

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН**

**Казахский национальный технический университет
имени К.И. Сатпаева**

КОСБОЛОВ С. Б.

**АППРОКСИМАЦИОННЫЙ СИНТЕЗ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МНОГОЗВЕННЫХ
РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ**

Алматы, 2010

УДК 621.01
ББК 84 Каз 7-4
К 22

Рекомендовано ученым советом Казахского национального технического университета имени К.И. Сатпаева

Рецензенты: д-р техн. наук, проректор по научной работе Каспийского общественного университета Е.С. Темирбеков; д-р техн. наук, чл.-корр. НИА РК А.А. Джомартов, д-р техн. наук, заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» Казахского национального технического университета имени К.И. Сатпаева С.М. Ибраев.

Косболов С.Б.
К 22 Аппроксимационный синтез пространственных многозвенных рычажных механизмов. – Алматы: КазНТУ имени К.И. Сатпаева, 2010. -197 с.

ISBN 978-964-56-23-2

В монографии изложены разработанные автором методы структурно-кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев, а так же рассмотрены задачи синтеза механизма по перемещению тела в пространстве. В теоретическом плане предлагается новый подход к проектированию пространственных механизмов, согласно которому процесс проектирования основывается на кинематическом синтезе четырехзвенной исходной кинематической цепи и присоединяемых кинематических цепей или двухэлементных звеньев.

Монография предназначена для инженеров и исследователей в машиностроении, а так же преподавателям, студентам, магистрантам и докторантам машиностроительных специальностей.

Библиогр. 142 наим.

УДК 621.01
ББК 84 Каз 7-4

ISBN 978-964-56-23-2

© Косболов СБ., 2010

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1 Кинематический синтез исходных кинематических цепей со сферическими парами	14
1.1 Формирование структурных схем пространственных рычажных механизмов.	14
1.2 Синтез четырехзвенной исходной кинематической цепи со сферическими парами для пространственных механизмов	23
1.3 Синтез модификации исходных кинематических цепей со сферическими парами	30
1.4 Синтез исходной кинематической цепи со сферическими и сферическими с пальцем парами	39
1.5 Синтез модификации исходных кинематических цепей со сферическими и сферическими с пальцем парами	48
1.6 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной и сферическими парами и ее модификации	57
1.7 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, вращательной и сферической парами	65
1.8 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, вращательной и вращательной парами	73
1.9 Синтез двухэлементного звена со сферической и вращательной кинематическими парами	81
1.10 Синтез двухэлементного звена с двумя вращательными кинематическими парами	83
2 Кинематический синтез исходных кинематических цепей с вращательными, сферическими и цилиндрическими кинематическими парами	87
2.1 О существовании решения задачи синтеза исходной кинематической цепи со сферическими кинематическими парами	87
2.2 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, плоскостной и сферической кинематическими парами	92
2.3 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, цилиндрической и сферической кинематическими парами	103
2.4 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, вращательной и цилиндрической кинематическими парами	110
2.5 Синтез пространственных рычажных передаточных механизмов с вращательной, двумя сферическими и поступательной кинематическими парами	112
2.6 Синтез пространственных рычажных передаточных механизмов с вращательной, цилиндрической, сферической и поступательной кинематическими парами	115
2.7 Синтез двухэлементного звена со сферической и цилиндрической кинематическими парами	118

2.8 Синтез двухэлементного звена с вращательной и цилиндрической кинематическими парами	120
2.9 Синтез двухэлементного звена с двумя цилиндрическими кинематическими парами	122
3 Структурно-кинематический синтез пространственных рычажных механизмов	126
3.1 Структурный синтез пространственных рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей	126
3.2 Общий метод синтеза пространственных рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей	132
3.3 Структурно-кинематический синтез перемещающих пространственных рычажных механизмов на основе исходной кинематической цепи и ее модификаций	135
3.4 Структурно-кинематический синтез направляющих пространственных рычажных механизмов на основе исходной кинематической цепи и ее модификаций	139
3.5 Структурно-кинематический синтез передаточных пространственных рычажных механизмов на основе исходной кинематической цепи и ее модификаций	143
4 Примеры кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов	147
4.1 Пример синтеза перемещающего шестизвенного механизма	147
4.2 Кинематический синтез пространственных перемещающих грузоподъемных механизмов	156
4.3 Кинематический синтез пространственных направляющих механизмов	161
4.3.1 Кинематический синтез станка – качалки для добычи нефти	161
4.3.2 Кинематический синтез направляющего пространственного рычажного механизма с четырьмя выстоями	163
4.4 Кинематический синтез пространственных передаточных механизмов	171
4.4.1 Синтез передаточных четырехзвенных сферических механизмов	171
4.4.2 Кинематический синтез пространственного четырехзвенного передаточного механизма на основе исходных кинематических цепей	175
4.4.3 Кинематический синтез пространственного передаточного механизма с тремя выстоями на основе исходной кинематической цепи	183
Список использованных источников	188

ВВЕДЕНИЕ

С фундаментальными исследованиями выдающего математик и механик П. Л. Чебышева и Л. Бурместера связаны возникновение общей постановки задачи приближенного синтеза шарнирных механизмов и формирование его методологических основ. Впервые сформулировал задачу аналитического синтеза механизмов в виде задачи приближения функции выдающийся математик и механик П.Л. Чебышев [1–9]. П.Л. Чебышев впервые сформулировал задачу аналитического синтеза механизмов, разработал метод нахождения их параметров кинематической схемы, установил необходимые и достаточные условия наилучшего приближения. Используемый П.Л. Чебышевым метод наилучшего приближения при решении задач синтеза механизмов применяется для обеспечения равномерного приближения аппроксимирующей кривой к заданной кривой. Но при этом число заданных узлов интерполирования должно быть на единицу больше, чем число вычисляемых параметров кинематической схемы синтезированного механизма.

Однако у исследователей метод наилучшего приближения для синтеза механизмов получил ограниченное применение, так как отклонение, используемое в задачах синтеза механизмов, должно представляться в виде полиномов по Чебышевской системе функций. В большинстве случаев составление функции отклонения по Чебышеву не позволяет описать взаимосвязь относительных перемещений звеньев в рычажных механизмах.

Синтез механизмов по Чебышеву получил дальнейшее развитие в работах З.Ш. Блоха [10–11], И.И. Артоболевского [12 – 17], Н.И. Левитского [18 – 20], С.А. Черкудинова [21 – 23], Г.Г. Баранова [24], М.В. Семенова [25], Я.Л. Геронимуса [26] и других авторов.

Дальнейшее усилия по развитию идеи Чебышева были направлены на исследования по отысканию наилучшего приближения через интерполяционный синтеза механизмов в виде аналитического и графического способов. Аналитические процедуры синтеза механизмов, основанные на векторном методе составления уравнения замкнутости кинематической цепи, были предложены Е. П. Новодворским [27] и В.А. Зиновьевым [28, 29], а графическое решение аналитическим уточнением параметров – в работе Б. И. Степанова [30].

Созданную теоретической базы в области структурного, кинематического и динамического анализа, а также структурно – кинематического синтеза плоских рычажных механизмов, основанную на выше указанных работах, дополнили работы Л.В. Ассура [31–32], С. Н. Кожевникова [33], В.И. Доронина [34–37], Ю. Л. Саркисяна [38], Э. Е. Пейсаха [39] и других. Эти исследования проводились только для механизмов II, III и изредка IV классов по классификации И.И. Артоболевского. Этим можно объяснить тот факт, что из огромного разнообразия механизмов в промышленности в основном применяются плоские рычажные механизмы II и III классов, хотя МВК, содержащие в своем составе

группы Ассура IV и более высоких классов, обладают широкими функциональными возможностями.

История возникновения и развития теории пространственных механизмов охватывает более столетия. В настоящее время число публикаций в этой области весьма велико. На основе исторического обзора и рассмотрения современной литературы авторским коллективом Ф.М. Диментбергом, Ю.Л. Саркисяном и М.К. Усковым сделан анализ современного состояния теории пространственных механизмов с низшими парами, включающий вопросы структуры, кинематики, кинетостатики, динамики и синтеза, а также применения теории пространственных механизмов для описания некоторых природных процессов [40].

Здесь приводим лишь обзор основных работ в области структурного, кинематического, динамического анализа и синтеза пространственных механизмов с целью показать современные направления развития теории; анализа и синтеза пространственных механизмов.

Методы кинематического анализа пространственных рычажных механизмов по приемам определения кинематических параметров разделяются на три вида: графический, графо-аналитический и аналитический. По мере становления науки теории механизмов и машин существенно менялись и содержание методов исследования движений звеньев механизмов.

Подробный анализ исследований по кинематическому анализу пространственных механизмов с использованием всевозможных аналитических методов описан в монографии П.А. Лебедева, выявлены их достоинства и недостатки, подразделены все методы на алгебраические и геометрические [41].

Задачи синтеза механизмов в основном развивались в двух направлениях: алгебраические методы аппроксимационного синтеза рычажных механизмов и методы синтеза рычажных механизмов на основе аппроксимационной кинематической геометрии. Развитие двух этих направлений синтеза механизмов оказало решающее влияние на формирование методов аппроксимационного синтеза рычажных механизмов, основы которой в наиболее полной форме изложены в монографии Ю.Л. Саркисяна [38].

Геометрические преобразования, связанные с кинематической инверсией пространственных механизмов, были разработаны и применены к задачам синтеза по положениям в работах К.С. Иванова, в которых разрабатывается метод синтеза на основе обращения движения. В качестве взвешенной разности принимается функция отклонения воспроизводимой кривой от заданной, получаемая после подстановки координат воспроизводящей точки механизма в выражение за данной функции взамен ее текущих координат. Причем координаты воспроизводящей точки механизма выражаются через его искомые параметры с помощью обращения движения механизма [42–48].

Теория синтеза пространственных механизмов постоянно развивается и совершенствуется. Предлагаются новые методы синтеза, решаются новые

задачи, отражающие требования передовой современной практики конструирования машин и механизмов.

В связи с появлением современных высокоскоростных ЭВМ созданы оптимизационные методы синтеза механизмов, которые рассмотрены в работах Р.И. Ализаде, И.Г. Новрузбекова, Ф. Фрейденштейна, Дж. Сандора, Э.И. Пейсаха, Ю.Л. Саркисяна и других авторов.

Преимущества оптимизационных методов синтеза механизмов проявляются особенно в тех случаях, когда "классические" методы кинематического синтеза, основанные на кинематической геометрии или различных способах аппроксимации, неприменимы или малоэффективны. Успех поиска оптимального механизма во многом зависит от выбора исходного приближения, определяемого классическими методами, в то время как механизм, спроектированный классическими методами, часто требует оптимизации с учетом дополнительных условия синтеза.

В настоящее время разработаны основы анализа и синтеза ПМВК, включающие аналитические методы структурного, кинематического, кинетостатического и динамического анализа, а также структурно-кинематического синтеза. Структурно-кинематический синтез ПМВК проводится на основе кинематической инверсии, представляющей собой метод группового покоординатного спуска, т.е. метод нулевого порядка.

Для повышения скорости сходимости и точности вычисления необходимы градиентные методы первого и второго порядка.

Использование МВК в манипуляционных устройствах, по сравнению с существующими их антропоморфными конструкциями, повышает точность позиционирования и быстродействие вследствие большой жесткости конструкции, увеличивает грузоподъемность за счет распределения сил по контурным звеньям. Кроме того, в МВК имеется возможность реализации сложных программных траекторий одного или нескольких рабочих органов, что значительно упрощает системы управления манипуляционными роботами, созданными на базе МВК.

Фундаментальные исследования МВК с точки зрения единообразия их структурной классификации и методов исследования и проектирования изложены в монографии У.А. Джолдасбекова [49]. На основе метода развития изменяемых замкнутых контуров получены разновидности одно- и многоконтурных групп Ассур высоких классов. Выведены структурные формулы, определяющие соотношения между классом, порядком групп Ассур и количеством звеньев, кинематических пар, поводков и внешних шарниров бесповодковых контурных звеньев.

В синтетической форме пространственная кинематическая геометрия конечно-удаленных положений разработана А. Шенфлисом в работе [50], где дано систематическое изложение проективных основ теории особых точек твердого тела с несколькими положениями на одной сфере, плоскости, окружности и прямой. Здесь впервые сформулированы теоремы о геометрических местах точек твердого тела, имеющих семь положений на сфере,

шесть положений на плоскости, четыре положения на окружности и три положения на прямой.

Далее в области пространственной кинематической геометрии конечно-удаленных положений сделана попытка В. В. Добровольским [51, 52], который при решении задач сферической кинематической геометрии пользуется методом стереографической проекции. В. В. Добровольским теория Бурместера была перенесена на сферу и установлено соответствие между результатами сферической геометрии и плоской. При этом получен ряд новых результатов относительно кривых и точек Бурместера для конечных и бесконечно малых сферических перемещений твердого тела.

Идеи Бурместера получили дальнейшее развитие в работах Р. Бейера [53], К. Хайна [54], В. Лихтенхельда [55], Б. Росса [56, 57] и других авторов. В работе С. А. Черкудинова [58] изложено аналитическое решение задачи Бурместера и дальнейшее развитиеполнило в работе О. Г. Озола [59], в которой изложено аналитическое решение задачи Бурместера с использованием формул П.О. Сомова.

В работе Э.Е. Пейсаха [60], выявлены все принципиально возможные структурные схемы одноподвижных одноконтурных пространственных рычажных механизмов с вращательными, поступательными, цилиндрическими и сферическими парами. Дана классификация указанных механизмов по различным структурным признакам.

В статье Дж. Рихтера [61] подробно рассмотрена задача оптимизации кинематических показателей открытой шарнирно – стержневой структуры с целью получения заданных траекторий движения выходного звена, например робота – манипулятора. Изложены результаты аналитического исследования базовых структурных вариантов с тремя и четырьмя подвижными стержневыми звеньями. Изложены геометрические параметры и кинематические характеристики многозвенного механизма разработки и создания горнорудных машин, в частности, для добычи полезных ископаемых на карьерах и рудниках открытого профиля.

В работе Дж. М. Маккарти [62] варианты открытых и замкнутых кинематических цепей рассмотрены в задаче расчета движения управляемого звена, в частности, для синтеза средств робототехники. Проведен анализ плоских RR механизмов с шарнирными связями. Результаты расчета обобщаются для пространственных CC механизмов с цилиндрическими связями, допускающими совместный поворот и сдвиг вдоль осей вращения. Сравниваются плоская и трехмерная версии для идентификации эквивалентного уравнения. По результатам расчета сделаны выводы о возможности обобщения для задач построения пространственных механизмов.

В работе К.Н. Модлера [63] сопоставляются варианты геометрического и аналитического расчета шарнирно – стержневых передаточных механизмов и специализированных исполнительных механизмов, например, для проектирования роботов – манипуляторов. Сравниваются некоторые подходы в задачах практической оценки показателей кинематической подвижности и

технической пригодности шарнирно – стержневых механизмов плоской и пространственной конфигурации.

В работе В.А. Глазунова [64] на основе общей теории структуры пространственных механизмов и теории винтов рассматриваются принципы построения и кинематического анализа пространственных механизмов с параллельной структурой.

С. Иннокенти в своих работах [65, 66] рассматривает механизмы пространственной шарнирно – стержневой структуры, в частности, типа платформы Стюарта, для управления трехмерным движением твердого тела в принятом рабочем пространстве с помощью параллельного набора стержней. На неподвижной плите посредством сферических шарниров укреплены пять стержней для пространственного регулирования перемещений выходной платформы, например, концевой звена исполнительного механизма робота – манипулятора параллельной структуры. В примере расчета составлено инвариантное полиномиальное уравнение двадцатого порядка.

В работе Ф.С. Парка и Б. Равани [67] изложена постановка задачи построения и анализа свойств кривых Безье на криволинейных пространствах в виде римановых множеств. Выявлены показатели формируемости и гибкости кривых Безье в задачах геометрического представления в терминах управляемого многоугольника. Используются полиномы Бернштейна для математического обоснования процедуры построения. Подчеркивается эффективное применение кривых Безье в задачах построения траектории движения и анализа перемещений твердого тела, например, в проблемах робототехники. Особое внимание уделено свойствам специального класса римановых множеств в виде компактных групп Ли. Используется обобщенный алгоритм Де Кастельо для анализа управляемых конфигураций захватного устройства робота – манипулятора.

С. Маврейдис и Б. Росс [68] излагают новый систематический подход в задаче синтеза и изучения геометрических параметров и кинематических свойств механизмов с избыточными связями. Сформулированы методы анализа признаков избыточности внутренних и внешних связей механизмов плоской и пространственной структуры. Рассмотрены вращательные, призматические, цилиндрические, сферические и плоские соединительные узлы кинематических пар. Проведен анализ двух-, трех-, четырех- и пятизвенных структур в качестве частных случаев шестизвенных механизмов, например, робота–манипулятора с вращательными и призматическими соединительными узлами.

В работе К. Вольхарта [69] рассмотрены преимущества манипуляторов с исполнительным шарнирно–стержневым механизмом параллельной структуры, отличительным признаком которых является наличие нескольких замкнутых кинематических цепей, способствующих повышению жесткости, позиционной точности и несущей способности. Показана эффективность использования групп Ассур третьего класса четвертого порядка в анализе 18 конфигураций двухкорпусной системы на четырех опорах.

В статье В.А. Нестерова и Э.Е. Пейсаха [70] описывается компьютерная система LINKAGES, предназначенная для решения самых разнообразных

задач структурного и кинематического анализа плоских и пространственных рычажных механизмов и манипуляторов. В системе LINKAGES воплощена база знаний в виде оригинальных методов и алгоритмов, относящихся к данной предметной области. Эта база знаний содержит шесть разделов: структурный анализ рычажных механизмов, структурный синтез рычажных механизмов, кинематический анализ рычажных механизмов, кинематический синтез рычажных механизмов, кинематика манипуляторов, символьные преобразования в задачах кинематики механизмов, выполняемые с помощью компьютеров.

В работе [71] представлены два варианта пространственных механизмов из двух треугольников. Один механизм имеет три, а другой – шесть степеней свободы. С применением алгебры дуальных кватернионов поставлена прямая кинематическая задача для этих манипуляторов. Приведены примеры ее численного решения.

Б. Джютлер и М.Г. Вагнер [72] излагают основы теории расчета пространственных траекторий посредством их аппроксимации кусочно-рациональными функциями. Предложены алгоритмы расчета поверхности, описываемой движущимся многоугольником. Алгоритмы применимы для решения задач компьютерной анимации и робототехники.

В работе Э.Е. Пейсаха [73] обнаружено свойство кинематической эквивалентности у пространственных рычажных механизмов с вращательными, сферическими и поступательными парами и получены соответствующие аналитические соотношения. Излагается методика, основанная на использовании декомпозиционного подхода, которая позволяет повысить эффективность синтеза механизмов, обладающих свойством кинематической эквивалентности.

В последнее время с появлением высокоскоростных ПЭВМ методы анализа и синтеза плоских и пространственных механизмов проектируется более в автоматизированном виде. Например, в работе [74] разработана программа, основанная на системном подходе к составлению математической и численной моделей сложных плоских механизмов с шарнирными парами. Программа дает конструктору возможность производить быстрый структурный синтез и кинематический анализ механизмов в системе MS Windows.

Определение выходных параметров синтеза из условия минимума целевой функции при выполнении принятых ограничений проводятся оптимизационными методами синтеза механизмов. При большом числе параметров оптимизация всегда производится с применением ЭВМ и сводится к методам поиска комбинаций параметров синтеза. Методы оптимизации можно свести в три группы: случайный поиск, направленный поиск и комбинированный поиск.

Метод случайного поиска, называемый также методом статистических испытаний или методом Монте-Карло, основан на том, что при одном и том же числе испытаний вероятность получения решения, близкого к оптимальному, при случайном поиске больше, чем при последовательном переборе через равные интервалы изменения отдельных параметров. Ряд авторов, особенно в более ранних публикациях, используют метод случайного

поиска. Это работы З. Голинского [75, 76] и Я. Одерфельда [77], Дж. Томаса [78], Эшенбаха и Тесара [79]. Гаррет и Холл [80] описывают библиотеку выходов механизмов со случайными параметрами, хранящуюся на магнитной ленте. Из этой библиотеки выбирается наибольшее число хороших с точки зрения проектировщика конструкции, и в их окрестности строится система случайных механизмов, из которых уже выбирается наилучшая конструкция. В работе Н.Н. Гусейнова и Р.И. Ализаде [81] кинематический синтез механизмов ведется методом Монте-Карло в сочетании с методом сечений, позволяющий определить область сгущения минимальных значений функции цели.

Метод статистических испытаний при синтезе кривошипно-коромыслового механизма проведен в статье Г.А. Андрейченко [82]. В этой работе рассмотрена задача синтеза пространственного четырехзвенного рычажного механизма иглы подшивочной машины по крайним положениям выходного звена, заданному минимальному углу давления и критерию минимального углового ускорения в одном из крайних положений.

Несмотря на то, что современные ЭВМ позволяют сравнивать десятки и сотни тысяч вариантов механизма, все же следует стремиться к уменьшению трудоемкости вычислений с целью удешевления процесса проектирования механизма. Уменьшение трудоемкости вычислений может быть достигнуто путем применения направленного поиска, т.е. такого поиска искомых параметров синтеза, при котором переход от одной комбинации параметров к другой происходит не случайно, а в направлении, соответствующем уменьшению величины целевой функции.

Быстрее можно достигнуть искомого минимума целевой функции, если есть возможность определить частные производные целевой функции по параметрам синтеза и по значениям этих производных находить направления, по которым функция убывает наиболее быстро. К таким методам относятся метод наискорейшего спуска и другие градиентные методы.

В работах Клейна [83], Льюиса и Диснори [84], Хана [85], Хандры-Луки [86], Чжень и Чжань [87] производится аналитическое дифференцирование критериев синтеза. В работе Прасада и Бегси [88] от функции ошибки (кинематического критерия) вычисляются аналитически вторые производные по всем пятнадцатым метрическим параметрам механизма.

В работе Б. Сохони и Е. Хога [89] производные вычисляются от скоростей, ускорений и сил реакций механизма. В.А. Новгородцевым [90] отмечено, алгоритмическое вычисление целевой функции влечет необходимость использования разностных аналогов градиента.

Для методов направленного поиска характерен еще другой подход решения задач минимизации с ограничениями. Это весьма распространенный метод штрафных функций, сводящий задачу условной минимизации к ряду задач безусловной минимизации. Метод штрафных функций применяются в работах Р.И. Ализаде [91], Х.Р. Казыханова [92], Г. Кулафича и Т. Пантелича [93], В. Марианте и К. Уилмерта [94], Э.Е. Пейсаха [95–98], С.С. Пономаренко и В.Г. Прасолова [99], С. Рао и А. Амбекара [100], Фокса и Уилмерта [101],

Шпитцнагеля и Тесара [102]. Кроме методов штрафных функций, условная задача минимизации при синтезе механизмов решалась, методом проекции градиента с коррекцией нарушений ограничений в работе В. Сохони и Е. Хога [103]. Р. Фентон [104] применяет для решения задачи условной минимизации метод скользящего допуска, подробно описанный в работе [105].

Направленный поиск обычно приводит к отысканию локального минимума. Случайный поиск более подходит к отысканию глобального минимума (наименьший минимум), так как при нем просматривается вся область изменения параметров. Однако он дает слишком большой объем вычислений, и поэтому применяют комбинированные методы, при которых случайным поиском просматривают и сравнивают значения целевой функции в отдельных частях области изменения параметров, и затем направленным поиском находят локальные минимумы для тех частей области, где ожидается получение глобального минимума.

В трудах Э.Е. Пейсаха [97] и В.Я. Белецкого разработаны комбинированные методы синтеза рычажных механизмов. Излагается метод синтеза, в котором одна часть параметров вычисляется оптимизационным методом, а другая часть параметров определяется на основе Чебышевского и квадратического приближения.

В настоящее время развитие робототехники поставило ряд новых задач в различных отраслях науки и техники, в том числе и в области машиностроения. Основу рабочих органов роботов и манипуляторов составляют многосвязные пространственные механизмы со многими степенями свободы, позволяющие осуществлять разнообразные движения объектов в пространстве с заданными свойствами. Поэтому разработка теории таких механизмов и методов их аналитического синтеза является актуальной проблемой.

Исполнительные механизмы манипуляционных роботов, построенные на основе незамкнутых кинематических цепей (антропоморфные манипуляторы) обладая универсальностью, простотой кинематической схемы, большим диапазоном зоны обслуживания и мобильностью, имеют ряд существенных недостатков:

1. В силу консольного характера звенья подвержены изгибным деформациям, что ограничивает их грузоподъемность и точность позиционирования.

2. Сложность решения обратной задачи кинематики, что затрудняет управление роботами в реальном масштабе времени и требует сложные дорогостоящие системы управления, оснащенные сервоприводами.

3. Необходимость расположения на подвижных звеньях приводов, масса которых превышает массу объекта манипулирования, приводит к существенному снижению КПД, быстродействия и коэффициента сервиса.

Обширная литература по изучению робототехнических систем, появившаяся за последние годы в отечественной и зарубежной печати свидетельствует о наметившейся тенденции отказа от использования антропоморфных кинематических схем открытого типа.

В этих работах предлагается рассматривать исполнительные механизмы манипуляционных роботов с замкнутыми кинематическими цепями или так называемых манипуляторов с параллельной топологией или параллельных манипуляторов. Такие манипуляторы не обладают выше указанными недостатками.

В последнее время используются широкие функциональные возможности манипуляционных устройств, построенных на основе МВК.

Теоретические исследования и проектно-конструкторские разработки показали, что МВК благодаря своим структурным особенностям, т.е. наличию изменяемых замкнутых контуров, обладают большими кинематическими и динамическими возможностями обеспечения заданных законов движения рабочих органов.

Однако плоские одноподвижные МВК работают в одной плоскости по одной жестко заданной программе. Поэтому эти устройства имели ограниченное применение. Кроме того, из-за практической невозможности изготовления строго параллельных осей вращения шарниров в плоских механизмах высокого класса возникает избыточные связи, что приводит к резкому увеличению сил реакций и трения в шарнирах. Увеличение сил реакций в шарнирах, в свою очередь, приводит к возрастанию массы конструкции и снижению его КПД.

С целью устранения отмеченных недостатков плоских МВК в последнее время более широкое применение находят пространственные механизмы и манипуляционные устройства со многими степенями свободы.

1 Кинематический синтез исходных кинематических цепей со сферическими парами

В данной главе изложены постановка и решение задачи синтеза исходных кинематических цепей (ИКЦ) со сферическими кинематическими парами, которые могут быть использованы как модули структурно-кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев.

Метод решения задачи синтеза ИКЦ со сферическими парами основан на введении двух подвижных тел, неизменно связанных с входным и выходным звеньями и в отыскании круговых точек в относительном движении этих тел [38].

Такой подход к синтезу пространственных рычажных механизмов обеспечивает алгоритмируемость всех операций структурно-кинематического синтеза механизмов, что очень важно для автоматизации проектирования механизмов.

1.1 Формирование структурных схем пространственных рычажных механизмов

На первом этапе синтеза – моделировании – схематическая схема механизма служит основным источником задания структуры. Для рассматриваемого метода моделирования конструктор, прежде всего, выбирает ориентацию всех систем координат. Задаются неподвижная система координат, в большинстве случаев, связанная со стойкой, и системы координат, связанные со звеньями. От удачного задания всех систем координат зависит степень наглядности и быстроты анализа результатов моделирования исходных кинематических цепей (ИКЦ). Если с каждым звеном связать системы координат, то относительная ориентация звеньев определяется переходными матрицами – матрицами перехода от одной системы координат к другой.

Ниже приведены два способа задания систем координат, применяемых для замкнутых и открытых кинематических цепей. В первом случае с каждой кинематической парой связаны две системы координат, во втором случае – одна.

Первый способ (рисунок 1.1). Дано; $r = O_i O_j = \{a_i, b_i, c_i\}$ – вектор смещения центра i -й системы ($X_i Y_i Z_i$ – правая система координат) в j -й системе координат ($X_j Y_j Z_j$ – правая система координат). Углы Эйлера – углы вращения i -й системы относительно j -й системы: ψ – угол прецессии, θ – угол нутации, φ – угол чистого вращения.

Согласно рисунку 1.1 $O_i N$ – линия пересечения (линия узлов) плоскостей $X'_i O_j Y'_i$ и $X_j O_j Y_j$, где X'_i, Y'_i, Z'_i параллельны осям X_j, Y_j, Z_j . Положительное направление $O_i N$ выбирают из условия, чтобы поворот от оси $O_i Z'_i$ к оси $O_i Z_j$ происходил против часовой стрелки.

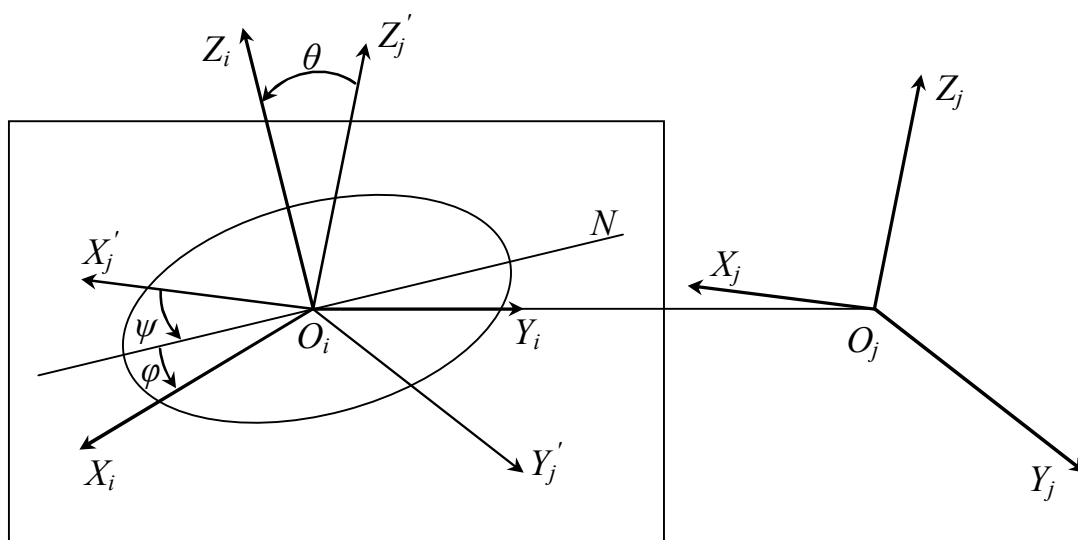


Рисунок 1.1

От положительного направления $O_i N$ отсчитывают углы ψ и φ (ψ – угол между $O_j X_j'$ и $O_i N$, φ – угол между $O_i N$ и $O_i X_i$). Углы ψ и φ отсчитывают против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления осей $O_i Z_j$ и $O_i Z_i$ соответственно. Для произвольной точки связь между ее координатами в i -й системе (x_i, y_i, z_i) и j -й системе запишем следующим образом

$$[x_i, y_i, z_i, 1]' = A_{ij} [x_j, y_j, z_j, 1] \quad (1.1)$$

Это означает, что каждая точка механизма будет задаваться однородными координатами, т. е. ее положение определяется относительно некоторой четырехмерной системы координат числами t, x, y, z . Для упрощения вычислений принимаем, что $t_i = t_j = 1$.

При исследовании механизмов полагаем, что форма звена остается неизменной, т. е. относительное расположение систем координат звена постоянно. Переменным же является относительное расположение звеньев кинематической пары. Исходя из этого, можно составить матрицы перехода от одной системы координат к другой (обе системы заданы на одном звене), которые являются постоянными и характеризуют «форму» звена. С каждой же кинематической парой оказалось целесообразным связать две системы координат, отнесенные к звеньям, образующим эту пару. Проведенные исследования показали, что эти системы следует задавать следующим образом. Для вращательной кинематической пары начала координат обеих систем совпадают, оси Z имеют одно и то же положительное вдоль оси вращения направление (рисунок 1.2, а).

Для поступательной кинематической пары оси Z имеют одно и то же положительное направление, параллельны направлению относительного

движения. Оси X параллельны и имеют одно и то же положительное направление (рисунок 1.2, б).

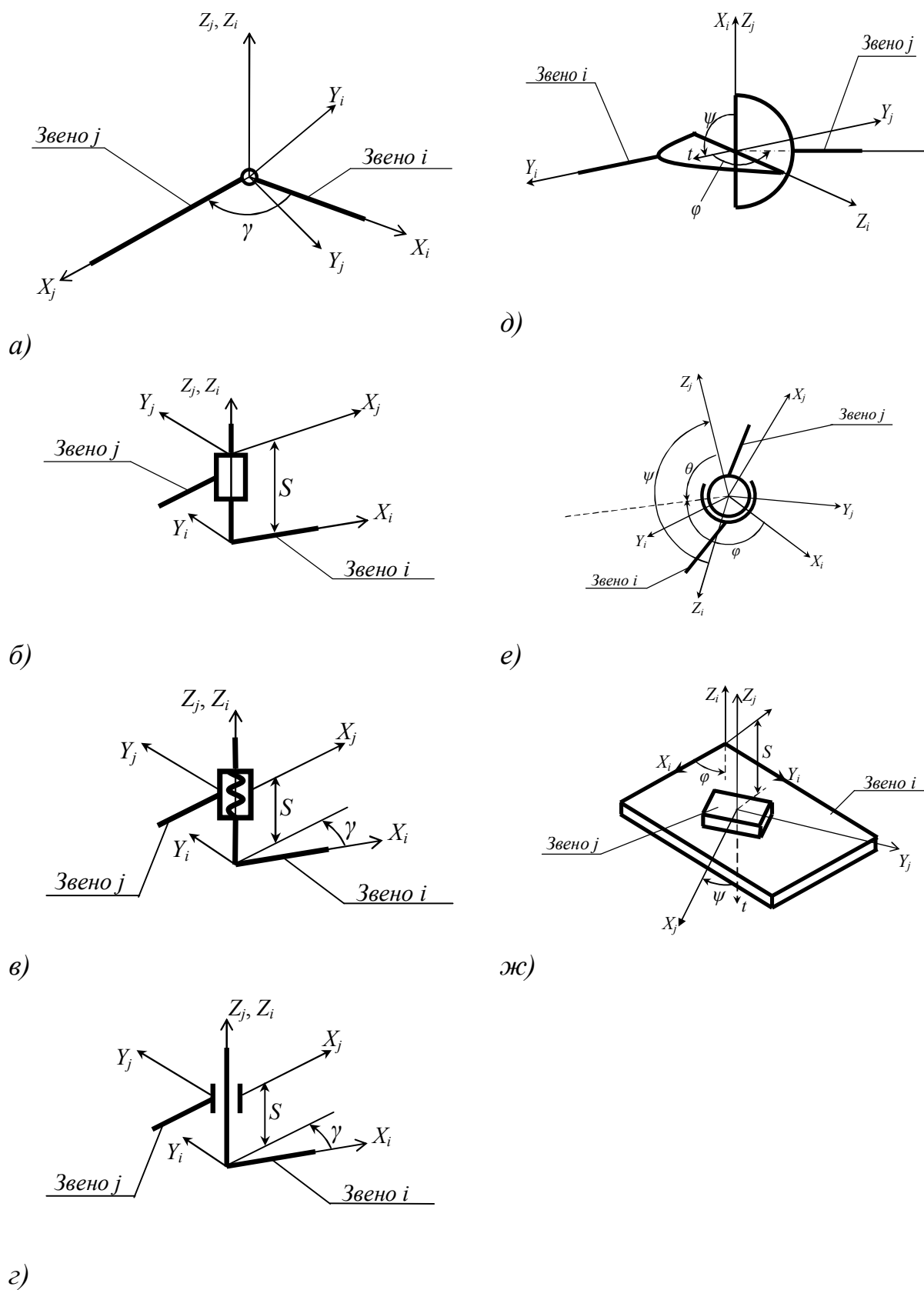


Рисунок 1.2

Для винтовой кинематической пары оси Z коллинеарны, имеют одно и то же вдоль оси винтового соединения положительное направление (рисунок 1.2, в).

Для цилиндрической кинематической пары оси Z коллинеарны, имеют одно и то же положительное направление и направлены вдоль оси цилиндрического соединения (рисунок 1.2, г). Для шарнирной кинематической пары направления осей Z совпадают с направлениями осей пальцев крестовины универсального шарнирного соединения. Центры систем координат совпадают с центром крестовины (рисунок 1.2, д). Для сферической кинематической пары центры систем координат совпадают с центром сферической пары (рисунок 1.2, е). Для плоскостной кинематической пары плоскости $X—Y$ компланарны, оси Z параллельны и направлены к одной и той же стороне взаимосвязанных поверхностей (рисунок 1.2, ж).

Второй способ. Рассматривается механизм, содержащий кинематические пары 5-го класса. Каждое звено нумеруется, начиная со стойки, имеющей номер один, ведущего звена, имеющего номер два и т. д. вдоль кинематической цепи.

Кинематические пары также пронумерованы, причем пара i связывает звено i со звеном $i+1$. Каждой кинематической паре соответствует прямоугольная система координат, ось Z_i которая направлена вдоль оси пары, ось X_i вдоль общего перпендикуляра к осям Z_{i-1} и Z_i ось Y_i дополняет правую систему координат $O_i X_i Y_i Z_i$ (рисунок 1.3).

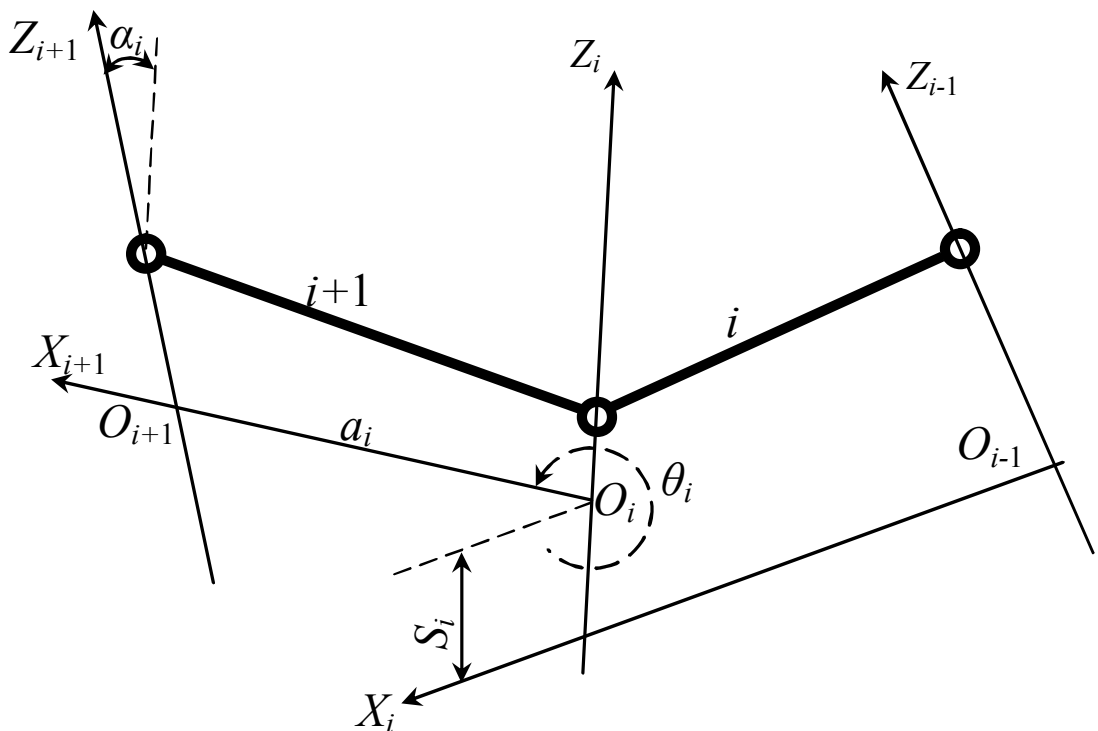


Рисунок 1.3

Размеры и конфигурация механизма определяются следующими параметрами, относящимися к каждой системе координат a_i – расстояние от Z_i до Z_{i+1} ; α_i – угол между осями Z_i и Z_{i+1} , измеряемый против часовой стрелки

относительно положительного направления оси X_{i+1} ; θ_i – угол между осями X_i и X_{i+1} , измеряемый против часовой стрелки относительно положительного направления оси X_{i+1} ; S_i – расстояние от X_i до X_{i+1} вдоль оси Z_i .

ПЕРЕХОДНЫЕ МАТРИЦЫ

Матрицы для звена и кинематической пары. Матрица перехода T_{ij} от i -й к j -й системе координат по первому способу имеет вид:

$$T_{i,j} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_i & \cos \psi \cos \varphi - & -\cos \psi \sin \varphi - & \sin \theta \sin \psi \\ b_i & -\cos \theta \sin \psi \sin \varphi & -\cos \theta \sin \psi \cos \varphi & \\ c_i & \sin \psi \cos \varphi + & \cos \theta \cos \psi \cos \varphi - & -\sin \theta \cos \psi \\ & +\cos \theta \cos \psi \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi & \\ & \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{Bmatrix}. \quad (1.2)$$

Вычисление этих матриц осуществляется согласно следующего алгоритма.

Пусть заданы (рисунок 1.4) для i -го звена две системы координат: i -я и j -я, каждая из которых определена тремя точками P_1^i, P_2^i, P_3^i и P_1^j, P_2^j, P_3^j .

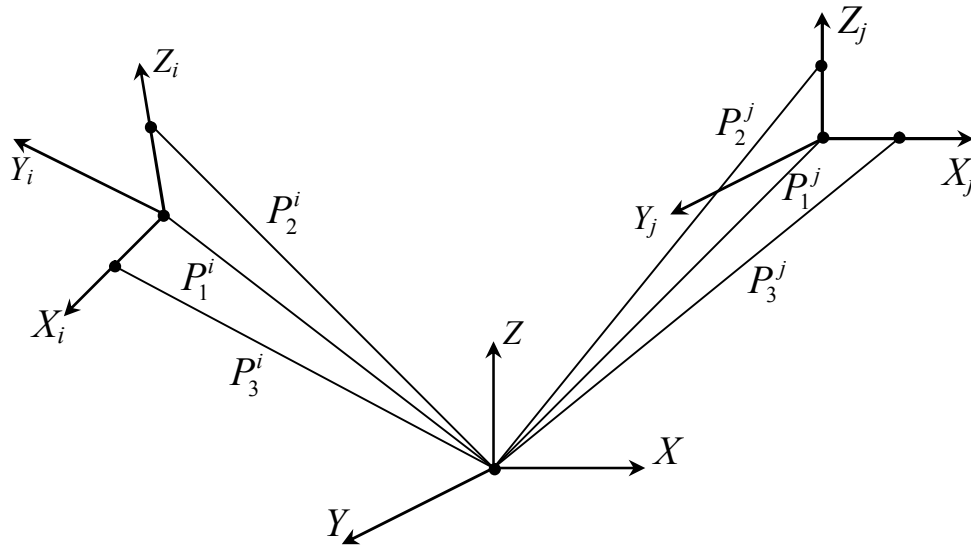


Рисунок 1.4

Точка P_1 определяет центр координат, точка P_2 находится на положительном направлении оси Z , точка P_3 – на положительном направлении оси X . Координаты этих точек в системе координат, связанной со стойкой: $x_{l,k}^s, y_{l,k}^s, z_{l,k}^s$, где $k = 1, 2, 3$ – номер точки; $s = i, j$ – номер системы координат.

Координаты X, Y, Z произвольной точки P в абсолютной системе координат связаны с координатами X_l^i, Y_l^i, Z_l^i этой точки в i -й системе координат звена l соотношением:

$$[X, Y, Z]' = T_l^i [X_l^i, Y_l^i, Z_l^i], \quad (1.3)$$

где T_l^i – матрица преобразования (перехода). Аналогичным образом для j -й системы координат и той же точки P

$$[X, Y, Z]' = T_l^j [X_l^j, Y_l^j, Z_l^j]. \quad (1.4)$$

Из выражений (1.3) и (1.4) имеем

$$[X, Y, Z]' = T_l^j [X_l^j, Y_l^j, Z_l^j]. \quad (1.5)$$

$$\text{т. е. } [X_l^i, Y_l^i, Z_l^i]' = (T_l^i)^{-1} T_l^j [X_l^j, Y_l^j, Z_l^j], \quad (1.6)$$

Из выражения (2.5) видно, что матрица

$$T_{i,j} = T_l^{ij} = (T_l^i)^{-1} T_l^j,$$

является матрицей перехода от j -й системы звена к его i -й системе координат. Матрица T_l^i имеет вид

$$T_l^i = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{l,1}^i & \frac{(x_{l,3}^i - x_{l,1}^i)}{a} & \frac{g}{b} & \frac{(x_{l,2}^i - x_{l,1}^i)}{c} \\ y_{l,1}^i & \frac{(y_{l,3}^i - y_{l,1}^i)}{a} & \frac{r}{b} & \frac{(y_{l,2}^i - y_{l,1}^i)}{c} \\ z_{l,1}^i & \frac{(z_{l,3}^i - z_{l,1}^i)}{a} & \frac{d}{b} & \frac{(z_{l,2}^i - z_{l,1}^i)}{c} \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

где

$$b = (d^2 + g^2 + r^2)^{1/2};$$

$$d = (x_{l,2}^i - x_{l,1}^i)(y_{l,3}^i - y_{l,1}^i) - (y_{l,2}^i - y_{l,1}^i)(x_{l,3}^i - x_{l,1}^i);$$

$$g = (y_{l,2}^i - y_{l,1}^i)(z_{l,3}^i - z_{l,1}^i) - (z_{l,2}^i - z_{l,1}^i)(y_{l,3}^i - y_{l,1}^i);$$

$$r = (z_{l,2}^i - z_{l,1}^i)(x_{l,3}^i - x_{l,1}^i) - (x_{l,2}^i - x_{l,1}^i)(z_{l,3}^i - z_{l,1}^i);$$

$$a = [(x_{l,3}^i - x_{l,1}^i)^2 + (y_{l,3}^i - y_{l,1}^i)^2 + (z_{l,3}^i - z_{l,1}^i)^2]^{1/2};$$

$$c = \left[(x_{l,2}^i - x_{l,1}^i)^2 + (y_{l,2}^i - y_{l,1}^i)^2 + (z_{l,2}^i - z_{l,1}^i)^2 \right]^{1/2}.$$

Матрица T_l^j получается из (1.7) в результате замены индекса i на j .

Переходная матрица (1.2) кинематической пары $A_{i,j} = T_{i,j}$ есть матрица перехода от системы координат одного i -го звена к системе координат второго j -го звена.

Вид $A_{i,j}$ для соответствующих кинематических пар (с учетом расположения систем координат и параметров, приведенных на рисунок 1.2, а – ж) следующий:

для сферической

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi \cos \theta + & -\sin \varphi \cos \psi \cos \theta + & \sin \psi \cos \theta & 0 \\ + \sin \varphi \sin \theta & + \cos \varphi \sin \theta & & \\ -\sin \varphi \cos \theta + & \sin \varphi \sin \theta \cos \psi - & \sin \psi \sin \theta & 0 \\ + \cos \varphi \cos \psi \sin \theta & -\cos \varphi \cos \theta & & \\ \cos \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi & -\cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (1.8)$$

для шарнира Гука

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \\ 0 & -\sin \psi & -\cos \psi & 0 \end{pmatrix}$$

для плоскостной

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s \cos \varphi & \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) & 0 \\ s \sin \varphi & \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

для цилиндрической

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ s & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

для винтовой

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ s & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\gamma = 2\pi s / L$; L — шаг винта:

для вращательной

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

для поступательной

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Обозначения параметров в переходных матрицах взяты согласно рисунок 1.2, a – ж.

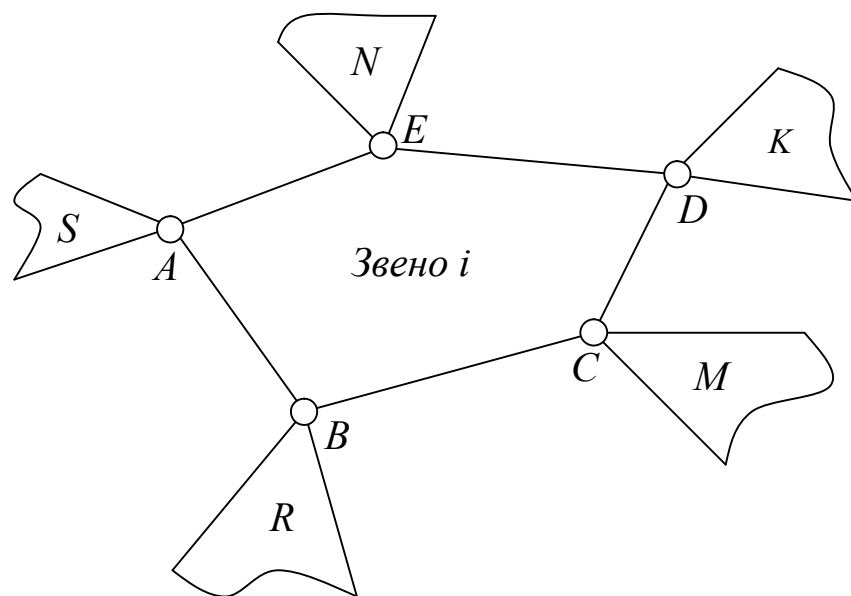


Рисунок 1.5

Матрицы перехода от одной (в данном случае неподвижной) системы координат ко всем остальным, можно формировать матрицы перехода между любыми системами координат, применяя соотношение (1.6). Это означает, что если системы координат отнесены к одной и той же кинематической паре, получается матрица $T_{i,j}$ – матрица кинематической пары.

Если системы координат отнесены к разным кинематическим парам B и A одного и того же i -го звена, то получим одну из матриц звена $T_{B,A}$ или $T_{A,B}$. Таких матриц для звена может быть несколько. Например, рисунок 2.5 для 1-го звена можно сформировать матрицы перехода $A_{(B,A)/i}$, $A_{(C,E)/i}$, и т. д. Максимальное число таких матриц равно C_n^2 , (где n – число кинематических пар, в образовании которых участвует рассматриваемое звено. В данном случае это $C_5^2 = 10$ матриц. Оказывается, что на все такие матрицы в дальнейших исследованиях механизма принимают участие. Необходимо вычислить только матрицы, определяющие кинематические цепи в которые входит это звено

Можно сформировать матрицы перехода и между любыми системами координат произвольных звеньев, даже не образующих кинематическую пару. На рис. 9 имеем последовательность звеньев $i, i + 1, i + 2, i + 3$, на которых определены системы координат. Пусть вычислены матрицы перехода $A_{B/i}$ и $A_{E/i+3}$. Тогда матрица $A_{i/i+3} = A_{B/i}^{-1} A_{E/i+3}$ определяет переход от системы координат i -го звена к системе координат $(i + 3)$ -го звена. Эта же матрица, как будет показано ниже, является произведением матриц последовательного перехода от одного звена к другому через кинематическую пару и от одной кинематической пары к другой в пределах одного звена.

Таким образом,

$$A_{i,i+3} = T_i T_{i,i+1} T_{i+1} T_{i+1,i+2} T_{i+2} T_{i+2,i+3}.$$

Преобразование координат, по второму способу, при переходе от системы $O_i X_i Y_i Z_i$, связанной со звеном i , к системе $O_{i+1}, X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1}$, связанной со звеном $i + 1$, определяется матрицей

$$A_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_i \cos \theta_i & \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i \\ a_i \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_i \right) & \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i \\ s_i & 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Здесь в отличие от способа 1 матрица $A_{i,i+1} = T_i T_{i,i+1}$, где T_i – матрица i -го звена; $T_{i,i+1}$ – матрица кинематической пары, образованной i -м и $(i + 1)$ -м звеньями.

Приведенные способы переходных матриц в дальнейшем используем при синтезе ИКЦ с различными кинематическими парами, необходимые при проектировании пространственных рычажных перемещающих механизмов.

1.2 Синтез четырехзвенных исходных кинематических цепей со сферическими парами для пространственных механизмов

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел Q_1 и Q_2 :

$$Q_1(\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1), \quad Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2), \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.9)$$

где $\theta_i^j, \psi_i^j, \varphi_i^j$ – эйлеровы углы относительно неподвижной системы координат $OXYZ$,

X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di} – координаты точки D_i тела Q_2 .

Требуется найти в неподвижной системе координат такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R (рисунок 1.6) [106].

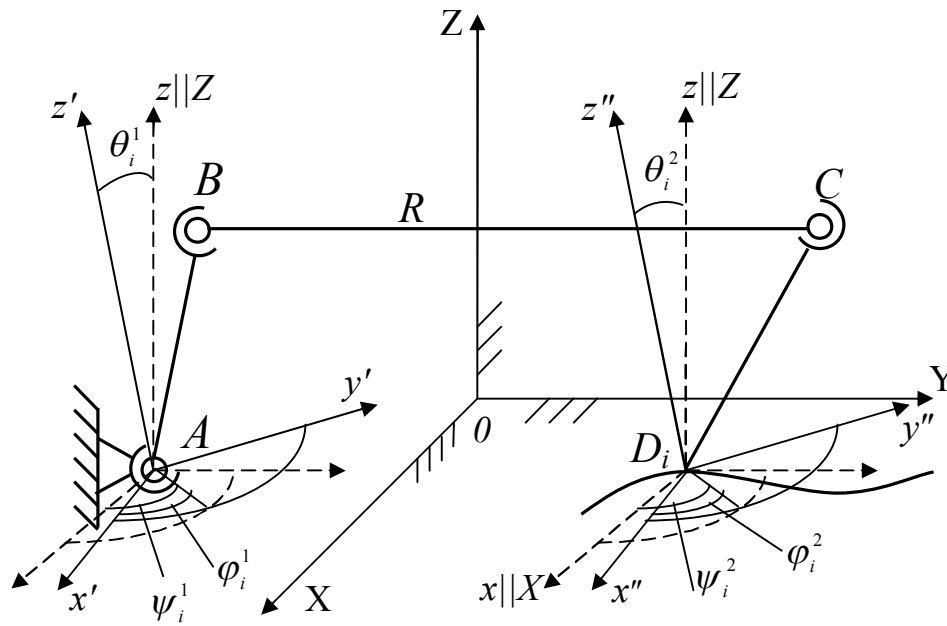


Рисунок 1.6

Решение задачи: Введем взвешенную разность для i -го положения тел в виде:

$$\Delta_{qi} = \left| \overline{B_i C_i} \right|^2 - R^2 = (X_{Ci} - X_{Bi})^2 + (Y_{Ci} - Y_{Bi})^2 + (Z_{Ci} - Z_{Bi})^2 - R^2 \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.10)$$

где

$$\begin{bmatrix} X_{B_i} \\ Y_{B_i} \\ Z_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & X_A \\ & [T_{10}^i] & Y_A \\ & & Z_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} X_{C_i} \\ Y_{C_i} \\ Z_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & X_{Di} \\ & [T_{20}^i] & Y_{Di} \\ & & Z_{Di} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{jo}^i = \begin{bmatrix} e_{i1}^j & e_{i2}^j & e_{i3}^j \\ m_{i1}^j & m_{i2}^j & m_{i3}^j \\ n_{i1}^j & n_{i2}^j & n_{i3}^j \end{bmatrix}, \quad (j = \overline{1,2}; \quad i = \overline{1,N}) \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} e_{i1}^j = \cos \psi_i^j \cdot \cos \varphi_i^j - \cos \theta_i^j \cdot \sin \psi_i^j \cdot \sin \varphi_i^j \\ m_{i1}^j = \sin \psi_i^j \cdot \cos \varphi_i^j + \cos \theta_i^j \cdot \cos \psi_i^j \cdot \cos \varphi_i^j \\ n_{i1}^j = \sin \theta_i^j \cdot \sin \varphi_i^j \\ e_{i2}^j = -\cos \psi_i^j \cdot \sin \varphi_i^j - \cos \theta_i^j \cdot \sin \psi_i^j \cdot \cos \varphi_i^j \\ m_{i2}^j = -\sin \psi_i^j \cdot \sin \varphi_i^j + \cos \theta_i^j \cdot \cos \psi_i^j \cdot \sin \varphi_i^j \\ n_{i2}^j = \sin \theta_i^j \cdot \cos \varphi_i^j \\ e_{i3}^j = \sin \theta_i^j \cdot \sin \psi_i^j \\ m_{i3}^j = -\sin \theta_i^j \cdot \cos \psi_i^j \\ n_{i3}^j = \cos \varphi_i^j \end{cases} \quad (1.12)$$

Она является функцией десяти параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Группируя эти параметры по четыре с общим параметром R , взвешенную разность представим в трех различных формах:

$$\Delta_{qi}^{(1)} = (\tilde{X}_{A_i} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A)^2 - R^2, \quad (1.13)$$

$$\Delta_{qi}^{(2)} = (\tilde{x}_{B_i} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{B_i} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{B_i} - z_B)^2 - R^2, \quad (1.14)$$

$$\Delta_{qi}^{(3)} = (\tilde{x}_{C_i} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{C_i} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{C_i} - z_C)^2 - R^2, \quad (1.15)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{Ai} \\ \tilde{Y}_{Ai}'' \\ \tilde{Z}_{Ai} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & [T_{10}^i] & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & [T_{20}^i] & & \\ & & X_{D_i} & \\ & & Y_{D_i} & \\ & & Z_{D_i} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{B_i} \\ \tilde{y}_{B_i} \\ \tilde{z}_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & [T_{01}^i] & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & [T_{21}^i] & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{C_i} \\ \tilde{y}_{C_i} \\ \tilde{z}_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & [T_{02}^i] & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & [T_{12}^i] & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

где $[T_{kj}^i]$ – матрица перехода от k -той системы координат к j -той системе, определяемые как

$$T_{01}^i = [T_{10}^i]^T; \quad T_{02}^i = [T_{20}^i]^T; \quad T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i; \quad T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i, \dots \quad (1.19)$$

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}^{(k)}]^2, \quad (k=1,2,3) \quad (1.20)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (1.23)$$

Из (1.21) с учетом (1.13) и (1.20) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{X}_{A_i} - X_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Допустим, что $R \neq 0$. Тогда из последнего равенства системы (1.24) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0 \quad (1.25)$$

С учетом (1.25) система уравнений (1.24) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{X}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Y}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Z}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0; \quad (1.26)$$

Подставляя выражения для $\Delta_{q_i}^{(1)}$ из (1.13) в систему (1.26), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i}^2 X_A + \tilde{X}_{A_i} \tilde{Y}_{A_i} Y_A + \tilde{Z}_{A_i} \tilde{X}_{A_i} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{X}_{A_i} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{A_i}^2 + \tilde{Y}_{A_i}^2 + \tilde{Z}_{A_i}^2) \tilde{X}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} \tilde{Y}_{A_i} X_A + \tilde{Y}_{A_i}^2 Y_A + \tilde{Z}_{A_i} \tilde{Y}_{A_i} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Y}_{A_i} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{A_i}^2 + Y_A^2 + Z_A^2) \tilde{Y}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{Z}_{A_i} \tilde{X}_{A_i} X_A + \tilde{Y}_{A_i} \tilde{Z}_{A_i} Y_A + \tilde{Z}_{A_i}^2 Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Z}_{A_i} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{A_i}^2 + \tilde{Y}_{A_i}^2 + \tilde{Z}_{A_i}^2) \tilde{Z}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} X_A + \tilde{Y}_{A_i} Y_A + \tilde{Z}_{A_i} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{A_i}^2 + \tilde{Y}_{A_i}^2 + \tilde{Z}_{A_i}^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Система (1.27) линейна относительно переменных X_A , Y_A , Z_A и $H_1 = \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$, поэтому ее можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$.

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{X_A}, D_{Y_A}, D_{Z_A}, D_{H_1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (1.29)$$

Аналогично из (1.22) с учетом (1.14) и (1.20) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_2 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{x_B}, D_{y_B}, D_{z_B}, D_{H_2}) \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (1.31)$$

Из (1.23) с учетом (1.15) и (1.21) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3} (D_{x_C}, D_{y_C}, D_{z_C}, D_{H_3}) \quad (\text{при } D_3 \neq 0) \quad (1.33)$$

Исключая первые четыре неизвестных X_A, Y_A, Z_A, R на основе формулы (1.28), можно свести систему (1.21) – (1.23) к системе из шести уравнений с шестью неизвестными $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$, которую удобно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial x_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial y_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial z_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial z_C} &= 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Уравнения этой системы по виду совпадают с тремя уравнениями тринадцатой степени относительно трех неизвестных, приведенными в работе [38], хотя в данном случае имеем систему из шести уравнений относительно шести неизвестных. Решение системы (1.34) представляет трудоемкую задачу, поэтому гораздо эффективнее применять излагаемый ниже алгоритм поиска минимума функции S :

1. Задаемся произвольно начальными точками $B^{(0)} \in Q_1, C^{(0)} \in Q_2$.
2. Решаем систему линейных уравнений (1.28) и определяем $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, Z_A^{(1)}, R_1^{(1)}$.
3. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q, C^{(0)} \in Q_2$.
4. Решаем систему уравнений (1.30) и определяем $x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, z_B^{(1)}, R_2^{(1)}$.
5. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q, B^{(1)} \in Q_1$.
6. Решаем систему уравнений (1.32) и определяем $x_C^{(1)}, y_C^{(1)}, z_C^{(1)}, R_3^{(1)}$.

7. Проверяем $\|X_A^{i+1} - X_A^i\| \leq \varepsilon$, $\|Y_A^{i+1} - Y_A^i\| \leq \varepsilon$, $\|Z_A^{i+1} - Z_A^i\| \leq \varepsilon$, $\|R^{i+1} - R^i\| \leq \varepsilon$.
8. Если удовлетворяет это условие, то процесс итерации завершается.
9. Если не удовлетворяет, то переходим к пункту 1, заменяя начальные точки $B^{(0)}$ и $C^{(0)}$ на найденные $B^{(1)}$ и $C^{(1)}$.
10. Далее проверяем точность воспроизведения заданной функции путем анализа положения ИКЦ $ABCD$.

$$T_{D_0} = T_{10} \cdot T_{21} \cdot T_{32} \cdot T_{D_3}$$

11. Если точность воспроизведения удовлетворяет заданной функции, то процесс итерации завершается, а если не удовлетворяет заданной точности, то необходимо перейти к пункту 1 приведенного алгоритма.

Применяя алгоритм, получим убывающую последовательность значений целевой функции $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, S_3^{(2)}, \dots$, имеющую предел равный значению функции S в точке локального минимума. При удовлетворении неравенства

$$\max(\|R^{(i)} - R^{(i-1)}\|, \|X_A^{(i)} - X_A^{(i-1)}\|, \|Y_A^{(i)} - Y_A^{(i-1)}\|, \|Z_A^{(i)} - Z_A^{(i-1)}\|) \leq \varepsilon,$$

где ε – задаваемая точность вычисления, итерационный процесс завершается. Сходимость предложенного алгоритма доказывается теоремой Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса: Для каждой функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$, и любого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно найти такой многочлен $P(x)$, что $\|P(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

В результате решения задачи определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B^{(0)} \in Q_1$, $C^{(0)} \in Q_2$, такие, что, совмещая с ними звено BC , получаем искомую ИКЦ в виде незамкнутой четырехзвенной цепи $ABCD$.

Далее проверяем точность воспроизведения заданной функции путем анализа положения ИКЦ $ABCD$. Если точность воспроизведения удовлетворяет заданной функции, то процесс итерации завершается, а если не удовлетворяет заданной точности, то необходимо перейти к пункту 1 приведенного алгоритма.

Задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, получим различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A(X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_2 , то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ (рисунок 2.6). Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = x_b, y_b, z_b, R, x_c, y_c, z_c)$$

и для нахождения минимума S можно использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы, то в результате синтеза ИКЦ получим пространственный четырехзвенник $ABCD$.

2. Пусть заданы координаты $x_C = y_C = z_C = 0$ точки $C \in Q_2$ координаты $X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}$ точки D тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 а искомыми параметрами являются $X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B$.

Необходимые условия минимума сумма S принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B)$$

Для нахождения минимума функции S можно опять использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что $x_C = y_C = z_C = 0$.

3. Пусть заданы координаты $x_B, y_B, z_B = 0$ точки B тела Q_1 и эйлеровы углы тела Q_2 $\theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2$. Исходная задача сводится к определению сферы наименее удаленной от N положений фиксированной точки C тела Q_2 (рисунок 1.6).

Необходимые условия минимума суммы S

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_C, y_C, z_C)$$

Данная задача подробно исследована в работе [39]. Для ее решения можно применить и алгоритм, приведенный выше, полагая $x_B, y_B, z_B = 0$, но в этом частном случае алгоритм поиска минимума полностью совпадает с методом кинематической инверсии.

Таким образом, как мы видим, решена задача синтеза ИКЦ со сферическими кинематическими парами и их модификации, которые могут быть использованы как модули структурно-кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев.

1.3 Синтез модификации исходных кинематических цепей со сферическими парами

Рассмотрим решение задачи синтеза ИКЦ при различных комбинациях заданных и искоемых параметров ИКЦ.

1. Пусть заданы координаты X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai} точки A и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_2 .

Требуется найти в неподвижной системе координат такие точки $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

Задача сводится к определению семи параметров $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, R$ открытой трехзвенной ИКЦ $ABCD$ со сферическими парами (рисунок 1.2, таблица 1.1), так как в выражении (1.10) координаты точки $A(X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai})$ заданы.

Таблица 1.1

1.1. $x_B=y_B=z_B=0$ $X_A, Y_A, Z_A, x_C, y_C, z_C, R$	1.2. $x_B=y_B=z_B=0$ x_C, y_C, z_C, R
2.1. $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, R$	2.2. $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, R$
3.1. $x_C=y_C=z_C=0$ $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R$	3.2. $x_C=y_C=z_C=0$ x_B, y_B, z_B, R

Для решения задачи в этом случае взвешенную разность Δ_{q_i} , определяем равенством (1.10), можно представить в двух различных формах относительно x_B, y_B, z_B, R и x_C, y_C, z_C, R . Выражая Δ_{q_i} через x_B, y_B, z_B , и R , получим первую форму

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = (\tilde{x}_{B_i} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{B_i} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{B_i} - z_B)^2 - R^2 \quad (1.35)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{B_i} \\ \tilde{y}_{B_i} \\ \tilde{z}_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 0 \\ [T_{01}^i] & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & 0 \\ [T_{21}^i] & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}^{(1)}]^2 \quad (1.36)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (1.37)$$

Которые приводятся относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_1 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} y_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} y_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{B_i} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \tilde{x}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \tilde{y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \tilde{z}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

$$\text{где } H_1 = \frac{1}{2} (R^2 - x_B^2 - y_B^2 - z_B^2),$$

$$R_{B_i}^2 = \tilde{x}_{B_i}^2 + \tilde{y}_{B_i}^2 + \tilde{z}_{B_i}^2.$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{x_B}, D_{y_B}, D_{z_B}, D_{H_1}) \text{ (при } D_1 \neq 0) \quad (1.39)$$

$$\text{Откуда } R = (x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 + 2H_1)^{1/2}.$$

Теперь взвешенную разность составим относительно неизвестных параметров x_C, y_C, z_C , и R .

$$\Delta_{qi}^{(2)} = (\tilde{x}_{Ci} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{Ci} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{Ci} - z_C)^2 - R^2 \quad (1.40)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{Ci} \\ \tilde{y}_{Ci} \\ \tilde{z}_{Ci} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} & & 0 \\ [T_{02}^i] & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & 0 \\ [T_{12}^i] & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix}$$

Условие минимума суммы по параметрам x_C, y_C, z_C , и R

$$\frac{\partial S}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (1.41)$$

сводится к системе линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_2 :

$$(x_C, y_C, z_C, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{x_C}, D_{y_C}, D_{z_C}, D_{H_2}) \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (1.43)$$

где

$$H_2 = \frac{1}{2} (R^2 - x_C^2 - y_C^2 - z_C^2),$$

$$R_{C_i}^2 = \tilde{x}_{C_i}^2 + \tilde{y}_{C_i}^2 + \tilde{z}_{C_i}^2.$$

Система (1.43) позволяет определить искомые параметры x_C, y_C, z_C , и R при фиксированных значениях переменных x_B, y_B, z_B , т.е. описывает соответствие между точками B и C тел Q_1 и Q_2 .

Для установления однозначного соответствия между решениями, получаемые при рассмотрении движения тел Q_2 относительно тела Q_1 и, наоборот, тела Q_1 относительно Q_2 , необходимо минимизировать функцию $S(x_B, y_B, z_B, x'_C, y'_C, z'_C, R)$, семи переменных.

Необходимыми условиями минимума суммы S являются

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = x_B, y_B, z_B, R, x'_C, y'_C, z'_C) \quad (1.44)$$

Для получения системы (2.44) следует рассмотреть совместно систему уравнений (2.38) и (2.42). Первые три из условий стационарности (2.44) приводит к системе (2.38), а последние три условия (2.42) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(2)}}{\partial x_C} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(2)}}{\partial y_C} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(2)}}{\partial z_C} &= 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Поскольку нас интересует лишь точки минимума функции $S(x_B, y_B, z_B, x'_C, y'_C, z'_C, R)$, то для нахождения минимума можно использовать алгоритм приведенный в п. 1.1, учитывая, что параметры X_A, Y_A и Z_A заданы.

В зависимости от характера заданных движений тел $Q_1(X_{A_i}, Y_{A_i}, Z_{A_i}, \theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1)$ и $Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}, \theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2)$, ($i = \overline{1, N}$), приходим к следующим механизмам и кинематическим цепям:

а) Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы на теле Q , то в результате синтеза ИКЦ получим передаточный механизм $ABCD$ типа $BCCB$ (B – вращательная, C – сферическая кинематические пары). Здесь следует

отметить, оси вращательных кинематических пар совпадают с осью Z . И нет необходимости прибегать к использованию обращения движения.

б) Если точка $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ движется по прямой, то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ с двумя сферическими и поступательной парами. Если при этом точка $A(X_A, Y_A, Z_A)$ движется по прямой, то получим незамкнутую кинематическую цепь $ABCD$ с двумя поступательными и сферической парами.

2. Пусть заданы координаты $x_C = y_C = z_C = 0$ точки $C \in Q_2$ координаты $X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}$ точки D тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 а искомыми параметрами являются $X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B$.

Требуется на теле Q и Q_1 соответственно такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ так, чтобы расстояние между точками B и D во всех положениях тел мало отличались от некоторой постоянной величины R .

Задача сводится к синтезу разомкнутой трехзвенной цепи ABD по семи неизвестным параметрам $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B$, и R (рисунок 3.1, таблица 1.1).

Для решения задачи взвешенную разность (1.10) с учетом формул (1.15) и (1.16) можно представить в двух различных формах с общим параметром R . Выражая Δ_{q_i} через X_A, Y_A, Z_A и R имеем

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = (\tilde{X}_{A_i} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A)^2 - R^2 \quad (1.46)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{A_i} \\ \tilde{Y}_{A_i}'' \\ \tilde{Z}_{A_i} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} & & & X_{D_i} \\ & [T_{10}^i] & & Y_{D_i} \\ & & & Z_{D_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

Необходимые условия минимума суммы по переменным X_A, Y_A, Z_A и R

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (1.48)$$

Сводятся к системе линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$.

Система (1.49) позволяет определить неизвестные параметры X_A, Y_A, Z_A и R при заданных значениях переменных x_B, y_B, z_B , то есть описывает соответствие между точками B и A тел Q и Q_1 .

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{X_A}, D_{Y_A}, D_{Z_A}, D_{H_1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0), \quad (1.50)$$

откуда

$$R = (X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2 + 2H_1)^{1/2}.$$

Выражая Δ_{qi} через x_B, y_B, z_B и R , по аналогии имеем

$$\Delta_{qi}^{(2)} = (\tilde{x}_{Bi} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{Bi} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{Bi} - z_B)^2 - R^2 \quad (1.51)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{Bi} \\ \tilde{y}_{Bi} \\ \tilde{z}_{Bi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 0 \\ [T_{01}^i] & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{Di} - X_A \\ Y_{Di} - Y_A \\ Z_{Di} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix}$$

Необходимые условия минимума суммы S по переменным x_B, y_B, z_B и R , получим систему линейных уравнений относительно x_B, y_B, z_B и $H_2 = \frac{1}{2}(R^2 - x_B^2 - y_B^2 - z_B^2)$:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} y_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} y_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{B_i} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \tilde{x}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \tilde{y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \tilde{z}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

Для установления однозначного соответствия между решениями, получаемыми при рассмотрении движения тела Q_1 относительно Q и обратно, необходимо совместно решить системы (1.49) и (1.52). Чтобы получить необходимые условия минимума суммы S по всем семи параметрам

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B) \quad (1.53)$$

Необходимо рассмотреть совместно системы уравнений (1.48) и (1.52). Исключая первые четыре неизвестные X_A, Y_A, Z_A и R на основе системы уравнений (1.52), придем к системе трех уравнений с тремя неизвестными x_B, y_B, z_B , которую удобно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial z_B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.54)$$

Подставляя (1.46), (1.50) и (1.51) в (1.54), получим

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} D_{X_A} + \tilde{Y}_{A_i} D_{Y_A} + \tilde{Z}_{A_i} D_{Z_A} + D_{H_1} - \frac{1}{2} D_1 \tilde{R}_{A_i}^2 \right] \tilde{x}_{B_i} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} D_{X_A} + \tilde{Y}_{A_i} D_{Y_A} + \tilde{Z}_{A_i} D_{Z_A} + D_{H_1} - \frac{1}{2} D_1 \tilde{R}_{A_i}^2 \right] \tilde{y}_{B_i} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} D_{X_A} + \tilde{Y}_{A_i} D_{Y_A} + \tilde{Z}_{A_i} D_{Z_A} + D_{H_1} - \frac{1}{2} D_1 \tilde{R}_{A_i}^2 \right] \tilde{z}_{B_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

Каждое уравнение системы (1.55) представляет собой алгебраическое уравнение тринадцатой степени относительно неизвестных параметров x_B, y_B, z_B . Для нахождения минимума функции $S(X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B)$ можно использовать алгоритм приведенный в пункте 1.1, учитывая, что $x_C = y_C = z_C = 0$.

Если точка $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ движется по прямой, то в результате синтеза получим кинематическую цепь ABD , представляющую собой передаточный кривошипно-ползунный четырехзвенный механизм ABD .

3. Пусть заданы координаты $x_B = y_B = z_B = 0$ точки B на подвижном теле Q_1 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_2 , а координаты X_A, Y_A, Z_A точки A являются искомыми, то задача сводится к определению круговой точки $C(x_C, y_C, z_C)$ на теле Q_2 и ее центра на теле Q по заданным ее параметрам $X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_2 . (рисунок 1.1, таблица 1.1)

Действительно, выражение (1.10) с учетом формул (1.17) – (1.16) примет вид

$$\Delta_{qi} = \overline{AC_i}^2 - R^2 = (X_{C_i} - X_A)^2 + (Y_{C_i} - Y_A)^2 + (Z_{C_i} - Z_A)^2 - R^2 \quad (1.56)$$

$$(i = \overline{1, N})$$

После несложных преобразований взвешенную разность (1.56) можно представить в виде следующего многочлена:

$$\Delta_{qi} = -2 \left[X_{C_i A} X_A + Y_{C_i} Y_A + Z_{C_i} Z_A + H - \frac{1}{2} R_{C_i}^2 \right], (i = \overline{1, N}) \quad (1.57)$$

$$\text{где } R_{C_i}^2 = x_{C_i}^2 + y_{C_i}^2 + z_{C_i}^2, \quad (1.58)$$

$$H = \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \quad (1.59)$$

В данном случае функция S также зависит от семи искоемых параметров. Это координаты x'_C, y'_C, z'_C , точки C тела Q_2 , координаты X_A, Y_A, Z_A , точки A центра искомой окружности на теле Q и R – расстояние между точками A и C .

Для ее решения можно применить алгоритм, приведенный в пункте 1.1, полагая $x_B = y_B = z_B = 0$, но в этом частном случае данный алгоритм полностью совпадает с методом кинематической инверсии [38].

4. Пусть заданы координаты $x_B = y_B = z_B = 0$ точки B на теле Q_1 , координаты X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai} точки A , координаты X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di} точки D и эйлеровы

углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_2 . Требуется найти на теле Q_2 такую точку $C(x_C, y_C, z_C)$, чтобы расстояние между точками A и C во всех положениях точки A и тела Q_2 мало отличались от некоторой постоянной величины R .

Задача в этом случае сводится к синтезу разомкнутой двухзвенной цепи ACD по четырем неизвестным параметрам x'_C, y'_C, z'_C, R (рисунок 1.2, таблица 1.1). Эта модификация ИКЦ может рассматриваться как частный случай любого из двух модификаций ИКЦ, представленных на рисунок 1.1 и 2.2 таблица 1.1, соответственно при условиях $X_A=X_{Ai}, Y_A=Y_{Ai}, Z_A=Z_{Ai}$ и $x_B=y_B=z_B=0$. Поэтому для определения параметров x'_C, y'_C, z'_C, R могут быть использованы условия минимума целевой функции указанных двух модификаций ИКЦ. Из этих двух условий предпочтительнее использовать непосредственно условия (1.16), сводящиеся к системе линейных уравнений (1.32), полагая в них $x_B=y_B=z_B=0$ и определяя оптимальные значения искомых параметров как решение системы (1.32).

5. Пусть заданы координаты $x_C=y_C=z_C=0$ точки $C \in Q_2$, координаты X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai} точки A и координаты X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di} точки D тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_1 .

Требуется найти на теле Q_1 такую точку $B(x_B, y_B, z_B)$, чтобы расстояние между точками B и D во всех положениях тела Q_1 и точки D мало отличались от некоторой постоянной величины R .

Задача сводится к синтезу разомкнутой двухзвенной цепи ABD по четырем неизвестным параметрам x_B, y_B, z_B , и R (рисунок 3.2, таблица 1.1). Эта модификация ИКЦ может рассматриваться как частный случай любого из двух модификаций ИКЦ, представленных на рисунках 2.2 и 3.1 таблица 1.1, соответственно при условиях $x_C=y_C=z_C=0$ и $X_A=X_{Ai}, Y_A=Y_{Ai}, Z_A=Z_{Ai}$. Поэтому для определения параметров x_B, y_B, z_B , и R могут быть использованы условия минимума целевой функции указанных модификаций ИКЦ. Из этих двух условий предпочтительнее использовать непосредственно условия (1.15), сводящиеся к системе линейных уравнений (1.16), полагая в них $x_C=y_C=z_C=0$ и определяя искомых параметров как решение системы (1.16).

1.4 Синтез исходной кинематической цепи со сферическими и сферическими с пальцем парами

Рассмотрим пространственный ИКЦ $ABCD$ типа $ССС_П$, где A и B – сферические пары, C – сферическая пара с пальцем (рисунок 1.7). Метод решения задачи синтеза данной ИКЦ основан на введении двух подвижных тел, жестко связанных с входным и выходным звеньями и в отыскании круговых точек в относительном движении этих тел [107, 108].

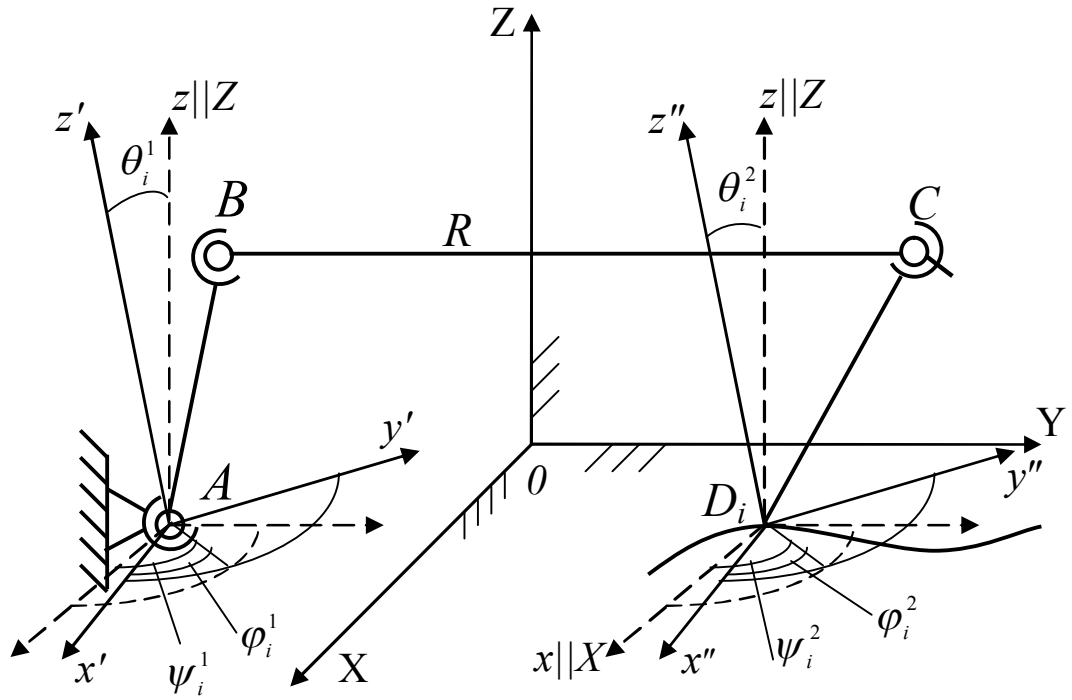


Рисунок 1.7

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1)$ и $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2)$, ($i = \overline{1, N}$) где $\theta_i^j, \psi_i^j, \phi_i^j$ – углы Эйлера относительно неподвижной системы координат $OXYZ$.

Требуется найти такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

Решение задачи: Введем взвешенную разность для i -го положения тел в виде:

$$\Delta_{qi} = \left| \overline{B_i C_i} \right|^2 - R^2 = (X_{Ci} - X_{Bi})^2 + (Y_{Ci} - Y_{Bi})^2 + (Z_{Ci} - Z_{Bi})^2 - R^2 \quad (1.53)$$

Она является функцией десяти параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Группируя эти параметры по четыре с общим параметром R , взвешенную разность представим в трех различных формах:

$$\Delta_{qi}^{(1)} = (\tilde{X}_{Ai} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A)^2 - R^2, \quad (1.60)$$

$$\Delta_{qi}^{(2)} = (\tilde{x}_{Bi} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{Bi} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{Bi} - z_B)^2 - R^2, \quad (1.61)$$

$$\Delta_{q_i}^{(3)} = (\tilde{x}_{C_i} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{C_i} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{C_i} - Z_C)^2 - R^2, \quad (1.62)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{Ai} \\ \tilde{Y}_{Ai}'' \\ \tilde{Z}_{Ai} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 0 \\ [T_{10}^i] & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & X_{D_i} \\ [T_{20}^i] & Y_{D_i} \\ & Z_{D_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.63)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{B_i} \\ \tilde{y}_{B_i} \\ \tilde{z}_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 \\ [T_{01}^i] & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & 0 \\ [T_{21}^i] & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.64)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{C_i} \\ \tilde{y}_{C_i} \\ \tilde{z}_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} & 0 \\ [T_{02}^i] & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & 0 \\ [T_{12}^i] & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.65)$$

где $[T_{kj}^i]$ – квадратная матрица выражает преобразование координат системы k в систему j и определяется как в (1.17)

Что бы расписать элементы матрицы введем обозначения:

$$\begin{aligned} \cos \theta_i^j &= c_1, \\ \cos \psi_i^j &= c_2, \\ \cos \varphi_i^j &= c_3, \\ \sin \theta_i^j &= s_1, \\ \sin \psi_i^j &= s_2, \\ \sin \varphi_i^j &= s_3. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Тогда $e_{i1}^j = c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3$,

$$m_{i1}^j = s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3 ,$$

$$n_{i1}^j = s_1 s_3 ,$$

$$e_{i2}^j = -c_2 s_3 - c_1 s_2 s_3 ,$$

$$m_{i2}^j = -s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3 ,$$

$$n_{i2}^j = s_1 c_3 ,$$

$$e_{i3}^j = s_1 s_2 ,$$

$$m_{i3}^j = -s_1 c_2 ,$$

$$n_{i3}^j = c_1 ,$$

$$T_{01}^i = [T_{10}^i]^T ,$$

$$T_{02}^i = [T_{20}^i]^T ,$$

$$T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i ,$$

$$T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i .$$

Так как кинематическая пара C является двух подвижной сферической парой (сферическая пара с пальцем), следовательно для этой пары только два угла Эйлера будут независимыми. От особенностей закона движения выходного звена возможна различное направления пальца в сферической паре. Например, в качестве переменных можно принять угол прецессии ψ_i^j и угол собственного вращения φ_i^j , а угол нутации θ_i^j считать равным $\pi/2$. Тогда матрица перехода от k – той системы координат к j – той системе при $\sin \theta_i^j = 1$, $\cos \theta_i^j = 0$

$$T_{10} = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & s_2 \\ s_2 c_3 & -s_2 s_3 & -c_2 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

Во втором случае переменными примем угол нутации θ_i^j и угол собственного вращения φ_i^j , а угол прецессии $\psi_i^j=0$, то есть $\sin\psi_i^j=0$, $\cos\psi_i^j=1$

$$T_{10} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ c_1 s_3 & c_1 c_3 & -s_1 \\ s_1 s_3 & s_1 c_3 & c_1 \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

В третьем случае переменными примем угол нутации θ_i^j и угол прецессии ψ_i^j , а угол собственного вращения $\varphi_i^j=0$, то есть $\sin\varphi_i^j=0$, $\cos\varphi_i^j=1$

$$T_{10} = \begin{bmatrix} c_2 & -c_1 s_2 & s_1 s_2 \\ c_1 s_3 & c_1 c_2 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

В любом из трех выбранных вариантов матрица преобразования координат значительно упрощаются.

Пусть тело Q_2 образует матрицу (2.67), а тело Q_1 матрицу (2.66).

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(1)}]^2 \quad (1.70)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (1.71)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (1.72)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (1.73)$$

Из (1.71) с учетом (1.11) и (1.70) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{X}_{A_i} - X_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

Допустим, что $R \neq 0$. Тогда из последнего равенства системы (1.74) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0 \quad (1.75)$$

С учетом (1.75) система уравнений (1.74) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{X}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Y}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Z}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0; \quad (1.76)$$

Подставляя выражения для $\Delta_{q_i}^{(1)}$ из (1.11) в систему (1.76), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i}^2 X_A + \tilde{X}_{A_i} \tilde{Y}_{A_i} Y_A + \tilde{Z}_{A_i} \tilde{X}_{A_i} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{X}_{A_i} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{A_i}^2 + \tilde{Y}_{A_i}^2 + \tilde{Z}_{A_i}^2) \tilde{X}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} \tilde{Y}_{A_i} X_A + \tilde{Y}_{A_i}^2 Y_A + \tilde{Z}_{A_i} \tilde{Y}_{A_i} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Y}_{A_i} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{A_i}^2 + Y_A^2 + Z_A^2) \tilde{Y}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{Z}_{A_i} \tilde{X}_{A_i} X_A + \tilde{Y}_{A_i} \tilde{Z}_{A_i} Y_A + \tilde{Z}_{A_i}^2 Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Z}_{A_i} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{A_i}^2 + \tilde{Y}_{A_i}^2 + \tilde{Z}_{A_i}^2) \tilde{Z}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} X_A + \tilde{Y}_{A_i} Y_A + \tilde{Z}_{A_i} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{A_i}^2 + \tilde{Y}_{A_i}^2 + \tilde{Z}_{A_i}^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.77)$$

Система (1.77) линейна относительно переменных X_A , Y_A , Z_A и $H_1 = \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$, поэтому ее можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$.

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{X_A}, D_{Y_A}, D_{Z_A}, D_{H_1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (1.79)$$

Аналогично из (1.72) с учетом (1.12) и (1.70) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_2 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \quad (1.80)$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{x_B}, D_{y_B}, D_{z_B}, D_{H_2}) \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (1.81)$$

Из (1.74) с учетом (1.13) и (1.73) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (1.82)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3} (D_{x_C}, D_{y_C}, D_{z_C}, D_{H_3}) \quad (\text{при } D_3 \neq 0) \quad (1.83)$$

Исключая первые четыре неизвестных X_A, Y_A, Z_A, R на основе формулы (1.78), можно свести систему (1.71) – (1.73) к системе из шести уравнений с шестью неизвестными $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$, которую удобно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial x_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial y_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial z_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial z_C} &= 0 \end{aligned} \quad (1.84)$$

Уравнения этой системы по виду совпадают с тремя уравнениями тринадцатой степени относительно трех неизвестных, хотя в данном случае имеем систему из шести уравнений относительно шести неизвестных. Решение системы (1.84) представляет трудоемкую задачу, поэтому гораздо эффективнее применять излагаемый ниже алгоритм поиска минимума функции S , аналогичный приведенному алгоритму в пункте (1.1).

В результате решения задачи определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B \in Q_1$ и $C \in Q_2$, совмеща с которыми звено BC , получаем искомую ИКЦ в виде разомкнутой цепи $ABCD$ типа $ССС_{II}$. Комбинируя параметрами тела Q_1 и Q_2 можно получить различные модификации ИКЦ. Если фиксировать координаты x_D, y_D, z_D точки D , углы Эйлера $\theta_{ij}^2 = 0, \psi_{ij}^2 = 0$ тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_{ij}^1 = 0, \psi_{ij}^1 = 0$ тела Q_1 , то получим передаточный механизм типа $BCC_{II}B$ (рисунок 1.8).

Задавая в различных комбинациях часть искоемых параметров синтеза, получим различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A(X_{A_i}, Y_{A_i}, Z_{A_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_2 , то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ (рисунок 1.9).

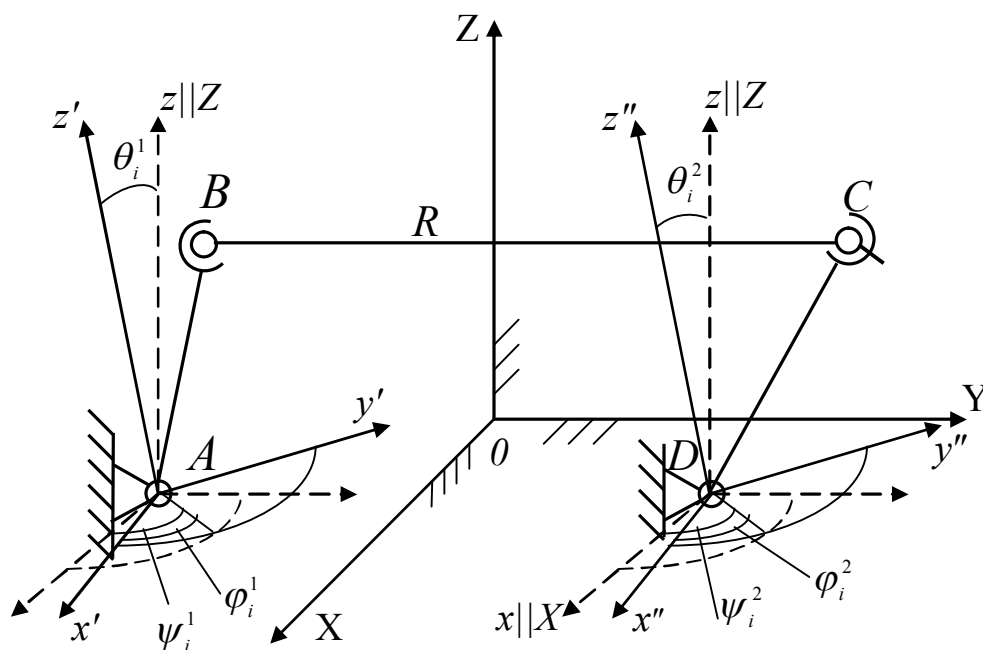


Рисунок 1.8

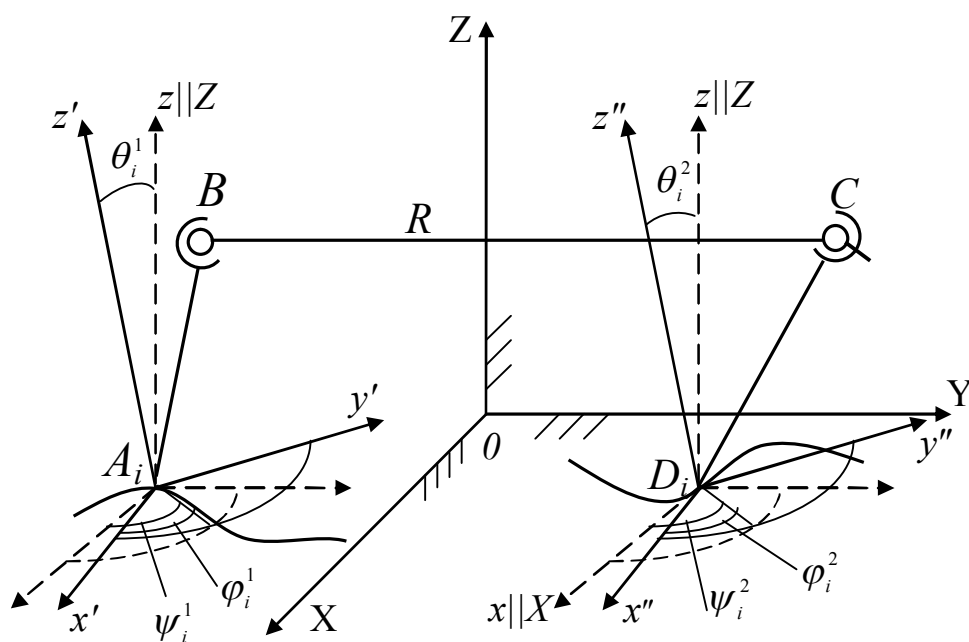


Рисунок 1.9

Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C)$$

и для нахождения минимума S можно использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы, то в результате синтеза ИКЦ получим пространственный четырехзвенник $ABCD$ (рисунок 1.8).

1.5 Синтез модификации исходных кинематических цепей со сферическими и сферическими с пальцем парами

Рассмотрим пространственный ИКЦ $ABCD$ типа $C_{\Pi}C_{\Pi}C$, где C – сферическая пара, A и B – сферические пары с пальцем (рисунок 1.10).

В этом случае тело Q_1 образует матрицу (1.67), тело Q_2 матрицу (1.66).

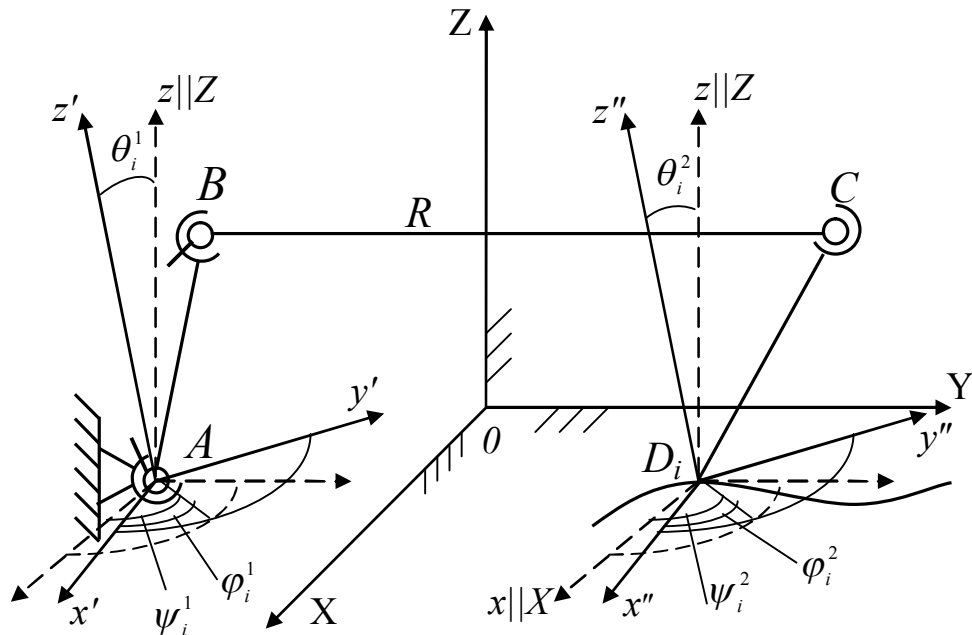


Рисунок 1.10

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^2 \quad (1.85)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial X_A}=0; \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A}=0; \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A}=0; \quad \frac{\partial S}{\partial R}=0; \quad (1.86)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_B}=0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_B}=0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_B}=0; \quad \frac{\partial S}{\partial R}=0; \quad (1.87)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_C}=0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_C}=0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_C}=0; \quad \frac{\partial S}{\partial R}=0; \quad (1.88)$$

Из (1.85) с учетом (1.11) и (1.86) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \cdot (\tilde{X}_{Ai} - X_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \cdot (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \cdot (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \cdot R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.89)$$

Допустим, что $R \neq 0$. Тогда из последнего равенства системы (1.89) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} = 0 \quad (1.90)$$

С учетом (1.90) система уравнений (1.89) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{X}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{Y}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{Z}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} = 0; \quad (1.91)$$

Подставляя выражения для $\Delta_{qi}^{(1)}$ из (1.11) в систему (1.91), получим:

$$\left. \begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai}^2 X_A + \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{X}_{Ai} \right] = \\
& \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{X}_{Ai} \\
& \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai}^2 Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Y}_{Ai} \right] = \\
& \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{Y}_{Ai} \\
& \sum_{i=1}^N \left[\tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai}^2 Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Z}_{Ai} \right] = \\
& \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{Z}_{Ai} \\
& \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \right] = \\
& \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2)
\end{aligned} \right\} \quad (1.92)$$

Система (1.92) линейна относительно переменных X_A , Y_A , Z_A и $H_1 = \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$, поэтому ее можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (1.93)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$.

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{X_A}, D_{Y_A}, D_{Z_A}, D_{H_1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (1.94)$$

Аналогично из (1.87) с учетом (1.12) и (1.87) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_B , y_B , z_B , H_2 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \quad (1.95)$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{x_B}, D_{y_B}, D_{z_B}, D_{H_2}) \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (1.96)$$

Из (1.88) с учетом (1.13) и (1.88) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (1.97)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3} (D_{x_C}, D_{y_C}, D_{z_C}, D_{H_3}) \quad (\text{при } D_3 \neq 0) \quad (1.98)$$

Исключая первые четыре неизвестных X_A, Y_A, Z_A, R на основе формулы (1.93), можно свести систему (1.86) – (1.88) к системе из шести уравнений с шестью неизвестными $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$, которую удобно представить в виде:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial x_C} &= 0 \\
\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial y_C} &= 0 \\
\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial z_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial z_C} &= 0
\end{aligned} \tag{1.99}$$

Уравнения этой системы по виду совпадают с тремя уравнениями тринадцатой степени относительно трех неизвестных, приведенными в работе [38], хотя в данном случае имеем систему из шести уравнений относительно шести неизвестных. Решение системы (1.99) представляет трудоемкую задачу, поэтому гораздо эффективнее применять излагаемый ниже алгоритм поиска минимума функции S , аналогичный приведенному алгоритму в пункте (1.1).

В результате решения задачи определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B \in Q_1$ и $C \in Q_2$, совмеща с которыми звено BC , получаем искомую ИКЦ в виде разомкнутой цепи $ABCD$ типа $C_{\Pi}C_{\Pi}C$. Комбинируя параметрами тела Q_1 и Q_2 можно получить различные модификации ИКЦ. Если фиксировать координаты x_D, y_D, z_D точки D , углы Эйлера $\theta_{ij}^2 = 0, \psi_{ij}^2 = 0$ тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_{ij}^1 = 0, \psi_{ij}^1 = 0$ тела Q_1 , то получим передаточный механизм типа $BC_{\Pi}CB$ (рисунок 1.11).

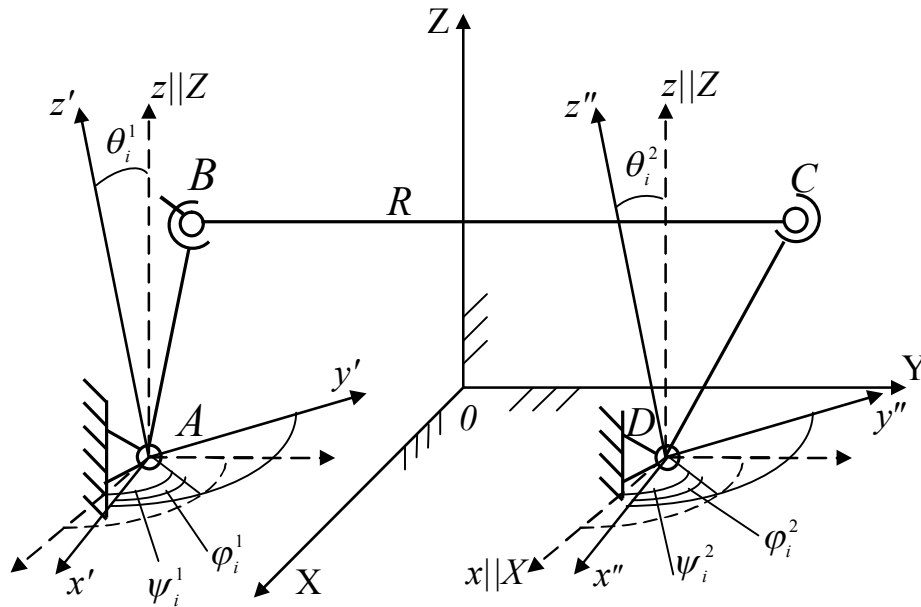


Рисунок 1.11

Рассмотрим пространственный ИКЦ $ABCD$ типа BCC , где B и C – сферические пары, A – вращательная пара.

В этом случае тело Q_1 образует матрицу:

$$T_{ji} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{ji} & -\sin \varphi_{ji} & 0 & l_i \\ \cos \theta_{ji} \sin \varphi_{ji} & \cos \theta_{ji} \cos \varphi_{ji} & -\sin \theta_{ji} & -l_{ji} \sin \theta_{ji} \\ \sin \theta_{ji} \sin \varphi_{ji} & \sin \theta_{ji} \cos \varphi_{ji} & \cos \theta_{ji} & l_{ji} \cos \theta_{ji} \end{bmatrix} \quad (1.100)$$

учитывая, что для звеньев вращательной пары угол нутации $\theta_{ij} = \text{const}$, угол прецессии $\psi_{ij} = 0$, и получаем из (1.66) матрицу вращательной пары.

Тело Q_2 образует матрицу (1.66). В этом случае координаты точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ имеет вид: $X_A = l_i$,

$$Y_A = -l_{ji} \sin \theta_{ji},$$

$$Z_A = l_{ji} \cos \theta_{ji}.$$

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^2 \quad (1.101)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (1.102)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (1.103)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (1.104)$$

Из (1.102) с учетом (1.11) и (1.101) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{X}_{A_i} - X_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.105)$$

Допустим, что $R \neq 0$. Тогда из последнего равенства системы (1.105) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0 \quad (1.106)$$

С учетом (1.106) система уравнений (1.105) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{X}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Y}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Z}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0; \quad (1.107)$$

Подставляя выражения для $\Delta_{q_i}^{(1)}$ из (1.14) в систему (1.107), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai}^2 X_A + \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{X}_{Ai} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai}^2 Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Y}_{Ai} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + Y_A^2 + Z_A^2) \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai}^2 Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Z}_{Ai} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.108)$$

Система (1.108) линейна относительно переменных X_A , Y_A , Z_A и $H_1 = \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$, поэтому ее можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (1.109)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$.

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{X_A}, D_{Y_A}, D_{Z_A}, D_{H_1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (1.110)$$

Аналогично из (1.103) с учетом (1.15) и (1.97) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_2 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \quad (1.111)$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{x_B}, D_{y_B}, D_{z_B}, D_{H_2}) \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (1.112)$$

Из (1.104) с учетом (1.16) и (1.104) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (1.113)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3} (D_{x_C}, D_{y_C}, D_{z_C}, D_{H_3}) \quad (\text{при } D_3 \neq 0) \quad (1.114)$$

Исключая первые четыре неизвестных X_A, Y_A, Z_A, R на основе формулы (1.103), можно свести систему (1.102) – (1.104) к системе из шести уравнений с шестью неизвестными $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$, которую удобно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial x_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial y_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial z_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial z_C} &= 0 \end{aligned} \quad (1.115)$$

Уравнения этой системы по виду совпадают с тремя уравнениями тринадцатой степени относительно трех неизвестных, приведенными в работе [38], хотя в данном случае имеем систему из шести уравнений относительно шести неизвестных. Решение системы (1.115) представляет трудоемкую задачу, поэтому гораздо эффективнее применять излагаемый ниже алгоритм поиска минимума функции S , аналогичный приведенному алгоритму в пункте (1.1).

В результате решения задачи определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B \in Q_1$ и $C \in Q_2$, совмеща с которыми звено BC , получаем искомую ИКЦ в виде разомкнутой цепи $ABCD$ типа BCC .

Комбинируя параметрами тела Q_1 и Q_2 можно получить различные модификации ИКЦ. Если фиксировать координаты x_D, y_D, z_D точки D , углы Эйлера $\theta_{ij}^2 = 0, \psi_{ij}^2 = 0$ тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_{ij}^1 = 0, \psi_{ij}^1 = 0$ тела Q_1 , то получим передаточный механизм типа $BCC_{\Pi}B$ (рисунок 1.8).

Задавая в различных комбинациях часть искоемых параметров синтеза, получим различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A(X_{A_i}, Y_{A_i}, Z_{A_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_2 , то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ (рисунок 1.9). Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = x_b, y_b, z_b, R, x_c, y_c, z_c)$$

и для нахождения минимума S можно использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы, то в результате синтеза ИКЦ получим пространственный четырехзвенник $ABCD$ (рисунок 1.8 или 1.11).

1.6 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной и сферическими парами и ее модификации

Рассмотрим пространственную ИКЦ типа BBC (B – вращательная пара, C – сферическая пара). На рисунке 1.12 приведена пространственная ИКЦ, где A – вращательная пара, и B, C – сферические пары. Метод решения задачи синтеза данной ИКЦ основан на введении двух пространственных подвижных тел, жестко связанных с входным и выходным звеньями и в отыскании круговых точек в относительном движении этих тел [38].

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \phi_i^1)$ и $Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}, \theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2)$, ($i = \overline{1, N}$) где $\theta_i^j, \psi_i^j, \phi_i^j$ – углы Эйлера относительно неподвижной системы координат $OXYZ$.

Требуется найти такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

Решение задачи: Введем взвешенную разность для i -го положения тел в виде:

$$\Delta_{qi} = \|B_i C_i\|^2 - R^2 = (X_{C_i} - X_{B_i})^2 + (Y_{C_i} - Y_{B_i})^2 + (Z_{C_i} - Z_{B_i})^2 - R^2. \quad (1.116)$$

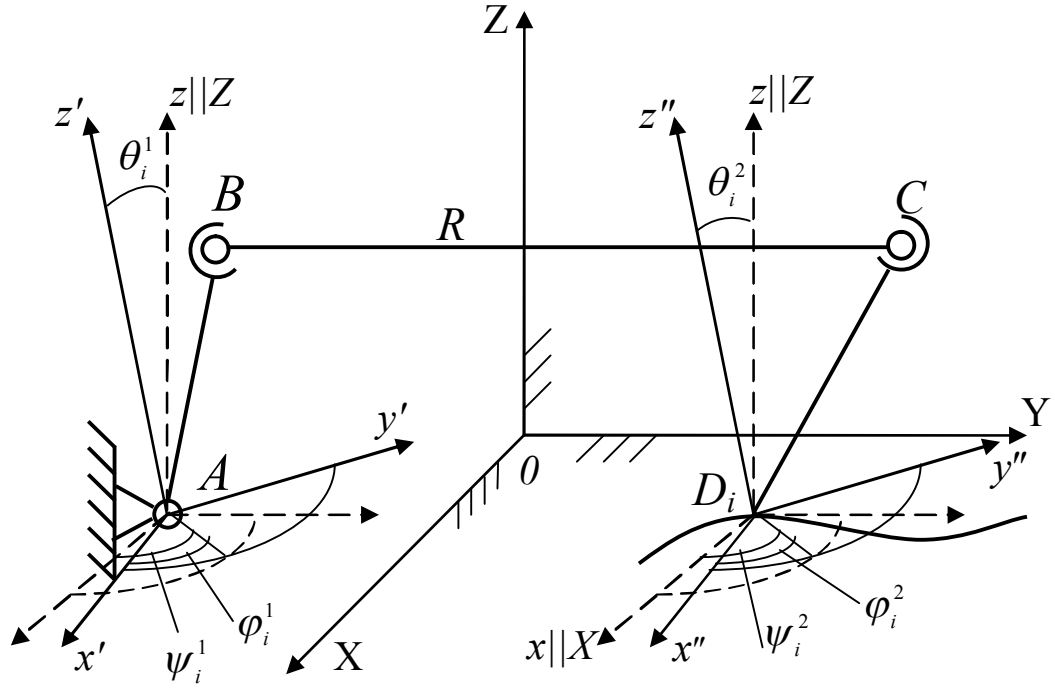


Рисунок 1.12

Она является функцией десяти параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Группируя эти параметры по четыре с общим параметром R , взвешенную разность представим в трех различных формах:

$$\Delta_{qi}^{(1)} = (\tilde{X}_{Ai} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A)^2 - R^2, \quad (1.117)$$

$$\Delta_{qi}^{(2)} = (\tilde{x}_{Bi} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{Bi} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{Bi} - z_B)^2 - R^2, \quad (1.118)$$

$$\Delta_{qi}^{(3)} = (\tilde{x}_{Ci} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{Ci} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{Ci} - z_C)^2 - R^2, \quad (1.119)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{Ai} \\ \tilde{Y}_{Ai} \\ \tilde{Z}_{Ai} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{10}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{20}^i & X_{Di} \\ 0 & Y_{Di} \\ 0 & Z_{Di} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{Bi} \\ \tilde{y}_{Bi} \\ \tilde{z}_{Bi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{01}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{Di} - X_A \\ Y_{Di} - Y_A \\ Z_{Di} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{21}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{X}_{C_i} \\ \mathfrak{Y}_{C_i} \\ \mathfrak{Z}_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} & & 0 \\ & [T_{02}^i] & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & 0 \\ & [T_{12}^i] & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix}.$$

где $[T_{kj}^i]$ – квадратная матрица выражает преобразование координат системы k в систему j и определяется как в (1.17).

Что бы расписать элементы матрицы введем обозначения:

$$\begin{aligned} \cos \theta_i^j &= c_1, \\ \cos \psi_i^j &= c_2, \\ \cos \varphi_i^j &= c_3, \\ \sin \theta_i^j &= s_1, \\ \sin \psi_i^j &= s_2, \\ \sin \varphi_i^j &= s_3. \end{aligned} \tag{1.120}$$

Тогда

$$\begin{aligned} e_{i1}^j &= c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3, \\ m_{i1}^j &= s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3, \\ n_{i1}^j &= s_1 s_3, \\ e_{i2}^j &= -c_2 s_3 - c_1 s_2 s_3, \\ m_{i2}^j &= -s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3, \\ n_{i2}^j &= s_1 c_3, \\ e_{i3}^j &= s_1 s_2, \\ m_{i3}^j &= -s_1 c_2, \end{aligned}$$

$$n_{i3}^j = c_1,$$

$$T_{01}^i = [T_{10}^i]^T,$$

$$T_{02}^i = [T_{20}^i]^T,$$

$$T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i,$$

$$T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i.$$

Для звеньев вращательной пары угол нутации $\theta_{ij} = \text{const}$, угол прецессии $\psi_{ij} = 0$, и получаем из (1.120) матрицу вращательной пары (1.100).

Так как желательно иметь только квадратные матрицы, которые можно умножать, то к уравнениям преобразования координат добавляется тождество $1 \equiv 1$ и, соответственно, во всех матрицах появляется четвертая строка, содержащая нули в первых столбцах и единицу в четвертом столбце.

Квадратные матрицы получают также, если начало координат O_j совпадает с началом координат O_i . В этом случае для вращательной пары удобно направлять ее ось по одной из трех координатных осей x_i, y_i, z_i .

При вращении звена j вокруг оси z_i из матрицы (1.18) при $\theta_{ij} = 0$ имеем

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{ji} & -\sin \varphi_{ji} & 0 \\ \sin \varphi_{ji} & \cos \varphi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.121)$$

где переменный угол $\varphi_{ji} = \psi_{ji}$ есть угол между осью x_i и осью x_j , направление которой выбирается из условия, что в начальный момент времени она совпадает с осью x_i .

При вращении звена j вокруг оси y_i из матрицы (1.18) при $\theta_{ij} = \pi/2$ имеем

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{ji} & -\sin \varphi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \varphi_{ji} & \cos \varphi_{ji} & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.122)$$

где переменный угол φ_{ji} определяется, как и в матрице (1.121).

При вращении звена j вокруг оси x_i из матрицы (1.18) при $\varphi_{ij} = 0$ имеем

$$T_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{ji} & -\sin \theta_{ji} \\ 0 & \sin \theta_{ji} & \cos \theta_{ji} \end{bmatrix}, \quad (1.123)$$

где переменный угол θ_{ji} есть угол между осью z_i и осью z_j , направление которой выбирается из условия, что в начальный момент времени она совпадает с осью z_i .

С учетом выражений (1.17) и (1.18) имеем матрицу перехода T_{02} .

Тогда необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^2 \quad (1.124)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial s}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \quad (1.125)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \quad (1.126)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \quad (1.127)$$

Из (1.125) с учетом (1.14) и (1.114) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{X}_{A_i} - X_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.128)$$

Допустим, что $R \neq 0$. Тогда из последнего равенства системы (1.128) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0 \quad (1.129)$$

С учетом (1.124) система уравнений (1.115) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{X}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Y}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Z}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0; \quad (1.130)$$

Подставляя выражения для $\Delta_{qi}^{(1)}$ из (1.14) в систему (1.125), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai}^2 X_A + \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{X}_{Ai} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai}^2 Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Y}_{Ai} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai}^2 Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Z}_{Ai} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.131)$$

Система (1.131) линейна относительно переменных X_A , Y_A , Z_A и $H_1 = \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$, поэтому ее можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (1.132)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$.

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{X_A}, D_{Y_A}, D_{Z_A}, D_{H_1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (1.133)$$

Аналогично из (1.126) с учетом (1.15) и (1.124) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_2 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \quad (1.134)$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{x_B}, D_{y_B}, D_{z_B}, D_{H_2}) \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (1.135)$$

Из (1.127) с учетом (1.16) и (1.124) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (1.136)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3} (D_{x_C}, D_{y_C}, D_{z_C}, D_{H_3}) \quad (\text{при } D_3 \neq 0) \quad (1.137)$$

Исключая первые четыре неизвестных X_A, Y_A, Z_A, R на основе формулы (1.128), можно свести систему (1.125) – (1.127) к системе из шести уравнений с шестью неизвестными $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$, которую удобно представить в виде:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial x_C} &= 0 \\
\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial y_C} &= 0 \\
\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial z_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial z_C} &= 0
\end{aligned} \tag{1.138}$$

Решение системы (1.138) представляет трудоемкую задачу, поэтому гораздо эффективнее применять излагаемый ниже алгоритм поиска минимума функции S :

1. Задаемся произвольно начальными точками $B^{(0)} \in Q_1$, $C^{(0)} \in Q_2$.
2. Решаем систему линейных уравнений (1.132) и определяем $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, Z_A^{(1)}, R_1^{(1)}$.
3. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q$, $C^{(0)} \in Q_2$.
4. Решаем систему уравнений (1.134) и определяем $x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, z_B^{(1)}, R_2^{(1)}$.
5. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q$, $B^{(1)} \in Q_1$.
6. Решаем систему уравнений (1.136) и определяем $x_C^{(1)}, y_C^{(1)}, z_C^{(1)}, R_3^{(1)}$.
7. Далее циклически повторяем шаги (1 – 6), заменяя начальные точки $B^{(0)}$ и $C^{(0)}$ на найденные $B^{(1)}$ и $C^{(1)}$.

Применяя алгоритм, получим убывающую последовательность значений целевой функции $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, S_3^{(2)}, \dots$, имеющую предел равный значению функции S в точке локального минимума. В результате решения задачи определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B^{(0)} \in Q_1$, $C^{(0)} \in Q_2$, такие, что, совмещая с ними звено BC , получаем искомую ИКЦ в виде разомкнутой цепи $ABCD$.

Задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, получим различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A(X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_2 , то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ (таблица 1.1, рисунок 2-2).

Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = x_b, y_b, z_b, R, x_c, y_c, z_c)$$

и для нахождения минимума S можно использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы, то в результате синтеза ИКЦ получим пространственный четырехзвенник $ABCD$.

2. Пусть заданы координаты $x_C = y_C = z_C = 0$ точки $C \in Q_2$ координаты $X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}$ точки D тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 а искомыми параметрами являются $X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B$ (таблица 1.1, рисунок 3-1).

Необходимые условия минимума сумма S принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B)$$

Для нахождения минимума функции S можно опять использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что $x_C = y_C = z_C = 0$.

3. Пусть заданы координаты $x_B, y_B, z_B = 0$ точки B тела Q_1 и эйлеровы углы тела Q_2 $\theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2$. Исходная задача сводится к определению сферы наименее удаленной от N положений фиксированной точки C тела Q_2 (таблица 1.1, рисунок 1-1).

Необходимые условия минимума суммы S

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_C, y_C, z_C)$$

Используя приведенный алгоритм синтеза можно получить различные модификации ИКЦ с вращательными парами показанные в таблице 2.2.

Как мы видим, решена задача синтеза ИКЦ с вращательными кинематическими парами и их модификации, которые могут быть использованы как модули структурно-кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев.

Таким образом, при синтезе пространственных механизмов с заданными законами движения входных и выходных звеньев можно использовать предлагаемый метод решения задачи.

1.7 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, вращательной и сферической парами

В данном разделе представлено решение задачи синтеза пространственной ИКЦ типа BBC (B – вращательная, C – сферическая

кинематические пары) и показано ее использование в качестве структурного модуля при структурно-кинематическом синтезе пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев. Метод решения задачи синтеза ИКЦ типа *BBC* основан на введении двух подвижных тел, неизменно связанных с входным и выходным звеньями [109].

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1)$, $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2)$ по отношению к неподвижной системе отсчета Q , где $i = \overline{1, N}$, $\theta_i^j, \psi_i^j, \phi_i^j$ - Эйлеравы углы относительно неподвижной системы координат $OXYZ$.

Требуется его приближенно воспроизводить посредством рычажных механизмов с одной степенью подвижности. Это требование приводит к следующей задаче синтеза: определить структуру и искомые параметры механизма. Для решения поставленной задачи используем незамкнутую четырехзвенную ИКЦ типа *BBC* (рисунок 1.13).

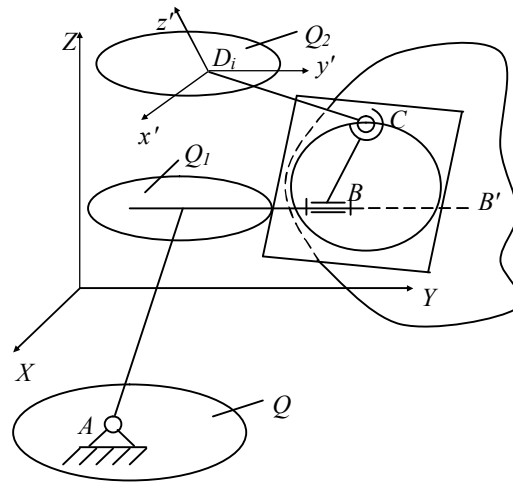


Рисунок 1.13

Синтез ИКЦ *ABCD* сводится к определению точки $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , которая в N положениях в смысле наименьших квадратов наименее уклоняется от окружности, принадлежащей подвижной системе Q_1 . Приближающую окружность определим как линию пересечения сферы с плоскостью. Тогда искомая точка C в N положениях должна приближаться как к сфере, так и к плоскости. Поэтому минимизируемую функцию представим в следующем виде:

$$S = S_1 + S_2 \quad (1.139)$$

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^N \left[(X_{Ci} - X_{Bi})^2 + (Y_{Ci} - Y_{Bi})^2 + (Z_{Ci} - Z_{Bi})^2 - R^2 \right] \quad (1.140)$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^N (X_i a + Y_i b + Z_i c - 1)^2, \quad i = \overline{1, N} \quad (1.141)$$

$$[X_{Bi}, Y_{Bi}, Z_{Bi}]^t = T_{01} [X_{Di} - X_A, Y_{Di} - Y_A, Z_{Di} - Z_A]^t + T_{21} [x_B, y_B, z_B]^t$$

$$[X_{Ci}, Y_{Ci}, Z_{Ci}]^t = T_{02} [X_A - X_{Di}, Y_A - Y_{Di}, Z_A - Z_{Di}]^t + T_{12} [x_C, y_C, z_C]^t$$

$$[X_i, Y_i, Z_i]^t = T_{kj}^t [(X_{Ci} - X_{Bi}), (Y_{Ci} - Y_{Bi}), (Z_{Ci} - Z_{Bi})]^t$$

$$T_{kj}^i = \begin{bmatrix} e_{11}^j & e_{22}^j & e_{33}^j \\ m_{21}^j & m_{22}^j & m_{23}^j \\ n_{31}^j & n_{32}^j & n_{33}^j \end{bmatrix}, \quad (k = \overline{0, 2}; j = \overline{0, 2}; i = \overline{1, N})$$

$$T_{01}^i = [T_{10}^i]^T; \quad T_{02}^i = [T_{20}^i]^T; \quad T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i; \quad T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i, \dots$$

Необходимые условия минимума суммы (2.139) записываются в виде

$$\frac{\partial s}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \quad (1.142)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \quad (1.143)$$

$$\frac{\partial s}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial c} = 0; \quad (1.144)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \quad (1.145)$$

Первые четыре условия (1.142) приводятся к следующей системе:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (1.146)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$, $H_1 = \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$

$$[\tilde{X}_{Ai}, \tilde{Y}_{Ai}, \tilde{Z}_{Ai}, 1]^t = T_{10}^i [x_B, y_B, z_B, 1]^t + T_{20}^i [x_C, y_C, z_C, 1]^t$$

Вторые четыре условия (2.143) приводится аналогично к системе:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N y_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N y_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N y_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N y_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^N y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 y_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \quad (1.147)$$

где

$$[\tilde{x}_B, \tilde{y}_B, \tilde{z}_B, 1]^t = T_{01}^i [(X_{Di} - X_A), (Y_{Di} - Y_A), (Z_{Di} - Z_A), 1]^t + T_{21}^i [x_C, y_C, z_C, 1]^t$$

Следующие три условия (1.144) приводится с помощью выражения (1.139) к следующей системе

$$\begin{bmatrix} \sum X_i^2 & \sum X_i Y_i & \sum X_i Z_i \\ \sum X_i Y_i & \sum Y_i^2 & \sum Y_i Z_i \\ \sum X_i Z_i & \sum Y_i Z_i & \sum Z_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum X_i \\ \sum Y_i \\ \sum Z_i \end{bmatrix} \quad (1.148)$$

При известных значениях $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, a, b, c$ можно определить направление оси, центр и радиус окружности лежащей в Q_l . Направляющие косинусы оси Q_1 окружности равны

$$(Q_{1X}, Q_{1Y}, Q_{1Z}) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (1.149)$$

Центр B окружности определяются как точка пересечения прямой с направляющим вектором (Q_{1X}, Q_{1Y}, Q_{1Z}) , проходящей через центр B' сферы с плоскостью окружности

$$x_{B'} = x_B - Q_{1X}d; y_{B'} = y_B - Q_{1Y}d; z_{B'} = z_B - Q_{1Z}d,$$

$$\text{где } d = (ax_{B'} + by_{B'} + cz_{B'} - 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Рассмотрим последнее условие (1.145), которое приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{bmatrix} \sum (\tilde{x}_{Ci}^2 + a_{ix}^2) & \sum (\tilde{x}_{Ci}\tilde{y}_{Ci} + a_{ix}a_{iy}) & \sum (\tilde{x}_{Ci}\tilde{z}_{Ci} + a_{ix}a_{iz}) & \sum \tilde{x}_{Ci} \\ \sum (\tilde{x}_{Ci}\tilde{y}_{Ci} + a_{ix}a_{iy}) & \sum (\tilde{y}_{Ci}^2 + a_{iy}^2) & \sum (\tilde{y}_{Ci}\tilde{z}_{Ci} + a_{iy}a_{iz}) & \sum \tilde{y}_{Ci} \\ \sum (\tilde{x}_{Ci}\tilde{z}_{Ci} + a_{ix}a_{iz}) & \sum (\tilde{y}_{Ci}\tilde{z}_{Ci} + a_{iy}a_{iz}) & \sum (\tilde{z}_{Ci}^2 + a_{iz}^2) & \sum \tilde{z}_{Ci} \\ \sum \tilde{x}_{Ci} & \sum \tilde{y}_{Ci} & \sum \tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum (R_{Ci}^2 \tilde{x}_{Ci} + f_i a_{ix}) \\ \sum (R_{Ci}^2 \tilde{y}_{Ci} + f_i a_{iy}) \\ \sum (R_{Ci}^2 \tilde{z}_{Ci} + f_i a_{iz}) \\ \sum \tilde{R}_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (1.150)$$

$$\text{где } [\tilde{x}_{Ci}, \tilde{y}_{Ci}, \tilde{z}_{Ci}, 1]^t = -T_{02}^t [(X_A - X_{D_i}), (Y_A - Y_{D_i}), (Z_A - Z_{D_i}), 1]^t + T_{12}^i [x_B, y_B, z_B, 1]^t;$$

$$[a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}]^t = T_{kj}^{-1} [a, b, c]^t;$$

$$f_i = X_{Ci}a + Y_{Ci}b + Z_{Ci}c - 1.$$

При определении искомых параметров синтеза последовательные итерации осуществляются по следующему алгоритму:

1. Задаемся произвольно начальными точками $B^{(0)} \in Q_1$ и $C^{(0)} \in Q_2$.
2. Решаем систему уравнений (1.146) и определяем $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, Z_A^{(1)}, R_1^{(1)}$.
3. Подставляя значения $A^{(1)} \in Q$ и $C^{(0)} \in Q_2$ в уравнение (1.147), определяем $x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, z_B^{(1)}$.

4. Задаемся значениями $A^{(1)} \in Q$, $B^{(1)} \in Q_1$ и $C^{(1)} \in Q_2$ в уравнение (1.148), определяем коэффициенты плоскости a, b, c .
5. Задаемся значениями $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, Z_A^{(1)}, x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, z_B^{(1)}, a, b, c$ в уравнение (1.150), определяем $x_C^{(1)}, y_C^{(1)}, z_C^{(1)}$. Если

$$\max \left(\left| x_C^{(i+1)} - x_C^{(i)} \right|, \left| y_C^{(i+1)} - y_C^{(i)} \right|, \left| z_C^{(i+1)} - z_C^{(i)} \right| \right) \leq \varepsilon,$$

то итерационный процесс завершается.

В результате решения задачи синтеза определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B \in Q_1$, $C \in Q_2$ такие, что совмещая с ними звено BC , получим искомую ИКЦ в виде незамкнутой цепи $ABCD$ типа BBC .

Задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, получим различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и Эйлеравы углы тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di})$ и Эйлеравы углы тела Q_2 , то получим трехзвенную незамкнутую цепь $ABCD$ типа BC (рисунок 1.14).

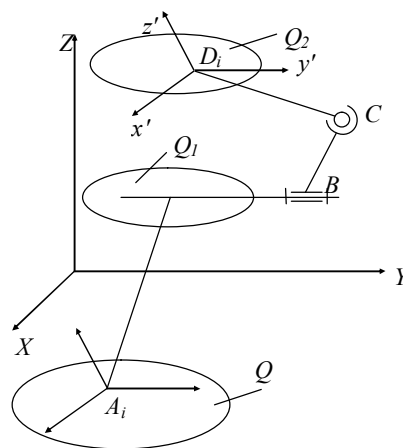


Рисунок 1.14

Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимает вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = x_B, y_B, z_B, R, a, b, c, x_C, y_C, z_C)$$

и для нахождения минимума суммы S можно использовать выше приведенный алгоритм, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

2. Пусть заданы координаты $x_B=y_B=z_B=0$ точки $B \in Q_1$, $C \in Q_2$ и Эйлеравы углы тела Q_2 . Задача сводится к определению точки $C \in Q_2$, которая в N положениях в смысле наименьших квадратов наименее уклоняется от окружности, принадлежащий неподвижной системе Q (рисунок 1.15). Необходимые условия минимума суммы S :

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = x_A, y_A, z_A, R, a, b, c, x_C, y_C, z_C)$$

Для ее решения можно применить выше приведенный алгоритм, полагая $x_B = y_B = z_B = 0$, тогда получим модификации ИКЦ ACD типа BC , связывающее тело Q_2 со стойкой Q .

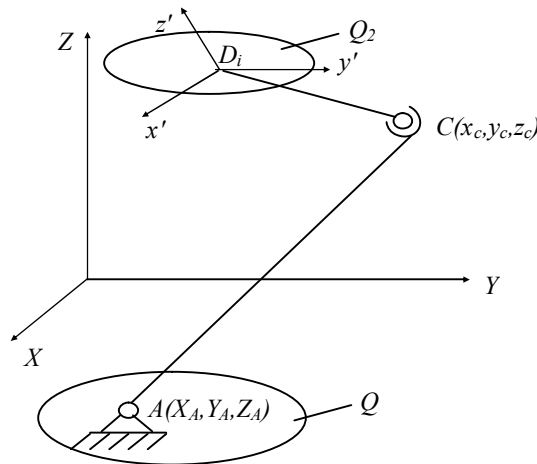


Рисунок 1.15

Рассмотрим синтез перемещающих шестизвенных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев. Пусть заданы законы движения входного звена $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1 = const, \psi_i^1 = 0, \phi_i^1)$ и выходного звена $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2)$ (рисунок 1.16).

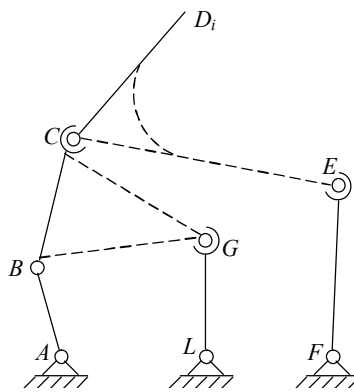


Рисунок 1.16

Число степеней подвижности ИКЦ $ABCD$ относительно стойки равно сумме подвижности входного и выходного звена механизма $W=5$. Чтобы получить механизм с одной степенью подвижности на ИКЦ $ABCD$ необходимо наложить геометрические связи с отрицательной степенью подвижности $W=-4$. Для этого дважды используем модификацию ИКЦ ACD имеющая степень

свободы $W = -2$ (рисунок 1.15). В начале для синтеза данного механизма используем ИКЦ $ABCD$ составляя целевую функцию в виде:

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(i)}(X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, a, b, c, x_C, y_C, z_C)]^2$$

Синтез ИКЦ $ABCD$ осуществляется по выше приведенному алгоритму. Далее на основе выражения (1.139) и (1.149) определяются координаты x_{Bi} , y_{Bi} , z_{Bi} точки B и направляющие косинусы звена BC . Синтезируем звено LG типа BC на основе модификации ACD (рисунок 1.15). Целевая функция имеет вид:

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(2)}(X_L, Y_L, Z_L, R, x_G, y_G, z_G, a, b, c)]^2$$

Аналогично синтезируем звено EF , используя ИКЦ ACD (рисунок 1.15)

$$S_3 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(3)}(X_F, Y_F, Z_F, R, x_E, y_E, z_E, a, b, c)]^2.$$

В итоге получим шестизвенный механизм II класса.

Используя аналогично выражение (1.139) можно синтезировать шестизвенные механизмы III и IV класса, которые показаны на рисунках 1.17 и 1.18.

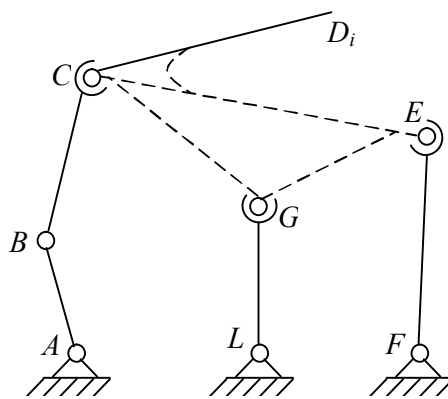


Рисунок 1.17

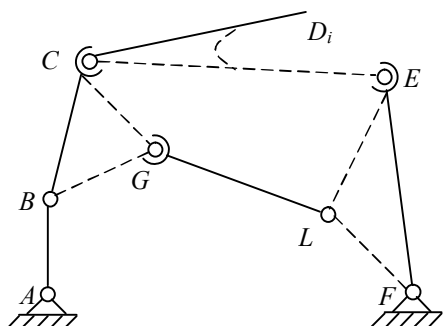


Рисунок 1.18

Однако синтез механизма IV класса проводится на основе модификации ИКЦ $ABCD$ (рисунок 1.17). При определении параметров звена LG , необходимо использовать модификацию ИКЦ $ABCD$ (рисунок 1.14).

Таким образом, используя одну и ту же целевую функцию, составленную для синтеза ИКЦ и ее модификации, позволяет автоматизировать процесс синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма.

1.8 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, вращательной и вращательной парами

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел Q_1 и Q_2 : $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1)$, $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2)$ ($i = \overline{1, N}$) где $\theta_i^j, \psi_i^j, \phi_i^j$ – эйлеровы углы относительно неподвижной системы координат $OXYZ$.

Требуется найти в неподвижной системе координат такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R (рисунок 1.19) [110].

Решение задачи: Введем взвешенную разность для i -го положения тел в виде:

$$\Delta_{qi} = \left| \overline{B_i C_i} \right|^2 - R^2 = (X_{Ci} - X_{Bi})^2 + (Y_{Ci} - Y_{Bi})^2 + (Z_{Ci} - Z_{Bi})^2 - R^2 \quad (1.151)$$

$(i = \overline{1, N})$

Она является функцией десяти параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Группируя эти параметры по четыре с общим параметром R , взвешенную разность представим в трех различных формах:

$$\Delta_{qi}^{(1)} = (\tilde{X}_{Ai} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A)^2 - R^2, \quad (1.152)$$

$$\Delta_{qi}^{(2)} = (\tilde{x}_{Bi} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{Bi} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{Bi} - z_B)^2 - R^2, \quad (1.153)$$

$$\Delta_{qi}^{(3)} = (\tilde{x}_{Ci} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{Ci} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{Ci} - z_C)^2 - R^2, \quad (1.154)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{Ai} \\ \tilde{Y}_{Ai}'' \\ \tilde{Z}_{Ai} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ [T_{10}^i] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ [T_{20}^i] & X_{D_i} & Y_{D_i} & Z_{D_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.155)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{B_i} \\ \tilde{y}_{B_i} \\ \tilde{z}_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ [T_{01}^i] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ [T_{21}^i] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.156)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{C_i} \\ \tilde{y}_{C_i} \\ \tilde{z}_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ [T_{02}^i] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ [T_{12}^i] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.157)$$

где $[T_{kj}^i]$ – матрица перехода от k -той системы координат к j -той системе, определяемые как в (1.17).

$$T_{01}^i = [T_{10}^i]^T; \quad T_{02}^i = [T_{20}^i]^T; \quad T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i; \quad T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i, \dots$$

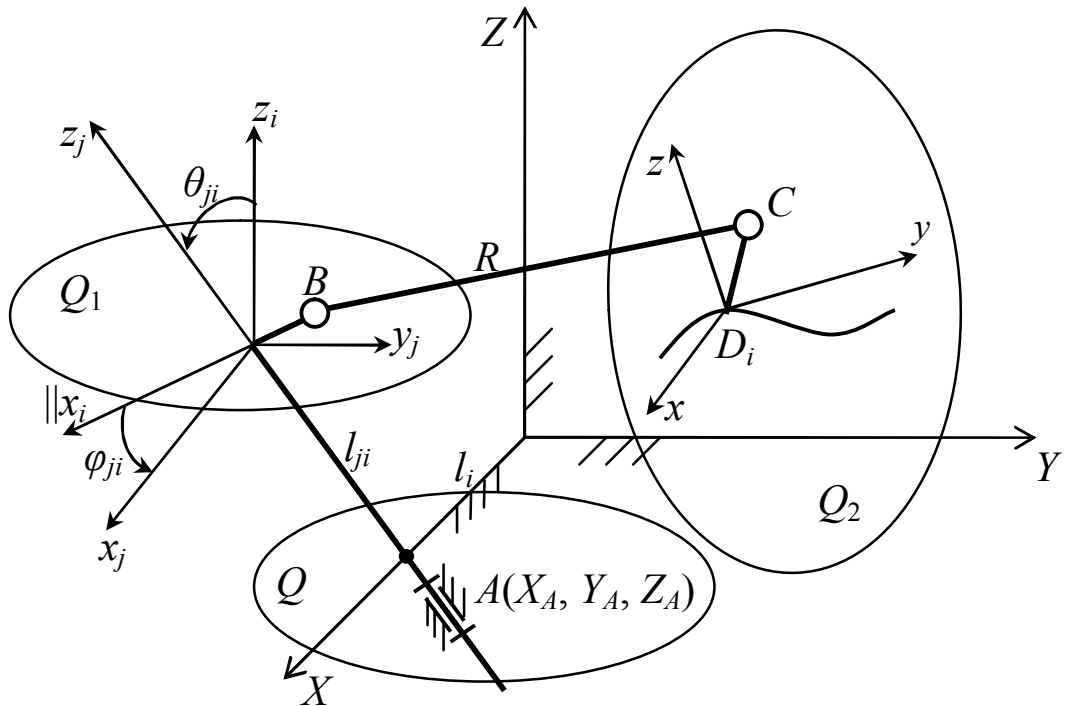


Рисунок 1.19

Для звеньев i и j вращательной пары ось $O_j z_j$ направим по оси этой пары, кратчайшее расстояние l_i между осями $O_j z_j$ и $O_i z_i$ совместим с осью $O_i x_i$, а начало координат O_j поместим на расстояние l_{ji} от оси $O_i x_i$. Тогда угол нутации $\theta_{ji} = const$, угол прецессии $\psi_{ji} = 0$, и с учетом принятых обозначений получаем из (1.17) матрицу вращательной пары:

$$T_{kj}^i = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{ji} & -\sin \varphi_{ji} & 0 & X_A \\ \cos \theta_{ji} \sin \varphi_{ji} & \cos \theta_{ji} \cos \varphi_{ji} & -\sin \theta_{ji} & Y_A \\ \sin \theta_{ji} \sin \varphi_{ji} & \sin \theta_{ji} \cos \varphi_{ji} & \cos \theta_{ji} & Z_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.158)$$

где

$$X_A = l_i$$

$$Y_A = -l_{ji} \sin \theta_{ji}$$

$$Z_A = l_{ji} \cos \theta_{ji}$$

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^2 \quad (1.159)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial s}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \quad (1.160)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \quad (1.161)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \quad (1.162)$$

Из (1.160) с учетом (1.155) и (1.159) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{X}_{Ai} - X_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.163)$$

Допустим, что $R \neq 0$. Тогда из последнего равенства системы (1.163) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0 \quad (1.164)$$

С учетом (1.164) система уравнений (1.163) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{X}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Y}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Z}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0; \quad (1.165)$$

Подставляя выражения для $\Delta_{q_i}^{(1)}$ из (1.155) в систему (1.165), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai}^2 X_A + \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{X}_{Ai} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai}^2 Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Y}_{Ai} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + Y_{Ai}^2 + Z_{Ai}^2) \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai}^2 Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Z}_{Ai} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.166)$$

Система (1.166) линейна относительно переменных X_A , Y_A , Z_A и $H_1 = \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$, поэтому ее можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (1.167)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$.

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{X_A}, D_{Y_A}, D_{Z_A}, D_{H_1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (1.168)$$

Аналогично из (1.161) с учетом (1.156) и (1.159) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_2 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \quad (1.169)$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{x_B}, D_{y_B}, D_{z_B}, D_{H_2}) \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (1.170)$$

Из (1.162) с учетом (1.157) и (1.162) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (1.171)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3} (D_{x_C}, D_{y_C}, D_{z_C}, D_{H_3}) \quad (\text{при } D_3 \neq 0) \quad (1.172)$$

Исключая первые четыре неизвестных X_A, Y_A, Z_A, R на основе формулы (1.165), можно свести систему (1.160) – (1.162) к системе из шести уравнений с шестью неизвестными $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$, которую удобно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial x_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial y_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial z_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial z_C} &= 0 \end{aligned} \quad (1.173)$$

Решение системы (1.173) представляет трудоемкую задачу, поэтому гораздо эффективнее применять излагаемый ниже алгоритм поиска минимума функции S :

1. Задаемся произвольно начальными точками $B^{(0)} \in Q_1, C^{(0)} \in Q_2$.
2. Решаем систему линейных уравнений (1.167) и определяем $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, Z_A^{(1)}, R_1^{(1)}$.
3. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q, C^{(0)} \in Q_2$.
4. Решаем систему уравнений (1.169) и определяем $x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, z_B^{(1)}, R_2^{(1)}$.
5. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q, B^{(1)} \in Q_1$.
6. Решаем систему уравнений (1.171) и определяем $x_C^{(1)}, y_C^{(1)}, z_C^{(1)}, R_3^{(1)}$.
7. Далее циклически повторяем шаги (1 – 6), заменяя начальные точки $B^{(0)}$ и $C^{(0)}$ на найденные $B^{(1)}$ и $C^{(1)}$.

Применяя алгоритм, получим убывающую последовательность значений целевой функции $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, S_3^{(2)}, \dots$, имеющую предел равный значению функции S в точке локального минимума. В результате решения задачи определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B^{(0)} \in Q_1$, $C^{(0)} \in Q_2$, такие, что, совмещая с ними звено BC , получаем искомую ИКЦ в виде разомкнутой цепи $ABCD$.

Задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, получим различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A(X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_2 , то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ (таблица 1.2, рисунок 2-2).

Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = x_b, y_b, z_b, R, x_c, y_c, z_c)$$

и для нахождения минимума S можно использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы, то в результате синтеза ИКЦ получим пространственный четырехзвенник $ABCD$.

2. Пусть заданы координаты $x_C = y_C = z_C = 0$ точки $C \in Q_2$ координаты X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di} точки D тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_1 а искомыми параметрами являются $X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B$ (таблица 1.2, рисунок 3-1).

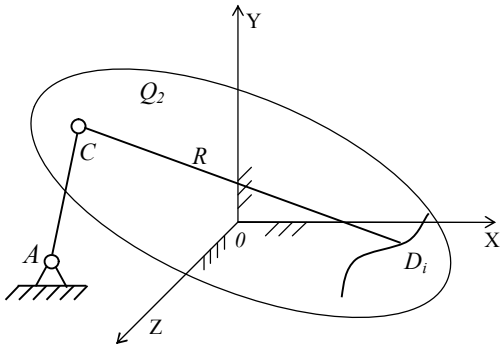
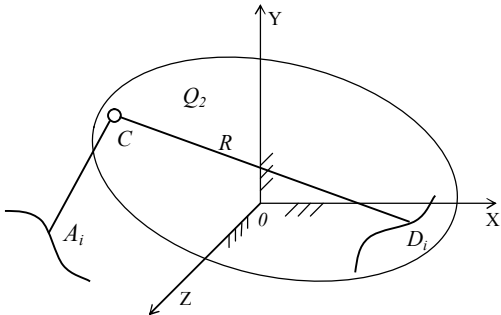
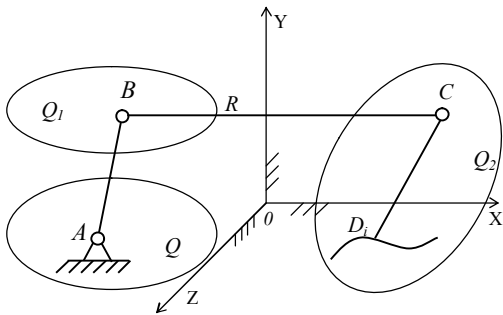
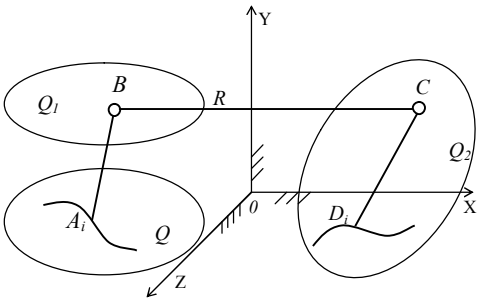
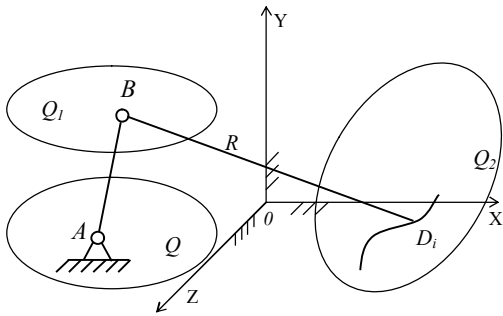
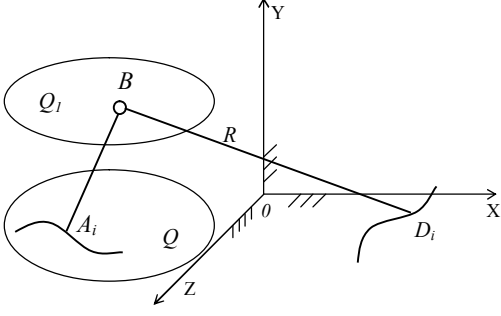
Необходимые условия минимума сумма S принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B)$$

Для нахождения минимума функции S можно опять использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что $x_C = y_C = z_C = 0$.

3. Пусть заданы координаты $x_B, y_B, z_B = 0$ точки B тела Q_1 и эйлеровы углы тела Q_2 $\theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2$. Исходная задача сводится к определению сферы наименее удаленной от N положений фиксированной точки C тела Q_2 (таблица 1.2, рисунок 1-1).

Таблица 1.2

	1	2
1	$x_B=y_B=z_B=0$ $X_A, Y_A, Z_A, R, x_C, y_C, z_C$ 	$x_B=y_B=z_B=0, X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai} x_C, y_C, z_C R$ 
2	$X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$ 	$X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai} x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$ 
3	$x_C=y_C=z_C=0$ $X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B,$ 	$x_C=y_C=z_C=0, X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai} x_B, y_B, z_B, R$ 

Необходимые условия минимума суммы S

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_C, y_C, z_C)$$

Используя приведенный алгоритм синтеза можно получить различные модификации ИКЦ с вращательными парами показанные в таблице 1.2.

Таким образом, как мы видим, решена задача синтеза ИКЦ с вращательными кинематическими парами и их модификации, которые могут быть использованы как модули структурно-кинематического синтеза

пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев.

1.9 Синтез двухэлементного звена со сферической и вращательной кинематическими парами

Пусть задано пространственное движение тела Q_2 по отношению к неподвижной системе координат Q .

Это звено (рисунок 1.20) определяется 9 постоянными параметрами, в число которых входят координаты X_B, Y_B, Z_B центра B сферической пары, координаты X_A, Y_A, Z_A центра A окружности, описываемой точкой B , углы между любыми двумя неподвижными осями координат и осью Q вращательной пары, определяющие направления последней, и расстояние r точки B от оси вращательной пары.

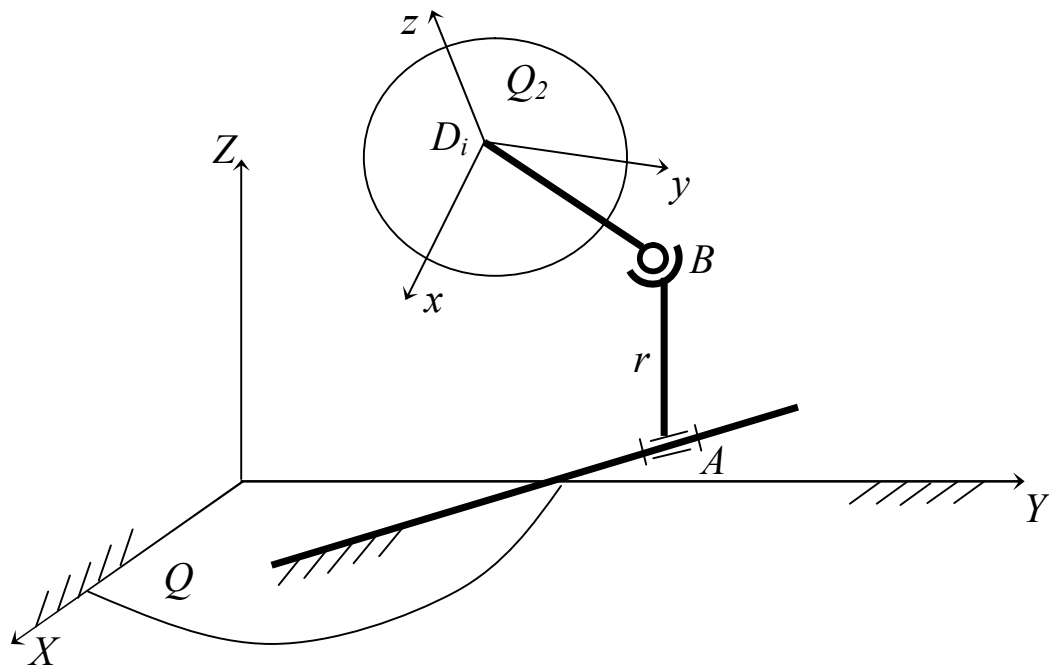


Рисунок 1.20

Синтезируемое звено ограничивает движение точки B по окружности радиуса r с центром в точке A . Если точка B имеет четыре положения B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) на одной окружности, то эти положения будут лежать на бесконечном множестве сфер с центрами на оси Q . Это означает, что система

$$X_i X_A + Y_i Y_A + Z_i Z_A + H = \frac{1}{2} R_i^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (1.174)$$

где

$$H = \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$$

для определения сферы, проведенной через четыре положения точки B тела Q_2 , должна иметь бесконечно много решений. Такое условие может быть выполнено, если ранг расширенной матрицы системы (1.174) и ранг ее матрицы равны трем. Для этого необходимо, чтобы равнялись нулю любые два минора четвертого порядка в расширенной матрице. Первое из этих условий может быть записано в форме уравнения:

$$D_{1234} = \begin{vmatrix} X_i & Y_i & Z_i & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (1.175)$$

Второе условие представим в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} R_i^2 & Y_i & Z_i & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (1.176)$$

Равенство (1.176) с учетом соотношения

$$\begin{bmatrix} X_{Bi} & Y_{Bi} & Z_{Bi} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} X_{Di} & Y_{Di} & Z_{Di} \end{bmatrix}^T + T_i \begin{bmatrix} x_B & y_B & z_B \end{bmatrix}^T \quad (1.177)$$

преобразуется к алгебраическому уравнению третьей степени относительно x_B, y_B, z_B . Система уравнений третьей степени (1.175) и (1.176) с тремя неизвестными определяет геометрическое место точек тела Q_2 , имеющих четыре положения на одной окружности. В любой из этих точек можно расположить центр сферического шарнира проектируемого звена. Зная положения точки B , можно определить параметры присоединяемого звена. Ось вращения Q найдем как геометрическое место центров сфер, проведенных через B_1, B_2, B_3 . Оно определяется пересечением двух плоскостей, которые перпендикулярны соответственно к отрезкам B_1B_2, B_1B_3 и проходят через их середины. Уравнения этих плоскостей получим, вычитая из первого уравнения системы (1.174) второе и третье:

$$(X_1 - X_j)X + (Y_1 - Y_j)Y + (Z_1 - Z_j)Z = \frac{1}{2}(R_1^2 - R_j^2) \quad (j = 2, 3). \quad (1.178)$$

Центр A окружности лежит на пересечении оси Q , задаваемой уравнениями (1.178), и плоскости окружности, которая может быть определена как плоскость, проведенная через точки B_1, B_2, B_3 :

$$D_1X + D_2Y + D_3Z - D_0 = 0, \quad (1.179)$$

где

$$D_1 = \begin{vmatrix} Y_i & Z_i & 1 \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} Z_i & X_i & 1 \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$D_3 = \|X_i Y_i\| \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$D_0 = \|X_i Y_i Z_i\| \quad (i = 1, 2, 3);$$

Направление оси Q определится направляющими косинусами нормали к плоскости (1.179):

$$(Q_x, Q_y, Q_z) = \pm (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2)^{-1/2} (D_1, D_2, D_3). \quad (1.180)$$

Длина r звена равна расстоянию между точками A и B . На основании изложенного выше можно указать алгоритм синтеза звена CB по четырем положениям тела Q_2 :

- 1) выбирают одну из координат x_B, y_B, z_B ;
- 2) из системы уравнений (1.175) и (1.176) находят остальные две координаты;
- 3) по формуле (1.177) вычисляют значения X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, 2, 3$);
- 4) из системы уравнений (1.178), (1.179) определяют координаты X_A, Y_A, Z_A ;
- 5) по формуле (1.180) находят направляющие косинусы оси Q ;
- 6) вычисляют длину звена: $r = \|AB\|$.

1.10 Синтез двухэлементного звена с двумя вращательными кинематическими парами

Рассматриваемое звено (рисунок 1.21) определяется 12 постоянными параметрами, в число которых входят по четыре параметра, определяющих прямые q и Q соответственно в системах $oxyz$ и $OXYZ$ кратчайшее расстояние h , угол γ между этими осями и величины m, l , определяющие точки пересечения M и L общего перпендикуляра q и Q соответственно с осями q и Q . Положения осей q и Q в системах $oxyz$ и $OXYZ$ будем определять так же, как в случае звена ЦЦ, т. е. «тройками» направляющих косинусов (q_x, q_y, q_z) , (Q_x, Q_y, Q_z) и точками пересечения b и B этих осей с плоскостями oxy и OXY . Любая точка (x, y, z) оси q звена BB должна удовлетворять двум условиям: она должна находиться на неизменном расстоянии от точки B и лежать в плоскости, перпендикулярной к оси Q .

Эти условия могут быть выражены в следующем виде:

$$(X_j - X_1)Q_x + (Y_j - Y_1)Q_y + (Z_j - Z_1)Q_z = 0 \quad (j = 2, 3); \quad (1.181)$$

$$(X_j - X_1)X_B + (Y_j - Y_1)Y_B = \frac{1}{2}(R_j^2 - R_1^2) \quad (j = 2, 3). \quad (1.182)$$

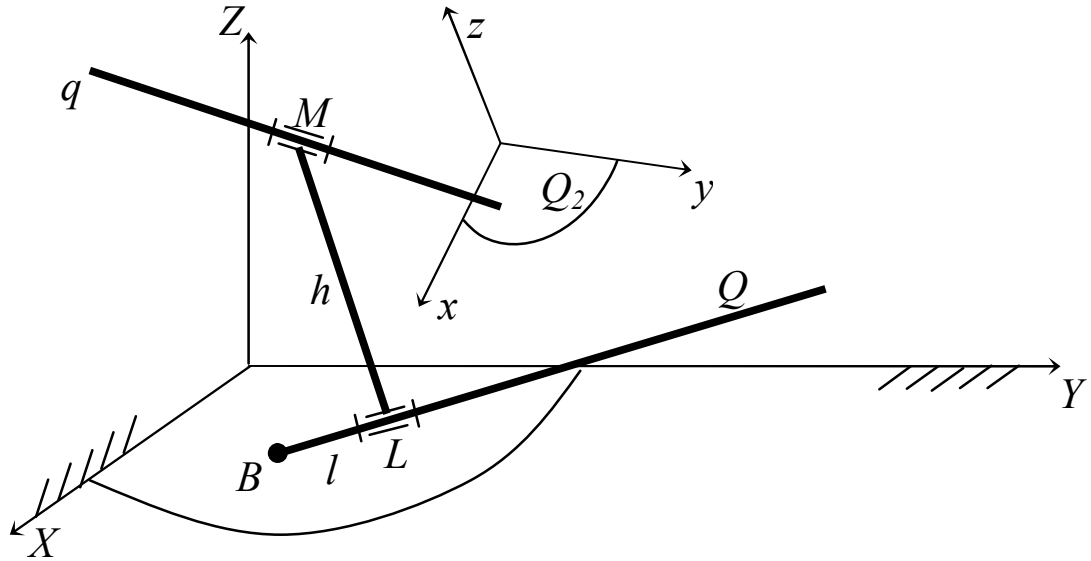


Рисунок 1.21

Уравнения (1.181) представим в следующем виде:

$$(Q_{jx} - Q_{1x})x + (Q_{jy} - Q_{1y})y + (Q_{jz} - Q_{1z})z = -f_{0j} \quad (j = 2, 3), \quad (1.183)$$

где Q_{ix}, Q_{iy}, Q_{iz} ($i = 1, 2, 3$) – направляющие косинусы оси относительно системы $oxyz$ в соответствующих положениях тела Q_2 , которые выражаются через Q_X, Q_Y, Q_Z посредством формул

$$[Q_{ix}, Q_{iy}, Q_{iz}]^t = T_i^{-1} [Q_X, Q_Y, Q_Z]^t, \quad (1.184)$$

а f_{0j} определяют по формуле

$$f_{0j} = (X_{0j} - X_{01})Q_X + (Y_{0j} - Y_{01})Q_Y + (Z_{0j} - Z_{01})Q_Z.$$

Уравнения (1.183) определяют геометрическое место точек тела e , которые в рассматриваемых трех положениях тела Q_2 лежат в плоскостях, перпендикулярных к оси Q с фиксированным направлением (Q_X, Q_Y, Q_Z) . Так как уравнения (1.183) линейны относительно x_B, y_B, z_B , то исследуемое геометрическое место представляет собой прямую, уравнение которой имеет вид

$$x = z \frac{D_x}{D} + \frac{D_{ox}}{D}; \quad y = z \frac{D_y}{D} + \frac{D_{oy}}{D}, \quad (1.185)$$

где

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} Q_{jx} & Q_{1x}Q_{jy} & Q_{1y} \end{vmatrix} & (j=2, 3); \\
D_x &= \begin{vmatrix} Q_{jz} & Q_{1z}Q_{jy} & Q_{1y} \end{vmatrix} & (j=2, 3); \\
D_y &= \begin{vmatrix} Q_{jx} & Q_{1x}Q_{jz} & Q_{1z} \end{vmatrix} & (j=2, 3); \\
D_{0x} &= \begin{vmatrix} f_{0j}Q_{jy} & Q_{1y} \end{vmatrix} & (j=2, 3); \\
D_{0y} &= \begin{vmatrix} Q_{jx} & Q_{1x}f_{0j} \end{vmatrix} & (j=2, 3).
\end{aligned} \tag{1.186}$$

Принимая $z = 0$, из (1.185) получаем зависимость координат x_b, y_b точки b оси q от Q_X, Q_Y, Q_Z :

$$x_b = \frac{D_{0x}}{D}; \quad y_b = \frac{D_{0y}}{D}. \tag{1.187}$$

Аналогично, вводя в (1.185) условие $z = 1$, находим выражения координат точки b' прямой q , лежащей на плоскости $z = 1$ тела Q_2 :

$$x_{b'} = \frac{D_x}{D} + \frac{D_{0x}}{D}; \quad y_{b'} = \frac{D_y}{D} + \frac{D_{0y}}{D}. \tag{1.188}$$

Точкам b' и b оси q должна соответствовать одна и та же точка B оси Q . Эта точка определяется из системы четырех линейных уравнений относительно X_B и Y_B , получаемых из (1.182) введением выражений $X_{bi} = X_i, Y_{bi} = Y_i, X_{b'i} = X'_i, Y_{b'i} = Y'_i$, которые в свою очередь выводятся подстановкой соотношений (1.187), (1.188) в формулу (1.177). Условия совместности этих уравнений будут иметь вид

$$\begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - X_1 & R_2^2 - R_1^2 \\ X_3 - X_1 & Y_3 - X_1 & R_3^2 - R_1^2 \\ X'_2 - X'_1 & Y'_2 - Y'_1 & R'^2_2 - R'^2_1 \end{vmatrix} = 0; \tag{1.189}$$

$$\begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - X_1 & R_2^2 - R_1^2 \\ X_3 - X_1 & Y_3 - X_1 & R_3^2 - R_1^2 \\ X'_3 - X'_1 & Y'_3 - Y'_1 & R'^2_3 - R'^2_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.190}$$

Равенства (1.189), (1.190) посредством формул (1.186)—(1.188) и (1.177) приводятся к двум однородным алгебраическим уравнениям шестой степени

относительно Q_X, Q_Y, Q_Z . Определив из этих уравнений отношения Q_X/Q_Z и Q_Y/Q_Z , далее вычисляем величины Q_X, Q_Y, Q_Z , определяющие направление неподвижной оси вращения Q .

Остальные конструктивные параметры звена BB определяют в следующей последовательности:

по формуле (1.184) находят Q_{ix}, Q_{iy}, Q_{iz} ($i = 1, 2, 3$), а по (1.186) — $D, D_x, D_y, D_{0x}, D_{0y}$;

по формулам (1.187), (1.188) вычисляют координаты точек b и b' оси q ; определяют направляющие косинусы оси q :

$$(q_x, q_y, q_z) = \sqrt{r_b - r_{b'}}^{-1/2} (x_b - x_{b'}, y_b - y_{b'}, -1);$$

из системы (1.182) определяют координаты X_B, Y_B точки B оси Q ;

по формуле (1.191) вычисляют угол γ между осями Q и q ;

$$\cos \gamma_i = Q_X q_{ix} + Q_Y q_{iy} + Q_Z q_{iz} \quad (1.191)$$

по формуле (2.192) находят кратчайшее расстояние между Q и q (длина звена) h ;

$$h_i = \frac{1}{\sin \gamma_i} \begin{vmatrix} X_B - X_{bi} & Y_B - Y_{bi} & -Z_{bi} \\ q_{ix} & q_{iy} & q_{iz} \\ Q_X & Q_Y & Q_Z \end{vmatrix} \quad (1.192)$$

величина l и m , определяющее положение L и M центров вращательных пар на осях Q и q , вычисляют соответственно по формулам

$$l = \frac{\begin{vmatrix} (R_{bi} - R_B)Q & q_i Q \\ (R_{bi} - R_B)q_i & q_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q^2 & q_i Q \\ q_i Q & q_i^2 \end{vmatrix}}, \quad m = \frac{\begin{vmatrix} (R_{bi} - R_B)Q & Q^2 \\ (R_{bi} - R_B)q_i & q_i Q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q^2 & q_i Q \\ q_i Q & q_i^2 \end{vmatrix}}.$$

В итоге решены задачи синтеза пространственных четырехзвенных исходных кинематических цепей (ИКЦ) с различными кинематическими парами по заданным положениям входного и выходного звеньев аналитическим способом.

1. Решена задача синтеза ИКЦ типа BBC и ее модификации.
2. Решена задача синтеза ИКЦ типа BBB и ее модификации.
3. Решена задача синтеза модификации ИКЦ типа BC .
4. Решена задача синтеза модификации ИКЦ типа BB .

В результате синтеза ИКЦ с различными парами можно спроектировать пространственные механизмы по заданным положениям входного и выходного звеньев. Такой подход решения задачи синтеза пространственных рычажных механизмов позволяет автоматизировать все этапы проектирования механизмов. В отличие от других методов такой подход решения задачи синтеза позволяет определить все искомые параметры механизма в аналитическом виде.

2 Кинематический синтез исходных кинематических цепей с вращательными сферическими и цилиндрическими кинематическими парами

2.1 О существовании решения задачи синтеза исходной кинематической цепи со сферическими кинематическими парами

В данном разделе работы рассмотрим существование решения задачи синтеза ИКЦ со сферическими кинематическими парами [111, 140].

Суть решения задачи ИКЦ со сферическими кинематическими парами заключается в следующем: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \psi_i^1, \theta_i^1, \phi_i^1)$ и $Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}, \psi_i^2, \theta_i^2, \phi_i^2)$ где ψ_i^j, θ_i^j и ϕ_i^j – Эйлеровы углы относительно неподвижной системы координат $OXYZ$, ($i = \overline{1, N}; j = \overline{1, 2}$).

Требуется найти такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A) \in Q_1$, $B(x_B, y_B, z_B) \in Q_1$ и $C(x_C, y_C, z_C) \in Q_2$, чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R (рисунок 2.1).

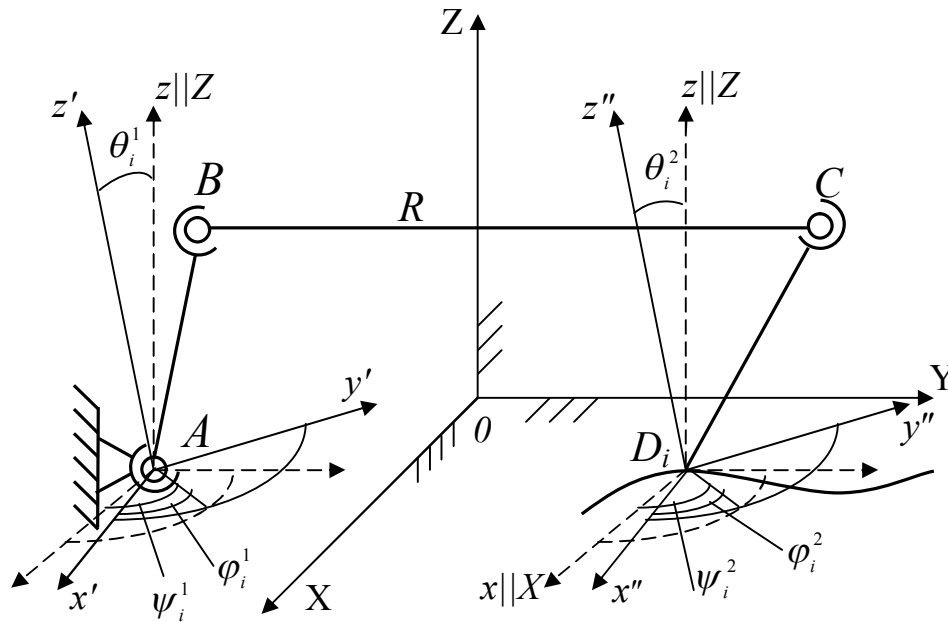


Рисунок 2.1

Для решения задачи введем взвешенную разность для i -го положения тел в виде:

$$\Delta_{qi} = \overline{B_i C_i}^2 - R^2 = (X_{C_i} - X_{B_i})^2 + (Y_{C_i} - Y_{B_i})^2 + (Z_{C_i} - Z_{B_i})^2 - R^2, (i = \overline{1, N}). \quad (2.1)$$

Она является функцией десяти искомых параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Группируя эти параметры по четыре с общим параметром R , выражение (2.1) представим в трех различных формах:

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = (\tilde{X}_{Ai} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A)^2 - R^2, \quad (2.2)$$

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = (\tilde{x}_{Bi} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{Bi} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{Bi} - z_B)^2 - R^2, \quad (2.3)$$

$$\Delta_{q_i}^{(3)} = (\tilde{x}_{Ci} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{Ci} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{Ci} - z_C)^2 - R^2, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{Ai} \\ \tilde{Y}_{Ai} \\ \tilde{Z}_{Ai} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & [T_{10}^i] & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & [T_{20}^i] & & \\ & & X_{D_i} & \\ & & Y_{D_i} & \\ & & Z_{D_i} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{Bi} \\ \tilde{y}_{Bi} \\ \tilde{z}_{Bi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & [T_{01}^i] & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & [T_{21}^i] & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{Ci} \\ \tilde{y}_{Ci} \\ \tilde{z}_{Ci} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & [T_{02}^i] & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & [T_{12}^i] & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

где $[T_{kj}^i]$ – матрица перехода от k – той системы координат к j – той системе, определяемые как в (1.17)

$$T_{jo}^i = \begin{bmatrix} e_{i1}^j & e_{i2}^j & e_{i3}^j \\ m_{i1}^j & m_{i2}^j & m_{i3}^j \\ n_{i1}^j & n_{i2}^j & n_{i3}^j \end{bmatrix}, \quad (j = \overline{1,2}; \quad i = \overline{1,N}) \quad (2.8)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{i1}^j = \cos \psi_i^j \cdot \cos \varphi_i^j - \cos \theta_i^j \cdot \sin \psi_i^j \cdot \sin \varphi_i^j \\ m_{i1}^j = \sin \psi_i^j \cdot \cos \varphi_i^j + \cos \theta_i^j \cdot \cos \psi_i^j \cdot \cos \varphi_i^j \\ n_{i1}^j = \sin \theta_i^j \cdot \sin \varphi_i^j \\ e_{i2}^j = -\cos \psi_i^j \cdot \sin \varphi_i^j - \cos \theta_i^j \cdot \sin \psi_i^j \cdot \cos \varphi_i^j \\ m_{i2}^j = -\sin \psi_i^j \cdot \sin \varphi_i^j + \cos \theta_i^j \cdot \cos \psi_i^j \cdot \sin \varphi_i^j \\ n_{i2}^j = \sin \theta_i^j \cdot \cos \varphi_i^j \\ e_{i3}^j = \sin \theta_i^j \cdot \sin \psi_i^j \\ m_{i3}^j = -\sin \theta_i^j \cdot \cos \psi_i^j \\ n_{i3}^j = \cos \varphi_i^j \end{array} \right. \quad (2.9)$$

$$T_{01}^i = [T_{10}^i]^T; \quad T_{02}^i = [T_{20}^i]^T; \quad T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i; \quad T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i, \dots \quad (2.10)$$

С учетом необходимых условий минимума суммы квадратов взвешенной разности

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^2 \quad (2.11)$$

получены три системы уравнений, решение которых записаны в следующем виде относительных искоемых параметров:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{xA}, D_{yA}, D_{zA}, D_{H1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (2.12)$$

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{xB}, D_{yB}, D_{zB}, D_{H2}) \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (2.13)$$

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3} (D_{xC}, D_{yC}, D_{zC}, D_{H3}) \quad (\text{при } D_3 \neq 0) \quad (2.14)$$

Для решения данной задачи в разделе 1.1 приведен алгоритм поиска минимума функции суммы S .

Однако изложенный алгоритм синтеза параметров ИКЦ со сферическими кинематическими парами по заданным положениям тел Q_1 и Q_2 не дает результатов в тех вырожденных случаях, когда один из определителей D_i ($i=1,3$) в ходе итерации обращается в нуль (2.12), (2.13), (2.14), тем самым в ходе синтеза ИКЦ со сферическими кинематическими парами возможны случаи, когда условия вырождения (2.12), (2.13) и (2.14) могут встречаться в

различных сочетаниях. Общее число вариантов указанных сочетаний, включая и невырожденный случай

$$C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 8.$$

Таким образом, при синтезе ИКЦ со сферическими кинематическими парами по заданным положениям тел Q_1 и Q_2 можно получить восемь различных структурных вариантов ИКЦ. Тем самым при различных сочетаниях $D_i = 0$ ($i = \overline{1,3}$) пришли к следующему утверждению.

Теорема: Если два смежных звена незамкнутой четырехзвенной ИКЦ со сферическими кинематическими парами, стремятся к бесконечности, то необходимо заменить сферическую кинематическую пару на плоскостную или цилиндрическую.

Доказательство: Если в выражение (2.12) $D_1 = 0$, то $(X_A, Y_A, Z_A) \rightarrow \infty$ и центр приближающей окружности к сфере будет лежать на плоскости или прямой. Тогда кроме искомых параметров ИКЦ $B(x_B, y_B, z_B) \in Q_1$ и $C(x_C, y_C, z_C) \in Q_2$ с общим параметром R , на неподвижной системе координат $OXYZ$ вместо точки $A(X_A, Y_A, Z_A) \in Q$ необходимо определить коэффициенты a, b, c плоскости q .

$$aX_i + bY_i + cZ_i + 1 = 0 \quad (i = \overline{1, N}) \quad (2.15)$$

Синтезируемое звено AB ограничивает движение точки B тела Q_1 по плоскости q . Следовательно, коэффициенты точки B должны удовлетворять уравнению плоскости в заданных $N \leq 9$ положениях. После определения a, b, c коэффициентов плоскости выбираются конструктивные параметры плоскостной пары. Эквивалентная кинематическая цепь с двумя призматическими парами показана на рисунке 2.2, оси которых параллельны плоскости q .

Аналогично, когда N заданных положений тела Q_1 , определяемых координатами $(\tilde{X}_{B_i}, \tilde{Y}_{B_i}, \tilde{Z}_{B_i})$ ($i = \overline{1, N}$), лежат на плоскости (прямой), то $D_2 = 0$.

Если $\tilde{X}_{B_i} = \tilde{Y}_{B_i} = \tilde{Z}_{B_i} \neq 0$, т.е. эти точки не совпадают с началом координат Axy , то система (2.13) также несовместна, $x_B, y_B, z_B, H_2 \rightarrow \infty$ и центр приближающей окружности к сфере бесконечно удален. Тогда в теле Q_1 необходимо определить плоскость или прямую (2.15) с коэффициентами a, b, c , в теле Q_2 точку C с координатами x_C, y_C, z_C и на неподвижной плоскости точку $A(X_A, Y_A, Z_A)$. Эквивалентная четырехзвенная кинематическая цепь ACD с цилиндрическими и сферическими парами показана на рисунке 2.3.

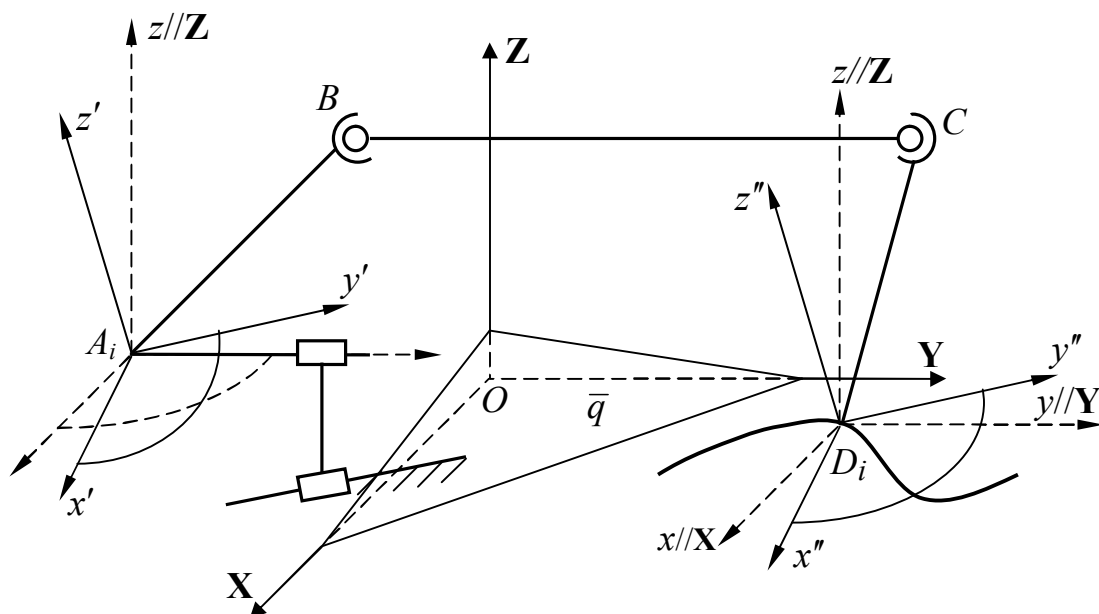


Рисунок 2.2

В последнем случае, когда все N заданных условий синтеза точек подвижного тела Q_2 , определяемых координатами $(\tilde{x}_{c_i}, y_{c_i}, z_{c_i}), (i = \overline{1, N})$ лежат на одной прямой (плоскости), то $D_3 = 0$.

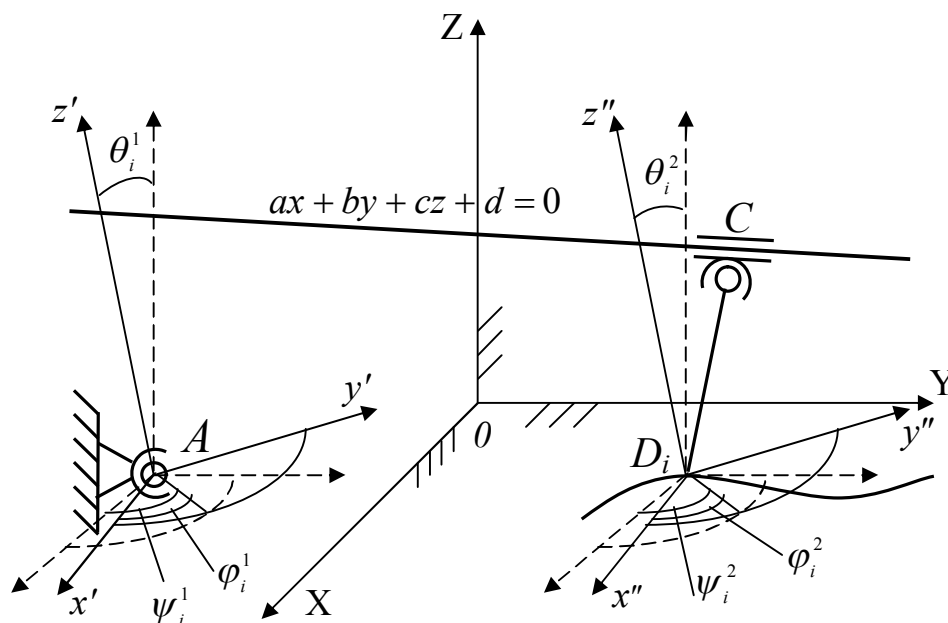


Рисунок 2.3

Если, $\tilde{x}_{c_i} = \tilde{y}_{c_i} = \tilde{z}_{c_i} \neq 0$, т.е. эти точки не совпадают с началом координат $Dx'y'z'$, то система (2.14) несовместно, $x_c, y_c, z_c, H_3 \rightarrow \infty$ и центр приближающей окружности к сфере бесконечно удален. В этом случае на теле Q_2 требуется найти прямую, на теле Q_1 точку $B(x_B, y_B, z_B)$ и на теле Q точку $A(x_A, y_A, z_A)$ во всех заданных положениях. Эквивалентная четырехзвенная

кинематическая цепь ABD с цилиндрическими и сферическими парами показана на рисунке 2.4.

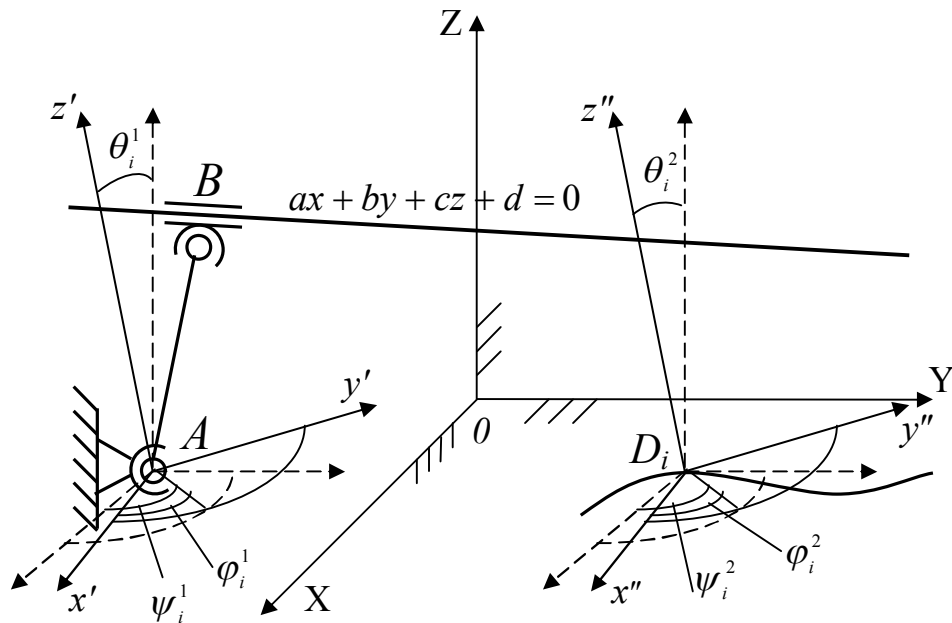


Рисунок 2.4

Таким образом, при синтезе ИКЦ со сферическими кинематическими парами по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма, в случае, когда два смежных звена ИКЦ стремятся к бесконечности, необходимо заменить сферическую кинематическую пару плоскостной или цилиндрической. В таком случае, после определения искомых параметров, синтезируемый механизм имеет вид пространственного кулисного механизма.

2.2 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, плоскостной и сферической кинематическими парами

В данном разделе рассматривается задача синтеза пространственных исходных кинематических цепей (ИКЦ) с вращательной, плоскостной и сферической кинематическими парами по заданным положениям входного и выходного звеньев основанный на введении двух подвижных тел, неизменно связанных с входным и выходным звеньями [112].

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел Q_1 и Q_2 : $Q_1(x_A, y_A, z_A, \psi_{1i}, \theta_{1i}, \phi_{1i})$, $Q_2(x_{Di}, y_{Di}, z_{Di}, \psi_{2i}, \theta_{2i}, \phi_{2i})$, ($i = \overline{1, N}$),

где ψ_{ji} , θ_{ji} , ϕ_{ji} - углы Эйлера относительно неподвижной системы координат $OXYZ$ (рисунок 2.3).

Требуется найти на теле Q точку $A(X_A, Y_A, Z_A)$, на теле Q_1 найти плоскость

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (2.16)$$

и на теле Q_2 точку $C(x_C, y_C, z_C)$, которая в ее движении относительно тела Q_1 приближалась к искомой плоскости (2.16). Уравнение плоскости (2.16) на неподвижном теле Q определяется по известным формулам преобразования

$$\begin{aligned} & a[(X_{Ci} - X_A)t_{11} + (Y_{Ci} - Y_A)t_{21} + (Z_{Ci} - Z_A)t_{31}] + \\ & + e[(X_{Ci} - X_A)t_{12} + (Y_{Ci} - Y_A)t_{22} + (Z_{Ci} - Z_A)t_{32}] + \\ & + c[(X_{Ci} - X_A)t_{13} + (Y_{Ci} - Y_A)t_{23} + (Z_{Ci} - Z_A)t_{33}] + d = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

где ψ_{ji}, φ_{ji} - углы заданы, а угол $\theta_{ji} = 0, j=1.2, i=\overline{1, N}$.

$$\alpha_{ji} = \psi_{1i} + \varphi_{1i}, \beta_{ji} = \psi_{2i} + \varphi_{2i}$$

$$\begin{bmatrix} X_{Ci} \\ Y_{Ci} \\ Z_{Ci} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & -\sin(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & 0 & X_{Di} \\ \sin(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & \cos(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & 0 & Y_{Di} \\ 0 & 0 & 1 & Z_{Di} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} t_{11} &= \cos(\psi_{1i} + \varphi_{1i}), \quad t_{21} = \sin(\psi_{1i} + \varphi_{1i}), \\ t_{12} &= -\sin(\psi_{1i} + \varphi_{1i}), \quad t_{22} = \cos(\psi_{1i} + \varphi_{1i}), \\ t_{33} &= 1, \quad t_{13} = t_{31} = t_{23} = t_{32} = t_{41} = t_{42} = t_{43} = 0. \end{aligned}$$

После подстановки выражения (2.18) в формулу (2.17) и соответствующих преобразований составим взвешенную разность Δq_i точки $C_i(x_C, y_C, z_C)$ от плоскости (2.17) в виде:

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= G_1 \cos \alpha_{ji} + G_2 \sin \alpha_{ji} + G_3 \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_4 \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_5 X_i + \\ &+ G_6 Y_i + G_7 Z_i + G_8 + G_9 - 1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= -(aX_A + eY_A), \quad G_2 = eX_A - aY_A, \\ G_3 &= ax_C + ey_C, \quad G_4 = ay_C - ex_C, \\ G_5 &= a, \quad G_6 = e, \quad G_7 = c, \quad G_8 = cz_C, \quad G_9 = -cZ_A. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ji} & \sin \alpha_{ji} & 0 \\ -\sin \alpha_{ji} & \cos \alpha_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{Di} \\ Y_{Di} \\ Z_{Di} \end{bmatrix}$$

Отметим, что в выражение (2.17) входит десять искоемых параметров, но после нормализации уравнения прямой $d = -1$ остаются девять искоемых параметров. Это коэффициенты уравнения плоскости a, b, c , координаты X_A, Y_A, Z_A точки $A \in Q$ и координаты x_C, y_C, z_C точки $C \in Q_2$.

Составим сумму квадратов взвешенной разности для N положений

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i]^2 \quad (i = 1, N).$$

Условия стационарности по переменным

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0 \quad (j = G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9);$$

приводят к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно $G_1 \div G_9$;

$$A \cdot \overline{G} = \overline{B} \quad (2.20)$$

где элемент матрицы A (9,9):

$$a_{11} = \sum \cos^2 \alpha_{ji}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \sum \sin \alpha_{ji} \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{13} = a_{31} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{14} = a_{41} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji})$$

$$a_{15} = a_{51} = \sum X_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \quad a_{16} = a_{61} = \sum Y_i \cdot \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{17} = a_{71} = \sum Z_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \quad a_{18} = a_{81} = \sum \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{19} = a_{91} = \sum \cos \alpha_{ji}, \quad a_{22} = \sum \sin^2 \alpha_{ji},$$

$$a_{23} = a_{32} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{24} = a_{42} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{25} = a_{52} = \sum X_i \cdot \sin \alpha_{ji}, \quad a_{26} = a_{62} = \sum Y_i \cdot \sin \alpha_{ji},$$

$$a_{27} = a_{72} = \sum Z_i \cdot \sin \alpha_{ji}, \quad a_{28} = a_{82} = \sum \sin \alpha_{ji},$$

$$a_{29} = a_{92} = \sum \sin \alpha_{ji}, \quad a_{33} = \sum \cos^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{34} = a_{43} = \frac{1}{2} \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{35} = a_{53} = \sum X_i \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{36} = a_{63} = \sum Y_i \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{37} = a_{73} = \sum Z_i \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{38} = a_{83} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{39} = a_{93} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{44} = \sum \sin^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{45} = a_{54} = \sum X_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{46} = a_{64} = \sum Y_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{47} = a_{74} = \sum Z_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{48} = a_{84} = a_{46} = a_{94} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{55} = \sum X_i^2, \quad a_{66} = \sum Y_i^2, \quad a_{77} = \sum Z_i^2, \quad a_{88} = a_{99} = N,$$

$$a_{56} = a_{65} = \sum X_i^2, \quad a_{57} = a_{75} = \sum X_i Z_i, \quad a_{58} = a_{85} = a_{59} = a_{95} = \sum X_i,$$

$$a_{67} = a_{76} = \sum Y_i Z_i, \quad a_{68} = a_{69} = a_{86} = a_{96} = \sum Y_i,$$

$$a_{78} = a_{79} = a_{87} = a_{97} = \sum Z_i, \quad a_{89} = a_{98} = 1$$

$$\overline{G} = [G_1, \dots, G_9]^T$$

$$\overline{B} = [\sum \cos \alpha_{ji}, \sum \sin \alpha_{ji}, \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \sum X_i, \sum Y_i, \sum Z_i, N, N]^T$$

Решение системы (2.20) позволяет определить искомые параметры синтеза. При фиксированном значении координаты стойки $D(X_D, Y_D, Z_D)$ выходного звена кулисного механизма можно определить девять искомых параметров синтеза:

$$X_A = -\frac{aG_1 - bG_2}{a^2 + b^2}, \quad Y_A = -\frac{bG_1 + aG_2}{a^2 + b^2}, \quad Z_A = -\frac{G_9}{G_7},$$

$$x_C = \frac{aG_3 - bG_4}{a^2 + b^2}, \quad y_C = \frac{aG_4 + bG_3}{a^2 + b^2}, \quad z_C = \frac{G_8}{G_7},$$

$$a = G_5, \quad b = G_6, \quad c = G_7, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \quad c \neq 0.$$

Таким образом, по заданным положениям входного и выходного звеньев передаточных механизмов можно синтезировать пространственные кулисные

механизмы типа *ВПлСВ* (*В* – вращательная, *Пл*–плоскостная, *С* – сферическая кинематические пары).

Теперь рассмотрим вопрос выбора нормализации коэффициентов уравнения плоскости *a*, *в*, *с*. При нормализации $d = -1$ получим взвешенную разность (2.18). При $a = -1$, $в = -1$, $с = -1$ в выражение (2.18) получим точные выражения отклонений $(\Delta_i)_x$, $(\Delta_i)_y$, $(\Delta_i)_z$ точек C_i соответственно по осям *OX*, *OY*, *OZ*, которые являются взвешенными по отношению к отклонению Δ_i по нормали. Поэтому нельзя наперед сказать, какая нормализация наилучшая и поэтому целесообразно рассматривать все четыре случая.

1. Пусть $a = -1$. Тогда взвешенная разность с учетом (2.19) имеет вид

$$\Delta q_i = G_1 \cos \alpha_{ji} + G_2 \sin \alpha_{ji} + G_3 \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_4 \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_5 Y_i + G_6 Z_i + G_7 + G_8 + G_9 - X_i \quad (2.21)$$

где $G_i = X_A - в Y_A, G_2 = Y_A + в X_A, G_3 = -x_C + в y_C,$
 $G_4 = -(в x_C + y_C), G_5 = в, G_6 = с, G_7 = с z_C, G_8 = с Z_A, G_9 = d.$

Из условия стационарности суммы $S = \sum [\Delta q_i]^2$

$$\frac{dS}{dj} = 0, \quad (j = G_1 \div G_9) \quad (2.22)$$

с учетом (2.21) получим следующую линейную систему:

$$A \overline{G} = \overline{B} \quad (2.23)$$

где элементы матрицы $A(9,9)$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum \cos^2 \alpha_{ji}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \cos \alpha_{ji}, \\ a_{13} &= a_{31} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{14} = a_{41} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\ a_{15} &= a_{51} = \sum Y_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \quad a_{16} = a_{61} = \sum Z_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \\ a_{17} &= a_{71} = \sum \cos \alpha_{ji}, \quad a_{18} = a_{81} = \sum \cos \alpha_{ji}, \\ a_{19} &= a_{91} = \sum \cos \alpha_{ji}, \quad a_{22} = \sum \sin^2 \alpha_{ji}, \\ a_{23} &= a_{32} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{24} = a_{42} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\ a_{25} &= a_{52} = \sum Y_i \cdot \sin \alpha_{ji}, \quad a_{26} = a_{62} = \sum Z_i \cdot \sin \alpha_{ji}, \\ a_{27} &= a_{72} = \sum \sin \alpha_{ji}, \quad a_{28} = a_{82} = \sum \sin \alpha_{ji}, \\ a_{29} &= a_{92} = \sum \sin \alpha_{ji}, \quad a_{33} = \sum \cos^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{34} = a_{43} &= \frac{1}{2} \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), a_{35} = a_{53} = \sum Y_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
a_{36} = a_{63} &= \sum Z_i \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), a_{37} = a_{73} = \sum \cos \alpha_{ji} (\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
a_{38} = a_{83} &= \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), a_{39} = a_{93} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
a_{44} &= \sum \sin^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), a_{45} = a_{54} = \sum Y_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
a_{46} = a_{64} &= \sum Z_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), a_{47} = a_{74} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
a_{48} = a_{88} &= \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), a_{49} = a_{94} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
a_{55} &= \sum Y_i^2, a_{56} = a_{65} = \sum Y_i Z_i, a_{57} = a_{75} = \sum Y_i, \\
a_{58} = a_{85} &= \sum Y_i, a_{59} = a_{95} = \sum Y_i, \\
a_{66} &= \sum Z_i^2, a_{67} = a_{76} = \sum Z_i, a_{68} = a_{86} = \sum Z_i, \\
a_{69} = a_{96} &= \sum Z_i, a_{77} = a_{88} = a_{99} = N \\
a_{78} = a_{87} &= a_{79} = a_{97} = a_{89} = a_{98} = 1. \\
X &= [G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9]^T, \\
B &= [\sum X_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \sum X_i \sin \alpha_{ji}, \sum X_i \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \sum X_i \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
&\quad \sum X_i Y_i, \sum X_i Z_i, \sum X_i, \sum Y_i, \sum Z_i]^T.
\end{aligned}$$

Решение системы (2.23) позволяет определить искомые параметры в следующем виде:

$$\begin{aligned}
X_A &= \frac{G_1 + bG_2}{1 + b^2}, & Y_A &= \frac{G_2 - bG_1}{1 + b^2}, & Z_A &= -\frac{G_8}{G_6}, \\
x_C &= -\frac{G_3 - bG_4}{1 + b^2}, & y_C &= \frac{-G_4 + bG_3}{1 + b^2}, & z_C &= \frac{G_7}{G_6}, \\
b &= G_5, & c &= G_6, & d &= G_9.
\end{aligned}$$

В результате решения данной задачи определяются координаты точек $A(X_A, Y_A, Z_A) \in Q$, $C(x_C, y_C, z_C) \in Q_2$ и плоскости на теле Q_1 такие, что совмещая с ними плоскостные и сферические кинематические пары получим в виде незамкнутой пространственной кинематической цепи ACD типа $ВПлС$ ($В$ – вращательная, $Пл$ – плоскостная, $С$ – сферическая кинематические пары).

2. Пусть $\epsilon = -1$. Тогда взвешенная разность с учетом (2.19) имеет вид

$$\begin{aligned}
\Delta q_i &= G_1 \cos \alpha_{ji} + G_2 \sin \alpha_{ji} + G_3 \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_4 \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + \\
&+ G_5 X_i + G_6 Z_i + G_7 + G_8 + G_9 - Y_i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1 &= Y_A - aX_A, & G_2 &= -X_A - aY_A, & G_3 &= ax_C - y_C, \\
\text{где } G_4 &= x_C + ay_C, & G_5 &= a, & G_6 &= c, & G_7 &= cz_C, & G_8 &= cZ_A, & G_9 &= d, \\
X_i &= X_{Di} \cos \alpha_{ji} + Y_{Di} \sin \alpha_{ji}, & Y_i &= -X_{Di} \sin \alpha_{ji} + Y_{Di} \cos \alpha_{ji}
\end{aligned}$$

Из условия стационарности суммы $S = \sum [\Delta q_i]^2$

$$\frac{dS}{dj} = 0, \quad (j = G_1 \div G_9)$$

с учетом Δ_{q_i} получим следующую линейную систему:

$$\overline{A} \overline{G} = \overline{B}$$

где элементы матрицы $A(9,9)$:

$$a_{11} = \sum \cos^2 \alpha_{ji}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{13} = a_{31} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{14} = a_{41} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{15} = a_{51} = \sum X_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \quad a_{16} = a_{61} = \sum Z_i \cdot \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{17} = a_{71} = \sum \cos \alpha_{ji}, \quad a_{18} = a_{81} = \sum \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{19} = a_{91} = \sum \cos \alpha_{ji}, \quad a_{22} = \sum \sin^2 \alpha_{ji},$$

$$a_{23} = a_{32} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{24} = a_{42} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{25} = a_{52} = \sum X_i \cdot \sin \alpha_{ji}, \quad a_{26} = a_{62} = \sum Z_i \cdot \sin \alpha_{ji},$$

$$a_{27} = a_{72} = \sum \sin \alpha_{ji}, \quad a_{28} = a_{82} = \sum \sin \alpha_{ji},$$

$$a_{29} = a_{92} = \sum \sin \alpha_{ji}, \quad a_{33} = \sum \cos^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{34} = a_{43} = \frac{1}{2} \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{35} = a_{53} = \sum X_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{36} = a_{63} = \sum Z_i \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{37} = a_{73} = \sum \cos \alpha_{ji} (\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{38} = a_{83} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{39} = a_{93} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{44} = \sum \sin^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{45} = a_{54} = \sum X_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{46} = a_{64} = \sum Z_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{47} = a_{74} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{48} = a_{88} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{49} = a_{94} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{55} = \sum X_i^2, a_{56} = a_{65} = \sum X_i Z_i, \quad a_{57} = a_{75} = \sum X_i,$$

$$a_{58} = a_{85} = \sum X_i, \quad a_{59} = a_{95} = \sum X_i,$$

$$a_{66} = \sum Z_i^2, \quad a_{67} = a_{76} = \sum Z_i, a_{68} = a_{86} = \sum Z_i,$$

$$a_{69} = a_{96} = \sum Z_i, a_{77} = a_{88} = a_{99} = N$$

$$a_{78} = a_{87} = a_{79} = a_{97} = a_{89} = a_{98} = 1.$$

$$X = [G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9]^T,$$

$$B = \left[\sum Y_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \quad \sum Y_i \sin \alpha_{ji}, \quad \sum Y_i \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad \sum Y_i \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \right. \\ \left. \sum Y_i Y_i, \quad \sum Y_i Z_i, \quad \sum Y_i, \quad \sum Y_i, \quad \sum Y_i \right]^T.$$

Решение системы позволяет определить искомые параметры в следующем виде:

$$X_A = \frac{-G_2 - aG_1}{1 + a^2}, \quad Y_A = \frac{-aG_2 + G_1}{1 + a^2}, \quad Z_A = -\frac{G_8}{G_6},$$

$$x_C = \frac{aG_3 + G_4}{1 + a^2}, \quad y_C = \frac{aG_4 - G_3}{1 + a^2}, \quad z_C = \frac{G_7}{G_6},$$

$$b = G_5, \quad c = G_6, \quad d = G_9.$$

В результате решения данной задачи определяются координаты точек $A(X_A, Y_A, Z_A) \in Q$, $C(x_C, y_C, z_C) \in Q_2$ и плоскости на теле Q_1 такие, что совмещая с ними плоскостные и сферические кинематические пары получим в виде незамкнутой пространственной кинематической цепи ACD типа $ВПлС$ ($В$ – вращательная, $Пл$ – плоскостная, $С$ – сферическая кинематические пары).

3. Пусть $c = -1$. Тогда взвешенная разность с учетом (2.19) имеет вид

$$\Delta q_i = G_1 \cos \alpha_{ji} + G_2 \sin \alpha_{ji} + G_3 \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_4 \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + \\ + G_5 X_i + G_6 Y_i + G_7 + G_8 + G_9 - Z_{Di}$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= -aX_A - bY_A, & G_2 &= bX_A - aY_A, & G_3 &= ax_C + by_C, \\ G_4 &= (ay_C - bx_C), & G_5 &= a, & G_6 &= b, & G_7 &= z_C, & G_8 &= Z_A, & G_9 &= d. \end{aligned}$$

Из условия стационарности суммы $S = \sum [\Delta q_i]^2$

$$\frac{dS}{dj} = 0, \quad (j = G_1 \div G_9)$$

с учетом Δ_{q_i} получим следующую линейную систему:

$$\overline{A} \overline{G} = \overline{B}$$

где элементы матрицы $A(9,9)$:

$$a_{11} = \sum \cos^2 \alpha_{ji}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{13} = a_{31} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{14} = a_{41} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{15} = a_{51} = \sum X_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \quad a_{16} = a_{61} = \sum Y_i \cdot \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{17} = a_{71} = \sum \cos \alpha_{ji}, \quad a_{18} = a_{81} = \sum \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{19} = a_{91} = \sum \cos \alpha_{ji}, \quad a_{22} = \sum \sin^2 \alpha_{ji},$$

$$a_{23} = a_{32} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{24} = a_{42} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{25} = a_{52} = \sum X_i \cdot \sin \alpha_{ji}, \quad a_{26} = a_{62} = \sum Y_i \cdot \sin \alpha_{ji},$$

$$a_{27} = a_{72} = \sum \sin \alpha_{ji}, \quad a_{28} = a_{82} = \sum \sin \alpha_{ji},$$

$$a_{29} = a_{92} = \sum \sin \alpha_{ji}, \quad a_{33} = \sum \cos^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{34} = a_{43} = \frac{1}{2} \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{35} = a_{53} = \sum X_i \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{36} = a_{63} = \sum Y_i \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{37} = a_{73} = \sum \cos \alpha_{ji} (\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{38} = a_{83} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{39} = a_{93} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{44} = \sum \sin^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{45} = a_{54} = \sum X_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{46} = a_{64} = \sum Y_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{47} = a_{74} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{48} = a_{88} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{49} = a_{94} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{55} = \sum X_i^2, \quad a_{56} = a_{65} = \sum X_i Y_i, \quad a_{57} = a_{75} = \sum X_i,$$

$$a_{58} = a_{85} = \sum X_i, \quad a_{59} = a_{95} = \sum X_i,$$

$$a_{66} = \sum Y_i^2, \quad a_{67} = a_{76} = \sum Y_i, \quad a_{68} = a_{86} = \sum Y_i,$$

$$a_{69} = a_{96} = \sum Y_i, \quad a_{77} = a_{88} = a_{99} = N$$

$$a_{78} = a_{87} = a_{79} = a_{97} = a_{89} = a_{98} = 1.$$

$$X = [G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9]^T,$$

$$B = \left[\sum Z_{Di} \cdot \cos \alpha_{ji}, \sum Z_{Di} \sin \alpha_{ji}, \sum Z_{Di} \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \sum Z_{Di} \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \right. \\ \left. \sum Z_{Di} X_i, \sum Z_{Di} Y_i, \sum Z_{Di}, \sum Z_{Di}, \sum Z_{Di} \right]^T.$$

Решение системы позволяет определить искомые параметры в следующем виде:

$$X_A = \frac{bG_2 - aG_1}{a^2 + b^2}, \quad Y_A = -\frac{bG_1 + aG_2}{a^2 + b^2}, \quad Z_A = G_8,$$

$$x_C = \frac{aG_3 - bG_4}{a^2 + b^2}, \quad y_C = \frac{aG_4 + bG_3}{a^2 + b^2}, \quad z_C = G_7$$

$$a = G_5, \quad b = G_6, \quad d = G_9.$$

В результате решения данной задачи определяются координаты точек $A(X_A, Y_A, Z_A) \in Q$, $C(x_C, y_C, z_C) \in Q_2$ и плоскости на теле Q_1 такие, что совмещая с ними цилиндрические и сферические кинематические пары получим в виде незамкнутой пространственной кинематической цепи ACD типа $ВПлС$ ($В$ – вращательная, $Пл$ – плоскостная, $С$ – сферическая кинематические пары).

В случаях нормализации $d = -1$ ход решения задачи остается аналогичным.

Фиксируя или задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, можно получить различные модификации ИКЦ с плоскостными и сферическими парами:

а) Пусть даны координаты X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai} точки A , координаты X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di} точки D и углы Эйлера $Q_1(\psi_{1i}, \theta_{1i}, \varphi_{1i}), Q_2(\psi_{2i}, \theta_{2i}, \varphi_{2i})$. Тогда в результате синтеза можно получить трехзвенную пространственную ИКЦ ACD .

$$\Delta q_i = G_1 \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_2 \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_3 X_i + G_4 Y_i + G_5 Z_i + G_6 - 1,$$

где

$$G_1 = (ax_c + by_c), \quad G_2 = ay_c - bx_c,$$

$$G_3 = a, \quad G_4 = b,$$

$$G_5 = c, \quad G_6 = cz_c.$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ji} & \sin \alpha_{ji} & 0 \\ -\sin \alpha_{ji} & \cos \alpha_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{Di} - X_{Ai} \\ Y_{Di} - Y_{Ai} \\ Z_{Di} - Z_{Ai} \end{bmatrix}$$

Составим сумму квадратов взвешенной разности для N положений

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i]^2 \quad (i = 1, N).$$

Условия стационарности по переменным

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0 \quad (j = G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6);$$

приводят к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно $G_1 \div G_6$;

$$A \cdot \overline{G} = \overline{B}$$

где элемент матрицы A (6,6):

$$a_{11} = \sum \cos^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{13} = a_{31} = \sum X_i \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{14} = a_{41} = \sum Y_i \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{15} = a_{51} = \sum Z_i \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{16} = a_{61} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{22} = \sum \sin^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{23} = a_{32} = \sum X_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{24} = a_{42} = \sum Y_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{25} = a_{52} = \sum Z_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{26} = a_{62} = \sum \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{33} = \sum X_i^2,$$

$$a_{34} = a_{43} = \sum X_i Y_i, \quad a_{35} = a_{53} = \sum X_i Z_i, \quad a_{36} = a_{63} = \sum X_i,$$

$$a_{44} = \sum Y_i^2, \quad a_{45} = a_{54} = \sum Y_i Z_i, \quad a_{46} = a_{64} = \sum Y_i,$$

$$a_{55} = \sum Z_i^2, \quad a_{56} = a_{65} = \sum Z_i, \quad a_{66} = N$$

$$X = [G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6]^T,$$

$$B = [\sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \sum X_i, \sum Y_i, \sum Z_i, N]^T$$

Решение системы позволяет определить искомые параметры синтеза.

$$x_c = \frac{aG_1 - bG_2}{a^2 + b^2}, \quad y_c = \frac{bG_1 + aG_2}{a^2 + b^2}, \quad z_c = \frac{G_6}{G_5},$$

$$a = G_3, \quad b = G_4, \quad c = G_5, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

б) Если углы Эйлера $\psi_{li} = \theta_{li} = \varphi_{li} = 0$ тела Q_1 , то задача сводится к взвешенному квадратическому приближению точки $C_i(x_c, y_c, z_c)$ с N приближенно – коллинеарными положениями и т.д.

2.3 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, цилиндрической и сферической кинематическими парами

В данном подразделе рассмотрим задачи синтеза ИКЦ с вращательной, цилиндрической и сферической кинематическими парами.

Каждая прямая в пространстве может быть представлена системой линейных уравнений относительно координат, как пересечение двух плоскостей, проектирующих прямую на координатные плоскости AXY и AYZ . Уравнение этих плоскостей может быть записана в следующем виде

$$aX + bY - 1 = 0$$

$$cY + dZ - 1 = 0$$

Задача состоит в следующем.

Требуется найти на теле Q точку $A(X_A, Y_A, Z_A)$, на теле Q_1 найти прямую

$$ax + by + cz + d = 0$$

и на теле Q_2 точку $C(x_C, y_C, z_C)$, которая в ее движении относительно тела Q_1 приближалась к искомой прямой. Уравнение этой прямой на неподвижном теле Q определяется по известным формулам преобразования

$$a[(X_{Ci} - X_A)t_{11} + (Y_{Ci} - Y_A)t_{21} + (Z_{Ci} - Z_A)t_{31}] + \\ + b[(X_{Ci} - X_A)t_{12} + (Y_{Ci} - Y_A)t_{22} + (Z_{Ci} - Z_A)t_{32}] - 1 = 0$$

$$c[(X_{Ci} - X_A)t_{12} + (Y_{Ci} - Y_A)t_{22} + (Z_{Ci} - Z_A)t_{31}] + \\ + d[(X_{Ci} - X_A)t_{13} + (Y_{Ci} - Y_A)t_{23} + (Z_{Ci} - Z_A)t_{33}] - 1 = 0$$

где ψ_{ji}, φ_{ji} - углы заданы, а угол $\theta_{ji} = 0, j=1.2, i=\overline{1, N}$.

$$\alpha_{ji} = \psi_{1i} + \varphi_{1i}, \beta_{ji} = \psi_{2i} + \varphi_{2i}$$

$$\begin{bmatrix} X_{Ci} \\ Y_{Ci} \\ Z_{Ci} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & -\sin(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & 0 & X_{Di} \\ \sin(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & \cos(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & 0 & Y_{Di} \\ 0 & 0 & 1 & Z_{Di} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$t_{11} = \cos(\psi_{1i} + \varphi_{1i}), \quad t_{21} = \sin(\psi_{1i} + \varphi_{1i}), \\ t_{12} = -\sin(\psi_{1i} + \varphi_{1i}), \quad t_{22} = \cos(\psi_{1i} + \varphi_{1i}), \\ t_{33} = 1, \quad t_{13} = t_{31} = t_{23} = t_{32} = t_{41} = t_{42} = t_{43} = 0.$$

Подобные точки $C(x_C, y_C, z_C) \in Q_2$ должны по возможности мало отклоняться от искомой прямой. Этому условию соответствует минимизируемые функции следующего вида:

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = a[(X_{Ci} - X_A)t_{11} + (Y_{Ci} - Y_A)t_{21} + (Z_{Ci} - Z_A)t_{31}] + \\ + b[(X_{Ci} - X_A)t_{12} + (Y_{Ci} - Y_A)t_{22} + (Z_{Ci} - Z_A)t_{32}] - 1$$

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = c[(X_{Ci} - X_A)t_{12} + (Y_{Ci} - Y_A)t_{22} + (Z_{Ci} - Z_A)t_{31}] + \\ + d[(X_{Ci} - X_A)t_{13} + (Y_{Ci} - Y_A)t_{23} + (Z_{Ci} - Z_A)t_{33}] - 1$$

После подстановки в полученную систему предыдущих величин и соответствующих преобразований составим взвешенные разности в виде:

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = G_1 \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_2 \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_3 X_i + G_4 Y_i + G_5 Z_i + G_6 Z_i - 1,$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= (ax_c - by_c), & G_2 &= ay_c - bx_c, \\ G_3 &= a, & G_4 &= b, \\ G_5 &= X_A, & G_6 &= Y_A, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ji} & \sin \alpha_{ji} & 0 \\ -\sin \alpha_{ji} & \cos \alpha_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{Di} \\ Y_{Di} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Z_i = -\cos \alpha_{ij} - \sin \alpha_{ij}.$$

Теперь составим вторую взвешенную разность в виде:

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = G_7 \sin \alpha_{ij} \cos \beta_{ji} + G_8 \sin \alpha_{ji} \sin \beta_{ij} + G_9 X_{Di} \sin \alpha_{ij} + G_{10} + G_{11} Z_{Di} + G_{12} - 1$$

где

$$G_7 = -cx_c, \quad G_8 = cy_c, \quad G_9 = -c, \quad G_{10} = dz_c, \quad G_{11} = d, \quad G_{12} = -dZ_A.$$

Составим сумму квадратов

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}^{(1)}]^2 \text{ и } S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}^{(2)}]^2,$$

затем рассмотрим условия стационарности этих сумм, приравнявая к нулю их частные производные по всем переменным. В результате получим две системы линейных уравнений как в разделе 3.2. К первой системе шести уравнений добавим три последних уравнений второй системы. После решения совместно последних полученных девяти уравнений определяем искомые параметры синтеза в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_A &= G_5, & a &= G_3, & d &= G_{11} \\ Y_A &= G_6, & b &= G_4, \\ Z_A &= -\frac{G_{12}}{G_{11}}, & c &= -G_9, \end{aligned}$$

$$x_c = \frac{G_2 G_4 + G_1 G_3}{G_3^2 - G_4^2}, \quad y_c = \frac{G_2 G_3 + G_1 G_4}{G_3^2 - G_4^2}, \quad z_c = \frac{G_{10}}{G_{11}}.$$

Таким образом, при синтезе пространственных механизмов и пространственных механизмов высоких классов (ПМВК) использование четырехзвенных ИКЦ позволяет синтезировать пространственные механизмы, включая ПМВК, по заданным положениям входного и выходного звеньев с использованием ИКЦ со сферическими и цилиндрическими парами приведенные в таблице 2.1 и 2.2.

Таблица 2.1

	1	2
1		
2		
3		

Таблица 2.2

	1	2
1		
2		
3		

Далее рассмотрим второй подход решения задачи точного воспроизведения заданного закона движения выходного звена в зависимости от заданного закона движения входного звена проектируемого механизма. Для этого используем незамкнутую четырехзвенную ИКЦ.

Проектируемое ИКЦ определяется 11 постоянными параметрами, в том числе: координатами x_C , y_C , z_C центра C сферической пары, четырьмя

независимыми параметрами, задающими ось цилиндрической пары в системе Q_1 и координатами точки A в системе $OXYZ$ (рисунок 2.5).

Звено CC (C – сферическая, C – цилиндрическая кинематическая пара) ограничивает движение точки B по прямому круговому цилиндру с осью Q_1 и радиусом h . Для аналитического описания соответствующего условия связи условимся определять в дальнейшем ось Q_1 единичным направляющим вектором $Q_1 (Q_x, Q_y, Q_z)$ и точкой пересечения $A (X_A, O, Z_A)$ оси Q с координатной плоскостью XZ .

Расстояние h_i точки B_i от оси Q в i -м положении тела Q_2 имеет следующее выражение:

$$h_i = \|(R_{Bi} - R_A) \times Q\|. \quad (3.24)$$

Уравнения связей, налагаемых рассматриваемым звеном на перемещения точки B , представляются в виде

$$\Delta = h_i - h \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

или

$$\Delta = h_i^2 - h^2 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (3.25)$$

где h – постоянное расстояние между точками B и C принадлежащий к телу Q_1 и Q_2 .

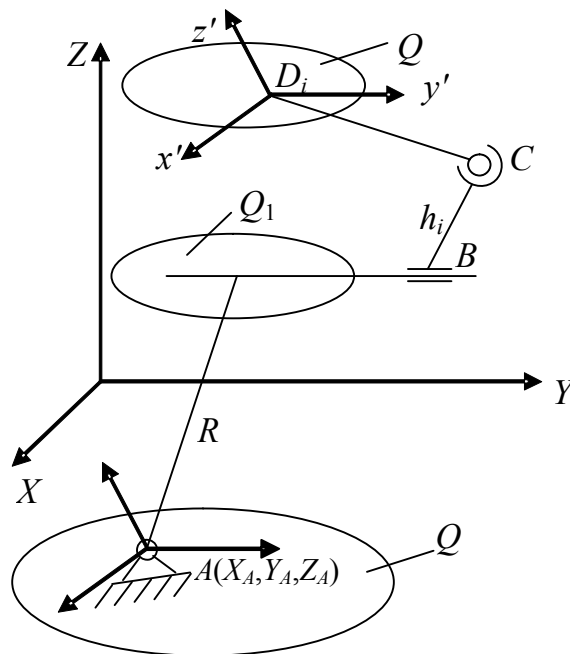


Рисунок 3.5

Подставляя в уравнение (2.25) формулу (2.24) и принимая обозначение $U_i = R_{Bi} \times Q$, после преобразований получаем

$$f_{1i} X_A + f_{2i} Z_A + H = f_{3i} \quad (2.26)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

где H – независящая от положения тела Q_2 постоянная

$$H = R_A^2 - h^2 - (R_A Q)^2, \quad (2.27)$$

а f_{1i} , f_{2i} и f_{3i} – известные функции от искомых координат x_B , y_B , z_B и направляющих косинусов Q_X , Q_Y , Q_Z оси Q :

$$\begin{aligned} f_{1i} &= 2(Q_Z U_{iY} - Q_Y U_{iZ}); \\ f_{2i} &= 2(Q_Y U_{iX} - Q_X U_{iY}); \\ f_{3i} &= -(U_{iX}^2 + U_{iY}^2 + U_{iZ}^2), \end{aligned} \quad (2.28)$$

причем

$$\begin{aligned} U_{iX} &= \begin{vmatrix} Y_{Bi} & Z_{Bi} \\ Q_Y & Q_Z \end{vmatrix}; \\ U_{iY} &= \begin{vmatrix} Z_{Bi} & X_{Bi} \\ Q_Z & Q_X \end{vmatrix}; \\ U_{iZ} &= \begin{vmatrix} X_{Bi} & Y_{Bi} \\ Q_X & Q_Y \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Выполним синтез звена $СЦ$ при фиксированном направлении оси Q , т.е. при известных значениях Q_X , Q_Y , Q_Z . При $N = 4$ из уравнений (2.26) получаем систему четырех линейных уравнений относительно трех искомых параметров X_A , Z_A , H . Для совместности этой системы необходимо условие

$$\begin{vmatrix} f_{1i} & f_{2i} & f_{3i} \end{vmatrix} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (2.30)$$

Подстановкой соотношений (2.28), в которые внесены выражения (2.29), и дальнейшим преобразованием с учетом формулы

$$[X_{Ci}, Y_{Ci}, Z_{Ci}]^t = [X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}]^t + T_{ij} [x_C, y_C, z_C]^t \quad (2.31)$$

равенство (2.30) приводится к алгебраическому уравнению третьей степени относительно x_C, y_C, z_C . Оно определяет внутри тела Q_2 алгебраическую поверхность третьего порядка – геометрическое место точек, имеющих четыре положения на одном круговом цилиндре.

Из изложенного выше вытекает следующий алгоритм решения задачи синтеза звена CC по четырем положениям тела Q_2 :

1) выбирают любые две из координат x_C, y_C, z_C и из уравнения (2.30) определяют значение третьей;

2) по формуле (2.31) вычисляют координаты X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, 2, 3, 4$), а по соотношениям (2.28), (2.29) значения f_{1i}, f_{2i} и f_{3i} ;

3) решением системы (2.26) находят величины X_A, Z_A, H ;

4) из равенства (2.27) вычисляют длину h звена.

При $N = 5$ и 6 получаем соответственно системы пяти и шести уравнений типа (2.26) относительно X_A, Z_A, H . В первом случае эти уравнения могут иметь общее решение, если кроме условия (2.30) удовлетворится равенство

$$\|f_{1i} f_{2i} f_{3i}\| = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 5). \quad (2.32)$$

а во втором для совместности системы к условиям (2.30), (2.32) следует прибавить условие

$$\|f_{1i} f_{2i} f_{3i}\| = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 6). \quad (2.33)$$

Если $N = 5$, положение точки C внутри тела Q_2 находится решением двух уравнений третьей степени, полученных из условий (2.30), (2.32) подстановкой соотношений (2.28), (2.29) и (2.24) при фиксированном значении одного из неизвестных x_C, y_C, z_C . При $N = 6$ точку C определяют решением системы трех кубических уравнений, получаемых на базе условий (2.30) – (2.33). После определения положения сферического шарнира процедура синтеза звена CC продолжается аналогично случаю $N = 4$.

2.4 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, вращательной и цилиндрической кинематическими парами

В данном разделе рассмотрим точное воспроизведение заданного закона движения выходного звена в зависимости от заданного закона движения входного звена проектируемого механизма. Для этого используем незамкнутую четырехзвенную ИКЦ.

Проектируемое ИКЦ определяется 11 постоянными параметрами, в число которых входят четыре параметра, определяющие положение оси Q в системе $OXYZ$, еще четыре параметра, определяющие положение оси q_i в системе $oxuz$, кратчайшее расстояние h и угол γ между q и Q , постоянное расстояние l между точкой A и основанием B общего перпендикуляра BC осей q и Q .

Ось Q будет определена точкой A , в которой она пересекается с плоскостью XY и направляющими косинусами Q_x, Q_y, Q_z . Соответственно ось q будет определена ее точкой a_i , лежащей на плоскости $x'y'$, и направляющими косинусами q_x, q_y, q_z . Заметим, что из направляющих косинусов независимы только два. Звено BC можно получить из звена CC , если исключить поступательное движение вдоль оси Q . В векторной форме соответствующее условие связи имеет выражение

$$[(R_{ai} - R_A) \times Q] \cdot (Q \times q_i) = H = \text{const} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.34)$$

Несложными преобразованиями условие (3.34) можно привести к виду

$$(R_{ai} - R_A)G = H \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.35)$$

где $G = Q \cos \gamma_i - q_i = \text{const}$.

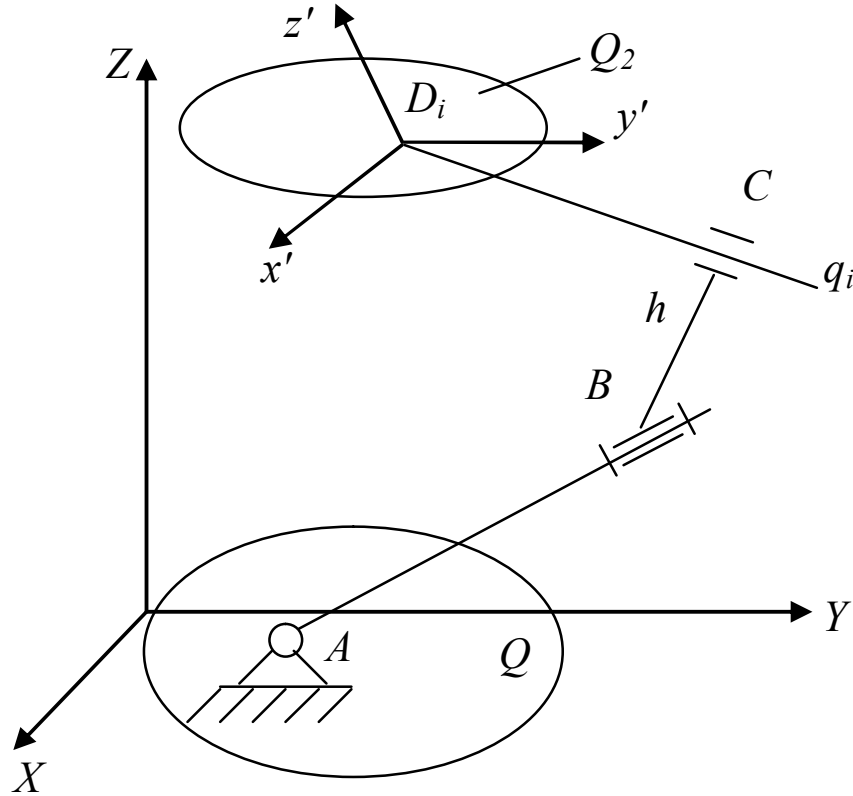


Рисунок 2.6

Уравнение (3.35) можно преобразовать к виду

$$x_a G_{ix} + y_a G_{iy} - X_A G_{iX} - Y_A G_{iY} - H = -F_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.36)$$

где G_{ix}, G_{iy} и G_{iX}, G_{iY} — проекции вектора G_i , соответственно на подвижные и неподвижные координатные оси и

$$F_i = X_{O_i} G_{iX} + Y_{O_i} G_{iY} + Z_{O_i} G_{iZ}.$$

Комбинируя уравнение (2.36), отображающее условие (2.34), получаем простой алгоритм синтеза звена $BЦ$ по трем положениям тела Q_2 . Поскольку в этом случае вновь имеются два свободных параметра, можно задаться направлением одной из осей Q и q . Пусть задано направление q , т. е. известны две из величин q_x, q_y, q_z ($q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 1$).

Вычисляем коэффициенты и свободные члены линейных уравнений

$$f_{1i} X_A + f_{2i} Y_A + f_{3i} x_a + f_{4i} y_a - h = f_{0i} \quad (2.37)$$

где $f_{1i} = \frac{1}{\sin \gamma_i} (q_{iY} Q_Z - q_{iZ} Q_Y);$

$$f_{2i} = \frac{1}{\sin \gamma_i} (-q_{iX} Q_Z + q_{iZ} Q_X);$$

и (2.36) f_{ji}, F_i и $G_{ix}, G_{iy}, G_{iz}, G_{iX}, G_{iY}, G_{iZ}$ ($i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3$). Решая систему шести линейных уравнений (2.37), (2.36) ($i = 1, 2, 3$), находим значения x_a, y_a, X_A, Y_A , определяющие положения осей q и Q соответственно в системах $oxyz$ и $OXYZ$ и расстояние h . Вычисляем величину $l = AB$, определяющую положение центра B вращательной пары на неподвижной оси Q :

$$l = \frac{\begin{vmatrix} (R_{ai} - R_A)Q & q_i Q \\ (R_{ai} - R_A)q_i & q_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q^2 & q_i Q \\ q_i Q & q_i^2 \end{vmatrix}} \quad (2.38)$$

В описанной процедуре синтеза использовались лишь линейные системы уравнений, откуда следует очевидный вывод: любому заданному направлению оси q (оси Q) соответствует единственное звено $BЦ$, переводящее тело Q_2 через заданные три положения.

2.5 Синтез пространственных рычажных передаточных механизмов с вращательной, двумя сферическими и поступательной кинематическими парами

В данном разделе рассмотрим задачи синтеза пространственных механизмов с поступательным, вращательным, и сферическим кинематическими парами с избыточными и без избыточными связями. Эти все связи относятся к голономным связям [113, 114].

1 Аппроксимационный синтез пространственного кривошипно-ползунного механизма типа *ВССП* на основе ИКЦ по заданным положениям входного и выходного звеньев.

Пусть заданы угол поворота φ – входного звена и соответственно положения выходного звена проектируемого механизма (рисунок 2.7).

Составим взвешенную разность Δ_{qi} :

$$\Delta_{qi} = (X_{Bi} - X_{Ai})^2 + (Y_{Bi} - Y_{Ai})^2 + (Z_{Bi} - Z_{Ai})^2 - R^2 \quad (2.39)$$

$$(i = \overline{1, N})$$

где

$$\begin{aligned} X_{Ai} &= a \cos \varphi_i & X_{Bi} &= X_0 \\ Y_{Ai} &= a \sin \varphi_i & Y_{Bi} &= S \sin \alpha \\ Z_{Ai} &= 0 & Z_{Bi} &= Z_0 + S \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.40)$$

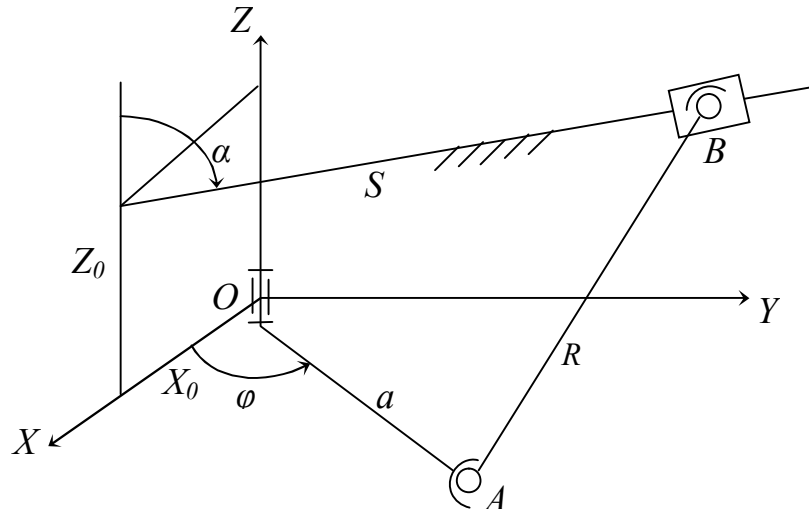


Рисунок 2.7

Подставляя значения X_A , Y_A , Z_A , x_B , y_B , находим

$$\Delta_{qi} = (X_0 - a \cos \varphi_i)^2 + (S_i a \sin \alpha - a \sin \varphi_i)^2 + (Z_0 - S \cos \alpha)^2 - R^2 \quad (2.41)$$

Упрощая и используя тригонометрические тождества, приводим выражение (2.41) к виду

$$\Delta_{qi} = -2aX_0 \cos \varphi_i - 2a \sin \alpha (S \sin \varphi_i) + 2Z_0 \cos \alpha \cdot s + X_0^2 + a^2 + Z_0^2 - R^2 + S^2 \quad (2.42)$$

Введем обозначения

$$G_1=2X_0; \quad G_2=2a\sin\alpha; \quad G_3=2Z_0\cos\alpha; \quad G_4=X_0^2 + Z_0^2 + a^2 - R^2;$$

Уравнение (2.42) принимает вид:

$$\Delta_{q_i} = -G_1 \cos \varphi_i + G_2 (S_i \sin \varphi_i) + G_3 S_i + G_4 + S_i^2 \quad (2.43)$$

Из необходимого условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i]^2 \quad (i=1, N) \quad (2.44)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{dS}{dj} = 0, \quad (j = G_1 \div G_4) \quad (2.45)$$

Записав уравнение для $(\varphi_i, S_i, i = \overline{1,4})$, получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. После определения неизвестных коэффициентов G_1, G_2, G_3, G_4 путем стандартного решения линейной системы уравнений можно найти требуемые конструктивные параметры механизма из следующего выражения:

$$a = \frac{G_1}{2X_0}; \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{G_2}{2a}\right); \quad Z_0 = \frac{G_3}{2\cos\alpha}; \quad (2.46)$$

$$R = (X_0^2 + Z_0^2 + a^2 - G_4)^{1/2}$$

При аппроксимации по шести положениям, угол поворота входного звена и положение выходного ползуна S_1 , соответствующие первой точной точке, добавляется к четырем неизвестным параметрам (a, R, X_0, Z_0) , определяющим из уравнения (2.39).

При подстановке $S_i = S_0 + S_i$ и $\varphi_i = \varphi_0 + \varphi_i$ в уравнение (2.43) получаем систему из шести уравнений, линейных относительно неизвестных $G_i, i = \overline{1,6}$

$$\Delta_{q_i} = -G_1 (S_i \cos \varphi_i) - G_2 (S_i \sin \varphi_i) - G_3 (\cos \varphi_i) + G_4 (\sin \varphi_i) + G_5 S_i + G_6 + S_i^2; \quad i = \overline{1,6} \quad (2.47)$$

где

$$G_1 = 2a \sin \alpha \sin \varphi_0,$$

$$G_2 = 2a \sin \alpha \cos \varphi_0,$$

$$G_3 = 2aX_0 \cos \varphi_0 + 2aS_0 \sin \alpha \sin \varphi_0,$$

$$G_4 = 2aX_0 \sin \varphi_0 + 2aS_0,$$

$$G_5 = 2Z_0 \cos \alpha + 2S_0,$$

$$G_6 = X_0^2 + Z_0^2 + a^2 - R^2 + S_0^2 + 2Z_0Z_0 \cos \alpha.$$

Определив неизвестные коэффициенты $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$, из необходимого условия минимума суммы (2.45) с учетом (2.46) можно найти значения шести искомых параметров из соотношений:

$$\varphi_0 = \arctg \frac{G_2}{G_1}; \quad a = \frac{G_1}{2} \sin \alpha \sin \varphi_0;$$

$$X_0 = \frac{\begin{vmatrix} G_3 & 2a \sin \alpha \sin \varphi_0 \\ G_4 & -2a \sin \alpha \cos \varphi_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a \cos \varphi_0 & 2a \sin \alpha \sin \varphi_0 \\ 2a \sin \varphi_0 & 2a \sin \alpha \cos \varphi_0 \end{vmatrix}};$$

$$S_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2a \cos \varphi_0 & G_3 \\ 2a \sin \varphi_0 & G_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a \cos \varphi_0 & 2a \sin \alpha \sin \varphi_0 \\ 2a \sin \varphi_0 & -2a \sin \alpha \cos \varphi_0 \end{vmatrix}};$$

$$Z_0 = \frac{G_5 2S_0}{2 \cos \alpha}; \quad R = (X_0^2 + Z_0^2 + a^2 S_0^2 + 2Z_0 S_0 \cos \alpha)^{1/2}.$$

2.6 Синтез пространственных рычажных передаточных механизмов с вращательной, цилиндрической, сферической и поступательной кинематическими парами

В данном разделе рассмотрен аппроксимационный синтез пространственного кривошипно-ползунного механизма типа *ВЦСП* на основе ИКЦ по заданным положениям входного и выходного звеньев (рисунок 2.8).

На основе решения данной задачи можно получить пространственный механизм ВЦВП. В этом случае оси пар вращательных и цилиндрических пар параллельны.

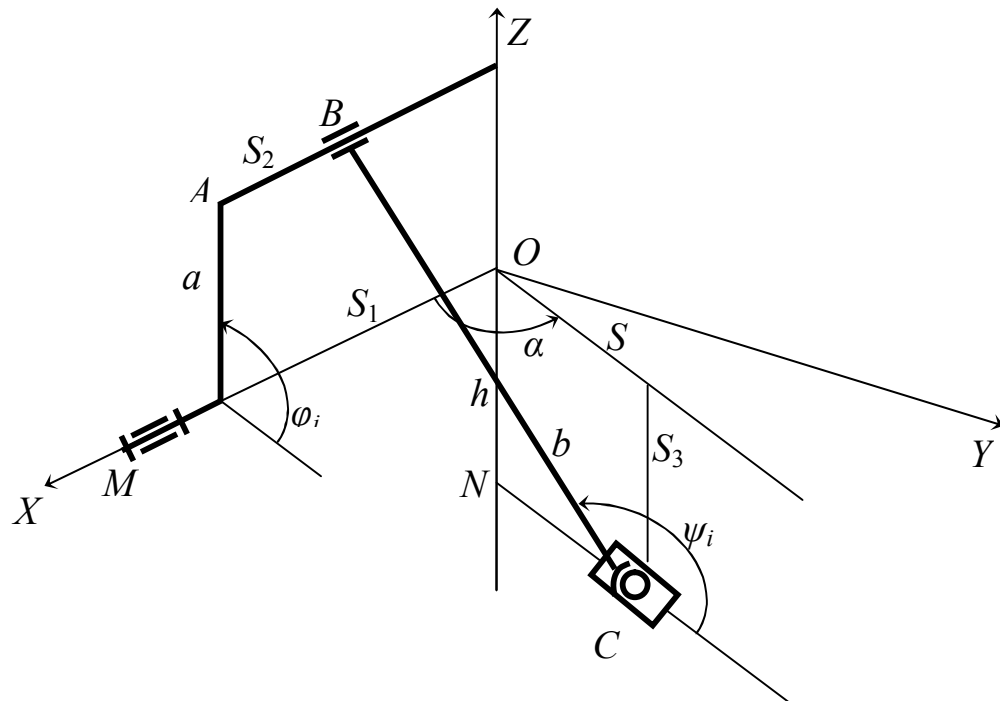


Рисунок 2.8

Связь между выходным и входным звеньев φ и S можно получить, если приравнять координаты XYZ точки C

$$X_C = S_1 - S_2 = S \cos \alpha$$

$$Y_C = a \cos \varphi + b \cos(180 - \psi_i) = S \sin \alpha$$

$$Z_C = a \sin \varphi - b \sin(180 - \psi_i) = S_3$$

Исключая ψ_i находим

$$G_1 + G_2 \sin \varphi + G_3 S^2 = S \cos \varphi \quad (2.48)$$

где

$$G_1 = \frac{b^2 - a^2 - S_3^2}{2a \sin \alpha};$$

$$G_2 = -\frac{S_3}{\sin \alpha};$$

$$G_3 = \frac{\sin \alpha}{2a}.$$

Теперь $\varphi_i = \varphi_0 + \varphi_i$ и $S_i = S_0 + S_i$ тогда подставляя в (3.48) и преобразуя, получим

$$\Delta_{q_i} = G_1 + G_2 \cos \varphi_i + G_3 \sin \varphi_i + G_4 S_i^2 + G_5 S_i - S_i \cos \varphi_i - G_6 S_i \sin \varphi_i \quad (3.49)$$

где $G_1 = \frac{\sin \alpha}{2a} S_0^2 - \frac{b^2 - a^2 - S_3^2}{2a \sin \alpha \cos \varphi_0};$

$$G_2 = -S_3 \operatorname{tg} \varphi_0 - S_0;$$

$$G_3 = S_0 \operatorname{tg} \varphi_0 - \frac{S_2}{\sin \alpha};$$

$$G_4 = \frac{\sin \alpha}{2a};$$

$$G_5 = \frac{\sin \alpha V_0}{a};$$

$$G_6 = -\operatorname{tg} \varphi_0.$$

Все коэффициенты G_i линейно связаны условием

$$G_2 G_4 + \frac{1}{2} G_5 = -G_3 G_4 G_6 - \frac{1}{2} G_5 G_6^2$$

Из необходимого условия минимума сумма

$$S = \sum_{i=1}^N (\Delta_{q_i})^2$$

можно определить шесть искоемых параметров синтеза.

Аналогично можно рассмотреть аппроксимационный синтез пространственного кривошипно-коромыслового механизма типа *ВССВ* на основе ИКЦ по заданным положениям входного и выходного звеньев

Таким образом, рассмотренные задачи аппроксимационного синтеза четырехзвенных пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев на основе ИКЦ решаются относительно искоемых параметров линейно.

2.7 Синтез двухэлементного звена со сферической и цилиндрической кинематическими парами

В данном разделе рассмотрен интерполяционный синтез двухэлементного звена со сферической и цилиндрической кинематическими парами по заданным положениям перемещающегося тела.

Проектируемое звено (рисунок 2.9) определяется 8 постоянными параметрами, в том числе: координатами x_B, y_B, z_B , центра B сферической пары, четырьмя независимыми параметрами, задающими ось цилиндрической пары в системе $OXYZ$ и длиной звена, т. е. расстоянием h точки B от оси Q . Звено $СЦ$ ограничивает движение точки B по прямому круговому цилиндру с осью Q и радиусом h . Для аналитического описания соответствующего условия связи условимся определять в дальнейшем ось Q единичным направляющим вектором Q (Q_x, Q_y, Q_z) и точкой пересечения A (X_A, O, Z_A) оси Q с координатной плоскостью XZ .

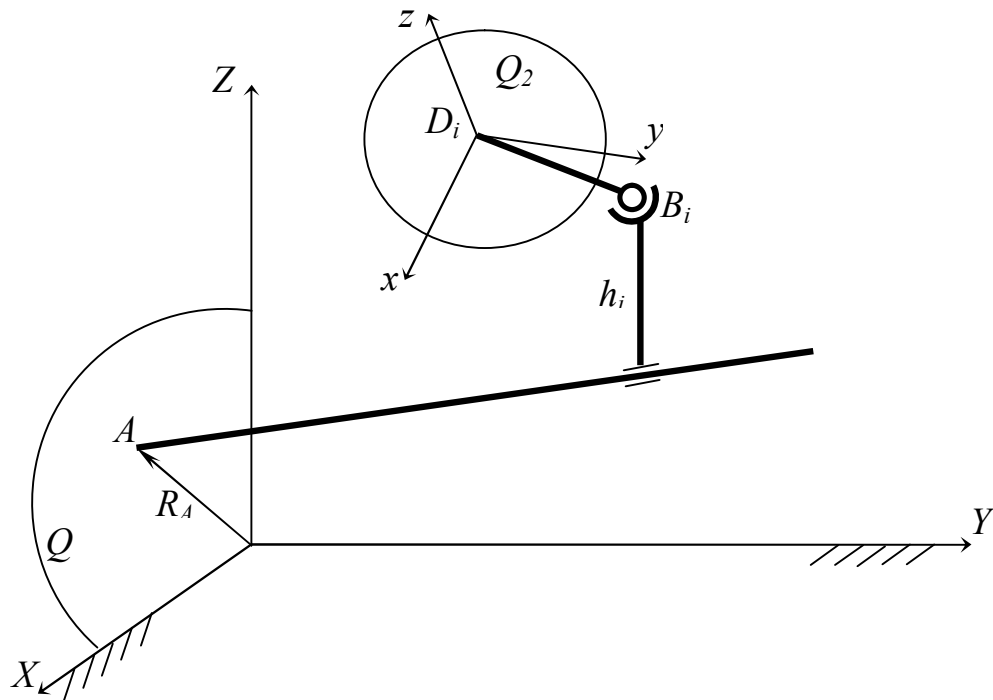


Рисунок 2.9

Расстояние h_i точки B_i от оси Q в i -м положении тела Q_2 имеет следующее выражение:

$$h_i = |(R_{Bi} - R_A) \times Q|. \quad (2.50)$$

Уравнения связей, налагаемых рассматриваемым звеном на перемещения точки B , представляются в виде

$$\Delta = h_i - h \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

или

$$\Delta = h_i^2 - h^2 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.51)$$

Подставляя в уравнение (2.51) формулу (2.50) и принимая обозначение $U_i = R_{Bi} \times Q$, после преобразований получаем

$$f_{1i} X_A + f_{2i} Z_A + H = f_{3i} \quad (2.52)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

где H – независящая от положения тела Q_2 постоянная

$$H = R_A^2 - h^2 - (R_A Q)^2, \quad (1.53)$$

а f_{1i} , f_{2i} и f_{3i} – известные функции от искоемых координат x_B , y_B , z_B и направляющих косинусов Q_X , Q_Y , Q_Z оси Q :

$$\begin{aligned} f_{1i} &= 2(Q_Z U_{iY} - Q_Y U_{iZ}); \\ f_{2i} &= 2(Q_Y U_{iX} - Q_X U_{iY}); \\ f_{3i} &= -(U_{iX}^2 + U_{iY}^2 + U_{iZ}^2), \end{aligned} \quad (1.54)$$

причем

$$\begin{aligned} U_{iX} &= \begin{vmatrix} Y_{Bi} & Z_{Bi} \\ Q_Y & Q_Z \end{vmatrix}; \\ U_{iY} &= \begin{vmatrix} Z_{Bi} & X_{Bi} \\ Q_Z & Q_X \end{vmatrix}; \\ U_{iZ} &= \begin{vmatrix} X_{Bi} & Y_{Bi} \\ Q_X & Q_Y \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Выполним синтез звена $СЦ$ при фиксированном направлении оси Q , т.е. при известных значениях Q_X , Q_Y , Q_Z . При $N = 4$ из уравнений (2.52) получаем систему четырех линейных уравнений относительно трех искоемых параметров X_A , Z_A , H . Для совместности этой системы необходимо условие

$$\|f_{1i}f_{2i}f_{3i}\|=0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (2.56)$$

Подстановкой соотношений (2.54), в которые внесены выражения (2.55), и дальнейшим преобразованием с учетом формулы (1.177) равенство (2.56) приводится к алгебраическому уравнению третьей степени относительно x_B, y_B, z_B . Оно определяет внутри тела Q_2 алгебраическую поверхность третьего порядка – геометрическое место точек, имеющих четыре положения на одном круговом цилиндре.

Из изложенного выше вытекает следующий алгоритм решения задачи синтеза звена *СЦ* по четырем положениям тела Q_2 :

1) выбирают любые две из координат x_B, y_B, z_B и из уравнения (2.56) определяют значение третьей;

2) по формуле (1.177) вычисляют координаты X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, 2, 3, 4$), а по соотношениям (2.54), (2.55) значения f_{1i}, f_{2i} и f_{3i} ;

3) решением системы (2.52) находят величины X_A, Z_A, H ;

4) из равенства (2.53) вычисляют длину h звена.

При $N = 5$ и 6 получаем соответственно системы пяти и шести уравнений типа (2.52) относительно X_A, Z_A, H . В первом случае эти уравнения могут иметь общее решение, если кроме условия (2.56) удовлетворится равенство

$$\|f_{1i}f_{2i}f_{3i}\|=0 \quad (i = 1, 2, 3, 5). \quad (2.57)$$

а во втором для совместности системы к условиям (2.56), (2.57) следует прибавить условие

$$\|f_{1i}f_{2i}f_{3i}\|=0 \quad (i = 1, 2, 3, 6). \quad (2.58)$$

Если $N = 5$, положение точки B внутри тела Q_2 находится решением двух уравнений третьей степени, полученных из условий (2.56), (2.57) подстановкой соотношений (2.54), (2.55) и (2.50) при фиксированном значении одного из неизвестных x_B, y_B, z_B . При $N = 6$ точку B определяют решением системы трех кубических уравнений, получаемых на базе условий (2.56)–(2.58). После определения положения сферического шарнира процедура синтеза звена *СЦ* продолжается аналогично случаю $N = 4$.

2.8 Синтез двухэлементного звена с вращательной и цилиндрической кинематическими парами

В данном разделе рассмотрен интерполяционный синтез двухэлементного звена с вращательной и цилиндрической кинематическими парами по заданным положениям перемещающего тела.

Данное звено (рисунок 2.10) характеризуется 11 постоянными параметрами, в число которых входят четыре параметра, определяющие положения оси Q в системе $OXYZ$, еще четыре параметра, определяющие

положение оси q_i в системе $oxyz$, кратчайшее расстояние h и угол γ между q и Q , постоянное расстояние l между точкой B и основанием L общего перпендикуляра ML осей q и Q . Ось Q будет определена точкой B , в которой она пересекается с плоскостью XY и направляющими косинусами Q_x, Q_y, Q_z . Соответственно ось q будет определена ее точкой b_i , лежащей на плоскости xu , и направляющими косинусами q_x, q_y, q_z . Заметим, что из направляющих косинусов независимы только два. Звено BC можно получить из звена CC , если исключить поступательное движение вдоль оси Q . В векторной форме соответствующее условие связи имеет выражение

$$[(R_{bi} - R_B) \times Q] \cdot (Q \times q_i) = H = \text{const} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.59)$$

Несложными преобразованиями условие (2.59) можно привести к виду

$$(R_{bi} - R_B)G = H \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.60)$$

где $G = Q \cos \gamma_i - q_i = \text{const}$.

Уравнение (2.60) можно преобразовать к виду

$$x_b G_{ix} + y_b G_{iy} - X_B G_{iX} - Y_B G_{iY} - H = -F_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.61)$$

где G_{ix}, G_{iy} и G_{iX}, G_{iY} – проекции вектора G_i , соответственно на подвижные и неподвижные координатные оси и

$$F_i = X_{Oi} G_{iX} + Y_{Oi} G_{iY} + Z_{Oi} G_{iZ}.$$

Комбинируя уравнение (2.61), отображающее условие (2.59), с уравнениями синтеза звена CC , получаем простой алгоритм синтеза звена BC по трем положениям тела Q_2 . Поскольку в этом случае вновь имеются два свободных параметра, можно задаться направлением одной из осей Q и q . Пусть задано направление q , т. е. известны две из величин q_x, q_y, q_z ($q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 1$).

При $N = 3$, выполняя операции 2 – 4 алгоритма синтеза звена CC , находим направление оси Q и угол $\gamma = \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$). Далее процедура синтеза осуществляется в следующей последовательности. Вычисляем коэффициенты и свободные члены линейных уравнений (2.62) и (2.61) f_{ji}, F_i и $G_{ix}, G_{iy}, G_{iz}, G_{iX}, G_{iY}, G_{iZ}$ ($i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3$).

$$f_{1i} X_B + f_{2i} Y_B + f_{3i} x_b + f_{4i} y_b - h = f_{0i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.62)$$

Решая систему шести линейных уравнений (2.62), (2.61) ($i = 1, 2, 3$), находим значения x_b, y_b, X_B, Y_B , определяющие положения осей q и Q соответственно в системах $oxyz$ и $OXYZ$ и расстояние h . Вычисляем величину $l = BL$, определяющую положение центра L вращательной пары на неподвижной оси Q :

$$l = \frac{\begin{vmatrix} (R_{bi} - R_B)Q & q_i Q \\ (R_{bi} - R_B)q_i & q_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q^2 & q_i Q \\ q_i Q & q_i^2 \end{vmatrix}} \quad (2.63)$$

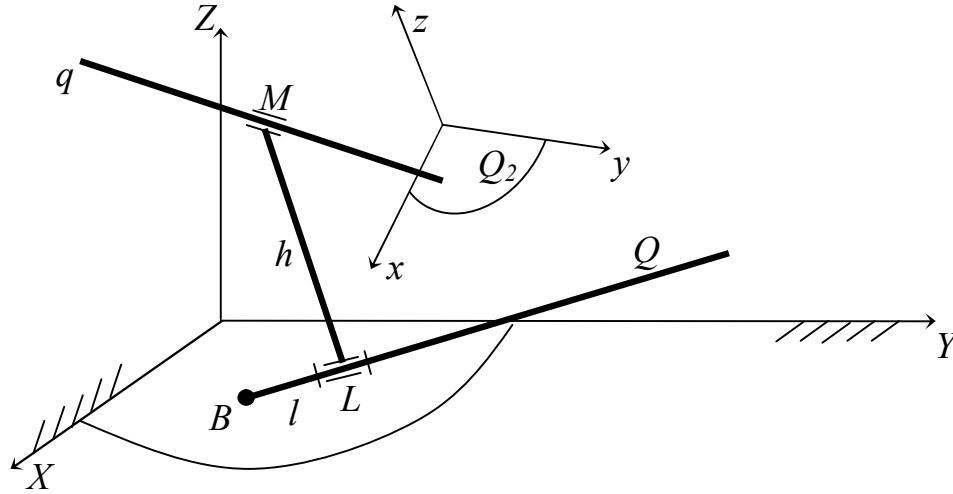


Рисунок 2.10

В описанной процедуре синтеза использовались лишь линейные системы уравнений, откуда следует очевидный вывод: любому заданному направлению оси q (оси Q) соответствует единственное звено $ВЦ$, переводящее тело Q_2 через заданные три положения.

2.9 Синтез двухэлементного звена с двумя цилиндрическими кинематическими парами

Рассмотрим задачу синтеза звена $ЦЦ$ (см. рисунок 2.11) по условию приближенного воспроизведения N положений тела.

Десять конструктивных параметров этого звена должны приближенно удовлетворять уравнениям (1.191) и (1.192). Поэтому конструктивные параметры звена будут определены из условия минимизации невязок уравнений (1.191) и (1.192), которые обозначим соответственно через Δ_{1i} и Δ_{2i} . Разделив обе части уравнений (1.191) на $Q_z q_z$, получаем следующее выражение для функций Δ_{1i} :

$$\Delta_{1i} = G_1 \varphi_{1i} + G_2 \varphi_{2i} + G_3 + \varphi_{0i} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2.64)$$

где

$$G_1 = \frac{Q_x}{Q_z}; \quad G_2 = \frac{Q_y}{Q_z}; \quad G_3 = -\frac{\cos \gamma}{Q_z q_z}, \quad (2.65)$$

а φ_{1i} , φ_{2i} , φ_{3i} – линейные функции от параметров $G_4 = q_x/q_z$, $G_5 = q_y/q_z$, определяемые матричным уравнением

$$[\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \varphi_{0i}]^t = T_i [G_4, G_5, 1]^t \quad (2.66)$$

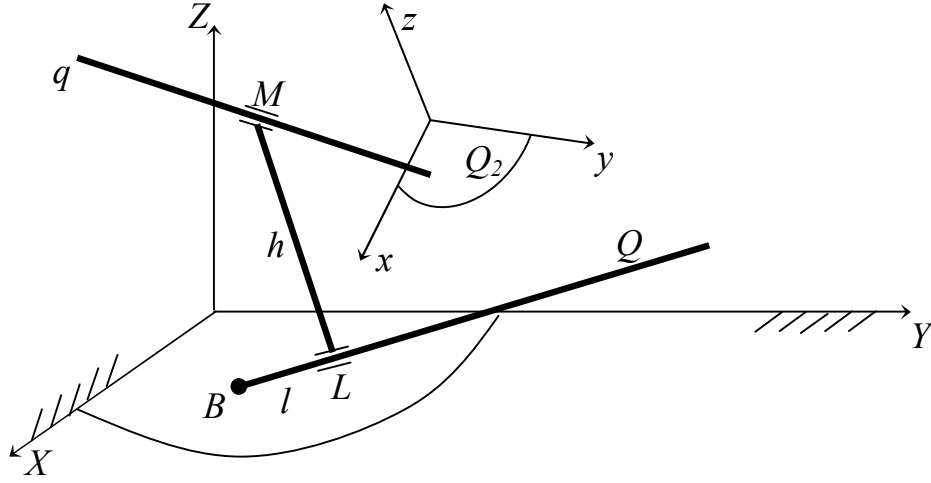


Рисунок 2.11

Принимая обозначения $X_B = p_1$, $Y_B = p_2$, $x_B = p_3$, $y_B = p_4$, $-h = p_5$, из уравнения (1.192) получаем следующее выражение для функций Δ_{2i} :

$$\Delta_{2i} = \sum_{j=1}^5 p_j f_{ji} - f_{0i} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.67)$$

Функции (2.64) зависят только от параметров Q_x , Q_y , Q_z , q_x , q_y , q_z проектируемого звена, задающих направления осей Q и q цилиндрических пар относительно соответствующих систем координат, и постоянной $\cos \gamma$. Следовательно, задача определения направлений осей q и Q может быть решена независимо от положений точек B и b этих осей. При этом надо исходить из условий минимума суммы

$$S_1 = \sum_{i=1}^N \Delta_{1i}^2. \quad (2.68)$$

Сумма (2.68), как и (2.64), является функцией неизвестных G_1 , G_2 , G_3 , G_4 и G_5 . Условия стационарности (2.68) по указанным параметрам имеют вид

$$\partial S_j / \partial G_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (2.69)$$

Из выражения (2.64) видно, что функции Δ_{1i} линейны относительно параметров G_1 , G_2 , G_3 . Подстановкой формулы (2.66) в уравнения (2.64) и последующим преобразованием Δ_{1i} можно представить линейно по G_4 и G_5 :

$$\Delta_{1i} = G_4 \varphi_{4i} + G_5 \varphi_{5i} + G_3 + \varphi'_{0i} \quad (2.70)$$

где

$$[\varphi_{4i}, \varphi_{5i}, \varphi'_{0i}]^t = T_i^{-1} [G_1, G_2, 1]^t. \quad (2.71)$$

Первые три условия (2.69) для стационарности суммы (2.68) с помощью выражения (2.64) приводятся к уравнениям, линейным относительно G_1 , G_2 , G_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum \varphi_{1i}^2 & \sum \varphi_{1i}\varphi_{2i} & \sum \varphi_{1i} \\ \sum \varphi_{1i}\varphi_{2i} & \sum \varphi_{2i}^2 & \sum \varphi_{2i} \\ \sum \varphi_{1i} & \sum \varphi_{2i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sum \varphi_{1i}\varphi_{0i} \\ \sum \varphi_{2i}\varphi_{0i} \\ \sum \varphi_{0i} \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Последние три условия (2.69) посредством выражения (2.70) преобразуются к уравнениям, линейным относительно G_4 , G_5 , G_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum \varphi_{4i}^2 & \sum \varphi_{4i}\varphi_{5i} & \sum \varphi_{4i} \\ \sum \varphi_{4i}\varphi_{5i} & \sum \varphi_{5i}^2 & \sum \varphi_{5i} \\ \sum \varphi_{4i} & \sum \varphi_{5i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_4 \\ G_5 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \varphi_{4i}\varphi'_{0i} \\ \sum \varphi_{5i}\varphi'_{0i} \\ \sum \varphi'_{0i} \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

При известном направлении оси q , т. е. при известных G_4 и G_5 , система (2.71) определяет посредством соотношений (2.65) и условия

$$Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 = 1$$

направление оси Q и угол γ между осями цилиндрических пар звена ЦЦ. И наоборот, согласно (2.72) каждому известному направлению оси Q соответствует единственное направление оси q и межосевой угол γ , определяемые из соотношений $q_x = G_4 q_z$, $q_y = G_5 q_z$ и условия $q_x^2 + q_y^2 + Q_z^2 = 1$.

Для обращения в минимум суммы (2.68) направляющие косинусы осей q и Q и угол γ должны одновременно удовлетворять уравнениям (2.71) и (2.72). Следовательно, направление оси q должно быть таким, чтобы, определив для него из системы (2.71) величины G_1 , G_2 , G_3 и далее решая систему (2.72) при данных G_1 , G_2 , и G_3 , можно было найти значения G_4 и G_5 , соответствующие исходному направлению q . Для достижения этого условия используем неоднократно примененную ранее итерационную процедуру поиска минимума. Алгоритм вычисления «вектора направлений» G ($G_1, \dots, G_5$) звена ЦЦ, реализующего минимум суммы (2.68), сводится к следующему:

- 1) произвольно выбирают направление $q^{(0)}(q_x^{(0)}, q_y^{(0)}, q_z^{(0)})$ оси q , вычисляют $G_4^{(0)} = q_x^{(0)} / q_z^{(0)}$ и $G_5^{(0)} = q_y^{(0)} / q_z^{(0)}$ затем по формуле (2.66) – $\varphi_{1i}^{(0)}, \varphi_{2i}^{(0)}, \varphi_{0i}^{(0)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), далее находят коэффициенты и свободные члены линейных уравнений (2.71);
- 2) решением системы (3.71) находят $G_1^{(1)}, G_2^{(1)}, G_3^{(1)}$, затем вычисляют значение $S_1^{(1)}$ суммы (2.68);
- 3) по формуле (2.66) получают значения $\varphi_{4i}^{(1)}, \varphi_{5i}^{(1)}, \varphi_{0i}^{(1)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), затем коэффициенты и свободные члены уравнений (2.72);
- 4) решением системы (2.72) находят величины $G_4^{(1)}, G_5^{(1)}, G_3^{(2)}$ и

вычисляют соответствующее значение $S_1^{(2)}$ суммы (2.68);

5) проверяют условие $\max \|G_4^{(1)} - G_4^{(0)}\| \|G_5^{(1)} - G_5^{(0)}\| \leq \varepsilon$ и при не выполнении этого условия осуществляют следующую итерацию.

Для найденного вектора направления G определяют направляющие косинусы осей q , Q и угол γ . Описанная процедура может быть использована для синтеза звена BV с пересекающимися осями вращательных пар по заданным положениям тела Q_2 с одной неподвижной точкой. К необходимости решения этой задачи приводит синтез сферических шарнирных механизмов по заданным условиям движения.

Переходим к определению остальных конструктивных параметров проектируемого звена: неизвестных координат X_B , Y_B , x_b , y_b точек B и b , принадлежащих соответственно осям Q и q , и длины h звена при известных направлениях q и Q . Искомые параметры должны быть определены по условию минимума суммы

$$S_2 = \sum_{i=1}^N \Delta_{2i}^2. \quad (2.74)$$

Рассматривая необходимые условия минимума функции (2.73) по p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , p_5

$$\partial S_2 / \partial p_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5),$$

с помощью выражения (2.67) приходим к линейной системе

$$\sum_{k=1}^5 c_{kj} p_k = \gamma_j \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5), \quad (2.75)$$

где для краткости записи приняты обозначения

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^N f_{ki} f_{ji} = \gamma_j; \quad \gamma_j = \sum_{i=1}^N f_{0i} f_{ji} \quad (k, j = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Из выражений (2.67) ясно, что коэффициенты и свободные члены в уравнениях (2.74) зависят от параметров положений тела Q_2 и направляющих косинусов осей q и Q , которые были вычислены на предшествующем этапе решения задачи.

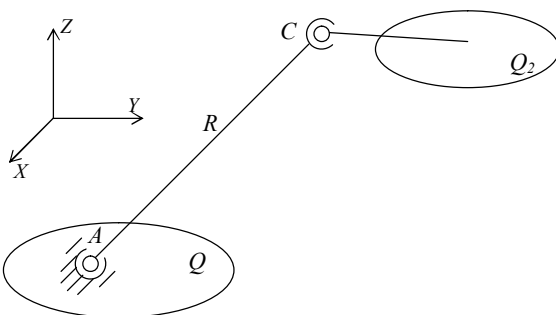
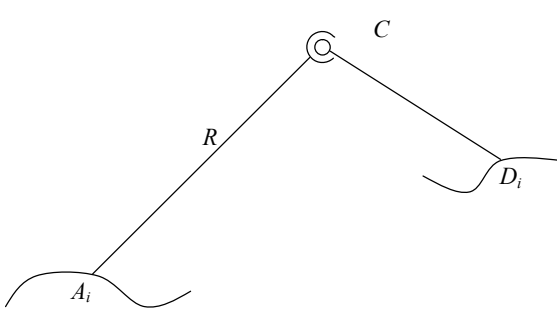
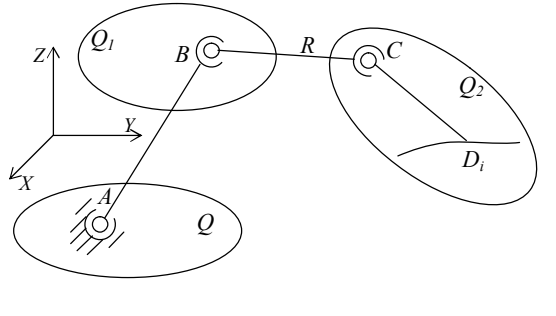
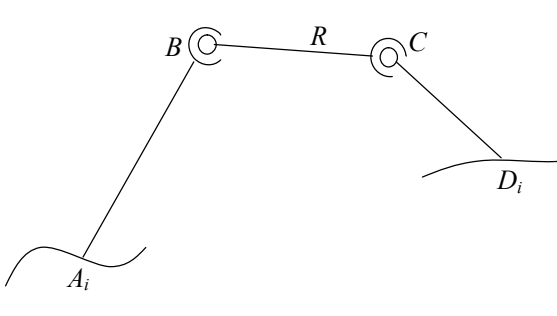
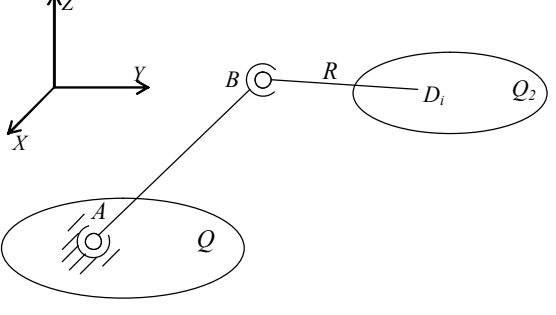
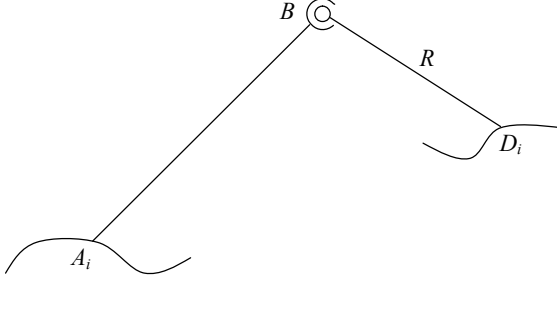
Для каждой пары сопряженных направлений осей q и Q цилиндрических пар, найденном из условия минимума суммы S_1 , система (2.74) определяет единственное сочетание параметров p_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) и поэтому единственное звено типа ЦЦ.

3 Структурно - кинематический синтез пространственных рычажных механизмов

3.1 Структурный синтез пространственных рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей

Синтез пространственных рычажных механизмов высоких классов (ПРМВК) по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма на основе исходных кинематических цепей (ИКЦ) приводит к автоматизации синтеза с помощью ЭВМ, то есть алгоритмизируемость формирования структуры из ИКЦ и алгоритмизируемость наложения геометрических связей для создания различных модификаций (таблица 3.1) [115-118].

Таблица 3.1

1.1. $x_B=y_B=z_B=0$ $X_A, Y_A, Z_A, x_C, y_C, z_C, R$ 	1.2. $x_B=y_B=z_B=0$ x_C, y_C, z_C, R 
2.1. $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, R$ 	2.2. $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, R$ 
3.1. $x_C=y_C=z_C=0$ $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R$ 	3.2. $x_C=y_C=z_C=0$ x_B, y_B, z_B, R 

Модификация ИКЦ (таблица 3.1–2.2.) может быть использована при наложении геометрических связей на относительное движение двух несмежных подвижных звеньев, а модификации ИКЦ (таблица 3.1–1.1.) может быть использована при наложении геометрической связи на движение подвижного звена относительно стойки механизма, и т.д. [119-121].

Решение задачи синтеза основной ИКЦ (таблица 3.1–2.1) по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма рассмотрены в разделе 1.1.

Число степеней подвижности ИКЦ относительно стойки равно сумме подвижности входного и выходного звена механизма. Чтобы получить из ИКЦ механизм необходимо наложить геометрические связи с отрицательной степенью подвижности. В таблице 3.2 показаны все виды модификации ИКЦ с отрицательными степенями подвижности получаемых из ИКЦ (таблица 3.1–2.1.) при комбинации заданных и искомых параметров.

При проектировании механизмов должны получить схему механизма с минимальным количеством звеньев. Если используем ИКЦ (таблица 3.1–2.1.) со сферическими парами, то степень подвижности ИКЦ равно $W=9$. Чтобы спроектировать механизм со степенью подвижности равной $W=1$, необходимо наложить геометрическую связь с отрицательной степенью подвижности $W=-8$. Для этого используем модификации ИКЦ (таблица 3.1–3.1.) типа BB (где B – вращательная кинематическая пара) получаемых при по парном сочетании четырех звеньев ИКЦ, приводя к трем вариантам (рисунок 3.1).

Вариант I. Получим ИКЦ $0 \rightarrow 1 - 2 \begin{matrix} \rightarrow 3 \\ \rightarrow 4 \rightarrow 0 \end{matrix}$ (рисунок 3.2).

Число попарных сочетаний несмежных звеньев равно трем: (0,3); (1,3); (3,4), т.е. имеем три варианта наложения второй связи (таблица 3.2), которые, как нетрудно убедиться из рисунка 3.2, приводят к трем различным механизмам II класса.

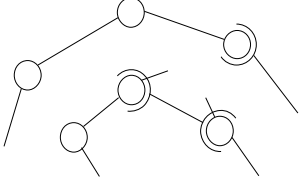
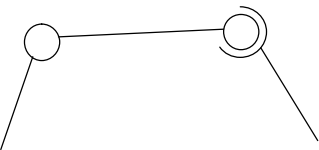
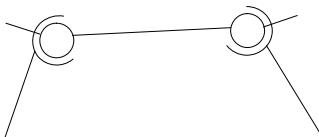
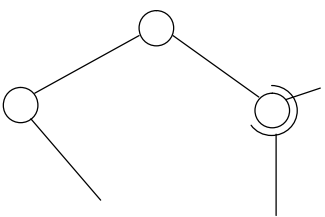
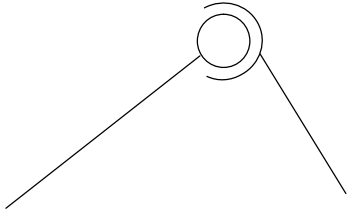
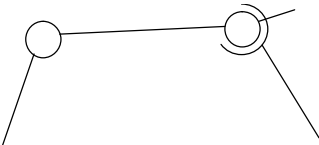
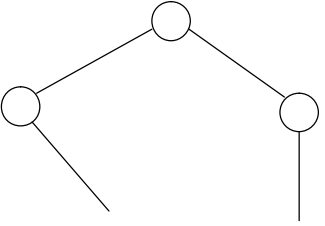
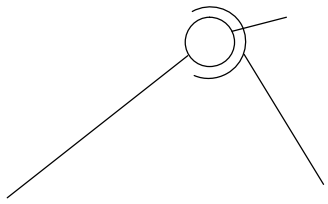
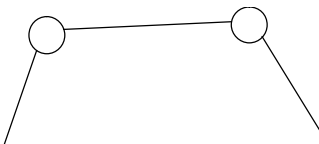
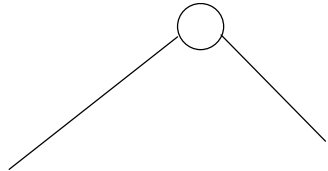
Вариант II. Получим ИКЦ $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ (рисунок 3.3).

Число по парных сочетаний несмежных звеньев равно четырем: (0,2); (0,3); (1,3); (2,4), т.е. имеем четыре варианта наложения второй геометрической связи. Получаем четыре различных классов механизма, из которых один – II класса, два – III класса и один – IV класса. Следует отметить, что полученный механизм II класса уже встречался в варианте I.

Вариант III. Получим ИКЦ $0 \rightarrow 1 \begin{matrix} \rightarrow 2 \rightarrow 3 \\ \rightarrow 4 \rightarrow \end{matrix}$ (рисунок 3.4).

Число попарных сочетаний несмежных звеньев равно трем: (0,2); (0,3); (0,4). В итоге наложения второй связи получаем три различных механизма из которых два – II класса, один – III класса. Надо отметить, что все они встречались в вариантах III и II.

Таблица 3.2

	$n=1, p_3=2$	$n=1, p_3=p_4=1$	$n=2, p_3=1, p_5=2$ $n=2, p_4=2, p_5=1$
$W=-1$			
$W=-2$	$n=1, p_3=p_5=1$	$n=1, p_4=2$	$n=2, p_4=1, p_5=2$
			
$W=-3$	$n=0, p_3=1$	$n=1, p_4=p_5=1$	$n=2, p_5=3$
			
$W=-4$	$n=0, p_4=1$	$n=1, p_5=1$	
			
$W=-5$	$n=0, p_5=1$		
			

Таким образом, при использовании незамкнутой четырехзвенной ИКЦ – (таблица 3.1–2.1.) со сферическими парами с девятью степенями свободы и ее модификации ИКЦ (таблица 3.1–1.1, 2.2.) с вращательными кинематическими парами (таблица 3.2) приходим к шести различным шестизвенным механизмам со сферическими и вращательными парами, из которых три механизма II класса, два III класса, один IV класса. Использование трех видов модификации ИКЦ приводит к большому количеству звеньев механизма.

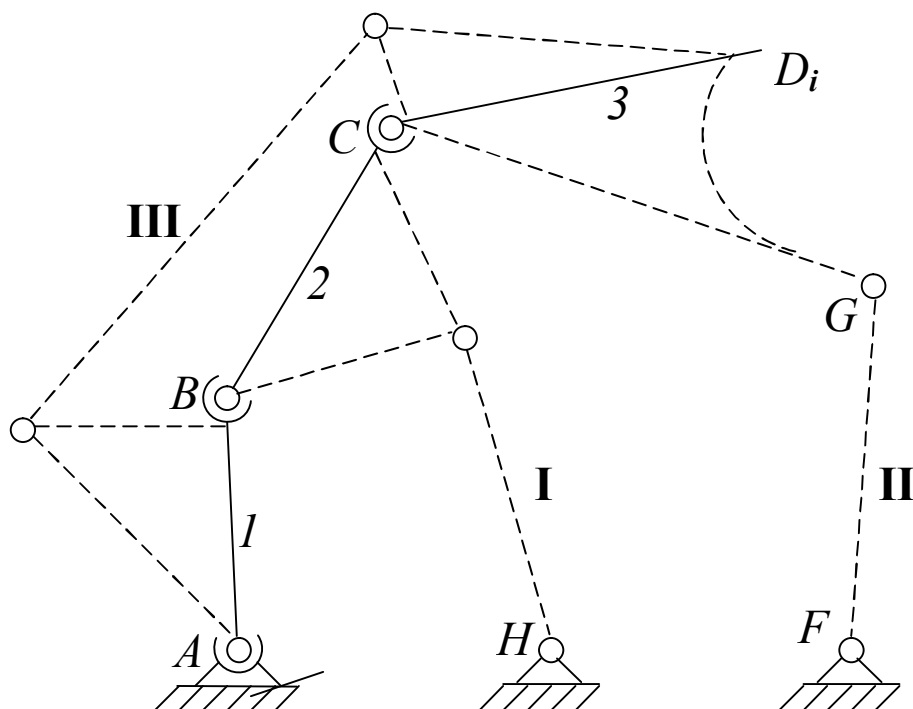


Рисунок 3.1

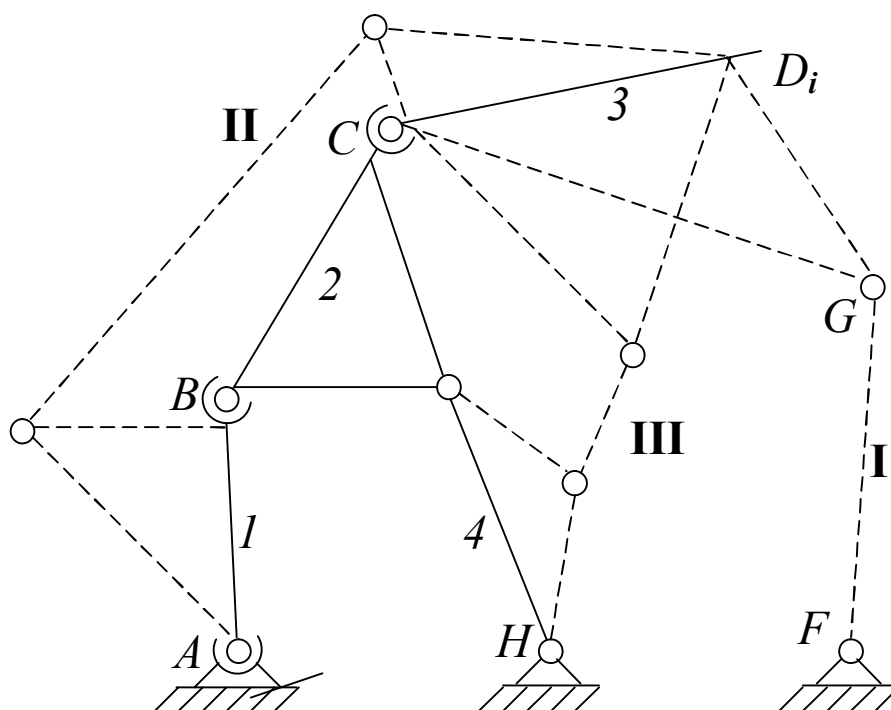


Рисунок 3.2

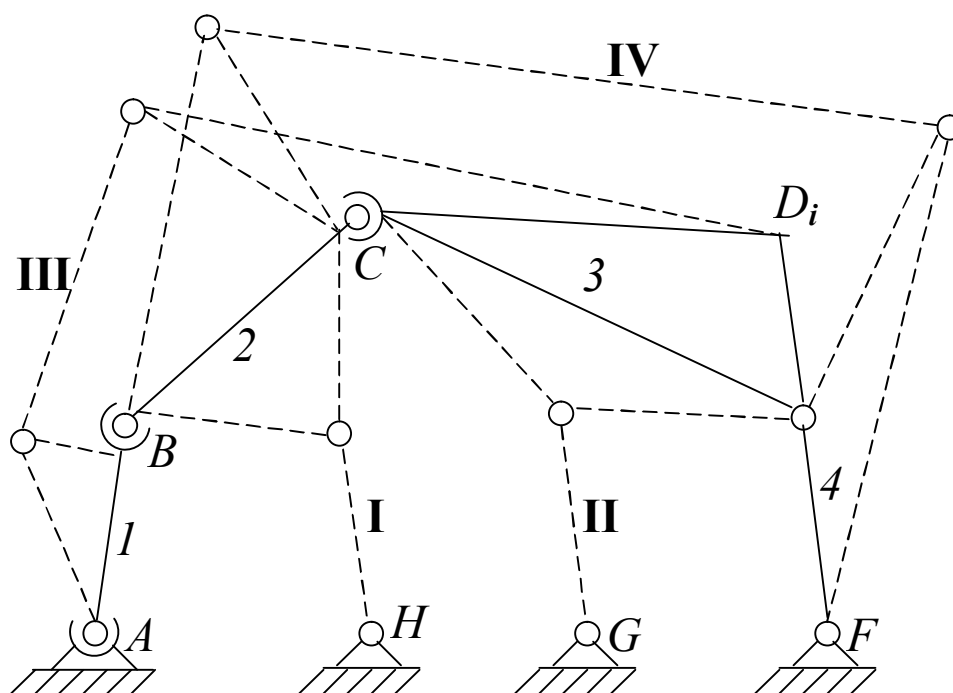


Рисунок 3.3

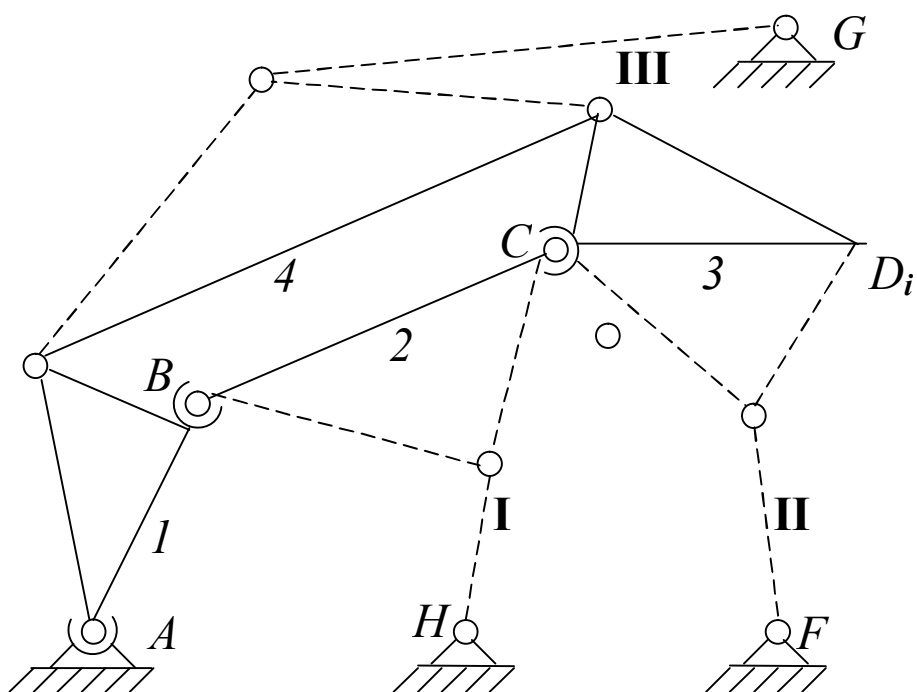


Рисунок 3.4

Обычно в качестве ведущего звена принимают звенья с одной степенью подвижности относительно стойки – это кривошип или ползун. Пусть выходное звено имеет шесть степеней подвижности и входное звено одну степень подвижности. Тогда ИКЦ имеет вид типа BCC или $ПСС$ (где B – вращательная, $П$ – поступательная, C – сферическая кинематические пары). Рассмотрим ИКЦ

Для наложения геометрической связи на относительное звено ИКЦ используем модификации ИКЦ типа BC_{Π} (где C_{Π} – сферическая с пальцем кинематическая пара) имеющий $W = -3$ степени подвижности. Повторяя наложение геометрической связи на несмежные звенья ИКЦ, как в первом случае, имеем шесть различных классов механизма.



В последнем случае, когда входное звено ИКЦ является ползун, т.е. типа *ПСС*, то аналогично имеем шесть различных шестизвенных механизмов (рисунок 4.6). В составе шестизвенного механизма имеются три механизма II класса, два III класса и один IV класса.

Из вышесказанного видно, что ИКЦ (таблица 3.1–2.1) может быть соединено со стойкой сферической, сферической с пальцем, вращательной и поступательной кинематическими парами. Следовательно, степень подвижности ИКЦ может быть равно от четырех до девяти, т.е. имеем шесть вариантов ИКЦ. С учетом этого число возможных вариантов структурной реализации двух последовательно налагаемых геометрических связей равно $6^2=36$, что в итоге приводит к $6 \times 36=216$ различным теоретически возможным шестизвенным механизмам, получаемым на основе ИКЦ (таблица 3.1–2.1).

Среди них соотношение числа механизмов различных классов останется в той же пропорции. В итоге имеем 108 механизмов II-го класса, 72 механизма III-го класса и 36 механизмов IV класса. С учетом того, что в ходе синтеза возможны $6 \times 4=24$ вариантов самой ИКЦ, то все выше указанные цифры надо умножить на 24, т.е. число возможных структурных схем шестизвенных перемещающих механизмов равно $24 \times 216=5184$.

Таким образом, использование для синтеза механизма ИКЦ с четырьмя – девятью степенями свободы и их модификации, позволяет получить все мыслимые структурные схемы шестизвенных одноподвижных механизмов.

3.2 Общий метод синтеза пространственных рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей

Использование ИКЦ и их модификации при синтезе механизмов зависит от заданных условий синтеза. Заданными условиями синтеза в общем случае как обычно является законы движения входного и выходного звеньев механизма. Один из возможных методов к синтезу механизмов по заданным условиям заключается в следующем:

1. Необходимо выбрать вид механизма (перемещающий, направляющий или передаточный);
2. По выбранному виду механизма выбрать соответствующий ему ИКЦ;
3. Если выбранная ИКЦ имеет число степеней свободы больше, чем требуется синтезируемому механизму, то необходимо исключить лишние степени свободы ИКЦ путем наложения геометрических связей на относительное движение звеньев ИКЦ. Геометрические связи можно наложить различными вариантами, соответствующими различным по парным сочетанием звеньев ИКЦ и приводящими к соответствующим структурным схемам механизма;
4. По полученной схеме механизмов следует составить целевую функцию для оптимального синтеза параметров механизмов, то есть перейти от структурного синтеза к параметрическому синтезу;
5. Для учета дополнительных условий синтеза следует сформулировать ограничения на параметры механизма в задаче оптимального синтеза;

6. Для доведения задачи синтеза до конечного численного результата синтеза, с учетом условной минимизации, необходимо иметь регулярный метод отыскания глобального экстремума целевой функции при наличии указанных ограничений.

Изложенный порядок синтеза механизмов, естественно вытекающий из логического анализа процесса синтеза механизма, позволяет предложить следующий обобщенный метод синтеза пространственных рычажных механизмов на основе использования ИКЦ и ее модификации:

1. Выбор вида механизма в зависимости от заданных условий синтеза. Если заданы следующие условия синтеза:

а) угловые или линейные перемещения двух звеньев механизма, то вид механизма определяем как передаточный механизм;

б) траектория выходного звена и закон движения входного звена, то вид механизма определяет как направляющий механизм;

в) закон перемещения выходного звена и закон движения входного звена, то вид механизма определяет как перемещающий механизм.

2. Выбор ИКЦ в зависимости от вида механизма. Для каждого из трех видов механизмов рассмотрим выбор соответствующих ИКЦ в отдельности. При синтезе перемещающих механизмов необходимо выбрать ИКЦ приведенный в таблице 1.1 рисунок 2.1. Если параметры приведенной ИКЦ не удовлетворяют дополнительным условиям синтеза, то необходимо перейти к ИКЦ в таблице 2.1 рисунок 2.1 и далее к ИКЦ в таблице 2.2 рисунок 2.1. Если же задан только закон движения выходного звена, как перемещение объекта, то необходимо выбрать модификацию ИКЦ в таблице 1.1 рисунок 1.1. Если параметры модификации ИКЦ не удовлетворяют дополнительным условиям синтеза, то необходимо перейти к модификации ИКЦ в таблице 2.1 рисунок 1.1 и далее к модификации ИКЦ в таблице 2.2 рисунок 1.1.

При синтезе направляющих механизмов необходимо выбрать модификации ИКЦ в таблице 1.1 рисунок 3.1. Если входное звено является ползун, то необходимо выбрать модификацию ИКЦ в таблице 1.1 рисунок 3.2. Если же параметры этих ИКЦ не удовлетворяют дополнительным условиям синтеза, то аналогично необходимо перейти к соответствующим модификациям ИКЦ в таблице 2.1 и 3.2.

При синтезе передаточных механизмов необходимо выбрать ИКЦ в таблице 1.1 рисунок 2.2, что приводит к передаточному четырехзвенному механизму. При вырожденных случаях решения задачи синтеза четырехзвенника необходимо перейти к модификации ИКЦ в таблице 2.1 рисунок 2.2 и далее к модификации ИКЦ в таблице 2.2 рисунок 2.2, которые приводят к кулисным механизмам. Для согласования углового и линейного перемещения входного и выходного звеньев механизма необходимо выбрать модификацию ИКЦ в таблице 1.1 рисунок 3.1, который приводит к кривошипно-ползунному механизму.

3. Исключение лишних степеней свободы ИКЦ путем наложения геометрических связей на относительное движение звеньев. Поскольку геометрическая связь накладывается на относительное движение двух звеньев,

то для определения всех возможных вариантов ее наложения следует рассмотреть все по парные сочетания ИКЦ рассмотренные в подразделе 3.1.

4. Составление общей целевой функции для оптимизационного синтеза параметров механизма. Выбор варианта наложения геометрических связей определяет структуру и класс механизма и позволяет перейти к синтезу всех параметров механизма. Наложение геометрических связей можно осуществить путем использования модификации ИКЦ, имеющих отрицательную степень подвижности приведенной в таблице 3.2. Удобство их использования при автоматизированном синтезе связано с тем, что целевая функция синтеза, составленная для ИКЦ, применима для любой ее модификации, что позволяет использовать одну и ту же целевую функцию как при синтезе параметров ИКЦ, так и при наложении геометрических связей.

Неизвестные параметры синтезируемых механизмов есть суть неизвестных пока параметров ИКЦ и параметров ее модификаций, из которых образован механизм. Синтез параметров каждой ИКЦ может быть осуществлен на основе минимизации ее целевой функции, следовательно, для синтеза всех параметров механизма необходимо минимизировать столько целевых функций, сколько исходных кинематических цепей образуют синтезируемый механизм. При наличии ограничений на параметры механизма целесообразно использовать суммарную целевую функцию:

$$S = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}^{(j)}]^2$$

где M – число используемых ИКЦ;
 N – число заданных положений;
 Δ_{q_i} – взвешенная разность.

5. Формулирование ограничений задачи синтеза. При синтезе механизмов кроме основного кинематического условия, определяемого назначением механизма, часто приходится учитывать и дополнительные условия, в число которых обычно входят допустимые габариты механизма, углы передачи, условия проворачиваемости звеньев и т.д. Это дополнительные условия представляются в виде неравенств, содержащих некоторые линейные или нелинейные функции от искомых параметров механизма:

$$g_K(x_1, x_2, \dots, x_L) \{ \leq, =, \geq \} b_K, \quad K = \overline{1, N}$$

где x_l – искомые параметры механизма,
 b_K – допустимые размеры,
 L – число искомых параметров,
 K – число ограничений.

6. Выбор метода численного решения задачи синтеза. Задачи условной минимизации, к которой сводится исходная задача синтеза механизма, относится к классу невыпуклых экстремальных задач, для которых отсутствуют регулярные методы отыскания глобального минимума. Поэтому задача такого класса решаются, как правило, в два этапа. На первом из которых статистическим методом определяется наиболее вероятная область глобального

минимума и выбирается как начальное приближение. На втором этапе минимизируется целевая функция при выбранном начальном приближении.

На основе вышеизложенного алгоритма синтеза пространственных рычажных механизмов можно синтезировать перемещающих, направляющих и передаточных механизмов по полному числу искомым параметров.

3.3 Структурно-кинематический синтез перемещающих пространственных рычажных механизмов на основе исходной кинематической цепи и ее модификаций

Кинематический синтез четырехзвенных исходных кинематических цепей (ИКЦ) со сферическими кинематическими парами по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма рассмотрены в разделе 1.1.

Фиксируя или задавая заданные и искомые параметры синтеза можно получить различные модификации ИКЦ (таблица 3.1–2.2.). Например, если задаемся координатами $x_B = y_B = z_B = 0$ точки $B \in Q_1$, то получим модификации ИКЦ типа ACD (таблица 3.1–1.1.) и т.д. Число степеней подвижности ИКЦ относительно стойки равно сумме степеней подвижности входного и выходного звеньев механизма. Чтобы получить из ИКЦ механизм, нужно исключить лишние степени подвижности путем наложения геометрических связей к движению звеньев ИКЦ.

Рассмотрим задачи структурно – кинематического синтеза перемещающих пространственных рычажных механизм (ПРМ) по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма [122].

Пусть заданы N положение входного и выходного звеньев синтезируемого механизма, которых можно представить как движения двух подвижных тел Q_1 и Q_2 с координатами $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \varphi_i^1, \psi_i^1, \theta_i^1)$ и $Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}, \varphi_i^2, \psi_i^2, \theta_i^2)$, $(i = \overline{1, N})$ (таблица 3.1–2.1.).

Требуется найти такие точки $B(x_B, y_B, z_B) \in Q_1$, $C(x_C, y_C, z_C) \in Q_2$ и $A(x_A, y_A, z_A) \in Q$ так, чтобы во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

$$\Delta_{qi} = (X_{Ci} - X_{Bi})^2 + (Y_{Ci} - Y_{Bi})^2 + (Z_{Ci} - Z_{Bi})^2 - R^2, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (3.1)$$

Полное решение данной задачи синтеза рассмотрены во второй главе. Комбинируя параметрами ИКЦ со сферическими кинематическими парами можно получить различные модификации ИКЦ с отрицательным знаком степени свободы $W = -1, -2, -3, -4, -5$; (таблица 3.2).

Рассмотрим структурно – параметрический синтез перемещающих ПРМ по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма. Простейшим пространным механизмом для реализации заданного закона

движения выходного звена механизма с использованием ИКЦ является четырехзвенный механизм (таблица 3.3–1).

Вначале для синтеза данного механизма используется ИКЦ ABD (таблица 3.1–3.1.). Составим целевую функцию на основе (2.1)

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(1)}(X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R)]^2 \quad (3.2)$$

Минимизируя S_1 по этим семи параметрам, например, с помощью алгоритма приведенного в подразделе 1.2, найдем параметры ИКЦ ABD . Следующий этап синтеза механизма – наложение геометрической связи на движение звена BD относительно стойки. В данном случае необходимо использовать для наложения связи модификации ИКЦ – (таблица 3.1–1.1), неизменно связывая BD с телом Q_2 . Отождествляя ИКЦ (таблица 3.1–1.1) с кинематической цепью BEF механизма составим целевую функцию в виде

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(2)}(x_E, y_E, z_E, X_F, Y_F, Z_F, R)]^2 \quad (3.3)$$

Минимизируя функцию S_2 по семи параметрам с использованием алгоритма приведенного в разделе 1.1, найдем искомые параметры синтеза.

К сожалению, четырехзвенники во многих случаях не могут обеспечить требуемую точность реализации заданного закона движения выходного звена механизма. Хорошую точность реализации заданного закона движения выходного звена можно получить с помощью пятизвенных и шестизвенных механизмов (таблица 3.3).

В этих механизмах тоже используются ИКЦ (таблица 3.1–1.1., 2.2.) и для исключения лишних степеней подвижности налагаются геометрически связи в виде модификации ИКЦ (таблица 3.2). При синтезе пяти и шестизвенных механизмов по полному числу искомых параметров целевую функцию можно составить в виде

$$S = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^K]^2, \quad (3.4)$$

где $j = \overline{1, K}$ – число минимизируемых функций,

$i = \overline{1, N}$ – число заданных положений звеньев.

Как видно, что при синтезе ПРМ по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма используется одна та же целевая функция.

Таблица 3.3

W=1	1 $n=3, p_5=2, p_4=1, p_3=1$	2 $n=4, p_5=4, p_3=1$	3 $n=5, p_5=5, p_4=1$
W=1	4 $n=5, p_5=4, p_3=3$	5 $n=5, p_5=4, p_3=3$	6 $n=5, p_4=4, p_3=3$
W=1	7 $n=6, p_5=3, p_4=2, p_3=3$	8 $n=6, p_5=p_3=3, p_4=2$	9 $n=6, p_5=p_3=3, p_4=2$
W=2	10 $n=4, p_5=4, p_3=1$	11 $n=5, p_5=3, p_4=1, p_3=3$	12 $n=5, p_5=3, p_4=1, p_3=3$

Используя выражение (2.4) можно синтезировать любые схемы пяти, шести и семизвенных механизмов разного вида и класса. Например, синтезируем механизм II класса (таблица 3.3–4). В начале определим параметры ИКЦ $ABCD$, составляя целевую функцию в виде:

$$S_1 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta_{qi}^{(1)}(X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C) \right]^2.$$

После определения искоемых параметров на основе минимизации целевой функции S_1 переходим к определению параметров модификации ИКЦ (таблица 3.1–1.1). Поводок EF (таблица 3.3–2) исключает две степени подвижности ИКЦ $ABCD$. Составим вторую целевую функцию, отождествляя координаты $x_B = y_B = z_B = 0$ точки $B \in Q_1$.

$$S_2 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta_{qi}^{(2)}(X_F, Y_F, Z_F, x_E, y_E, z_E, R) \right]^2.$$

Определяя искоемые параметры поводка EF , переходим к составлению третьей целевой функции для поводка GH с отрицательной степенью свободы $W = -4$ используя модификации ИКЦ (таблица 3.2).

$$S_3 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta_{qi}^{(3)}(X_H, Y_H, Z_H, R, x_G, y_G, z_G) \right]^2.$$

Как видно для определения параметров перемещающих механизмов II, III, IV и V – классов (таблица 3.3–3÷9) используется одна и та же целевая функция (3.1).

При синтезе семизвенных ПРМ целевая функция (3.1) используется четыре раза. Например, для схем приведенных в таблице 3.3–7÷9 целевые функции составляются в следующем виде

$$S_1 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta_{qi}^{(1)}(X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C) \right]^2$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta_{qi}^{(2)}(X_F, Y_F, Z_F, x_E, y_E, z_E, R) \right]^2$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta_{qi}^{(3)}(X_H, Y_H, Z_H, R, x_G, y_G, z_G) \right]^2$$

$$S_4 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta_{qi}^{(4)}(X_L, Y_L, Z_L, R, x_K, y_K, z_K) \right]^2$$

Таким образом, предложенный метод позволяет автоматизировать процесс структурно – кинематического синтеза любых схем пространственного рычажного перемещающего механизма.

3.4 Структурно – кинематический синтез пространственных направляющих рычажных механизмов на основе исходной кинематической цепи и ее модификаций

Решение задачи кинематического синтеза исходных кинематических цепей (ИКЦ) и ее модификации приведены во второй главе. При синтезе пространственных направляющих механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев могут быть использованы ИКЦ и ее модификации (таблица 3.1) как строительные блоки при проектировании механизмов [196, 197].

Самым простым видом с минимальным количеством звеньев является четырехзвенный механизм. Если задана пространственная кривая τ и требуется спроектировать некоторый рычажный механизм, на шатуне которого имеется точка D , описывающую траекторию, мало отличающуюся от τ на требуемом интервале.

Кинематический синтез четырехзвенного механизма может быть сведен к последовательному синтезу двух модификации ИКЦ (рисунок 3.7). Первая из них – модификация ИКЦ (таблица 3.1–3.1.) параметры которой определяются по заданным положениям движения входного звена AB и шатунной точки $D(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$, а вторая – модификация ИКЦ (таблица 3.1–1.1.).

Для определения параметров ИКЦ ABD составим целевую функцию в виде:

$$\Delta_{qi}^{(1)} = \sum_{i=1}^N [X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R]^2. \quad (3.5)$$

Определяя искомые параметры, на основе изложенного алгоритма приведенного в подразделе 1.2, переходим к определению N положений звена BD используя известные методы анализа. Далее, исключаем лишние степени подвижности ИКЦ ABD .

Для определения параметров ИКЦ DEF составим целевую функцию

$$\Delta_{qi}^{(2)} = \sum_{i=1}^N [X_F, Y_F, Z_F, x_E, y_E, z_E, R]^2.$$

После определения искоемых параметров проводим кинематический анализ спроектированного механизма. Если точность воспроизведения заданных условий синтеза недостаточная, то следует переходить к синтезу шестизвенных направляющих механизмов, используя ИКЦ (таблица 3.1–2.1.).

Параметры шестизвенного направляющего механизма можно определить на основе следующего алгоритма.

1. По заданным положениям входного и выходного звеньев провести синтез параметров четырехзвенного направляющего механизма на основе модификации ИКЦ – (таблица 3.1–3.1.) и ИКЦ – (таблица 3.1–1.1.).

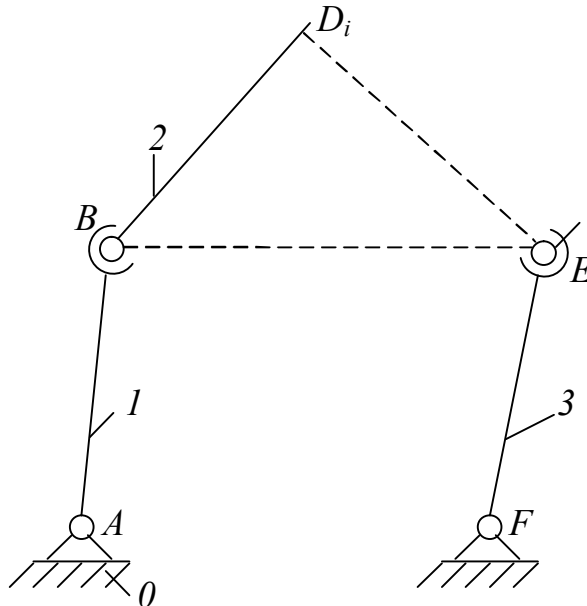


Рисунок 3.7

2. Если необходимо перейти к синтезу шестизвенного механизма, то вводим вместо поводка BD диаду BCD (рисунок 3.8), параметры которой определяем из условия ее существования связанный с параметрами ИКЦ (таблица 3.1–2.2.) соотношениями:

$$l_{BC} + l_{CD} > \max_{1 \leq i \leq N} |\overrightarrow{B_i C_i}|, \quad |l_{BE} - l_{EC}| < \min_{1 \leq i \leq N} |\overrightarrow{B_i C_i}|$$

3. На основе решения задачи анализа диады BCD определяем N заданных положений звеньев BC и CD (рисунок 3.8).

4. Исключение лишних степеней свободы ИКЦ $ABCD$ имеющей число подвижности $W=7$. Фиксируя или задавая координатами ИКЦ $ABCD$ можно получить различные модификации ИКЦ с отрицательными степенями подвижности (таблица 3.2.).

Чтобы спроектировать механизм с одной степенью подвижности с ИКЦ $ABCD$ необходимо исключить $W=-6$ степеней свободы. Для этого используем различные виды модификации ИКЦ с отрицательной степенью подвижности (таблица 3.2.).

Вариант 1.

Используем модификации ИКЦ со степенью $W = -2$ и $W = -4$ с кинематическими парами BC и BB (B – вращательная, C – сферическая) (рисунок 3.8).

Для определения параметров ИКЦ $ABCD$ составим целевую функцию

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i^{(1)}(X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C)].$$

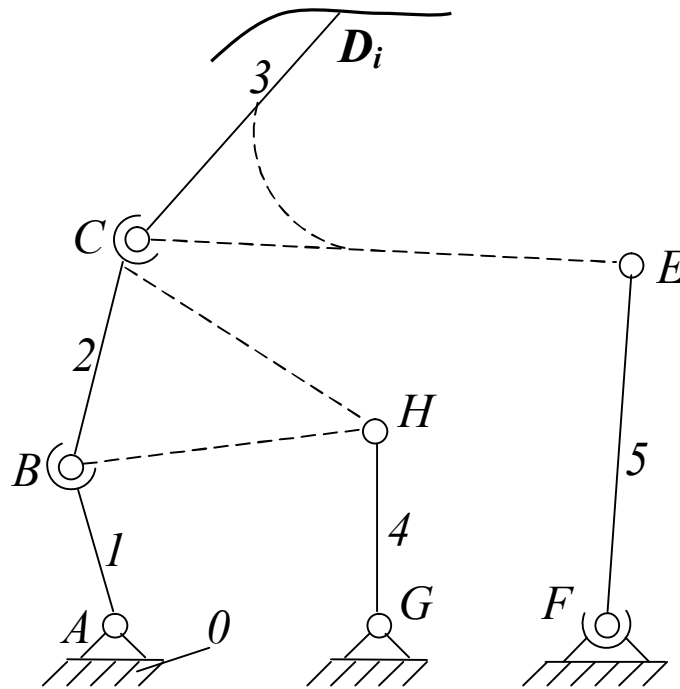


Рисунок 3.8

После чего проведя анализ положений ИКЦ $ABCD$ составим вторую и третью функцию в виде:

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i^{(2)}(X_F, Y_F, Z_F, R, x_E, y_E, z_E)]^2;$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i^{(3)}(X_G, Y_G, Z_G, R, x_H, y_H, z_H)]^2.$$

После определения искоемых параметров, совмещая с ними вращательные и сферические кинематические пары, получим спроектированный шестизвенный механизм II–класса. Структурная формула образования механизма запишем в виде: $I(0,1) \rightarrow II(2,4) \rightarrow II(3,5)$

Если на относительное движение звена 3 наложим две геометрические связи типа BB и BC относительно стойки, то получим механизм III–класса (рисунок 3.9). $I(0,1) \rightarrow III(2,3,4,5)$

Если на относительное движение звена 3 наложим геометрическую связь типа CB относительно стойки и введем геометрическую связь между звеньями 2 и 5 типа BB , то получим механизм IV класса (рисунок 3.9). $I(0,1) \rightarrow IV(2,6,5,3)$

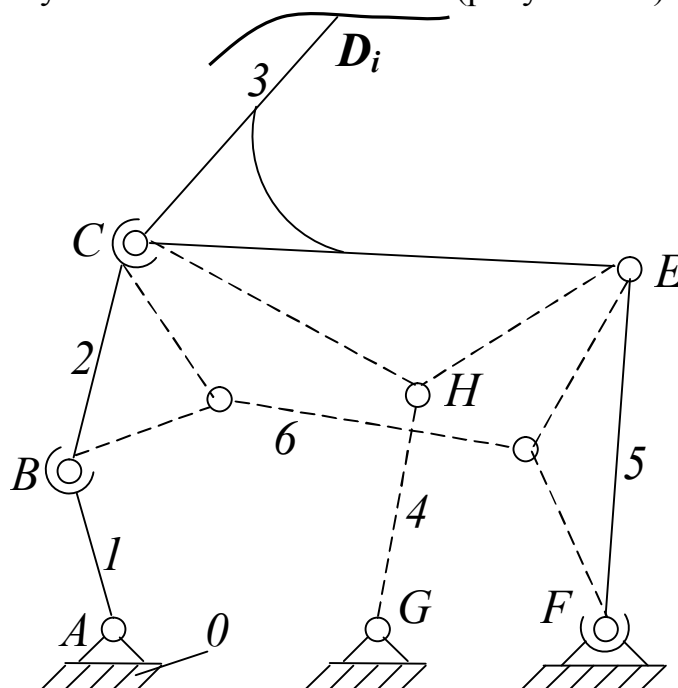


Рисунок 3.9

Вариант 2. Шестизвенный направляющий механизм можно спроектировать налагая геометрические связи в виде BB и $C_{\Pi}C_{\Pi}$ (B – вращательная, C_{Π} – сферическая с пальцем кинематическая пара) (таблица 3.2)(рисунок 3.10).

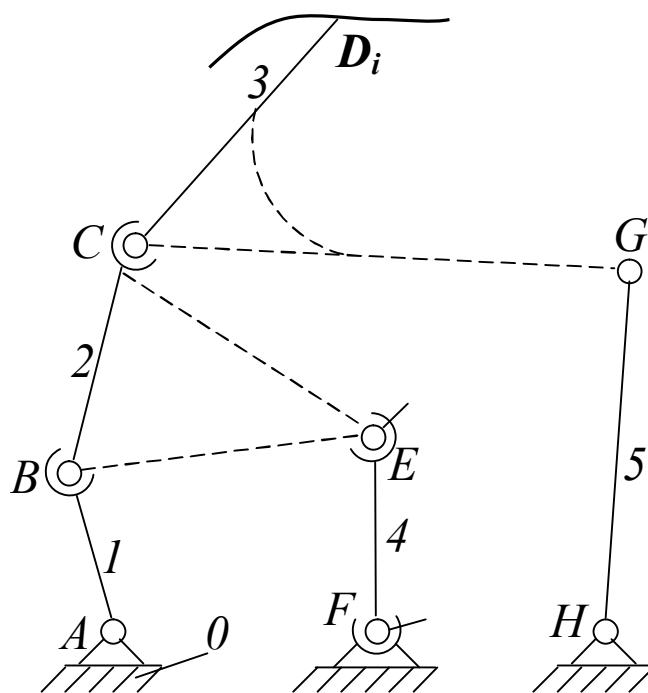


Рисунок 3.10

Если повторим наложения геометрических связей на относительное движение звеньев ИКЦ $ABCD$, как в варианте 1, то получим направляющие механизмы II, III и IV классов.

Таким образом, большой интерес с точки зрения автоматизации с помощью ЭВМ процесс формирования структуры механизма из ИКЦ (таблица 3.1–2.1.) представляет тот факт, что наложения геометрических связей на относительное движение звеньев ИКЦ можно использовать модификации ИКЦ–(таблица 3.1–2.2.) и ИКЦ–(таблица 3.1–1.1.). Модификация ИКЦ–(таблица 3.1–2.2.) может быть использована при наложении геометрической связи на относительное движение двух несмежных подвижных звеньев, а модификации ИКЦ–(таблица 3.1–1.1.) может быть использована при наложении геометрической связи на движение подвижного звена относительно стойки механизма.

3.5 Структурно-кинематический синтез передаточных пространственных рычажных механизмов на основе исходной кинематической цепи и ее модификаций

При невозможности обеспечения требуемой точности реализации заданного закона движения выходного звена четырехзвенника, вынуждены перейти к синтезу пяти и шестизвенных механизмов.

В данном разделе рассмотрены задачи структурно-кинематического синтеза пространственных пяти и шестизвенных передаточных механизмов на основе использования ИКЦ и ее модификации (таблица 3.1) [125].

Для синтеза пяти и шестизвенных механизмов предлагается два способа реализации:

Способ 1.

Если точность воспроизведения заданной функции $\psi = \psi(\varphi)$ спроектированного механизма недостаточно, то после решения задачи анализа четырехзвенника определяем N положений звеньев механизма $ABCD$ (рисунок 3.11).

Теперь вновь используем ИКЦ (таблица 3.1–2.1.) отождествляя ИКЦ $ABCD$ с кинематической цепью $GFEB$. Составим целевую функцию в виде

$$S = \sum \Delta q_i (X_G, Y_G, Z_G, x_F, y_F, z_F, R, x_E, y_E, z_E).$$

После определения искомых параметров получим пятизвенный передаточный механизм $ABEFG$ с уточненной угловой координатой $\psi' = \psi'(\varphi)$ (рисунок 3.11, 3.12).

Если точность воспроизведения заданной зависимости $\psi' = \psi'(\varphi)$ недостаточно, то необходимо перейти к синтезу шестизвенного механизма.

Способ 2.

Параметры шестизвенного передаточного механизма можно определить на основе следующего алгоритма.

1. Если необходимо перейти к синтезу шестизвенного механизма, то вводим вместо поводка BC диаду BEC , параметры которой определяем из условий ее существования (рисунок 3.13)

$$l_{BE} + l_{EC} \succ \max_{1 \leq i \leq N} |\overrightarrow{B_i C_i}|, \quad |l_{BE} - l_{EC}| \prec \min_{1 \leq i \leq N} |\overrightarrow{B_i C_i}|.$$

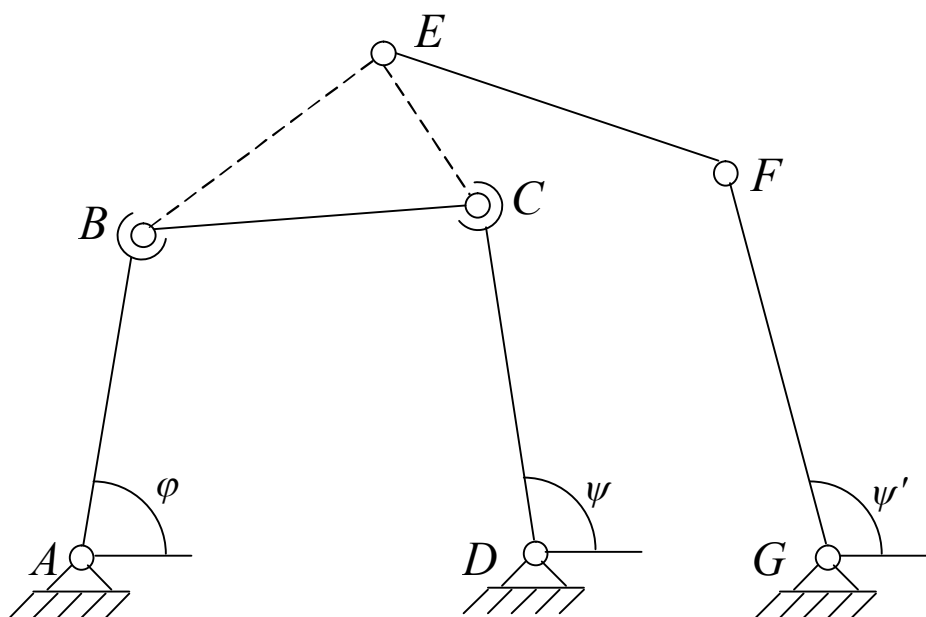


Рисунок 3.11

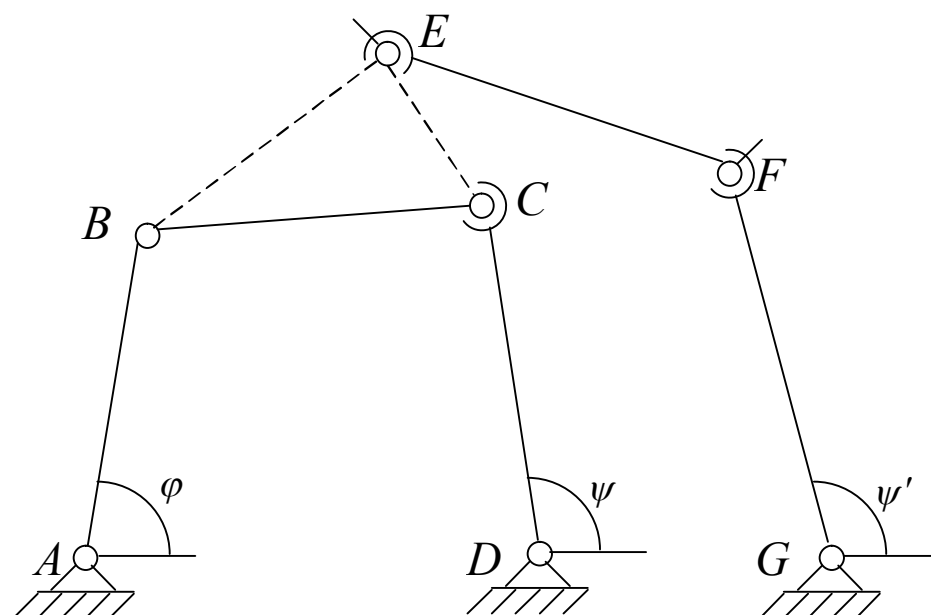


Рисунок 3.12

2. На основе решения задачи анализа диады BEC известными методами, определяем N заданных положений звеньев BE и EC .

3. На основе синтеза модификации ИКЦ (таблица 3.1–1.1.) определяем параметры звена FG , отождествляемой с кинематической цепью ACD .

4. Мысленно отбрасываем кинематическую цепь ECD и на основе решения анализа четырехзвенника $ABFG$ определяем N заданных положений звеньев BF и FG .

5. Уточняем параметры кинематической цепи ECD путем синтеза ИКЦ (таблица 3.1–2.1.), отождествляемый с кинематической цепью $ABCD$.

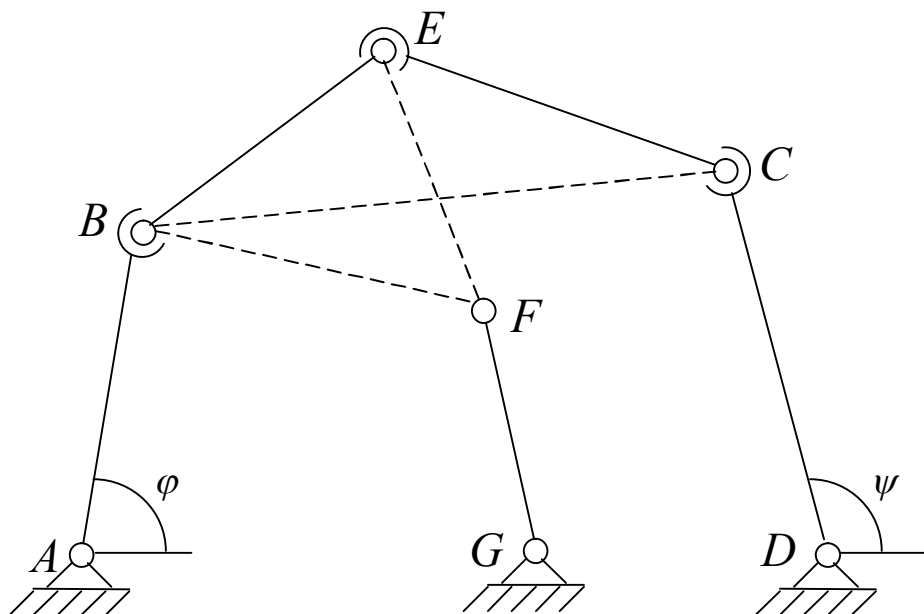


Рисунок 3.13

Этапы 1–5 могут быть повторены циклически, при необходимости повысить точность воспроизведение заданной функции $\psi = \psi(\varphi)$.

В итоге получим шестизвенный передаточный механизм II–класса. Если по заданным условиям синтеза или по характеру зависимости $\psi = \psi(\varphi)$ требуется спроектировать передаточных механизмов других классов, то используя приведенный алгоритм можно синтезировать механизмы III и IV класса (рисунок 3.14).

Если введем поводок FG на относительное движение звена EC со стойкой используя модификации ИКЦ (таблица 3.1.–1.1.), то в результате синтеза определим параметры звена FG отождествляемый с кинематической цепью ACD . В результате определения искомых параметров получим механизм III класса.

Если введем поводок FG на относительное движение между звеньями BE и CD , то используем модификацию ИКЦ (таблица 3.1.–2.1.) отождествляем с кинематической цепью $ABCD$. В результате синтеза получим механизм IV класса.

В итоге, с таким подходом синтеза можно спроектировать по заданным положениям входного и выходного звеньев в виде зависимости $\psi = \psi(\varphi)$ пяти и шестизвенные передаточные механизмы II, III и IV классов.

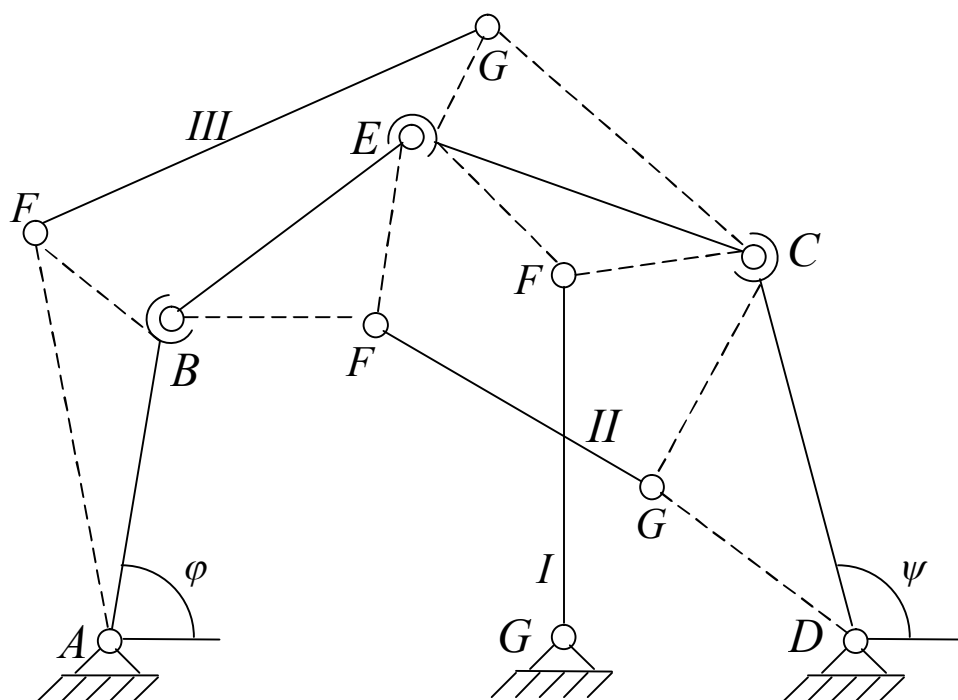


Рисунок 3.14

4 Кинематический синтез конкретных механизмов

4.1 Пример синтеза перемещающего шестизвенного механизма

Рассмотрим первый пример.

Необходимо спроектировать семизвенник со сферическими парами (рисунок 4.1), приблизительно воспроизводящий семь положений тела, заданные в таблице 4.1 и исходные данные в таблице 4.2.

При $N=7$, как известно, в подвижной пространственной системе имеются точки (не более 20) с семью положениями на одной сфере и, кроме того, точки, которые в рассматриваемых семи положениях приближаются к сфере. Как отмечалось, точные сферические точки подвижной системы соответствуют абсолютному минимуму $S = 0$ суммы $S = \sum \Delta_{qi}^2$, поскольку они обращают в нуль все Δ_{qi} ($i = 1, 2, \dots, 7$). Приближенные сферические точки подвижной системы соответствуют локальным минимумам суммы или же расположены в окрестности локальных минимумов функции $S = F(x_B, y_B, z_B)$. Как те, так и другие, являются общими точками поверхностей $G_x = 0$, $G_y = 0$, $G_z = 0$ и определяются из решения системы (1.34).

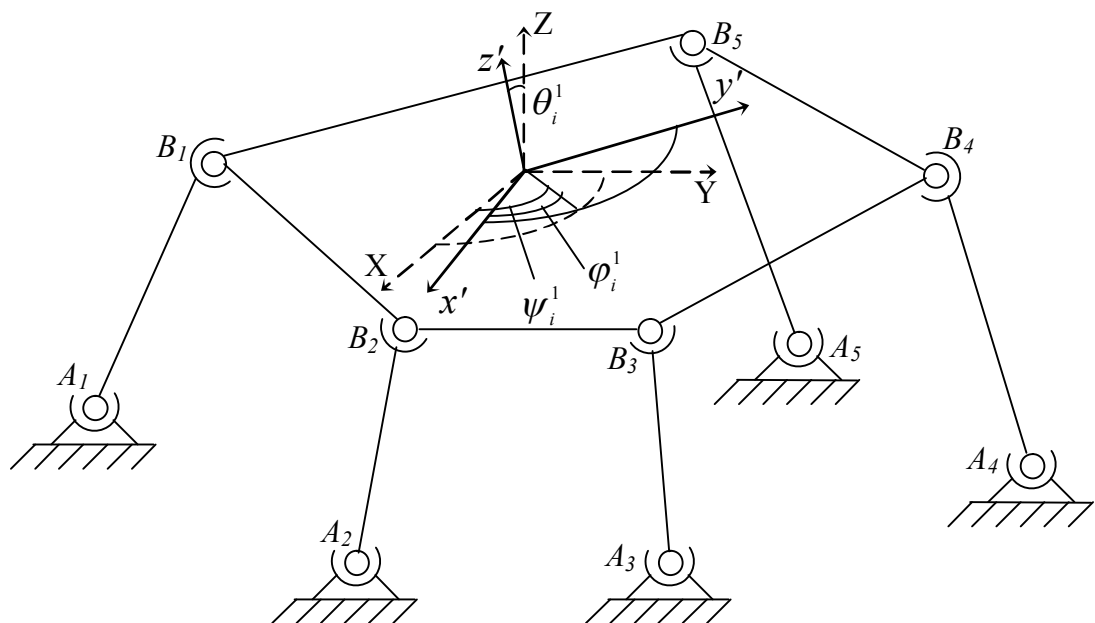


Рисунок 4.1

Нас, естественно, интересуют не все решения системы (1.84), а лишь те, которые соответствуют минимумам суммы S . Эти решения в данном случае находятся численным методом отыскания минимума суммы S , основанным на алгоритме поиска минимума функции S . Алгоритм соответствующего итерационного процесса описан в подразделе 1.1. Поскольку для построения семизвенника на рисунке 4.1 нам нужны пять сферических точек подвижной системы, после анализа результатов вычислений нами выбраны пять точек минимума поверхности $S = F(x_B, y_B, z_B)$. Координаты этих

точек, параметры соответствующих им приближающих сфер и максимальные по модулю значения Δ_{qi} представлены в таблице 4.3 [126].

Судя по отклонениям, точка B_1, B_2, B_3 – точные сферические точки (найденные с определенной погрешностью), а B_4 и B_5 – приближенные.

Таблица 4.1 – Заданные положения тела для синтеза одноподвижного механизма – семизвенника при $N = 7$

Номер положения (i)	X_{Oi}	Y_{Oi}	Z_{Oi}	Углы Эйлера, градус		
				ψ_i	φ_i	θ_i
1	0,30	0,12	0,01	0	0	0
2	0,35	0,17	0,24	28	35	17
3	0,44	0,21	0,25	34	38	5
4	0,51	0,15	0,32	17	24	12
5	0,50	0,30	0,45	50	50	21
6	0,60	0,25	0,41	45	33	24
7	0,55	0,32	0,35	0	0	0

Таблица 4.2 – Исходные данные при $N = 7$

N = 7	ZLL = 6 ZKK = 6 ZII = 6 dmj = .2		MJ0 = -1.2 NJ0 = -1.2 KJ0 = -1.2		
XS = .3	YS = .12	ZS = .01	F = 0	P = 0	T = 0
XS = .35	YS = .17	ZS = .24	F = 28	P = 35	T = 17
XS = .44	YS = .21	ZS = .25	F = 34	P = 38	T = 5
XS = .51	YS = .15	ZS = .32	F = 17	P = 24	T = 12
XS = .5	YS = .3	ZS = .45	F = 50	P = 50	T = 21
XS = .6	YS = .25	ZS = .41	F = 45	P = 33	T = 24
XS = .55	YS = .32	ZS = .35	F = 0	P = 0	T = 0

Для решения данной задачи составлена программа на языке Visual Basic. Результаты решения задачи приведены в таблице 4.3. Расчеты были проведены в диапазоне:

$$-1.2 < MJ < 0.6$$

$$-1.2 < NJ < 0.6$$

$$-1.2 < KJ < 0.6$$

с шагом $dmj = 0.2$.

Таблица 4.3 – Результаты расчета при $N = 7$

LL = 3 KK = 2 II = 1		MJ = -.6 NJ = -.8 KJ = -1		
N = 1	C = .488270	B = -2.22103		
N = 2	C = .303894	B = 3.96393		
N = 3	C = .151985	B = -3.85753		
N = 4	C = -.146845	B = 3.00599		
R0 = .245293	R01 = .245194	S = 4.29655198714746E-03	S1 = 4.29557624342188E-03	
LL = 3 KK = 2 II = 2		MJ = -.6 NJ = -.8 KJ = -.8		
N = 1	C = .48815	B = -3.42355		
N = 2	C = .303857	B = 2.28575		
N = 3	C = .152075	B = -2.95424		
N = 4	C = -.146807	B = 3.00600		
R0 = .245216	R01 = .245194	S = 4.29213625865016E-03	S1 = 4.29557690770942E-03	
LL = 3 KK = 2 II = 3		MJ = -.6 NJ = -.8 KJ = -.6		
N = 1	C = .488174	B = -3.18222		
N = 2	C = .303906	B = 5.18244		
N = 3	C = .152115	B = -2.55608		
N = 4	C = -.146845	B = .03006		
R0 = .245195	R01 = .245194	S = 4.29440266995251E-03	S1 = 4.29557632790717E-03	
LL = 3 KK = 2 II = 4		MJ = -.6 NJ = -.8 KJ = -.4		
N = 1	C = .488217	B = -2.74528		
N = 2	C = .303942	B = 8.77332		
N = 3	C = .152078	B = -2.92302		
N = 4	C = -.146866	B = 3.00599		
R0 = .245217	R01 = .245194	S = 4.29709734032829E-03	S1 = 4.29557664181851E-03	

Во всем диапазоне расчетов процесс вычислений был сходящимся. Глобальный минимум равен

$$S_{min} = 0.0042921$$

и достигнут он при

$$LL=3,$$

$$KK=2,$$

$$II=2.$$

В вышеприведенной таблице 4.3 показана лишь часть результатов в окрестности глобального минимума, значение которого выделено в таблице жирной рамкой.

Ниже приведены результаты расчета целевой функции в виде плоских и объемных графиков (рисунок 4.2, 4.3).

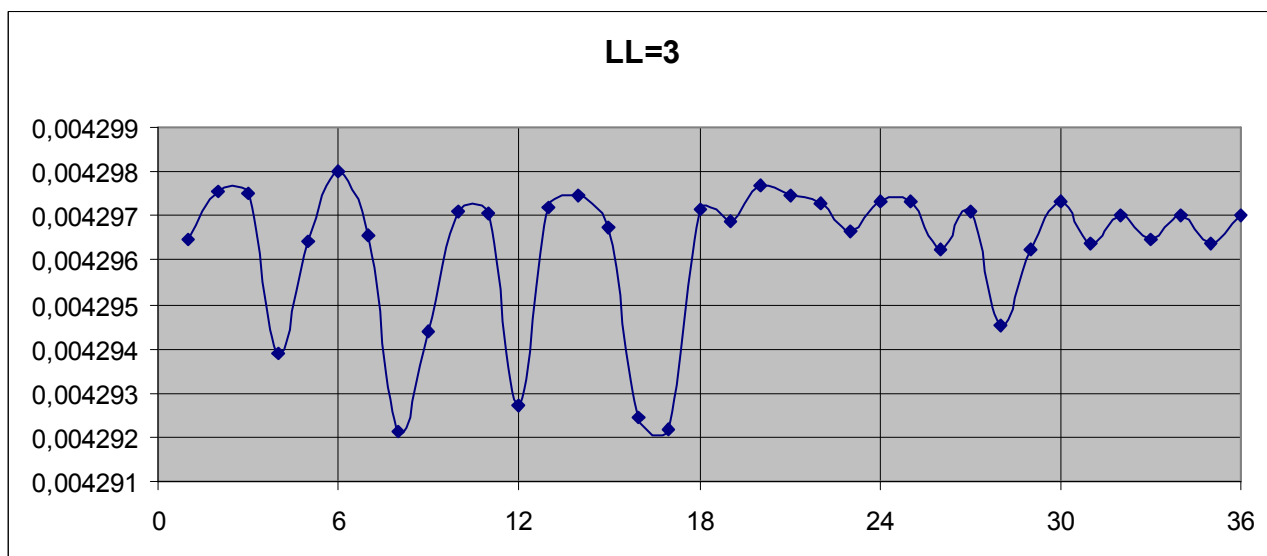
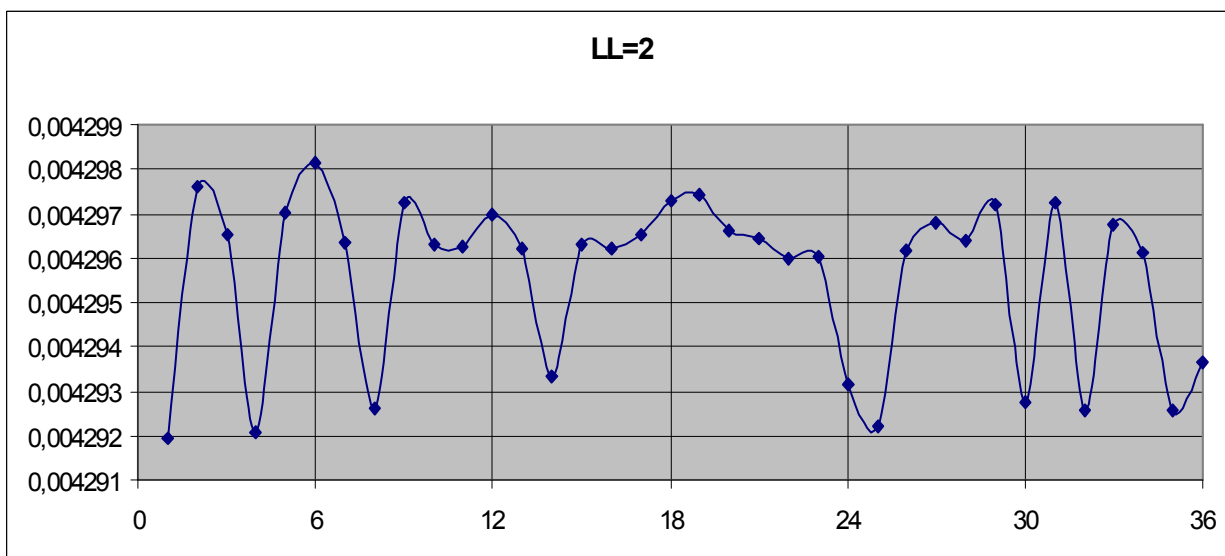
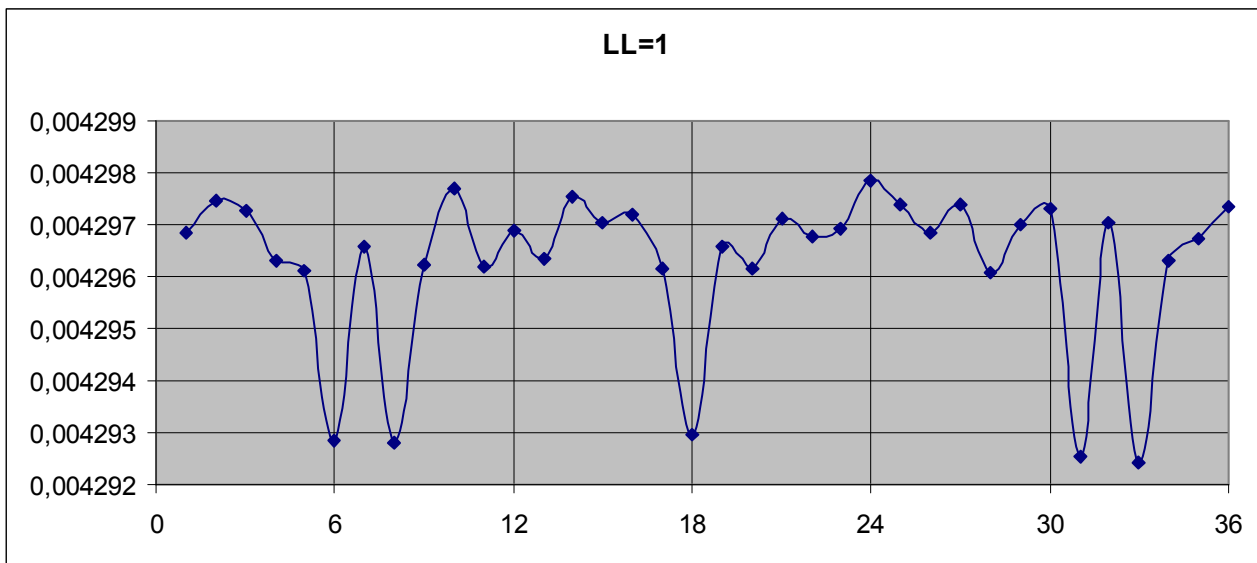


Рисунок 4.2 – Плоские графики, лист 1

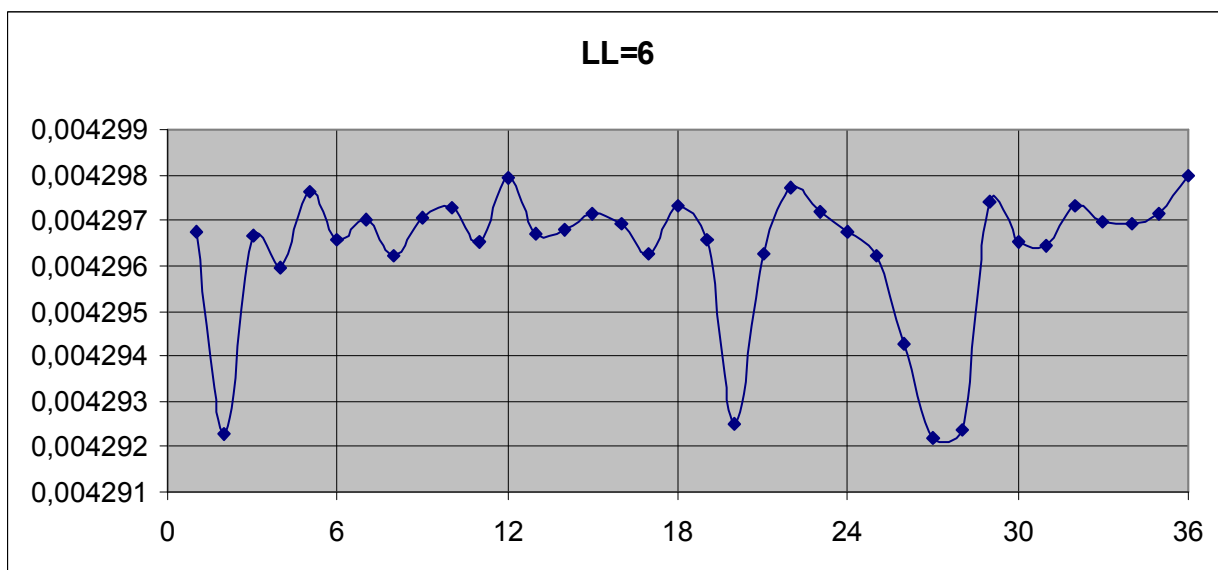
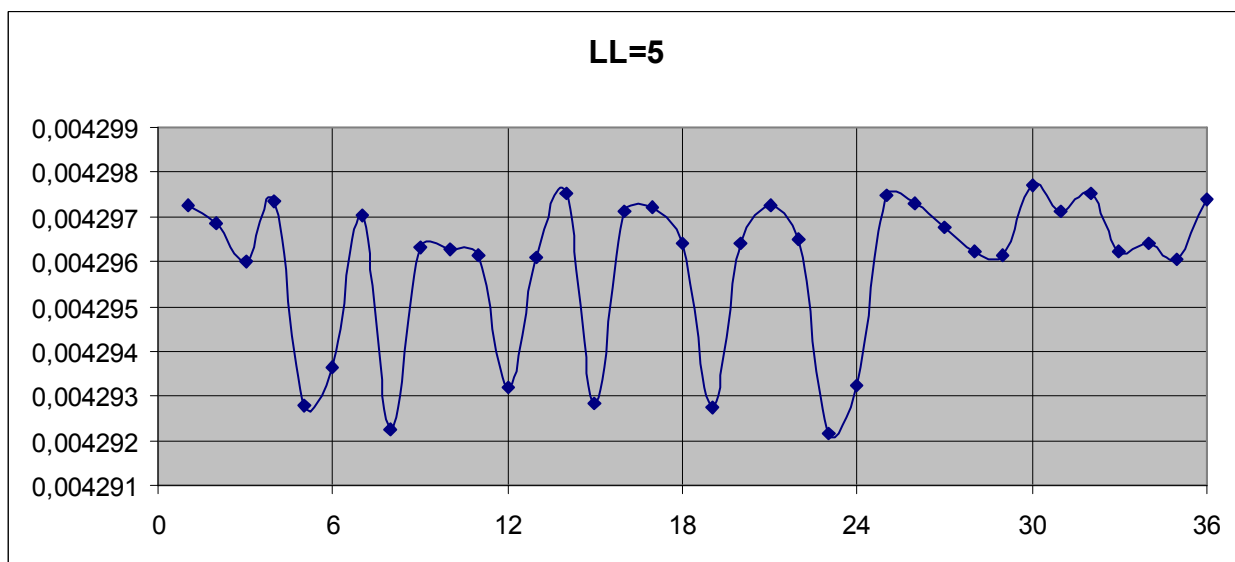
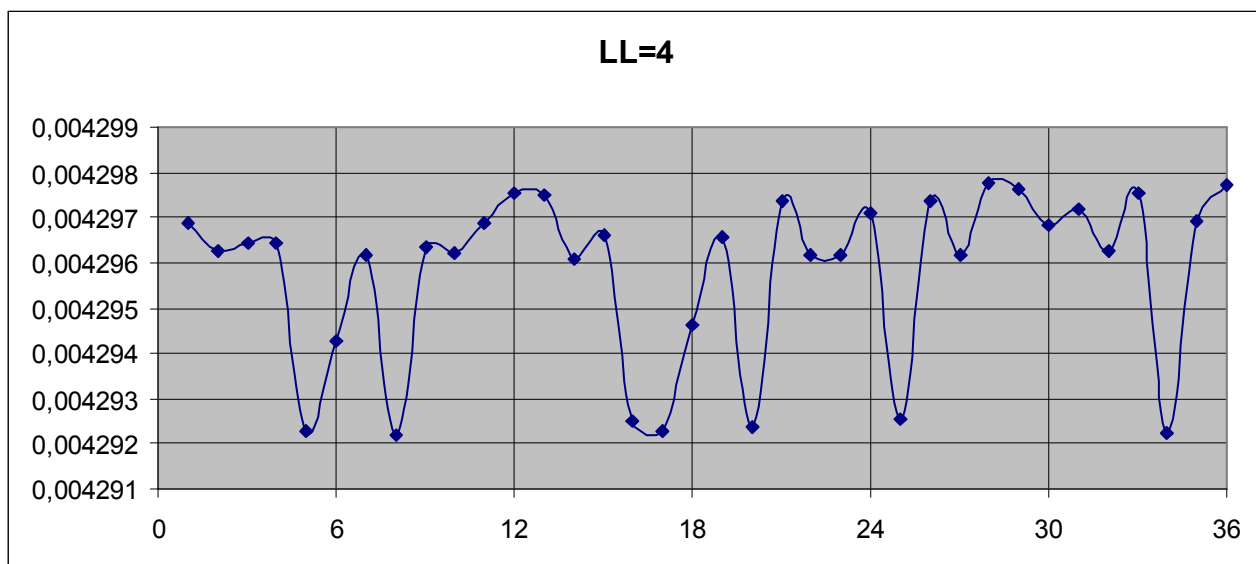


Рисунок 4.2, лист 2

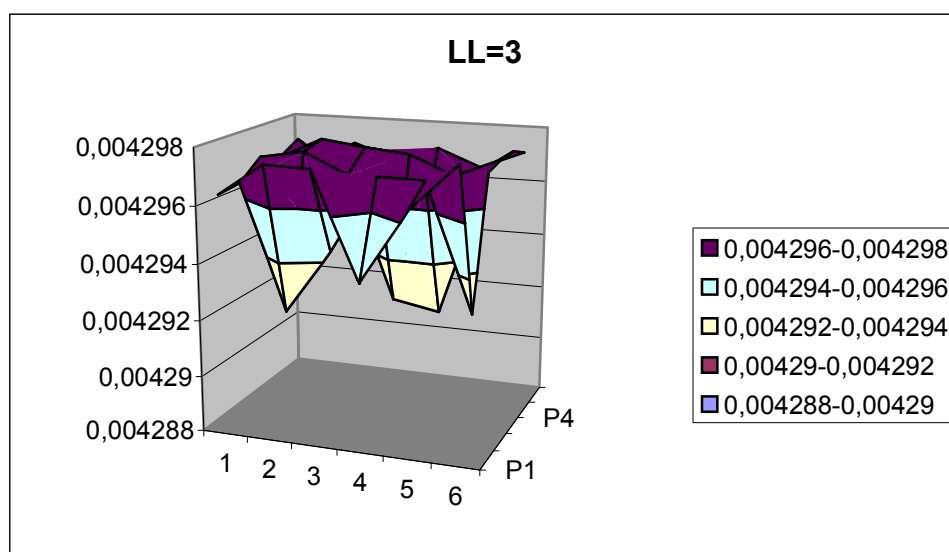
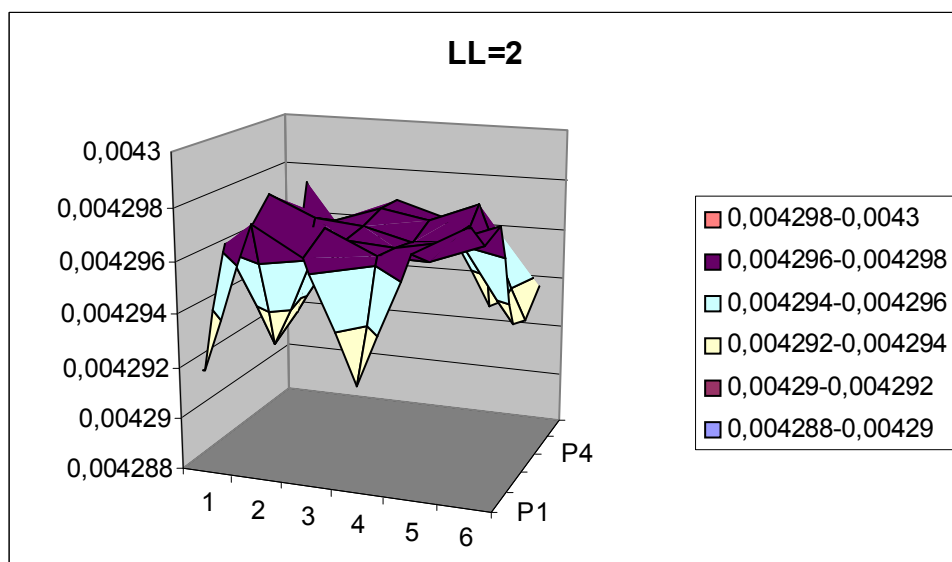
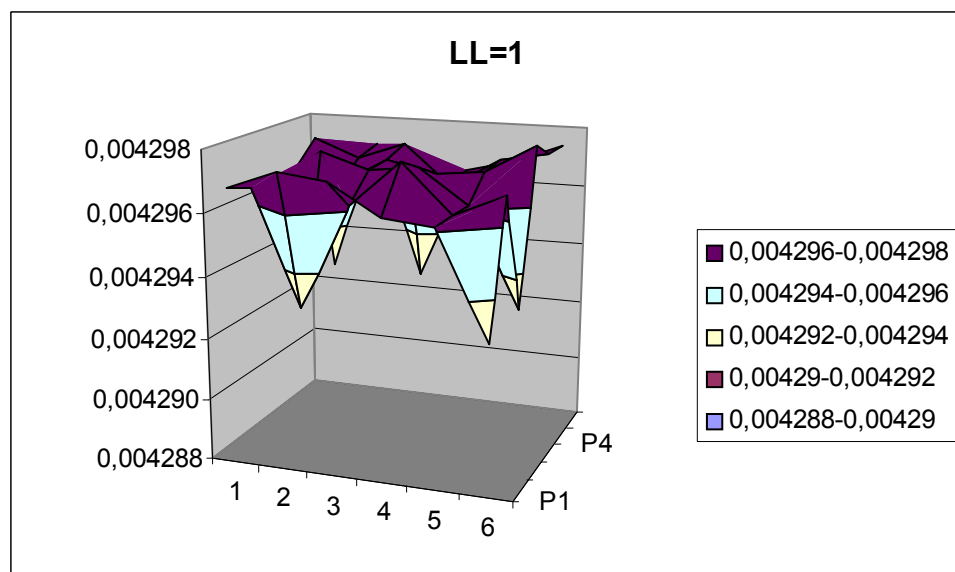


Рисунок 4.3 – Объемные графики, лист 1

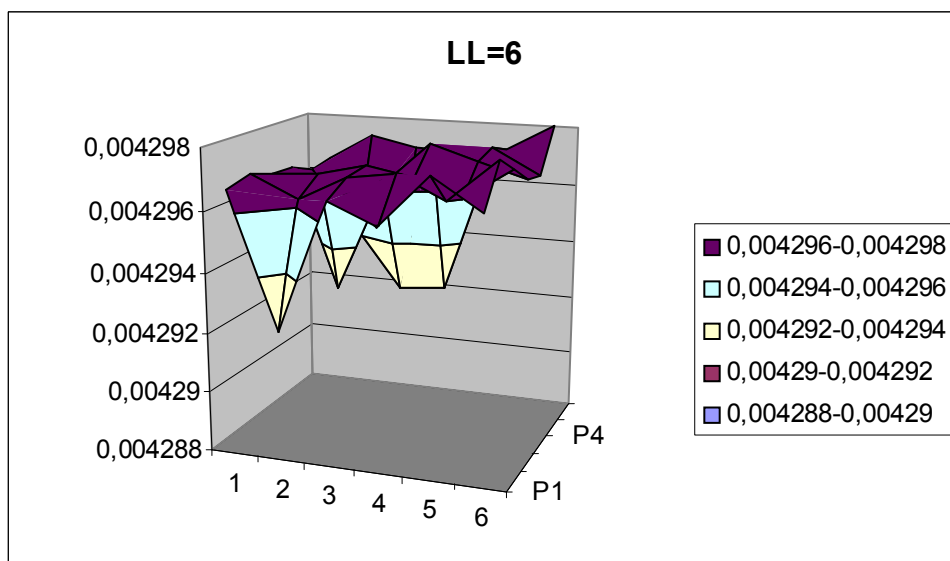
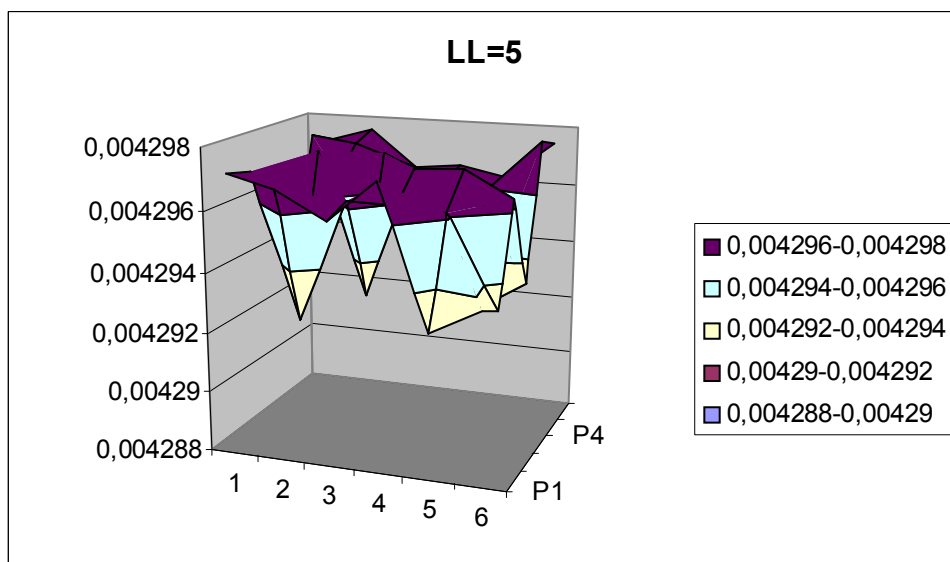
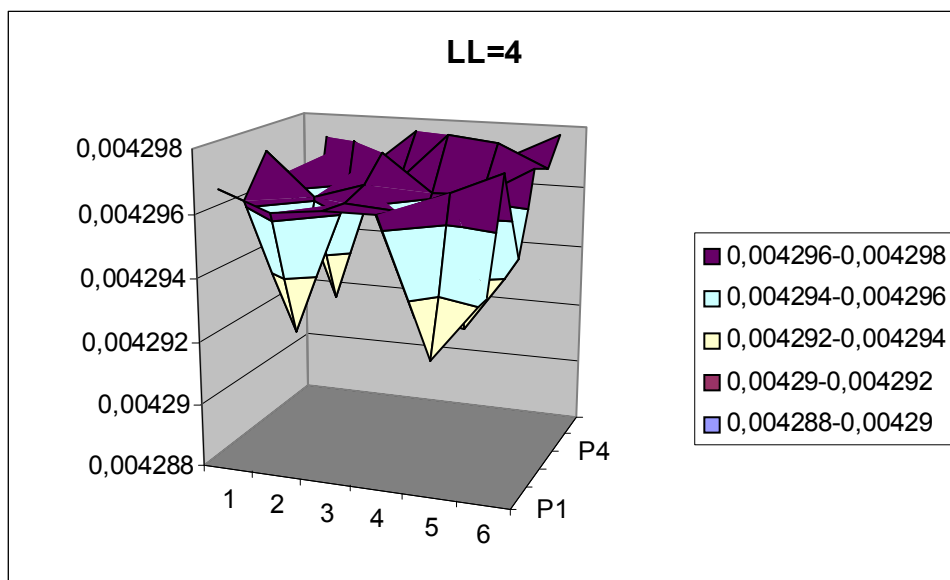


Рисунок 4.3, лист 2

Рассмотрим второй пример.

Необходимо спроектировать одноподвижный механизм, приближенно воспроизводящий заданные десять $N = 10$ положений подвижного тела, параметры которых представлены в таблице 4.4 и исходные данные в таблице 4.5. Начало подвижной системы координат перемещается по заданной кривой, как и в приведенном ранее численном примере.

Сначала по методу, описанному в разделе 1, проектируем два звена типа CC (C – сферическая пара).

Координаты центров подвижных сферических шарниров в системе $oxuz$ находим с помощью итерационной процедуры определения минимума суммы:

$$x_{B1} = - 0,020274,$$

$$y_{B1} = 0,017381,$$

$$z_{B1} = - 0,030652,$$

$$x_{B2} = - 1,887589,$$

$$y_{B2} = 0,193213,$$

$$z_{B2} = - 1,809810.$$

Координаты неподвижных шарниров A_1 , A_2 и длины R_1 , R_2 звеньев определяем из системы (1.53):

$$X_{A1} = - 0,389318,$$

$$Y_{A1} = 0,700546,$$

$$Z_{A1} = - 0,0806314,$$

$$R_1 = 2,584\,716,$$

$$X_{A2} = 2,266482,$$

$$Y_{A2} = - 1,206041,$$

$$Z_{A2} = - 2,886927,$$

$$R_2 = 2,800555.$$

Точность полученного приближения для спроектированных звеньев характеризуется следующими значениями:

$$S_1 \sim 0, \quad \max |\Delta_{1i}| = 0,000023,$$

$$S_2 = 0,000807, \quad \max |\Delta_{2i}| = 0,002731.$$

Таблица 4.4 – Заданные положения тела для синтеза одноподвижного механизма при $N = 10$

Номер положения (i)	X_{Oi}	Y_{Oi}	Z_{Oi}	Углы Эйлера, градус		
				ψ_i	ϕ_i	θ_i
1	2,0	0,0	0,0	0	0	0
2	1,995004	0,099833	0,099958	5	10	15
3	1,980067	0,198669	0,199667	10	20	30
4	1,955336	0,295520	0,298876	15	30	45
5	1,921061	0,389418	0,397339	20	40	60
6	1,877583	0,479426	0,494808	20	40	60
7	1,825336	0,564642	0,591040	15	30	45
8	1,764842	0,644218	0,685796	10	20	30
9	1,696707	0,717356	0,778837	5	10	15
10	1,621610	0,783327	0,869931	0	0	0

Для решения данной задачи составлена программа на языке Visual Basic. Результаты решения задачи приведены в таблице 4.6.

Таблица 4.5 – Исходные данные при $N=10$

N = 10	ZLL = 6	ZKK = 6	ZII = 6	MJ0 = -2.1	NJ0 = -.1	KJ0 = -2.1	dmj=0.2
XS = 2	YS = 0	ZS = 0	F = 0	P = 0	T = 0		
XS = 1.995004	YS = .099833	ZS = .099958	F = 10	P = 5	T = 15		
XS = 1.980067	YS = .198669	ZS = .199667	F = 20	P = 10	T = 30		
XS = 1.955336	YS = .29552	ZS = .298876	F = 30	P = 15	T = 45		
XS = 1.921061	YS = .389418	ZS = .399339	F = 40	P = 20	T = 60		
XS = 1.877583	YS = .479426	ZS = .494808	F = 40	P = 20	T = 60		
XS = 1.825336	YS = .564642	ZS = .59104	F = 30	P = 15	T = 45		
XS = 1.764842	YS = .644218	ZS = .685796	F = 20	P = 10	T = 30		
XS = 1.696707	YS = .717356	ZS = .778837	F = 10	P = 5	T = 15		
XS = 1.62161	YS = .783327	ZS = .869931	F = 0	P = 0	T = 0		

Таблица 4.6 – Результаты расчета при $N = 10$

MJ = -1.9 NJ = .1 KJ = -1.9			
РЕШЕНИЕ НЕ ИМЕЕТ W=2			
MJ = -1.9 NJ = .1 KJ = -1.7			
РЕШЕНИЕ НЕ ИМЕЕТ W=2			
MJ = -1.9 NJ = .1 KJ = -1.5			
РЕШЕНИЕ НЕ ИМЕЕТ W=2			
MJ = -1.9 NJ = .1 KJ = -1.3			
РЕШЕНИЕ НЕ ИМЕЕТ W=2			
MJ = -1.9 NJ = .1 KJ = -1.1			
РЕШЕНИЕ НЕ ИМЕЕТ W=2			
MJ = -1.9 NJ = .1 KJ = -.8999997			
РЕШЕНИЕ НЕ ИМЕЕТ W=2			
MJ = -1.9 NJ = .3 KJ = -1.9			
РЕШЕНИЕ НЕ ИМЕЕТ W=2			
MJ = -1.9 NJ = .3 KJ = -1.7			
РЕШЕНИЕ НЕ ИМЕЕТ W=2			

Расчеты были проведены в диапазоне:

$$\begin{aligned}
 -1.9 < MJ < 0.1 \\
 0.1 < NJ < -1.9 \\
 -1.9 < KJ < 0.1
 \end{aligned}$$

с шагом $dmj = 0.2$

В вышеприведенной таблице 4.6 показана лишь часть результатов. Во всем диапазоне расчетов при $N = 10$ задача решения не имеет, так как процесс вычислений оказался расходящимся.

4.2 Кинематический синтез пространственных перемещающих грузоподъемных механизмов

К общим требованиям, предъявляемым к механизмам управляемого перемещения твердого тела, относятся такие, как возможно меньшее количество звеньев и обобщенных координат, т.е. простота конструкции. Точное воспроизведение заданных движений механизма со степенью подвижности, меньшей числа степеней свободы перемещаемого объекта, в общем случае возможно при наличии высшей пары, а приближенное воспроизведение указанных движений с заданной степенью точности осуществимо плоскими

рычажными механизмами с соответствующим числом подвижных звеньев и кинематических пар V – класса.

При изготовлении конструкций грузоподъемных устройств на базе рычажных механизмов должна строго соблюдаться параллельность осей кинематических пар. Даже небольшое отклонение параллельности осей приводит к потере точности воспроизведения заданных движений, заклиниванию механизма, к резкому увеличению нагрузок и к соответствующему изгибу стержней, то есть снижению жесткостных характеристик звеньев механизма.

Большинство приведенных недостатков устранимы путем применения пространственных рычажных механизмов высоких классов (ПРМВК). Грузоподъемные устройства на базе ПРМВК обладают простотой и жесткостью конструкции, большой грузоподъемностью за счет наличия замкнутых контуров механизма, а также решает проблемы связанные с возможностью небольших отклонений параллельности осей вращения кинематических пар [127, 128].

Постановка задачи: Пусть заданы N конечно удаленных положений двух подвижных тел $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1)$ и $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2)$, $i=1, N$, которые жестко связаны с входным и выходным звеньями механизма.

Требуется найти такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат $OXYZ$, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B_i и C_i для всех заданных положений тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

Решение: Для решения поставленной задачи составим уравнение взвешенной разности:

$$\Delta_{q_i} = |B_i C_i|^2 - R^2 = (X_{Ci} - X_{Bi})^2 + (Y_{Ci} - Y_{Bi})^2 + (Z_{Ci} - Z_{Bi})^2 - R^2, \quad (4.1)$$

которое является функцией десяти переменных: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Сгруппировав все эти параметры по четыре с общим параметром R , можно представить данную взвешенную разность в трех различных формах:

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = (\tilde{X}_{Ai} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A)^2 - R^2,$$

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = (\tilde{x}_{Bi} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{Bi} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{Bi} - z_B)^2 - R^2,$$

$$\Delta_{q_i}^{(3)} = (\tilde{x}_{Ci} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{Ci} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{Ci} - z_C)^2 - R^2,$$

$$i=1, N,$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{Ai} \\ \tilde{Y}_{Ai} \\ \tilde{Z}_{Ai} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{10}^i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{20}^i \\ Y_{D_i} \\ Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{B_i} \\ \tilde{y}_{B_i} \\ \tilde{z}_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{01}^i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{21}^i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{C_i} \\ \tilde{y}_{C_i} \\ \tilde{z}_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{02}^i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{12}^i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix},$$

где $[T_{kj}^i]$ – матрица перехода от k – той системы координат к j – той системе, определяемая как в (1.17.)

Что бы расписать элементы матрицы введем обозначения: $\cos \theta_i^j = c_1$, $\cos \psi_i^j = c_2$, $\cos \varphi_i^j = c_3$, $\sin \theta_i^j = s_1$, $\sin \psi_i^j = s_2$, $\sin \varphi_i^j = s_3$. Тогда $e_{i1}^j = c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3$, $m_{i1}^j = s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3$, $n_{i1}^j = s_1 s_3$, $e_{i2}^j = -c_2 s_3 - c_1 s_2 s_3$, $m_{i2}^j = -s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3$, $n_{i2}^j = s_1 c_3$, $e_{i3}^j = s_1 s_2$, $m_{i3}^j = -s_1 c_2$, $n_{i3}^j = c_1$.

Для решения приведенной системы уравнений составим суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}^k]^2, \quad (k = \overline{1,3}) \quad (4.2)$$

Необходимые условия минимума суммы (4.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (4.5)$$

На основе предложенного итерационного алгоритма, приведенного в подразделе 1.2, решая уравнения (4.3), (4.4) и (4.5), определим искомые параметры $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Рассмотрим решение задачи синтеза грузоподъемного пространственного механизма по заданным положениям входного и выходного звеньев 1 и 3 (рисунок 4.4).

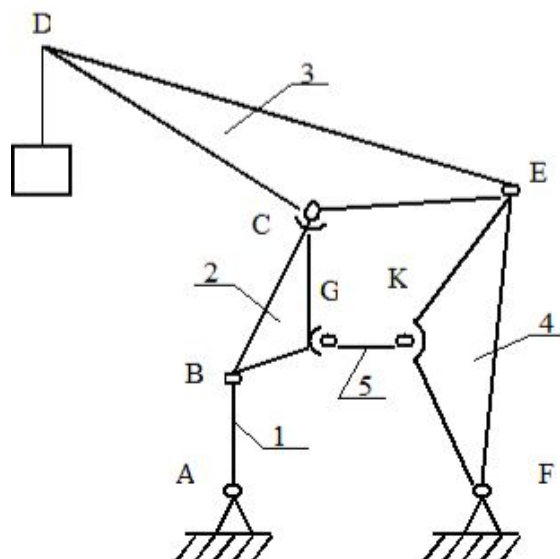


Рисунок 4.4

Суть предлагаемого метода для решения задачи синтеза механизма состоит в сведении ее к многократному решению задачи синтеза пространственной исходной кинематической цепи (ПИКЦ) $ABCD$ (рисунок 1.6).

Для этого совмещаем точки A и D проектируемого механизма с одноименными точками тел Q_1 и Q_2 соответственно. Вводя входную информацию о заданных положениях входного и выходного звеньев в систему уравнений (4.1), определяем искомые параметры ПИКЦ. Далее находим параметры бинарного звена CEF на основе синтеза соответствующей ПИКЦ CEF , которую можно рассматривать как частный случай ПИКЦ $ABCD$, координаты точки B которой равны нулю ($x_B=y_B=z_B=0$). Из анализа положений звеньев ПИКЦ $ABCD$ определяем новое положение точки $C_i(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , и, вводя новые данные в уравнения вида (4.3) – (4.5), определяем искомые параметры: $X_F, Y_F, Z_F, R, x_E, y_E, z_E$.

Аналогично определяем координаты бинарного звена GK , проводя анализ положений звеньев CEF . Подставляя новые данные в уравнения (4.2), определяем искомые параметры: $x_G, y_G, z_G, R, x_K, y_K, z_K$.

По найденным значениям параметров синтезированных ПИКЦ можно определить направления осей и длины звеньев проектируемого шестизвенного механизма IV – класса (рисунок 4.4).

При необходимости, на основе ПИКЦ, можно синтезировать механизм с ведущим ползуном, заменяя вращательную кинематическую пару на ползун. В этом случае в выражении (4.1) заданными параметрами тела Q_1 считаем координаты точки $A_i(X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai})$. Определению подлежат параметры: $x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Повторяя аналогичные процедуры синтеза соответствующих ПИКЦ, получим механизм IV – класса типа $ПВССВСВ$ ($П$ – поступательная, $В$ – вращательные, $С$ – сферические кинематические пары).

На основе выражения (4.1) путем повторения процедур синтеза соответствующих ПИКЦ, можно синтезировать механизм типа $ВС_ПСВС_ПВВ$ (рисунок 4.5), в котором используются сферические кинематические пары с пальцем.

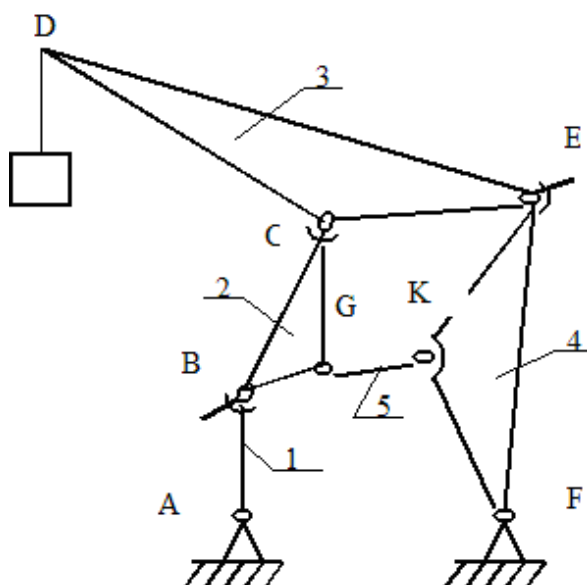


Рисунок 4.5

Для определенной категории грузоподъемных машин, требующих высокой мобильности и частых перевозок с места на место, имеют большое значение габаритные размеры в транспортируемом (сложенном) положении. Для чего приходится минимизировать количество опорных звеньев и габариты самих звеньев, сохраняя при этом необходимую высоту подъема груза. Решить такую противоречивую задачу позволяет использование ПРМВК V – класса (рисунок 4.6).

Процесс синтеза ПРМВК V – класса на основе ПИКЦ по заданным положениям входного и выходного звеньев можно разбить на следующие этапы:

1. По заданным положениям входного и выходного звеньев определяем параметры ПИКЦ $ABCD$.
2. Проводим анализ положений звеньев ПИКЦ $ABCD$.
3. По конструктивным соображениям задаемся положением звена FG и определяем искомые параметры ПИКЦ GFE .
4. Определяем параметры бинарного звена MN .
5. Определяем параметры бинарного звена LK .

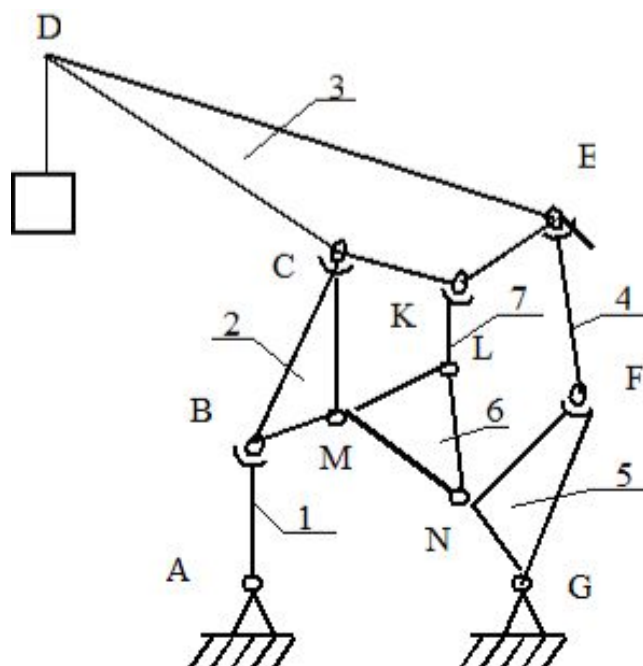


Рисунок 4.6

В итоге получим все искомые параметры проектируемого ПРМВК V – класса.

Как следует из вышеизложенного, во всех процедурах синтеза механизмов используется одна и та же целевая функция (4.1) для определения параметров ПИКЦ и ее модификаций, часть параметров которых изначально известна. При этом формируется структура проектируемого механизма и определяются все его искомые параметры.

4.3 Кинематический синтез пространственных направляющих механизмов

4.3.1 Кинематический синтез станка – качалки для добычи нефти

Рассмотрим задачу синтеза направляющего шестизвенного механизма станка – качалки для добычи нефти. Пусть задана траектория шатунной точки P в виде прямой параллельной к оси Y . Входное звено совершает полный оборот вокруг точки A (кривошип). Начало неподвижной системы координат $OXYZ$ совместим с началом отрезка α - α (рисунок 4.7).

В начале синтеза шестизвенного механизма задаемся длинами звеньев FEP и проводим анализ положений звена EP . Для этого разбиваем отрезок α - α на $N = 11$ равных частей. Определим текущие координаты точки P .

$$X_p^{(j)} = 0; \quad Y_p^{(j)} = Y^{(0)} + j \frac{5}{n}; \quad (j = \overline{1, N})$$

Для определения параметров ИКЦ $ABCP$ используем целевую функцию в виде

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(1)}(X_A, Y_A, x_B, y_B, R, x_C, y_C)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(1)}(X_A, Y_A, l_{AB}, l_{BC}, l_{CP})]^2;$$

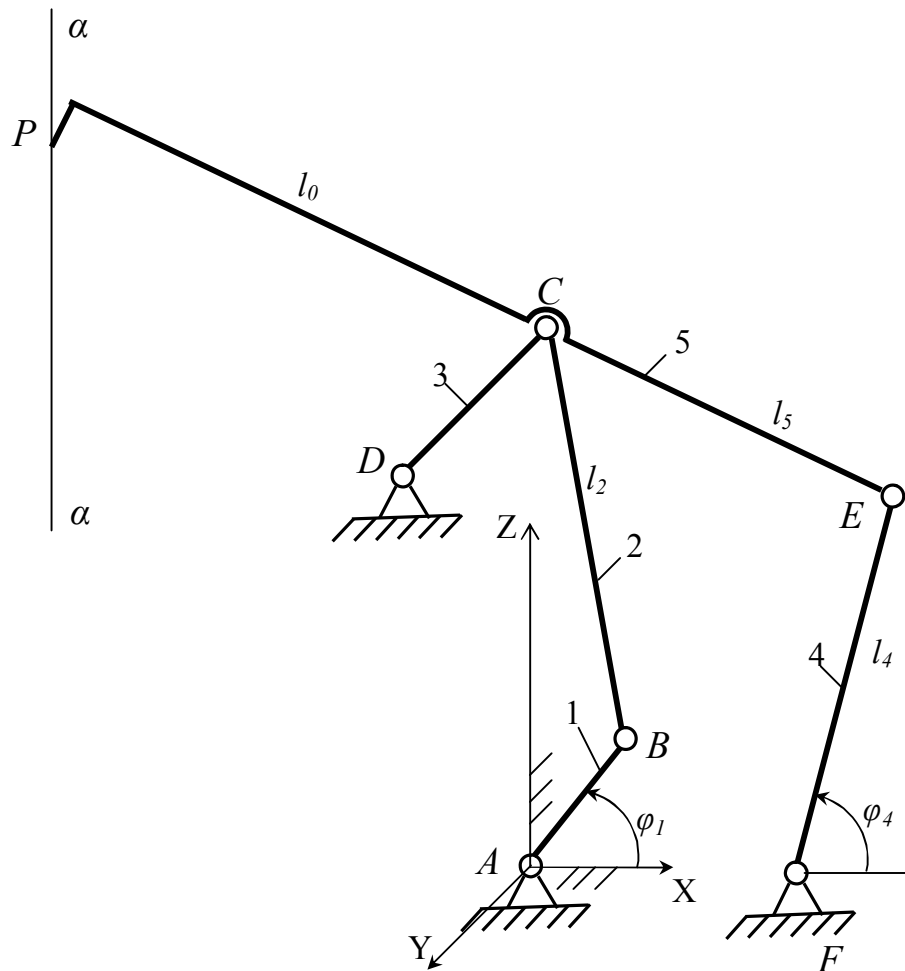


Рисунок 4.7

Вторая целевая функция определяет искомые параметры модификации ИКЦ DCP который имеет вид

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(2)}(X_D, Y_D, R, x_C, y_C)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(2)}(X_D, Y_D, l_{CD}, l_{CP})]^2.$$

В обоих случаях использованы алгоритм минимизации целевой функции S приведенные в подразделе 1.2.

В итоге получены следующие параметры синтезированного механизма и было определено значение глобального минимума $S = 0,0182331$.

$$l_{AB} = 0,421; \quad l_{CD} = 0,5;$$

$$l_{BC} = 1,051; \quad x_F = 1,2;$$

$$l_{CE} = 0,85; \quad y_F = 1,04;$$

$$l_{CP} = 1,507; \quad X_A = 0,45;$$

$$l_{EF} = 1; \quad Y_A = 1.$$

При проведении анализа на точность воспроизведения заданной траектории точки P шатуна получено, что максимальное среднеквадратическое координатное отклонение шестизвенного механизма равно $\Delta_{\max} = 0,0281$.

4.3.2 Кинематический синтез направляющего пространственного рычажного механизма с четырьмя выстоями

Механизмы со сложными законами движения выходного звена, особенно с выстоями, применяются в ткацких станках. Для создания механизмов с воспроизведением сложного закона движения рабочего органа механизма, например, за один оборот кривошипа выходное звено, совершающее четыре выстоя, в технике в основном опирается на использовании кулачковых механизмов. Несмотря на общепринятые недостатки кулачковых механизмов, замена их на рычажные механизмы, сдерживается из-за сложности решения задач автоматизации процесса синтеза пространственных механизмов. Решение задачи кинематического синтеза направляющего пространственного рычажного механизма с четырьмя выстоями опирается на использовании исходных кинематических цепей (ИКЦ) по заданным положениям входного и выходного звеньев [129, 130].

В данном разделе по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма синтезирован пространственный рычажный механизм IV класса с двумя ведущими звеньями типа $BCCBVCBV$ (B – вращательная, C – сферическая). При синтезе используются трехзвенные незамкнутые исходные кинематические цепи приведенные в подразделе 1.2. Задача синтеза ИКЦ сводится к составлению целевой функции.

Для определения параметров направляющего пространственного рычажного механизма IV класса с двумя ведущими звеньями воспроизводящего четыре выстоя на выходном звене за один оборот входного звена основан на составлении одной целевой функции для ИКЦ (рисунок 4.8). Целевые функции присоединяемых бинарных звеньев составляются автоматически, т. к. они являются следствием первой целевой функции при фиксации исходных параметров ИКЦ.

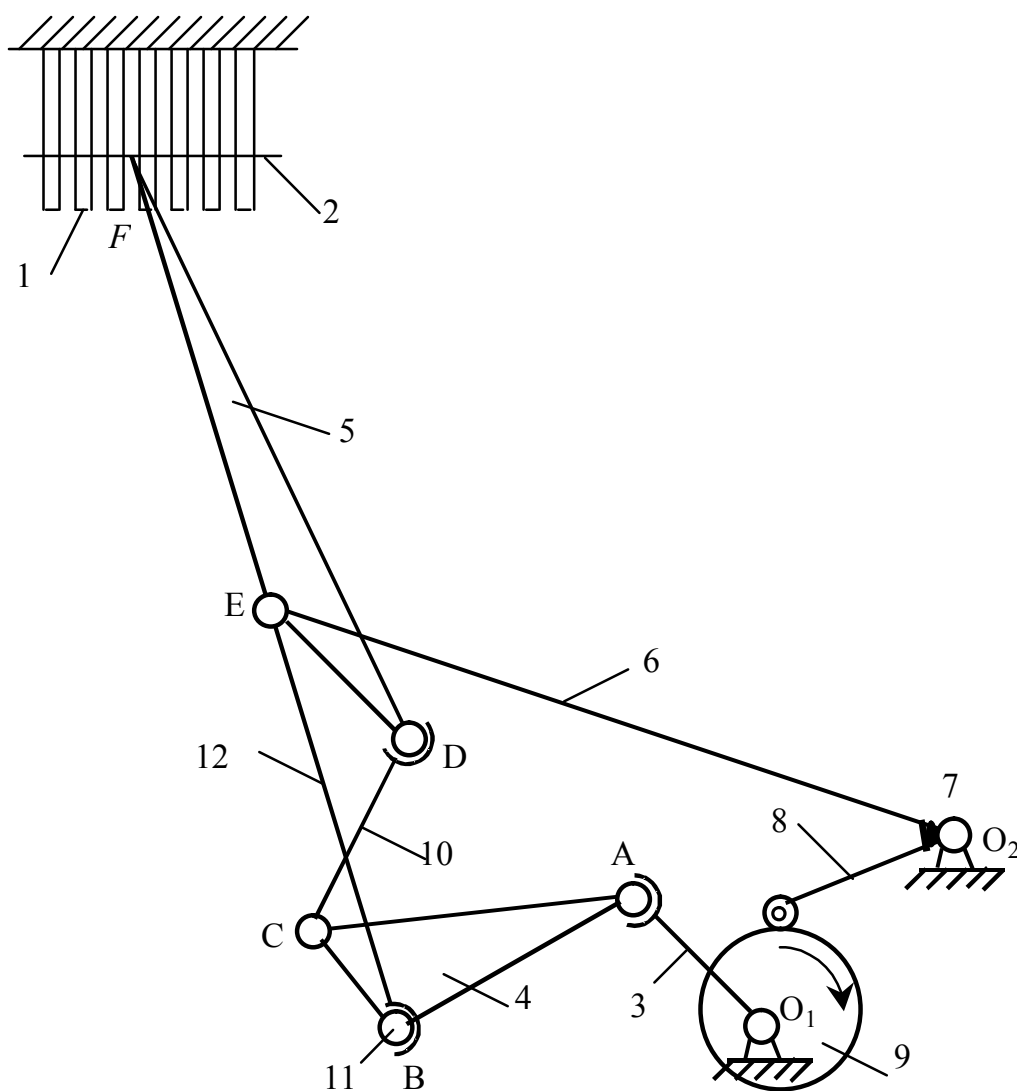


Рисунок 4.8

Пусть заданы N конечно-удаленных положений входного звена и выходного звена механизма, которые жестко свяжем с подвижными телами $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \psi_i^1, \theta_i^1, \varphi_i^1)$, $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \psi_i^2, \theta_i^2, \varphi_i^2)$. Требуется найти такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A) \in Q$ в неподвижной системе координат, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличались от некоторой постоянной величины R .

Для решения данной задачи составим взвешенную разность

$$\Delta_{q_i} = |B_i C_i|^2 - R^2 = (X_{Ci} - X_{Bi})^2 + (Y_{Ci} - Y_{Bi})^2 + (Z_{Ci} - Z_{Bi})^2 - R^2, \quad (i = \overline{1, N}), \quad (4.9)$$

которая является функцией десяти искомых параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Решение данной задачи синтеза ИКЦ $ABCD$ приведены в подразделе 1.2.

Переходим к синтезу пространственного шестизвенного механизма с четырьмя выстоями на выходном звене механизма (рисунок 4.8). Для синтеза

данного механизма используем ИКЦ, задавая координаты $x_B = y_B = z_B = 0$, и определяем искомые параметры $X_{O_2}, Y_{O_2}, Z_{O_2}, x_E, y_E, z_E, R$ – длина звена EF .

После определения искомых параметров ИКЦ O_2EF , находим параметры цепи O_1ABE . Учитывая конструктивно габариты механизма и условия существования кривошипа, задаемся длинами звеньев ИКЦ O_1ABE . Проведя анализ положений звеньев ИКЦ O_1ABE определяем положение звена AB , то есть координаты $B(x_B, y_B, z_B)$ и $A(x_A, y_A, z_A)$ и длину звена AB , то есть цепи O_1ABE .

Определив координаты всех перечисленных точек и зная положение звеньев AB и EF , находим длину звена CD .

Результаты синтеза пространственного рычажного механизма с четырьмя выстоями на выходном звене проиллюстрируем на примере. Циклограмма движения выходного звена приведена на рисунке 4.9. В результате синтеза получены следующие абсолютные размеры звеньев: кривошип 3 O_1A 100мм, межосевое расстояние O_1O_2 152мм, коромысло 6 O_2E 400мм, стороны трехстороннего жесткого контура 4 AC 244мм, AB 220мм, CB 69,3мм, стороны трехстороннего жесткого контура 5 FD 397мм, FE 280 мм, DE 123мм, тяга 12 BE 240мм, тяга 10 CD 90мм. График функции суммы S показан на рисунке 4.10.

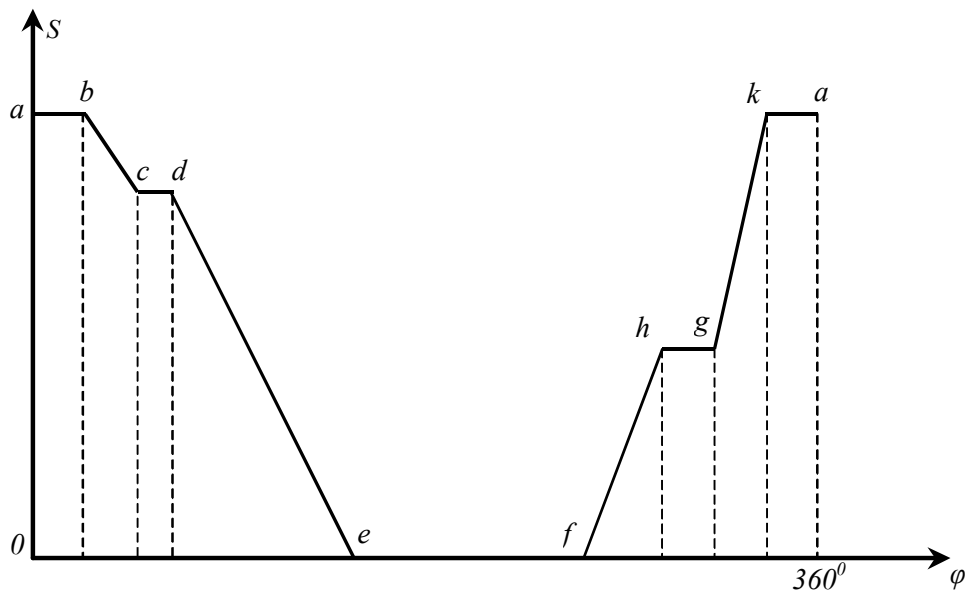


Рисунок 4.9

Механизм работает следующим образом. При вращении кулачка 9 коромысло 6 сообщает движение трехстороннему жесткому контуру 5, одновременно вращаясь кривошип 3 передает движение шатуну 4, при этом тяги 10 и 12, связывающие контур 5 и шатун 4 между собой, обеспечивают плоскопараллельный закон движения средства 1 образования петель, согласно циклограммы (рисунок 4.8).

На рисунке 4.9 участки ab и ka соответствуют выстою средства образования петель в верхнем положении, необходимому для работы системы смены цвета, участок bc характеризует выдачу определенной длины нити

прокладчику, cd - выстой, необходимый для обеспечения надежного захвата нити зажимными губцами пружины прокладчика, участок de - соответствует разгону прокладчика с нитью боевым механизмом, ef - выстой в нижнем положении во время полета прокладчика в зев батана, участок fh - вытягивание излишка нити, проброшенной в зев батана, и создание определенного технологического натяжения утки при формировании ткани, hg - выстой в момент отрезания уточной нити, участок gk соответствует втягиванию уточной нити в сопло.

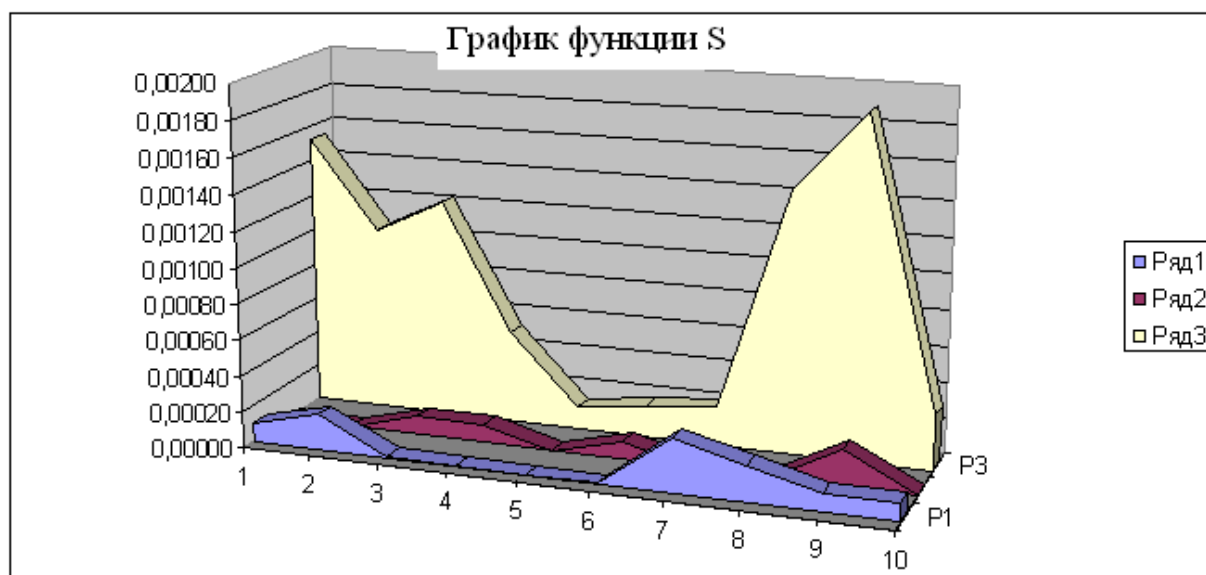


Рисунок 4.10 – График функции S

Циклограмма описывает движение компенсирующего элемента в зависимости от угла поворота главного вала станка и характерна для ткацкого станка с пневматической подачей утка к прокладчику.

По сравнению с прототипом использование пространственного рычажного привода позволяет увеличить скоростные характеристики при стабильной работе всего устройства, не рискуя перехода с одной сборки в другую. Результаты анализа положений звеньев механизма приведены на рисунке 4.11.

Существующий уровень техники и технологий в Республике Казахстан позволяет изготовить данное устройство.

В механизме с четырьмя выстоями для предупреждения перехода с одной сборки в другую сборку при высоких скоростях работы механизма предусмотрено использование совместно с входным звеном и кулачка.

Теперь рассмотрим задачу профилирования цилиндрических кулачков. При профилировании обычно применяют метод развертывания цилиндра по среднему радиусу контакта профиля кулачка и ролика. Как показали результаты работ: при профилировании по этому методу искажается закон движения коромысла. В общем случае предлагается при профилировании использовать теорию поверхностей, которая является по своей сути довольно громоздкой. Известны также способы профилирования цилиндрических кулачков методом последовательных приближений.

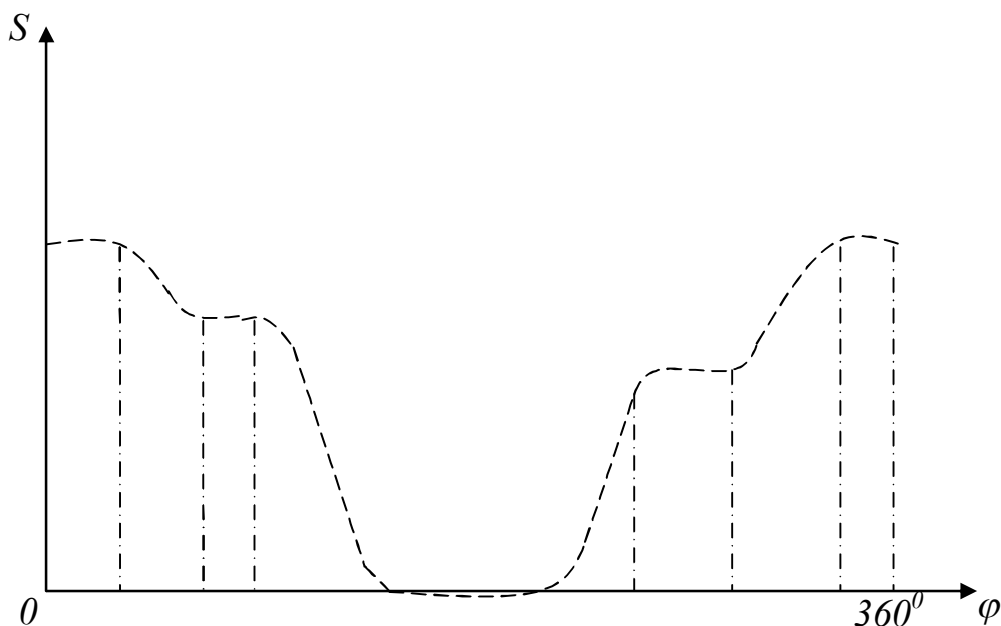


Рисунок 4.11

В настоящей работе предлагается метод синтеза кулачка, основанный на обратном движении цилиндра с использованием теории линейчатых поверхностей при различных случаях контактирования ролика с профилем [204, 205].

Рассмотрим кулачковый механизм с коромыслом (рисунок 4.12).

Пусть задан закон движения коромысла в виде $\psi = \psi(\varphi)$. Для определенности за начальное положение примем ψ_0 , соответствующее $\varphi = 0$, $\rho_0 - \theta = 0$ (рисунок 4.13). Из треугольника $O'_1O'_2F'$ нетрудно получить следующие зависимости

$$\begin{cases} r(\varphi) = \sqrt{(l \sin \psi + L \cos \delta)^2 + L^2 \sin^2 \delta} \\ \mu(\varphi) = \arccos \frac{-L - l \sin \psi \cos \delta}{r(\varphi)} \end{cases} \quad (4.10)$$

Начальные значения r_0 и μ_0 определяются по формулам (1) при $\varphi = 0$ и $\psi = \psi_0$.

Полярные координаты теоретического профиля кулачка можно записать в параметрическом виде

$$\begin{cases} \rho(\varphi) = c + l \cos \psi \\ \theta(\varphi) = \varphi + \mu - \mu_0 \end{cases} \quad (4.11)$$

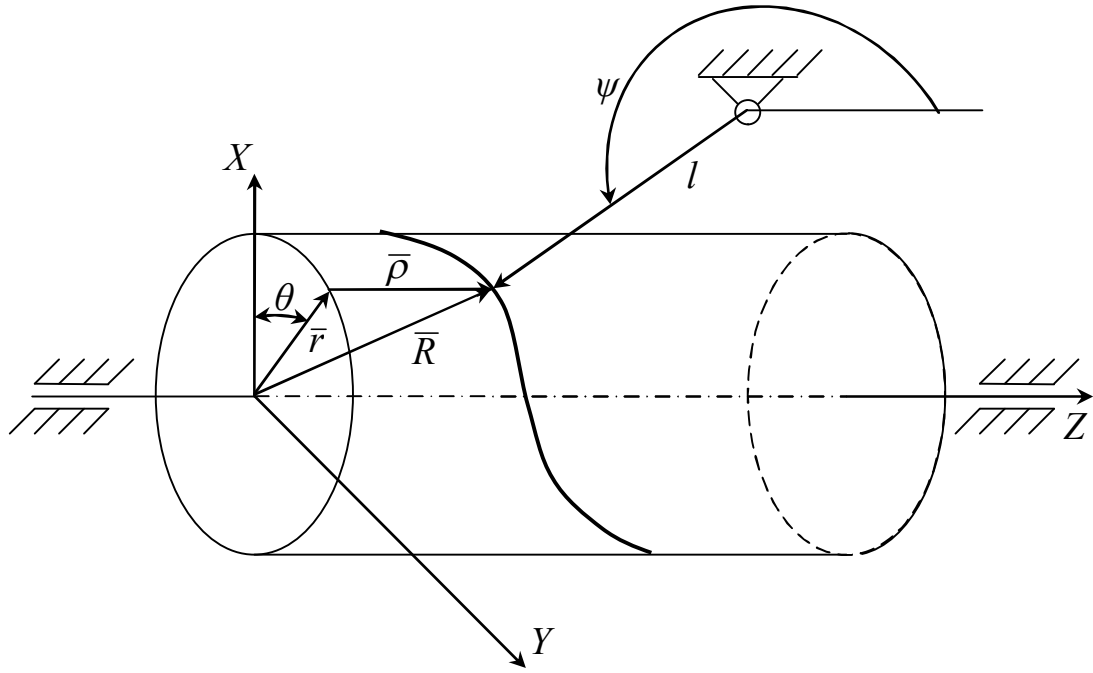


Рисунок 4.12

Перейдем к определению радиусов кривизны нормального сечения профильной поверхности и углов давления. Будем считать, что уравнение контактной линии на профильной поверхности зависит от полярного угла θ , то есть

$$\begin{cases} \rho = \rho(\theta) \\ r = r(\theta) \end{cases} \quad (4.12)$$

Тогда, согласно рисунку 4.12, для векторного уравнения контактной линии можно записать

$$\bar{R} = r \cos \theta \bar{i} + r \sin \theta \bar{j} + \rho \bar{k} \quad (4.13)$$

1. Рассмотрим случай точечного контакта ролика и профиля. В этом случае уравнение теоретической профильной поверхности, как уравнение линейчатой поверхности, будет иметь вид

$$\bar{B} = (r + \gamma) \cos \theta \bar{i} + (r + \gamma) \sin \theta \bar{j} + \rho \bar{k} \quad (4.14)$$

Здесь γ - параметр, изменяющийся вдоль единичного вектора, образующей.

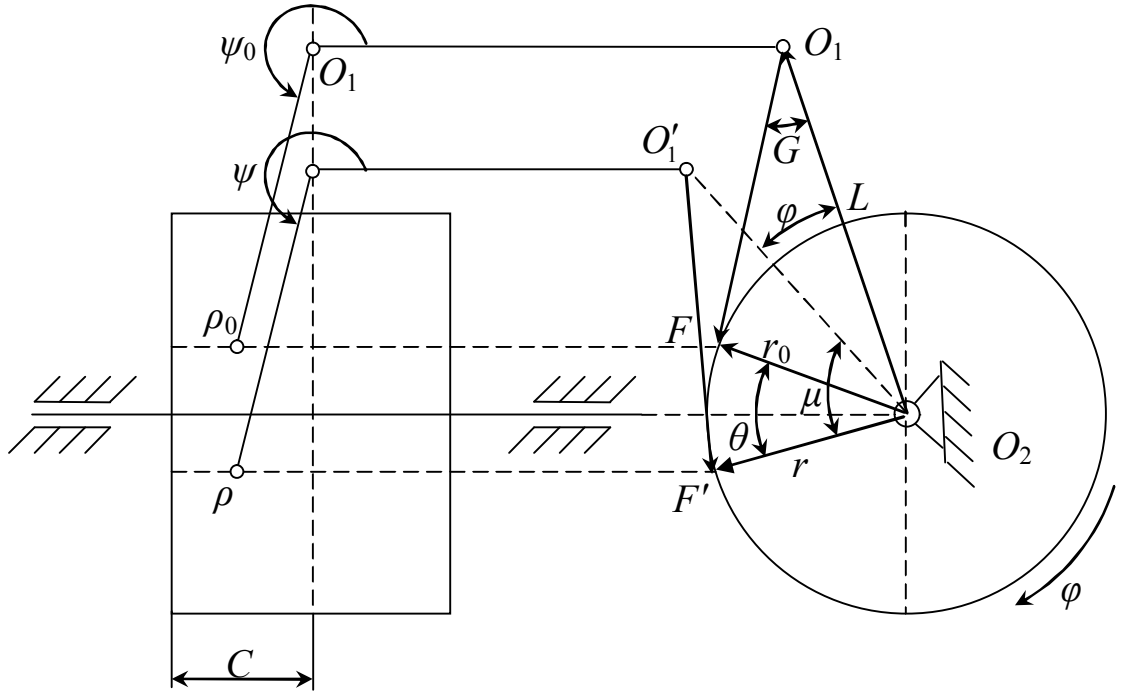


Рисунок 4.13

Вычислим единичный вектор нормали к поверхности по формуле

$$\bar{m} = -\frac{\bar{B}\theta \times \bar{B}\gamma}{(\bar{B}\theta \times \bar{B}\gamma)}. \quad (4.15)$$

После дифференцирования (4.14) по θ и γ и некоторых преобразований получим

$$\bar{m} = \frac{\rho' \sin \theta \bar{i} - \rho' \cos \theta \bar{j} + (r + \gamma) \bar{k}}{\sqrt{\rho'^2 + (r + \gamma)^2}}. \quad (4.16)$$

Для точек контакта необходимо в формуле (4.16) положить $\gamma = 0$. Угол давления можно вычислить с помощью скалярного произведения вектора $\bar{m}$ и единичного вектора скорости коромысла $\bar{l}$.

$$\nu = \arccos \frac{r \sin \psi - \rho' \sin \theta \cos \psi}{\rho'^2 + r^2} \quad (4.17)$$

Радиус нормальной кривизны кривой (4.13) в точке контакта определим по формуле

$$\rho_k = \frac{1}{R_{Ss} \bar{m}}, \quad (4.18)$$

где

$$R_{ss} = \frac{(r'^2 + r^2 + \rho'^2)\bar{R}\theta_0 - (r'r'' + rr' + \rho\rho'')\bar{R}\theta}{(r'^2 + r^2 + \rho'^2)^2}. \quad (4.19)$$

Окончательно получим

$$\rho_k = \frac{(r'^2 + r^2 + \rho'^2)\sqrt{\rho'^2 + r^2}}{r\rho'' - 2r'\rho'}. \quad (4.20)$$

Переходя в формулах (4.17) и (4.20) от θ к переменному φ , имеем

$$\nu = \arccos \frac{r\theta \sin \psi - \rho \sin \theta \cos \psi}{\sqrt{\rho^2 + r^2 \theta^2}}, \quad (4.21)$$

$$\rho_k = \frac{(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\rho}^2)\sqrt{\dot{\rho}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}}{r(\ddot{\rho}\dot{\theta} - \dot{\rho}\ddot{\theta}) - 2\dot{\rho}\dot{r}\dot{\theta}}. \quad (4.22)$$

Здесь ρ , r , θ и их производные по углу поворота кулачка φ , вычисляются согласно формул (4.10) и (4.11).

2. Рассмотрим случай линейного контакта ролика и профиля. Запишем уравнение теоретической профильной поверхности

$$\bar{B} = r \cos \theta \bar{i} + (\gamma + r \sin \theta) \bar{j} + \rho \bar{k}. \quad (4.23)$$

Для единичного вектора нормали к поверхности имеем

$$\bar{m} = \frac{\rho' \bar{i} + u' \bar{k}}{\sqrt{\rho'^2 + u'^2}}, \quad (4.24)$$

где $u = -r \cos \theta$.

Угол давления и радиус кривизны получаем аналогично формулам (4.17) и (4.20)

$$\nu = \arccos \frac{u' \sin \psi - \rho' \cos \psi}{\sqrt{\rho'^2 + u'^2}}, \quad (4.25)$$

$$\rho_k = \frac{(r'^2 + r^2 \theta'^2 + \rho'^2)\sqrt{\rho'^2 + u'^2}}{u'\rho'' - \rho'u''}. \quad (4.26)$$

Перейдем в формулах (4.25) и (4.26) от θ к переменному φ

$$\nu = \arccos \frac{\dot{u} \sin \psi - \dot{\rho} \cos \psi}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{u}^2}}, \quad (4.27)$$

$$\rho_k = \frac{(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\rho}^2) \sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{u}^2}}{\dot{u} \ddot{\rho} - \dot{\rho} \ddot{u}}. \quad (4.28)$$

Здесь

$$\dot{u} = r \dot{\theta} \sin \theta - \dot{r} \cos \theta,$$

$$\ddot{u} = (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \sin \theta - (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \cos \theta,$$

а ρ , r , θ и их производные по углу поворота кулачка вычисляются по формулам (4.10) и (4.11).

При нарезании профиля фрезой нетрудно записать координаты режущего инструмента

$$\begin{cases} z_{ин} = \rho = c + l \cos \varphi \\ x_{ин} = -L \cos \delta - l \sin \varphi \end{cases} \quad (4.29)$$

Рассмотренный метод является более точным при профилировании, что очень важно для быстроходных механизмов, так как даже малые погрешности профиля искажает циклограмму работы кулачкового механизма и повышают динамические нагрузки в звеньях.

Таким образом, используя ИКЦ, по заданным законам движения входного и выходного звеньев, автоматизировав различные этапы структурно-кинематического синтеза проектируемого механизма, синтезирован направляющий пространственный кулачково – рычажный механизм с четырьмя выстоями.

4.4 Кинематический синтез пространственных передаточных механизмов

4.4.1 Синтез передаточных четырехзвенных сферических механизмов

В данном разделе рассматривается задачи синтеза передаточных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев

проектируемого механизма на основе исходных кинематических цепей (ИКЦ) [206].

Пусть заданы координаты точки $A(X_A, 0, 0)$, точки $D(X_D, Y_D, 0)$, угол ρ и углы поворота звеньев AB и CD соответственно γ_i^1 и γ_i^2 (рисунок 4.14).

Требуется найти точки $B \in Q_1$ и $C \in Q_2$ такие, что расстояние между ними во всех N положениях звеньев AB и CD мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

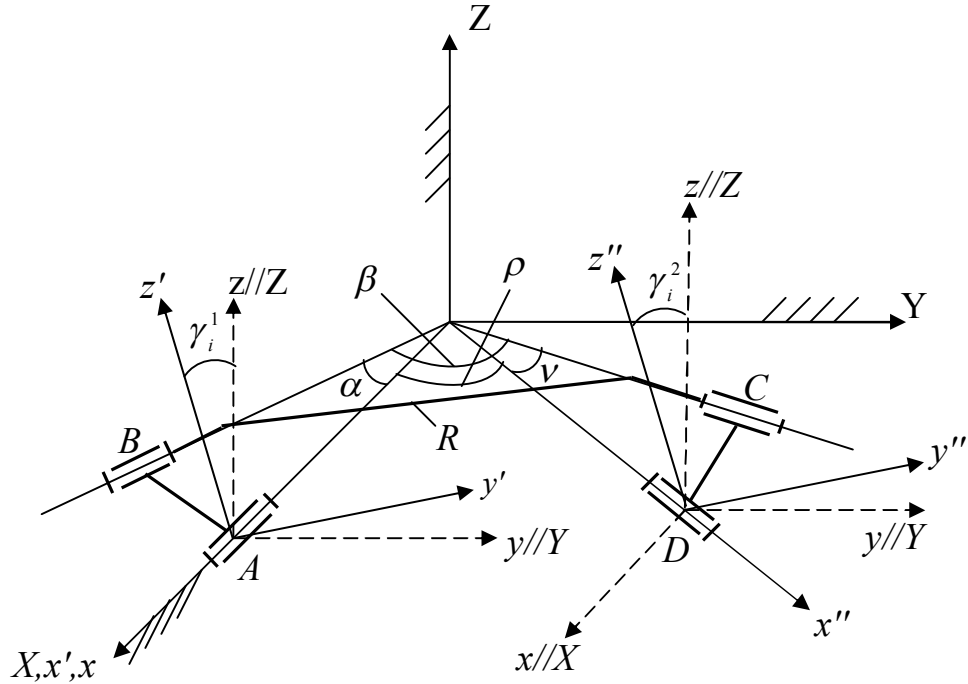


Рисунок 4.14

Задача сводится к определению семи параметров $x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$ и углов α, β, γ . Для упрощения, угол ρ предполагаем заданным.

Для решения задачи рассмотрим две различные формы взвешенной разности:

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = (\tilde{x}_{B_i} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{B_i} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{B_i} - z_B)^2 - R^2 \quad (4.30)$$

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = (\tilde{x}_{C_i} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{C_i} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{C_i} - z_C)^2 - R^2 \quad (4.31)$$

Тогда учитывая, что координаты точек A и D фиксированы, получим выражения $\tilde{x}_{B_i}, \tilde{y}_{B_i}, \tilde{z}_{B_i}, \tilde{x}_{C_i}, \tilde{y}_{C_i}, \tilde{z}_{C_i}$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{B_i} \\ \tilde{y}_{B_i} \\ \tilde{z}_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & [T_{01}^i] & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_D - X_A \\ Y_D - Y_A \\ Z_D - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & 0 \\ & [T_{21}^i] & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{C_i} \\ y_{C_i} \\ \tilde{z}_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & [T_{02}^i] & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_D \\ Y_A - Y_D \\ Z_A - Z_D \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & 0 \\ & [T_{12}^i] & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

где $[T_{kj}^i]$ - матрица перехода от K -той системы координат к j - той системе, определяемые как в (1.17)

$$T_{jo}^i = \begin{bmatrix} e_{i1}^j & e_{i2}^j & e_{i3}^j \\ m_{i1}^j & m_{i2}^j & m_{i3}^j \\ n_{i1}^j & n_{i2}^j & n_{i3}^j \end{bmatrix}, \quad (j = \overline{1,2}; \quad i = \overline{1,N}) \quad (4.34)$$

$$\begin{cases} e_{i1}^j = \cos \psi_i^j \cdot \cos \varphi_i^j - \cos \theta_i^j \cdot \sin \psi_i^j \cdot \sin \varphi_i^j \\ m_{i1}^j = \sin \psi_i^j \cdot \cos \varphi_i^j + \cos \theta_i^j \cdot \cos \psi_i^j \cdot \cos \varphi_i^j \\ n_{i1}^j = \sin \theta_i^j \cdot \sin \varphi_i^j \\ e_{i2}^j = -\cos \psi_i^j \cdot \sin \varphi_i^j - \cos \theta_i^j \cdot \sin \psi_i^j \cdot \cos \varphi_i^j \\ m_{i2}^j = -\sin \psi_i^j \cdot \sin \varphi_i^j + \cos \theta_i^j \cdot \cos \psi_i^j \cdot \sin \varphi_i^j \\ n_{i2}^j = \sin \theta_i^j \cdot \cos \varphi_i^j \\ e_{i3}^j = \sin \theta_i^j \cdot \sin \psi_i^j \\ m_{i3}^j = -\sin \theta_i^j \cdot \cos \psi_i^j \\ n_{i3}^j = \cos \varphi_i^j \end{cases} \quad (4.35)$$

$$T_{01}^i = [T_{10}^i]^T; \quad T_{02}^i = [T_{20}^i]^T; \quad T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i; \quad T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i, \dots \quad (4.36)$$

Рассмотрим матрицы $T_{01}^i, T_{21}^i, T_{02}^i, T_{12}^i$, где элементы этих матриц зависят от эйлеровых углов $\theta_i^j, \psi_i^j, \varphi_i^j$ ($i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{1,2}$). Так как звено AB вращается вокруг оси OX , положение подвижной системы относительно неподвижной системы координат определяется одним углом γ_i^1 и положением точки A и этот угол является углом нутации, а $\psi_i^1 = 0, \quad \varphi_i^1 = 0$.

Тогда элементы матрицы T_{01}^i принимают значения:

$$T_{10}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_i^1 & -\sin \theta_i^1 \\ 0 & \sin \theta_i^1 & \cos \theta_i^1 \end{bmatrix}, \quad \text{где } \theta_i^1 = \gamma_i^1, \quad (4.37)$$

После определения матриц перехода рассмотрим необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности $S = \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^2$.

Необходимые условия минимума суммы S

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C)$$

Из этих условий получим две системы линейных уравнений относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_1 и x_C, y_C, z_C, H_2 .

Углы α, β, ν , определяем как углы между векторами $\vec{OB}$ и $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$, $\vec{OC}$ и $\vec{OD}$ для какого-то i -го положения звеньев CD и AB .

Рассмотрим синтез пространственного передаточного четырехзвенника типа $BCCB$, где B – вращательная и C – сферическая пара. Допустим даны углы поворота звеньев AB и CD – γ_i^1 и γ_i^2 , требуется их приблизительно воспроизвести посредством пространственного четырехзвенника $ABCD$ (угол ρ задан). Требуется определить $X_A, Y_A, Z_A, x_C, x_B, y_B, z_B, y_C, z_C$ и R (рисунок 4.15).

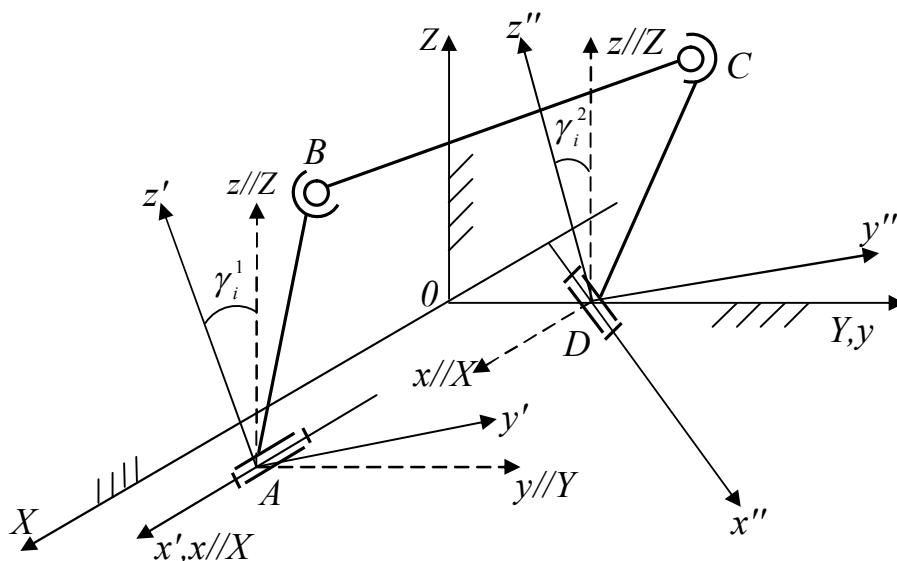


Рисунок 4.15

Для решения задачи взвешенную разность представим в двух различных формах на основе формулы (4.30) и (4.31). Выражения $\tilde{X}_{A_i}, \tilde{Y}_{A_i}, \tilde{Z}_{A_i}, \tilde{x}_{B_i}, \tilde{y}_{B_i}, \tilde{z}_{B_i}, \tilde{x}_{C_i}, \tilde{y}_{C_i}, \tilde{z}_{C_i}$ определяются по формулам (4.32) и (4.33), учитывая, что координаты точки $D(X_D, Y_D)$ фиксированы.

Элементы матриц $T_{10}^i, T_{20}^i, T_{01}^i, T_{02}^i, T_{12}^i$ определяются аналогично (4.36). Рассмотрим необходимые условия минимума суммы S .

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C).$$

Далее получим линейные системы, решение которых получим методом Крамера. Далее по приведенному алгоритму в подразделе 1.2 находим искомые величины.

Таким образом, как мы видим из предложенного метода и рассмотренного примера, принципиально может быть решены задачи синтеза передаточных сферических механизмов и механизма типа *BCCB* на основе ИКЦ.

4.4.2 Кинематический синтез пространственного четырехзвенного передаточного механизма на основе исходных кинематических цепей

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1)$ и $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2)$, где $i = \overline{1, N}$, $\theta_i^j, \psi_i^j, \phi_i^j$ - эйлеровы углы относительно неподвижной системы координат $OXYZ$.

Требуется найти в неподвижной системе координат такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R (рисунок 4.16) [207].

Решение задачи: Введем взвешенную разность для i -го положения тел в виде:

$$\Delta_{q1} = \left| \overrightarrow{B_i C_i} \right|^2 - R^2 = (X_{Ci} - X_{Bi})^2 + (Y_{Ci} - Y_{Bi})^2 + (Z_{Ci} - Z_{Bi})^2 - R^2 \quad (4.39)$$

Она является функцией десяти параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Группируя эти параметры по четыре с общим параметром R , взвешенную разность представим в трех различных формах:

$$\Delta_{q1}^{(1)} = (\tilde{X}_{Ai} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A)^2 - R^2, \quad (4.40)$$

$$\Delta_{q1}^{(2)} = (\tilde{x}_{Bi} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{Bi} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{Bi} - z_B)^2 - R^2, \quad (4.41)$$

$$\Delta_{g_i}^{(3)} = (\tilde{x}_{Ci} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{Ci} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{Ci} - Z_C)^2 - R^2, \quad (4.42)$$

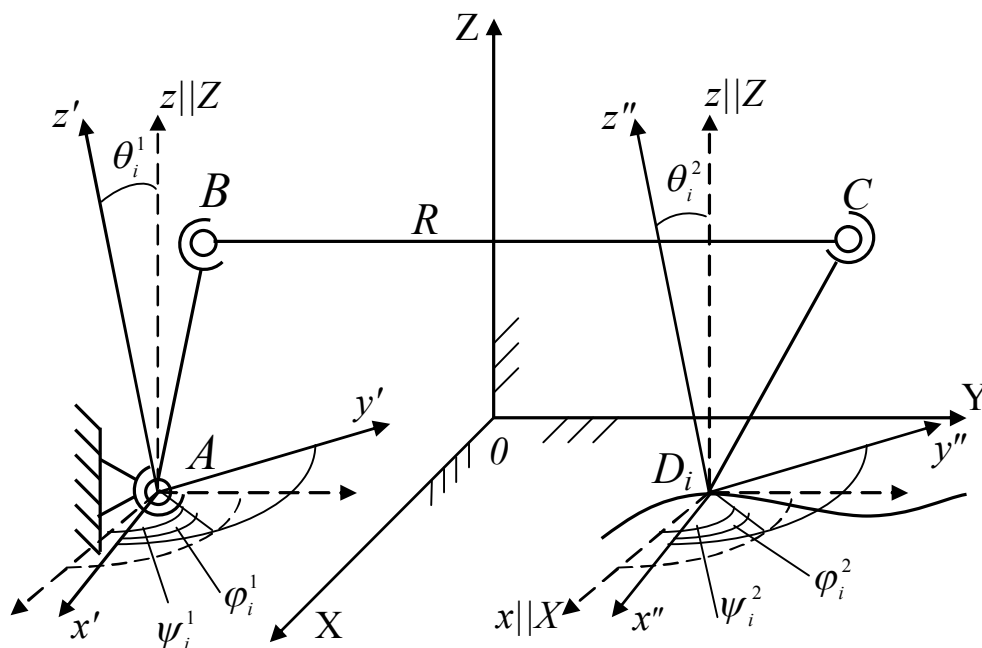


Рисунок 4.16

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^2 \quad (4.43)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial s}{\partial X_A}=0; \quad \frac{\partial s}{\partial Y_A}=0; \quad \frac{\partial s}{\partial Z_A}=0; \quad \frac{\partial s}{\partial R}=0; \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_R} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y_R} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z_R} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \quad (4.46)$$

С учетом (4.39) система уравнений (4.40) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{X}_{Ai} = 0; \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{Y}_{Ai} = 0; \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{Z}_{Ai} = 0; \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} = 0;$$

Решение этой системы уравнений относительно десяти искомых параметров синтеза приведены в разделе 1.2.

Задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, можно получить различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A_i(X_{A_i}, Y_{A_i}, Z_{A_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2$ тела Q_2 , то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ (рисунок 4.17).

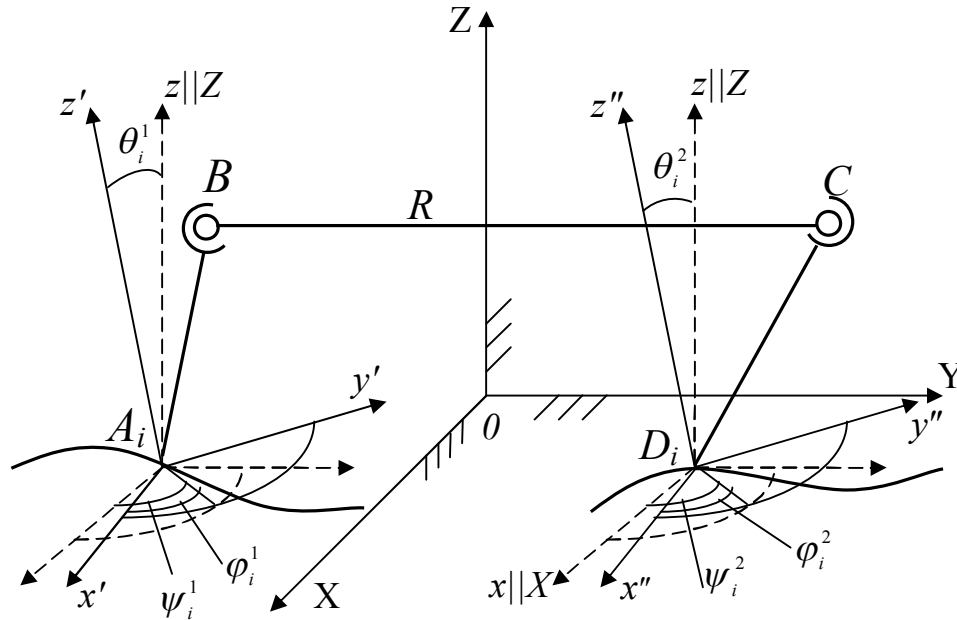


Рисунок 4.17

Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C)$$

и для нахождения минимума S можно использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы, то в результате синтеза ИКЦ получим пространственный четырехзвенник $ABCD$.

2. Пусть заданы координаты $x_C = y_C = z_C = 0$ точки $C \in Q_2$, координаты $X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}$ точки D тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_1 , а искомыми параметрами являются $X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B$ (рисунок 4.18).

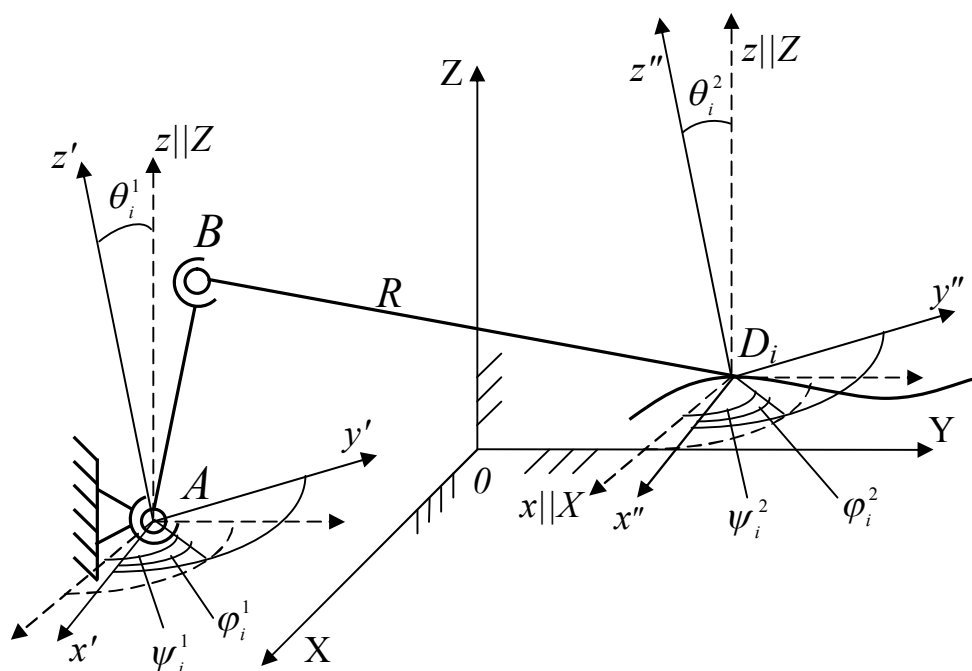


Рисунок 4.18

Необходимые условия минимума сумма S принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B).$$

Для нахождения минимума функции S можно опять использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что $x_C = y_C = z_C = 0$.

3. Пусть заданы координаты $x_B, y_B, z_B = 0$ точки B тела Q_1 и эйлеровы углы тела Q_2 $\theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2$. Исходная задача сводится к определению сферы наименее удаленной от N положений фиксированной точки C тела Q_2 (рисунок 4.19).

Необходимые условия минимума суммы S

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_C, y_C, z_C).$$

Для ее решения можно применить алгоритм, приведенный в разделе 1.2, полагая $x_B, y_B, z_B = 0$.

Теперь на примере покажем иллюстрацию синтеза передаточного механизма по заданным положениям входного и выходного звеньев на основе ИКЦ.

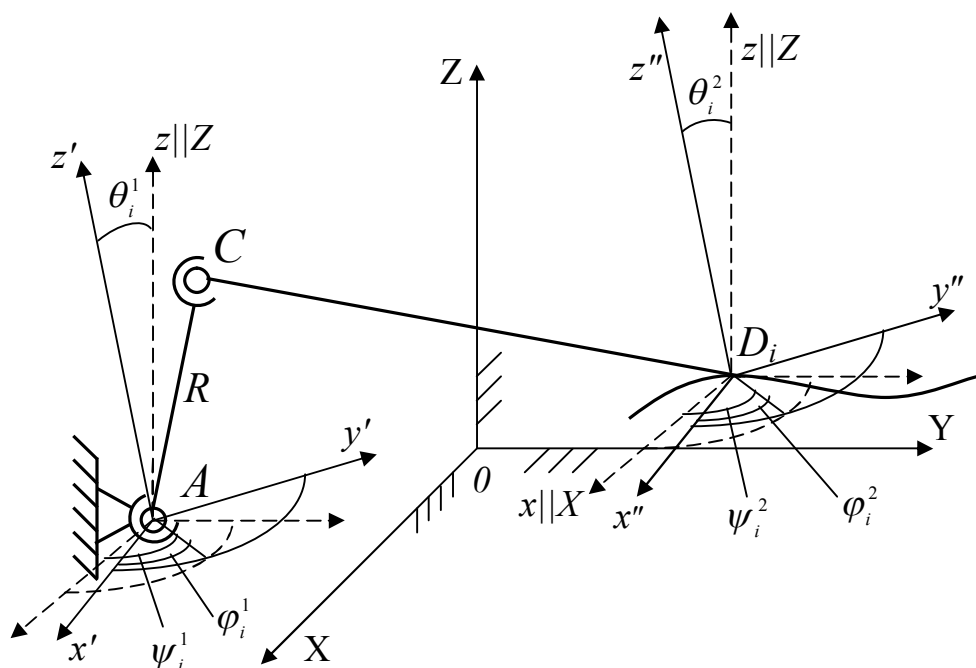


Рисунок 4.19

Пример. Рассмотрим задачу синтеза пространственного четырехзвенного механизма типа *BCCB* (*B* – вращательная, *C* – сферическая кинематические пары), приближенно воспроизводящий функцию

$$\psi = -50 \cos \frac{6}{5} \varphi, \quad \varphi \in [0^\circ, 120^\circ]$$

Интервал $[0^\circ, 120^\circ]$ разбиваем на 20 равных частей (рисунок 4.20).

Задаваясь межосевым углом $\rho = 90^\circ$ и координатами $X_D = Z_D = 0$, $Y_D = 1,2$ точки *D*, определим следующие параметры четырехзвенника *ABCD*:

$$a = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2},$$

$$b = R,$$

$$c = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2},$$

$$X_A, Y_A, Z_A,$$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{z_B}{a},$$

$$\psi_0 = \arccos \frac{z_C}{c}.$$

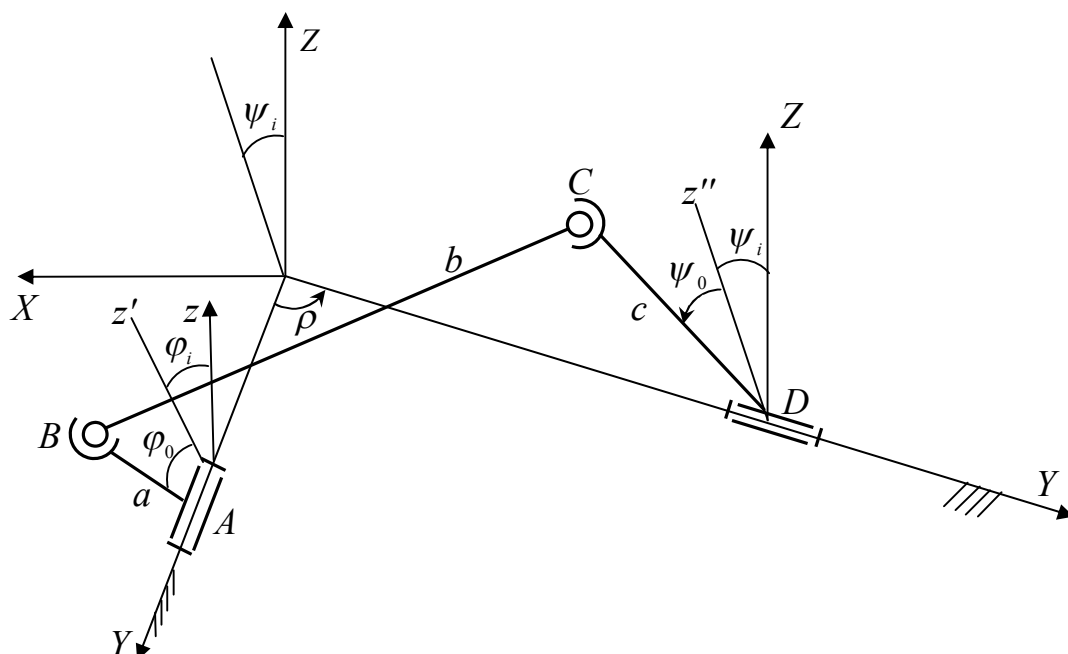


Рисунок 4.20

Для синтеза данной задачи используем выражение (4.39). Тогда матрица (1.17) имеет следующий вид:

$$T_{jk}^i = T_{01} \cdot T_{02} \cdot T_{03},$$

где

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & 0 & -\sin \varphi_i \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_i & 0 & \cos \varphi_i \end{bmatrix},$$

$$T_{02} = \begin{bmatrix} \cos \rho & -\sin \rho & 0 \\ \sin \rho & \cos \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{03} = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & 0 & \sin \psi_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi_i & 0 & \cos \psi_i \end{bmatrix}$$

Чтобы определить искомые параметры синтеза используем алгоритм поиска минимума суммы S приведенный в разделе 1.2. На основе выше приведенного алгоритма минимизации, значение минимума суммы $S=0,00012$.

Тогда задача синтеза механизма сводится к минимизации целевой функции ИКЦ

$$S = \sum_{i=1}^{21} [\Delta_{qi}(X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C)]^2$$

Для решения этой задачи применяем выше приведенный алгоритм поиска минимума суммы S . Согласно алгоритма задаемся 10 значениями $B(x_B^{(0)}, y_B^{(0)}, z_B^{(0)})$ и $C(x_C^{(0)}, y_C^{(0)}, z_C^{(0)})$ в зависимости от длины звеньев a и c . Для каждого предварительного значения точек $B(x_B^{(0)}, y_B^{(0)}, z_B^{(0)})$ и $C(x_C^{(0)}, y_C^{(0)}, z_C^{(0)})$ в таблице 4.7 приведены результаты вычислений.

Итерационный процесс поиска минимума функции S завершается при выполнении неравенств

$$|R^{(k)} - R^{(k-1)}| \leq \varepsilon, |X_A^{(k)} - X_A^{(k-1)}| \leq \varepsilon, |Y_A^{(k)} - Y_A^{(k-1)}| \leq \varepsilon, |Z_A^{(k)} - Z_A^{(k-1)}| \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 10^{-4}$.

Таблица 4.7

N	x_B	y_B	z_B	R	x_C	y_C	z_C	X_A	Y_A	Z_A	S
1	1,014	1,815	1,2968	2,6406	0,804	1,9819	0,3277	0,0001	1,204	0	0,00152
2	0,9178	1,7169	0,8219	2,41518	0,9017	1,7618	0,3838	0,0002	1,105	0	0,00103
3	-1,1171	1,6449	0,7263	1,9678	0,7664	0,9261	0,4147	0	1,086	0,0001	0,00122
4	-0,3181	1,4716	0,9227	1,7646	0,5464	0,8167	0,4386	0	1,2667	0,0001	0,00052
5	-0,22763	1,21314	0,609801	1,69127	0,652906	0,639147	0,469694	0	1,189776	0	0,00012
6	0,7819	1,0449	0,3233	1,5118	0,5917	0,6221	0,4554	0	1,0997	0,0001	0,00018
7	0,1918	1,1667	0,2218	1,7246	0,4928	0,6046	0,7184	0,0003	1,6756	0	0,00021
8	0,2128	1,0717	0,3486	1,54714	0,5154	0,7654	0,6656	0,0002	1,7617	0	0,00146
9	0,56179	1,00818	0,9417	1,3349	0,3426	0,6406	0,6846	0,0001	1,3606	0,0002	0,0019
10	0,86718	1,2617	0,6461	1,2667	0,5617	0,7627	0,6976	0,0001	1,1415	0,000	0,00031

На рисунках 4.21 – 4.24 приведены плоские и объемные графики целевой функции S .

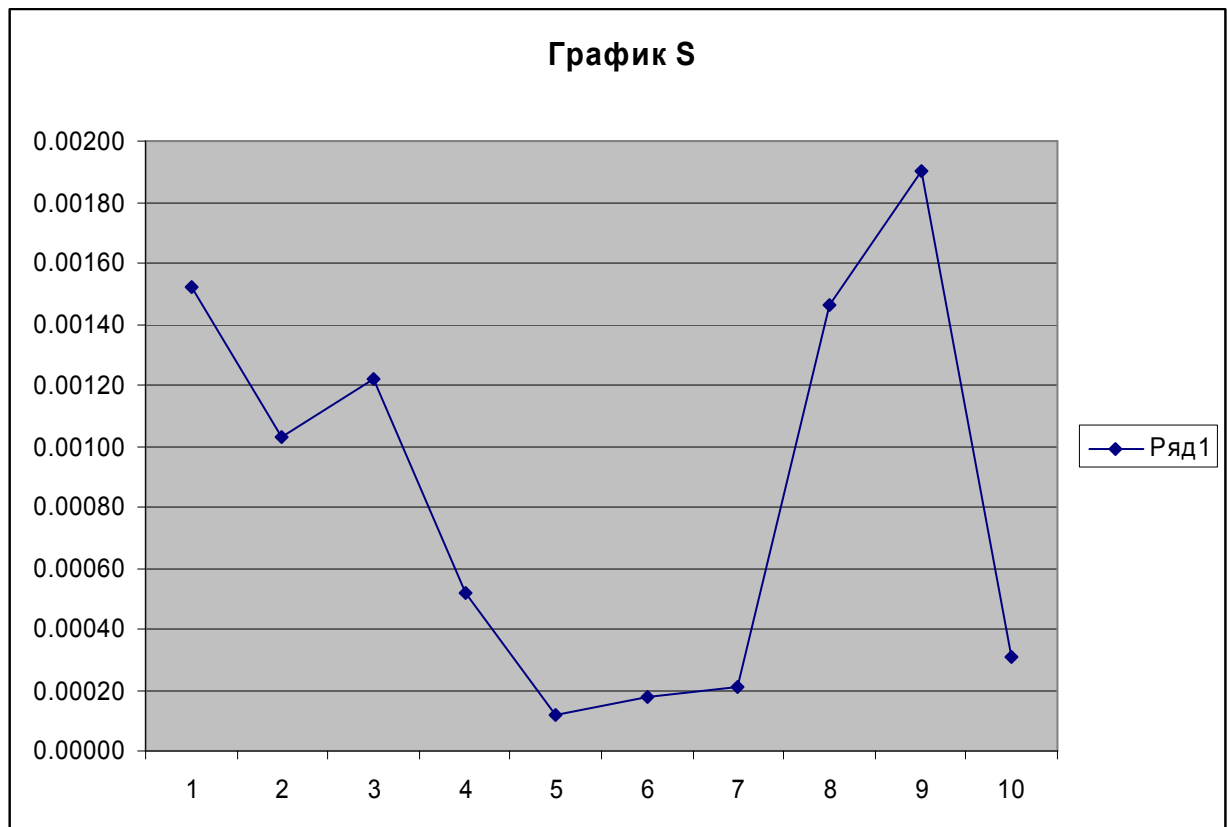


Рисунок 4.21 – График S

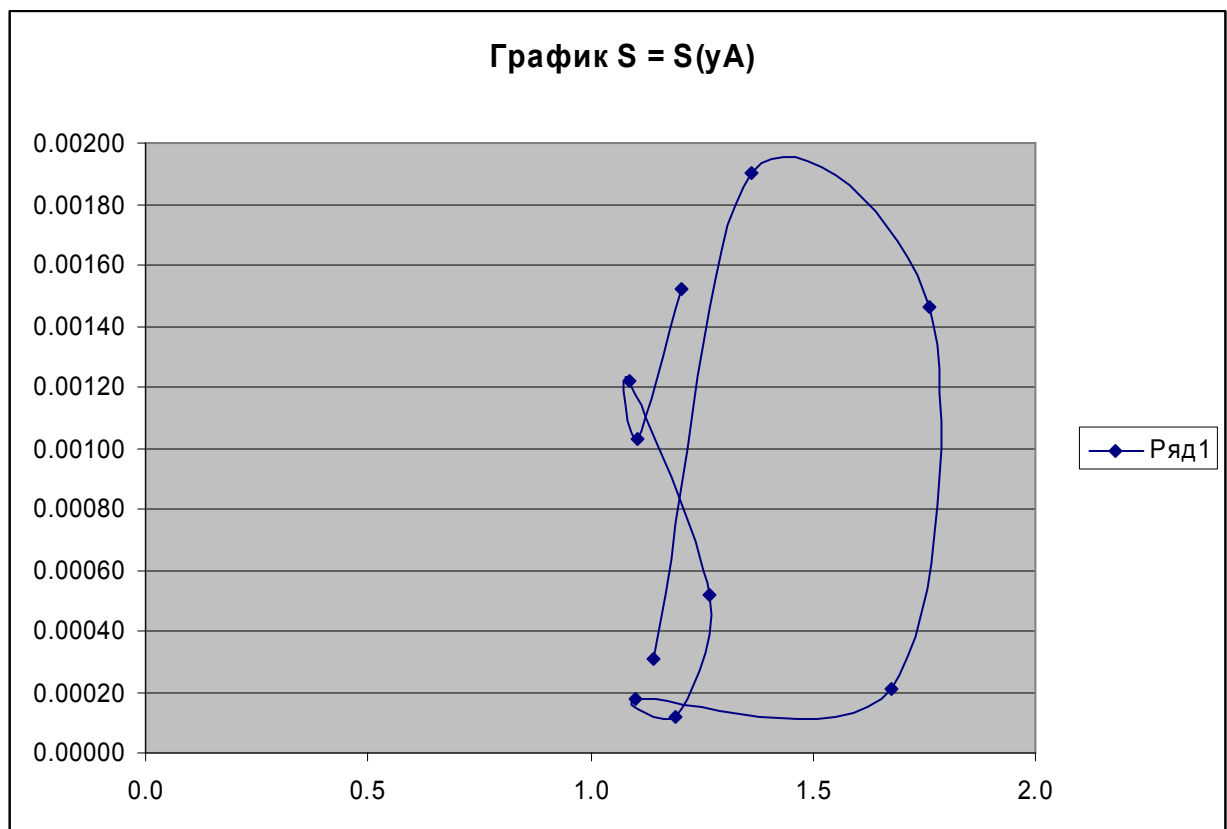


Рисунок 4.22 – График $S=S(y_A)$



Рисунок 4.23 – График $S=S(R)$

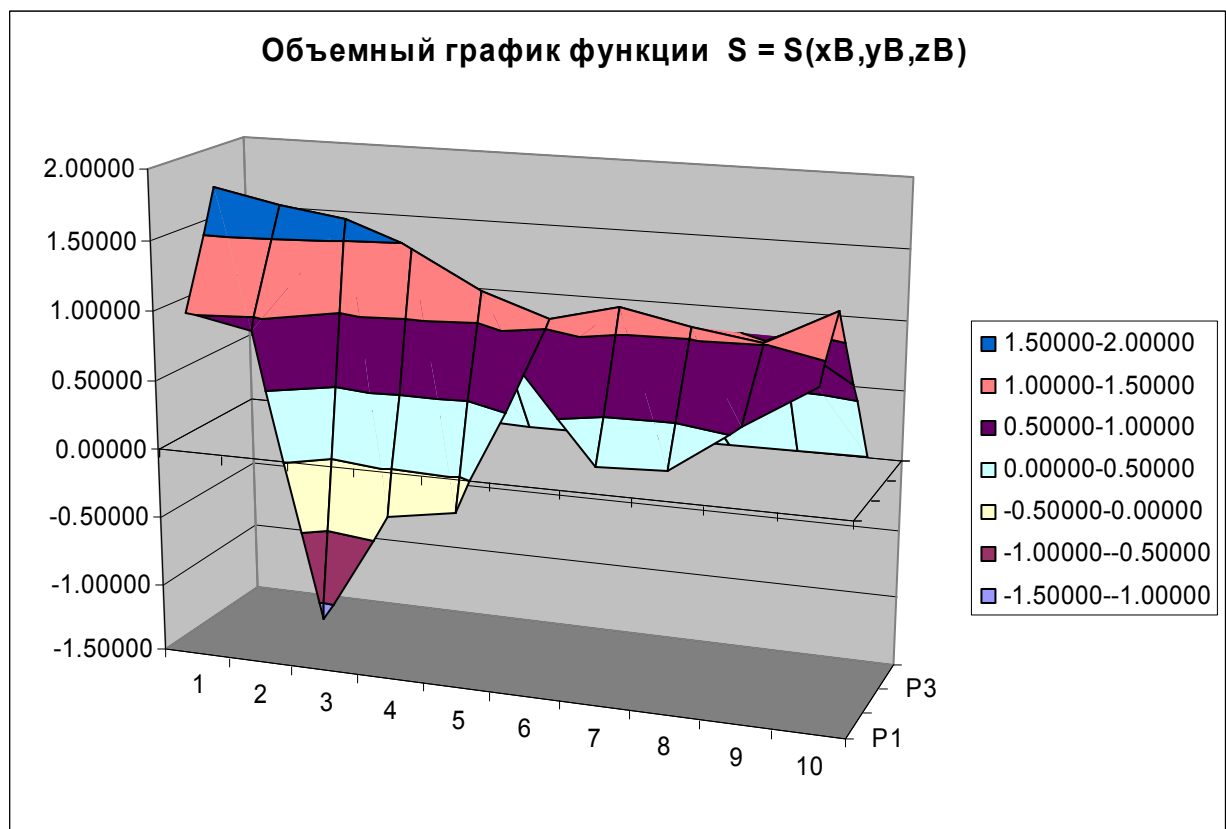


Рисунок 4.24 – Объемный график $S=S(x_B, y_B, z_B)$

Значение искомых параметров синтезированного механизма:

$$\begin{array}{lll}
 x_B = -0,227631 & x_C = 0,652906 & R = 1,69127 \\
 y_B = 1,21314 & y_C = 0,639147 & X_A = Z_A = 0 \\
 z_B = 0,609801 & z_C = 0,469694 & Y_A = 1,189776
 \end{array}$$

4.4.3 Кинематический синтез пространственного передаточного механизма с тремя выстоями на основе исходных кинематических цепей

В технике в основном используются кулачковые механизмы для воспроизведения сложного закона движения рабочего органа машины. Например, за один оборот кривошипа выходное звено должно совершить три выстоя [135, 136, 137].

В данном разделе рассмотрено решение задачи синтеза пространственного механизма типа $BVCCCB\Pi$ (B – вращательная, C – сферическая, Π – поступательная кинематические пары), позволяющего получить из непрерывного движения кривошипа три выстоя выходного звена [141, 142].

Пусть заданы N конечно-удаленных положений входного звена (кривошипа) и выходного звена механизма, которые жестко свяжем с подвижными телами $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \psi_i^1, \theta_i^1, \varphi_i^1)$, $Q_2(x_{Mi}, y_{Mi}, z_{Mi}, \psi_i^2, \theta_i^2, \varphi_i^2)$ соответственно. Требуется найти такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной

системе координат, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличались от некоторой постоянной величины R .

Для решения данной задачи составим взвешенную разность

$$\Delta q_i = |\overrightarrow{B_i C_i}|^2 - R^2 = (X_{Ci} - X_{Bi})^2 + (Y_{Ci} - Y_{Bi})^2 + (Z_{Ci} - Z_{Bi})^2 - R^2, \quad (4.47)$$

$$(i = \overline{1, N}),$$

которая является функцией десяти параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Сгруппировав все эти параметры по четыре с общим параметром R , сможем представить данную взвешенную разность в трех различных формах:

$$\begin{aligned} \Delta_{q_i}^{(1)} &= (\tilde{X}_{Ai} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A)^2 - R^2, \\ \Delta_{q_i}^{(2)} &= (\tilde{x}_{Bi} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{Bi} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{Bi} - z_B)^2 - R^2, \\ \Delta_{q_i}^{(3)} &= (\tilde{x}_{Ci} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{Ci} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{Ci} - z_C)^2 - R^2, \end{aligned} \quad (4.48)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{Ai} \\ \tilde{Y}_{Ai}'' \\ \tilde{Z}_{Ai} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ [T_{10}^i] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ [T_{20}^i] & X_{Di} & Y_{Di} & Z_{Di} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{Bi} \\ \tilde{y}_{Bi} \\ \tilde{z}_{Bi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ [T_{01}^i] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{Di} - X_A \\ Y_{Di} - Y_A \\ Z_{Di} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ [T_{21}^i] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{Ci} \\ \tilde{y}_{Ci} \\ \tilde{z}_{Ci} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ [T_{02}^i] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_{Di} \\ Y_A - Y_{Di} \\ Z_A - Z_{Di} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ [T_{12}^i] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix},$$

где $[T_{kj}^i]$ - матрица перехода от k -той системы координат к j -той системе, определяемая как в (1.17).

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}]^2, \quad (4.49)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений с общим параметром R :

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0 \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C.) \quad (4.50)$$

Решая уравнения (4.50) на основе предложенного итерационного алгоритма, с использованием в качестве начальных приближений параметры плоского аналога механизма, определяем искомые параметры $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$.

Определив искомые параметры исходной кинематической цепи $ABCM$, далее находим параметры бинарного звена CDE . Для этого проводим анализ положений звеньев исходной кинематической цепи $ABCM$. Используя определенные ранее координаты точки $C(x_C, y_C, z_C)$ и углы $\theta_i^j, \psi_i^j, \varphi_i^j$ и приравняв в уравнениях (4.48) координаты точки B нулю ($x_B=y_B=z_B=0$) получим координаты $D(x_D, y_D, z_D)$ и $E(X_E, Y_E, Z_E)$, то есть бинарное звено CDE (рисунок 4.25).

Результаты синтеза пространственного рычажного механизма типа $BVCCSP$ с тремя выстоями на выходном звене проиллюстрируем на примере. Циклограмма движения выходного звена приведена на рисунке 4.26.

В результате синтеза получены следующие абсолютные размеры звеньев: межосевое расстояние AE 261,4 мм, кривошип AB 100 мм, шатун BC 183,3 мм, коромысло ED 99,4 мм, стороны трехстороннего жесткого контура DM 320,8 мм, CM 423,3 мм, CD 132 мм, расстояние от нижнего положения ползуна M до стойки коромысла E равен 403,3 мм, ход ползуна M равен 316,6 мм.

Механизм с тремя выстоями работает следующим образом. При вращении кривошипа 6 шатун 7 сообщает движение трехстороннему жесткому контуру 8, при этом один конец жесткого контура 8 создает качательное движение коромыслу 9 вокруг неподвижной опоры 10, а другой конец, шарнирно связанный с ползуном 3, взаимодействующий с прямолинейной направляющей 4, двигает захват 2 по циклограмме, имеющей три выстоя.

На рисунке 4.26 участки ab и qh соответствуют выстой захвата 2 при отрезании уточной нити, участок bc характеризует вытягивание уточной нити на исходную позицию, выстой cd необходим для работы системы смены цвета, участок ef – выстой рабочего звена в нижнем положении при прокладывании уточной нити в зев, fq – вытягивание излишка сброшенной нити в зев и создание определенного технологического натяжения утка при формировании ткани.

Объемный график функции суммы S показан на рисунке 4.27.

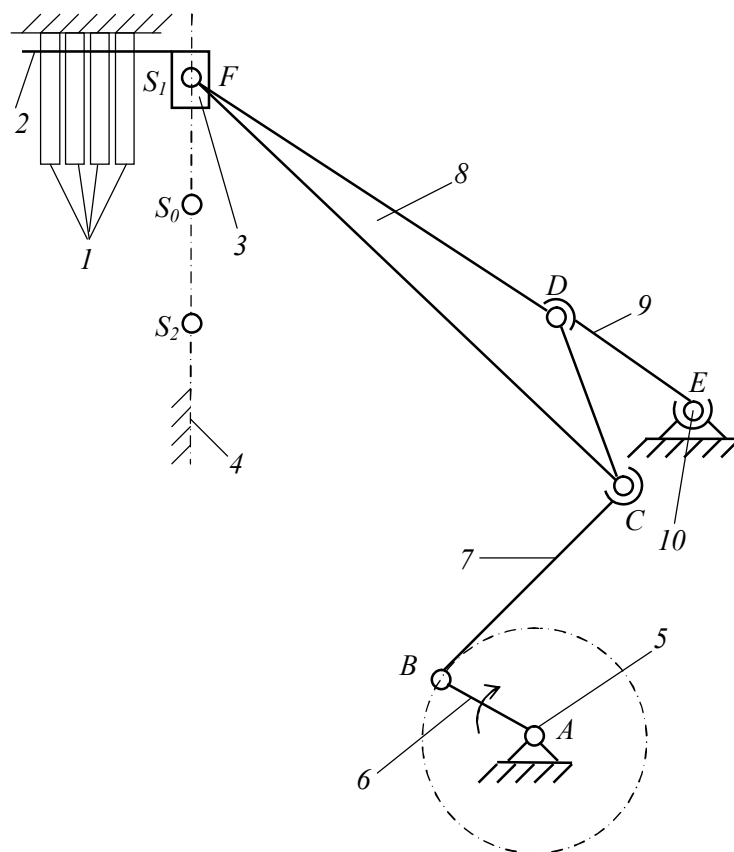


Рисунок 4.25

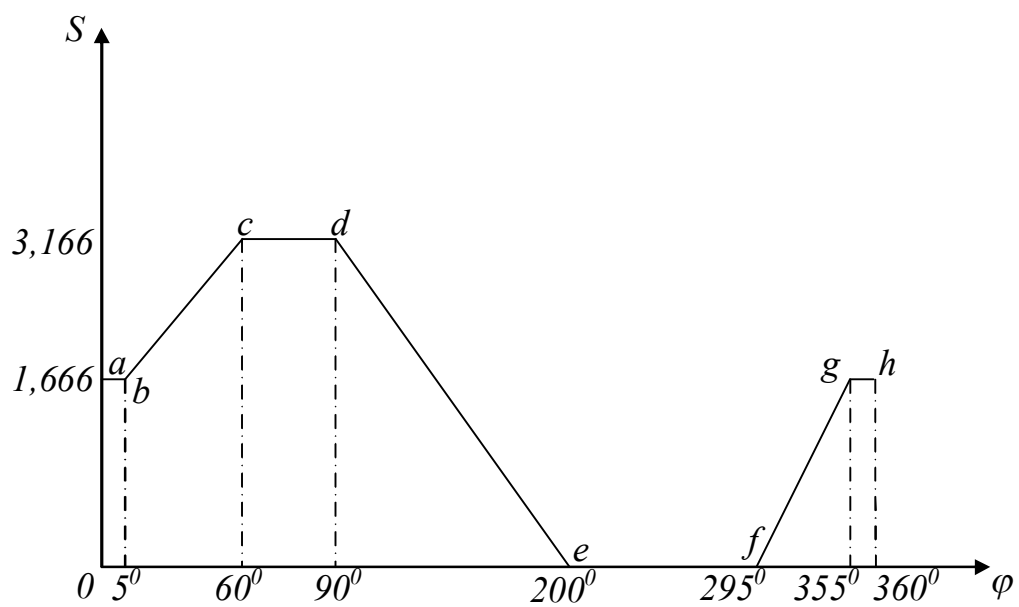


Рисунок 4.26

Объемный график функции S

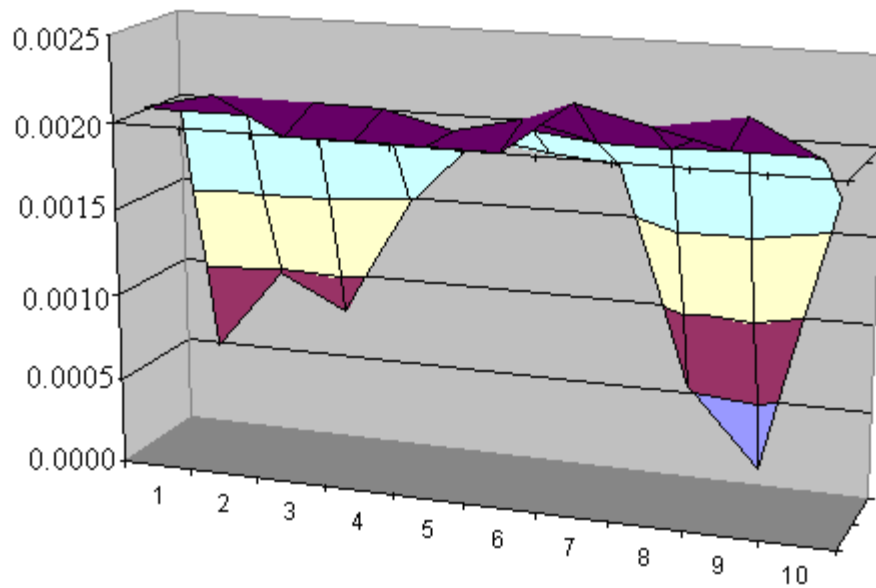


Рисунок 4.27 – Объемный график функции суммы S

Циклограмма описывает движение захвата 2 в зависимости от угла поворота главного вала станка и характерна для существующих устройств компенсации станков СТБ.

Результаты анализа положений звеньев механизма приведены на рисунке 4.28.

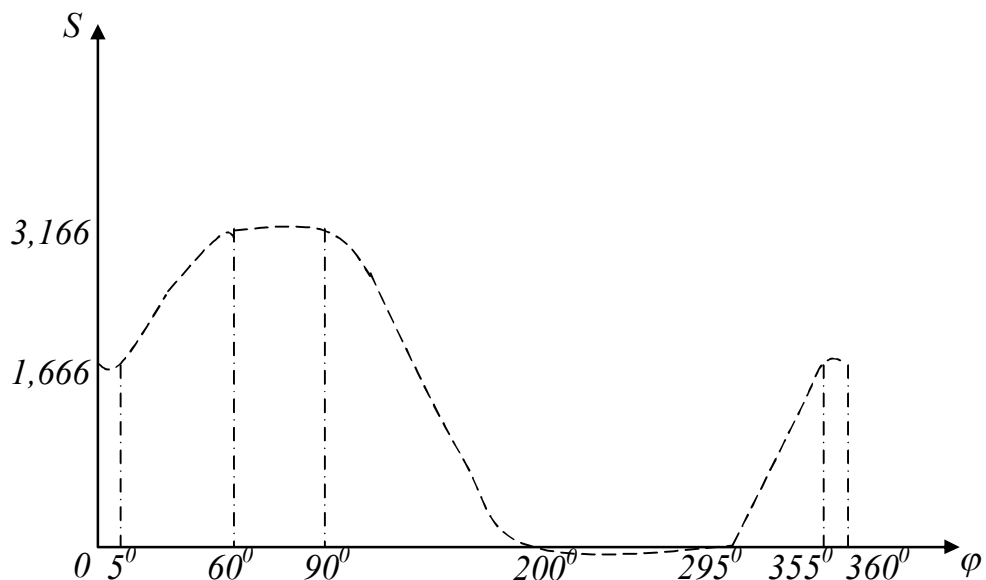


Рисунок 4.28

На основе вышеизложенного алгоритма синтеза ИКЦ по заданным законам движения входного и выходного звеньев синтезируемого механизма можно автоматизировать все этапы структурно-кинематического синтеза проектируемого механизма.

Список использованных источников

- 1 Чебышев П.Л. Об одном механизме. ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. – С. 10-16.
- 2 Чебышев П.Л. О параллелограммах, состоящих из трех элементов и симметрических около одной оси. ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. – С. 101-113.
- 3 Чебышев П.Л. О простейших сочленениях. ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. – С. 92-101.
- 4 Чебышев П.Л. О преобразовании вращательного движения в движении по некоторым линиям при помощи сочлененных систем ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. - С. 161-167.
- 5 Чебышев П.Л. О простейшей суставчатой системе, доставляющей движения, симметрические около одной оси. ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. – С. 167-212.
- 6 Чебышев П.Л. О параллелограммах, состоящих из трех элементов. ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. – С. 113-142.
- 7 Чебышев П.Л. О простейших параллелограммах, доставляющих прямолинейное движение с точностью до четвертой степени ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. – С. 143-158.
- 8 Чебышев П.Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. – М., Л.: Изд-во АН СССР, 1949. – 80 с.
- 9 Чебышев П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функции. ПСС – М., Л.: Изд-во АН СССР, 1947. - Т. 2. – С. 151-235.
- 10 Блох З.Ш. Синтез плоских кинематических цепей с низшими парами. – В книге: Прикладная математика и механика. М., 1939. – Т. 2, вып. 3. – С. 389-406.
- 11 Блох З.Ш. Приближенный синтез механизмов. –М.: Машгиз, 1948. – 172 с.
- 12 Артоболевский И.И. Теория пространственных механизмов. – М.: ОНТИ, НКТП, 1937, ч.1. – 236 с.
- 13 Артоболевский И.И. Структура, кинематика и кинетостатика многосвязных плоских механизмов. – М.,Л.: Изд-во АН СССР, 1939. – 232 с.
- 14 Артоболевский И.И. К вопросу о структуре и классификации кинематических цепей с замкнутым контуром// Изв. АН СССР, ОНТ, 1939, вып. 4. – С. 27-34.
- 15 Артоболевский И.И., Левитский Н.И. Механизмы П.Л. Чебышева. – Сб. «Научное наследие Чебышева». – М.: Изд-во АН СССР, 1945, вып. 2.
- 16 Артоболевский И.И., Добровольский В.В., Блох З.Ш. Синтез механизмов. – М.: Гостехиздат, 1944. – 255 с.
- 17 Артоболевский И.И. Основные проблемы современной теории машин// Механика машин. – М.: Наука, 1966, вып. 1-2.

- 18 Левитский Н.И., Шахбазян К.Х. Синтез пространственных четырехзвенных механизмов с низшими парами. – В кн.: Труды семинара по ТММ. – М.: Изд-во АН СССР, 1953. – Т. 11, вып. 54. – С. 5-24.
- 19 Левитский Н.И. и др. Синтез пространственных механизмов с помощью двойных рядов Фурье. – В кн. Механика машин. – М.: Наука, 1983, вып. 61. – С. 59-62.
- 20 Левитский Н.И. Применение квадратического приближения функции к решению задач синтеза механизмов // Тр. Семинара по ТММ. – М.: 1948. – Т. 5, вып. 17. – С. 40-68.
- 21 Черкудинов С.А. К синтезу кривошипно – шатунного механизма, осуществляющий приближенно – равномерное движение // Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1948. – Т. 5, вып. 18. – С. 5-24.
- 22 Черкудинов С.А. Синтез некоторых механизмов приближенно – равномерного движения // Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1949. – Т. 6, вып. 21. – С. 5-27.
- 23 Черкудинов С.А. Об одном методе приближения в синтезе механизмов. – М.: АН СССР, 1959.
- 24 Баранов Г.Г. К синтезу четырехзвенных плоских механизмов. Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1939. – Т. 4, вып. 1. – С. 5-29.
- 25 Семенов М.В. Аналитический метод синтеза стержневых механизмов, заданных двумя и тремя положениями // Вестник инж. и техн. – 1938. – №12.
- 26 Геронимус Я.Л. Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов. – М.: Физматгиз, 1962. – 399 с.
- 27 Новодворский Е.П. Об одном способе синтеза механизмов // Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1951. – Т. 11, вып. 42. – С. 5-51.
- 28 Зиновьев В.А. Пространственные механизмы с низшими парами. М.: Гостехиздат, 1952. – 432 с.
- 29 Зиновьев В.А. Проектирование пространственных четырехзвенных механизмов по полному числу параметров // Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1954. – Т. 14, вып. 55. – С. 49-62.
- 30 Степанов Б.И. Проектирование пространственных передаточных механизмов с низшими парами // Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1952. – Т. 12, вып. 45. – С. 46-58.
- 31 Асур Л.В. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации // Известия СПб политехнического института, отделения математики. – 1913-1914. – Т. 20, 21; 1915. – Т. 21-23; дополн. 1915. – Т. 24; дополн. 1918. – Т. 27.
- 32 Асур Л.В. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. – М.: Издательство АН СССР, 1952. – 529 с.
- 33 Кожевников С.Н. Основание структурного синтеза механизмов. – Киев, 1979. – 231 с.

- 34 Доронин В.И. Алгебраический синтез рычажных механизмов по заданному движению ведомого объекта: диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – Хабаровск, 1969. – 242 с.
- 35 Доронин В.И. Синтез плоских стержневых механизмов, приближенно воспроизводящих заданное движение ведомого объекта // Механика машин. – М.: Наука, вып. 15-16, 1969. – С. 5-23.
- 36 Доронин В.И. Алгебраический синтез пространственных рычажных механизмов по заданному движению объекта // Механика машин. – М.: Наука, вып. 25-26, 1970. – С. 100-118.
- 37 Доронин В.И. Динамический синтез пространственного кривошипно-ползунного механизма // Механика машин. – М.: Наука, вып. 5, 1982. – С. 71-78.
- 38 Саркисян Ю.Л. Аппроксимационный синтез механизмов. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
- 39 Пейсах Э.Е., Нестеров В.А. Система проектирования плоских рычажных механизмов. – М.: Машиностроение, 1988. – 232 с.
- 40 Диментберг Ф.М., Саркисян Ю.Л., Усков М.К. Пространственные механизмы (обзор современных исследований). – М.: Наука, 1983. – 95 с.
- 41 Лебедев П.А. Кинематика пространственных механизмов – М., Л.: Машиностроение, 1966. – 280 с.
- 42 Иванов К.С. Синтез пространственных механизмов с использованием обращения движения // Машиноведение. – 1978. – №1. – С. 48-54.
- 43 Иванов К.С. Синтез пространственных механизмов на основе кинематической геометрии конечно-удаленных положений точки // Механика машин. – М.: Наука, 1979, вып. 56. – С. 12-17.
- 44 Иванов К.С., Шишлевский С.П. Синтез пространственного направляющего механизма // Технология машиностроения. – Алма-Ата, 1980. – С. 84-89.
- 45 Иванов К.С. Синтез пространственных механизмов переменной структуры // Механика машин. – М.: Наука, 1983. -№60. – С.39-45.
- 46 Иванов К.С., Шишлевский С.П. Синтез пространственных рычажных механизмов на основе преобразования положений точек. Рукопись деп. в КазНИИНТИ, Ка-84, №785 от 9.11.84.
- 47 Иванов К.С., Шишлевский С.П. Синтез пространственного многозвенного передаточного механизма // Известие вузов. Машиностроение. – 1984. – №7. – С. 56-60.
- 48 Иванов К.С., Шишлевский С.П. Синтез пространственного направляющего механизма // Технология и оборудование мет. – Алма-Ата, 1986. – С. 57-61.
- 49 Джолдасбеков У.А. Графо-аналитические методы анализа и синтеза механизмов высоких классов. – Алма-Ата: Наука, 1983. – 256 с.
- 50 Schoenfliss A. Geometrie der Bewegung in Synthetischer Darstellung. - Leipzig, 1886. - 194 s.
- 51 Добровольский В.В. О точках Бурместера в сферическом движении. ПММ. -1945. -Т. IX. -№6. - С. 480-491.

- 52 Добровольский В.В. Синтез сферических механизмов. В кн.: Труды семинара по ТММ. -М.: Изд-во АН СССР. - Т. 1, вып. 1. - С. 5-20.
- 53 Бейер Р. Кинематический синтез механизмов. -М.: Машгиз, 1959.
- 54 Hain K. Applied kinematics. New York, McGraw-Hill book. Co., 1967.
- 55 Лихтенхельд В. Синтез механизмов. -М.: Наука, 1964. - 227 с.
- 56 Росс Ч. Расчетные уравнения синтеза кинематических цепей по отдельным и бесконечно близким положениям // Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1969, № 1. - С. 227-237.
- 57 Росс Ч. Общая теория кинематического синтеза по отдельным и бесконечно близким положениям // Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1969. - С. 220-226.
- 58 Черкудинов С.А. Об одном методе приближения в синтезе механизмов. - М.: АН СССР, 1959.
- 59 Озол О.Г. Аналитическое решение задачи Бурместера с использованием формул Сомова. В кн.: Анализ и синтез механизмов. -М.: Машиностроение, 1969. - С. 137-150.
- 60 Пейсах Э.Е. Полный атлас структурных схем одноконтурных пространственных рычажных механизмов и их классификация // Известие ВУЗов. Машиностроение. -1991. -№ 1-3. - С. 3-6.
- 61 Richter Jan. Steuerung offener Auslegerstrukturen mit linearen Antrieben/ Wiss. Z. Techn. Univ. –Dresden, 1994, 43, №3. - P. 22-28.
- 62 McCarthy J.M. The synthesis of planar RR and spatial CC chains and the equation of a triangle. Trans. ASME. J. Mech. Des. 1995, Suppl. “50th anniv. des. eng. div.” - P. 101-106.
- 63 Modler Karl- Heinz. Lehre und Forschung in der Getriebetechnik. Wiss. Z. Techn. Univ. –Dresden, 1994, 43, №3. - P. 17-19.
- 64 Глазунов В.А. Принципы построения и анализа пространственных механизмов с параллельной структурой // Проблемы машиностроения и надежности машин. -1995. -№ 1. - С. 14-19.
- 65 Innocenti C. Direct kinematics in analytical form of the 6-4 fully- parallel mechanisms. Trans. ASME. J. Mech. Des. -1995, 117. -№ 1. - P. 85-95.
- 66 Innocenti C. Polynomial solution of the spatial Burmester problem. Trans. ASME. J. Mech. Des. -1995, 117. -№ 1. - P. 64-68.
- 67 Park F.C., Ravani B. Bezier curves on Riemannian manifolds and Lie groups with kinematics applications. Trans. ASME. J. Mech. Des. -1995, 117. -№ 1. - P. 36-40.
- 68 Mavreidis C., Roth B. Analysis of overconstrained mechanisms. Trans. ASME. J. Mech. Des. -1995, 117. -№ 1. - P. 69-74.
- 69 Wohlhart K. A parallel redundant manipulator based on the Assur group. Zesz. nauk. Mech. Psl. -1994. -№ 118. - P. 371-378.
- 70 Нестеров В.А., Пейсах Э.Е. База знаний по анализу и синтезу рычажных механизмов в компьютерной системе LINKAGES // Вестник Московского авиационного института. -1995, 2. -№ 1. - С. 51-58.

- 71 Angeles J., Daniali H.R. Mohammadi, Zsombor-Murray P.J. The kinematics of spatial double-triangular parallel manipulators. Trans. ASME. J. Mech. Des. -1995, 117. -№ 4. -P. 658-661.
- 72 Juttler B., Wagner M.G. Computer – aided design with spatial rational B – spline motions. Trans. ASME. J. Mech. Des. -1996, 118. -№ 2, -P. 193-201.
- 73 Пейсах Э.Е. Кинематически эквивалентные пространственные рычажные механизмы. Проблемы машиностроения и надежности машин. -1996. -№ 5. -С. 18-23.
- 74 Varbanov Hristo Varbanov, Georgiev Stefan Ivanov. Comp. Syst. And Autom. Proc. 9th Int. Conf. “Syst. Autom. End. and Res.” (SAER'95) and DECUS Nat. Users Group Semin. 95. -Varna, sept. 24-26, 1995. Sofia, 1995, -С. 349-353.
- 75 Golynski Z. O optimalnej syntesie maszyn metodami Monte – Karlo. Arch. Budowy Maszyn, tom 12, 1965, Zeszyt 3, - P. 353-384.
- 76 Golynski Z. Optimal synthesis problems solved by means of nonlinear programming and random methods. Journal of mechanisms. -Vol. 5. -№ 3. 1970. -P. 287-309.
- 77 Одерфельд Я. Некоторые методы оптимального синтеза машин. В кн.: Анализ и синтез механизмов. -М.: Машиностроение, 1969. -С. 227-233.
- 78 Tomas J. The synthesis of mechanisms as a nonlinear programming problem journal of mechanisms. -1968. Vol. 3. -P. 119-130.
- 79 Эшенбах, Тесар. Оптимизация шарнирных четырехзвенников, удовлетворяющих четырем положениям в одной плоскости. Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1969, № 1. -С. 70-87.
- 80 Гаррет, Холл мл. Оптимальный синтез многозвенников при помощи метода статических испытаний // Конструирование и технология машиностроения. М.: Мир, 1968, № 3. -С. 40-46.
- 81 Гусейнов Н.Н., Ализаде Р.И. Синтез шарнирно-рычажных механизмов методом статистических испытаний (метод Монте-Карло). В сб.: Механика машин. -М.: 1970, вып. 25-26. -С. 77-78.
- 82 Андрейченко Г.П. Метод статистических испытаний при синтезе кривошипно-коромыслового механизма // Изв. ВУЗов СССР. Машиностроение. -1993. -№ 2. -С. 50-54.
- 83 Klein Breteler A.J. Partial derivatives in kinematic optimization. Proc. of 5-th World Congress on the theory of machines and mechanisms. -Montreal, Canada, 1979.
- 84 Льюис, Диснори. Кинематический синтез плоских кривых. Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1967, № 1. -С. 202-205.
- 85 Han Chi-Yeh. A general method for the optimal design of mechanisms. Journal of mechanisms. -1966. -Vol. 1. -P. 301-312.
- 86 Handra-Luka V. The synthesis of mechanisms on the basis of positional shifts determination of the output links. Proc. of the 7-th World congress on the theory of machines and mechanisms. - Seville, Spain, 1987. -P. 99-102.

87 Чжень, Чжань. Размерный синтез механизмов для воспроизведения функции при помощи компромиссной схемы Марквалрата // Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1974, № 1. -С. 30-37.

88 Прасад, Бегси. Применение метода минимизации ошибок при синтезе многоконтурных плоских механизмов // Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1974, № 1. -С. 16-17.

89 Сохони В., Хог Е. Применение методов пространства состояний для оптимизации кинематики машин и механизмов. Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1982, № 1. -С. 21-27.

90 Новгородцев В.А. Некоторые вопросы проектирования оптимальных механизмов. В сб.: Применение методов оптимизации в теории механизмов и машин. -М.: Наука, 1979.

91 Ализаде Р.И. Синтез шарнирно-рычажных механизмов методом статических испытаний // Машиноведение. -1986. - № 3. -С. 58-61.

92 Казыханов Х.Р., Феофанова Е.А. Синтез механизма высокого класса методом штрафных функций. В сборнике: Расчет и конструирование машин и механизмов. -Алма-Ата, 1982. -С. 25-32.

93 Culafic G.D., Pantelic T.L. Technological approximative synthesis of a path generating mechanism. Proc. of the 7-th World congress on the theory of machines and mechanisms. -Seville, Spain, 1987. -P. 119-124.

94 Марианте В., Уилмерт К. Оптимальное проектирование сложного плоского механизма // Конструирование и технология машиностроения. М.: Мир, 1977, №3. -С. 24-33.

95 Пейсах Э.Е. Синтез рычажных механизмов на основе методов магн. оптимизации// В сб.: Механика машин. -М.: Наука, 1973, вып.41. -С. 4.

96 Пейсах Э.Е. Синтез рычажных механизмов на основе методов нелинейного программирования. В сб.: Механика машин. -М.: Наука, 1974. вып. 44. -С. 69-77.

97 Пейсах Э.Е. Оптимизационно-квадратический синтез плоских рычажных механизмов // Машиноведение, -1986. -№5. -С. 71-78.

98 Пейсах Э.Е. Анализ положений манипуляторов с шестью степенями свободы. Робототехника. Межвузовский сборник, -Л.: ЛПИ, 1979, вып. 2. -С. 70-76.

99 Пономаренко С.С, Прасолов В.Г. Оптимизация параметров плоских и пространственных шарнирно-рычажных печатающих механизмов методом штрафных функций // В сб.: Механика машин, 1983, вып.61, -С. 134-137.

100 Rao S.S. and Ambekar A.G. Optimum design of spherical 4-R function generating mechanisms. Mechanisms and machine theory, -Autumn, 1974, vol.9, №3. -P. 405-410.

101 Фокс, Уилмерт. Проектирование механизмов воспроизводящих заданную шатунную кривую при ограничениях в форме неравенств // Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1967, №1. -С. 169-170.

- 102 Шпитцнагель, Тесар. Многопараметрическая оптимизация шарнирных четырехзвенников // Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1979, №3. -С. 17-23.
- 103 Сохони В., Хог Е. Применение методов пространства состояний для оптимизации кинематики машин и механизмов // Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1982, №1. -С. 21-27.
- 104 Fenton R.G. and Jinshu Xu. Kinematics Synthesis of Mechanisms Using the Flexible Toleranse Algorithm. Proc. of the 7-th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms. -Seville, Spain, 1987. -P. 37-40.
- 105 Song S.M., Waldron K.J. Geometric Design of a Walking Machine for Optimal Mobility. Trans of the ASME Journal of Mech., Trans, and Autom. in Design. March. -1987. -V.109. -P.21-28.
- 106 Косболов С.Б., Молдабеков М.М. Синтез исходных кинематических цепей со сферическими парами для пространственных механизмов. Вестник КазНТУ. -№ 1(29). -2002. – С. 39-43.
- 107 Косболов С.Б., Бекенов Е.Т. Кинематический синтез исходных кинематических цепей типа $CC_{\Pi}C$ для пространственных механизмов: Труды международной научно-практической конференции «Естественно-гуманитарные науки и их роль в подготовке инженерных кадров». –Алматы: КазНТУ. -2002. – С. 245-248.
- 108 Косболов С.Б., Дракунов Ю.М., Калиаждаров Р.С. Оптимизационный синтез пространственных механизмов: IV науч.-метод. совещ. зав. каф., лекторов по ТММ ВУЗов республики Ср. Азии и Казахстана. -Алма-Ата. -1991. - С. 49-52.
- 109 Косболов С.Б., Джумагулова Н.Б. Структурно-параметрический синтез пространственных механизмов на основе исходных кинематических цепей: Труды Международного Симпозиума, посвященного 100-летию К.И. Сатпаева, часть II. -1999. – С.347-350.
- 110 Kosbolov S., Moldabekov M., Bekenov E. Kinematic synthesis of spatial lever motion – generating mechanisms by use of initial kinematic chain. The NINTH IFToMM international symposium on teori of machines and mechanisms. -Bucharest, Romania, September 1-4, 2005. SYROM 2005. -P. 245-250.
- 111 Косболов С.Б. О существовании решения задачи синтеза ИКЦ со сферическими кинематическими парами: Доклады НАН РК. -Алматы. -№6. -2004. – С. 54-59.
- 112 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Синтез пространственных кулисных механизмов по задним движениям входного и выходного звеньев // Известия МОН, НАН РК. Серия «физ.-мат». -№ 5 -2002. – С. 59-65.
- 113 Косболов С.Б., Казыханов Х.Р. Синтез пятизвенных и семизвенных механизмов переменной структуры: Труды Всесоюзной конференции по механизмам переменной структуры в технике. -Фрунзе. -1991. – С. 88-89.
- 114 Косболов С.Б., Дракунов Ю.М., Калиаждаров Р.С. Синтез пространственных четырехзвенных механизмов со сферическими парами // Сборник

научных статей «Проектирование и исследование механизмов» ИММ АН КазССР. -1991. – С. 64-69.

115 Косболов С.Б., Джумагулова Н.Б. Автоматизированный синтез плоских рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей // Вестник КазНТУ. -№ 1-2. -1999. – С. 164-169.

116 Косболов С.Б., Молдабеков М.М. Структурно-параметрический синтез плоских рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей: деп. в КазНИИНТИ, № 2187 – Кац 88. -Алма-Ата.

117 Косболов С.Б., Алтынов Ж. Кинематический анализ механизмов IV-класса с применением векторного исчисления // Вестник КазНТУ. -№ 1, 1996. – С. 75-80.

118 Косболов С.Б., Кансеитов К.И., Кажекенов Д.Х. Сравнительный кинематический анализ механизма III-класса: Материалы международной научно-технической конференции "Творчество молодых XXI века". - Петропавловск. -Том II. -2003. – С. 64-67.

119 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Общая методика синтеза пространственных рычажных механизмов на основе ИКЦ // Тезисы 10-й Межвузовской конференции по математике и механике. -Алматы, 7-9 октября, 2004. – С. 183.

120 Косболов С.Б., Бекенов Е.Т. Структурно-кинематический синтез пространственных рычажных перемещающих механизмов на основе ИКЦ и их модификации // Вестник национальной академии наук Республики Казахстан. - Алматы. -№1. -2005. –С. 68-73.

121 Косболов С.Б. Структурный синтез пространственных рычажных механизмов высоких классов на основе исходных кинематических цепей: Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения». –Алматы. -Том II. 17-19 июня 2005. – С. 249-254.

122 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Кинематический синтез пространственных шестизвенных перемещающих механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев // Труды Международной научно-технической конференции «Современные проблемы механики, строительства и машиностроения». –Павлодар. 16-17 ноября 2006. – С. 3-9.

123 Косболов С.Б. Структурно-кинематический синтез пространственных рычажных направляющих механизмов на основе ИКЦ // Вестник КазНТУ. -6(44). -2004. – С. 94-100.

124 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Общая методика синтеза пространственных рычажных механизмов на основе ИКЦ: Материалы 10 Межвузовской конференции по математике и механике. -Том 2. -Алматы. - 2005. – С. 51-56.

125 Косболов С.Б. Структурно-кинематический синтез пространственных передаточных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма // Вестник национальной инженерной академии Республики Казахстан. -№1(15). -2005. – С.97-100.

- 126 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Кинематический синтез пространственных перемещающих механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев. Материалы II международной конференции "Проблемы механики современных машин", том 1, издательство ВСГТУ, -Улан-Удэ, Россия. 2003. – С. 111-113.
- 127 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Структурно-кинематический синтез пространственных грузоподъемных механизмов. Сборник докладов Международного конгресса "Механика и трибология транспортных систем - 2003" -Ростов на Дону. 10-13 сентября, 2003. – С. 155-157.
- 128 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т., Акимжанова М.М. Численное решение задачи синтеза механизма для реализации заданного пространственного движения тела // Тезисы докладов Международной научной конференции «Проблемы теоретической и прикладной механики». -Алматы. 1-2 марта, 2006. – С. 171.
- 129 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Кинематический синтез направляющего пространственного рычажного механизма с четырьмя выстоями // Тезисы докладов 10-й Межвузовской конференции по математике и механике. -Алматы. -2004. – С. 182.
- 130 А. с. 39048. Республика Казахстан. Устройство компенсации уточных нитей к многоцветному бесчелночному ткацкому станку / Косболов С.Б., Бекенов Е.Т., Кансеитов К.И. (Республика Казахстан). -2002/0909.1; опубл. 15.01.2004. Бюл. №1.
- 131 Косболов С.Б., Дракунов Ю.М. Кинематический анализ кулачкового механизма векторным методом с применением ЭВМ // Тезисы докладов научно-методической конференции. –Караганда. -1986. – С. 68.
- 132 Косболов С.Б., Дракунов Ю.М. Профилирование цилиндрических кулачков с коромыслом // Сборник научных статей «Рычажные механизмы и манипуляционные устройства». -1989. – С. 42-47.
- 133 Косболов С.Б. Синтез передаточных сферических механизмов // Вестник КазНТУ. -№ 1(29). -2002. – С. 44-46.
- 134 Косболов С.Б. Кинематический синтез пространственного четырехзвенного передаточного механизма на основе ИКЦ: Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения». –Алматы. -Том II. 17-19 июня 2005. – С. 243-248
- 135 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Кинематический синтез пространственного механизма с тремя выстоями на основе ИКЦ: Труды международной конференции "Actual problems of computer sciences" КазНУ. – Алматы, 4-6 марта 2003. – С. 109-110.
- 136 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Кинематический синтез пространственного механизма с тремя выстоями на основе ИКЦ // Вестник КазНУ. Серия «мат., мех., инф.» -№2 (37). -2003. – С. 124 - 127.
- 137 А. с. 46886 Республика Казахстан. Устройство компенсации уточных нитей к многоцветному бесчелночному ткацкому станку / Косболов

С.Б., Бекенов Е.Т. (Республика Казахстан) -№ 2003/1701.1; опубл. 15.12.2005. Бюл. №12.

138 Косболов С.Б., Бекенов Е.Т. Динамические модели исходных кинематических цепей механизмов высоких классов с учетом упругости звеньев // Труды международной конференции «Современные проблемы механики». Часть II. -Алматы. -2001. – С. 133-139.

139 Косболов С.Б., Бекенов Е.Т. Определение жесткостных характеристик для составления уравнения движения исходных кинематических цепей механизмов высоких классов с упругими звеньями // Труды 2-й международной научно-практической конференции молодых ученых. КазНТУ. -Алматы. -2002. – С. 277-280.

140 Косболов С.Б. К геометрическому синтезу незамкнутой четырехзвенной исходной кинематической цепи с плоскостной парой // Тезисы международной конференции «Проблемы современной математики и механики». –Алматы, 20-22 сентября, 2005. – С. 223-224.

141 Косболов С.Б., Казыханов Х.Р. Қазақ тіліндегі тұңғыш оқулық // Тезисы докладов 10-й Межвузовской конференции по математике и механике. - Алматы. -2004. – С. 202.

142 Косболов С.Б. Аппроксимационный синтез пространственных четырехзвенных механизмов типа *ВЦСП* // Труды Международной научно – практической конференции «Научно – технические ценности в наследии мыслителей Востока и А. Машани» КазНТУ. –Алматы, 5 июня 2007. – С. 210-215.

КОСБОЛОВ С. Б.

**АППРОКСИМАЦИОННЫЙ СИНТЕЗ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МНОГОЗВЕННЫХ
РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ**

Редакторы Төрехан МАЙБАС
Корректоры Әйгерім БӘЗІЛЖАНҚЫЗЫ
Көркемдеуші редакторы Дәулет ТЫНБАЙ
Техникалық редакторы Нұркен СҮЙЕУБЕКҰЛЫ

ИБ №490

Теруге 10.08.12 берілді. Басуға 02.09.2012. қол қойылды.

Қалыбы 84x108. Қағазы офсеттік.

Қаріп түрі «Times New Roman». Офсеттік басылыс.

Есептік баспа табағы 12.3. Таралымы 2000 дана.

Тапсырыс № 275

Қазақстан Республикасы, Алматы қаласы
Жангелдин-Мұхамеджанов көшесі, 30/26.

«ҚазАқпарат» баспа корпорациясы

Тел.: (8-727) 397-41-62, 397-41-63

Эл. пошта: kaz_akparat@mail.ru

«ҚазАқпарат» баспа корпорациясының
баспаханасы