

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТІРЛІГІ

Қ. И. СӘТБАЕВ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ ТЕХНИКАЛЫҚ
УНИВЕРСИТЕТІ

Сатыбалдиев О.С.,
Сулейменов З.И.

Жоғары математика

IV

**Көп айнымалылар функциясының
дифференциалдық және интегралдық есептеулері.
Қатарлар. Дифференциалдық тендеулер.**

Оқу-әдістемелік құрал

Алматы 2010

ЖОК 378(075.8): 51

ББК 22. 1я 7

С 21

Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И.

Жоғары математика: Көп айнымалылар функциясының дифференциалдық және интегралдық есептеулері. Қатарлар. Дифференциалдық теңдеулер. Оқу-әдістемелік құрал. – Алматы: 2010, 259 бет.

ISBN 9965-21-742-4

Оқу-әдістемелік құрал техникалық жоғары оқу орындарында оқытылатын барлық мамандықтар бойынша бакалавриат бөлімінің типтік оқу бағдарламасына сәйкес жазылған. Мұнда «Жоғары математика» курсының «Көп айнымалылар функциясының дифференциалдық және интегралдық есептеулері. Қатарлар. Дифференциалдық теңдеулер» бөлімдері бойынша алдымен теориялық сұрақтар (лекция), содан соң әдістемелік нұсқаулар, студенттерге аудиторияда берілетін есептер және студенттердің өзіндік жұмыс тапсырмалары берілген.

Оқу-әдістемелік құрал жоғары техникалық оқу орындарының студенттері мен оқытушыларына арналған.

ЖОК 378(075.8): 51

ББК 22. 1я 7

Пікір жазғандар:

С.Т. Мұхамеджанов – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор;

Д. Рахымбек – педагогика ғылымдарының докторы, профессор.

Университеттің ғылыми-әдістемелік кеңісінде жоғары техникалық оқу орындарының студенттеріне арналған оқу-әдістемелік құрал ретінде баспаға ұсынылған.

С $\frac{1602000000}{00(05) - 09}$

ISBN 9965-21-742-4



**Сатыбалдиев
Ораз Сатыбалдыұлы**

**Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ
ұлттық техникалық университеті
«Математика» кафедрасының
меңгерушісі, физика-математика
ғылымдарының кандидаты,
педагогика ғылымдарының
докторы, профессор,
Халықаралық ақпараттандыру
академиясының академигі**

Профессор Сатыбалдиев О.С. Қазақстан Республикасында және ТМД елдеріне танымал әдіскер – математик. Баспа бетінен жарық көрген жүз жиырма бестен астам ғылыми және оқу - әдістемелік еңбектердің авторы. Оның ішінде екі монография, жоғары оқу орындарының студенттеріне арналған оннан астам оқулықтар мен жиырма бестен астам оқу-әдістемелік құралдары бар.

Ы. Алтынсарин атындағы Ұлттық білім беру академиясының жанындағы педагогика ғылымдарының докторы ғылыми дәрежесін беру жөніндегі БД 14.65.02 біріккен диссертациялық кеңесінің мүшесі.

Профессор Сатыбалдиев О.С. Қазақстан Республикасының 2007 жылғы «Жоғары оқу орнының үздік оқытушысы» мемлекеттік грантының және Қазақстан Республикасының ғылымын дамытуға сіңірген еңбегі үшін медалінің иегері.



**Сулейменов
Зинадин Искендерұлы**

**Қ.И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық
университеті «Математика»
кафедрасының доценті**

1965-жылы Ташкент мемлекеттік университетіндегі механика-математика факультетін «Сандар теориясы» мамандығы бойынша бітірген.

1970-жылы Өзбекстан ҒА кибернетика ғылыми-зерттеу институтының аспиранты болып «Суармалы аймақтардағы жер асты сулары және тұздары динамикасының кейбір шекаралық есептерін шешу» деген тақырыпта кандидаттық диссертация қорғаған.

2004-2007 жылдары Астана қаласындағы Ақмола технология және бизнес университетінің «Ғылыми жаратылыстану пәндері» кафедрасының меңгерушісі қызметін атқарған, ал 2007-жылдан бері Қ. Сәтбаев атындағы Қазақ Ұлттық техникалық университетінің «Математика» кафедрасының доценті. Ол елуден астам ғылыми және оқу-әдістемелік еңбектердің авторы.

Дүниежүзілік жаһандану үрдісі, жұмыс күшінің халықаралық миграциясы Қазақстанның Бүкіләлемдік Сауда ұйымына кіру жөніндегі дайындықтар, еліміздің саяси және экономикалық өмірінде болып жатқан ұлы өзгерістер еңбек ресурстары, қызмет көрсету, тауар өндіру және т.б. салалар бойынша бәсекелестікті арттыруды талап етуде. Бұл, әрине, ең бірінші кезекте заман талабына тез бейімделе алатын, толғағы жеткен проблемаларды мезгілінде шеше білетін, өзінің жетекші идеясы бар және творчестволық ойлау қабілетін меңгерген мамандарды қажет ететіні сөзсіз; екіншіден олардың білімдеріне, іскерліктері мен дағдыларына деген жоғары талаптар жүктейді.

Жоғары оқу орындарындағы мамандарды даярлаудың бұрынғы бір-денгейлік жүйесі нарық экономикасының талаптарын қанағаттандыра алмайтынына көзіміз жетті. Сондықтан елімізде оқытудың көпденгейлік жүйесі енгізілді. Осыған байланысты жоғары оқу орындарындағы оқу үрдісінің деңгейінің сапасын көтеру мақсатында дәстүрлі оқу формаларын заман талабына сай қайта құруды жүзеге асыратын білім беру технологияларын жасау көкейкесті мәселе болды. Дәстүрлі түрде оқытуда білім алушы мен оның кәсіби іс-әрекеттеріне қойылатын талаптардың арасында алшақтықтар көп болды. Дәстүрлі оқу жүйесі қазіргі заман талаптарына сай болмағандықтан, ендігі жерде күрделі кәсіби, өндірістік және ғылыми проблемаларды өздігінен шеше алатын, білімді, білікті мамандарды қалыптастыруға мүмкіндік беретін оқытудың жаңа әдістерін іздеу қажеттілігі туындайтыны сөзсіз.

Қазақстан Республикасының жоғары оқу орындарында оқытудың кредиттік технологиясын енгізу мәселесі ұлттық білім беру жүйесін әлемдік деңгейге көтеру болып табылады. Ондағы негізгі мақсат студенттер, оқытушылар мен мамандар бойынша өзара алмасу, жоғары оқу орындарын бітіргенде берілетін дипломдардың мемлекетаралық мәртебе алу, сонымен қатар олардың отандық және шетелдік еңбек нарығында сұранысқа ие болу мәселелері бойынша тұтас халықаралық жүйе құру. Оқытудың кредиттік технология жүйесі Қазақстан Республикасының ұлттық білім беру бағдарламаларын халықаралық мәртебеге көтеруге мүмкіндік береді және жоғары оқу орындарының әлемдік деңгейге шығуына көмектеседі.

Кредиттік технологияда оқыту жүйесінде оқу үрдісін техникалық құралдармен, электрондық оқулықтармен және студенттерге қажетті ғылыми оқу-әдістемелік әдебиеттермен толық қамтамасыз ету мәселелері жүзеге асуы тиіс. Оқылатын барлық пәндер бойынша оқу-әдістемелік кешеннің маңызы зор, өйткені олар дәріс мен практикалық сабақтарға алдына ала дайын келеді, сабақта не мәселе жөнінде әңгіме болатынын біледі, түсінбеген материалдар бойынша сауалдар даярлайды, осылардың негізінде пікір-таласқа белсенді қатысады. Лекцияда оқытушы студенттерге басты назар аударатын негізгі нәрселерге бағыт береді, сонымен қатар өтіліп отырған тақырыптағы жаңа, проблемалық мәселелерді айтып, студенттермен бірге оны шешудің

жолдарын іздейді. Студент дәстүрлі оқу формасындағыдай дәрісте конспект жазбайды, өйткені әр пән бойынша оқу-әдістемелік кешен бар.

Осындай кредиттік технологияда оқығудың талаптарын жүзеге асыруда студенттерге арналып жазылған оқулықтар, оқу құралдары және оқу-әдістемелік кешендердің атқаратын рөлі зор. Олардың көмегі арқылы студенттер өз бетінше білім алуға үйренеді және олардың бойында алған білімдерін практикаға қолдана білу іскерлігі мен дағдылары қалыптасады. Осындай келелі мәселелердің шешімін табу мақсатында, біз, техникалық жоғары оқу орындарының студенттеріне арнап жоғары математика курсы бойынша жазылған оқу құралының төртінші бөлімін ұсынып отырымыз.

Оқу құралы мынадай құрылымда жазылды: теориялық материалдар, сол материалдарды студенттердің толық түсінгендігін айқындайтын өзін-өзі тексеру сұрақтары, оқытушының кеңесі бойынша студенттердің орындайтын жаттығулар жүйесі, студенттердің үйде орындайтын тапсырмалары, әр бөлімнің соңында жеке студентке арналған жиырма бес нұсқадан тұратын өзіндік жұмыс тапсырмалары және осы нұсқалардың алдындағы нөлінші нұсқада сол тапсырмаларды қалай орындау жөнінде әрі ыңғайлы, әрі уақытты үнемдейтін үлгілері ұсынылды.

Мұндай құрылым кредиттік технология жүйесі бойынша техникалық жоғары оқу орындарының студенттеріне математикалық білім беруде әдістемелік тұрғыдан өте тиімді және кредиттік технологияда оқытудың барлық талаптарын қанағаттандырады.

Оқу құралы оқығудың кредиттік технология жүйесіне сәйкес мемлекеттік тілде тұңғыш рет жазылып отырғандықтан кемшіліктері жоқ деп айта алмаймыз. Сол кемшіліктерге сын-ескертпелер айтқан оқырмандар мен мамандарға алдын-ала алғысымызды білдіреміз.

Ұсынылып отырған оқу құралының қолжазбасына пікір жазып, ескертпелер айтқан М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университетінің «Математиканы оқыту әдістемесі» кафедрасының профессоры, педагогика ғылымдарының докторы Д.Рахымбекке, Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің «Математикалық анализ» кафедрасының меңгерушісі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор С.Т.Мұхаметжановқа және оқу құралын жазу барысында құнды-құнды кеңес берген Қазақстан Республикасының еңбек сіңген қайраткері, Нью-Йорк академиясының толық мүшесі, Қазақстан Республикасы ишкерлік академиясының академигі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Е.Т.Божановқа зор алғысымызды білдіреміз.

Оқу құралының қолжазбасын компьютерге түсіргенде үлкен көмек көрсетіп, еңбек жасаған Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университетінің «Математика» кафедрасының жанындағы зертхана қызметкері Жұбанышбаева Райкүл Жанабергенқызына рахметімізді айтамыз.

Авторлар

26-дәріс. 13-тақырып. Көп айнымалының функциялары

13.1 Екі айнымалының функциясы, оның анықталу облысы және графигі

Жаратылыстану ғылымдарының, экономиканың және т.б. салалардың көптеген мәселелері көп айнымалы шамалардың функцияларына мысал болады. Бірақ мұндай тәуелділіктерді зерттегенде, үйренуге жеңіл болу мақсатында, айнымалы шамалардың бір бөлігін тұрақты деп қабылдап, бір, екі және т.с.с. айнымалы шамалардың функциясына келтіреді. Бір айнымалының функциясы ұғымын, оның дифференциалдық және интегралдық есептерін бұрынғы дәрістерде қарастырдық. Енді екі айнымалы шаманың функциясы ұғымын, оның дифференциалдық есептерін қарастыралық.

Негізгі ұғымдар

x, y айнымалыларының қосағы, яғни (x, y) мәндерінен тұратын жиынды D арқылы, ал айнымалы z -тің нақты мәндерінен тұратын жиынды Z арқылы белгілейік.

1-анықтама. Егер x, y екі тәуелсіз айнымалының әрбір қосағына, яғни $(x, y) \in D$ мәніне айнымалы z -тің бір тек қана бір мәні сәйкес келсе, онда z шамасы x, y тәуелсіз шамаларының функциясы деп аталады және $z = f(x, y)$ арқылы белгіленеді.

Мұндағы D жиыны функцияның анықталу облысы деп, ал Z функцияның өзгеру облысы немесе мәндерінің жиыны деп аталады.

Екі айнымалы функциясының анықталу облысы бүкіл жазықтық немесе оның қандайда бір бөлігі болуы мүмкін. Берілген облысты жазықтықтан бөліп тұратын сызық оның шекарасы деп аталады.

Облыстың ішінде орналасқан, оның шекарасында жатпайтын нүктелерді облыстың ішкі нүктелері деп атайды. Тек қана ішкі нүктелерден құралған облыс ашық облыс деп аталады.

Егер облысқа оның шекарасының нүктелері де жатса, онда ол тұйық облыс деп аталады.

Егер облыстың кез келген M нүктесі үшін $|OM| < C$ теңсіздігі орындалса, онда ол шектелген облыс деп аталады (мұндағы O -координаталар бас нүктесі, C -тұрақты сан).

Бір айнымалының функциясына ұқсас, екі айнымалының функциясы да аналитикалық (формуламен) әдісте, кесте әдісінде, тағы басқа әдістерде берілуі мүмкін. Біз көбінесе аналитикалық әдістермен берілген функцияларды қарастырамыз.

Аналитикалық әдіспен берілген функцияларды зерттеу оның анықталу облысын табудан басталады.

1-мысал. $z = 3x - 2y$ функциясының анықталу облысын табалық.

Шешуі. $3x - 2y$ өрнек x пен y -тің кез келген мәнінде нақты мәнге ие, яғни берілген функцияның анықталу облысы бүкіл Oxy жазықтығы болады.

2-мысал. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ функциясының анықталу облысын табалық.

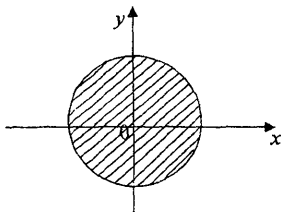
Шешуі. z нақты мәнге ие болуы үшін түбір астындағы өрнек теріс сан болмауы қажет, яғни

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0$$

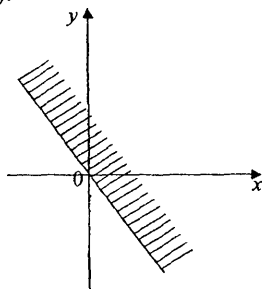
теңсіздігі орындалуы тиіс. Осыдан

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Бұл теңсіздікті қанағаттандыратын $M(x, y)$ нүктелер жиыны центрі координаталар жүйесінің бас нүктесінде жататын, ал радиусы бірге тең дөңгелектің іші мен оның шекарасы (1-сурет).



1-сурет



2-сурет

3-мысал. $z = \ln(x + y)$ функциясының анықталу облысын табалық.

Шешуі. Логарифм ұғымы тек қана оң сандар үшін анықталғандықтан $x + y > 0$ болуы қажет. Бұл теңсіздікті қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орны жарты жазықтықты құрайды (2-сурет). Бұл арада $y = x$ түзуінің нүктелер жиыны функцияның анықталу облысына енбейді.

Біз, бұрын бір айнымалының функциясының графигі жалпы жағдайда жазықтықтағы қандай да бір қисық болатындығымен танысқан едік. Ал, $z = f(x, y)$ екі айнымалының функциясының графигі жалпы жағдайда кеңістіктегі қандай да бір бет болады. Аналитикалық геометрия бөлімінде кейбір екі айнымалы функциялардың графиктері және оларды салудың кима әдісі баяндалған болатын. $z = f(x, y)$ функциясының графигін салу дегеніміз кеңістіктегі денені жазықтықта кескіндеу болғандықтан бір айнымалы функцияның графигіне қарағанда анағұрлым күрделілеу болып келеді. Сондықтан екі айнымалы функцияны зерттегенде және графигін құрғанда деңгей сызығы ұғымы пайдаланылады.

2-анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының мәндері тұрақты C шамасына тең болатын Oxy жазықтығындағы барлық нүктелердің жиыны $z = f(x, y)$ функциясының деңгей сызығы деп аталады.

$f(x, y) = C$ теңдеуі деңгей сызығының теңдеуі, ал C деңгей деп аталады.

4-мысал. $z = x^2 + y^2 - 1$ функциясының графигін сызыңыз.

Шешуі. Z айнымалысы бірден кіші мәндерді қабылдамайды, яғни функция мәндерінің жиыны $[-1; +\infty[$ жартылай интервалы. $z = C, Oxy$ жазықтығына параллель жазықтықтардың теңдеуі. Берілген функцияның $z = C \geq -1$ жазықтықтарымен қимасында пайда болатын сызықтарды анықталық.

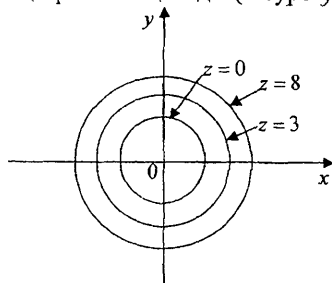
$z = -1$ болса, онда $x^2 + y^2 = 0$, яғни $O(0;0)$ нүктесін анықтайды.

$z = 0$ болса, онда $x^2 + y^2 = 1$, яғни центрі координаталар бас нүктесінде жататын, радиусы бірге тең шеңбер.

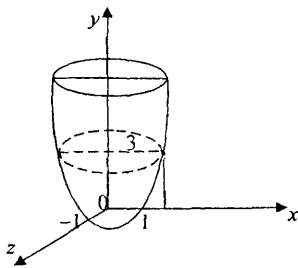
$z = 3$ болса, онда $x^2 + y^2 = 4$, яғни центрі координаталар бас нүктесінде жататын, радиусы екіге тең шеңбер.

$z = 8$ болса, онда $x^2 + y^2 = 9$, яғни центрі координаталар бас нүктесінде жататын, радиусы үшке тең шеңбер.

Осы табылған теңдеулер берілген функция өрнектейтін бетпен сәйкес жазықтықтардың қимасының теңдеулері болады және олар деңгей сызықтарын анықтайды (3-сурет).



3-сурет



4-сурет

Егер деңгей сызықтарын сәйкес жазықтықтарда орналастырсақ, онда $z = x^2 + y^2 - 1$ функциясы параболоид деп аталатын бетті береді (4-сурет).

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

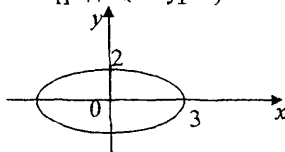
1. Екі айнымалы функциясының анықтамасын беріңіз.
2. Екі айнымалының функциясы қандай әдістермен беріледі?
3. Ашық және тұйық облыстар деп қандай облыстарды атайды?
4. Екі айнымалы функциясының геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.
5. Деңгей сызығының анықтамасын беріңіз.
6. Екі айнымалы шама функциясының графигі қалай сызылады?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ теңсіздікпен берілген x, y айнымалылардың өзгеру

облысы D -ны табыңыз.

Шешуі. D облысы $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ эллипс сызығымен қоршалған жазықтық бөлігінің барлық нүктелерінен тұрады (5-сурет).



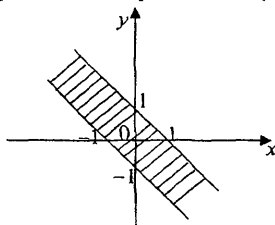
5-сурет

2-мысал. $f(x, y) = \arcsin(x + y)$ функциясының анықталу облысын табыңыз.

Шешуі. $f(x, y)$ -тің анықталу облысы деп оған нақты мән беретін x және y -тің мәндерінің жиынын айтатыны белгілі, онда берілген функцияның анықталу облысы оған кері $\sin(x + y)$ функциясының мәндерінің жиыны болады, яғни

$$-1 \leq x + y \leq 1.$$

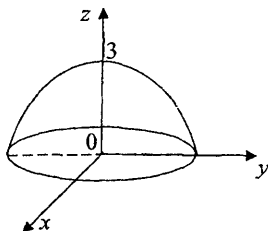
Бұл теңсіздіктерді қанағаттандыратын x және y -тің мәндері $x + y + 1 = 0$ және $x + y - 1 = 0$ түзулері аралығында орналасқан (6-сурет).



6-сурет

3-мысал. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ функциясының графигін сызыңыз.

Шешуі. Берілген функцияны $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ түрге келтіреміз. $O(0, 0, 0)$ мен $M(x, y, z)$ нүктелері арасындағы қашықтықты R -мен белгілесек, онда $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, немесе $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ болатындығы алдыңғы дәрістерден белгілі. Соңғы теңдеу центрі координата бас нүктесінде, радиусы R болатын шардың теңдеуі. Онда $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ центрі координаталар бас нүктесінде, ал радиусы 3-ке тең шардың теңдеуі болып, берілген функция сол шардың жоғарғы жартысын өрнектейді (7-сурет).



7-сурет

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $x^2 + 2y^2 < 4$ теңсіздігін қанағаттандыратын x, y айнымалыларының өзгеру облысы D -ны табыңыз.

2. $1 \leq x - y \leq 3$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын x, y айнымалыларының өзгеру облысы D -ны табыңыз.

3. $f(x, y) = a^2 - x^2 - 2y^2$ функциясының анықталу облысын табыңыз.

4. $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$ функциясының анықталу облысын табыңыз.

5. $f(x, y) = \sqrt{2x} - \frac{3}{\sqrt{y}}$ функциясының анықталу облысын табыңыз.

6. $f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2)$ функциясының анықталу облысын табыңыз.

7. $z = \frac{x^2(1+y)}{1-y}$ функциясының деңгей сызығын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } y = \frac{c - x^2}{c + x^2}.$$

8. z -ке $-2; -1; 1; 2$ мәндерін бере отырып $z = xy$ функциясының деңгей сызығын құрыңыз.

9. $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$ функциясының графигін сызыңыз.

Ескерту! Берілген функциямен өрнектелетін бет $z = \frac{4}{x^2}, y = 0$ қисығының Oz осін айналуынан шыққан айналу денесі болады.

13.2 Екі айнымалы функцияның шегі және үзіліссіздігі

1-анықтама. Радиусы r -ге тең центрі $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде жататын дөңгелектің ішінде орналасқан барлық $M(x, y)$ нүктелердің жиынын $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің r -радиусты аймағы деп атайды.

2-анықтама. Егер мейлінше аз, оң ε саны үшін $r > 0$ саны табылып, $|MM_0| < r$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $M(x, y)$ нүктелер үшін

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x, y)$ функциясының $M(x, y)$ нүктесі $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіне ұмтылғандағы шегі деп аталады және ол былай жазылады:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

$$\text{Мұндағы } |MM_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r.$$

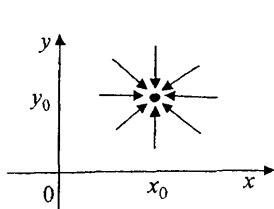
$$\text{Мысалы, } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} \text{ шегін есептелік.}$$

Шешуі. $M(x, y)$ нүктенің $M_0(0, 0)$ нүктеге ұмтылғандағы, немесе r нөлге ұмтылғандағы шекті есептейміз. Мұндағы $r = MM_0$ немесе $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Сонымен,

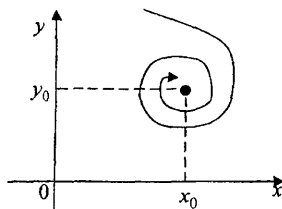
$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + 1} - 1} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2(\sqrt{r^2 + 1} + 1)}{r^2 + 1 - 1} = 2.$$

Екі айнымалы функциясы шегінің анықтамасы бір айнымалы функцияның нүктедегі шегінің анықтамасына ұқсас болғандықтан, олар үшін орындалатын барлық теоремалар екі айнымалы функциясының шегі үшін де орындалады. Дегенмен кейбір айырмашылықтарын да айта кетелік

Егер $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ болса, онда $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ және керісіншесі де орынды болатындығы белгілі. Ал $f(x, y)$ функциясының шегін қарастырғанымызда $M(x, y)$ нүкте $M_0(x_0, y_0)$ нүктеге шексіз көп бағыт бойынша (1-сурет) және күрделі траекториялармен де (2-сурет) ұмтылуы мүмкін.



1-сурет



2-сурет

Анықтама бойынша $M(x, y)$ нүктесі $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіне кез келген бағытта және кез келген траекториямен ұмтылғанда, функцияның бір, тек қана бір A санына ұмтылуы тиіс. Енді $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ шегінің болмайтындығын дәлелдейік. $M(x, y)$ нүктесі $O(0, 0)$ нүктесіне $y = kx$ түзуінің бойымен ұмтылсын. Егер $y = kx$ болса, онда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{1 + k^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Сонымен, шектің мәні түзудің бұрыштық коэффициентіне тәуелді екен. Мысалы $k = 1$ болса, шек $\frac{1}{2}$ -ге тең; $k = 2$ тең болса, шек $\frac{2}{5}$ -ге тең; т.с.с.

Яғни $M(x, y)$ нүктесі $O(0, 0)$ нүктесіне $y = kx$ түзуінің бойымен ұмтылса, шек те әртүрлі мәндерді қабылдайды екен, онда берілген функцияның $O(0, 0)$ нүктедегі шегі жоқ.

Енді функцияның нүктеде үзіліссіздігі ұғымын берелік.

Айталық $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі $f(x, y)$ функциясының анықталу облысында жатсын.

3-анықтама. Егер

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (1)$$

теңдігі орындалса, онда $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктеде үзіліссіз деп аталады. Мұндағы $M(x, y)$ нүктесі $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіне $f(x, y)$ функциясының анықталу облысынан шықпайтын кез келген жолмен ұмтылады.

4-анықтама. Егер қандайда бір $N_0(x_0, y_0)$ нүктеде (1) теңдік орындалмаса, онда $N_0(x_0, y_0)$ нүктесі $f(x, y)$ функциясының үзіліс нүктесі деп аталады. (1) теңдік мынадай жағдайларда орындалмауы мүмкін:

1) $f(x, y)$ функциясы $N_0(x_0, y_0)$ нүктенің қандай да бір аймағының барлық нүктелерінде анықталғанымен $N_0(x_0, y_0)$ нүктенің өзінде анықталмаған болса;

2) $f(x, y)$ функциясы $N_0(x_0, y_0)$ нүктенің қандай да бір аймағының барлық нүктелерінде анықталғанымен

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \quad (2)$$

шегі жоқ болса;

3) $f(x, y)$ функциясы $N_0(x_0, y_0)$ нүктенің қандай да бір маңайының барлық нүктелерінде анықталған және (2) шек бар, бірақ

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0).$$

13.3 Екі айнымалы функцияның дербес және толық өсімшесі

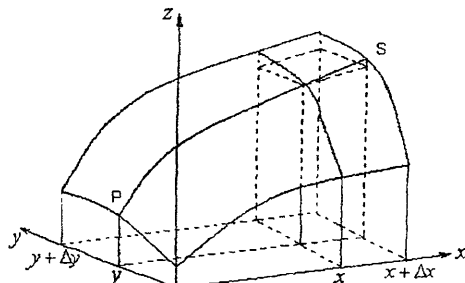
$z = f(x, y)$ беттің $y = const$ жазықтығымен қимасы PS қисығын қарастырайық (3-сурет).

PS қисығының бойында $z = f(x, y)$ функциясы тек қана x -тің функциясы болады, себебі u тұрақты мән қабылдайды.

Айнымалы x -ке Δx өсімше берелік. Онда z -те өсімше алады, оны z -тің x бойынша дербес өсімшесі деп атайды да $\Delta_x z$ пен белгілейді. Сонда:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Осыған ұқсас, $z = f(x, y)$ беттің $x = const$ жазықтығымен қимасын қарастырып, y -ке өсімше берсек, z -те y -ке тәуелді өсімше алады, оны z -тің y бойынша дербес өсімшесі деп атайды да $\Delta_y z$ пен белгілейді.



3-сурет

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Егер x -ке Δx өсімше, y -ке Δy өсімше берсек, онда функция Δz толық өсімшесін алады, яғни

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Ескерту! Жалпы жағдайда $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Жазықтықтағы нүкте аймағының анықтамасын беріңіз.
2. Екі айнымалы функциясының шегінің анықтамасын беріңіз.
3. Екі айнымалы функциясының шегінің бір айнымалы функциясының шегінен қандай айырмашылығы бар?
4. Екі айнымалы функциясының үзіліссіздігінің анықтамасын беріңіз.
5. Қандай жағдайларда $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктеде үзіліске ие?
6. Екі айнымалы функциясының дербес өсімшелерінің формуласын және олардың геометриялық мағынасын көрсетіңіз.
7. Толық өсімшенің формуласын жазыңыз, суретте көрсетіңіз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$ шегін есептейміз.

$$\text{Шешуі. } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} x \cdot \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} = \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} = 2.$$

2-мысал. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x+y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{1+\frac{y}{x}}$ шегі жоқ, себебі, $\frac{y}{x}$ қатынастың $M(x, y)$

нүктесі $M_0(0;0)$ нүктесіне ұмтылғандағы шегі болмайды. Шынында да, $M(x, y)$ нүктесі $M_0(0;0)$ нүктесіне $y=kx$ түзуінің бойымен ұмтылса, онда $\frac{y}{x} = k$, яғни шек түзудің бұрыштық коэффициентіне тәуелді болып, ол түрлі мәндерге ие.

3-мысал. $z = \begin{cases} 5-x-y, & \text{егер } x \neq 1, y \neq 2 \\ 1, & \text{егер } x=1, y=2 \end{cases}$

функциясының $M_0(1;2)$ нүктесінде үзілісті екендігін дәлелдейік.

Берілген функция $M_0(1;2)$ нүктесінде және оның маңайындағы барлық нүктелерде анықталған. Бірақ, функцияның $M(x, y)$ нүктесі $M_0(1;2)$ нүктесіне ұмтылғандағы шегі оның M_0 нүктесіндегі мәніне тең емес, яғни $\lim_{M \rightarrow M_0} z = 2$; $z(M_0) = 1$.

Сонымен z функциясы, $M_0(1;2)$ нүктесінде үзілісті.

$f(x, y)$ функциясы шексіз көп нүктелерде де үзілісті болуы мүмкін. Егер олар тұтас бір сызықты құраса, онда ол функцияның үзіліс сызығы деп аталады. Мысалы, $z = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ функциясы $x^2 + y^2 = 1$ шеңберінің әрбір нүктесінде үзілісті, сондықтан бұл шеңбер функцияның үзіліс сызығы болады.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі шектерді табыңыздар.

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy}; \quad 2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sin(xy)};$$

$$3. z = \frac{10x}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \text{ функциясының үзіліс нүктесін табыңыз.}$$

$$4. z = \frac{3y}{2x-y} \text{ функциясының үзіліс нүктесін табыңыз.}$$

$$5. z = \frac{x^2}{x^2 - 2y^2 - 4} \text{ функциясының үзіліс нүктесін табыңыз.}$$

13.4 Екі айнымалы функцияның дербес туындылары

1-анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының x бойынша дербес туындысы деп оның x бойынша дербес өсімшесі $\Delta_x z$ -тің Δx өсімшеге қатынасының Δx нөлге ұмтылғандағы шегін айтады және ол былай белгіленеді:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, f'_x(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, z'_x.$$

Сонымен, анықтама бойынша ,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Осы сияқты z функциясының y бойынша дербес туындысы төмендегідей табылады:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Дербес туындының анықтамасынан, оны есептеудің жай туындыны есептеуден ешқандай айырмашылығы жоқ екені көрініп тұр. Басқаша айтканда, $\frac{\partial z}{\partial x}$ туындыны тауып болғанша y айнымалысын тұрақты деп есептесек, $z = f(x, y)$ функциясы тек қана x -тің функциясы, ал x айнымалысын тұрақты деп қарасақ, онда $z = f(x, y)$ функциясы тек қана y -тің функциясы болады. Олай болса дербес туындыларды табу үшін бір айнымалының функциясын дифференциалдау ережелері пайдаланылады. Төмендегі функциялардың дербес туындыларын табайық:

1-мысал. $z = x^2 - 3xy + 4xy^2$ функциясының дербес туындыларын табыңыз.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y + 4y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 8yx.$

2-мысал. $z = \sqrt{x + 3y}.$

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2\sqrt{x + 3y}}.$

3-мысал. $z = \arctg \frac{y}{x}.$

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}.$

13.5 Екі айнымалы функцияның толық дифференциалы

Бір айнымалының функциясының дифференциалы функция өсімшесінің бас бөлігі ретінде немесе Δx -ке сызықты тәуелді қосылғыш ретінде анықталғаны белгілі. Сол сияқты екі айнымалының функциясының дифференциалы да анықталады.

$z = f(x, y)$ функциясының толық өсімшесі анықтама бойынша

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (1)$$

$f(x, y)$ функциясы қарастырылып отырған (x, y) нүктеде үзіліссіз дербес туындыларға ие болсын деп ұйғарайық. (1) теңдікті төмендегіше түрлендіреміз.

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \quad (2)$$

Квадрат жақшалардағы өрнектерге Лагранж теоремасын қолданаық

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x, \quad (3)$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y, \quad (4)$$

Мұндағы $x < \bar{x} < x + \Delta x$, $y < \bar{y} < y + \Delta y$.

(3), (4) теңдіктерді (2) теңдікке қойсақ

$$\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \Delta y. \quad (5)$$

Дербес туындылар үзіліссіз болғандықтан

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Соңғы теңдіктерді төмендегіше жазуға болады:

$$\frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \varepsilon_1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \varepsilon_2. \quad (7)$$

(6), (7) теңдіктерді есепке алып (5) теңдікті төмендегіше жазамыз.

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y. \quad (8)$$

Мұндағы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ -лер Δx және Δy -тер нөлге ұмтылғанда нөлге ұмтылатын шексіз аз шамалар. (8) теңдіктегі соңғы екі қосылғыш $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ шамасына қарағанда жоғары ретті шексіз аз шамалар.

Шынында да, егер $\rho \rightarrow 0$, онда $\frac{\varepsilon_1 \Delta x}{\rho} \rightarrow 0$, $\frac{\varepsilon_2 \Delta y}{\rho} \rightarrow 0$, себебі $\left| \frac{\Delta x}{\rho} \right| \leq 1$, $\left| \frac{\Delta y}{\rho} \right| \leq 1$,

ал $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ -лер шексіз аз шамалар.

1-анықтама. Егер $z = f(x, y)$ функциясының қандайда бір $M(x, y)$ нүктесіндегі өсімшесі (8) формула түрінде өрнектелетін болса, онда $f(x, y)$ функциясы осы нүктеде дифференциалданатын функция деп аталады.

2-анықтама. Функцияның дербес туындыларының сәйкес тәуелсіз айнымалыларының өсімшелеріне көбейтінділерінің қосындысы, яғни

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y, \quad (9)$$

$z = f(x, y)$ функциясының толық дифференциалы деп аталады.

Функцияның туындысы сияқты оның дифференциалының мәндері де әр бір нүктеде әртүрлі.

Мысалы. $z = \frac{x}{y}$ функциясының толық дифференциалының: а) (0;2) ә) (1;1)

нүктелердегі мәндерін табайық:

Шешуі:

$$\text{а) } dz \Big|_{\substack{x=0 \\ y=2}} = \left(\frac{1}{y} \cdot \Delta x - \frac{x}{y^2} \Delta y \right)_{\substack{x=0 \\ y=2}} = \frac{1}{2} \Delta x; \quad \text{ә) } dz \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \left(\frac{1}{y} \cdot \Delta x - \frac{x}{y^2} \Delta y \right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \Delta x - \Delta y.$$

Тәуелсіз айнымалылардың $\Delta x, \Delta y$ өсімшелерін олардың дифференциалдары деп атап, сәйкесінше dx, dy -тар мен белгілесек, онда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (10)$$

Сонымен, егер $z = f(x, y)$ функциясы үзіліссіз дербес туындыларға ие болса, онда ол $M(x, y)$ нүктесінде дифференциалданады және оның толық дифференциалы (10) формуламен өрнектеледі.

Функцияның толық дифференциалы жуық есептеулерде мынадай алгоритмде қолданылады:

1) берілген өрнек $f(x, y)$ функциясының $P(a, b)$ нүктесіндегі жуық мәні ретінде өрнектеледі;

2) $P(a, b)$ нүктесіне жақын және $f(x_0, y_0)$ -ді есептеу жеңіл болатын $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі таңдалынады;

3) $f(x_0, y_0)$ мәні есептеледі;

4) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$ дербес туындылары табылады;

5) табылған мәндер

$$f(a, b) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(a - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(b - y_0) \quad (11)$$

жуық теңдігі арқылы есептеледі.

Мысалы. $\arctg\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right)$ мәнін жуықтап есептелік.

Шешуі. 1) $f(x, y) = \arctg\left(\frac{x}{y} - 1\right)$ функциясын қарастырамыз, $a = 1,97$;

$b = 1,02$.

2) $x_0 = 2, y_0 = 1$ нүктесін таңдаймыз;

3) $f(x_0, y_0) = f(2, 1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$;

4) $f'_x(x, y) = \frac{y}{y^2 + (x - y)^2}$; $f'_y(x, y) = -\frac{x}{y^2 + (x - y)^2}$;

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{2}; f'_y(x_0, y_0) = -1;$$

$a - x_0 = -0.03; b - y_0 = 0.02$. Онда (11)-формула бойынша :

$$5) \arctg\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right) \approx \arctg 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,03 - 0,02 = \frac{\pi}{4} - 0,015 - 0,02 \approx 0,75.$$

Функцияның толық дифференциалы қателіктерді бағалауда да қолданылады.

Айталық u айнымалысы x, y айнымалылардың функциясы болсын.

$$u = f(x, y)$$

x, y шамаларды анықтағанда $\Delta x, \Delta y$ қателіктер болған болсын. Онда аргументтердің жуық мәндерімен есептелген u -дың мәні

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

қателікпен анықталады. Енді сол қателікті бағалайық. $\Delta x, \Delta y$ -тердің кіші мәндерінде толық өсімішені толық дифференциалмен жуық алмастыруға болады:

$$\Delta u \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y.$$

Мұндағы дербес туындылардың мәндерімен $\Delta x, \Delta y$ -тердің мәндерінің қателіктері оң немесе теріс сандар болуы мүмкін. Онда $|\Delta u|$ -дың бағасы үшін келесі теңсіздікті жазамыз.

$$|\Delta u| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \cdot |\Delta x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \cdot |\Delta y|.$$

Егер $|\Delta_x u|, |\Delta_y u|, |\Delta_{xy} u|$ -лар мен абсолюттік қателіктердің максимумдарын яғни шектік мәндерін белгілесек, онда былай жазуға болады

$$|\Delta_x u| \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta y|. \quad (12)$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. $f(x, y)$ функциясының x бойынша дербес туындысының анықтамасын беріңіз.

2. $f(x, y)$ функциясының y бойынша дербес туындысының анықтамасын беріңіз.

3. $f(x, y)$ функциясының дербес туындылары қандай ережелер арқылы табылады?

4. $f(x, y)$ функциясының толық дифференциалының анықтамасын беріңіз.

5. $f(x, y)$ функциясының толық дифференциалының жуық есептеулерде қолданылуы алгоритмін баяндаңыз.

6. Есептеулердегі қателіктер қалай бағаланады?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $z = x^{y^2}$ функциясының дербес туындыларын табыңыз.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cdot x^{y^2-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^{y^2} \cdot \ln x \cdot 2y$.

2-мысал. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ берілген. $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot y + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot x = 0$ теңдігін дәлелдеңіз.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Орындарына қоямыз:

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$$

3-мысал. $z = \ln(xy)$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

Шешуі. Дербес туындыларын табамыз.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{y}.$$

Дербес туындыларын сәйкес аргументтерінің дифференциалдарына көбейтіп толық дифференциалын табамыз.

$$dz = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}.$$

4-мысал. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері $a = 7,5$ см, $b = 18$ см, $0,1$ дәлдікпен табылған; гипотенузасын есептегенде шығатын абсолюттік қателікті анықтаңыз.

Шешуі. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; (12) формуланы пайдаланамыз. $\Delta_m x = \Delta_m y = 0,1$ (есептің шарты бойынша).

$$C'_a = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; C'_b = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$|\Delta_m C| = \left(\frac{7,5}{\sqrt{7,5^2 + 18^2}} + \frac{18}{\sqrt{7,5^2 + 18^2}} \right) \cdot 0,1 = \frac{0,75}{19,5} + \frac{1,8}{19,5} = 0,13.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі мысалдардағы функциялардың дербес туындыларын табыңыз.

1. $z = (5x^3y^2 + 1)^3$, 2. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$, 3. $z = \arcsin \frac{x}{y}$,

4. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 5. $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$, 6. $z = (1 + x^2)^y$,

$$7. z = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ функциясының } \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y = 0 \text{ теңдеуді қанағаттандыра-}$$

тындығын көрсетіңіз.

$$8. z = y \ln 2x \text{ функциясының толық дифференциалын табыңыз.}$$

$$9. z = \sin^2 x \cdot \cos^2 y \text{ функциясының толық дифференциалын табыңыз.}$$

$$10. 1,94^2 \cdot e^{0,12} \text{ өрнегінің жуық мәнін есептеңіз } (x_0 = 2, y_0 = 0, f(x, y) = x^2 e^y \text{ деп алыңыз}).$$

13.6 Күрделі және айқындалмаған функцияларды дифференциалдау

Екі айнымалының $z = f(x, y)$ функциясы берілсін. Бұл функцияның аргументтері x пен y тәуелсіз айнымалы t -ның функциялары болсын, яғни $x = x(t)$, $y = y(t)$. Онда z бір тәуілсіз айнымалы t -ның күрделі функциясы болады.

Осы z -тің t бойынша туындысы, яғни $\frac{dz}{dt}$ -ны табу есебін қарастырайық.

Бұл есепті шешу үшін $x(t)$, $y(t)$ функцияларының t нүктесінде туындылары бар болсын, ал $z = f(x, y)$ функциясы сәйкес $M(x, y)$ нүктесінде дифференциалданатын болсын деп ұйғарамыз.

t -ға Δt өсімше береміз. Онда x және y айнымалылары да сәйкес Δx және Δy өсімшелерін алады, ал $z = f(x, y)$ функциясы Δz өсімшесін алады. z функциясы дифференциалданатын болғандықтан оның толық өсімшесі Δz -ті төмендегіше жазуға болады:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y), \quad (1)$$

$$\text{мұнда } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\rho} = 0, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

(1) формуланың екі жағын Δt -ға бөліп, Δt -ны нөлге ұмтылдырып шекке көшеміз.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Delta t}. \quad (2)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho}{\Delta t}.$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}.$$

x және y функциялары Δt бойынша дифференциалданатын болғандықтан, олар үзіліссіз болады, онда $\Delta t \rightarrow 0$ да $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$. Олай болса,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\rho} = 0.$$

Сонымен,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Delta t} = 0 \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 0.$$

Соңғы теңдікті есепке алсақ (2) формула төмендегіше жазылады.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (3)$$

(3) формуланы t -ның күрделі функциясы z -тен t бойынша алынған туындының формуласы деп атайды.

Енді $z = f(x, y)$ функциясында $y = y(x)$ болған жағдайын қарастырайық. Бұл жағдайда айнымалы z тек қана бір x -тің функциясы болады $z = f(x, y(x))$. Сондықтан (3) формула бұл жағдайда былай жазылады

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 \text{ болғандықтан,}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (4)$$

(4) формуланың сол жағында да, оң жағында да z -тен x бойынша алынған туындылар тұр. Мұндағы $\frac{\partial z}{\partial x}$ -екі айнымалының функциясы $z = f(x, y)$ -тен x бойынша алынған дербес туынды, яғни y -ті уақытша тұрақты деп қабылдап x бойынша алынған туынды, ал сол жағындағы $\frac{dz}{dx}$ -бір айнымалының күрделі функциясы $z = f(x, y(x))$ -тен алынған туындының мәнін береді. Сондықтан (4) формуламен анықталатын туындыны толық туынды деп атайды.

Енді $z = F(u, \vartheta)$ функциясындағы u және ϑ -лар тәуелсіз айнымалы x және y -тердің функциясы болсын:

$$u = \varphi(x, y), \quad \vartheta = \psi(x, y).$$

Бұл жағдайда z тәуелсіз айнымалы x және y -тердің күрделі функциясы болады (u мен ϑ - аралық аргументтер).

(3) формуланы қолданып $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларды табамыз. Ол үшін (3) формуладағы $\frac{dz}{dt}, \frac{dx}{dt}$ және $\frac{dy}{dt}$ -лардың орнына $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}$ және $\frac{\partial g}{\partial x}$ дербес туындыларды аламыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}. \quad (5)$$

Осыған ұқсас $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туынды да табылады:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}. \quad (6)$$

Енді айқындалмаған функцияны дифференциалдау ережесін қарастырайық.

Кез келген

$$F(x, y) = 0 \quad (7)$$

теңдеуі айқындалмаған функцияны анықтай бермейтіндігі жөнінде «Математика І» бөлімінде нақты мысалдармен талдаған едік. $F(x, y)$ функциясы қандай шарттарды қанағаттандырғанда (7) теңдеуі жалғыз айқындалмаған функцияны анықтайды деген заңды сұраққа келесі теорема жауап береді.

Теорема. Егер $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$ және $F'_y(x, y)$ функциялары қандай да бір $M_0(x_0, y_0)$ нүктенің аймағында анықталған және үзіліссіз, ал осы нүктеде $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ болса, онда (7) теңдеу x_0 -дің аймағында үзіліссіз, дифференциалданатын жалғыз $y = y(x)$ айқындалмаған функцияны анықтайды және y -тен x бойынша алынған туынды төмендегі формула арқылы табылады

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (8)$$

Дәлелдеуі. $F(x, y)$ функциясында $y = y(x)$ болғандықтан (4) формуланы қолданамыз

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

(7) бойынша $F(x, y)$ функциясы нөлге тепе-тең болғандықтан оның толық туындысы да нөлге тең болады, яғни

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Осыдан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

(8) теңдік дәлелденді.

Енді $F(x, y, z) = 0$ теңдеуін қарастыралық. Егер $\frac{\partial z}{\partial x}$ дербес туындысын тапқымыз келсе онда y -ті тұрақты деп есептейміз. Бұл жағдайда (8) формуланы қолдануға болады, яғни

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (9)$$

Осы сияқты

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (10)$$

(9) және (10) теңдіктерде $F'_z(x, y, z) \neq 0$ деп ұйғарылады.

13.7 Жоғары ретті туындылар

$z = f(x, y)$ екі айнымалының функциясы берілсін. $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ дербес туындылар жалпы жағдайда x және y айнымалылардың функциялары болуы мүмкін. Сондықтан, олардың да дербес туындылары болуы мүмкін. Бұл жағдайда $z = f(x, y)$ функциясының екінші ретті дербес туындылары төртеу болады, яғни

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Бұл арада мынандай заңды сұрақ туады. Дифференциалдау нәтижесі дифференциалдау ретіне тәуелді ме? Басқаша айтқанда $f''_{xy}(x, y)$ және $f''_{yx}(x, y)$ туындылары өзара тең бе, жоқ па?

Бұл сұраққа төмендегі теорема жауап береді.

Теорема. Егер $z = f(x, y)$ функциясы және оның $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ дербес туындылары $M(x, y)$ нүктесінде және оның қандай да бір аймағында анықталған және үзіліссіз болса, онда бұл нүктеде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Дәлелдеуін тізімде келтірілген әдебиеттерден оқып алуды студенттердің өздеріне ұсынамыз.

Екінші ретті дербес туындыларды дифференциалдау арқылы үшінші ретті дербес туындыларды аламыз, олардың саны 8-ге тең, яғни

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Осылайша $(n-1)$ -ретті дербес туындыларды дифференциалдау арқылы n -ретті туындыларды алуға болады

13.8 Екі айнымалының функциясы үшін Тейлор формуласы

$z = f(x, y)$ функциясы және оның $(n+1)$ -ретке дейінгі дербес туындылары қандайда бір $M(a, b)$ нүктенің аймағында үзіліссіз болсын. Онда бір айнымалының функциясы үшін Тейлор формуласына ұқсас екі айнымалының функциясын $(x-a)$ мен $(y-b)$ айырмаларының дәрежелері және қандайда бір қалдық мүшенің қосындысынан тұратын n -ретті көпмүшелік түрінде өрнектеуге болады. Осы айтылғандарды $n=2$ болған жағдайы үшін көрсетейік. Бұл жағдайда

$$f(x, y) = A_0 + D(x-a) + E(y-b) + \frac{1}{2!} [A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2] + R_2, \quad (1)$$

болады, мұндағы A_0, D, E, A, B, C -лар x және y -тен тәуелсіз коэффициенттер, ал R_2 -қалдық мүше.

$f(x, y)$ функциясында x -ті тұрақты десек, онда бір ғана y -тің функциясы үшін Тейлор формуласы төмендегідей болады

$$f(x, y) = f(x, b) + \frac{y-b}{1} \cdot f'_y(x, b) + \frac{(y-b)^2}{1 \cdot 2} f''_{yy}(x, b) + \frac{(y-b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{yyy}(x, \eta_1), \quad (2)$$

мұндағы $\eta_1 = b + \theta_1(y-b)$, $0 < \theta_1 < 1$. $f(x, b)$, $f'_y(x, b)$, $f''_{yy}(x, b)$ функцияларды $(x-a)$ -ның дәрежелері бойынша Тейлор формуласына жіктейміз.

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{x-a}{1} \cdot f'_x(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''_{xx}(a, b) + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b), \quad (3)$$

мұндағы $\xi_1 = a + \theta_2(x-a)$, $0 < \theta_2 < 1$;

$$f'_y(x, b) = f'_y(a, b) + \frac{x-a}{1} \cdot f''_{yx}(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2, b), \quad (4)$$

мұндағы $\xi_2 = a + \theta_3(x-a)$, $0 < \theta_3 < 1$;

$$f''_{yy}(x, b) = f''_{yy}(a, b) + \frac{x-a}{1} f'''_{yyx}(\xi_3, b), \quad (5)$$

мұндағы $\xi_3 = a + \theta_4(x-a)$, $0 < \theta_4 < 1$;

(3), (4), (5) өрнектерді (2) формулаға қоямыз.

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{x-a}{1} \cdot f'_x(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''_{xx}(a, b) + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b) +$$

$$+ \frac{y-b}{1} \cdot \left[f'_y(x, b) + \frac{x-a}{1} \cdot f''_{yx}(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2, b) \right] +$$

$$\frac{(y-b)^2}{1 \cdot 2} \cdot \left[f''_{yy}(a, b) + \frac{x-a}{1} \cdot f'''_{yyx}(\xi_3, b) \right] + \frac{(y-b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{yyy}(x, \eta_1).$$

Соңғы теңдіктің қосылғыштарын (1) формулаға ұқсас орналастырамыз:

$$f(x, y) = f(a, b) + (x-a)f'_x(a, b) + (y-b)f'_y(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[(x-a)^2 f''_{xx} + 2(x-a)(y-b)f''_{xy} + (y-b)^2 f''_{yy}(a, b) \right] + R_2 \quad (6)$$

(6) формула $n=2$ жағдайы үшін Тейлор формуласы деп аталады.

Мұндағы

$$R_2 = \left[\frac{1}{3!} (x-a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1, b) + 3(x-a)^2 (y-b) f'''_{xxy}(\xi_2, b) + 3(x-a)(y-b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3, b) + \right.$$

$$\left. + (y-b)^3 f'''_{yyy}(a, \eta_1) \right] \text{ қалдық мүше деп аталады. } n\text{-нің кез келген мәні үшін}$$

Тейлор формуласын осылайша анықтауға болады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Күрделі функцияның толық туындысын табу формуласын жазыңыз.
2. Күрделі функцияның дербес туындыларының формулаларын жазыңыз.
3. Қандай шарттар орындалғанда жалғыз айқындалмаған функция анықталады?

4. Айқындалмаған функцияның туындысын табу формуласын жазыңыз.

5. Екінші және үшінші ретті дербес туындылар қалай табылады?

6. Екі айнымалының функциясы үшін Тейлор формуласын жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $z = y^x$, $x = t^2$; $y = \cos t$ функциясы берілген. z -тен t бойынша алынған толық туындыны табыңыз.

Шешуі. (3) формуланы қолданамыз.

$$\frac{dz}{dt} = (y^x)'_x \cdot \frac{dx}{dt} + (y^x)'_y \cdot \frac{dy}{dt} = y^x \cdot \ln y \cdot (t^2)' + xy^{x-1} \cdot (\cos t)' =$$

$$= y^x \ln y \cdot 2t - xy^{x-1} \sin t = y^x (2t \ln |\cos t| - t^2 \lg t) = \cos^2 t \cdot (2 \ln |\cos t| - t \lg t) \cdot t.$$

2-мысал. $z = \arctg \frac{u}{v}$, $u = x + y$, $v = x - y$ берілген.

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x-y}{x^2+y^2} \text{ теңдіктің дұрыстығын тексеріңіз.}$$

Шешуі. (5), (6) формулаларды қолданамыз.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \cdot \frac{1}{v} = \frac{v}{u^2 + v^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) = -\frac{u}{u^2 + v^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{v}{u^2 + v^2} - \frac{u}{u^2 + v^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{v}{u^2 + v^2} + \frac{u}{u^2 + v^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2v}{u^2 + v^2} = \frac{2(x-y)}{x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2} = \frac{x-y}{x^2 + y^2}.$$

Сонымен теңдік дұрыс екен.

3-мысал. $2 \sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$ айқындалмаған функцияның

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \text{ теңдікті қанағаттандыратынын тексеріңіз.}$$

Шешуі. Мұнда $F(x, y, z) = 2 \sin(x + 2y - 3z) - x - 2y + 3z$. Дербес туындысын табамыз.

$$F'_x(x, y, z) = 2 \cos(x + 2y - 3z) - 1$$

$$F'_y(x, y, z) = 2 \cos(x + 2y - 3z) \cdot 2 - 2$$

$$F'_z(x, y, z) = 2 \cos(x + 2y - 3z) \cdot (-3) + 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{2 \cos(x + 2y - 3z) - 1}{-3(2 \cos(x + 2y - 3z) - 1)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{2(2 \cos(x + 2y - 3z) - 1)}{-3(2 \cos(x + 2y - 3z) - 1)} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Демек, берілген теңдікті қанағаттандырады екен.

4-мысал. $z = \cos\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$ функциясының $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = -\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 z$

теңдікті қанағаттандыратынын тексеріңіз.

Шешуі. Бірінші және екінші ретті туындыларын табамыз.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \frac{1}{a}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \frac{1}{b}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \frac{1}{a^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \frac{1}{ab}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\cos\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \frac{1}{b^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\cos\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^2}\right) = -\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 z.$$

Демек, берілген функция берілген теңдікті қанағаттандырады екен.

5-мысал. $f(x, y) = e^x \sin y$ функциясын $(0, 0)$ нүктенің аймағында Тейлор формуласы бойынша жіктеңіз ($n = 3$ болсын.)

Шешуі. $n = 3$ болған жағдай үшін $O(0, 0)$ нүктенің аймағында Тейлор формуласы төмендегіше болады:

$$f(x, y) = f(0, 0) + xf'_x(0, 0) + yf'_y(0, 0) + \frac{1}{2!}(x^2 f''_{xx}(0, 0) + 2xy f''_{xy}(0, 0) + y^2 f''_{yy}(0, 0)) + \\ + \frac{1}{3!}(x^3 f'''_{xxx}(0, 0) + 3x^2 y f'''_{xxy}(0, 0) + 3xy^2 f'''_{xyy}(0, 0) + y^3 f'''_{yyy}(0, 0))$$

Берілген функциядан 1, 2, 3-ретті дербес туындыларды алып, олардағы x және y -тердің орнына $(0, 0)$ -ді қойсақ төмендегілер шығады:

$$f(0, 0) = 0, f'_x(0, 0) = f''_{xx}(0, 0) = f''_{yy}(0, 0) = f'''_{xxx}(0, 0) = f'''_{yyy}(0, 0) = 0; \\ f'_y(0, 0) = f''_{xy}(0, 0) = f'''_{xxy}(0, 0) = 1; f'''_{yyy}(0, 0) = -1;$$

Осы мәндерді Тейлор формуласына қойып, берілген функцияның төмендегі жіктелуін аламыз:

$$e^x \sin y = y + xy + \frac{1}{3!}(3x^2 y - y^3)$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $z = \ln(1 - y^4)$, $y = \sqrt{\sin x}$ функциясы берілген. $\frac{dz}{dx}$ -ті табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{dz}{dx} = -2tgx.$$

2. $z = \frac{1}{2} \ln \frac{u}{v}$, $u = tg^2 x$, $v = ctg^2 x$ функциясы берілген. $\frac{dz}{dx}$ - ті табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{dz}{dx} = \frac{4}{\sin 2x}.$$

3. $z = \arcsin(u + v)$, $u = \cos \alpha \cdot \sin x$, $v = \sin \alpha \cdot \cos x$ берілген. $\frac{dz}{dx}$ -ті табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{dz}{dx} = \pm 1.$$

4. $z = \frac{x^2}{y}$, $x = u - 2v$, $y = v + 2u$ функциясы берілген. $\frac{dz}{dx}$ және $\frac{dz}{dv}$ - ларды табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{dz}{du} = \frac{2x}{y} \left(1 - \frac{x}{y} \right); \frac{dz}{dv} = -\frac{x}{y} \left(x + \frac{x}{y} \right).$$

5. $y^x = x^y$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{dy}{dx} = \frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{xy^{x-1} - x^y \ln x}.$$

6. $u - vgw = 0$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

Жауабы: $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\cos^2 aw}{av}$; $\frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{\sin 2aw}{2av}$.

7. $z = \arctg(2x - y)$ функциясының $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ теңдеуді

қанағаттандыратынын тексеріңіз.

8. $z = 2 \cos^2\left(x - \frac{t}{2}\right)$ функциясының $2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = 0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

9. $z = e^{\frac{x}{y}}$ функциясының $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

10. $f(x, y) = e^{x+y}$ функциясын $(1, -1)$ нүктенің аймағында Тейлор формуласы бойынша жіктеңіз ($n = 3$ деп алыңыз).

Жауабы: $1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!}$.

13.9 Бағыт бойынша алынған туынды. Градиент

$z = f(x, y)$ функциясының анықталу обылысында жататын $M_0(x, y)$ нүктесін және бағыттаушы косинустары $\cos \alpha, \cos \beta = \sin \alpha$ болатын l түзуін қарастырайық. l бағыты бойынша $M_0(x, y)$ нүктесі $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нүктесіне жылжыса, онда $z = f(x, y)$ функциясы $\Delta_l z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ өсімшесін алады. Бұл өсімше $f(x, y)$ функциясының l бағыт бойынша өсімшесі деп аталады.

$$\Delta x = \Delta l \cos \alpha, \quad \Delta y = \Delta l \cos \beta \quad (1)$$

болғандықтан

$$\Delta_l z = f(x + \Delta l \cos \alpha, y + \Delta l \cos \beta) - f(x, y) \quad (2)$$

1-анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының l бағыт бойынша өсімшесі $\Delta_l z$ - тің Δl шамасына қатынасының Δl нөлге ұмтылғандағы шегі (егер ол бар болса), яғни $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}$, $z = f(x, y)$ функциясының l бағыты бойынша

алынғын туындысы деп аталады және ол $\frac{\partial z}{\partial l}$ немесе z'_l арқылы белгіленеді.

$z'_l = \frac{\partial z}{\partial l}$ туындысы функцияның l бағыты бойыншы өзгеру жылдамдығын

сипаттайды. Бұрын қарастырылған $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындылары

$z = f(x, y)$ функциясының Ox және Oy өстеріне параллель бағыттары бойынша туындылары болады.

$\Delta_l z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$ жуық теңдігін және (1) теңдіктерді ескерсек

$$\Delta_l z \approx \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta \right) \Delta l.$$

Осыдан $\Delta x \rightarrow 0$ және $\Delta y \rightarrow 0$ шекке көшсек

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta \quad (3)$$

теңдігі шығады, (3)-формула $z = f(x, y)$ функциясының l бағыты бойынша алынған туындысы деп аталады.

1-мысал. $z = x^2 + y^2$ функциясының $\vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ бағыты бойынша алынған туындысының $M(1;1)$ нүктедегі мәнін табыңыз.

Шешуі. $\vec{l}$ -дің бағыттаушы косинустарын табамыз.

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5}; \quad \cos \beta = \frac{3}{5}.$$

(3) формула бойынша

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{3}{5} = 2x \cdot \frac{4}{5} + 2y \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}(4x + 3y).$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{2}{5}(4 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = \frac{14}{5}.$$

2-анықтама. Координаталары $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ болатын ∇z вектор $z = f(x, y)$

функциясының градиенті деп аталады да, былай жазылады

$$\text{grad} z = \nabla z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}.$$

Теорема. $z = f(x, y)$ функциясынан $\vec{l}$ бағыты бойынша алынған туынды оның градиентінің $\vec{l}$ бағытындағы проекциясына тең.

Дәлелдеуі. $\vec{l} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta$, ∇z векторымен $\vec{l}$ векторының скаляр көбейтіндісін табамыз.

$$\nabla z \cdot \vec{l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta, \text{ немесе } \nabla z \cdot \vec{l} = \frac{\partial z}{\partial l}.$$

∇z пен $\vec{l}$ арасындағы бұрышты φ мен белгілесек:

$$|\nabla z| \cdot |\vec{l}| \cos \varphi = |\nabla z| \cos \varphi = \frac{\partial z}{\partial l};$$

немесе

$$\text{Pr}_{\vec{l}} \nabla z = \frac{\partial z}{\partial l}.$$

Егер векторлар бірдей бағытталса, онда скалярлық көбейтінді ең үлкен мән қабылдайтыны белгілі. Сондықтан функцияның берілген нүктедегі градиентінің бағыты оның осы нүктедегі өзгеру жылдамдығының ең үлкен мәніне тең.

$z = f(x, y)$ функциясының градиентіне перпендикуляр бағыт бойынша алынған туынды нөлге тең.

Егер дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясының $M(x, y)$ нүктесіндегі градиентінің модулі нөлге тең болмаса, онда ол осы нүкте арқылы өтетін деңгей сызығына перпендикуляр болады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. $f(x, y)$ функциясының l бағыты бойынша алынған туындысының анықтамасын беріңіз.

2. $f(x, y)$ функциясының l бағыты бойынша алынған туындысының формуласын жазыңыз.

3. $f(x, y)$ функциясы градиентінің анықтамасын беріңіз.

4. $f(x, y)$ функциясы градиентімен оның l бағыты бойынша алынған туындысының арасындағы байланысты анықтайтын теореманы тұжырымдаңыз және оны дәлелдеңіз.

5. Градиенттің қасиеттерін баянданңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $z = x^2 - 2xy + y^2$ функциясының $\vec{MN}$ бағыты бойынша алынған туынды және ол туындының M нүктесіндегі мәнін табыңыз. Мұндағы $M(1, 2)$, ал $N(2, 4)$.

Шешуі. Алдымен $\overline{MN}$ векторын анықталық, яғни

$$\overline{MN} = (2-1)\vec{i} + (4-2)\vec{j} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$\overline{MN}$ векторының бағыттаушы косинустарын табалық

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(3) формула бойынша:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial l} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = (2x-2y) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + (2y-2x) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x-2y+4y-4x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}(y-x); \\ \left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} &= \frac{2}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

2-мысал. $z = x^2 + 2y^2 + 3$ функциясының $M(2; -1)$ нүктесіндегі градиентін табыңыз.

Шешуі.

$$\text{grad}z = z'_x \bar{i} + z'_y \bar{j} = 2x\bar{i} + 4y\bar{j}.$$

$$\text{grad}z \Big|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} = 2 \cdot 2\bar{i} + 4 \cdot (-1)\bar{j} = 4(\bar{i} - \bar{j}).$$

3-мысал. $z = x^2y - 3y^3$ функциясының $M(2;1)$ нүктесіндегі өсу жылдамдығының ең үлкен мәнін табыңыз.

Шешуі. Функцияның өсуінің ең үлкен жылдамдығы оның градиентінің модуліне тең. Олай болса

$$\text{grad}z = 2xy\bar{i} + (x^2 - 9y^2)\bar{j}, \quad \text{grad}z \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = 4\bar{i} - 5\bar{j},$$

$$|\text{grad}z|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}.$$

4-мысал. $z = \ln(x^2 + y^2)$ функциясының градиентінің бағыты бойынша алынған туындысының $M(3,4)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешуі. Мұнда l бағыты функция градиентінің $M(3,4)$ нүктесіндегі бағытымен беттеседі. $\text{grad}z = \left[\frac{2x}{x^2 + y^2} \bar{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \bar{j} \right]_M = \frac{6}{25} \bar{i} + \frac{8}{25} \bar{j}.$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\text{grad}z| = \sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^2} = \frac{2}{5}.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $z = x^2 - xy - 2y^2$ функциясының Ox өсінің оң бағытымен 60° бұрыш жасайтын бағыт бойынша туындысының $M(1,2)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

$$\text{Жауабы: } -\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

2. $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ функциясының бірінші координаттық бұрыш биссектрисасы бағыты бойынша туындысының $M(1,1)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Жауабы: 1.

3. $z = \sqrt{x^2 - y^3} - 3xy$ функциясы градиентінің $M(5,3)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{1}{\sqrt{7}} \left(\frac{\bar{i}}{2} + 4\bar{j} \right).$$

4. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ функциясы градиентінің $M(5,3)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{5}{4} \bar{i} - \frac{3}{4} \bar{j}.$$

5. $z = \ln \frac{y}{x}$ функциясының $M(0,5;0,25)$ және $N(1;1)$ нүктелердегі градиенттері арасындағы бұрышты анықтаңыз.

Жауабы: $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

6. $U = xyz$ функциясы градиентінің $M(2; 1; 1)$ нүктесіндегі бағытын және мәнін табыңыз.

Жауабы: $|\text{grad} U|_M = 3$; $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = \cos \gamma = \frac{2}{3}$.

13.10 Екі айнымалы функцияның экстремумы

$z = f(x, y)$ функциясы берілсін.

1-анықтама. Егер $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің қандай да бір аймағынан алынған барлық (x, y) нүктелері үшін $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ [$f(x_0, y_0) < f(x, y)$] теңсіздігі орындалса, онда $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде төңіректік максимумға (минимумға) ие деп аталады.

$z = f(x, y)$ функциясының төңіректік максимумын және минимумын оның төңіректік экстремумы деп атайды.

1-теорема. Егер дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде төңіректік экстремумы болса, онда осы нүктеде функцияның дербес туындылары нөлге тең болуы ($f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$) немесе дербес туындылары болмауы қажет.

Дәлелдеуі. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде функцияның төңіректік максимумы болсын делік. $z = f(x, y)$ функциясында $y = y_0$ деп, оны x -ке тәуелді бір айнымалының функциясы ретінде қарастырамыз. Теореманың шарты бойынша $f(x, y_0)$ функциясының $x = x_0$ нүктесінде максимумы болғандықтан

$$\left. \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0.$$

Осы сияқты $f'_y(x_0, y_0) = 0$ теңдігі де дәлелденеді.

Функцияның төңіректік экстремумының қажеттілік шарты орындалатын нүктелер оның кризистік нүктелері деп аталады.

Екі айнымалының функциясын оның кризистік нүктелерінде зерттеу үшін экстремумның жеткілікті шарты деп аталатын төмендегі теореманы тұжырымдалық.

2-теорема. $z = f(x, y)$ функциясы үшін мынадай шарттар орындалсын: а) $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің қандайда бір аймағында анықталған; ә) $f(x, y)$ функциясы үшін $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі кризистік нүкте

болсын; б) $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің аймағында функцияның үзіліссіз екінші ретті дербес туындылары бар болсын.

Егер $\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$ және $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде $f(x, y)$ функциясының төңіректік максимумы, ал $\Delta > 0$ және $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде $f(x, y)$ функциясының төңіректік минимумы болады. Ал егер $\Delta < 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде төңіректік экстремум болмайды.

Бұл теореманың дәлелдеуін тізімде келтірілген оқулықтардан оқып алуды студенттердің өздеріне ұсынамыз.

Сонымен, $z = f(x, y)$ функцияны төңіректік экстремумға зерттеу мынадай алгоритм бойынша жүргізіледі.

1. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындылары табылады.

2. $\left. \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{array} \right\}$ жүйені шешіп функцияның кризистік нүктелері анықталады.

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ екінші ретті дербес туындылары табылады.

4. Екінші ретті дербес туындылардың кризистік нүктелердегі мәндері есептеледі.

5. Δ -ның және z''_{xx} -тың таңбалары бойынша 2-теоремаға негізделіп тұжырым жасалады.

Мысалы: $z = x^3 + y^3 - 3xy$ функциясын зерттейік.

1. $z'_x = 3x^2 - 3y, z'_y = 3y^2 - 3x;$

2. $\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{array} \right.$ жүйені шешіп, $(0;0), (1;1)$ нүктелерді табамыз.

3. $z''_{xx} = 6x, z''_{yy} = 6y, z''_{xy} = -3;$

4. $z''_{xx}(0,0) = 0, z''_{yy}(0,0) = 0, z''_{xy}(0,0) = -3. z''_{xx}(1,1) = 6, z''_{yy}(1,1) = 6, z''_{xy}(1,1) = -3.$

5. $\Delta_1 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ болғандықтан $(0,0)$ нүктеде функцияның төңіректік экстремумы жоқ.

$\Delta_2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0; z''_{xx}(1,1) = 6 > 0$ болғандықтан $(1,1)$ нүктеде функцияның төңіректік минимумы болады.

$z = f(x, y)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін оның анықталу облысының ішіндегі кризистік нүктелері табылады. Одан кейін функцияның облысты қоршап тұрған сызықтардағы (облыстың шекарасы) ең үлкен және ең кіші мәндерін тауып, оларды кризистік

нүктелердегі функцияның мәндерімен салыстыру арқылы функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері анықталады.

13.11 Шартты экстремум

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табуға келтірілетін көптеген практикалық есептерді қарастырғанда оның аргументтері толық тәуелсіз болмай, басқа бір қосымша шарттармен байланыста болуы (мысалы, қандай да бір теңдеуді қанағаттандыруы) мүмкін болған жағдай жиі ұшырасады.

$z = f(x, y)$ функциясының аргументтері $\varphi(x, y) = c$ теңдеуді қанағаттандыратын төңіректік экстремумдарын табуды қарастырайық. $\varphi(x, y) = c$ байланыс теңдеуі деп аталады.

Байланыс теңдеуінен y -ті x арқылы өрнектеп, одан кейін y -тің мәнін $z = f(x, y)$ -тегі y -тің орнына қойсақ, онда берілген функциядан шартты экстремумды табу бір аргументті функцияның төңіректік экстремумын табуға келтіріледі. Жалпы жағдайда байланыс теңдеуіндегі y -ті x арқылы айқын өрнектей алмауымыз да мүмкін. Онда келесі әдіс қолданылады.

Лагранж функциясы деп аталатын мынадай функция құрылады:

$$L(x, y, \lambda) = \lambda[\varphi(x, y) - c] + f(x, y)$$

Мұндағы, λ -Лагранж көбейткіші деп аталады..

$z = f(x, y)$ функциясының $\varphi(x, y) = c$ шартты қанағаттандыратын төңірек-тік экстремумын табу үшін

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0, \\ L'_y = f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0, \\ L'_\lambda = \varphi(x, y) - c = 0 \end{cases}$$

жүйені шешіп (x, y) кризистік нүктені және λ -ны табамыз. Мұндағы λ -аралық байланыстырушы (көмекші) шама болып, ол кейінгі есептеулерде қатыспайды.

Соңғы жүйе екі айнымалының функциясының шартты экстремумын табу үшін қажеттілік шарт болады. Нақты есептің мағынасына сәйкес, табылған кризистік нүктеде функция сипаты тұжырымдалады.

13.12 Ең кіші квадрат әдісі

x пен y айнымалы шамалар арасындағы тәуелділікті анықтау үшін жүргізілген тәжірибенің нәтижелері мына кесте түрінде берілсін:

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Осы нәтижелерді аналитикалық түрде көрсететін формулаларды анықтайық. Айталық, $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ нүктелері қандай да бір түзудің маңайында орналасқан болсын делік. Бұл x пен y арасындағы тәуелділік $Y = ax + b$ түзуіне жақын деген сөз. Онда a мен b коэффициенттерді ұтымды табу арқылы берілген нүктелерге жақын өтетін түзуді анықтау қажет болады. Ол үшін берілген нүктелердің түзуден ауытқуы деп аталатын $Y_i - y_i$ шамаларды табамыз.

2-анықтама. $\sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2$ шамаға ең кіші мән беретін a және b шамаларын табу жолы ең кіші квадрат әдісі деп аталады.

x_i, y_i -лер тұрақты болғандығы себепті 2-анықтамадағы қосынды a мен b -ның функциясы болады, яғни

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 = F(a, b).$$

a мен b -ны табу үшін екі айнымалының функциясының төңіректік экстремумын табудың қажеттілік шартын пайдаланамыз:

$$\begin{cases} F'_a = 0, \\ F'_b = 0. \end{cases}$$

Сонда a мен b -ларды табу үшін мынадай жүйе шығады:

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) x_i = 0, \\ 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (1)$$

Жүйеден табылған a мен b -ның мәндерінде $F(a, b)$ функциясының минимумы болатындығын екінші теоремаға негізделіп дәлелдеу қиын емес.

Егер тәжірибенің нәтижелеріне сәйкес нүктелер қандай да бір қисықтың маңайына орналасқан болса, онда жуық формуланы $y = ax^2 + bx + c$ түрінде іздейміз. a, b және c -ларды табу үшін

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 = F(a, b, c) \text{ функциясын құрамыз.}$$

$$\text{Функцияның кризистік нүктелері} \quad \begin{cases} F'_a = 0, \\ F'_b = 0, \text{ жүйеден анықталады.} \\ F'_c = 0 \end{cases}$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Төңіректік максимумның (минимумның) анықтамасын беріңіз.
2. Төңіректік экстремумға ие болудың қажеттілік шартын жазыңыз.
3. Функцияның кризистік нүктелері деп қандай нүктелерді айтады?
4. Экстремумы бар болудың жеткілікті шартын жазыңыз.
5. $z = f(x, y)$ функциясын төңіректік экстремумға зерттеудің алгоритмін жазыңыз.

6. $z = f(x, y)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндері қалай табылады?

7. Шартты экстремум деген не?

8. Шартты экстремумды табу үшін құрылған Лагранж функциясын жазыңыз.

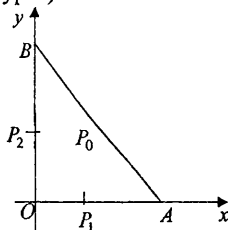
9. Шартты экстремум қалай табылады?

10. Ең кіші квадраттар әдісінің анықтамасын беріңіз.

11. Ең кіші квадраттар әдісі қандай есептерді шешуде қолданылады?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $x + y - 4 = 0$ түзуімен және координата өстерімен қоршалған тұйық үшбұрыштағы $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз (1-сурет).



1-сурет

Шешуі. 1) берілген облыстың ішінде орналасқан кризистік нүктелерді анықтаймыз. Ол үшін функцияның бірінші ретті дербес туындыларын табамыз, яғни,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 8;$$

Оларды нөлге теңестіріп жүйені шешеміз.

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 4y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

$P_0(1,2)$ нүктесі берілген облыста жатады. Функцияның P_0 нүктесіндегі мәнін есептейміз

$$f(1,2) = 1 + 2 \cdot 4 - 2 - 16 + 5 = -4.$$

2) функцияның облыстың шекараларындағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табамыз. OA кесіндісінде $y=0$, ал $0 \leq x \leq 4$; $y=0$ болса, онда $z(x) = x^2 - 2x + 5$. $z(x)$ -тің $[0,4]$ -дегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табамыз

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2; \quad 2x - 2 = 0; \quad x = 1; \quad P_1(1;0)$$

$$z(1,0) = 1 - 2 + 5 = 4.$$

$[0,4]$ аралықтың шеткі нүктелерінде $z(x,0)$ функциясының мәндерін есептейміз.

$$z(0;0) = 5; \quad z(4;0) = 13.$$

OB кесіндісінде $x=0$, ал $0 \leq y \leq 4$. Егер $x=0$ болса, онда $z(0,y) = 2y^2 - 8y + 5$; $z(0,y)$ –тің $[0,4]$ -дегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табамыз

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 8; \quad 4y - 8 = 0; \quad y = 2; \quad P_2(0;2)$$

$$z(0;2) = -3.$$

Функцияның B нүктедегі мәнін есептейік

$$z(0;4) = 5.$$

Енді AB кесіндісін қарастыралық. AB -ның гендеуі $y = 4 - x$, оны берілген функциядағы y -тің орнына қоямыз

$$z = x^2 + 2(4-x)^2 - 2x - 8(4-x) + 5 = 3x^2 - 10x + 5.$$

Бұл функцияның $[0,4]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табамыз

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 10; \quad 6x - 10 = 0; \quad x = \frac{5}{3};$$

$x + y - 4 = 0$ теңдеуінен y -ті анықтаймыз, яғни $y = \frac{7}{3}$. Сонымен

$$P_3\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right), \quad z\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right) = -\frac{10}{3}.$$

3) Облыстың ішінде және шекараларында орналасқан кризистік нүктелердегі функцияның табылған мәндерін салыстырып оның ең үлкен мәні $z(4,0) = 13$, ал ең кіші мәні $z(1,2) = -4$ болатынын анықтаймыз.

2-мысал. $f(x,y) = xy$ функциясының $x^2 + y^2 = 2$ шартты қанағаттандыратын шартты экстремумын табыңыз.

Шешуі. Лагранж функциясын құрамыз.

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda[\varphi(x,y) - c] = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2).$$

Шартты экстремумының қажеттілік шарттары мынадай:

$$\begin{cases} L'_x = y + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = x + 2\lambda y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Осыдан $y = -2\lambda x$ және $x(1 - 4\lambda^2) = 0$ болатынын көреміз. Соңғы екі теңдіктен шығатын $x = 0$ және $y = 0$ берілген есептің шешімі бола алмайды.

Сондықтан тек қана $\lambda^2 = \frac{1}{4}$ қалады. $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$; $\lambda_2 = \frac{1}{2}$; $y = \pm x$.

Бұл мәндерді Лагранж функциясына қоямыз, $\lambda = -\frac{1}{2}$:

$$L(x,y,\lambda) = xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2) = -\frac{1}{2}(x - y)^2 + 1.$$

Соңғы теңдіктің алдындағы минус максимумды қамтамасыз етеді. Ал,
 $\lambda = \frac{1}{2}$ десек:

$$L(x, y, \lambda) = xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2) = \frac{1}{2}(x + y)^2 - 1.$$

Бұл жағдай минимумды қамтамасыз етеді.

3-мысал. Аргумент x -тің әр түрлі мәндерінде функцияның тәжірибеден алынған мәндері 1-кестеде берілген.

1-кесте

x	0	1	1,5	2,1	3
y	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2

Берілген нүктелер Oxy координаталар жүйесінде құрылса, онда x пен y арасындағы тәуелділік $y = ax + b$ сызықтық функциясына жуық екендігін байқауға болады.

Ең кіші квадраттар әдісін қолданып $y = ax + b$ түзудің a және b параметрлерін анықтаңыз.

Шешуі. Төмендегі кестені құрамыз.

2-кесте

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_ϕ	Δy
1	0	2,9	0,00	0,00	2,86	0,04
2	1,0	6,3	1,00	6,30	6,28	0,02
3	1,5	7,9	2,25	11,85	7,99	0,09
4	2,1	10,0	4,41	21,00	10,04	0,04
5	3,0	13,2	9,00	39,60	13,12	0,08
Σ	7,6	40,3	16,66	78,75		

2-кестенің соңғы жолын қолданып (1) түрдегі жүйені құрамыз:

$$\begin{cases} 16,66a + 7,6b = 78,75, \\ 7,6a + 5b = 40,3. \end{cases}$$

Осы жүйеден $a = 3,42$, ал $b = 2,86$ болатынын табамыз. Сонымен,

$$y = 3,42x + 2,86. \quad (2)$$

2-кестенің 6-бағанында (2) формула бойынша есептелген y -тің мәндері, ал 7-бағанда ауытқудың абсолют мәндері берілген.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 5$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

Жауабы: $z_{\min} = 1$.

2. $z = x^2 - 2xy + y^2 + 3x + 2y + 5$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

Жауабы: экстремумы жоқ.

3. $z = x^2 - 4xy + 2y^2 + 3x + 2y + 5$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

Жауабы: экстремумы жоқ.

4. $z = x^2 + y^2 - 8x - 4y + 21$ функциясының $x = 1, y = 0, x + y = 5$ сызықтармен коршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәнін табыңыз.

5. $f(x, y) = x + y$ функциясының $9x^2 + 4y^2 = 36$ шартты қанағаттандыратын ең үлкен мәнін табыңыз.

6. $(1; -0,9), (2; 1,1), (3; 3,1), (4; 4,8), (5; 6,0)$ нүктелері берілген. Ең кіші квадраттар әдісінен пайдаланып берілген нүктелерге жақын түзуді табыңыз.

7. $(1; -0,9), (2; 1,1), (3; 3,1), (4; 4,8), (5; 6,0)$ нүктелері берілген.

Осы нүктелердің маңайынан өтетін $y = ax + b$ түзудің a және b мәндерін табамыз.

13.13. Екі айнымалы функциясының экономикалық зерттеулерде қолданылуы

Экономикада кездесетін екі айнымалы функциясының кейбіреулерін мысалға келтірейік.

1. Тұтынушылардың сатып алатын тауарларының мөлшері Q оның бағасынан, тұтынушылардың табысынан, жанұя құрамынан тағы басқа факторлардан тәуелді. Мысалы, егер тауардың бағасын P -мен, тұтынушылардың табысын D -мен белгілесе, онда тұтынушылардың сатып алатын тауарларының мөлшері, немесе сұраным функциясы $Q = f(D, P)$ үшін мынадай қарапайым тәуелділікті қарастыруға болады:

$$Q = \frac{D}{P}$$

2. Тұтынушылар теориясының іргелі ұғымдарының бірі-пайдалылық функциясы деп аталады да, ол $u(x, y)$ символымен белгіленеді. Мұндағы $x - X$ тауарының саны, ал $y - Y$ тауардың саны. $u(x, y)$ функциясы (x, y) жиынының пайдалылық өлшемін өрнектейді. Мысалы, $u(x, y) = a \ln(xy)$, немесе

$$u(x, y) = a(\ln x + \ln y).$$

3. Өндіріс функциясы деп қоғамдық өнімнің шамасын еңбек шығыны және қоғамдық қорлардың көлемімен байланыстыратын тәуелділікті айтады. Өндіріс функциясы өндіріс заңдылықтарын өрнектеудің негізі болып есептеледі. Өндіріс функциясының түрлері көп, біз көбірек кездесетіндерін келтірейік.

$$1) z = ax^{a_1} \cdot y^{a_2}$$

Бұл Кобба-Дуглас функциясы деп аталады. Мұндағы z -қоғамдық өнімнің шамасы, x -еңбек шығыны, y -өндіріс қорларының көлемі, a, a_1, a_2 -оң мәнге ие параметрлер. $a_1 < 1, a_2 < 1$ деп қабылданады.

$$2) z = \alpha (\beta_1 x^{-\beta} + \beta_2 y^{-\beta})^{\frac{1}{\beta}}.$$

Бұл қоғамдық қорларды тұрақты икемділікпен орналастыру функциясы деп аталатын өндірістік функция. Мұндағы $\alpha, \beta, \dots, \beta_2$ тұрақтылары оң мәнді қабылдайтын параметрлер.

Изокванттар. Экономиканың көптеген есептері екі айнымалы функцияның деңгей сызықтары арқылы сипатталады. Мысалы, мынадай екі айнымалы өндіріс функциясын қарастырайық:

$$z = x^a y^{1-a}, \quad 0 < a < 1 \quad (1)$$

Мұндағы z - қоғамдық өндіріс өнімінің шамасы, x - еңбек шығыны, y - өндіріс қорларының көлемі

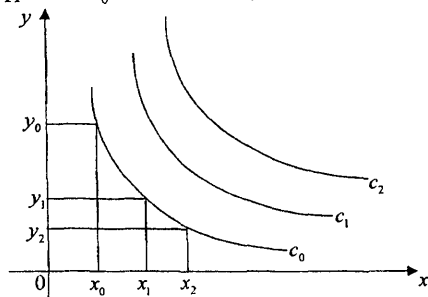
(1) тендеудегі z - ке тұрақты c мән береміз:

$$x^a y^{1-a} = c. \quad (2)$$

(2) теңдікті өндіріс функциясының деңгей сызығының теңдеуі деп атайды. Экономикалық зерттеулерде, (2) теңдіктің графигі, яғни деңгей сызықтарын изокванттар немесе өндірістің талғаусыздық қисықтары деп атайды (1-сурет). Изокванттар келесі қасиеттерге ие.

- 1) Изокванттар бір-бірімен қиылыспайды;
- 2) өндіріс өнімі асқан сайын оған сәйкес изокванттар координаталар бас нүктесінен қашықтай береді.

Өндіріс өнімі тұрақты c_0 - ге тең болса, онда



1-сурет

$x_0^a y_0^{1-a} = c_0$, $x_1^a y_1^{1-a} = c_0$, $x_2^a y_2^{1-a} = c_0$, т.с.с. теңдіктерді жазуға болады.

Баскаша айтқанда, өнім мөлшерін азайтпай отырып (мысал c_0 деңгейде), бір фактордың санын азайту арқылы екінші фактордың санын көбейтуге болады немесе изокванттардың көмегімен өндіріс қорлары көлемінің кемшілігін еңбек шығынымен толтыру арқылы (еңбек шығынының кемшілігін өндіріс қорлары көлемін арттыру арқылы) өндіріс өнімінің тұрақты мөлшерін сақтауға болады. (1-сурет).

Өндіріс функциясы мен шығын функцияларының изокванттарын бірге зерттеу арқылы x және y факторларының тиімді мәнін таңдап алуға болады.

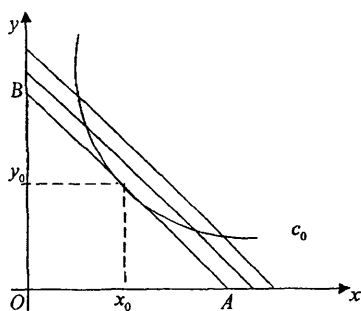
Мысалы, шығын функциясы сызықты тәуелділікпен берілсін

$$g(x, y) = p_1 x + p_2 y. \quad (3)$$

Мұндағы p_1, p_2 - x және y факторларының бағасы.

$g(x, y)$ функциясының деңгей сызығының теңдеуі келесі түрде болады:

$$p_1x + p_2y = d.$$



2-сурет

$x/A + y/B = 1$ теңдеуі 2-суреттегі түзулерді анықтайды және олар шығын функциясының изокванттары деп аталады.

Мұнда, $A = d/p_1$; $B = d/p_2$.

(x_0, y_0) – (1)-өндіріс функциясымен (3) шығын функциясы изокванттарының жанасу нүктесі. Онда $x = x_0$, $y = y_0$ - дер x және y факторлардың оптималдық мәндері болады. Ал A – сатып алынуға тиісті x фактордың максималдық мәні, B – сатып алынуға тиісті y фактордың максималдық мәні (2-сурет).

Енді пайдалылық функциясын қарастыралық:

$$u(x, y) = a \ln(xy)$$

Мұның изокванттары немесе талғаусыздық қисықтары келесі теңдеумен өрнектелінеді:

$$a \ln(xy) = c;$$

$$\ln(xy) = c/a;$$

Осыдан

$$xy = e^{c/a}.$$

Соңғы теңдеумен анықталатын функцияның графигі де, яғни талғаусыздық қисықтары, 1,2 – суреттердегі қисықтарға ұқсас 1-квадраттағы гипербола сызықтары болады.

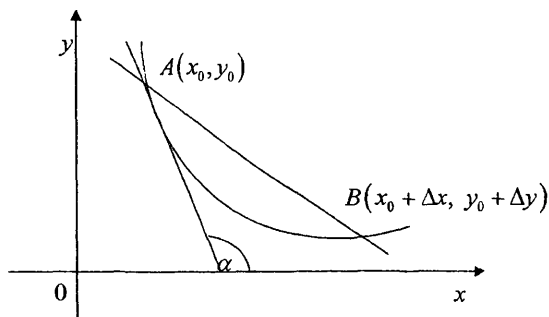
Өндіріс факторларының шектік өнімі ұғымдары

Дербес туынды ұғымы да экономикалық зерттеулерде кеңінен қолданылады. Бір айнымалының функциясы үшін қарастырылған барлық шектік ұғымдар екі айнымалының функциясы жағдайында дербес туындылардың көмегімен анықталады.

Пайдалылық функциясы $U(x, y)$ -тің (x, y) жиынының пайдалылық өлшемін өрнектейтіні белгілі (мұндағы x – X тауардың мөлшері, y – Y тауардың мөлшері).

1-анықтама. y тұрақты болып, x — тің кішігірім өзгерісіндегі (x, y) жиынының сезімталдығы X тауардың шектік пайдалылығы деп аталады да ол u'_x дербес туынды ретінде анықталады.

Y тауардың шектік пайдалылығы да осылайша u'_y дербес туынды ретінде анықталады. Көбінесе пайдалылық функциясының деңгей сызықтары немесе талғаусыздық қисықтары кемімелі функция болып келеді. Сондықтан, бір деңгей сызығында орналасқан $A(x_0, y_0)$, $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нүктелерінің Δx және Δy өсімшелерінің таңбалары әр түрлі болады (3-сурет).



3-сурет

Мейлі, $\Delta x > 0$ ал $\Delta y > 0$ болсын. Бұл жағдайда X тауардың x бірлігінің орны Y тауардың $(-\Delta y)$ бірлігімен толтырылады деп айтылады, яғни B нүктеден A нүктеге көшу.

2-анықтама. X тауардың орнын Y тауармен толтырудың шектік нормасының $A(x_0, y_0)$ нүктедегі мәні деп $-\Delta y / \Delta x$ қатынастың B нүктесі A нүктесіне деңгей сызығының бойымен ұмтылғандағы шегін айтады.

Орнын толтырудың шектік нормасы MRS_{xy} — пен немесе $MRS_{xy}(A)$ — мен белгіленеді.

Мейлі, $I - u(x, y)$ функциясының деңгей сызығының A нүктесіндегі жанамасы болсын. Егер B нүктесі қисық бойлап A нүктесіне ұмтылса, онда AB хордасы I жанаманмен беттесетіндігі белгілі (3-сурет).

Сондықтан,

$$MRS_{xy}(A) = -\operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

Мұндағы $\alpha - I$ жанаманың ауытқу бұрышы. Талғаусыздық қисығының теңдеуі:

$$u(x, y) = c. \quad (5)$$

Қисықтың (x_0, y_0) нүктесіне жүргізілген жанамасының теңдеуі

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) \quad (6)$$

екені белгілі. Онда (5) теңдеудегі айқындалмаған функцияның туындысын тауып (6) ға қойсақ l жанаманың келесі теңдеуіне ие боламыз:

$$y = y_0 - \frac{u'_x(A)}{u'_y(A)} \cdot (x - x_0). \quad (7)$$

(7)-теңдеуден жанаманың бұрыштық коэффициенті $tg\alpha$ – ны анықтаймыз.

$$tg\alpha = -\frac{u'_x(A)}{u'_y(A)}.$$

(4)-теңдеу бойынша:

$$MRS_{xy}(A) = \frac{u'_x(A)}{u'_y(A)}. \quad (8)$$

Сонымен мынадай теорема дәлелденеді.

Теорема. Бір тауардың орнын басқасымен толтырудың шектік нормасы олардың шектік пайдалылықтарының қатынасына тең.

Икемділік коэффициенттері.

Бір айнымалы функцияның икемділігі ұғымы енгізілген болатын. Сол сияқты екі айнымалы функцияның да икемділігі ұғымы енгізіледі.

3-анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі x бойынша икемділігі деп

$$E_{xx}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{x}$$

шегін айтады.

$z = f(x, y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі y бойынша икемділігі деп

$$E_{yy}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{z} : \frac{\Delta y}{y}$$

шегін айтады.

E_{zx}, z – тің x бойынша икемділік коэффициенті деп, ал E_{zy}, z – тің y бойынша икемділік коэффициенті деп те аталады.

Икемділіктің анықтамасынан мынадай формула шығады:

$$E_{xx}(x, y) = \frac{x}{z} \cdot z'_x = x(\ln z)'_x, \quad (9)$$

$$E_{yy}(x, y) = \frac{y}{z} \cdot z'_y = y(\ln z)'_y. \quad (10)$$

Мысалы, $z = ax^a y^{a_2}$ Кобба-Дуглас функциясы үшін $E_{xx}(x, y) = a_1$, $E_{yy}(x, y) = a_2$, яғни a_1 мен a_2 көрсеткіштері тек еңбек шығыны x немесе тек өндіріс қоры y шамалары бір пайызға өзгергенде өндіріс өнімі шамамен қанша пайызға өзгередінін көрсетеді.

Енді $Q = f(D, P)$ сұраным функциясын қарастырайық.

Егер $\partial Q / \partial P < 0$ болса, онда бұл тауардың бағасы өскенде оған сұраным кемиді дегені. Бірақ, барлық уақыт ондай бола бермейді. Гиффен тауарлары деп аталатын тауарлар бар болып, олар үшін $\partial Q / \partial P > 0$ теңсіздігі де кейбір жағдайларда орындалады. Бұл, табысы кем тұтынұшылардың тауар бағасы өсуімен оларды сатып алу мүмкіндігі жойылған жағдайларда, тауардың бағасы өссе де оған сұраным өсуі мүмкін дегені. Табыс өссе кейбір тауарға сұраным өсіп, ал басқасына кемуі мүмкін.

$$\frac{\partial Q}{\partial P} < 0$$

теңсіздікті қанағаттандыратын тауарлар бағалары кем тауарлар деп аталады.

$$\frac{\partial Q}{\partial P} > 0$$

теңсіздікті қанағаттандыратын тауарлар бағалы тауарлар деп аталады.

Сұранымның табыс бойынша икемділігі.

$$E_{QD} = \frac{D}{Q} \frac{\partial Q}{\partial D},$$

бұл, табыс бір пайызға өскенде тауарға сұранымның қанша пайызға өсетінін көрсетеді.

Сұранымның табыс бойынша икемділігіне байланысты бағалы тауарлар 3 топқа бөлінеді:

Бірінші топқа икемділігі кіші тауарлар – бұларға икемділігі 0 мен 1-дің аралығында болған тауарлар жатады. Икемділігі бірге жақын тауарлар екінші топқа жатады. Ал үшінші топқа икемділігі бірден жоғары тауарлар жатады.

Сұранымның баға бойынша икемділігі:

$$E_{QP} = \frac{P}{Q} \frac{\partial Q}{\partial P}.$$

Тауарға сұранымның икемділіктері табыс пен бағаға тәуелді болғандықтан, олар сұраным функциясының локальдық сипаттамалары болады.

Мейлі, z -өндіріс өнімінің мөлшері, x, y -өндіріс қорларының шығындары болып, $z = Q(x, y)$ дифференциалданатын функция болсын. x, y, z шамаларға сәйкес бірліктерінің тұрақты бағалары сәйкесінше P_x, P_y, P_z -термен берілсін делік. Онда түсім $R(x, y) = P_z Q(x, y)$ болып, ал пайда функциясы келесі түрде болады:

$$\pi(x, y) = R(x, y) - P_x x - P_y y$$

Мейлі, z_0 -өнімнің пайда бойынша оптималдық мәні болып, x_0, y_0 - сәйкес шығындарының мәндері болсын. Егер $M_0(x_0, y_0) - \pi(x, y)$ функциясының анықталу облысының ішкі нүктесі болса, онда $M_0 - \pi(x, y)$ функциясының локальдық максимум нүктесі болады. Локальдық экстремумның қажеттілік шарты бойынша:

$$\pi'_x(M_0) = R'_x(M_0) - P_x = 0,$$

$$\pi'_y(M_0) = R'_y(M_0) - P_y = 0,$$

немесе

$$R'_x(M_0) = P_x,$$

$$R'_y(M_0) = P_y.$$

Сонымен, пайданың локальдық максимум нүктесінде қордың әр түрі бойынша шектік түсім оның бағасымен дәл түседі екен.

Енді, өз өнімдерін екі тәуелсіз базарда сататын кәсіпорынды қарастырайық. Мейлі, P_i, q_i -кәсіпорынның i - базарда ($i = 1, 2$) сатқан өнімінің сәйкесінше бағасы және мөлшері болсын. Базарлар бір – біріне тәуелсіз болғандықтан, $P_1 = P_1(q_1)$, $P_2 = P_2(q_2)$.

$C(q)$ -дифференциалданатын шығын функциясы болсын. Онда пайда функциясы былайша өрнектеледі:

$$\pi = P_1 q_1 + P_2 q_2 - C(q_1 + q_2).$$

Локальдық максимум нүктесінде:

$$\pi'_{q_1} = P'_1 q_1 + P_1 - C' = P_1 (E_{p_1 q_1} + 1) - C' = 0,$$

$$\pi'_{q_2} = P'_2 q_2 + P_2 - C' = P_2 (E_{p_2 q_2} + 1) - C' = 0.$$

Мұндағы $E_{p_1 q_1}, E_{p_2 q_2}$ - икемділік коэффициенттері.

Соңғы жүйеден $P_1 (E_{p_1 q_1} + 1) = P_2 (E_{p_2 q_2} + 1)$.

Ал мұнан бағалардың қатынасы үшін мынадай теңдік шығады:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + E_{p_1 q_1}}{1 + E_{p_2 q_2}}.$$

Айталық, $e_j - j$ - базардың бағасы бойынша i - базардың сұраныс икемділігі болсын ($i, j = 1, 2$). Базарлар бір – бірінен тәуелсіз болса, онда

$$E_{pq} = (E_{pq})^{-1} = e_u^{-1}.$$

Олай болса $\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + e_{11}^{-1}}{1 + e_{22}^{-1}}$.

Өзін - өзі тексеру сұрақтары

1. Сұраным, пайдалылық, өндіріс функцияларына мысалдар келтіріңіз.
2. Изокванттардың анықтамасын беріңіз, мысалдар келтіріңіз.
3. Тауарлардың шектік пайдалылықтарының анықтамасын беріңіз.
4. Орнын толтырудың шектік нормасының анықтамасын беріңіз.
5. Орнын толтырудың шектік нормасының шектік пайдалылықтар қатынасына теңдігін дәлелдеңіз.
6. $f(x, y)$ функциясының x және y бойынша икемділіктерінің анықтамаларын беріңіз.
7. Дебес туындылардың көмегімен сұраным функциясын зерттеңіз.
8. Пайда функциясының экстремдарын табыңыз.

Жаттығулар және оқытушыларының қатысумен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Егер x және y факторлары сызықты тәуелді болып, олардың бағалары сәйкесінше $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ болса, онда $z = b_0 x y^{3/2}$ өндіріс функциясы үшін, өндіріс қорларының оптималды үйлесімді анықтаңыз.

Шешуі, x және y қорлардың оптималды үлестірулері орындалатын x_0 , y_0 нүктесінде $z = x + 2y$ шығын функциясының изоквантасы $x + 2y = d$ түзуі өндіріс функциясының изоквантасы $b_0 x y^{3/2} = C$ қисығымен жанасуы тиіс. $x + 2y = d$ түзуінің бұрыштық коэффициенті $k = -1/2$, онда

$z = \left(\frac{C}{b_0 x} \right)^{2/3}$ қисықтың жанамасының $x = x_0$ -дегі мәні де $-1/2$ -ге тең болуы қажет, яғни

$$\left[\left(\frac{C}{b_0 x} \right)^{2/3} \right]' = -1/2,$$

осыдан $x_0 = 4^{3/5} C^{2/5} / 3^{3/5} b_0^{2/5}$, $y_0 = 3^{2/5} C^{2/5} / 4^{2/5} b_0^{2/5}$.

Сонымен, x және y факторлары 4:3 қатынасындай үлестірілуі қажет екен.

2-мысал. $u(x, y) = \ln x + \ln y$ пайдалылық функциясының x -тің орнын y -пен толтыру шектік нормасының (3;12) нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешуі. (8) формуладан пайдаланамыз.

$$MRS_{xy} = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} = \frac{y}{x};$$

Онда $MRS_{xy}(3; 12) = 4$.

3-мысал. $z = x^y$ функциясының x және y бойынша икемділік коэффициентінің (2, 3) нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешуі. (9), (10) формулалардан пайдаланамыз.

$$E_x(x, y) = x(\ln x)'_x = x(y \ln x)'_x = y,$$

$$E_y(x, y) = y(\ln z)'_y = y(y \ln x)'_y = y \ln x.$$

x, y -тердің мәндерін қойсақ: $E_x(2, 3) = 3$; $E_y(2, 3) = 3 \ln 2$.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $u(x, y) = a_1 \ln(x - x_0) + a_2 \ln(y - y_0)$ пайдалылық функциясы берілген. Мұндағы a_1, a_2 -лер таңбалары оң коэффициенттер; $x > x_0$, $y > y_0$; x_0, y_0 - тұтынудың минималдық деңгейлері (таңбалары оң).

а) Шектік пайдалылықтарын табыңыз.

ә) x -тің орнын y -пен толтырудың шектік нормасын табыңыз.

2. $z = y^x$ функциясының (3, 2) нүктесіндегі x және y бойынша икемділік

коэффициенттерін табыңыз.

3. Кобба –Дуглас функциясының икемділік коэффициенттерін табыңыз.

4. Егер бірінші базардың сұраныс икемділігі (-2) , ал екінші базардікі $(-1,5)$ болса, онда екінші базардағы баға біріншідегіден қанша пайызға жоғары?

«Көп айнымалының функциялары» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар

Негізгі теориялық сұрақтар

1. Көп айнымалылар функциясының анықтамасы, анықталу облысы.
2. Көп айнымалылар функциясының дербес және толық өсімшелері.
3. Дербес туындылар мен толық дифференциал.
4. Дифференциалды жуықтап есептеуге қолдану.
5. Күрделі, айқындалмаған функциялардың туындылары.
6. Бағыт бойынша туынды, градиент және оның қасиеттері.
7. Жоғарғы ретті дербес туындылар және дифференциалдар.
8. Көп айнымалылар функциясының экстремумдері және ең үлкен, ең кіші мәндері.

Ұсынылған тапсырмалардан бір нұсқасының шешу үлгісін келтірілік.

1-мысал. $z = \sqrt{x-2y-2} + \sqrt{x+y}$ функциясының анықталу облысын тауып, оны сызып көрсетіңіз.

Шешуі. Түбір астындағы өрнек теріс болмауы керек, сондықтан берілген функцияның анықталу облысы мына теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын (x, y) нүктелердің жиыны болуы тиіс

$$\begin{cases} x-2y-2 \geq 0, \\ x+y \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

$x-2y-2=0$ түзуден төменде орналасқан нүктелердің координаталары $x-2y-2>0$ теңсіздікті қанағаттандырады. $x+y=0$ түзуден жоғарыда орналасқан нүктелердің координаталары $x+y>0$ теңсіздікті қанағаттандырады. Жазықтықтың екі рет штрихталған бөлігіндегі нүктелердің координаталары (1) теңсіздіктер жүйесінің шешімі болады (1-суретке қараңыз). Онда ол берілген функцияның анықталу облысы болады, түзулердің нүктелері де анықталу облысына кіреді.

2-мысал. $z = xy^2$ функциясының $x=2, y=1, \Delta x=0,1, \Delta y=-0,2$ мәндеріндегі толық өсімшесі Δz және толық дифференциалы dz -ті табыңыз.

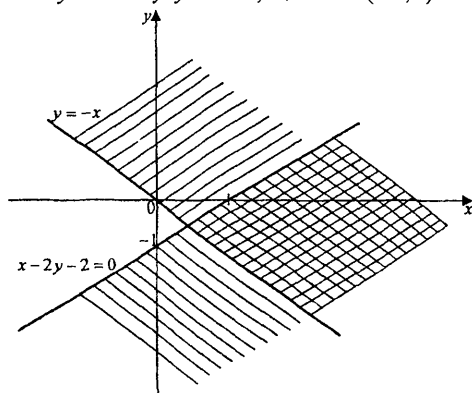
Шешуі: $z = f(x, y)$ функциясының толық өсімшесі $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ формуласымен анықталады. Біздің мысалымызда

$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y)^2 - xy^2 = (2+0,1)(1-0,2)^2 - 2 \cdot 1 = -0,6567.$$

Толық дифференциал: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$; мұндағы $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Дербес туындыларын тауып орындарына қоямыз

$$dz = y^2 dx + 2xy dy = 1^2 \cdot 0,1 + 2 \cdot 1 \cdot (-0,2) = -0,7$$



1-сурет

3-мысал. $\ln(\sqrt[3]{8,2} + \sqrt[4]{0,98} - 2)$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

Шешуі. $z = f(x, y)$ функциясының толық өсімшесі мен толық дифференциалы арасында мынадай жуық теңдік бар:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz.$$

$z = f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 2)$ функциясын қарастырамыз.

$$\ln(\sqrt[3]{x + \Delta x} + \sqrt[4]{y + \Delta y} - 2) \approx \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 2) + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx + \frac{1}{4} y^{-\frac{3}{4}} dy.$$

$x = 8$, $dx = 8,2 - 8 = 0,2$, $y = 1$, $dy = 0,98 - 1 = -0,2$ мәндерін орындарына қойсақ:

$$\ln(\sqrt[3]{8,2} + \sqrt[4]{0,98} - 2) \approx \ln 1 + \frac{1}{12} \cdot 0,2 - \frac{1}{4} \cdot 0,02 = 0,011.$$

4-мысал. $z^4 xy + zx - xy - 1 = 0$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларының $M(2; 1; 0)$ нүктесіндегі мәндерін табыңыз.

Шешуі. $F(x, y, z) = 0$ айқындалмаған функцияның дербес туындылары мынандай формулалармен анықталады:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},$$

Біздің мысалымызда $F(x, y, z) = z^4 xy + zx - xy - 1$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z^4 y + z - y}{4z^3 xy + x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z^4 x - x}{4z^3 xy + x};$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = -\frac{0 \cdot 1 + 0 - 1}{4 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 + 2} = \frac{1}{2}; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = -\frac{0 \cdot 2 - 2}{4 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 1 + 2} = 1;$$

5-мысал. $z = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - \frac{17}{4}x - 2y$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

Шешуі. Кризистік нүктелерін табамыз, ол үшін дербес туындыларын нөлге теңеп, төмендегі жүйені шешеміз.

$$\begin{cases} z'_x = x^2 + y^2 - \frac{17}{4}; \\ z'_y = 2xy - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{17}{4} = 0, \\ 2xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Екі теңдеуді қоссақ: $x^2 + 2xy + y^2 = \frac{25}{4}; (x+y)^2 = \frac{25}{4}; x+y = \pm \frac{5}{2};$

$$1) x = \frac{5}{2} - y; \quad 5y - 2y^2 - 2 = 0; \quad 2y^2 - 5y + 2 = 0;$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}; \quad y = 2; y = \frac{1}{2}; \quad M_1\left(\frac{1}{2}; 2\right), M_2\left(2; \frac{1}{2}\right)$$

$$2) x = -\frac{5}{2} - y; \quad -5y - 2y^2 - 2 = 0;$$

$$2y^2 + 5y + 2 = 0; \quad M_3(-2; -\frac{1}{2}), M_4(-\frac{1}{2}, -2).$$

Әрбір нүктеде $D = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2$ -тың таңбасын анықтаймыз.

Біздің мысалда: $z''_{xx} = 2x; \quad z''_{yy} = 2x, \quad z''_{xy} = 2y. \quad D = 4x^2 - 4y^2 = 4(x^2 - y^2).$

M_1 нүктеде $D < 0$, онда экстремум жоқ.

M_2 нүктеде $D > 0, z''_{xx} > 0$, сондықтан M_2 - де максимум болады.

M_3 нүктеде $D > 0, z''_{xx} < 0$, сондықтан M_3 - де минимум болады.

M_4 нүктеде $D < 0$, онда экстремум жоқ.

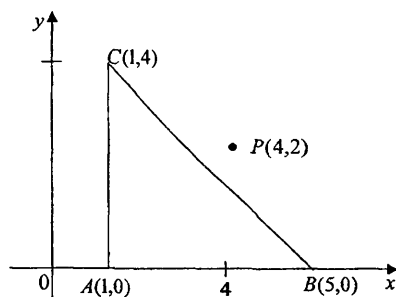
6-мысал. $z = x^2 + y^2 - 8x - 4y + 21$ функциясының $x=1, y=0, x+y=5$ түзулерімен қоршалған тұйық (D) облысындағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

Шешуі. Есепті шешу үшін функцияның D облысының ішкі және оны қоршаған түзулеріндегі кризистік нүктелерін тауып, оның сол нүктелердегі мәндерін есептейміз және оларды салыстырып ең үлкен, ең кіші мәндерін анықтаймыз.

Облысты мына түзулер қоршайды.

$$AB: y=0, \quad 1 \leq x \leq 5; \quad BC: y=5-x, \quad 1 \leq x \leq 5; \quad AC: x=1, \quad 0 \leq y \leq 4.$$

Берілген функцияның бір ғана $P(4,2)$ кризистік нүктесі бар, бірақ ол D облысының сыртында орналасқан (2-суретке қараңыз).



2-сурет

AB кесіндісінде $y=0$, сондықтан $z=x^2-8x+21$, мұндағы $1 \leq x \leq 5$.
 $z'=2x-8$; $2x-8=0$; $x=4$. AB да бір кризистік нүкте E , абсциссасы $x=4$.
 $z_E=z(4)=5$, $z_A=z(1)=14$; $z_B=z(5)=6$.

BC кесіндісінде $y=5-x$, сондықтан $z=x^2+(5-x)^2-8x-4(5-x)+21 \rightarrow z=2x^2-14x+26$, мұндағы $1 \leq x \leq 5$; $z'=4x-14$;
 $x=3,5$. BC да бір кризистік нүкте $F(3,5;1,5)$.

$$z_F=z(3,5)=-10,75, \quad z_C=z(1)=14.$$

Табылған мәндерді салыстырсақ, берілген z функциясының ең үлкен мәні $M=z_A=z_C=14$, ал ең кіші мәні $m=z_F=-10,75$, болады.

1-нұсқа

1. $Z=\sqrt{1-x-y}+\sqrt{x}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x=1, y=2$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x=0,1$, $\Delta y=0,2$ мәндерінде $z=x^2y$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $\Delta z=0,662$; $dz=0,6$).

3. $1,02^3 \cdot 0,97^5$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 0,91).

4. $e^{xy} + xy = 0$ айқындалмаған функциясының туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$).

5. $z=x^2+2xy-10$ функциясының $y=0$ түзу және $y=x^2-4$ параболамен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $U=\frac{y}{x}$ функциясының $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ теңдеуді

қанағаттандыратынын тексеріңіз.

2 - нұсқа

1. $z = \sqrt{(x-2)y} + \sqrt{\ln x}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x = 2$, $y = 1$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = -0.3$ мәндерінде $z = x^2 + xy$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $\Delta z = -0.12$; $dz = -0.1$).

3. $\ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$. шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 0,005).

4. $\sin xy + \ln xy - 2 = 0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$).

5. $z = x^2 + xy - 2$ функциясының $y = 0$ түзу және $y = 4x^2 - 4$ параболамен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $z = \sin(ax - by)$ функциясының $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

3 - нұсқа

1. $z = \sqrt{x+2y-4} + \sqrt{x-y}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x = 1$, $y = 4$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.2$ мәндерінде $z = y^2x + xy^2$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $\Delta z = 4.486$; $dz = 4.2$).

3. $1.04^{2.02}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 1,08).

4. $\cos x^2 y^2 + xy = 2$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$).

5. $z = xy - 2x - y$ функциясының $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $y = 0$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $z = \frac{x^2}{y^2}$ функциясы үшін $z''_{xy} = z''_{yx}$ теңдіктің орындалатынын тексеріңіз.

4 – нұсқа

1. $z = \sqrt{2x - y - 4} + \sqrt{y^2 - 4}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x = 1$, $y = 4$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = -0.1$ мәндерінде $z = 2x^2 y^2$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $\Delta z = 11,8048$; $dz = 11,2$).

3. $\ln(\sqrt[3]{1,02} + \sqrt[4]{0,97} - 1)$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: $-0,0035$).

4. $\cos^2 xy - xy + 4 = 0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$).

5. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ функциясының $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 3$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $z = \ln(x - 2y)$ функциясы үшін $z''_{xy} = z''_{yx}$ теңдіктің дұрыстығын тексеріңіз.

5 – нұсқа

1. $z = \sqrt{(x-2)y} + \sqrt{\ln(y-1)}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x = 1$, $y = 2$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = -0.1$ мәндерінде $z = x^2 y^2 + x + y$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $\Delta z = 1,2984$; $dz = 1,3$).

3. $2,03^5 \cdot 0,98^4$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: $0,005$).

4. $\lg x^3 y^3 + xy + 1 = 0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$).

5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ функциясының $y = 0$, $x = 3$, $y = x + 1$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $z = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ функциясының $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{x^2}$ теңдеуді

қанағаттандыратынын тексеріңіз.

6-нұсқа

1. $z = \sqrt{x+y-2} + \sqrt{\ln(x-2)}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x=1, y=2$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x=0.3, \Delta y=-0.1$ мәндерінде $z=2x^3y^2$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $\Delta z=7,86234; dz=6,4$).

3. $\ln(\sqrt[3]{0,97} + \sqrt[3]{1,02} - 1)$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: $-0,00333$).

4. $x^3y^3 - xy + 1 = 0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$).

5. $z = 5x^2 - 3xy + y^4 + 4$ функциясының $y=0, x=0, x+y=2$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. Егер $z = \sin\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$ болса, онда $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = -\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 z$ болатынын дәлелдеңіз.

7-нұсқа

1. $z = \sqrt{x+y-4} + \sqrt{x-y}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x=2, y=3$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x=-0,3, \Delta y=0,1$ мәндерінде $z=ux^2-3xy^2$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $\Delta z=1,948; dz=1,3$).

3. $2,04^{2,03}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: $4,244$).

4. $\ln^2 xy + x^2y^2 = 0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$).

5. $z = x^2 - 2y^2 + 4$ функциясының $x^2 + y^2 = 1$ шеңбермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. Егер $u = \arctg(2x-t)$ функциясы үшін $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$ болатынын

8 – нұсқа

1. $z = \sqrt{2x + 3y - 6} + \ln(x - 3)$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x = 1, y = 2$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x = 0,1, \Delta y = -0,3$ мәндерінде $z = xy - x^{-2}y^2$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $\Delta z = 1,19; dz = 1,3$).

3. $\ln(\sqrt[3]{7,98} + \sqrt[3]{1,03})$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: $-0,0117$).

4. $\sqrt{xy} - e^{xy} - 3 = 0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$).

5. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ функциясының $x = -1, x = 1, y = -1, y = 1$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $u = \ln(x^2 - y^2)$ функциясының $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ тендеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

9 – нұсқа

1. $z = \sqrt{3x - y - 3} + \sqrt{1 - x}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x = 2, y = -1$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x = 0,2, \Delta y = -0,3$ мәндерінде $z = x^3y^2 + x - y$ функцияның толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $\Delta z = 10,495; dz = 7,7$).

3. $2,04^{2,02}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: $4,216$).

4. $\sin xy - tgxy + 2 = 0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$).

5. $z = x^2 + xy - 3x - y$ функциясының $x = 0, x = 2, y = 0, y = 3$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $u = (x^2 - y^2) \ln y$ функциясының $u''_{xx} - u''_{yy} - \frac{1}{4}(u_{xy})^2 = -3$ тендеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

1. $z = \ln(x - 2y - 2) + \sqrt{y + 1}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x = 1, y = 4$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x = -0,1, \Delta y = 0,3$ мәндерінде $z = 1 + x^2 + 2xy^2$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $\Delta z = 1,092; dz = 1,4$).

3. $\ln(\sqrt[3]{8,03} - \sqrt[3]{1,04})$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: $-0,0108$).

4. $e^{xy} - \ln xy + 4 = 0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$).

5. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ функциясының $y = \frac{1}{3}x^2$ парабола және $y = 3$ түзумен қоршалған тұйық облыстағы $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $z = \sqrt{x + \sin y}$ функциясының $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

11- нұсқа

1. $z = \sqrt{y - 2\sqrt{x}}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x = 1, y = 0$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x = 0,5, \Delta y = 0,25$ мәндерінде $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

3. $3,01^{1,97}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: $8,763$).

4. $z^3 x - zy + xy - 3 = 0$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y + z^3}{y - 3xz^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - z}{y - 3xz^2}$).

5. $z = x^3 + 6xy - y^2 - 1$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{\max}(-6; -18) = 107, z(0; 0)$ -экстремум жоқ).

6. $z = \lg(x + \ln y)$ функциясының $z'_x \cdot z''_{xy} = z'_{xy} \cdot z''_{xx}$ теңдеуді қанағаттанды-

ратынын тексеріңіз.

12 – нұсқа

1. $z = \ln(y - x^2 + 5x - 6)$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u = \ln(x^2 + y^2 + xyz)$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } du = \frac{(2x + yz)dx + (2y + xz)dy + xydz}{x^2 + y^2 + xyz}).$$

3. $\sqrt[3]{(2,95)^3 + (2,03)^2} + 1$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 1,986).

4. $\sin(z - y) = x^2 + z^2 - 5$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{\cos(z - y) - 2z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos(z - y)}{\cos(z - y) - 2z}).$$

5. $z = 8y^3 - 6xy + x^3 + 1$; функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{\min}(1; \frac{1}{2}) = 0, z(0; 0)$ -экстремум жоқ).

6. $z = (x + e^y)^2$ функциясының $z'_x \cdot z''_{xy} = z'_y \cdot z''_{xx}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

13 – нұсқа

1. $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u = \ln(e^x + e^y + e^z)$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } du = \frac{e^x dx + e^y dy + e^z dz}{e^x + e^y + e^z}).$$

3. $3,01^{1,98}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 1,986).

4. $xy^2 - z^3 y - x^2 z + 11 = 0$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2 - 2xz}{x^2 + 3yz^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2xy - z^3}{x^2 + 3yz^2}).$$

5. $z = -3x^2 + y^3 + 2xy$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{\max}(-\frac{2}{27}; -\frac{2}{9}) = \frac{4}{729}, z(0; 0)$ -экстремум жоқ).

6. Егер $z = \frac{xy}{x-y}$ болса, онда $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y}$ тендіктің дұрыстығын дәлелдеңіз.

14 – нұсқа

1. $z = \sqrt{y - \sqrt{x-2}}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны, сызып көрсетіңіз.

2. $u = \ln(x + y^2 + z^3)$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } du = \frac{dx + 2ydy + 3z^2 dz}{x + y^2 + z^3}).$$

3. $\sqrt{(2,01)^2 + (1,97)^2}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 1,9933).

4. $e^{xyz} = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yze^{xyz} - 2x}{xye^{xyz} - 2z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xze^{xyz} - 2y}{xye^{xyz} - 2z}).$$

5. $z = \frac{1}{3}x^3 - 2xy - y^2 + 1$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{\max}(-2; 2) = \frac{7}{3}$, $z(0; 0)$ -экстремум жоқ).

6. $u = tg(xy) + \sqrt{xy} \cdot \frac{x}{y}$ функциясының $x^2 u''_{xx} - y^2 u''_{yy} = 0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

15 – нұсқа

1. $z = \sqrt{x + \sqrt{y+2}}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u = \cos \frac{xy}{z^2}$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } du = -\sin \frac{xy}{z^2} (\frac{y}{z^2} dx + \frac{x}{z^2} dy - \frac{2xy}{z^2} dz)).$$

3. $2,02^{3,03}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 8,408).

4. $\ln(z - y) = x^2 + z^2 + 10$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x(z-y)}{1-2z^2+2zy}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1-2z^2+2zy}).$$

5. $z = x^7 - y^3 + 6xy$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{\max}(18; -6) = -148, z(0; 0)$ -экстремум жоқ).

6. $u = xe^{\frac{y}{x}}$ функциясының $u''_{xy} + 2(u'_x + u'_y) = u''_{yy}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

16 – нұсқа

1. $z = \sqrt{y - \sqrt{x-1}}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $du = -2e^{-(x^2+y^2+z^2)}(xdx + ydy + zdz)$).

3. $\sqrt[3]{(3,95)^2 + (3,03)^2 + 2}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 2,992).

4. $x + y - z^2 + x\sqrt{z} = 0$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(\sqrt{z} + z)}{4z\sqrt{z} - x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2\sqrt{z}}{4z\sqrt{z} - x}).$$

5. $z = x^3 + y^3 - 6xy + 1$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{\min}(-2; 2) = -7, z(0; 0)$ -экстремум жоқ).

6. $u = \frac{xy}{x-y}$ функциясының $u''_{xy} + 2u''_{yx} + u''_{yy} = \frac{2}{x-y}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

17 – нұсқа

1. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u = x^2 y^2 e^{xz}$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $du = xye^{xz}[(2y + xyz)dx + 2xdy + x^2 ydz]$).

3. $2,01^5 \cdot 1,97^3$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 250,88).

4. $tgz = z + x - y$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{\partial z}{\partial x} = ctg^2 z; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -ctg^2 z).$$

5. $z = 2x^3 - y^2 + 4xy$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{\max}(-\frac{4}{3}; -\frac{8}{3}) = \frac{64}{27}$, $z(0;0)$ -экстремум жоқ).

6. $u = 2\cos^2(x - \frac{y}{2})$ функциясының $2u''_{yy} + u''_{yx} = 0$ тендеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

18 – нұсқа

1. $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(9 - x^2 - y^2)}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $du = 2x^{-3}[xzdx + yzdy - (x^2 + y^2)dz]$).

3. $\sqrt[4]{(2,03)^3 + (1,94)^3}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 1,989).

4. $\sin(x+z) = \ln(y-z)$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(z-y)(\cos(x+z))}{(y-z)\cos(x+z)+1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{(y-z)\cos(x+z)+1}$).

5. $z = 2x^2 + 3y^3 + 6xy$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{\min}(-\frac{3}{2}; 1) = -\frac{3}{2}$, $z(0;0)$ -экстремум жоқ).

6. $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$ функциясының $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ тендеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

19 – нұсқа

1. $z = \sqrt{4-x^2-y^2} + \sqrt{y-x}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u = e^{\frac{x+z}{y}}$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $du = e^{\frac{x+z}{y}} (\frac{1}{y}dx - \frac{x+z}{y^2}dy + \frac{1}{y}dz)$).

3. $1,97^{2,03}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 3,964).

4. $e^{x+yz} + z - 2 = 0$ айқындалмаған функциясының дербес туындыларын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y + e^{-x-yz}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z}{y + e^{-x-yz}}).$$

5. $z = 2x^3 + 16y^3 + 6xy$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

$$(\text{Жауабы: } z_{\max}(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}, z(0;0) - \text{экстремум жоқ}).$$

6. $u = \sin(x + \sqrt{y})$ функциясының $z'_x z''_{xy} = z'_y z''_{xx}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

20 – нұсқа

1. $z = \sqrt{\ln xy}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u = \arctg \frac{xy}{z^2}$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } du = \frac{yz^2 dx + xz^2 dy - 2xyz dz}{x^4 + x^2 y^2}).$$

3. $\sqrt[4]{(1,98)^3 + (2,02)^3}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 8,408).

4. $e^{2z-y} + x^2 - 2z^2 = 0$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2e^{2z-y} - 4z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^{2z-y}}{2e^{2z-y} - 4z}).$$

5. $z = x^3 + y^3 - 36xy$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{\max}(12;12) = -144$, $z(0;0)$ - экстремум жоқ).

6. $u = \ln(x + \ln y)$ функциясының $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

21- нұсқа

1. $u = \frac{2y}{x}$, $x = e^t$, $y = \ln t$ функциясы берілген. $\frac{du}{dt}$ -ны табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{du}{dt} = -\frac{2y}{x^2} e^t + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{t}).$$

2. $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ функциясының $2f'_x(2;1) + f'_y(2;1) = 0$ теңдікті

қанағаттандыратынын тексеріңіз.

3. Тік бұрышты параллелепипедтің қабырғалары a, b және c . Егер a -ның

мәні 4 см-ден 4,1 см-ге көбейсе, b -ның мәні 8 см-ден 7,8 см-ге кемісе, ал c -ның мәні 8 см-ден 8,3 см-ге көбейсе, онда параллелепипедтің көлемі қаншаға өзгереді?

(Жауабы: 9,6 см³-ге көбейеді).

4. $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4$ функциясының $x = 3, y = 3, y = 3x - 9$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

5. $u = xy + zx$, $M(3; -2; 1), N(1; 0; 0)$ берілген. u функциясынан $\overline{MN} = \vec{l}$ вектор бағыты бойынша алынған туындыны табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z$).

6. $u = e^{xy}$ функциясының $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ теңдеуді

қанағаттандыратынын тексеріңіз.

22 – нұсқа

1. $f(x, y) = \frac{x^2 + 3y^2}{2x + y}$ функциясының $3f'_x(3; 2) + f'_y(3; 2) = \frac{21}{8}$ теңдікті

қанағаттандыратынын тексеріңіз.

2. $u = \ln tg(xy)$, $x = (t + 1)^2$, $y = e^t$ берілген. $\frac{du}{dt}$ -ны табыңыз.

(Жауабы: $\frac{du}{dt} = -\frac{2}{\sin 2xy} [2y(t + 1) + xe^t]$).

3. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері a және b . Егер a -ның мәні 6 см-ден 5,8 см-ге кемісе, ал b -ның мәні 8 см-ден 8,3 см-ге көбейсе, онда үшбұрыштың гипотенузасының мәні қаншаға өзгереді?

(Жауабы: 0,12 см-ге көбейеді).

4. $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4$ функциясының $x = 0, y = 0, x - 3y - 3 = 0$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

5. $u = xz + zy$, $M(0; 1; 5), N(2; 3; 3)$ берілген. u функциясынан $\overline{MN} = \vec{l}$ вектор бағыты бойынша алынған туындыны табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial u}{\partial \ell} = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z$).

6. $u = e^{-\cos(x+iy)}$ функциясының $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ теңдеуді

қанағаттандыратынын тексеріңіз.

1. $f(x, y) = \frac{x^2 + 3y^2}{xy}$ функциясының $f'_x(1;2) + 2f'_y(1;2) = 0$ теңдікті қанағаттандыратынын тексеріңіз.

2. $u = \cos \frac{x}{y}$, $x = \ln t$, $y = t^2 + 1$ берілген. $\frac{du}{dt}$ -ны табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{du}{dt} = -\sin \frac{z}{y} (\frac{1}{yt} - \frac{2xt}{y^2}).)$$

3. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері a және b . Егер a -ның мәнін 6 см-ден 5,8 см-ге кемісе, ал b -ның мәні 8 см-ден 8,3 см-ге көбейсе, онда үшбұрыштың ауданы қаншаға өзгереді?

(Жауабы: 0,1 см²-ге көбейеді).

4. $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4$ функциясының $x = 1$, $y = 3$, $3x + y - 3 = 0$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

5. $u = 2xy + xz$, $M(1;0;3)$, $N(-1;1;1)$ берілген. u функциясынан $\overline{MN} = \vec{l}$ вектор бағыты бойынша алынған туындыны табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{\partial u}{\partial \ell} = -\frac{4}{3}y - \frac{2}{3}z).$$

6. $u = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$ функциясының $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

24 – нұсқа

1. $f(x, y) = \frac{3x - 5y}{2x - y}$ функциясының $f'_x(1;-1) - f'_y(1;-1) = 0$ теңдікті қанағаттандыратынын тексеріңіз.

2. $u = e^{2x+y}$, $x = \cos 2t$, $y = \sin^2 t$ берілген. $\frac{du}{dt}$ -ны табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{du}{dt} = -3e^{2x+y} \sin 2t).$$

3. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері $a=6$ см, $b=8$ см еді. Кейін $a=5,8$ см, $b=8,3$ см болды, сонда үшбұрыштың периметрі қаншаға өзгереді?

(Жауабы: 0,22 см-ге көбейеді).

4. $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4$ функциясының $x = 3$, $y = 3$, $x + 3y - 12 = 0$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

5. $u = xz + 2yz$, $M(0;1;1)$, $N(2;3;2)$ берілген. u функциясынан $\overline{MN} = \vec{l}$

вектор бағыты бойынша алынған туындыны табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + 2z).$$

6. $u = \arctg \frac{y}{x}$ функциясының $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

25 – нұсқа

1. $f(x, y) = \frac{3x+y}{2x-y}$ функциясының $3f'_x(3;-1) - f'_y(3;-1) = 0$ теңдікті қанағаттандыратынын тексеріңіз.

2. $u = e^{x+3y}$, $x = t^2$, $y = \cos t$ берілген. $\frac{du}{dt}$ -ны табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{du}{dt} = e^{x+3y}(2t - 3 \sin t)).$$

3. Тікбұрышты параллелепипедтің жақтары $a = 4$ см, $b = 8$ см, $c = 8$ см еді. Кейін $a = 4,1$ см, $b = 7,8$ см, $c = 8,3$ см болды, сонда параллелепипедтің диагоналы қаншаға өзгереді?

(Жауабы: 0,1 см-ге көбейеді).

4. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{\max}(-4;4) = 18$).

5. $u = 3xy - 2xz$ $M(3;-1;0)$, $N(1;1;1)$ берілген. u функциясынан $\overline{MN} = \bar{l}$ вектор бағыты бойынша алынған туындыны табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{4}{3}x - 2y - \frac{4}{3}z).$$

6. $u = \arctg \frac{y}{x}$ функциясының $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

№27-дәріс. 14-тақырып. Дифференциалдық теңдеулер
14.1 Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Негізгі ұғымдар

1-анықтама. Тәуелсіз айнымалы x , ізделініп отырған функция $y = f(x)$ және оның $y', y'', \dots, y^{(n)}$ туындыларын байланыстыратын теңдеу дифференциалдық теңдеу деп аталады және ол келесі түрде жазылады:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Егер ізделініп отырған функция $y = f(x)$ бір аргументтің функциясы болса, онда теңдеу қарапайым дифференциалдық теңдеу деп аталады.

2-анықтама. Теңдеуге енген туындының ең жоғары ретін дифференциалдық теңдеудің реті деп атайды.

3-анықтама. $F(x, y, y') = 0$ түріндегі теңдеулер бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу, ал

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

түріндегі теңдеу y' -ке қарағанда шешілген теңдеу деп аталады.

4-анықтама. (1) теңдеуді тепе-теңдікке айналдыратын y функциясы оның шешімі деп аталады. Дифференциалдық теңдеудің шешімін табуды оны интегралдау, ал шешімінің графигі интеграл қисығы деп аталады.

(1) дифференциалдық теңдеудің геометриялық мағынасын анықтайық. $f(x, y)$ функциясының анықталу облысы D -ның әрбір $M(x, y)$ нүктесіне бұрыштық коэффициенті $f(x, y)$ -ке тең болған кесіндіні (бағытты) сәйкес қоямыз, яғни $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$. Сонда (1) дифференциалдық теңдеуге D облысындағы бағыттар өрісі сәйкес келеді. Олай болса, (1) дифференциалдық теңдеуді шешу дегеніміз әрбір нүктесіндегі жанамасының бағыты бағыттар өрісіндегі кесіндінің бағытымен беттесетін интеграл қисықтарын табу деген сөз. Мұндай қисықтар шексіз көп, демек (1) теңдеуінің шешімі де шексіз көп.

Көптеген практикалық есептерде (1) дифференциалдық теңдеудің берілген (x_0, y_0) нүктесінен өтетін нақты бір интеграл қисығын табу қажет болады. Белгісіз y функциясының x_0 -дегі мәнін беру-бастапқы шарттын берілуі деп аталады және ол былай жазылады:

$$\left. y \right|_{x=x_0} = y_0 \text{ немесе } y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Дифференциалдық теңдеулер теориясының төмендегі негізгі теоремасы (1) теңдеудің шешімінің бар болуының шарттарын береді.

Теорема. Егер $y' = f(x, y)$ теңдеуінің оң жағындағы $f(x, y)$ функциясы және оның $f'(x, y)$ дербес туындысы D облысының барлық (x, y) нүктелерінде анықталған және үзіліссіз болса, онда бұл дифференциалдық теңдеудің $y(x_0) = y_0$ шартын қанағаттандыратын жалғыз шешімі бар болады.

Мұндағы (x_0, y_0) , D облысының кез келген ішкі нүктесі, $D, f(x, y)$

функциясының анықталу облысы. Бұл теорема (1) дифференциалдық теңдеудің жалғыз шешімі бар болуының Коши теоремасы деп аталады. Оның дәлелдеуін тізімде келтірілген оқулықтардан оқып алуды студенттердің өздеріне ұсынамыз.

$y' = f(x, y)$ теңдеудің $y(x_0) = y_0$ шартты қанағаттандыратын шешімін табу есебін Коши есебі деп атайды.

Коши теоремасының геометриялық мағынасы мынадай: D облысының кез келген (x_0, y_0) нүктесі арқылы (1) теңдеудің бір ғана интеграл қисығы өтеді.

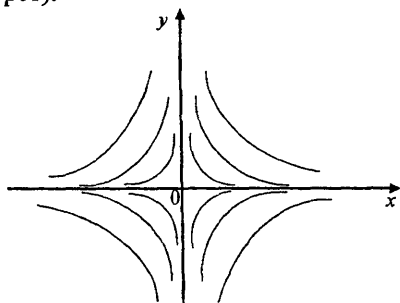
5-анықтама. Төмендегі екі шартты қанағаттандыратын $y = \varphi(x, c)$ функциясы (1) теңдеудің жалпы шешімі деп аталады:

1) тұрақты c -ның кез келген мәнінде $y = \varphi(x, c)$ функциясы (1) теңдеуінің шешімі болады;

2) D облысының ішкі (x_0, y_0) нүктесі үшін c -ның жалғыз $c = c_0$ мәні бар, яғни $y = \varphi(x, c_0)$ және бұл функция $y(x_0) = y_0$ бастапқы шартын қанағаттандырады.

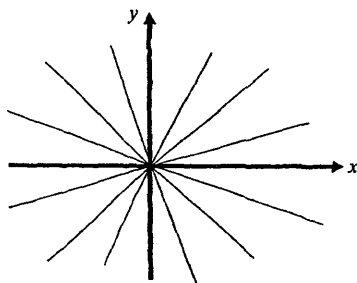
6-анықтама. c -ның нақты c_0 мәнінде (1) теңдеуінің жалпы шешімі $y = \varphi(x, c)$ функциясынан шығатын $y = \varphi(x, c_0)$ функциясы (1) теңдеудің дербес шешімі деп аталады.

1-мысал. $y' = -\frac{y}{x}$ теңдеудің жалпы шешімі $y = \frac{c}{x}$. Бұл гиперболалар өрісін анықтайды (1-сурет).



1-сурет

2-мысал. $y' = \frac{y}{x}$ теңдеудің жалпы шешімі $y = cx$, бұл $O(0,0)$ нүктесінен өтетін барлық түзулерді анықтайды (2-сурет). $O(0,0)$ нүктесінде Коши теоремасының шарты бұзылады, берілген теңдеудің оң жағы $O(0,0)$ нүктесінде анықталмаған.



2-сурет

Айнымалылары бөлінетін дифференциалдық теңдеулер

7-анықтама. $f_1(x)f_2(y)dx - \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$ (3)

немесе

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (4)$$

түріндегі теңдеулер айнымалылары бөлінетін дифференциалдық теңдеулер деп аталады.

(3) теңдеуді шешу үшін онда элементар түрлендірулер жүргіземіз, яғни (3) теңдеудің екі жағын $f_2(y) \cdot \varphi_1(x)$ -ке бөлеміз. Сонда

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx = \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy.$$

Бұл теңдіктің екі жағын интегралдасак

$$\int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy = \int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + c. \quad (5)$$

(5) өрнек (3) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі болады.

Ескерту! (4) теңдеуінің екі жағын $f_2(y)$ -ке бөлгенде оның кейбір шешімі жоғалуы мүмкін.

3-мысал. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

Шешуі. Элементар түрлендірулер нәтижесінде берілген теңдеуді $\frac{dx}{1-x} = \frac{dy}{1+y}$ түрге келтіреміз. Теңдеудің екі жағын интегралдаймыз.

$$\ln|1+y| = -\ln|1-x| + \ln C,$$

$$\ln(1+y)(1-x) = \ln C,$$

$$(1+y)(1-x) = C.$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді жазыңыз.
2. Дифференциалдық теңдеудің шешімінің анықтамасын беріңіз
3. $y' = f(x, y)$ дифференциалдық теңдеудің геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.
4. Коши теоремасын баяндаңыз.
5. Коши есебі деген не?
6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің анықтамасын беріңіз.
7. Дербес шешім деген не?
8. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу тек қана екі шешімге ие болуы мүмкін бе?
9. Дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің геометриялық мағынасы не?
10. Айнымалылары бөлінетін дифференциалдық теңдеудің анықтамасын беріңіз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $(y-1)dy + (x+2)dx = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін және $y(0) = -1$ бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз

Шешуі. Берілген теңдеу айнымалылары бөлінген дифференциалдық теңдеу, сондықтан оны интегралдап жалпы шешімін табамыз:

$$\int (y-1) dy + \int (x+2) dx = C,$$

немесе

$$\frac{y^2}{2} - y + \frac{x^2}{2} + 2x = C,$$

Сонымен

$$y^2 - 2y + x^2 + 4x = 2C,$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2C$$

жалпы шешімі.

Бастапқы шарттан пайдаланып C -ның мәнін табамыз.

$$(0+2)^2 + (-1-1)^2 = 2C; 4+4 = 2C; C = 4.$$

Сонымен

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

дербес шешімі. Бұл центрі $(-2; 1)$ нүктесінде, радиусы $2\sqrt{2}$ -ге тең шеңбер.

2-мысал. $\operatorname{ctg} x dy + y dx = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін және $y(0) = -1$ бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

Шешуі. Екі жағын $y \cdot \operatorname{ctg} x$ - ке бөліп

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\operatorname{ctg} x} = 0, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\operatorname{ctg} x}.$$

Соңғы теңдікті интегралдап

$$\ln y = -\int \operatorname{tg} x dx + C, \quad \ln y = \ln |\cos x| + \ln C_1$$

Олай болса $y = C_1 \cdot \cos x$ жалпы шешімі.

Бастапқы шарттан пайдаланып C_1 -ді табамыз.

$$-1 = C \cdot \cos 0; \quad C_1 = -1.$$

$y = -\cos x$ дербес шешімі.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі дифференциалдық теңдеулердің жалпы, ал бастапқы шарттары берілгендерінің дербес шешімдерін табыңыздар.

$$1. (x-1)dy - 2(y-2)dx = 0; y(0) = -1. \quad \text{Жауабы: } y = 2 - 3(x-1)^2.$$

$$2. dy - 3(x-1)^2 dx = 0; y(0) = -1. \quad \text{Жауабы: } y = (x-1)^3.$$

$$3. y - y' = y^2 + xy'; y(0) = -1. \quad \text{Жауабы: } y = -\frac{1+x}{1-x}.$$

$$4. x(1+2y)dx + (1+x^2)dy = 0; y(0) = -1. \quad \text{Жауабы: } y = -\frac{2+x^2}{2(1+x^2)}.$$

$$5. y' \cdot x^2 + 1 = y - y' \cdot x. \quad \text{Жауабы: } y = 1 + c - \frac{c}{x+1}.$$

$$6. dy - a^{x+y} \cdot dx = 0. \quad \text{Жауабы: } y = a^x + a^{-y} = c.$$

$$7. y' = 10^{x+y}. \quad \text{Жауабы: } y = 10^x + 10^{-y} = c.$$

$$8. \sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy. \quad \text{Жауабы: } y = \sqrt{y^2 + 1} = \ln c.$$

14.2 Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеулер

1-анықтама. Егер $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ теңдігі орындалса, онда $f(x, y)$ функциясы n өлшеулі біртекті функция деп аталады

1-мысал. $f(x, y) = x^3 + y^3$ үш өлшеулі біртекті функция, себебі,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3 = \lambda^3 (x^3 + y^3) = \lambda^3 f(x, y)$$

2-мысал. $f(x, y) = xy - y^2$ — екі өлшеулі біртекті функция, себебі,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 xy + \lambda^2 (xy - y^2) = \lambda^2 f(x, y).$$

3-мысал. $f(x, y) = \frac{x+y}{x}$ — нөл өлшеулі біртекті функция, себебі,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x} = \frac{x+y}{x} = f(x, y),$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y).$$

2-анықтама. Егер $y' = f(x, y)$ дифференциалдық теңдеудің оң жағы $f(x, y)$ нөл өлшеулі біртекті функция болса, онда берілген теңдеу біртекті дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Біртекті дифференциалдық теңдеу мынадай әдіспен шешіледі. Шарт бойынша $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ болғандықтан, мұнда $\lambda = \frac{1}{x}$ десек,

$f(x, y) = \left(1, \frac{y}{x}\right)$ болады. Басқаша айтқанда, нөл өлшеулі біртекті функция тек

қана аргументтердің қатынасына тәуелді. Бұл жағдайда $y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ теңдеуін шешу үшін $y = ux$ алмастыруын жасаймыз. Соңғы теңдіктен туынды алып берілген теңдеуге қоямыз. Сонда

$$y' = u'x + u; \quad u'x + u = f(u); \quad u'x = f(u) - u.$$

Айнымалыларды бөлсек $\frac{dy}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$ теңдігі шығады.

Соңғы теңдікті интегралдап u -ды табамыз. Оның мәнін $y = ux$ -ке қойсақ, іздеген функция табылады.

4-мысал. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$ теңдеудің шешімін табалық.

Шешуі. $y = ux; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u;$

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{x+ux}{x}; \quad \frac{du}{dx} \cdot x = 1 + u - u; \quad \frac{du}{dx} \cdot x = 1; \quad du = \frac{dx}{x}; \quad u = \ln|x| + C;$$

Сонымен $y = x(\ln|x| + C)$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

14.3 Біртекті теңдеулерге келтірілетін дифференциалдық теңдеулер

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + C}{a_1x + b_1y + C_1} \quad (1)$$

түріндегі теңдеулер біртекті теңдеуге келтірілетін дифференциалдық теңдеулер деп аталады. Егер (1) теңдеуде $C_1 = C = 0$ болса, онда ол біртекті теңдеу болады. Егер

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k$$

алмастыруын жасасақ, онда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$. Осыларды (1) теңдеуге қоялық. Сонда

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + C}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + C_1}. \quad (2)$$

болады. Мұндағы h және k тұрақтыларын

$$\begin{cases} ah + bk + C = 0, \\ a_1 h + b_1 k + C_1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

жүйені қанағаттандыратындай етіп таңдаймыз, Онда (2) теңдеу

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1 x_1 + b_1 y_1}$$

түріне келеді. Бұл біртекті дифференциалдық теңдеу, оны шешіп табылған x_1, y_1 -лердің орнына $x_1 = x - h, y_1 = y - k$ мәндерін қоямыз да (1) дифференциалдық теңдеудің шешімін аламыз.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

анықтауышы нөлге тең болған жағдайда (3) жүйенің жалғыз шешімі болмайтыны белгілі. Бұл жағдайда $ab_1 - a_1b = 0$, яғни $a_1 = a\lambda, b_1 = b\lambda$. a_1 мен b_1 -дің мәндерін (1) теңдеуге қойсақ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + C}{\lambda(ax + by) + C_1} \quad (4)$$

шығады. (4) теңдеуде $z = ax + by$ алмастыруын жасасақ,

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}, \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}. \quad (6)$$

шығады. (4) теңдеуді, (6) және $z = ax + by$ алмастыруы арқылы келесі түрде жазамыз.

$$\frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z + C}{\lambda z + C_1}.$$

Бұл алдын қарастырылған айнымалылары бөлінетін теңдеу.

(1) теңдеуді интегралдауға қолданылған әдісті кез келген

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + C}{a_1 x + b_1 y + C_1}\right)$$

түріндегі дифференциалдық теңдеуді интегралдауға да қолдануға болады.

Мысал. $(x + y + 2)dx + (3x + 3y - 1)dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

болғандықтан, $z = x + y$ алмастыруын орындаймыз

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}.$$

$$\text{Берілген теңдеуді } \frac{dy}{dx} = -\frac{x + y + 2}{3(x + y) - 1}$$

түрінде жазып, мұндағы $\frac{dy}{dx}$ -тің орнына $\left(\frac{dz}{dx}-1\right)$ -ді, ал $(x+y)$ -тің орнына z -ті жазамыз:

$$\frac{dz}{dx}-1=-\frac{z+2}{3z-1};$$

$$\frac{dz}{dx}=1-\frac{z+2}{3z-1}=\frac{2z-3}{3z-1}; \quad \frac{3z-1}{2z-3}dz=dx;$$

Осыдан

$$\int \frac{3z-1}{2z-3} dz = \int dx + c; \quad \frac{3}{2} \int \frac{2z-3}{2z-3} dz + \frac{7}{2} \int \frac{dz}{2z-3} = x + C;$$

$$\frac{3}{2}z + \frac{7}{4} \ln|2z-3| = x + c; \quad 7 \ln|2x+2y-3| = c_1 - 2x - 6y.$$

14.4 Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

1-анықтама. $y' + p(x)y = q(x)$ түріндегі теңдеулер бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер деп аталады. Мұндағы $p(x)$, $q(x)$ функциялары x -ке тәуелді берілген функциялар. Енді сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешудің Бернулли әдісін баяндайық.

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (1)$$

теңдеудің шешімін $y = u(x) \cdot \vartheta(x)$ түрінде іздейміз, мұндағы $u(x)$, $\vartheta(x)$ функцияларының біреуі (1) теңдеудің шешімі, ал екіншісі кез келген функция. Осы u функциясының туындысын алып (1) теңдеуге қойсақ

$$u' \vartheta + uv' + p(x) \cdot u \vartheta = q(x), \quad u' \vartheta + u(\vartheta' + p(x)\vartheta) = q(x). \quad (2)$$

Соңғы теңдіктен $\vartheta' + p(x)\vartheta = 0$ теңдеуін қанағаттандыратындай етіп ϑ функциясын таңдаймыз, яғни оны шешеміз.

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -p(x)dx, \quad \ln \vartheta = -\int p(x)dx; \quad \vartheta = e^{-\int p(x)dx}.$$

Табылған ϑ функциясын (2) теңдікке қоямыз да

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x), \quad du = q(x) e^{\int p(x)dx} dx;$$

$$u = \int q e^{\int p(x)dx} dx + C;$$

функциясын табымыз. Олай болса $y = \left(\int q e^{\int p(x)dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Мысал. $y' - y \operatorname{tg} x = 2x \sec x$ теңдеуінің шешімін ізделік.

Шешуі. $y = u \vartheta$ түрінде іздейміз. Туындысын алып берілген теңдеуге қоямыз.

$$u' \vartheta + uv' - u \vartheta \operatorname{tg} x = 2x \sec x, \quad u' \vartheta + u(\vartheta' - \vartheta \operatorname{tg} x) = 2x \sec x.$$

ϑ -ны кез-келген функция десек, оны $\vartheta' - \vartheta \operatorname{tg} x = 0$ теңдеуден табуға болады.

$$g' = g \lg x, \frac{dg}{g} = \lg x dx, \ln g = -\ln |\cos x|; g = \frac{1}{\cos x};$$

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = 2x \cdot \frac{1}{\cos x}; u' = 2x, du = 2x dx, u = x^2 + C.$$

Сонымен $y = \frac{1}{\cos x}(x^2 + C)$ функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі.

2-анықтама. $y' + p(x)y = q(x) \cdot y^n$ түріндегі теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады.

Бернулли теңдеуі сызықты емес, бірақ ол қарапайым түрлендіру арқылы сызықты теңдеуге келтіріледі.

Теңдеудің екі жағын y^n -ге бөлсек

$$y^{-n} y' + p(x) y^{-n+1} = q(x)$$

теңдеуін аламыз $y^{-n+1} = z$ деп белгілесек, онда $(-n+1)y^{-n} \cdot y' = z'$. Осыларды соңғы теңдеуге қойсақ:

$$\frac{1}{1-n} z' + p(x)z = q(x), \quad z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

түріндегі сызықтық дифференциалдық теңдеуді аламыз. Ол теңдеу жоғарыда баяндалған әдіспен шешіледі.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Біртекті функцияның анықтамасын беріңіз, мысалдар келтіріңіз.
2. Біртекті дифференциалдық теңдеудің анықтамасын беріңіз.
3. Біртекті дифференциалдық теңдеуді шешу әдісін баяндаңыз.
4. Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулерді шешу әдісін баяндаңыз.
5. Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің анықтамасын беріңіз.
6. Сызықты дифференциалдық теңдеулерді шешудің Бернулли әдісін баяндаңыз.
7. Сызықты дифференциалдық теңдеудің шешімі қандай түрде ізделінеді?
8. Бернулли теңдеуінің анықтамасын беріңіз және шешу әдісін баяндаңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $xy' - y = x \lg \frac{y}{x}$ теңдеуінің шешімін ізделік.

Шешуі. Берілген теңдеуді $y' = \frac{y}{x} + \lg \frac{y}{x}$ түріне келтіреміз. Бұл біртекті дифференциалдық теңдеу, себебі

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + \lg \frac{\lambda y}{\lambda x} = \frac{y}{x} + \lg \frac{y}{x} = f(x, y),$$

яғни теңдеудің оң жағы нөл өлшеулі біртекті функция. Онда, $y = ux$ алмастыруын жасаймыз. Бұл функцияның туындысын тауып, берілген теңдеуге қойсақ.

$$u'x + u = \frac{ux}{x} + tg \frac{ux}{x}; \quad u'x + u = u + tgu; \quad \frac{du}{dx} \cdot x = tgu; \quad \frac{du}{tgu} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{du}{tgu} = \int \frac{dx}{x} + C; \quad \int ctg u du = \ln|x| + C; \quad \ln|\sin u| = \ln|x| + \ln C; \quad \sin \frac{y}{x} = xC;$$

функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі.

2-мысал. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y - 2}{x + y + 4}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$ жүйесінің шешімі $x = -1, y = -3$ болады.

$x = x_1 - 1, y = y_1 - 3$ алмастыруын жасасақ

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 - y_1}{x_1 + y_1}$$

біртекті дифференциалдық теңдеуі шығады.

$y_1 = ux_1$ десек, онда $\frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1}, u + x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1 - u}{1 + u}; \quad x_1 \frac{du}{dx_1} = -\frac{u^2 + 2u - 1}{1 + u}.$

Соңғы теңдеудің айнымалыларын бөлсек

$$\frac{1 + u}{u^2 + 2u - 1} du = -\frac{dx_1}{x_1}$$

теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеуді интегралдасақ

$$\frac{1}{2} \ln|u^2 + 2u - 1| = -\ln|x_1| + \ln C;$$

теңдеуі шығады. Осыдан

$$\sqrt{u^2 + 2u - 1} \cdot x_1 = C;$$

u -дың орнына $\frac{y_1}{x_1}$ -ді қойсақ :

$$\sqrt{y_1^2 + 2x_1y_1 - x_1^2} = c \quad \text{немесе} \quad y^2 - x^2 + 2xy + 8y + 4x + 14 = C.$$

3-мысал. $xy' + (x+1)y = 3x^2 \cdot e^{-x}$ теңдеудің $y(-1) = e$ бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

Шешуі. Бұл сызықты дифференциалдық теңдеу, $y = u^g$ алмастыруын жасаймыз. Туындысын тауып, берілген теңдеуге қойсақ

$$xu'g + xu^g + (x+1)u^g = 3x^2e^{-x}, \quad xu'g + u(x^g + (x+1)g) = 3x^2e^{-x},$$

g -ны $x^g + (x+1)g = 0$ теңдеуден табамыз.

$$x \frac{d^g}{dx} = -(x+1)g, \quad \frac{d^g}{g} = -\frac{x+1}{x} dx, \quad \int \frac{d^g}{g} = -\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx, \quad \ln g = -x - \ln|x|;$$

$$\ln \vartheta = \ln \frac{1}{xe^x}; \quad \vartheta = \frac{1}{xe^x}; \quad x \cdot u' \cdot \frac{1}{xe^x} = 3x^2 e^{-x}; \quad u' \cdot e^{-x} = 3x^2 e^{-x}; \quad \frac{du}{dx} = 3x^2; \quad u = x^3 + C;$$

$y = (x^3 + C) \cdot \frac{1}{xe^x}$ - берілген теңдеудің жалпы шешімі. Енді бастапқы шартты пайдаланамыз. Сонда

$$y = ((-1)^3 + C) \cdot \frac{1}{(-1)e^{-1}};$$

$c - 1 = -1$; $c = 0$, яғни $y = x^2 e^{-x}$ дербес шешімі.

4-мысал. $xy' + y - y^2 \ln x = 0$ теңдеуінің шешімін табалық.

Шешуі. Берілген теңдеу Бернулли теңдеуі. Оны сызықты дифференциалдық теңдеуге келтіреміз, ол үшін екі жағын y^2 -қа бөлеміз

$$xy^{-2} \cdot y' + y^{-1} = \ln x.$$

$y^{-1} = z$ деп белгілеп, екі жағынан туынды аламыз.

Сонда

$$\begin{aligned} -y^{-2} y' &= z', \\ -xz' + z &= \ln x. \end{aligned}$$

Бұл сызықтық теңдеу.

$z = u \vartheta$ алмастыруын жасаймыз.

$$-xu' \vartheta - xu \vartheta' + u \vartheta = \ln x; \quad -xu' \vartheta - u(x \vartheta' - \vartheta) = \ln x; \quad x \vartheta' - \vartheta = 0; \quad x \vartheta' = \vartheta;$$

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{dx}{x}; \quad \ln \vartheta = \ln x; \quad \vartheta = x; \quad -xu' \cdot x = \ln x; \quad du = -\frac{1}{x^2} \ln x dx$$

$$u = -\int \frac{1}{x^2} \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ d\vartheta = -\frac{1}{x^2} dx, \quad \vartheta = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{x} \ln x - \int \frac{1}{x^2} dx + C = \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + C;$$

u, ϑ -лардың мәндерін орнына қойып $y = Cx + \ln x + 1$ жалпы шешімін табамыз.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі дифференциалдық теңдеулердің жалпы және дербес шешімдерін табыңыздар.

1. $(x+y)y' + x - y = 0$; $y(1) = 0$.

Жауабы: $\ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$.

2. $xy' = 3y(\ln y - \ln x)$.

Жауабы: $y = xe^{\frac{1+\alpha^2}{3}}$.

3. $(x^2 - y^2)y' = 2xy$; $y(1) = 1$.

Жауабы: $x^2 + y^2 = Cy$; $C = 2$.

4. $x^2 y' = y^2 - xy$; $y(2) = -1$.

Жауабы: $y = \frac{2x}{1 + cx^2}$; $C = -\frac{5}{4}$.

5. $y' + y \cos x = \sin 2x$; $y(0) = 0$.

Жауабы:
 $y = 2(\sin x - 1) + C \cdot e^{-\sin x}$, $C = 2$.

$$6. y' - 2xy = 2xe^{x^2}; y(0) = e.$$

$$\text{Жауабы: } y = (x^2 + C)e^{x^2}, C = 1.$$

$$7. xy' - y = x \ln x; y(1) = -1.$$

$$\text{Жауабы: } y = Cx + \frac{1}{2}x \ln^2 x; C = 1.$$

$$8. (x + e^y)dy - dx = 0.$$

$$\text{Жауабы: } (y + C)e^y = x.$$

$$9. (2e^y - x)dy - dx = 0.$$

$$\text{Жауабы: } x = Ce^{-y} + e^y.$$

$$10. xy^2 \cdot y' + x^2 - y^3 = 0.$$

$$\text{Жауабы: } y = \sqrt[3]{Cx^3 - 3x^2}.$$

$$11. 3xy^2 \cdot y' - 2y^3 - x^3 = 0.$$

$$\text{Жауабы: } y^3 = Cx^2 + x^3.$$

$$12. (1 + 2x - y)dy - 2dx = 0.$$

$$\text{Жауабы: } x = \frac{1}{2}y + Ce^y.$$

$$13. (x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0. \quad \text{Жауабы: } x^2 + xy - y^2 - x + 3y = C.$$

$$14. (x - y + 4)dy + (x + y - 2)dx = 0. \quad x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C.$$

$$15. 2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0, \quad \text{Жауабы: } 3x + 2y - 4 + 2\ln|x + y - 1| = 0.$$

$$y(0) = 2.$$

14.5 Толық дифференциалдық теңдеулер

Үзіліссіз және дифференциалданатын $M(x, y)$, $N(x, y)$ функциялары берілсін.

Анықтама. Егер $M(x, y)$, $N(x, y)$ функциялары үшін

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (1)$$

теңдігі орындалатын болса, онда

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

теңдеуі толық дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Айталық (2) теңдеудің сол жағы қандайда бір $u(x, y)$ функциясының толық дифференциалы болсын, яғни

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy;$$

Олай болса

$$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3)$$

(3) теңдіктердің біріншісін y бойынша, ал екіншісін x бойынша дифференциалдайық, яғни

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Екінші ретті туындыларды үзіліссіз десек, онда

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

теңдігін аламыз, яғни (1) теңдік (2) теңдеудің сол жағы қандай да бір $u(x, y)$ функциясының толық дифференциалы болуы үшін қажетті шарт болады екен. Енді (1) шарттың жеткілікті де шарт екенін көрсетелік, яғни егер (1) теңдік орындалса, онда (2) теңдеудің сол жағы қандай да бір $u(x, y)$ функциясының толық дифференциалы болады.

$M(x, y)$ қандай да бір $u(x, y)$ функциясынан x бойынша алынған дербес туындыға тең болсын делік, яғни

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

Осы соңғы теңдеуді интегралдап:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y)$$

теңдігін аламыз, мұндағы x_0 , берілген теңдеудің шешімінің анықталу облысынан алынған кез келген нүктенің абсциссасы x бойынша интегралдағанымызда y -ті тұрақты деп есептегендіктен интегралданатын тұрақты C -ны жалпы жағдайда y -ке тәуелді деп қабылдау мүмкін. $\varphi(y)$ функциясын (3) формулалардың екінші теңдігі орындалатындай етіп таңдаймыз. Ол үшін соңғы теңдіктің екі жағын y бойынша дифференциалдап нәтижесін $N(x, y)$ -ке теңестіреміз

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Болғандықтан

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N(x, y) \quad \text{немесе}$$

$$N(x, y) \Big|_{x_0}^x + \varphi'(y) = N(x, y);$$

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y),$$

$$\varphi'(y) = N(x_0, y).$$

Соңғы теңдікті интегралдасак:

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1$$

$\varphi(y)$ -тің мәнін орнына коямыз:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1.$$

Мұндағы $P(x_0, y_0)$ - маңайында (2) теңдеудің шешімі бар болатын нүкте.

Сонымен, егер (1) теңдік орындалса, онда (2) теңдіктің сол жағы $u(x, y)$ функциясының толық дифференциалы болады, яғни

$$du(x, y) = 0.$$

Соңғы теңдеуді интегралдасақ $u(x, y) = c$ шығады. Сондықтан (2) теңдеудің жалпы шешімі

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C \quad (4)$$

түрінде болады.

14.5 Толық дифференциалдық теңдеулер үшін интегралдық көбейткіш

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

теңдеудің сол жағын қандайда бір функцияның толық дифференциалы болмасын делік. Мынандай жағдай болуы мүмкін: (1) теңдеудің екі жағын қандай да бір $\mu(x, y)$ функциясына көбейткеннен кейін оның сол жағы белгілі бір функцияның толық дифференциалы болып, ал жаңа теңдеудің жалпы шешімі берілген теңдеудің де жалпы шешімі болады. Осындай $\mu(x, y)$ функциясы (1) теңдеудің интегралдық көбейткіші деп аталады.

$\mu(x, y)$ интегралдық көбейткішті табу үшін (1) теңдеудің екі жағын $\mu(x, y)$ -ке көбейтелік:

$$\mu M dx + \mu N dy = 0.$$

Соңғы теңдеу толық дифференциалдық теңдеу болуы үшін

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

теңдіктің орынды болуы қажетті және жеткілікті. Олай болса

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

немесе

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Соңғы теңдеудің екі жағын $\mu(x, y)$ -ке бөліп төмендегі теңдеуді аламыз

$$M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (2)$$

(2) теңдеуді қанағаттандыратын кез келген $\mu(x, y)$ функциясы (1) теңдеудің интегралдық көбейткіші болады.

Жалпы жағдайда (2) теңдеуден $\mu(x, y)$ -ті табу есебі (1) теңдеуді шешу есебіне қарағанда әлдеқайда күрделірек. Тек қана кейбір жағдайларда ғана (2)

теңдіктен $\mu(x, y)$ функциясын таба аламыз. (1) теңдеудің тек қана y -ке тәуелді интегралдық көбейткіші бар болсын делік. Онда

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0.$$

Бұл жағдайда (2) теңдеуден

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

теңдеуін аламыз. Егер $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ өрнек x -ке тәуелді болмаса, онда соңғы теңдеуді интегралдап тек қана y -тен тәуелді $\mu(y)$ -ті анықтап аламыз.

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

Осыған ұқсас, егер $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ өрнек y -ке тәуелді болмаса, онда тек қана x -ке тәуелді $\mu(x)$ төмендегі формуламен анықталады:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Қандай теңдеу толық дифференциалдық теңдеу деп аталады?
2. Толық дифференциалдық теңдеу болу үшін қажетті және жеткілікті шартты жазыңыз.
3. Толық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін беретін формуланы жазыңыз.
4. Қандай жағдайда интегралдық көбейткішті жеңіл жолмен анықтауға болады?
5. Интегралдық көбейткішті табатын формулаларды жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $M(x, y) = 2xy, N(x, y) = x^2 + y^2$. $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x; \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$. Демек, берілген теңдеу толық дифференциалдық екен. $x_0 = y_0 = 0$ делік.

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C$$

формуласын қолданамыз.

$$\int_0^x 2xy dx + \int_0^y (0 + y^2) dy = C, \quad x^2 y + \frac{y^3}{3} = C,$$

$y(3x^2 + y^2) = C$ – берілген теңдеудің жалпы шешімі.

2-мысал. $(2x + y)dx + (x - 4y)dy = 0$ теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$. Демек, берілген теңдеу толық дифференциалдық

екен. $x_0 = y_0 = 0$ деп қабылдаймыз. 1-мысалдағы формуланы қолданамыз.

$$\int_0^x (2x + y)dx + \int_0^y (0 - 4y)dy = C,$$

$x^2 + xy - 2y^2 = c$ жалпы шешім.

3-мысал. $(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0$ теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі.

$$M(x, y) = x \sin y + y \cos y, \quad N(x, y) = x \cos y - y \sin y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x \cos y + \cos y - y \sin y; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x \cos y - y \sin y}{x \cos y - y \sin y} = 1.$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 1; \quad \ln \mu = x; \quad \mu = e^x.$$

Берілген теңдеудің екі жағын интегралдық көбейткіш $\mu = e^x$ -ке көбейтеміз.

$$e^x (x \cos y - y \sin y)dy + e^x (x \sin y + y \cos y)dx = 0,$$

$$M_1(x, y) = e^x (x \sin y + y \cos y); \quad N_1(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y).$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

болғандықтан, соңғы дифференциал теңдеу толық дифференциалдық теңдеу болады. Онда $x_0 = y_0 = 0$ деп қабылдап, 1-мысалдағы формуланы қолданамыз:

$$\int_0^x e^x (x \sin y + y \cos y)dx + \int_0^y e^0 (0 - y \sin y)dy = C;$$

$$(xe^x - e^x + 1) \sin y + y \cos y (e^x - 1) + y \cos - \sin y = C.$$

$$e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y) = C \text{ жалпы шешім.}$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін табыңыздар.

$$1. e^x + y + \sin y dx + (e^y + x + x \cos y) dy = 0. \quad \text{Жауабы: } e^x + xy + x \sin y + e^y = C.$$

$$2. (x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0.$$

$$\text{Жауабы: } e^y + \frac{1}{2}x^2 + xy - x = C.$$

$$3. (x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0.$$

$$\text{Жауабы: } \frac{1}{2}x^2 + x \sin y - \cos y = C.$$

$$4. (y + e^x \sin y)dx + (x + e^y \cos y)dy = 0.$$

$$\text{Жауабы: } xy + e^x \sin y = C.$$

Төмендегі теңдеулердің жалпы шешімін және интегралдық көбейткіштерін табыңыздар.

$$5. ydx - xdy + \ln x dx = 0.$$

$$\text{Жауабы: } \mu = \frac{1}{x^2}; y = Cx - \ln x - 1.$$

$$6. ydx - (x + y^2)dy = 0.$$

$$\text{Жауабы: } \mu = \frac{1}{y^2}; x = y(C + y).$$

14.6 Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер

n -ші ретті дифференциалдық теңдеу жалпы жағдайда

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

түрінде жазылатыны жоғарыда айтылған еді. Айталық (1) теңдеу

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

түрінде болсын. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуге ұқсас (2) теңдеудің де жалғыз шешімінің бар болу теоремасының тұжырымын берелік.

Теорема. Егер (2) теңдеудің оң жағындағы $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ функциясы және оның $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ аргументтер бойынша дербес туындылары $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ нүктелері ішінде жататын облыста үзіліссіз болса, онда (2) теңдеудің

$$\begin{cases} y|_{x=x_0} = y_0, \\ y'|_{x=x_0} = y'_0, \\ \dots \dots \dots \\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (3)$$

шарттарын қанағаттандыратын жалғыз $y = y(x)$ шешімі бар болады. (3) шарттар бастапқы шарттар деп аталады. Бұл теореманың дәлелдеуін «Дифференциалдық теңдеулер» пәні бойынша толығырақ жазылған оқулықтардан оқып алуға болады.

1-анықтама. (2) теңдеудің жалпы шешімі деп төмендегі шарттарды қанағаттандыратын $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ функциясын айтады:

а) $C_1, C_2, \dots, C_n$ тұрақтылардың кез келген мәнінде φ функциясы (2) теңдеуді қанағаттандырады;

ә) $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ теңдіктен (3) шарттарды қанағаттандыратындай $C_1, C_2, \dots, C_n$ тұрақтыларын табуға болады.

2-анықтама. $C_1, C_2, \dots, C_n$ тұрақтылардың нақты мәндерінде $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ жалпы шешімінен шығатын функцияны (2) теңдеудің дербес шешімі деп атайды.

Дербес шешімнің графигі дифференциалдық теңдеудің интеграл қисығы деп аталады.

14.7 Реті төмендетілетін екінші ретті дифференциалдық теңдеулер

Жалпы жағдайда екінші ретті дифференциалдық теңдеудің шекті түрдегі шешімі табылмайды. Сондықтан, тікелей интегралданатын немесе реті төмендетілетін жағдайларды қарастырамыз.

1. $y'' = f(x)$ теңдеуі берілсін. Екі жағын интегралдап

$$y' = \int f(x) dx + C_1$$

теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеуді тағы да интегралдап

$$y = \int \left[\int f(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2$$

теңдеуін аламыз, мұндағы C_1, C_2 - тұрақты шамалар.

2. $y'' = f(y)$ теңдеуі берілсін. $y' = p$ деп белгілейміз. p -ны y -тің функциясы десек, онда:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

Берілген теңдеуге осы мәндерді қойып:

$$p \frac{dp}{dy} = f(y); p dp = f(y) dy$$

теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеуді интегралдаймыз.

$$\int p dp = \int f(y) dy + C_1; \frac{p^2}{2} = \int f(y) dy + C_1; p^2 = 2 \int f(y) dy + 2C_1;$$

$$p = \pm \sqrt{2 \int f(y) dy + 2C_1};$$

$$p = \frac{dy}{dx} \text{ болғандықтан}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{2 \int f(y) dy + 2C_1}.$$

Соңғы теңдеу айнымалылары бөлінетін теңдеу болғандықтан

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + 2C_1}} = \pm(x + C_2).$$

3. $y'' = f(y')$ теңдеуі берілсін. $y' = p$ деп белгілейміз. $y'' = \frac{dp}{dx}$; берілген теңдеуге қоямыз:

$$\frac{dp}{dx} = f(p).$$

Осы теңдеудің айнымалыларын бөлсек

$$\frac{dp}{f(p)} = dx; \int \frac{dp}{f(p)} = x + C_1.$$

$$4. y'' = f(x, y') \text{ теңдеуі берілсін. } y' = p; y'' = \frac{dp}{dx}; \frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

Соңғы теңдеу бірінші ретті дифференциалдық теңдеу.

5. $y'' = f(y, y')$ теңдеуі берілсін.

$$y' = p; y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}; p \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Бұл да бірінші ретті дифференциалдық теңдеу.

1-мысал. $y'' = \cos x$ теңдеудің жалпы шешімін табалық.

Шешуі. Екі рет интегралдап шешімін табамыз, яғни

$$y' = \sin x + C_1; y = \int (\sin x + C_1) dx = -\cos x + C_1 x + C_2$$

2-мысал. $y'' = y^{-3}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $y' = p$ деп белгілейміз.

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}; p \frac{dp}{dy} = y^{-3},$$

Соңғы теңдеудің айнымалыларын ажыратып интегралдау арқылы

$$p dp = y^{-3} dy; \frac{p^2}{2} = \frac{y^{-2}}{-2} + \frac{C_1}{2}; p = \pm \sqrt{C_1 - y^{-2}};$$

теңдеуін аламыз. Енді p -ның орнына y' -ті қоямыз.

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{C_1 - y^{-2}}; \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{y}$$

Айнымалыларын ажыратып интегралдасақ.

$$\frac{y dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm dx; \int \frac{y dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm(x + C_2)$$

Бұл интегралды табу үшін $C_1 y^2 - 1 = t^2$ алмастыруын жасаймыз.

$$2C_1 y dy = 2t dt \quad y dy = \frac{t dt}{C_1}$$

$$\int \frac{t dt}{C_1 \cdot t} = \frac{t}{C_1} = \frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{C_1}; \frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{C_1} = \pm(x + C_2).$$

Сонымен, $y^2 - \frac{1}{C_1^2} = (x + C_2)^2$ функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі.

3-мысал. $y'' = \frac{y'}{x}$ теңдеуінің шешімін табалық.

Шешуі. $y' = p$; $y'' = \frac{dp}{dx}$ деп белгілеп орындарына қоямыз.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}; \quad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x};$$

Соңғы теңдеуді интегралдап, яғни

$$\ln p = \ln x + \ln C_1; \quad p = C_1 x;$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 x; \quad dy = C_1 x dx; \quad y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 - \text{жалпы шешімін табамыз.}$$

4-мысал. $y'' = \frac{(y')^2}{y}$ теңдеудің жалпы шешімін табалық.

$$\text{Шешуі. } y' = p; \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad p \frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{y}; \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln p = \ln y + \ln C_1; \quad p = C_1 y$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y; \quad \frac{dy}{y} = C_1 dx; \quad \ln y = C_1 x + \ln C_2;$$

$y = C_2 e^{C_1 x}$ функциясы ізделініп отырған теңдеудің жалпы шешімі.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

Төмендегі теңдеулердің шешімі қалай табылады:

1) $y'' = f(x)$; 2) $y'' = f(y)$; 3) $y'' = f(y')$; 4) $y'' = f(x, y')$;

5) $y'' = f(y, y')$; 6) $F(x, y', y'') = 0$; 7) $F(y, y', y'') = 0$.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $xy'' = 2x - y'$ теңдеуінің $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = 1$ бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табалық.

Шешуі.

$$y' = p; \quad y'' = \frac{dp}{dx}; \quad x \frac{dp}{dx} = 2x - p; \quad \frac{dp}{dx} = 2 - \frac{p}{x};$$

Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеу пайда болды, оны шешу үшін $\frac{p}{x} = u$ деп алмастыру жасалық. Сонда

$$p = ux; \quad \frac{dp}{dx} = \frac{du}{dx} x + u; \quad \frac{du}{dx} \cdot x + u = 2 - u; \quad \frac{du}{dx} \cdot x = 2(1 - u); \quad \frac{du}{1 - u} = \frac{2dx}{x};$$

$$-\ln|1-u| = 2\ln x + \ln C_1; (1-u) \cdot x^2 C_1 = 1; \left(1 - \frac{p}{x}\right) x^2 C_1 = 1;$$

$$x^2 C_1 - 1 = px C_1; \quad p = x - \frac{1}{x C_1}; \quad p = x - \frac{C}{x}; \quad C = \frac{1}{C_1};$$

$\frac{du}{dx} = x - \frac{C}{x}$; C тұрақтыны табу үшін $y'(1) = 1$ бастапқы шарттан пайдаланамыз

$$1 = 1 - C; \quad C = 0.$$

Осы мәнді $\frac{dy}{dx} = x - \frac{C}{x}$ теңдеуіне қойсақ

$$\frac{dy}{dx} = x; \quad dy = x dx; \quad y = \frac{x^2}{2} + C_2.$$

$y(1) = \frac{1}{2}$ бастапқы шартты пайдаланып C_2 - ны табамыз.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - C_2; \quad C_2 = 0; \quad y = \frac{x^2}{2} \text{ функциясы ізделінген дербес шешімі.}$$

2-мысал. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$ теңдеуінің $y(0) = 1, y'(0) = 2$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табалық.

Шешуі.

$$y' = p; \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad y \cdot p \frac{dp}{dy} = p^2 - p^3; \quad \frac{dp}{p - p^2} = \frac{dy}{y}; \quad \int \frac{dp}{p(1-p)} = \int \frac{dy}{y} + \ln C_1;$$

$$\ln p - \ln(1-p) = \ln y + \ln C_1; \quad \frac{p}{1-p} = y C_1; \quad p = y C_1 - p y C_1; \quad p(1 + y C_1) = y C_1;$$

$$p = \frac{y C_1}{1 + y C_1}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y C_1}{1 + y C_1};$$

C_1 -ді табу үшін $y'(0) = 2, y(0) = 1$ бастапқы шарттардан пайдаланамыз. Сонда

$$2 = \frac{C_1}{1 + C_1}; \quad 2 + 2C_1 = C_1; \quad C_1 = -2; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{1-2y}; \quad \frac{1-2y}{2y} dy = -dx.$$

$\left(\frac{1}{2y} - 1\right) dy = -dx$ теңдеуін интегралдаймыз.

$$\frac{1}{2} \ln y - y = -x + C_2.$$

C_2 -ні табу үшін $y(0) = 1$ бастапқы шарттан пайдаланамыз. Сонда

$$\frac{1}{2} \ln 1 - 1 = C_2; \quad C_2 = -1;$$

Олай болса $\frac{1}{2} \ln y - y = -x - 1$ функциясы берілген теңдеудің дербес шешімі.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі дифференциалдық теңдеулердің жалпы және дербес шешімдерін табыңыздар.

1. $y'' = x + \sin x$.

Жауабы: $y = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + c_1x + c_2$.

2. $y'' = xe^x, y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Жауабы: $y = (x-2)e^x + x + 3$.

3. $1 + (y')^2 = yy''$.

Жауабы: $y = \frac{1}{2c_1} \left(e^{\pm(x+c_2)c_1} + e^{\mp(x+c_2)c_1} \right)$.

4. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

Жауабы: $y = \frac{1}{c_1} x e^{\frac{1}{c_1} \ln x} - \frac{1}{c_1^2} e^{\frac{1}{c_1} \ln x} + c_2$.

5. $(y')^2 + yy'' = yy'$.

Жауабы: $y = \frac{y^2}{2} = c_1 e^x + c_2$.

6. $y'' = 2y^3; y(0) = 1; y'(0) = 1$.

Жауабы: $y = \frac{1}{1-x}$.

7. $(y'')^2 = 4(y' - 1); y(0) = 0; y'(0) = 2$.

Жауабы: $y = x + \frac{1}{3}(x \pm 1)^3 \mp \frac{1}{3}$.

8. $2(y')^2 = (y-1)y''$.

Жауабы: $-\frac{1}{c_1^2} = (x+c_2)(y-1)$.

9. $y''(x^2+1) = 2xy'; y(0) = 1; y'(0) = 3$.

Жауабы: $y = x^3 + 3x + 1$.

10. $x^2 y'' + x^2 y' = 1$.

Жауабы: $y = \frac{1}{x} + c_1 \ln|x| + c_2$.

14.8 Сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер

1-анықтама. Ізделініп отырған y функциясына және оның $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ туындыларына қарағанда бірінші дәрежелі теңдеу n -ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу деп аталады және ол төмендегі түрде жазылады

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (1)$$

мұндағы $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, f(x)$ -тар x -тің берілген функциялары немесе тұрақты сандар, $a_0 \neq 0$, оларды x -тің барлық мәндерінде үзіліссіз болсын деп ұйғарамыз. $f(x)$ функциясы (1) теңдеудің оң жағы деп аталады.

Егер $f(x) \neq 0$ болса, онда (1) теңдеу біртекті емес, ал $f(x) \equiv 0$ болса, онда ол біртекті теңдеу деп аталады. Сонымен n -ретті сызықты біртекті теңдеу

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (2)$$

түрінде болады екен.

Біз алдағы уақытта n -ретті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеудің негізгі қасиеттерін екінші ретті біртекті сызықтық теңдеу үшін тұжырымдаймыз.

1-теорема. Егер y_1 және y_2 функциялары екінші ретті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеудің, яғни

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (3)$$

дербес шешімдері болса, онда $(y_1 + y_2)$ функциясы да оның шешімі болады.

Дәлелдеуі. y_1, y_2 -лердің туындыларын алып (3) теңдеуге қоямыз

$$\begin{cases} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

$(y_1 + y_2)$ функциясының туындыларын алып (3) теңдеуге қойып, (4) теңдіктерді ескерсек

$$(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0 + 0 = 0,$$

яғни $y_1 + y_2$ функциясы (3) теңдеудің шешімі екен.

2-теорема. Егер y_1 (3) теңдеудің шешімі болса, онда Cy_1 функциясы да (3) теңдеудің шешімі болады (мұндағы c - тұрақты).

Дәлелдеуі. Cy_1 -ді (3) теңдеуге қоямыз

$$(Cy_1)'' + a_1 (Cy_1)' + a_2 (Cy_1) = C(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) = C \cdot 0 = 0;$$

яғни Cy_1 -де (3) теңдеудің шешімі екен.

2-анықтама. Егер (3) теңдеудің y_1, y_2 шешімдерінің қатынасы $[a; b]$

кесіндісінде тұрақты санға тең болмаса, яғни $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$, онда y_1 мен y_2 $[a; b]$

кесіндісінде сызықты тәуелсіз деп аталады. Ал, егер $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$, $\lambda = \text{const}$ болса,

онда y_1 мен y_2 $[a; b]$ кесіндісінде сызықты тәуелді деп аталады.

3-анықтыма. Егер y_1 мен y_2, x айнымалысының функциялары болса, онда

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

анықтауышы сол функциялардың Вронский анықтауышы деп аталады.

3-теорема. Егер y_1 және y_2 функциялары $[a; b]$ аралықта сызықты тәуелді болса, онда олардың Вронский анықтауышы сол аралықта нөлге тең.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша: $y_2 = \lambda y_1$, $\lambda = \text{const}$. онда $y_2' = \lambda y_1'$.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

4-теорема. Егер (3) теңдеудің y_1 және y_2 екі шешімінің $W(y_1, y_2)$ Вронский анықтауышы $[a, b]$ аралықтың қандайда бір $x = x_0$ нүктесінде нөлге тең болмаса, онда ол сол аралықтың кез келген x нүктесінде де нөлге тең болмайды.

Дәлелдеуі. y_1 және y_2 -лер (3) теңдеудің шешімі болғандықтан:

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0,$$

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0.$$

Бірінші теңдеуді y_2 -ге, екіншісін y_1 -ге көбейтіп екінші теңдеуден бірінші теңдеуді алсақ:

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + a_1 (y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0 \quad (5)$$

(5) теңдеудегі жақшаның іші Вронский анықтауышына тең, ал алдыңғы екі қосылғыш Вронский анықтауышының туындысына тең, яғни

$$W' = (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

Олай болса (5) теңдеу төмендегіше жазылады

$$W' + a_1 W = 0. \quad (6)$$

(6) теңдеудің $W \Big|_{x=x_0} = W_0$ бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табалық. (6) теңдеудің айнымалыларын бөлелік. Сонда

$$\frac{dW}{W} = -a_1 dx,$$

$$\ln W = - \int_{x_0}^x a_1 dx + \ln C,$$

$$W = C \cdot e^{- \int_{x_0}^x a_1 dx}. \quad (7)$$

(7) формула Лиувилл формуласы деп аталады.

Енді бастапқы шартты пайдаланып C -ның мәнін анықтайық. (7) нің сол және оң жағындағы x -тің орнына x_0 -ді қоямыз.

$$W \Big|_{x=x_0} = C \cdot e^0 \text{ немесе } C = W_0,$$

яғни

$$W = W_0 e^{- \int_{x_0}^x a_1 dx}. \quad (7')$$

Соңғы функция (6) теңдеудің дербес шешімі болады. Шарт бойынша $W_0 \neq 0$ болғандықтан W анықтауышы x -тің кез келген мәнінде нөлге тең болмайтындығы (7') теңдеуден көрініп тұр.

Сонымен теорема дәлелденді.

Ескерту! Егер $[a, b]$ аралығының қандай да бір x_0 нүктесінде Вронский анықтауышы нөлге тең болса, онда ол сол аралықтың кез келген x нүктесінде де нөлге тең болады. Бұл тұжырым (7) формуладан тікелей

шығады, яғни, егер $x = x_0$ болғанда $W = 0$ болса, онда $W \Big|_{x=x_0} = c = 0$, демек

кез келген x -те $W = 0$.

5-теорема. Егер y_1 және y_2 -лер (3) теңдеудің $[a; b]$ кесіндісіндегі сызықты тәуелсіз шешімдері болса, онда олардың Вронский анықтауышы сол кесіндінің кезкелген нүктесінде де нөлге тең болмайды.

Дәлелдеуі. Теореманы кері жорық, яғни $[a; b]$ кесіндісінде қандайда бір x_0 нүктесінде $W(y_1, y_2) = 0$ болсын делік. Онда.

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

жүйені қанағаттандыратын, екеуі бірден нөлге тең болмайтын C_1 және C_2 сандары табылады. Олай болса,

$$\varphi(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

функциясын қарастырамыз. $\varphi(x)$ функциясы 1 мен 2-теоремалар бойынша (3) теңдеудің шешімі болады, сонымен қатар $\varphi \neq 0$. Кері жағдайда $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0$ болып, y_1 мен y_2 функциялары сызықты тәуелді болады. Бұл теореманың шартына қайшы келер еді. (8) жүйеден $\varphi(x_0) = 0$ $\varphi'(x_0) = 0$ теңдіктері шығады. Бұл бастапқы шарттарды (3) теңдеудің $y(x) \equiv 0$ шешімі де қанағаттандырады. Демек, (3) теңдеудің берілген бастапқы шарттарды қанағаттандыратын екі ($y(x) \equiv 0$ және $\varphi(x)$) шешімі бар екен. Бұл Коши есебінің тұжырымына қайшы келеді, олай болса, $W(y_1, y_2) \neq 0$. Теорема дәлелденді.

Сонымен, (3) теңдеудің кез келген екі $y_1(x)$ және $y_2(x)$ шешімдері үшін төмендегі екі тұжырым орындалады:

1) егер $y_1(x)$ мен $y_2(x)$ сызықты тәуелді болса, онда кез келген x үшін $W(y_1, y_2) = 0$.

2) егер $y_1(x)$ мен $y_2(x)$ сызықты тәуелсіз болса, онда кез келген x үшін $W(y_1, y_2) \neq 0$.

6-теорема. Егер $y_1(x)$ мен $y_2(x)$ функциялары (3) теңдеудің сызықты тәуелсіз шешімдері болса, онда

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (9)$$

оның жалпы шешімі болады, мұндағы C_1, C_2 - кез келген тұрақтылар.

Дәлелдеуі. 1 және 2-теоремалар бойынша C_1 және C_2 -нің кез келген мәнінде (9) функция (3) теңдеуді қанағаттандырады, демек жалпы шешім анықтамасының 1-шарты орындалып тұр. Енді (9) дан кез келген $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$ бастапқы шартты қанағаттандыратын жалғыз дербес шешім бөліп алу мүмкіндігі болатынын көрсетсек болғаны.

Бастапқы шарттарды (9) теңдікке қоямыз:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_{10} + C_2 y_{20}, \\ y'_0 = C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} \end{cases} \quad (10)$$

мұндағы $y_{10} = y_1|_{x=x_0}$, $y_{20} = y_2|_{x=x_0}$, $y'_{10} = y'_1|_{x=x_0}$, $y'_{20} = y'_2|_{x=x_0}$.

(10) жүйенің анықтаушы Вронский анықтаушының $x = x_0$ -дегі мәні болғандықтан, ол нөлге тең емес, яғни

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = y_{10} y'_{20} - y_{20} y'_{10} \neq 0.$$

Олай болса, (10) жүйенің жалғыз шешімі (C_1, C_2) табылады. Бұл (9) дан берілген бастапқы шарттарды қанағаттандыратын жалғыз дербес шешім бөліп алу мүмкін деген сөз. Сонымен, (9) функция (3) теңдеудің жалпы шешімі екен, теорема дәлелденді.

Енді біртекті емес сызықты екінші ретті дифференциалдық теңдеуді қарастырайық, яғни

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \quad (11)$$

(11) теңдеудің жалпы шешімінің құрылымын төмендегі теорема анықтайды.

7-теорема. Біртекті емес (11) теңдеудің жалпы шешімі оған сәйкес $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ біртекті теңдеудің жалпы шешімі мен (11) теңдеудің қандайда бір дербес шешімінің қосындысына тең.

Дәлелдеуі. Біртекті теңдеудің жалпы шешімін $\bar{y}$ -пен, ал (11) теңдеудің қандай да бір дербес шешімін $\tilde{y}$ арқылы белгілейік.

$$y = \bar{y} + \tilde{y} \quad (12)$$

қосындысының (11) теңдеудің жалпы шешімі екендігін дәлелдейік. Ол үшін (12) мен оның туындыларын (11) теңдеуге қоямыз.

$$(\bar{y} + \tilde{y})'' + a_1 (\bar{y} + \tilde{y})' + a_2 (\bar{y} + \tilde{y}) = f(x),$$

немесе

$$\left(\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y} \right) + \left(\tilde{y}'' + a_1 \tilde{y}' + a_2 \tilde{y} \right) = f(x)$$

$\bar{y}$ біртекті теңдеудің шешімі болғандықтан, бірінші жақшаның ішіндегі өрнек нөлге тең, ал $\tilde{y}$ (11) теңдеудің шешімі болғандықтан екінші жақшаның ішіндегі өрнек $f(x)$ -ке тең. Олай болса (12) өрнек (11) теңдеудің шешімі екен. Енді оның жалпы шешім екендігін дәлелдейік. Ол үшін $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$ бастапқы шарттарды (12) теңдікке қоямыз. Мұндағы $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ біртекті теңдеудің жалпы шешімі, ал y_1 пен y_2 сызықты тәуелсіз.

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + y_0, \\ y'_0 = C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + y'_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0 - y_0, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = y'_0 - y_0 \end{cases}$$

Соңғы жүйенің анықтаушы y_1 және y_2 функцияларының $x = x_0$ нүктесіндегі Вронский анықтаушы. y_1 мен y_2 сызықты тәуелсіз болғандықтан $W(y_1, y_2) \neq 0$. Олай болса соңғы жүйеден жалғыз нақты C_1, C_2 табылады. Сонымен (12) өрнек берілген бастапқы шарттарды қанағаттандыратын (11) теңдеудің жалғыз шешімі. Теорема толығымен дәлелденді.

Сонымен егер біртекті теңдеудің жалпы шешімі $\bar{y}$ белгілі болса, онда біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін табу мәселесі оның қандайда бір дербес шешімін табуға байланысты екен.

Енді біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табудың жалпы әдісін баяндалық.

Тұрақтыны вариациялау әдісі.

Біртекті (3) теңдеудің жалпы шешімін қарастыралық, яғни

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (13)$$

(13) теңдеудегі C_1 мен C_2 x -тің қандайда бір функциялары болсын деп ұйғаралық.

(13) теңдікті x бойынша дифференциалдаймыз, яғни

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C'_1 y_1 + C'_2 y_2.$$

C_1 мен C_2 -ні

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_1 = 0 \quad (14)$$

шарты орындалатындай етіп тандаймыз. Осы айтылғанды ескерсек

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2.$$

Соңғы теңдікті тағы да x бойынша дифференциалдаймыз

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2.$$

Осы табылған y, y', y'' мәндерін (11) теңдеуге қоямыз.

$$C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + a_1(C_1 y'_1 + C_2 y'_2) + a_2(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$$

немесе

$$C_1(y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1) + C_2(y''_2 + a_1 y'_2 + a_2 y_2) + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x).$$

y_1 мен y_2 біртекті теңдеудің шешімдері болғандықтан жақшалардың іші нөлге тең болады. Онда

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x). \quad (15)$$

Сонымен, егер C_1 мен C_2 (14) пен (15) теңдеулер жүйесін, яғни

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0, \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x) \end{cases}$$

жүйесін қанағаттандырса, онда (13) функция (11) біртекті емес теңдеудің шешімі болады.

Соңғы жүйенің анықтаушы сызықты тәуелсіз y_1 мен y_2 функцияларының Вронский анықтаушы болғандықтан, ол нөлге тең емес, онда оның нақты жалғыз C_1 және C_2 шешімі табылады. C_1 мен C_2 -нің табылған мәндерін (13) теңдеуге қойып (11) біртекті емес теңдеуінің жалпы шешімін табамыз.

14.9 Коэффициенттері тұрақты екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

1-анықтама.

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

түріндегі теңдеу коэффициенттері тұрақты екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеу деп аталады. Мұндағы p мен q тұрақты шамалар.

Егер (1) теңдеуде $f(x) \equiv 0$ болса, онда

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

теңдеуі біртекті сызықты теңдеу деп аталады. Егер $f(x) \neq 0$ болса, онда (1) теңдеу сызықты біртекті емес деп аталады.

1-теорема. Егер (1) теңдеуде $f(x)$ функциясы үзіліссіз болса, онда оның $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ бастапқы шарттарды қанағаттандыратын жалғыз шешімі бар болады. Бұл теореманы дәлелсіз қабылдаймыз.

Енді (2) теңдеудің жалпы шешімін табу мәселесіне көшелік. (2) теңдеудің шешімін

$$y = e^{kx} \quad (3)$$

түрінде іздейміз. Мұндағы k – нақты сан. (3) функциясының бірінші және екінші ретті туындыларын алып (2) теңдеуге қойып:

$(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0$ теңдеуін аламыз. Бұл теңдеуде $e^{kx} \neq 0$ болғандықтан

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (4)$$

болады. (4) теңдеу (2) теңдеудің сипаттаушы теңдеуі деп аталады.

(2) теңдеу шешімдерінің түрлерін (4) теңдеу шешімдері арқылы анықтайтын мына теореманы дәлелделік.

3-теорема. 1) Егер k_1 , k_2 -лер (4) теңдеудің өзара тең емес ($k_1 \neq k_2$) нақты түбірлері болса, онда (2) теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad (5)$$

түрінде анықталады. Мұндағы C_1 мен C_2 кез-келген тұрақты шамалар;

2) Егер $k_1 = k_2 = k$ болса, онда (2) теңдеудің жалпы шешімі

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{kx} \quad (6)$$

түрінде анықталады;

3) Егер $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ комплекс сандары болса, онда (2) теңдеудің жалпы шешімі

$$y = (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) e^{\alpha x} \quad (7)$$

түрінде анықталады.

Дәлелдеуі. 1) $y_1 = e^{k_1 x}$ және $y_2 = e^{k_2 x}$ функциялары (2) теңдеудің сызықты тәуелсіз шешімдері болады, себебі $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}, (k_1 \neq k_2)$. Онда

6-теорема бойынша (5) функциясы (2) теңдеудің жалпы шешімі болады.

2) $k_1 = k_2 = k$ болса, онда $y_1 = e^{kx}$ функциясы (2) теңдеудің бір шешімі. Енді $y = x e^{kx}$ функциясы (2) теңдеудің шешімі болатындығын және y_1 мен y_2 сызықты тәуелсіз екендігін көрсетелік. Шынында да,

$$y_2'' + p y_2' + q y_2 = 2k e^{kx} + k^2 x e^{kx} + p(e^{kx} + x k e^{kx}) + q x e^{kx} = e^{kx} [x(k^2 + pk + q) + (p + 2k)] = 0,$$

себебі, $k^2 + pk + q = 0$ теореманың шарты бойынша және $p = -2k = -(k_1 + k_2)$ (Виета теоремасы). Онда, y_2 функциясы (2) теңдеудің шешімі, ал

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x}$ болғандықтан. y_1 мен y_2 сызықты тәуелсіз. Олай болса (6) функция

(2) теңдеудің жалпы шешімі болады.

3) $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ комплекс сандар (4) теңдеудің шешімі болсын. Онда

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} \quad (8)$$

функциялары (2) теңдеудің дербес шешімдері болады.

Алдымен, нақты аргументтің қандай да бір

$$y = u(x) + i\vartheta(x) \quad (9)$$

функциясы (2) теңдеудің шешімі болса, онда $u(x)$, $\vartheta(x)$ функциялары да (2) теңдеудің шешімі болатындығын көрсетелік. Оның үшін (9) функциясын (2) теңдеуге қоямыз.

$$[u(x) + i\vartheta(x)]'' + p[u(x) + i\vartheta(x)]' + q[u(x) + i\vartheta(x)] = 0$$

немесе

$$(u'' + pu' + qu) + i(\vartheta'' + p\vartheta' + q\vartheta) = 0.$$

Комплекс функция оның нақты бөлігі де, жорымал бөлігі де нөл болғанда ғана нөлге тең болатындықтан

$$u'' + pu' + qu = 0,$$

$$\vartheta'' + p\vartheta' + q\vartheta = 0$$

теңдіктерін жаза аламыз. Бұл $u(x), \vartheta(x)$ функциялары (2) теңдеуді қанағаттандырады деген сөз.

(8) теңдіктерді Эйлер формуласы бойынша жазсак:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Жоғарыда дәлелдегеніміз бойынша, y_1 функциясы (2) теңдеудің шешімі болғандықтан

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha} \cos \beta x, \quad \tilde{y}_2 = e^{\alpha} \sin \beta x$$

функциялары да (2) теңдеудің шешімдері болады. $\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \operatorname{ctg} \beta x \neq \text{const}$, онда $\tilde{y}_1$

және $\tilde{y}_2$ функциялары сызықты тәуелсіз.

Сонымен, $y = C_1 \tilde{y}_1 + C_2 \tilde{y}_2 = e^{\alpha} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ функциясы (2) теңдеудің жалпы шешімі болады екен.

1-мысал. $y'' - 11y' + 18 = 0$ теңдеуді шешіңіз.

Шешуі. Сипаттаушы теңдеуі $k^2 - 11k + 18 = 0$. Мұның түбірлері $k_1 = 2, k_2 = 9$. Сондықтан, (5) формула бойынша, берілген теңдеудің жалпы шешімі $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{9x}$ функциясы болады.

2-мысал. $y'' - 4y' + 4y = 0$ теңдеуді шешіңіз.

Шешуі. Сипаттаушы теңдеуі $k^2 - 4k + 4 = 0$. Мұның түбірлері $k_1 = k_2 = 2$. Онда (6) формула бойынша

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$$

функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі болады.

3-мысал. $y'' - 6y' + 13y = 0$ теңдеуінің шешімін табалық.

Шешуі. Сипаттаушы теңдеуі $k^2 - 6k + 13 = 0$. Мұның түбірлері $k_{1,2} = 3 \pm 2i$ комплекс сандары; $\alpha = 3$; $\beta = 2$. Онда (7) формула бойынша

$$y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) e^{3x}$$

функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі болады.

Енді (1) теңдеудің жалпы шешімін табуға көшейік. (1) теңдеудің жалпы шешімі (2) теңдеудің жалпы шешімі $\bar{y}$ пен (1) теңдеудің дербес шешімі $\tilde{y}$ -тің қосындысына тең екені белгілі.

Көптеген жағдайларда (1) теңдеудің дербес шешімін сұрыптау тәсілі деп аталатын әдіспен тапқан қолайырақ. Солардан кейбіреулерін қарастырайық.

1. (1) теңдеудің оң жағы

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$

түрінде болсын. Мұндағы $P_n(x)$ n -ші дәрежелі көпмүшелік.

Төмендегі жағдайлар болуы мүмкін:

а) e -нің дәреже көрсеткішіндегі α

$$k^2 + pk + q = 0$$

сипаттаушы теңдеуінің түбірлеріне тең емес. Бұл жағдайда (1) нің дербес шешімін

$$\tilde{y} = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x} = Q_n(x) e^{\alpha x} \quad (10)$$

түрінде іздейміз. Мұндағы $A_0, A_1, \dots, A_n$ белгісіз коэффициенттерді (10) функция (1) теңдеуді қанағаттандыратындай етіп табамыз. (10) функцияны екі рет дифференциалдап (1) теңдеуге қойсақ:

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x) \quad (11)$$

болады. Мұндағы $Q_n(x)$ – n -ші дәрежелі көпмүшелік, онда $Q'_n(x)$ – $n-1$ -ші дәрежелі, ал $Q''_n(x)$, $(n-2)$ -ші дәрежелі көпмүшелік болады. Сонымен, (11) теңдіктің сол жағында да оң жағында да n -ші дәрежелі көпмүшеліктер. Бірдей дәрежелі мүшелердің алдындағы коэффициенттерді теңестіріп $A_0, A_1, \dots, A_n$ белгісіз коэффициенттерді анықтайтын $n+1$ теңдеу аламыз. Оларды шешіп, тиісті мәндерін (10) теңдікке қойсақ дербес шешімі табылады.

ә) α саны сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің біреуіне тең болсын. Бұл жағдайда дербес шешімді (10) теңдеу түрінде іздей алмаймыз. Себібі (11) теңдеудің сол жағы, $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ болғандықтан, $n-1$ -дәрежелі көпмүшелік болып, ал оң жағы n -дәрежелі көпмүшелік болады. Демек, $A_0, A_1, \dots, A_n$ -коэффициенттерінің ешбір мәнінде (11) теңдік тепе-теңдікке айналмайды. Сондықтан бұл жағдайда дербес шешімді

$$\tilde{y} = xQ_n(x)e^{\alpha x} \quad (12)$$

түрінде іздейміз.

б) сипаттаушы теңдеудің екі түбірі бір-біріне тең болып ол α санына тең болсын. Бұл жағдайда (11) теңдеудің сол жағындағы екі жақшаның іші де нөлге тең болады. Шынында Вьета теоремасы бойынша $\alpha + \alpha = -p$ және $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, α -сипаттаушы теңдеудің түбірі. Олай болса, (11) теңдіктің сол жағы $n-2$ -дәрежелі көпмүшелік, сондықтан дербес шешім

$$\tilde{y} = x^2Q_n(x)e^{\alpha x} \quad (13)$$

түрінде ізделінуі тиіс.

II. (1) теңдеудің оң жағы

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (14)$$

түрінде болсын. Мұндағы $P(x)$ пен $Q(x)$ -көпмүшеліктер.

а) $\alpha + i\beta$ комплекс саны сипаттаушы теңдеудің түбіріне тең болмасын. Бұл жағдайда (1) теңдеуінің дербес шешімі

$$\tilde{y} = u(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + v(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (15)$$

түрінде ізделінеді. Мұндағы $u(x)$ пен $v(x)$ -дәрежелері $P(x)$ пен $Q(x)$ -тердің ең үлкен дәрежесіне тең көпмүшеліктер.

ә) $\alpha + i\beta$ комплекс саны сипаттаушы теңдеудің түбіріне тең болсын. Бұл жағдайда (1) теңдеудің дербес шешімі

$$\tilde{y} = x[u(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + v(x)e^{\alpha x} \sin \beta x] \quad (16)$$

түрінде ізделінеді.

Ескерту! (1) нің дербес шешімінің (15) және (16) түрлері (14) теңдіктегі $P(x)$ пен $Q(x)$ көпмүшеліктерінің біреуі нөлге тең болған жағдайда да сақталуы тиіс.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Қандай теңдеулер екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер деп аталады?

2. Сызықты тәуелсіз шешімдердің анықтамасын беріңіз.
3. Сызықты тәуелді шешімдердің анықтамасын беріңіз.
4. Екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің формуласын жазыңыз.

5. Вронский анықтауышы деп қандай анықтауышты айтады?
6. Сипаттаушы теңдеу деп қандай теңдеуге айтылады?
7. Сипаттаушы теңдеудің әр түрлі нақты түбірлеріне сәйкес жалпы шешім қандай болады?
8. Сипаттаушы теңдеудің түбірлері еселі болғанда дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі қандай болады?
9. Сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі қандай болады?

10. Дербес шешімді сұрыптау тәсілін баяндаңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $y'' + y' = (5x + 3)e^{-x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табылық.

Шешуі. Алдымен сипаттаушы теңдеуді құралық, яғни $k^2 + k = 0$.

Бұл теңдеудің шешімдері $k_1 = 0; k_2 = -1$. Сондықтан $\bar{y} = c_1 + c_2 e^{-x}$ - берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі;

а) біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін

$$y = c_1(x) + c_2(x)e^{-x}$$

түрінде іздейміз. $C_1(x), C_2(x)$ - тарды анықтау үшін тұрақтыны вариациялау әдісін қолданамыз.

$$\begin{cases} C_1' + C_2' e^{-x} = 0, \\ -C_2' e^{-x} = (5x + 3)e^{-x}. \end{cases} \quad C_2' = -(5x + 3).$$

$$C_2(x) = -\int (5x + 3) dx + c_2 = -\frac{5x^2}{2} - 3x + c_2. \quad C_1'(x) = (5x + 3)e^{-x}$$

$$C_1(x) = \int (5x + 3)e^{-x} dx + c_1 = \left| \begin{array}{l} u = 5x + 3 \quad dv = e^{-x} dx \\ du = 5 dx \quad v = -e^{-x} \end{array} \right|$$

$$= -(5x + 3)e^{-x} + 5 \int e^{-x} dx + c_1 = -(5x + 3)e^{-x} - 5e^{-x} + c_1 = -e^{-x}(5x + 8) + c_1$$

$C_1(x), C_2(x)$ - тердің мәндерін орнына қойсақ:

$$y = c_1 - e^{-x}(5x + 8) + e^{-x} \left(-\frac{5x^2}{2} - 3x + c_2 \right) = c_1 + e^{-x} \left(c_2 - \frac{5x^2}{2} - 8x \right)$$

жалпы шешімі шығады.

ә) Енді берілген теңдеудің дербес шешімін сұрыптау әдісімен табылық.

Берілген теңдеудің оң жағындағы $\alpha = -1$ мәні сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің біреуіне тең болып тұр. Олай болса дербес шешімді (12) теңдеу түрінде іздейміз, яғни

$\bar{y} = x(A_0x + A_1)e^{-x}$. Бұл функцияның туындыларын тауып.

$$\bar{y}' = (2A_0x + A_1)e^{-x} - (A_0x^2 + A_1x)e^{-x} = [(2A_0 - A_1)x - A_0x^2 + A_1]e^{-x}$$

$$\bar{y}'' = (2A_0 - A_1 - 2A_0x)e^{-x} - e^{-x}[(2A_0 - A_1)x - A_0x^2 + A_1];$$

берілген теңдеуге қоялық:

$$e^{-x}(2A_0 - A_1 - 2A_0x - 2A_0x + A_1x + A_0x^2 - A_1 + 2A_0x - A_1x - A_0x^2 + A_1) = (5x + 3)e^{-x}.$$

Екі жағын e^{-x} -ке қысқартып. A_0 мен A_1 - ді табамыз.

$$2A_0 - A_1 - 2A_0x = 5x + 3; \quad -2A_0 = 5; \quad A_0 = -\frac{5}{2}; \quad 2A_0 - A_1 = 3; \quad A_1 = -8.$$

Олай болса берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$\bar{y} = \bar{y} - \bar{y} = c_1 + c_2e^{-x} - x\left(\frac{5x}{2} + 8\right)e^{-x} = c_1 + e^{-x}\left(c_2 - \frac{5x^2}{2} - 8x\right).$$

болады.

2-мысал. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$ теңдеуінің жалпы шешімін табалық.

Шешуі. Тұрақтыны вариациялау әдісін қолданамыз. Берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$\bar{y} = c_1e^x + c_2xe^x. \quad y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x.$$

Жалпы шешімді $y = c_1(x)e^x + c_2(x) \cdot xe^x$ түрінде іздейміз. $c_1(x), c_2(x)$ - терді табу үшін

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0, \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)(1+x)e^x = \frac{e^x}{1+x^2} \end{cases}$$

жүйесін шешеміз. Сонда

$$c_2(x) = \arctg x + \bar{c}_2,$$

$$c_1(x) = -\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \bar{c}_1.$$

$c_1(x), c_2(x)$ -тердің мәндерін орындарына қойып ізделінген жалпы шешімді табамыз:

$$y = \left(-\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \bar{c}_1\right)e^x + (\arctg x + \bar{c}_2)e^x x.$$

3-мысал. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табалық.

Шешуі. Дербес шешімді сұрыптау әдісін қолданамыз. Біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$\bar{y} = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}.$$

Берілген тендеудің оң жағы $f_1(x) = 6x$ және $f_2(x) = e^{-x}$ функцияларының қосындысы. $f_1(x)$ функциясындағы $\alpha = 0$ сипаттаушы тендеудің екі еселі түбіріне тең, ал $f_2(x)$ функциясындағы $\alpha = -1$ сипаттаушы тендеудің түбірлерінің біреуіне тең, онда дербес шешімді

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = (A_0x + A_1)x^2 + A_2xe^{-x}$$

түрінде іздейміз. Соңғы функцияның бірінші, екінші, және үшінші ретті туындыларын алып берілген тендеуге қойып:

$$6A_0 + A_2e^{-x} - A_2xe^{-x} + 6A_0x + 2A_1 + A_2xe^{-x} - 6x + e^{-x}.$$

Мұнан $A_0 = 1$, $A_1 = -3$, $A_2 = 1$ тұрақтыларын табамыз.

Сонымен, $y = \bar{y} + \tilde{y} = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + (x-3)x^2 + xe^{-x}$ ізделінген жалпы шешім болады.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі коэффициенттері тұрақты, екінші ретті дифференциалдық тендеулерді шешіңіздер.

1. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(0) = 4$; $y'(0) = 2$. Жауабы: $y = e^x(4 - 2x)$.

2. $y'' - y' - 2x = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 3$. Жауабы: $x(t) = e^{2t} - e^{-t}$.

3. $y'' - 4y' + 29y = 0$. Жауабы: $y = e^{2x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)$.

4. $y'' + 2y' + 5y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$. Жауабы: $y = \frac{1}{2}e^{-x} \cdot \sin 2x$.

5. $y'' - 2y' = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$. Жауабы: $y = e^{2x} - 1$.

6. $y'' + 3y' = x + 1$. Жауабы: $y = c_1e^{-3x} + c_2 + x\left(\frac{1}{6}x + \frac{2}{9}\right)$.

7. $y'' - y = e^x$. Жауабы: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x$.

8. $y'' - 2y' + y = e^x$. Жауабы: $y = c_1e^x + c_2e^x x + \frac{1}{2}e^x x^2$.

9. $y'' + y' = \frac{1}{\cos x}$. Жауабы: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$.

10. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$. Жауабы: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \ln|\operatorname{tg} x|$.

11. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3 \sin x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Жауабы: $y = e^x + \sin x$.

12. $y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

Жауабы: $y = x + e^x(3 - \ln 2 - x) + (1 + e^x) \ln(1 + e^x) - 2 - \ln 2$.

14.10 Қарапайым дифференциалдық тендеулер жүйесі

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \right. \quad (1)$$

бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық. Мұндағы $y_1, y_2, \dots, y_n$ - дер x -тің ізделініп отырған функциялары.

(1) жүйе нормаль жүйе деп аталады.

$$y_1|_{x=x_0} = y_{10}, y_2|_{x=x_0} = y_{20}, \dots, y_n|_{x=x_0} = y_{n0} \quad (2)$$

бастапқы шарттарды және (1) жүйені қанағаттандыратын $y_1, y_2, \dots, y_n$ функцияларын табу жүйені шешу деп аталады.

(1) жүйе белгісіздерді шығарып тастау әдісі деп аталатын төмендегі әдіспен шешіледі:

(1) жүйенің бірінші теңдеуін x бойынша дифференциалдаймыз:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial v_n} \frac{dy_n}{dx}.$$

Мұндағы $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ -тардың орнына (1) жүйедегі мәндерін қоямыз.

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Соңғы теңдікті және x бойынша дифференциалдап, алдыңғыға ұқсас $\frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ -тардың орнына және (1) жүйедегі мәндерін қоямыз.

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Осылайша жалғастыра отырып, соңында

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

тендікті аламыз. Сонымен, төмендегідей жүйе пайда болады.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{array} \right. \quad (3)$$

(3) жүйенің алдыңғы $n-1$ теңдеуінен $y_2, y_3, \dots, y_n$ -дерді

$x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$ -лардың функциялары ретінде анықтаймыз. Яғни

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y'_1, y''_1, \dots, y^{(n-1)}), \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y'_1, y''_1, \dots, y^{(n-1)}), \\ \vdots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y'_1, y''_1, \dots, y^{(n-1)}). \end{cases} \quad (4)$$

(4) дегі $y_2, y_3, \dots, y_n$ -дердің мәндерін (3) жүйенің соңғы тендеуіне қоямыз.

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \phi\left(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}\right). \quad (5)$$

(5) теңдеуді шешіп y_1 -ді анықтаймыз:

$$y_1 = \psi_1(x, c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (6)$$

(6) теңдеуді n рет дифференциалдап $y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n)}$ -ларды табамыз да, оларды (4) жүйеге қоямыз. Соңында

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \\ y_3 = \psi_3(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \\ \vdots \\ y_n = \psi_n(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{cases} \quad (7)$$

табылады. (6), (7) шешімінен бастапқы шарттарды қанағаттандыратын $c_1, c_2, \dots, c_n$ -дердің мәндері табылады.

1-ескерту! Егер (1) жүйе сызықты болса, онда (5) теңдеу де сызықты болады.

2-ескерту! Кейбір жағдайда $y_2, y_3, \dots, y_n$ белгісіздерді (3) жүйенің алдыңғы $n-1$ теңдеуінен емес, ал одан аз теңдеуінен де шығарып тастауы мүмкін. Мұндай жағдайда n -ші ретті (5) теңдеу орнына реті n -нен аз теңдеу алынады.

Сонымен, баяндалған әдіс арқылы теңдеу жүйесінен жоғары ретті бір теңдеуге өту мүмкін екен. Енді, керісінше, жоғары ретті бір теңдеуден

бірінші ретті жүйеге өту есебін қарастыралық. Бізге үшінші ретті теңдеу берілсін, яғни

$$y''' = f(x, y, y', y'').$$

$y = y_1$, $y' = y_2$, $y'' = y_3$ деп алмастыру жасап

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = f(x, y_1, y_2, y_3) \end{cases}.$$

жүйесін аламыз. Соңғы жүйе үшінші ретті теңдеуге төмендегідей мағынада пара-пар: егер $y(x)$ -үшінші ретті теңдеудің шешімі болса, онда $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$ және $y_3(x) = y''(x)$ -лар жүйенің шешімі болады. Ал, егер y_1, y_2, y_3 -тер жүйенің шешімі болса, онда $y(x) = y_1(x)$ үшінші ретті теңдеудің шешімі болады.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

түріндегі жүйе автономдық жүйе деп аталады. Соңғы жүйенің ерекшеліктерінің бірі-теңдеулердің оң жағындағы функциялар t -ға тікелей тәуелді емес. Бұл жүйе де жоғарыда баяндалған әдіспен интегралданады.

14.11 Коэффициенттері тұрақты сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесі

Айталық, сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесі берілсін.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases} \quad (1)$$

Мұндағы a_{ij} -тұрақты коэффициенттер, t аргумент, ал $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ -ізделініп отырған функциялар. (1) жүйе коэффициент-

тері тұрақты сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесі деп аталады.

(1) жүйені де n -ретті бір сызықты дифференциалдық теңдеуге келтіріп шешуге болады, бірақ біз бұл арада басқа әдісті баяндаймыз.

(1) жүйенің дербес шешімін

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \dots, \quad x_n = \alpha_n e^{kt} \quad (2)$$

түрінде іздейміз. (2) функциялар (1) жүйенің шешімі болатындай етіп $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ және k -ларды анықтаймыз. Ол үшін (2) – ні (1) жүйеге қоямыз.

$$\begin{cases} k\alpha_1 e^{kt} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)e^{kt}, \\ k\alpha_2 e^{kt} = (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)e^{kt}, \\ - - - - - \\ k\alpha_n e^{kt} = (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)e^{kt}. \end{cases}$$

Соңғы жүйедегі теңдеулердің екі жағын да e^{kt} -ға қысқартып түрлендіреміз.

Нәтижеде $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ -дерге қарағанда n белгісізді n біртекті теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ - - - - - \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0. \end{cases} \quad (3)$$

(3) жүйенің нөлден өзгеше шешімі оның анықтаушы нөлге тең болғанда ғана болады. Олай болса k -ның

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

теңдеуін қанағаттандыратын мәндерін табуды қарастырамыз. (4) теңдеу (1) жүйенің сипаттаушы теңдеуі деп аталады.

1. Сипаттаушы теңдеудің түбірлері нақты және әртүрлі болсын, оларды $k_1, k_2, \dots, k_n$ арқылы белгілейік. Әрбір k_i түбірі үшін (3) жүйенің

$$\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}$$

шешімдерін анықтаймыз. Сонда (1) жүйенің шешімі

$$k_1 \text{ түбірі үшін } x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t}, x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t}, \dots, x_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t};$$

$$k_2 \text{ түбірі үшін } x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t}, \dots, x_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t};$$

$$- - - - -$$

$$k_n \text{ түбірі үшін } x_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, x_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \dots, x_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}$$

функциялары болады. Демек,

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + c_2 \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + c_n \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \\ x_2 = c_1 \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + c_2 \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + c_n \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \\ \dots \dots \dots \\ x_n = c_1 \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t} + c_2 \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + c_n \alpha_n^{(n)} e^{k_n t} \end{cases} \quad (5)$$

функциялар жүйесі (1) жүйенің жалпы шешімі болады. (5) функциялар жүйесін тиісті туындыларын алғаннан кейін (1) дифференциалдық теңдеулер жүйесіне тікелей апарып қойып, оны қанағаттандыратынына көз жеткізуге болды. Сонымен қатар, бастапқы шарттарды қанағаттандыратын $c_1, c_2, \dots, c_n$ тұрақтыларын да (5) жүйеден табуға болады.

2. Сипаттаушы теңдеудің түбірлері әртүрлі, бірақ арасында комплекс түбірлері болсын. Мысалы, екі түйіндес комплекс түбірлері болсын делік:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta.$$

Бұл түбірлерге төмендегі шешімдер сәйкес келеді

$$x_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{(\alpha + i\beta)t} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

$$x_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} e^{(\alpha - i\beta)t} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

Мұндағы $\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}$ коэффициенттері (3) жүйе арқылы анықталады.

Егер (6) мен (7) –лер жүйенің шешімі болса, онда олардың нақты және жорымал бөліктері де жүйенің шешімі болатындығын көрсету қиын емес, олай болса:

$$x_j^{(1)} = e^{\alpha t} \left(\lambda_j^{(1)} \cos \beta t + \lambda_j^{(2)} \sin \beta t \right), \quad (8)$$

$$x_j^{(2)} = e^{\alpha t} \left(\lambda_j^{-(1)} \sin \beta t + \lambda_j^{-(2)} \cos \beta t \right), \quad (9)$$

(1) жүйенің дербес шешімдері болады. Мұндағы $\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)}, \bar{\lambda}_j^{(1)}, \bar{\lambda}_j^{(2)}$ -лер $\alpha_j^{(1)}$ және $\alpha_j^{(2)}$ -лер арқылы анықталатын нақты сандар.

(8), (9) функциялардың сәйкес комбинациялары берілген жүйенің жалпы шешімінің құрамына енеді.

Біртекті (1) жүйені шешудің баяндалған әдісін Эйлер әдісі деп атайды.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Қандай жүйе дифференциалдық теңдеулердің нормаль жүйесі деп аталады?

2. Белгісіздерді шығарып тастау әдісін баяндаңыз.

3. Қандай жүйелер бір жоғары ретті сызықты дифференциалдық теңдеуге келеді?

4. Жоғары ретті бір теңдеуден бірінші ретті жүйеге қалай өтіледі?

5. Коэффициенттері тұрақты сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешудің Эйлер әдісін баяндаңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4x - 2y - 4z, \\ \frac{dz}{dx} = x^2 - y + z \end{cases} \quad (1)$$

жүйесін шешелік.

Шешуі. (1) жүйенің бірінші теңдеуін x бойынша дифференциалдасак.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4 - 2\frac{dy}{dx} - 4\frac{dz}{dx}$$

болады.

Мұндағы $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ - тердің орнына (1) дегі мәндерін қоялық. Сонда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4 - 8x + 4y + 8z - 4x^2 + 4y - 4z,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4 - 8x - 4x^2 + 8y + 4z.$$

(1) жүйенің бірінші теңдеуінен z -ті табамыз және оның мәнін соңғы теңдеуге қойып түрлендіреміз.

$$z = x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\frac{dy}{dx},$$

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4 - 8x - 4x^2 + 8y + 4x - 2y - \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 4 - 4x - 4x^2.$$

Соңғы теңдеудің жалпы шешімі

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x - \frac{8}{27}. \quad (3)$$

(3)-ні және оның туындысын (2) теңдеуге қоямыз:

$$z = -c_2 e^{2x} + \frac{c_1}{4} e^{-3x} - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}. \quad (4)$$

Сонымен, (3), (4) функциялар берілген (1) жүйенің жалпы шешімі болады.

$$2\text{ -мысал. } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$$

жүйені шешелік.

Шешуі. Бірінші теңдеуін t бойынша дифференциалдаймыз.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = (x + z) - (x + y),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = z - y.$$

Жүйенің бірінші теңдеуінен $z - y = -\frac{dx}{dt}$ -ны алып орнына қоямыз.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} \text{ немесе } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 0.$$

Соңғы теңдеудің жалпы шешімі:

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-t}.$$

Жүйенің бірінші теңдеуінен:

$$y = \frac{dx}{dt} + z = -c_2 e^{-t} + z$$

х пен y -тің табылған мәндерін жүйенің үшінші теңдеуіне қоямыз:

$$\frac{dz}{dt} = c_1 + c_2 e^{-t} - c_2 e^{-t} + z = c_1 + z.$$

Соңғы теңдеуді интегралдап $z = c_3 e^t - c_1$ -ді табамыз. Онда

$$y = c_3 e^t - c_2 e^{-t} - c_1 \text{ болады.}$$

Сонымен, $x(t) = c_1 + c_2 e^{-t}$, $y(t) = c_3 e^t - c_2 e^{-t} - c_1$, $z = c_3 e^t - c_1$ функциялары берілген дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпы шешімі екен.

$$3\text{ -мысал. } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінің жалпы шешімін табалық.

Шешуі. Сипаттаушы теңдеуін құрамыз.

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = 0 \text{ немесе } k^2 - 6k + 5 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 5.$$

Берілген жүйенің шешімін

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^t, \quad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^t \text{ және } x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{5t}, \quad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{5t} \text{ түрінде ізделік.}$$

$k_1 = 1$ түбір үшін (3) жүйені құрып $\alpha_1^{(1)}$ және $\alpha_2^{(1)}$ - лерді анықтаймыз

$$\begin{cases} (2-1)\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0, \\ 3\alpha_1^{(1)} + (4-1)\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0, \\ 3\alpha_1^{(1)} + 3\alpha_2^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Осыдан $\alpha_2^{(1)} = -\alpha_1^{(1)}$; $\alpha_1^{(1)} = -1$ десек, $\alpha_2^{(1)} = 1$ болады. Онда

$$x_1^{(1)} = -e^t, \quad x_2^{(1)} = e^t.$$

$k_2 = 5$ түбір үшін де осыған ұқсас жолмен $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(2)}$ -лерді анықтаймыз.

$$\begin{cases} -3\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} = 0, \\ 3\alpha_1^{(2)} - 3\alpha_2^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Осыдан $\alpha_2^{(2)} = 3\alpha_1^{(2)}$; $\alpha_1^{(2)} = 1$ десек, $\alpha_2^{(2)} = 3$ болады. Онда

$$x_1^{(2)} = e^{5t}, \quad x_2^{(2)} = 3e^{5t}.$$

Берілген жүйенің жалпы шешімі

$$x_1 = -c_1 e^t + c_2 e^{5t},$$

$$x_2 = c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}.$$

функциялары болады.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1-3 -жүйелерді белгісіздерді шығарып тастау әдісімен шешіңіз.

$$1. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = -y \end{cases} \quad \text{жүйенің жалпы шешімін табыңыз.}$$

$$\text{Жауабы: } \begin{cases} y = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \\ z = -c_1 \sin x + c_2 \cos x. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} \quad \text{жүйенің } x(0)=1, \quad y(0)=3 \text{ бастапқы шарттарды}$$

қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

$$\text{Жауабы: } x = 2e^{3t} - e^t; \quad y = 2e^{3t} + e^t.$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0, \\ \frac{dy}{dt} - x + y = 0 \end{cases} \quad \text{жүйенің } x(0)=1, \quad y(0)=1 \text{ бастапқы шарттарды}$$

қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \begin{cases} x(t) = e^{-2t} (1 - 2t), \\ y(t) = e^{-2t} (1 + 2t). \end{cases}$$

4-5 жүйелерді Эйлер әдісімен шешіңіз.

$$4. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 8x_2 - x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2. \end{cases}$$

$$\text{Жауабы: } x_1 = 2c_1 e^{3t} - 4c_2 e^{-3t}; \quad x_2 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}.$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 12x_2 - 5x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 12x_2. \end{cases}$$

$$\text{Жауабы: } \begin{aligned} x_1 &= e^{12t} (c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t), \\ x_2 &= e^{12t} (-c_1 \sin 5t + c_2 \cos 5t). \end{aligned}$$

14.12 Дифференциалдық теңдеудің экономикада қолданылуы

Макроэкономикалық динамиканың кейбір қарапайым моделдерін қарастыралық.

І-есеп. Қандай да бір саланың t уақыт сәтінде өндірген өнімі $y(t)$ болсын. Саланың өндірген барлық өнімі қандай да бір тұрақты P бағада сатылады деп ұйғаралық. Онда t уақыт сәтіндегі табыс

$$Q(t) = P y(t) \quad (1)$$

болады. Өндірісті кеңейтуге бағытталған инвестицияның шамасын $I(t)$ -мен белгілейік. Егер инвестицияның шамасы табысқа пропорционал деп ұйғарсақ, онда

$$I(t) = mQ(t) = mPy(t). \quad (2)$$

Мұндағы m -пропорционалдық коэффициент болып, ол инвестиция нормасы деп аталады және оның мәні $0 < m < 1$ аралығындағы тұрақты.

Табиғи өсу моделінде y өнімін өндіру жылдамдығы (акселерация) инвестицияның шамасына пропорционал деп ұйғарылады, онда

$$y'(t) = \alpha I(t) \quad (3)$$

(2)-дегі $I(t)$ -ның мәнін (3)-ге қойып

$$y'(t) = k y(t) \quad (4)$$

дифференциалдық теңдеуін аламыз, мұндағы $k = mP\alpha$. (4) дифференциалдық теңдеуі айнымалылары ажыратылатын теңдеу тобына жатады, оны шешіп

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}$$

ізделінген функцияны аламыз, мұндағы $y_0 = y(t_0)$.

Бәсекелі базар жағдайында өнімнің бағасы оның көлеміне тәуелді болады (базарда өндірілген өнімнің мөлшері немесе көлемі арта барса, онда оның бағасы кемуі түседі), онда (4) теңдеу келесі түрде жазылады:

$$y'(t) = m\alpha P(y) \cdot y \quad (5)$$

(5) теңдеу де айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуі болып, ол қарапайым интегралдау жолымен шешіледі.

1-мысал. Егер сұраным функциясы $P(y)$

$$P(y) = 3 - 4y$$

теңдеуімен берілсе, онда өндірілген өнім мөлшерінің (көлемінің) өрнегін табыңыз. Акселерация нормасы $\alpha = 1,5$, ал инвестиция нормасы $m = 0,6$ және $y(0) = 1$ деп алынсын.

Шешуі. Берілгендерді (5) теңдеуге қоямыз

$$y'(t) = 0,6 \cdot 1,5(3 - 4y) \cdot y.$$

Сонғы теңдеудің айнымалыларын ажыратып интегралдаймыз.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{(3-4y)y} &= 0,9dt, \\ \int \frac{dy}{(3-4y)y} &= \int 0,9dt + C; \\ - \int \frac{dy}{4y^2 - 3y} &= 0,9t + C; \\ - \frac{1}{4} \int \frac{dy}{y^2 - \frac{3}{4}y + \frac{9}{64} - \frac{9}{64}} &= 0,9t + C; \\ - \frac{1}{4} \int \frac{dy}{\left(y - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{64}} &= 0,9t + C; \\ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{8}} \ln \left| \frac{y - \frac{3}{8} - \frac{3}{8}}{y - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}} \right| &= -0,9t + C; \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{4y-3}{4y} \right| &= -0,9t + C. \end{aligned}$$

$y(0) = 1$ шартын пайдаланып $C = -\frac{1}{3} \ln 4$ -ны табамыз.

$$\text{Сонымен, } \frac{1}{3} \ln \left| \frac{4y-3}{y} \right| = -0,9t; \quad \frac{4y-3}{y} = e^{-2,7t}; \quad y = \frac{3}{4 - e^{-2,7t}}.$$

2-есеп. Қандай да бір саланың t уақыт сәтіндегі табысы $Q(t)$, тұтынушы шамасы $C(t)$ -мен $I(t)$ инвестицияның қосындысы түрінде берілсін

$$Q(t) = I(t) + C(t) \quad (6)$$

Табыстың өсу жылдамдығы да инвестицияға пропорционал деп ұйғаралық, яғни

$$\beta \cdot Q'(t) = I(t) \quad (7)$$

мұндағы β -табыс өнімінің капитал сыйымдылық коэффициенті. Тұтыну функциясы $C(t)$ -ны алынатын табыстың қандай да бір бөлігі деп аламыз, яғни

$$C(t) = (1 - m)Q(t). \quad (8)$$

Мұндағы m -инвестиция нормасы. (6), (7), (8) теңдіктерден келесі теңдеуді аламыз.

$$Q'(t) = \frac{m}{\beta} Q(t). \quad (9)$$

2-мысал. Егер тұтыну шамасы $C(t = 5t)$ функциясымен, табыс өнімінің капитал сыйымдылық коэффициенті $\beta = \frac{2}{3}$ және бастапқы шарт $Q(0) = \frac{1}{3}$ берілген болса, онда табыс функциясы $Q(t)$ -ны табыңыз. $t = 3$ уақыт сәтіндегі табыс мөлшерін анықтаңыз.

Шешуі. (6), (7), (8) теңдіктерді қолданып келесі теңдеуді аламыз.

$$2Q'(t) - 3Q(t) = -15t. \quad (10)$$

(10) сызықты дифференциалдық теңдеуді $Q = u\vartheta$ алмастыруын қолданып шешеміз

$$u'\vartheta + u\vartheta' - \frac{3}{2}u\vartheta = -\frac{15}{2}t,$$

$$u'\vartheta + u\left(\vartheta' - \frac{3}{2}\vartheta\right) = -\frac{15}{2}t,$$

$$\vartheta' - \frac{3}{2}\vartheta = 0; \quad \frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{3}{2}dt; \quad \ln \vartheta = \frac{3}{2}t; \quad \vartheta = e^{\frac{3t}{2}};$$

$$u' \cdot e^{\frac{3t}{2}} = -\frac{15}{2}t; \quad du = -\frac{15}{2}te^{\frac{3t}{2}}dt;$$

$$u = -\frac{15}{2} \int te^{\frac{3t}{2}}dt = 5te^{\frac{3t}{2}} + \frac{10}{3}e^{\frac{3t}{2}} + C$$

$$\text{Сонымен, } Q(t) = 5t + \frac{10}{3} - 3e^{\frac{3t}{2}}. \quad t = 3 \text{ болғанда } Q(3) = \frac{55}{3} - 3e^{4.5}.$$

«Дифференциалдық теңдеулер» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар

Негізгі теориялық сұрақтар

1. Дифференциалдық теңдеулер, жалпы ұғымдар.
2. Айнымалылары ажыратылған және бөлінетін дифференциалдық теңдеулер.
3. Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеулер.
4. Бірінші ретті сызықты теңдеулер. Бернулли теңдеуі.
5. Толық дифференциалдық теңдеулер.
6. Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер, жалпы ұғымдар.
7. Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер.
8. Сызықтық жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер, жалпы шешімдерінің құрылымы.

9. Коэффициенттері тұрақты сызықты біртекті дифференциалды теңдеулердің жалпы шешімі.

10. Оң жағы арнайы түрде берілген коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықты теңдеулердің дербес шешімін табу.

Ұсынылатын тапсырмалардан бір нұсқасының шешу үлгісін келтіреміз.

1-мысал. $y'tgx + y = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. Берілген теңдеу айнымалылары бөлінетін дифференциалдық теңдеу тобына жатады, сондықтан оны айнымалыларын бөліп мынадай түрде жазуға болады

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{tgx}.$$

Тендіктің екі жағын да интегралдасак:

$$\ln|y| = -\ln|\sin x| + c.$$

Алынған шешімді ықшамырақ өрнектеу үшін $c = \ln c_1 x$ десек ($c_1 > 0$),

онда, $\ln|y| = -\ln|\sin x| + \ln c_1$. Осыдан $|y| = \frac{C_1}{|\sin x|}$, немесе $y = \pm \frac{C_1}{\sin x}$

келіп шығады.

$\pm C_1$ ді және C мен белгілесек, $y = \frac{C}{\sin x}$ функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі болады.

2-мысал. $\frac{dy}{y} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ теңдеуін шешелік.

Шешуі. Берілген теңдеудің оң жағындағы $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$, функциясы нөл өлшемді біртекті функция. Шынында да,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{\lambda x \cdot \lambda y} = \frac{\lambda^2(x^2 - y^2)}{\lambda^2 xy} = \frac{x^2 - y^2}{xy} = \lambda^0 f(x, y),$$

яғни берілген дифференциалдық теңдеу біртекті. $y = ux$ деп белгілеп жаңа функция енгіземіз. Оны дифференциалдап, яғни

$$\frac{du}{dx} = x \frac{du}{dx} + u,$$

берілген теңдеуге қойсақ:

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{x^2 - u^2 x^2}{u x^2}; \quad x \frac{du}{dx} + u = \frac{1 - u^2}{u}; \quad x \frac{du}{dx} = \frac{1 - 2u^2}{u};$$

айнымалыларын ажыратамыз. $\frac{u du}{1 - 2u^2} = \frac{dx}{x}$, мұны интегралдаймыз

$-\frac{1}{4}\ln|1-2u^2| = \ln|x| - \frac{1}{4}\ln c_1$. Осыдан $|1-2u^2| = \frac{c_1}{x^4}$; $1-2u^2 = \pm \frac{c_1}{x^4}$;
 $1-2u^2 = \frac{c}{x^4}$; мұндағы $c = \pm c_1$, $u = \frac{y}{x}$ болғандықтан $1-2\frac{y^2}{x^2} = \frac{c}{x^4}$ немесе
 $x^4 - 2x^2y^2 = c$ жалпы шешімі.

3-мысал. $y' - y = -xe^x$ теңдеудің $y(0) = 1$ шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

Шешуі. Берілген теңдеу сызықты, сондықтан $y = u\vartheta$ алмастыру жасап, оның туындысын табалық, яғни $y' = u'\vartheta + u\vartheta'$; орнына қойсақ:
 $u'\vartheta + u\vartheta' - u\vartheta = -xe^x$.

$$u'\vartheta + u(\vartheta' - \vartheta) = -xe^x; \quad \vartheta' - \vartheta = 0; \quad \frac{d\vartheta}{dx} - \vartheta = 0; \quad \frac{d\vartheta}{dx} = \vartheta; \quad \frac{d\vartheta}{\vartheta} = dx;$$

$\ln\vartheta = x$; $\vartheta = e^x$; ϑ ның мәнін орнына қоямыз.

$$u' \cdot e^x = -xe^x; \quad u' = -x; \quad \frac{du}{dx} = -x; \quad du = -x dx; \quad u = -\frac{x^2}{2} + c.$$

$y = \left(-\frac{x^2}{2} + c\right)e^x$ функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі.

Енді берілген шарттан пайдаланып дербес шешімін табамыз.

$$1 = (-0 + c)e^0; \quad c = 1.$$

Демек, $y = \left(-\frac{x^2}{2} + 1\right)e^x$ функциясы дербес шешімі.

4-мысал. $(1+x)y'' - y' = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $y' = p(x)$ деп алмастыру енгіземіз. $y'' = p'(x)$. Теңдеуге қойсақ

$$(1+x)p' - p = 0; \quad (1+x)\frac{dp}{dx} = p, \text{ айнымалыларын ажыратамыз:}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{1+x}, \text{ интегралдасак: } \ln|p| = \ln|1+x| + \ln c; \quad p = (1+x)c_1;$$

$p = y'$ болғандықтан, $y' = (1+x)c_1$; мұны және интегралдаймыз.

$$y = c_1 \frac{(1+x)^2}{2} + c_2 \text{ функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі}$$

5-мысал. $y'' + 6y' + 9y = 0$ теңдеуінің $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

Шешуі. $k^2 + 6k + 9 = 0$ сипаттаушы теңдеуін шешеміз.

$$k_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \quad k_1 = k_2 = k = -3; \text{ онда } y_1 = e^{-3x}; \quad y_2 = xe^{-3x};$$

$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$ - жалпы шешімі. Енді берілген шарттарда пайдаланып

дербес шешімін табамыз. Ол үшін жалпы шешімдегі x орнына 0, ал y -тің орнына 1-ді қоямыз., онда $c_1 = 1$. жалпы шешімінің туындысын алып

$$y' = -3c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-3x} - 3x e^{-3x} c_2;$$

x -тің орнына 0, ал y' -тің орнына 2-ні, c_1 - дің орнына 1-ді қоямыз.

$2 = -3 + c_2$; $c_2 = 5$; сонымен, $y = e^{-3x} + 5x e^{-3x}$ -дербес шешімі.

6-мысал. $4y'' - 4y' + y = -3e^{\frac{x}{2}}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $4k^2 - 4k + 1 = 0$ сипаттаушы теңдеуінің шешімдері: $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$.

Берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің шешімі $\bar{y}$ мынадай:

$$\bar{y} = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{\frac{x}{2}}.$$

$f(x)$ -те, яғни берілген теңдеудің оң жағындағы функцияда

$\alpha = \frac{1}{2} = k_1 = k_2$ болғандықтан, дербес шешім $\tilde{y}$ -ді мына түрде іздейміз.

$\tilde{y} = Ax^2 e^{\frac{x}{2}}$. A -ны табу үшін $\tilde{y}$ -ның 1,2-ретті туындыларын алып берілген теңдеуге қоямыз.

$$\text{Сонда } \tilde{y}' = 2Axe^{\frac{x}{2}} + \frac{A}{2}x^2 e^{\frac{x}{2}}; \quad \tilde{y}'' = 2Ae^{\frac{x}{2}} + Axe^{\frac{x}{2}} + Axe^{\frac{x}{2}} + \frac{A}{4}x^2 e^{\frac{x}{2}};$$

$$4 \cdot 2Ae^{\frac{x}{2}} + 4 \cdot 2Axe^{\frac{x}{2}} + 4 \cdot \frac{A}{4}x^2 e^{\frac{x}{2}} - 4 \cdot 2Axe^{\frac{x}{2}} - 4 \cdot \frac{A}{2}x^2 e^{\frac{x}{2}} + Ax^2 e^{\frac{x}{2}} = -3e^{\frac{x}{2}};$$

$$8Ae^{\frac{x}{2}} = -3e^{\frac{x}{2}}; \quad 8A = -3; \quad A = -\frac{3}{8}; \quad \tilde{y} = -\frac{3}{8}x^2 e^{\frac{x}{2}};$$

Демек, $y = \bar{y} + \tilde{y} = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{\frac{x}{2}}x - \frac{3}{8}x^2 e^{\frac{x}{2}}$ функциясы берілген теңдеудің

жалпы шешімі.

Енді, тиісті тақырыптарды әдебиеттерден оқып үйреніп және есептерді шешудің келгірілген үлгісінен пайдаланып өздігінше жаттығу үшін тапсырмалардың келесі нұсқаларын ұсынамыз.

1-нұсқа

1. $xy' + y = y^2$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = \frac{1}{1 - cx}).$$

2. $(x - y)y' - y = 0$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және $y(1) = 1$ шартты қанағаттандыратын дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y \ln y + x + cy = 0$; $c = -1$).

3. $(x + e^y)dy - dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз. (Жауабы: $(y + c)e^y = x$).

4. $xy'' + 7y' + x = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$ ретін төмендету мүмкін болған дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = -\frac{x^2}{16} - \frac{1}{48x^2} + \frac{1}{12}$).

5. $y'' - 8y' - 9y = 0$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және $y(0) = y'(0) = 1$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

6. $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x + 1$ коэффициенттері тұрақты біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{11}{54}$).

2 – нұсқа

1. $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy + ydx = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $2\sqrt{y} + 2\sqrt{x} - \ln y = c$).

2. $xy' - y = xtg \frac{y}{x}$ біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\sin \frac{y}{x} = cx$).

3. $y' \cos x + y \sin x = 1$, $y(0) = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y = \sin x + c \cos x$; $c = 0$).

4. $xy'' + y' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ ретін төмендету мүмкін болған дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = \ln x$).

5. $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

6. $y'' + 3y' + 2y = x^2$ коэффициенттері тұрақты біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$).

3 – нұсқа

1. $y - y' = xy'$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = c(x + 1)$).

2. $(2y - 3x)y' + 4x - 3y = 0$, $y(0) = 1$ біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $2x^4 - 3xy + y^2 = c$; $c = 1$).

3. $(1 + x - y)dy - dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $x = y + ce^y$).

4. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 2x$, $y(0) = y'(0) = 1$ ретін төмендету мүмкін болған дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = 2x + \frac{2x^3}{3} - x - 1$).

5. $6y'' - y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

6. $y'' + 3y' = x + 1$ коэффициенттері тұрақты біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 + x\left(\frac{1}{6}x + \frac{2}{9}\right)$).

4 – нұсқа

1. $x(1 - y^2)dx + (y + x^2y)dy = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $1 - y^2 = c(1 + x^2)$).

2. $y^2 dx + x^2 dy = xy dy$ біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = ce^{\frac{y}{x}}$).

3. $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}$, $y(-1) = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y = \left(x^2 + \frac{c}{x}\right)e^{-x}$; $c = 0$).

4. $xy'' + 2y' = x^2$, $y(1) = y'(1) = 1$ ретін төмендету мүмкін болған дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = \frac{x^3}{12} - \frac{3}{4x} + \frac{5}{3}$).

$$5. \quad 2y'' - 5y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{5}{2} \quad \text{коэффициенттері тұрақты}$$

біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

6. $y'' + y' = 5x + 3$ коэффициенттері тұрақты біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = c_1 + c_2 e^{-x} + \left(\frac{5}{2}x - 2\right) \cdot x).$$

5 – нұсқа

1. $2xy' + y^2 = 1$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{1+y}{1-y} = cx).$$

2. $(x+y)y' + x - y = 0, \quad y(1) = 0$ біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \ln(x^2 + y^2) = c - 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; c = 0).$$

3. $(x + 2 - 2y)dy - dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } x = 2y + ce^y)$$

4. $xy'' \ln x = y', \quad y(2) = 3, \quad y'(2) = 0$ ретін төмендету мүмкін болған дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = c_1 x \ln x - c_1 x + c_2; c_1 = 0; c_2 = 3).$$

5. $y'' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \sqrt{2}$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

6. $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ коэффициенттері тұрақты біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}).$$

6 – нұсқа

1. $x(1+2y)dx + (1+x^2)dy = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = \frac{c - (1+x^2)}{2(1+x^2)}).$$

2. $xy' = x^2 + y^2$ біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y^2 = x^2 \ln cx^2).$$

3. $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin 2x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = 2 \sin^2 x + c \sin x, c = 0).$$

4. $xy'' = 2y' + x^3$, $y(1) = y'(1) = 1$ ретін төмендегу мүмкін болған дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = \frac{x^4}{4} + c_1 x^3 + c_2; c_1 = 0; c_2 = \frac{3}{4}).$$

5. $y'' - 9y = 0$, $y(0) = y'(0) = 6$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімін табыңыз.

6. $y'' + y = e^x$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x).$$

7 – нұсқа

1. $4 - y^2 + 2xy' = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } 4 - y^2 = cx).$$

2. $yy' + x + 2y = 0$, $y(0) = 1$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y + x = ce^{\frac{x}{y+x}}).$$

3. $(2e^y - x)dy - dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } x = ce^{-y} + e^y).$$

4. Ретін төмендегу арқылы $x^3 y'' + x^2 y' = 1$, $y(1) = y'(1) = 1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = \frac{1}{x} + c_1 \ln x + c_2; c_1 = 2; c_2 = 0).$$

5. $3y'' - 4y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{4}{3}$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімін табыңыз.

6. $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$ коэффициенттері тұрақты біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(Жауабы: y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{2}{3} x e^{-x})$$

8 – нұсқа

1. $(1 - y^2)dx + xydy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(Жауабы: cx^2 = y^2 - 1).$$

2. $xy' = y + x^2 e^x$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(Жауабы: y = x(e^x + c))$$

3. $y' + 2xy = x e^{-x^2}$, $y(0) = 1$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

$$(Жауабы: y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + c \right); c = 1)$$

4 Ретін төмендету арқылы $x^2 y'' - (y')^2 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \frac{1}{2}$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

$$(Жауабы: y = x - \ln(x+1) + \ln 2, y = const).$$

5. $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімін табыңыз.

6. $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ коэффициенттері тұрақты біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(Жауабы: y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}).$$

9 – нұсқа

1. $y'x^2 + 1 = y - y'x$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(Жауабы: y = 1 + c - \frac{c}{x+1}).$$

2. $(x - y)y' = x + y$, $y(1) = 0$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

$$(Жауабы: \arctg \frac{y}{x} = \ln c \cdot \sqrt{x^2 + y^2}; c = 1).$$

3. $(x + e^{3y})dy + dx = 0$ сызқты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз. (Жауабы: $x = \left(c - \frac{1}{4}e^{4y}\right)e^{-y}$).

4. Ретін төмендету арқылы $xy'' - 4x\sqrt{x} + y' = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \frac{3}{5}$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

$$(Жауабы: y = \frac{16}{25}x^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{5}\ln x + \frac{9}{25}).$$

5. $y'' - 7y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызқты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімін табыңыз.

6. $y'' - 2y' + y = e^x$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызқты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(Жауабы: y = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x).$$

10- нұсқа

1. $dy = a^{x+y}dx$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(Жауабы: $a^x + a^{-y} = C$)$$

2. $xy' = 3y(\ln y - \ln x)$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(Жауабы: $y = x \cdot e^{\frac{1+\alpha^2}{3}}$)$$

3. $x^2y' = 2xy + 3$, $y(1) = -1$ сызқты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

$$(Жауабы: $y = x^2\left(C - \frac{1}{x^3}\right); C = 0$)$$

4. Ретін төмендету арқылы $xy'' - y' - x^2 = 0$, $y(1) = -\frac{1}{6}$, $y'(1) = 0$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

$$(Жауабы: $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$)$$

5. $y'' - 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызқты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

6. $y'' + 4y = 3\sin x - \cos x$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызқты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(Жауабы: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{3}\cos x + \sin x$).$$

11- нұсқа

1. $(y-1)dy + (x+2)dx = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = C$).

2. $2xyy' + x^2 = y^2$, $y(1) = 1$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $x^2 + y^2 = Cx$; $C = 2$).

3. $(x + e^x)dy - dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $(y + c)e^y = x$).

4. Ретін төмендету арқылы $2(y')^2 = y''(y-1)$, $y(1) = 2$ $y'(1) = 1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = 1 - \frac{1}{x-2}$).

5. $y'' - 2y' + y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^x(C_1 + C_2x)$).

6. $y'' + y' = \cos 2x$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{1}{6} \sin 2x$).

12- нұсқа

1. $(x-1)dy - 2(y-2)dx = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = 2 + C(x-1)^2$).

2. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{4y}$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\ln xC = \frac{2y^2}{x^2}$).

3. $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^x(\ln x + C)$, $C = 0$).

4. Ретін төмендету арқылы $(1+y)y'' = (y')^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\ln(1+y) = x$).

5. $y'' - 8y' + 16y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{4x}(C_1 + C_2x)$).

6. $y'' + 9y = 2\sin 3x - \cos 3x$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{6}x(2\cos 3x + \sin 3x)$).

13- нұсқа

1. $dy - 3(x-1)^2 dx = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = (x-1)^3 + C$).

2. $x^2 y' = y^2 - xy$, $y(2) = -1$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y = \frac{2x}{1+Cx^2}$; $C = \frac{5}{4}$).

3. $(e^{y'} + x)dy - dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $x = e^y(e^y + C)$).

4. Ретін төмендету арқылы $yy'' + (y')^2 = (y')^3$, $y(0) = y'(0) = 1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = x + 1$).

5. $9y'' - 6y' + y = 0$ тұрақты коэффициентті біртекті 2-ретті сызықты дифференциал теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{\frac{x}{3}}(C_1 + C_2x)$).

6. $y'' - 2y' + y = 3e^x + x + 1$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{3}{2}e^x x^2 + x + 3$).

14 - нұсқа

1. $\operatorname{ctg} x dy + y dx = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C \cdot \cos x$).

2. $y^2 = 2xy - x^2 y'$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = x(x - y)C$).

3. $xy' - 2y = x^4 e^{-x^2}$, $y(1) = 0$ сызқты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = x^2 \left(C - \frac{1}{2} e^{-x^2} \right), C = \frac{1}{2e}).$$

4. Ретін төмендету арқылы $3y'[1 + (y')^2] = y''$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \ln|\sin(C_1 + 3y)| = x + C_2; C_1 = \frac{\pi}{4}; C_2 = \ln \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

5. $4y'' - 20y' + 25y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызқты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = e^{\frac{5x}{2}} (C_1 + C_2 x)).$$

6. $y'' - 2y' + y = xe^x + x^2$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызқты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = e^x (C_1 + C_2 x) + \frac{1}{6} e^x x + x^3 + 4x + 6).$$

15- нұсқа

1. $y - y' = y^2 + xy'$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = \frac{C(x+1)}{1+C(x+1)}).$$

2. $8xyy' - x^2 - 4y^2 = 0$, $y(1) = \frac{1}{2}$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y^2 = \frac{1}{4} x^2 - Cx; C = 0)$$

3. $2(4e^{-y} + x)dy + dx = 0$ сызқты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } x = e^{-2y} (C - 8e^y)).$$

4. Ретін төмендету арқылы $yy'' + 3(y')^2 = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y^4 = 4(x + \frac{1}{4})).$$

5. $4y'' - 12y' + 9y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызқты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = e^{\frac{3x}{2}} (C_1 + C_2 x)).$$

6. $y'' + y' - 2y = x^2 e^{4x}$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызқты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{8} e^{4x} (x^2 - x + \frac{7}{18})).$$

16- нұсқа

1. $(y+3)dx - (x-2)dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C(x-2) - 3$).

2. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = xC^{x^x}$).

3. $y' + y \operatorname{ctg} x - \cos x = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y = \frac{1}{\sin x} (C - \frac{1}{4} \cos 2x)$, $C = 0$).

4. Ретін төмендету арқылы $y'' = -2y(y')^3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{1}{3}y^3 + y = x$).

5. $4y'' + 12y' + 9y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{\frac{3x}{2}} (C_1 + C_2 x)$).

6. $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}$).

17- нұсқа

1. $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\operatorname{arctg} y - \frac{1}{2}e^{2x} + \ln \sqrt{1+y^2} + e^y = C$).

2. $xy^2y' = x^3 + y^3$, $y(1) = 1$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $\ln x C = \frac{y^3}{3x^3}$; $C = e^{\frac{1}{3}}$).

3. $(1+2x-y)dy - 2dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $x = \frac{1}{2}y + Ce^y$).

4. Ретін төмендету арқылы $y^3 y'' = -2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $2x^2 + y^2 = 1$).

5. $4y'' + 4y' + y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{-\frac{x}{2}}(C_1 + C_2 x)$).

6. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \ln |\operatorname{tg} x|$).

18 – нұсқа

1. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = C$).

2. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = -x \ln |\ln Cx|$).

3. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$, $y(0) = e$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y = (x^2 + C)e^{x^2}$, $C = 1$)

4. Ретін төмендету арқылы $yy'' = y^2 y' + (y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\ln \frac{y}{1+y} = y + \ln 2$).

5. $y'' - 10y' + 25y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{5x}(C_1 + C_2 x)$).

6. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x$).

19-нұсқа

1. $y'x^2 + 1 = y - y'x$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y - 1 = \frac{Cx}{x+1}).$$

2. $x^2 y' - xy = 2y^2$, $y(1) = 1$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } -\frac{x}{y} = 2 \ln x + C; C = -1).$$

3. $(3 - 2y - x)dy - dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } x = 5 - 2y + Ce^{-y}).$$

4. Ретін төмендету арқылы $yy'' + (y')^2 = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y^2 - x^2 = 1).$$

5. $y'' - 6y' + 9y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)).$$

6. $y'' + y = \frac{1}{x}$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \int \frac{\sin x}{x} dx + \sin x \int \frac{\cos x}{x} dx).$$

20-нұсқа

1. $3(y+1)dx - (1+x)dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = C(1+x^3) - 1).$$

2. $xy' = y(\ln y - \ln x)$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз

$$(\text{Жауабы: } y = xe^{1+\alpha}).$$

3. $xy' - y = x \ln x$, $y(1) = -1$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = Cx + \frac{1}{2}x \ln^2 x; C = 1).$$

4. Ретін төмендету арқылы $y'' = y$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = x - 1).$$

5. $9y'' + 12y' + 4y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = e^{-\frac{2x}{3}}(C_1 + C_2 x)).$$

6. $y'' - 4y' + 3y = 3x^2 + x$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің $y(0) = 0$; $y'(0) = 3$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = -5e^x + \frac{3}{5}e^{3x} + x^2 + 3x + \frac{10}{3}).$$

21-нұсқа

1. $(x + 4)dy - (y - 2)dx = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін және $M(0; -1)$ нүктесінен өтетін дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = C(x + 4) + 2; \quad y = -\frac{3}{4}x - 1).$$

2. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \sin \frac{y}{x} = Cx).$$

3. $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің $y(-1) = e$ шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = x^2e^{-x}).$$

4. $xy' + y - y^2 \ln x = 0$ Бернулли теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y(1 + \ln x + Cx) = 1).$$

5. $(y')^2 + yy'' = yy'$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{y^2}{2} = C_1e^x + C_2).$$

6. $y'' - 4y' = 8x + 4$ теңдеудің $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = \frac{13}{8} + \frac{3}{8}e^{4x} - x^2 - \frac{3}{2}x).$$

22 – нұсқа

1. $(y - 1)dy + (x + 2)dx = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін және $y(0) = -1$ шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } (y - 1)^2 + (x + 2)^2 = 2C, (y - 1)^2 + (x + 2)^2 = 8).$$

2. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз

$$(\text{Жауабы: } x^2 + y^2 = Cy).$$

3. $y' + y \cos x = \sin 2x$ теңдеудің $y(0) = 0$ шартын қанағаттандыратын

дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = 2(\sin x - 1) + 2e^{-\sin x}$).

4. $y''' = \cos x + x^2$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = -\sin x + \frac{1}{60}x^5 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$).

5. $16y'' - 24y' + 9y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{\frac{3}{4}x}(C_1 + C_2x)$).

6. $y'' + 2y' + 2y = x^2 + 1$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$).

23 – нұсқа

1. $(x-1)dy - 2(y-2)dx = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін және $y(0) = -1$ шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C(x-1)^2 + 2$, $y = -3(x-1)^2 + 2$).

2. $2xy = y'(x^2 + y^2)$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y^2 - x^2 = Cy$).

3. $y' + 2y = y^2 e^x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = \frac{1}{Ce^{2x} + e^x}$).

4. $y'' = xe^x$ теңдеудің $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = (x-2)e^x + x + 3$).

5. $x'' - x' - 2x = 0$ теңдеудің $x(0) = 0$ $\dot{x}(0) = 3$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $x(t) = e^{2t} - e^t$).

6. $y'' + 2y' + 2y = 2x^3 - 1$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^3 - 3x - \frac{1}{2}$).

24-нұсқа

1. $3(y+1)dx - (1-x)dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін және $M(0;1)$ нүктесінен өтетін дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C(x+1)^3 - 1$, $y = -1$).

2. $y^2 + x^2 y' = xyu'$ теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $e^{\frac{y}{x}} = Cy$).

3. $xy' + y - xe^{-x} = 0$ теңдеуінің $y(1) = \frac{1}{2e}$ шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = \frac{1}{2x} e^{-x}).$$

4. $2(y')^2 = (y-1)y''$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = -\frac{1}{C_1^2} (x + C_2)(y-1)).$$

5. $x'' - 2x' = 0$ теңдеуінің $y(0) = 0$ $y'(0) = 2$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } x(t) = e^{2t} - 1).$$

6. $y'' - 4y' = 4x^2 - 8x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{8} x)$$

25-нұсқа

1. $(y+3)dx - (x-2)dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін және $y(0) = -1$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = C(x-2) - 3, y = -x-1).$$

2. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \arcsin \frac{y}{x} = \ln Cx).$$

3. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = \frac{1}{\sqrt{2(e^x + C)}}).$$

4. $y'' = 2y^3$ теңдеуінің $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = \frac{1}{1-x}).$$

5. $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0$ теңдеуінің $s(0) = 1$, $s'(0) = 1$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } s(t) = e^{-t} (\cos t + 2 \sin t)).$$

6. $y'' - 4y' = 12x^2$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = C_1 + C_2 e^{4x} - x^3 - \frac{3}{4} x^2 - \frac{3}{8} x).$$

№28-дәріс. 15-тақырып. Қатарлар теориясы.

15.1 Сан қатары

Сан қатары туралы түсінік. $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ сан тізбегін қарастыралық.

Анықтама.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

түріндегі өрнек сан қатары, немесе қысқаша қатар деп аталады.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ сандары қатардың мүшелері, ал a_n саны қатардың жалпы мүшесі деп аталады.

Мына түрдегі $S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ қосындылары, яғни қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындылары (1) қатардың дербес қосындылары деп аталады.

Енді

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots \quad (2)$$

сан тізбегін қарастыралық..

Анықтама. Егер де (2) тізбектің шегі S бар болса, онда (1) қатар жинақты, S саны (1) қатардың қосындысы деп аталады.

Егер (2) тізбектің шегі болмаса, онда (1) қатар жинақсыз деп аталады.

(1) қатар жинақты болған жағдайда, оны келесі түрде жазуға болады

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \text{ немесе } S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (3)$$

Біз, шын мәнінде, қатарлармен көптен бері таныспыз, өйткені, осы уақытқа дейін e мен π сандарын білеміз, яғни $e = 2,718\dots$, ал $\pi = 3,14\dots$ екендігі белгілі. Осы сандарды (3) теңдік бойынша былай жазуға болады

$$e = 2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \dots$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \dots$$

Егер $\{a_n\}$ тізбегі ретінде, өзімізге мектеп математика пәнінен таныс бірінші мүшесі $b \neq 0$, ал еселігі q болатын геометриялық прогрессияны қарастырсақ, онда

$$b + bq + bq^2 + \dots + bq^{n-1} + \dots \quad (4)$$

қатарын аламыз. $q \neq 1$ болғанда бұл қатардың дербес қосындысы

$$S_n = b + bq + \dots + bq^{n-1} = \frac{b(1-q^n)}{1-q} = \frac{b}{1-q} - \frac{bq^n}{1-q}$$

түрінде болады. Осыдан:

1) егер $|q| < 1$ болса, онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{1-q} - \frac{bq^n}{1-q} \right) = \frac{b}{1-q},$$

яғни (4) қатар жинақты және оның қосындысы

$$S = \frac{b}{1-q}$$

болады;

2) егер $|q| > 1$ болса, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, яғни (4) қатар жинақсыз;

3) егер $q = 1$ болса, онда $S_n = nb$ болады және $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, яғни (4)

қатар жинақсыз;

4) егер $q = -1$ болса, онда (4) қатар былай жазылады

$$b - b + b - b + \dots$$

Мұндай қатардың дербес қосындылары

$$S_1 = b, S_2 = 0, S_3 = b, S_4 = 0, \dots$$

болады. Ал мұндай тізбектің шегі болмайтындығы белгілі (Анализге кіріспе бөлімін қараңыз).

Сонымен мынандай қорытындыға келдік:

(4) геометриялық қатар $|q| < 1$ болғанда жинақты, ал $|q| \geq 1$ болғанда жинақсыз.

Енді

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \quad (5)$$

қатарын қарастыралық. Бұл қатардың жалпы мүшесін, яғни $\frac{1}{n(n+1)}$ -ді мына түрде жазуға болады

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (6)$$

(6) теңдікті пайдаланып (5) қатардың дербес қосындысы S_n -ді былай жазуға болады

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Жакшаларды ашсақ бірінші мен соңғы қосылғыштардан басқалары өзара жойылып кетеді. Демек,

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

болады. Олай болса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

яғни (5) қатар жинақты екен.

Жинақты қатардың қасиеттері.

1⁰. Егер де (1) қатар жинақты болса, онда осы қатардан саны шекті мүшелерін алып тастағаннан кейінгі қатар да жинақты болады.

2⁰. Егер (1) қатар жинақты және оның қосындысы S -ке тең болса, онда қандайда бір c саны үшін

$$ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots$$

қатары да жинақты болады және оның қосындысы $c \cdot S$ -ке тең.

Мынандай қатарларды қарастыралық

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (7)$$

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots \quad (8)$$

3°. Егер (1) мен (7) қатарлары жинақты және олардың қосындылары сәйкес S_1 мен S_2 -ге тең болса, онда (8) қатар да жинақты болады және оның қосындысы $(S_1 + S_2)$ -ге тең болады.

Қатарды зерттегенімізде біздің алдымызда негізінен екі мәселе тұрады. Олардың біріншісі берілген қатарды жинақтылыққа зерттеу; екіншісі жинақты қатардың қосындысын табу.

Алдымен қатардың жинақты болуының қажетті шартын қарастыралық.

Теорема. Егер қатар жинақты болса, онда оның жалпы мүшесінің шегі нөлге тең болады, яғни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Дәлелдеуі. Айталық (1) қатар жинақты және оның қосындысы S -ке тең болсын. Кез келген натурал n саны үшін $S_n = S_{n-1} + a_n$ теңдігі орындалады. Олай болса осы теңдіктен

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

теңдігін алып, шекке көшсек

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Ескерту! Осы теоремаға пара-пар мынандай тұжырымдама жасауға болады:

Егер қатардың жалпы мүшесінің шегі нөлге ұмтылмаса, онда ол қатар жинақсыз болады.

Мысал келтірелік.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

қатары үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0,$$

яғни бұл қатар жинақсыз.

Анықтама.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (9)$$

қатары гармониялық қатар деп аталады.

Ескерту! (9) гармониялық қатар жинақсыз. Бұл ескертуден мынандай қорытынды жасаймыз: жоғарыда дәлелденген теорема қатардың жинақты болуының тек қажетті ғана шарты бола алады, себебі, мысалы (9) гармониялық қатар үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

бірақ ол қатар жинақсыз.

15.2 Оң қатарлар

Бұл тақырыпта барлық мүшелері оң

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

қатарын қарастырамыз.

Енді осындай қатарлардың жинақтылық мәселесіне тоқталалық.

Теорема. Оң қатар жинақты болу үшін оның дербес қосындыларының шектеулі болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Жеткіліктілігі. Қатар оң болғандықтан кез келген n үшін $S_n = S_{n-1} + a_n$ теңдігі орындалады, олай болса қатардың дербес қосындыларының тізбегі өспелі болады.

Олай болса, өзімізге Анализге кіріспе бөлімінен белгілі тұжырым бойынша $\{S_n\}$ тізбегінің шегі бар болады.

Қажеттілігі. Айталық (1) қатар жинақты болсын. Онда жинақтылықтың анықтамасы бойынша оның дербес қосындыларының шегі бар болады. Олай болса тізбектің шектерінің қасиеті бойынша қатардың дербес қосындыларының тізбегі шектелген болады.

Ескерту! Бұл критерийдің практикалық қолдануына қарағанда теориялық маңызы зор. Алайда, ол төмендегі қатар жинақтылығының жеткілікті шарттарының негізі болады.

Қатар жинақтылығының жеткілікті шарттары.

1-теорема (салыстыру белгісі).

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (2)$$

он қатарлары үшін $a_n \leq b_n$ ($n=1,2,\dots$) теңсіздіктері орындалса, онда (2) қатардың жинақтылығынан (1) қатардың жинақтылығы шығады; ал (1) қатар жинақсыз болса, онда (2) қатар да жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. (1) мен (2) қатардың дербес қосындыларын сәйкес S_n және σ_n арқылы белгілесек, онда кез келген n үшін

$$S_n \leq \sigma_n \quad (3)$$

теңсіздігі орындалады. (2) қатар жинақты болғандықтан $\{\sigma_n\}$ тізбегі шектелген болады, яғни барлық n -дер үшін қандайда бір C саны табылады да $\sigma_n \leq C$ теңсіздігі орындалады. Олай болса (3) теңсіздік бойынша $\{S_n\}$ тізбегі де шектелген болады. Сондықтан (1) қатар жинақты болады.

1-мысал.

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \quad (4)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \quad (5)$$

қатарларын қарастырайық. Кез келген n үшін

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$$

теңсіздігі орындалады және (5) қатар жинақты (жоғарыдағы 1.1 тақырыбын қараңыз). Олай болса 1-теорема бойынша (4) қатарда жинақты болады.

2-мысал.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots \quad (6)$$

қатары мен 1.2 тақырыбындағы гармониялық қатарды қарастырайық. Кез келген $n \geq 2$ үшін

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

теңсіздігі орындалады және гармониялық қатар жинақсыз болғандықтан (6) қатар да жинақсыз болады.

2-теорема (салыстыру белгісі). Егерде (1) және (2) қатарлар үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = d \neq 0 \quad (7)$$

шегі бар болса, онда бұл екі қатар бір мезгілде не жинақты, не жинақсыз болады.

3-мысал. Жалпы мүшесі

$$a_n = \frac{n+3}{n^3 + 3n^2 + 5n + 1} \quad (8)$$

болатын қатар мен жалпы мүшесі

$$b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

болатын (4) қатарды қарастырайық. Бұл қатарлар үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2(n+3)}{n^3 + 3n^2 + 5n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 5n^2 + 7n + 3}{n^3 + 3n^2 + 5n + 1} = 1.$$

Олай болса жалпы мүшесі (8) теңдігі болатын

$$\frac{4}{10} + \frac{5}{31} + \dots + \frac{n+3}{n^3 + 3n^2 + 5n + 1} + \dots$$

қатары да жинақты, себебі (4) қатар жинақты.

3-теорема. (Даламбер белгісі). Егерде (1) қатар үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

болса, онда:

1) $d < 1$ болғанда (1) қатар жинақты;

2) $d > 1$ болғанда (1) қатар жинақсыз болады.

$$4\text{-мысал. } \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + \dots \quad (9)$$

қатарын қарастырайық. Бұл қатарда

$$a_n = \frac{3^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Сондықтан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} n!}{3^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1,$$

яғни (9) қатар жинақты.

5-мысал.

$$1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots + \frac{n^n}{n!} + \dots \quad (10)$$

қатары үшін

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

Сондықтан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n n!}{n^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e,$$

яғни (10) қатар жинақсыз.

4-теорема (Коши белгісі). Егер (1) қатар үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = d$$

болса, онда:

- 1) $d < 1$ болғанда (1) қатар жинақты;
- 2) $d > 1$ болғанда (1) қатар жинақсыз болады.

6-мысал. $\frac{1}{5} + \left(\frac{2}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{11}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n + \dots$ қатар жинақты, себебі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3} < 1.$$

7-мысал. $\frac{6}{4} + \left(\frac{10}{7}\right)^2 + \left(\frac{14}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{4n+2}{3n+1}\right)^n + \dots$ қатары жинақсыз, себебі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n+2}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{3n+1} = \frac{4}{3} > 1.$$

5-теорема (интегралдық белгі). Айталық $[1; +\infty)$ аралығында анықталған $y = f(x)$ функциясы монотонды кемімелі болсын және кез келген натурал n үшін $a_n = f(n)$ шарттарын қанағаттандырсын. Онда (1) қатардың жинақты болуы үшін

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

меншіксіз интегралдың жинақты болуы қажетті және жеткілікті.

8-мысал.

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots \quad (11)$$

қатары α -ның қандай мәндерінде жинақты немесе жинақсыз болатынын көрсетелік. Мұндағы α кез келген оң сан.

Ол үшін $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ ($x \geq 1$) функциясын қарастыралық. Бұл функция $[1; +\infty)$ аралығында кемиді, себебі оның туындысы осы аралықта теріс. Шынында да

$$f'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+2}} < 0.$$

Сондықтан (11) қатардың жинақты немесе жинақсыз болуы

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} \quad (12)$$

меншіксіз интегралына байланысты. (12) меншіксіз интеграл $\alpha > 1$ болғанда жинақты, ал $\alpha \leq 1$ болғанда жинақсыз. Шынында да

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha+1} \right) \Big|_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{N^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \frac{1}{\alpha-1} \right].$$

Соңғы шек α -ға байланысты. Егер $\alpha > 1$ болса, ол $\frac{1}{\alpha-1}$ -ге тең. Егер $\alpha \leq 1$ болса, ол шексіздікке тең. Олай болса (11) қатар $\alpha > 1$ болғанда жинақты, ал $\alpha \leq 1$ болғанда жинақсыз болады.

9-мысал.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^3}} + \dots$$

қатары жинақты, себебі $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dots$$

қатары жинақсыз, себебі $\alpha = \frac{2}{3} < 1$.

15.3 Таңбалары айнымалы қатарлар

Алдыңғы тақырыпта мүшелері оң қатарлар жөніндегі мәселелерді қарастырдық. Енді мүшелерінің таңбалары әртүрлі болып келетін қатарлар жөнінде әңгіме қозғалық.

Таңбалары айнымалы қатарлардың ішінде мүшелерінің таңбалары ауысып отыратын, яки таңбалары ауыспалы қатарлар жиі кездеседі. Егер де бірінші мүшесінің таңбасы оң деп ұйғарсақ, онда таңбалары ауыспалы қатар мына түрде жазылады:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots, \quad (1)$$

мұндағы a_n ($n = 1, 2, \dots$) оң сандар.

Лейбниц теоремасы. Егер (1) таңбалары ауыспалы қатар төмендегі шарттарды қанағаттандырса:

1) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \dots$, яғни мүшелері кемімелі болса;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ болса, онда бұл қатар жинақты болады және $n \rightarrow \infty$ оның қосындысы қатардың бірінші мүшесі a_1 -ден аспайды.

Дәлелдеуі. Кез келген n үшін $a_n > a_{n+1}$ болғандықтан n шексіздікке ұмтылғанда a_n нөлге ұмтылады. (1) қатардың жұп мүшелерінен тұратын

$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ дербес қосындысын қарастырайық. Теореманың бірінші шарты бойынша жақшалардың ішіндегі айырмалардың барлығы оң болады. Сондықтан $\{S_{2n}\}$ тізбегі өспелі тізбек.

Енді S_{2n} -ді мына түрде жазалық

$$S_{2n} = a_1 - [(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \dots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}].$$

Квадрат жақшаның ішіндегі өрнек оң. Олай болса кез келген n үшін $S_{2n} < a_1$ болады, яғни $\{S_{2n}\}$ тізбегі шектелген тізбек. Сонымен $\{S_{2n}\}$ тізбегі өспелі, шектелген тізбек екен. Олай болса $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ болады.

Екінші жағынан $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ және шарт бойынша

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0.$$

Олай болса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = S.$$

Сонымен

$$0 < S < a_1.$$

1-мысал. $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \dots$ қатары жинақты, себебі жоғарыдағы Лейбниц теоремасының екі шарты да орындалады. Шынында да

$$1) 1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \dots > \frac{1}{n^2} > \dots,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Абсолют және шартты жинақты қатарлар

Айталық

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots \quad (1)$$

таңбалары ауыспалы қатар берілсін. Осы қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (2)$$

оң қатарын қарастырайық.

1-анықтама. Егер (2) қатар жинақты болса, онда (1) қатар абсолют жинақты қатар деп аталады.

Теорема. Кез келген абсолют жинақты қатар жинақты болады.

1-мысал.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \quad (3)$$

қатарының абсолют жинақты екендігін дәлелделік. Ол үшін оның мүшелерінің абсолют шамаларынан тұратын.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \quad (4)$$

қатарын құралық.

Біріншіден $\sin \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n}$ теңсіздігі орындалатындықтан, екіншіден, (4)

қатардың мүшелері жинақты

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2}$$

қатарының сәйкес мүшелерінен аспайтындықтан (4) қатар жинақты болады. Олай болса (3) қатар абсолют жинақты.

2-анықтама. Егер (1) қатар жинақты, ал (2) қатар жинақсыз болса, онда (1) қатар шартты жинақты қатар деп аталады.

Мысалы,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

қатары шартты жинақты қатар Себебі, бұл қатар Лейбниц теоремасы бойынша жинақты. Екіншіден, бұл қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған оң қатар гармониялық қатар. Ал ол қатардың жинақсыз екені белгілі.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Сан қатарының анықтамасын беріңіз.
2. Дербес қосындылар деген не?
3. Жинақты қатар деп қандай қатарды айтады?
4. Жинақсыз қатар деп қандай қатарды айтады?
5. Жинақты қатарлардың қасиеттерін атаңыз.
6. Қатардың жинақтылығының қажеттілік шартын жазыңыз.
7. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ болса, қатар жинақты болама?

8. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ болса, кез келген қатар жинақты болама?

9. Қандай қатар гармоникалық қатар деп аталады?

10. Гармоникалық қатар жинақты ма немесе жинақсыз ба?

11. Мүшелері оң қатарларды салыстыру белгісін жазыңыз.

12. Жинақтылықтың Даламбер, Коши белгілерін жазыңыз.

13. Жинақтылықтың интегралдық белгісін жазыңыз.

14. Таңбалары ауыспалы қатар деп қандай қатарға айтылады?

15. Лейбниц теоремасын жазыңыз және дәлелдеңіз.

16. Абсолютті және шартты жинақтылықтың анықтамасын беріңіз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$ қатардың қосындысын табыңыз.

Шешуі. Берілген қатардың жалпы мүшесі:

$$a_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

a_n -ді төмендегіше түрлендіріп жазуға болады:

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

қатардың n мүшесінің дербес қосындысын анықтаймыз:

$$S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}, \text{ яғни } S = \frac{1}{2}.$$

Ескерту! Әрқашан да қатардың қосындысы осылайша жеңіл табыла бермейді. Сондықтан да оларды жинақтылыққа зерттейді.

2-мысал. $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{9} + \frac{4}{13} + \dots + \frac{n}{4n-3} + \dots$ қатардың жинақтылығын

зерттеңіз:

Шешуі.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n-3} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Жинақтылықтың қажеттілік шарты орындалмайды, сондықтан қатар жинақсыз.

3-мысал. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз:

Шешуі. Берілген қатарды былай жазамыз:

$$\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^4+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1} + \dots$$

Бұл қатарды мынадай жинақты геометриялық қатармен салыстырамыз.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Кез келген n үшін

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

теңсіздігі орындалатындықтан, салыстыру белгісі бойынша берілген қатар жинақты.

4-мысал. $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Даламбер белгісі бойынша

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} : \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

онда қатар жинақты.

5-мысал. $\frac{1}{10} + \frac{1 \cdot 2}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^3} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{10^n} + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Даламбер белгісі бойынша

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1)}{10^{n+1}} : \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty,$$

демек, қатар жинақсыз.

6-мысал. $\frac{1}{2 \ln^3 2} + \frac{1}{3 \ln^3 3} + \dots + \frac{1}{n \ln^3 n} + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. $f(x) = \frac{1}{x \ln^3 x}$ функциясын қарастырамыз. $f(x)$ функциясы $x > 1$ облысында оң және кемімелі функция. Сондықтан берілген қатардың жинақтылығы $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$ меншіксіз интегралдың жинақтылығына эквивалентті болады.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b (\ln x)^{-3} d(\ln x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2 \ln^2 x} \right)_2^b =$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \ln^2 2} - \frac{1}{2 \ln^2 b} \right) = \frac{1}{2 \ln^2 2}.$$

Сонымен, меншіксіз интеграл жинақты, онда берілген қатарда жинақты.

7-мысал. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4x+1}} dx = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b (4x+1)^{-\frac{1}{2}} d(4x+1) = \frac{2}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \sqrt{4x+1} \Big|_0^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \sqrt{4b+1} = \infty.$$

Меншіксіз интеграл жинақсыз, онда берілген қатарда жинақсыз.

8-мысал. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ қатарының қосындысын 0,01-ге дейінгі дәлдікпен табу үшін оның неше мүшесін қосу керек?

Шешуі. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ деп аламыз.

$$\int_{k+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leq R_k \leq \int_k^{\infty} \frac{dx}{x^2} \quad \text{немесе} \quad \frac{1}{k+1} \leq R_k \leq \frac{1}{k}.$$

Мұнан, $k \geq 100$ болғанда қатарының қалдығы 0,01 ден аспайтындығы шығады. Олай болса, қатардың қосындысын 0,01-ге дейінгі дәлдікпен табу үшін оның 100 мүшесін қосу керек екен.

9-мысал. $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots$ қатарының жинақтылығын зерттеңіз, егер жинақты болса оның қосындысын 0,01-ге дейінгі анықтықпен табу үшін неше мүшесін қосу керек?

Шешуі. Берілген қатар Лейбниц теоремасының шарттарын қанағаттандырады сондықтан ол жинақты. Қатардың қалдығын есептеу үшін $|R_k| < a_{k+1}$ теңсіздігін пайдаланамыз. Онда

$$R_k < \frac{1}{(k+1)^2}.$$

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{100} \quad \text{немесе} \quad k \geq 9.$$

Сонымен, қатарының қосындысын 0,01-ге дейінгі дәлдікпен табу үшін оның тоғыз мүшесін ғана қосу жеткілікті екен. Бұл 8-мысалға қарағанда 10 еседен де артық жеңіл есептеледі екен.

Өзіндік жұмыстар тапсырмалары

1. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

2. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+6}{100n-1}$ қатарын қажеттілік шарт бойынша жинақтылыққа

зерттеңіз.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,001}$ қатарын қажеттілік шарт бойынша жинақтылыққа

зерттеңіз.

5-8-қатарларын салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

$$5. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$6. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots$$

$$7. 1 + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{9\sqrt{3}} + \dots$$

$$8. \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \dots$$

Төмендегі қатарларды Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2};$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n};$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}};$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+7};$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n};$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!};$$

Төмендегі қатарларды интегралдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

$$15. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}};$$

$$16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1};$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}};$$

Төмендегі қатарларды Лейбниц теоремасы бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1};$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)};$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(4n+1)^n};$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ қатардың қосындысын } 0,01\text{-ге дейінгі дәлдікпен}$$

есептеңіз.

15.4 Дәрежелі қатарлар

1-анықтама.

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

түріндегі қатар функциялық қатар деп аталады. Мұндағы $u_1(x), u_2(x), \dots$ x -тің қандай да бір функциялары. Олардағы x -ке әртүрлі мәндер бере отырып, біз әртүрлі сан қатарын аламыз. Ол қатарлар жинақты болуы да, болмауы да мүмкін.

2-анықтама. (1) функциялық қатар жинақты болатын x -тің мәндерінің жиыны оның **жинақтылық облысы** деп аталады.

3-анықтама. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ (1') түріндегі қатар дәрежелі қатар деп аталады. Мұндағы $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ тұрақты сандар. Олар дәрежелі қатардың коэффициенттері деп аталады.

Қатарлар функциялық қатардың дербес жағдайы болады.

Кез келген дәрежелі қатардың жинақтылық обылысы бос жиын болмайды, себебі (1') қатар $x = 0$ болғанда жинақты.

Дәрежелі қатарлар үшін келесі тұжырымның маңызы өте зор.

Абель теоремасы. Егер де (1') қатар нөлден өзгеше $x = x_0$ мәнінде жинақты болса, онда ол $|x| < |x_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын x -тің барлық мәндерінде абсолют жинақты болады. Егер де (1') қатар $x = x_1$ мәнінде жинақсыз болса, онда $|x| > |x_1|$ теңсіздігін қанағаттандыратын x -тің барлық мәндерінде де жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n + \dots \quad (1')$$

қатары жинақты болғандықтан n шексіздікке ұмтылғанда оның жалпы мүшесі $a_nx_0^n$ нөлге ұмтылады. Демек $\{a_nx_0^n\}$ тізбегі шектелген тізбек. Олай болса, қандайда бір M оң саны табылады да барлық n - дер үшін $|a_nx_0^n| < M$ теңсіздігі орындалады.

(1') қатардың мүшелерінің абсолют шамасынан құрылған

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \dots + |a_nx^n| + \dots \quad (2)$$

қатарын қарастыралық.

$$\text{Айталық } |x| < |x_0| \text{ болсын, онда } |a_nx_0^n| = |a_nx_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n; \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$$

болғандықтан (2) қатардың мүшелері

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (3)$$

жинақты қатарының сәйкес мүшелерінен аспайды. (3) қатар еселігі

$q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ болатын геометриялық қатар болғандықтан ол жинақты болады.

Сондықтан (2) қатар жинақты, олай болса (1') қатар абсолют жинақты болады.

Енді теореманың екінші бөлімін дәлелделік. Кері жориық, яғни (1') қатар $x = x_1$ мәнінде жинақсыз, бірақ $|x| > |x_1|$ шартын қанағаттандыратын x -тер үшін (1') қатар жинақты болсын делік. Онда теореманың бірінші бөлімі бойынша (1') қатар $x = x_1$ мәнінде жинақты болады. Сөйтіп қарама-қайшылыққа келдік. Теорема толық дәлелденді.

Абель теоремасы геометриялық тұрғыдан келесі мәселелерді білдіреді: егер (1') қатар x_0 нүктесінде жинақты болса, онда ол қатар $(-|x_0|; |x_0|)$

аралығының барлық ішкі нүктелерінде абсолют жинақты болады, ал бұл аралықтың сыртқы нүктелерінде жинақсыз болады.

1-теорема. Дәрежелі қатар үшін тек төмендегі үш жағдай ғана болады:

1) жалғыз ғана $x = 0$ нүктесінде жинақты болады;

2) x -тің барлық мәндерінде жинақты болады;

3) R оң саны табылады да $(-R; R)$ аралығының ішкі нүктелерінде жинақты, ал сыртқы нүктелерінде жинақсыз болады. $(-R; R)$ аралығының шеткі $x = -R$ және $x = R$ нүктелерінде жинақты да, жинақсыз да болуы мүмкін.

Бұл теоремадан мынадай қорытынды шығады: дәрежелі қатардың жинақтылық облысы не жалғыз ғана нүкте болады, не бүкіл сан өсі болады, не $(-R; R)$ түріндегі аралықтар болады.

4-анықтама. $(-R; R)$ аралығы дәрежелі қатардың жинақтылық аралығы, ал R саны жинақтылық радиусы деп аталады.

Ескерту! Жоғарыдағы теореманың бірінші жағдайында $R = 0$, ал екінші жағдайында $R = \infty$ деп аламыз.

Енді дәрежелі қатардың жинақтылық радиусын табу мәселесін қарастыралық.

2-теорема. Егер де

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad (3)$$

шегі бар және ол нөлден өзгеше болса, онда дәрежелі қатардың жинақтылық радиусы

$$R = \frac{1}{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (4)$$

шамасына тең болады.

1-мысал.

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (5)$$

қатарының жинақтылық радиусын табалық. Бұл қатар үшін $a_n = \frac{1}{n!}$. Олай

болса $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$. Сондықтан (4) теңдіктің негізінде

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

яғни (2) қатар бүкіл сан өсінде жинақты болады.

2-мысал.

$$x + (2x)^2 + (3x)^3 + \dots + (nx)^n + \dots \quad (6)$$

дәрежелі қатарының жинақтылық радиусын табалық.

Қатардың жалпы мүшесі $(nx)^n$ -ке тең. Сондықтан $n > \frac{1}{|x|}$ шартын

қанағаттандыратын x -тің нөлден өзгеше мәндері үшін $(n|x|)^n > 1$ болады. Бұл теңсіздік (6) қатардың барлық $x \neq 0$ үшін жинақсыз болатындығын көрсетеді. Олай болса (6) қатардың жинақтылық облысы тек $x=0$ нүктесінен ғана тұрады, яғни жинақтылық радиусы нөлге тең.

Дәрежелі қатарлардың қасиеттері.

Айталық жинақтылық интервалы $(-R, R)$ болатын дәрежелі қатардың қосындысы $f(x)$ функциясына тең, яғни

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (7)$$

болсын. Бұл жағдайда $f(x)$ функциясы $(-R, R)$ аралығында дәрежелі қатарға жіктелінеді деп айтады.

Дәрежелі қатарды мүшелеп дифференциалдау туралы теорема. Айталық $f(x)$ функциясы $(-R, R)$ аралығында дәрежелі қатарға жіктелінсін, яғни (7) теңдік орындалсын. (1) дәрежелі қатарды мүшелеп дифференциалдау арқылы алынған

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \quad (8)$$

қатарын қарастыралық. Сонда:

1) (8) қатардың да жинақтылық радиусы R -ге тең болады;

2) $(-R, R)$ аралығында $f(x)$ функциясының туындысы $f'(x)$ бар болады және

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \quad (9)$$

теңдігі орындалады.

Дәрежелі қатарды мүшелеп интегралдау туралы теорема.

Егер де $f(x)$ функциясы $(-R, R)$ аралығында дәрежелі қатарға жіктелінсе, онда бұл функция осы аралықта интегралданады және қосындының интегралы қатардың мүшелерінің интегралдарының қосындыларына тең болады

Басқаша айтқанда, егер $[\alpha; \beta] \subset (-R, R)$ болса, онда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} a_0 dx + \int_{\alpha}^{\beta} a_1 x dx + \int_{\alpha}^{\beta} a_2 x^2 dx + \dots + \int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx + \dots$$

теңдігі орындалады.

5-анықтама. Егер кез-келген мейлінше кіші $\varepsilon > 0$ саны үшін сондай бір оң N саны табылып, $n > N$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n -дер үшін $|R_n(x)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда (1) қатар бірқалыпты жинақталады деп аталады. Мұндағы $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$,

x , (1) қатардың бірқалыпты жинақталу облысының нүктесі.

Вейерштрасс белгісі. Егер $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ функциялары $|u_1(x)| \leq M_1, |u_2(x)| \leq M_2, \dots, |u_n(x)| \leq M_n, \dots$ теңсіздіктерін қанағаттандырса және

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n + \dots$$

сан қатары жинақты болса, онда $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ функциялы қатар бірқалыпты және абсолют жинақты болады.

3-теорема. Үзіліссіз функциялардан құралған бірқалыпты жинақты қатарды мүшелеп интегралдауға болады.

4-теорема. Егер берілген қатардың туындысынан шыққан қатар бірқалыпты жинақты болса, онда берілген қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады.

15.5 Функциялардың дәрежелі қатарларға жіктелінуі. Маклорен қатары

Практикада берілген функцияны дәрежелі қатарға қалай жіктеу мәселесін білудің маңызы өте зор. Ол үшін төмендегі екі мәселені білуге тиіспіз:

1) берілген аралықта функцияны дәрежелі қатардың қосындысы түрінде өрнектеуге бола ма?

2) егер болса, ол қатар қалай табылады?

Біз екінші сауалдың жауабын іздеуден басталық.

Қандайда бір $[-2, 2]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясы дәрежелі қатардың қосындысына жіктеледі деп ұйғаралық, яғни

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^4 + \dots \quad (1)$$

болсын. Осы қатардың $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ коэффициенттерін табалық.

Алдыңғы тақырыпта жинақтылық облысында жататын кез келген $[-R; R]$ кесіндісінде (1) дәрежелі қатарды қалауымызша мүшелеп дифференциалдауға болатыны жөнінде айтқанбыз. Сондықтан $(\alpha; \beta)$ аралығында жатқан кез келген x үшін

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4x + \dots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n + \dots$$

Осы алынған теңдіктер мен (1) теңдіктен $x = 0$ деп ұйғара отырып

$$f(0) = a_0,$$

$$f'(0) = a_1,$$

$$f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2,$$

$$f^{(n)}(0) = n!a_n$$

теңдіктердің немесе кез келген n үшін ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

формуласын аламыз.

Анықтама. Айталық $f(x)$ функциясы $x=0$ нүктесінің аймағында анықталсын және осы нүктеде оның барлық туындылары бар болсын. Сонда

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (2)$$

қатары $f(x)$ функциясының Маклорен қатары деп аталады.

Енді жоғарыдағы екінші сауалдың жауабын келесі тұжырым түрінде беруге болады.

Теорема. Егер де $f(x)$ функциясы $x=0$ нүктесінің аймағында дәрежелі қатарға жіктелсе, ол міндетті түрде Маклорен қатары болады.

Функцияның Маклорен қатарына жіктелуінің жеткілікті шарты.

Айталық $f(x)$ шексіз дифференциалданатын функция болсын. Оған (2) Маклорен қатарын құруға болады. Қандай шарттар орындалғанда осы Маклорен қатарының қосындысы $f(x)$ функциясымен сәйкес келетіндігін көрсетелік. Біз «Бір айнымалы функциясының дифференциалдық есептеулер» бөлімінде

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

түріндегі Маклорен формуласы жөнінде айтқанбыз. Мұндағы

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < c < x \quad (3)$$

қалдық мүше болатын.

Егер $S_n(x)$ арқылы Маклорен қатарының дербес қосындысын белгілесек, Маклорен формуласы былай жазылады

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x). \quad (4)$$

(4) теңдіктен Маклорен қатарының $f(x)$ функциясына жинақталу мәселесінің қалдық n шексіздікке ұмтылғанда $R_n(x)$ -тің шегін зерттеу мәселесіне байланысты екендігіне көз жеткізу қиын емес.

Теорема. Айталық $f(x)$ функциясы $(-R, R)$ аралығында анықталған және шексіз дифференциалданатын болсын. Егер де осы аралықтың барлық нүктелері үшін қандай да бір M саны табылып

$$\left| f^{(n)}(x) \right| < M \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

теңсіздігі орындалса, онда осы интервалда Маклорен қатары $f(x)$ функциясына жинақты болады.

Дәлелдеуі. (4) формуласы бойынша $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ болатынын дәлелдесек жеткілікті. Теореманың шарттарынан және (3) теңдіктен

$$|R_n(x)| < \frac{Md^{n+1}}{(n+1)!}$$

теңсіздігі шығады.

Бұл теңсіздіктің оң жағы жинақты

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n}{n!}$$

қатарының мүшелерінен тұрақты M санымен ғана өзгешеленеді. Қатар жинақтылығының қажетті белгісі бойынша $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^n}{n!} = 0$. Осыдан қатардың қалдық мүшесінің шегі нөлге тең болатындығы шығады.

$e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), \arctg x$ және $(1+x)^a$ функциясының Маклорен қатарына жіктелінулері

1) $f(x) = e^x$. $(-d, d)$ аралығының кез келген x нүктесі үшін

$$|f^{(n)}(x)| = e^x < e^d.$$

Олай болса алдыңғы тақырыптағы теорема бойынша $(-R, R)$ аралығындағы x үшін e^x функциясы өзінің Маклорен қатарының қосындысына тең. Екінші жағынан кез келген n үшін $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ болғандықтан

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (6)$$

Дәл осылай етіп төмендегі жіктеулерге көз жеткізу қиын емес.

2) $f(x) = \sin x$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (7)$$

3) $f(x) = \cos x$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (8)$$

4) $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ қатары геометриялық қатар болғандықтан $|x| < 1$ болғанда жинақты және оның қосындысы $\frac{1}{1-x}$ функциясына тең, яғни

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^4 + \dots \quad (8a)$$

(8a) теңдіктен $x = -t$ алмастыруын жасап

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots \quad (9)$$

теңдігін аламыз. Осы соңғы теңдікті 0-ден x -ке дейін мүшелеп интегралдасақ, яғни

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1-t+t^2-t^3+\dots+(-1)^n t^n+\dots) dt$$

немесе

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (10)$$

формуласын аламыз.

Дәл осы жолмен (8a) теңдіктен $x = -t^2$ алмастыруын жасап

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (11)$$

формуласын аламыз.

5) $f(x) = (1+x)^\alpha$, мұндағы α кез келген сан.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (12)$$

Ескерту! Егер (12) формулада $\alpha = n \in N$ болса, онда бұл формула өзімізге мектеп математика пәнінен белгілі Ньютон биномымен сәйкес келеді.

Өзін-өзі тексеру сұрақтар

1. Дәрежелі қатардың жинақтылық облысының анықтамасын беріңіз.
2. Абель теоремасын жазыңыз, дәлелдеңіз.
3. Қатардың жинақтылық радиусы, жинақтылық аралығы деген не?
4. Қатардың жинақтылық радиусы қалай табылады?
5. Дәрежелі қатардың қасиеттерін атаңыз.
6. Қандай қатарды Маклорен қатары деп атайды?
7. Маклорен қатарының $f(x)$ функциясына жинақты болуының қажетті және жеткілікті шартын беріңіз.
8. e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\arctg x$ және $(1+x)^\alpha$ функцияларының Маклорен қатарына жіктелуін жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $1 + \frac{2x}{3} + \frac{3x^2}{9} + \frac{4x^3}{27} + \dots$ қатардың жинақтылық радиусын табыңыз.

Шешуі. Жалпы мүшесі

$$a_n = \frac{nx^{n-1}}{3^{n-1}}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)x^n}{3^n};$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{3^{n-1}} : \frac{n+1}{3^n} \right| = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 3.$$

Берілген қатардың жинақтылық интервалы $(-3; 3)$.

Интервалдың шеткі нүктелерінде, яғни $x = \pm 3$ -те жинақтылығын анықтайық. $x = -3$ -те

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 \dots + (-1)^{n-1} n \dots -$$

Бұл қатарда жинақтылықтың қажеттілік шарты, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ орындалмайды, сондықтан ол жинақсыз. Сол сияқты $x = 3$ -те шығатын қатар да жинақсыз.

Сонымен, қатардың жинақтылық интервалы $(-3; 3)$ екен.

2-мысал. $f(x) = \arcsin x$ функциясын Маклорен қатарына жіктеңіз.

Шешуі. (12) қатарда $\alpha = -\frac{1}{2}$ деп x -ті минус x^2 -пен алмастырсақ, онда

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$$

Бұл теңдікті $|x| < 1$ теңсіздікті қанағаттандыратын $(0, x)$ интервалда интегралдасыз:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

Бұл қатардың жинақтылық интервалы $(-1; 1)$.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1–6-қатарлардың жинақтылық радиустарын табыңыз.

1. $1 + \frac{x}{2 \cdot 5} + \frac{x^2}{3 \cdot 5^2} + \frac{x^3}{4 \cdot 5^2} + \frac{x^3}{4 \cdot 5^3} + \dots$ Жауабы: $R = 5$.

2. $1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots$ Жауабы: $R = 1$.

3. $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots$ Жауабы: $R = 1$.

4. $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$ Жауабы: $R = \infty$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \cdot x^{2n};$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}};$

7. $f(x) = \arctg x$ функциясын Маклорен қатарына жіктеңіз.

8. $f(x) = \frac{\ell^x - 1}{x}$ функциясын Маклорен қатарына жіктеңіз.

15.6 Дәрежелі қатардың жуық есептеулерге қолданылуы

1. Логарифмдік функцияның мәндерін есептейік. 15.5-тақырыбының (10) формуласынан x -ті минус x -ке алмастырсақ

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

15.5-тақырыбының (10) формуласынан соңғы теңдікті алсақ

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right). \quad (1)$$

Мұнда $|x| < 1$; $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$ деп алмастыру орындаймыз; онда

$$x = \frac{1}{2n+1}.$$

Кез келген $n > 0$ -де $0 < x < 1$, сондықтан

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \frac{n+1}{n} = 2 \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right),$$

осыдан

$$\ln(n+1) - \ln n = 2 \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right). \quad (2)$$

(2) қатарда $n=1$ десек

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right). \quad (3)$$

$\ln 2$ -ні берілген дәлдікпен есептеу үшін (3) қатардың n мүшесінің қалдығын бағалайық.

$$\begin{aligned} R_n &= 2 \left(\frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} + \frac{1}{(2n+5) \cdot 3^{2n+5}} + \dots \right) < \\ &< 2 \left(\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+1)3^{2n+3}} + \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{2n+5}} + \dots \right) = \\ &= \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+3}} + \frac{1}{3^{2n+5}} + \dots \right) = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{(2n+1)3^{2n-1} \cdot 4}. \end{aligned}$$

Егер $\ln 2$ -ні 10^{-6} дәлдікпен есептеу қажет болса, онда n -нің мәнін $R_n < 10^{-6}$ болатындай етіп алынады. (3) формуладан 6 мүшенің қосындысын алсақ $\ln 2$ 10^{-6} дәлдікпен есептелген болады.

$$\ln 2 \approx 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} \right).$$

(2)-формулада $n=2$ десек

$$\ln 3 \approx \ln 2 + 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right).$$

Осылайша кез-келген бүтін санның логарифмін берілген дәлдікпен есептей аламыз.

2. Анықталған интегралды жуық есептеу.

а) $\int_0^a e^{-x^2} dx$ -ды жуықтап есептелік.

e^{-x^2} -ның алғашқы функциясы элементар функциямен өрнектелмейді. Сондықтан e^x -тің жіктелуінде x -ті минус x^2 -қа алмастырсак:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

Соңғы теңдікті $(0, a)$ аралықта мүшелеп интегралдасақ:

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = a - \frac{a^3}{1! \cdot 3} + \frac{a^5}{2! \cdot 5} - \frac{a^7}{3! \cdot 7} + \frac{a^9}{4! \cdot 9} - \dots$$

Бұл формуладан пайдаланып берілген интегралды кез-келген a үшін кез-келген дәлдікпен жуық есептеуге болады.

б) $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$ интегралды есептейік.

$\sin x$ -тің жіктелуінен пайдаланып

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

жіктелуін аламыз, оны мүшелеп интегралдасақ

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = a - \frac{a^3}{3! \cdot 3} + \frac{a^5}{5! \cdot 5} - \frac{a^7}{7! \cdot 7} + \dots$$

Бұл интеграл да кез-келген a үшін кез-келген дәлдікпен жуық есептеледі.

3. Дифференциалдық теңдеулерді дәрежелі қатардың көмегімен интегралдау.

$$y'' = F(x, y, y') \quad (4)$$

теңдеуінің $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$ бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу есебін қарастыралық.

Бұл есепті шешу үшін $y = f(x)$ -ті мынадай Маклорен қатары түрінде іздейміз.

$$y = f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \quad (5)$$

Мұндағы $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \dots$ (4) теңдеудің және бастапқы шарттың көмегімен анықтаймыз. Бастапқы шарттардан:

$$f(0) = y_0; \quad f'(0) = y'_0.$$

(4) теңдеуден

$$f''(0) = y''|_{x=0} = F(0, y_0, y_0').$$

(4) теңдеудің екі жағын x бойынша дифференциалдаймыз

$$y''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y') \cdot y' + F'_{y'}(x, y, y') \cdot y'' \quad (6)$$

$$f'''(0) = y'''|_{x=0} = F'_x(0, y_0, y_0') + F'_y(0, y_0, y_0') \cdot y_0' + F'_{y'}(0, y_0, y_0') \cdot y_0''.$$

(6) теңдеудің екі жағын дифференциалдап $f^{IV}(0)$ -ді, т.с.с. анықталады. Табылғандарды (5) формулаға қойып берілген есептің қатар түріндегі шешімін аламыз (қатардың жинақтылық облысында).

Мысалы, $y'' = e^y + x$ теңдеудің $y(0) = 1, y'(0) = 0$ бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімін табайық.

Шешуі.

$$f(0) = 1; f'(0) = 0;$$

$$f''(0) = y''|_{x=0} = e;$$

$$f'''(0) = y'''|_{x=0} = e \cdot 0 + 1 = 1.$$

$$y^{IV} = e^y \cdot (y')^2 + e^y \cdot y''$$

$$f^{IV}(0) = y^{IV}|_{x=0} = e \cdot 0 + e \cdot e = e^2$$

(5) формулаға қойсақ

$$f(x) = 1 + \frac{e}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{e^2}{24}x^4 + \dots$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Дәрежелі қатардың қалдығын бағалау не үшін қажет?
2. Логарифмдік функцияның мәндері қалай жуық есептеледі?
3. Анықталған интегралды дәрежелі қатардың көмегімен жуық есептеу әдісін баяндаңыз
4. Дифференциалдық теңдеулер дәрежелі қатардың көмегімен қалай интегралданады?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\sqrt{e}$ -ні 10^{-5} - ке дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

Шешуі. e^x -тің Маклорен қатарына жіктелінуін қолданамыз.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (1)$$

$0 \leq x < 1$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын x -тің мәндерінде бұл қатар жылдам жинақталады және оның қалдығы былай бағаланады:

$$0 \leq R_n(x) < \frac{x^{n+1}}{n!n}.$$

Бұл теңсіздіктерге негізделе отырып (1) қатардағы x -тің орнына $\frac{1}{2}$ -ді қойып, оның 7 мүшесінің қосындысын алсақ сұралған дәлдік қамтамасыз етіледі.

$$e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot 2!} + \frac{1}{8 \cdot 3!} + \frac{1}{16 \cdot 4!} + \frac{1}{32 \cdot 5!} + \frac{1}{64 \cdot 6!}$$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 0,5; \quad a_3 = 0,125; \quad a_4 = 0,0208333; \quad a_5 = 0,0026042;$$

$$a_6 = 0,0002604; \quad a_7 = 0,0000217;$$

Жоғарыдағы мәндерді қоссақ

$$\sqrt{e} \approx 1,64872.$$

2-мысал. $\sin 20^\circ$ -ты 10^{-4} -ке дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

Шешуі. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ жіктелуді қолданамыз. $x = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$;

$$\sin \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{\pi^3}{9^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{\pi^5}{9^5} - \dots = 0,34907 - 0,00709 + 0,00004 - \dots$$

Сонғы қатардың екі мүшесінің қосындысы есептің шартындағы дәлдікті қамтамасыз етеді.

$$|R_n| \leq 0,00004 < 0,0001$$

Сонымен, $\sin 20^\circ \approx 0,34907 - 0,00709 = 0,3420$.

3-мысал. $\sqrt[3]{9}$ санын жуықтап есептелік.

$$\text{Шешуі. } \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1} = 2 \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

15.5 тақырыбының (12) формуласында $x = \frac{1}{8}$; $\alpha = \frac{1}{3}$ десек:

$$\sqrt[3]{9} = 2 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{8^2} + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{8^3} + \dots \right] =$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{576} + \frac{5}{41472} - \dots \right) \approx 2,0802.$$

4-мысал. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1-x^5}$ интегралын 10^{-4} -ке дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

Шешуі. Интеграл ішіндегі функцияны дәрежелі қатарға жіктелік

$$\frac{1}{1-x^5} = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots$$

Бұл қатар $(-1,1)$ аралығында жинақты. Интегралдау аралығы жинақтылық интервалында орналасқан, сондықтан оны мүшелеп интегралдауға болады.

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1-x^5} = \left(x + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{16}}{16} + \dots \right)_0^{0,5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 2^6} + \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} + \frac{1}{16 \cdot 2^{16}} + \dots$$

Бұл қатардың екі мүшесінің қалдығын бағалайық

$$R_2 = \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} \cdot \frac{1}{16 \cdot 2^{16}} + \dots < \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} + \frac{1}{11 \cdot 2^{16}} + \dots = \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^5}} = \frac{1}{11 \cdot 2^6 \cdot 31} < 0,5 \cdot 10^{-4}$$

Сонымен, екі мүшесінің қосындысы есептің шартындағы дәлдікті қамтамасыз етеді.

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1-x^5} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 2^6} = 0,5026.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1-6-мысалдарды 0,0001-ге дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

1. $\frac{1}{\sqrt[60]{e^7}}$. 2. $\ln 1,1$. 3. $\sin 0,4$.

4. $\sqrt[3]{130}$ 5. $\ln 3$. 6. $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$.

7. $\int_0^{0,5} e^{\sqrt{x}} dx$ ды 0,01-ге дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

8. $y' = \sin y - \sin x$ дифференциалдық теңдеуінің $y(0) = 0$ бастапқы шарты қанағаттандыратын шешімінің дәрежелі қатарға жіктелуінің алғашқы үш мүшесін табыңыз.

15.7 Фурье қатары

Табиғаттың, техниканың тағы басқа салалардың көптеген құбылыстары белгілі бір уақыт аралығынан кейін қайталанып отырады. Мұндай құбылыстарды периодты деп атайды. Электромагниттік тербелістердің таратуымен байланысты құбылыстар, шатун және поршеннің мотор ішіндегі қозғалысы тағы басқалар периодты құбылыстарға мысал болады. Периодты құбылыстарды математикалық тұрғыдан үйрену үшін оларды периодты функциялар арқылы өрнектейді. Периодты функциялардың анықтамасы «Математика – 1» бөлімінде берілген.

$\sin x$ және $\cos x$ функциялары ең қарапайым периодты функциялар, олардың периоды 2π -ге тең.

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x.$$

$\sin \omega x$ және $\cos \omega x$ функциялары да периодты, бірақ олардың периоды

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Шынында да,

$$\sin\left[\omega\left(x \pm \frac{2\pi}{\omega}\right)\right] = \sin(\omega x \pm 2\pi) = \sin \omega x.$$

2π саны да $\sin \omega x$ және $\cos \omega x$ функцияларының периоды болады, бірақ ең кіші периоды емес, сондықтан оларды да 2π периодты функциялар деп атаса болады.

Егер $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ қатынасы рационал сан болса, онда $a \sin \omega_1 x + b \cos \omega_2 x$ қосындының да периодты функция болатындығын дәлелдеуге болады.

Гармоникалық құбылыстар ең қарапайым периодты құбылыстар болып, олар $\sin \omega x$ және $\cos \omega x$ периодты функцияларымен өрнектеледі. Күрделірек периодты құбылыстар $\sin \omega x$ және $\cos \omega x$ функцияларының шектеулі немесе шексіз сандағы қосындылары түрінде өрнектеледі.

Алдағы уақытта керек болатын келесі формулаларды келтіреміз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos p x \cdot \cos k x d x = \begin{cases} 0, & \text{егер } p \neq k; \\ \pi, & \text{егер } p = k. \end{cases} \quad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin p x \cdot \sin k x d x = \begin{cases} 0, & \text{егер } p \neq k; \\ \pi, & \text{егер } p = k. \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin p x \cdot \cos k x d x = 0, \quad (3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k x d x = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin k x d x = 0. \quad (4)$$

(1) – (4) формулалардың дұрыстығын тексеруді студенттердің өздеріне ұсынамыз.

1 – анықтама.

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

түріндегі қатар тригонометриялық қатар деп аталады.

Мұндағы $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ сандары тригонометриялық қатардың коэффициенттері деп аталады.

Тригонометриялық қатар көбінесе келесі түрде жазылады:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (5)$$

Егер (5) қатар жинақты болса, онда оның мүшелері 2π периодты болғандықтан, қосындысында 2π периодты функция болады.

2 – анықтама. Егер (5) қатардың қосындысы $f(x)$ - ке тең болса, яғни

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (6)$$

онда $f(x)$ функциясы тригонометриялық қатарға жіктеледі деп айтылады.

Енді (6) қатарды $[-\pi, \pi]$ сегментінде $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақталатын болсын деп ұйғаралық та, оны мүшелеп интегралдайық.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \text{ болғандықтан}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = a_0 \pi.$$

Соңғы теңдіктен

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (7)$$

2π коэффициентті анықтау үшін (6) теңдіктің екі жағын $\cos kx$ -ке көбейтіп, кейін мүшелеп $[-\pi, \pi]$ сегментінде интегралдаймыз, мұндағы k - натурал сан.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx \right) \end{aligned} \quad (8)$$

(1)-(4) формулаларға негізделіп (8) теңдікті келесі түрде жазамыз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_k \pi,$$

осыдан

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx. \quad (9)$$

Осыған ұқсас, (6) теңдіктің екі жағын $\sin kx$ -ке көбейтіп $[-\pi, \pi]$ сегментінде мүшелеп интегралдау нәтижесінде

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (10)$$

Сонымен, егер 2π периодты $f(x)$ функциясы $[-\pi, \pi]$ сегментінде бірқалыпты жинақты (6) қатардың қосындысы болса, онда оның коэффициенттері (7), (9) және (10) формулалары арқылы анықталады екен.

3-анықтама. (7), (9) және (10) формулалар арқылы анықталатын коэффициенттерді Эйлер-Фурье коэффициенттері (немесе Фурье коэффициенттері) деп атайды.

4 – анықтама. Коэффициенттері Эйлер – Фурье формулалары, яғни (7), (9) және (10) теңдіктер арқылы анықталатын

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

тригонометриялық қатар $f(x)$ функциясының Фурье қатары деп аталады.

Сонымен, егер периодты $f(x)$ функциясы бірқалыпты жинақталатын тригонометриялық қатардың қосындысы болса, онда ол қатар Фурье қатары болады екен.

(7), (9) және (10) формулаларды қорытып шығарарда, біз (6) қатар $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақталатын болсын деп ұйғарған едік. Енді келесі сұрақ туындайды:

$f(x)$ функциясы қандай шарттарды қанағаттандырғанда оның Фурье қатары жинақты болады және қатардың қосындысы $f(x)$ -ке тең болады?

Бұл сұраққа келесі теорема жауап береді.

Дирихле теоремасы. Егер 2π периодты $f(x)$ функциясы $[-\pi, \pi]$ кесіндісінде үзік – монотонды және шектелген болса, онда бұл функцияның Фурье қатары сан өсінің барлық нүктелерінде жинақты болады. $f(x)$ функциясының үзіліссіз нүктелеріндегі мәні қатардың қосындысы $S(x)$ -ке тең. Ал әрбір x , үзіліс нүктесінде қатардың қосындысы келесі формуламен анықталады

$$S(x) = \frac{1}{2} [\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)].$$

Бұл теоремадан Фурье қатарымен өрнектелетін функциялар тобының кең екендігі көрініп тұр. Сондықтан Фурье қатары жаратылыстану ғылымдарында, әсіресе математикада кеңінен қолданылады.

15.7.1 Жұп және тақ функциялар үшін Фурье қатары

1. Егер $f(x)$ - жұп функция болса, онда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx.$$

Шынында да,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(-x) dx + \\ &+ \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx. \end{aligned}$$

2. Егер $f(x)$ - тақ функция болса, онда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 f(-x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = - \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Фурье қатарына жұп $f(x)$ функциясын жіктеуден басталық. Бұл жағдайда $f(x) \cdot \sin kx$ - тақ, $f(x) \cdot \cos kx$ - жұп функция болады. Онда:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0,$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Егер $f(x)$ функциясы тақ болса, онда $f(x) \cdot \sin kx$ - жұп, ал $f(x) \cdot \cos kx$ - тақ функция болады. Сондықтан

$$a_0 = a_k = 0,$$

$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin kx dx = 0$, онда тақ функцияның Фурье қатары

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \text{ түрінде болады.}$$

Сонымен, жұп функция тек қана косинустар бойынша, ал тақ функция тек қана синустар бойынша жіктеледі екен.

15.7.2 $2l$ периодты функцияны Фурье қатарына жіктеу

$f(x) - 2l$ периодты функция болсын.

$$x = \frac{lt}{\pi}$$

алмастыруын орындаймыз. Онда $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ функциясы t -ның 2π периодты функциясы болады. Соңғы функцияның Фурье қатарына жіктелуі келесі түрде болады:

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$\text{мұндағы } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \sin ktdt.$$

Соңғы теңдіктерде x айнымалысына көшеміз.

$$x = \frac{lt}{\pi}; \quad t = \frac{\pi}{l}x; \quad dt = \frac{\pi}{l}dx;$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx.$$

Сонымен, $2l$ периодты $f(x)$ функциясы үшін Фурье қатары келесі түрде болады.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right).$$

$2l$ периодты жұп $f(x)$ функциясы үшін

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \quad b_k = 0,$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x.$$

$2l$ периодты тақ $f(x)$ функциясы үшін

$$a_0 = a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx,$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Енді $[0, l]$ сегментінде берілген $f(x)$ функциясын қарастыралық. Егер бұл функцияны $[-l, 0]$ сегментінде үзік – монотонды түрде қалауымызша жалғастырсақ (қосымша анықтасақ), онда оны Фурье қатарына жіктеуге болады. Дербес жағдайда, берілген функцияны $[-l, 0]$ сегментінде $f(-x) = f(x)$ болатындай етіп қосымша анықтасақ, онда жұп функция шығады. Мұндай жағдайды « $f(x)$ функциясы жұп жалғастырылды» деп атайды.

Жұп жалғастырылған $f(x)$ функциясы тек қана косинустар бойынша Фурье қатарына жіктеледі.

Егер $[0, l]$ сегментінде берілген $f(x)$ функциясын $[-l, 0]$ сегментінде $f(-x) = -f(x)$ болатындай етіп, қосымша анықтасақ, онда тақ функция шығады. Бұл жағдайда « $f(x)$ функциясы тақ жалғастырылды» деп атайды.

Тақ жалғастырылған $f(x)$ функциясы тек қана синустар бойынша Фурье қатарына жіктеледі.

Сонымен, $[0, l]$ сегментінде берілген үзік – монотонды функцияны косинустар бойынша да синустар бойынша да Фурье қатарына жіктеуге болады екен.

Өзін - өзі тексеру сұрақтары

1. Қандай қатар тригонометриялық қатар деп аталады?
2. Фурье коэффициенттері қандай формулалар арқылы өрнектеледі?
3. Қандай қатар Фурье қатары деп аталады?
4. Дирихле теоремасын баяндаңыз.
5. Жұп және тақ функциялар үшін Фурье қатарын жазыңыз.
6. $2l$ периодты функцияны Фурье қатарына жіктеңіз.
7. $[0, l]$ сегментінде берілген функцияны Фурье қатарына жіктеу әдісін баяндаңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $[-\pi, \pi]$ сегментінде анықталған 2π периодты $f(x) = |x|$ функциясын Фурье қатарына жіктелік.

Шешуі: Берілген функция $[-\pi, \pi]$ сегментінде Дирихле теоремасының шарттарын қанағаттандырады.

Фурье коэффициенттерін анықтаймыз.

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-x) dx + \int_0^{\pi} x dx \right] = \pi. \\a_k &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-x) \cos kx dx + \int_0^{\pi} x \cos kx dx \right] = \\&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x \sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^0 \sin kx dx + \frac{x \sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx dx \right) \\&= \frac{1}{\pi k} \left(-\frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0, & \text{егер } k \text{ жұп болса,} \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & \text{егер } k \text{ тақ болса.} \end{cases} \\b_k &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-x) \sin kx dx + \int_0^{\pi} x \sin kx dx \right] = 0. \text{ Сонымен,}\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \dots \right].$$

Бұл қатар x – тің кез келген мәнінде жинақты және оның қосындысы берілген функцияға тең.

$$2\text{-мысал. } f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & \text{егер } -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{егер } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{егер } x = n\pi, \text{ } n - \text{бүтін сан.} \end{cases}$$

2π периодты функцияны Фурье қатарына жіктелік.

Шешуі. Берілген функция Дирихле теоремасының шарттарын қанағаттандырады және тақ. Онда:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin kx dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{2k} \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{\cos 0 - \cos k\pi}{2k} = \frac{1 - (-1)^k}{2k} = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{егер } k \text{ тақ болса,} \\ 0, & \text{егер } k \text{ жұп болса} \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = \frac{1}{3}, b_4 = 0, \dots \text{ болғандықтан,}$$

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots$$

3-мысал. Периоды $2l = 2$ -ге тең, $-1 < x \leq 1$ интервалында $f(x) = x - 1$ формуласымен берілген функцияны Фурье қатарына жіктелік.

$$\text{Шешуі. } a_0 = \int_{-1}^1 (x-1) dx = \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_{-1}^1 = -2.$$

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{-1}^1 (x-1) \cos k\pi x dx = \int_{-1}^1 x \cos k\pi x dx - \int_{-1}^1 \cos k\pi x dx = \\ &= \frac{x \sin k\pi x}{k\pi} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\sin k\pi x}{k\pi} dx - \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{k^2 \pi^2} \cos k\pi x \Big|_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

$$b_k = \int_{-1}^1 (x-1) \sin k\pi x dx = \int_{-1}^1 x \sin k\pi x dx - \int_{-1}^1 \sin k\pi x dx =$$

$$= -\frac{x \cos k\pi x}{k\pi} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\cos k\pi x}{k\pi} dx + \frac{\cos k\pi x}{k\pi} \Big|_{-1}^1 =$$

$$= -\frac{1}{k\pi} [\cos k\pi + \cos(-k\pi)] + \frac{\sin k\pi x}{k^2 \pi^2} \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{k\pi} [\cos k\pi - \cos(-k\pi)] = -\frac{2(-1)^k}{k\pi}$$

Сонымен, $f(x)$ функциясының Фурье қатары келесі түрде болады.

$$f(x) = -1 + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} + \dots \right].$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$ функциясын $(-\pi, \pi)$ интервалында Фурье қатарына

жіктеңіз. Жауабы: $f(x) = \cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots$

2. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{егер } -\pi < x \leq 0, \\ 0, & \text{егер } 0 < x \leq \pi \end{cases}$ функциясын $(-\pi, \pi)$ интервалында

Фурье қатарына жіктеңіз.

Жауабы: $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sin nx}{n}$.

3. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{егер } -\pi < x \leq 0, \\ 0, & \text{егер } 0 < x \leq \pi \end{cases}$ функциясын $(-\pi, \pi)$ интервалында

Фурье қатарына жіктеңіз.

Жауабы: $f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)}$.

4. $(0, \pi)$ интервалында берілген $f(x) = x^2$ функциясын синустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

Жауабы: $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} [(-1)^n - 1] \right\} \sin nx$.

«Сан қатары» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар

Ұсынылатын тапсырмалардан бір нұсқасын шешу үлгісі

1-мысал. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$ қатардың қосындысын табыңыз.

Шешуі. Берілген қатардың жалпы мүшесі $U_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ - ді

мынадай қарапайым бөлшектер қосындысы түрінде жазамыз.

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}.$$

Ортақ бөлімге келтірсек, төмендегі теңдеу шығады.

$$1 = A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1).$$

$$n=0 \text{ десек, } 2A=1; \quad A=\frac{1}{2}.$$

$$n = -1 \text{ десек, } -B = 1; \quad B = -1.$$

$$n = -2 \text{ десек, } 2C = 1; \quad C = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Сонымен, } U_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right). \text{ Осыдан}$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \right), \quad U_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right),$$

$$U_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \right), \quad U_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right), \dots$$

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right).$$

Сонымен, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$, онда берілген қатар жинақты болып, қосындысы $\frac{1}{4}$ - ке тең екен.

$$2\text{-мысал. } \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{7} \right)^3 + \left(\frac{4}{9} \right)^4 + \dots \text{ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.}$$

$$\text{Шешуі. } U_n = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n. \text{ Коши белгісін пайдаланамыз.}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1, \text{ сонымен қатар жинақты.}$$

$$3\text{-мысал. } \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \dots + \frac{2^n}{n^{10}} + \dots \text{ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.}$$

Шешуі. Даламбер белгісін пайдаланамыз.

$$U_n = \frac{2^n}{n^{10}}, \quad U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}, \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}},$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10}} = 2 > 1,$$

$L = 2 > 1$, болғандықтан қатар жинақсыз.

$$4\text{-мысал. } \frac{1}{2} - \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} - \frac{4}{4^2+1} + \dots \text{ таңбалары айнымалы қатарды}$$

жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Лейбниц белгісін қолданамыз.

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0$, Лейбниц теоремасының басқа шарттарында қанағаттандырады, сондықтан берілген қатар жинақты, және оның қосындысы $\frac{1}{2}$ -ден аспайды.

5-мысал. $1 + \frac{x^3}{125} + \frac{x^6}{125^2} + \frac{x^9}{125^3} + \dots$ дәрежелі қатардың жинақтылық аралығын анықтаңыз.

Шешуі. Берілген қатардың жалпы мүшесі.

$$U_n = \frac{x^{3n}}{125^n}.$$

Даламбер белгісін пайдаланамыз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{3(n+1)}}{125^{n+1}} : \frac{x^{3n}}{125^n} \right| = \left| \frac{x^3}{125} \right| < 1.$$

Осыдан $|x^3| < 125$ немесе $|x| < 5$ шығады. Сонымен, қатардың жинақтылық аралығы $(-5; 5)$. Енді аралықтың шеткі нүктелерінде жинақтылыққа зерттейміз. $x = -5$ -те берілген қатардан

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

қатар шығады, мұнда $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \neq 0$, сондықтан ол жинақсыз.

$x = 5$ -те

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

қатар шығады, мұнан $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, яғни соңғы қатар жинақсыз.

Сонымен, берілген қатардың жинақтылық аралығы $(-5; 5)$ екен.

6 – мысал. $f(x) = 3^x$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

Шешуі: Берілген функцияның және оның туындыларының $x = 0$ нүктесіндегі мәндерін табамыз.

$$f(x) = 3^x, \quad f(0) = 3^0 = 1,$$

$$f'(x) = 3^x \ln 3, \quad f'(0) = \ln 3,$$

$$f''(x) = 3^x \ln^2 3, \quad f''(0) = \ln^2 3,$$

$$\dots \dots \dots f^{(n)}(x) = 3^x \ln^n 3, \quad f^{(n)}(0) = \ln^n 3,$$

x - тің кез-келген нақты мәнінде

$$|f^{(n)}(x)| < 3^x \ln^n 4$$

теңсіздік кез-келген n үшін орындалады, онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

болып, берілген функция Маклорен қатарына жіктеледі:

$$3^x = 1 + x \ln 3 + \frac{x^2 \ln^2 3}{2!} + \frac{x^3 \cdot \ln^3 3}{3!} + \dots$$

7-мысал. $\int_0^{0.5} x^2 \cdot e^{-x^2} dx$ интегралының 0,001 дәлдіктегі жуық мәнін табалық.

Шешуі. e^x - тің дәрежелі қатарға жіктелуіндегі, яғни

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

x -ті минус x^2 пен алмастыралық.

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{1}{1!}(-x^2) + \frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(-x^2)^n + \dots$$

Теңдіктің екі жағын x^2 қа көбейтсек

$$x^2 \cdot e^{-x^2} = x^2 - \frac{1}{1!}x^4 + \frac{1}{2!}x^6 - \frac{4}{3!}x^8 + \dots$$

Соңғы теңдіктің екі жағын $(0; 0,5)$ аралығында интегралдасак

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} x^2 \cdot e^{-x^2} dx &= \int_0^{0.5} \left[x^2 - x^4 + \frac{1}{2!}x^6 - \frac{1}{3!}x^8 + \dots \right] dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2!} \frac{x^7}{7} - \frac{1}{3!} \frac{x^9}{9} + \dots \right) \Big|_0^{0.5} = \\ &= \frac{1}{24} - \frac{1}{160} + \frac{1}{1792} - \dots \end{aligned}$$

Шыққан ауыспалы таңбалы қатар Лейбниц теоремасының шарттарын қанағаттандырады. Үшінші мүшесінің абсолют мәні 0,001 ден кіші, сондықтан екі мүшесінің қосындысы жеткілікті.

$$\int_0^{0.5} x^2 \cdot e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{24} - \frac{1}{160} = 0,048.$$

8-мысал. $[0; 2]$ кесіндісінде берілген $f(x) = 2 - 2x$ функциясын $[-2, 0]$ сегментте тақ түрде жалғастырып Фурье қатарына жіктеңіз.

Шешуі.

$$\begin{aligned} b_m &= \int_0^2 (2-2x) \sin \frac{m\pi x}{2} dx = \left| \begin{array}{l} u = 2-2x; dv = \sin \frac{m\pi x}{2} dx \\ du = -2dx; v = -\frac{2}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{2} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{2}{m\pi} (2-2x) \cos \frac{m\pi x}{2} \Big|_0^2 - \frac{4}{m\pi} \int_0^2 \cos \frac{m\pi x}{2} dx = \\ &= \frac{4}{m\pi} \cos m\pi + \frac{4}{m\pi} - \frac{8}{(m\pi)^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{2} \Big|_0^2 = \frac{4}{m\pi} ((-1)^m + 1); \quad a_m = 0. \end{aligned}$$

Сонымен,

$$f(x) = 2 - 2x = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m + 1}{m} \sin \frac{m\pi x}{2} = \frac{8}{\pi} \left(\frac{1}{2} \sin \pi x + \frac{1}{4} \sin 2\pi x + \frac{1}{6} \sin 3\pi x + \dots \right).$$

1- нұсқа

1. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: 1).

2. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{10}{11} + \dots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $[-2; 2)$)

5. $y = \frac{e^x - 1}{x}$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$).

6. $\int_0^{0.25} \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0412).

7. $[-\pi; \pi]$ кесіндісінде берілген $f(x) = x^3$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx$).

2-нұсқа

1. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{1}{3}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + 1}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n^2+n+1}$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: шартты жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $[-1; 1)$).

5. $y = x \ln(1+x^2)$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{n}$).

6. $\int_0^{0.5} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0062).

7. $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi+x}{2}, & \text{егер } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi-x}{2}, & \text{егер } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ функциясын $(-\pi; \pi)$ аралығында

интервалда Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots$).

3-нұсқа

1. $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{1}{12}$).

2. $\frac{2+1}{5+1} + \frac{2^2+1}{5^2+1} + \frac{2^3+1}{5^3+1} + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $\frac{1}{10} + \frac{7}{10^2} - \frac{13}{10^3} + \frac{19}{10^4} + \frac{25}{10^5} - \frac{31}{10^6} + \dots$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \left(\frac{1}{e}; e\right)).$$

5. $y = \cos^2 x$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}).$$

6. $\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

$$(\text{Жауабы: } 0,0185).$$

7. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{егер } -\pi < x \leq 0, \\ 0, & \text{егер } 0 < x \leq \pi \end{cases}$ функциясын $(-\pi; \pi)$ аралығында

Фурье қатарына жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}).$$

4- нұсқа

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ қатарының қосындысын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } 1).$$

2. $\frac{1}{2 \cdot 1 - 1} + \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2 - 1} + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3 - 1} + \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot 4 - 1} + \dots$ қатарды жинақтылыққа

зерттеңіз.

$$(\text{Жауабы: жинақсыз}).$$

3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа

зерттеңіз.

$$(\text{Жауабы: шартты жинақты}).$$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } 0 \leq x < 4).$$

5. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \ln(1-x)$. функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі

қатарға жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \cdot \frac{x^{n-2}}{n}).$$

6. $\int_0^{0.5} \frac{\sin(x^2)}{x} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,124).

7. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } -\pi < x \leq 0, \\ -2, & \text{егер } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$ функцияны $(-\pi; \pi)$ аралығында

Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $-\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$).

5-нұсқа

1. $\frac{m-1}{m} + \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 + \left(\frac{m-1}{m}\right)^3 + \dots, (m > 1)$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: m).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n^2 + 2n + 1)}{(5n^2 + 2n + 1)} \right]^n$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!} x^n$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-\frac{3}{e} < x < \frac{3}{e}$).

5. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$).

6. $\int_0^{\frac{1}{3}} x \ln(1 + \sqrt{x}) dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0694).

7. $f(x) = \begin{cases} -h, & \text{егер } -\pi \leq x \leq 0, \\ h, & \text{егер } 0 < x \leq \pi \end{cases}$ функциясын $(-\pi; \pi)$ аралығында

Фурье қатарына жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{4h}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}).$$

6 – нұсқа

1. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } S = \frac{3}{4}).$$

2. $\frac{10}{11} + \left(\frac{10}{11}\right)^2 \cdot 2^5 + \left(\frac{10}{11}\right)^3 \cdot 3^5 + \left(\frac{10}{11}\right)^4 \cdot 4^5 + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $\frac{2}{2^3+1} - \frac{3}{3^2+2} + \frac{4}{4^3+3} - \frac{5}{5^3+4} + \dots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты)

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-2 \leq x < 4$).

5. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots).$$

6. $\int_0^{\frac{1}{4}} x^2 e^{-\sqrt{x}} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0051).

7. $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{егер } -\pi \leq x < 0, \\ 3x, & \text{егер } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$ функциясын $(-\pi; \pi)$ аралығында

Фурье қатарына жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{5\pi}{4} - \frac{10}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \dots \right).$$

7 -нұсқа

1. $\frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{1}{10}$).

2. $\frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^5} + \left(\frac{11}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{3^5} + \left(\frac{11}{10}\right)^4 \cdot \frac{1}{4^5} + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-1 \leq x < 1$).

5. $y = \ln(1-x)$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$).

6. $\int_0^{0.25} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,3332).

7. $[0, \pi]$ кесіндісінде берілген $f(x) = x^2$ функциясын $[-\pi; 0]$ кесіндісінде тақ түрде жалғастырып Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} [(-1)^n - 1] \right\} \sin nx$).

8 -нұсқа

1. $\frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{1}{6}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho}}$, егер $\rho > 1$ болса, қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} - \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \dots$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-1 \leq x < 1$).

5. $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots$).

6. $\int_0^{0,25} \sqrt{x} \cos 2x dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0789).

7. $[0; \pi]$ кесіндісінде берілген $f(x) = \pi - 2x$ функциясын $[-\pi; 0]$ кесіндісінде жұп түрде жалғастырып Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2m+1)x)}{(2m+1)^2}$).

9 – нұсқа

1. $\frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{1}{7}$).

2. $\frac{1}{9 \ln 9} + \frac{1}{19 \ln 19} + \frac{1}{29 \ln 29} + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} + \dots$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-7 \leq x < -3$).

5. $y = \cos(x+a)$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\cos a - x \sin a - \frac{x^2}{2!} \cos a + \frac{x^3}{3!} \sin a + \frac{x^4}{4!} \cos a - \dots$).

6. $\int_0^{\frac{1}{5}} x^3 e^{-x^2} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0004)

7. $[0, \pi]$ кесіндісінде берілген $f(x) = \pi - 2x$ функциясын $[-\pi, 0]$ кесіндісінде тақ түрде жалғастырып Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2mx}{m}$).

10 – нұсқа

1. $\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{1}{10}$).

2. $\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-2 \leq x < 8$).

5. $y = \cos(x - a)$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\sin a \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) + \cos a \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right)$).

6. $\int_0^{0,25} \frac{\sin 2x}{\sqrt[4]{x}} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,1428).

7. $f(x) = \cos 2x$ функциясын $[0, \pi]$ аралығында синустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $-\frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{2^2 - 1} + \frac{3 \sin 3x}{2^2 - 3^2} + \frac{5 \sin 5x}{2^2 - 5^2} + \dots \right]$).

11 – нұсқа

1. $\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{1}{2}$).

2. $\frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{28} + \frac{1}{38} + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: шартты жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-2 \leq x < 0$).

5. $y = \sin^2 x$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{2 \cdot x^2}{2!} - \frac{2^3 \cdot x^4}{4!} + \frac{2^5 \cdot x^6}{6!} - \dots$).

6. $\int_0^{\frac{1}{8}} \frac{\sin(x^2)}{x} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0078).

7. $f(x) = \sin x$ функциясын $[0; \pi]$ аралығында косинустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{1-2^2} + \frac{\cos 4x}{1-4^2} + \dots \right]$).

12 – нұсқа

1. $\frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{1}{6}$).

2. $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты)

3. $1, 1 - 1, 01 + 1, 001 - 1, 0001 + \dots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-3)^n}{n+1}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $2 < x < 4$).

5. $y = xe^x$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots$).

6. $\int_0^{\frac{1}{8}} \sqrt{x} \sin \frac{x}{3} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,005).

7. $f(x) = x$ функциясын $(0;1)$ аралығында синустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n}$).

13 – нұсқа

1. $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{1}{6}$).

2. $\frac{11}{5} + \frac{21}{5^2} + \frac{31}{5^3} + \frac{41}{5^4} + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{\sqrt{2n-1}}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $y = x, y = 0 (y \geq 0, x > 0)$).

5. $y = \sin\left(mx + \frac{\pi}{3}\right)$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{m^2 x^2}{2!} + \frac{m^4 x^4}{4!} - \dots \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{mx}{1} - \frac{m^3 x^3}{3!} + \frac{m^5 x^5}{5!} - \dots \right)).$$

6. $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x} e^{-x^2} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0812).

7. $f(x) = 2x$ функциясын $(0;1)$ аралығында синустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \pi n x}{n^2}).$$

14 – нұсқа

1. $\frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 13} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } S = \frac{1}{12}).$$

2. $1 + \frac{21}{2^2} + \frac{31}{3^3} + \frac{41}{4^4} + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $1 - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^4} - \frac{1}{4a^6} + \dots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: $a > 1$ – да абсолют жинақты, $a < 1$ – да жинақсыз, $a = 1$ – де шартты жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \left[-\frac{1}{10}; \frac{1}{10} \right]).$$

5. $y = \sin kx$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } kx - \frac{(kx)^3}{3!} + \frac{(kx)^5}{5!} - \frac{(kx)^7}{7!} + \dots).$$

6. $\int_0^{\frac{1}{8}} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,124).

7. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{егер } 0 < x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{егер } 1 < x < 2. \end{cases}$ функциясын $(0;2)$ аралығында синустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

$$(Жауабы: \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}).$$

15 – нұсқа

1. $\frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 14} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

$$(Жауабы: S = \frac{1}{15}).$$

2. $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: шартты жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{2n-1}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

$$(Жауабы: \left[-\frac{1}{2}; \frac{2}{1}\right]).$$

5. $y = \frac{1}{1+x^2}$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

$$(Жауабы: 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots).$$

6. $\int_0^{0,25} x^2 \ln(1+x) dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

$$(Жауабы: 0,0009).$$

7. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{егер } 0 < x \leq 1, \\ 2-x, & \text{егер } 1 < x < 2 \end{cases}$ функциясын $(0; 2)$ аралығында косинустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

$$(Жауабы: \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}).$$

16 – нұсқа

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$ қатарының қосындысын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } S = \frac{5}{6}).$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $1, 1 - 1, 02 + 1, 003 - 1, 0004 + \dots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз)

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы. $(-5; 5)$).

5. $y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$).

6. $\int_0^{\frac{1}{5}} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,02).

7. $[-\pi, \pi]$ кесіндісінде берілген $f(x) = x$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $-2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$).

17 – нұсқа

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{5}{4}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+1}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} - 3\frac{1}{8} - 3\frac{1}{16} + 3\frac{1}{32} + 3\frac{1}{64} - 3\frac{1}{128} - 3\frac{1}{256} + \dots$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $[-1; 1]$).

5. $y = \frac{1}{(1+x)^3}$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \dots$).

6. $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cos \sqrt{x} dx$ анықталған интегралды 0,01 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0408).

7. $(0; 1)$ аралығында берілген $f(x) = 1$ функциясын синустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \dots \right]$).

18 – нұсқа

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{3}{4}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \dots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $[3; 5]$).

5. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots$).

6. $\int_0^{0.25} x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0307).

7. $(-1; 1)$ аралығында берілген $f(x) = x - 1$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

$$(Жауабы: -1 + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} + \dots \right]).$$

19 – нұсқа

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{1}{6}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$ таңбалары ауыспалы

қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $0; 4$).

5. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға

жіктеңіз.

$$(Жауабы: $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$).$$

6. $\int_0^{0.25} \sqrt{x} e^{-x^2} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0832).

7. $[-\pi; \pi]$ кесіндісінде берілген $f(x) = e^x$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

$$(Жауабы: $\frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \pi \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (\cos nx - n \sin nx) \right]$).$$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 5^n}{15^n}$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{3}{4}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - n + 1}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы. жинақты).

3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} + \dots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $0 < x < 2$).

5. $y = (1+x)e^{-x}$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n-1}{n!} x^n$).

6. $\int_0^{0.5} x \ln(1+x^2) dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз

(Жауабы: 0,015).

7. $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$ функциясын $(-\pi; \pi)$ аралығында Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots$).

1. $\frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{1}{5}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{2n}}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы. жинақты).

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-9 \leq x \leq -7$).

5. $y = \cos 3x$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}$).

6. $y' = x^2 y + y^3$ дифференциалдық теңдеудің $y(0) = 1$ шартты қанағаттандыратын шешімінің нөлге тең болмаған төрт мүшесін табыңыз.

(Жауабы: $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{3x^2}{2!} + \frac{17x^3}{3!} + \dots$).

7. $(0; \pi)$ аралығында берілген $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ функциясын $(-\pi; 0)$ аралығында жұп түрде жалғастырып Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$).

22 – нұсқа

1. $\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{1}{3}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 2}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: шартты жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (2+x)^n$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-3 < x < -1$).

5. $y = \sin x^2$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{4n-2}}{(2n-1)!}).$$

6. $y' = x + 2y^2$ дифференциалдық теңдеудің $y(0) = 0$ шартты қанағаттандыратын шешімінің нөлге тең болмаған екі мүшесін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = \frac{x^2}{2!} + \frac{12x^5}{5!} + \dots).$$

7. $[0;1]$ кесіндісінде берілген $f(x) = 1 - x$ функциясын $[-1;0]$ кесіндісінде жұл түрде жалғастырып Фурье қатарына жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left[\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x}{5^2} + \dots \right]).$$

23 – нұсқа

1. $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } S = \frac{1}{2}).$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-1 < x < 1$).

5. $y = e^{3x}$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - x^n}{n!}).$$

6. $y'' - xy^2 = 0$ дифференциалдық теңдеудің $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ шарттарды қанағаттандыратын шешімінің нөлге тең болмаған төрт мүшесін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{4x^4}{4!} + \dots).$$

7. $(-5;5)$ аралығында берілген $f(x) = 5x - 1$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } -1 + \frac{50}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin \frac{n\pi x}{5} \right]).$$

24 – нұсқа

1. $\frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } S = \frac{1}{14}).$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 5}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: шартты жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-5 < x < 5$).

5. $y = \frac{1}{1+x}$ функциясын x -тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n).$$

6. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$ дифференциалдық теңдеудің $y(0) = 0, y'(0) = 1$ шарттарды қанағаттандыратын шешімін қатардың көмегімен табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots).$$

7. $(-3; 3)$ интервалда берілген $f(x) = 2x - 3$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

$$(\text{Жауабы: } -3 + \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin \frac{n\pi x}{3} \right]).$$

25 – нұсқа

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}$ қатарының қосындысын табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } S = \frac{1}{4}).$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4} \text{ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.}$$

(Жауабы: жинақсыз).

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+5}{3^n} \text{ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.}$$

(Жауабы: абсолют жинақты)

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n^3} \text{ қатарының жинақтылық аралығын табыңыз.}$$

(Жауабы: $-1 \leq x \leq 1$)

$$5. Y = \frac{\sin 5x}{x} \text{ функциясын } x\text{-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.}$$

$$(\text{Жауабы: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 5^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-2}).$$

$$6. Y'' = xy' \text{ дифференциалдық теңдеудің } y(0)=1, Y'(0)=1 \text{ шарттарды қанағаттандыратын шешімін қатардың көмегімен табыңыз.}$$

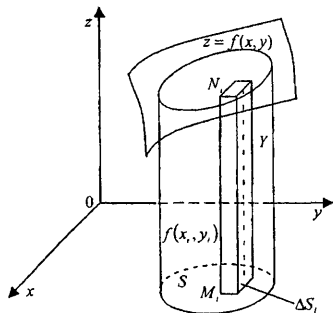
$$(\text{Жауабы: } 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \dots).$$

$$7. (-1; 1) \text{ аралығында берілген } f(x) = 2x \text{ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.}$$

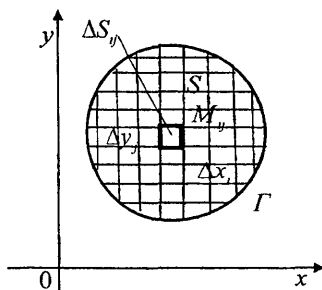
$$(\text{Жауабы: } 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}).$$

№29-дәріс. 16-тақырып. Еселі интегралдар.
16.1 Екі еселі интеграл және оның негізгі қасиеттері

Айталық, тұйық S облысында анықталған, оң $z = f(x, y)$ функциясы берілсін. Жоғары жағынан $z = f(x, y)$ бетімен, төменгі жағынан S облысымен, ал бүйір жағынан жасаушылары OZ өсіне параллель, бағыттаушысы S облысының шекарасы болатын цилиндрлік бетімен шектелген цилиндрлік дененің көлемін табу есебін қарастырайық (1-сурет).



1-сурет



2-сурет

Аталған дененің V көлемін табу үшін, оның табаны S -ті аудандары $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ болатын n ұсақ бөліктерге бөліп, әрқайсысынан кез келген бір $M_i(x_i, y_i)$ нүктелерін тандайық. Сонда

$$f(x_i, y_i) \Delta S_i \quad (1)$$

көбейтіндісі табанының ауданы ΔS_i , биіктігі $f(x_i, y_i)$ болатын ұсақ цилиндрдің көлемін береді. Онда осы (1) өрнектердің қосындысы, көлемі жағынан берілген қисық бетті дененің көлеміне жуық болатын, ұсақ цилиндрлердің көлемдерінің қосындысын береді, яғни

$$V \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i. \quad (2)$$

Егер берілген дененің табаны S -ті қалауымызша көп ұсақ бөліктерге бөлсек, онда (2) формула ол дененің көлемін қалаған дәлдікпен табу мүмкіндігін береді.

Ұсақ бөліктердің аудандарының ең үлкенін $\max \Delta S_i$ арқылы белгілейік.

$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$ қосындысы $f(x, y)$ функциясының S облысындағы екі өлшемді интегралдық қосындысы деп аталады.

Анықтама. Егер де $\max \Delta S_i$ шамасы нөлге ұмтылғанда (2) интегралдық қосындының шегі бар болса және ол шек S облысын ұсақ бөліктерге бөлу әдісі мен әрбір бөліктен M_i нүктелерді таңдау әдісіне тәуелсіз болса, онда ол

шекті $z = f(x, y)$ функциясынан S облысы бойынша алынған екі еселі интегралы деп атайды да, былай белгілейді

$$\iint_S f(x, y) dS.$$

Мұндағы S -ті интегралдау облысы, ал dS -ті аудан элементі деп атайды. Сонымен анықтама бойынша:

$$\iint_S f(x, y) dS = \lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i. \quad (3)$$

Енді «Екі еселі интегралдың бар болуы» деп аталатын төмендегі теореманы тұжырымдалық.

Теорема. Егер тұйық S облысында $z = f(x, y)$ функциясы үзіліссіз болса, онда (3) екі еселі интегралы бар болады және ол S облысын ұсақ бөліктерге бөлу және әрбір бөліктен M_i нүктелерін таңдау әдісінен тәуелсіз болады.

Алдағы уақытта қарастырылатын екі еселі интегралдардағы $f(x, y)$ функциясын берілген облыста үзіліссіз деп ұйғарамыз.

Жоғарыда айтылғандардан екі еселі интегралдың геометриялық мағынасы шығады: егер $f(x, y) \geq 0$ болса, онда (3) екі еселі интеграл табаны S облысы болатын жоғары жағынан $z = f(x, y)$ бетімен шектелген цилиндрлік дененің көлемін береді.

Теорема бойынша екі еселі интегралдың мәні ұсақ ΔS_i -лердің түрінен тәуелсіз болғандықтан кейінгі қарастырылатын есептерде S облысын бөліктерге бөлудің ықшамды әрі ұтымды әдістерін таңдаймыз. Солардың бірі S облысын ox және oy координаталар өстеріне параллель түзулер арқылы бөліктерге бөліп, ΔS_i ұсақ бөлікті қабырғалары $\Delta x_i, \Delta y_i$ болатын тіктөртбұрыштықтар ретінде қарастыруға болады. Бұл жағдайда облыстың шекарасымен іргелес бөліктер ғана тіктөртбұрыш құрмайды (2-сурет). Олай болса (3) формуладағы аудан элементі dS төмендегіше жазылады

$$dS = dx dy.$$

Сонымен (3) формула

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_i \rightarrow 0}} \sum_i f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i \quad (4)$$

түрінде жазылады. Облыстың шекарасымен іргелес тіктөртбұрыш болмайтын ұсақ бөліктер (4) шектің мәніне әсер етпейтінін көрсетуге болады

Енді екі еселі интегралдың негізгі қасиеттеріне тоқталық.

1. Тұрақты санды екі еселі интеграл таңбасының алдына шығаруға болады, яғни егер $c = \text{const}$ болса, онда

$$\iint_S c f(x, y) dx dy = c \iint_S f(x, y) dx dy.$$

2. Бірнеше функциялардың қосындыларының екі еселі интегралы олардың екі еселі интегралдарының қосындысына тең, яғни

$$\iint_S [f_1(x, y) + f_2(x, y) + \dots + f_n(x, y)] dx dy = \iint_S f_1(x, y) dx dy + \iint_S f_2(x, y) dx dy + \dots + \iint_S f_n(x, y) dx dy.$$

3. Егер $S = S_1 + S_2$ болса, онда

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{S_1} f(x, y) dx dy + \iint_{S_2} f(x, y) dx dy.$$

4. Егер S облысында $f(x, y) \geq 0$ болса, онда

$$\iint_S f(x, y) dx dy \geq 0.$$

5. Егер S облысында $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$ болса, онда

$$\iint_S f(x, y) dx dy \leq \iint_S \varphi(x, y) dx dy.$$

Бұл қасиеттердің дәлелдеуі екі еселі интегралдың анықтамасынан және шектер туралы теоремалардан шығады.

16.2 Екі еселі интегралды есептеу

Ох жазықтығында орналасқан S облысын қарастыралық.

Анықтама. Егер S облысының ішкі нүктесі арқылы *Oy* өсіне параллель болып өтетін түзу оның шекарасын тек қана екі нүктеде қиып өтсе, онда мұндай облыс *Oy* өсінің бағыты бойынша дұрыс облыс деп аталады (3-сурет).

Ox өсінің бағыты бойынша дұрыс облыста осы сияқты анықталады.

Егер облыс *Oy* өсінің бағыты бойынша да, *Ox* өсінің бағыты бойынша да дұрыс болса, онда ол дұрыс облыс деп аталады.

Интегралдау облысы S төмендегі сызықтармен қоршалған *Oy* өсінің бағыты бойынша дұрыс облыс болсын (3-сурет), яғни

$$x = a, x = b, y = y_1(x), y = y_2(x), \quad (1)$$

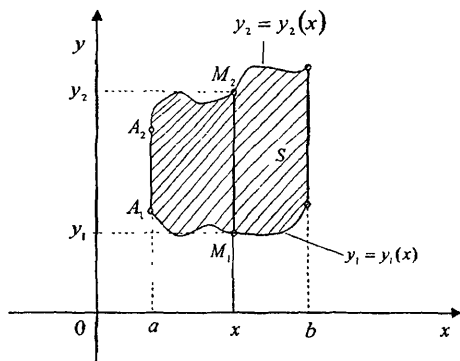
мұндағы $a < b, y_1(x) \leq y_2(x)$. $f(x, y)$ функциясы S облысында үзіліссіз болсын делік.

$$J_s = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (2)$$

өрнегін қарастыралық.

(2) өрнектің оң жағы $f(x, y)$ функциясынан S облысы бойынша алынған қайталамалы интеграл деп аталады. Оның мәнін табу үшін алдымен жақшаның іші y бойынша интегралданады, ал x тұрақты ретінде қарастырылады. Сонда жақшаның ішіндегі интеграл x -тің қандайда бір функциясын береді, яғни

$$\delta(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$



3-сурет

Содан соң $\delta(x)$ функциясын $[a, b]$ аралығында x бойынша интегралдаймыз

$$J_s = \int_a^b \delta(x) dx.$$

Бірнеше жағдайларды қарастырайық.

1) $f(x, y) \geq 0$ болсын делік.

Бұл жағдайда, табаны S облысы болатын жоғарыдан $z = f(x, y)$ бетімен, бүйір жағынан жасаушылары Oz өсіне параллель, бағыттаушысы S облысының шекарасы болатын цилиндрлік бетімен шектелген дененің көлемі V

$$V = \iiint_S f(x, y) dx dy \quad (3)$$

екі еселі интегралымен анықталатынын 3.1 тақырыбында айтқан едік. Енді осы дененің көлемін Oz өсіне параллель жазықтықтармен кимасының ауданы бойынша есептелік.

Аталған денемен $x = \text{const}$, $a < x < b$, жазықтығының кимасы 4-суретте штрихталған $\sigma(x)$ ауданын береді. $\sigma(x)$ ауданы төменнен $y_1 \leq y \leq y_2$ кесіндімен, жоғарыдан $z = f(x, y)$, $x = \text{const}$ кисығымен қоршалған қисық сызықты трапецияның ауданына тең, яғни

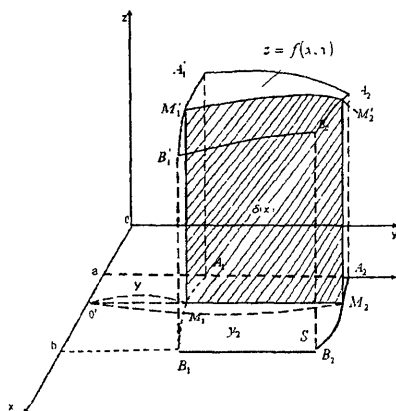
$$\sigma(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Онда 4-суреттегі дененің көлемі

$$V = \int_a^b \sigma(x) dx.$$

$\sigma(x)$ -тің орнына оның мәнін қоямыз.

$$V = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (4)$$



4-сурет

(3), (4) формулалардың сол жақтары өзара тең болғандықтан, олардың оң жақтары да өзара тең болады, яғни

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (5)$$

Сонымен, екі еселі интегралды есептеу (5) қайталанбалы интегралды есептеуге, яғни екі анықталған интегралды есептеуге келтіріледі екен.

(5) формуланың оң жағы төмендегіше түрде де жазылады

$$\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Соңғы теңдіктерде ішкі интегралдар y бойынша, ал сыртқы интеграл x бойынша алынады.

2) $S = S_1 \cup S_2$ болып, S_1 облысында $f(x, y) \geq 0$, ал S_2 облысында $f(x, y) < 0$ болсын делік. Онда екі еселі интегралдың үшінші қасиеті бойынша

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{S_1} f(x, y) dx dy + \iint_{S_2} f(x, y) dx dy = V_1 - V_2 \quad (6)$$

болады. Бұл жағдайда да V_1 мен V_2 үшін (5) формула орынды болады.

Практикалық есептерде жиі кездесетін бір дербес жағдайды да айта кетелік

S облысы $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ тіктөртбұрыш, ал $f(x, y) = X(x)Y(y)$ болсын. Мұндағы $X(x)$ функциясы $[a, b]$ аралықта, ал $Y(y)$ функциясы $[c, d]$ аралықта үзіліссіз болсын делік. Онда (5) формула бойынша

$$\iint_S X(x)Y(y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d X(x)Y(y) dy \right) dx = \int_a^b X(x) dx \int_c^d Y(y) dy. \quad (7)$$

(7) формуланың оң жағындағы ішкі интегралдың мәні тұрақты сан болғандықтан оны интеграл белгісінің сыртына шығаруға болады, яғни

$$\iint_S X(x)Y(y)dx dy = \int_a^b X(x)dx \cdot \int_c^d Y(y)dy. \quad (8)$$

Демек, (8) екі еселі интегралдың мәні екі анықталған интегралдың көбейтіндісіне тең екен.

3) S облысы Ox өсінің бағыты бойынша дұрыс облыс болсын, яғни $c \leq y \leq d$, $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$

функцияларымен қоршалған болсын. Онда (5) формулаға ұқсас

$$\iint_S f(x, y)dx dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx \right) dy \quad (9)$$

формуласын аламыз. Дербес жағдайда S облысы $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ тіктөбұрыш болса, онда

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y)dx dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx \\ \iint_S f(x, y)dx dy &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy. \end{aligned}$$

Соңғы теңдіктің оң жақтарын теңестірсек

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

формуласы шығады.

4) Егер S облысы Ox өсінің бағыты бойынша да Oy өсінің бағыты бойынша да дұрыс болмаса, онда S облысын Ox немесе Oy өстерінің бағыттары бойынша дұрыс облыстарға бөлеміз де, ол облыстар бойынша берілген функциядан алынған қайталанбалы интегралды есептеп, нәтижелерін қосамыз.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Екі еселі интегралдың анықтамасын беріңіз.
2. Екі еселі интегралдың бар болуы туралы теореманы баяндаңыз.
3. Екі еселі интегралдың геометриялық мағынасын беріңіз.
4. Екі еселі интегралдың негізгі қасиеттерін жазыңыз.
5. Қайталанбалы интеграл деп қандай интегралды айтады?
6. Дұрыс облыстың анықтамасын беріңіз.
7. Екі еселі интегралды қайталанбалы интегралға келтіру жолдарын баянданыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\iint_S xy dx dy$ екі еселі интегралды есептелік. Мұндағы S

$x=1, x=2, y=x, y=x\sqrt{3}$ түзулерімен қоршалған облыс.

Шешуі. (5) формуланы қолданамыз. Мұнда

$$y_1(x) = x, y_2(x) = x\sqrt{3}, a = 1, b = 2.$$

$$\begin{aligned}\iint_S xy dx dy &= \int_1^2 \left(\int_x^{x\sqrt{3}} xy dy \right) dx = \int_1^2 x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_x^{x\sqrt{3}} dx = \int_1^2 x \cdot \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_1^2 x^3 dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.\end{aligned}$$

2-мысал. $\iint_S \sin x \cdot \sin y dx dy$ екі еселі интегралын есептелік. Мұндағы S $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ квадратымен қоршалған облыс.

Шешуі. (8) формуланы қолданамыз.

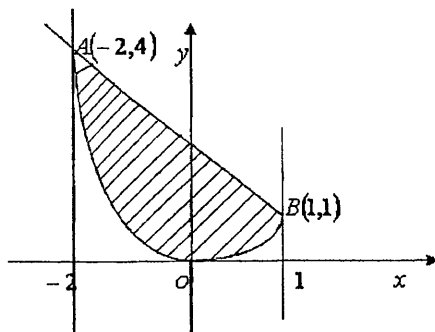
$$\iint_S \sin x \sin y dx dy = \int_0^\pi \sin x dx \cdot \int_0^\pi \sin y dy = \left(\int_0^\pi \sin x dx \right)^2 = 2^2 = 4.$$

3-мысал. $\iint_S \frac{x}{y} dx dy$ екі еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы S облысы $x = y^2$, $x = \sqrt{y}$ параболалармен және $y = 0$, $y = 1$ түзулерімен қоршалған облыс.

Шешуі. (9) формуланы қолданамыз.

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{x}{y} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} \frac{x}{y} dx \right) dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2y} \Big|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \left(\frac{y}{2y} - \frac{y^4}{2y} \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{y^3}{2} \right) dy = \\ &= \left(\frac{y}{2} - \frac{y^4}{8} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

4-мысал. $\int_{-2}^1 \left(\int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy \right) dx$ қайталанбалы интегралының интегралдау ретін өзгертеміз.



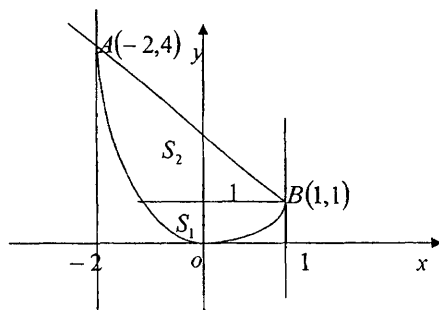
5-сурет

Шешуі. Интегралдау облысын анықтап алалық. Сыртқы интегралының x бойынша интегралдау шегі минус екі мен бір, демек интегралдау облысы $x = -2$ және $x = 1$ түзулерінің аралығында орналасқан (5-сурет). Ішкі интегралдың төменгі шегі $y_1 = x^2$ параболасының $x = -2$, $x = 1$ түзулерімен

қиылысу нүктелері $A(-2,4)$ және $B(1,1)$. Ішкі интегралдың жоғары шегі $y = 2 - x$ түзуі A және B нүктелері арқылы өтеді. Осы айтылғандарды Oxy жазықтығына салсақ интегралдау облысы S анықталады (5-сурет).

Интегралдау ретін өзгерткенде ішкі интеграл x бойынша, ал сыртқы интеграл y бойынша алынады. Облыстың оң жағындағы шекарасы параболаның OB бөлігінен және BA кесіндісінен құрылған (әртүрлі сызықтар) болғандықтан S облысын $y=1$ түзуі арқылы S_1 және S_2 екі облысқа жіктейміз (6-сурет). Сонда

$$\iint_S f(x, y) dy dx = \iint_{S_1} f(x, y) dx dy + \iint_{S_2} f(x, y) dx dy.$$



6-сурет

S_1 облысы жоғарыдан $y=1$, төменінен $y=0$ түзулерімен, ал оң жағынан $x = \sqrt{y}$, сол жағынан $x = -\sqrt{y}$ параболалармен қоршалған. Демек,

$$\iint_{S_1} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy.$$

S_2 облысы жоғарыдан $y=4$, төменнен $y=1$ түзуімен, оң жағынан $x = 2 - y$ түзуімен және сол жағынан $x = -\sqrt{y}$ параболасымен қоршалған. Демек,

$$\iint_{S_2} f(x, y) dx dy = \int_1^4 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx \right) dy.$$

Олай болса

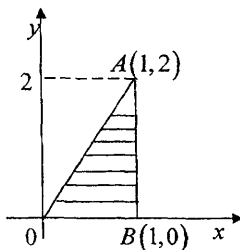
$$\int_{-2}^1 \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy + \int_1^4 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx \right) dy.$$

5-мысал. $\int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^1 \sin(x^2 + 1) dx \right) dy$ қайталанбалы интегралын есептеңіз.

Шешуі. Ішкі интеграл элементар функциялар арқылы өрнектелмейтін интегралдар тобына жатады. Сондықтан интегралдау ретін өзгертіп көреміз.

Интегралдау облысы $x = \frac{y}{2}$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$ түзулерімен қоршалған үшбұрыш (7-сурет).

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^1 \sin(x^2 + 1) dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2x} \sin(x^2 + 1) dy \right) dx = \int_0^1 \left[\sin(x^2 + 1) \cdot y \right]_0^{2x} dx = \\ &= \int_0^1 2x \cdot \sin(x^2 + 1) dx = \int_0^1 \sin(x^2 + 1) d(x^2 + 1) = -\cos(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \\ &= -(\cos 2 - \cos 1) = 2 \sin \frac{3}{2} \cdot \sin \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



7-сурет

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $\iint_S y \ln x dx dy$ екі еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы $S: xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ қисықтарымен қоршалған облыс.

Жауабы: $\frac{5}{8}(2 \ln 2 - 1)$.

2. $\iint_S (\cos 2x + \sin y) dx dy$ екі еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы $S: x = 0$, $y = 0$, $4x + 4y - \pi = 0$ түзулерімен қоршалған облыс.

Жауабы: $\frac{1}{4}(\pi + 1 - 2\sqrt{2})$.

3. $\iint_S \sin(x + y) dx dy$ екі еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы $S: x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $y = x$ түзулерімен қоршалған облыс.

Жауабы: 1.

4. $\int_0^1 \left(\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right) dy$ қайталанбалы интегралдың интегралдау ретін өзгертіңіз.

$$\text{Жауабы: } \int_1^2 \left(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy \right) dx.$$

5. $\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y) dy \right) dx$ қайталанбалы интегралдың интегралдау ретін өзгертіңіз.

$$\text{Жауабы: } \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x,y) dx \right) dy.$$

6. $\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} dx \right) dy$ қайталанбалы интегралды есептеңіз.

$$\text{Жауабы: } \frac{1}{2}(e-1).$$

7. $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2y}^1 \cos(x^2+1) dx \right) dy$ қайталанбалы интегралды есептеңіз.

$$\text{Жауабы: } \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \cos \frac{3}{2}.$$

8. $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3-1) dx \right) dy$ қайталанбалы интегралды есептеңіз.

$$\text{Жауабы: } -\frac{2}{3} \sin^2 \frac{1}{2}.$$

9. $\int_0^1 \left(\int_{\frac{y-1}{2}}^0 \lg(x^2+x) dx \right) dy$ қайталанбалы интегралды есептеңіз.

$$\text{Жауабы: } \ln \cos \frac{1}{4}.$$

10. $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y+1}} e^{x^3-3x} dx \right) dy$ қайталанбалы интегралды есептеңіз.

$$\text{Жауабы: } \frac{e^2-1}{3e^2}.$$

16.3 Екі еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру

Екі еселі интегралды есептеуді жеңілдететін әдістердің бірі онда айнымалыларды ауыстыру.

Оху жазықтығында L сызығымен қоршалған S облысы берілсін. S -тің нүктелерінің x және y координаталары u және v жаңа айнымалының функциялары болсын делік, яғни

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v). \quad (1)$$

Мұндағы φ және ψ функциялары қандай да бір S' облысында анықталған, бірімді, үзіліссіз және олардың үзіліссіз туындылары бар болсын деп ұйғарайық. Онда (1) формулалар бойынша u және ϑ -ның әрбір қос мәніне x және y -тің бір қос мәні сәйкес келеді.

x -пен y -тің берілген мәдеріне сәйкес u және ϑ -ның мәдерін (1) формуладан табу мүмкін болсын деп ұйғарайық.

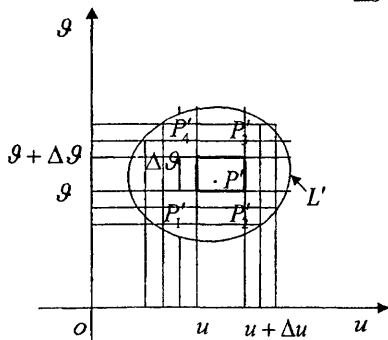
Тікбұрышты $ou\vartheta$ координаталар жүйесін қарастырымыз (8-сурет). Жоғарыда айтылғандарды негізге алсақ, S облысының әрбір $P(x, y)$ нүктесіне (9-сурет) u, ϑ жазықтығынан бір $P'(u, \vartheta)$ нүктесі (1) формула бойынша сәйкес келеді (8-сурет). u және ϑ -лар P нүктесінің қисық сызықты координаталары деп аталады.

Егер жылжымалы $M(x, y)$ нүктесі S облысын қоршаған L сызығының бойымен жылжыса, онда оған сәйкес $N(u, \vartheta)$ жылжымалы нүктесі $ou\vartheta$ жазықтығында тұйық L' сызығын сызады. L' сызығымен қоршалған облысты S' -пен белгілейміз.

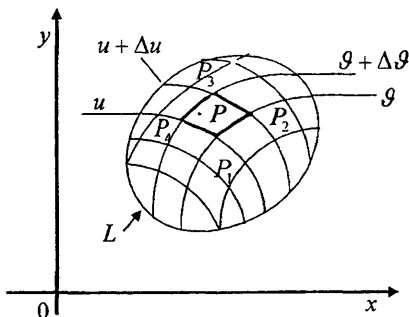
Сонымен, (1) формулалар S және S' облыстарының нүктелері арасында өзара бірімді сәйкестікті орнатады, басқаша айтқанда, S облысын S' облысына өзара бірімді бейнелейді.

S' облысындағы $u = \text{const}$ түзуін қарастырайық. (1) формула бойынша бұл түзуге Oxy жазықтығында жалпы жағдайда қандай да бір қисық сәйкес келеді. Осыған ұқсас $ou\vartheta$ жазықтығындағы $\vartheta = \text{const}$ түзуіне Oxy жазықтығында қандай да бір қисық сәйкес келеді (9-сурет). S' облысын $u = \text{const}$ және $\vartheta = \text{const}$ түзулері арқылы тіктөртбұрыштарға бөлілік (8-сурет). $ou\vartheta$ жазықтығында $u = \text{const}$, $u + \Delta u = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\vartheta + \Delta \vartheta = \text{const}$ түзулерімен қоршалған тіктөртбұрыштың ауданын $\Delta S'$ -пен белгілілік, ал $\Delta S'$ -ке сәйкес қисықсызықты тіктөртбұрыштың ауданын ΔS пен белгілейік. Сонда

$$\Delta S' = \Delta u \cdot \Delta \vartheta.$$



8-сурет



9-сурет

Жалпы жағдайда ΔS және $\Delta S'$ аудандары әртүрлі болуы мүмкін.

S облысында үзіліссіз $f(x, y)$ функциясы берілсін. $z = f(x, y)$ функциясының S облысындағы әрбір мәніне $z = F(u, g)$ функциясының S' облысындағы сондай мәні сәйкес келеді. Мұндағы

$$F(u, g) = f[\varphi(u, g), \psi(u, g)]$$

z функциясының S облысы бойынша төмендегі интегралдық қосындысын

$$\sum f(x, y) \Delta S = \sum F(u, g) \Delta S \quad (2)$$

қарастырайық.

Оху жазықтығындағы $P_1 P_2 P_3 P_4$ қисық сызықты төртбұрыштықтың ауданы ΔS -ті есептелік. ΔS -тің төбелерінің координаталары

$$\begin{aligned} P_1(x_1, y_1); \quad x_1 &= \varphi(u, g), \quad y_1 = \psi(u, g), \\ P_2(x_2, y_2); \quad x_2 &= \varphi(u + \Delta u, g), \quad y_2 = \psi(u + \Delta u, g), \\ P_3(x_3, y_3); \quad x_3 &= \varphi(u + \Delta u, g + \Delta g), \quad y_3 = \psi(u + \Delta u, g + \Delta g), \\ P_4(x_4, y_4); \quad x_4 &= \varphi(u, g + \Delta g), \quad y_4 = \psi(u, g + \Delta g). \end{aligned} \quad (3)$$

болады.

Қисық сызықты төртбұрыштықтың ауданын есептегенде олардың қабырғаларын қос-қостан параллель түзулер деп қабылдап, функциялардың өсімшелерін олардың сәйкес дифференциалдарымен алмастырамыз. Онда

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(u, g), \quad y_1 = \psi(u, g), \\ x_2 &= \varphi(u, g) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u, \quad y_2 = \psi(u, g) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u, \\ x_3 &= \varphi(u, g) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial g} \Delta g, \quad y_3 = \psi(u, g) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial g} \Delta g, \\ x_4 &= \varphi(u, g) + \frac{\partial \varphi}{\partial g} \Delta g, \quad y_4 = \psi(u, g) + \frac{\partial \psi}{\partial g} \Delta g. \end{aligned}$$

Бұл жағдайда P_1, P_2, P_3, P_4 қисық сызықты төртбұрышты параллелограмм деп қарастыруға болады. Ал оның ΔS ауданы P_1, P_2, P_3 үшбұрыштың ауданының екі еселенгеніне тең. Онда аналитикалық геометрия бөліміндегі өзімізге белгілі формулалар бойынша

$$\Delta S \approx |(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)| =$$

$$\left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial g} \Delta g \right) \frac{\partial \psi}{\partial g} \Delta g - \frac{\partial \varphi}{\partial g} \Delta g \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial g} \Delta g \right) \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial g} - \frac{\partial \varphi}{\partial g} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| \Delta u \cdot \Delta g;$$

$$\text{Мұндағы } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} \text{ анықтауышы } \varphi(u, \vartheta) \text{ және } \psi(u, \vartheta) \text{ функциялары-}$$

ның Якоби анықтауышы немесе Якобиан деп аталады.

Сонымен,

$$\Delta S \approx |J| \Delta S'. \quad (4)$$

(4) жуық теңдіктің мәнін (2) ге қоямыз

$$\sum f(x, y) \Delta S \approx \sum F(u, \vartheta) \cdot |J| \Delta S'.$$

Соңғы жуық теңдіктен $\Delta S'$ ауданның диаметрін нөлге ұмтылдырып шекке көшеміз.

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{S'} F(u, \vartheta) |J| du d\vartheta. \quad (5)$$

Соңғы формула екі еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру формуласы деп аталады. Бұл (5) формула $f(x, y)$ функциясынан S облысы бойынша алынған екі еселі интегралды есептеу мәселесін S' облысы бойынша алынған екі еселі интегралды есептеуге алып келеді.

16.4 Екі еселі интегралда полярлық координаталар жүйесіне көшу

Алдыңғы тақырыпта қарастырылған екі еселі интегралда айнымалыны ауыстырудың дербес жағдайы тік бұрышты Декарттық координаталар жүйесінен полярлық координата жүйесіне көшу болады. Бұл жағдайда $u = \theta$, $\vartheta = \rho$, яғни

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (1)$$

Oxy жазықтығындағы AB қисығы ($\rho = \rho_1$) (10-сурет). $O\theta\rho$ жазықтығындағы $A'B'$ түзуіне (11-сурет), ал Oxy жазықтығындағы DC қисығы ($\rho = \rho_2$) $O\theta\rho$ жазықтығындағы $D'C'$ түзуіне көшеді.

Oxy жазықтығындағы AD және BC түзулері $O\theta\rho$ жазықтығындағы $A'D'$ және $B'C'$ түзулеріне, ал L_1 және L_2 қисықтары L'_1 мен L'_2 қисықтарына көшеді. Якобианды есептелік:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta & \cos \theta \\ \rho \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho. \quad (2)$$

$|J| = \rho$ болғандықтан

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\theta, \rho) \rho d\rho \right) d\theta. \quad (3)$$

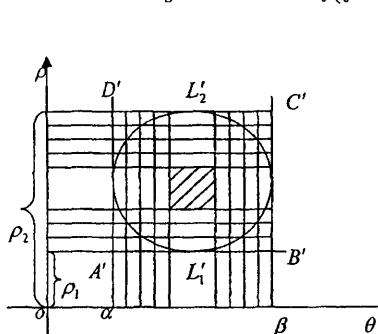
Соңғы формула екі еселі интегралда полярлық координата жүйесіне көшу формуласы деп аталады.

Мысал. $\iint_S e^{x^2+y^2} dx dy$ екі еселі интегралын есептелік.

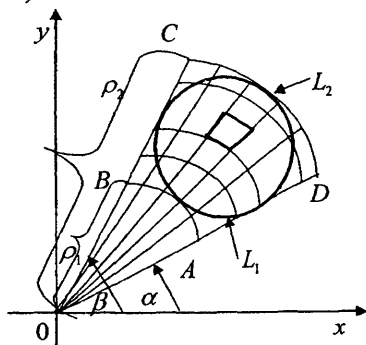
Мұндағы $S - x^2 + y^2 = 4$ дөңгелектің бірінші квадранттағы бөлігі.

Шешуі. $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ деп полярлық координата жүйесіне көшеміз. x және y декарт координаталарын θ және ρ полярлық координаталарына ауыстыру Якобианы $|J| = \rho$. (3) формуланы қолдансақ

$$\iint_S e^{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 e^{\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4} (e^4 - 1).$$



10-сурет



11-сурет

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Нүктенің қисық сызықты координаталары деген не?
2. S' облысын S облысына өзара бірімәнді бейнелеу формулаларын жазыңыз.
3. Якобиан айнымалыларды алмастыру функциялары арқылы қалай өрнектеледі?
4. Екі еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру формуласын жазыңыз.
5. Екі еселі интегралда полярлық координата жүйесіне көшу формуласын жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\iint_S \left(\frac{1}{2}x + y \right)^2 (x - y) dx dy$ екі еселі интегралын есептелік.

Мұндағы S $y = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = -\frac{1}{2}x + 3$, $y = x + 1$, $y = x - 2$ түзулерімен қоршалған облыс (12-сурет).

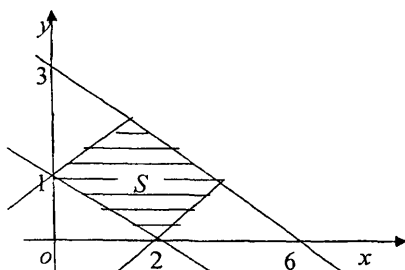
Шешуі. Берілген екі еселі интегралды тікелей интегралдасақ күрделі есептеулерге алып келеді, сондықтан

$$\frac{1}{2}x + y = u, \quad x - y = v \quad (4)$$

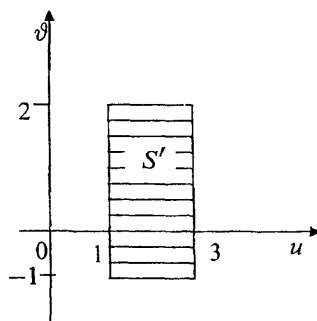
алмастыруларын жасасак, $y = x + 1$, $y = x - 2$ түзулері $\vartheta = -1$, $\vartheta = 2$ түзулеріне, ал $y = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = -\frac{1}{2}x + 3$ түзулері $u = 1$, $u = 3$ түзулеріне көшеді. Сонымен, берілген S облысы S' тіктөртбұрыштық облысқа көшеді (13-сурет). Енді (4) жүйеден x және y -терді анықтап Якобианды есептейміз.

$$x = \frac{2}{3}u + \frac{2}{3}\vartheta; y = \frac{2}{3}u - \frac{1}{3}\vartheta.$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{2}{3}.$$



12-сурет



13-сурет

Якобианның абсолют мәні $|J| = \frac{2}{3}$.

Алдымен 16.3-тің (5), одан кейін 16.2 тақырыбының (8) формулаларын қолданамыз.

$$\iint_S \left(\frac{1}{2}x + y \right) (x - y) dx dy = \iint_{S'} u \vartheta^2 \cdot \frac{2}{3} du d\vartheta = \int_1^2 \vartheta d\vartheta \cdot \int_1^3 u^2 du = \frac{26}{3}.$$

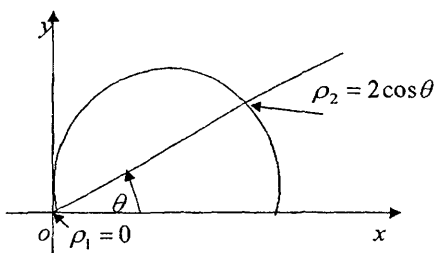
2-мысал. $\iint_S \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$ екі еселі интегралын полярлық

координаталар жүйесіне көшіп есептеңіз. Мұндағы S $x^2 + y^2 \leq 2x$ жарты дөңгелектің жоғарғы бөлігі.

Шешуі. 16.4 тақырыбының (3) формуласын қолданамыз. Ол үшін $x^2 + y^2 = 2x$ шеңберінің теңдеуін $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ формулаларын қолданып $\rho = 2 \cos \theta$ полярлық координаталар түрінде жазып алалық. Соңғы теңдеу интегралдау облысының полярлық координаталардағы теңдеуі болады. Полярлық өсті Ox өсінің оң бағытымен беттесетіндей етіп аламыз. Сонда, S облысында ρ айнымаласы 0-ден $2 \cos \theta$ -ға дейін өзгереді (14-сурет). Ішкі интегралды ρ бойынша, ал сыртқы интегралды θ бойынша

интегралдаймыз. θ айнымалысы 0-ден $\frac{\pi}{2}$ -ге дейін өзгереді. Берілген екі еселі интегралды қайталанбалы интеграл арқылы жазып есептейміз.

$$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy &= \iint_S \sqrt{4-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} (4-\rho^2)^{\frac{1}{2}} d(4-\rho^2) \right) d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((4-4\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) d\theta = -\frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\theta - 1) d\theta = \\ &= -\frac{8}{3} \left[-\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta) d\cos\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right] = -\frac{8}{3} \left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} - \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$



14-сурет

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $x = u(1-\vartheta)$, $y = u\vartheta$ алмастыруларын жасап $\int_0^1 \left(\int_0^{2x} dy \right)$ қайталанбалы интегралды есептеңіз.

Жауабы: $\frac{1}{2}$.

2. $x = \sqrt{\frac{u}{\vartheta}}$, $y = \sqrt{u\vartheta}$ алмастыруларын жасап $\iint_S dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы S , $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=3x$ кисықтарымен қоршалған облыс.

Жауабы: $\frac{1}{2} \ln 3$.

3-8-мысалдардағы екі еселі интегралдарды полярлық координаталар жүйесіне көшіп есептеңіздер.

3. $\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$. Мұндағы, $S: x^2 + y^2 \leq 1$.

Жауабы: $\frac{(2\sqrt{2}-1)2\pi}{3}$.

4. $\iint_S \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$. Мұндағы $S: x^2 + y^2 \leq 1$.

Жауабы: $\frac{(2\sqrt{2}-1)2\pi}{3}$.

5. $\iint_S \frac{x^2+y^2}{4} dx dy$. Мұндағы $S: x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$.

Жауабы: $\frac{\pi}{2}$.

6. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx dy$.

Жауабы: $\frac{\pi}{6} a^3$.

7. $\iint_S (h-2x-3y) dx dy$. Мұндағы $S: x^2 + y^2 \leq R^2$.

Жауабы: $\pi R^2 h$.

8. $\iint_S (4 - \sqrt{x^2 - y^2}) dx dy$. Мұндағы $S: x^2 + y^2 \leq 1$.

Жауабы: $\frac{10\pi}{3}$.

16.5. Екі еселі интегралдардың геометрияда және физикада қолданулары

Көптеген практикалық есептерді шешкенде интегралдық қосынды әдісіне негізделетін жалпы принцип анықталған интегралдың қолданулары бөлімінде баяндалған еді. 16.1 тақырыбында екі еселі интегралдың анықтамасын бергенде де осы жалпы принцип қолданылды.

Өртүрлі мағыналы есептер қарастырылғанда ізделініп отырған Q шамасы Oxy жазықтығының қандай да бір S облысы және S -те анықталған $f(x, y)$ функциясы мен байланысқандығын байқаймыз. Q -ді табу төмендегі ретпен орындалады:

а) S облысы кез келген әдіспен n ұсақ бөліктерге бөлінеді, яғни

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i, \quad (1)$$

мұндағы ΔS_i i -ші ұсақ бөліктің ауданы.

ә) Әрбір ΔS_i -ге ізделініп отырған Q шаманың ұсақ бөлігі ΔQ_i сәйкес келеді. ΔQ_i -дің мәні $f(x, y)$ функциясының ΔS_i -ден кез келген әдіспен алынған M_i нүктесіндегі мәнімен ΔS_i -дің көбейтіндісінің жуық мәні ретінде анықталады, яғни

$$\Delta Q_i \approx f(M_i) \Delta S_i. \quad (2)$$

б) Ізделініп отырған шама Q -дің жуық мәні табылады:

$$Q = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i. \quad (3)$$

(3) теңдіктің оң жағы $f(x, y)$ функциясының интегралдық қосындысы деп аталады. ΔS_i бөліктердің аудандары кішірейген сайын (3) жуық теңдік неғұрлым дәл теңдікке жақындай түседі.

(3) теңдіктің n шексіздікке ұмтылғандағы немесе ΔS_i - дің ең үлкенінің ауданы нөлге ұмтылғандағы шегі есептеледі, яғни

$$Q = \lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i = \iint_S f(x, y) ds. \quad (4)$$

Мұндағы $f(x, y) ds$ өрнегі ізделінген шама элементі деп аталады және dQ -мен белгіленді, онда

$$dQ = f(x, y) ds.$$

Сонымен,

$$Q = \iint_S dQ. \quad (5)$$

1. **Көлемді есептеу.** Төменнен Oxy жазықтығындағы S облысымен, жоғарыдан $z = f(x, y)$ бетімен, бүйір жақтарынан жасаушылары OZ өсіне параллель, бағыттаушысы S облысының шекарасы болатын цилиндрлік бетімен қоршалған цилиндрлік дененің көлем элементі $dV = f(x, y) dS$ болғандықтан, аталған дененің көлемі (5) формула бойынша

$$V = \iiint_S dV = \iint_S f(x, y) dx dy. \quad (6)$$

Егер дене жоғарыдан $f(x, y) \geq 0$, төменнен $\varphi(x, y) \geq 0$ беттерімен шектелген цилиндрлік дене болып, $f(x, y)$ пен $\varphi(x, y)$ беттерінің $[f(x, y) \geq \varphi(x, y)]$ Oxy жазықтығына проекциясы S облысы болса, онда ол дененің көлемі

$$V = \iint_S f(x, y) dx dy - \iint_S \varphi(x, y) dx dy \quad (7)$$

формуласымен есептеледі.

2. **Ауданды есептеу.** Аудан элементі $dS = dx \cdot dy$ болғандықтан, (5) формула бойынша S облысының ауданы

$$S = \iint_S ds = \iint_S dx dy \quad (8)$$

формуламен есептеледі.

Мысал. $y^2 = 2x$ параболасымен және $y = x$ түзуімен қоршалған фигураның ауданын есептеңіз.

Шешуі. Парабола мен түзудің теңдеулерін жүйе түрінде шешіп, олардың қиылысу нүктелерін табамыз. Яғни $x^2 = 2x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; $y_1 = 0$; $y_2 = 2$. Сонымен, қиылысу нүктелері: $A(0;0)$ және $B(2;2)$ болады.

Олай болса

$$S = \int_0^2 \left(\int_x^{\sqrt{2x}} dy \right) dx = \int_0^2 (\sqrt{2x} - x) dx = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right) \bigg|_0^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2} - 2 = \frac{2}{3}.$$

3. Беттің ауданын есептеу.

Теңдеуі $z = f(x, y)$ болатын беттің ауданын есептелік. $f(x, y)$ функциясының дербес туындылары үзіліссіз болсын деп ұйғаралық. $f(x, y)$ бетінің Oxy жазықтығына проекциясы S тұйық облысы болсын. S облысын аудандары $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ болатын ұсақ бөліктерге бөлейік те, әр бөліктен $P_i(\xi_i, \eta_i)$ нүктелерін алалық. S облысындағы P_i нүктесіне $f(x, y)$ бетінің

$$M_i[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)]$$

нүктесі сәйкес келеді. $f(x, y)$ беттің M_i нүктесіне жанама жазықтық жүргіземіз. Жанама жазықтықтың теңдеуі

$$z - z_i = f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i), \quad (9)$$

ал нормальдың теңдеуі

$$\frac{x - \xi_i}{-f'_x(\xi_i, \eta_i)} = \frac{y - \eta_i}{-f'_y(\xi_i, \eta_i)} = \frac{z - z_i}{1} \quad (10)$$

болатыны «Математика-1» бөлімінен белгілі. Жанама жазықтықтан Oxy жазықтығына проекциясы ΔS_i болатын ұсақ ауданды $\Delta \delta_i$ мен белгілейік. Егер жанама жазықтық пен Oxy жазықтығы арасындағы бұрышты γ_i арқылы белгілесек, онда

$$\Delta S_i = \Delta \delta_i \cos \gamma_i$$

немесе

$$\Delta \delta_i = \frac{\Delta S_i}{\cos \gamma_i}$$

теңдіктің орындалатындығы аналитикалық геометриядан белгілі. Жанама жазықтықтың нормальмен Oz өсі арасындағы бұрышта γ_i -ге тең болғандықтан және (10) теңдеуге негізделіп

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'_x(\xi_i, \eta_i)]^2 + [f'_y(\xi_i, \eta_i)]^2}}$$

теңдікті жаза аламыз. Онда

$$\Delta\delta_i = \sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)} \cdot \Delta S_i.$$

$\Delta\delta_i$ ұсақ аудандардың қосындысы $f(x, y)$ теңдеуімен аныкталатын беттің ауданы δ -ның жуық мәнін береді, яғни

$$\delta \approx \sum_{i=1}^n \Delta\delta_i$$

Соңғы жуық теңдіктің $\max \Delta S_i \rightarrow 0$ ұмтылғандағы шегін есептеп $f(x, y)$ беттің ізделген ауданын табамыз.

$$\delta = \lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)} \cdot \Delta S_i.$$

Соңғы теңдіктің оң жағы интегралдық қосынды. Шарт бойынша берілген функцияның дербес туындылары үзіліссіз болғандықтан ол интегралдық қосындының шегі бар болады және ол екі еселі интегралға тең, яғни

$$\delta = \iint_S \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy. \quad (11)$$

Сонымен $z = f(x, y)$ беттің ауданы (11) формуламен есептеледі екен.

Интеграл астындағы өрнек бет ауданының элементі болады, яғни

$$d\delta = \sqrt{1 + f_x^2(\xi, \eta_i) + f_y^2(\xi, \eta_i)} dx dy.$$

16.6 Екі еселі интегралдардың физикада қолданылулары

а) Материалдық жазық фигураның массасы. Ауданы S -ке тең жазық фигураның $M(x, y)$ нүктесіндегі беттік тығыздығы $\delta(x, y)$ болсын. Жазық фигураның $M(x, y)$ нүктесі жататын шексіз аз аудан элементі dS -ті қарастыралық. dS аудан элементінде $\delta(x, y) = \delta$ тұрақты деп қабылдасақ, онда dS элементінің массасы, яғни элементарлық масса dm төмендегі теңдікпен анықталады

$$dm = \delta dS. \quad (1)$$

(1) теңдікті S бойынша интегралдасақ, онда ауданы S -ке тең материалдық жазық фигураның массасын аламыз, яғни

$$m = \iint_S dm = \iint_S \delta ds. \quad (2)$$

ә) Материалдық жазық фигурның статикалық моменттері.

Егер dm элементарлық массаны Ox және Oy өстерінен y және x қашықтықтағы материалдық нүкте деп қарастырсақ, онда жазық фигураның элементарлық статикалық моменті үшін

$$dS_x = y dm = y \delta(x, y) dS \quad \text{және} \quad dS_y = x dm = x \delta(x, y) dS$$

формулаларын аламыз. Соңғы теңдіктерді S облысы бойынша интегралдасақ, онда ауданы S -ке тең жазық фигураның координата өстеріне қарағандағы статикалық моменттерін есептейтін төмендегі формулалары шығады.

$$S_x = \iint_S y \delta(x, y) dS. \quad (3)$$

$$S_y = \iint_S x \delta(x, y) dS. \quad (4)$$

б) Ауырлық центрінің координаталарын табу.

Жазық фигураның қандай да бір өске қарағандағы статикалық моменті, массасы осы жазық фигураның массасына тең, ал өзі оның ауырлық центріінде орналасқан материалдық нүктенің сол өске қарағандағы статикалық моментіне тең болатындығы механикада Вариньон теоремасы деп аталатын теоремада дәлелденген. Ауданы S -ке тең жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын (x_c, y_c) -мен белгілесек:

$$S_y = mx_c, S_x = my_c,$$

Осылардан

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{\iint_S x \delta(x, y) dS}{\iint_S \delta(x, y) dS}. \quad (5)$$

$$y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{\iint_S y \delta(x, y) dS}{\iint_S \delta(x, y) dS}. \quad (6)$$

в) Жоғарыдағыларға ұқсас, S ауданды жазық фигураның элементарлық инерция моменттері үшін

$$dJ_x = y^2 dm = y^2 \delta(x, y) dS,$$

$$dJ_y = x^2 dm = x^2 \delta(x, y) dS$$

формуларды жаза аламыз. Соңғы теңдіктерді S облысы бойынша интегралдасак

$$J_x = \iint_S dJ_x = \iint_S y^2 \delta(x, y) dS, \quad (7)$$

$$J_y = \iint_S dJ_y = \iint_S x^2 \delta(x, y) dS. \quad (8)$$

Координаталар бас нүктесіне қарағандағы инерция моменті

$$J_0 = \iint_S (x^2 + y^2) \delta(x, y) dS. \quad (9)$$

(7), (8), (9) теңдіктерден

$$J_0 = J_x + J_y \quad (10)$$

болатындығы шығады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Геометриялық және физикалық шамаларды екі еселі интегралдың көмегімен есептеудің жалпы принципін баянданыз.

2. Кеңістіктегі дененің көлемін есептейтін формуланы жазыңыз.

3. Екі еселі интегралдың көмегімен жазық фигуралардың ауданы қалай есептеледі.

4. Беттің ауданын табу формуласын келтіріп шығарыңыз.

5. Материалдық жазық фигураның массасын табу формуласын жазыңыз.

6. Жазық фигураның статикалық моменттерін табатын формулаларды жазыңыз.

7. Ауырлық центрінің координаталарын табу формулаларын жазыңыз.

8. Материалдық жазық фигураның инерция моменттерінің формулаларын жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

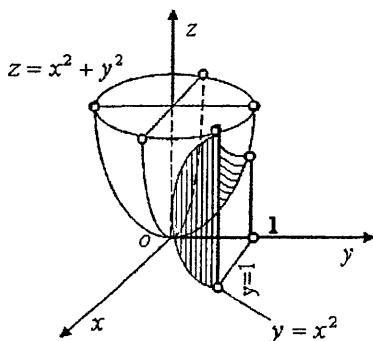
1-мысал. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табалық.

Шешуі. Берілген беттермен қоршалған дененің жартысы 15-суретте кескінделген.

$$\frac{1}{2}V = \iiint_S z dx dy, \text{ мұндағы } S, Oxy \text{ жазықтығында } y = x^2 \text{ параболасымен}$$

және $y = 1$ түзуімен қоршалған облыстың жартысы.

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^1 \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy dx = 2 \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^1 dx = 2 \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \\ &= 2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Big|_0^1 = \frac{88}{105}. \end{aligned}$$

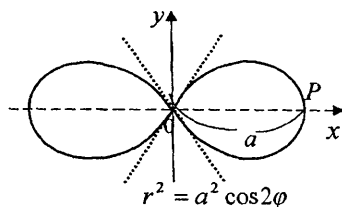


15-сурет

2-мысал. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ Бернулли лемнискатасымен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз (16-сурет).

Шешуі. Берілген фигура симметриялы болғандықтан, оның ауданы төмендегіше өрнектеледі:

$$S = 4 \iint_S r dr d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr \right) d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$



16-сурет

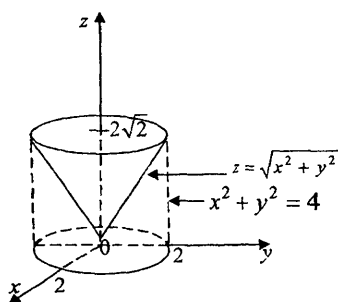
3-мысал. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ конустың $x^2 + y^2 = 4$ цилиндрі ішіне орналасқан бөлігінің бетінің ауданын табыңыз (17-сурет).

Шешуі. Конустың теңдеуінен z -тің дербес туындыларын табамыз:

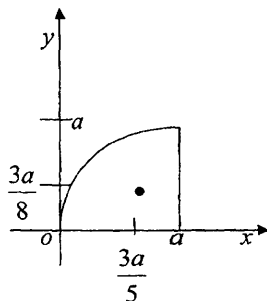
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Облыс S радиусы 2-ге тең, центрі координаталар бас нүктесінде жататын дөңгелек. Олай болса

$$\begin{aligned} S &= \iint_S \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} \iint_S dx dy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r dr \right) d\varphi = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_0^2 d\varphi = 4\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$



17-сурет



18-сурет

4-мысал. $y^2 = ax$ параболасымен және $x = a, y = 0 (y > 0)$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның (18-сурет) ауырлық центрінің координаталарын табалық (тығыздығы $\delta(x, y) = 1$).

Шешуі. (2) формуланы қолданып берілген фигураның массасын табамыз.

$$m = \iint_S \delta dS = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{ax}} dy \right) dx = \int_0^a \sqrt{ax} dx = \frac{2}{3} a^2.$$

(3), (4) формулаларды қолданып статикалық моменттерін табамыз

$$S_x = \iint_S y \delta(x, y) dS = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{ax}} y dy \right) dx = \int_0^a \frac{ax}{2} dx = \frac{a^3}{4}.$$

$$S_y = \iint_S x \delta(x, y) dS = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{ax}} x dy \right) dx = \int_0^a x \sqrt{ax} dx = \frac{2a^3}{5}.$$

(5), (6) формулаларды қолданып ауырлық центрінің координаталарын табамыз

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{2a^3}{5} : \frac{2}{3} a^2 = \frac{3a}{5},$$

$$y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{a^3}{4} : \frac{2}{3} a^2 = \frac{3a}{8}.$$

5-мысал. $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ түзулерімен қоршалған тіктөртбұрыштық ауданының J_x, J_y және J_0 инерция моменттерін табыңыз ($\delta(x, y) = 1$).

$$\text{Шешуі. } J_x = \iint_S y^2 \delta(x, y) dS = \int_0^a \left(\int_0^b y^2 dy \right) dx = \int_0^a \frac{b^3}{3} dx = \frac{b^3 a}{3}.$$

$$J_y = \iint_S x^2 \delta(x, y) dS = \int_0^a \left(\int_0^b x^2 dy \right) dx = \frac{a^3 b}{3}; \quad J_0 = J_x + J_y = \frac{ab^3}{3} + \frac{a^3 b}{3} = \frac{ab(a^2 + b^2)}{3}.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары.

1. $z=0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 3$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. Жауабы: 3π .

2. $x = 2y^2$, $x + 2y + z = 4$, $y=0$, $z=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{17}{5}.$$

3. $z = 4 - x^2$, $2x + y = 4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{40}{3}.$$

4. $y^2 = 2x$ параболасымен және $y = x$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз. Жауабы: $\frac{2}{3}$.

5. $\rho = a \sin 2\theta$ төрт жапырақты гүлдің ауданын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{\pi a^2}{8}.$$

6. $2z = x^2$ цилиндрінің $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ және $x = 2\sqrt{2}$ жазықтықтарымен қиылған бөлігі бетінің ауданын табыңыз.

Жауабы: 13.

7. $x^2 + y^2 = 2az$ параболоидтың $x^2 + y^2 = 3a^2$ цилиндр ішіндегі бөлігінің бетінің ауданын табыңыз.

Жауабы: $\frac{14}{3}\pi a^2$.

8. $y = x^2$ параболамен $x = y$ және $y = 0$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

Жауабы: $x_c = 3$; $y_c = 4,8$.

9. $\rho = a(1 + \cos\theta)$ қисығымен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

Жауабы: $x_c = \frac{5a}{6}$, $y_c = 0$.

10. $y = \sqrt{4x}$ параболасымен және $x + y = 3$, $y = 0$ түзулерімен қоршалаған жазық фигураның Ox өсіне қарағандағы инерция моментін есептеңіз.

Жауабы: 2,4.

16.7 Үш еселі интеграл

Кеңістікте тұйық V облысы және онда анықталған, үзіліссіз $u = f(x, y, z)$ функциясы берілсін. V денесін көлемдері $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ болатын n ұсақ бөліктерге бөлейік те, олардың әрқайсысынан кез келген бір $M_i(x_i, y_i, z_i)$ нүктелерін алалық. $f(x, y, z)$ функциясының M_i нүктесіндегі мәнін $f(M_i)$ мен белгілеп, төмендегі қосындыны құралық.

$$J_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i. \quad (1)$$

Бұл қосынды үш өлшемді интегралдық қосынды деп аталады. ΔV_i -лердің ең үлкенінің диаметрін d арқылы белгілеп, V облысын шексіз көп бөліктерге бөлсек, d нөлге ұмтылады.

Анықтама. Егер (1) қосындының d нөлге ұмтылғандағы шегі бар болса және ол шек V -ны ұсақ бөліктерге бөлу әдісіне және әрбір ΔV_i -ден M_i нүктелерін таңдау әдісіне тәуелді болмаса, онда оны $f(x, y, z)$ функциясынан V облысы бойынша алынған үш еселі интеграл деп атайды да төмендегіше белгілейді:

$$J = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \iiint_V f(x, y, z) dV. \quad (2)$$

Теорема. Егер тұйық V облысында $u = f(x, y, z)$ функциясы үзіліссіз болса, онда (2) үш еселі интегралы бар болады және ол V облысын ұсақ бөліктерге бөлу әдісі және таңдау әдісінен, әрбір бөліктен M_i нүктелерді таңдау әдісіне тәуелсіз болады.

Егер $f(x, y, z)$ функциясы V көлемде үзіліссіз таралған қандайда бір заттың көлемдік тығыздығы болса, онда $f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ көбейтінді ΔV_i көлемінің массасының жуық мәнін береді, мұндағы $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$. Олай болса (1) интегралдық қосынды V көлемді дененің массасының жуық мәніне тең болады. Ал (1) нің d нөлге ұмтылғандағы шегі, яғни (2) теңдік V көлемді дененің массасына тең болады.

Сонымен, үш еселі интегралдың физикалық мағынасы төмендегіше болады.

Егер $Oxyz$ кеңістіктің V көлемінде қандайда бір заттың массасының таратылу тығыздығы $f(x, y, z)$ функциясымен берілсе, онда

$$m = \iiint_V f(x, y, z) dV \quad (3)$$

теңдігі көлемі V болатын дененің массасын береді. Дербес жағдайда, егер $f(x, y, z) \equiv 1$ болса, онда V облысының массасы оның көлеміне тең болады. Сондықтан V облыстың көлемі

$$V = \iiint_V dV \quad (4)$$

формуламен есептеледі.

Енді үш еселі интегралды есептеуді қарастыралық. V облысы төмендегі қасиеттерге ие болсын.

1. Координаталар өстеріне параллель және V -ның ішкі нүктелерінен өтетін түзулер V облысының шекарасын тек қана екі нүктеде қиып өтетін болсын.

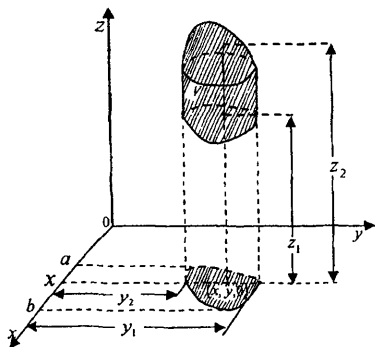
2. V облысының координаталар жазықтықтарына проекциялары дұрыс облыстар болсын.

3. V облысының координаталар жазықтықтарына параллель жазықтықтармен қиған бөліктері де 1) және 2) қасиеттерге ие болсын.

4. Аталған қасиеттерге ие болған V облысы үш өлшемді дұрыс облыс деп аталады.

5. Үш өлшемді дұрыс облысқа эллипсоид, шар, тікбұрышты параллелепипед, тетраэдр т.с.с. мысал бола алады. Біз бұл оқу құралында дұрыс облыстарды ғана қарастырамыз.

6. V облысы төменнен $z_1 = z_1(x, y)$, ал жоғарыдан $z_2 = z_2(x, y)$ беттерімен қоршалсын. Сонымен бірге V облысының Oxy координаталар жазықтығындағы проекциясы S дұрыс облыс болсын, яғни $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$, $x = b$ функцияларымен қоршалған болсын (1-сурет).



1-сурет

Әрбір $(x, y) \in S$ нүктесіндегі z -тің мәніне төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандыра-тын мәндер сәйкес келеді

$$z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y).$$

Онда екі еселі интегралды есептеуге ұқсас пайымдау жүргізсек

$$J_V = \iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_S \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy dx. \quad (5)$$

Сонымен, үш еселі интегралды есептеу (5) қайталанбалы үш интегралды есептеуге келтіріледі екен.

Енді үш еселі интегралдың негізгі қасиеттеріне көшелік:

1. Тұрақты коэффициентті үш еселі интеграл таңбасының алдына шығаруға болады, яғни

$$\iiint_V c f(x, y, z) dV = c \iiint_V f(x, y, z) dV.$$

2. Бірнеше функциялардың қосындысының үш еселі интегралы олардың үш еселі интегралдарының қосындысына тең, яғни

$$\iiint_V [f(x, y, z) + \phi(x, y, z)] dx dy dz = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_V \phi(x, y, z) dx dy dz.$$

3. Егер интегралдау облысында $f(x, y, z) \geq 0$ болса, онда

$$\iiint_V f(x, y, z) dV \geq 0.$$

4. Егер интегралдау облысында $\phi(x, y, z) \leq f(x, y, z)$ болса, онда

$$\iiint_V \phi(x, y, z) dV \leq \iiint_V f(x, y, z) dV.$$

5. Егер V облысы k бөлікке бөлінген болса, яғни $V = V_1 + V_2 + \dots + V_k$,

онда

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dV + \dots + \iiint_{V_k} f(x, y, z) dV.$$

6. Егер $f(x, y, z)$ функциясының V облысындағы ең кіші және ең үлкен мәндері сәйкес m және M болса, онда V облысында

$$mV \leq \iiint_V f(x, y, z) dV \leq MV$$

теңсіздіктер орындалады. Мұндағы V -интегралдау облысының көлемі.

7. Егер $f(x, y, z)$ функциясы тұйық V облысында үзіліссіз болса, онда V -дан қандайда бір P нүктесі табылып, сол нүктеде

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = f(P)V$$

теңдік орындалады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Үш еселі интегралдың анықтамасын беріңіз.
2. Үш еселі интегралдың бар болуы теоремасын баяндаңыз.
3. Үш еселі интегралдың физикалық мағынасын ашыңыз.
4. Қандай облысты үш өлшемді дұрыс облыс деп атайды?
5. Үш еселі интегралды қайталанба интегралға келтіру жолын баяндаңыз.
6. Үш еселі интегралдың қасиеттерін жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$ үш еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы

V координаталар жазықтықтарымен және $x+y+z=1$ жазықтығымен қоршалған облыс

Шешуі.

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} \right) dy dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{1}{(x+y+z+1)^2} \Big|_0^{1-x-y} dy \right) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(x+y+1)^2} \right) dy \right) dx = \\ &= -\frac{1}{8} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} dy \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{dy}{(x+y+1)^2} \right) dx = -\frac{1}{8} \int_0^1 (1-x) dx - \frac{1}{4} \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

2-мысал. $\int_0^a \left(\int_0^x \left(\int_0^y xyz dz \right) dy \right) dx$ қайталанбалы интегралын есептеңіз.

Шешуі.

$$\begin{aligned} \int_0^a \left(\int_0^x \left(\int_0^y xyz dz \right) dy \right) dx &= \int_0^a \left(\int_0^x xy \frac{z^2}{2} \Big|_0^y dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^x \frac{xy^3}{2} dy \right) dx = \int_0^a \frac{xy^4}{8} \Big|_0^x dx = \int_0^a \frac{x^5}{8} dx = \\ &= \frac{x^6}{48} \Big|_0^a = \frac{a^6}{48}. \end{aligned}$$

3-мысал. Егер $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ жазықтықтарымен қоршалған пирамиданың әрбір нүктесінің тығыздығы сол нүктенің аппликатына тең болса, яғни $f(x, y, z) = z$, онда пирамиданың массасын анықтаңыз.

Шешуі. (3), (5) формулаларды қолданамыз.

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V z dV = \int_0^a \left(\int_0^{a-x} \left(\int_0^{a-x-y} z dz \right) dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{a-x} \frac{z^2}{2} \Big|_0^{a-x-y} dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \left(\int_0^{a-x} (a-x-y)^2 dy \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^a \frac{(a-x-y)^3}{3} \Big|_0^{a-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(a-x)^3}{3} dx = -\frac{1}{24} (a-x)^4 \Big|_0^a = \frac{a^4}{24}. \end{aligned}$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $\iiint_V (x + y + z) dV$ үш еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы V облысы $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ жазықтықтарымен қоршалған.

Жауабы: $\frac{3}{8}$.

2. $\iiint_V (3x + 2y + z) dV$ үш еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы $V: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$.

Жауабы: $-\frac{20}{9}$.

3. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^4}$ үш еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы $V: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1$.

Жауабы: $\frac{1}{14}$.

4. $\iiint_V xyz dx dy dz$ үш еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы $V: y = x^2, x = y^2, z = 5, z = 0$ беттерімен қоршалған облыс.

Жауабы: $\frac{25}{16}$.

5. $\iiint_V x^2 y^2 z^2 dx dy dz$ үш еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы V облысы $x = 1, x = 3, y = 0, y = 2, z = 0, z = 5$ жазықтықтарымен қоршалған.

Жауабы: $\frac{2600}{9}$.

16.8 Үш еселі интегралда айнымалыларды алмастыру

Oxz тік бұрышты координаталар кеңістігінде тұйық V облысы мен *Ou $\vartheta\omega$* тік бұрышты координаталар кеңістігінде тұйық V' облысы берілсін.

$$\begin{cases} x = x(u, \vartheta, \omega), \\ y = y(u, \vartheta, \omega), \\ z = z(u, \vartheta, \omega). \end{cases} \quad (1)$$

(1) теңдіктері V облысын V' облысына өзара бірмәнді бейнелесін. Жүйенің оң жағындағы функциялар мен олардың 1-ретті дербес туындылары да үзіліссіз болсын деп ұйғаралық. Онда екі еселі интегралда айнымалыларды алмастыру тақырыбындағыдай ұқсас пайымдаулар жасап

$$\lim_{\Delta V' \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta V'} = |J|$$

теңдігін аламыз. Мұндағы ΔV мен $\Delta V'$ қарастырылып отырған облыстардың көлем элементтері, ал

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \omega} \end{vmatrix} \quad (2)$$

анықтауышы $x(u, \vartheta, \omega), y(u, \vartheta, \omega), z(u, \vartheta, \omega)$ функцияларының Якоби анықтауышы.

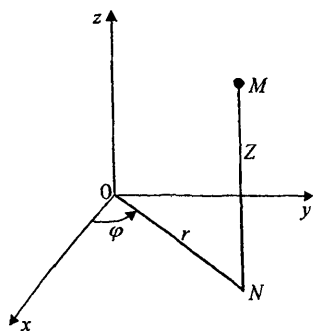
Егер $f(x, y, z)$ функциясы V облысында үзіліссіз және $\Delta V, \Delta V'$ облыстары арасында жоғарыда айтығандай өзара бірмәнді сәйкестік орнатылған болса, онда

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{V'} f[x(u, \vartheta, \omega), y(u, \vartheta, \omega), z(u, \vartheta, \omega)] |J| dV' \quad (3)$$

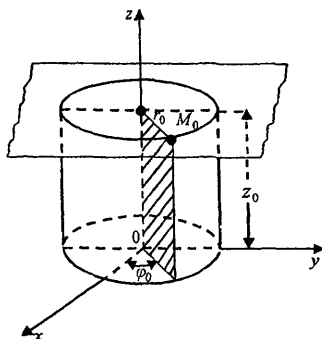
формуласы шығады. Бұл формула үш еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру формуласы деп аталады.

Дербес жағдайларды қарастыралық.

1. Үш еселі интегралдарда цилиндрлік координаталарлар жүйесіне көшу. Көптеген практикалық есептерді қарастырғанда цилиндрлік координаталар жиі қолданылады. *Oxz* кеңістігінде кез келген M нүктесін қарастыралық. M нүктесінің *Oxu* жазықтығындағы проекциясын N деп белгілелік. N нүктесін r және φ полярлық координаталар арқылы анықтап, оларға M нүктесінің аппликаты z -ті біріктірсек, онда *Oxz* кеңістігіндегі M нүктесінің орны r, φ және z сандары арқылы анықталады (2-сурет).



2-сурет



3-сурет

r, φ және z сандары M нүктесінің цилиндрлік координаталары деп аталады. Кеңістіктегі кез келген нүктенің цилиндрлік координаталары мен оның декарттық координаталары арасында төмендегідей байланыс бар

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z. \quad (4)$$

Декарттық координаталар жүйесінде $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ жазықтықтарының қиылысу нүктесі болады. Ал цилиндрлік координаталар жүйесінде $M_0(r_0, \varphi_0, z_0)$ нүктесі $r = r_0, \varphi = \varphi_0, z = z_0$ беттерінің қиылысу нүктесі болады (3-сурет). Мұндағы $r = r_0$ теңдеуі жасаушысы Oz өсіне параллель болатын радиусы r_0 -ге тең дөңгелек цилиндрді өрнектейді. $\varphi = \varphi_0$ теңдеуі Oz өсінен өтіп, Oxz жазықтығымен φ_0 бұрыш жасайтын жарты жазықтықты, ал $z = z_0$ теңдеуі аппликатысы z_0 -ге тең, Oxy жазықтығына параллель жазықтықты береді.

$z = f(x, y)$ теңдеуіне кеңістікте қандай да бір бет сәйкес келеді. Егер x, y, z айнымалыларының орнына олардың (4) формуладағы өрнектерін қойсақ, онда беттің цилиндрлік координаталардағы теңдеуі $z = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ болады.

Енді $\iiint_V f(x, y, z) dV$ үш еселі интегралын цилиндрлік координаталарға көшіп есептеу мәселесін қарастыралық.

(2) формулаға сәйкес (4) теңдіктердің Якобианын есептелік.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r.$$

(3) формула бойынша

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{V_1} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr dz d\varphi. \quad (5)$$

Егер V облысы жоғарыдан $h(x, y)$ төменнен $g(x, y)$ беттерімен қоршалған болса, онда 3.6 тақырыбының нәтижелерін қолданып (5) формуланы төмендегіше жазуға болады

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dV &= \iint_S \left(\int_{g(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{h(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz \right) r dr d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \left(\int_{g(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{h(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz \right) r dr \right) d\varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

мұндағы S облысы V облысының Oxy жазықтығына проекциясы, ал $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $r_1 = r_1(\varphi)$, $r_2 = r_2(\varphi)$, S облысын қоршаған беттер.

(6) формула үш еселі интегралды цилиндрлік координаталарға көшіп есептеу формуласы деп аталады.

2. Үш еселі интегралдарды сфералық координаталар жүйесіне көшіп есептеу. $Oxyz$ тік бұрышты координаталар кеңістігінде кез келген M нүктесін алып, одан координаталар бас нүктесіне дейінгі ара қашықтықты r -мен белгілеп және OM кесіндісін Oxy жазықтығына проекциялаймыз (4-сурет). Ox өсімен ON кесіндісі арасындағы бұрышты φ -мен, ал $r = OM$ -мен Oz өсі арасындағы бұрышты θ -мен белгілейік. r, φ, θ сандары кеңістіктегі M нүктесінің сфералық координаталары төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандырды

$$0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta < \pi.$$

4-суреттегі тікбұрышты үшбұрыш ONK -дан $x = ON \cos \varphi$, $y = ON \sin \varphi$, ал тікбұрышты OMN үшбұрышынан $MN = r \cos \theta$ теңдіктерді жазамыз. Онда декарт координаталарының сфералық координаталардағы өрнегі төмендегіше болады

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (7)$$

(2) формулаға сәйкес бұл функциялардың Якобианын есептелік.

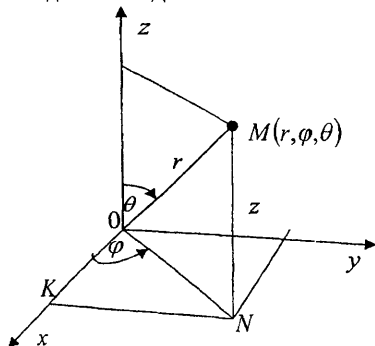
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= r^2 \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{vmatrix} = \\
&= r^2 \sin \theta \left(\cos^2 \theta \begin{vmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} - \sin^2 \theta \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \right) = -r^2 \sin \theta.
\end{aligned}$$

(3) формула бойынша

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta. \quad (8)$$

(8) формула үш еселі интегралдарды сфералық координаталарға көшу арқылы есептеу формуласы деп аталады.



4-сурет

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. V облысын V' облысына өзара бірмәнді бейнелейтін формулаларды жазыңыз.
2. Үш еселі интегралдарда айнымалыларды ауыстыру формуласын жазыңыз.
3. Кез келген нүктенің декарттық координаталарын цилиндрлік координаталармен өрнектейтін формулаларды жазыңыз.
4. Үш еселі интегралды цилиндрлік координаталарға көшу арқылы есептеу формуласын жазыңыз.
5. Кез келген нүктенің декарттық координаталарын сфералық координаталармен өрнектейтін формулаларын жазыңыз.
6. Үш еселі интегралды сфералық координаталарға көшіп есептеу формуласын жазыңыз.

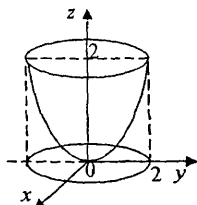
Жаттығулар және оқытушының қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ үш еселі интегралын есептелік. Мұндағы V облысы $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ және $z = 2$ беттерімен қоршалаған (5-сурет).

Шешуі. Есептің шарты бойынша V облысы төменнен $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ айналма параболоидпен, ал жоғарыдан $z = 2$ жазықтығымен қоршалған дене. Бұл дененің Oxy жазықтығына проекциясын табу үшін

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ z = 2 \end{cases}$$

жүйені шешіп $x^2 + y^2 = 4$ теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеу V облысының Oxy жазықтығына проекциясы болатын S дөңгелек. (6) формула бойынша



5-сурет

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz &= \iint_S \left(\int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^2 dz \right) r dr d\varphi = - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r^2 \left(2 - \frac{1}{2}r^2 \right) r dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2r^4}{4} - \frac{r^6}{12} \right) \Big|_0^2 d\varphi = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

2-мысал. $\iiint_V x^2 dx dy dz$ үш еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы V , $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z = 0 (z \geq 0)$ беттерімен қоршалған жарты шар.

Шешуі. (8) формула бойынша

$$\begin{aligned} \iiint_V x^2 dx dy dz &= \iiint_V r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \cdot r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \\ \int_0^R r^5 dr &= \frac{R^6}{6 \cdot 2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \sin \theta \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi R^6}{6} \cdot \frac{\sin^4 \theta}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^6}{24}. \end{aligned}$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі үш еселі интегралдарды цилиндрлік немесе сфералық координаталарға көшіп есептеңіз.

1. $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, мұндағы V , $x^2 + y^2 = 1$ цилиндрлік бетімен және $y = 0$, $y = 1$ жазықтықтарымен қоршалған облыс.

Жауабы: $\frac{3\pi}{2}$.

2. $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, мұндағы V , $z = x^2 + y^2$ айналма параболоидпен және $z = 1$ жазықтығымен қоршалған облыс.

Жауабы: -2π .

3. $\iiint_V dx dy dz$, мұндағы V , $x^2 + y^2 = 1$ цилиндрлік бетімен және $z = 0$, $z = 3$ жазықтықтарымен қоршалған облыс.

Жауабы: 0.

4. $\iiint_V \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^2} z dx dy dz$, мұндағы V , $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ шар.

Жауабы: $\frac{8\pi}{9}(2\sqrt{2} - 1)$.

5. $\iiint_V dx dy dz$, мұндағы V , $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ шар.

Жауабы: $\frac{4}{3}\pi r^2$.

6. $\iiint_V \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)} dx dy dz$, мұндағы V , $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ шар.

16.9 Үш еселі интегралдардың қолданылулары

Үш еселі интегралдың физикалық есептерді шешуге қолдану принциптері екі еселі интегралдың қолданылуына ұқсас. Кейбір физикалық есептерді қарастыралық.

1. **Статикалық моменттерді анықтау.** Массасы m -ге тең материалдық нүктенің Oxy жазықтығына қарағандағы статикалық моменті деп нүктенің массасы мен аппликатының көбейтіндісін айтатындығы белгілі, яғни $S_y = mz$. Осы сияқты Oyz және Oxz жазықтықтырына қарағандағы статикалық моменттері де анықталады, яғни $S_x = mz$, $S_z = my$. Егер материалдық нүктелердің жүйесі берілсе, онда оның статикалық моменті материалдық нүктелердің сәйкес статикалық моменттерінің қосындысы ретінде анықталады.

Кеңістіктегі әрбір нүктенің тығыздығы $\delta = \delta(x, y, z)$ болатын V денесі берілсін. Осы дененің S_{xy} статикалық моментін табайық.

V денесін көлемдері $\Delta V_i (i = 1, 2, \dots, n)$ болатын ұсақ n денелерге бөлейік. Әрбір ΔV_i ұсақ денеден кез келген $P_i(x_i, y_i, z_i)$ нүктесін тандайық. ΔV_i -дің әрбір нүктесінің тығыздығы P_i нүктесінің тығыздығына жуық тең деп ұйғарсақ, онда ΔV_i -дің массасы Δm_i үшін төмендегі жуық теңдікті жаза аламыз:

$$\Delta m_i \approx \delta(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Әрбір ұсақ ΔV_i дененің Δm_i массасы $P_i(x_i, y_i, z_i)$ материалдық нүкте деп қарасақ, онда осы нүктенің Oxy жазықтығына қарағандағы статикалық моменті ΔS_{xy}^i үшін келесі жуық теңдікті жаза аламыз

$$\Delta S_{xy}^i \approx z_i \Delta m_i \approx z_i \delta(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Онда V дененің Oxy жазықтығына қарағандағы статикалық моменті

$$S_{xy} \approx \sum_{i=1}^n z_i \delta(x_i, y_i, z_i) V_i. \quad (1)$$

(1) теңдікте $n \rightarrow \infty$ шекке көшсек, статикалық моменттің дәл мәні үшін келесі формуланы аламыз

$$S_{xy} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n z_i \delta(x_i, y_i, z_i) V_i = \iiint_V z \delta(x, y, z) dV. \quad (2)$$

Осы сияқты Oyz және Oxz жазықтықтарына қарағандағы статикалық моменттерін табамыз

$$S_{yz} = \iiint_V x \delta(x, y, z) dV, \quad S_{xz} = \iiint_V y \delta(x, y, z) dV. \quad (3)$$

2. Ауырлық центрінің координаталарын табу. V денесінің ауырлық центрінің координаталары келесі формулар арқылы табылады

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{S_{xy}}{m}. \quad (4)$$

Егер S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} -тердің (2), (3) формулаларындағы мәндерін және m -нің мәнін (4) теңдікке қойсақ

$$x_c = \frac{\iiint_V x \delta(x, y, z) dV}{\iiint_V \delta(x, y, z) dV}, \quad y_c = \frac{\iiint_V y \delta(x, y, z) dV}{\iiint_V \delta(x, y, z) dV}, \quad z_c = \frac{\iiint_V z \delta(x, y, z) dV}{\iiint_V \delta(x, y, z) dV}. \quad (5)$$

Егер V денесі біртекті болса, яғни $\delta(x, y, z) = \text{const}$, онда (5) теңдіктер төмендегіше болады

$$x_c = \frac{\iiint_V x dv}{V}, \quad y_c = \frac{\iiint_V y dv}{V}, \quad z_c = \frac{\iiint_V z dv}{V}. \quad (6)$$

Бұл арада $\iiint_V dV = V$ теңдігі ескеріледі.

3. **Инерция моментін анықтау.** Массасы m -ге тең материалдық нүктенің Ox өсіне қарағандағы инерция моменті деп нүктенің массасы мен оның Ox өсіне дейінгі арақашықтық квадратының көбейтіндісін айтады, яғни $J_x = (y^2 + z^2)m$.

Оужәне Oz өстеріне қарағандағы инерция моменттері де ссы сияқты анықталады, яғни

$$J_y = (x^2 + z^2)m, J_z = (x^2 + y^2)m.$$

Әрбір нүктесінің тығыздығы $\delta = \delta(x, y, z)$ болатын V денесін ұсақ бөліктерге бөліп, әрбір ұсақ бөлікті бір материалдық нүкте деп қарастыру және статикалық моменттерді анықтағандағыға ұқсас пайымдаулар жүргізу нәтижесінде V дененің инерция моменттерінің келесі формулаларын аламыз:

$$J_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dV,$$

$$J_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dV,$$

$$J_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dV.$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Материалдық нүктенің координаталар жазықтықтарына қарағандағы статикалық моменттері дегеніміз не?

2. Тығыздығы $\delta(x, y, z)$ болатын дененің координаталар жазықтықтарына қарағандағы статикалық моменттерін анықтайтын формулаларды жазыңыз.

3. Тығыздығы $\delta(x, y, z)$ болатын дененің ауырлық центрінің координаталарын табатын формулаларды жазыңыз.

4. Біртекті дененің ауырлық центрінің координаталарын табатын формулаларды жазыңыз.

5. Материалдық нүктенің координата өстеріне қарағандағы инерция моменттері деген не?

6. Тығыздығы $\delta(x, y, z)$ болатын дененің координата өстеріне қарағандағы инерция моменттерін табатын формулаларды жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ сферасымен және $x^2 + y^2 = z^2$ конусымен қоршалған дененің көлемін табылық.

Шешуі. Көлемі ізделініп отырған дене жоғарыдан сфераның теңдеуіндегі z -тің үлкен мәні z_c -ке, ал төменнен конустың теңдеуіндегі z -тің оң мәні z_k -ға сәйкес беттермен қоршалған. Сфераның теңдеуінен z_c -ны, ал конустың теңдеуінен z_k -ны табамыз:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 - 2zR &= 0, \\z_c &= R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \\z_k &= \sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Берілген V дененің Oxy жазықтығына проекциясы S -ті қоршаған қисықтың теңдеуін табу үшін сфераның теңдеуімен конустың теңдеуін жүйе ретінде қарастырып z -ті жоямыз. Сонда, S -ті қоршаған қисық $x^2 + y^2 = R^2$ шеңбер екендігі шығады. (6) формуланы қолданамыз.

$$\begin{aligned}V &= \iiint_V dx dy dz = \iint_S \left(\int_{z=z_k}^{z=z_c} dz \right) dx dy = \iint_S (z_c - z_k) dx dy = \iint_S \left(R + \sqrt{R^2 - r^2} - r \right) r dr d\varphi = \\&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \left(Rr + r\sqrt{R^2 - r^2} - r^2 \right) dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{R \cdot r^2}{2} - \frac{r^3}{3} - \frac{(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \bigg|_0^R d\varphi = \frac{R^3}{2} \cdot 2\pi = \\&= \pi R^3.\end{aligned}$$

2-мысал. $y = x^2$ цилиндрлік бетпен және $z = 0, 2y + z = 2$ жазықтықтарымен қоршалған дененің массасын табалық. Дененің әрбір нүктесінің көлемдік тығыздығы нүктенің ординатасына тең деп ұйғаралық.

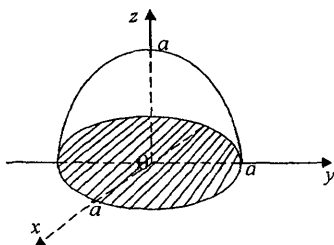
Шешуі. Есептің шарты бойынша $\delta(x, y, z) = y$. Онда

$$m = \iiint_V \delta(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V y dx dy dz.$$

Мұндағы V , берілген денелерден тұратын облыс.

$$\begin{aligned}m &= \iint_S \left(\int_0^{2(1-y)} dz \right) y dy dx = \iint_S 2(1-y) y dy dx = 2 \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \right) (y - y^2) dy = \\&= 4 \int_0^1 \left(y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{5}{2}} \right) dy = 4 \left(\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7} \right) \bigg|_0^1 = \frac{16}{35}.\end{aligned}$$

3-мысал. $az = a^2 - x^2 - y^2$ айналма параболоидпен және $z = 0$ жазықтығымен қоршалған біртекті дененің ауырлық центрін координаталарын табалық (6-сурет).



6-сурет

Шешуі. Біртекті дене Oxz және Oyz жазықтықтарына қарағанда симметриялы болғандықтан, оның ауырлық центрі Oz өсінде орналасқан. Онда $x_c = y_c = 0$. (6) формуланы қолданып z_c -ті табамыз.

$$z_c = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{\iiint_V z dV}{V}.$$

Мұндағы S_{xy} және V -ны цилиндрлік координаталарға көшіп есептейміз. Берілген дененің Oxz жазықтығына проекциясы, яғни S облысы - радиусы $r = a$ центрі координаталар бас нүктесінде болатын дөңгелек. Ал z нөлден $z = \frac{1}{2}(a^2 - x^2 - y^2) = \frac{1}{2}(a^2 - r^2)$ -ған дейін өзгереді. Онда:

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \iiint_V z dV = \iint_S \left(\int_0^{\frac{1}{2}(a^2 - r^2)} z dz \right) dS = \iint_S \frac{z^2}{2} \bigg|_0^{\frac{1}{2}(a^2 - r^2)} dS = \frac{1}{2a^2} \iint_S (a^2 - r^2)^2 dS = \\ &= \frac{1}{2a^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a (a^2 - r^2)^2 r dr \right) d\varphi = \frac{1}{2a^2} \int_0^{2\pi} \left(a^4 \cdot \frac{r^2}{2} - 2a^2 \cdot \frac{r^4}{4} + \frac{r^6}{6} \right) d\varphi = \frac{a^4 \pi}{6}. \\ V &= \iiint_V dV = \iint_S \left(\int_0^{\frac{1}{2}(a^2 - r^2)} dz \right) dS = \iint_S \frac{1}{a} (a^2 - r^2) dS = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a (a^2 - r^2) r dr \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \left(a^2 \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) d\varphi = \frac{a^3}{4} \cdot 2\pi = \frac{a^3 \pi}{2}. \\ z_c &= \frac{a^4 \pi}{6} : \frac{a^3 \pi}{2} = \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

Сонымен, берілген дененің ауырлық центрінің координаталары

$$x_c = 0, y_c = 0, z_c = \frac{a}{3}.$$

4-мысал. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ конусымен және $z = 4$ жазықтығымен қоршалған біртекті дененің координаталар бас нүктесіне қарағандағы инерция моментін табалық.

Шешуі. Берілген дене төменнен конуспен, ал жоғарыдан $z = 4$ жазықтықпен шектелген. Бұл дененің Ox жазықтығына проекциясы дөңгелек болып, оның радиусы 4-ке тең, яғни S облысы $x^2 + y^2 = 16$ шеңберімен қоршалған. Цилиндрлік координаталар жүйесіне көшіп есептейміз. Берілген конустың цилиндрлік координаталар жүйесіндегі теңдеуі: $z = r$.

$$J_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv = \iint_S \left(\int_r^4 (r^2 + z^2) dz \right) dS = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 \left(r^2 z + \frac{z^3}{3} \right) r dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 \left(4r^2 + \frac{64}{3} - r^3 - \frac{r^3}{3} \right) r dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(r^4 + \frac{32}{3} r^2 - \frac{4r^5}{15} \right) d\varphi = \frac{1536\pi}{5}.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $x^2 + y^2 = 4$, $y + z = 2$, $z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

Жауабы: 8π .

2. $x^2 + y^2 = 9$, $z = 5 - x - y$, $z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

Жауабы: 45π .

3. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

Жауабы: $\frac{88}{105}$.

4. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ конусымен және $z = h$ жазықтығымен қоршалған дененің массасын табыңыз. Дененің әрбір нүктесіндегі тығыздығы сол нүктенің аппликатына тең, яғни $\delta(x, y, z) = z$.

Жауабы: $\frac{\pi h^4}{4}$.

5. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = 0$ біртекті жарты шардың ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

Жауабы: $\left(0; 0; \frac{3a}{8} \right)$.

6. $z = \frac{1}{2}y^2$ цилиндрлік бетімен және $2x + 3y = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ жазықтықтарымен қоршалған біртекті дененің ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

Жауабы: $\left(\frac{6}{5}; \frac{12}{5}; \frac{8}{5} \right)$.

7. $0 \leq x \leq 0$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$ кубтың қабырғаларына қарағандағы инерция моментін табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{2}{3}a^5.$$

8. $z^2 = 2ax, z = 0, x^2 + y^2 = ax$ беттерімен қоршалған біртекті дененің Oz өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{32\sqrt{2}a^5}{135}.$$

16.10 Қиысық сызықты интегралдар

16.10.1 Бірінші текті қиық сызықты интегралдар

l қиысығының теңдеуі $x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$ параметрлік түрде берілсін.

1-анықтама. Егер φ, ψ функциялары және олардың туындылары үзіліссіз болса, онда l қиысығы тегіс немесе жатық деп аталады.

Тегіс l қиысығы және осы қиықта анықталған, үзіліссіз $f(x, y)$ функциясы берілсін.

2-анықтама. $f(x, y)$ функциясынан l қиысығы бойынша алынған бірінші текті қиық сызықты интеграл деп келесі

$$\int_l f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (1)$$

интегралын айтады.

Мұндағы dl доға дифференциалы немесе доға элементі, ол

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

теңдігі бойынша табылады.

Егер l қиысығы $y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$ теңдеуі арқылы берілсе, онда x -ті параметр ретінде қарастырып (1) теңдікті келесі түрде жазамыз.

$$\int_l f(x, y) dl = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

Енді l қиысығы материалдық қиық болсын делік. Егер $f(x, y)$ функциясын доғаның кез келген $M(x, y)$ нүктесінің сызықты тығыздығы деп қарастырсақ, яғни $f(x, y) = \delta(x, y)$, онда доға элементінің элементарлық массасы

$$dm = \delta dl. \quad (2)$$

(2) теңдікті l қиысығы бойынша интегралдасақ, онда l материалдық қиықтың массасы үшін келесі формуланы аламыз

$$m = \int_l \delta dl. \quad (3)$$

Соңғы теңдік бірінші текті қиық сызықты интегралдың физикалық мағынасын береді.

Бірінші текті қиық сызықты интегралдың келесі қасиеттерін атап өтелік.

1) интегралдау бағыты өзгергенде бірінші текті қисық сызықты интегралдың мәні өзгермейді, яғни

$$\int_{l^+} f(x, y) dl = \int_{l^-} f(x, y) dl.$$

Мұндағы l^+, l^-, l -кисығы бойынша өзара қарама-қарсы бағытта интегралдауды білдіреді.

2) егер $l = l_1 \cup l_2$ болса, онда

$$\int_l f(x, y) dl = \int_{l_1} f(x, y) dl + \int_{l_2} f(x, y) dl.$$

Кеңістікте $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \eta(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) теңдеулерімен берілген тегіс l қисығында анықталған, үзіліссіз $f(x, y, z)$ функциясынан l бойынша алынған бірінші текті қисық сызықты интеграл (1) теңдікке ұқсас келесі түрде анықталады:

$$\int_l f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \eta'^2(t)} dt,$$

мұндағы

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \eta'^2(t)} dt \text{ доға дифференциалы}$$

немесе доға элементі.

16.10.2 Екінші текті қисық сызықты интегралдар

Тегіс l қисығы $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) теңдеулерімен берілсін делік. l қисығында $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функциялары үзіліссіз болсын.

3-анықтама. $P(x, y)$, $Q(x, y)$ қос функциядан l қисығы бойынша алынған екінші текті қисық сызықты интеграл деп келесі

$$\int_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt \quad (4)$$

интегралын айтады.

Мұндағы $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = \psi'(t)dt$.

(4) теңдіктің сол жағында жақша қойылмаса да, екі қосылғышта интегралға тиісті деп қабылданады.

Егер l қисығы $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$) теңдеуімен берілсе, онда (4) формула келесі түрде болады

$$\int_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)] dx. \quad (5)$$

Егер l қисығы $x = x(y)$ ($c \leq y \leq d$) теңдеуімен берілсе, онда

$$\int_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_c^d [P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)] dy. \quad (6)$$

Екінші текті қисық сызықты интегралдардың келесі қасиеттерін атап өтелік.

1) интегралдау бағыты өзгергенде екінші текті қисық сызықты интегралдың таңбасы қарама-қарсысына өзгереді, яғни

$$\int_{l'} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy;$$

2) егер $l = l_1 \cup l_2$ болса, онда

$$\int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{l_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{l_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Кеңістіктегі $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \eta(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) тегіс l қисығы бойынша онда анықталған, үзіліссіз $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ үш функциялардан алынған екінші текті қисық сызықты интеграл келесі теңдік арқылы анықталады:

$$\int_l P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t), \eta(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \eta(t))\psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \eta(t))\eta'(t)]dt. \quad (7)$$

16.10.3 Екінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасы

Қандай да бір материалдық нүкте, үзіліссіз өзгертін айнымалы $F\{P(x, y), Q(x, y)\}$ күшінің әсерінен, теңдеуі $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) болатын l қисығы бойлап оның кез келген $M(x, y)$ нүктесінен оған шексіз жақын $M_1(x + dx, y + dy)$ нүктесіне жылжысын делік. Ығысу векторын $\overline{dl} = \overline{MM_1}$ десек, онда $\overline{dl}$ векторының компоненталары dx, dy , яғни $\overline{dl}\{dx, dy\}$ болады. Шексіз аз $|\overline{dl}|$ аралықта $\overline{F}$ күшін тұрақты деп қабылдасак, онда ол күштің осы аралықта орындаған элементарлық жұмысы $\overline{F}$ векторымен $\overline{dl}$ векторының скалярлық көбейтіндісіне тең екені аналитикалық геометрия бөлімінен белгілі, яғни

$$dA = \overline{F} \cdot \overline{dl} = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (8)$$

(8) өрнекті l қисығы бойынша интегралдап орындалған жұмыстың келесі өрнегіне ие боламыз

$$A = \int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (9)$$

Сонымен, екінші текті қисық сызықты интеграл физикалық мағынасы жағынан айнымалы $\overline{F}$ күшінің l қисығы бойынша орындаған жұмысын береді екен. Мұндағы $P(x, y), Q(x, y)$ функциялары $\overline{F}$ күшінің Ox және Oy өстеріне проекциялары.

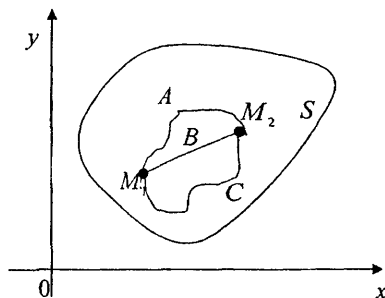
Егер қисық және әсер етуші күш кеңістікте берілсе, яғни $\overline{F}\{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ күшінің $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \eta(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) қисығы (l) бойлап орындаған жұмысы

$$A = \int_l P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (10)$$

формула арқылы анықталады.

16.10.4 Екінші текті қисық сызықты интегралдардың интегралдау қисығының түрінен тәуелсіздік шарты

Тұйық S облысы және онда үзіліссіз $P(x, y), Q(x, y)$ функциялары берілсін. S облысының кез келген екі $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ нүктесін тандап, оларды облыстан шықпай біріктіретін бірқанша қисықтарды, яғни $M_1AM_2, M_1BM_2, M_1CM_2, \dots$ қисықтарын қарастыралық (7-сурет)



7-сурет

4-анықтама. Егер

$$\int_{M_1AM_2} Pdx + Qdy = \int_{M_1BM_2} Pdx + Qdy = \int_{M_1CM_2} Pdx + Qdy = \dots \quad (11)$$

теңдіктері орындалса, онда

$$\int_{M_1M_2} Pdx + Qdy \quad (12)$$

екінші текті қисық сызықты интеграл интегралдау қисығының түрінен тәуелсіз деп аталады.

Теорема. Егер $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ өрнегі S облысында қандай да бір $u(x, y)$ функциясының толық дифференциалы болса, яғни $du = Pdx + Qdy$, онда (12) екінші текті қисық сызықты интеграл интегралдау қисығының түрінен тәуелсіз болады.

Дәлелдеуі. S облысының кез келген $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ нүктелерін біріктіретін кез келген тегіс l қисығы $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) тендеулерімен берілсін. Мұндағы

$$\varphi(\alpha) = x_1, \varphi(\beta) = x_2, \psi(\alpha) = y_1, \psi(\beta) = y_2. \quad (13)$$

Теореманың шарты бойынша

$$P(x, y) + Q(x, y)dy = du[\varphi(t), \psi(t)]. \quad (14)$$

Онда (4), (13) теңдіктерді қолданып, келесі теңдіктерді аламыз

$$\int_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} du [\varphi(t), \psi(t)] = u[\varphi(t), \psi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = \\ = u[\varphi(\beta), \psi(\beta)] - u[\varphi(\alpha), \psi(\alpha)] = u(M_2) - u(M_1). \quad (15)$$

Сонымен, екінші текті қисық сызықты интегралдың мәні l қисығының түрінен тәуелді болмай, оның тек қана бастапқы және соңғы нүктелерінің координаталарынан тәуелді екен.

1-салдар. Егер (14) теңдік орындалса, онда (15) теңдіктерді қолданып келесі формуланы жазамыз

$$\int_1 P dx + Q dy = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1). \quad (16)$$

Соңғы формуланы жалпылаған Ньютон-Лейбниц формуласы деп атайды.

2-салдар. Егер $P(x, y) + Q(x, y)$ өрнегі қандай да бір функцияның толық дифференциалы болса және l қисығы тұйық болса, онда

$$\oint P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Мұндағы $\oint$ белгісі тұйық l қисығы бойынша интегралданады дегенді білдіреді.

16.10.5 Потенциалдық күштің жұмысы

Енді соңғы теореманың физикалық мағынасын берелік. S облысында $\bar{F}\{P(x, y), Q(x, y)\}$ күштерінің өрісі анықталған болсын делік, яғни S облысының әрбір нүктесіне сәйкес $\bar{F}$ күші анықталған болсын. Мысалы, жер бетінің айналасындағы кез келген m массалы материалдық нүктеге сан мәні mg болатын ауырлық күш әсер етеді, бұл жер бетінің айналасында ауырлық күштер өрісі бар деген сөз. Мұндағы g - ауырлық күштің үдеуі.

Электр тоғымен зарядталған дененің маңайында байқалатын кернеулердің векторлық өрісі де күштер өрісіне мысал болады.

5-анықтама. Егер $P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$ теңдіктері орындалатын $u = u(x, y)$ функциясы бар болса, онда $\bar{F}\{P(x, y), Q(x, y)\}$ -потенциалдық күш, $\bar{F}$ күштерінің өрісі потенциалдық өріс, ал u функциясы потенциал деп аталады.

Соңғы анықтамаға сүйеніп

$$P dx + Q dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du$$

теңдіктерді жазамыз. Онда потенциалдық $\bar{F}$ күшінің $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүктелерді біріктіретін жол бойлап орындаған жұмысы келесі формуламен анықталады:

$$A = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} Pdx + Qdy = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} du = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1).$$

Сонымен, потенциалдық күштің жұмысы жолдың (интегралдау қисығының) түрінен тәуелсіз болады екен. Дербес жағдайда, егер жол (қисық) тұйық болса, онда орындалған жұмыс нөлге тең, яғни $A = 0$.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың анықтамасын беріңіз.
2. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасын түсіндіріңіз.
3. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың қасиеттерін жазыңыз.
4. Екінші текті қисық сызықты интегралдың анықтамасын беріңіз.
5. Екінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасын түсіндіріңіз.
6. Екінші текті қисық сызықты интегралдың интегралдау қисығының түрінен тәуелсіздік шартын баянданңыз.
7. Потенциалдық өрістің анықтамасын беріңіз.
8. Потенциалдық күштің жұмысының формуласын жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушының қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\int_l (x+y)dl$ бірінші текті қисық сызықты интегралын есептелік. Мұндағы l қисығы $y = 2x - 1$ түзуінің $[-1; 2]$ кесіндісі.

Шешуі.

$$\int_l f(x, y)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+y'^2}dx = \int_{-1}^2 (x+2x-1)\sqrt{1+2^2}dx = \sqrt{5}\left(\frac{3x^2}{2} - x\right)\bigg|_{-1}^2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

2-мысал. $\int_l (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$ екінші текті қисық сызықты интегралын есептелік. Мұндағы l қисығы $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(4,2)$ нүктелерін қосатын OAB сынық сызық.

Шешуі. OA түзуінде $y = 0, dy = 0$; ал AB түзуінде $y = x - 2, dy = dx$. Осы мәндерді қойып, келесі интегралды есептелік

$$\begin{aligned} \int_{OAB} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy &= \int_{OA} (x-0)^2 dx + \int_{AB} (x-x+2)^2 dx + (x+x-2)^2 dx = \\ &= \frac{x^3}{2}\bigg|_0^2 + \int_2^4 (4+4x^2-8x+4)dx = \frac{8}{2} + \left(8x - 4x^2 + \frac{4x^3}{3}\right)\bigg|_2^4 = \frac{136}{3}. \end{aligned}$$

3-мысал. Дұрыс S облысының ауданын қисық сызықты интеграл арқылы өрнектеу есебін қарастыралық.

Дұрыс S облысы $x=a, x=b, y=y_1(x), y=y_2(x)$ ($y_1(x) \leq y_2(x)$) сызықтарымен қоршалған болсын. Онда S облысының ауданы:

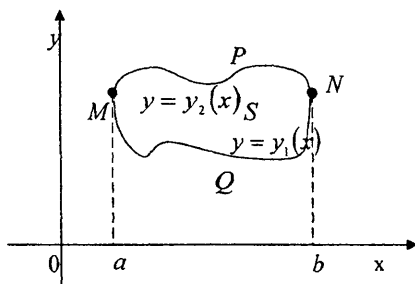
$$S = \int_a^b y_2(x) dx - \int_a^b y_1(x) dx$$

болатыны белгілі.

Мұндағы бірінші қосылғыш $\overset{\curvearrowright}{MPN}$ доғасы бойынша алынған қисық сызықты интегралды береді (8-сурет), онда

$$\int_a^b y_2(x) dx = \int_{\overset{\curvearrowright}{MPN}} y dx.$$

Осы сияқты



8-сурет

$$\int_a^b y_1(x) dx = \int_{\overset{\curvearrowright}{MQN}} y dx.$$

Екінші текті қисық сызықты интегралдың 1-қасиеті бойынша

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{MPN}} y dx = - \int_{\overset{\curvearrowright}{NPM}} y dx.$$

$$\text{Онда } S = - \int_{\overset{\curvearrowright}{NPM}} y dx - \int_{\overset{\curvearrowright}{MQN}} y dx = - \int_l y dx.$$

Мұндағы l қисығы S облысын толық қоршаған қисық.

Жоғарыдағыларға ұқсас пайымдаулар нәтижесінде келесі теңдікті де алуға болады

$$S = \int_l x dy.$$

Соңғы екі теңдікті қосып екіге бөлу арқылы S ауданды есептеудің және бір формуласын аламыз

$$S = \frac{1}{2} \int_l x dy - y dx.$$

4-мысал. $J = \int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{ydx - xdy}{y^2}$ екінші текті қисық сызықты интегралды

есептелік.

Шешуі. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \right) = -\frac{1}{y^2}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$, яғни $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, онда берілген

интеграл интегралдау қисығының түрінен тәуелді емес. Интегралдау қисығының орнына координата өстеріне параллель кесінділерден құралған сынық сызық тандаймыз. Оның бірінші бөлігінде $y=2$, $dy=0$, $1 \leq x \leq 2$, ал екінші бөлігінде $x=2$, $dx=0$.

$$J = \int_1^2 \frac{1}{2} dx + \int_2^1 \left(-\frac{2}{y^2} \right) dy = \frac{1}{2} x \Big|_1^2 + \frac{2}{y} \Big|_2^1 = \frac{1}{2} + 1 = 1,5.$$

5-мысал. $du = [e^{x+y} + \cos(x-y)]dx + [e^{x+y} - \cos(x-y) + 2]dy$ берілген.

Алғашқы функциясы u -ды табыңыз.

Шешуі. $P(x, y) = e^{x+y} + \cos(x-y)$, $Q(x, y) = e^{x+y} - \cos(x-y) + 2$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} + \sin(x-y) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

l қисығын бастапқы нүктесі $O(0,0)$, соңғы нүктесі $N(x, y)$ болатын OMN сынық сызығы түрінде тандаймыз. Мұндағы $M(x, 0)$. Онда

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x (e^x + \cos x) dx + \int_0^y (e^{x+y} - \cos(x-y) + 2) dy = \\ &= e^x + \sin x - 1 + e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y - e^x - \sin x = \\ &= e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y - 1. \end{aligned}$$

Сонымен, $u(x, y) = e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y + C$.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $\int x dl$ бірінші текті қисық сызықты интегралын есептеңіз.

Мұндағы l қисығы $y = \frac{x^2}{2}$ параболасының $0 \leq x \leq 1$ аралықтағы доғасы.

2. $\int x^2 y^2 dl$ интегралын есептеңіз. Мұндағы l қисығы теңдеуі

$x = r \cos t$, $y = r \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) болатын шеңбер.

3. $\int y^2 dx - x^2 dy$ екінші текті қисық сызықты интегралын

есептеңіз. Мұндағы l қисығы $y = 1 - x^2$ параболасының $M(-1, 0)$ және $N(1, 0)$ нүктелері арасындағы доғасы.

4. $\int_1^2 2x dy - 3y dx$ интегралын есептеңіз. Мұндағы I қисығы төбелері $A(1;2)$, $B(3;1)$, $C(2;5)$ болатын үшбұрыштың қабырғаларының бойымен сағат тілінің бағытына қарсы бағыт бойынша интегралдау қисығы.
Жауабы: 17,5.

5. $\int \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy$ интегралын есептеңіз. Мұндағы I қисығы центрі координаталар бас нүктесінде болатын шеңбер.

Жауабы: 0.

6. $x = \cos t$, $y = \sin t$ шеңберінің $0 \leq t \leq \pi$ доғасының массасын табыңыз ($\delta(x, y) = y$).

Жауабы: 2.

7. $y = \ln x$ біртекті қисықтың $0 \leq x \leq \ln 2$ доғасының ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

Жауабы: $x_c = \frac{1}{3}(3\ln 2 - 1)$, $y_c = \frac{1}{24}(16\ln 2 + 15)$.

8. $du = (1 - e^{-y} + \cos x)dx + (e^{-y} + \cos y)dy$ берілген. $u(x, y)$ функциясын табыңыз.

Жауабы: $u = x - e^{-y} + \sin x + \sin y + C$.

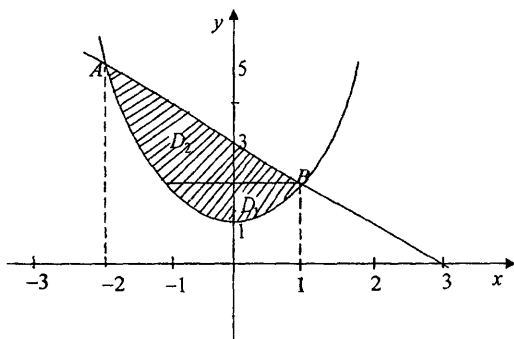
«Екі еселі, үш еселі және қисық сызықты интегралдар» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар

Негізгі теориялық сұрақтар

1. Екі еселі интегралдың анықтамасы және оның негізгі қасиеттері.
 2. Екі еселі интегралды қайталамалы интегралға келтіріп есептеу.
 3. Екі еселі интегралда айнымалыларды.
 4. Екі еселі интегралда полярлық координаталар жүйесіне көшу.
 5. Екі еселі интегралдың геометрия және физика есептерін шешуге қолданылуы.
 6. Үш еселі интегралдың анықтамасы, қасиеттері және оны есептеу.
 7. Үш еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру.
 8. Үш еселі интегралдың қолданылулары.
 9. Бірінші текті қисық сызықты интеграл және оның негізгі қасиеттері.
 10. Екінші текті қисық сызықты интеграл (вектордың қисық бойынша интегралы).
 11. Екінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасы.
 12. Екінші текті қисық сызықты интегралдың интегралдау қисығының түрінен тәуелсіздік шарты.
 13. Потенциалдық күштің жұмысы.
- Ұсынылған нұсқаларда берілген есептерді шешу үлгісі
- 1 - мысал. Оху жазықтығында интегралдау облысын сызыңыз және интегралдау ретін өзгертіңіз.

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{-2}^1 dx \int_{x^2+1}^{3-x} f(x,y) dy.$$

Шешуі. Интегралдау облысы тікелей берілмеген. Сондықтан оны қайталамалы интегралдың интегралдау шегіне қарап анықтауымыз қажет. Ішкі интеграл y бойынша болғандықтан, D облысы жоғарыдан $y=3-x$ түзуімен төменнен $y=x^2+1$ параболасымен қоршалған. Теңдеулерді жүйе түрінде шешіп, түзу мен параболаның қиылысу нүктелері A және B нүктелерінің координаталарын табамыз, яғни $A(-2;5), B(1;2)$. Сыртқы интегралдың шектері $x=-2$ және $x=1$, бұлар интегралдау облысында x -тың өзгеру аралығын көрсетеді. Бірақ, бұл түзулер D облысының контурына кірмейді. Сонымен, D облысының контуры $y=x^2+1$ параболасымен түзудің бөліктерінен тұрады (1-сурет).



1-сурет

Енді интегралдау ретін өзгертуді қарастырамыз. Яғни, ішкі интегралды x бойынша, ал сыртқы интегралды y бойынша аламыз. D облысына енетін, Ox өсіне параллель түзулердің нүктелері $y=x^2+1$ параболасының доғасында жатыр, ал осы түзулердің D облысынан шығу нүктелері парабола доғасымен $y=3-x$ түзуінде жатыр. Сондықтан, D_1 және D_2 облыстарына бөлеміз. Сызықтардың теңдеулерін x бойынша шешелік, яғни $x=\pm\sqrt{y-1}$ және $x=3-y$. D_1 облысы үшін интегралдау шектері 1 және 2, ал D_2 облысы үшін 2 және 5 болады. Олай болса

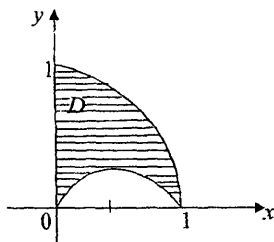
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x,y) dx + \int_2^5 dy \int_{-\sqrt{y-1}}^{3-y} f(x,y) dx.$$

2 - мысал. $\iiint_D (x+2y) dx dy$ екі еселі интегралын есептедік. Мұндағы D , $y=x-x^2$, $y=1-x^2$ параболаларымен және Oy өсімен қоршалған облыс.

Шешуі. D облысын сызайық. Теңдеулерді шешіп, қиылысу нүктесінің координаталарын, яғни $M(1;0)$ -ді табамыз. D облысы төменнен $y=x-x^2$

параболасымен, ал жоғарыдан $y = 1 - x^2$ параболасымен, сол жақтан Oy өсімен қоршалған (2-сурет). Олай болса

$$\iint_D (x+2y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x-x^2}^{1-x^2} (x+2y) dy = \int_0^1 \left(xy + y^2 \right) \Big|_{x-x^2}^{1-x^2} dx = \int_0^1 (2x^3 - 4x^2 + x + 1) dx = \frac{2}{3}.$$

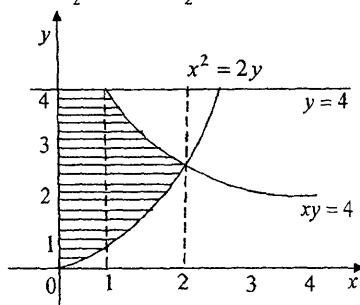


2-сурет

3-мысал. $xy = 4$ гиперболасымен $x^2 = 2y$ параболасымен және $y = 4$, $x = 0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауданын табалық.

Шешуі. $xy = 4$, $x^2 = 2y$ және $y = 4$ теңдеулерін бірге шешіп қиылысу нүктелері $A(2,2)$ және $B(1,4)$ -ларды табамыз. Алынған фигураны 3-суретте көрсетілгендей екіге бөлеміз. Онда:

$$S = S_1 + S_2 = \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^4 dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{4}{x}} dy = \frac{8}{3} + 4 \ln 2 \text{ квадрат бірлікке тең.}$$



3-сурет

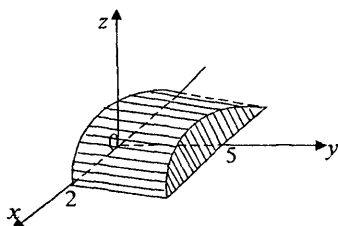
4 - мысал. $z = 4 - x^2$, $y = 5$, $y = 0$, $z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табалық.

Шешуі. Көлемі ізделініп отырған дене жоғарыдан жасаушысы Oy өсіне параллель $z = 4 - x^2$ параболалық цилиндрмен қоршалған және Oyz жазықтығына қарағанда симметриялы орналасқан (4-сурет).

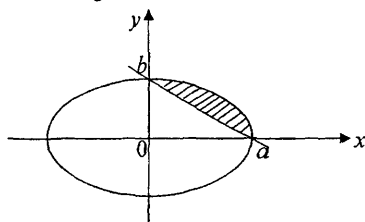
Интегралдау облысы Oxy жазықтығындағы $-2 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 5$ тіктөртбұрыш.

Сондықтан,

$$V = 2 \int_0^5 dy \int_{-2}^2 (y - x^2) dx = 53 \frac{1}{3} \text{ куб. бірлік.}$$



4-сурет



5-сурет

5 - мысал. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсімен және $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b < 0$) түзуі мен қоршалған біртекті дененің ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

Шешуі. Ауырлық центрінің координаталарын $x_c = \frac{M_y}{S}$, $y_c = \frac{M_x}{S}$ формулаларынан пайдаланып табамыз, мұндағы S , 5-суретте штрихталған біртекті дененің ауданы, ал M_y, M_x -тер Oy пен Ox өстеріне қарағандағы статистикалық моменттер.

$$S = \iint_D dx dy = \int_0^a dx \int_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}} dy = \frac{1}{4} ab(\pi - 2), \quad M_x = \iint_D y dx dy = \int_0^a dx \int_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}} dy = \frac{ab^2}{6}.$$

$$M_y = \iint_D x dx dy = \int_0^a x dx \int_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}} dy = \frac{a^2 b}{6}.$$

Демек,

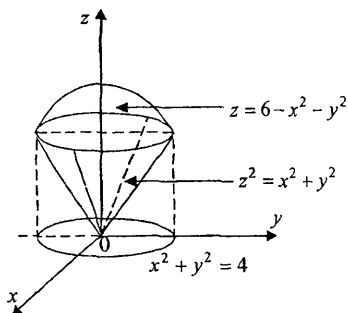
$$X_c = \frac{a^2 b}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4} ab(\pi - 2)} = \frac{2a}{3(\pi - 2)}, \quad Y_c = \frac{ab^2}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4} ab(\pi - 2)} = \frac{2b}{3(\pi - 2)}.$$

6 - мысал. $z = 6 - x^2 - y^2$ және $z^2 = x^2 + y^2$ ($z \geq 0$) беттермен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

Шешуі. Жоғарыдан $z = 6 - x^2 - y^2$ параболоидпен, төменнен $z^2 = x^2 + y^2$ конуспен қоршалған дененің көлемін есептеу керек (6-сурет).

Берілген беттердің қиылысу сызығы олардың тендеулерін жүйе ретінде қарастыру арқылы анықталады. Ол жүйеден z -ті жоғалтып $x^2 + y^2 = 4$ -вертикаль цилиндрлік беттің тендеуін аламыз. Соңғы тендеу дененің Oxz және Oyz жазықтықтарына қарағанда симметриялы болғандықтан, оның бірінші октантдағы көлемін тауып, кейін оны төртке көбейтсек болады. Цилиндрлік координаталар жүйесіне көшу арқылы шеңбердің, конустың және параболаның тендеулерін $\rho = 2$, $z = \rho$, $z = 6 - \rho^2$ түрінде жазуға болады.

Интегралдау облысы $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq 2$, $\rho \leq z \leq 6 - \rho^2$ көлем элементі $\rho d\rho d\varphi dz$.

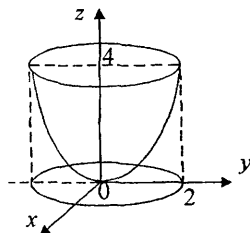


6-сурет

Олай болса

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} dz = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 \rho Z \Big|_{\rho}^{6-\rho^2} d\rho = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 (6\rho - \rho^3 - \rho^2) d\rho \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \left(3\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3} \right) d\varphi = \frac{64}{3} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{32\pi}{3} \text{ куб бірлік.}
 \end{aligned}$$

7-мысал. $z = x^2 + y^2$ параболоидпен және $z = 4$ жазықтығы мен қоршалған біртекті дененің координаталар бас нүктесіне қарағанда инерция моментін табылық.



7-сурет

Шешуі. Дене төменнен параболоидпен, жоғарыдан $z=4$ жазықтықпен қоршалған. Бұл дененің Oxy жазықтығындағы проекциясы дөңгелек, ол $x^2 + y^2 = 4$ шеңбермен қоршалған (7-сурет). Цилиндрлік координаталар жүйесінде параболоидтың теңдеуі $z = \rho^2$.

Олай болса

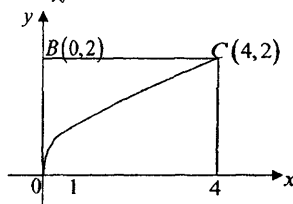
$$I_0 = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 (\rho^2 + z^2) dz = \frac{224}{3} \pi.$$

8-мысал. $\int_L (x + xy) dx + \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) dy$ қисық сызықты интегралын

есептеңіз. Мұндағы, L : а) $x = y^2$ қисығының $O(0;0)$ нүктесі мен $C(4;2)$ нүктесіне дейінгі OC доғасы; ә) OBC сынық сызығы (8-сурет).

Шешуі. а) егер L қисығының теңдеуі $x = \varphi(y)$ түрде берілген болса, онда қисық сызықты интегралды есептеу, интеграл ішінде y -ге өтіп мынадай анықталған интегралды есептеуге келтіріледі

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{y_0}^{y_1} \{P[\varphi(y)] \varphi'(y) + Q[\varphi(y), y]\} dy. \quad (1)$$



8-сурет

Мұндағы y_0 мен y_1 мәндері 0 және C нүктелерінің координаталары. Берілген мысалда OC доғасының теңдеуі: $x = y^2$. Осыдан $dx = 2y dy$. 0 нүктесі C нүктесіне жылжығанда y шамасы 0-ден 2-ге дейін өзгереді. Олай болса (1) формула бойынша

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_{OC} (x + xy) dx + \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) dy &= \int_0^2 (y^2 + y^2 \cdot y) 2y dy + \left(\frac{1}{2}y^4 - 1\right) dy = \\ &= \int_0^2 \left(2y^3 + 2y^4 + \frac{1}{2}y^4 - 1\right) dy = \left[2\frac{y^4}{4} + \frac{5}{2} \cdot \frac{y^5}{5} - y\right]_0^2 = 8 + 16 - 2 = 22. \end{aligned}$$

ә) Енді интегралды OBC сынық сызығы бойынша есептелік. Қисық сызықты интегралдың қасиеті бойынша

$$\begin{aligned} \int_{OBC} (x + xy) dx + \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) dy &= \int_{OB} (x + xy) dy + \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) dy + \int_{BC} (x + xy) dx + \\ &+ \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) dy = -\int_0^2 dy + \int_0^4 (x + 2x) dx = -y \Big|_0^2 + 3 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = -2 + 24 = 22. \end{aligned}$$

Бұл арада, OB кесіндісінің бойында $x=0$ болғандықтан, $dx=0$; ал BC кесіндісінің бойында $y=2$ болғандықтан $dy=0$ болатындығын ескердік.

9-мысал. $\int_L xydx + (x-y)dy$ қисық сызықты интегралын L тұйық

контур бойынша есептелік. Мұндағы $L, \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t. \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

шеңберінің доғасы.

Шешуі. L контуры параметрлік теңдеумен берілген. Мұндай жағдайда қисық сызықты интеграл t параметр бойынша анықталған интегралды есептеуге келтіріледі.

$$x = a \cos t, dx = -a \sin t dt, y = a \sin t, dy = a \cos t dt, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Берілген интегралға қойсақ

$$\begin{aligned} \int_L xydx + (x-y)dy &= \int_0^{2\pi} [a^2 \sin t \cos t (-a \sin t) + (a \cos t - a \sin t) a \cos t] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [-a^3 \cos t \sin^2 t + a^2 \cos^2 t - a^2 \sin t \cos t] dt = \\ &= -a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt - a^2 \int_0^{2\pi} \sin t dt = \\ &= -a^3 \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{2\pi} + a^2 \frac{1}{2} t \Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{4} \sin 2t \Big|_0^{2\pi} - a^2 \cdot \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{2\pi} = \pi a^2. \end{aligned}$$

1 – нұсқа

1. $\int_0^3 \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Ox

жазықтығында интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int (2+x) dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: y=4-x^2$ параболасымен және $y=x+2$ түзумен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{27}{4}$).

3. $z = \frac{1}{2}y^2, 2x+3y-12=0, z=x=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: 16).

4. Полярлық координаталар жүйесіне көшіп $x^2 + y^2 + z^2 = 3, x^2 + y^2 = 2z$ беттерімен қоршалған дененің көлемін есептеңіз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{\pi(6\sqrt{3}-5)}{3}).$$

5. $y = \sqrt{2x}$ параболасымен және $x = 2, y = 0$ түзулермен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз ($\delta = y$).

$$(\text{Жауабы: } \frac{10}{3}).$$

6. $2y = x^2$ параболасымен және $x = 2, y = 0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз ($\delta = y$).

$$(\text{Жауабы: } \frac{5}{3}; \frac{5}{3}).$$

7. $\int_L (2-y)dx - (1-y)dy$ кисық сызықты интегралды есептеңіз. Мұндағы L контуры $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ циклоидасының доғасы ($0 \leq t \leq 2\pi$).

$$(\text{Жауабы: } \pi).$$

2 – нұсқа

1. $\int_{-1}^4 \int_{x^2-4}^{3x} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығында интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \sin(x+y) dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: x+y = \frac{\pi}{2}$ және $y = x, y = 0$ түзулермен қоршалған облыс.

$$(\text{Жауабы: } \frac{1}{2}).$$

3. $z = 2 - 2y, y = x^2, z = 0$ беттермен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{16}{15}).$$

4. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 2y, z = 0$ беттермен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{3\pi}{2}).$$

5. $y = 2 - x^2$ параболасымен және $x = y, x = 0$ түзулермен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз ($\delta = x + y, (x \geq 0)$).

$$(\text{Жауабы: } \frac{101}{60}).$$

6. $y = 2x, y = 4 - 2x, y = 0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз ($\delta = x$).

$$(\text{Жауабы: } \frac{7}{6}; \frac{2}{3}).$$

7. $\int_L (x+y)dx + (x-y)dy$ қисық сызықты интегралды есептеңіз. Мұндағы

$$L: x = R \cos t, y = R \sin t \text{ шеңберінің доғасы } \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(\text{Жауабы: } -R^2).$$

3 – нұсқа

1. $\int_1^2 \int_x^{2x} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int \frac{x^2}{y^2} dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: x=2, y=x$ түзулерімен және $xy=1$ гиперболасымен қоршалған облыс.

$$(\text{Жауабы: } \frac{9}{4}).$$

3. $z = x^2 + y^2, x+2y=4, y=\frac{x}{2}, z=x=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

$$(\text{Жауабы: } \frac{11}{3}).$$

4. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 2y, z=0$ беттермен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

$$(\text{Жауабы: } 3\pi).$$

5. $x^2 + y^2 = 2$ эллипсімен және $y=x, y=0 (y \geq 0, x > 0)$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз ($\delta = xy$).

$$(\text{Жауабы: } \frac{1}{4}).$$

6. $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$ параболасымен және $y=2, x=0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз ($\delta=1$).

$$(\text{Жауабы: } \frac{3}{8}; \frac{6}{5}).$$

7. $\int_L xy dx + 5y^2 dx$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы

$$L: x = 3 \cos t, y = 2 \sin t \text{ эллипстің доғасы } \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

$$(\text{Жауабы: } \frac{22}{3}).$$

1. $\int_0^2 \int_{\frac{y^2}{4}}^{5-y^2} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy

жазықтығында интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D (x+y) dy dx$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: y = x^2$ параболасымен және $x + y = 2$ түзуімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{99}{20}$).

3. $z = x^2 + y^2$, $x + y = 2$, $y = x$, $z = x = 0$ беттермен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{7}{3}$).

4. $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 5$ беттермен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: 9π).

5. $y = x^3$ кубтық парабола және $x + y = 2$, $y = 0$ түзулермен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз, ($\delta = 2xy$).

(Жауабы: $\frac{13}{24}$).

6. $y = x$, $x + y = 4$, $x = 0$ түзулермен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз ($\delta = 1$).

(Жауабы: $(\frac{2}{3}; 2)$).

7. $\int_L y dx - x dy$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы $L: x = a \cos t$, $y = b \sin t$ эллипсінің доғасы ($0 \leq t \leq 2\pi$)

(Жауабы: $-2\pi ab$).

5 – нұсқа

1. $\int_{-2}^1 \int_{y^2}^4 z dx dy$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy

жазықтығында интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D (x+2y) dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: y = x^2$ параболасымен және $x + y = 2$, $y = 0$ түзулерімен қоршалған облыс ($x > 0$).

(Жауабы: $\frac{29}{20}$).

3. $z = 3 - x^2 - 2y^2, y = 2 - 2x, x = 0, y = 0, z = 0$ беттермен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{13}{2}$).

4. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, шар және $x^2 + y^2 = 1$ цилиндр тысымен қоршалған дененің көлемін полярлық координата жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: $4\pi\sqrt{3}$).

5. $y = 2x^2$ параболасымен және $x + y = 3, y = 0$ түзулермен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз, ($\delta = x$).

(Жауабы: $\frac{23}{6}$).

6. $y = 2x, x = 3, y = 3, y = 0$ түзулермен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз ($\delta = x$).

(Жауабы: $\frac{63}{32}; \frac{15}{8}$).

7. $\int_L \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^3 + y^3}$ қисық сызықты интегралды есептеңіз. Мұндағы

$L: x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t$ астроиданың доғасы $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

(Жауабы: $\frac{3\pi}{16} a^{4/3}$).

6 – нұсқа

1. $\int_1^2 \int_{\frac{1}{y}}^y z dx dy$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy

жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D (x + 2x) dx dy$ екі еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы $D: y = 2x, y = x, x = 2$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{34}{3}$).

3. $z = x^2 + y^2, y = 1, y = x^2, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{88}{105}$).

4. $x^2 + y^2 = 8y, z = y, z = 4y$ беттерімен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: 192π).

5. $x + y = 6, y = 2x, x = 0$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз. ($\delta = x$).

(Жауабы: 4).

6. $y = \frac{3}{4}x, y = 3, x = 0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз ($\delta = y$).

(Жауабы: $\frac{3}{2}; \frac{9}{4}$).

7. $\int_L \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы $L: x = a \cos t, y = b \sin t$, шеңберінің доғасы ($0 \leq t \leq \pi$).

(Жауабы: $-\frac{4a}{3}$).

7 – нұсқа

1. $\int_{-2}^1 \int_x^{2-x^2} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығында интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_0^1 \int_x^y \frac{y}{x} dx dy$ екі еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы $D: y = 2x, y = x, x = 2, x = 4$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: 9).

3. $z = 6 - x^2 - y^2, x = y^2, x = 1, z = 0$ ($x \leq 1$) беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{752}{105}$).

4. $x^2 + y^2 - z^2 = -1, z = 3$ беттерімен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: $\frac{20\pi}{3}$).

5. $y^2 = 4x$ параболасымен және $x + y = 3, x = 0$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз. ($\delta = x + y$).

(Жауабы: $\frac{38}{15}$).

6. $y = 3\sqrt{x}$ параболасымен және $y = 3x$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз ($\delta = y$).

(Жауабы: $\frac{1}{2}; \frac{9}{5}$).

7. $\int_L y^2 dx + 2xy dy$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы $L: x = a \cos t, y = b \sin t$ шеңберінің доғасы ($0 \leq t \leq 2\pi$).

(Жауабы: 0).

8 – нұсқа

1. $\int_{-2}^1 \int_{y^2}^4 z dx dy$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және жоу жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int (x+2y) dx dy$ екі еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы $D: x = \sqrt{2-y^2}$ шеңберімен, $x = \sqrt{y}$ параболасымен және $y = 0$ түзуімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{7}{6}$).

3. $x + 4y + z = 4, x + 2y = 2, z = y = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{2}{3}$).

4. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ және $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ конустың ішімен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: $\frac{8\pi(2-\sqrt{2})}{3}$).

5. $y = x^2 + 1$ параболасымен және $x = 2, x = 0, y = 0$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз ($\delta = 2x + 3y$).

(Жауабы: $\frac{163}{5}$).

6. $y = x^2$ параболасымен және $x + y = 2, y = 0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз ($\delta = 3y$), ($x > 0$).

(Жауабы: $\frac{67}{55}; \frac{7}{22}$).

7. $\int_L x dy - y dx$ қисық сызықты интегралды есептеңіз. Мұндағы $L: x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$ циклоидасының бір аркасын Ox өсімен байланыстырған тұйық сызық.

(Жауабы: 24π).

1. $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1-x}{2}}^{1-x^2} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy

жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D (x^2 + xy) dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: y = x, y = -2x, y = 2$ түзулермен қоршалған облыс.

(Жауабы: 3).

3. $z = 16 - x^2 - y^2, y = 2, x = 2, z = x = y = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{160}{3}$).

4. $3z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 - 6y = 0, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: 32).

5. $y = \sqrt{x}, x = 4, y = 1$ сызықтарымен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз. ($\delta = x + y^2$).

(Жауабы: $\frac{241}{30}$).

6. $y = x^2$ параболасымен және $y = 2, x = 0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз ($\delta = x$).

(Жауабы: $\frac{10}{21}; \frac{5}{3}$).

7. $\int_L x^2 y dx + x dy$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы

$$L: x = \cos t, y = \sin t \text{ шеңбердің доғасы } \left(\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \right).$$

(Жауабы: $\frac{3\pi}{16}$).

10 – нұсқа

1. $\int_0^4 \int_{\sqrt{4-y}}^{\sqrt{16-y^2}} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy

жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D xy dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: x = \sqrt{2-y}$ параболасымен және $y = x, y = 0$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{5}{24}$).

3. $2x + y + z = 3, y = x, z = y = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{3}{4}$).

4. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, z = 3$ беттерімен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: $\frac{52\pi}{3}$).

5. $y = 2\sqrt{x}$ параболасымен және $y = 2, x = 0$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз. ($\delta = xy$).

(Жауабы: $\frac{1}{3}$).

6. $y^3 = x^2, y = 1$ сызықтарымен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз ($\delta = 1$).

(Жауабы: $0; \frac{5}{7}$).

7. $\int_L (x + y)dx - 2xydy$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы $L: x = 2\cos t, y = 2\sin t$ шеңбердің доғасы ($0 \leq t \leq 2\pi$).

(Жауабы: -4π).

11 – нұсқа

1. $\int_0^4 \int_0^{\frac{y}{2}} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D xy dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: y = 1, y = 2, y = x - 3, y = 5 - x$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $-\frac{17}{3}$).

3. $z = 4 - 4x^2 - y^2, y = 2 - 2x, z = x = y = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{8}{3}$).

4. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2} dx dy$ екі еселі интегралмен көлемі өрнектелетін денені сызып көрсетіңіз.

5. $y = \frac{x}{2}, x = 2, y = 0$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның координата өстеріне қарата инерция моментін есептеңіз ($\delta = x$).

(Жауабы: $\frac{4}{15}; \frac{16}{5}$).

6. $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ шеңберлермен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз ($\delta = 1$).

(Жауабы: $0; \frac{28}{9\pi}$).

7. $\int_L y^2 dx + x dy$ қисық сызықты интегралды есептеңіз. Мұндағы $L: x^2 = 1 - y$ парабола және $y = 0$ түзумен қоршалған тұйық сызық.

(Жауабы: $\frac{4}{15}$).

12 – нұсқа

1. $\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D xy dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: x = 0, x = 1, y = x, y = 3x$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: 1).

3. $z = x^2, x + y = 3, y = 1, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{4}{3}$).

4. $\int_0^3 \int_{\frac{2}{3}y}^0 (5 - x - y) dx dy$ екі еселі интегралмен көлемі өрнектелетін денені сызып көрсетіңіз.

5. $y = 2x^2, x = 1, y = 0$ сызықтарымен қоршалған жазық фигураның координатар өстеріне қарағандағы инерция моментін есептеңіз ($\delta = y$).

(Жауабы: $\frac{4}{9}; \frac{2}{7}$).

6. $y = \cos x$ косинусоида және $y = 0, x = 0$ түзулерімен қоршалған жазық

фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз
 $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \delta = 1\right)$.

(Жауабы: $\frac{\pi-2}{2}; \frac{\pi}{8}$).

7. $\int_L y^2 dx + (x+y)^2 dy$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы
 $L: y = x, y = 2, x = 0$ түзулермен қоршалған тұйық сызық.

(Жауабы: $\frac{8}{3}$).

13 – нұсқа

1. $\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D xy dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: xy = 4$ гипербола және $x + y = 5$ түзумен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{165}{8} - 5 \ln 2$).

3. $z^2 + x^2 = 4$, $y = x, z = 0, y = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{8}{3}$).

4. $\int_0^2 \int_0^3 (5 - x - y) dy dx$ екі еселі интегралымен көлемі өрнектелетін денені сызып көрсетіңіз.

5. $y = x^2$ параболасымен және $y = 1$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ($x \geq 0$) координаталар өстеріне қарағандағы инерция моментін есептеңіз ($\delta = y$).

(Жауабы: $\frac{2}{9}; \frac{2}{21}$).

6. $y = \sqrt{4-x}$ параболасымен және $x = 0, y = 0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз ($\delta = 1$).

(Жауабы: $\frac{8}{5}; \frac{3}{4}$).

7. $\int_L (x+y)dx + xdy^2$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы $L: x = \sqrt{y}$ параболасымен және $y=1, x=0$ түзулерімен қоршалған тұйық сызық.

(Жауабы: $\frac{7}{6}$).

14 – нұсқа

1. $\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-y^2}} zdydx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D x^2 y dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: x^2 + y^2 = 4$ шеңберімен және $x + y = 2$ түзуімен қоршалған облыс $x \geq 0$.

(Жауабы: $\frac{8}{5}$).

3. $z = 2 - x^2 - y^2, y = x^2, x = 1, z = y = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{44}{105}$).

4. $\int_0^2 \int_{2-y}^2 (4-x-y) dx dy$ екі еселі интегралымен көлемі өрнектелетін денені сызып көрсетіңіз.

5. $y=1, x=2, x=y=0$ түзулермен қоршалған жазық фигураның координата өстеріне қарағандағы инерция моментін есептеңіз ($\delta = x^2 + y^2$).

(Жауабы: $\frac{58}{45}; \frac{328}{45}$).

6. $x^2 + 4y^2 = 4$ эллипсімен және $x=0, y=0$ түзулермен қоршалған жазық фигураның (1-ширек) ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз ($\delta=1$).

(Жауабы: $\frac{8}{3\pi}; \frac{4}{3\pi}$).

7. $\int_L xy^2 dx + y dy$ қисық сызықты интегралды есептеңіз. Мұндағы $L: x + y = 2, y = x, y = 0$ түзулермен қоршалған тұйық сызық.

(Жауабы: $-\frac{2}{3}$).

1. $\int_{-2}^0 \int_{-\frac{y}{2}}^{\sqrt{5-y^2}} z dx dy$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy

жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int \frac{y^3}{x^2} dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: y = \sqrt{x}$

параболасымен және $y = \frac{1}{3}x, x = 1$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{121}{486}$).

3. $z + x + y = 2, x + y = 1, x = 1, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{1}{3}$).

4. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y^2 dx dy$ екі еселі интегралымен көлемі өрнектелетін денені

сызып көрсетіңіз.

5. $x = 2y, x = 2$ түзулермен қоршалған жазық фигураның ($y \geq 0$) координаттар өстеріне қарағандағы инерция моментін есептеңіз ($\delta = xy$).

(Жауабы: $\frac{1}{4}; \frac{8}{5}$).

6. $x^2 + y^2 = 4$ шеңберімен қоршалған дөңгелектің ауырлық центрінің координаттарын анықтаңыз ($\delta = 1$).

(Жауабы: $\left(0; \frac{8}{3\pi}\right)$).

7. $\int_L 2y dx + (x + y) dy$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы

$L: y = x^2$ параболасымен және $x = 1, y = 0$ түзулерімен қоршалған тұйық сызық.

(Жауабы: $-\frac{1}{3}$).

1. $\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{5-y^2}} z dx dy$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy

жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_0^1 \int_0^{1-x} (x^3 + y^3) dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: y = \frac{1}{3}x$
 $y = x, x = 4$ түзулермен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{75676}{405}$).

3. $x + y + z = 6, x^2 = 8y, y = \frac{x}{2}, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{64}{15}$).

4. $\int_0^2 \int_{2-y}^2 (4 - x - y) dx dy$ екі еселі интегралымен көлемі өрнектелетін денені сызып көрсетіңіз.

5. $y = 2x, x + y = 3$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның ($x \geq 0$) координаттар өстеріне қарағандағы инерция моментін есептеңіз ($\delta = 1$).

(Жауабы: $\frac{141}{28}; \frac{7}{20}$).

6. $y = 2 - x$ парабола және $y = x$ түзуімен қоршалған фигураның ($x \geq 0$) ауырлық центрінің координаттарын анықтаңыз ($\delta = 1$).

(Жауабы: $\frac{5}{14}; \frac{38}{35}$).

7. $\int_L x dx + y^2 dy$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы $L: x + y = 3, x = 0, y = 0$ түзулерімен қоршалған тұйық сызық.

(Жауабы: 0).

17 – нұсқа

1. $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy$ интегралының қайталама интегралдың интегралдау ретін өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_0^1 xy^2 dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: y^2 = x$ параболасымен және $x = 1$ түзуімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{4}{21}$).

3. $y = 2 - x$ түзуімен және $y^2 = 4x + 4$ параболасымен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{64}{3}$).

4. $z = 3 - x^2 - y^2, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: 9π).

5. $y = x^2, y^2 = x$ параболалармен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{9}{20}; \frac{9}{20}$).

6. $x^2 + y^2 = 2pz, z = h$ беттерімен қоршалған дененің Oz өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

7. $\int_L (2 - y)dx + (1 - y)dy$ қисық сызықты интегралын $L: \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$
($0 \leq t \leq 2\pi$) қисығы бойынша есептеңіз.

(Жауабы: π).

18 – нұсқа

1. $\int_0^1 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$ қайталамалы интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D (x + y^2) dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: y^2 = x + 2$ параболасымен және $y = x$ түзуімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $-\frac{37}{20}$).

3. $x = y^2 - 2y$ параболасымен және $x + y = 0$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{1}{6}$).

4. $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{88}{105}$).

5. $y = x^2, x + y = 2, x \geq 0$ сызықтарымен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз $\delta = 1$.

(Жауабы: $(\frac{5}{14}; \frac{32}{35})$).

6. $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің Ox өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

7. $\int_L (x + y)dx - (x - y)dy$ қисық сызықты интегралды $L: \begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t. \end{cases}$

$\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ қисығы бойынша есептеңіз.

(Жауабы: $-R \frac{2\pi}{2}$).

19 – нұсқа

1. $\int_0^e dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{\ln x} f(x, y) dy$ қайталамалы интегралдың интегралдау ретін

өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D xy dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D параболасымен және төбелері $A(2,4)$, $B(5,4)$, $C(5,2)$ нүктелерінде жататын үшбұрыш.

3. $y = 4x - x^2$, $y = 2x^2 - 5x$ параболаларымен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{27}{2}$).

4. $z = x^2 + y^2$, $x + y = 4x$, $x = 0$, $z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $42\frac{2}{3}$).

5. $ay = x^2$ параболасымен және $y = a$ ($a > 0$) түзуімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

(Жауабы: $0; \frac{3a}{5}$).

6. $2x + 3y + 3z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ беттерімен қоршалған дененің Ox өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

7. $\int_L xy dx - 5y^2 dy$ қисық сызықты интегралын $L: \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases} \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Қисығы бойынша есептеңіз.

(Жауабы: $-\frac{58}{3}$).

20 – нұсқа

1. $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy$ қайталамалы интегралдың интегралдау ретін

өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int xy dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: 1 \leq y \leq 2; y+3 \leq x \leq y+5$.

(Жауабы: $-\frac{17}{3}$).

3. $x = 4 - y^2$ параболасымен және $2y = 4 - x$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{4}{3}$).

4. $x + 2y - z = 0, x - 2y + 5 = 0, 2x + 3y - 18 = 0, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. Интегралдау облысын сызып көрсетіңіз.

5. $y = 5 - x^2$ параболасымен және $y = 1, x \geq 0$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз ($\delta = 1$).

(Жауабы: $\frac{3}{4}; \frac{13}{5}$).

6. $x + y + z = 3, x = 0, y = 0, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің Oy өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

7. $\int_L y dx + x dy$ қисық сызықты интегралын $L: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$

эллипсі бойынша есептеңіз.

(Жауабы: 0).

21 – нұсқа

1. $\int_{-3}^1 dx \int_{2x-1}^{2-x} f(x, y) dy$ қайталамалы интегралының интегралдау ретін

өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int xy dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: 0 \leq 0 \leq 1, x \leq y \leq 3x$.

(Жауабы: 1).

3. $x^2 + y^2 = 2$ шеңберімен $y = 3$ және $y = 3x$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{9(2\sqrt{10}-1)}{10\sqrt{10}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$).

4. $y = x^2, x = y^2, z = 12 + y - x$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. Интегралдау облысын сызып көрсетіңіз.

5. $y^2 = 2px$ параболасымен және $x = 2p$ түзуімен қоршалған жазық

фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз ($y \geq 0$).

$$(\text{Жауабы: } (\frac{6P}{5}; \frac{3P}{4})).$$

6. $3x + 2y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің Oy өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

$$7. \int_L \frac{y^2 dx + x^2 dy}{x^2 + y^2} \text{ қисық сызықты интегралды } L: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t. \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

қисығы бойынша есептеңіз. (Жауабы: $-\frac{4}{3}a$).

22 – нұсқа

$$1. \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x, y) dy \text{ қайталамалы интегралының интегралдау ретін}$$

өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D xy dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: x^2 + y^2 = 4$ шеңберімен және $x + y = 2$ түзуімен қоршалған облыс ($x \geq 0$).

$$(\text{Жауабы: } \frac{4}{3}).$$

3. $y = 8 - x^2$ параболасымен және $y = 8 - 3x$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз. (Жауабы: $\frac{9}{2}$).

4. $z = 2x^2 + y^2 + 1, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. Интегралдау облысын сызып көрсетіңіз.

5. $y = \sqrt{2x - x^2}$ шеңберімен және $y = 0$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз ($y \geq 0$).

$$(\text{Жауабы: } 1; \frac{4}{3\pi}).$$

6. $x + 3y + 2z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің Ox өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

$$7. \int_L y^2 dx - 2xy dx \text{ қисық сызықты интегралын } L: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

шеңбер бойынша есептеңіз. (Жауабы: 0).

23 – нұсқа

$$1. \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy \text{ қайталамалы интегралының интегралдау ретін}$$

өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \frac{y}{x} dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: y = \sqrt{x}$ параболасымен және $y = \frac{1}{3}x, x = 1$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{17}{36}$).

3. $y = 4\sqrt{x}, y = \frac{x^2}{2}$ параболаларымен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{32}{3}$).

4. $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z + x = 6, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. Интегралдау облысын сызып көрсетіңіз.

5. $2y = x^2$ параболасымен және $y = 2$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

(Жауабы: $(0; \frac{6}{5})$).

6. $x - 2y + 3z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің Oy өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

7. $\int_L x dy + y dx$ қисық сызықты интегралын $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$ қисығымен және Ox өсімен қоршалған тұйық сызық бойынша есептеңіз.

(Жауабы: 0).

24 – нұсқа

1. $\int_{-2}^1 dx \int_{3x^2}^{6-3x} f(x, y) dy$ қайталамалы интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: y = \frac{1}{3}x, y = x, x = 4$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{5120}{81}$).

3. $y = \frac{(x-1)^2}{6}$ параболасымен және $y = x - 1$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: 6).

4. $z = x^2 + y^2, y = 6 - x, y = 2x, y = 1, y = 0$ беттерімен қоршалған дененің

көлемін табыңыз. Интегралдау облысын сызып көрсетіңіз

5. $y = \sqrt{2x}$ параболасымен және $y = \frac{x}{2}, x = 2$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз ($\delta = 1$).

(Жауабы: $(\frac{28}{25}; 1)$).

6. $x + 2y - 3z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің Oz өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

7. $\int_L x^2 y dx - x dy$ қисық сызықты интегралын $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$ шеңбердің

$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ аралығындағы доғасы бойынша есептеңіз. (Жауабы: $-\frac{5\pi}{16}$).

25 – нұсқа

1. $\int_0^1 dx \int_{2x+1}^{4-x^2} f(x, y) dy$ қайталамалы интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\iint_D (\cos 2x + \sin y) dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұнда $D: x = 0, y = 0, 4x + 4y - 8 = 0$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{9 - \cos 4}{4} + \sin 2$).

3. $y = \frac{x^2}{3} - 4$ параболасымен және $y = 2x - 4$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: 12).

4. $z = 3x, y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. Интегралдау облысын сызып көрсетіңіз.

5. $x = 2\sqrt{y}, x = \sqrt{8 - 4y}$ параболаларымен және $x = 0$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

(Жауабы: $(\frac{3}{4}; 1)$).

6. $y - 3x + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$ беттермен қоршалған дененің Ox өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

7. $\int_L (x + y) dx + 2xy dy$ қисық сызықты интегралын $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$ шеңбер бойынша есептеңіз. (Жауабы: -4π).

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Еркеқұлы Әлімхан. Ұлы математика курсы. Алматы: РБК, 1995.
2. Жәутіков О.А. Математикалық анализ. Алматы: Ғылым, 1961.
3. Ибрашев Х.И., Еркеғұлов Ш.Т. Математикалық анализ курсы, 1-2 т., Алматы: Мектеп, 1963-1970.
4. Бектаев Қ.Б. Орысша-қазақша математикалық сөздік. Алматы: Мектеп, 1989.
5. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика, ч.1. Минск: Высшэйшая школа, 1984.
6. Шипачев В.С. Основны высшей математики. М: Высшая школа, 1989.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М: Наука, 1971.
8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М: Наука, 1984.
9. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М: Наука, 1980.
10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. 1, 2 ч., под ред. Рябушко А.П. Минск: Высшэйшая школа, 1991.
11. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М: Наука, 1972.
12. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. 1,2-бөлімдер. – Алматы: ҚазҰТУ, 2000
13. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М: 1971.
14. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. – Алматы: Мектеп, 1,2,3-бөлімдер, 1985-1991.
15. Қазақша-орысша (орысша-қазақша) терминологиялық сөздік. Математика. – Алматы: Рауан, 1999.
16. Аяпбергенов С.А. Аналитикалық геометрия. Алматы: Мектеп, 1971.
17. Әмірбаев М.О. Аналитикалық геометрия. Бірінші бөлім. Алматы: Мектеп, 1963.
18. Әмірбаев М.О. Аналитикалық геометрия. Екінші бөлім. Алматы: Мектеп, 1966.
19. Қасымов Е.А., Қасымов Қ.А. Жоғарғы математика курсы, Алматы, «Санат», 1997, 257 бет.
20. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғарғы математика оқу құралы, Алматы, ҚБТУ, 2004, 440 бет.
21. Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И. Жоғары математика I, Алматы, С. Бегалин атындағы «мбкб», 2008, 118 бет.
22. Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И. Жоғары математика II, Алматы, С. Бегалин атындағы «мбкб», 2008, 105 бет.
23. Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И. Жоғары математика III, Алматы, «ҰҒТАО» АҚ баспаханасы 050026, 2010, 185 бет.

26-дәріс. 13-тақырып. Көп айнымалының функциялары	5
13.1 Екі айнымалының функциясы, оның анықталу облысы және графигі . .	5
13.2 Екі айнымалы функцияның шегі және үзіліссіздігі	9
13.3 Екі айнымалы функцияның дербес және толық өсімшесі	11
13.4 Екі айнымалы функцияның дербес туындылары	13
13.5 Екі айнымалы функцияның толық дифференциалы	14
13.6 Күрделі және айқындалмаған функцияларды дифференциалдау	19
13.7 Жоғары ретті туындылар	22
13.8 Екі айнымалының функциясы үшін Тейлор формуласы	23
13.9 Бағыт бойынша алынған туынды. Градиент	27
13.10 Екі айнымалы функцияның экстремумы	31
13.11 Шартты экстремум	33
13.12 Ең кіші квадрат әдісі	33
13.13. Екі айнымалы функциясының экономикалық зерттеулерде қолданылуы	38
«Көп айнымалының функциялары» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар	46
 №27-дәріс. 14-тақырып. Дифференциалдық теңдеулер	63
14.1 Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Негізгі ұғымдар	63
14.2 Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеулер	67
14.3 Біртекті теңдеулерге келтірілетін дифференциалдық теңдеулер	68
14.4 Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер	70
14.5 Толық дифференциалдық теңдеулер	74
14.5 Толық дифференциалдық теңдеулер үшін интегралдық көбейткіш . .	76
14.6 Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер	79
14.7 Реті төмендетілетін екінші ретті дифференциалдық теңдеулер	80
14.8 Сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер	84
14.9 Коэффициенттері тұрақты екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер	90
14.10 Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі	97
14.11 Коэффициенттері тұрақты сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесі	99
14.12 Дифференциалдық теңдеудің экономикада қолданылуы	105
«Дифференциалдық теңдеулер» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар	107
 №28-дәріс. 15-тақырып. Қатарлар теориясы	126
15.1 Сан қатары	126
15.2 Оң қатарлар	129
15.3 Таңбалары айнымалы қатарлар	132
15.4 Дәрежелі қатарлар	138
15.5 Функциялардың дәрежелі қатарларға жіктелінуі. Маклорен қатары . .	142

15.6 Дәрежелі қатардың жуық есептеулерге қолданылуы	147
15.7 Фурье қатары	151
15.7.1 Жұп және тақ функциялар үшін Фурье қатары	154
15.7.2 $2l$ периодты функцияны Фурье қатарына жіктеу	155
«Сан қатары» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар	159
№29-дәріс. 16-тақырып. Еселі интегралдар	183
16.1 Екі еселі интеграл және оның негізгі қасиеттері	183
16.2 Екі еселі интегралды есептеу	185
16.3 Екі еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру	192
16.4 Екі еселі интегралда полярлық координаталар жүйесіне көшу	195
16.5. Екі еселі интегралдардың геометрияда және физикада қолданулары	199
16.6 Екі еселі интегралдардың физикада қолданылулары	202
16.7 Үш еселі интеграл	207
16.8 Үш еселі интегралда айнымалыларды алмастыру	212
16.9 Үш еселі интегралдардың қолданылулары	217
16.10 Қиысық сызықты интегралдар	223
16.10.1 Бірінші текті қисық сызықты интегралдар	223
16.10.2 Екінші текті қисық сызықты интегралдар	224
16.10.3 Екінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасы	225
16.10.4 Екінші текті қисық сызықты интегралдардың интегралдау қисығының түрінен тәуелсіздік шарты	226
16.10.5 Потенциалдық күштің жұмысы	227
«Екі еселі, үш еселі және қисық сызықты интегралдар» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар	231
Пайдаланылған әдебиеттер	257
Мазмұны	258

**Сатыбалдиев Ораз Сатыбалдыұлы,
Сулейменов Зинаддин Искендерұлы**

Жоғары математика IV

**Көп айнымалылар функциясының
дифференциалдық және интегралдық есептеулері.
Қатарлар. Дифференциалдық теңдеулер.**

Оқу-әдістемелік құрал

Басуға 4.03.10. қол қойылды
Пішімі 60x84/16. Басылымы офсеттік. Қағазы офсеттік
Көлемі 15.11
Таралымы 520 дана. Тапсырыс № 62

“ҰҒТАО” АҚ баспаханасы
050026, Алматы қаласы, Бөгенбай батыр көшесі 221