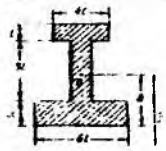
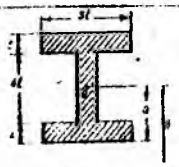
мұндағы M, N және Q ішкі әсерлердің алым мәндері k — көлденең қимасының формасына байланысты коэффициент: тікбұрыш үшін $k = 1,2$, шеңбер үшін $k \approx 1,1$, қос тавр үшін $k = \frac{A}{A_T}$ (мұндағы A — қос таврдың көлденең қимасының ауданы A_T — қос таврдың табандарының ауданы) E және G — созылу және сығылу кезіндегі серпімділік модульдері.

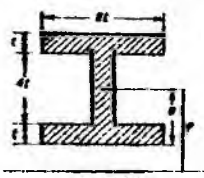
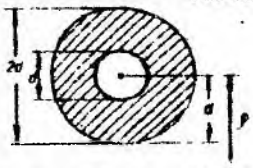
10.1 - к е с т е. Әр түрлі қималарға арналған бейтарап сызықтың қисықтық радиусы

Қима 0 — ауырлық центрі	r
Тіктөртбұрыш 	$r=\frac{h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}=\frac{h}{\ln\frac{1+\frac{h}{2R}}{1-\frac{h}{2R}}}$ $\ln\frac{R_2}{R_1}=\frac{h}{R}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2R}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2R}\right)^4+\ \right]$
Трапеция 	$r=\frac{h(b_2+b_1)}{2\left[\frac{b_1R_2-b_2R_1}{h}\ln\frac{R_2}{R_1}-(b_1-b_2)\right]}$
Тавр 	$r=\frac{b_2h_2+b_1h_1}{b_2\ln\frac{R_3}{R_2}+h_1\ln\frac{R_2}{R_1}}$
Тавр 	$r=\frac{b_2h_2+b_1h_1}{b_2\ln\frac{R_3}{R_2}+h_1\ln\frac{R_2}{R_1}}$
Қос тавр 	$r=\frac{b_1h_1+h_2h_2+b_3h_3}{h_1\ln\frac{R_2}{R_1}+b_2\ln\frac{R_3}{R_2}+b_3\ln\frac{R_4}{R_3}}$

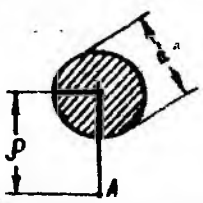
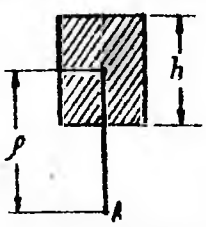
1	2
Үшбұрыш 	$r=\dfrac{b_1h_1+2b_2h_2}{h_1\ln\dfrac{R_2-h_2}{R_1}+2b_2\ln\dfrac{R_2}{R_2-h_2}}$
	$r=\dfrac{h}{2\left[\dfrac{R_2}{h}\ln\dfrac{R_2}{R_1}-1\right]}$
Үшбұрыш 	$r=\dfrac{h}{2\left[1-\dfrac{R_1}{R_2}\ln\dfrac{R_2}{R_1}\right]}$
Шенбер 	$r=\dfrac{d^2}{4\left(2R-\sqrt{4R^2-d^2}\right)}$ $r=\dfrac{\sqrt{4R^2-d^2}+\sqrt{4R^2-D^2}}{4}=$
Сакина 	$=\dfrac{D^2-d^2}{4\left(\sqrt{4R^2-d^2}-\sqrt{4R^2-D^2}\right)}$
Сопақ қима	$r=\dfrac{d^2}{4\left(2R-\sqrt{4R^2-d^2}\right)}$

10.2 - кесте. k коэффициентінің мәндері

$\frac{\rho}{a}$				
1,2	0,224	0,305	0,336	0,352
1,4	0,151	0,204	0,229	0,243
1,6	0,108	0,149	0,168	0,179
1,8	0,084	0,112	0,128	0,138
2,0	0,069	0,090	0,102	0,110
2,2	0,058	0,077	0,084	0,092
2,4	0,049	0,065	0,071	0,078
2,6	0,042	0,055	0,061	0,067
2,8	0,036	0,047	0,053	0,058
3,0	0,030	0,041	0,046	0,050
3,5	0,022	0,028	0,033	0,037
4,0	0,016	0,021	0,024	0,028
6,0	0,0070	0,0093	0,011	0,012
8,0	0,039	0,0052	0,0060	0,0060
10,0	0,0025	0,0033	0,0039	0,0039
$\frac{\rho}{a}$				
1,2	0,361	0,418	0,409	0,408
1,4	0,251	0,299	0,292	0,285
1,6	0,186	0,229	0,224	0,208
1,8	0,144	0,183	0,178	0,160
2,0	0,116	0,149	0,144	0,127
2,2	0,096	0,125	0,120	0,104
2,4	0,082	0,106	0,103	0,088
2,6	0,070	0,091	0,089	0,077
2,8	0,060	0,079	0,077	0,067
3,0	0,052	0,069	0,067	0,058
3,5	0,038	0,052	0,049	0,041
4,0	0,029	0,040	0,038	0,030
6,0	0,013	0,018	0,018	0,013
8,0	0,006	0,010	0,010	0,0076
10,0	0,0039	0,065	0,006	0,0048

$\frac{\rho}{a}$			
1,2	0,453	0,269	
1,4	0,319	0,182	
1,6	0,236	0,134	
1,8	0,183	0,104	
2,0	0,147	0,083	
2,2	0,122	0,068	
2.4	0,104	0,057	
2,6	0,090	0,049	
2,8	0,078	0,043	
3,0	0,067	0,038	
3,5	0,048	0,028	
4,0	0,036	0,020	
6,0	0,016	0,0087	
8,0	0,0089	0,0049	
10,0	0,0057	0,0031	

10.3 - к е с т е. k_i және k_c коэффициенттерінің мәндері

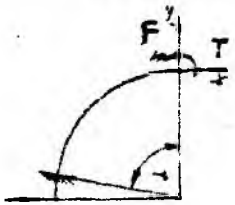
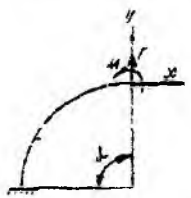
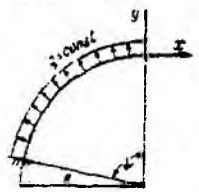
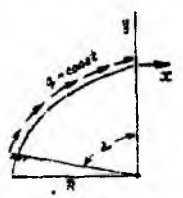
	$\frac{\rho}{d}$	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
	k_i	1,60	1,36	1,26	1,17	1,12	1,09	1,08
	k_c	0,73	0,82	0,86	0,91	0,93	0,95	0,96
	$\frac{\rho}{h}$	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
	k_i	1,53	1,29	1,21	1,12	1,09	1,06	1,05
	k_c	0,75	0,82	0,86	0,92	0,95	0,97	0,98

10.4 - к ө с т ө. Қисық білеулерде орын ауыстыруды анықтау кезінде жиі кездесетін анықталған интегралдардың мәндері

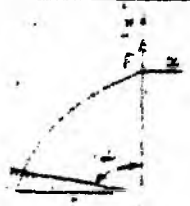
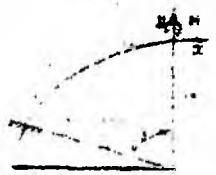
Интеграл	Интегралдаудың шектері			
	0-ден α дейін	0-ден $\frac{\pi}{4}$ -дейін	0-ден $\frac{\pi}{2}$ дейін	0-ден π -дейін
$\int \sin\varphi d\varphi$	$1-\cos\alpha$	0,293	1	2
$\int \cos\varphi d\varphi$	$\sin\alpha$	0,707	1	0
$\int \sin^2\varphi d\varphi$	$-\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{\alpha}{2}$	0,143	0,785	1,571
$\int \cos^2\varphi d\varphi$	$\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{\alpha}{2}$	0,643	0,785	1,571
$\int \sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi$	$\frac{\sin^3\alpha}{3}$	0,118	0,333	0
$\int \cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi$	$\frac{1-\cos^3\alpha}{3}$	0,216	0,333	0,667
$\int \sin 2\varphi d\varphi$	$\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\alpha}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
$\int \cos 2\varphi d\varphi$	$\frac{1}{2}\sin 2\alpha$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\int \sin\varphi\cos\varphi d\varphi$	$\frac{\sin^2\alpha}{2}$	0,25	0,5	0

1	2	3	4	5
$\int \varphi \sin \varphi d\psi$	$\sin\alpha - \alpha\cos\alpha$	0 152	1	3,141
$\int \varphi \cos \varphi d\psi$	$\cos\alpha + \alpha\sin\alpha - 1$	0.262	0 571	2
$\int \varphi \sin^2 \varphi x d\psi$	$\frac{1}{4}\left(\alpha^2 - \alpha\sin 2\alpha\right)$ $-\frac{1}{8}(\cos 2\alpha - 1)$	0 0833	0 868	2 47
$\int \varphi \cos^2 \varphi x d\psi$	$\frac{1}{4}\left(\alpha^2 + \alpha\sin 2\alpha\right) +$ $+\frac{1}{8}(\cos 2\alpha - 1)$	0 226	0 868	2 47
$\int \varphi \sin 2\varphi x d\psi$	$\frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\alpha\cos 2\alpha}{2}$	0 ≤5	0 785	1.571
$\int \varphi \cos 2\varphi x d\psi$	$\frac{1}{4}(\cos 2\alpha - 1) + \frac{\alpha\sin 2\alpha}{2}$	0 143	0,5	0
$\int \sin(\alpha - \varphi)\sin\varphi x d\psi$	$\frac{\sin\alpha}{2} - \frac{\alpha\cos\alpha}{2}$	0 0/6	0 5	1.571
$\int \cos(\alpha - \varphi)\sin\varphi x d\varphi$	$\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha$	0 278	0 /85	0

10.5 - кесте. Консольді, тұрақты қималы қисық білеудің өзінің бос ұшы жазықтығындағы орын ауыстыруы (мұндағы y, x, θ тік, көлденең және бұралу орыштары)

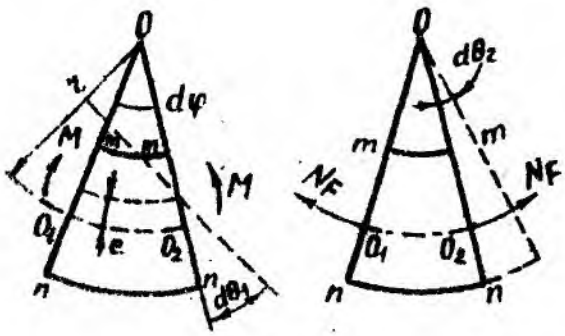
Нобайы	y	x	θ
	$\frac{R^2}{EJ}\left[M(1-\cos\alpha)+FR\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)-\right.$ $\left.-TR\frac{(1-\cos\alpha)^2}{2}\right]$	$\frac{R^2}{EJ}\left[-M(\alpha-\sin\alpha)-FR\frac{(1-\cos\alpha)^2}{2}+\right.$ $\left.+TR\left(\frac{3}{2}\alpha-2\sin\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)\right]$	$\frac{R}{EJ}[M\alpha+FR(1-\cos\alpha)+$ $-TR(\alpha-\sin\alpha)]$
	$\frac{R^2}{EJ}[M(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)+$ $+FR\left(\alpha+\frac{1}{2}\alpha\cos 2\alpha-\frac{3}{4}\sin 2\alpha\right)-$ $-TR\left(\cos\alpha-\frac{3}{4}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\alpha\sin 2\alpha-\frac{1}{4}\right)]$	$\frac{R^2}{EJ}[-M(\alpha\sin\alpha-1+\cos\alpha)-$ $-FR\left(\cos\alpha-\frac{3}{4}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\alpha\sin 2\alpha-\frac{1}{4}\right)+$ $+TR\left(\alpha-\frac{1}{2}\alpha\cos 2\alpha+\frac{3}{4}\sin 2\alpha-2\sin\alpha\right)]$	$\frac{R}{EJ}[M\alpha+FR\times$ $\times(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)-TR\times$ $\times(\alpha\sin\alpha-1+\cos\alpha)]$
	$\frac{qR^4}{EJ}\frac{(1-\cos\alpha)^2}{2}$	$-\frac{qR^4}{EJ}\left(\frac{2}{3}\alpha-2\sin\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)$	$\frac{qR^3}{EJ}(\alpha-\sin\alpha)$
	$\frac{qR^4}{EJ}\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha\cos\alpha-\sin\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)$	$\frac{qR^4}{EJ}\left(\frac{\alpha^2}{2}-\alpha\sin\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{2}\right)$	$\frac{qR^3}{EJ}\left(1-\cos\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)$
	$\frac{mR^3}{EJ}(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)$	$\frac{mR^3}{EJ}(1-\cos\alpha-\alpha\sin\alpha)$	$\frac{mR^2}{EJ}\frac{a^2}{2}$

10.6 - к е с т е. **Консольді, тұрақты қималы қисық білеудің бос ұшының перпендикуляр жазықтығындағы орын ауыстыруы (мұндағы λ — EJ иілу және $GI_б$ бұралу кезіндегі қатаңдықтардың қатынастары)**

	yx жазықтығына перпендикуляр	x өсіндегі айналу, бұралу бұрыштары	y өсіндегі айналу, бұралу бұрыштары
	$\frac{FR^3}{EJ}\left(\frac{1+3\lambda}{2}\alpha+\right.$ $\left.-\frac{}{4}\sin 2\alpha-2\lambda\sin\alpha\right)$	$\frac{FR^2}{EJ}\left(\frac{\lambda-1}{2}\sin 2\alpha+\right.$ $\left.+\frac{1+\alpha}{2}\alpha-\lambda\sin\alpha\right)$	$\frac{FR^2}{EJ}\left[\frac{\lambda-1}{2}\sin^2\alpha+\right.$ $\left.+\lambda(1-\cos\alpha)\right]$
	$\frac{MR^2}{EJ}\left(\frac{\lambda-1}{4}\sin 2\alpha+\frac{1+\lambda}{2}\lambda-\lambda\sin\alpha\right)$	$\frac{MR}{EJ}\left(\frac{1+\lambda}{2}\alpha+\frac{\lambda-1}{2}\sin 2\alpha\right)$	$\frac{MR}{EJ}\cdot\frac{\lambda-1}{2}\sin^2\alpha$
	$\frac{MR^2}{EJ}\left[\frac{\lambda-1}{2}\sin^2\alpha+\lambda(1-\cos\alpha)\right]$	$\frac{MR}{EJ}\cdot\frac{\lambda-1}{2}\sin^2\alpha$	$\frac{MR}{EJ}\left(\frac{1+\lambda}{2}\alpha\frac{\lambda-1}{4}\sin 2\alpha\right)$
	$\frac{qR^3}{EJ}\left[(1-\cos\alpha)^2+\lambda(\alpha-\sin\alpha)^2\right]$	$\frac{qR^3}{EJ}\left[(\lambda+1)(1-\cos\alpha)-\right.$ $\left.\frac{\lambda-1}{4}(1-\cos 2\alpha)-\lambda a\sin\alpha\right]$	$\frac{qR^3}{EJ}\left[(\lambda+1)\left(\sin\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)+\right.$ $\left.\frac{\lambda-1}{-}\sin 2\alpha-\lambda a\cos\alpha\right]$

О р ы н ауыстыруларды анықтау. Қисық білеудің орын ауыстыруларын анықтау үшін Мор әдісін қолдануға болады.

Қисықтығы үлкен білеу үшін жазықтық иілу кезінде M_F және N_F әсерлерінен болатын элементтің деформациясы $\Delta(dS)$ үзарудан және $d\theta$ салыстырмалы бұралу бұрышынан құрылады. Иілу моменті тудырған қималардың өзара бұралу бұрышын былай анықтауға болады (10.4-сурет):



10.4 - сурет

$$\Delta d\varphi = d\theta_1 = \frac{M_F dS}{ES} = \frac{M_F dS}{ESr}.$$

Элементтік талшықтардың ұзындығы бірдей болмағандықтан, қималардың өзара бұралу бұрышы болады:

$$d\theta_2 = \frac{N_F dS}{EAr}.$$

Толық бұралу бұрышы мынаған тең:

$$d\theta = d\theta_1 + d\theta_2 = \frac{M_F dS}{ESr} + \frac{N_F dS}{EAr}.$$

Өстік күштердің әсерінен элементтің ұзаруы былайша жазылады:

$$\Delta(dS)_1 = \frac{N_F dS}{EA}, \quad \Delta(dS)_2 = \frac{M_F dS}{EAr}.$$

Өстік талшықтың толық ұзаруы

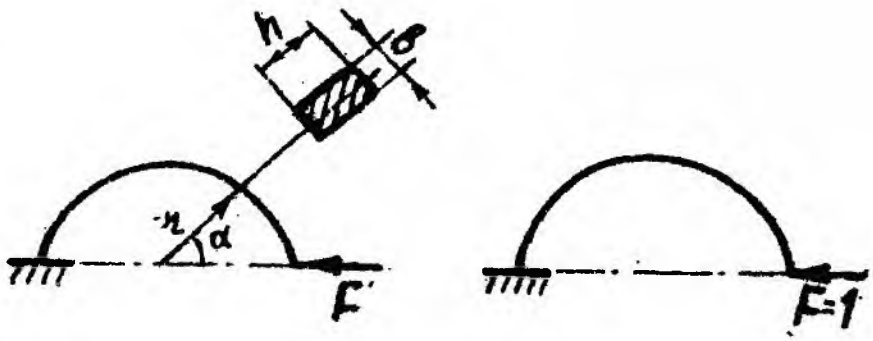
$$\Delta(dS) = \frac{N_F dS}{EA} + \frac{M_F dS}{EAr}.$$

Қисықтығы үлкен білеу үшін орын ауыстыру мына формуламен анықталады:

$$\Delta_{iF} = \int_S \left[\frac{\overline{M}_i M_F}{ESr} + \frac{\overline{N}_i M_F + \overline{M}_i N_F}{EAr} + \frac{\overline{N}_i N_F}{EA} + k\frac{\overline{Q}_i Q_F}{GA} \right] dS.$$

Іс жүзінде көлденең күштің әсерін ескермейді, сондықтан соңғы қосылғышты алмайды.

Мысал. Тікбұрышты қималы қисық білеу үшін (10.5-сурет) бос ұшының көлденең орын ауыстыруын анықтаңыз, егер $\frac{r}{h} = 1$, $k = 1$, $G = 0,4E$.



10.5 - сурет

Шешімі. Кез келген α және r координаттарымен анықталатын қимадағы ішкі әсерлердің өрнектері мына түрде болады:

$$M_\alpha = Fr\sin\alpha;\ N = -F\sin\alpha;\ Q = F\cos\alpha.$$

Енді білеуге $F_1 = 1$ бірлік көлденең күшті түсіреміз, сосын бірлік жүктелген жағдайда ішкі әсерлерді табамыз:

$$\overline{M}_1 = r\sin\alpha;\ \overline{N}_1 = -\sin\alpha;\ \overline{Q}_1 = \cos\alpha.$$

Ішкі әсерлердің өрнектерін орын ауыстыру формуласына қойып, білеуді бүкіл ұзындығы бойынша интегралдап және $dS = rd\alpha$ еске алып, көлденең орын ауыстыруын табамыз:

$$\Delta = \int_0^\pi \frac{Fr\sin\alpha r\sin\alpha rd\alpha}{EAer} + \int_0^\pi \frac{F\sin\alpha\sin\alpha rd\alpha}{EA} + 1{,}2\int_0^\pi \frac{Fr\cos\alpha\cos\alpha rd\alpha}{0{,}4EA} =$$

$$= \frac{Fr^2\pi}{2EAe} + \frac{Fr\pi}{2EA} + \frac{3Fr\pi}{2EA} = \frac{\pi Fr}{2EA}\left(\frac{r}{e} + 1 + 3\right).$$

Анықталған интегралдардың мәндерін (10.4-кесте) аламыз. $\frac{r}{h} = 1$ болғанда

$e = 0{,}0897h$, онда $\frac{r}{e} = \frac{h}{e} = \frac{h}{0{,}0897h} = 11{,}11$

Бұл ара қатынасты орын ауыстыру өрнегіне қойып, ақырғыда төмендегі теңдікті аламыз:

$$\Delta = \frac{\pi Fr}{2EA}(11{,}11 + 1 + 3) = 7{,}55\frac{\pi Fr}{EA}.$$

10.4 кестеде қисық білеулердегі орын ауыстыруды анықтау кезіндегі жиі кездесетін анықталған интегралдардың мәндері көрсетілген. 10.5-10.6 кестелерде консольді, тұрақты қималы қисық білеулердің өздерінің бос ұшы жазықтықтарындағы және перпендикуляр жазықтықтарындағы орын ауыстырулары келтірілген

XI тарау

СТАТИКАЛЫҚ АНЫҚТАЛМАЙТЫН ЖҮЙЕЛЕР

§ 1 СТАТИКАЛЫҚ АНЫҚТАЛМАЙТЫН ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ЕСЕПТЕУ ТІЗБЕГІ

Статикалық анықталмайтын жүйелер деп сыртқы реакциялар мен ішкі күштерді статикалық теңдеулермен анықтау жеткіліксіз болатын жүйелерді айтады. Қарастырылатын жүйеге арналып құрылатын белгісіз (тірек әсері, ішкі күш әсері) және тәуелсіз статикалық теңдеулер санының арасындағы айырмасын *статикалық анықталмағандық дәрежесі не „артық" белгісіздердің саны* деп атайды. Осы санға байланысты жүйелер бір, екі, үш,... n рет статикалық анықталмаған делінеді. Статикалық анықталмағандық дәрежесі жазық жүйелер үшін келесі формуламен анықталады:

$$n = 3k - m,$$

мұндағы, k — жабық контурлардың саны, m — топсалардың саны.

Машина жасау саласында сырықтық және жақтаулық жүйелердің статикалық анықталмағандығын анықтауда күш әдісі кең түрде қолданылады. Оның мәнісі мынада: берілген статикалық анықталмайтын жүйе артық сыртқы және өзара байланыстардан босатылып, олардың әсері күштермен және моменттермен ауыстырылады. Олардың шамасын байланыстан босатылған жүйеге қойылатын орын ауыстыру жөніндегі шектеулерге сәйкес келетін етіп тандайды. Сонымен, көрсетілген әдіспен шешу кезінде күш белгісіз болады. „Күш әдісі" деп аталуы да содан. Мұндай әдіс біреу ғана емес. Құрылыс механикасында басқа да әдістер, мәселен белгісіз ретінде күш әсері емес, сырықтық жүйенің элементтеріндегі орын ауыстыру алынатын деформация әдісі пайдаланылады.

Сонымен, күш әдісімен есептеу мынадай тізбекте жүргізіледі:

1) статикалық анықталмағандық дәрежесін анықтайды;

2) қосымша байланыстарды алып тастайды. Қосымша байланыстардан босатылған жүйе статикалық анықталған болады. Ол *негізгі жүйе* деп аталады. Әрбір статикалық анықталған сырықтық жүйе үшін әдетте негізгі жүйелерді қалауымызша тандауға болады. Бірақта бұл жүйенің кинематикалық өзгермейтіндігін қамтамасыз ету керек;

3) негізгі жүйені берілген сыртқы және белгісіз күш әсерлерімен артып, *баламалы жүйені* алады;

4) берілген жүйе негізгі жүйеге баламалы болу үшін белгісіз күш әсерлерін түсіру нүктелерінің бағыттарында орын ауыстыру нөлге тең болуы керек. Алынған теңдеулерден белгісіз күш әсерлерінің мәнін табады;

5) белгісіз күш әсерлерін анықтаған соң ішкі күштердің эпюраларын құрады да көлденең қималарын таңдап, беріктігін тексереді.

§ 2. КҮШ ӘДІСІНІҢ КАНОНДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ

Белгісіз күш әсерлерінің бағыттарында орын ауыстыру нөлге теңдігін өрнектейтін теңдеулер анық ереже бойынша (канон түрде) құрылады. Канондық теңдеудің саны жүйенің статикалық анықталмағандық дәрежесіне тең болады.

Канондық теңдеулер келесі түрде жазылады:

бір белгісіз күш әсері бар жүйе үшін

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0;$$

екі белгісіз күш әсерлері бар жүйе үшін

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0$$

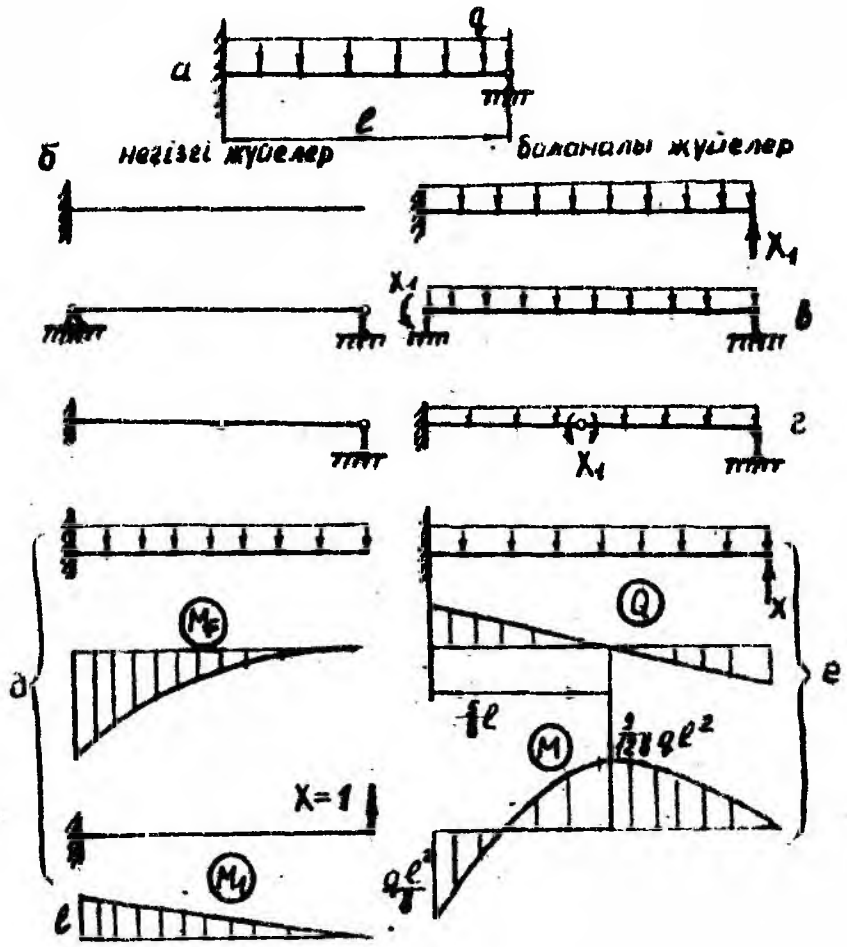
n рет статикалық анықталмаған жүйе үшін

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \ldots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0,\\
&\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \ldots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0,\\
&\ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \ldots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0.
\end{aligned}\right|$$

Мысал ретінде бір рет статикалық анықталмаған аралықты (11.1а-сурет) қарастырайық. 11.1б,в-суреттерде бірнеше негізгі және баламалы жүйелер көрсетілген. Негізгі жүйелердің арасында ең жақсысы — бірінші нобайы. Бұл нобайда тірек реакцияларды анықтау қажеттігі тумайды. Өйткені, аралықтардағы ішкі күштерді бос ұшынан бастап анықтауға болады. Канондық теңдеу мына түрде жазылады:

$$X_1\delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

δ_{11}, Δ_{1F} коэффициенттерді Верещагин тәсілі бойынша анықтайды. Ол үшін 11.1г-суретте M_1 эпюрасы, 11.1д-суретте M_F эпюрасы көрсетілген.



11.1 - сурет

$$\delta_{11} = \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{1}{EI} = \frac{l^3}{3EI};$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} l\right] = \frac{ql^4}{8EI}.$$

δ_{11}, Δ_{1p} коэффициенттерді конондық тендеуге қойып аламыз

$$\frac{l^3}{3} X_1 - \frac{ql^4}{8} = 0,$$

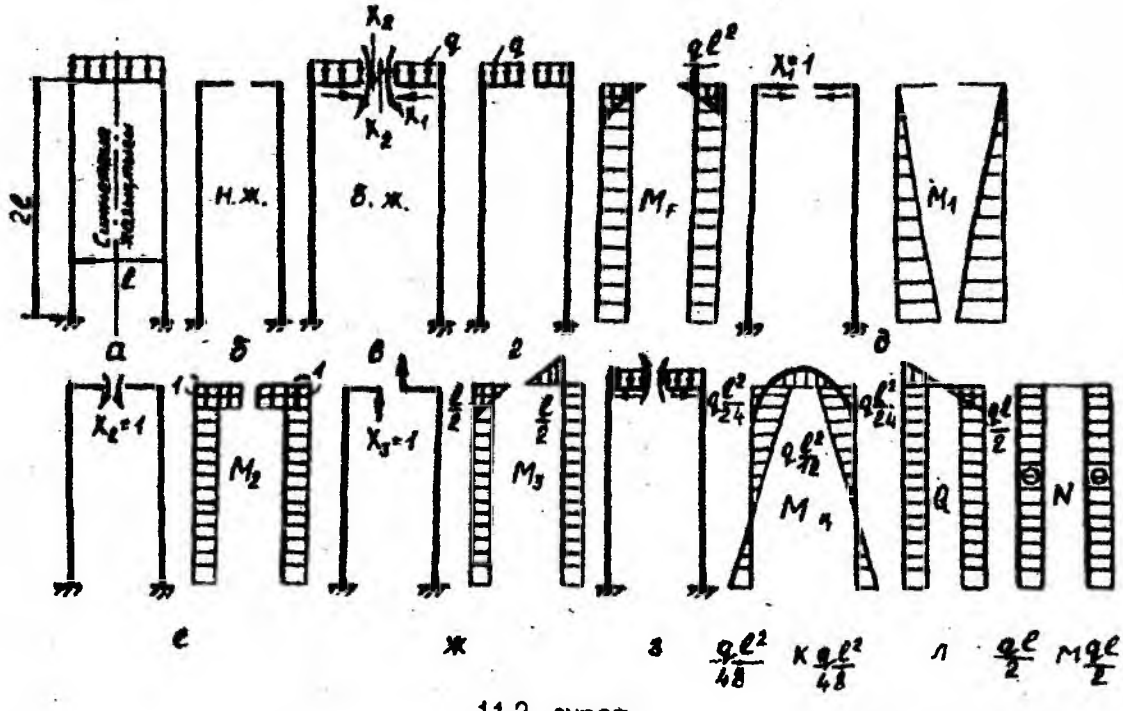
одан $X_1 = \frac{3}{8} ql$. 11.1е суретте келтірілген күш пен моменттердің эпюралары тұрғызылған. Келтірілген басқа жүйенің анық та пәтижесі дәл сондай болуы

керек. Енді жақтауға симметриялық және қиғаш симметриялық күштер түсіру жағдайын қарастырамыз. *Симметриялық күш* деп жақтаудың оң жағына түсірілген барлық сыртқы күштер сол жағына түсірілген күштердің айнадағы кескіні болатын күштерді айтамыз.

11.2а-суретте геометриялық сипаттамасы берілген симметриялы жақтау көрсетілген. Оның оң жағы симметрия жазықтығына сәйкес сол жағының айнадағы кескіні болады. Бұл жақтау үш рет статикалық анықталмаған. Мұндай жақтауды есептеу кезінде есептің шешуін ықшамдауға және іздестіріліп отырған X_1, X_2, X_3 күш әсерлерінің санын азайтуға болады.

Симметриялық күш деп жақтаудың оң жағына түсірілген күштер сол жағына түсірілген күштердің айнадағы кескіні болатын күштерді айтамыз: q, X_1, X_2. Қиғаш симметриялық немесе антисимметриялық күш деп жақтаудың оң жағына түсірілген күштер сол жағына түсірілген күштердің қарама-қарсы таңбамен алынған айнадағы кескіні болатын күштерді айтамыз: X_3.

Енді келесі ережені дәлелдеу қиын емес:
симметрия жазықтығында симметриялы жақтауға дәл сондай күш түсірілсе қиғаш симметриялық күш әсерлері, ал қиғаш симметриялық сыртқы күштер түсірілсе симметриялық күш әсерлері нөлге тең болады. 11.2а суретте көрсетілген симметриялық жақтауды симметрия жазықтығында тіліп, негізгі жүйені таңдап алайық (11.2б-сурет).



11.2 - сурет

Канондық теңдеулер жүйесі мына түрде жазылады.

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1F} = 0;$$

$$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2F} = 0;$$

$$X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3F} = 0.$$

Бұл теңдеулерде коэффициенттердің көбі нөлге айналатынын байқауға болады. Олардың бір индексі симметриялық, ал екіншісі киғаш симметриялық әсерге қатысты коэффициенттері мынадай: $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$, $\delta_{23} = \delta_{32} = \Delta_{3F} = 0$

Қалған коэффициенттер жақтау тура бөліктерден құрылғандықтан, оларды Верещагин тәсілі бойынша анықтауға болады:

$$\Delta_{1F} = 2\left(\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 2l\right)\cdot\frac{ql^2}{8EI} = \frac{ql^4}{2EI};$$

$$\Delta_{2F} = 2\left[\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{l}{2}\cdot 1\right) + \frac{ql^2}{8}\cdot 2l\cdot 1\right]\cdot\frac{1}{EI} = \frac{13}{24}ql^2;$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 2\cdot\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}2l\cdot 2l\cdot 1\right) = \frac{4l^2}{EI};$$

$$\delta_{11} = 2\left(2l\cdot\frac{2l}{2}\right)\frac{2}{3}2l\cdot\frac{1}{EI} = \frac{16}{3EI}l^3,$$

$$\delta_{22} = 2\cdot\frac{1}{EI}\left[\left(\frac{l}{2}\cdot 1\right)\cdot 1 + (2l\cdot 1)\cdot 1\right] = \frac{5l}{EI},$$

$$\delta_{33} = 2\cdot\frac{1}{EI}\left[\left(\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{2} + \left(\frac{l}{2}\cdot 2l\right)\frac{l}{2}\right] = \frac{13}{12}\frac{l^3}{EI}.$$

11.2в суретте баламалы жүйе көрсетілген, ал 11.2г,д,е,ж суреттерде M_1, M_2, M_3, M_F эпюралары тұрғызылған.

Табылған коэффициенттердің мәнін канондық теңдеулерге қоямыз

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0;$$

$$X_3 \cdot \delta_{33} = 0.$$

$\delta_{33} \neq 0$ нөлге тең болмағандықтан, $X_3 = 0$. Канондық теңдеулерді шешіп, X_1 және X_2 табамыз:

$$X_1 = \frac{ql}{32}; \quad X_2 = \frac{ql^2}{12}.$$

11.23-суретте табылған X_1, X_2 күштері мен баламалы жүйе көрсетілген, ал 11.2к,л,м-суреттерде M_{FK}, Q_K және N эпюралар тұрғызылған.

11.1-кестеде жиі кездесетін қарапайым статикалық анықталмаған жақтаулар үшін есептеу формулалары келтірілген.

Жоғарыда қарастырылған H_A, H_B және M_A, M_B белгісіздерді 11.1 кестеде келтірілген формула бойынша анықтауға болады.

Алдымен γ коэффициентін табамыз:

$$\gamma = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l} = \frac{2l}{l} = 2.$$

Сосын H_A, H_B және M_A, M_B анықтаймыз:

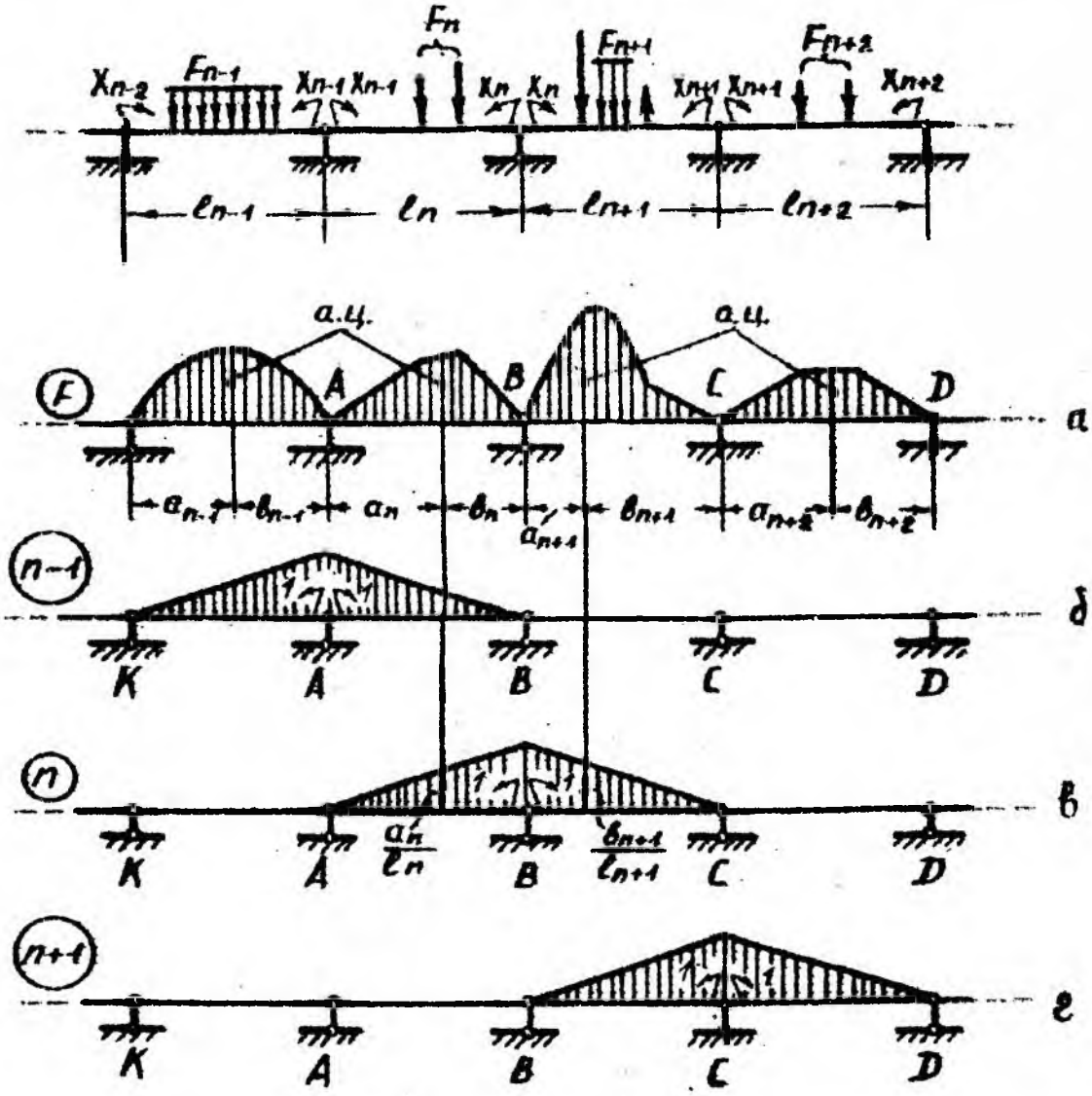
$$H_A = H_B = \frac{ql^2}{4h} \cdot \frac{1}{2+\gamma} = \frac{ql^2}{4 \cdot 2l} \cdot \frac{1}{2+2} = \frac{ql}{32};$$

$$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{1}{2+\gamma} = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{1}{2+2} = \frac{ql^2}{48}.$$

Формула бойынша табылған H_A, H_B және M_A, M_B мәндері Q және M эпюралардың мәндерімен дәл келеді (11.2к,л-сурет).

§ 3. КӨП АРАЛЫҚТЫ АРҚАЛЫҚТАР ЖӘНЕ ҮШ МОМЕНТ ТЕҢДЕУІ

Құрылыстың және көпір құрылысының құрылмасын жасау кезінде көп тіректі статикалық анықталмаған арқалықтардың беріктігін есептеу қажеттігі туады. Мұндай арқалықты есептеу нобайы 11.3-суретте көрсетілген. Қосымша тіректердің санына байланысты жүйе бір, екі, үш,. . . , м рет статикалық анықталмаған болуы мүмкін.



11.3 - сурет

Мұндай арқалықты есептеу үшін негізгі жүйе ретінде тіректерге орнатылған тобсалары бар және көршілес аралықтардың арасындағы байланыстарды алып тастап $X_1, X_2, \ldots, X_m$ түсірілген моменттері бар жүйені алу тиімді (11.3а-сурет). Суретте көрсетілген моменттерді оң деп санаймыз.

Осындай нобай кезінде канондық теңдеулер жүйесінің n-інші теңдеуінің түрленуін қарастырайық:

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{n,n-1}X_{n-1} + \delta_{n,n}X_n + \ldots + \delta_{nF} = 0.$$

Теңдеудің коэффициенттерін анықтаймыз. Ол үшін n-мен көршілес бірнеше аралықтарда берілген күштер мен бірлік әсер моменттерінің эпюраларын салайық

(11.3б,в-сурет). Мұнда берілген күштер моменттерінің эпюралары қос тіректі арқалық секілді, әрбір аралық үшін бөлек салынады. Тіректік бірлік моменттер эпюралары да дәл осылайша салынады. Теңдеуде $\delta_{n,n-1}, \delta_{n,n}, \delta_{n,n+1}, \delta_n$ және басқа барлық коэффициенттері нөлге айналады. Шынында, бірлік n-ші момент июші моменттерді тек AB және BC аралықтарында тудырады. Бұл аралықтарда июші моменттер $n-1$ және $n+1$ моменттерімен берілген күштерден пайда болады. Мұнан шығатын қорытынды, эпюралардың $\delta_{n,n-1}, \delta_{n,n}, \delta_{n,n+1}$ және δ_{nF} коэффициенттерімен көбейтіндісін қосқанда, барлық көбейтінділері нөлге тең болады. Барлық аралықтарда EI қатаңдығы бірдей деп санаймыз. Сонда:

$$\delta_{n,n-1} = \frac{l_n}{6EI};\ \delta_{nn} = \frac{1}{3EI}\left(l_n + l_{n+1}\right);\ \delta_{nn+1} = \frac{l_{n+1}}{6EI};$$

$$\delta_{nF} = \frac{1}{EI}\left[\omega_n \frac{a_n}{l_n} + \omega_{n+1}\frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}\right].$$

Мұндағы ω_n мен ω_{n+1} — $n, n+1$ аралығында берілген күштер моменттері эпюралардың ауданы. Күш әдісінің теңдеуі мына түрге өтеді:

$$X_{n-1}l_n + 2X_n\left(l_n + l_{n+1}\right) + X_{n-1}l_{n+1} + 6\left(\frac{S_n}{l_n} + \frac{S_{n+1}}{l_{n+1}}\right) = 0.$$

Мұндағы $S_n = \omega_n a_n$, $S_{n+1} = \omega_{n+1} b_{n+1}$ AC нүктелеріне сәйкес берілген күштер моменттері эпюралардың статикалық моменттерін бейнелейді.

Алынған теңдеуге көршілес AB және BC аралыққа қатысты геометриялық параметрлер мен күш эпюралары кіріп отыр. Бұл теңдеу n-ші тіректің AB және BC аралықтары иілгелес қималарының өзара бұрылуы нөлге тең болатынын өрнектейді.

Қос аралыққа қатысты l_n -нің ұзындығы сол ал l_{n+1} оң аралықтың ұзындығын білдіреді. Оларды көрнекті ету үшін l_c және l_{on} деп белгілейміз. Моменттерді $X_{n-1} = M_c$, $X_n = M_{орта}, X_{n+1}, M_{on}$ деп белгілейік. Жоғарыдағы алынған теңдеу мына түрге ие болады:

$$M_c l_c + 2M_{орта}\left(l_c + l_{on}\right) + M_{on} l_{on} + 6\left(\frac{\omega_c a_c}{l_c} + \frac{\omega_{on} l_{on}}{l_{on}}\right)$$

Бұл теңдеу үш момент теңдеуі деп аталады. Көп аралықты арқалық үшін мұндай теңдеу құру принципі түсінікті. Көршілес аралықтың барлық жүбы ретімен қарастырылады да, әр бір жүп үшін үш момент теңдеуі құрылады. Демек, статикалық анықталмаған көп аралықты арқалық үшін теңдеу саны онын дәрежесінің санына тең. Теңдеуді шешіп, моменттерін тапсақ, июші момент эпюрасы онай салынады және арқалық кернеуі табылады.

§ 4. КЕСІЛМЕЙТІН АРҚАЛЫҚТАРДЫҢ ИЮШІ МОМЕНТТЕРІН, КӨЛДЕНЕҢ КҮШТЕРІН ЖӘНЕ ТІРЕК РЕАКЦИЯЛАРЫН АНЫҚТАУ

Кесілмейтін арқалық есептелген және тірек моменттерінің шамалары белгілі деп үйғарайық. Бұл моменттерді және сыртқы күшті біле отырып арқалықтын кез келген қимасында июші моменттің қандай болмағын анықтау керек. Кесілмейтін арқалықтың M_n, M_{n-1} тірек моменттері мен сыртқы күштің әсерінде болатын n-ші аралығын қарастырайық (11.4а-сурет). Бұл аралықтағы сонғы эпюра өзімен үш эпюраның: M_{n-1} және M_n моменттерінен және M_n° сыртқы күштің қосындысынан тұрады (11.4б-сурет).

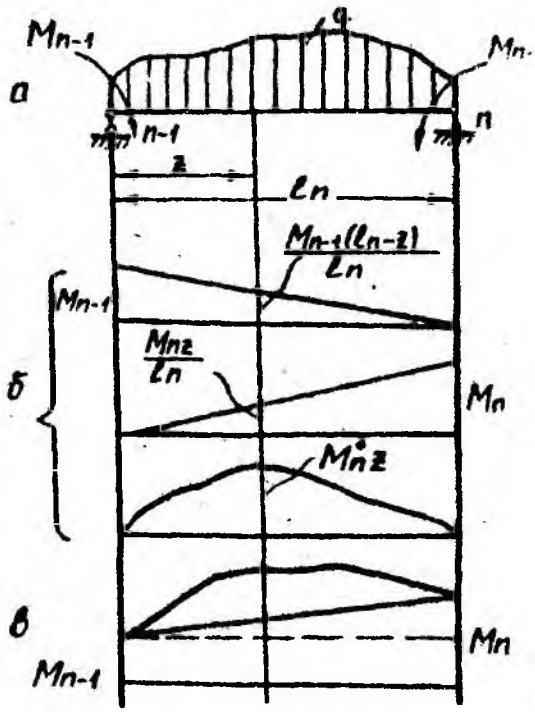
Кесілмейтін арқалықтың n-інші аралығындағы кез келген қимада июші моментті мына формула бойынша анықтауға болады:

$$M_{nz} = \frac{1}{l_n} M_{n-1}(l_n - z) + \frac{1}{l_n} M_n z + M_{nz}^\circ;$$

мұндағы M_{nz}° көдімгі бір аралықты арқалық үшін есептелген z қимадағы сыртқы күштен болатын июші момент. Шамалардын барлық құраушылары формулаға „плюс" таңбасымен кіргізілген. Есептеу кезінде тірек моменттері теріс болса, онда оларды формулаға сол таңбасымен кіргізеді.

n-інші аралықта кез келген z қимаға көлденең күшті анықтаймыз. Ол үшін M_{nz} өрнегін z бойынша бір рет диффе-ренциялдаймыз:

$$M'_{nz} = \frac{1}{l_n} M_n - M_{n-1} \frac{1}{l_n} + M_{nz}^{\circ\prime}$$

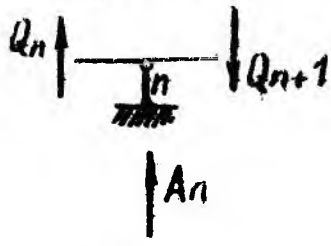


11.4 - сурет

$M'_{nz} = Q_{nz}$ және $M^{\circ}_{nz} = Q^{\circ}_{nz}$ деп белгілейік. Q°_{nz} — көдімгі арқалыкка есептелген сыртқы күштен туындайтын көлденең күш. Онда алғашқы екі мүшені топтасақ:

$$Q_{nz} = \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} + Q^{\circ}_{nz}.$$

Кесілмейтін арқалықтың n-інші аралығының кез келген z кимасындағы көлденең күш бір арқалықтағыдай анықталып, ол аралық күштен Q°_{nz} және $\frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}$ кос тірек моменттен болатын көлденең күштерден құрылады. n-інші тіректің тірек реакциясы сол тіректің оң және сол шексіз жакын кималарында анықталатын көлденең күштердің айырымына тең. Q_n және Q_{n+1} деп белгілейміз (11.4в-сурет). $\sum Y = 0$ теңдеуін құрамыз:



11.5 - сурет

$$A_n + Q_n - Q_{n+1} = 0;$$

осыдан тірек реакциясының шамасын табамыз (11.5-сурет):

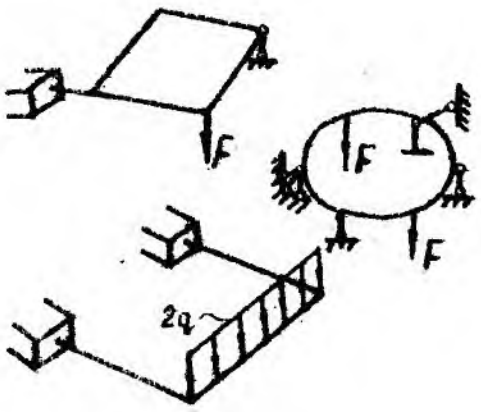
$$A_n = Q_{n+1} - Q_n.$$

11.2-кестеде статикалық анықталмаған сынар аралық арқалықтар үшін тірек реакциялар, көлденең күш пен июші моменттер және орын ауыстыру келтірілген.

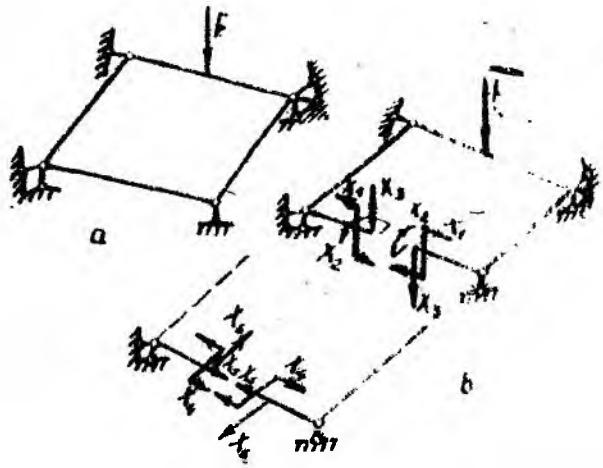
§ 5. ЖАЗЫҚ КЕНІСТІК ЖӘНЕ КЕНІСТІК ЖҮЙЕЛЕР

Жазық кеністік жүйелердің негізгі ерекшелігін қарастырамыз. *Жазық кеністік* жүйелер деп геометриялық тұрғыда жазық, бірақ күш әсерлері жақтау жазықтығына перпендикуляр түсірілген жүйені айтады. Жазық кеністік жүйелер мысалдары 11.6 және 11.7-суреттерде көрсетілген.

Жазық кеністік жақтау бар делік (11.7а-сурет). Жақтауды кез келген кимада кесіп, оны статикалық анықталатын түрге айналдырамыз. Күш әсерлерін X_1, X_2, X_3 аркылы белгілейміз. Күш түсу жазықтығы жақтау жазықтығына перпендикуляр. Бұлар июші, бұраушы моменттер және тік күш болып табылады. Кимадағы қалған үш күш әсерін X_4, X_5, X_6 арқылы белгілейік. 11.7б-суретте жақтау жазықтығында жатпайтын сол күш әсерлері кеністікті болу үшін бір жакка



11.6 - сурет



11.7 - сурет

шығарамыз. Яғни, канондық теңдеулер жүйесін құрамыз.

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \delta_{15}X_5 + \delta_{16}X_6 = -\Delta_{1F};$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \delta_{25}X_5 + \delta_{26}X_6 = -\Delta_{2F};$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \delta_{35}X_5 + \delta_{36}X_6 = -\Delta_{3F};$$

$$\delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \delta_{45}X_5 + \delta_{46}X_6 = -\Delta_{4F};$$

$$\delta_{51}X_1 + \delta_{52}X_2 + \delta_{53}X_3 + \delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 + \delta_{56}X_6 = -\Delta_{5F};$$

$$\delta_{61}X_1 + \delta_{62}X_2 + \delta_{63}X_3 + \delta_{64}X_4 + \delta_{65}X_5 + \delta_{66}X_6 = -\Delta_{6F}.$$

Теңдеулер екі жүйеге жіктеледі. Өйткені алғашқы үш әсер эпюраларын соңғы үш әсер-эпюраларына көбейткенде әрқашан нөл болады:

$$\delta_{14} = \delta_{15} = \delta_{16} = \delta_{24} + \ldots = 0.$$

Демек.

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = -\Delta_{1F};$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = -\Delta_{2F};$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = -\Delta_{3F};$$

$$\delta_{44}X_4 + \delta_{45}X_5 + \delta_{46}X_6 = -\Delta_{4F};$$

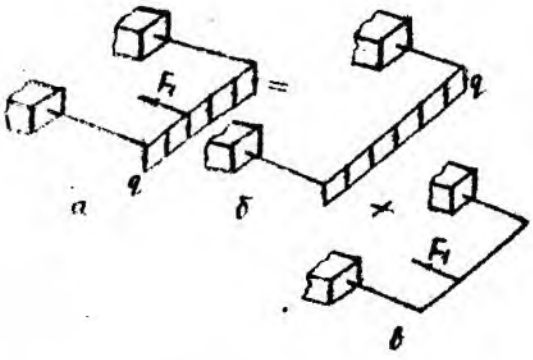
$$\delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 + \delta_{56}X_6 = -\Delta_{5F};$$

$$\delta_{64}X_4 + \delta_{65}X_5 + \delta_{66}X_6 = -\Delta_{6F}.$$

Егер сыртқы күштер жақтау жазықтығында әсер етсе, онда жақтау жазық

болса, онда $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \Delta_{3F}$ және X_1, X_2, X_3 ішкі күш әсерлері нөлге тең. Бұл жазық жақтау үшін оның жазықтығында әсер ететін тек ішкі әсерлері пайда болады деген сөз.

Егер сыртқы күш жақтау жазықтығына перпендикуляр болса, онда $\Delta_{4F}, \Delta_{5F}, \Delta_{6F}$; олай болса X_4, X_5, X_6 нөлге тең. Есептеуге берілген жақтаудағы күш түсу жазықтығы жақтау жазықтығына перпендикуляр ішкі күш әсерлері болатындығын байқатады.



11.8 - сурет

Жақтау жазықтығына әсер ететін аралас күш кезінде (11.8-сурет) күштерді жазықтар бойынша жіктеуге және жазық әрі жазық-кеністік жүйелерді дара қарастыру мүмкіндігі туады. Алдағы уақытта ішкі күштік әсерлер алынған шешімдердің нәтижелерін қосу арқылы анықталады.

Кеністік статикалық анықталмаған жүйелерді қарастырамыз. Мұндай жүйелерді зерттеудің принциптік өзгешелігі жоқ. Кеністік жақтаудың статикалық анықталмағандығын табу кезінде негізгі жүйенің кинематикалық өзгермейтіндігін тексеру қажет.

Кеністік жүйенің кинематикалық өзгермейтіндігін жақтауды немесе оның кейбір элементтерін қозғалмайтын өстерге сәйкес ойша жылжыту арқылы тексереді.

Айтылғандарға қоса, кинематикалық өзгермейтіндік үнемі міндетті емес. Кейбір жағдайда негізгі жүйенің кинематикалық өзгеретіндігі мүмкін болғанымен, жүйеге түсірілетін күшпен бірге қарастырылады. Бірақ та бұл сұрақ жүйеге күш түсіру ерекшелігіне байланысты. Құрылмалар иілуге, бұралуға немесе созылуға тиісті болса да статикалық анықталмағандығын ашу әдісі — күш әдісі, болып табылады, сондықтан есептеу тізбегі бірдей болуы керек. Аталған жағдайларда статикалық анықталмайтын есептердің ерекшелігі сол әрбір деформацияда тек қана орын ауыстыру түрі өзгереді.

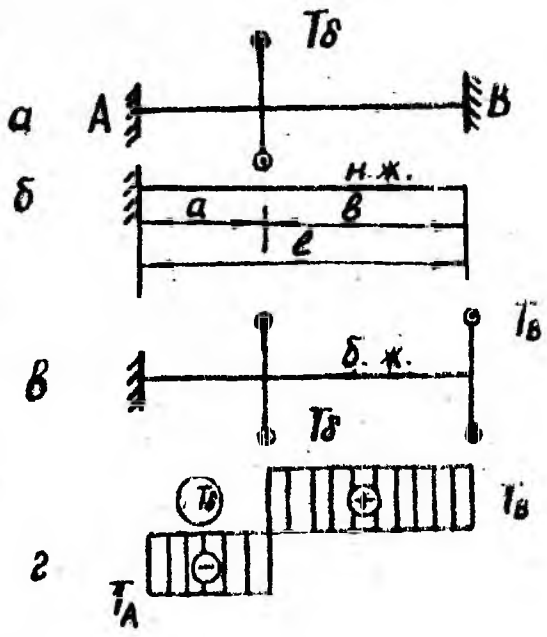
Б ұ р а л у. Екі ұшы бекітілген білікке бұраушы момент әсер етеді (11.9а-сурет). Сондықтан олардың статикалық анықталмағандығын ашып, бекітілген ұштарындағы T_A және T_B бұраушы моменттерді анықтау керек.

Шешімі. Екі бекітілген тіректер білеудің ұштарының бұралуына мүмкіндік бермейді. Берілген $T_б$ момент тіректерде екі белгісіз T_A және T_B реактивтік моменттерді тудырады. Бұл жағдайда тепе-теңдік бір шарт арқылы $\sum m_б = 0$ қанағаттандырылғандықтан бұл жүйе бір рет статикалық анықталмаған болады.

Статикалық анықталмағандығын күш әдісімен ашамыз. Оң қатан бекітпені алып тастап, негізгі жүйені (11.9б-сурет) құрамыз. Негізгі жүйені $T_б$ берілген және T_B белгісіз моменттермен арттырып, баламалы жүйені (11.9в-сурет) аламыз. Баламалы жүйе берілген жүйеге үқсас болу үшін B қима бұрылмайды, яғни $\varphi_B = 0$ деген шарт негізінде орын ауыстыру тендеуін құрамыз. Орын ауыстыру тендеуі келесі түрде жазылады:

$$\frac{T_б a}{GI_\rho} - \frac{T_B(a+b)}{GI_\rho} = 0;$$

бұдан төмендегі формула шығады:



11 9 - сурет

$$T_B = T_б \frac{a}{a+b}.$$

Қималар әдісін колданып тірек әсерлерін табамыз:

1) бірінші бөлік үшін $T_z = T_B = T_б \dfrac{a}{a+b}$;

2) екінші бөлік үшін $T_z = T_A = T_б \dfrac{b}{a+b}$.

Бұралу моменттердің эпюрасы 11.9г-суретте көрсетілген

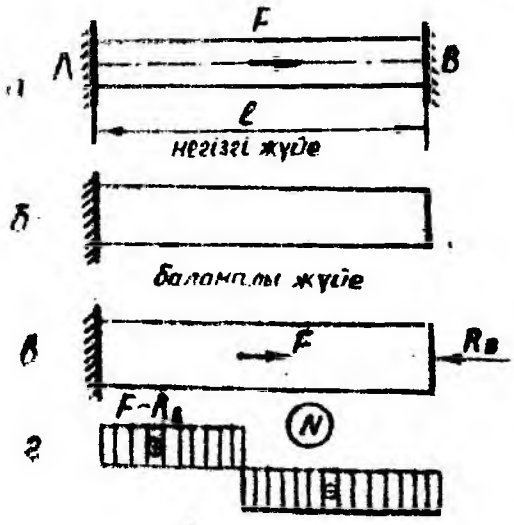
Созылу немесе сығылу. Ұштары бекітілген призмалық сырықта сыртқы бойлық F күштен болатын кернеулерді анықтау керек (11 10а сурет).

Шешімі. Бекітілген ұштарында екі реактив әсерлер R_A және R_B пайда болады. Бұл жағдайда тек қана бір тепе-тендік тендеуін құруға мүмкіндік туады:

$$\sum z = 0; R_A - F + R_B = 0;\ R_A + R_B = F.$$

Екі белгісіз R_A және R_B күштерді бір тендеуден табуға болмайды, сондықтан жүйені бір рет статикалық анықталмаған дейді. Оны шешу үшін күш әдісін қолданамыз, яғни деформация тендеуін құрамыз. Екі ұшы қатан бекітілгендіктен, сырықтың жалпы ұзындығы өзгермейді:

$$\Delta l = 0$$



11.10 - сурет

Жалпы үзару Δl -ді екі тәсілмен өрнектеуге болады:

1) F және R_B күштерінің әсерімен үзару жиынтығы шығады:

$$\Delta l = \frac{Fa}{EA} - \frac{R_B l}{EA} = 0,$$

2) a және b бөліктері үзаруының жиынтығы

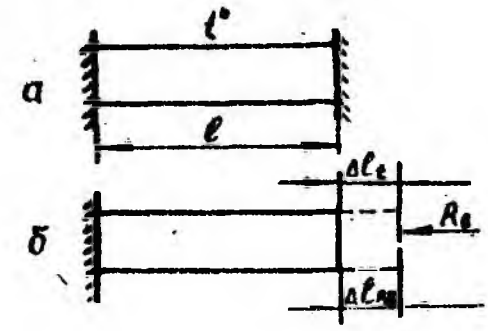
$$\Delta l = \Delta l_a + \Delta l_b = \frac{(F - R_B)a}{EA} - \frac{R_B b}{EA} = 0.$$

Тәсілдің екеуі де бір нәтиже береді: $R_B = F\frac{a}{l}$. Сол жағының реакциясын табамыз: $R_A = F\frac{b}{l}$. 11.10б-суреттерде негізгі және баламалы жүйелер, ал 11.10г-суретте бойлық ішкі күштердің эпюрасы көрсетілген. Ең үлкен кернеулер келесі түрде болады: $\sigma_{\max} = \frac{R_A}{A} = \frac{Fb}{Al}$.

Статикалық анықталмаған жүйелерде температураның өзгеруі қосымша кернеулерді тудырады. Мысалы, жоғарыда қарастырылған білеуді F күштен босатып, t° -қа қыздырып, кернеулерді анықтайық (11.11-сурет).

Температурасы жоғарылағанда сырық үзара бастайды да, бекітілген түсқа әсер етіп, реакциялар пайда болады. Бір үшын босатсақ, сырық $\Delta l_t = \alpha t l$ шамаға еркін үзарады. R_B реакция әсерінен сырық дел осындай шамаға қысқаруы керек, өйткені екі қатаң бекітілген тіректер арасындағы аралығын өзгерте алмаймыз. Сондықтан

$$\Delta l_{R_B} = \Delta l_t;$$



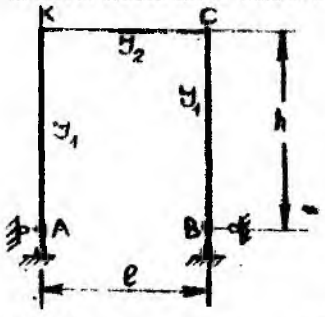
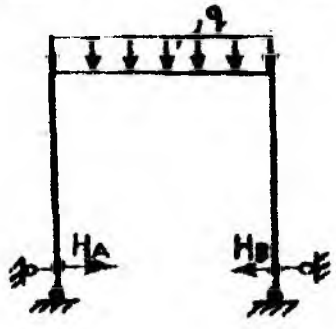
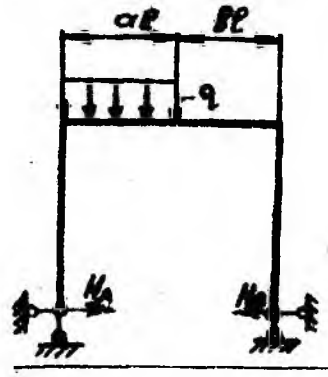
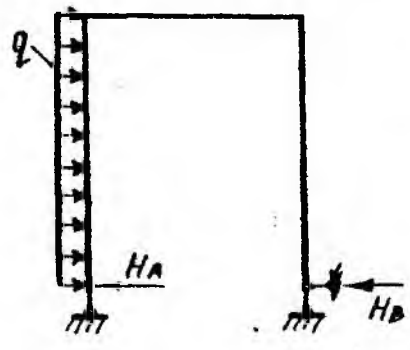
11.11 - сурет

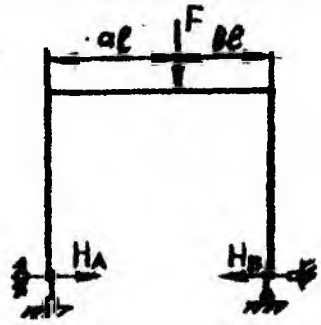
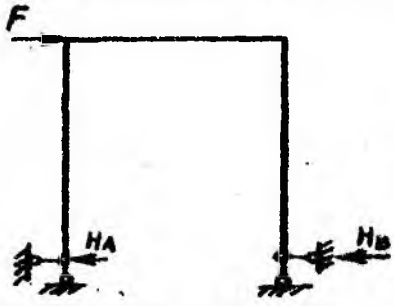
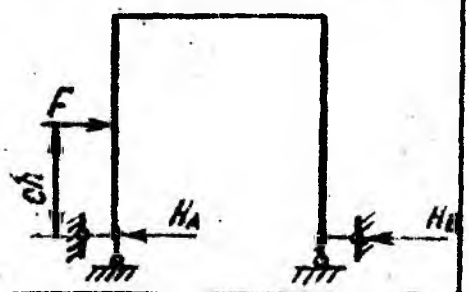
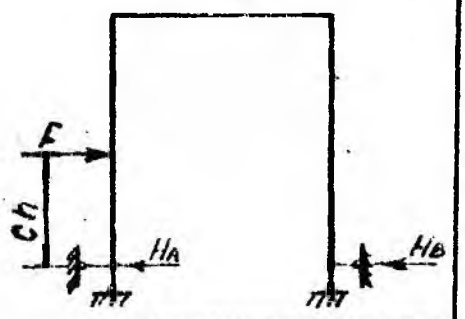
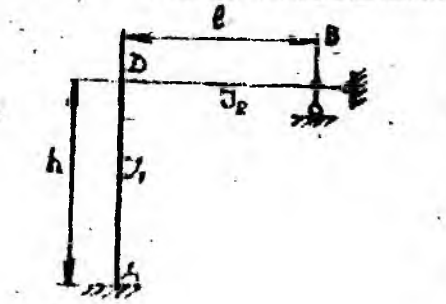
немесе

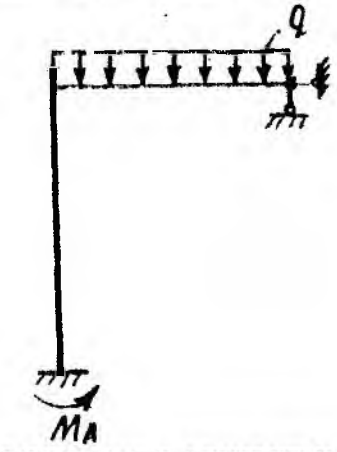
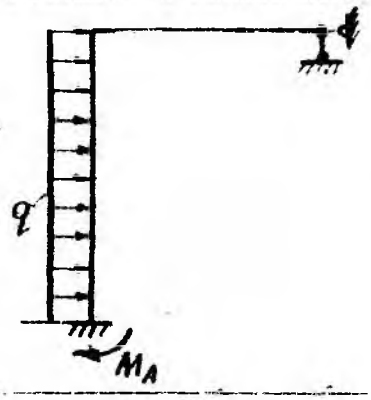
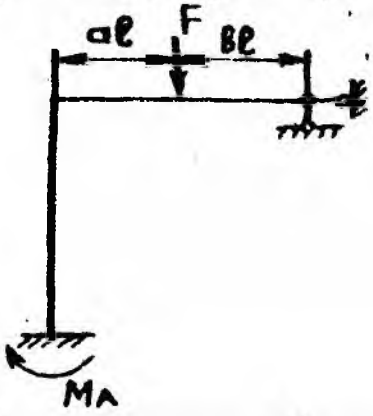
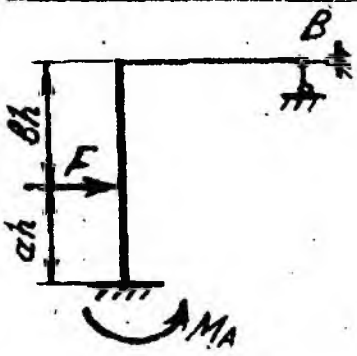
$$\frac{R_B l}{EA} = \alpha t l;$$

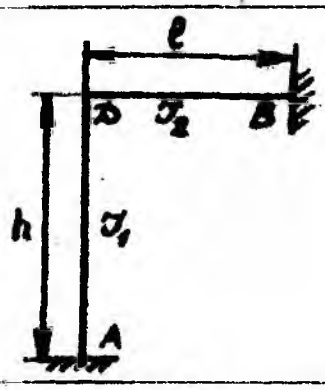
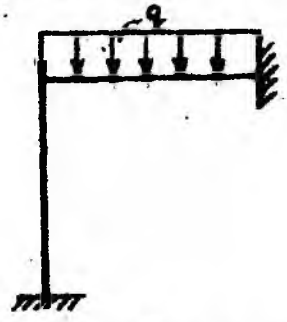
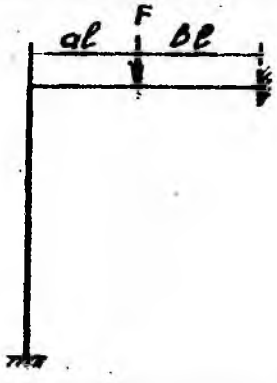
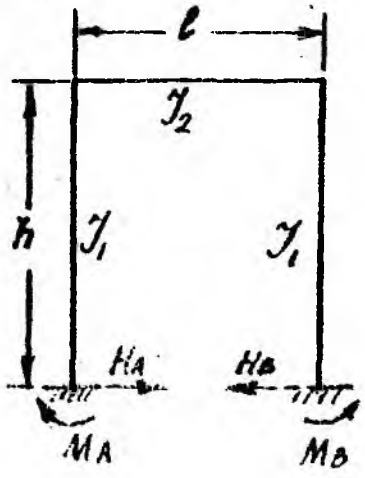
мұндағы α — сызықтық үлгаю коэффициенті. Бұдан $R_B = \alpha t EF$. Тік кернеулері: $\sigma_t = -E\alpha t$ болады. Демек, қыздырғанда сығылу, ал салқындатқанда созылу кернеулері пайда болады.

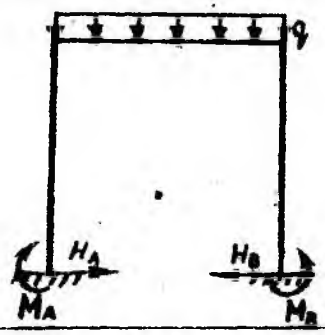
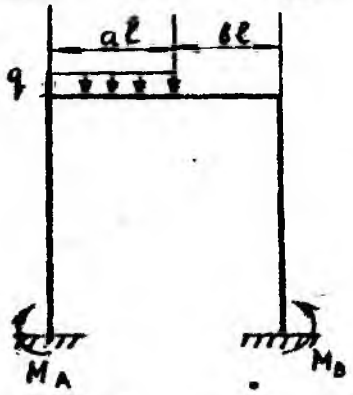
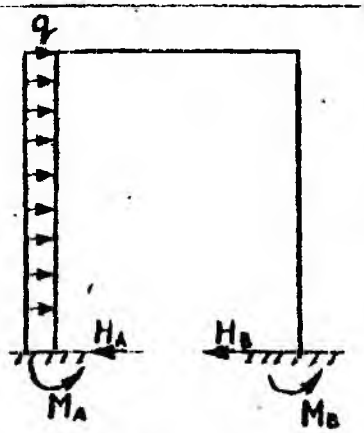
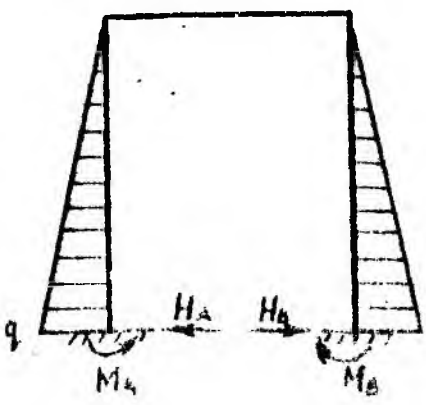
11.1 - кесте. Сыңараралық жақтауға арналған есептеу формулалары

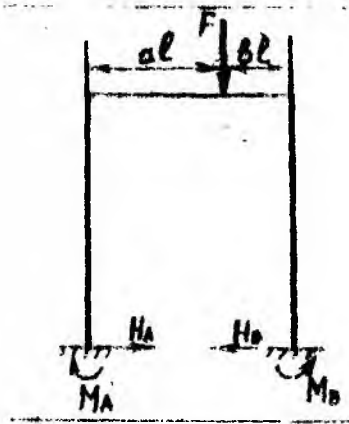
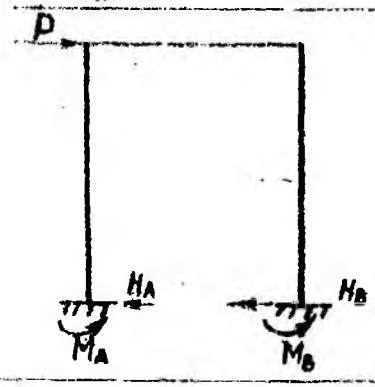
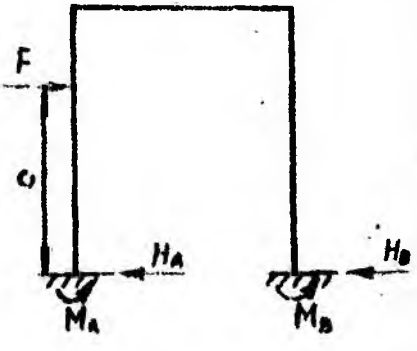
Жақтау нобайы	Күш әсерлерінің мәлшері
	Төпсалы тиянақталған П-тәріздес жақтау Көмекші коэффициенттері; $\gamma = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$; $\mu = 3 + 2\gamma$
	$H_A = H_B = \frac{ql}{4} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{h}$; $M_K = M_C = -\frac{ql^2}{4\mu}$
	$H_A = H_B = \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{(1+2b)a^2}{\mu}$; $M_K = M_C = -\frac{ql^2}{4} \cdot \frac{(1+2b)a^2}{\mu}$
	$H_A = \frac{qh}{8} \cdot \frac{18+11\gamma}{\mu}$; $H_B = \frac{qh}{8} \cdot \frac{6+5\gamma}{\mu}$; $M_K = \frac{qh^2}{8} \cdot \frac{3(2+\gamma)}{\mu}$; $M_C = -\frac{qh^2}{8} \cdot \frac{6+5\gamma}{\mu}$;

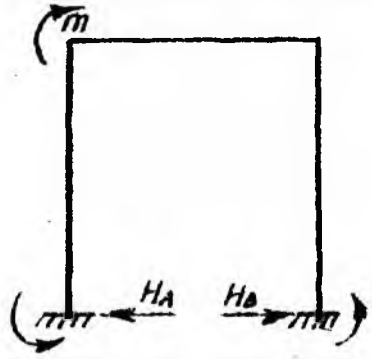
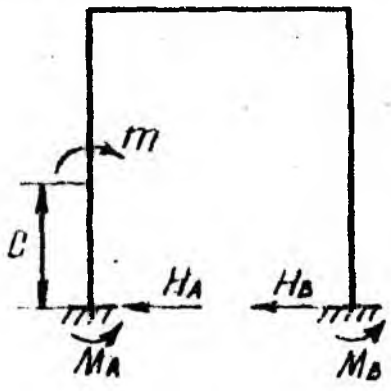
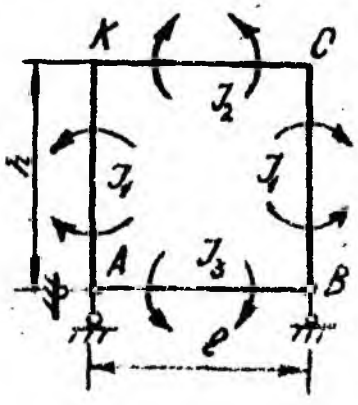
1	2
	$H_A=H_B=\frac{3}{2}F\frac{l}{h}ab\frac{1}{\mu};$ $M_K=M_c=\frac{3}{2}Flab\frac{1}{\mu}$
	$H_A=H_B=\frac{F}{2};$ $M_K=M_c=\frac{Fh}{2}$
	$H_A=\frac{F}{2}\left[2-c\frac{\gamma\left(3-c^2\right)+3}{\mu}\right];$ $H_B=\frac{F}{2}c\frac{\gamma\left(3-c^2\right)+3}{\mu}$
	$H_A=H_B=\frac{3}{2}\frac{m}{h}\frac{1+\left(1-c^2\right)\gamma}{\mu}$
	Г — тәріздес жақтау Көмекші коэффициенттері $\gamma=\frac{J_2}{J_1}\frac{h}{l};$ $\mu=4+3\gamma$

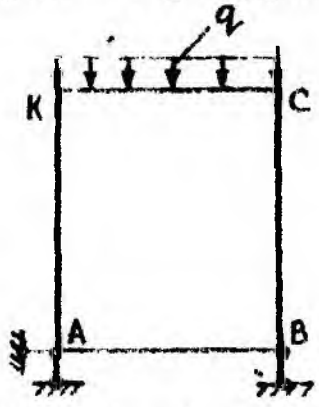
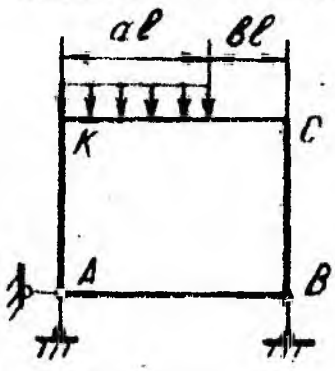
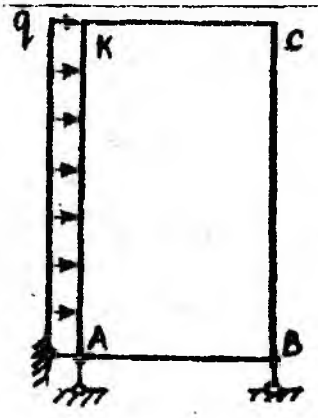
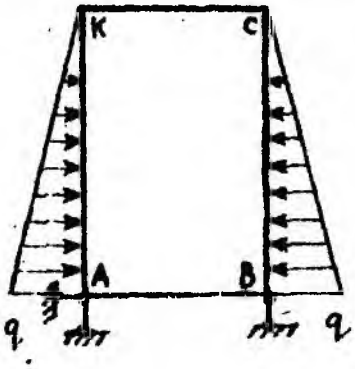
1	2
	$M_D=-\frac{qh^2\gamma}{4\mu}$; $M_A=-\frac{qh^2(\gamma+2)}{4\mu}$
	$M_D=-\frac{ql^2}{2\mu}$; $M_A=-\frac{M_D}{2}$
	$M_A=\frac{Fl\cdot a\cdot b}{\mu}(1+b)$; $M_D=-2M_A$; $M_F=(Fla+M_D)b$
	$M_D=-\frac{Fl^2\cdot ab}{h}\frac{3(1-b)\gamma}{\mu}$; $M_A=\frac{Fl^2\cdot ab}{h}\frac{3b\gamma+2(1+b)}{\mu}$; $M_F=\frac{Flab}{h}+bM_A+(1-b)M_D$

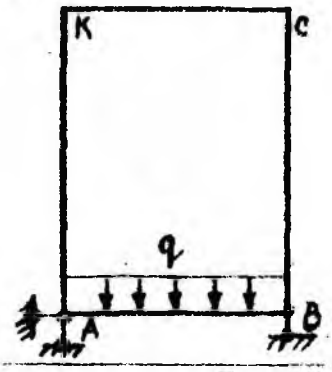
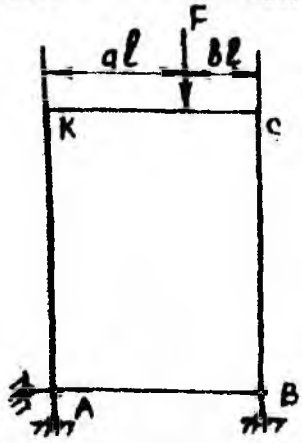
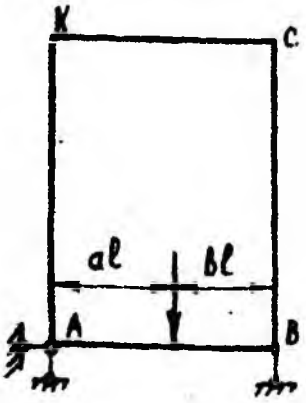
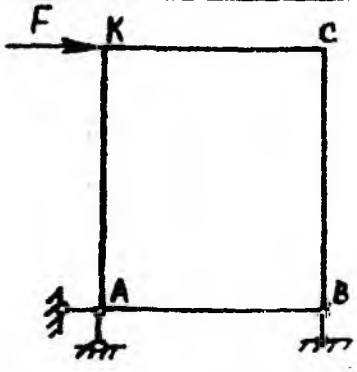
1	2
	Көмекші коэффициенттері $\gamma=\frac{J_2}{J_1}\cdot\frac{h}{l}$; $\mu=1+\gamma$
	$M_B=-\frac{ql^2(3\gamma+2)}{24\mu}$; $M_D=-\frac{ql^2}{12\mu}$; $M_A=\frac{M_D}{2}$
	$M_D=-\frac{Fla\cdot b^2}{\mu}$; $M_A=-\frac{1}{2}M_D$; $M_Д=Flab+bM_D+(1-b)M_B$; $M_B=Flab\frac{(2-b)\gamma+2(1-b)}{2\mu}$
	Қатаң бекітілген тіректерімен П — тәріздес жақтау Көмекші коэффициенттері $\gamma=\frac{J_2}{J_1}\cdot\frac{h}{l}$

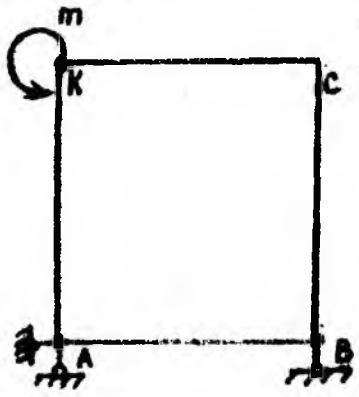
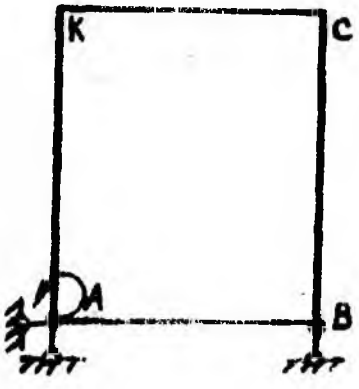
1	2
	$H_A=H_B=\frac{ql^2}{4h}\cdot\frac{1}{2+\gamma}$; $M_A=M_B=\frac{ql^2}{12}\cdot\frac{1}{2+\gamma}$
	$H_A=H_B=\frac{ql}{4}\cdot\frac{l}{h}\times\frac{(1+2b)a^2}{2+\gamma}$; $M_A=\frac{ql^2}{12}a^2\times\left[\frac{1+2(1-a)}{2+\gamma}-\frac{3(1-a)^2}{1+6\gamma}\right]$ $M_B=\frac{ql^2}{12}a^2\times\left[\frac{1+2(1-a)}{2+\gamma}+\frac{3(1-a)^2}{1+6\gamma}\right]$
	$H_A=\frac{qh}{2}\left[1+\frac{5+2\gamma}{4(2+\gamma)}\right]$; $H_B=qh-H_A$; $M_A=\frac{qh^2}{24}\left(\frac{3+\gamma}{2+\gamma}+6\frac{1+4\gamma}{1+6\gamma}\right)$; $M_B=\frac{qh^2}{24}\left(\frac{3+\gamma}{2+\gamma}-6\frac{1+4\gamma}{1+6\gamma}\right)$
	$H_A=H_B=\frac{qh}{20}\cdot\frac{16+7\gamma}{2+\gamma}$; $M_A=M_B=\frac{qh^2}{60}\cdot\frac{8+3\gamma}{2+\gamma}$

1	2
	$H_A=H_B=\frac{3Fab}{2}\frac{l}{h}\frac{1}{2+\gamma};$ $M_A=\frac{Fl}{2}ab\left(\frac{1}{2+\gamma}\frac{b-a}{1+6a}\right);$ $M_B=\frac{Fl}{2}ab\left(\frac{1}{2+\gamma}+\frac{b-a}{1+6a}\right)$
	$H_A=H_B=\frac{F}{2};$ $M_A=M_B=\frac{Fh}{2}\frac{1+3\gamma}{1+6\gamma}$
	$H_A=\frac{F}{2}\left\{1+\left(1-\frac{c}{h}\right)\left[1+\frac{c}{h}\times\right.\right.$ $\left.\left.\times\frac{\left(2-\gamma\frac{c}{h}\right)-\left(\frac{c}{h}-\gamma\right)}{2+\gamma}\right]\right\};$ $M_A=\frac{F}{2}c\left[\left(1-\frac{c}{h}\right)\left(1-\frac{c}{h}\frac{1+\gamma}{2+\gamma}\right)+\right.$ $\left.+\left(1-3\frac{c}{h}\frac{\gamma}{1+6\gamma}\right)\right];$ $M_B=\frac{F}{2}c\left[\left(1-\frac{c}{h}\right)\left(1-\frac{c}{h}\frac{1+\gamma}{2+\gamma}\right)-\right.$ $\left.-\left(1-3\frac{c}{h}\frac{\gamma}{1+6\gamma}\right)\right];$

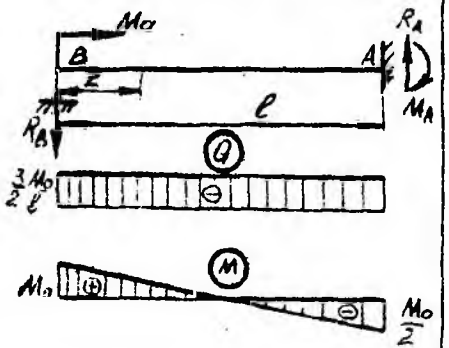
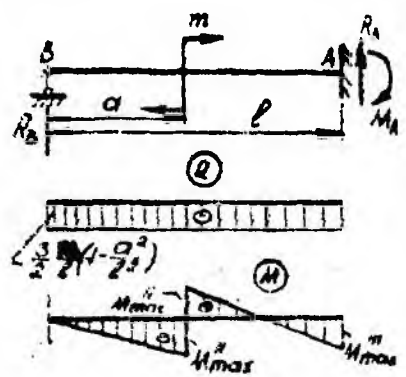
1	2
	$H_A=H_B=\frac{3}{2}\frac{m}{2}\left(\frac{1}{2+\gamma}\right)$; $M_A=\frac{m}{2}\left(\frac{1}{2+\gamma}-\frac{1}{1+\gamma}\right)$; $M_B=\frac{m}{2}\left(\frac{1}{2+\gamma}+\frac{1}{1+6\gamma}\right)$
	$H_A=H_B=\frac{3}{4}\frac{m}{h}\frac{c}{h}\times$ $\times\left[\left(2-\frac{c}{h}\right)+\gamma\frac{2-3\frac{c}{h}}{2+\gamma}\right]$; $M_A=\frac{m}{2}\left[\frac{3}{2}\frac{c}{h}\left(2-\frac{c}{h}\right)-\right.$ $\left.-1+\frac{1}{2}\gamma\frac{c}{h}\frac{2-3\frac{c}{h}}{2+\gamma}+\left(\frac{6\gamma\frac{c}{h}}{1+6\gamma}\right)1\right]$; $M_B=\frac{m}{2}\left[\frac{3}{2}\frac{c}{h}\left(2-\frac{c}{h}\right)-\right.$ $\left.-1+\frac{1}{2}\gamma\frac{c}{h}\frac{2-3\frac{c}{h}}{2+\gamma}-\left(\frac{6\gamma\frac{c}{h}}{1+6\gamma}\right)1\right]$
	Бекітілген рама. Көмекші коэффициенттер $\gamma=\frac{J_2}{J_1}\frac{h}{l}$, $\gamma_1=\frac{J_3}{J_1}\frac{h}{l}$ $\mu=\frac{1}{\gamma_1}(2\gamma+3)+(2+\gamma)$; $\mu_1=\frac{1+\gamma}{\mu}$; $\mu_2=1+\frac{\gamma}{\gamma_1}+6\gamma$ Үлгідегі салмақтың сыртқы бағытталған ...ру кернеу күйді туғызады

1	2
	$M_A=M_B=\frac{ql^2}{12}\frac{1}{\mu};$ $M_K=M_C=-\frac{ql^2}{12}\left[\frac{3(1+\mu_1)}{3+2\gamma}\frac{1}{\mu}\right]$
	$M_A=-\frac{ql^2}{12}a^2\left(\frac{1+2b}{\mu}\frac{3b^2}{\mu^2}\right);$ $M_B=\frac{ql^2}{12}a^2\left(\frac{1+2b}{\mu}+\frac{3b^2}{\mu^2}\right);$ $M_K=-\frac{ql^2}{12}a^2\left[\frac{3(3-2a)(1+\mu_1)}{3+2\gamma}\frac{1+2b}{\mu}+\frac{3b^2}{\mu^2}\right];$ $M_C=-\frac{ql^2}{12}a^2\left[\frac{3(3-2a)(1+\mu_1)}{3+2\gamma}\frac{1+2b}{\mu}\frac{3a^2}{\mu}\right];$
	$M_A=-\frac{qh^2}{4}\left(\frac{3+\gamma}{6\mu}+\frac{1+4\gamma}{\mu_2}\right);$ $M_B=-\frac{qh^2}{4}\left(\frac{3+\gamma}{6\mu}\frac{1+4\gamma}{\mu_2}\right);$ $M_K=-\frac{qh^2}{4}\frac{\gamma}{\gamma_1}\left(\frac{3+\gamma_1}{6\mu}+\frac{1+2\gamma_1}{\mu_2}\right);$ $M_C=-\frac{qh^2}{4}\frac{\gamma}{\gamma_1}\left(\frac{3+\gamma_1}{6\mu}\frac{1+2\gamma_1}{\mu_2}\right)$
	$M_A=M_B=-\frac{qh^2}{60}\frac{8+3\gamma}{\mu};$ $M_K=M_C=-\frac{qh^2}{60}\frac{7+2\gamma_1}{\mu}$

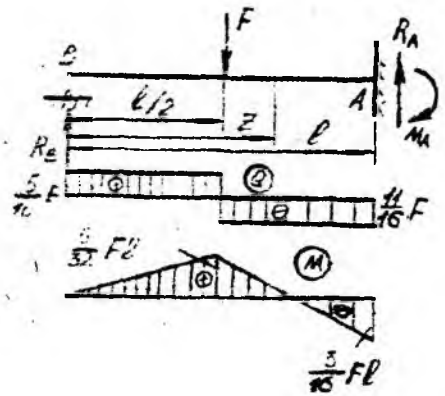
1	2
	$M_A=M_B=\frac{ql^2}{12}\frac{2\gamma+3}{\mu\gamma_1}$; $M_C=M_D=-\frac{ql^2}{12}\left(\frac{3\mu_1}{\gamma_1}\frac{2\gamma+3}{\mu\gamma_1}\right)$
	$M_A=\frac{Fl}{2}ab\left(\frac{1}{\mu}\frac{b-a}{\mu_2}\right)$; $M_B=\frac{Fl}{2}ab\left(\frac{1}{\mu}+\frac{b-a}{\mu_2}\right)$; $M_K=-\frac{Fl}{2}ab\left[\frac{3(1+\mu_1)}{3+2\gamma}\frac{1}{\mu}\frac{b-a}{\mu_2}\right]$; $M_C=-\frac{Fl}{2}ab\left[\frac{3(1+\mu_1)}{3+2\gamma}\frac{1}{\mu}\frac{b-a}{\mu_2}\right]$
	$M_A=\frac{Fl}{2}\frac{ab}{\gamma_1}\left[\frac{2\gamma+3}{\mu}+\frac{(b-a)\gamma}{\mu_2}\right]$; $M_B=\frac{Fl}{2}\frac{ab}{\gamma_1}\left[\frac{2\gamma+3}{\mu}\frac{(b-a)\gamma}{\mu_2}\right]$; $M_K=-\frac{Fl}{2}\frac{ab}{\gamma_1}\left[3\mu_1\frac{2\gamma+3}{\mu}\frac{(b-a)\gamma}{\mu_2}\right]$; $M_D=-\frac{Fl}{2}\frac{ab}{\gamma_1}\left[3\mu_1\frac{2\gamma+3}{\mu}+\frac{(b-a)\gamma}{\mu_2}\right]$
	$M_A=-\frac{Fh}{2}\frac{1+3\gamma}{\mu_2}$; $M_B=\frac{Fh}{2}\frac{1+3\gamma}{\mu_2}$; $M_K=-\frac{Fh}{2}\left(1-\frac{1+3\mu}{\mu_2}\right)$; $M_C=-\frac{Fh}{2}\left(1-\frac{1+3\mu}{\mu_2}\right)$

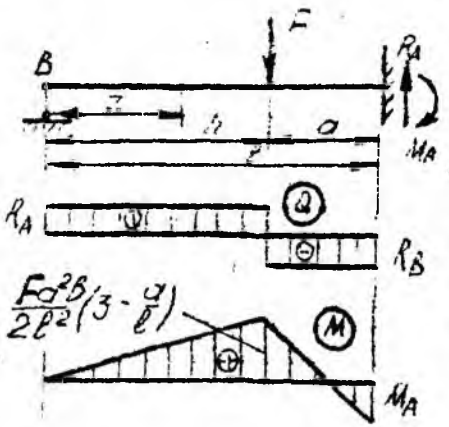
1	2
	$M_A = -\frac{m}{2}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_2}\right);$ $M_B = -\frac{m}{2}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_2}\right);$ $M_K = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\gamma_1}\,\frac{3+2\gamma_1}{\mu} + \frac{1}{\mu_2}\right);$ $M_C = -\frac{m}{2}\left(\frac{1}{\gamma_1}\,\frac{3+2\gamma_1}{\mu} - \frac{1}{\mu_2}\right)$
	$M_1 = -\frac{m}{2}\,\frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{3+2\gamma}{\mu} + \frac{1}{\mu_2}\right);$ $M_B = -\frac{m}{2}\,\frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{3+2\gamma}{\mu} - \frac{1}{\mu_2}\right);$ $M_K = \frac{m}{2}\,\frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{2+\gamma}{\mu} - \frac{1}{\mu_2}\right);$ $M_C = -\frac{m}{2}\,\frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{2+\gamma}{\mu} + \frac{1}{\mu_2}\right)$

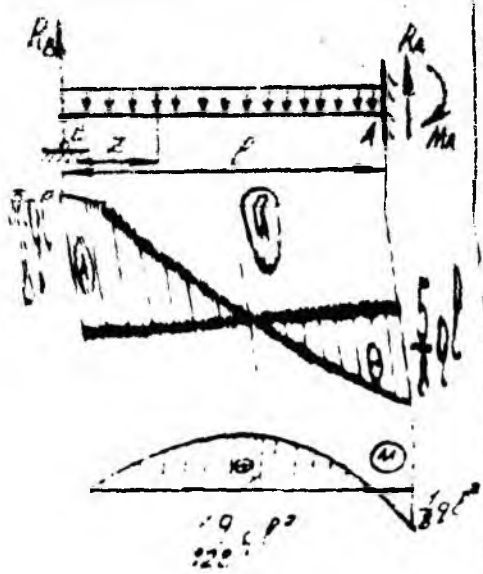
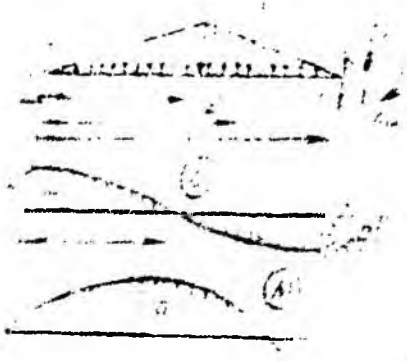
11.2 - к е с т е. Статикалық анықталмаған сынарааралық арқалықтарға арналған тірек реакциялары, көлденең күш пен иіуші моменттер және орын ауыстырулар

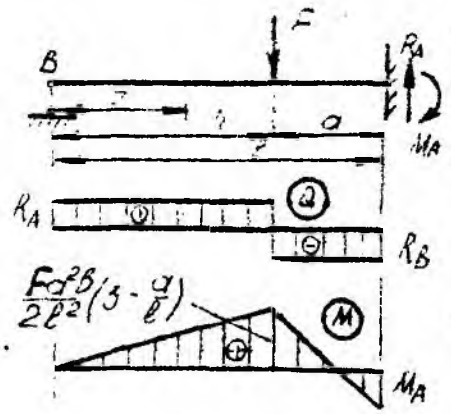
Арқалықтың жүктеме нобайы, Q және M эпюралары	Тірек реакциялары, Q көлденең күш, M иіуші моменті, z_0 қауіпті қиманың координатасы, M_{max} максималь моменті	$w(z)$ серпімді сызықтың теңдеуі, θ шеткі қиманың бұралу бұрышы, f максималь орын ауыстыру (EJ — const)
1	2	3
	$R_A=R_B=\frac{3M_0}{2l}$; $M_A=\frac{1}{2}M_0$ $0\le z\le l$ $Q=-\frac{3M_0}{2l}$; $M=m\left(1-\frac{3z}{2l}\right)$ $z_0=0$ $M_{max}=m$	$w(z)=-\frac{M_0l^2}{4EJ}\left(\frac{z^3}{l^3}-2\frac{z^2}{l^2}+\frac{z}{l}\right)$ $f=-\frac{M_0l^2}{27EJ}$; $z=\frac{1}{3}$ болғанда $z=0$: $\theta=-\frac{M_0l}{4EJ}$
	$R_A=R_B=\frac{3m}{2l}\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)$ $M_A=\frac{m}{2}\left(1-3\frac{a^2}{l^2}\right)$	$0\le z\le a$ $w(z)=-\frac{ml^2}{EJ}\left[\frac{1}{4}\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)\left(\frac{z^2}{l^2}-3\frac{z}{l}\right)+\right.$

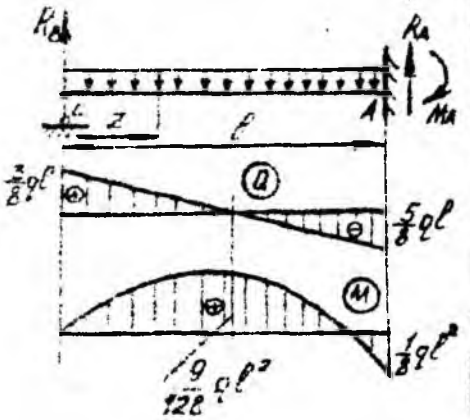
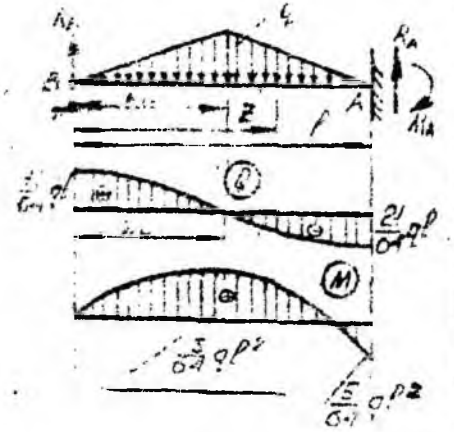
1	2	3
	$0 \le z \le l \quad Q = -\frac{3m}{2l}\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)$	$+\left(1-\frac{a}{l}\right)\frac{z}{l}\Bigg]$
	$0 \le z \le a \quad M = -\frac{3m}{2l}\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)z$	$a \le z \le l$
	$a \le z \le l \quad M = m\left[1-\frac{3}{2}\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)\frac{z}{l}\right]$	$w(z) = -\frac{ml^2}{EJ}\left[\frac{1}{4}\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)\left(\frac{z^2}{l^2}-3\frac{z}{l}\right)+\right.$
	$z_0' = a \quad M'_{\max} = -\frac{3}{2}m\frac{a}{l}\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)$	$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{l^2}+\frac{a^2}{l^2}\right)+\frac{z}{l}\right]$
	$M''_{\max} = m\left[1-\frac{3a}{2l}\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)\right]$	$z = 0$
	$z_0'' = l \quad M''_{\max} = -\frac{1}{2}m\left(1-3\frac{a^2}{l^2}\right)$	$\theta = \frac{ml}{EJ}\left(\frac{a}{l}-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\frac{a^2}{l^2}\right)$
	$a < 0.275l \quad \lvert M'_{\max}\rvert < \lvert M''_{\max}\rvert$	
	$a = 0.577l \quad \lvert M''_{\max}\rvert = 0$	

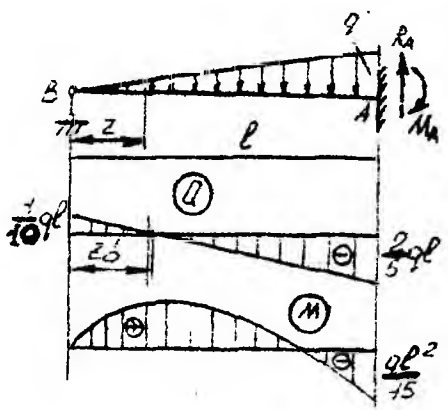
	2	3
	$R_A=\frac{11}{16}F;\ R_B=\frac{5}{16}F;\ M_A=\frac{3}{16}Fl$	$0\le z\le\frac{l}{2}$
	$0\le z\le 1/2$	$w(z)=-\frac{Fl^3}{96EJ}\left(3\frac{z}{l}-5\frac{z^3}{l^3}\right)$
	$Q=\frac{5}{16}F;\ M=\frac{5}{16}Fz$	$\frac{l}{2}\le z\le l$
	$1/2\le z\le l$	$z=0.447l\ \ f=-0.0093\frac{Fl^3}{EJ}$
	$Q=-\frac{11}{16}F;\ M=F\left(\frac{l}{2}-\frac{11}{16}z\right)$	$z=0\qquad \theta=-\frac{Fl^2}{32EJ}$
	$z_0=l\ \ M_{max}=-\frac{3}{16}Fl$	$z=\frac{l}{2}\qquad w=-\frac{7Fl^3}{768EJ}$
	$R_A=\frac{F}{2}\frac{b}{l}\left(3-\frac{b^2}{l^2}\right)$	$0\le z\le b$
	$R_B=\frac{F}{2}\frac{a^2}{l^2}\left(3-\frac{a}{l}\right)$	$w(z)=-\frac{Fl^3}{6EJ}\left[\frac{R_A}{F}\left(3\frac{z}{l}-\frac{z^3}{l^3}\right)-3\frac{a^2z}{l^3}\right]$

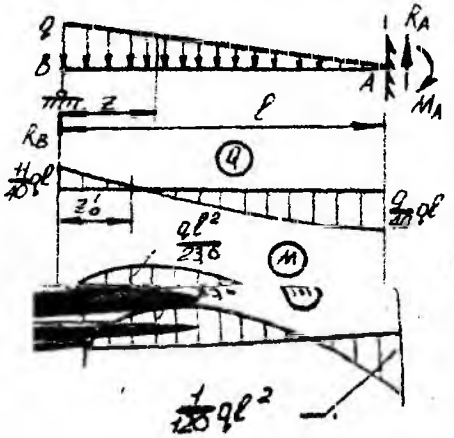
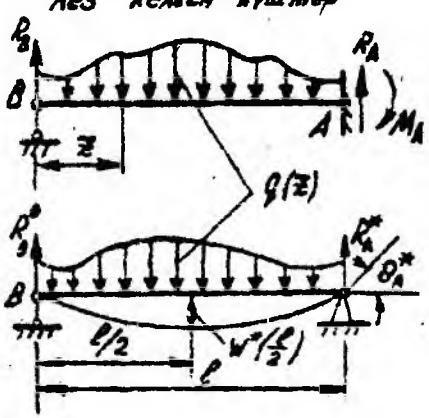
1	2	3
	$M_A=\frac{Fab}{2l^2}(l+b)$ $0\le z\le b$ $Q=\frac{Fa^2}{2l^2}\left(3-\frac{a}{l}\right);\quad M=\frac{Fa^2}{2l^2}\left(3-\frac{a}{l}\right)z$ $b\le z\le l$ $Q=F\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{l^2}\left(3-\frac{a}{l}\right)-1\right];$ $M=Fa\left[\frac{az}{2l^2}\left(3-\frac{a}{l}\right)-\frac{z-b}{a}\right]$ $a=0.634l\quad M'_{max}=0,174Fl;$ $z'_0=b\quad M''_{max}=\frac{Fa^2b}{2l^2}\left(3-\frac{a}{l}\right);\quad z''_0=l$ $M''_{max}=\frac{Fal}{2l^2}(l+b)$ $a=0,423l\quad M''_{max}=-0,193Fl$	$z=b$ $w=\frac{Fa^3b^2(3a+4b)}{12l^2EJ}$ $b\le z\le l$ $w(z)=\frac{Fl^3}{6EJ}\left[\frac{R_A}{F}\left(3\frac{z}{l}-\frac{z^3}{l^3}\right)-3\frac{a^2z}{l^3}+\left(\frac{z}{l}-\frac{b}{l}\right)^3\right]$ $a=0.586l,\quad z=b$ $f=-0,0098\frac{Fl^3}{EJ}$ $\theta=\frac{Fl^2}{4EJ}\left(\frac{a^3}{l^3}-\frac{a^2}{l^2}\right)$ $z=0$

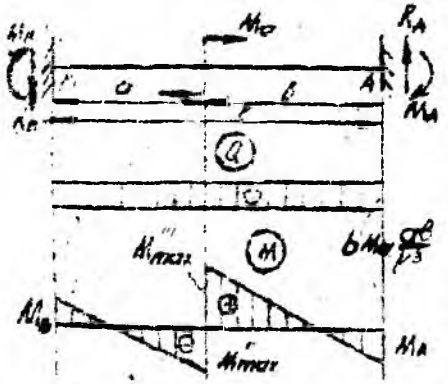
1	2	3
	$R_A=\frac{5}{8}ql;\ R_B=\frac{3}{8}ql;\ M_A=\frac{1}{8}ql^2$	$0\le z\le l$
	$0\le z\le l$	$w(z)=-\frac{ql^4}{48EJ}\left(2\frac{z^2}{l^2}-3\frac{z^3}{l^3}+\frac{z}{l}\right)$
	$Q=ql\left(\frac{3}{8}-\frac{z}{l}\right);\ M=qlz\left(\frac{3}{8}-\frac{z}{2l}\right)$	$z=0{,}421l$
	$z_0=l;\ M_{max}=-\frac{1}{8}ql^2$	$f=-\frac{ql^4}{185EJ}$
	$z=\frac{3}{8}l$	$z=0$
	$M_{max}=\frac{9}{128}ql^2$	$\theta=\frac{ql^3}{48EJ}$
		

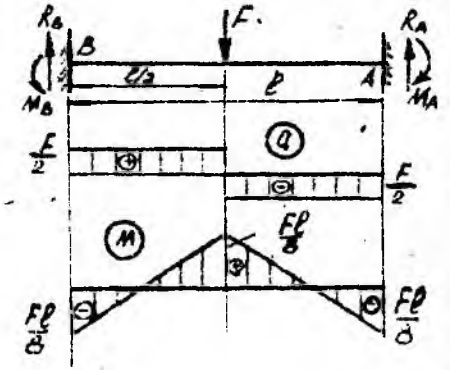
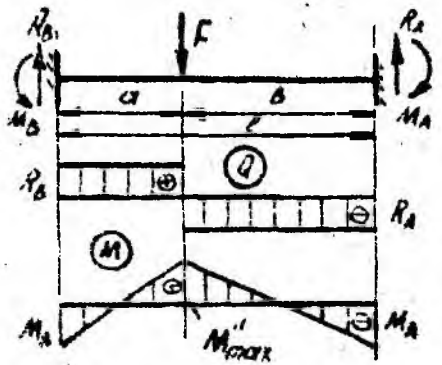
1	2	3
	$M_1=\frac{Fab}{2l^2}(l+b)$ $0\le z\le b$ $Q=\frac{F}{2}\frac{a^2}{l^2}\left(3-\frac{a}{l}\right);\quad M=\frac{F}{2}\frac{a^2}{l^2}\left(3-\frac{a}{l}\right)z$ $b\le z\le l$ $Q=F\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{l^2}\left(3-\frac{a}{l}\right)-1\right];$ $M=Fa\left[\frac{az}{2l^2}\left(3-\frac{a}{l}\right)-\frac{z-b}{a}\right]$ $a=0.634l\quad M'_{max}=0,174Fl;$ $z'_0=b\quad M''_{max}=\frac{Fa^2b}{2l^2}\left(3-\frac{a}{l}\right);\quad z''_0=l$ $M''_{max}=\frac{Fal}{2l^2}(l+b)$ $a=0,423l\quad M''_{max}=-0,193Fl$	$z=a$ $w=\frac{Fa^3b^2(3a+4b)}{12l^3EJ}$ $b\le z\le l$ $w(z)=-\frac{Fl^3}{6EJ}\left[\frac{R_A}{F}\left(3\frac{z}{l}-\frac{z^3}{l^3}\right)-3\frac{a^2z}{l^3}+\left(\frac{z}{l}-\frac{b}{l}\right)^3\right]$ $a=0,586l,\quad z=b$ $f=-0.0098\frac{Fl^3}{EJ}$ $\theta=\frac{Fl^2}{4EJ}\left(\frac{a^3}{l^3}-\frac{a^2}{l^2}\right)$ $z=0$

	2	3
	$R_A=\frac{5}{8}ql;\ R_B=\frac{3}{8}ql;\ M_A=\frac{1}{8}ql^2$	$0\le z\le l$
	$0\le z\le l$	$w(z)=-\frac{ql^4}{48EJ}\left(2\frac{z^2}{l^2}-3\frac{z^3}{l^3}+\frac{z}{l}\right)$
	$Q=ql\left(\frac{3}{8}-\frac{z}{l}\right);\ M=qlz\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\frac{z}{l}\right)$	$z=0{,}421l$
	$z_0=l;\ M_{max}=-\frac{1}{8}ql^2$	$f=\frac{ql^4}{185EJ}$
	$z_0=\frac{3}{8}l$	$z=0$
	$M'_{max}=\frac{9}{128}ql^2$	$\theta=\frac{ql^3}{48EJ}$
	$R_A=\frac{21}{64}ql;\ R_B=\frac{11}{64}ql;\ M_A=\frac{5}{64}ql^2$	$z=0{,}5l$
	$0\le z\le l/2$	$f=\frac{ql^4}{289{,}8EJ}$
	$Q=ql\left(\frac{11}{64}-\frac{z^2}{l^2}\right);\ M=qlz\left(\frac{11}{64}-\frac{1}{3}\frac{z^2}{l^2}\right)$	

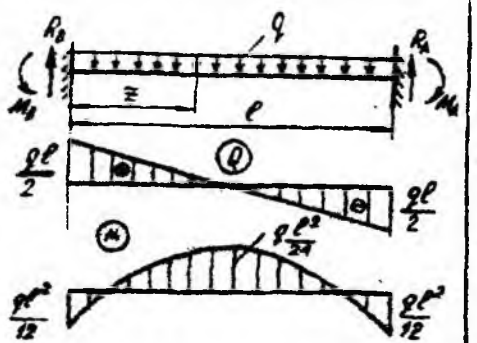
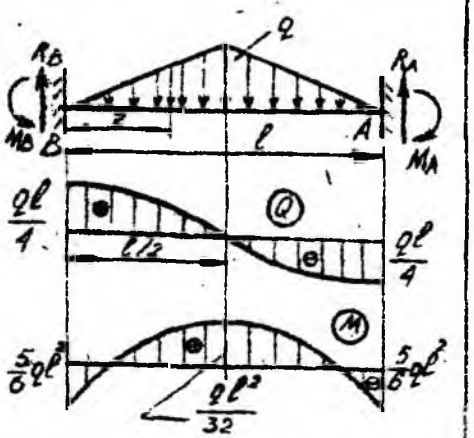
1	2	3
	$1/2 \le z \le l$ $Q=ql\left[\left(\frac{z}{l}-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{z}{l}-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{64}\right]$ $M=ql^2\left[\frac{11}{64}\frac{z}{l}-\frac{1}{4}\left(\frac{z}{l}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{l}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{l}-\frac{1}{2}\right)^3\right]$ $z_0=l \qquad M_{max}=\frac{5}{64}ql^2$ $z_0'=0{,}415l \qquad M'_{max}=\frac{3}{64}ql^2$	
	$R_A=\frac{2}{5}ql;\ R_B=\frac{1}{10}ql;\ M_A=\frac{1}{5}ql^2$ $0 \le z \le l$ $Q=\frac{ql^2}{10}\left(1-5\frac{z^2}{l^2}\right);\ M=\frac{qlz}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\frac{z^2}{l^2}\right)$ $z_0=l \qquad M_{max}=\frac{ql^2}{15}$ $z_0'=0{,}447l \qquad M'_{max}=\frac{ql^2}{15\sqrt{5}}$	$z=0{,}447l$ $f=-\frac{ql^4}{419EJ}$ $z=\frac{l}{2}$ $w=-\frac{ql^4}{426{,}6EJ}$

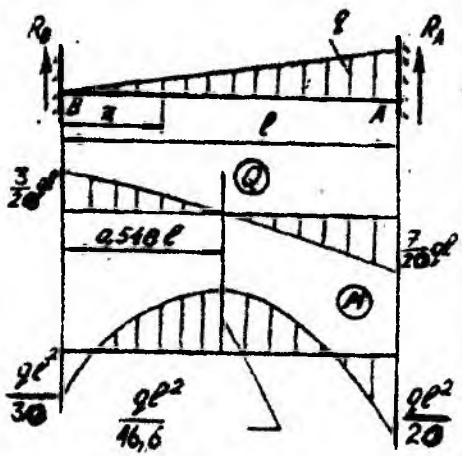
1	2	3
	$R_A=\frac{9}{40}ql;\ R_B=\frac{11}{40}ql;\ M_A=\frac{7}{120}ql^2;$ $0\le z\le l$ $Q=ql\left(\frac{11}{40}-\frac{z}{l}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{l^2}\right);$ $M=\frac{qlz}{2}\left(\frac{11}{20}-\frac{z}{l}+\frac{1}{3}\frac{z^2}{l^2}\right)$ $z_0=l \qquad M_{max}=\frac{7}{120}ql^2$ $z_0'=0{,}329l \quad M'_{max}=\frac{ql^2}{23{,}6}$	$f=-\frac{ql^4}{327{,}8EJ}$ $z=0{,}402l$ $z=1/2$ $w=-\frac{ql^4}{349EJ}$
Кез келген күштер 	$R_A=R_A^*-\frac{M_A}{l};\ R_B=R_B^*+\frac{M_A}{l};$ $M_A=3\frac{\theta_A^*}{l}EJ$	$w=w^*\left(\frac{l}{2}+\frac{M_Al^2}{16EJ}\right)$ $z=\frac{l}{2}$

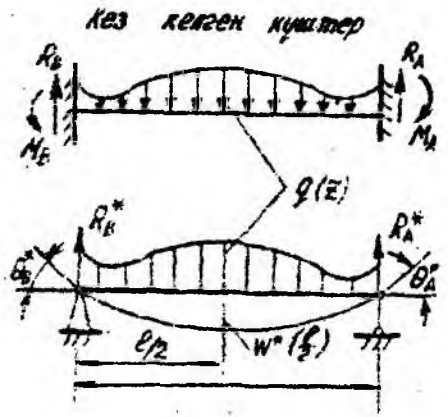
1	2	3
	$R_A=6m\frac{ab}{l^3};\quad R_B=6m\frac{ab}{l^3}$	$0\le z\le a$
	$M_A=m\frac{a}{l^2}(2b-a);\quad M_B=m\frac{b}{l^2}(2a-b)$	$w(z)=\frac{l^3}{6EJ}\left[-R_B\frac{z^3}{l^3}+3M_B\frac{z^2}{l^2}\right]=$
	$0\le z\le a$	$=3\frac{mbz^2}{EJl^A}\left(2\frac{a}{l}-\frac{b}{l}+2\frac{a}{l}\right)$
	$Q=-6m\frac{ab}{l^3};\quad M=m\frac{ab}{l^2}\left(2-\frac{a}{b}-6\frac{z}{l}\right)$	
	$a\le z\le l$	$\frac{l}{3}<a<2\frac{l}{3}$
	$M_A=-6m\frac{ab}{l^3};\quad M_B=m\frac{ab}{l^2}\left(2-\frac{b}{a}-6\frac{z}{l}+\frac{l^2}{ab}\right)$	
	$z_0^I=a\quad M_{max}^I=m\frac{b}{l^2}(2a-b)$	$w_{max}(>0);\quad z=\frac{1}{3}\left(2-\frac{b}{a}\right)$
	$z_0^{II}=a\quad M_{max}^{II}=-m\left(1-4\frac{a}{l}+9\frac{a^2}{l^2}-6\frac{a^3}{l^3}\right)$	$z=\frac{1}{3}\left(1+\frac{a}{b}\right);$
	$z_0^{III}=a\quad M_{max}^{III}=m\left(4\frac{a}{l}-9\frac{a^2}{l^2}+6\frac{a^3}{l^3}\right)$	$w_{max}(<0);$
	$z_0^{IV}=a\quad M_{max}^{IV}=-m\frac{a}{l^2}(2b-a)$	

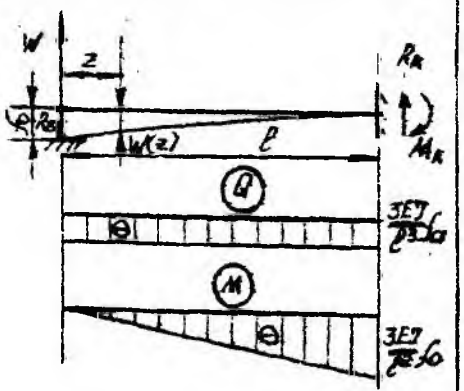
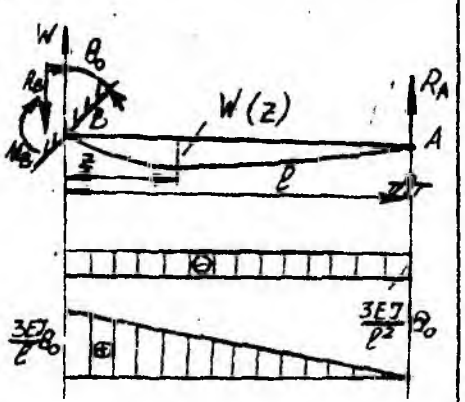
1	2	3
	$R_A=R_B=\frac{1}{2}F;\ M_A=M_B=\frac{1}{8}Fl$ $0\le z\le\frac{l}{2}$ $Q=\frac{1}{2}F;\ M=\frac{1}{8}F(4z-l)$ $\frac{1}{2}\le z\le l$ $Q=\frac{1}{2}F;\ M=\frac{1}{8}F(3l-4z)$ $z_0^I=\frac{l}{2};\ M_{max}=\frac{1}{8}Fl$ $z_0^{II}=0;\ z_0^{III}=l$ $M_{max}^{II}=M_{max}^{III}=\frac{1}{8}Fl$	$0\le z\le\frac{l}{2}$ $w(z)=-\frac{Fl^3}{48EJ}\left(3\frac{z^2}{l^2}-4\frac{z^3}{l^3}\right)$ $z=\frac{l}{2}$ $f=\frac{Fl^3}{192EJ}$
	$R_A=F\frac{a^2(3b+a)}{l^3};\ R_B=F\frac{b^2(3a+b)}{l^3}$ $M_A=Fb\frac{a^2}{l^2};\ M_B=Fl\frac{b^2}{l^2}$ $0\le z\le a$	$0\le z\le a$ $w(z)=\frac{Fab^2}{6EJ}\frac{z^2}{l^2}\left(3-3\frac{z}{i}\frac{b}{a}\frac{z}{l}\right)$ $a>b$

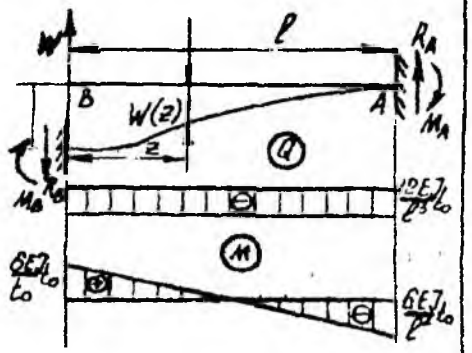
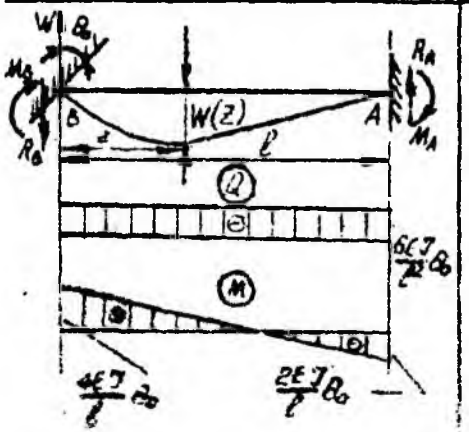
1	2	3
	$Q=F\frac{b^2(3a+b)}{l^3}$; $M=Fa\frac{b^2}{l^2}\left(\frac{3a+b}{al}\cdot z-1\right)$	$z=\frac{2al}{3a+b}$
	$a\le z\le l$	$f=\frac{2}{3}\frac{F}{EJ}\frac{a^3b^2}{(3a+b)^2}$
	$Q=-F\frac{a^2(3b+a)}{l^3}$;	$a<b$
	$M=Fa\frac{b^2}{l^2}\left[\frac{3a+b}{al}z-\frac{l^2(z-a)}{b^2a}-1\right]$	$f=\frac{2}{3}\frac{F}{EJ}\frac{a^2b^3}{(3b+a)^2}$
	$z_0^I=a$; $M_{max}^I=-F\frac{ab^2}{l^2}$	$z=l-\frac{2bl}{3b+a}$
	$z_0^{II}=a$; $M_{max}^{II}=2F\frac{a^2b^2}{l^3}$	$w=\frac{Fa^3b^3}{3EJl^3}$
	$z_0^{III}=a$; $M_{max}^{III}=-F\frac{ba^2}{l^2}$	$z=a$
	$a<b$ $\lvert M_{max}^I\rvert>M_{max}^{II}>\lvert M_{max}^{III}\rvert$	
	$a>b$ $\lvert M_{max}^{III}\rvert>M_{max}^{II}>\lvert M_{max}^I\rvert$	
	$a=\frac{l}{3}$ $\lvert M_{max}^I\rvert=\frac{4}{27}Fl$	

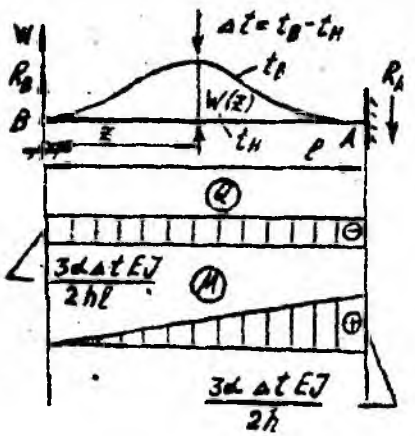
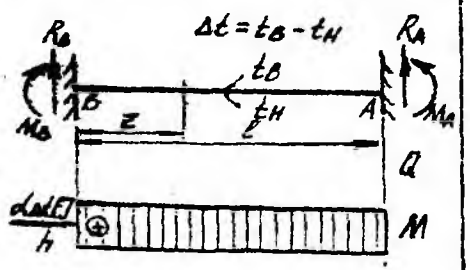
1	2	3
	$R_A=R_B=\frac{ql}{2};\ M_A=M_B=\frac{ql^2}{12}$ $0\le z\le l$ $Q=\frac{ql}{2}\left(1-2\frac{z}{l}\right);\ M=\frac{ql^2}{2}\left(\frac{z}{l}-\frac{z^2}{l^2}-\frac{1}{6}\right)$ $z_0^I=0;\ z_0^{II}=l$ $M_{max}^I=M_{max}^{II}=-\frac{ql^2}{12}$ $z_0^{III}=\frac{l}{2};\ M_{max}^{III}=\frac{ql^2}{24}$	$0\le z\le l$ $w(z)=-\frac{Fz^2l}{24EJ}\left(1-\frac{z}{l}\right)$ $z=\frac{1}{2}$ $f=\frac{Fl^3}{384EJ}$
	$R_A=R_B=\frac{ql}{4};\ M_A=M_B=\frac{5}{96}ql^2$ $0\le z\le 1/2$ $Q=ql\left(\frac{1}{4}-\frac{z^2}{l^2}\right);\ M=\frac{ql^2}{4}\left(\frac{z}{l}-\frac{4z^3}{3l^3}-\frac{5}{24}\right)$ $\frac{1}{2}\le z\le l$	$f=\frac{7ql^4}{3840EJ}$ $z=\frac{1}{2}$

1	2	3
	$Q=ql\left[\frac{(l-z)^2}{l^2}-\frac{1}{4}\right]$ $M=ql^2\left[\frac{1}{32}-\frac{(z-1/2)^2}{2l^2}+\frac{(z-1/2)^3}{3l^3}\right]$ $z_0^I=0;\ z_0^{II}=l$ $M_{max}^I=M_{max}^{II}=-\frac{5}{96}ql^2$ $z_0^{III}=\frac{l}{2};\ M_{max}^{III}=\frac{ql^2}{32}$	
	$R_A=\frac{7}{20}ql;\ R_B=\frac{3}{20}ql;$ $M_A=\frac{ql^2}{20};\ M_A=\frac{ql^2}{30}$ $0\le z\le l$ $Q=\frac{1}{2}ql\left(\frac{3}{10}-\frac{z^2}{l^2}\right);$	$f=-\frac{ql^4}{764EJ}$ $z=0{,}525l$ $z=\frac{l}{2}$ $w=-\frac{ql^4}{768EJ}$

1	2	3
	$M=ql^2\left(\frac{3}{20}\frac{z}{l}-\frac{1}{6}\frac{z^3}{l^3}-\frac{1}{30}\right)$ $z_0^I=0;\quad M_{max}^I=-\frac{ql^2}{30};$ $z_0^{II}=l,\quad M_{max}^{II}=-\frac{ql^2}{20};$ $z_0^{III}=0{,}548l;\quad M_{max}^{III}=-\frac{ql^2}{46.6}$	
Кез келген кұштер 	$R_B=R_B^*-\frac{M_A-M_B}{l};$ $R_A=R_A^*+\frac{M_A-M_B}{l};$ $M_B=\frac{2EJ}{l}\left(2\theta_B^*-\theta_A^*\right)$ $M_A=\frac{2EJ}{l}\left(2\theta_A^*-\theta_B^*\right)$	$w=w^*\left(\frac{l}{2}\right)+\frac{(M_A+M_B)l^2}{16EJ}$ $z=\frac{l}{2}$

1	2	3
	$R_A=\frac{3EJf_0}{l^3}$; $R_B=\frac{3EJf_0}{l^3}$; $M_A=\frac{3EJf_0}{l^2}$ $0\le z\le l$ $Q=\frac{3EJf_0}{l^3}$; $M=\frac{3EJf_0}{l^3}z$ $z_0=l$; $M_{max}=\frac{3EJf_0}{l^2}$	$0\le z\le l$ $w=\frac{f_0}{2}\left(2-3\frac{z}{l}+\frac{z^3}{l^3}\right)$ $z=0$ $f=-f_0$ $z=0$ $\theta=\frac{3f_0}{2l}$
	$R_A=\frac{3EJ\theta_0}{l^2}$; $R_B=\frac{3EJ\theta_0}{l^2}$; $M_B=\frac{3EJ\theta_0}{l}$ $0\le z\le l$ $Q=\frac{3EJ\theta_0}{l^2}$; $M=\frac{3EJ\theta_0}{l^2}(l-z)$ $z_0=0$; $M_{max}=-\frac{3EJ\theta_0}{l}$	$0\le z\le l$ $w(z)=-\theta_0\frac{l}{2}\left(2\frac{z}{l}-3\frac{z^2}{l^2}+\frac{z^3}{l^3}\right)$ $z=0{,}422l$ $f=-0{,}193l$ $z=0$ $\theta=-\theta_0$ $z=l$ $\theta=\frac{1}{2}\theta_0$

1	2	3
	$R_A=R_B=\frac{6EJ\theta_0}{l^2}$; $M_A=\frac{2EJ\theta_0}{l}$; $M_B=\frac{4EJ\theta_0}{l}$ $0\le z\le l$ $Q=-\frac{6EJ\theta_0}{l^2}$; $M=\frac{6EJ\theta_0}{l}\left(2-3\frac{z}{l}\right)$ $z_0^I=0 \quad M_{max}=\frac{4EJ\theta_0}{l}$ $z_0^{II}=l \quad M_{max}=\frac{2EJ\theta_0}{l}$	$0\le z\le l$ $w(z)=-\theta_0 l\left(\frac{z^3}{l^3}-2\frac{z^2}{l^2}+\frac{z}{l}\right)$ $z=\frac{l}{3} \quad f=\frac{4\theta_0}{27}l$ $z=0 \quad \theta=-\theta_0$
	$R_A=R_B=\frac{12EJ}{l^3}f_0$; $M_A=M_B=\frac{6EJ}{l^3}f_0$ $0\le z\le l$ $Q=\frac{12EJ}{l^3}f_0$;	$0\le z\le l$ $w(z)=-\theta_0 l\left(\frac{z^3}{l^3}-2\frac{z^2}{l^2}+\frac{z}{l}\right)$ $z=\frac{l}{3} \quad f=-\frac{4\theta_0}{27}$ $z=0 \quad \theta=-\theta_0$

1	2	3
	$M=\frac{6EJ}{l^2}f_0\left(1-2\frac{z}{l}\right)$ $z_0^I=0 \quad M'_{max}=\frac{6EJ}{l^2}f_0$ $z_0^{II}=l \quad M''_{max}=-\frac{6EJ}{l^2}f_0$	
	$R_A=R_B=\frac{3\alpha\Delta tEJ}{2hl};$ $M_A=\frac{3\alpha\Delta tEJ}{2h}$ $0\le z\le l$ $Q=\frac{3\alpha\Delta tEJ}{2hl}; \quad M=-\frac{3\alpha\Delta tEJ}{2hl}z;$ $z_0=l; \quad M_{max}=\frac{3\alpha\Delta tEJ}{2h}$	$0\le z\le l$ $w(z)=\frac{\alpha\Delta tl^2}{4h}\left(\frac{z}{l}-2\frac{z^2}{l^2}+\frac{z^3}{l^3}\right)$ $z=\frac{l}{3} \quad f=\frac{\alpha\Delta tl^2}{27h}$ $z=0 \quad \theta=\frac{\alpha\Delta tl}{4h}$
	$R_A=R_B=0;$ $M_A=M_B=\frac{\alpha\Delta tEJ}{h}$ $0\le z\le l$ $Q=0; \quad M=\frac{\alpha\Delta tEJ}{h}=\text{const}$	$0\le z\le l$ $w(z)=0$ α — материалдын узгаю температурасынын коэффициенти. Δt — температура айырмашылыгы.

XII тарау

СЫҒЫЛҒАН СЫРЫҚТАРДЫҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

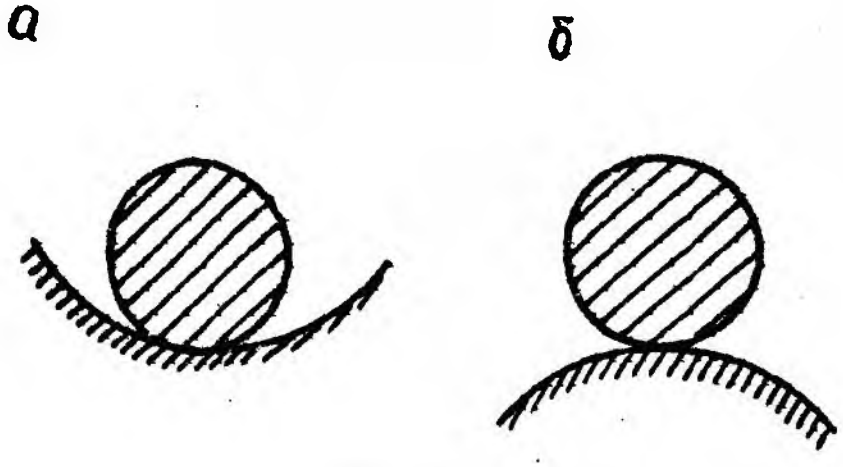
§ 1. НЕГІЗГІ ТҮСІНІКТЕР

Инженерлік объектілерге күштерден басқа, белгілі тепе-тендік күйінен, не қозғалыстан шығаруға тырысатын қосымша күш әсер (үйтқу) етеді.

Егер аз үйтқу жүйенің есептелген (үйытқусыз) күйінен шамалы ауытқу тудырса, онда жүйе орнықты болады. Керісінше аз үйытқу жүйенің есептелген күйінен үлкен ауытқу тудырса, онда бұл жүйе орнықсыз болады.

Орнықты және орнықсыз күйге мысал ретінде кәдімгі зырылдауықтың (гироскоптың) айналуын қарастырып көрейік. Зырылдауықтың айналу жылдамдығы неғұрлым көп болса, тік өс бойымен айналуынан ауытқытатын әсерге оның кедергісі де соғұрлым үлкен болады. Демек, зырылдауықтың айналмалы қозғалысы үлкен жылдамдық кезінде аз үйытқуға орай орнықты болады. Айналу жылдамдығы қайсыбір мөннен азайғанда аз үйытқу зырылдауықтың күйін кенет өзгертіп, ретсіз қозғалысты тудырады.

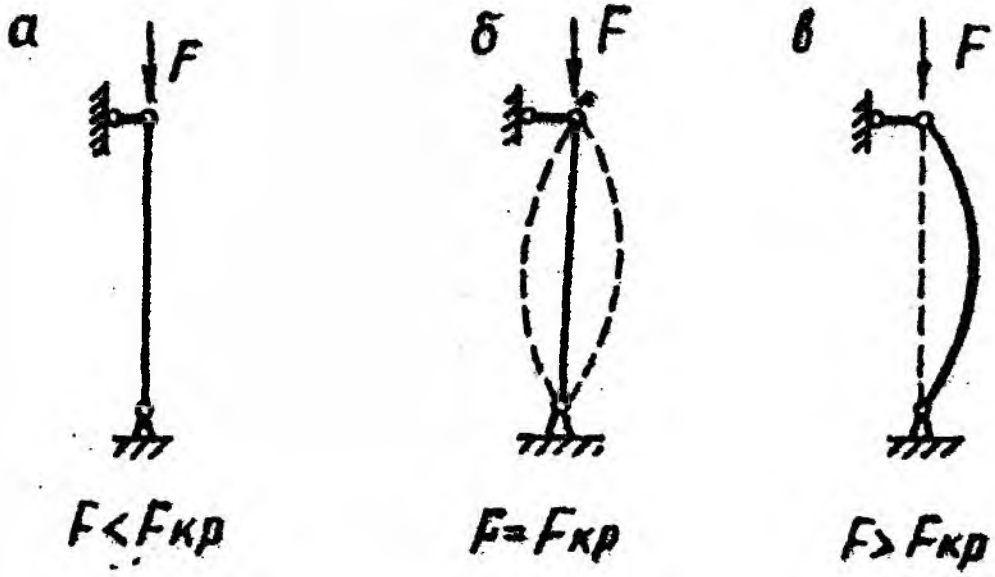
Орнықты және орнықсыз тепе-тендік мысалына ойыс немесе дөнес беттегі ауыр шардың тепе-тендігін келтіре аламыз. Ойыс беттің түбіндегі шар орнықты тепе-тендікте, ал дөнес беттің төбесіндегі шар орнықсыз тепе-тендікте болады (12.1-сурет).



12.1 - сурет

Осыған ұқсас күбылыстарды сығылған сырықтың тепе-теңдігін зерттеу кезінде де байқаймыз. Деформацияланған дененің тепе-теңдік күйі түсірілген күшке байланысты болады. Тепе-теңдік формасының тармақталуы басталатын сығу күшінің ең аз мәні *кризистік күш* деп аталады және $F_{кр}$ арқылы белгіленеді.

12.2а,б,в суреттерде сырықтың деформациялануының мүмкін жағдайлары көрсетілген. $F < F_{кр}$ болғанда тепе-теңдік формасы орнықты болып қалады (12.2а-сурет); $F = F_{кр}$ болғанда талғаусыздық тепе-теңдік болады, онда сырық түтас және үзік сызықтармен көрсетілген орнында болуы мүмкін (12.2б-сурет); $F > F_{кр}$ болғанда сығылған сырықтың түзу сызықты формасы орнықты емес деп табылады. Өте аз кездейсоқ әсерлер үлкен ауытқуды тудырады. Ұйытқу әсері болғаннан кейін сырық көлденең әсерден кейінгі иілген қалпында қалады (12.2в-сурет). Мұндай күйді *бойлық иілу* деп атайды.



12.2 - сурет

Бойлық иілудің болуы қауіпті, өйткені сығылу күшінің шамалы өсуі кезінде майысуы күрт артады. Майысу мен күштер өзара сызықты емес тәуелділікпен байланысты. Майысудың күрт артуы кернеулердің тез өсуін арттырып, олар өз кезегінде деформацияны жылдамдатады да сырықтың қирауына әкеп соғады. Бойлық иілу қауіпті болатындықтан, оны болдырмау қажет.

Орнықтылықтың анықталған қорын қамтамасыз ету үшін келесі шарт қанағаттандырылуы керек:

$$F \le [F],$$

мұндағы F — әсер ететін күш; $[F]$ — мүмкін күш. Олар мынадай өзара қатысты болады:

$$[F]=\frac{F_{кр}}{n_0};$$

мұндағы n_0 — орнықтылығының қор коэффициенті, ол материалға, сырықтың міндеттіне байланысты болады. Әдетте n_y келесі мәндерін қабылдайды:

болат құрылмалар үшін, ферма, кронштейндерге және т. б. — 1,8-3,0;
болат құрылмалар бұрандалар үшін — 3,5-5,0;
шойын құймалардан алынған құрылмалар үшін — 5,0-6,5;
алюминий қорытпадан алынған құрылмалар үшін — 2,5-3,5;
ағаш тіректер үшін — 3,0-5,0.

Сонымен, серпімді жүйелерді орнықтылыққа есептеу кезінде ең алдымен кризистік күшті анықтау керек.

§ 2. ЭЙЛЕР ФОРМУЛАСЫ

Сырықтың серпімді сатыдағы орнықтылығынан айырылу кезіндегі кризистік күш Эйлер формуласы бойынша анықталады:

$$F_{кр}=\frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2};$$

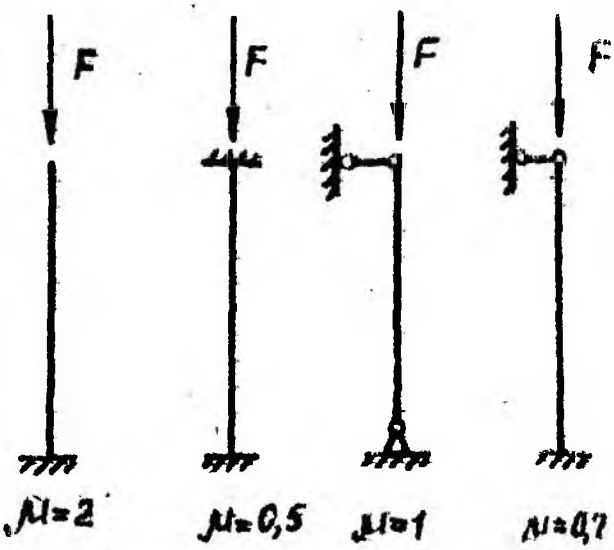
мұндағы E — материалдың серпімділік бойлық модулі;

I_{min} — көлденең қиманың минимал бас центрлік инерция моменті;

l — сырықтың ұзындығы;

μ — келтірілген ұзындық коэффициенті, ал μl келтірілген еркін ұзындық деп аталады. Кейбір жағдайлар үшін μ мәндері 12.3-суретте берілген.

Сығылған күштің кризистік мәні кезінде сырықтың көлденең қимасында болатын тік кернеу кризистік деп аталады



12.3 - сурет

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A}.$$

Егер $F_{кр}$ кризистік күш Эйлер формуласы бойынша анықталса, онда тік кернеу мына түрде болады:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2};$$

мұндағы $\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}$ — сырықтың иілгіштігі деп аталады;

$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$ — минимал инерция радиусы.

§ 3. ЭЙЛЕР ФОРМУЛАСЫН ҚОЛДАНУ ШЕГІ. ПРОПОРЦИОНАЛДЫҚ ШЕКТЕН ТЫС КРИЗИСТІК КҮШТІ АНЫҚТАУ

Эйлер формуласын қорыту кезінде сырық кез келген мөнінде Гук'заңына сәйкес серпімді деформация шегінде жұмыс істей алады деп үйғарылған. Сондықтан да оны кризистік кернеулер пропорционалдық шектен үлкен болғанда қолдануға болмайды. Эйлер формуласын қолдану шегін анықтау үшін мына формуланы қарастырамыз:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{пц.}$$

Егер $\lambda > \lambda_{кр}$ (мұндағы $\lambda_{кр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$) болса, онда Эйлер формуласын пайдалануға болады. Ал $\lambda < \lambda_{кр}$ болса, онда Эйлер формуласын қолдануға болмайды.

Сырықты серпімді деформация шегінен асқан кезде пайдаланса, теориялық түжырымдар өте күрделенеді. Сондықтан эксперименттік зерттеулер жүргізілді. Тәжірибелік мәліметтер негізінде Ф. С. Ясинский кризистік күшті анықтау үшін эмпирикалық формуланы ұсынды:

$$F_{кр} = A(a - b\lambda).$$

ал кризистік кернеу

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda;$$

мұндағы A — тіректің көлденең қимасының ауданы; a және b — кернеу өлшеміндегі сан коэффициенттері.

Бұл формулалар иілгіштігі $\lambda_1 < \lambda < \lambda_{кр}$ шектерде болатын тіректер үшін пайдаланылады, мұндағы λ_1 — кризистік кернеу аққыштық шегіне тең болатын стерженьдердің иілгіштігі:

$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_A}{b}.$$

a және b коэффициенттері, олармен бірге λ_1 және $\lambda_{кр}$ иілгіштіктері 12.1-кестеде келтірілген.

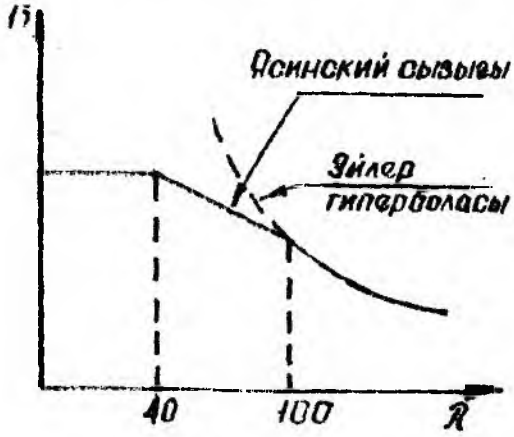
12.1 - к е с т е. a, b коэффициенттерінің және $\lambda_{кр}, \lambda_1$ иілгіштердің мәндері

Материал МПа	a (МПа)	b	$\lambda_{кр}$	λ_1
Болат-3: $\sigma_б$ =380МПа, σ_A =240МПа;	310	1,14	105	61,4
Көміртекті болат $\sigma_б$ =480МПа; σ_A =310МПа;	469	2,62	100	60
Кремнийлі болат $\sigma_б$ =520МПа; σ_A =360МПа;	589	3,82	100	60
Хромды болат	1000	5,4	55	—
Дюралюминий	380	2,19	50	—
Ағаш (қарағай)	40	0,2	59	—

Жеткілікті қысқа және қалың сырықтар үшін $\lambda < \lambda_1$; $\sigma_{кр} = \sigma_A$ орнықтылыққа есептеу беріктікке есептеумен алмастырады. Конструкциялық және легирленген болаттар үшін a және b коэффициенттердің мәндері туралы мәліметтер болмаса, онда олар келесі формулалар бойынша анықталады:

$$a = \frac{\sigma_A \lambda_{кр} - \sigma_{пц} \lambda_1}{\lambda_{кр} - \lambda_1}; \quad b = \frac{\sigma_A - \sigma_{пц}}{\lambda_{кр} - \lambda_1};$$

мұндағы $\lambda_{кр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$, ал $\lambda_1 = 15 \div 25$ болады.



12.4 - сурет

Ф. С. Ясинский шойынның кризистік күшін табу үшін мына формуланы ұсынады

$$F_{кр} = A\left(776 - 12\lambda - 0{,}053\lambda^2\right).$$

12.4-суретте болат-3 үшін кризистік кернеулердің иілгіштікке тәуелділігінің толық графигі көрсетілген. $\lambda_1 < \lambda_{кр}$ кезінде Эйлер гиперболасы үзік сызықпен көрсетілген, яғни бұл бөлікте бұны пайдалануға болмайды.

0-ден 40-50-ге тең иілгіштік кезінде сырық өте қыска болады да беріктігі жоғалғанда іс жүзінде қирайды, сондықтан кризистік кернеуді аққыштық шегіне (немесе беріктік шегіне) тең деп алуға болады. Ал $50 \le \lambda_1 \le \lambda_{кр}$ аралығында жататын иілгіштік кезінде сырық серпімді-созылымды аймақта деформацияланып, орнықтылығын жоғалтады, ол графикте Ясинский түзуімен көрсетілген.

Эйлер мен Ясинский формулалары құрылыс тәжірибесінде кездесетін сығылған сырықтардың орнықтылық есебін иілгіштіктің барлық аралығында анықтауға мүмкіндік береді.

Сырық серпімді-созылымды аймақта жұмыс процесінде пайдаланылса таза эксперименттік нәтижелерден басқа кризистік күшті анықтайтын теориялық зерттеулер де қолданылады. Оған ең алдымен келтірілген модульді пайдаланатын серпімді-созылымды аймақ үшін Эйлер формуласын ұсынатын Ясинский еңбегін жатқызуға болады:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E_r I}{(\mu l)^2};$$

мұндағы E_r — келтірілген модуль немесе Ясинский модулі. Мәселен, ол тік бұрышты көлденең қимасы бар сырық үшін былай болады:

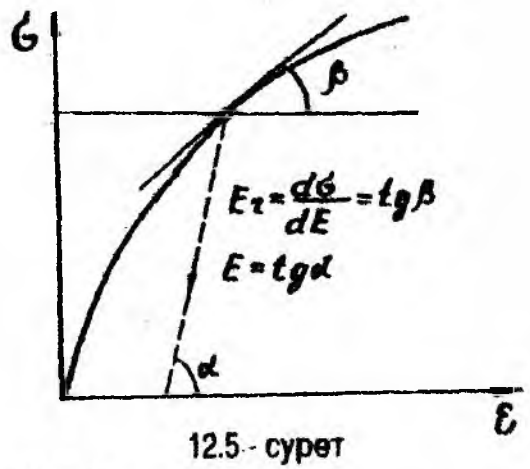
$$E_r = \frac{4E_1E_2}{\left(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}\right)^2};$$

мұндағы E_1 — күш тоқталған кездегі бастапқы модульге тең серпімділік модулі; $E_2 = E_r$ — сәйкес өстік кернеу үшін алынған серпімділік модулі (12.5-сурет). Ол сығылу қисығы жанаманың көлбеу бұрышының тангенесіне тең, оны кейде жанама модуль деп атайды.

Ясинский формуласы (а) эксперименттік нәтижелермен біршама жақсы үйлеседі.

Жанама—модульді күшті анықтау үшін төмендегідей теңдеу құрамыз:

$$F_\tau = \frac{\pi^2 E_\tau I}{(\mu l)^2}.$$



12.5- сурет

Сонымен, центрлік сығылған сырық өсетін күш әсеріне үшыраса, онда ол әрбір нүктеде сырықтық майысуы болатын күш мәндерінің аралығын қамтиды да, $F_\tau \le F \le F_r$ ие болады, ал ол майысуды тудыратын ең кіші жанама модульді күш F_τ болады.

§ 4. СЫҒЫЛҒАН СЫРЫҚТАРДЫ ІС ЖҮЗІНДЕ ЕСЕПТЕУ

Сығылған сырықтардың өлшемдерін белгілегенде алдымен оларды пайдалану кезіндегі сығу күштерінің әсеріне назар аударған жөн, өйткені мұндай сәтте олар орнықтылығын жоғалтуы мүмкін. Ал оған жол беруге болмайды. Сондықтан сығылған сырықтағы кернеулер кризистік мәндерінен аз болуы керек.

$$\sigma = \frac{N}{A_{\text{brutto}}} < \frac{F_{\text{кр}}}{A_{\text{brutto}}} = \sigma_{\text{кр}};$$

немесе

$$\sigma = \frac{N}{A_{\text{brutto}}} \le \varphi[\sigma];$$

мұндағы N — есептелетін күш, $F_{\text{кр}}$ — кризистік күш, A_{brutto} — қиманың брутто ауданы, φ — бойлық иілу кезінде негізгі есептеу кернеуін азайту коэффициенті (12.2-кесте).

Есептеу формуласы мына түрде болады:

$$A_{\text{brutto}} \ge \frac{N}{\varphi[\sigma]}.$$

Бұл формулада екі белгісіз φ және A_{brutto} болғандықтан көлденең қиманы біртіндеп жуықтау әдісімен жүргізеді.

12.2 - к е с т е. Кейбір материалдар үшін λ иілгіштікке байланысты φ коэффициенттерінің мәндері

λ	Болат			Шойын		Ағаш	Бетон	
Иілгіштік	Б0 Б2 Б3 Б4	 Б-5 НЛ-1	 НЛ-2	КШ15-30 КШ15-18 КШ15-36 КШ21-40	 КШ28-48			жеңіл
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,99	1,00	1,00
20	0,97	0,95	0,95	0,91	0,87	0,97	0,96	0,96
30	0,95	0,93	0,93	0,81	0,75	0,92	0,90	0,86
40	0,92	0,90	0,90	0,69	0,60	0,87	0,84	0,73
50	0,89	0,84	0,83	0,57	0,43	0,80	0,76	0,68
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,71	0,70	0,59
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,61	0,63	0,52
80	0,75	0,66	0,63	0,26	0,18	0,49	0,57	0,46
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,38	0,51	
100	0,60	0,50	0,45	0,16	0,12	0,31	0,45	
110	0,52	0,43	0,39			0,26		
120	0,45	0,38	0,33			0,22		
130	0,40	0,32	0,29			0,18		
140	0,36	0,28	0,26			0,16		
150	0,32	0,27	0,23			0,14		
160	0,29	0,24	0,21			0,12		
170	0,26	0,21	0,19			0,11		
180	0,23	0,19	0,17			0,10		
190	0,21	0,17	0,15					
200	0,19	0,16	0,14					
210	0,17	0,15	0,14					
220	0,16	0,14	0,13					

Мысал. Центрлік сығылған бағанаға екі ұшы бекітілген, қос таврдың (болат-3) нөмірін таңдау керек. Бағананың ұзындығы l=5м, F күші 320 кН; мүмкін кернеу $[\sigma]=160$МПа.

Шешімі Сырық ұштарын бекіту жағдайында келтірілген ұзындық коэффициенті $\mu=0,5$. Қиманы біртіндеп жуықтау жолымен таңдаймыз.

1 жуықтау. $\varphi_1=0,5$ аламыз, сонда $\frac{N}{\varphi A_{брутто}}\le[\sigma]$ шарттан керекті қима

ауданын табамыз: $A_{br} = \frac{N}{\varphi_1[\sigma]} = 40\text{см}^2$. Түрлерінің жиынтығы кестесіне сәйкес $A = 40,2\text{см}^2$, $i_{min} = 2,54\text{см}$, қос таврды №27 аламыз. Иілгіштікті табамыз: $\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = 98,5$ 12.2-кесте бойынша $\varphi_1' = 0,614 > \varphi_1 = 0,5$.

II жуықтау. $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{0,5 + 0,614}{2} = 0,557$. Керекті қима ауданын табамыз: $A_{br} = \frac{N}{\varphi_2[\sigma]} = 36\text{см}^2$. Түрлерінің жиынтығы кестесіне сәйкес: $A = 37,5\text{см}^2$, $i_{min} = 2,63\text{см}$ №24,а қос таврды аламыз. Иілгіштікті табамыз: $\lambda = \frac{250}{2,63} = 95$ 12,2-кесте бойынша $\varphi_2' = 0,645 > \varphi_1' = 0,614$.

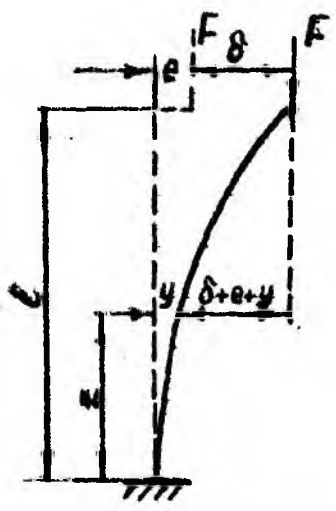
III жуықтау. $\varphi_3 = \frac{0,614 + 0,645}{2} = 0,63$. Керекті қима ауданын табамыз: $A = \frac{320}{0,63 \cdot 160 \cdot 10^3} = 31,8\text{см}^2$. Түрлерінің жиынтығы кестесіне сәйкес $A = 32,4\text{см}^2$, $i_{min} = 2,5\text{см}$. №22,а қос таврды аламыз. Иілгіштігін табамыз: $\lambda = \frac{250}{45} = 100$. 12.2-кесте бойынша $\varphi = 0,6$, сонда

$$\sigma = \frac{N}{\varphi A} = \frac{320}{0,6 \cdot 32,4 \cdot 10^{-4}} = 164,5\text{МПа}.$$

Кернеу мүмкін кернеуге іс жүзінде үйлесетіндіктен қиманы тандап алуды аяқтаймыз. Ең ақырында қос тавр №22а-ны тандап аламыз.

§5. ЦЕНТРДЕН ТЫС СЫҒЫЛҒАН ИІЛМЕЛІ ТІРЕКТІ ЕСЕПТЕУ

Центрден тыс сығылған иілмелі сырық серпімділік деформациялар шегінде жұмыс істейді. Бұл есептің ерекшелігі — кернеулер мен сығу күшінің арасында күрделі сызықты емес тәуелділік байқалады. Осыған байланысты мұндай сырықтың беріктік мәселесі ерекше қарастырылады (12.6-сурет).



12.6 - сурет

Егерде тірек жеткілікті иілмелі болса, онда кез келген қимадағы июші моменттің өрнегін жазамыз:

$$M = F(\delta + e - y);$$

мұндағы y — сырық өсінің кез келген нүктесінің көлденеңі бойынша ауытқуы: e — F күшінің эксцентриситеті.

Иілудің дифференциалдық теңдеуі мына түрде беріледі:

$$y'' = \frac{F}{EI}(\delta + e - y)$$

Оны екі рет интегралдасақ былай болады:

$$y = A\cos kz + B\sin kz + \delta + e;$$

мұндағы A және B интегралдау тұрақтылары, $k^2 = \frac{F}{EI}$.

Қатаң бекітпеде ең үлкен июші моментті келесі формула арқылы шешеміз:

$$M_{max} = F(\delta + e) = \frac{Fe}{\cos kl}.$$

Сығу және июо кезінде қатаң бекітпедегі ең үлкен бекітпедегі ең үлкен кернеу былай есептеледі:

$$\sigma_{max} = -\left(\frac{F}{A} - \frac{M_{max}}{W}\right) = -\frac{F}{A}\left(1 + \frac{Ae}{W\cos kl}\right).$$

Кернеулердің сығу күшіне қарағанда айтарлықтай тез өсуі центрден тыс сығылған иілмелі сырықтар жұмысының басты ерекшелігі болып табылады.

§ 6. БОЙЛЫҚ-КӨЛДЕНЕҢ ИІЛУ

Егер сырықтарға бір мезгілде сығу күші және көлденең күштер түсірілген болса, онда бойлық-көлденең иілу пайда болады.

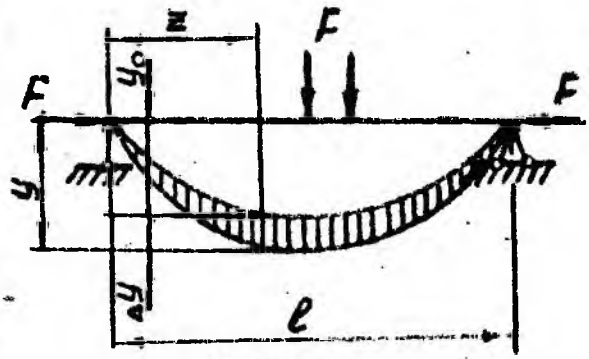
12.7-суретте көрсетілген жағдай үшін июші моментті екі моменттің қосындысы ретінде қарастыруға болады:

$$M = M_0 + F \cdot y$$

мұндағы M_0 — әдеттегі әдіспен анықталатын көлденең күштер моменті Бұл теңдеуден байқайтынымыз, сырық қималарындағы қосынды июші моменттер тек y орын ауыстыру белгілі болғанда ғана өрнектеледі. Сонымен бойлық-көлденең иілу есебі статикалық анықталмайтын есеп болып шықты.

Бойлық-көлденең иілу кезіндегі майысуды жуықтап анықтау әдісін қарастырайық. S көлденең күш және F сығу күші болатын майысуды екі майысудың қосындысы түрінде қарастыруға болады (12.7-сурет):

$$y = y_0 + \Delta y,$$



12.7-сурет

мұндағы y_0 — F күшті ескермегенде, тек көлденең күштің әсерінен болатын бүгілу, Δy — F сығу күшінің әсерінен болатын қосымша бүгілу.

Дифференциалдық теңдеуі төмендегідей:

$$y_0'' + (\Delta y)'' = -\frac{M_0}{EI} - \frac{F \cdot y}{EI}.$$

Бұл теңдеудің шешімі былай болады:

$$y = \frac{y_0}{1 - \dfrac{F}{F_{кр}}};$$

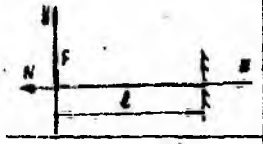
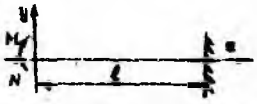
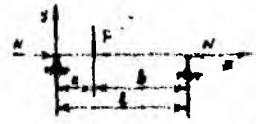
мұндағы $F_{кр} = \dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$ — Эйлер күші

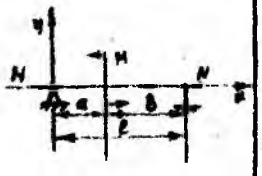
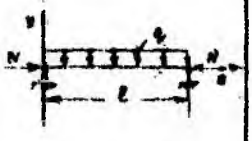
Бұл формуланы сырықтың ұштарын басқаша бекіту жағдайларында да қолдануға болады.

12.3-кестеде тұрақты көлденең қималы арқалықтардың иілу жағдайындағы июші моментінің және серпімді сызығының теңдеулері келтірілген.

12.3 - к е с т е. Кейбір тұрақты көлденең қималы арқалықтардың көлденең — иілу жағдайындағы $M(z)$ июші моменттінің және $y(z)$ серпімді сызығының теңдеулері $\left(k=\sqrt{\frac{N}{EI}}\right)$

1	$M(z)$ 2	$y(z)$ 3
	$M(z)=\frac{F}{k}\left[\frac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} kx-\right.$ $\left.-l(a)\operatorname{sh} k(z-a)\right]$ $M(a)=\frac{F\operatorname{sh} kb}{k\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} ka$ $z\le a$ болғанда $l(a)=0$ $z>a$ болғанда $l(a)=1$	$y(z)=\frac{F}{EIk^3}\left\{\frac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} kz-\right.$ $\left.-\left(1-\frac{a}{l}\right)kz-l(a)[\operatorname{sh} k(z-a)-k(z-a)]\right\}$ $y(a)=\frac{F}{EIk^3}\left\{\frac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} ka-\left(1-\frac{a}{l}\right)a\right\}$
	$M(z)=M\left[\frac{\operatorname{ch} kb}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} kz-\right.$ $\left.-l(a)\operatorname{ch} k(z-a)\right]$ $M(a)=M\frac{\operatorname{ch} kb}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} ka$ $z\le a$ болғанда $l(a)=0$ $z>a$ болғанда $l(a)=1$	$y(z)=\frac{M}{EIk^2}\left\{\frac{\operatorname{ch} kb}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} kz-\right.$ $\left.-\frac{z}{l}-l(a)[\operatorname{ch} k(z-a)-1]\right\}$ $y(a)=\frac{M}{EIk^2}\left\{\frac{\operatorname{ch} kb}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} ka-\frac{a}{l}\right\}$
	$M(z)=\frac{q}{k^2}\left[\frac{\operatorname{ch} k\left(z-\frac{l}{2}\right)}{\operatorname{ch} k\frac{l}{2}}+1\right]$	$y(z)=\frac{q}{EIk^4}\left[1-\frac{\operatorname{ch} k\left(z-\frac{l}{2}\right)}{\operatorname{ch} k\frac{l}{2}}\right.$

1	2	3
		$\frac{k^2 lz}{2}\left(1-\frac{z}{l}\right)\Big]$
	$M\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{q}{k^2}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} k\frac{l}{2}}+1\right)$	$y\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{q}{Elk^4}\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch} k\frac{l}{2}}-\frac{k^2 l^2}{8}\right)$
	$M(z)=\frac{F}{k}\frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch} kl}$	
	$M(z)=\frac{M}{\operatorname{ch} kl}\operatorname{ch} k(l-z)$	
	$M(l)=\frac{q}{k^2\operatorname{ch} kl}(1-\operatorname{ch} kl-kl\operatorname{sh} kl)$	
	$M(z)=\frac{q}{k^2}\left[1-\frac{kl\operatorname{ch} k\left(z-\frac{l}{2}\right)}{2\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}+1\right]$	$y(z)=\frac{q}{Elk^4}\left[\frac{-\operatorname{ch} k\left(z-\frac{l}{2}\right)+\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}\times\right.$
	$M\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{q}{k^2}\left[1-\frac{\frac{kl}{2}}{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}\right]$	$\left.\times\frac{k}{2}-\frac{k^2 lz}{2}\left(1-\frac{z}{l}\right)\right]$
	$M(0)=\frac{q}{k^2}\left(1-\frac{\frac{kl}{2}}{\operatorname{th}\frac{kl}{2}}\right)$	$y\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{q}{Elk^4}\left(\frac{kl}{Elk^4}\operatorname{th}\frac{kl}{4}-\frac{k^2 l^2}{8}\right)$
	$M(z)=\frac{F}{k}\left[\frac{\sin kb}{\sin kl}\sin kz-\right.$ $\left.-l(a)\sin k(z-a)\right]$	$y(z)=\frac{F}{Elk^3}\left\{\frac{\sin kb}{\sin kl}\sin kz+\left(1-\frac{a}{l}\right)\times\right.$ $\left.\times kz+l(a)[\sin k(z-a)-k(z-a)]\right\}$

1	2	3
	$M(a)=\frac{F}{k}\frac{\sin kb}{\sin kl}\sin ka$ $z\le a$ болғанда $l(a)=0$ $z>a$ болғанда $l(a)=1$	$y(a)=\frac{F}{EIk^3}\left\{-\frac{\sin kb}{\sin kl}\sin ka+\left(1-\frac{a}{l}\right)ka\right\}$
	$M(z)=M\left[\frac{\cos kb}{\sin kl}\sin kz-l(a)\cos k(z-a)\right]$ $M(a)=\frac{\cos kb}{\sin kl}\sin ka$ $z\le a$ болғанда $l(a)=0$ $z>a$ болғанда $l(a)=1$	$y(z)=\frac{M}{EIk^2}\left\{\frac{\cos kb}{\cos kl}\sin kz+\frac{z}{l}-l(a)[1-\cos k(z-a)]\right\}$ $y(a)=\frac{M}{EIk^2}\left[-\frac{\cos kb}{\cos kl}\sin ka+\frac{a}{l}\right]$
	$M(z)=\frac{q}{k^2}\left[-1+\frac{\cos k\left(z-\frac{l}{2}\right)}{\cos\frac{kl}{2}}\right]$ $M\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{q}{k^2}\left[-1+\frac{1}{\cos\frac{kl}{2}}\right]$	$y(z)=\frac{q}{EIk^4}\left[1-\frac{\cos k\left(z-\frac{l}{2}\right)}{\cos\frac{kl}{2}}+\frac{k^2lz}{2}\left(1-\frac{z}{l}\right)\right]$ $y\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{q}{EIk^4}\left(1-\frac{1}{\cos\frac{kl}{2}}+\frac{kl^2}{8}\right)$

XIII тарау

ЦИКЛДІК ӨЗГЕРЕТІН КЕРНЕУЛЕР КЕЗІНДЕГІ БЕРІКТІК

§ 1. НЕГІЗГІ ТҮСІНІКТЕР

Құрылмалардың элементтері айнымалы кернеулер кезінде бірқатар циклдерден кейін қирайтындығы, ал уақыт бойынша кернеу өзгермегенде қирау болмайтындығы тәжірибелер арқылы дәлелденіп отыр. Технологиялық, не құрылымдық фактормен сипатталатын жоғарғы кернеу аймақтарында микро сызаттар пайда болуы ықтимал. Айнымалы кернеулердің анық шамасында микро сызаттар үлғайып көлденең қиманың кейбір аймағына таралады.

Материалдың айнымалы кернеулердің көп санды әсерінен қирайтындығы *қажу* деп аталады. Ал, оның айнымалы кернеулердің көп санды әсерінен қирамай аман қалуы *төзімділік* деп аталады.

Процестің белгілі бір кезеңі аралығындағы айнымалы кернеулердің тізбек мәндерінің жиынтығын *цикл* деп атайды.

Циклдік кернеулер үш түрге бөлінеді: симметриялық, пульстік, асимметриялық. Айнымалы кернеулердің симметриялық циклі деп ең үлкен және ең аз кернеулер шамалары бойынша тең, ал таңбалары бойынша қарама-қарсы болатын $\sigma_{max} = \sigma_{min}$ циклді айтады (13.1а-сурет). Осындай циклге вагонның айналатын өсі мысал бола алады.

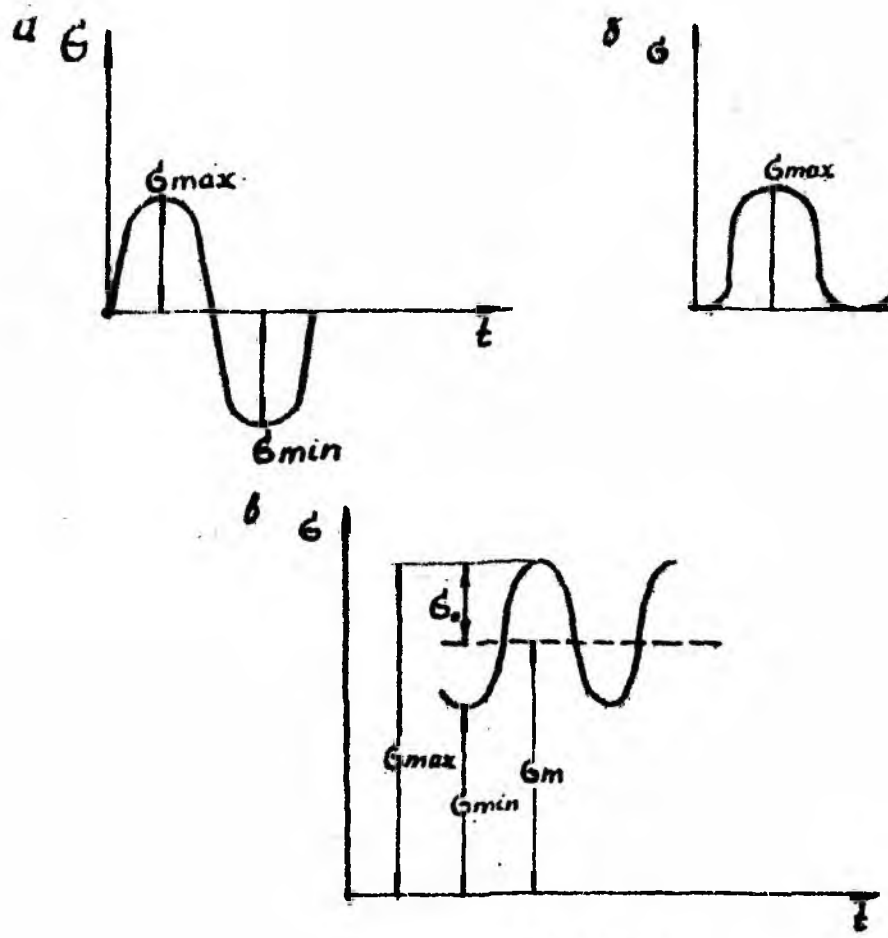
Егер $\sigma_{min} = 0$ немесе σ_{max} болса, онда цикл пульстік деп аталады. Мұндай циклге мысал ретінде моментті беру кезінде доңғалақ тістеріне күш түсіруді айтуға болады (13.1,б-сурет).

Циклдік кернеулердің үшінші түрі (13.1,в-сурет) асимметриялық деп аталады.

Кернеулер циклдерінің негізгі сипаттамалары мынандай болады: σ_{max} — ең үлкен кернеу, σ_{min} — ең аз кернеу, σ_m орта кернеу:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}.$$

Ол оң және теріс те болуы мүмкін. Кернеулер циклдерінің амплитудасы төмендегідей:



13.1 - сурет

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Ол қашанда болса оң шама ретінде алынады. (а) және (б)-дан:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a, \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a;$$

теңдігі шығады.

Циклдің асимметрия дәрежесін сипаттау үшін циклдің асимметрия коэффициенті енгізіледі:

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}.$$

Симметриялық цикл үшін $r = -1$, пульстік цикл үшін $r = 0$.

Циклдің амплитудасының орта кернеуге қатынасын оның сипаттамасы деп атайды:

$$\rho = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}.$$

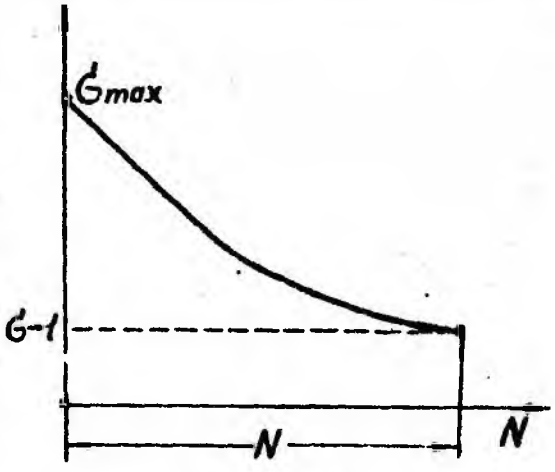
Циклдің сипаттамасы симметрия коэффициентімен мынадай ара қатынаста болады:

$$\rho = \frac{1-r}{1+r}.$$

Асимметрия коэффициенттері және циклдің сипаттамалары бірдей болатын циклдер үксас деп аталады.

§ 2. ТӨЗІМДІЛІК ШЕГІ

Абсолют шамасы бойынша ең жоғарғы көрнеуді шексіз көп цикл санында қирауды болдырмайтын төзімділік немесе қажу шегі деп атайды. Техникалық шарттар N (мысалы, $10^7, 10^8$) шекті циклдардың санын береді. Бұл циклдың санын сынау базасы деп атайды және оны төзімділік шегін анықтау кезінде пайдаланады. Үлгі циклдің саны сынау базасына жеткенше сынбаса, онда ол циклдің саны шексіз өскенде де сынбайды деп қарастырамыз. Симметрияның цикл кезіндегі σ_{-1} төзімділік шегі, басқа циклдік түрлерімен салыстырғанда, ең аз болады, сондықтан симметрия циклі ең қауіпті деп саналады.



13.2 - сурет

Үлгінің қирауға дейінгі төзімділігімен белгілі ең жоғарғы көрнеулердің цикл санына тәуелділігін көрсететін графигі қажу, *төзімділік қисығы* немесе *Вөлер қисығы* деп аталады, (13.2-сурет). Материалдың көбіндегі төзімділік қисықтары N өске параллель түзуге жақындайды. Бұл асимптотаның ординатасы төзімділік шегі болады. Әдетте, асимптота орнына N өсіне параллель жанама (суретте — үзік сызық) жүргізіледі.

§ 3. ТӨЗІМДІЛІК ШЕГІНЕ ӘСЕРІН ТИГІЗЕТІН ФАКТОРЛАР

Деформацияның түрі. Жүргізілген тәжірибелер негізінде σ_{-1} иілу симметриялық циклі кезіндегі төзімділік шегінің деформацияның басқа түрлерінің төзімділік шектерімен келесі жуық тәуелділіктері дәлелденген:

центрлік созылу — сығылу кезінде

$$\sigma_{-1}^{c} = (0,7 + 0,9)\sigma_{-1};$$

бұралу кезінде

$$\tau_{-1}^{c} = (0,5 + 0,58)\sigma_{-1}.$$

Егер беріктік шегі белгілі болса, асимметриялық циклдар кезіндегі болаттардың төзімділік шектерін бағалау үшін келесі эмпирикалық тәуелділіктерін пайдалануға болады:

$$\sigma_{-1} = 0,4\sigma_{б};$$

$$\sigma_{-1}^{c} = 0,7\sigma_{-1} = 0,28\sigma_{б};$$

$$\tau_{-1}^{б} = 0,22\sigma_{б}.$$

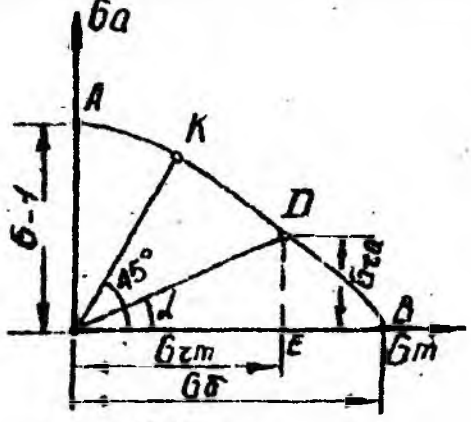
Циклдің асимметриясының ықпалы. Шекті кернеулер диаграммасы.

Төзімділік шегінің циклдың сипаттамасына тәуелділігін әрбір материалдар үшін құрылған шекті кернеулер диаграммасымен бейнелейді. Берілген материал үшін шекті кернеулер диаграммасын құру кезінде екі шаманы: статикалық күш кезіндегі шекті кернеуді (σ_A немесе $\sigma_б$) және симметриялық цикл кезіндегі төзімділік шегін білу жеткілікті.

Шекті кернеулер диаграммасының үш-төрт r мәндері бойынша сызылуын (13.3-сурет) қарастырайық.

Максималь кернеуі төзімділік шегіне тең циклді шекті цикл деп алынады.

Абсцисс өсі бойынша σ_m орта кернеуді, ал ординат өсі бойынша σ_a амплитудалық кернеуді саламыз. Әрбір σ_m және σ_a жұбы (нүктемен бейнелейтін) шекті циклді анықтайды. Әр түрлі r циклдің асимметрия коэффициентіне шекті циклдар сәйкес келеді, олар АВ қисықта — шекті кернеулер диаграммасында (13.3-сурет) орналасады. В нүкте $(\sigma_a = 0)$ бұл материалдың шекті кернеуіне, ал А нүкте $(\sigma_m = 0)$ симметриялық циклдің σ_{-1} төзімділік шегіне сәйкес келеді. Берілген r кезіндегі төзімділік шегін анықтау үшін координат басынан өтетін α бұрышымен ОД сәулені жүргізу керек:



13.3 - сурет

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{1-r}{1+r}.$$

Төзімділік шегінің ізделетін шамасы төмендегідей болады:

$$\sigma_r = \sigma_{\max} = OE + ED = \sigma_{rm} + \sigma_{ra}.$$

Сондай-ақ кез келген циклға арналған шекті кернеулерді анықтауға болады, мәселен пульстік цикл үшін былай болады: $\left(r = 0,\ \sigma_{\min} = 0,\ \sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma_{\max}}{2}\right)$.

Бұл үшін координат басынан өтетін 45° бұрышпен $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = 1\right)$ сызықты

F нүктеде қисықпен қиылысуына дейін жүргізеді. Бұл нүктенің ординатасы шекті амплитудалық кернеуіне, ал абсциссасы циклдің шекті орта кернеуіне тең:

$$\sigma_0 = \sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m.$$

Бір сәуледе (мысалы ОД) жататын нүктелер ұқсас циклдарға сәйкес келеді. Тек қана Д нүкте шекті циклді сипаттайды, ал ОАДВ облысының ішіндегі нүктелер (мысалы С) қауіпті емес сызаттар болмайтын кернеулердің циклдарын бейнелейді:

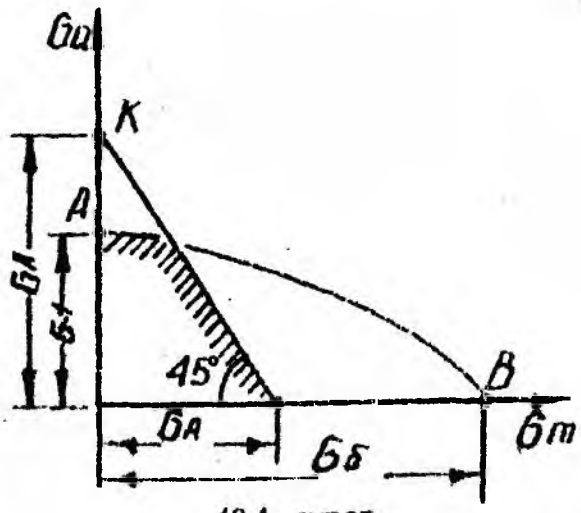
$$\sigma'_{\max} = \sigma'_m + \sigma'_a < \sigma_r.$$

Созылымды материалдар үшін төзімділік шегі мен созымды деформациялар қауіпті болады. Сондықтан

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a = \sigma_A.$$

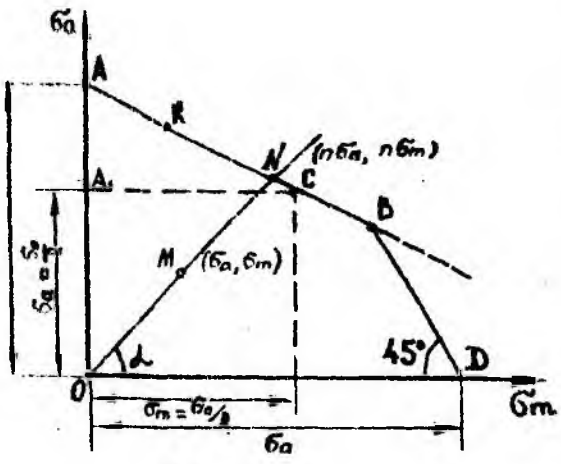
Бұл шартты қанағаттандыратын нүктелер KL сызықта (13.4-сурет) орналасады. Сонымен, созылымды материалдар үшін шекті кернеулер диаграммасы AN қисықтан және NL түзуден құрылады.

Іс жүзінде схемалық диаграммалар пайдаланылады. Олардың ішінде ең кең таралғаны үлгілердің үш сынақ түрлеріне: σ_{-1} симметриялық циклге (А нүктесі), σ_0 — пульстік циклге (С нүктесі) және σ_m статикалық үзілуге (Д нүкте) негізделіп құрылған нобайлық шекті диаграммалар қолданылады. А және С нүктелерді түзумен қосып және Д нүктеден 45° бұрышпен сызықты жүргізіп шекті кернеулердің жуық диаграммасын алады (13.5-сурет).



13.4 - сурет

АВ сызықтың теңдеуі былай



13.5 - сурет

беріледі:

$$\sigma_{-1} = \beta\sigma'_m + \sigma'_a,$$

мұндағы σ'_m және σ'_a — кез келген нүктеге арналған орта және амплитудалық кернеулер;

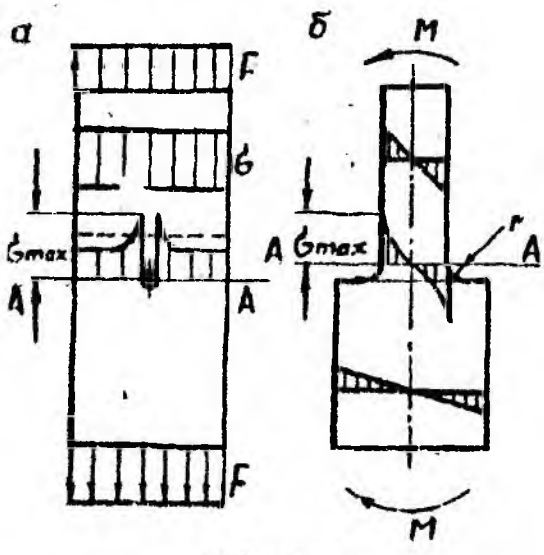
$$\beta = \frac{\sigma_{-1} - 0{,}5\sigma_0}{0{,}5\sigma_0}.$$

Шоғырланған кернеулер ықпалы. Серпімді денеге күш түсірген және онын формасы лезде өзгерген жағдайларда (ену бұрышы, тесіктер, жонулар) жергілікті кернеулердің кенет көбею құбылысын кернеулердің шоғырлануы деп атайды.

Мысалы, кіші-гірім тесігі бар жолақты созғанда (13.6а-сурет) тесіктің маңында кернеулердің біртекті таралу заны бұзылады. Кернеулік күй екі өстік болады да, тесіктің шетінде үлкен кернеу түзіледі. Дәл осылайша, сатылы сырықтың иілу кезінде ену бұрышы аймағында шамасы ең алдымен r қисықтың радиусына тәуелді болатын арттырылған кернеу пайда болады (13.6б-сурет). Арттырылған кернеулердің тарам аймағы шоғырлану ошағы төнірегінде, я болмаса кернеу шоғырландырғышы маңында орналасатын тар ауданмен шектеледі. Кернеулердің таралуы кіші-гірім аймақта болатындықтан, оларды жергілікті кернеулер дейді.

Жергілікті кернеулердің негізгі көрсеткіші шоғырлануының теориялық коэффициенті болады, ол мына теңдеу арқылы беріледі:

$$\alpha_T = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ном}};$$



13.6 - сурет

мұндағы σ_{max} — ең үлкен жергілікті кернеу, $\sigma_{ном}$ — номинал кернеу. Әдетте $\sigma_{ном}$ есептеу бөлшектің ең өлсіз қимасы бойынша жүргізіледі (13.6б-суреттегі АА қимасы). Мысалы, тесігі бар жолақ үшін (13.6а-сурет) $\sigma_{ном} = \frac{F}{A_{AA}}$. сатылы сырық иілгенде (13.6,б-сурет) $\sigma_{ном} = \frac{M}{W_{AA}}$.

13.1-кестеде пластинка диаметрінің өніне әр түрлі арақатынас мәндері үшін α_1 шоғырлануының теориялық коэффициент мәндері көрсетілген.

13.1 - к е с т е. α_T **шоғырланыуның теориялық коэффициенті**

$C=2r/B$	$C=0$	$C=0,1$	$C=0,2$	$C=0,3$	$C=0,4$	$C=0,5$
α_T	3,0	3,03	3,14	3,36	3,74	4,32

13.2-кестеде жұмыр үлгілер үшін деформация түріне және кернеулердің шоғырлану факторына тәуелді α_T коэффициентінің мәндері келтірілген.

13.2 - к е с т е. α_T **шоғырлануының теориялық коэффициенті**

	Деформацияның түрі және кернеулер шоғырлану факторы	α_T
1	2	3
	Иілу мен созылу	
1	Біліктегі жарты дөңгелек жонуы. Жону радиусының білік диаметріне қатынасы:	
	0,1	2,0
	0,5	1,6
	1,0	1,2
	2,0	1,1
2	Галтель	
	Галтель радиусының білік диаметріне қатынасы:	
	0,0625	1,75
	1,125	1,50
	0,25	1,20
	0,5	1,10
3	Тік бұрышпен өтуі	2,0
4	V-тәріздес жону	3,0
5	Дюймдік иір ойық	2,0
6	Метрлік иір ойық	2,5
7	Тесік диаметрінің қиманың келтірілген өлшеміне қатынасы 0,1-ден 0,33-ке дейінгі кезінде	2,0
8	Бұйым бетіндегі кескіштен болған керту	1,2-1,4
	Бұралу	
1	Галтель. Галтель радиусының білік тің ең кіші диаметріне қатынасы кезінде	
	0,02	1,8
	0,10	1,2
	0,20	1,1
2	Сына ойықтары	1,6-2,0

Жергілікті кернеулер төзімділік шегін өте төмендетеді. Шоғырлану коэффициенті тек қана жону формасына емес, сондай-ақ үлгінің материалына, өлшемдеріне, циклдің асимметрия коэффициентіне де тәуелді болады. Сондықтан тиімді коэффициентін енгізеді.

Циклді өзгеретін кернеулер шартында $(r=-1)$ болғанда шоғырланудың тиімді коэффициенті мына қатынаспен анықталады:

$$k_{-1}=\frac{\sigma_{-1}}{\sigma'_{-1}};$$

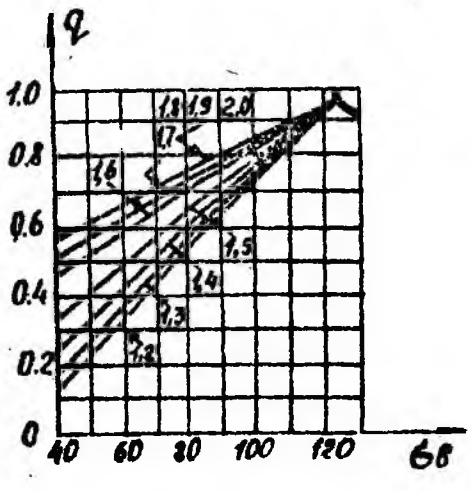
мұндағы σ_{-1} — тегіс үлгінің қажу шегі, σ'_{-1} — шоғырланған кернеуі бар үлгі үшін номинал кернеумен есептелген қажу шегі.

Шоғырланудың тиімді коэффициенті мен теориялық коэффициентінің өзара қатынасын мына түрде түжырымдауға болады:

$$k_{-1}=1+q(\alpha_{\text{т}}-1),$$

мұндағы q — материалдың жергілікті кернеуге сезімталдық коэффициенті. q шамасы негізгі материалдың қасиеттеріне байланысты. Мысалы, беріктігі жоғары легирленген болат үшін q шамасы бірге жақын. Құрылымалық болат үшін $q=0,6-0,8$, оның өзінде неғұрлым берік болатқа сәйкес q-дың мәні үлкен болады. Шойын үшін q нөлге жақын әрі шоғырланудың тиімді коэффициенті бірге тең.

13.7-суретте q мәндерінің $\sigma_{\text{б}}$ беріктік шегіне және $\alpha_{\text{т}}$ шоғырлануының теориялық коэффициентіне тәуелділік графиктері көрсетілген.



13.7 - сурет

Детальдің абсолют өлшемдерінің ықпалы. Бөлшектің қажу беріктігін есептеген кезде масштабтық факторды ескеру қажет. Әртүрлі өлшемді үлгілердің қажу шегін анықтауға жүргізілген тәжірибелер масштабтық факторды арттырғанда қажу шегінің азаятындығын көрсетті. Өйткені бөлшектегі максималь кернеулер қажу қирауын толық сипаттамайды. Сызықтың болуы максимал кернеуге байланысты. Оның үлғаюы бөлшек формасы мен мөлшеріне барынша тәуелді.

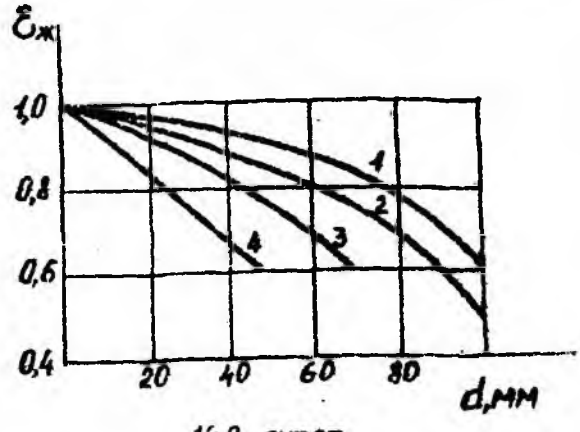
Бөлшек қажу шегінің үлгілердің стандарт өлшемінің $(d=8\div12\text{мм})$ қажу шегіне

қатынасы масштабтық фактор коэффициенті немесе масштабтық фактор деп аталады:

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_{-1,d}}{\sigma_{-1}}.$$

Масштабтық факторды анықтау кезінде сыналатын бөлшектер мен үлгілердің беттік күйі бірдей деп ұйғарылады.

13.8-суретте масштабтық фактордың иілу және бұралу кезінде білік диаметріне тәуелділігі көрсетілген. 1-қисық жергілікті кернеулер жоқ кездегі көміртекті болат үшін, 2-қисық кернеулердің шоғырлануы жоқ кездегі легирленген болат $\left(\sigma_б = 1000 - 1200 Мн/м^2\right)$ және кернеулердің калыпты шоғырлануы кезіндегі көміртекті болат үшін, 3-қисық кернеулердің шоғырлануы бар кездегі қоспалы болат үшін, ал 4-қисық кернеулердің шоғырлануы жоғары дәрежеде болатын болаттар үшін қарастырылған.



13.8 - сурет

Осы қисықтардан масштабтық фактор жергілікті кернеулер көбейгенде барынша айқын білінетінін байқауға болады. 13.3-кестеде әр түрлі болаттан жасалған тегіс үлгілер үшін төзімділік шегінің диаметрге тәуелділігі келтірілген.

13.3 - к е с т е. Төзімділік шектері

d(мм)	Төзімділік шегі (σ_{-1}) $МН/м^2$						
	Көміртекті болаттар			Легирленген болаттар			
15	20	265	320	380	400	500	600
30	210	225	270	320	370	420	500
60	176	190	225	270	310	350	420
100	160	170	200	240	280	315	380
$\sigma_б^c$	450	550	650	800	880	980	1200
σ_A^c	250	310	360	560	610	730	1000

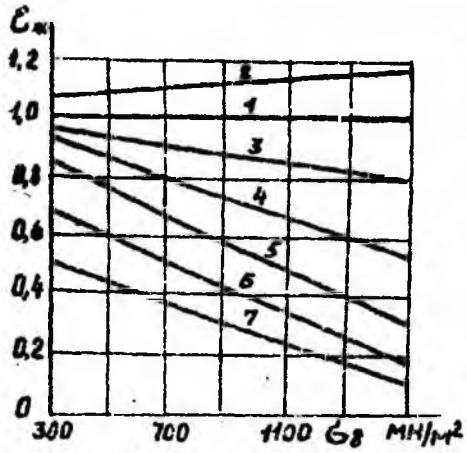
Бөлшектің беттік күйінің ықпалы. Циклдік кернеулер кезінде кірау жергілікті сызаттың болуына байланысты болатындықтан қажу беріктігіндегі бөлшектің беттік күйінің атқаратын ролі өзінен-өзі түсінікті. Демек, бетті таза әрі мұқият өңдеу кезінде қажу шегі артады. Жай өңдеу кезінде беттегі ұсақ ақаулардың болуы қажу беріктігінің көрсеткішін төмендетеді. Бұл кезде жергілікті кернеулерге өте сезімтал материалдар үшін беттік күйдің әсері айтарлықтай болады.

Қажу беріктігін есептеу кезінде бөлшек бетін өңдеуге байланысты беттің сапа коэффициенті қарастыралады:

$$\varepsilon_{\text{бет}} = \frac{\sigma_{-1,\text{бет}}}{\sigma_{-1}};$$

мұндағы σ_{-1} беті стандартты өңделген үлгіде алынған қажу шегі. Ол үшін әдетте ажарлау алынады, $\sigma_{-1,\text{бет}}$ бөлшектің беттік күйіне сәйкес үлгінің төзімділік шегі.

13.9-суреттегі беріктік шектеріне сәйкес әр түрлі болаттардың беттік сапа коэффициенттерінің жуық мәндері келтірілген.



13.9 - сурет

Ажарланған үлгі үшін сапа коэффициенті бірге тең (1 түзу), 2-түзу жалтыратылған бетті үлгілерге қатысты, 3-түзу кескішпен өңделген бетті үлгінікі. 4-түзу ұсақ кедір-бұдыры бар беттің сапа коэффициентінің мәнін береді, ал 5-түзу прокаттан кейін өңделмеген бетке қатысты. Тұщы және теңіз суларында тотықтындырылған беттер үшін $\varepsilon_{\text{бет}}$ мәндері 6- және 7-түзулермен беріледі.

Қажу беріктігін арттыру үшін беттің, әсіресе, кернеулердің шоғырлану ошағы маңында өте таза болуын қамтамасыз ету қажет. Циклдік кернеулердің ауыр шарттарында жұмыс істейтін жауапты бөлшектерді әдетте ажарлап, кейде жалтыратады.

Қажу беріктігін арттыру үшін бетті өңдеудің арнаулы тәсілдерін қолданады. Бұл тәсілдерге бетті азот арқылы өңдеу жатады, ол кернеулердің шоғырлануы кезінде біршама дұрыс нәтиже береді. Қажу шегін бетті роликтермен таптау арқылы арттыруға болады. Шоғырлану ошағы бар кезде бұйым бетін шойын, не болат бытыра жаудырып өңдеудің тиімділігі үлкен. Мұндай өңдеу нәтижесінде сығылудың қалдық кернеуі бар беттік қабат пайда болады, ол жергілікті сызаттардың қайтадан түзілуін болдырмайды.

§ 4. АЙНЫМАЛЫ КЕРНЕУЛЕР КЕЗІНДЕГІ БЕРІКТІКТІ ЕСЕПТЕУ

Беріктік шарты мына түрде болады:

$$n \geq [n],$$

мұндағы n — нақты кор коэффициенті, $[n]$ — мүмкін кернеу коэффициенті Кор коэффициенттерін нобайлық шекті кернеулер диаграммасы көмегімен (мәселен, 13.5-сурет) жуық анықтауға болады. Күш өзгеруімен жұмысшы циклі сәйкес шекті циклге ұқсас болып қалады да, алдымен лабораториялық үлгі $(d_0 = 6 + 12\text{мм})$ үшін коэффициенті анықталады.

Белгілі амплитудалық және орта кернеулер бойынша α бұрышын анықтайды:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}.$$

Диаграмманың (13.5-суретті қараңыз) координат басынан α бұрышпен 0-1 сәулені жүргізеді. $M(\sigma_a, \sigma_m)$ ағым нүкте АВ сызықта жұмысшы циклді бейнелейді, ал $N(n\sigma_a, n\sigma_m)$ — бұл циклдің шекті мәні болады. Кор коэффициенті кескіндер ара қатынасына тең:

$$n_{r,д} = \frac{ON}{OM}.$$

Егер N нүкте АВ түзу шегінде болса, онда кернеулердің артуы қажулық қирауға ұшыратады. Бұл кезде АВ сызықтың тендеуі былай жазылады:

$$\sigma_{-1} = \beta n_r \sigma_m + n_r \sigma_a,$$

одан қажу қирауы бойынша кор коэффициентін лабораториялық үлгіге лайықтап алады:

$$n_r = \frac{\sigma_{-1}}{\beta\sigma_m + \sigma_a}.$$

Нақты бөлшектің қор коэффициентін анықтау үшін кернеулердің шоғырлануын, масштаб факторын, беттік өңдеу сапасын ескеру керек.

Іс жүзіндегі есептеулерде түзету коэффициенттері кернеулер циклінің айнымалы бөлігіне — циклдің амплитудасына $\sigma_a(\tau_a)$ қатысты болады. Бөлшек үшін қор коэффициентін есептеу формуласы мына түрде болады:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\beta\sigma_m + \dfrac{\alpha_\sigma}{\varepsilon_{\text{бет}}\varepsilon}\sigma_a}; \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\beta\tau_m + \dfrac{\alpha_\tau}{\varepsilon_{\text{бет}}\varepsilon}\tau_a};$$

Егер 0 — 1 сәуле ВД сызықты кесіп өтсе, онда циклдің кернеулер арттыруы созылымды үлкен деформациялардың даму қауіптілігімен байланысты. Аққыштық шегіне қатысты қор коэффициенті бұл жағдайда былай анықталады:

$$n_A = \frac{\sigma_A}{\sigma_a + \sigma_m}.$$

Есептеу кезінде екі коэффициент анықталады, сосын олардың азын алады.

Келтірілген тәуелділіктер бір өстік кернеулік күйге (созылу, сығылу, таза ығысу, таза иілу) қатынасады. Таза ығысу кезінде бұл тәуелділіктерде σ -ны τ -ға алмастырады.

Жазық немесе көлемдік кернеулік күйлерде қажу беріктігін бағалау өте қиындап кетеді. Іс жүзінде жазық кернеулік күйінде қор коэффициентін мына формула бойынша анықтайды:

$$n_\tau = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}};$$

мұндағы n_σ және n_τ (а) формулалар бойынша анықталатын қор коэффициенттері.

Кейбір қарапайым жағдайларда мүмкін кернеулер бойынша берілген қор коэффициентін және $\dfrac{\sigma_a}{\sigma_m}$ берілген ара қатынасы үшін бөлшектердің құрылма өлшемдерін тікелей анықтауға болады. Бұл кезде мүмкін кернеу қажу қирауы бойынша мына формулалармен анықталады:

$$|\sigma_r| = \frac{\sigma_{-1}}{n_r} \cdot \frac{1 + \frac{\sigma_a}{\sigma_m}}{\frac{\alpha_\sigma \sigma_a}{\varepsilon_{бет} \sigma_m} - \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_б}};$$

$$|\tau_r| = \frac{\tau_{-1}}{n_r} \cdot \frac{1 + \frac{\tau_A}{\tau_m}}{\frac{\alpha_\tau \tau_A}{\varepsilon_{бет} \tau_m} - \frac{\tau_{-1}}{\tau_б}}.$$

Ал, ағу шегі бойынша төмендегі формуламен анықталады:

$$[\sigma_r] = \frac{\sigma_A}{n_A}; \quad [\tau_r] = \frac{\tau_A}{n_A}.$$

XIV тарау

МАТЕРИАЛДАР ЖЫЛЖЫҒЫШТЫҒЫ

§ 1. НЕГІЗГІ ТҮСІНІКТЕР

Шамасы бойынша тұрақты күштер және көрнеулер әсерінен болатын материалдың баяу аққыштық құбылысы ж ы л ж ы ғ ы ш т ы қ немесе к р и п деп аталады. Жылжығыштық бетон, кірпіш, ағаш, тас, полимер сияқты материалдарға тән. Бөлшектерде бұл деформациялану қасиеті, әсіресе, жоғары температура кезінде, ал түсті металдарда: жез, қорғасын және т. б. тіпті бөлме температурасында да байқалады.

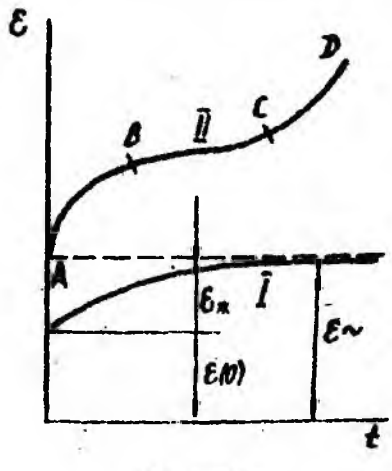
Созылымды деформацияның ұлғаюы нәтижесінде көрнеулердің шамасы мен таралуындағы өзгеру процесі көрнеулердің р е л а к с а ц и я с ы деп аталады. Егер созылған білеудің деформациясы уақыт бойынша өзгермесе, серпімді деформация кемігенде созылымды деформациясы ұлғаяды, бұл жағдайда релаксация процесі айқын көрінеді.

Ж ы л ж ы ғ ы ш т ы қ т ы ң және релаксацияның қисықтары. Тәжірибе жылжығыштық кез келген көрнеуде, тіпті күштің уақытша әсерінен болатын серпімді деформация кезінде де байқалатындығын көрсетеді. Сынау нәтижелері жылжығыштық қисықтары, яғни деформацияның уақытқа тәуелділік қисықтары түрінде бейнеленеді (14.1-сурет).

I-графикте (14.1-сурет) деформациялану процесі ε жылдамдықтың азайып, нөлге асимптотикалық үмтылумен бірге жүреді. Үлгінің $\varepsilon(0)$ бастапқы деформация және $\varepsilon_{ж}$-нің жылжығыштық деформация қосындысымен анықталатын толық деформациясы былай есептеледі:

$$\varepsilon = \varepsilon(0) + \varepsilon_{ж};$$

$\varepsilon_{\sim}$ мәнге үмтылады.



14 сурет

II-графиктен AB, BC, СД үш бөлікті бөліп карастыруға болады. AB бөлігі деформациялану жылдамдығының кемуін сипаттап, қалыптаспаған жылжығыштық фазасына сай келеді. Ол

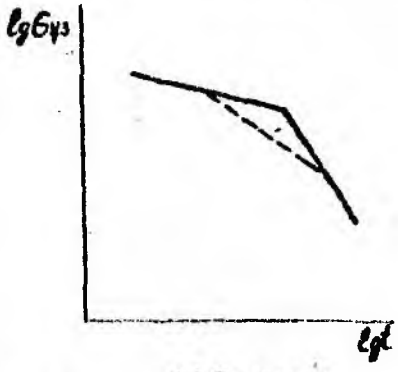
аяқталғанда ϵ шамасы минимал мәнге ие болады, ϵ жылдамдығы тұрақты болғанда қалыптаспаған (ВС бөлікте) жылжығыштық фазасы пайда болады. σ көрнеудің артуы мен қалыптасқан жылжығыштық периодының ұзақтығы қысқарады. Үлгінің С нүктесіне сәйкес келетін уақыт мезетінде сынау морт сынуымен, не қылта мойынның үзілуіне сай түтқыр қираумен анықталады. Соңғы жағдайда СД бөлігі түзіледі.

Морт сыну материалдың бүлінуіне, дәлірек айтсақ материал түйіршіктері арасын бөліп тұратын шекаралардағы шытынауға байланысты. Түтқыр қирау кезінде шытынау түйіршіктері ішінде болады. Кейде осы айтылған қирау түрлері бір мезгілде болып, аралас қирауға ұласады.

Жылжығыштық қисығының сипаты мен деформациясының мәні оған әсер ететін кернеу шамасына тәуелді. Кернеу артқанда жылжығыштық деформациясының шамасы үлкейеді.

Егер жылжығыштық деформациясы кернеудің артуына пропорционал болса, онда сызықты жылжығыштық, ал қарсы жағдайда сызықты емес жылжығыштық деп алынады. Мысалы, жоғары температурада металдардың жылжығыштығы сызықты емес, ал аз кернеуде бетон, пластмассаның жылжығыштығы сызықты болады.

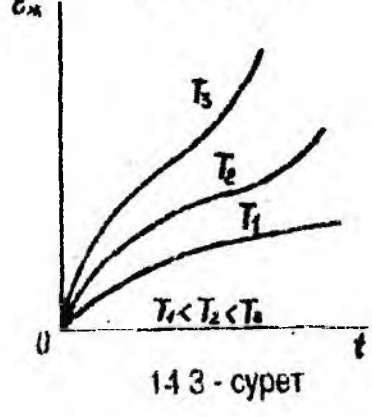
Жылжығыштық кезінде материалдың беріктігін бағалау үшін беріктік ұзақтығының шегін пайдаланады. Беріктік ұзақтығының шегі $\sigma_{ұз}$ деп берілген жұмыс ұзақтығы кезінде қирауды тудыратын минимал кернеуді айтады. Уақыт функциясы ретінде беріктік ұзақтығы шегінің өзгеру графигі әдетте қос логарифмдік координат өстерінде салынады (14.2-сурет). Бұл график екі сызықтан құралады. Кейбірде сызықтардың қиылу нүктесі үзік сызықпен көрсетілгендей анық байқалады.



14.2 - сурет

Үлгінің жұмыс істеу уақыты үлкен шекте минуттық үлестен он, тіпті жүз, мың сағатқа дейін (бірнеше жылдарға дейін) өзгере алады.

Қыздыру температурасы сынайтын үлгіге уақыт бойынша айтарлықтай ықпал етеді. Ол артқанда жылжығыштық жылдамдығы артады, белгілі бір кернеудегі деформацияға уақыттың қыска аралығында жетуге болады. 14.3-суретте жылжымалық қисықтары әртүрлі температурада алынған жылжығыштық қисықтары бейнеленген.

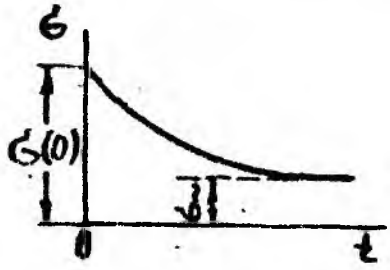


14.3 - сурет

Материалдың жылжығыштығына басқа да

факторлардың айтарлықтай әсері бар. Мысалы, бетонның жылжығыштығына оның ылғалдылығы, толтырғыш өрекшелігі, су-цемент қатынасы, цемент түрі т. б. әсер етеді

Сыртқы жағдайлар өзгермегенде және сыртқы күштер жоқ кезде материалдың механикалық қасиеттерінің уақыт бойынша өзгеруі байқалады. Бетон қасиеттерінің өзгеруі цемент тасында болатын органикалық тегі бар химиялық пластмассаларда, каучуктерде пайда болады. Ол баяу өтетін тотығу процестеріне байланысты. Белгілі бір уақыттан кейін соңғы материалдарды құрылма ретінде пайдалануға болмайды. Механикалық қасиеттердің өзгеру құбылысын шартты түрде тозу деп атайды.



14.4 - сурет

Тозу кезінде жылжығыштық деформация тек күш әсерінің ұзақтығына ғана емес, оның әсер өту мезетіне, басқаша айтқанда, материалды пайдалану мерзіміне де байланысты.

Кернеулердің уақытқа тәуелділігін көрсететін графигі релаксацияның қисықтары деп аталады.

14.4-суретте релаксация қисығының жалпы түрі көрсетілген. Металдық үлгілерде жоғары температурада кернеулер нөлге дейін төмендейді.

§ 2. ЖЫЛЖЫҒЫШТЫҚ ТЕОРИЯЛАРЫ

Қазіргі уақытта инженерлік есептеулерде ықшамдалған теориялар бар: тозу теориясы, аққыштық теориясы, нығаю теориясы, төктес жылжығыштық теориясы.

Тозу теориясы. Бұл теория созылымды деформация, кернеу және уақыт түрақты өзара ара қатынастарда болады деген болжамға негізделеді:

$$\Phi\left(\varepsilon_{\text{соз}}, \sigma, t\right) = 0.$$

Ең қарапайым жағдайда: дәрежелік тәуелділік және жылжығыштық қисықтары үксас кезінде жылжығыштық теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\varepsilon = \sigma^n \Omega(t) + \frac{\sigma}{E},$$

мұндағы ε — толық деформация, $\Omega(t)$ — уақыт функциясы, ол жылжығыштық қисықтарымен анықталады.

Бұл теңдеуді түрақты немесе аз өзгеретін күш кезінде пайдалануға болады. Тозу теориясына Н. М. Беляевтің теңдеуі де жатады:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \sigma \int_0^t \sigma^{n-1} B(t)\mathrm{d}t.$$

Н. М. Беляев бойынша тұрақты деформация кезінде кернеулердің уақытқа тәуелділігі мына түрде болады:

$$\rho = \left(1 + nt'\right)^{\frac{1}{n}}..$$

Тозу теориясында релаксация теңдеуін былай жазады:

$$\sigma^n \Omega(t) + \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_0}{E};$$

одан

$$t' = \frac{1-\rho}{\rho^n},$$

шығады.

А к к ы ш т ы қ т е о р и я с ы. $\dot{\varepsilon}_{\text{соз}}$ — созылымды деформацияның жылдамдығы, ол кернеу және уақыт тұрақты болады және өзара қатынасы бар дегеніне негізделеді:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{\text{соз}} + \dot{\varepsilon}_{\text{серп}} = \sigma^n B(t) + \frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{dt}};$$

мұндағы $\dot{\varepsilon}$ — толық деформацияның жылдамдығы, n — берілген материал үшін анықталған температура кезіндегі тұрақтылық $(n > 1), B(t)$ — уақыт функциясы:

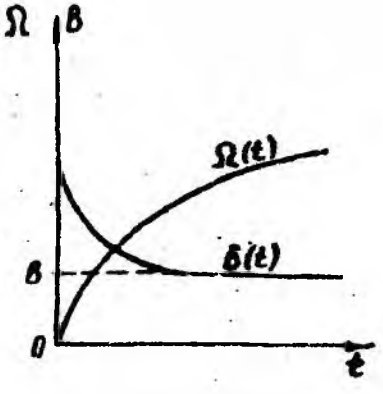
$$B(t) = \frac{d}{\mathrm{dt}}\Omega(t).$$

$B(t)$ және $\Omega(t)$ функциялардың графиктері 14.5-суретте бейнеленген.

n тұрақтылары көміртекті болаттар үшін 14.1-кестеде келтірілген.

Релаксация дифференциалдық теңдеуі төмендегідей:

$$\sigma^n B(t) + \frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{dt}} = 0;$$



14.5 - сурет

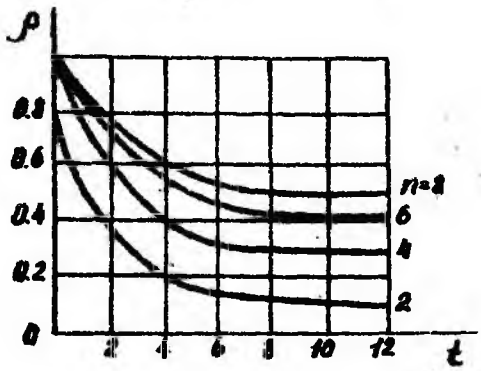
онын шешімі

$$\rho = \left[1 + (n-1)t'\right]^{\frac{2}{n-1}};$$

мұндағы $\rho = \dfrac{\sigma}{\sigma_0}$;

$$t' = E\sigma_0^{n-1}\Omega(t);$$

$\sigma_0 - t = 0$ болғандағы сәтінде. Кейбір n мәндері үшін релаксацияның қисықтары 14.6-суретте келтірілген.



14.6 - сурет

Нығаю теориясы. $\dot{\varepsilon}_{\text{соз.}}$ — созылымды деформация, $\dot{\varepsilon}_{\text{соз}}$ — созылымды деформацияның жылдамдығы және σ кернеу тұрақты өзара ара қатынастарда болады дегенге негізделеді:

$$\Phi\left(\varepsilon_{\text{соз.}}, \dot{\varepsilon}_{\text{соз}}, \sigma\right) = 0.$$

Қарапайым жағдайда нығаю өлшемі ретінде $\varepsilon_{\text{ж}}$ жылжығыштық деформациясының шамасы алынады

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\Psi}\left(\varepsilon_{\text{ж}}, \sigma\right).$$

$\Psi\left(\varepsilon_{\text{ж}}, \sigma\right)$ функциясын көбінесе мына түрде бейнелейді:

$$\Psi\left(\varepsilon_{\text{ж}}, \sigma\right) = \varepsilon_{\text{ж}}^{-\rho} f(\sigma).$$

Нығаю теориясы жылжығыштықты сыртқы күштердің өзгерісі аса күрделі болмаған жағдайда анықтай алады.

Тектес жылжығыштық теориясы. Кейбір материалдар үшін кернеулер және деформациялар мынадай интегралдық қатынастармен байланысты болады.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{t_0}^{t} k(t, \tau)\theta\left[\sigma(t)\right]\mathrm{d}t;$$

немесе

$$\Omega[\varepsilon(t)] = \sigma(t) + \int_{t_0}^{t} k(t-\tau)\sigma(t)\mathrm{d}t.$$

Олар сызықты жылжығыштықтың үқсас теңдеулерінің көдімгі жалпылауы болып табылады. Бірінші өрнекті бетон үшін, ал екіншісін металл үшін қолданады. Нығаю мен тектес жылжығыштық теорияларының математикалық есептеулері өте қиын болып келеді.

§ 3. ЖЫЛЖЫҒЫШТЫҚТЫ ЕСКЕРУ КЕЗІНДЕГІ ЕСЕПТЕУ

Құрылмалар мен машиналар бөлшектерінің көрнеулік және деформациялану күйіне жылжығыштықтың ықпалын көрсететін бірнеше мысал қарастырайық.

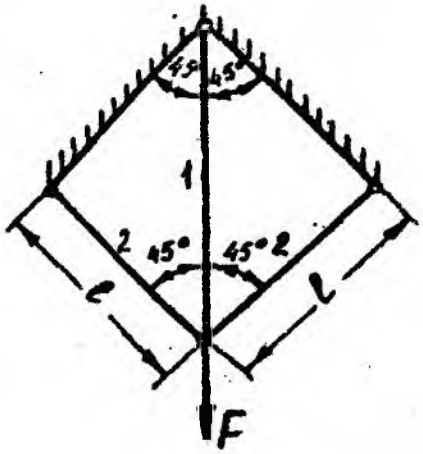
Мысал. Сырықтық тордағы (14.7-сурет) ортанғы сырық

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \Phi(\sigma, t),$$

заңы бойынша жылжығыштық қасиетке ие болады, әрі мына теңдеу түрінде жазылады:

$$\Phi(\sigma, t) = A\sigma^m.$$

1,2-элементтердің көрнеулерін және үзаруын табыңыз.



14.7 - сурет

Шешімі. Деформацияның үздіксіз теңдеуінен мына формула шығады:

$$\Delta l_1 = \sqrt{2}\Delta l_2,$$

сонда

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_2 \text{-ге болады.}$$

$\dot{\varepsilon}_1$ және $\dot{\varepsilon}_2$ үшін

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{\sigma}_1}{E_1} + A_1\sigma_1^m; \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{\sigma}_2}{E_2}; \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma = \frac{F}{\sqrt{2}A}.$$

дифференциалдық теңдеуін аламыз

$$\dot{\sigma}_1 + \frac{E_1 A_1}{1+n}\sigma_1^m = 0.$$

мүндағы $n = E_1/E_2$.

Бұл теңдеудің шешімі былай болады:

$$\sigma_1 = \frac{\frac{n}{1+n}\sigma}{\sqrt{1+\frac{m-1}{n+1}E_1A_1\left(\frac{n}{1+n}\sigma\right)^{m-1}t}}.$$

Бастапқы шарт $\sigma_1(0) = \frac{n}{n-1}\sigma$.

Осыған сәйкес $\sigma_2 = \sigma - \sigma_1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\sigma - \sigma_1}{E_2}$

Уақыт өткен сайын 1-ші сырықтағы кернеу азайып нөлге, ал 2-ші сырықтағы кернеулер артып σ тұрақты мәнге ұмтылады. Басқаша айтқанда деформациялану процесінде 1-ші элемент жұмыс істемейді және F күш тек 2-ші сырықтарға түсіріледі. Деформациялар шектеулі болып мынадай шамаға жуықтайды:

$$\varepsilon_{2-} = \frac{\sigma}{E_2}.$$

Мысал. Көлденең қимасы тік бұрышты арқалықтың таза иілу кезіндегі жылжығыштығын қарастырайық.

Қалыптасқан жылжығыштық кезінде

$$\dot{\varepsilon} = A\sigma^m,$$

(мұндағы m тақ болады) төуелділікті қабылдап, арқалықтың көлденең қимасында кернеулер таралуын табайық.

Жазық қималар болжамын заңды деп қабылдаймыз. Яғни $\varepsilon = \kappa y$, мұндағы κ — арқалықтың қисықтығы.

Тепе-теңдік теңдеуін күру арқылы моментті табамыз:

$$M = \int_A \sigma y dA = b\left(\frac{\dot{\kappa}}{A}\right)^{1/m} \int_{-h/2}^{h/2} y^{(1+m)/m} dy = \left(\frac{\dot{\kappa}}{A}\right)^{1/m} I_m;$$

мұндағы $\dot{\kappa}$ — қисықтың өзгеру жылдамдығы.

$$I_m = b\int_{-h/2}^{h/2} y^{(1+m)/m} dy = \frac{2}{2+\frac{1}{m}} b\left(\frac{h}{2}\right)^{(2+1/m)}$$

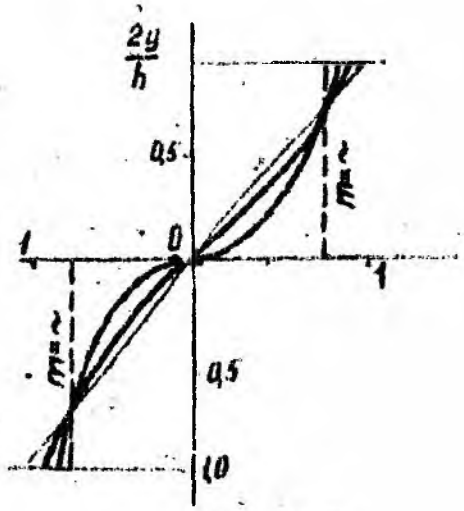
Осыдан $\dot{\kappa}$ -ті тауып, (а) теңдеуге қоямыз:

$$\dot{\kappa} = A\left(\frac{M}{I_m}\right)^m, \quad \sigma = \frac{M}{I_m} y^{1/m}.$$

14.1 - к е с т е. Кейбір болаттардың жылжығыштық негізгі сипаттамалары

Химиялық құрамы	Термиялық өңдеу	Сынау температурасы (град. С)	m тұрақтысы
	Көміртекті болаттар		
0,15C; 0,50Mn; 0,2Si 0,032S; 0,025P	Болатты босату 844	427	6,24
		538	3;04
		593	3,18
		649	3,03
	Болатты босату 844	427	6,01
		538	4,07
		649	1,66
	Хромды болат ЭИ-10		
0,28C; 0,24Si; 0,58Mn 1,55Cr; 0,38Mo; 0,16Va; 0,12Ni	Шынықтыру 900 (май) Жұмсарту 650	450	2,99
		500	1,83
		550	2,06

Сонымен, сызықты емес жылжығыштық кезіндегі кернеулердің таралуы сызықты күйдегідей (уақыттың бастапқы мезетінде) соңғы формулармен анықталады, яғни шекті болатын таралуға дейін өзгереді. Ол $t \to \infty$ кезінде қалыптасқан жылжығыштықта болады. Бұл формуланы жүп кезінде де пайдалануға болады, ол үшін танбаның өзгеруін y координатының таңбасы өзгергенде ескеру қажет. Тік кернеулер эпюрасы 14.8-суретте әр түрлі m үшін бейнеленген. Мұндағы жатық өс бойынша



14.8 сурет

σ кернеудің аркалықтың жоғарғы шеткі талшығында болатын кернеуге уақыттың бастапқы мезетіндегі қатынасы салынады. Суреттен m үлкейгендегі кернеулердің таралуы идеал серпімді созылымды материал үшін (14.8-сурете үзік сызықпен көрсетілген) шекті жағдайда тік кернеулердің таралуына үқсас болатындығы көрініп тур.

XV тарау

КҮШТЕРДІҢ ДИНАМИКАЛЫҚ ӘСЕРІ КЕЗІНДЕГІ БЕРІКТІК

§ 1. НЕГІЗГІ ТҮСІНІКТЕР

Күштердің статикалық әсері қысымды құрылманың бір бөлігінен келесісіне беру кезінде немесе көлемді күштер әсер еткенде уақыт аралығында механикалық қозғалыс өзгермеген кезде болады. Қозғалыстың тұрақтылығы бөлшектердің өзгермейтіндігімен, яғни элементтерді құрайтын бөлшектердің үдеуі болмайтындығымен сипатталады. Қаралған денеде немесе олармен жанасқан бөлшектерде үдеу болуы динамикалық күштердің әсерінен екені сөзсіз.

Көтеретін жүктің арқанға әсері көтеру жылдамдығы тұрақты кезде статикалық болады. Көрісінше жүк үдеумен көтерілсе, бұл әсер динамикалық сипатта болады. Шарлы машиналардың шатуны және іштен жанатын двигательдер элементтері айнымалы жылдамдықпен қозғалатындықтан динамикалық әсерге ұшырайды, сонымен бірге айналмалы бөліктері айналу өсіне қатысты центрден тыс орналасып центрге тепкіш үдеуі болады, машиналардың іргетасы да динамикалық әсерге ұшырап отырады.

Құрылма элементінің динамикалық күшін есептеу үшін теориялық механикадан белгілі Д'Аламбер қағидасы қолданылады. Бұл қағида бойынша қозғалыстағы кез келген денені сыртқы және инерция күштерінің әсерінен кандай да бір уақытта да қас-қағым сәт тепе-теңдік күйде болады деп қарастыруға болады.

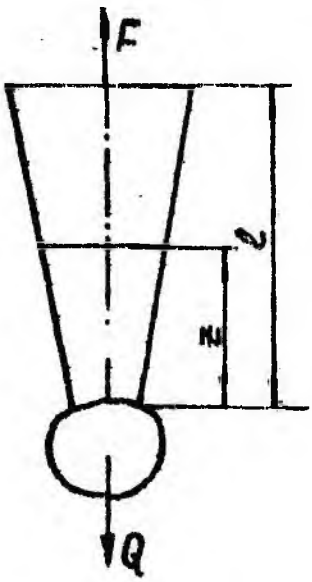
Құрылма элементінің қозғалыс жылдамдығын кенет өзгерткенде оған таяу бөлшектерден қысым беруге байланысты соққы күбылысы байқалса, статикалық әсерге ұшыраған созылымды материал морт сынатын күйге көшуі мүмкін. Сондықтан динамикалық әсерге ұшырайтын құрылма бөлшектерінің беріктігін тексеру кезінде бұл күштердің бөлшектің кернеу шамасына, сонымен бірге материалдың қарсыласуына ықпалын анықтау қажет.

Материалдын кернеулік күйіне құрылма бөлшектеріндегі нүктелер үдеуінің әсерін былай есептеуге болады. Егер кез келген дене үдеумен қозғалса, онда оған басқа денелерден күш (қысым) түседі, әсер және қарсы әсер теңдігі заңы бойынша ол денелерге түсірілген күштерге тең. Сейтіп ол бағыты жағынан қарама-қарсы инерция күштері деп аталатын әсерді тудырады. Осыңдан құрылма нүктелерінің үдеуге ұшырайтын бөлігінде кернеуді анықтау үшін іс жүзінде қолданылатын ереже қабылдайық: үдеулерді есептеп құрылма элементіне әсер

ететін сыртқы күштерге қосымша инерция күштерін түсіру керек. Сөйтіп есептеу сырыққа статикалық күш әсер ететін жағдайдағыдай жүргізіледі.

§ 2. ҮДЕМЕЛІ ҚОЗҒАЛЫС КЕЗІНДЕГІ КЕРНЕУЛЕРДІ ЕСЕПТЕУ

Сырықтың ілгерілмелі қозғалысы. Қимасы айнымалы сырық F күші әсерінен жоғарыға тең үдемелі қозғалыспен көтеріледі. Оның төменгі ұшына Q жүк ілінген (15.1-сурет) a үдеуі келесі теңдеу арқылы анықталады:



$$F=\left(1+\frac{a}{g}\right)\left(Q+\gamma\int_0^l A\,dz\right),$$

мұндағы, γ — материалдың көлемдік салмағы, g — ауырлық күшінің үдеуі, A — төменгі шетінен z қашықтықтағы кез келген қиманың ауданы. z қашықтықтағы көлденең қимада болатын тік кернеуді табамыз.

$$\sigma=\left(1+\frac{a}{g}\right)\left(\frac{Q}{A}+\frac{\gamma}{A}\int_0^l A\cdot dz\right),$$

15.1 - сурет

$z=l$ болғанда тұрақты көлденең қималы сырықтың бойында болатын тік кернеу:

$$\sigma_{\max}=\left(1+\frac{a}{g}\right)\left(\frac{Q}{A}+\gamma l\right)=k_{\text{д}}\sigma_{\text{ст}}.$$

Келтірілген формулалардағы

$$k_{\text{д}}=1+\frac{a}{g}$$

шама динамикалық коэффициенті деп аталады, $\sigma_{\text{ст}}$ — күштің статикалық әсері кезіндегі тік кернеуі.

Мысал. Шахта клетінің салмағы $Q=40\text{кН}$, арқанның ұзындығы $l=200\text{м}$, оның бірлік ұзындығына келетін салмағы $q=0{,}018\frac{\text{кН}}{\text{м}}$. Көтеру басындағы

клеттің үдеуі $a = 2 м/сек^2$ тең. Арқанның керілуін анықтаңыз.

Шешімі. Арқанның ең үлкен керілуі жоғарғы үшында болады:

$$F_{ст} = Q + ql = 40 + 0,018 \cdot 200 = 43,6 кН.$$

Динамикалық коэффициенті

$$k_д = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{2}{9,81} = 1,206$$

Жүк көтерудің бас кезінде арқанның динамикалық кернеуі:

$$F_д = F_{ст} \cdot k_д = 43,6 \cdot 1,206 \approx 53 кН$$

А й н а л ғ ы ш с ы р ы қ т ы қ ж ү й е л е р. Есепке үдеуге қарама қарсы бағытталған инерциялы күш алынады. Таралған инерция күшінің қарқындылығын табамыз:

$$q = \frac{\gamma \omega^2 AR}{q}.$$

$\frac{Q}{q}$ шоғырланған массалар келесі әсерді береді:

$$I = \frac{Q\omega^2 R}{q};$$

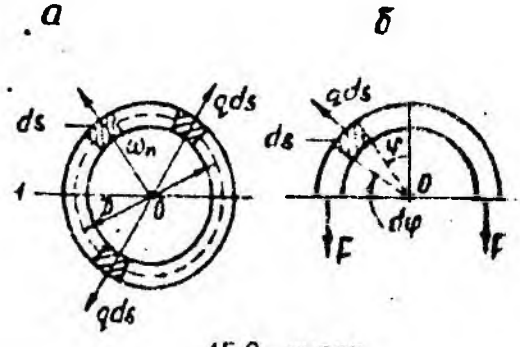
мұндағы ω — айналудың бұрыштық жылдамдығы, R — шенбер өсінің радиусы.

А й н ы м а л ы д ө ң г е л е к е с е б і. Қимасы тұрақты, тез айналатын шенбердің кернеуін есептейік (15.2-сурет). Шабақтардың ықпалын ескермесе маховик күрсауы осылай айналады.

A — шенбердің көлдеңен қимасының ауданы, γ — материалдың көлемдік салмағы, n — уақыт бірлігіндегі айналу саны, ω — айналудың бұрыштық жылдамдығы, D — шенбер өсінің диаметрі, ω_n — радиал (центрге тарткыш) үдеуі, dS — шенбердің ұзындық элементі.

Элементке түсетін инерция күшін мына теңдеу арқылы табамыз:

$$F_{ин} = \omega_n \frac{A\gamma}{g} dS = \frac{A\gamma}{g} \frac{\omega^2 D}{2} dS = qdS;$$



15.2 - сурет

мұндағы q күрсаудың бірлік ұзындығына келетін инерция күштерінің қарқындылығы.

Тік көрнеулер келесі формула бойынша анықталады $\left(F = \frac{Dq}{2}\right)$:

$$\sigma_д = \frac{F}{A} = \frac{Dq}{2A} = \frac{\gamma\omega^2 D^2}{4g} = \frac{\gamma V^2}{g};$$

мұндағы $V = \omega\frac{D}{2}$ — шеңбер нүктелерінің айналмалы жылдамдығы. Демек, маховик күрсауындағы көрнеулер материалдың көлемдік салмағы мен күрсау бөлігінің сызықтық жылдамдығына тәуелді болады. Көрнеулердің мүмкін мәндері үшін есептеулерді орындаймыз $n = 360$айн/мин, $D = 4$м

Бір секундтағы бұрыштық жылдамдық $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 360}{60} = 12\pi.$

ал көрнеу $\sigma_д = \frac{\gamma\omega^2 D^2}{4g} = 43,5\text{МН/м}^2.$

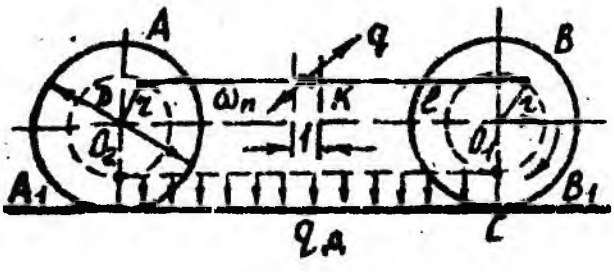
Қ о с қ ы ш т а ғ ы к е р н е у. Локомотивтің екі доңғалағын жалғастыратын АВ қосқыштың беріктігін тексерейік (15.3-сурет).

Қосқыштың әр бірлік ұзындығына мынадай инерция күші әсер етеді:

$$q = \frac{1 \cdot A \cdot \gamma}{g}\omega_n = \frac{A\gamma}{g}\omega^2 r;$$

олар O_2A радиусына параллель болып, үдеуге қарама-қарсы бағытталады. A_1B_1 қосқышы төмен түсірілсе, яғни екі күш бір бағытта әсер ететін кезде қауіпті болады. Қосқыштың бірлік ұзындығына келетін толық күш мынаған тең:

$$q_д = \gamma A\left[1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right].$$



15.3 - сурет

Қосқышты A және B нүктелерде тиянақталған және таралған $q_д$ күш түсірілген арқалық түрінде карастыруға

болады. Ең үлкен июші момент аркалықтын ортасында болады:

$$M_{\max} = \frac{q_д l^2}{8} = \frac{\gamma A l^2}{8}\left[1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right].$$

Қимадағы ең үлкен кернеу:

$$\sigma_{д,\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{A}{W}\cdot\frac{\gamma l^2}{8}\left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right).$$

Қосқыш иілуден басқа, O_1 доңғалақтан O_2 доңғалаққа берілетін F күш әсерінен сығылуға және созылуға ұшырайды. A_1B_1 қалпында қосқыш сығылады. Сонда июші моментке майысу ықпалын ескермей, беріктік шартын аламыз:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{\gamma A l^2}{8W}\left[1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right] \le [\sigma].$$

Ш а т у н д а ғ ы к е р н е у. Шатун кривошипке перпендикуляр қалпындағы күйі (15.4-сурет) қауіпті болады. Үдеу В центрінен z қашықтыққа пропорционал. Шатунның массасы оның ұзындығы бойынша тең таралған дейміз, сонда үш бұрыш заңымен таралған күштің қарқындылығын анықтаймыз:

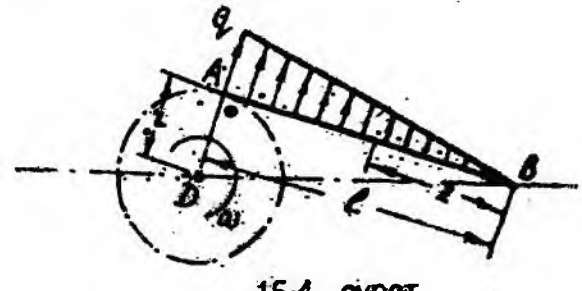
$$q_0 = \frac{A \cdot \gamma \cdot l}{g}\omega^2 r.$$

Шатунды екі тіректегі аркалық деп қарастырамыз. Июші момент В нүктеден бастап саналады, $z = \frac{l}{\sqrt{3}}$ кезінде ең үлкен мәніне ие болады:

$$M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}},$$

және ең үлкен тік кернеу анықталады:

$$\sigma_д = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}W}.$$



15.4 - сурет

§ 3. БІР ЕРКІНДІК ДӘРЕЖЕСІ БАР ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ТЕРБЕЛІСТЕРІ

Жүйелердің дірілдеуі немесе тербелістері әр периодтық немесе кенет түсірілген күштердің және басқа факторлардың (статикалық және температурлық) әсерінде болады. Кейбір жағдайларда вибрациялық күштер өздері қауіпті шамаға жетуге мүмкін.

Тербеліс деформацияларды азайту үшін әр түрлі құрылғы қабылданады.

Еркін өшпейтін тербелістер. Күшпен тепе-тендіктен шығарылған серпімді жүйе, күш әсері тоқталғанда, еркін немесе меншікті тербелістерде болады. Бір еркіндік дәрежесі бар тербеліс жүйелерінің қарапайым моделін серіппемен біріктірілген m массасы бейнелейді (15.5а-сурет).

Жүйенің еркін тербелістер кезіндегі дифференциалдық теңдеуі былай беріледі:

$$my'' + cy = 0,$$

мұндағы c — серіппенің қатандық коэффициенті. Массаның қозғалысы гармониялық тербелісті бейнелейді:

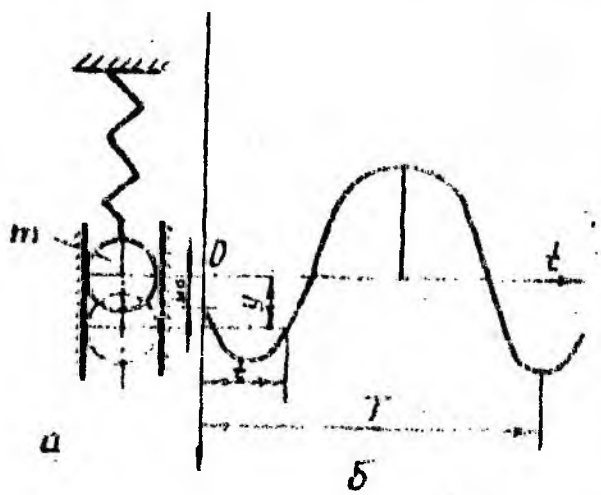
$$y = A\sin(\omega t + \varphi),$$

мұндағы y — қозғалыстың координатасы, A — тербелістің амплитудасы, φ — бастапқы фаза, t — уақыт, ω — тербелістердің меншікті жиілігі. Бұл тербелістің графигі 15.5б-суретте көрсетілген.

Толық циклдың ұзақтығы тербелістің периоды деп аталады:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{сек}.$$

Тербелістің меншікті жиілігі келесі формуламен анықталады:



15.5 сурет

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

Жүктің шоғырланған массасы кезінде арқалықтар үшін мына формуланы пайдалануға болады:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{ст}}};$$

мұндағы $y_{ст} = \frac{mg}{c}$ — ауырлық күші әсерінен шоғырланған массаның статикалық орын ауыстыруы.

Бұрышты тербелістердегі жүйелер үшін

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{I}},$$

мұндағы I — бұралу өсіне қатысты жүктің инерция моменті.

Бір минуттағы тербеліс саны мынадай болады:

$$n = \frac{60}{T} = \frac{300}{\sqrt{y_{ст}}},$$

мұндағы $y_{ст}$ — сантиметрмен өлшенеді.

Амплитуда тербелістердің шегін сипаттайды және максимал ауытқуын анықтайды:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega}};$$

мұндағы y_0 және V_0 бастапқы ауытқуы және $t = 0$ болғанда массаның жылдамдығы.

Бастапқы фазасы формула бойынша анықталады:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega^2 y_0}{V_0}.$$

Жүйенің ең үлкен толық деформациясын табамыз:

$$y_д = y_{ст} + A = y_{ст}\left(1 + \frac{A}{y_{ст}}\right) = k_д y_{ст}.$$

$k_д = 1 + \dfrac{A}{y_{ст}}$ шамасы динамикалық коэффициент деп аталады. Мұндағы $y_{ст}$ — массаның ең үлкен статикалық ауытқуы.

Еркін тербеліс кезінде серпімді сызықтық пайда болатын кернеулер мына түрге енеді:

$$\sigma_д = k_д \sigma_{ст}.$$

15.1-кестеде бір еркіндік дәрежесі сызықты жүйелердің кейбір нобайлар үшін тербелістердің катандығы, меншікті жиілігі және периодтары келтірілген.

Еркін өшетін тербелістер. R кедергі күшті $\left(R = -\alpha y'\right)$ болдыратын

шашырату (сіңуі) барысында еркін тербелістердің дифференциалдық теңдеуі мына түрде болады:

$$my'' + \alpha y' + cy = 0;$$

немесе

$$y'' + 2ny' + \omega^2 y = 0,$$

мұндағы α — кедергі күші мен жылдамдығы арасындағы пропорционалдық коэффициенті.

$n < \omega$ болғанда тербелістер азаяды, бұл теңдеудің шешімі төмендегідей:

$$y = Ae^{-nt}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - n^2}t + \varphi\right),$$

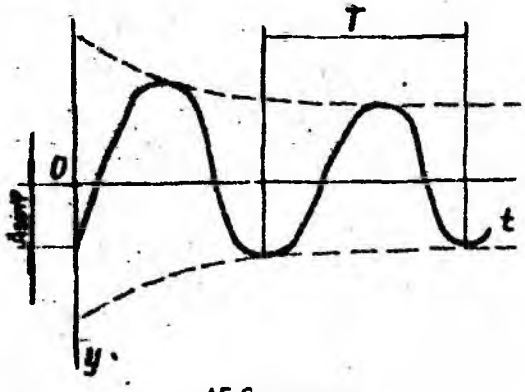
мұндағы n — жүйенің тұтқыр қасиетіне байланысты тербелістердің өшу коэффициенті, $n = \frac{a}{2m}$; әдетте $n << \omega$ (кейбір арнайы демпфер бар жағдайлардан басқа).

Өшу тербелістерінің графигі 15.6-суретте бейнелінген. Бұл графиктегі қоршама қисығы Ae^{-nt} көбейтіндісімен өрнектеледі.

A тербелістердің амплитудасы және φ бастапқы фазасы бастапқы шарттар арқылы анықталады:

$$A = \sqrt{y_0' + \frac{(v_0 + ny_0)^2}{\omega^2 - n^2}};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y_0\sqrt{\omega^2 - n^2}}{v_0 + ny_0}.$$



15.6 - сурет

Тербелістердің дөңгелек жиілігі $\sqrt{\omega^2 - n^2}$ көп жағдайларда ω меншікті жиілігіне жақын болады. Өшу тербелістер — периодтық емес процесс болса да:

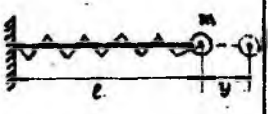
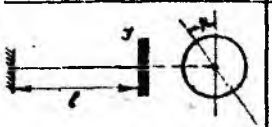
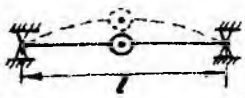
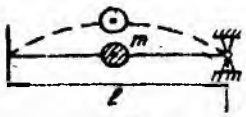
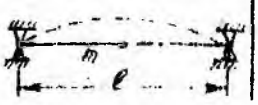
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega}$$

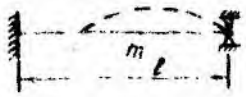
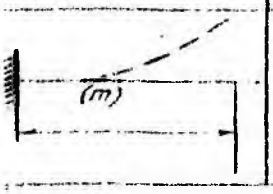
шаманы тербелістердің периоды деп атайды. Кез келген екі тізбек түрінде

келген амплитуданың қатынасы тұрақты шама болады:

$$\frac{A_{i-1}}{A_i} = e^{nT}.$$

15.1 - к е с т е. **Бір еркіндік дәрежесі бар серпімді жүйелердің тербелістері**

Серпімді жүйе	Тербелістің түрі	m немесе I	c	w^2	T
	Бойлықтары бойынша: нүктелі массасы серіппеде нүктелі массасы	m	c	$\frac{c}{m}$	$2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$
	нүктелі массасы серпімді сырықта	m	$\frac{EA}{l}$	$\frac{EA}{ml}$	$2\pi\sqrt{\frac{ml}{EA}}$
	Бұралуы: білікте бұралатын	I	$\frac{GI\rho}{l}$	$\frac{GI\rho}{Il}$	$2\pi\sqrt{\frac{Il}{GI\rho}}$
	Иілу бойынша: нүктелі массалы аркалық	m	$\frac{48EI}{l^3}$	$\frac{48EI}{ml^3}$	$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{ml^3}{3EI}}$
	бұл да сондай	m	$\frac{110EI}{l^3}$	$\frac{110EI}{ml^3}$	$2\pi\sqrt{\frac{ml^3}{110EI}}$
		m	$\frac{192EI}{l^3}$	$\frac{192EI}{ml^3}$	$\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{ml^3}{3EI}}$
		m	$\frac{3EI}{l^3}$	$\frac{3EI}{ml^3}$	$2\pi\sqrt{\frac{ml^3}{3EI}}$
	тең таралған массалы арқалық	...	...	$\frac{110EI}{ml^3}$	$\frac{\pi}{5}\sqrt{\frac{ml^3}{EI}}$

1	2	3	4	5	6
		—	—	$\approx\frac{240EI}{ml^3}$	$\approx\frac{2\pi}{15}\sqrt{\frac{ml^3}{EI}}$
		—	—	$\approx\frac{500EI}{ml^3}$	$\approx\frac{\pi}{5}\sqrt{\frac{ml^3}{5EI}}$
	тең таралған массалы консоль	—	—	$\approx\frac{12EI}{ml^3}$	$\approx\pi\sqrt{\frac{ml^3}{3EI}}$

Меншікті тербелістердің өшу жылдамдығы тербелістердің логарифмдік декременті деп аталатын шамамен сипатталады:

$$\theta = nT = \ln e^{-nt}.$$

Жылдамдыққа пропорционал кедергі кезінде сызықтық жүйенің еріксіз тербелістері. Егер сызықты жүйенің тербелістері күш әсерінде болса, онда олар еріксіз деп аталады.

Дербес жағдайында үйытқу күшінің гармониялық әсерінде

$$F = H\sin\theta t,$$

Мұндағы H — күштің тұрақты амплитудасы; θ — үйытқу күштің жиілігі; t — ағым уақыты. Онда еріксіз тербелістердің дифференциалдық теңдеуі келесі түрге енеді:

$$y'' + 2ny' + \omega^2 y = \frac{H}{m}\sin\theta t,$$

$n < \omega$ болғанда оның интегралы:

$$y = Ae^{-nt}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - n^2}t + \varphi\right) + A_B\sin(\theta t + \lambda);$$

мұндағы бірінші қосылғыш өшудің еріксіз тербелістерін бейнелейді. Қалыптасқан процесс үшін оны ескермеуге де болады. Екінші қосылғыш үйытқу тербелістерді түсіндіреді. θ үйтқу тербелістердің жиілігі үйытқу күшінің жиілігіне тең. Үйытқу тербелістердің амплитудасы A_θ:

$$A_\theta = \frac{H}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \theta^2\right) + 4\theta^2 n^2}} = y_H\beta;$$

мұндағы y_H — $F_{max} \cdot H$ ең үлкен үйытқу күші статикалық түсірілгеннен болған жүйенің орын ауыстыруы, β — тербелістің өсу коэффициенті:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\theta^2}{\omega^4}}}.$$

Кейбір $\frac{n}{\omega}$ үшін β тербелістің өсу коэффициенті $\frac{\theta}{\omega}$ жиілігіне байланысты екендігі 15.7-суретте көрсетілген. λ — үйытқу тербелістердің бастапқы фазасы

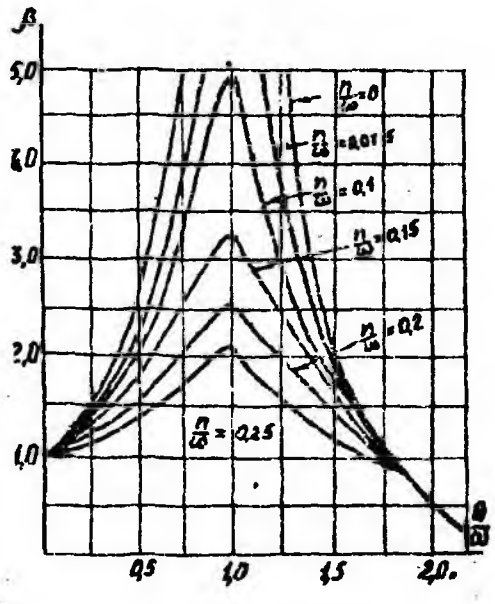
Динамикалық коэффициентті анықтау былайша өрнектеледі:

$$k_д = 1 + \frac{y_H}{y_S}\beta,$$

мұндағы y_S — S (S — тербелгіш күш) статикалық әсерінен болатын орын ауыстыру.

15.7 суреттен үйытқу тербелістерінің жиілігі θ меншікті жиілгіне жақындағанда $\theta \to \omega$ динамикалық коэффициенті шексіз өседі, $\theta = \omega$ болғанда $k_д \to \infty$. Бұл құбылыс резонанс деп аталады.

Кедергі күштердің артуымен резонанс құбылысы бәсеңдейді. Дегенмен, кедергі күштері еріксізден болатын тербелістер амплитудасының шамасын тек резонанс маңында $\left(0,75 \le \frac{\theta}{\omega} \le 1,25\right)$ біршама азайтады, $\frac{\theta}{\omega}$ қатынастың басқа шамаларында кедергі күштердің ықпалы аз болады. —



15.7 - сурет

Егер серпімді жүйенің массасы тербелгіш күштің массасымен салыстырғанда мәнділік болса, онда тербелістердің меншікті жиілігі массасын қоса есептегенде келесі

формула бойынша анықталады:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{ст}}};$$

мұндағы $y_{ст} - S + kQ$ күш статикалық түсірілуінен болатын орын ауыстыру, Q — жүйенің толық салмағы, k — келтіру коэффициенті: созылу кезінде $k = \frac{1}{3}$, қарапайым арқалықтың иілу кезінде $k = \frac{17}{35}$.

§ 4. СОҚҚЫ КҮШІН ЕСЕПТЕУ

Егер құрылманың қарастырылатын немесе онымен жанасатын бөліктерінің жылдамдығы уақыттың өте қысқа периодында өзгерсе, бұл жағдайда соққы құбылысы болады.

Дің гекті жерге қағып кіргізу кезінде ауыр жүк қайсыбір биіктен дің гектің жоғары ұшына құлайды да, оны жерге батырады, аспалы балға соққы тудыра лезде тоқтайды. Осыған ұқсас құбылыс темірді соғу кезінде де болады. Мұнда өңделетін бұйым және балға бірдей соққыға ұшырайды, балға бұйымға тиісімен лезде тоқтайды.

Соққы кезінде жүйелерде тербелістер болады. Тербелістер кезінде кернеулер мен деформациялар қауіпті мәндерге жетуі мүмкін. Кернеулер мен деформациялар туралы есептерді дәл шешу өте қиын, себебі соққы кезінде серпімді жүйелер жұмысының жағдайлары статикалық әсерге қарағанда ерекше және күрделі болады.

Соққы тақырыбына арналған есептерді шешу келесі болжамдарға негізделеді:

1. Соққы жүктің әсерінен сырықтың деформациясы барлық ұзындығы бойынша таралады, Гук заңына бағынады және сол жүк статикалық түсірілгеннен болған деформацияларға ұқсайды.

2. Сырықты соғатын дене абсолют катты болады және ол сырыққа жанасқан кезінен келешекте онымен бірге қалады дейміз.

Соққы кезіндегі кернеулер мен деформациялардың зерттелуі энергияның сақталу заңына негізделеді. Бұл кезде соғатын дененің T кинетикалық энергиясы U_g сырықтың потенциялық энергиясына және T_1 оның қозғалысының кинетикалық энергиясына түрленеді:

$$T = U_g + T_1.$$

Егер сырықтың массасы соғатын дененің массасымен салыстырғанда өте аз болса, онда T_1 шаманы ескермеуге болады, сонда

$$T = U_g.$$

Соққы бағытына және болатын деформация түріне байланысты бойлық (созушы немесе сығушы) және көлденең (немесе июші) және бұраушы соққы деп ажыратылады.

Б о й л ы қ с о қ қ ы. F жүк h биіктен сырыққа құлағанда оны не қыскартады не созады. Жүктің сырықпен жанасқан мезетінде құлау жылдамдығы (ортаның кедергісін ескермесе) келесі формуламен анықталады:

$$v = \sqrt{2gh};$$

одан

$$h = \frac{v^2}{2g}.$$

Құлаған жүктің жұмысын сырықтың потенциялық энергиясына теңестіреміз

$$F = \left(h + \delta_д\right) = \frac{1}{2l} AF\delta_д^2;$$

одан

$$\delta_д = \delta_{ст}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}}\right);$$

немесе

$$\delta_д = \delta_{ст}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{ст}}}\right);$$

мұндағы $\delta_{ст} = \frac{Fl}{EA}$ — F жүктің статикалық әсерінен болған сырықтың ұзаруы (қыскаруы). Жақшадағы шаманы динамикалық коэффициенті деп атайды.

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}};$$

немесе

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{ст}}}.$$

Гук заңы бойынша кернеулер деформацияларға пропорционал болғандығынан төмендегідей теңдеу шығады:

$$\delta_д = k_д \sigma_{ст},$$

мұндағы $\sigma_д$ — F күштің статикалық әсерінен болатын кернеу.

Бойлық соққының дербес жағдайлары. 1. Күшті кенет түсіру кезінде $(h = 0)$ кернеулер мен деформациялар статикалық түсіру кезіндегімен салыстырғанда екі есе үлкен болады:

$$k_д = 2,\ \delta_д = 2\sigma_{ст},\ \delta_д = 2\delta_{ст}.$$

2. Түсіру биіктігі өте үлкен жағдайда $h >> \delta_{ст}$ (немесе соққының үлкен жылдамдығында) түбір астындағы бір2
лікті ескермеуге болады, яғни

$$k_д = 1 + \sqrt{\frac{2h}{\delta_{ст}}}\ \text{немесе}\ k_д = 1 + \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{ст}}};$$

$\frac{v^2}{g\delta_{ст}} = \frac{2h}{\delta_{ст}}$ — қатынастары өте үлкен мәнінде қалса, түбір алдындағы бірлікті де ескермеуге болады, яғни

$$k_д = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{ст}}}\ \text{немесе}\ k_д = \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{ст}}}.$$

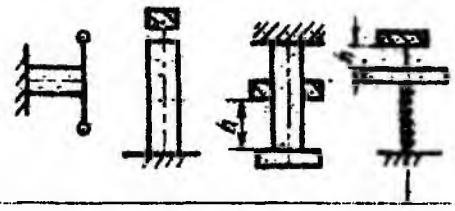
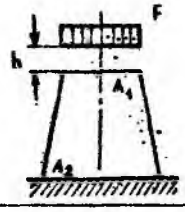
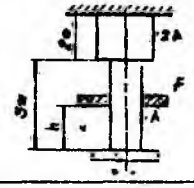
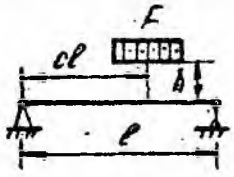
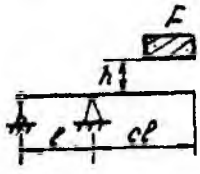
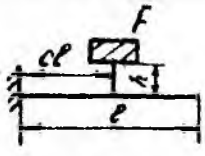
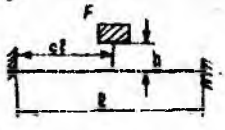
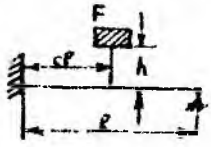
Егер сырықтың массасы соққы түсіретін дененің массасымен салыстырғанда аз болмаса, онда оны ескермеуге болмайды. Динамикалық коэффициенті сырықтың меншікті массасын ескергенде келесі формуламен анықталады:

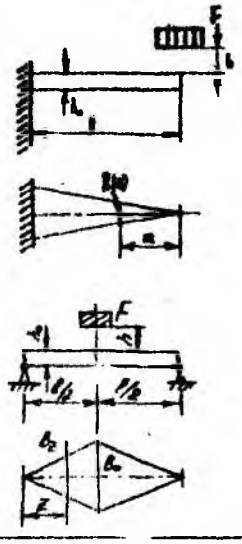
$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}\left(1 + \frac{kQ}{F}\right)}};$$

мұндағы Q — сырықтың салмағы, F — соққы түсіретін дененің салмағы, k — келтірілген коэффициент.

15.2-кестеде кейбір дербес жағдайлар үшін келтірілген коэффициенттердің мәндері берілген.

15.2 - кесте. Кейбір дербес жағдайлар үшін келтірілген коэффициенттердің мәндері

Білеудің нобайы мен жүктеме түрі	k
1	2
	$\frac{1}{3}$
	$\frac{F_1}{F_1+F_2+\sqrt{F_1F_2}}$
	$\frac{67}{336}$
	$\frac{2+4c-c^2-6c^3+3c^4}{105c^2(1-c)^2}$
	$\frac{8+c^2\left(140+231c+99c^2\right)}{420(1+c)^3c^2}$
	$\frac{105-105c+35c^2-2c^3}{140c^2}$
	$\frac{24-24c+4c^2+8c^3-c^4}{35c^2\left(5c-4-c^2\right)^2}$
	$\frac{3+c-c^2}{140c^2(1-c)^2}$

1	2
	$\frac{1}{15}\approx 0{,}067$
	$\frac{11}{15}\approx 0{,}73$

И ю ш і с о қ қ ы. Иілу кезінде $f_{ст}$ статикалық бүгілуін білдіретін арқалықтың соққы тиген статикалық деформация шамасы $\delta_{ст}$ арқалыққа түсірілген күш нобайына және оның тіректік шартына байланысты.

Мысалы аралығы *l*, үштары топсалы бекітілген және ортасына *h* биіктіктен түсетін *F* жүк соққысын кабылдайтын арқалық үшін:

$$\delta_{ст} = f_{ст.max} = \frac{Fl^3}{48EI},\ \sigma_{ст.max} = \frac{Fl}{4W};\ U_{ст} = \frac{F^2l^3}{96EI}.$$

Бос үшына күлайтын *F* жүктен соққы алатын консоль үшін (15.9б-сурет):

$$\delta_{ст} = f_{ст.max} = \frac{Fl^3}{3EI};\ \sigma_{ст.max} = \frac{Fl}{W};\ U_{ст} = \frac{F^2l^3}{6EI}.$$

Динамикалық коэффициент бойлық соққыға үқсас болады:

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{ст}}};$$

мүндағы $\delta_{ст}$ — арқалықтың бүгілу жебесі.

Ең үлкен кернеуін есептейміз:

$$\sigma_{ст} = \sigma_{ст.max} k_д,$$

ал ең үлкен орын ауыстыру мына формуламен анықталады:

$$\delta_{ст} = \delta_{ст.max} k_д.$$

Жоғарыда қарастырылған дербес жағдайлардағы формулаларды пайдалануға болады. k келтірілген коэффициенттерінің мәндері 15.2-кестеде келтірілген.

Б ұ р а м а с о к қ ы. Егер айналмалы білік бір ұшының тежелуіне байланысты кенет тоқтап, ал оның келесі ұшына маховиктің білікті бұрайтын T_0 нақты күші берілсе, онда кернеулер жоғарыда көрсетілген тәсілмен анықталады. Білік моменті бар екі қос күшпен маховиктің және тежеу күштері бұралады. Бұл жағдайда:

$$\delta_{ст} = \varphi_{ст} \frac{T_б}{Gl_ρ}; \; \tau_{ст max} = \frac{T_б}{W_ρ}; \; U_{ст} = \frac{T_б^2 l}{2Gl_ρ} = \frac{\varphi_{ст}^2 Gl_ρ}{2l}.$$

Энергияның сақталу заңына сәйкес $T = U_д$, немесе

$$\frac{l_m \omega^2}{2} = \frac{Gl_ρ \varphi_д^2}{2l};$$

Бұдан келесі тәуелділіктерді аламыз:
біліктің динамикалық бұралу бұрышы

$$\varphi_д = \sqrt{\frac{l_m l \omega^2}{Gl_ρ}};$$

динамикалық бұралу моменті

$$T_д = \frac{Gl_ρ}{l} \varphi_д;$$

ең үлкен динамикалық кернеуі

$$\tau_д = \frac{M_д}{W_ρ};$$

мұндағы l_m — маховик массасының инерция моменті, $l_ρ$ — білік қимасының өрістік инерция моменті, ω — бұрыштық жылдамдығы.

XVI тарау

МАТЕРИАЛЫ ГУК ЗАҢЫНА БАҒЫНБАЙТЫН АРҚАЛЫҚТАРДЫҢ ИІЛУІ

§ 1. СЕРПІМДІ-СОЗЫЛЫМДЫ ЖӘНЕ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС СЕРПІМДІ МАТЕРИАЛДАН ЖАСАЛҒАН АРҚАЛЫҚТАРДЫҢ ИІЛУ ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗГІ ЗАҢДАРЫ

К ө л е м ө з г е р у з а ң ы. Дене элементінің көлемдік деформациясы бөлсенді әрі бөсен деформация кезінде де серпімді болып, тура пропорционалдық заңына бағынады:

$$\sigma_{\text{ор}} = k\theta = 3k\varepsilon_{\text{ор}}, \tag{1}$$

мұндағы, $\sigma_{\text{ор}}$ — гидростатикалық кернеу (кернеу тензорының сызықты инварианты):

$$\sigma_{\text{ор}} = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right); \quad \theta = 3\varepsilon_{\text{ор}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Материалдың сығылмайтындығы туралы болжамды пайдаланайық. Болжам бойынша салыстырмалы көлемдік деформацияны θ нөлге, ал жан-жақты сығылу модулін k шексіздікке теңестіреміз.

Ф о р м а ө з г е р у з а ң ы. Серпімді және созылымды деформацияларда кернеу девиаторы деформация девиаторына пропорционал болады:

$$D_k = 2GD_{\text{д}}. \tag{2}$$

Мұндағы

$$D_k = \begin{Vmatrix} \sigma_x - \sigma_{\text{ор}} \tau_{xy} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \sigma_y - \sigma_{\text{ор}} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \tau_{zy} \sigma_z - \sigma_{\text{ор}} \end{Vmatrix}, \quad D_{\text{д}} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ор}} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{\text{ор}} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{\text{ор}} \end{Vmatrix}.$$

G — ығысудың созылымды модулі:

$$G = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}. \tag{3}$$

(2) өрнегін скалярлық түрде былай жазамыз:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{\text{ор}} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\left(\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ор}}\right); \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_{\text{ор}} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\left(\varepsilon_y - \varepsilon_{\text{ор}}\right); \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_{\text{ор}} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\left(\varepsilon_z - \varepsilon_{\text{ор}}\right); \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{zx}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Кернеу қаркындылығы мен деформация қаркындылығының байланыс заңы. Берілген материал кернеу қаркындылығының анықталған функциясы болады:

$$\sigma_i = f\left(\varepsilon_i\right), \tag{5}$$

мұндағы

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}; \tag{6}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_z\right)^2 + \left(\varepsilon_z - \varepsilon_x\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)}. \tag{7}$$

Кернеу қаркындылығын деформация қаркындылығымен байланыстырсақ, функция түрі дененің материалына тәуелді болады да, кернеулік күй түріне байланысты емес. Бұл тәуелділікті көбінесе материалды созу-не бұрау жұмысының диаграммасымен тендестіреді.

§ 2. СЕРПІМДІ-СОЗЫЛЫМДЫ АРҚАЛЫҚТЫҢ ИЛГЕН ӨСІНІҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫНСЫЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІ

Арқалық үшін

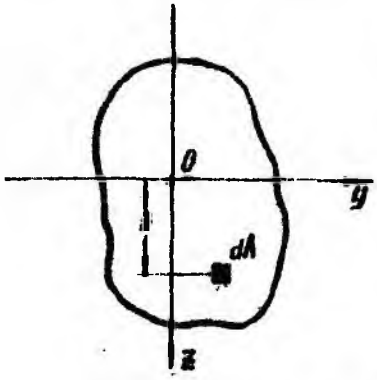
$$\left.\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \\ \varepsilon_x = \kappa z;\ \varepsilon_z = \varepsilon_y = -\frac{1}{2}\varepsilon_x. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

қарастырылады.

Ығысу деформациясын ескермей келденең иілу есебін иілу шешу таза иілу кезіндегі κ қисықтық пен M июші моменттің тәуелділігін пайдалануға негізделеді. Момент теңдеуі келесі түрде болады:

$$M(x) = \int_A \sigma_x z \mathrm{d}A; \tag{9}$$

мұндағы z — өстен төмен орналасқанда оң болатын арқалықтың кез келген талшығының өске дейінгі қашықтығы (16.1-сурет).



16.1 - сурет

(4)-формуладағы (8)-ді ескергенде сызықты емес серпімді арқалық үшін кернеу мен деформация тәуелділігі шығады:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_x; \tag{10}$$

мұндағы

$$\varepsilon_i = z\kappa \tag{11}$$

онда момент теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\kappa \int_A \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} z^2 dz = M(x) \text{ немесе } \kappa I_3 = M(x). \tag{12}$$

I_3 функциясы арқалықтың иілмелі қатаңдығын білдіріп, мына формуламен анықталады:

$$I_3 = \int_A \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} z^2 dz. \tag{13}$$

Сызықты серпімді арқалық үшін $\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$ серпімділік модуліне E тең. Бұл жағдайда $I_3 = \frac{Eh^3}{12}$.

Сызықты емес серпімді және серпімді созылымды деформация кезінде арқалықтың иілмелі қатаңдығы деформация шамасы мен арқалық биіктігінің таралу заңына, сондай-ақ нығаю заңына тәуелді болады.

Арқалықтың иілген есінің қисықтығы келесі түрде болады:

$$\kappa = \frac{M(x)}{I_3}. \tag{14}$$

Шамалы майысу кезінде арқалықтың иілген өсінің қисықтығы бүтілудің дөл екінші туындысымен өрнектеледі делік

$$\kappa = w^{II}. \tag{15}$$

Арқалықтың серпімді созылымды иілуінің сызықты емес дифференциалдық теңдеуі мынадай:

$$I_3 w^{II} = -M(x). \tag{16}$$

Екі рет дифференциалдап, төртінші ретті теңдеуді аламыз:

$$I_3 w^{IV} + 2I_3^I w^{III} + I_3^{II} w^{II} = -M^{II}(x). \tag{17}$$

§ 3. ИЛЬЮШИННІҢ СЕРПІМДІ ШЕШІМДЕР ӘДІСІ МЕН НЕГІЗГІ ТЕҢДЕУДІ ИНТЕГРАЛДАУ НОБАЙЫ

Сызықты емес дифференциалдық теңдеуін А. А. Ильюшиннің серпімді шешімдер әдісімен интегралдайық:

$$EIw^{II} = -m - EI\alpha_3 w^{II} \tag{18}$$

мұндағы m — сызықты серпімді арқалықта туындайтын момент, ол деформациямен сызықты тәуелділікте болады: $m = -EIw^{II}$;

ΔM — материалдың Гук заңынан ауытқуы салдарынан туындайтын момент өзгересі: $\Delta M = -EIw^{II} + I_3 w^{II} = -EI\alpha_3 w^{II}$; $\alpha_3 = 1 - I_3/EI$.

Бастапқы нөлдік жуықтау үшін сызықты есеп шешімін қарастырамыз. Бірінші жуықтауды салу үшін I_3 қатандығын нөлдік жуықтау нәтижесі арқылы анықтаймыз. Сонда бірінші жуықтауда ΔM шамасы табылады:

$$\Delta M_1 = -EIw_0^I \alpha_{30}.$$

Ал (18) теңдеуді бірінші жуық мәнге келтірсек, мынадай болады:

$$EIw_1^{II} = -m + \Delta M_1;$$

n жуықтау үшін иілген өс теңдеуі мына түрде жазылады:

$$EIw_n^{II} = -m + \Delta M_n. \tag{19}$$

Статикалық арқалықтарды қарастырғанда (19) теңдеуді, ал статикалық анықталмағанына төртінші ретті теңдеуді пайдаланған тиімді:

$$EIw_n^{IV}(x) = q(x) - \frac{d^2 \Delta M_n(x)}{dx^2};$$

мұндағы $q(x)$ — арқалыққа сырттан түсірілген күштің қарқындылығы:

$$\Delta M_n = m_{n-1}\left(1 - \frac{I_{3n}}{EI}\right) = m_{n-1}\alpha_n$$

n — жуықтауда иілмелі қатаңдық былай болады: $I_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_{i',n-1}}{\varepsilon_{i,n-1}} z^2 dz.$

Негізгі теңдеудің жалпы шешімін жазайық:

$$EIw_n(x) = \left[C_{0,0} + C_0^{(n)}\right] + \left[C_{1,0} + C_1^{(n)}\right]x + \left[C_{2,0} + C_2^{(n)}\right]\frac{x^2}{2} +$$

$$+\left[C_{3,0} + C_3^{(n)}\right]\frac{x^3}{6} + EI\overline{w}_0(x) + EI\overline{w}^{(n)}(x). \qquad (20)$$

мұндағы $\overline{w}_0$ — төртінші ретті дифференциалдық теңдеудің дербес шешуі. Ол былай болады:

$$EI\overline{w}_0^{IV}(x) = q(x).$$

Коши түрінде алынғаны:

$$\overline{w}_0 = \frac{1}{6EI}\int_0^x q(t)(x-t)^3 dt;$$

Мұның өзі шартты қанағаттандырады:

$$\overline{w}_0(0) = \overline{w}_0^I(0) = \overline{w}_0^{II}(0) = \overline{w}_0^{III}(0) = 0;\ EI\overline{w}_0^{IV}(0) = q(0).$$

$\overline{w}^{(n)}$ — сызықты емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешуі.

$$EI\overline{w}_0^{IV(n)} = \Delta M_n^{II}(x).$$

Коши түрінде алынғанын төмендегіше жазамыз:

$$\overline{w}^{(n)} = -\frac{1}{6EI}\int_0^x \frac{d^2\Delta M_n}{dx^2}(t)(x-t)^3\,dt.$$

Мұның өзі бастапқы шартты қанағаттандырады. Ол теңдеу түрінде былай өрнектеледі:

$$\overline{w}^{(n)}(0) = \overline{w}^{I(n)}(0) = \overline{w}^{II(n)}(0) = \overline{w}^{III(n)}(0) = 0;\ EIw^{(n)}(0) = \frac{d^2\Delta M_n(0)}{dx^2}.$$

(20) негізгі теңдеуін бастапқы параметрлер әдісімен шешкен оңтайлы:

$$EIW_n(x) = EIW_n(0) + EI\theta_n(0)x - M_n(0)\frac{x^2}{2} - Q_n(0)\frac{x^3}{6} -$$

$$-\Phi_n x + EI\overline{w}_0(x); \qquad (21)$$

мұндағы $w_n(0), \theta_n(0), Q_n(0), M_n(0)$ бастапқы параметрлер, олар ғұрақтылар арқылы өрнектеледі:

$$\left.\begin{aligned} w_n(0) &= \frac{1}{EI}\left[C_{0,0} + C_0^{(n)}\right];\\ \theta_n(0) &= \frac{1}{EI}\left[C_{1,0} + C_1^{(n)}\right];\\ M_n(0) &= -C_{2,0}\left[C_2^{(n)} + \Delta M_n(0)\right];\\ Q_n(0) &= -C_{3,0}\left[C_3^{(n)} + \frac{d\Delta M_n(0)}{dx}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

n-ші жуықтауда бұралу бұрышының, моменттердің және көлденең күштердің теңдеулерді келесі түрде жазылады:

$$\left.\begin{aligned} EI\theta_n(x) &= EI\theta_n(0) - M_n(0)x - Q_n(0)\frac{x^2}{6} + \varphi_n(x) + EI\overline{w}_0^{I}(x);\\ M_n(x) &= M_n(0) + Q_n(0)x - EI\overline{w}_0^{II}(x);\\ Q_n(x) &= Q_n(0) - EI\overline{w}_0^{III}(x). \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Мұндағы белгілеулер мынадай:

$$\Phi_n x = \int_0^x \Delta M_n(t)(x-t)dt; \quad \varphi_n(x) = \int_0^x \Delta M_n(t)dt. \tag{24}$$

§ 4. СЕРПІМДІ-СОЗЫЛЫМДЫ ЖӘНЕ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС МАТЕРИАЛДАН ЖАСАЛҒАН, СОЗЫЛУ МЕН СЫҒЫЛУ КЕЗІНДЕ БІРДЕЙ ЖҰМЫС ІСТЕЙТІН АРҚАЛЫҚТАР ИІЛУІНІҢ КЕЛІР ӘДІСТЕРІ

Арқалықтың иілу қатандығын анықтау. $\sigma_i - \varepsilon_i$ диаграммасы бойынша нығаюымен сипатталатын арқалық үшін 13 формуласын қарастырайық (16.2-сурет). Бұл жағдайда болат-3 диаграммасын пайдалануға болады.

Сырықты нығаюы бар диаграммада (5) теуелдігі былай өрнектеледі.

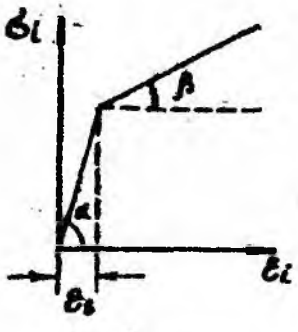
$$\sigma_i = E\varepsilon_i\left[1-\lambda\left(1-\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}\right)\right],$$

мұндағы $\varepsilon_s > \varepsilon_i$ болғанда $\lambda = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$;

$\varepsilon_s < \varepsilon_i$ болғанда $\lambda = 0$; $\sigma_i = E\varepsilon_i$.

Тікбұрышқима. Арқалықтың иілу қатандығы былай анықталады:

$$I_3 = bE\int_{-h/2}^{h/2}\left[(1-\lambda)+\lambda\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}\right]z^2dz; \tag{25}$$



16.2 а - сурет

немесе

$$I_3 = 2bE\int_0^{h_0} z^2dz + 2bE\int_{h_0}^{h/2}\left[(1-\lambda)+\lambda\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}\right]z^2dz,$$

мұндағы ε_i — деформация қарқындылығы: $\varepsilon_i = |z\kappa|$.

h_0 — созылымды аймақ болатын биіктік:

$$h_0 = \frac{h\cdot\varepsilon_s}{2\cdot\varepsilon_{i1}};\ \varepsilon_{i1} = \kappa\frac{h}{2}. \tag{26}$$

Оны интегралдасақ:

$$I_3 = EI_{\text{тік}}\left[1-\lambda\left(1-\frac{3}{2}\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{i1}}+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_s^3}{\varepsilon_{i1}^3}\right)\right].$$

К о с т а в р л ы к и м а. Арқалықтың иілу қатандығын табамыз:

$$I_3 = 2dE\int_0^{h_0} z^2dz + 2dE(1-\lambda)\int_{h_0}^{h_1} z^2dz + 2bE(1-\lambda)\int_{h_1}^{h/2} z^2dz +$$

$$+E\lambda\frac{h\varepsilon_s}{\varepsilon_{i1}}d\int_{h_0}^{h_1} zdz + \frac{E\lambda_h^{h_0}\varepsilon_s}{\varepsilon_{i1}}b\int_{h_1}^{h/2} zdz;$$

немесе

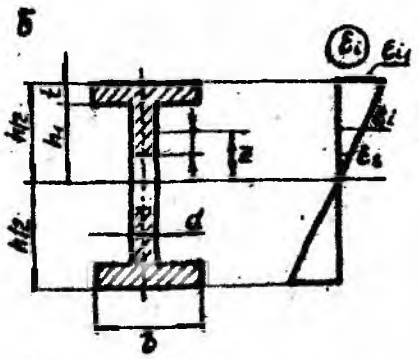
$$I_3 = \frac{Ebh^3}{12}\left\{1-c^3(1-\mu)-\lambda\left[1-c^3(1-\mu)-\frac{3}{2}\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{i1}}\left(1-c^2-\mu c^2\right)+\frac{\mu\varepsilon_s^3}{2\varepsilon_{i1}^3}\right]\right\}; \quad (27)$$

мұндағы b — қос таврдың ені (16.2б-сурет); d — оның қабырғасының қалыңдығы, t — табан қалыңдығы;

$$h_1 = \frac{h}{2}-t;\ c=\left(1-\frac{2t}{h}\right);\ \mu=\frac{d}{b};$$

$$a=\frac{1-c^2-\mu c^2}{1-c^3(1-\mu)};\ \eta=\frac{\mu}{1-c^3(1-\mu)};$$

$$I_{\text{қоставр}}=\frac{bh^3}{12}\left[1-c^3(1-\mu)\right].$$

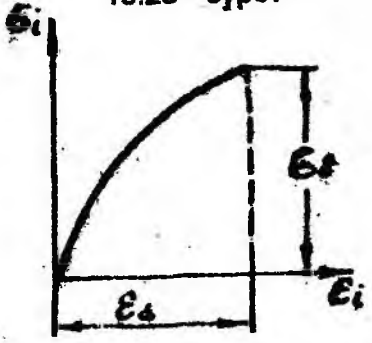


16.2б - сурет

№10-70 қоставр үшін a мен η коэффициенттері тиісінше 0,46-дан 0,33-ке және 0,188-ден 0,237-ге дейін өзгереді. Тиімділік үшін бұл шамалардың мына мәндері алынады: a=0,38, $\eta = 0,212$.

(5) тәуелділігі квадрат параболамен аппроксималанатын (16.3-сурет) сызықты емес серпімді материалды қарастырайық:

$$\sigma_i = k_1\varepsilon_i - k_2\varepsilon_i^2, \quad (28)$$



16 3 - сурет

мұндағы k_1 — бастапқы серпімді модулі, k_2 — көрнеумен өлшөмдес коэффициенті, k_1 және k_2 келесі шарттар арқылы анықталады:

$\varepsilon_i = \varepsilon_б$ болғанда $\sigma_i = \sigma_б$; $\varepsilon_i = \varepsilon_б$ болғанда $\dfrac{d\sigma_i}{d\varepsilon} = 0$

Осыдан $k_1 = 2\dfrac{\sigma_б}{\varepsilon_б}$ және $k_2 = \dfrac{\sigma_б}{\varepsilon_б^2}$ -ді табамыз.

[28] қисығы бетонның, алюминий қорытпаның жұмыс диаграммаларын аппроксимациялауда пайдаланылады:

Т і к б ұ р ы ш қ и м а. Арқалықтың иілу қатандығын табамыз:

$$I_з = 2b\int_a^{h/2}\left(k_1 - k_2\varepsilon_1\right)z^2dz; \qquad (29)$$

немесе

$$I_з = k_1 I_{тік}\left(1 - \frac{3}{16}\frac{h}{\varepsilon_б}\left(w^{II}\right)\right).$$

Ұ ш т а р ы б о с т и я н а қ т а л ғ а н а р қ а л ы қ. Ұштары бос тиянақталған арқалық үшін (21) және (23) формулаларына енетін бастапқы параметрлер келесі шекаралық шарттардан анықталады:

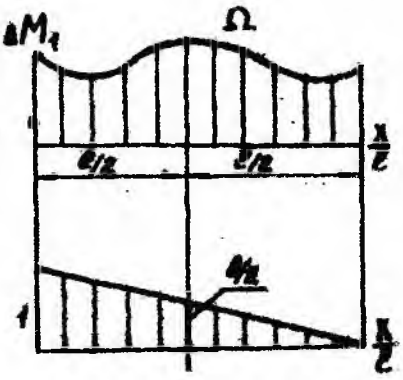
$x = 0$ болғанда $W_n(0) = 0, M_n(0) = 0$; $x = l$ болғанда $w_n(l) = 0; M_n(l) = 0.$

Бастапқы параметрлер мынаған тең:

$$\left.\begin{aligned} w_n(0) &= 0, \quad M_n(0) = 0; \\ Q_n(0) &= EI\frac{1}{l}\frac{d^2\overline{w}_0}{dx^2}(l); \\ \theta_n(0) &= EI\frac{1}{6}\frac{d^2\overline{w}_0}{dx^2}(l) - \frac{EI\overline{w}_0}{l}(l) + \frac{\Phi_n(l)}{l}. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

$\theta_n(0)$ бастапқы параметрге кіретін $\Phi_n(l)$ сызықты емес функция Верещагин өрежесімен анықталады (16.4-сурет):

$$\Phi_n(l)=\int_0^l \Delta M_n(t)(l-t)dt=\Omega\cdot\frac{l}{2}. \qquad (31)$$



16.4 - сурет

Бастапқы параметрлердің табылған мәндерін (21) тәуелділіктеріне қойып, иілген ось теңдеуін аламыз:

$$EIw_n(x)=\left[EI\frac{l}{6}\overline{w}_0^{II}(l)+\frac{1}{l}\Phi_n(l)-\frac{EI}{l}\overline{w}_0(l)\right]x-$$

$$-\frac{EI}{l}\overline{w}_0^{II}(l)+\Phi_n(x)+EI\overline{w}_0(x). \qquad (32)$$

Арқалықтың үзындығы бойынша көлбеулену бұрышының өзгеру заңы теңдеу түрінде былай болмақ:

$$EI\theta_n(x)=\left[EI\frac{l}{6}\overline{w}_0^{II}(l)+\frac{1}{l}\Phi_n(l)-\frac{EI}{l}\overline{w}_0(l)\right]-$$

$$-\frac{EI}{l}\overline{w}_0^{II}(l)\frac{x^2}{2}-\varphi_n(x)+EI\overline{w}_0^{I}(x). \qquad (33)$$

Арқалықтың үзындығы бойынша июші момент және көлденең күші теңдеулері былай жазылады:

$$M_n(x)=\left[EI\frac{1}{l}-\frac{EI}{l}\frac{d^2\overline{w}_0}{dx^2}(l)\right]x-EI\frac{d^3\overline{w}_0}{dx^3}(x); \qquad (34)$$

$$Q_n(x)=\frac{EI}{l}\frac{d^2\overline{w}_0}{dx^2}(l)-EI\frac{d^3\overline{w}_0}{dx^3}(x). \qquad (35)$$

А. А. Ильюшиннің серпімді шешімдер әдісі негізінде арқалықтағы және қабықшадағы деформацияны анықтауға байланысты біртіндеп жуықтау процесі геометриялық прогрессия заңына үқсас болатындығы [16] жұмыстарда көрсетілген. Бұл жағдайда кейбір қимадағы орын ауыстыру мен деформация шамасы, мәселен бүгілу функциясы қарапайым формуламен барынша дәл анықталады. Ол формула былай жазылады:

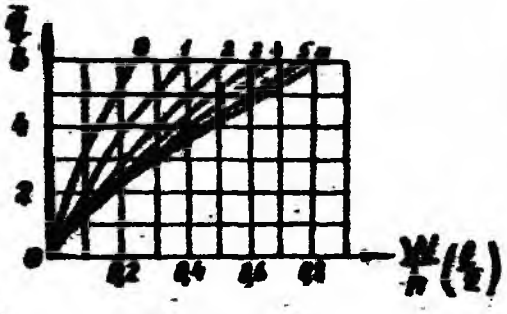
$$w_{\text{шекті}}=w_0\frac{1}{2-\frac{w_1}{w_0}}. \qquad (36)$$

мұндағы w_0 — нөлдік жуықтаудағы бүтілу мәні, w_1 — бірінші жуықтаудағы бүтілу мәні.

Деформация қарқындылығының жуық мәндерін табуға болады:

$$\varepsilon_{i1,\text{шекті}} = \varepsilon_{i1,0} \cdot \frac{1}{2 - \dfrac{\varepsilon_{i1,1}}{\varepsilon_{i1,0}}}. \qquad (37)$$

16.5-суретте бүтілудің өзгеру графигі көрсетілген: бес жуықтау, ал n-інші жуықтау (36) формула бойынша табылған. Өлшемсіз параметрлі графиктерден E серпімділік модулі, инерция моменті және $\frac{h}{l}$ мәндерін қоя отырып кез келген қоставрлы арқылық үшін бүтілуді анықтауға болады. (36), (37) формулаларының мәндерін тиянақтау үшін көрнеу қарқындылығы мен деформация төуелділігі квадрат парабола (28) түрінде алынған арқалықты қарастырайық.



16.5 - сурет

Бірінші жуықтауды салу үшін мына теңдеулерді күра отырып:

$$I_{3,1} = \frac{bh^3}{12} k_1 \left[1 - \frac{3}{16}\frac{h}{\varepsilon_б}\left|w_0^{II}(x)\right|\right];\quad \alpha_1 = \frac{3}{16}\frac{h}{\varepsilon_б}\left|w_0^{II}(x)\right|;$$

$$\Phi_1(x) = -144a\left(\frac{q}{24EI}\right)^2\left(\frac{x^6}{30} - 2l\frac{x^5}{20} + l^2\frac{x^4}{12}\right);$$

$$a = \frac{3}{16}\frac{h}{\varepsilon_б};\ Q(0) = \frac{ql}{2};\ Q_1(0) = \frac{ql^3}{24EI} - 144a\left(\frac{q}{24EI}\right)^2\frac{l^5}{60},$$

табамыз.

Бірінші жуықтау бойынша иілген ось теңдеуі мынадай түрде болады:

$$w_1(x) = \frac{q}{24EI}\left(x^4 - 2lx^3 + l^3x\right) + 144a\left(\frac{q}{24EI}\right)^2\left(\frac{x^6}{30} - 2l\frac{x^5}{20} + l^2\frac{x^4}{12} + \frac{l^5x}{60}\right).$$

Екінші жуықтауды салу үшін арқалық қатаңдығының шамасын есептейміз:

$$l_{3,2} = \frac{bh^3}{12} k_1 \left[1 - \frac{3}{16} \frac{h}{\varepsilon_б} \left| w_1^{II}(x) \right| \right].$$

Мысал. Біркалыпты таралған q күш әсерінде болатын үштары бос тиянақталған серпімді-созылымды материалдан жасалған арқалық үшін бүгілу мен деформация қаркындылығын анықтаңыз. (16.6а-сурет).

Нөлдік жуықтауда (31) формула бойынша $\Phi_0(x) = 0$ деп үйғарайық. Бұл жағдайда (32) теңдеуі мына түрге енеді:

$$EIw_0(x) = EI\theta(0)x - Q(0)\frac{x^3}{6} + EI\overline{w}_0(x);$$

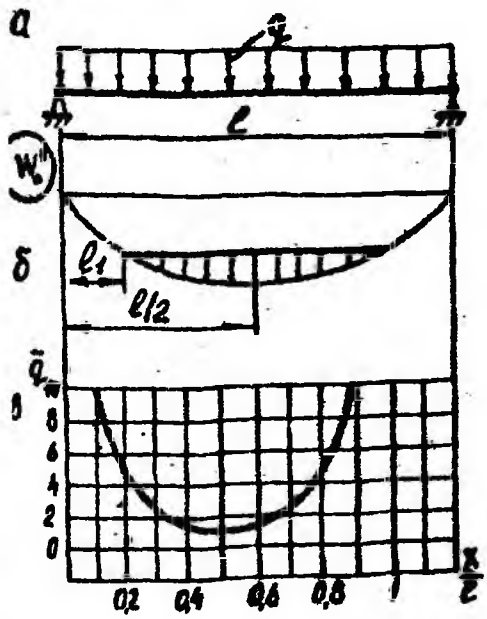
мұндағы

$$\overline{w}_0(x) = \frac{qx^4}{24EI};\ \theta(0) = \frac{ql^3}{24EI};\ Q(0) = \frac{ql}{2}.$$

Сызықты нығаю бар диаграмманың бірінші жуықтауын саламыз, содан кейін деформация қаркындылығын анықтаймыз. Созылымды деформация аймағын анықтау үшін Мизестің созылымдық шартын пайдаланамыз:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_s,$$

мұндағы ε_s — аққыштық шегіне сәйкес деформация. Созылымды деформация ең алдымен ε_{i1} ең үлкен деформация шамасы ε_s мәніне жеткенде $x = \frac{l}{2}$ қимасында болады. 16.6б-суретте серпімді және созылымды аймақтардың, ал 16.6в-суретте созылымды аймақтың нөлдік жуықтауда өлшемсіз күшке тәуелділігі көрсетілген. График салу үшін төмендегі өлшемсіз шамаларды енгіземіз:



16.6 - сурет

$$\overline{q} = \frac{qhl^2}{24EI\varepsilon_s};\ \overline{M} = \frac{Mh}{EI\varepsilon_s};\ \Delta\overline{M} = \frac{\Delta Mh}{EI\varepsilon_s};\ \overline{Q} = \frac{Qhl}{EI\varepsilon_s};$$

$$\overline{w} = \frac{wh}{l^2 \varepsilon_s}; \quad I_3 = \frac{I_3}{EI}; \quad \overline{\theta} = \frac{\theta h}{\varepsilon_s l}.$$

Нөлдік жуықтауда ең үлкен деформация шамасы

$$\varepsilon_{i1,0} = \frac{h}{2} w_0^{II}(x).$$

формуласымен анықталады. Созылымды аймақ шегінде арқалықтың қатандығын анықтап, $\Phi_1(x)$ функцияның графигін саламыз:

$$\Phi_1(x) = \int_{l_1}^{x} \Delta M_1(t)(x-t)dt;$$

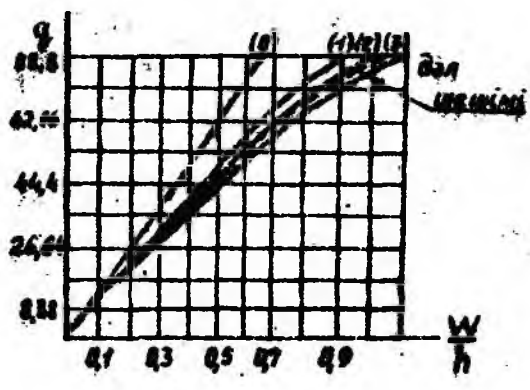
мұндағы l_1 — созылымды аймақтың басы (16.5в-сурет).

Бірінші жуықтау бойынша:

$$EIw_1(x) = EIw_0(x) + \Phi_1(l)\frac{x}{l} - \Phi_1(x);$$

$$EI\theta_1(x) = EI\theta_0(x) + \frac{1}{l}\Phi_1(l) - \varphi_1(x);$$

$$M_1 = 12\overline{q}EI\varepsilon_s \cdot \frac{1}{hl}\left(x - \frac{x^2}{l}\right); \quad Q_1 = \frac{12\overline{q}EI\varepsilon_s}{hl}\left(1 - \frac{2x}{l}\right);$$



16.7 - сурет

16.7-суретте арқалық биіктігіне қатысты бүгілудің нөлінші, бірінші, екінші, үшінші және n жуықтауларының күшке байланысты өзгеру графиктері көрсетілген. Олар — АМГ-6

$\left(k_1 = 3,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \ \varepsilon_6 = 1,25\%\right)$;

$l = 4\text{м}, \ h = 20\text{см}, \ b = 10\text{см}$

статикалық анықталған тік бұрышты жоғарыда қарастырылған арқалықтың есебінің нәтижесі.

§ 5. СЕРПІМДІ-СОЗЫЛЫМДЫ МАТЕРИАЛДАН ЖАСАЛҒАН СОЗЫЛУ МЕН СЫҒЫЛУ КЕЗІНДЕ БІРДЕЙ ЖҰМЫС ІСТЕЙТІН АРҚАЛЫҚТАР ИІЛУІНІҢ КЕЙБІР ЕСЕПТЕРІ

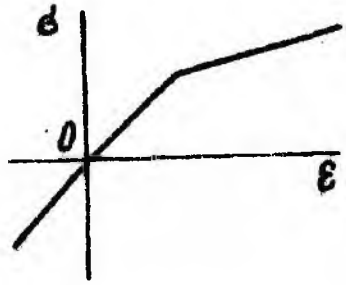
Бейтарап қабаттың жылжу шамасын анықтау. Созылу мен сығылу бірдей жұмыс істемейтін материал үшін 16.8-сурет диаграммасы координат басы симметриялық емес күйде орналасады.

Есептеу теориясын құрғанда:

1) созылу мен сығылу кезінде материалдың сипаттамалары координат басында жалпы жанамаға ие болады, яғни созылу мен сығылу кездерінде серпімді модульдері тең болады:

2) шамалы орын ауыстыруларды қарастырамыз, сондықтан арқалықтың қимасында әсер ететін өстік күштерді ескермейміз;

3) Бернуллидың жазық қималар болжамын пайдаланамыз.



16.8 - сурет

Деформацияның бірдей дәрежесінде сығылатын және созылатын аймақтарында эпюралардың ауданы болмағандығынан, бейтарап қабаттың жылжыу болады.

Т і к б ү р ы ш қ и м а. Бейтарап қабаттың жылжуы мына теңдеу арқылы беріледі:

$$\delta = h\left[\frac{1}{\lambda}\left(1-\sqrt{1-\lambda(1-\gamma)}\right)-\frac{1}{2}(1-\gamma)\right]; \qquad (38)$$

мүндағы $\gamma = \frac{2\varepsilon_s}{\kappa h}$; $(0 \le y \le 1)$; $m = \frac{2tb}{hd}$; $r = \frac{2t}{h}$.

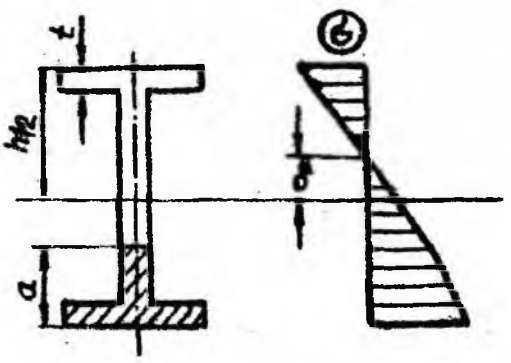
К о с т а в р л ы қ и м а. Бейтарап қабаттың жылжуы (16.9-сурет) былай болады.

$$\delta = h\left\{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2}(1-\gamma)+\frac{2-\lambda}{2\lambda}(m-r)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\lambda(1-\gamma)+(m-r)\left[1-\lambda(2+m-r)+\frac{m\lambda^2}{4}+\lambda\gamma\right]}\right\} \qquad (39)$$

$m=0$, $r=0$, $d=b$ болғанда (39) формула (38) формулаға ауысады. Келешектегі санауда $r=0,080$, $m=1,32$ шамаларын аламыз, сонда

$$\frac{\delta}{h} = 1,24+\frac{\gamma}{2}-1,05\sqrt{0,616+2,13\gamma}.$$



16.9 - сурет

Арқалықтың иілу қатандығын анықтау. Серпімді созылымды материалдан жасалған созылу мен сығылу кезінде бірдей жұмыс істемейтін арқалықтың иілу қатандығы мына формуламен анықталады:

$$I_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(z+\delta)^2 dz,$$

мұндағы $\varepsilon_i = |\kappa|(z+\delta)$;

Оны интегралдағаннан былай болады:

$$I_3 = \frac{bh^3}{12} E\Big[(-c+p)^3(1-\mu) - (-1+p)^3 - \frac{1}{2}\lambda\mu\gamma^3 -$$

$$-(1-\lambda)(c+p)^3(1-\mu) - \frac{3}{2}\gamma\lambda(c+p)^2(1-\mu) + (1-\lambda)(1+p)^3 +$$

$$+\frac{3}{2}\lambda(1+p)^2\gamma\Big]$$

мұндағы $c = 1 - \frac{2t}{h}$; $p = \frac{2\delta}{h}$; $\frac{d}{b} = \mu$.

Келешекті санауда $c = 0,92$, $\mu = 0,06$-ны аламыз, сонда

$$I_3 = \frac{bh^3}{12} E\big[0,269 - 0,477p + 0,543p^2 +$$

$$+\gamma\left(0,295 + 0,38p + 0,085p^2\right) - 0,0285\gamma^3\big].$$

Ұштары бос тиянақталған арқалық. Ұштары бос тиянақталған арқалық үшін (16.5-сурет) нөлдік жуықтауды 4-ші параграфта қарастырғамыз, сондықтан тікелей бірінші жуықтауды құрамыз. Бұл жағдайда тең таралған күш үшін деформацияның қарқындылығы келесі формуламен анықталады:

$$\varepsilon_{i1,0} = \frac{6\bar{q}\varepsilon_s}{l^2}\left(x^2 - lx\right).$$

16.1-кестеде арқалықтың ортасындағы бейтарап қабаттың жылжуы, α шама, ΔM материалдың Гук заңынан ауытқуы салдарынан туындайтын момент өзгерісі, $\Phi_1(l)$ функциясы, координат басындағы бұралу бұрышы, деформацияның қаркындылығы және арқалықтың ортасындағы бүгілуі келтірілген.

§ 6. АРҚАЛЫҚТЫҢ ИІЛУ КЕЗІНДЕГІ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЖӘНЕ ФИЗИКАЛЫҚ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕСТІГІН ЕСКЕРУ

§ 1. Геометриялық сызықтық еместігін ескеру

Арқалықтың иілу өсінің геометриялық сызықты еместігін ескеру кезінде дифференциалдық теңдеуі келесі түрде болады:

$$EI\frac{w^{II}}{\left[1+\left(w^{I}\right)^{2}\right]^{3/2}}=-M(x); \tag{40}$$

немесе А. А. Ильюшиннің серпімді шешімдер әдісі бойынша

$$EIw^{II}=-M(x)-\Delta M(x); \tag{41}$$

мұндағы

$$\Delta M(x)=M(x)\left\{\left[1+\left(w^{I}\right)^{2}\right]^{3/2}-1\right\}; \tag{42}$$

ΔM бірінші жуықтауын күрғанда негізгі функцияны мынадай түрде алады:

$$w(x)=A_1f_1(x)+A_2f_2(x);$$

мұндағы $f_1(x), f_2(x)$ — есептің шекаралық шарттарын қанағаттандыратын функциялар, A_1, A_2 — екі сипаттама қималарындағы (40) негізгі теңдеуді қанағаттандыру шарттары арқылы анықталатын тұрақтылары.

Иілген өстің дифференциалдық теңдеуі мына түрде болады:

$$EIW_1^{II}=-M(x)-\frac{3}{2}M(x)\left(W^{I}\right)^{2}.$$

Бірінші жуықтаудың шешімін алу үшін осы теңдеу негізгі саналады.

Екінші жуықтау мынадай түрде жазылады:

$$EIW_2^{II}=-M(x)-\frac{3}{2}M(x)\left(W_1^{I}\right)^{2}.$$

16.1 - к е с т е. Үштары бос тиянақталған арқалық есептері

q	$\gamma(1/2)$	$\frac{\delta}{h}(1/2)$	$\alpha(1/2)$	$\Delta M_1(1/2)$	$\Phi(1/2)$	$\Phi(l)$	$\theta_0(0)$	$\theta_1(0)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,333	0,1[illegible]	0,47	2,82	0,047	0,40	2	2,40
3	0,222	0,224	0,36	5,05	0,061	0,66	3	3,66
4	0,167	0,250	0,62	7,44	0,110	1,08	4	4,08
5	0,133	0,265	0,65	9,74	0,170	1,41	5	6,41
7	0,067	0,310	0,72	15,15	0,400	1,93	7	8,33

$\frac{\varepsilon_{i1,0}}{\varepsilon_s}(1/2)$	$\frac{\varepsilon_{i1,1}}{\varepsilon_s}(1/2)$	β	$\frac{\varepsilon_{i1,n}}{\varepsilon_s}(1/2)$	$w(1/2)$			
				0	1	β	n
10	11	12	13	14	15	16	17
3,0	4,41	1,47	5,65	0,650	0,82	1,26	0,875
4,5	7,02	1,56	10,25	0,937	1,23	1,32	1,380
6,0	9,72	1,62	15,75	1,300	1,73	1,33	1,940
7,5	12,27	1,64	20,80	1,562	2,09	1,34	2,380
10,5	18,08	1,72	37,60	2,190	3,42	1,56	5,000

Ұштары бос тиянақталған арқалық. Бұл есеп үшін лайықты функциялар ретінде төмендегі теңдеулерді аламыз:

$$f_1(x) = \sin\frac{\pi x}{l};$$

$$f_2(x) = \sin\frac{3\pi x}{l}.$$

$x = \frac{l}{2}$ және $x = \frac{l}{4}$ болғанда (40) теңдеуді жазып, A_1 және A_2-ні анықтап, бірінші жуықтаудағы иілу өсінің теңе-теңдігін мына түрде аламыз:

$$EIW_1^{II} = -\frac{q}{2}\left(lx - x^2\right) - \frac{3}{2}\frac{q}{2}\left(lx - x^2\right)\pi^2\left[a_1\cos\frac{\pi x}{l} + 3a_2\cos\frac{\pi x}{3}\right],$$

мұндағы

$$a_1 = \frac{A_1}{l_0};\ a_2 = \frac{A_2}{l_0};\ \alpha = \frac{ql_0^3}{EI};\ l_0 = l\left[1 - \frac{\pi^2\left(a_1^2 + 9a_2^2\right)}{4 + 2\pi^2\left(a_1 + a_2\right)^2}\right]$$

— арқалықтың иілу кейінгі үзару.

16.2-кестеде үштары бос тиянақталған арқалықтың есебінің нәтижесі келтірілген.

16.2 - кесте. **Ұштары бос тиянақталған арқалық есебі**

α	a_1	a_2	l_0/l	$w(1/2)$ сызықты есеп	$w(l_0/2)$	$w(1/2)$
1	2	3	4	5	6	7
5	0075	00012	098	009	0080	001
10	0149	00032	095	019	0160	022
15	0240	00065	093	029	0230	033
17	0300	00090	091	033	0261	040

§ 2. Геометриялық және физикалық сызықты еместігін ескеру

Серпімді-созылымды иілудің сызықты емес дифференциалдық теңдеуі мына түрде жазылады:

$$I_3 w^{II} = -M(x)\left[1+\left(w^{I}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}; \tag{43}$$

немесе

$$EIw^{II} = -M(x)\left[1+\left(w^{I}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} + \left(EI - I_3\right)w^{II}.$$

А. А. Ильюшиннің серпімді шешімдер әдісі бойынша былай болады:

$$EIw^{II} = -M(x) - \Delta M(x); \tag{43'}$$

мұндағы

$$\Delta M(x) = \frac{3}{2}M(x)\left(w^{I}\right)^2 - \left(EI - I_3\right)w^{II}. \tag{44}$$

Физикалық сызықтық еместігін ескеретін $EI - I_3$ өрнекті синусоида түрінде аппроксималаймыз:

$$EI - I_3 = B\sin\frac{\pi x}{l};$$

мұндағы B коэффициентті арқалықтың ортасындағы I_3 шамасы физикалық сызықты емес есептен алынған шамаға тең деген шарттан табамыз.

Бірінші жуықтаудың шешімін алу үшін негізгі теңдеу түрін күрамыз:

$$EIW_1^{II} = -M(x) - \frac{3}{2}M(x)\left(w^{I}\right)^2 + B\sin\frac{\pi x}{l}w^{II}.$$

Екінші жуықтауда бұл теңдеу мына түрде жазылады:

$$EIW_2^{II} = -M(x) - \frac{3}{2}M(x)\left(w_1^{II}\right)^2 + B\sin\frac{\pi x}{l}w_1^{II}.$$

Ұштары бос тиянақталған арқалық. Жоғары параграфта карастырғандай лайықты функцияларды алып, A_1 және A_2 анықтап, бірінші жуықтаудағы иілу өсінің теңдігін мына түрде аламыз:

$$EIW_1^{II} = -\frac{q}{2}\left(lx - x^2\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)\pi \cdot \left[a_1 \cos\frac{\pi x}{l} + \right.$$

$$\left. + 3a_2 \cos\frac{\pi x}{3}\right]^2 - B\sin\frac{\pi x}{l} \cdot \frac{\pi^2}{l}\left[a_1 \sin\frac{\pi x}{l} + 9a_2 \frac{3\pi x}{l}\right].$$

16.3-кестеде бұл есептің нәтижесі келтірілген.

16.3 - к е с т е. Жуықтау есептері

α	$\frac{B}{EI}$	$\frac{I_3}{EI}(1/2)$	$\frac{I_3}{EI}(1/4)$	a_1	$l_0/2$	$w\left(l_0/2\right)^*$	$w(1/2)^{**}$
1	2	3	4	5	6	7	8
5	0,900	0,1000	0,370	0,018	0,980	0,090	0,15
10	0,915	0,0850	0,360	0,047	0,960	0,180	0,24
15	0,920	0,0805	0,357	0,080	0,940	0,260	0,38
17	0,925	0,0750	0,354	0,105	0,931	0,295	0,44

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. *Беляев Н. М.* Сопротивление материалов. М: Гостехиздат, 1959.
2. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. М: Наука, 1986
3. *Болотин В. В.* Лекции по сопротивлению материалов. Изд. Моск. энерг. института. 1957. Ч. I; 1958. Ч. II.
4. *Дарков А. В. Шпиро Г. С.* Сопротивление материалов. М: Высшая школа, 1965.
5. *Ильюшин А. А., Ленский В.С.* Сопротивление материалов. М: Физматгиз, 1957.
6. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М: Машиностроение, 1975.
7. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М: Изд. иностр. лит., 1954.
8. *Никофоров С. Н.* Сопротивление материалов. М: Высшая школа, 1966.
9. *Пономарев С. Д.* и др. Расчеты на прочность в машиностроении. М: Машгиз, 1956. Т.I; 1958. Т.II; 1959. Т.III.
10. *Работнов Ю. Н.* Сопротивление материалов. М: Госиздат физ-мат. литературы, 1962.
11. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М: Наука, 1988.
12. *Ржаницин А. Р.* Расчет сооружении с учетом пластических свойств материалов. М: Госстройиздат, 1954.
13. *Ржаницин А. Р.* Строительная механика. М: Высшая школа, 1982.
14. *Смирнов А. Ф.* Сопротивление материалов. М: Трансжелездориздат, 1961.
15. Справочник. Конструкционные материалы. Под ред. Б.Н. Арзамасова. М: Машиностроение, 1990.
16. Справочник. Композиционные материалы. Под ред. Васильева В.В., Тарнопольского Ю.М. М: Машиностроение, 1990.
17. Справочник по технической механике. Под ред. А. Н. Динника. М: Гостехиздат, 1949.
18. Справочник проектировщика. Том расчетно-теоретический. М: Госстройиздат, 1960.
19. Справочник машиностроителя. М: Машгиз, 1962. Т. 3; 1964. Т. 6.
20. *Ильюшин А. А.* Пластичность М., 1948.
21. *Рахимбекова З. М.* Изгиб балок за пределом упругости. Алма-Ата: Наука, 1980.
22. *Рахимбекова З. М.* Материалдар кедергісі. Алматы: Мектеп, 1987.
23. *Рахимбекова З. М.* Серпімділік және сезымдылық теориясының негіздері. Алматы. Республикалық баспа кабинеті. 1993.
24. *Рахимбекова З. М.* Материалдар кедергісі терминдерінің орысша-казакша түсіндірлі сездірі Алматы: Рауан, 1993.
25. *Тимошенко С. П.* Сопротивление материалов. М: Гостехиздат, 1945. Изд. 4-е. Т. 43. 1946; Изд. 2-е. Ч. I.

26. *Тимошенко С. П.* Гере Дж. Механика материалов. М: Мир, 1976

27. *Толоконников А. А.* Механика деформируемого твердого тела. М: Высшая школа 1979

28. *Писаренко Г. С.* и др. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наукова думка, 1975.

29. *Фесик С. П.* Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Будівельник, 1970

30. *Федосьев В. И.* Сопротивление материалов. М: Наука, 1987.

31. *Федосьев В. И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов М: Наука, 1967

32. *Филоненко-Бородич М. М.* и др. Курс сопротивления материалов. 1955. Ч. II; Гостехиздат, 1956. Ч. II.

33. *ШтаманИ. Я., Пиковский А. А.* Основы теории устойчивости строительных конструкций. М. Стройиздат, 1939.

34. *Цурков И. С.* К вопросу об упругопластическом изгибе металлических панелей пологих оболочек при конечных прогибах// Инженерный журнал. Вып. 1 1961. Т. I.

35. Энциклопедический справочник. "Машиностроение" Т. I. Кн. 2.

36. *Ясинский Ф. С.* Избранные работы по устойчивости сжатых стержней М: Гостехиздат, 1952.

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз 3
I тарау 4

Жалпы түсініктер 4

§ 1. Материалдар кедергісі және оның негізгі міндеттері 4
§ 2. Деформация түрлері 5
§ 3. Негізгі болжамдар мен қағидалар 7
§ 4. Сыртқы күштер және олардың түрлері 7
§ 5. Ішкі күштер. Қималар әдісі. Көрнеу 8

II тарау. 10

Көлденең қималардың геометриялық сипаттамалары 10

§ 1. Қиманың статикалық моменттері 10
§ 2. Қиманың инерция моменттері 12
§ 3. Өстерді параллель көшіру кезіндегі инерция моменттері 13
§ 4. Қарапайым қималардың өстерге қатысты инерция моменттері 14
§ 5. Өстерді бұру кезіндегі инерция моменттері 17
§ 6. Инерция бас өстері, бас моменттері 19
§ 7. Инерция эллипсі және оның қасиеттері 20
§ 8. Кедергі моменттері 22
§ 9. Күрделі қималардың геометриялық сипаттамалары 23

III тарау. 77

Материалдың механикалық сипаттамалары 77

§ 1. Созылу диаграммасы 77
§ 2. Сығылу диаграммасы 80
§ 3. Материалдың серпімділік сипаттамалары 82
§ 4. Жаңа материалдар туралы түсініктер 83
§ 5. Материалдың механикалық сипаттамаларына температураның, радиоактивті сәуленің, термиялық өңдеудің және басқа факторлардың әсері 95
§ 6. Қор коэффициенттері. Мүмкін кернеулер 98

IV тарау. 101

Нүктедегі көрнеулік және деформациялық күйлер
Көрнеулік күй. 101

§ 1. Негізгі түсініктер. Сызықты көрнеулік күй 101
§ 2. Жазық көрнеулік күй 103
§ 3. Бас көрнеулер траекториялары туралы түсінік 105
§ 4. Көлемдік көрнеулік күй 105
§ 5. Аз деформациялардың компоненттері 108
§ 6. Серпімділік шегіндегі көрнеулер мен деформациялардың өзара байланыстары. Гук заңы. 110
§ 7. Көлемнің салыстырмалы өзгеруі 111
§ 8. Серпімділік деформацияның потенциялдық энергиясы 112

V тарау. 114

Беріктік теориялары 114

§ 1. Негізгі түсініктер 114
§ 2. Негізгі беріктік теориялары 115
§ 3. Жаңа беріктік теориялар туралы түсініктер 125

VI тарау. 131

Созылу және сығылу 131

§ 1. Ішкі әсерлер 131
§ 2. Көрнеулер мен деформациялар 132
§ 3. Созылу (сығылу) кезіндегі білеу өлшемдерін анықтау және беріктігін тексеру . 135
§ 4. Созылу және сығылу кезіндегі сырықтың салмағын есептеу 137
§ 5. Тең кедергілі және сатылы білеулер 139

VII тарау. 141

Ығысу және бұралу 141

§ 1. Таза ығысу 141
§ 2. Ығыса деформацияланған құрылма элементтерін есептеу 144
§ 3. Бұралу кезіндегі көрнеулер мен деформациялар 148
§ 4. Біліктердің бұралуын есептеу 152
§ 5. Бұрандалы серіппелерді есептеу 155
§ 6. Дөңгелек біліктің серпімділік шегінен асқан бұралуы 157
§ 7. Тік бұрышты қималы біліктің бұралуы 159
§ 8. Ашық профильді, жұқа қабырғалы біліктердің бұралуы 162

VIII тарау. 164

Иілу 164

§ 1. Негізгі түсініктер. Ішкі әсерлер 164
§ 2. Иілу кезіндегі тік көрнеулер 187
§ 3. Иілу кезіндегі жанама көрнеулер 188
§ 4. Иілу кезіндегі бас көрнеулер 190
§ 5. Иілу кезінде қималарды таңдау және беріктігін тексеру 191
§ 6 Созылу және сығылу кезіндегі серпімділік модульдері әр түрлі арқалықтардың иілуі 192

§ 7. Арқалықтардың серпімділік шегінен асқан иілу кезіндегі кирату күштерін анықтау 194
§ 8. Иілу кезіндегі орын ауыстыру 195
§ 9. Орын ауыстыруларға көлденең күштердің ықпалы 200
§ 10. Иілу кезіндегі серпімді деформацияның потенциалдық энергиясы 201
§ 11. Мор интегралы 202
§ 12. Мор интегралдарын Верещагин тәсілі бойынша есептеу 204
§ 13. Серпімді табандағы арқалық 217

IX тарау. 218

Күрделі кедергі 218
§ 1. Қиғаш иілу 219
§ 2. Білеудің центрден тыс созылуы және сығылуы 221
§ 3. Иілу мен бұралудың бірлескен әсері 226
X тарау. 231

Қисықтығы үлкен білеулер 231

§ 1. Негізгі түсініктер 231
§ 2. Жазық қисық білеудің таза иілуі кезіндегі кернеулер 232
§ 3. Иілу кезіндегі жалпы жағдайларда пайда болатын жазық қисық білеудің кернеулері 235
§ 4. Қисық білеулердің деформациясы 235

XI тарау. 247

Статикалық анықталмайтын жүйелер 247

§ 1. Статикалық анықталмайтын жүйелердің есептеу тізбегі 247
§ 2. Күш әдісінің канондық теңдеулері 248
§ 3. Көп аралықты арқалықтар және үш момент теңдеуі 252
§ 4. Кесілмейтін арқалықтардың иілуші моменттерін, көлденең күштерін және тірек реакцияларын анықтау 255
§ 5. Жазық көністік және көністік жүйелер 256

XII тарау. 287

Сығылған сырықтардың орнықтылығы 287

§ 1. Негізгі түсініктер 287
§ 2. Эйлер формуласы 289
§ 3. Эйлер формуласын қолдану шегі. Пропорционалдық шектен тыс кризистік күшті анықтау 290
§ 4. Сығылған сырықтарды іс жүзінде есептеу 293
§ 5. Центрден тыс сығылған иілмелі тіректі есептеу 296
§ 6. Бойлық-көлденең иілу 297

XIII тарау. 301

Циклдік өзгеретін кернеулер кезіндегі беріктік 301

§ 1. Негізгі түсініктер 301
§ 2. Төзімділік шегі 303
§ 3. Төзімділік шегіне әсерін тигізетін факторлар 303
§ 4. Айнымалы кернеулер кезіндегі беріктікті есептеу 311

XIV тарау. 314

Материалдардың жылжығыштығы 314

§ 1. Негізгі түсініктер 314
§ 2. Жылжығыштық теориялары 316
§ 3. Жылжығыштықты ескеру кезіндегі есептеу 319
XV тарау. 323

Күштердің динамикалық әсері кезіндегі беріктік 323

§ 1. Негізгі түсініктер 323
§ 2. Үдемелі қозғалыс кезіндегі кернеулерді есептеу 324
§ 3. Бір еркіндік дәрежесі бар жүйелердің тербелістері 328
§ 4. Соққы күшін есептеу 334

XVI тарау. 340

Материалы Гук заңына бағынбайтын арқалықтардың иілуі 340

§ 1. Серпімді-созылымды және сызықты емес серпімді материалдан жасалған арқалықтардың иілу теориясының негізгі заңдары 340
§ 2. Серпімді-созылымды арқалықтың иілген өсінің ығысу деформациясынсыз дифференциалдық теңдеуі 341
§ 3 Ильюшиннің серпімді шешімдер әдісі мен негізгі теңдеуді интегралдау нобайы . . . 343
§ 4. Серпімді-созылымды және сырықты емес материалдан жасалған, созылу мен сығылу кезінде бірдей жұмыс істейтін арқалықтар иілуінің кейбір есептері 347
§ 5. Серпімді-созылымды материалдан жасалған, созылу мен сығылу кезінде бірдей жұмыс істейтін арқалықтар иілуінің кейбір есептері 353
§ 6. Арқалықтың иілу кезіндегі геометриялық және физикалық сызықтық еместігін ескеру 355
Пайдаланылған әдебиеттер 360