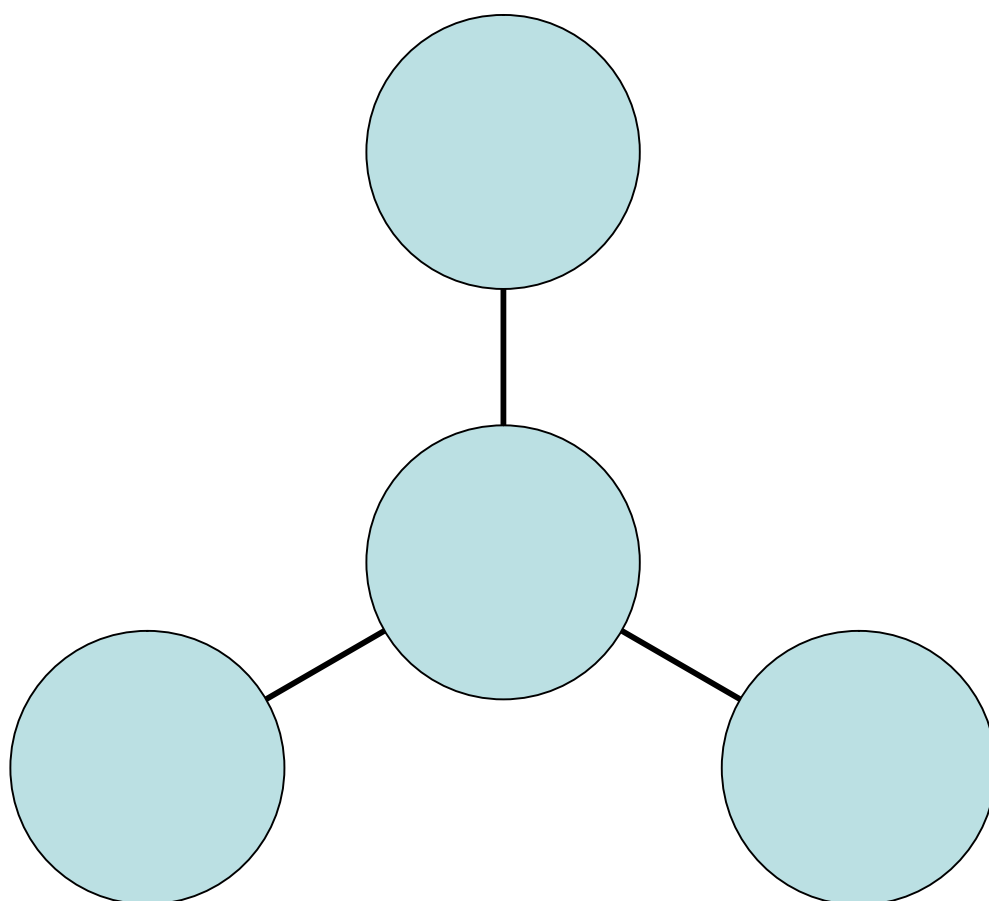


Есмухан Ж.М., Куспеков К.А.

Прикладная геометрия инженерных сетей



АЛМАТЫ 2012

УДК 515.2
ББК 22.151.3
Е 85

Есмухан Ж.М., Куспеков К.А.

Прикладная геометрия инженерных сетей. Монография- Алматы: КазНТУ,
2012.- 132 С.;

Ил. 86, Табл. 9, Список лит.- 115 назв.

ISBN 978-601-228-439-3

В монографии рассмотрены теоретические положения определения оптимальной конфигурации инженерных сетей, базирующихся на современных методах прикладной геометрии.

Разработаны и предложены алгоритмы и методики определения оптимальной конфигурации инженерных сетей. Решение поставленной задачи сводится к различным обобщениям проблемы Я. Штейнера, построению кратчайших, связывающих заданное множество точек, линий, расположенных на плоскости и в трехмерном пространстве с евклидовой, ортогональной и полярной метрикой.

Исследованы составные пространственные кривые, получаемые сопряжением различных линий.

Монография предназначена для инженерно-технических и научных работников, занимающихся вопросами проектирования разветвленных сетей автомобильных и железных дорог, нефти и газопроводов, водопроводов линий электропередач и конвейерных систем транспортирующих грузов различного назначения. Книга полезна также магистрантам, докторантам и студентам старших курсов соответствующих профилей.

Рецензенты: Волков В.Я. д-р техн. наук, проф.

Косболов С.Б. д-р техн. наук, проф.

Менглибаев А. д-р физ.мат. наук, проф.

Рекомендовано к печати Ученым советом КазНТУ, имени К.И. Сатпаева
(Протокол № 5 от 29.11.2011г.)

ISBN 978-601-228-439-3

© Есмухан Ж.М., 2012

Куспеков К.А., 2012

© КазНТУ

ПРЕДИСЛОВИЕ

1. Некоторые из специалистов по инженерной геометрии и компьютерной графике считают, что термин «прикладная геометрия» возник в процессе разделения кафедры начертательной геометрии и черчения на две отдельные кафедры: начертательной геометрии и черчения. Затем этот термин стал употребляться в более широком смысле как объединяющий цикл графических дисциплин: начертательную геометрию, номографию, графические и графоаналитические методы и инженерное черчение. Другие считают термин «прикладная геометрия» нововведением, так как предмет ее до сих пор остается строго неопределенным. Они пытаются отрицать полезность выделения математической науки под названием «прикладная геометрия».

На самом деле этот термин не является новым, он часто встречается в научных трудах средневековых ученых Средней Азии и Казахстана. В «Перечисление наук» аль-Фараби (870-950) дал интересную классификацию математических наук своей эпохи. Математику он подразделяет на семь разделов и определяет предмет каждой из этих наук: а) наука чисел, б) наука геометрии, в) наука оптики, г) наука о звездах, д) наука о музыке, е) наука о тяжестях, ж) наука о искусных приемах. Аль-Фараби среди разделов математики особое значение придает геометрии. По его выражению, именно геометрия «проникает во все науки».

«Под названием «наука геометрии» понимают две науки: прикладную геометрию и теоретическую. Прикладная геометрия рассматривает линии и поверхности деревянного тела, если их применяет столяр; железного тела, если их использует кузнец; каменного тела, если их применяет каменщик; поверхности земель и нив, если их применяет землемер. Аналогично этому специалист по прикладной геометрии представляет себе линии, поверхности, квадратные, круглые и треугольные тела как материю, являющуюся предметом этого прикладного искусства. Теоретическая геометрия рассматривает линии, поверхности и тела абсолютно, так что они являются общими для поверхностей всех тел. Теоретик представляет себе линии в общем, отвлекаясь разумом от того, какое это тело. Он смотрит на плоскость, квадрат, окружность и треугольник в общем, не интересуясь тем, каково это тело, какова его материя и как она ощущается, а лишь в абсолютном смысле, представляя себе геометрическое тело не как дерево, кирпич или железо, а вообще как геометрическое тело. Это наука проникает во все науки. Она объясняет причины всего этого путем доказательств, которые дает нам достоверное знание, не допускающее сомнения» [115].

Аль-Фараби на конкретных примерах показывает различия методов решения задач в теоретической и прикладной геометрии. Более подробно рассмотрим один из характерных примеров аль-Фараби, который дает наглядное представление о предмете прикладной геометрии. Пусть требуется построить квадрат, площадь которого равна площади трех равных квадратов.

Аль-Фараби приводит решение этой задачи, характерное представителям специалистов по теоретической геометрии. Пусть сторона данных трех равных квадратов равна a . Тогда площадь одного такого квадрата равна a^2 , а площадь искомого квадрата – $3a^2$. Поэтому он предлагает проводить диагональ AC данного квадрата, а затем построить на отрезке AC прямоугольный треугольник CAE , другой катет которого равен отрезку AB (рис. П.1). Отрезок CE равен стороне квадрата, равновеликого трем равным квадратам. Однако от такого решения мало пользы для производства. Для ремесленников нужно не любое решение задачи, а важно как разделить данные три равные квадрата с тем, чтобы из этих отдельных кусков составить искомый квадрат. Поэтому ремесленники на практике используют решения, которые оказываются ошибочными при тщательном анализе. Аль-Фараби приводит два таких способа решения упомянутой задачи и доказывает, что оба способа являются ошибочными. На одном из этих способов «они выделяют из диагонали двух квадратов в ее середине отрезок, равный стороне этого квадрата, и отсекают от вершин по диагоналям четыре треугольника. Таким образом, из двух квадратов получаются четыре одинаковых пятиугольника и четыре треугольника (рис. П.2).

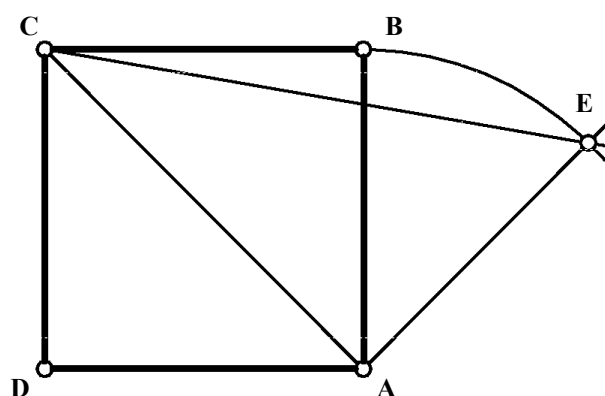


Рис. П.1 Построение стороны квадрата, равновеликого трем равным квадратам, методом «теоретической геометрии»

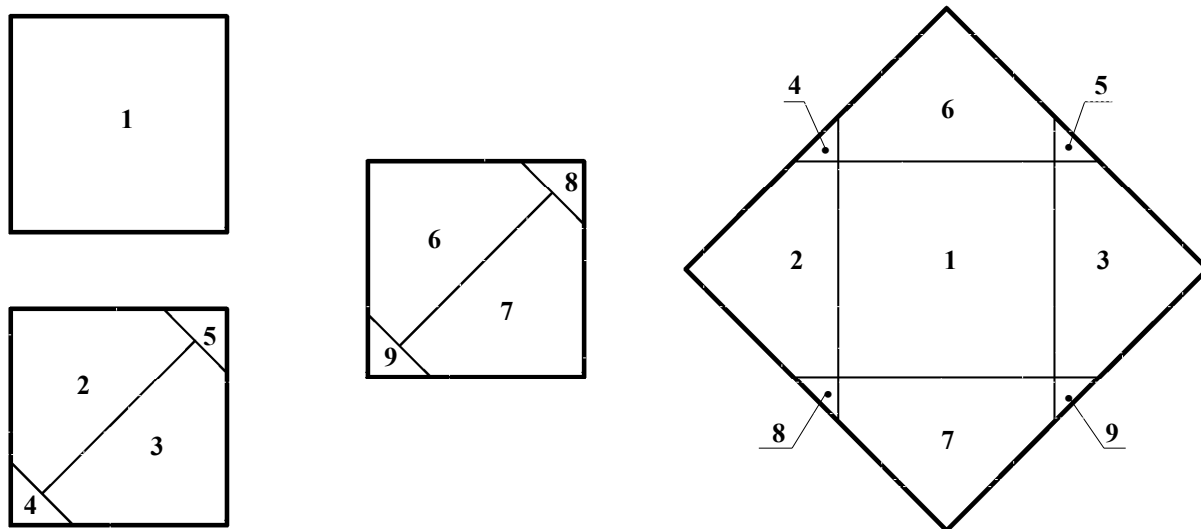


Рис. П.2 Построение квадрата, равновеликого трем равным квадратам, «способом ремесленников»

Затем они помещают каждый пятиугольник к стороне третьего квадрата, а при четырех углах оказываются места для четырех треугольников. Они переносят эти треугольники в эти места и получают квадрат, состоящий, таким образом, из трех квадратов... Это кажется верным для тех, кто не занимается геометрией и доказательствами, а когда они начинают вдумываться, то этот способ оказывается непригодным, потому что треугольники, которые они переносят свободные места при вершинах квадрата, больше этих мест». Правильное решение задачи на построение квадрата, равновеликого трем равным квадратам, предложено самим аль-Фараби (рис. П.3).

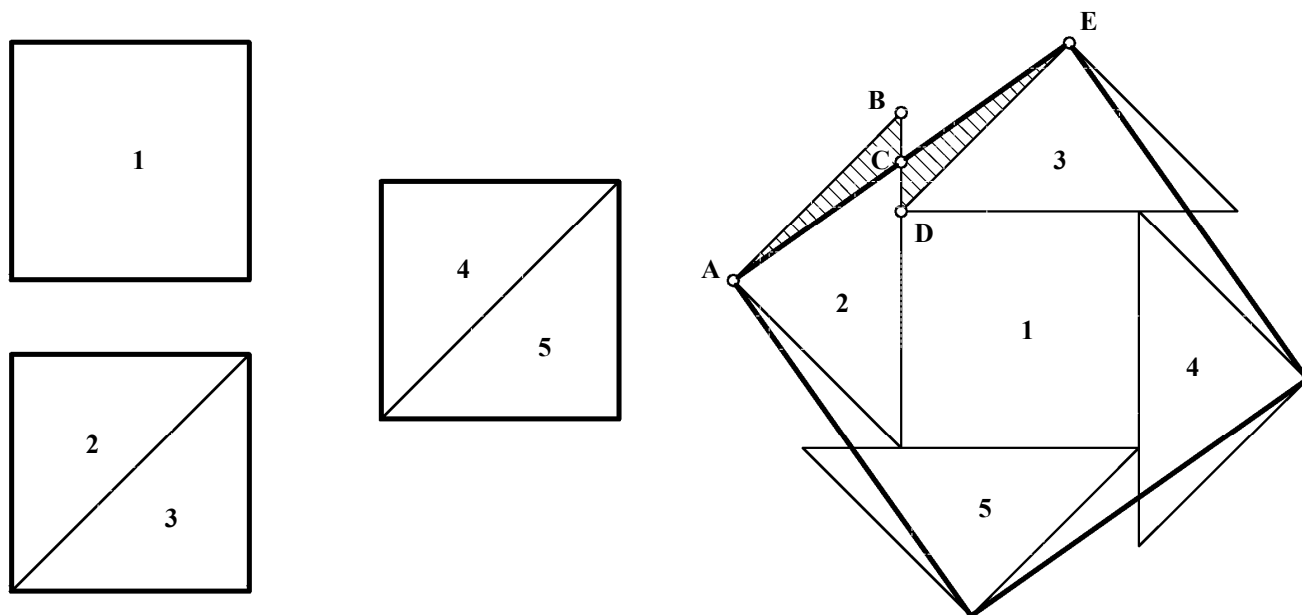
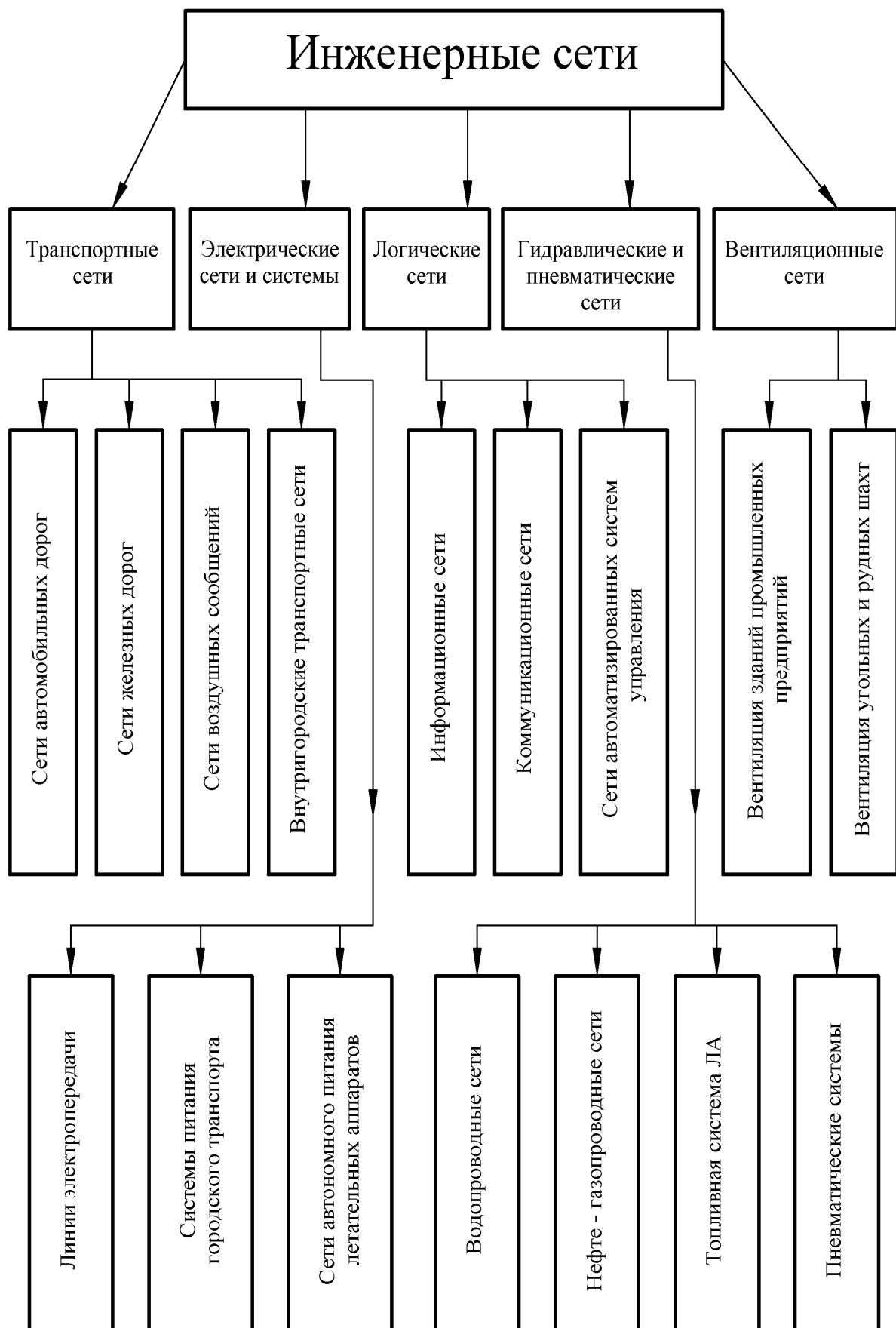


Рис. П. 3 Построение квадрата, равновеликого трем равным квадратам, «методом прикладной геометрии»

Этот оригинальный способ, названный «методом прикладной геометрии», очень удобен для ремесленников, так как с его помощью можно просто перекроить три, одинаковых малых квадратов в один большой: «...разделим теперь два квадрата из трех пополам по их диагонали (получим четыре прямоугольных треугольника), расположим стороны каждого из них на сторонах третьего квадрата, причем угол треугольника, равный половине прямого, расположим над одним из углов квадрата, а гипотенузу треугольника расположим на стороне квадрата; тогда часть треугольника со стороны другого угла будет выступать. Соединив вершины прямых углов треугольников прямыми линиями получим сторону искомого квадрата. Выделим из каждого большого треугольника малый треугольник, поместим его на место недостающего треугольника по другую сторону». Для того, чтобы убедиться в правильности «метода прикладной геометрии» достаточно доказать, что треугольники ABC и EDC равны. Внутренние углы при вершинах B и D этих



Классификация инженерных сетей

треугольников равны как углы, равные половине прямого. Кроме того, два вертикальных угла при вершине С равны. Поэтому указанные треугольники подобны. Далее стороны АВ и DE этих треугольников также равны. Следовательно, треугольник ABC равен треугольнику EDC.

Результаты теоретических исследований геометров не всегда удобны для непосредственного применения их на практике. Такие правильные и удобные для производителей способы решения геометрических задач, возникающие из потребности инженерной практики, должны разрабатываться прикладной геометрией.

Следует отметить, что прикладная геометрия имеет 1200 – летнюю историю. Аналитическая геометрия, проективная геометрия, начертательная геометрия появились гораздо позже прикладной геометрии. Они оформились, как самостоятельные науки, только в первой половине XIX века в результате развития геометрической науки, а в частности – прикладной геометрии. Основоположником прикладной геометрии был Абунасыр аль-Фараби.

2. Рассмотрим далеко не полную формальную классификацию инженерных сетей, приведенной выше. Как видно – это очень большой класс однотипных с геометрической точки зрения задач, имеющих важное научное, практическое и экономическое значения.

Поэтому актуальным является разработка методов отыскания оптимальных по тем или другим критериям решений при проектировании и эксплуатации инженерных сетей. Общим для всех инженерных сетей является то, что можно геометрически моделировать их точками связывающими эти точки линиями. Таким образом, инженерной сетью называется любой комплекс, который может быть представлен в виде связанного графа. В предлагаемой работе разработаны методика геометрического моделирования и способы решения задач, связанных с инженерной сетью. Одним из критериев оптимальности конфигурации инженерных сетей является протяженность. Поэтому в ней основное внимание уделено построению кратчайших связывающих линий. Монография посвящена прикладной геометрии инженерных сетей.

Введение

Под инженерной сетью понимается разнообразные линейные сооружения, связывающие различные объекты. Например: линии электропередачи, железные и автомобильные дороги, нефте и газопроводы, водопроводные и теплопроводные сети, метро и маршруты городского транспорта и т.д. К инженерным сетям относятся также электрические и кинематические схемы, последовательность технологических операций. Основной для расчета инженерных сетей является ее конфигурация, которая задается специалистами интуитивно. От конфигурации зависят затраты на сооружение и эксплуатацию инженерных сетей, надежность и расход драгоценных материалов.

В настоящее время для дальнейшего промышленного, экономического и социального развития Республики Казахстан наиболее актуальной проблемой является создание развитой и надежной инженерной сети. Поэтому ведется интенсивное проектирование и строительство новых автомобильных и железных дорог, трубопроводов для транспортировки нефти и газа, газопроводов и линий электропередач, а также транспортных развязок в больших городах. При этом возникает необходимость в разработке оптимальных проектов линейных сооружений. Совершенствование систем коммуникации внутри отдельных районов и городов также имеет первостепенное значение. Предстоит огромная работа по реконструкции существующих, проектированию и сооружению новых инженерных сетей. Эту задачу можно решить путем широкого применения современной вычислительной техники и создания САПР инженерных сетей, а для этого нужны соответствующие алгоритмы. Поэтому разработка алгоритмов определения оптимальной конфигурации инженерных сетей является актуальной и нерешенной научной проблемой, имеющей важное народнохозяйственное значение.

В области прикладной геометрии, как указывал академик Н.Ф. Четверухин, достойное место занимает отыскание методов оптимальных отображений тех или иных реальных объектов.

Оригинальность проведенных нами исследований заключается в применении современных методов прикладной геометрии, основанных на достижениях алгебраической, аналитической, начертательной, вычислительной геометрии и геометрического моделирования. Если размеры объектов малы по сравнению с протяженностью связывающих их сооружений, то геометрическая модель инженерной сети состоит из конечного множества точек, подлежащих соединению между собой линией минимальной (кратчайшей) длины. Если размеры инженерных объектов соизмеримы с протяженностью связывающих их сооружений, то геометрическая модель инженерной сети состоит из конечного множества геометрических фигур, подлежащих соединению между собой линией, удовлетворяющей наперед заданным требованиям.

Очевидно, что можно построить бесчисленное множество линий, связывающих заданные точки. Любую линию, связывающую заданные точки, будем называть допустимой линией. Задача заключается в отыскании из числа допустимых линий такую линию, которая удовлетворяет предъявляемым требованиям. Нужно различать необходимые и достаточные условия при которых допустимая линия будет отвечать конкретным требованиям. Необходимые и достаточные условия могут быть конкретизированы после установления критерия оптимальности связывающей линии. Получение необходимых и достаточных условий является основной задачей в теории оптимизации. Эта задача является очень сложной. Например, рассмотрим задачу о кратчайшем соединении точек плоскости. В результате многолетних исследований учеными установлены только необходимые условия, к которым должны отвечать кратчайшие линии. Что касается достаточных условий для кратчайших линий, то их не удалось получить до настоящего времени. Поэтому эта задача все еще не решена.

После установления необходимых и достаточных условий возникает другая задача, которая сводится к определению алгоритмов построения связывающих линий, удовлетворяющих необходимым и достаточным условиям оптимальности.

Допустимую линию, удовлетворяющую необходимым условиям, будем называть относительно (локально) оптимальной линией.

Допустимую линию, удовлетворяющую необходимым и достаточным условиям, будем называть абсолютно (глобально) оптимальной линией.

Построение кратчайших связывающих линий для заданного множества точек сводятся к различным обобщениям известной проблемы Штейнера. Как известно, проблема Штейнера о построении минимального связывающего дерева нерешена в общем виде. Оптимальные линии состоят, как правило, из нескольких незамкнутых связанных отрезков прямых. Поэтому их будем называть деревом. В отличие от обычного значения, принятого в теории графов, термин дерево применяется нами в узком смысле «взвешенного дерева».

Нами исследованы топология инженерных сетей в пространствах с евклидовой, ортогональной и полярной метрикой, разработана методика геометрического моделирования этих объектов.

В основу монографии положены публикации доктора технических наук, профессора Есмухан Ж. М. и его учеников, написанные по материалам проведенных исследований.

1. ПОСТРОЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ СВЯЗЫВАЮЩИХ ЛИНИЙ НА ПЛОСКОСТИ С ЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКОЙ

1.1 Краткий обзор исследований по построению кратчайших связывающих линий

Проблема Я. Штейнера [1] для трех точек A , B и C , состоящая в исследовании минимальных сетей, евклидовой плоскости, была сформулирована и решена Я. Штейнером. Если в треугольнике ABC имеется угол, скажем A , больше или равный 120° , то единственная кратчайшая сеть состоит из двух отрезков AB и AC . Если же все углы в треугольнике ABC меньше 120° , то единственная кратчайшая сеть имеет дополнительную вершину N и состоит теперь из трех отрезков: NA , NB , NC . Дополнительная вершина N называется точкой Штейнера (ТШ). Положение точки N однозначно определяется следующим условием: величина трех углов при N равны между собой и равна 120° .

Более сложный вариант проблемы Штейнера получается при увеличении числа заданных точек. Это сложная задача до настоящего времени не имеет общего решения, хотя актуальность этой задачи чрезвычайно высока.

Учеными различных стран предложены различные методы построения кратчайших связывающих линий (КСЛ) для n точек плоскости [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Задачу можно решить путем полного перебора всех возможных вариантов. Попытка решения проблемы Штейнера методом перебора сделана в [13, 14, 15, 16, 17]. Однако этот метод не пригоден для $n > 8$, так как время вычислений нарастает экспоненциально [18]. Для уменьшения количества вариантов, подлежащих рассмотрению, в [15, 19, 20] предложены различные принципы разложения связывающих линий по некоторым геометрическим признакам. Усовершенствованный с учетом таких принципов алгоритм Мельзака [2] может применяться только при $n < 15$ точек.

К постановке задачи Штейнера непосредственно примыкает задача Прима [21]. Недостатком алгоритма Прима является то, что построение КСЛ рассматривается без введения дополнительных вершин.

В [22] предложен алгоритм построения кратчайшей связывающей сети на поверхности сферы, позволяющий строить искомую линию для точек, занимающих строго определенное положение. В [23, 24] поставленная задача решается методом динамического программирования и комбинаторного анализа для сферы и евклидовой плоскости.

Задача построения кратчайших линий для топографической поверхности исследовалась И.А.Глаголевым [25]. В [26] поставлен вопрос о построении геодезической линии в заданном направлении на топографической поверхности. В этих работах предлагаются приближенные и громоздкие алгоритмы. Поэтому использовать их для построения кратчайших связывающих линий для заданного множества из n точек не представляется возможным.

В [27, 28] предложено цифровое моделирование топографической поверхности и использование волнового алгоритма Ли [29]. Суть волнового алгоритма состоит, как известно, в распространении волн от одной точки (источника) матричной структуры до достижения второй точки (цели). Недостатком является большой объем памяти, используемой при реализации алгоритма на ЭВМ, и значительное время для вычислений.

Построение КСЛ с элементами вычислительной геометрии рассмотрены в [30, 31, 32, 33]. Применение теории графов для решения проблемы Штейнера так же не позволило получить эффективного алгоритма [34, 35, 36, 37].

Задачам определения оптимальной конфигурации инженерных сетей посвящены следующие работы [70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 79, 111, 112, 113, 114].

Исходя из вышеизложенного следует, что в настоящее время нет достаточно обоснованных методов построения кратчайших линий для заданного множества точек на плоскости с евклидовой метрикой, рекомендаций по выбору оптимальной схемы транспортных систем ПРТС работ.

1.2 Некоторые определения и необходимые условия кратчайших связывающих линий для компланарных точек с евклидовой метрикой

Пусть на плоскости задано множество точек $M_1, M_2, \dots, M_m$, которых необходимо связать линией кратчайшей длины. В связывающей линии кратчайшей длины звено, соединяющее точку M_i с точкой M_j представляет собой отрезок прямой, так как геодезической линией плоскости служит прямая, поэтому кратчайшая линия состоит из некоторой совокупности отрезков прямых. Каждая точка является концом, по крайней мере, одного отрезка, называемого ребром моделирующего графа. Каждый отрезок связывает две точки, называемые вершиной графа. Линия кратчайшей длины не имеет замкнутых участков. Если она имела бы такой участок, то можно было бы уменьшить длину связывающих линий путем удаления замыкающего этот участок отрезка. Следовательно, конфигурация кратчайшей связывающей линии представляет дерево. Дерево – это, как известно, граф $G(X, \Gamma)$ без замкнутых участков, где X - непустое множество вершин X_i ($i=1, 2, \dots, n$) и Γ - отображения элементов множества X в элементы множества X . В дальнейшем нами будет названо графом его изображение. Элементы множества X изображаются точками (вершины графа), а вершины x_i и x_j соединяются непрерывной линией (дуги графа), если $x_j \in \Gamma x_i$ или $x_i \in \Gamma x_j$. Известно, что для дерева с m вершинами число ребер равно $(m-1)$. Таким образом, любое дерево характеризуется следующими тремя условиями:

- 1) граф $G(X, \Gamma)$ связан, а это означает, что у него нет изолированной вершины;
- 2) граф $G(X, \Gamma)$ не имеет замкнутых участков;
- 3) число ребер равно $m-1$, где m - число вершин графа $G(X, \Gamma)$.

Построение кратчайших связывающих линий непосредственно связано с метрическими и топологическими свойствами пространства, в котором выполняется это построение.

Рассмотрим расширенное многомерное евклидовое пространство E^n , в котором расстояние между точками $M_1(x_1^1; x_1^2; \dots; x_1^n)$ и $M_2(x_2^1; x_2^2; \dots; x_2^n)$ определяется по формуле:

$$d(M_1, M_2) = \left[\sum_{i=1}^{i=n} (x_1^i - x_2^i)^p \right]^{1/p} \quad (1.1)$$

где $x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n$ - декартовы координаты точки M_1 ;

$x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n$ - декартовы координаты точки M_2 ;

$p \geq 1$ – порядок расстояния.

Если $p=2$, получим расстояние второго порядка, называемое евклидовым или пифагоровым.

Таким образом, на основании вышеизложенного можно заключить, что задача построения кратчайших связывающих линий для заданного множества точек с евклидовой метрикой сводится к построению дерева, в котором:

1) любые две из заданных точек связаны системой прямолинейных отрезков;

2) суммарная длина всех ребер минимальна.

Существуют различные алгоритмы построения кратчайших связывающих линий. Р. К. Примом предложен алгоритм, который использует понятие ближайшего соседа и фрагмента [21]. Фрагментом называется часть искомого кратчайшего дерева (КД). Ближайшим соседом вершины или фрагмента называется вершина или фрагмент, расположенный не дальше, чем любая другая вершина или другой фрагмент. Сущность алгоритма заключается в следующем: из множества заданных точек выбирается две точки M_i и M_j , расстояние между которыми не больше, чем для любой другой пары. Строится фрагмент $M_i - M_j$. На втором шаге определяются ближайшие соседи M_k и M_l из оставшихся точек и фрагмента $M_i - M_j$, которые объединяются в новый фрагмент $M_k - M_l$. На третьем шаге определяются ближайшие соседи из множества точек $M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_{j+1}, \dots, M_{j-1}, M_{j+1}, \dots, M_{k-1}, M_{k+1}, \dots, M_{l-1}, M_{l+1}, \dots, M_m$ и фрагментов $M_i - M_j, M_k - M_l$ и т. д. Если исходное множество состоит из m точек, то алгоритм сходится после $m-1$ шагов.

Угол между смежными ребрами, выходящими из одной вершины кратчайшего дерева Прима (КДП), не может быть менее 60° . Действительно, если угол между смежными ребрами $[M_i M_j]$ и $[M_j M_l]$ меньше 60° , то $|M_j M_i| > |M_j M_l|$ или $|M_i M_j| > |M_j M_l|$. Тогда замена ребра $[M_j M_i]$ или $[M_i M_j]$ на ребро $[M_j M_l]$ позволило бы уменьшить длину КДП, что не возможно. Из этого свойства следует, что степень любой вершины не превышает шести: $\delta(M_i) \leq 6$, где $i=1, 2, \dots, m$.

В КДП нет изолированной вершины, т.е. $\delta(M_i) \geq 1$. Степень тупиковых вершин равна единице, а вершина, степень которой равна шести, является

уникальной. В последнем случае ребра, инцидентные такой вершине, должны быть равнорасположенными. На практике встречаются вершины со степенями $\delta(M_i)=2, 3, 4, 5$. Если $\delta(M_i)=2$, то вершина называется коленом.

Рассмотрим пример построения КДП. Пусть заданы на плоскости точки с координатами: $M_1(9;9)$; $M_2(2;8)$; $M_3(4;7)$; $M_4(0;5)$; $M_5(12;5)$; $M_6(5;4)$; $M_7(7;4)$; $M_8(2;1)$; $M_9(11;0)$. Алгоритм Прима может быть реализован графическим или аналитическим методом.

Рассмотрим графический метод. По координатам изображают точки $M_1, M_2, \dots, M_9$. (рис. 1.1, а). Сравнивая расстояния между точками, определяются ближайшие соседи. На первом шаге такими ближайшими соседями оказались точки M_6 и M_7 , которые соединены между собой отрезком прямой (рис. 1.1, б). На втором шаге ближайшими соседями оказались точки M_2 и M_3 , а на третьем шаге - фрагменты M_2-M_3 и M_6-M_7 .

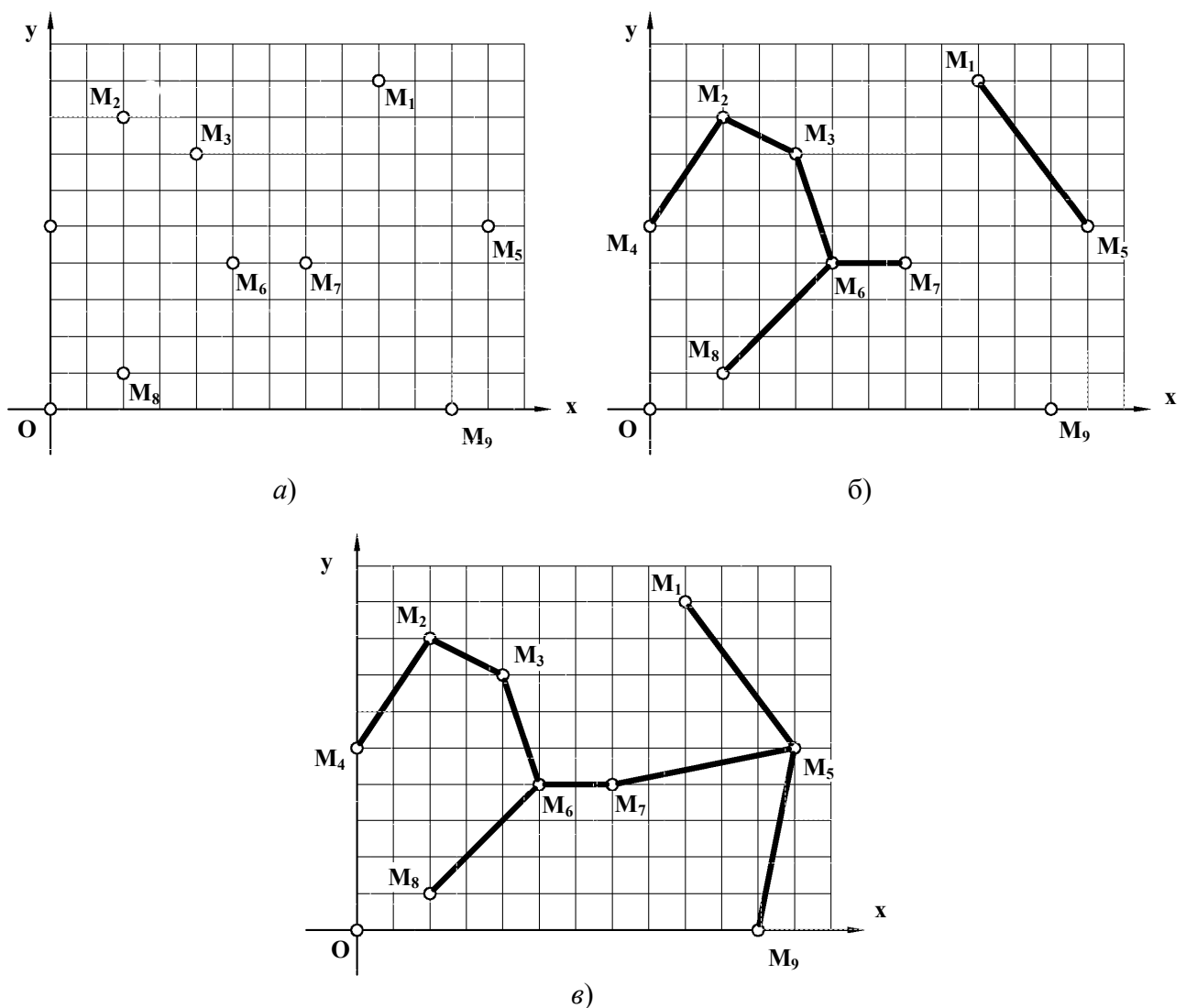
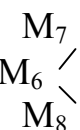


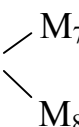
Рис. 1.1 Построение кратчайшего дерева Прима для 9-и точек

При объединении этих фрагментов сравниваются расстояния $|M_2M_6|$, $|M_2M_7|$, $|M_3M_6|$ и $|M_3M_7|$. Точки M_3 и M_6 соединяются отрезком прямой, так как они оказались носителями минимального удлинения фрагмента. На четвертом шаге

ближайшими соседями оказались и точка M_4 , и фрагмент $M_2-M_3-M_6-M_7$. Поэтому точка M_4 присоединена ближайшей к ней точке M_2 . Результатом пятого шага алгоритма явилось присоединение точки M_8 ближайшей к ней точке M_6 фрагмента $M_4-M_2-M_3-M_6-M_7$. На шестом шаге соединяются точки M_1 и M_5 .

На седьмом шаге объединяются фрагменты $M_4 - M_2 - M_3 - M_6$  и $M_1 - M_5$.

Соединяем точки M_7 и M_5 . На последнем шаге точка M_9 соединяется с фрагментом, построенным на предыдущем шаге. Следует отметить, что на каком-то шаге может оказаться несколько ближайших соседей. Например, на седьмом шаге оказалось, что фрагмент M_1-M_5 имеет двух ближайших соседей:

точка M_9 и фрагмент $M_4 - M_2 - M_3 - M_6$ .

Мы выбрали два фрагмента для объединения, но, как видно из рис.1.1, б, конфигурация КДП остается прежней.

Оказывается, если допустить добавление новых вершин к заданным точкам $M_1, M_2, \dots, M_m$, то удастся построить более короткое дерево, чем КДП. В отличие от вершин $M_1, M_2, \dots, M_m$, называемых неподвижными, положения добавляемых новых вершин $N_1, N_2, \dots, N_n$, выбираются исходя из условия, что они должны уменьшить длину связывающей линии. При решении такой геометрической задачи приходится исходить из известной проблемы Я. Штейнера [1, 67]. Проблема Штейнера формулируется следующим образом: пусть на плоскости заданы три точки M_1, M_2 и M_3 : требуется найти положение дополнительной точки N так, чтобы сумма длин отрезков от этой точки до заданных точек была минимальной.

Необходимые условия и свойства, которым должна отвечать кратчайшая связывающая линия [67]:

- 1) кратчайшая связывающая линия представляет собой дерево, т.е. не имеет замкнутых участков;
- 2) если точка M является вершиной кратчайшего дерева, то в ней сходятся не более трех отрезков;
- 3) если из вершины кратчайшего дерева выходят три отрезка, то они образуют между собой углы, равные 120° ;
- 4) если в данной вершине сходятся два отрезка кратчайшего дерева, то угол между ними не может быть меньше 120° .

1.3 Построения кратчайших связывающих линий для трех точек плоскости. Эквидистанционные линии и фрагменты

Для определения ближайшего соседа точки M_1 на плоскости мысленно проводят окружность с центром в данной точке M_1 через точку M_2 . Если внутри

круга, ограниченного этой окружностью, нет других точек, то точка M_2 - ближайшая к точке M_1 (рис. 1.2. а).

Рассмотрим построение кратчайшей связывающей линии для трех точек плоскости [84]. Выше было сказано, что эта задача сводится к проблеме Штейнера. Кратчайшее дерево Штейнера для трех точек определяется следующим путем [61]:

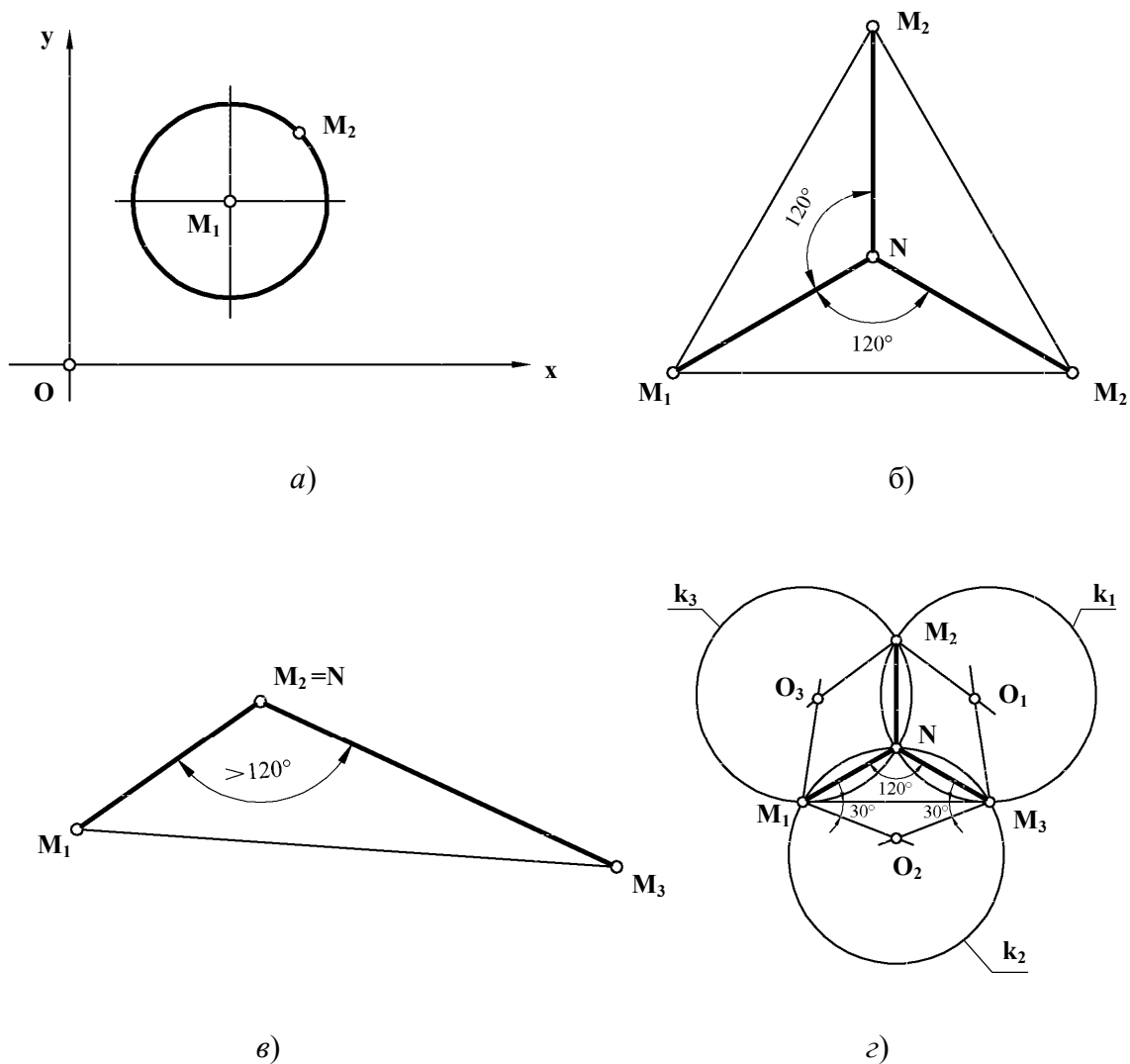


Рис. 1.2 Кратчайшее дерево Штейнера для 3-х точек

1) если у треугольника $M_1M_2M_3$ все углы меньше 120° , то искомое дерево состоит из трех отрезков, которые инцидентны одной точке и образуют между собой углы по 120° (рис.1.2, б);

2) если же один из углов треугольника $M_1M_2M_3$ равен или больше 120° , то искомое дерево состоит из двух отрезков. Например, на рис. 1.2. в угол $M_1M_2M_3 > 120^\circ$; в этом случае кратчайшее дерево состоит из двух ребер M_1M_2 и M_2M_3 .

Дополнительную точку (точку Штейнера) можно найти различными графическими построениями.

Способ трех окружностей. Можно построить окружность k_1 через точки M_2 и M_3 , так чтобы из ее центра отрезок M_2M_3 виден под углом в 120° . Аналогично, построены окружности k_2 и k_3 , проходящие через точки M_1, M_3 и M_1, M_2 . Тогда O_1, O_2, O_3 – центры этих окружностей, при пересечении которых получается искомая точка Штейнера N . Доказательство того, что указанные три окружности пересекаются в точке Штейнера, принадлежит Наполеону [62]. Центры O_1, O_2, O_3 определяются как точки пересечения прямых, проведенных через вершины M_1, M_2, M_3 треугольника $M_1M_2M_3$ и образующих углы в 30° с соответствующим сторонами треугольника $M_1M_2M_3$ (рис. 1.2, г). При этом радиусы R_1, R_2, R_3 окружностей k_1, k_2, k_3 следующие:

$$\begin{aligned} R_1 &= |O_1M_2| = |O_1M_3|, \\ R_2 &= |O_2M_1| = |O_2M_3|, \\ R_3 &= |O_3M_1| = |O_3M_2|. \end{aligned}$$

Способ равносторонних треугольников. Пусть задан треугольник $M_1M_2M_3$, углы которого меньше 120° (рис.1.3, а). На каждой стороне этого треугольника строим равносторонний треугольник (на стороне M_1M_2 – треугольник $M_1O_3M_2$, на стороне M_2M_3 – треугольник $M_2O_1M_3$ и на стороне M_1M_3 – треугольник $M_1O_2M_3$) таким образом, чтобы точки M_1 и O_1, M_2 и O_2, M_3 и O_3 располагались по разные стороны от соответствующих прямых M_2M_3, M_1M_3, M_1M_2 . Тогда прямые O_1M_1, O_2M_2 и O_3M_3 пересекаются в одной точке N – это и есть искомая точка Штейнера.

Комбинированный способ. На одной из сторон треугольника $M_1M_2M_3$ строим равносторонний треугольник, например треугольник $M_2M_3M_{2,3}$ на стороне M_2M_3 . Затем соединяем прямой точку M_1 с точкой $M_{2,3}$. На этой же стороне построим равнобедренный треугольник $M_2M_3O_1$, у которого углы при основании M_2M_3 равны 30° . Затем проводим окружность k_1 с центром в точке O_1 и радиусом $R_1 = |O_1M_2| = |O_1M_3|$. Прямая $M_1M_{2,3}$ и окружность k_1 пересекаются в точке N (искомая точка Штейнера) (рис. 1.3, б).

Способ треугольника. На одной из сторон треугольника $M_1M_2M_3$ строим равносторонний треугольник. Например, на рис.1,3, в построен равносторонний треугольник $M_1M_2M_{1,2}$, затем соединим вершину M_3 с найденной точкой $M_{1,2}$ и проводим прямую с помощью треугольника угол 60° к отрезку $M_3M_{1,2}$ через точку M_2 , пересекающую прямую $M_3M_{1,2}$ в искомой точке N . Во всех предыдущих случаях кратчайшее дерево состоит из трех ребер M_1N, M_2N, M_3N . При построении, приведенном на рис.1.3, в, возможны еще три случая:

1) точка N не принадлежит отрезку $M_3M_{1,2}$; при этом кратчайшее связывающее дерево совпадает с ломаной $M_1M_3M_2$ (рис.1.4, а);

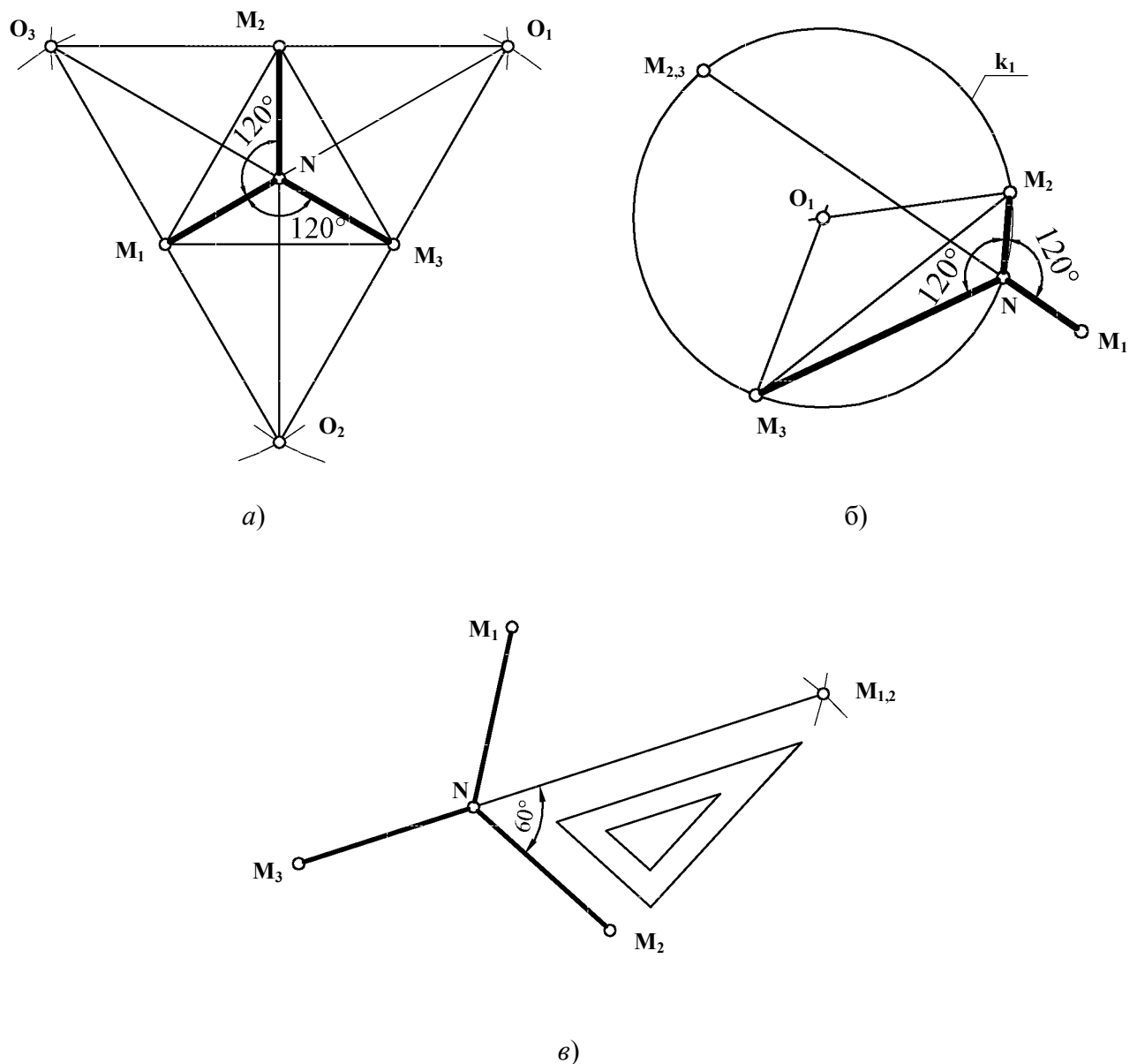


Рис. 1.3 Определение точки Штейнера различными способами

2) точка пересечения прямых $M_3 M_{1,2}$ и $M_1 M_2$ не принадлежит отрезку $M_1 M_2$, причем эта точка находится за точкой M_1 тогда кратчайшее связывающее дерево состоит из двух отрезков $M_3 M_1$ и $M_1 M_2$ (рис. 1.4, б);

3) точка пересечения прямых $M_3 M_{1,2}$ и $M_1 M_2$ не принадлежит отрезку $M_1 M_2$, причем эта точка находится за точкой M_2 ; тогда кратчайшее дерево совпадает с отрезками $M_1 M_2$ и $M_2 M_3$ (рис. 1.4, в).

Перед тем, как перейти к задачам на построение кратчайшего связывающего дерева для m компланарных точек, введем следующие необходимые понятия.

Пусть даны точки M_1, M_2, M_3 . Отрезок прямой $M_1 M_2$ является кратчайшим деревом для двух точек M_1 и M_2 . Если к этой сети присоединить третью точку M_3 , то новое кратчайшее связывающее дерево будет длиннее старой на величину ε , которую будем называть, удлинением.

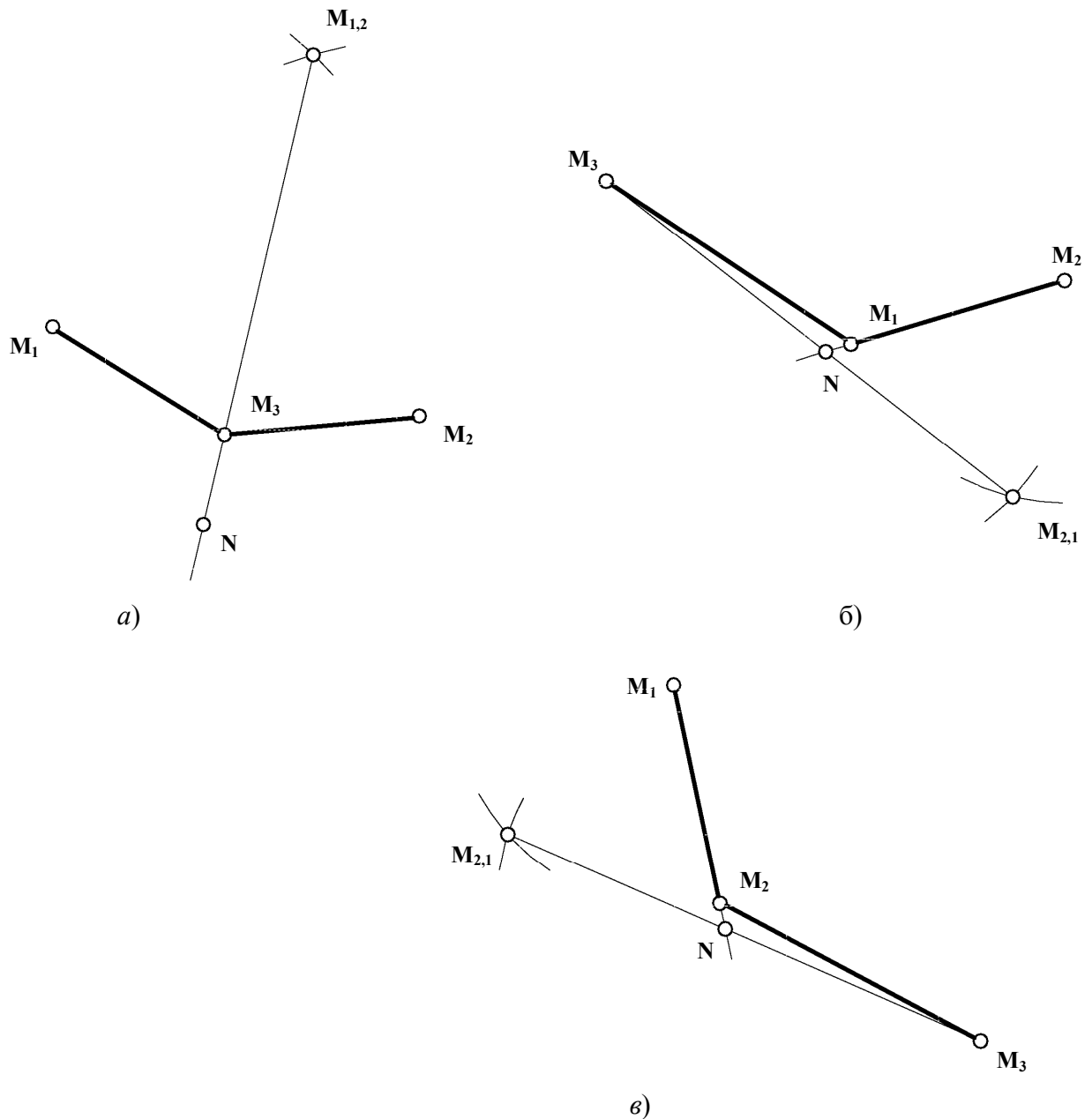


Рис. 1.4 Вырожденные случаи построения кратчайшего дерева для точек M_1 , M_2 , M_3

Для нахождения точки Штейнера достаточно построить два равносторонних треугольника $M_1M_2M_{1,2}$ и $M_2M_3M_{2,3}$ на сторонах M_1M_2 и M_2M_3 треугольника $M_1M_2M_3$. Точки $M_{1,2}$ и $M_{2,3}$ будем называть эквивалентными точками. Для отрезка M_1M_2 возможны две эквивалентные точки $M_{1,2}$ и $M_{2,1}$. Для ясности изложения при обозначении эквивалентных точек будем придерживаться следующего правила. Индекс эквивалентной точки должен соответствовать обходу треугольника по часовой стрелке. Таким образом, точка эквивалентная точкам M_1 и M_2 имеет индекс (1,2), если путь из точки M_1 через эквивалентную точку в точку M_2 совпадает с направлением движения часовой стрелки; если путь из точки M_1 через эквивалентную точку в точку M_2 не совпадает с направлением движения часовой стрелки, то эквивалентная точка должна иметь индекс (2,1).

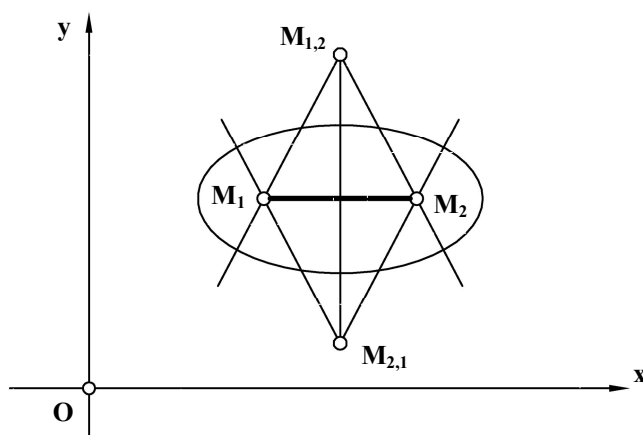


Рис. 1.5 Эквидистанционная линия для двух точек

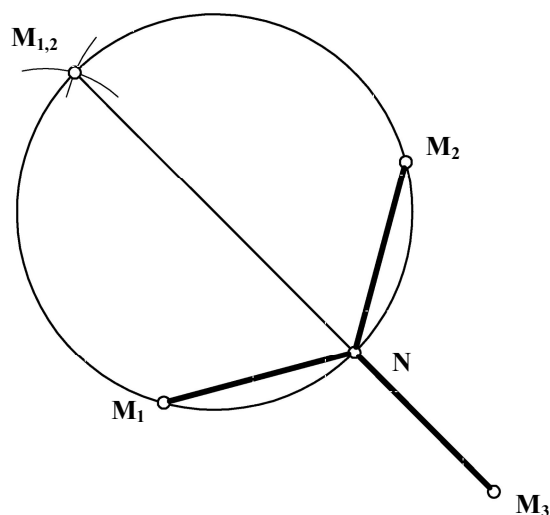


Рис. 1.6 Построение КДШ для трех точек

При разработке алгоритмов построения кратчайших связывающих линий на плоскости используются эквидистанционные линии и фрагменты. Методика построения эквидистанционных линий и фрагментов описана в работах [12,65,66].

Прежде чем привести определение эквидистанционной линии отметим, что поле чертежа вокруг КД рассматривается как скалярное поле. Любая точка этого скалярного поля характеризуется длиной кратчайшего дерева, получаемого в результате присоединения этой точки к имеющемуся дереву.

Эквидистанционной линией для $КД_m$ называется множество точек, в результате присоединения любой из которых к $КД_m$ мы получим $КД_{m+1}$ одной и той же длины. Разница между длинами деревьев $КД_m$ и $КД_{m+1}$ называется порядком эквидистанционной линии. Эквидистанционная линия порядка $\Delta 1$ для одной точки представляет собой окружность радиусом $\Delta 1$ и центром в этой точке плоскости. Эквидистанционная линия является замкнутой и состоит из дуг окружностей. Например, эквидистанционной линией для двух точек M_1 и M_2 будет четырехцентровый овал (рис. 1.5, а).

Построения эквидистанционных и кратчайших линий для 3-х точек. Эквидистанционную линию можно проводить на любом расстоянии от заданного геометрического элемента. Например, можно проводить эквидистанту на расстоянии, равным единице длины или двум единицам длины и т.д. Соответственно, эквидистанту будем называть эквидистанционной линией первого порядка, второго порядка и т. д. Эквидистанционная линия дает возможность заранее определить длину кратчайшего дерева, получаемого в результате присоединения некоторой третьей точки M_3 к заданным двум точкам. Величина этого удлинения равна:

$$d=p+\Delta l, \quad (1.2)$$

где p – расстояние от точки до эквидистанционной линии;

Δl – порядок этой эквидистанционной линии.

Эквидистанционная линия дает возможность также установить удлинение, получаемое в результате объединения двух кратчайших деревьев, и указывает как нужно их соединить с тем, чтобы получить объединенное дерево кратчайшей длины. Расстояние между точкой и эквидистанционной линией нулевого порядка или между двумя эквидистанционными линиями нулевых порядков равно удлинению кратчайшего дерева. Поэтому для определения удлинения кратчайшего дерева и его построения удобно пользоваться эквидистанционными линиями нулевого порядка. Эквидистанционную линию нулевого порядка будем называть фрагментом. Понятие фрагмента позволяет сравнить расстояние между геометрическими элементами (точками, отрезками и кратчайшими деревьями).

Пусть требуется построить связывающие заданные точки M_1 , M_2 и M_3 линию кратчайшей длины. Применим комбинированный способ построения точки Штейнера. Точка $M_{1,2}$ определяется как вершина равностороннего треугольника, построенного на отрезке M_1M_2 , причем точки $M_{1,2}$ и M_3 должны располагаться на разных сторонах от прямой M_1M_2 (рис.1.6).

Тогда точка пересечения прямой $M_{1,2}M_3$ и окружности, описанной вокруг треугольника $M_{1,2} M_1M_2$, будет точкой Штейнера. Структура КДШ для трех точек имеет следующий вид:

$$M_1 - N \begin{cases} \nearrow M_2 \\ \searrow M_3 \end{cases}$$

Сумма длин отрезков M_1N и M_2N равна длине отрезка $M_{1,2}N$. Это следует из того, что произведение диагоналей четырехугольника, вписанного в окружность, равно сумме произведений противоположных сторон. Для четырехугольника $M_{1,2}M_1NM_2$, вписанного в окружность, имеем следующее: $[M_{1,2}N]$, $[M_1M_2]$ – диагонали; $[M_1N]$ и $[M_{1,2}M_2]$, $[M_2N]$ и $[M_{1,2}M_1]$ – противоположные стороны этого четырехугольника. Поэтому:

$$|M_{1,2}N| \cdot |M_1M_2| = |M_1N| \cdot |M_{1,2}M_2| + |M_2N| \cdot |M_{1,2}M_1|.$$

Треугольник $M_{1,2} M_1M_2$ – равносторонний, т.е. $|M_1M_2| = |M_{1,2} M_2| = |M_{1,2} M_1|$. Тогда $|M_{1,2} N| = |M_1N| + |M_2N|$. Отсюда следует, что длина КДШ равна длине отрезка $|M_{1,2} M_3|$:

$$|M_1N| + |M_2N| + |M_3N| = |M_{1,2}M_3|.$$

Это очень важное положение указывает на возможность определения длины связывающей линии еще до построения КДШ.

Рассмотрим дистанционное поле точек M_1 и M_2 (рис.1,7) [66].

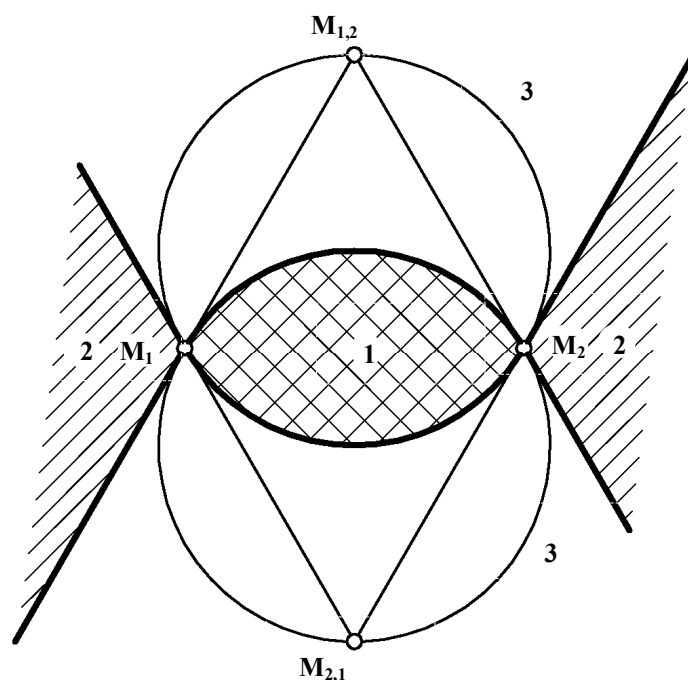


Рис. 1.7. Дистанционное поле двух точек

Плоскость делится на три области, которые строятся следующим образом. Проводятся две окружности, описанные вокруг равносторонних треугольников $M_{1,2}M_1M_2$ и $M_{2,1}M_1M_2$, и четыре прямых $M_{1,2}M_1$, $M_{1,2}M_2$, $M_{2,1}M_1$ и $M_{2,1}M_2$. Область 1 представляет собой луну, образованную пересечением двух построенных кругов, а область 2 – два клина с углами при вершине в 120° . Прямая M_1M_2 служит биссектрисой этого угла. Вся остальная часть плоскости чертежа образует область 3. Тогда M_3 находится в одной из этих областей. Если она расположена в области 1, то ее соединяют отрезками прямых точками M_1 и M_2 . КДШ имеет следующую структуру: $M_1-M_3-M_2$. Область 1 называется радиальной. Если точка M_3 расположена в области 2, то ее следует соединить с ближайшим соседом M_1 или M_2 : $M_3-M_1-M_2$ или $M_3-M_2-M_1$. Область 2 называется магистральной, а область 3 – трехлучевой. Для точки, расположенной в области 3, длина кратчайшей линии определяется измерением отрезка $M_3M_{2,1}$ или $M_3M_{1,2}$. Эта прямая ($M_3M_{1,2}$ или $M_3M_{2,1}$) пересекается с границей радиальной зоны в точке Штейнера. КДШ имеет следующую структуру:

$$M_3-N \begin{cases} M_2 \\ M_1 \end{cases}$$

Для точек, расположенных в зонах 1 и 2, не существует точки Штейнера. Поэтому области 1 и 2 образуют вырожденную зону, а область 3 образует невырожденную зону.

Для аналитического решения задачи Штейнера [69] надо иметь формулу для определения координат точки эквивалентной исходным точкам.

Координаты точки $M(x, y)$, образующей с данными точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ равносторонний треугольник MM_1M_2 вычисляются по формулам:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Где

$$\begin{aligned} a &= 1 + \left(\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \right)^2; \quad b = x_1 + x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2 (x_1 + x_2)}{(y_2 - y_1)^2}; \\ c &= \left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{2(y_2 - y_1)} \right)^2 - \frac{3}{4}(y_2 - y_1)^2 - \frac{x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2}{2}; \\ y &= -\frac{y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{2(y_2 - y_1)} - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \end{aligned}$$

Если точки M_1 и M_2 расположены на одной горизонтальной прямой, то $y_1 = y_2 = y_0$. Поэтому:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ и } y = y_0 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_1)$$

Аналогично, при вертикальном расположении прямой M_1M_2 имеем, что $x_1 = x_2 = x_0$. Тогда

$$x = x_0 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(y_2 - y_1) \text{ и } y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

1.4 Основные свойства КДШ для m точек плоскости

Используя необходимые условия, можно получить основные свойства кратчайшего дерева Штейнера (КДШ) [62,77,78]. Ниже приведены некоторые из этих свойств [15].

Число точек Штейнера. Число вершин дерева больше числа ребер на единицу. Пусть число исходных точек равно m , а число точек Штейнера – n в КДШ. Тогда число ребер дерева будет равно $m+n-1$. Каждое ребро соединяет две вершины, поэтому число вершин КДШ составляет $2(m+n-1)$. Пусть m_1 – число исходных точек, служащих концом только одного ребра, m_2 – число исходных точек, служащих концом двух ребер и m_3 – число исходных точек, служащих концом трех ребер. Тогда:

$$\begin{aligned} 2(m+n-1) &= m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 3n; \quad m_1 + m_2 + m_3 = m; \\ 2m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 2n - 2 &= m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 3n; \\ n &= m_1 - m_3 - 2 \Rightarrow n \leq m - 2. \end{aligned}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда каждая неподвижная вершина имеет ровно одно ребро.

Полные деревья Штейнера. Топология, соответствующая случаю $n \equiv m-2$, называется полной топологией; аналогично КДШ с полной топологией называется полным деревом Штейнера (ПДШ). Как уже отмечалось, топология будет полной тогда, когда каждая заданная точка M_i является тупиком. Если $m \geq 3$, то ребро из M_i ведет в точку Штейнера, так как число точек Штейнера равно максимально возможному.

Лунное свойство КДШ. Пусть $[M_i, M_j]$ произвольное ребро КДШ. Обозначим через $L(M_i, M_j)$ область, состоящую из точек M , таких, что $|MM_i| < |M_i M_j|$ и $|MM_j| < |M_i M_j|$. Область $L(M_i, M_j)$ есть лунная область, образованная пересечением двух кругов радиуса $|M_i M_j|$ с центрами соответственно в точках M_i и M_j . В лунной области нет вершин КДШ, она так же не должна содержать внутренних точек ребер дерева, отличных от точек отрезка $M_i M_j$.

Расстояние между точками Штейнера. Если N_1 и N_2 – точки Штейнера, непосредственно соединенные между собой в КДШ, то вершины N_1 и N_2 инцидентны, кроме ребра $N_1 N_2$, еще четырем ребрам. Пусть самое короткое из этих четырех ребер имеет длину a_0 . Тогда можно доказать, что $|N_1 N_2| \geq (\sqrt{3} - 1)a_0$.

Свойства клина. Рассмотрим клинообразную область K с углом в 120° или больше, не содержащую вершин $M_1, M_2, \dots, M_m$. Тогда область K не содержит точек Штейнера в относительно кратчайшем дереве.

Свойства бриллианта. Пусть $[M_i, M_j]$ ребро КДШ. Построим ромб с углами $60^\circ, 120^\circ$ и большой диагональю $[M_i, M_j]$. Внутренность этого ромба называется бриллиантом ребра $[M_i, M_j]$ и обозначается $B(M_i - M_j)$. Если построить бриллиант относительно каждого ребра КДШ, то можно доказать, что никакие два бриллианта не пересекаются.

1.5 Основные формулы для подсчета числа связывающих деревьев для компланарного множества точек

Задача на построение КДШ для заданного конечного множества из m точек плоскости является комбинаторной задачей, имеющей множество локальных экстремумов. Комбинаторные задачи могут быть решены на трех уровнях [62].

На первом уровне доказывается существование конфигурации, обладающей заранее заданными свойствами. Выше было отмечено, что эта задача решена Мельзаком [2].

На втором уровне находится общее число конфигураций, удовлетворяющих наперед заданным свойствам.

На третьем уровне решения комбинаторных задач получают алгоритмы отыскания из всех решений оптимального решения по тем или иным критериям.

Обозначим число связывающих заданное множество из m точек линий через $N(m,n)$, где n - число дополнительно вводимых вершин. При $n=0$ число связывающих линий, претендующих на КДП, для m точек может быть вычислено по формуле [62,65]

$$N(m,0)=(m-2)!C_m^2. \quad (1.3)$$

Добавление специально подобранных точек (точек Штейнера) к данным позволяет уменьшить длину связывающих линий. Число дополнительно вводимых точек для КДШ с m фиксированными вершинами, как показано в предыдущем параграфе, не превышает $(m-2)$. Число связывающих заданные фиксированные точки деревьев, претендующих на полное кратчайшее дерево Штейнера (ПКДШ), равно

$$N(m,(m-2)) = \sum_{i=2}^{i=m-1} (2i-3) \quad (1.4)$$

Мы рассмотрели два предельных случая, когда не добавляется ни одна дополнительная точка и когда число дополнительных точек равно максимально возможному. Теперь рассмотрим промежуточный вариант, т.е. подсчитаем число связывающих m заданных и n ($0 \leq n \leq m-2$) дополнительных вершин деревьев.

$$N(m,n) = \frac{(m+n-2)!C_m^{n+2}}{n!2^n} \quad (1.5)$$

Если мы хотим определить КДШ для заданного компланарного множества из m точек путем перебора всех возможных вариантов, то нам придется определить длины всех допустимых связывающих линий с $0, 1, 2, \dots, (m-2)$ дополнительными вершинами. Тогда число сравниваемых вариантов вычисляем по формуле:

$$N(m) = \sum_{n=0}^{n=m-2} \frac{(m+n-2)!C_m^{n+2}}{n!2^n} \quad (1.6)$$

Приведенные формулы (1.3), (1.4), (1.5) и (1.6) получены путем применения комбинаторики. Например, для получения выражения (1.4) использовано основное правило комбинаторики (правило умножения), а для вывода выражения (1.5) - метод производящих функций

Для того, чтобы иметь наглядное представление о количестве возможных связывающих деревьев, подсчитаем с помощью приведенных формул число всех топологий, подлежащих сравнению, для $n=1, 2, \dots, 8$. Результаты сведены в табл.1.1.

Таблица 1.1.

Число связывающих деревьев

Число точек Штейнера (n) Число заданных точек (m)	0	1	2	3	4	5	6	Общее число связывающих деревьев
3	3	1						4
4	12	12	3					27
5	60	120	75	15				270
6	360	1200	1350	630	105			3645
7	2520	12600	22050	17640	6615	945		62370
8	20160	141120	176400	423360	264600	83160	5775	1114675

Как видно из табл.1.1, число связывающих линий для 8 точек превышает миллион. Отсюда ясно, что перебор всех возможных вариантов при $p > 7$ невозможен даже для современных ЭВМ.

1.6 Построение кратчайших связывающих линий для четырех и пяти точек

Рассмотрим только полные компоненты. Тогда исходные точки образуют выпуклый многоугольник. Если $m=4$, то $n=2$. Из трех возможных вариантов ПДШ сравнению подлежат два (рис. 1.8). Эти варианты представлены на рис.1.7 а, б. Дерево, представленное на рис. 1.8, а, построено следующим образом: определены эквивалентные точки $(M_{2,1})$ и $(M_{4,3})$. Первая из них эквивалентна точкам M_1 и M_2 , а вторая – точкам M_3 и M_4 . При обозначении эквивалентных точек будем исходить из того, что вершины равносторонних треугольников обходим по часовой стрелке. Например, эквивалентная точкам M_3 и M_4 , точка $(M_{4,3})$ располагается на правой стороне от прямой M_3M_4 , если идти из точки M_3 в точку M_4 . Эквивалентная точкам M_1 и M_2 точка $(M_{2,1})$ расположена на левой стороне от прямой M_1M_2 , если идти из точки M_2 в точку M_1 . Длина отрезка, соединяющего точки $(M_{2,1})$ и $(M_{4,3})$, определяет длину КДШ. Действительно, что

$$|M_1N_1| + |M_2N_1| = |M_{2,1}N_1| \quad \text{и} \quad |M_3N_2| + |M_4N_2| = |M_{4,3}N_2|.$$

Поэтому

$$|M_1N_1| + |M_2N_1| + |N_1N_2| + |M_3N_2| + |M_4N_2| = |M_{2,1}M_{4,3}|.$$

Дерево, представленное на рис.1.8, б, построено в результате определения эквивалентных точек $(M_{3,2})$ и $(M_{1,4})$. Длина КДШ для этого варианта равна длине отрезка $[M_{3,2}M_{1,4}]$. Действительно, что

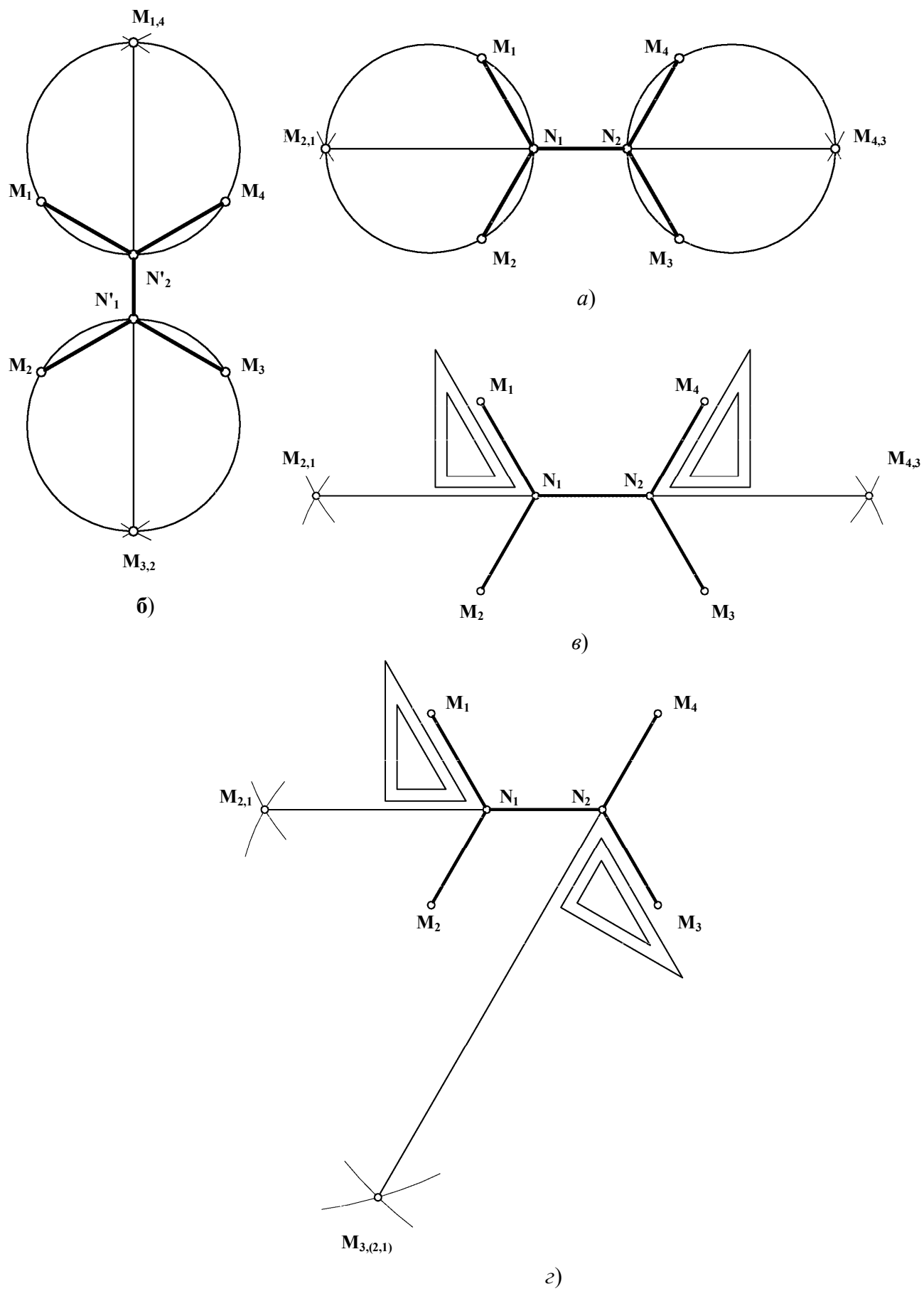


Рис. 1.8 Построение кратчайших линий для 4- точек

$$|M_2N_1'| + |M_3N_1'| = |M_{3,2}N_1'| \text{ и } |M_1N_2'| + |M_4N_2'| = |M_{1,4}N_2'|.$$

Поэтому

$$|M_2N_1'| + |M_3N_1'| + |N_1'N_2'| + |M_1N_2'| + |M_4N_2'| = |M_{3,2}M_{1,4}|.$$

Сравнение длин двух кратчайших деревьев показывает, что $|M_{2,1}M_{4,3}| > |M_{1,4}M_{3,2}|$. Поэтому кратчайшим будет дерево, представленное на рис. 1.8, б.

При построении КДШ нет необходимости в построении окружностей, описанных вокруг соответствующих треугольников. Например, при построении КДШ на рис. 1.8, в поступаем следующим образом. Определяются эквивалентные точки $(M_{2,1})$ и $(M_{4,3})$, которые соединяют между собой прямой линией. Затем с помощью неравнобедренного чертежного угольника через точки M_1 и M_4 проводятся прямые, образующие с прямой $(M_{2,1}M_{4,3})$ углы в 60° (как показано это на рис. 1.8, в). Найденные точки Штейнера соединяются отрезками прямых соответственно с точками M_2 и M_3 . КДШ₄ может быть получено и другими способами. Заслуживает внимания, например, такая последовательность решения этой задачи: определяется эквивалентная точка $M_{2,1}$, а затем точка $M_{3,(2,1)}$, эквивалентная точкам $M_{2,1}$ и M_3 ; эта точка $M_{3,(2,1)}$ соединяется отрезком прямой с точкой M_4 , а через точку M_3 проводится под углом 60° по отношению прямой $M_{3,(2,1)}M_4$ прямая, которая пересекает ее в точке N_2 (рис. 1.8, г). Затем проводится прямая $M_{2,1}N_2$, а через точку M_1 проводится прямая, образующая угол в 60° с ней. Последние две прямые пересекаются в точке N_1 . После этого остается соединить точки N_1 и M_2 отрезком прямой. При этом КДШ₄ имеет следующую структуру:

$$\begin{array}{c} M_1 \backslash \quad \quad / M_4 \\ \quad N_1 - N_2 \\ M_2 / \quad \quad \backslash M_3. \end{array}$$

Для заданного множества из пяти точек существует 270 различных структур связывающих линий, из которых только 15 являются ПДШ. Доказано, что исходные вершины ПДШ образуют выпуклый пятиугольник. Рассмотрим точки M_1 , M_2 , M_3 , M_4 и M_5 , расположенные в вершинах выпуклого многоугольника (рис. 1.9).

В этом случае имеется возможность рассмотреть все возможные варианты и в результате такого полного перебора определить КДШ. Если исходные вершины пронумеровать так, чтобы $|M_1M_2| < |M_2M_3| < |M_3M_4| < |M_4M_5|$, то можно предложить такое построение: определяются эквивалентные точки $M_{1,2}$, $M_{(1,2),3}$, $M_{((1,2),3),4}$, которые являются вершинами равносторонних треугольников $M_1M_{1,2}M_2$, $M_{1,2}M_{(1,2),3}M_3$ и $M_{(1,2),3}M_{((1,2),3),4}M_4$.

Последняя эквивалентная точка соединяется отрезком прямой с точкой M_5 . Тогда прямая, проведенная через точку M_4 под углом 60° , пересекает прямую $M_5M_{((1,2),3),4}$ в точке N_3 . Точка N_3 соединяется с точкой $M_{(1,2),3}$, а через

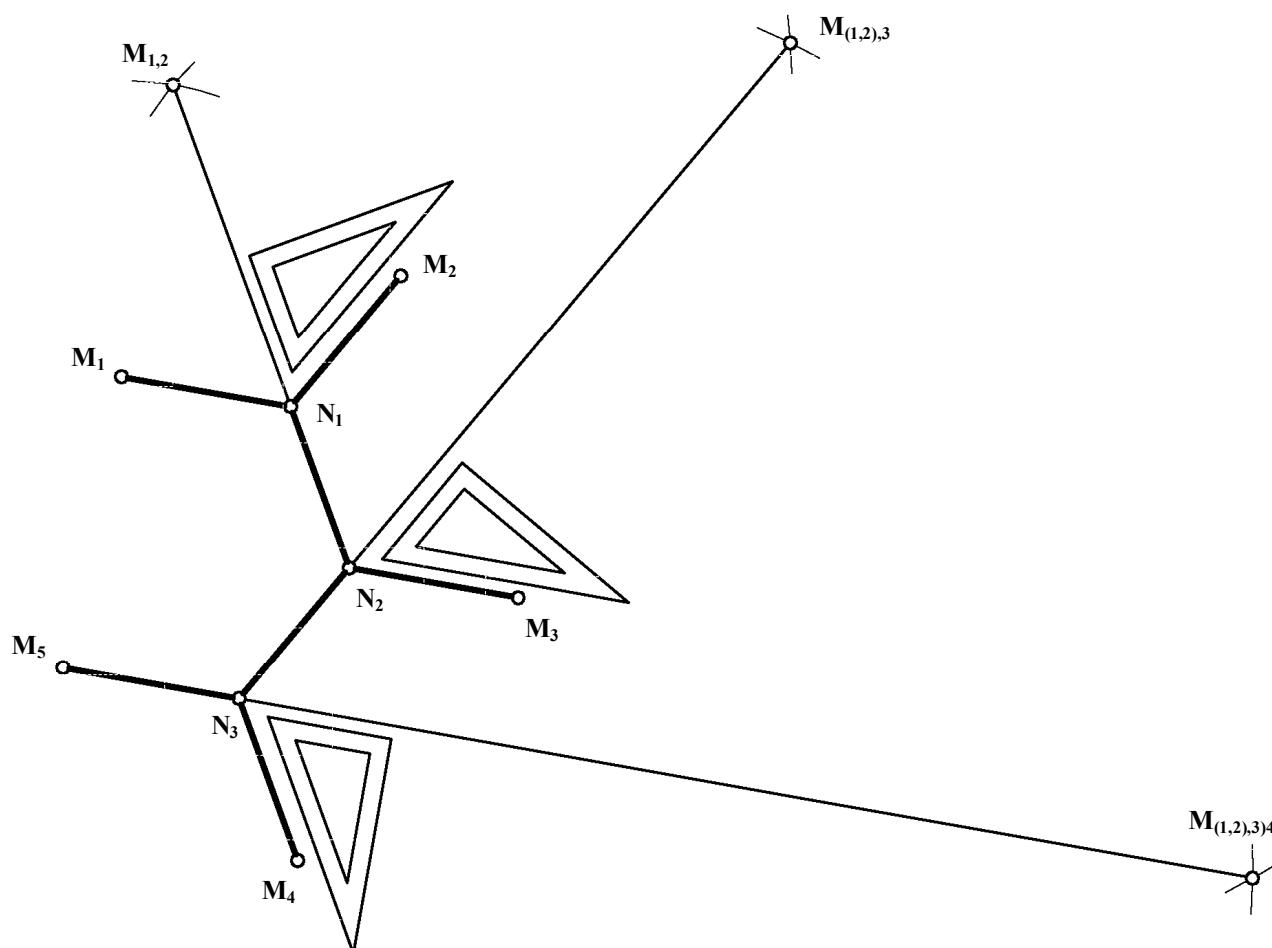


Рис. 1.9. Построение ПДШ для пяти точек

точку M_3 проводится прямая под углом 60° к прямой $N_3 M_{(1,2),3}$, которая пересекает последнюю прямую в точке N_2 . Проводим прямую $N_2 M_{2,1}$, а через точку M_2 - прямую, образующую с ней угол в 60° . Вершина этого угла N_1 соединяется с точкой M_1 . Тогда получаем КДШ₅ со следующей структурой:

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \backslash & N_1 - N_2 & / & M_3 \\ & M_2 & & N_3 & / M_4 \\ & & & & M_5 \end{array}$$

Можно доказать, что отрезок $M_5 M_{((2,1),3),4}$ определяет длину КДШ₅:

$$|M_1 N_1| + |M_2 N_1| + |N_1 N_2| + |M_3 N_2| + |N_2 N_3| + |N_3 N_4| + |M_5 N_3| = |M_5 M_{((2,1),3),4}|.$$

Построение ПКДШ для 6, 7 и 8 точек можно выполнить аналогичным способом. Однако при практических приложениях полные компоненты, состоящие из 6, 7 и 8 точек, встречаются крайне редко.

1.7 Алгоритм построения кратчайших связывающих линий для m точек плоскости

Пусть на плоскости задано множество точек $M_1, M_2, \dots, M_m$. Требуется соединить их линией кратчайшей длины.

Решение задачи рассматриваем как многоступенчатый управляемый процесс. Исходя из принципа наименьшего удлинения, можно сформулировать следующий алгоритм построения дерева кратчайшей длины, проходящего через заданное множество компланарных точек [12, 65, 68, 80, 82, 83].

1. Выбираются две точки M_i и M_j , расстояние между которыми не больше, чем для любой другой пары. Строится КДШ₂.

2. Каждая последующая ступень алгоритма заключается в переходе от КДШ_t, построенного для группы из t точек, к КДШ_{t+1} для группы из $t+1$ точек. При этом определяются: а) очередная $t+1$ -ая точка, которая должна быть подключена к дереву; б) конфигурация КДШ_{t+1}, к которому ранее найденное КДШ_t войдет, в общем случае, уже частично в деформированном виде.

3. После построения КДШ_t может возникнуть необходимость соединения на следующей ступени двух близких друг к другу точек, не вошедших в КДШ_t и дающих начало новой группе соединяемых точек, т.е. образуется новое кратчайшее поддерево. Такие поддеревья должны объединяться между собой в порядке, устанавливаемом на основе принципа наименьшего удлинения КДШ_t при каждой отдельной ступени его построения.

Для определения очередной точки, которую нужно подключить к КДШ_t, и конфигурации КДШ_{t+1} следует построить эквидистанционную линию или фрагмент.

Предлагается методика построения кратчайших связывающих линий для точек плоскости, основанная на разбиении данного множества на полные компоненты (подмножества) [64]. Преимущество такого подхода проявляется при работе на графических системах в диалоговом режиме. Данные точки просвечиваются на экране дисплея. Специалист на основе такого визуального осмотра предлагает несколько вариантов разбиения исходных вершин на полные компоненты. С помощью ЭВМ определяются КДШ для каждого компонента в отдельности. После этого специалист, сравнивая различные варианты, принимает решение.

Сущность предлагаемого метода можно показать на следующем примере (рис. 1.10).

Пусть требуется построить КДШ для точек $M_1(9,9)$; $M_2(2,8)$; $M_3(4,7)$; $M_4(0,5)$; $M_5(12,5)$; $M_6(5,4)$; $M_7(7,4)$; $M_8(2,1)$ и $M_9(11,0)$.

Данные точки просвечиваются на экране дисплея. Специалист визуально изучает расположение точек и на основе свойств КДШ разбивает их на подмножества. Точки нашего примера могут быть разбиты на три подмножества. Первое подмножество состоит из точек M_2, M_3, M_4, M_6, M_8 ; второе подмножество – из точек M_6, M_7 ; третье подмножество из точек – M_1, M_5, M_7, M_9 .

КДШ₅ имеет минимальную длину. Выбранное КДШ₅ построено на рис. 1.10. Имеет следующую структуру:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & M_3 & & & \\ & & / & & & & \\ M_2 - N_1 & & \backslash & & / & M_6 & \\ & & & N_2 & & & \\ & & & \backslash & & / & M_4 \\ & & & & N_3 & \backslash & \\ & & & & & & M_8. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \backslash & & / & M_7 \\ & & N_5 - N_4 & & \\ M_5 & / & & \backslash & M_9. \end{array}$$

Длина КДШ₉ равна сумме длин подмножества КДШ₅, КДШ₂ и КДШ₄. Длина первого КДШ равна длине отрезка $M_{((2, 3), 6), 8} M_4$, длина второго – длине отрезка $M_6 M_7$ и длина третьего - длине отрезка $M_{1, 5} M_{9, 7}$. Поэтому для КДШ₉ имеем, что его длина состоит из трех слагаемых:

$$|M_4 M_{((2, 3), 6), 8}| + |M_6 M_7| + |M_{1, 5} M_{9, 7}|.$$

Полученный алгоритм построения КДШ используется при проектировании транспортных схем ПРТС работ. Такая технология проектирования транспортных сетей на диалоговом режиме позволяет оптимально использовать возможности специалистов и вычислительной техники.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЙ Я. ШТЕЙНЕРА

2.1 О проблеме Я. Штейнера

В научной литературе принято называть проблемой Штейнера задачу на построение линии, связывающей три неколлинеарные точки, наименьшей протяженности. Линия, удовлетворяющая условию задачи, представляет собой совокупность отрезков прямых, так как геодезической линией плоскости является прямая. Кроме того, связывающая три точки линия кратчайшей длины в общем случае получается путем добавления четвертой точки. Поэтому эта задача принимает следующий вид: даны три точки M_1 , M_2 и M_3 ; требуется найти положение четвертой точки N этой плоскости (определяемой точками M_1 , M_2 и M_3) с тем, чтобы сумма длин отрезков от этой точки до заданных точек была минимальной, т.е.

$$|M_1N| + |M_2N| + |M_3N| = \min.$$

Эту задачу изучали до Штейнера Э. Торричелли (1608-1647) и П. Ферма (1601-1665). Поэтому точка N носит название «точка Торричелли», «точка Ферма». Однако, они решили эту задачу только для остроугольного треугольника. Точка N называется нами точкой Штейнера.

В этой работе проблемой Штейнера названа геометрическая задача на построение линии, проходящей через заданное компланарное множество точек $M_1, M_2, \dots, M_m$ и имеющей кратчайшую длину. Очевидно, что искомая кратчайшая линия представляет собой дерево с вершинами в заданных точках $M_1, M_2, \dots, M_m$ и в дополнительно вводимых точках $N_1, N_2, \dots, N_n$, которых назовем соответственно M -точками и N -точками. M -точки иногда называют неподвижными, а N -точки – подвижными, так как количество и координаты последних заранее неизвестны. Ветви дерева представляют собой геодезические линии, соединяющие две точки из множества $M_1, M_2, \dots, M_m, N_1, N_2, \dots, N_n$.

Теоретическое решение этой проблемы основано на построении Штейнера, сущность которого сводится к следующему. Пусть точки M_1, M_2 и M_3 образуют треугольник, у которого любой из трех внутренних углов меньше 120° . Строят равносторонний треугольник на одной стороне этого треугольника $M_1M_2M_3$, например на стороне $[M_1M_2]$. Пусть точка $M_{1,2}$ третья вершина равностороннего треугольника. Тогда точка пересечения окружности, описанной вокруг треугольника $M_1M_2M_{1,2}$, и прямой $M_3M_{1,2}$ будет N -точкой. При этом решением задачи Штейнера для точек M_1, M_2, M_3 будет дерево, имеющее 4 вершины (M_1, M_2, M_3 и N) и три ветви ($[M_1N], [M_2N], [M_3N]$). Любая сторона треугольника $M_1M_2M_3$ из точки N будет видна под углом 120° . Если один из внутренних углов треугольника $M_1M_2M_3$ равен или больше 120° , например при вершине M_2 , то точка N совпадает с этой вершиной ($N=M_2$). Тогда искомое дерево имеет три вершины и две ветви ($[M_1M_2], [M_2M_3]$).

Линию, соединяющую точки $M_1, M_2, \dots, M_m$ и имеющую наименьшую протяженность назовем кратчайшим деревом Штейнера (КДШ).

КДШ обладает следующими необходимыми свойствами:

- С1) КДШ не имеет самопересекающихся ветвей;
- С2) в каждой М-точке сходятся не более трех ветвей КДШ;
- С3) в каждой N-точке сходятся ровно три ветви;
- С4) число неподвижных и подвижных вершин КДШ связаны между собой неравенством $n \leq m-2$;
- С5) каждая подвижная точка является N-точкой треугольника, образованного точками, которые непосредственно связаны с этой N-точкой КДШ.

Множество кратчайших деревьев, удовлетворяющих перечисленным пяти свойствам, может быть построено при помощи конечного числа построений Штейнера. В этой главе приведены результаты исследований следующих обобщений Я. Штейнера:

- построение минимального дерева, связывающего конечное компланарное множество точек;
- проблема Я. Штейнера на поверхности в пространстве E_3 ;
- построение КДШ для компланарного множества плоских фигур.

2.2 Построение минимального дерева, связывающего заданные точки

Дано множество точек $M_1, M_2, \dots, M_m$ на плоскости E_2 , каждой из которых сопоставлена некоторая положительная величина p_i , $i=1,2,\dots,m$. Величину p_i назовем весом точки M_i . Требуется определить число n , расставить на плоскости E_2 n дополнительных точек и построить дерево минимального веса с вершинами в точках $M_1, M_2, \dots, M_m, N_1, N_2, \dots, N_n$. Весом ветви $[M_i M_j]$ называется величина $p_i \cdot |M_i M_j|$, а весом дерева – сумма весов всех ветвей этого дерева.

Дерево, удовлетворяющее условиям сформулированной задачи, назовем минимальным деревом (МД).

Сначала рассмотрим такую задачу: даны три неколлинейные точки M_1, M_2 , и M_3 весами p_1, p_2 и p_3 , соответственно; требуется найти такую точку N , чтобы она соответствовала минимальной величине суммы произведений расстояний от заданных точек до точки N на постоянные коэффициенты p_i :

$$p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 = f, \quad (2.1)$$

где $l_i = |M_i N|$ - расстояние от точки M_i до точки N ; p_i – вес точки M_i .

Нетрудно убедиться, что эта задача является обобщением проблемы Штейнера. В самом деле, если $p_1 = p_2 = p_3 = p$, то

$$\sum_{i=1}^3 p_i \cdot l_i = p \cdot \sum_{i=1}^3 l_i.$$

Из последнего равенства видно, что следует минимизировать при этом сумму расстояний, как и в проблеме Штейнера. Произведение $p_i l_i$ можно рассматривать как обобщенное расстояние, а функцию f – как обобщенную суммарную длину дерева. Тогда задачу можно сформулировать следующим образом: даны три точки; требуется построить дерево с вершинами в этих точках, которое имело бы суммарную обобщенную минимальную длину. При этом дерево может иметь сколько угодно дополнительных вершин, если добавление этих дополнительных вершин приводит к уменьшению суммарной длины.

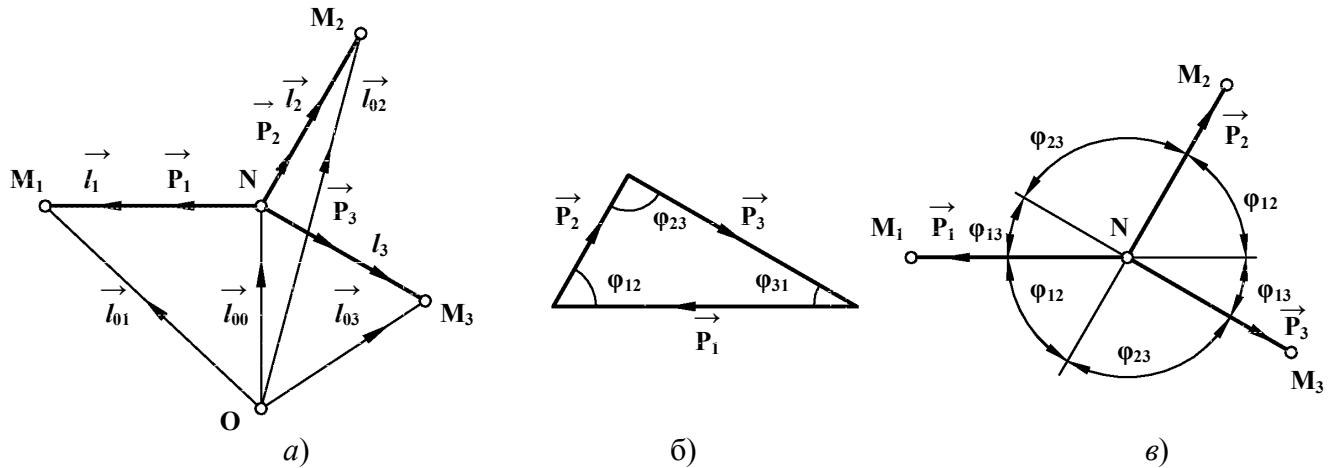


Рис. 2.1 а) векторы расстояний и весов; б) треугольник векторов; в) углы между векторами

Каждому положению точки N соответствует определенное значение функции f , которое мы отнесем к этой точке плоскости. Таким образом, вокруг точек M_1, M_2 и M_3 образуется скалярное поле, потенциалом которого служит функция f . По некоторым причинам более целесообразно каждое слагаемое функции f представить в виде скалярного произведения двух векторов, что вполне можно сделать. С этой целью расстояние от точки M_i до точки N рассматривается как вектор с начальной точкой N и конечной точкой M_i . А также условно вводится «векторы весов» $\vec{p}_i$, направление которых совпадает с направлением соответствующих векторов расстояний. Тогда

$$f = \vec{p}_1 \cdot \vec{l}_1 + \vec{p}_2 \cdot \vec{l}_2 + \vec{p}_3 \cdot \vec{l}_3. \quad (2.2)$$

Берем на плоскости точек M_1, M_2 и M_3 произвольную точку O и вводим векторы $\vec{l}_{01}, \vec{l}_{02}, \vec{l}_{03}$ и $\vec{l}_{00}$ (рис. 2.1, а). Теперь выражение (2.2) можно переписать в виде:

$$f = \vec{p}_1 \cdot (\vec{l}_{01} - \vec{l}_{00}) + \vec{p}_2 \cdot (\vec{l}_{02} - \vec{l}_{00}) + \vec{p}_3 \cdot (\vec{l}_{03} - \vec{l}_{00}) = \vec{p}_1 \cdot \vec{l}_{01} + \vec{p}_2 \cdot \vec{l}_{02} + \vec{p}_3 \cdot \vec{l}_{03} - \vec{l}_{00} \cdot (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3).$$

Векторы $\vec{p}_i$ по определению всегда коллинейны с вектором $\vec{l}_i$, а их модули

остаются постоянными при перемещении точки N. Свойства векторов $\vec{p}_i$ позволяют нам однозначно определить скалярное деление и градиент потенциала скалярного поля запишется в следующем виде:

$$\text{grad}f = \frac{df}{dl_{00}} = -(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3). \quad (2.3)$$

Экстремум потенциала скалярного поля, соответствующий минимуму функции f , будет при таком положении точки N, когда $\text{grad} f = 0$. Следовательно, минимум функции f наступит при

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0, \quad (2.4)$$

т.е. векторы весов образуют треугольник (рис. 2.1,б). Величины p_1 , p_2 и p_3 можно задать в виде трех отрезков произвольной длины. Для того чтобы три произвольных отрезка образовали треугольник, они должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$p_1 + p_2 > p_3; \quad p_1 + p_3 > p_2; \quad p_2 + p_3 > p_1.$$

Последние неравенства являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы точка N находилась внутри треугольника $M_1M_2M_3$. Если одно из приведенных неравенств не выполняется, например $p_2 + p_3 \leq p_1$, то точка N совпадает с одной из заданных точек, и в нашем случае с вершиной M_1 . Из треугольника весов можно определить углы:

$$\varphi_{12} = \arcsin \frac{\sqrt{\Delta}}{2p_1p_2}; \quad \varphi_{23} = \arcsin \frac{\sqrt{\Delta}}{2p_2p_3}; \quad \varphi_{13} = \arcsin \frac{\sqrt{\Delta}}{2p_1p_3}, \quad (2.5)$$

$$\text{где } \Delta = 2p_1^2 \cdot p_2^2 + 2p_1^2 p_3^2 + 2p_2^2 p_3^2 - p_1^4 - p_2^4 - p_3^4.$$

По этим углам определяются углы между ветвями минимального дерева:

$$\angle M_2NM_3 = \alpha = \varphi_{12} + \varphi_{13}; \quad \angle M_1NM_3 = \beta = \varphi_{12} + \varphi_{23}; \quad \angle M_1NM_2 = \gamma = \varphi_{13} + \varphi_{23}. \quad (2.6)$$

Величины углов α, β и γ определяются только весами p_i и не зависят от положения точки M_i на прямой M_iN . При перемещении точки M_i вдоль лучей $[NM_i)$ положение точки N, отвечающее оптимальному случаю, не изменится.

Оптимальное положение точки N совпадает с точкой M_1 , если угол при этой вершине треугольника $M_1M_2M_3$ больше или равно 120° . Аналогично точка N совпадает с точкой M_2 или M_3 , если соответственно угол при вершине M_2 больше или равно 120° или угол при вершине M_3 больше или равно 120° . Во

всех остальных случаях оптимальное положение точки N находится внутри треугольника $M_1M_2M_3$.

Рассмотрим построение МД для трех точек M_1, M_2, M_3 с весами p_1, p_2, p_3 соответственно (рис. 2.2). Построим треугольник $M_1M_2M_{2,3}$ (в проблеме Штейнера это был равносторонний треугольник), подобный треугольнику

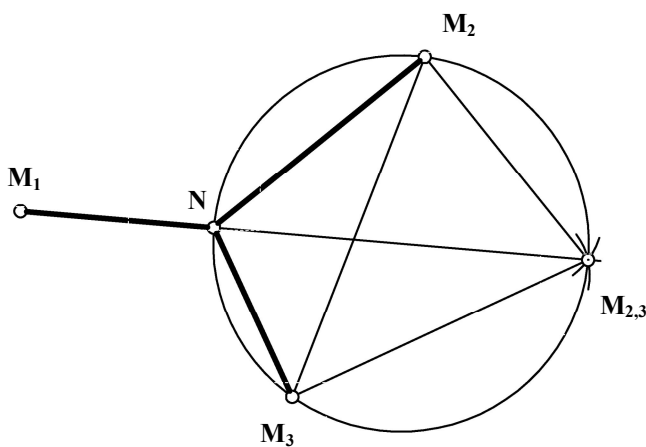


Рис. 2.2 Обобщенное построение Штейнера

весов. Для этого определим отношение $\frac{|M_2M_3|}{p_1}$ и проведем две окружности с

центрами в точках M_2 и M_3 . Радиус первой окружности равен $\frac{p_2}{p_1} \cdot |M_2M_3|$, а

радиус второй окруж - ности - $\frac{p_3}{p_1} \cdot |M_2M_3|$. Эти окружности пересе-

каются двух точках. Из них рассмотрим точку $M_{2,3}$, эквивалентную точкам M_2 и M_3 . Провидится окружность, определяемая точками M_2, M_3 ,

$M_{2,3}$, которая пересекает прямую $M_1M_{2,3}$ в точке N. Тогда искомое МД₃ состоит из четырех вершин (M_1, M_2, M_3 и N) и трех ветвей ($[M_1N], [M_2N], [M_3N]$). Вес минимального дерева (обобщенная кратчайшая длина связывающей линии) для точек M_1, M_2 и M_3 будет равен сумме:

$$p_1 \cdot |M_1N| + p_2 \cdot |M_2N| + p_3 \cdot |M_3N| = p_1 \cdot |M_1M_{2,3}| = f_{\min}. \quad (2.7)$$

Мы исходили из треугольника $M_2, M_3, M_{2,3}$. Нетрудно убедиться в том, что если исходить из треугольника $M_1M_2M_{1,2}$ или $M_1M_3M_{3,1}$, то придем к тому же результату. Приведенное построение МД для трех точек назовем обобщенным построением Штейнера.

Нетрудно доказать, что МД обладает пятью выше перечисленными свойствами: C1, C2, C3, C4, C5. Ясно, что если множество КД может быть построено конечным числом построений Штейнера, то множество МД для заданного компланарного множества точек может быть построено конечным числом обобщенных построений Штейнера.

Пример 2.1. Построить одно из МД для точек M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 плоскости, образующих выпуклый пятиугольник и имеющих веса p_1, p_2, p_3, p_4 и p_5 (рис. 2.3).

Строим эквивалентные точки $M_{1,2}, M_{4,5}$ и $M_{(1,2)(4,5)}$, которые определяются обобщенными построениями Штейнера (рис. 2.2). Точка $M_{1,2}$ эквивалентна точкам M_1 и M_2 , точка $M_{4,5}$ — точкам M_4 и M_5 , а точка $M_{(1,2)(4,5)}$ — точкам $M_{1,2}$ и $M_{4,5}$. Окружность, проведенная через точки $M_{1,2}$ и $M_{4,5}$ и $M_{(1,2)(4,5)}$ пересекает прямую $M_3 M_{(1,2)(4,5)}$ в точке N_1 . Окружность точек M_1, M_2 , и $M_{1,2}$ пересекает прямую $M_{1,2}N_1$ в точке N_2 , а окружность точек M_4, M_5 и $M_{4,5}$ пересекает прямую

$M_{4,5}N_1$ в точке N_3 . Теперь остается соединить точки M_1 и M_2 с точкой N_2 , а точки M_4 и M_5 с точкой N_3 отрезками прямых. Обобщенная длина построенного $МД_5$ равна длине отрезка $M_3 M_{(1,2)(4,5)}$, а его вес равен $\rho_3 \cdot |M_3 M_{(1,2)(4,5)}|$.

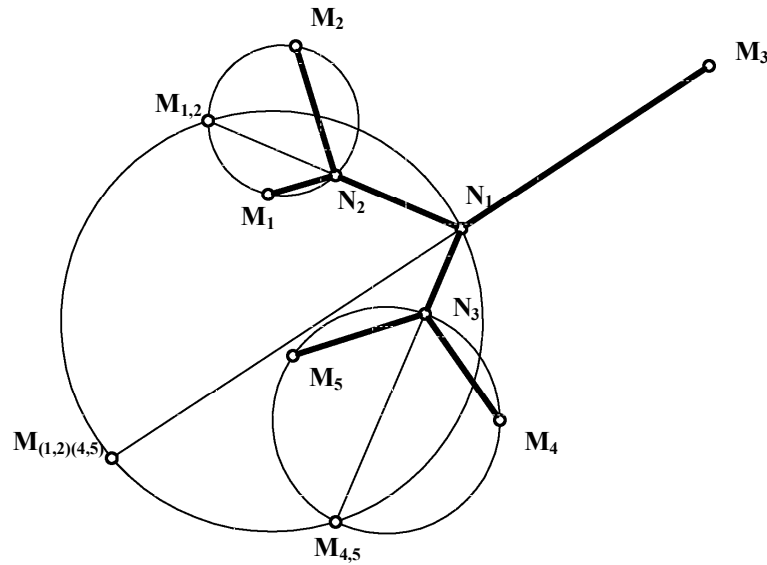


Рис. 2.3 Построение минимального дерева для пяти точек

2.3 Проблема Штейнера на поверхности ϕ в пространстве E_3

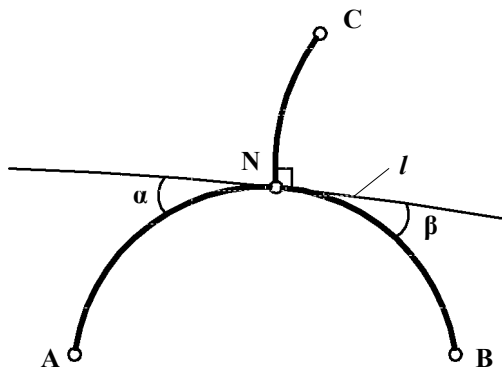
Допустим, что поверхность ϕ не имеет никаких особенностей. Тогда для множества точек $M_i (i=1, 2, \dots, m \text{ и } M_i \in \phi)$ можно поставить задачу на построение связывающей их линии кратчайшей длины. Эта линия, принадлежащая поверхности ϕ , попрежнему будет представлять собой дерево с дополнительными вершинами типа N . КДШ на поверхности ϕ имеет свойства, которые идентичны свойствам в пространстве E_2 .

Докажем, что для КДШ на поверхности ϕ остается в силе свойство дополнительных вершин, т.е. ветви, исходящие из N - точки, образуют между собой углы, равные 120° . Пусть A, B и C – различные точки поверхности ϕ и точка $N \in \phi$ минимизирует сумму длин $\rho(N, A), \rho(N, B), \rho(N, C)$ геодезических линий поверхности ϕ , соединяющих точку N с точками A, B и C .

$$\rho(N, A) + \rho(N, B) + \rho(N, C) = \min. \quad (2.8)$$

Мы докажем, что каждый угол при N между геодезическими линиями $[AN], [BN], [CN]$ равен 120° . Принимаем, что $\rho(N, A) = a, \rho(N, B) = b, \rho(N, C) = c$. Рассмотрим геодезический эллипс ℓ (т.е. множество таких точек Z , для которых $\rho(Z, A) + \rho(Z, B) = a + b$ и геодезическую окружность $\rho(Z, C) = c$. Эти замкнутые кривые линии касаются в точке N . Иначе точка Y будет внутри обеих кривых: $\rho(Y, A) + \rho(Y, B) < a + b$ и $\rho(Y, C) < c$. Это противоречит условию (2.8), согласно

которому точка N минимизирует эту сумму. Поскольку геодезическая $[NC]$



встречается с окружностью $\rho(Z, C) = c$ под прямым углом, она пересекает эллипс ℓ ортогонально. По результатам классической дифференциальной геометрии углы α и β равны (рис. 2.4). Таким образом

$$\angle ANC = \angle BNC. \quad (2.9)$$

Рис. 2.4 Проблема Штейнера на поверхности

Аналогично, рассматривая геодезические эллипсы $\rho(Z, A) + \rho(Z, C) = a + c$ и $\rho(Z, B) + \rho(Z, C) = b + c$, докажем, что

$$\angle ANB = \angle BNC, \quad (2.10)$$

$$\angle ANB = \angle ANC. \quad (2.11)$$

Из равенств (2.9), (2.10) и (2.11) следует, что каждый угол при вершине N между геодезическими линиями $[NA]$, $[NB]$, $[NC]$ равен 120° .

Если ABC геодезический треугольник на поверхности ϕ и угол при вершине A меньше 120° , то

$$\rho(A, B) + \rho(A, C) > \rho(N, A) + \rho(N, B) + \rho(N, C). \quad (2.12)$$

Доказательство неравенства (2.12) приведено в [4]. Таким образом, связывающее данное множество точек КДШ на поверхности ϕ обладает свойствами $C1$, $C2$, $C3$, $C4$ и $C5$.

Теперь рассмотрим кратчайшее соединение точек, расположенных на сфере. Известно, что из всех линий поверхности сферы и соединяющих две ее точки кратчайшей является дуга большой окружности. Эту окружность можно построить как линию пересечения сферы и плоскости, определяемой двумя данными точками и центром сферы. Пусть точки A и B принадлежат сфере, центром которой служит точки O (рис. 2.5, а). Покажем построение кратчайшей линии, соединяющей точки A и B . Три точки A , B и O определяют некоторую плоскость α , которая пересекает сферу по большой окружности. Эта окружность проецируется на основные плоскости проекций в эллипсы, так как плоскость $\alpha(A, B, O)$ занимает общее положение. Большая ось эллипса, представляющего собой горизонтальную проекцию большой окружности точек A и B , располагается на горизонтали $h(O \in h \subset \alpha)$ плоскости α и равна диаметру

сферы. Для определения малой оси этого эллипса через точку B_2 проведены две прямые: одна перпендикулярно, а другая параллельно прямой h_2 (рис. 2.5,а). Первая из них пересекает горизонтальный очерк сферы в точке 2, а вторая – прямую O_2B_2 в точке 3. Легко доказать, что длина отрезка O_23 равна половине малой оси искомого эллипса. Направление малой оси составляет прямой угол с большой осью. Способом двух concentрических окружностей, построенных на осях эллипса, можно определить сколько угодно точек этого эллипса.

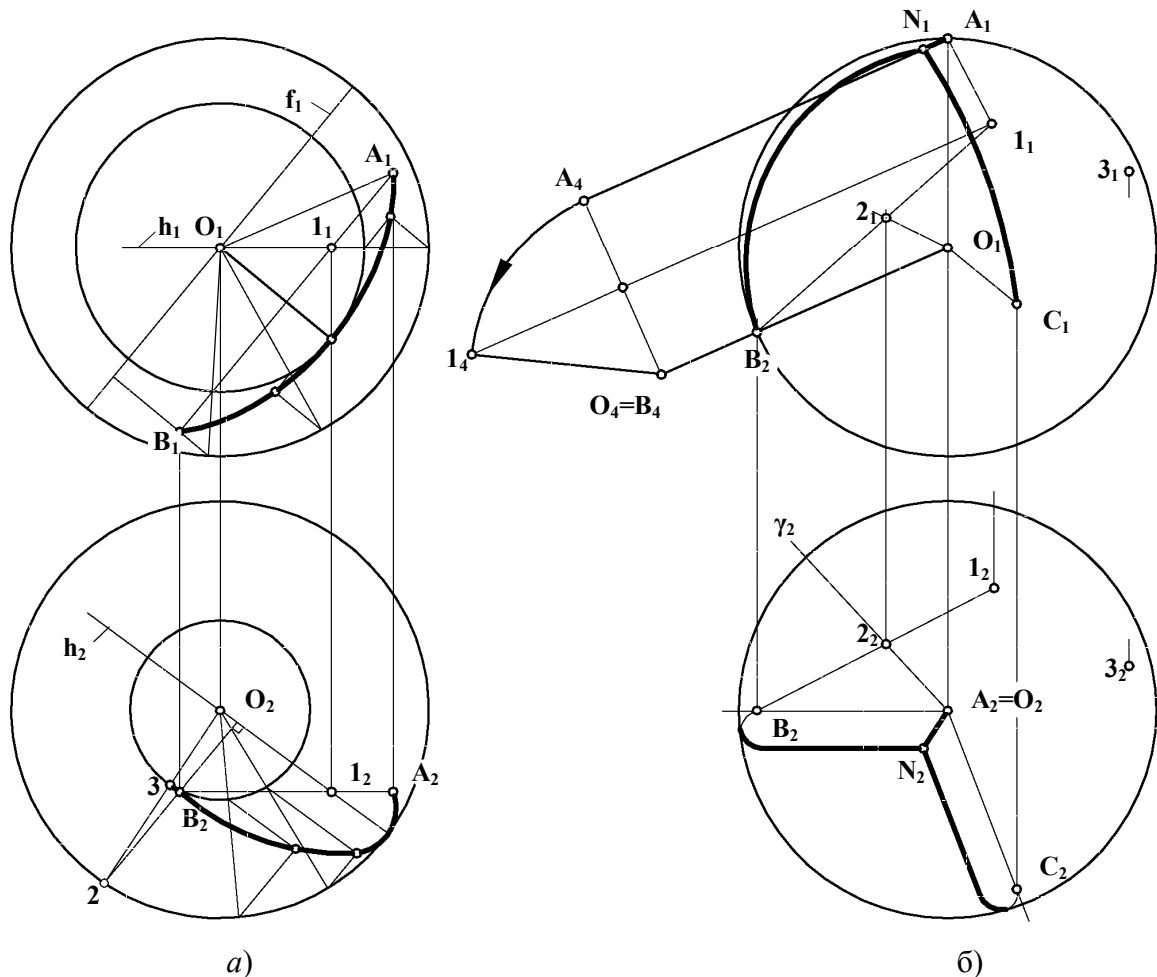


Рис. 2.5 а) кратчайшее соединение двух точек A и B ;
б) кратчайшее соединение трех точек A , B и C .

Большая ось эллипса, представляющего собой фронтальную проекцию кратчайшей линии, связывающей точки A и B , располагается на фронтальной проекции фронтали плоскости α . Остальные построения аналогичны построению горизонтальной проекции большой окружности точек A и B .

Для определения кратчайших связывающих по поверхности сферы линий для трех точек этой сферы воспользуемся рассуждениями аналогичными построению КДШ на плоскости. Роль прямой на сфере играет большая ее окружность, так как она является геодезической линией сферы. Если среды внутренних углов сферического треугольника с вершинами в заданных трех точках нет угла равного или большего 120° , то можно найти соответствующую

точку Штейнера N и соединить ее с заданными точками отрезками большой окружности. Если один из углов указанного выше сферического треугольника равен или больше 120° , то положение точки Штейнера становится неопределенным. В этом случае кратчайшая линия состоит из двух дуг большой окружности, соединяющих эту вершину с двумя дугами.

Рассмотрим построение кратчайшей линии, связывающей точки A , B и C сферы (рис. 2.5,б). Точки A и B принадлежат фронтальному очерку сферы, а прямая AO (где O – центр сферы) расположена перпендикулярно к горизонтальной плоскости проекций. Если точки A , B и C расположены иначе, то предварительным преобразованием можно привести их к такому положению. Легко построить горизонтально проецирующую плоскость $\gamma(A,O)$, образующую с фронтальной плоскостью $\alpha(A, B, O)$ угол в 60° . Теперь нужно провести плоскость δ , которая образует с плоскостью $\alpha(A, B, O)$ угол в 60° и пересекает ее по прямой BO . Для этого заменяем горизонтальную плоскость проекций плоскостью π_4 , перпендикулярную к ребру BO двугранного угла, гранями которого служат плоскости α и δ . Плоскости α и $\delta(B,O,1)$ пересекаются по прямой $O2$. Аналогичными построениями можно определить точку 3 , служащую третьей вершиной равностороннего треугольника $AC3$. После этого определяется линия пересечения двух плоскостей, одна из которых определяется точками B , O и 3 , другая – C , O и 2 . Эта прямая пересечения указанных плоскостей пересекает сферу в точке N . Найденная точка N является точкой Штейнера для точек A , B и C , принадлежащих сфере. Теперь ее надо соединить с точками A , B и C отрезками большой окружности (рис. 2.5,б).

Рассмотрим кратчайшее соединение двух точек, принадлежащих поверхности цилиндра вращения. Здесь возможны три варианта расположения этих точек. В первом варианте они принадлежат прямой, параллельной оси цилиндра. Тогда кратчайшей линией, соединяющей их, является отрезок прямой. Во втором варианте данные две точки лежат в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра. Тогда кратчайшей линией, соединяющих их, служит дуга окружности, центр которой находится на оси цилиндра. В третьем варианте, когда не выполнены условия первого и второго вариантов, среды линий, соединяющих две точки, принадлежащие поверхности цилиндра вращения, по поверхности цилиндра, кратчайшей является цилиндрическая винтовая линия.

Для построения КДШ, вершинами которого являются точки, расположенные на поверхности цилиндра, можно воспользоваться разверткой поверхности цилиндра. На развертке можно построить кратчайшую связывающую данные точки линию одним из алгоритмов, разработанных в предыдущей главе. Затем надо свернуть развертку в цилиндр и перенести найденные дополнительные точки, т.е. точки Штейнера на поверхность цилиндра обратным преобразованием. После этого данные точки и точки Штейнера соединяются соответствующими цилиндрическими винтовыми линиями.

На рис. 2.6 приведены фронтальная и горизонтальная проекции кругового цилиндра и точек A , B и C , принадлежащих поверхности этого цилиндра.

Построена развертка боковой поверхности цилиндра, которая представляет собой прямоугольник со сторонами, равными высоте и длине окружности основания цилиндра. Определяются положения A_0, B_0, C_0 точек A, B, C . Построением Штейнера определена точка N_0 . Обратным преобразованием найдена точка $N(N_1, N_2)$ на поверхности цилиндра, которая соединяется с заданными точками цилиндрическими винтовыми линиями. Такой подход применим

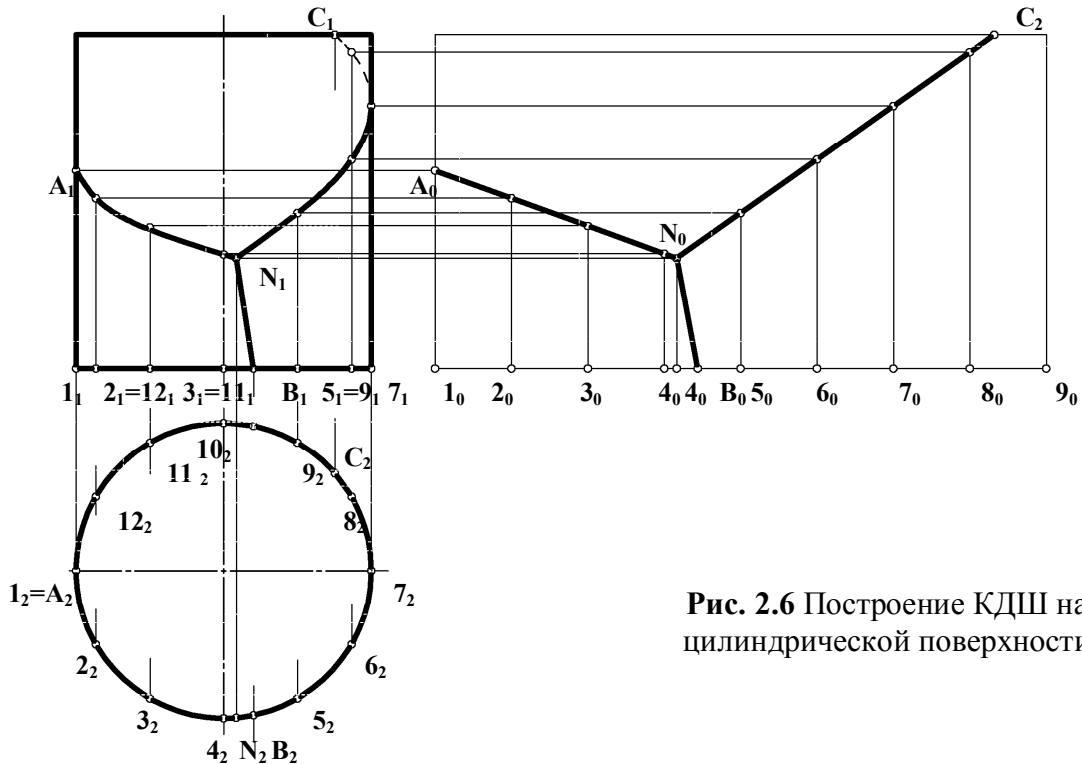


Рис. 2.6 Построение КДШ на цилиндрической поверхности

для построения КДШ для множества точек, расположенных на развортываемых поверхностях.

2.4 О кратчайшем соединении компланарных плоских фигур

Геометрическая модель инженерных сетей представляет собой связанный граф, если объектам сопоставить вершины, а связывающим их линиям – дуги графа. Среди задач, решаемых с использованием графовой модели, особое место занимает построение оптимальной конфигурации сети. Однако, исходить из графовой модели для определения оптимальной конфигурации сети можно только тогда, когда размеры объектов во много раз меньше по сравнению с протяженностью связывающих их линий. Поэтому возникает задача о кратчайшем соединении компланарных плоских фигур. Установим определять расстояния от точки до фигуры и между фигурами следующим образом.

Расстояние ρ от точки M до фигуры f равно:

$$\rho(M, f) = \min \{MF_i\}, F_i \in f. \quad (2.13)$$

На практике для определения расстояния на плоскости от точки до фигуры следует разбить плоское поле вокруг фигуры на области Дирихле. Построение областей Дирихле покажем на конкретных примерах.

Пример 2.2. Построить области Дирихле вокруг Π – образного «здания», план которого заштрихован на рис. 2.7, а.

Учитывая, что расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного от этой точки на прямую, легко построить искомые области. Для данного примера области Дирихле состоят из 14 зон. Область 1 ограничена лучами $[AA_1]$ и $[AA_2]$, перпендикулярными соответственно к отрезкам $[AB]$ и $[AL]$. Ее назовем зоной точки A , так как расстояние от точки M_1 , расположенной в зоне 1, до фигуры f (заштрихованной на рис. 2.7,а) равно длине отрезка $[M_1A]$. Область 2 ограничена отрезком $[AB]$ и двумя лучами $[AA_1]$ и $[BB_1]$, перпендикулярными к $[AB]$. Ее назовем зоной отрезка $[AB]$, так как расстояние от точки M_2 , расположенной в зоне 2, до фигуры f равно длине отрезка $[M_2N_2]$, где N_2 – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_2 на отрезок $[AB]$. Аналогично определяются зоны остальных элементов фигуры f :

3 – зона точки B ; 4 – зона отрезка $[BC]$; ...; 14 – зона отрезка $[AL]$ (рис.2.7,а). Следует отметить, что некоторые зоны представляют собой замкнутые области, а другие – открытые области. На нашем примере только три зоны (10, 11 и 12) являются замкнутыми. Зоны 10 и 12 ограничены одинаковыми прямоугольными трапециями $EFPQ$ и $LKPQ$, а зоны 11 – равнобедренным прямоугольным треугольником PFK .

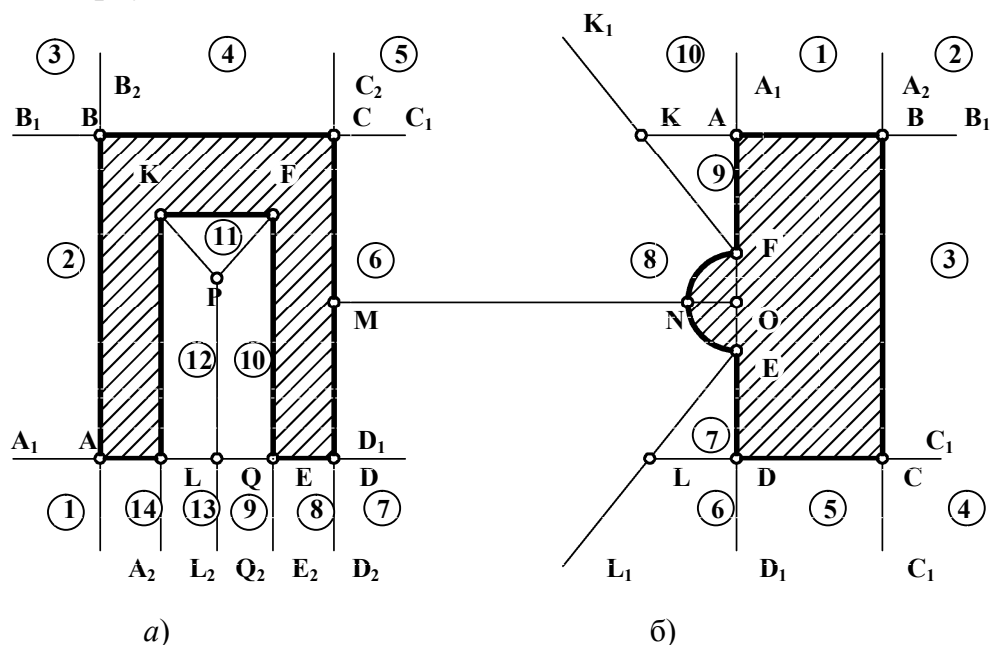


Рис. 2.7 Области Дирихле: а) фигура f ограничена многоугольником $ABCDEFKL$; б) фигура f состоит из прямоугольника $ABCD$ и полукруга

Пример 2.3. Построить области Дирихле вокруг фигуры, состоящей из прямоугольника $ABCD$ и полукруга с центром в середине O отрезка AD (рис. 2.7,б).

Области 1, 2, 3, 4, 5 строятся также, как в предыдущем примере. Области 7 и 9, являющиеся зонами отрезков [DE] и [AF], ограничены прямоугольными «треугольниками» DEL и AFK. «Гипотенузы» [EL] и [FK] этих треугольников являются отрезками параболы, представляющей собой множество точек, равноудаленных от прямой (AD) и заданного полукруга с центром в точке O. Зона 8 дуги $[ENF]$ ограничена полуокружностью $\overset{\circ}{ENF}$, двумя отрезками [EL] и [FK] параболы и двумя лучами $[LL_1)$, $[KK_1)$. Лучи $[LL_1)$ и $[KK_1)$ являются частями гипербол, представляющих собой множество точек, равноудаленных от заданного полукруга и соответственно от точек D и A. Область 6 является зоной точки D и ограничена отрезком [DL], двумя лучами $[DD_1)$ и $[LL_1)$, а зона точки A – отрезком [AK], двумя лучами $[AA_1)$ и $[KK_1)$.

Расстояние между фигурами f_1 и f_2 равно:

$$\rho(f_1, f_2) = \min \{ |M_i M_j| \}, M_i \in f_1, M_j \in f_2. \quad (2.14)$$

На практике определение расстояний облегчается, если разбить поле вокруг фигуры на области Дирихле. Расстояние между фигурами f_1 и f_2 устанавливается такой последовательности. Выясним, в каких зонах фигуры f_1 расположена фигура f_2 и в каких зонах фигуры f_2 расположена фигура f_1 . В результате расстояние между фигурами f_1 и f_2 узнаем, сравнив небольшое число отрезков. Например, при определении расстояния между фигурами, изображенными на рис. 2.7, рассуждаем так: правая фигура расположена в зоне 6 левой фигуры, а сама она расположена в зоне 8 правой фигуры. Следовательно, расстояние между данными фигурами равно промежутку между отрезком [CD] и дуги [ENF] окружности. Опускаем перпендикуляр из точки O на прямую CD и тем самым получаем искомое расстояние, равное отрезку [MN] (рис. 2.7).

Пусть даны компланарные фигуры $f_1, f_2, \dots, f_m$, которые требуется соединить линией кратчайшей длины. Найдем расстояния между фигурами $f_1, f_2, \dots, f_m$ и составим матрицу расстояний порядка $m \times m$:

$$\begin{vmatrix} \infty & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1(m-1)} & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & \infty & \rho_{23} & \dots & \rho_{2(m-1)} & \rho_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \rho_{m3} & \dots & \rho_{m(m-1)} & \infty \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

После этого можно применить алгоритм Прима, который представляет собой многошаговый процесс. На первом шаге устанавливаем минимальный элемент ρ_{ij} матрицы расстояний (2.15). Вычеркиваем строку и столбец соответствующие минимальному элементу ρ_{ij} матрицы (2.15) и приписываем к нему новые строку и столбец, которые состояются из элементов вычеркнутых

строк и столбцов. При этом выбирается меньшой из двух конкурирующих элементов. Получается новая матрица порядка $(m-1) \times (m-1)$. Следующий шаг алгоритма заключается в определении минимального элемента полученной матрицы и формировании новой матрицы порядка $(m-2) \times (m-2)$. Этот процесс повторяется до тех пор, пока не получится матрица с единственным элементом. Сумма минимальных элементов дает нам длину кратчайшей линии, связывающей данные компланарные фигуры $f_1, f_2, \dots, f_m$. Иногда этот результат можно улучшить путем добавления дополнительных точек. Тогда мы приходим к известной проблеме на построение так называемых кратчайших связывающих деревьев Штейнера.

Пример 2.4. Построить кратчайшую линию, соединяющую компланарные фигуры $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$. На рис. 2.8 показано расположение этих фигур.

Решение. Пока не удалось создать точный алгоритм построения минимальных деревьев за исключением полного перебора. Полный перебор невозможен из-за большого числа возможных топологий деревьев, претендующих на КДШ. Например, это число равно (табл. 1.1) для пяти точек – 270, для шести точек – 3 645 и для семи точек – 62 370. Поэтому сначала строят кратчайшую связывающую линию алгоритмом Прима, а затем добиваются дальнейшего уменьшения длины путем введения точек Штейнера для некоторых групп связываемых фигур. Данные фигуры разбиваем на два множества $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ и $\{f_4, f_5, f_6\}$. Строим кратчайшую связывающую линию для первого множества, состоящего из четырех элементов (27 возможных вариантов), а затем

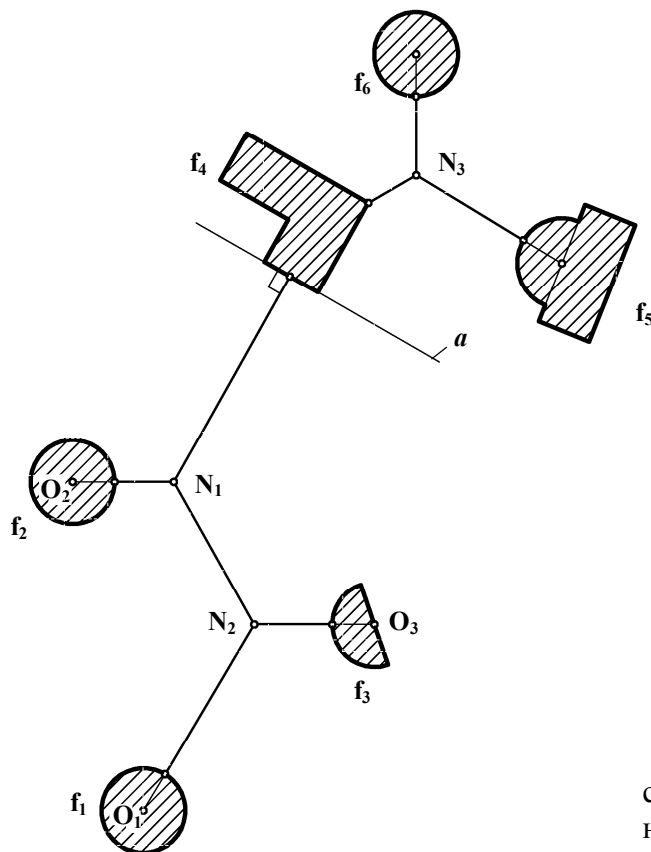


Рис. 2.8 Построение кратчайших связывающих линий для компланарного множества плоских фигур

строим связывающую линию для второго множества, состоящего из трех элементов (4 возможных варианта). Определяются точки А и В: первая из них эквивалентна точкам O_1 и O_3 , а вторая – точкам O_2 и А. Через точку В проводят прямую, перпендикулярную прямой a . Получают точку N_1 , как точку пересечения окружности, определяемой точками А, В и O_2 , и прямой, проведенной через точку В. Затем определяют точку N_2 в пересечении окружности, определяемой точками А, O_1 и O_3 , с отрезком $[AN_1]$. Точки А, В и окружности на рис. 2.8 не показаны. Построение точки N_3 не требует дополнительного пояснения.

Результаты многочисленных опытов и исследований показывают, что значение отношения длин кратчайших деревьев Штейнера и Прима не может быть меньше, чем $\sqrt{3} : 2$. Однако сокращение протяженности инженерных сетей на 3 – 6% может дать огромный экономический эффект. Поэтому теоретические разработки по созданию эффективных алгоритмов построения КДШ остается актуальным направлением прикладной геометрии.

3. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ СВЯЗЫВАЮЩИХ ЛИНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С ОРТОГОНАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ

3.1 Анализ исследований, посвященных построению кратчайших связывающих линий в пространствах с ортогональной метрикой

На практике часто встречается физическое пространство, где целесообразно пользоваться ортогональной метрикой или именуемой расстоянием первого порядка. Задача построения кратчайших связывающих линий в пространстве с ортогональной метрикой возникает при выборе схем транспортных систем цехов машиностроительных и металлургических заводов, в проектировании автоматизированных складов для перемещения грузов по кратчайшему маршруту, где, в частности, предполагается расположение конвейерных линий параллельно осям прямоугольной системы координат.

Аналогичные задачи возникают также в проектировании инженерных сетей [114], коммуникаций связи, трассировке соединений печатных плат и в других областях [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44].

В [45] рассмотрено проектирование транспортных сетей шахт, в [46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56] - трассировка соединений печатных плат ЭВМ и интегральных схем, в [57] - проектирование переключательных схем.

В [3, 56] предложен алгоритм, суть которого заключается в следующем: при отыскании дополнительных точек, оптимизирующих решения задачи, можно ограничиться узлами ортогональной сетки, построенной на n заданных точках. Но алгоритм работает только для $n < 5$ точек. В [13] положение дополнительных точек отыскивается методом перебора, что является неэффективным, так как время вычисления возрастает. Приближенный метод построения кратчайших связывающих линий предложен в [51, 58, 59], но для $n > 10$ точек алгоритм не пригоден. В [47] предложен эвристический алгоритм решения задачи. На первом этапе с помощью алгоритма Прима строится кратчайшая связывающая линия, второй этап состоит в совмещении путей, соответствующих ребрам. Недостатком является громоздкость вычислений при больших n заданных точках.

3.2 Некоторые определения и свойства кратчайших связывающих линий для компланарных точек с ортогональной метрикой

При решении различных инженерных задач, например, при проектировании транспортных систем ПРТС работ на машиностроительных и металлургических заводах, при проектировании автоматизированных складов для адресования и перемещения грузов по кратчайшему маршруту, в частности предполагается расположение конвейерных линий параллельно осям прямоугольной системы координат. Возникает проблема построения и определения оптимальной конфигурации транспортных схем, имеющих наименьшую протя-

женность. В связи с этим в этой главе исследуется построение кратчайших связывающих линий с ортогональной метрикой, служащих геометрической моделью транспортных схем ПРТС работ.

Пусть на плоскости задано множество точек $M_1, M_2, \dots, M_m$, которое необходимо связать линией кратчайшей длины. Выше было сказано, что в связывающей линии кратчайшей длины звено, соединяющее точку M_i с точкой M_j , представляет собой отрезок прямой, т. к. геодезической линией плоскости служит прямая. Поэтому кратчайшая линия с ортогональной метрикой состоит из совокупности отрезков прямых, параллельных осям прямоугольной системы координат. Каждая точка является концом по крайней мере одного отрезка; каждый отрезок связывает две точки; линия кратчайшей длины не имеет замкнутых участков. Очевидно, что конфигурация кратчайшей связывающей линии с ортогональной метрикой, так же как с евклидовой метрикой, представляет собой дерево. Выше было сказано, что дерево – это граф $G(X, \Gamma)$, который не имеет петель и замкнутых контуров.

Построение кратчайшей связывающей линии связано с метрическими и топологическими свойствами пространства, в котором выполняется это построение.

В этой главе рассматривается пространство E^2 с ортогональной метрикой, получаемой из (1.1) при $p=1$. Тогда расстояние $d(M_1, M_2)$ между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ будет равно:

$$d(M_1, M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|. \quad (3.1)$$

Действительно, (3.1) обладает всеми свойствами функции расстояния, а именно:

- 1) $d(M_1, M_2) \geq 0$ (положительность функции расстояния);
- 2) $d(M_1, M_2) = d(M_2, M_1)$ (симметричность);
- 3) $d(M_1, M_2) = 0$ только в том случае, когда $M_1 = M_2$ (невырожденность);
- 4) $d(M_1, M_2) \leq d(M_1, M_3) + d(M_3, M_2)$ (функция удовлетворяет неравенство треугольника).

3.3 Кратчайшие связывающие линии для двух точек. Эквидистанционные линии и фрагменты

Для определения кратчайшего расстояния между точками с евклидовой метрикой на плоскости, выше было сказано, мысленно проводят окружность с центром в данной точке M_1 через точку M_2 . Если внутри круга, ограниченного этой окружностью, нет других точек, то точка M_2 – ближайшая к M_1 (рис.1.2, а).

Геометрия плоскости с ортогональной метрикой обладает интересными свойствами, например: окружности становятся квадратами, эллипсы – шестиугольниками и т.д. [88].

Пусть центр окружности находится в начале координат и радиус равен единице, тогда уравнение этой "окружности" имеет следующий вид:

$$|x| + |y| = 1. \quad (3.2)$$

Если окружность с центром в начале координат и радиусом R на плоскости с евклидовой метрикой имеет вид как показано на рис.3.1, то на плос-

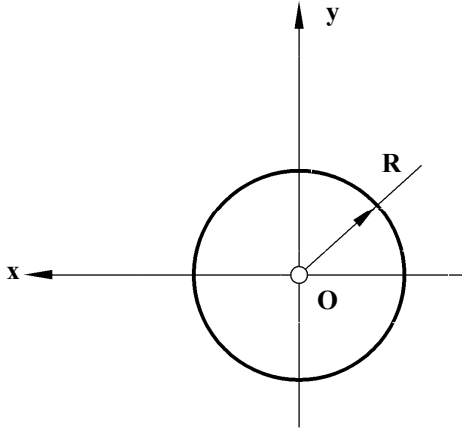


Рис. 3.1 Окружность на плоскости с евклидовой метрикой

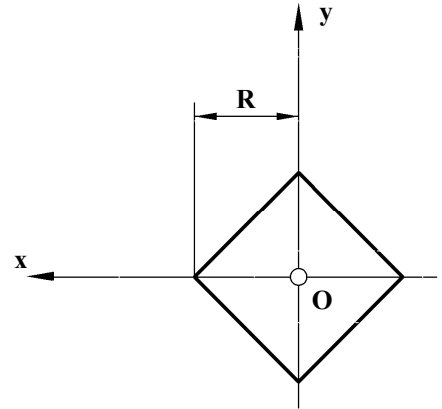


Рис. 3.2 Окружность на плоскости с ортогональной метрикой

кости с ортогональной метрикой роль окружности выполняет квадрат (рис.3.2) диагонали которого совпадают с осями координат.

В рис.3.3 в кратчайшее расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется ломаной, соединяющей точки M_1 и M_2 . Отрезки, составляющие эту ломаную, располагаются параллельно координатным осям.

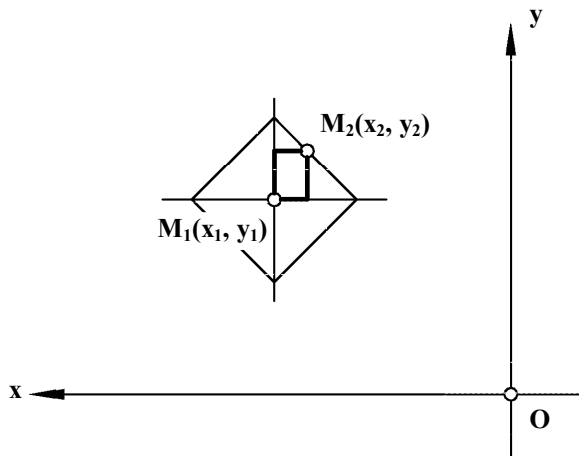


Рис. 3.3 Кратчайшие линии соединяющие точки M_1 и M_2

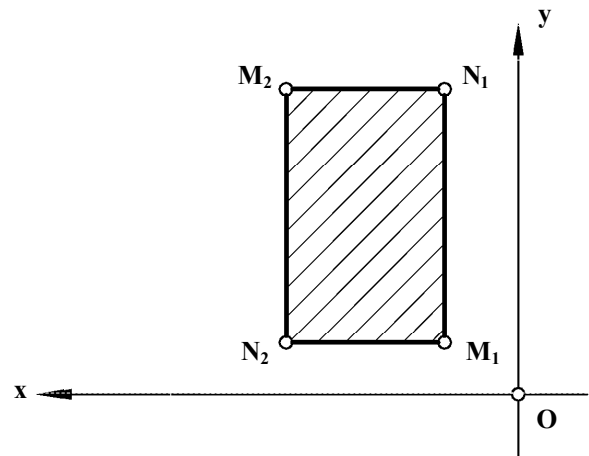


Рис. 3.4 Зона расположения кратчайших линий для точек M_1 и M_2

В отличие от евклидова отрезка в двумерном пространстве с расстояниями первого порядка две заданные точки M_1 и M_2 могут быть соединены между собой множеством "отрезков", заполняющих прямоугольник $M_1N_1M_2N_2$ (рис.3.4.). Все эти "отрезки" равноправны, т.к. имеют одну и ту же длину.

Исключения составляют отрезки прямых, соединяющих две точки, с одинаковыми абсциссами или ординатами (рис.3.5.) В этом случае две точки могут быть соединены кратчайшей линией единственным образом. Из теории гидравлики известно, что чем больше поворотов, тем больше потери давления на местное сопротивление. Уменьшение поворотов является желательным и из других соображений. Поэтому, если нет других ограничивающих условий, то следует выбрать ломаную $M_1N_1M_2$ или $M_1N_2M_2$. Заштрихованный на рис.3.4. прямоугольник называется зоной подвижности связывающего дерева.

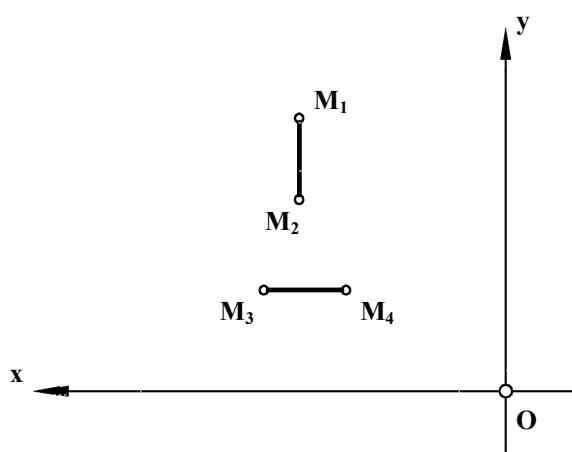


Рис. 3.5 Кратчайшая линия $M_1 - M_2$ для двух точек с одинаковыми абсциссами и $M_3 - M_4$ для двух точек с одинаковыми ординатами

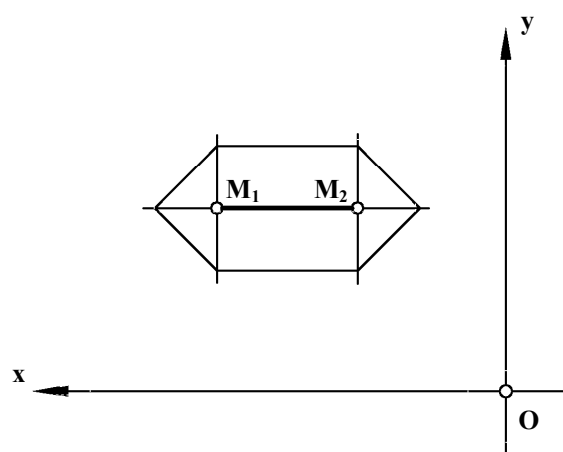


Рис. 3.6 Эквидистанционная линия для горизонтального отрезка

Построение кратчайших связывающих линий рассматривается как многоступенчатый управляемый процесс, состоящий из отдельных элементарных ступеней. На вход каждой элементарной ступени подается некоторое множество из i элементов, а на ее выходе получается множество, состоящее из $i-1$ элементов. В начале процесса построения каждый элемент содержит лишь по одной точке и, следовательно, имеется столько элементов, сколько заданных точек. Здесь под элементом мы понимаем кратчайшее дерево (КД), построенное для некоторого количества точек из числа заданных, а точку рассматриваем как дерево нулевой длины. На каждой ступени осуществляется объединение двух элементов: построение дерева кратчайшей длины и построение эквидистанционной линии. Если задано множество из m точек, то построение состоит из $m-1$ ступеней. Для определения очередной пары элементов, которые надо объединить на данной ступени, и конфигурации КД строятся эквидистанционные линии.

Определение и построение эквидистанционной линии мы рассматривали в первой главе. Как мы видим, эквидистанционная линия порядка ΔI для одной точки на плоскости с евклидовой метрикой представляет окружность радиуса ΔI с центром в этой точке. На плоскости с ортогональной метрикой эквидистанционная линия представляет собой квадрат с центром в заданной

точке и диагоналями, параллельными координатным осям и равным $2\Delta I$. Известно, что эквидистанционная линия является замкнутой и состоит из дуг окружностей на плоскости с евклидовой метрикой. Например, эквидистанционной линией для кратчайшего дерева $КД_2$ будет четырехцентровый овал (рис.1.5, а), двумя центрами которого служат заданные точки M_1 и M_2 , а другими двумя центрами третьи вершины $M_{1,2}$ и $M_{2,1}$ равносторонних треугольников, построенных на отрезке $[M_1 M_2]$.

На плоскости с ортогональной метрикой геометрическое место точек, равноудаленных от точки, показано на рис.3.2., от горизонтального отрезка $M_1 M_2$ – на рис.3.6 и от «наклонного» отрезка – на рис.3.9. Указанное геометрическое место точек образует некоторую замкнутую линию: на рис.3.2. – ромб, на рис.3.6 – шестиугольник и на рис.3.9 – восьмиугольник, в зависимости от расположения точек.

При построении кратчайших связывающих линий так же можно пользоваться фрагментом.

3.4 Построения кратчайших связывающих линий для трех, четырех и пяти точек плоскости

На плоскости с ортогональной метрикой в зависимости от взаимного расположения точек различают так же три вида соединения. При трехлучевом соединении три отрезка сходятся в одной точке, образуя между собой прямые углы. Точку схода этих трех отрезков называют узловой точкой (точка O на рис.3.7). При магистральном соединении трех точек отсутствует узловая точка, но появляются две дополнительные точки поворота N_1 (или N'_1) и N_2 (или N'_2) (рис.3.8).

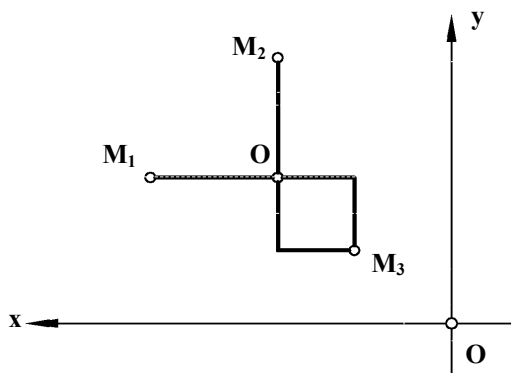


Рис. 3.7 Трехлучевое соединение

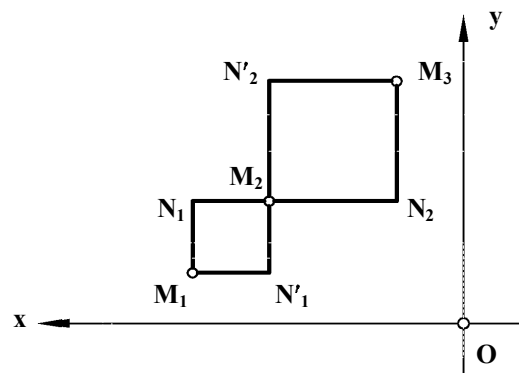


Рис. 3.8 Магистральное соединение

Выше было показано два вида кратчайшего соединения двух точек M_1 и M_2 : если они находятся на одной прямой, параллельной координатной оси абсцисс или ординат (рис.3.5), то они соединяются непосредственно между собой отрезком; если это условие не выполняется, то проводятся через точки M_1 и M_2

прямые, параллельные координатным осям, которые пересекаются в точках N_1 и N_2 (рис.3.9.). Тогда точки M_1 , M_2 , N_1 и N_2 образуют прямоугольник и кратчайшая линия, соединяющая точки M_1 и M_2 , состоит из ломаной $M_1N_1M_2$ или $M_1N_2M_2$.

В первом случае возможны следующие варианты расположения третьей точки M_3 : 1) $M_3 \in (M_1M_2)$ тогда они присоединяются отрезком прямой непосредственно с точкой M_1 или M_2 и кратчайшее дерево трех точек M_1 , M_2 и M_3 будет представлять собой один отрезок прямой; 2) если точка M_3 расположена левее точки M_1 , то она присоединяется к точке M_1 через точку $\bar{N}_1$ или $\bar{N}_2$, причем стороны прямоугольника $M_3\bar{N}_1M_1\bar{N}_2$ должны располагаться параллельно координатным осям; 3) если точка M_3 расположена правее точки M_2 (рис. 3.8.), то она присоединяется к точке M_2 через точку N_2' или N_2 , причем стороны прямоугольника $M_3N_2'M_2N_2$ должны располагаться параллельно координатным осям; 4) точка M_3 расположена между двумя прямыми, проведенными через точки M_1 и M_2 параллельно координатным осям. Тогда из точки M_3 опускают перпендикуляр к дереву M_1M_2 и основание этого перпендикуляра будет узловой точкой 0, в которой сходятся три отрезка.

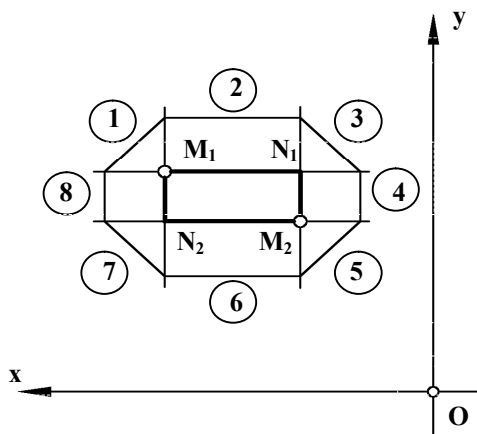


Рис. 3.9 Дистанционное поле двух точек

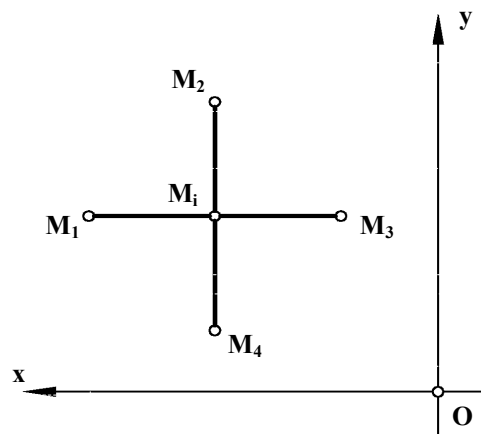


Рис. 3.10 Кратчайшее соединение четырех точек

Во втором случае четыре прямых, проведенных через точки M_1 и M_2 параллельно координатным осям, делят поле вокруг прямоугольника $M_1N_1M_2N_2$ на 8 зон (рис. 3.9.). Зоны 1 и 5 являются магистральными. Точка M_3 , расположенная в одной из этих двух зон, соединяется с соответствующей вершиной прямоугольника M_1 или M_2 ломаной, состоящей из двух отрезков, параллельных координатным осям. Зоны 2, 3, 4, 6, 7 и 8 являются трехлучевыми. Если точка M_3 расположена в одной из этих зон, то из нее опускается перпендикуляр на соответствующую сторону прямоугольника $M_1N_1M_2N_2$. Основание этого перпендикуляра будет узловой точкой 0, для зон 2, 4, 6 и 8. Если точка M_3 расположена в зоне 3, то узловая точка совпадает с точкой N_1 , а если точка M_3 расположена в зоне 7, то — с точкой N_2 .

Пусть на плоскости задано множество точек $M_1, M_2, \dots, M_m$. Требуется соединить их кратчайшей линией. Геометрическую задачу на построение линии, проходящей через заданное множество точек и имеющей кратчайшую длину, как известно, называют проблемой Штейнера. Искомая кратчайшая линия представляет собой дерево с вершинами в заданных точках $M_1, M_2, \dots, M_m$ и в некоторых дополнительно определяемых точках $N_1, N_2, \dots, N_n$. Ветви дерева представляют собой геодезические линии, соединяющие две точки из множества точек $M_1, M_2, \dots, M_m, N_1, N_2, \dots, N_n$. Наиболее трудным является определение числа и расположения дополнительных вершин $N_1, N_2, \dots, N_n$ кратчайшего дерева, связывающего заданные точки $M_1, M_2, \dots, M_m$.

Установим необходимые условия существования и построения кратчайшего связывающего дерева для компланарного множества точек.

1. Кратчайшее связывающее дерево состоит из совокупности прямолинейных отрезков, соединяющих между собой некоторые из точек $M_1, M_2, \dots, M_m, N_1, N_2, \dots, N_n$.

2. Пусть G является кратчайшим связывающим деревом для множества из m исходных вершин. Если G_1 содержит $k (< m)$ вершин и является связным подграфом графа G , то G_1 является кратчайшим деревом для этих k точек. Это свойство доказано в работах Соскауне [97, 98, 99].

3. Если для заданного множества точек m , которые должны быть соединены между собой кратчайшей линией, построено КД, то каждая его узловая вершина соединена в нем с тремя другими точками. Допустим, что узловая вершина 0 соединена только с двумя исходными точками. Удалим эту вершину 0 и обе соединенные с ней дуги графа. Соединим исходные две точки, соединенные с узловой точкой 0 непосредственно. Тогда полученный граф попрежнему является кратчайшим деревом, так как расстояние между двумя вершинами не превосходит суммы расстояний от них до третьей вершины.

Узловую точку 0 , по аналогии с плоскостью с евклидовыми расстояниями, в некоторых научных работах называют точкой Штейнера, а кратчайшую связывающую заданное множество точек линию на плоскости с ортогональной метрикой – проблемой Штейнера [46]. Во избежание путаницы мы избегаем таких терминологий, хотя решается одна и та же задача. Дело в том, что результаты получаются разными. Алгоритмы, пригодные для решения этой общей задачи на евклидовой плоскости, не пригодны для решения аналогичной задачи на плоскости с ортогональной метрикой.

4. Если точка M_i является вершиной кратчайшего дерева, то в ней сходятся не более четырех отрезков прямых (дуг дерева). Действительно, через любую вершину M_i кратчайшего дерева можно провести только две взаимно-перпендикулярных прямых, параллельных соответствующим координатным осям. Отрезки, которые сходятся в точке M_i , могут располагаться только на этих прямых. Поэтому в точке M_i сходятся не более четырех ребер КД (рис.3.10.).

5. Пусть дано кратчайшее дерево, соединяющее точки $M_1, M_2, \dots, M_m$ плоскости. Пусть 0 узловая точка, соединенная только с тремя вершинами $M_1,$

M_2, M_3 . Тогда, во-первых, точка O находится внутри прямоугольника, определяемого точками M_1, M_2, M_3 , и, во-вторых, эта узловая точка O – единственная.

6. Для трех точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$, которые должны быть соединены между собой кратчайшей линией, координаты x_0 и y_0 узловой точки O , минимизирующей выражение

$$\sum_{i=1}^3 d(0, M_i),$$

определяются из условия: $x_0 = x_1$, если $x_2 < x_1 < x_3$ или $x_3 < x_1 < x_2$; $y_0 = y_2$, если $y_1 < y_2 < y_3$ или $y_3 < y_2 < y_1$ (рис.3.11.). Таким образом, абсцисса узловой точки равна абсциссе точки, соединенной с ней и занимающей среднее положение в горизонтальном направлении, а ордината – ординате точки, соединенной с ней и занимающей среднее положение в вертикальном направлении. Длина КД для трех точек M_1, M_2 и M_3 определяется из выражения:

$$\sum_{i=1}^3 d(0, M_i) = \frac{1}{2}p, \quad (3.3)$$

где $d(0, M_i)$, $i=1,2,3$ – ортогональное расстояние между точками O и M_i ; p – длина периметра прямоугольника, построенного для точек M_1, M_2, M_3 (рис.2.11).

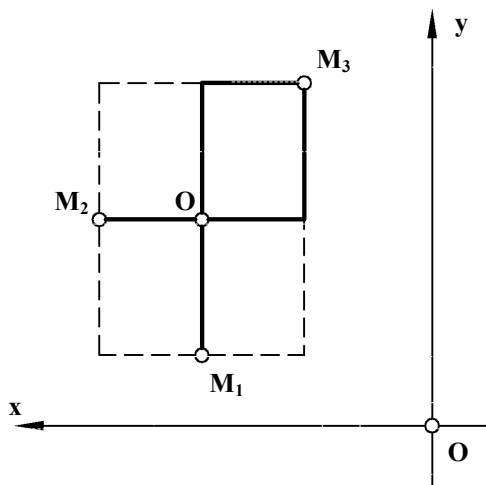


Рис. 3.11 Кратчайшее соединение для трех точек с узловой точкой

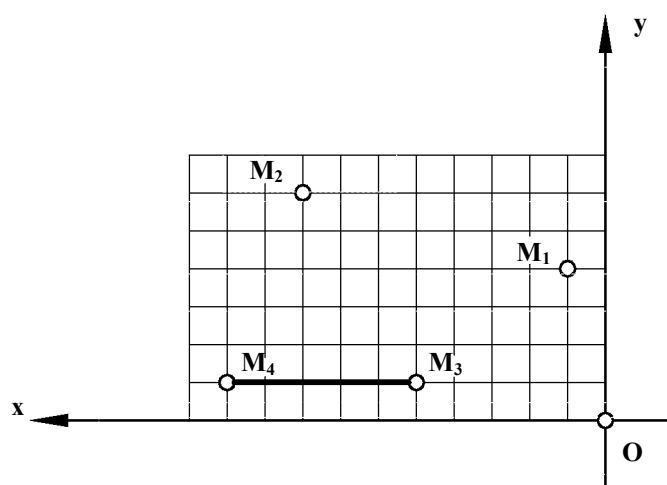
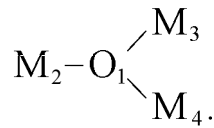


Рис. 3.12 Первый этап построения КД для четырех точек

Пусть на плоскости с декартовой системой координат xOy заданы точки $M_1(1,4)$, $M_2(8,6)$, $M_3(5,1)$, $M_4(10,1)$ (рис. 3.12.). Требуется построить связывающее их кратчайшее дерево.

Сравниваем расстояния между точками и выбираем пару точек, имеющих кратчайшее расстояние. Такой парой являются точки M_3 и M_4 . Соединяем их отрезком прямой, параллельной оси абсцисс (рис.3.12.). На втором шаге опускаем из точки M_2 перпендикуляр на прямую M_3M_4 . Образованная узловая точка O_1 является основанием этого перпендикуляра (рис. 3.13.). Кратчайшее дерево для трех точек M_2, M_3 и M_4 имеет следующую структуру:



Теперь остается присоединить к найденному дереву кратчайшей длины для трех точек M_2 , M_3 и M_4 четвертую точку M_1 . Эта точка может быть присоединена непосредственно к вершине M_3 через колено N или к отрезку M_2O_1 посредством отрезка M_1O_2 , где O_2 – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую M_2O_1 . Образуется зона подвижности ребер кратчайшего дерева, состоящая из прямоугольника $O_1O_2M_1N$ (рис.3.14.), так как $|M_1O_2| = |M_1N| + |NM_3|$. Если $|M_1O_2| > |M_1N| + |NM_3|$, то эта зона уменьшится, а если $|M_1O_2| < |M_1N| + |NM_3|$ – исчезает.

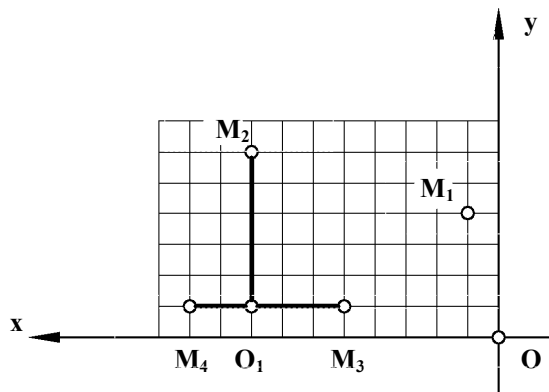


Рис. 3.13 Второй этап построения КД для четырех точек

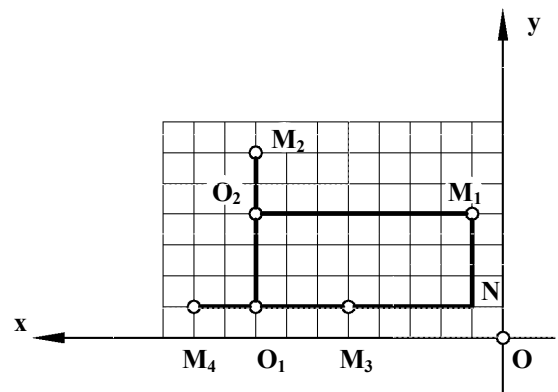


Рис. 3.14 Конечное построение КД для четырех точек

Рассмотрим построения кратчайшей связывающей линии для пяти точек плоскости. Пусть на плоскости заданы точки M_1 , M_2 , M_3 , M_4 и M_5 (рис. 3.15, а). Из заданного множества точек выбираем пару точек, имеющих кратчайшее расстояние. Такой парой являются точки M_1 и M_2 , которые могут быть

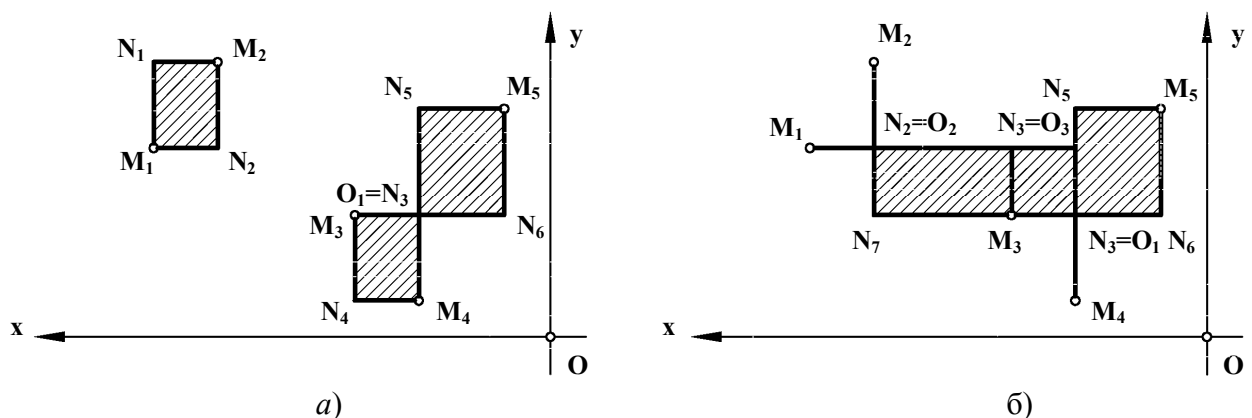
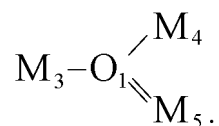


Рис. 3.15 Кратчайшее дерево для пяти точек

соединены между собой кратчайшей линией $M_1N_1M_2$ или $M_1N_2M_2$. На второй ступени должны быть соединены точки M_3 и M_4 ломаной линией $M_3N_3M_4$ или

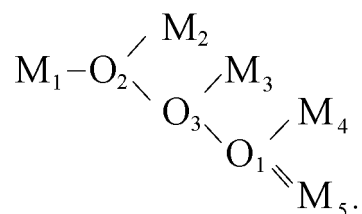
$M_3N_4M_4$. На третьей ступени сравниваются расстояния между фрагментами $M_3 = M_4$, $M_1 = M_2$ и точкой M_5 . Ближайшим соседом фрагмента $M_3=M_4$ оказалась точка M_5 , которая находится в трехлучевой зоне. Поэтому она соединяется с ближайшей вершиной N_3 через точку N_5 или N_6 . После этого точка N_3 становится узловой точкой O_1 и изменяется зона подвижности (она заштрихована). Структуру кратчайшего дерева для трех точек M_3 , M_4 и M_5 можно записать так:



На четвертой ступени объединяются два фрагмента $M_1=M_2$ и $M_3-O_1 \begin{array}{l} \nearrow M_4 \\ \searrow M_5 \end{array}$

в одно кратчайшее дерево: $M_1-O_2 \begin{array}{l} \nearrow M_2 \\ \searrow M_3-O_1 \begin{array}{l} \nearrow M_5 \\ \searrow M_4 \end{array} \end{array}$

Как видно из рис. 3.15,б, возможны другие варианты соединения заданных точек, например:

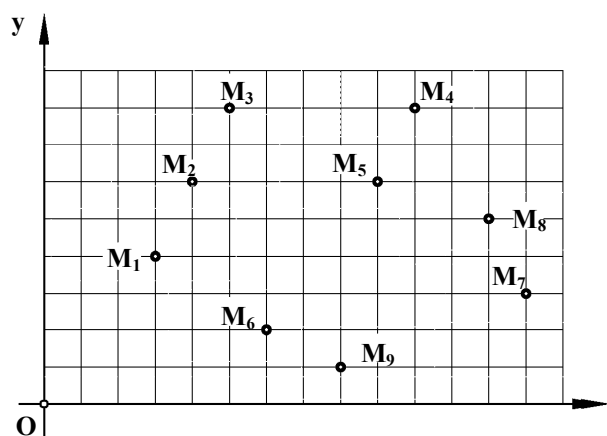


Таким образом, существует несколько кратчайших деревьев одной и той же длины, определяемых наличием зоны подвижности. Это обстоятельство позволяет учитывать при выборе КД, наряду с протяженностью связывающих линий и другие условия.

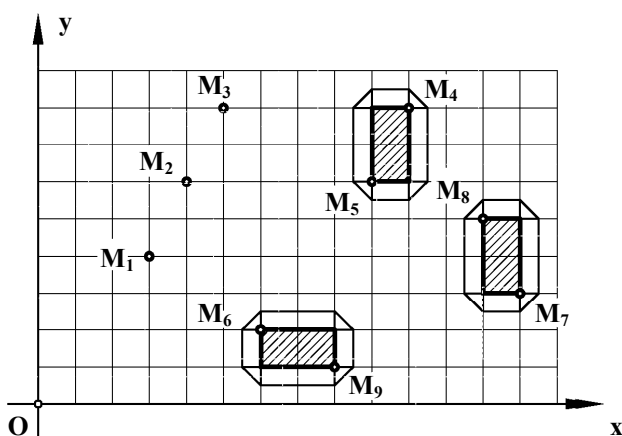
3.5 Алгоритм построения кратчайших связывающих линий для m точек плоскости

Полученные свойства и анализ выше проведенных исследований построения кратчайших связывающих линий для двух, трех, четырех и пяти точек плоскости, построения эквидистанционной линии и фрагмента показывает эффективность следующего алгоритма для построения кратчайших связывающих линий для m точек плоскости с ортогональными расстояниями [85, 86, 87]:

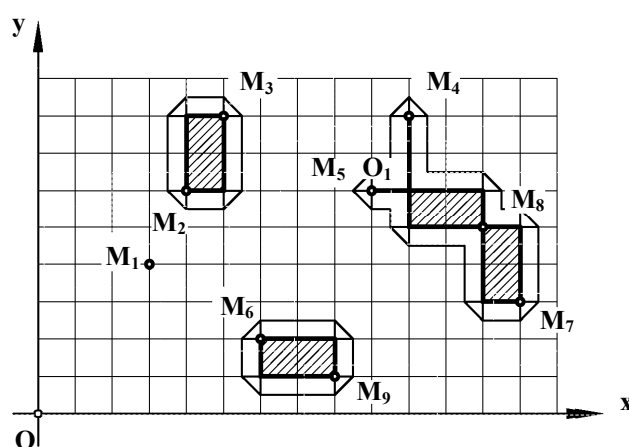
1. Из множества заданных точек выбираются две точки M_i и M_j , расстояние между которыми не больше, чем для любой другой пары. Строится КД₂ для этих двух точек.



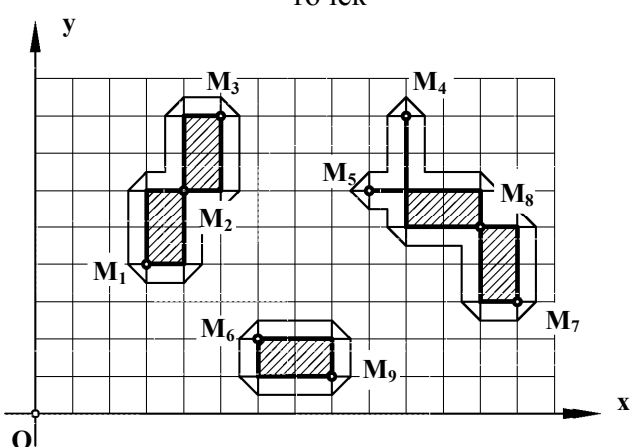
а) Расположение исходных точек



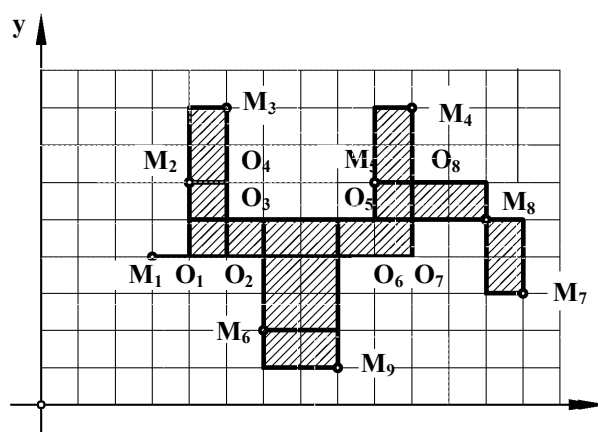
б) Первый, второй и третий этапы построения кратчайшего дерева для 9 точек



в) Четвертый и пятый этапы построения кратчайшего дерева для 9 точек



г) Шестой этап построения кратчайшего дерева для 9 точек



д) Последний этап построения кратчайшего дерева для 9 точек

Рис.3.16

2. Каждый последующий шаг алгоритма заключается в переходе от $КД_i$ построенного для группы из i точек, к $КД_{i+1}$ для группы из $i+1$ точек. При этом определяются: а) очередная $(i+1)$ -я точка, которая должна быть

подключена к дереву; б) конфигурация KD_{i+1} , к которому ранее найденное KD_i войдет, в общем случае, уже в частично деформированном виде.

3. После построения KD_i может возникнуть необходимость соединения на следующем шаге двух близких друг к другу точек, не вошедших в KD_i и дающих начало новой группе соединяемых точек, т.е. образуется новое кратчайшее поддерево. Такие поддерева должны далее соединяться между собой на основе принципа наименьшего удлинения KD_i при каждом отдельном шаге построения.

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат xOy задано множество из девяти точек $M_1, M_2, \dots, M_9$ (рис.3.16,а). На основе предложенного алгоритма покажем построение кратчайшего дерева KD_9 .

Построение разбивается на 8 ступеней. Расстояние между точками вычисляется по формуле (3.1).

Наименьшим расстоянием обладает пара, состоящая из точек M_5 и M_4 . Строим KD_2 для этих двух точек и эквидистанционную линию этого KD_2 . Эквидистанционная линия имеет вид восьмиугольника. На второй ступени сравниваем расстояния между оставшимися семи точками и кратчайшим деревом $M_3 = M_4$. При этом расстояние между какой-нибудь точкой и KD определяется по формуле (3.4):

$$d = p + \Delta l, \quad (3.4)$$

где: p – расстояние от точки до эквидистанционной линии;

Δl – порядок этой эквидистанционной линии.

На втором шаге наименьшим расстоянием обладала пара, состоящая из точек M_7 и M_8 . Строим кратчайшее дерево $M_7 = M_8$ и эквидистанционную линию KD_2 . На третьей ступени сравниваются расстояния между пятью точками M_1, M_2, M_5, M_6, M_9 и двумя кратчайшими деревьями $M_3 = M_4, M_7 = M_8$.

Расстояние между деревьями определяется по формуле

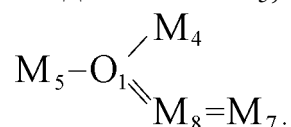
$$d = p + \Delta l_1 + \Delta l_2, \quad (3.5)$$

где: p – расстояние между эквидистанционными линиями двух различных деревьев;

$\Delta l_1, \Delta l_2$ – порядок, соответственно, этих эквидистанционных линий.

На третьем шаге наименьшим расстоянием обладала пара, состоящая из точек M_6 и M_9 . Строим кратчайшее дерево $M_6 = M_9$ и эквидистанционную линию этого KD_2 . На четвертой ступени построения наименьшим расстоянием обладала пара, состоящая из двух деревьев $M_5 = M_4$ и $M_7 = M_8$. Эти два дерева объединены в одно дерево (рис.3.16,в) и построена эквидистанционная линия.

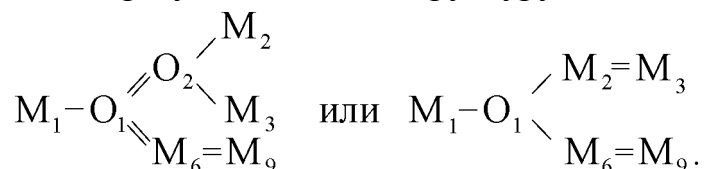
Структура кратчайшего дерева для точек M_5, M_4, M_7 и M_8 :



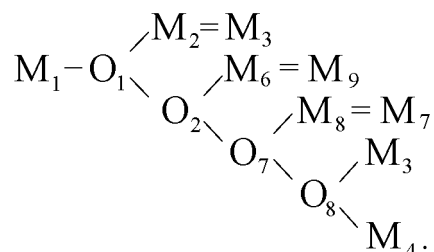
Затем, на пятой ступени построено кратчайшее дерево $M_2=M_3$. На шестой ступени построения сравниваются расстояния между тремя деревьями и точкой M_1 . Наименьшим оказалось расстояние между точкой M_1 и деревом $M_2=M_3$ (рис. 3.16, г).

Кратчайшее дерево для трех точек M_1 , M_2 и M_3 имеет следующую структуру: $M_1=M_2=M_3$. Построена эквидистанционная линия для КД₃.

На седьмом шаге к дереву, построенному на шестой ступени, соединено дерево $M_6=M_9$. Получаем в результате этого структуру:



На последнем шаге приходится объединить два дерева, полученные на четвертом и седьмом шагах, в одно дерево, которое может иметь следующую структуру (рис.3.16, д):



Возможны и другие структуры КД₉ для заданных точек $M_1, M_2, \dots, M_9$ в пределах зоны подвижности. Однако, они имеют одинаковую протяженность.

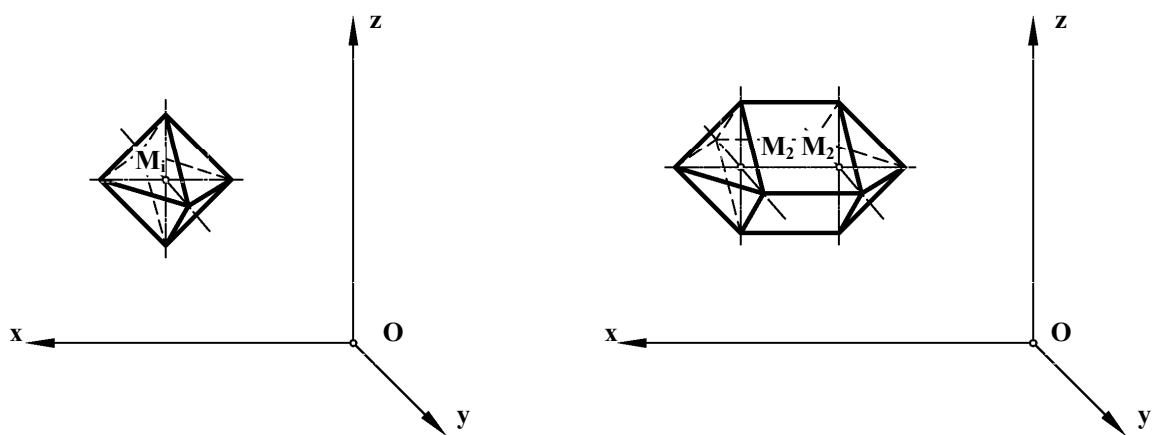
3.6 Основные свойства кратчайших связывающих линий в трёхмерном пространстве с ортогональной метрикой

Если множество точек, равноудаленных от заданной точки M_i , в пространстве E^3 с евклидовыми расстояниями образует сферу, то в пространстве с ортогональными расстояниями - октаэдр, с центром в этой точке M_i (рис.3.17, а). Таким образом, октаэдр является эквидистанционной поверхностью для его центра

Если в пространстве с евклидовыми расстояниями две точки могут быть соединены единственным образом, то в пространстве с ортогональной метрикой существует несколько различных случаев их соединения [89].

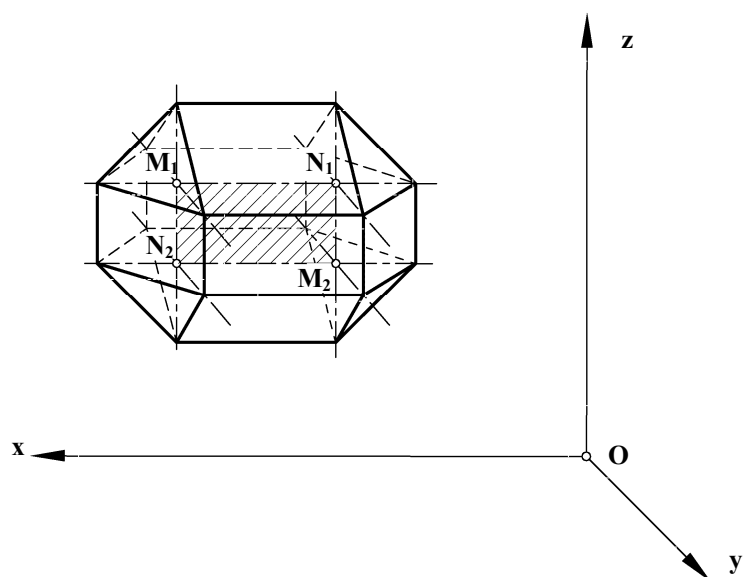
1. Две точки могут располагаться на одной прямой, параллельной одной из координатных осей. Тогда имеем единственную кратчайшую линию, соединяющую две данные точки (рис.3.17, б).

Множество точек, в результате присоединения любой из которых к двум заданным точкам получается дерево КД₃ одной и той же длины, образует многогранник. Этот эквидистанционный многогранник имеет 10 вершин, 20 ребер и 12 граней (из них 4 грани имеют форму прямоугольника и 8 граней – равносторонних треугольников).

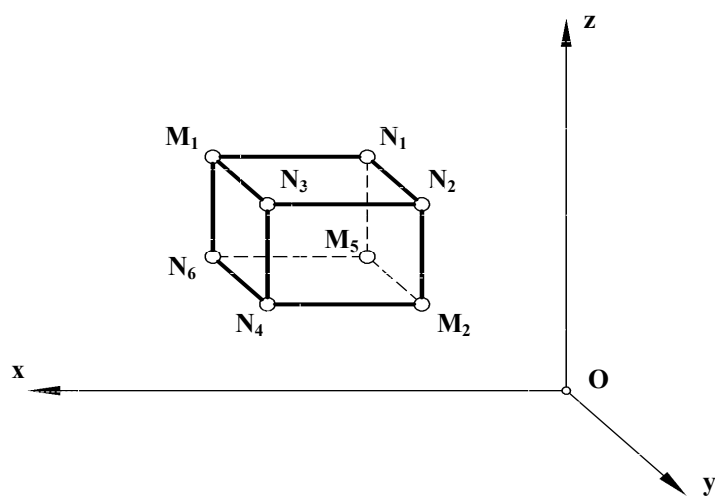


а) Эквидистанционная поверхность для одной точки (октаэдр)

б) Эквидистанционная поверхность для двух точек, расположенных на одной параллельной оси абсцисс прямой



в) Эквистанционная поверхность для точек M_1 и M_2 , расположенных в одной плоскости, параллельной координатной плоскости xOz



г) Параллелепипед кратчайших линий, соединяющих две точки общего положения

Рис. 3.17

2. Две точки могут располагаться в одной плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей. Тогда множество кратчайших линий, соединяющих данные две точки, заполняют заштрихованный прямоугольник (рис.3.17, в). Из этого множества кратчайших линий выделим два крайних дерева, которые упрощенно записываем так: $M_1 = M_2$. Множество точек, в результате присоединения любой из которых к двум заданным точкам получается КД₃ одной и той же длины, образует эквидистанционный многогранник (2-тип), имеющий 16 вершин, 32 ребра и 18 граней (из них 10 граней имеют форму прямоугольников и 8 граней – треугольников).

3. В общем случае множество кратчайших линий, соединяющих данные две точки, заполняет параллелепипед (рис.3.17,г). Из этого множества кратчайших линий выделим крайние ломаные: $M_1N_1N_2M_2$; $M_1N_1N_5M_2$; $M_1N_3N_2M_2$; $M_1N_3N_4M_2$; $M_1N_6N_4M_2$ и $M_1N_6N_5M_2$. Упрощенно записываем так: $M_1 \equiv M_2$. Эквидистанционный многогранник (3-тип) для таких двух точек (рис.3.18.) имеет 24 вершины, 48 ребер и 26 граней (из них 18 граней имеют форму прямоугольников и 8 граней - треугольников).

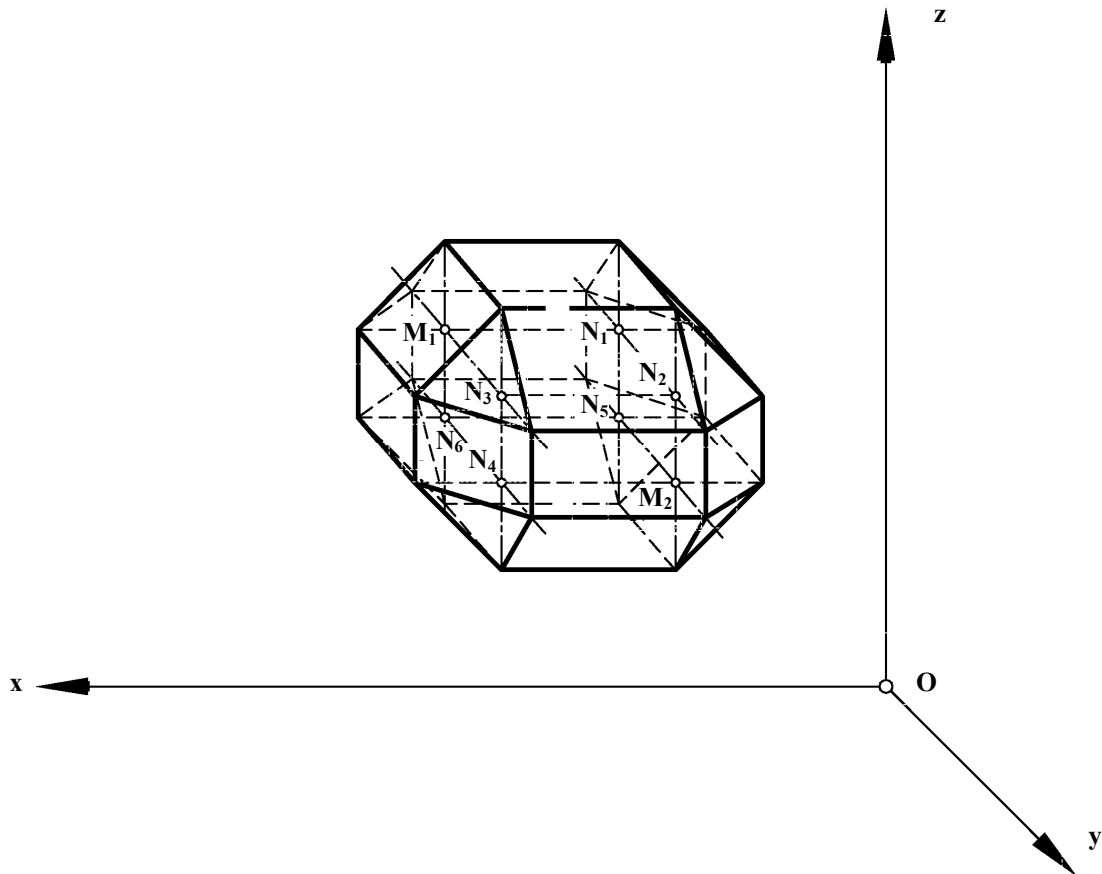


Рис. 3.18 Эквидистанционный многогранник для двух точек общего положения

Если M_3 принадлежит одной из шести граней, параллельных граням параллелепипеда кратчайших линий, то для кратчайшего ее присоединения к двум данным точкам достаточно опустить из нее перпендикуляр на соответствующую грань многогранника 3-типа. КД₂ удлиняется на величину отрезка M_3O , где O – основание перпендикуляра. Если точка M_3 принадлежит

остальным четырехугольным граням, то кратчайшее ее присоединение осуществляется ломаной из двух отрезков.

Эквидистанционную поверхность для любого кратчайшего дерева можно получить объединением многогранников вышеуказанных трех типов. Например, для кратчайшего дерева

$$M_1 \equiv N \begin{cases} \nearrow M_2 \\ \searrow M_3 \end{cases}$$

показанного на рис. 2.19, строим многогранник 3-типа для участка $M_1 \equiv N$, 2-типа для участка $M_3 = N$ и 1-типа для участков M_2-N . Эквидистанционный многогранник для всего КД получается объединением этих трех выпуклых многогранников.

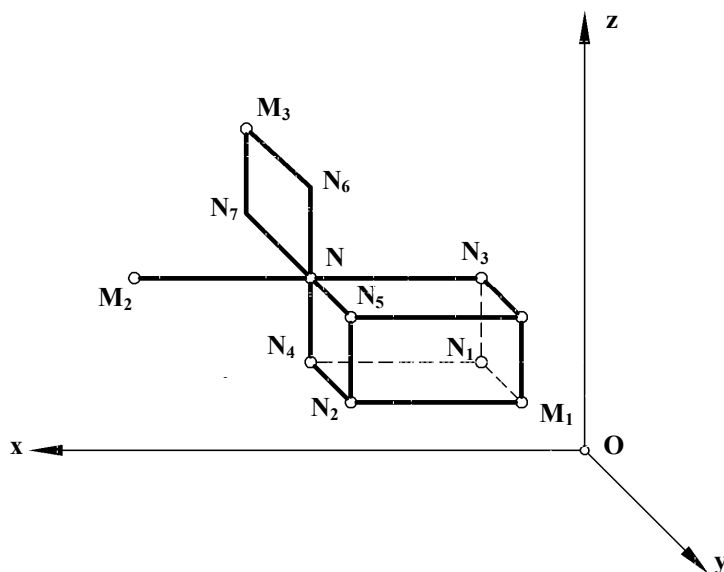


Рис. 3.19 Кратчайшее дерево для трех точек M_1 , M_2 и M_3 .

3.7 Построение кратчайших связывающих линий для трех, четырех и пяти точек трехмерного пространства с ортогональной метрикой

Пусть задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. На координатные оси отложим равные между собой отрезки $\Delta x = \Delta y = \Delta z = a$.

Величина "a" выбирается исходя из требуемой точности построения и она не должна превышать наименьшего расстояния точек, для которых необходимо построить кратчайшую связывающую линию. Через каждую точку деления оси абсцисс проводим профильные плоскости, через каждую точку деления оси аппликат - горизонтальные плоскости, через каждую точку деления оси ординат - фронтальные плоскости. Получим три пучка плоскостей, делящих пространство на множество элементарных кубиков. Предположим, что заданные точки расположены в вершинах элементарных кубиков, что значительно облегчает решение задачи. Принято говорить, что ребра рассматриваемых кубиков образуют трехмерную сеть (рис. 3.20).

Рассмотрим трехмерную сеть, показанную на рис. 3.20. Требуется связать заданные точки M_1 , M_2 и M_3 линией кратчайшей длины. Допустим, что

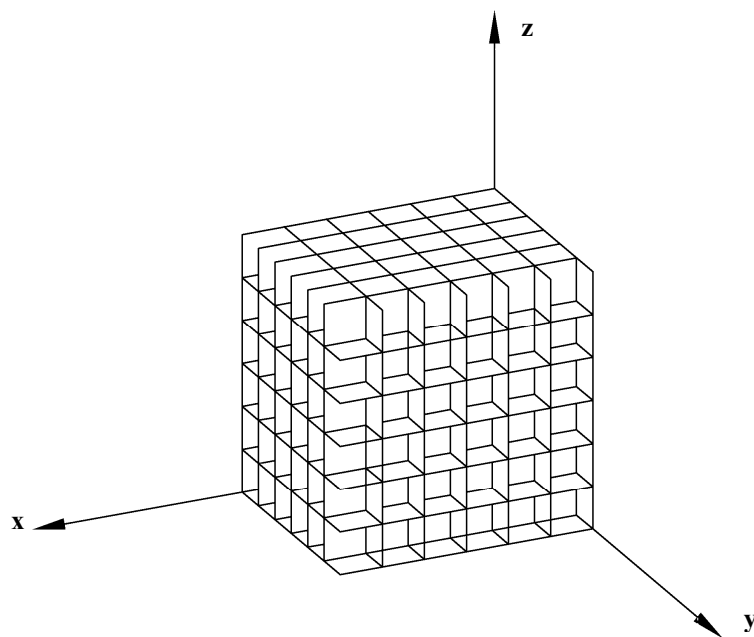


Рис. 3.20 Модель трехмерной ортогональной сетки

заданные точки находятся на узлах сети. В предыдущих параграфах были установлены основные свойства и условия существования кратчайших связывающих линий с ортогональной метрикой и предложена методика построения для двумерного пространства. Аналогичные условия и свойства могут быть получены для построения кратчайшего дерева в трехмерном пространстве. В частности, можно отметить, что:

1. В трехмерном пространстве конфигурация кратчайших связывающих линий представляет собой также дерево;
2. Ветви дерева представляют собой совокупность отрезков прямых;
3. Ветви дерева "растут" по направлениям, параллельным осям координат x , y и z ;
4. Если точка M_i является вершиной дерева, то в ней сходятся не более шести отрезков.

Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ определяется формулой, получаемой из (1.1) при $p=1$.

$$d(M_1, M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|. \quad (3.6)$$

Из трех заданных точек M_1 , M_2 и M_3 (рис.3.21) выбираем пару точек, расстояние между которыми не больше, чем для другой пары. Такой парой оказались точки M_2 и M_3 , которые расположены на противоположных вершинах параллелепипеда, относящегося к третьему типу эквидистанционных поверхностей (рис.3.18).

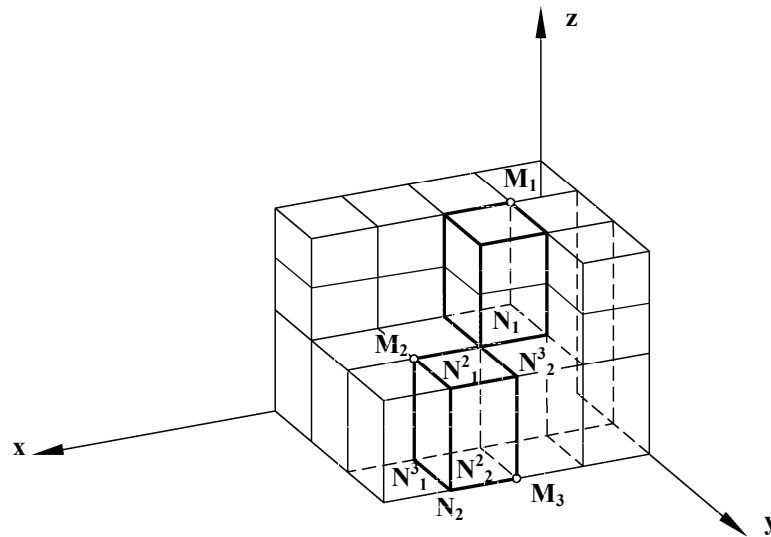


Рис. 3.21 Кратчайшее дерево для трех точек E^3

Множество кратчайших связывающих данные две точки M_2 и M_3 , линий заполняет параллелепипед (рис. 3.17,з). Из этого множества кратчайших линий выделим крайние ломаные: $M_2 - N_1^3 - N_2 - M_3$; $M_2 - N_1^3 - N_2^2 - M_3$; $M_2 - N_1 - N_2^2 - M_3$; $M_2 - N_1 - N_2^3 - M_3$; $M_2 - N_1^2 - N_2^3 - M_3$; $M_2 - N_1^2 - N_2 - M_3$. На следующем шаге вершину N_1 этого многогранника соединяем с точкой M_1 . Точки N_1 и M_1 так же являются противоположными вершинами параллелепипеда могут быть соединены между собой множеством кратчайших линий, состоящих из ребр соответствующего параллелепипеда. Структуру соединения запишем так:

$$M_2 - N_1 \begin{matrix} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{matrix} M_1 \\ \quad \quad \quad \equiv M_3,$$

где точка N_1 является ближайшей к точке M_1 вершиной параллелепипеда, построенного для точек M_2 и M_3 .

Пусть заданы точки M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 . Требуется соединить их линией кратчайшей длины. Точки находятся узлах трехмерной сети (рис.3.22)

Из заданного множества точек кратчайшее расстояние имеют точки M_3 и M_4 , которые расположены на одной грани параллелепипеда, параллельной координатной плоскости xOz . Тогда множество кратчайших связывающих линий, соединяющих точки M_3 и M_4 , заполняет заштрихованный прямоугольник. Из этого множества кратчайших линий выделим два крайних дерева:

$$\begin{matrix} & N_1 & \\ M_4 & \diagdown & \diagup M_3 \\ & N_2 & \end{matrix}$$

Это соответствует случаю 2 (рис.3.17, в).

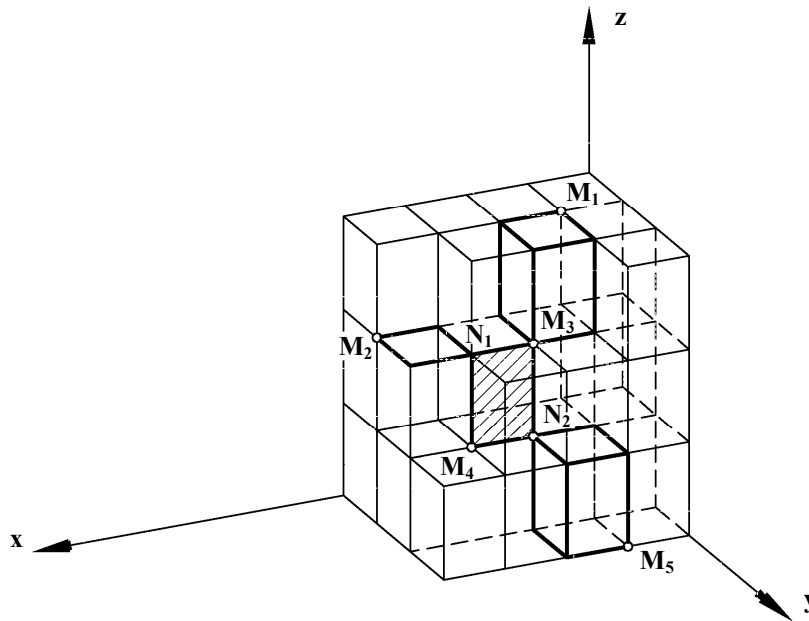


Рис. 3.22 Кратчайшее дерево для пяти точек в E^3

Точки N_1 и N_2 являются коленями связывающих линий. На втором шаге сравниваем расстояния между фрагментом $M_4 = M_3$ и точками M_1, M_2, M_5 . Ближайшим соседом фрагмента $M_4 = M_3$ оказалась точка M_2 . Точки N_1 и M_2 расположены на одной грани параллелепипеда, параллельной координатной плоскости xOy . Соединяем их между собой кратчайшей линией. Структуру этой кратчайшей линии можно записать так:

$$M_2 = N_1 \begin{cases} M_3 \\ M_4 \end{cases}$$

На третьем шаге соединены между собой точки M_1 и M_3 , которые являются ближайшими соседями, и на последнем шаге объединяются в одно кратчайшее дерево все заданные точки. В нашем случае расстояние от точки M_5 до точки M_3 равно расстоянию от точки M_4 до точки M_5 . Поэтому точку M_5 можно соединить с любой из них. Соединим с точкой N_2 . Таким образом получаем кратчайшее дерево, построенное для пяти точек M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 .

3.8 Построение кратчайших связывающих линий для m точек трехмерного пространства

Приведенные выше построения кратчайших связывающих линий для трех, четырех и пяти точек пространства показывают, что для отыскания искомым дополнительных вершин кратчайшего связывающего дерева, оптимизирующего решения задачи достаточно ограничиться рассмотрением трехмерной ортогональной сети. Для построения кратчайших связывающих

заданное дискретное множество из m точек линий в трехмерном пространстве с ортогональной метрикой можно предложить следующую методику:

1. Через заданные точки проводятся взаимно перпендикулярные прямые, параллельные осям координат x , y и z , которые используются для образования трехмерной сети; шаг трехмерной сети выбирается, исходя из требуемой точности.

2. Определяются расстояния между всеми данными точками по формуле (3.6) и составляется матрица расстояний. Матрица расстояний является диагональной матрицей, вытекающей отсюда свойствами.

3. Каждый последующий шаг алгоритма заключается в определении минимального элемента матрицы расстояний. Вычеркиваются строки и столбцы матрицы, которые проходят через минимальный элемент. Может оказаться, что несколько элементов имеют одинаковые минимальные значения. Тогда выбирается любой из этих минимальных элементов. Каждому элементу матрицы расстояний соответствуют две точки, или точка и кратчайшее поддерево, или два кратчайших поддерева.

4. После каждого очередного шага алгоритма необходимо объединить выбранную пару, уточнить конфигурацию связывающего кратчайшего дерева и построить эквидистанционную поверхность выбранного порядка. С помощью эквидистанционных многогранников определяются расстояния от точки до кратчайшего дерева и между кратчайшими деревьями. Составляется новая матрица расстояний.

5. Если задано m точек, то алгоритм состоит из $m-1$ шагов. В конце решения мы получаем одно единственное дерево, связывающее все m точки и имеющее кратчайшую длину.

Применив предложенную методику, рассмотрим конкретный пример построения кратчайшего дерева для заданного множества точек. Пусть задано множество из 5 точек, координаты которых приведены в табл. 3.1.; требуется построить связывающее их КД₅. Вычисляем ортогональные расстояния между заданными точками по формуле (3.6). Полученные значения внесем в табл. 3.2, представляющую диагональную матрицу расстояний [90].

Таблица 3.1.

Координаты заданных точек

Точки Координаты этих точек	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
x	100	60	40	70	50
y	80	90	85	60	150
z	65	60	90	30	35

Таблица 3.2.

Матрица расстояний

Точки	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
M_1	∞	55	90	85	150
M_2		∞	55	70	95
M_3			∞	115	130
M_4				∞	115
M_5					∞

Отыскиваем минимальный элемент матрицы. Из табл. 3.2 видно, что минимальным расстоянием обладают две пары: M_2 и M_1 ; M_2 и M_3 . Расстояние между ними равно 55. Можно выбрать любую из них, например, пару M_1 и M_2 . Вычеркиваются соответствующие строки и столбцы этой матрицы с номерами M_2 и M_1 . Составляется новая матрица расстояний для точек M_3 , M_4 , M_5 и кратчайшего дерева $M_1 \equiv M_2$.

Таблица 3.3.

Промежуточная матрица расстояний

Точки и фрагменты	M_3	M_4	M_5	$M_1 \equiv M_2$
M_3	∞	115	130	55
M_4		∞	115	70
M_5			∞	95
$M_1 \equiv M_2$				∞

Рассматривая табл. 3.3, находим минимальный элемент, составляющий 55. Это означает, что кратчайшим расстоянием обладают точка M_3 и фрагмент $M_1 = M_2$. Вычеркиваем строки и столбцы, соответствующие минимальному элементу. Составляется новая матрица расстояний (табл. 3.4) для точек M_4 , M_5 и фрагмента $M_1 \equiv M_2 \equiv M_3$.

Таблица 3.4.

Следующая матрица расстояний

Точки и фрагменты	M_4	M_5	$M_1 \equiv M_2 \equiv M_3$
M_4	∞	115	70
M_5		∞	95
$M_1 \equiv M_2 \equiv M_3$			∞

Из табл.3.4 видно, что расстояние от точки M_4 до фрагмента $M_1 \equiv M_2 \equiv M_3$ минимальное. Соединим точку M_4 к фрагменту $M_1 \equiv M_2 \equiv M_3$ и определим конфигурацию кратчайшего дерева для четырех точек M_1 , M_2 , M_3 и M_4 . На последнем шаге соединяем точку M_5 с КД, построенным на предыдущем шаге. Расстояние от точки M_5 до КД равно 95. Одна из допустимых структур КД имеет следующий вид:

$$\begin{array}{c} \text{M}_1 - \text{N}_1 - \text{N}_2 \begin{array}{l} \nearrow \text{N}_3 - \text{N}_4 - \text{N}_3 \\ \searrow \text{M}_2 - \text{N}_5 \nearrow \text{N}_6 - \text{M}_4 \\ \searrow \text{N}_7 - \text{M}_5 \end{array} \end{array}$$

Суммарная длина L кратчайшей линии, связывающей точки M_1 , M_2 , M_3 , M_4 и M_5 в трехмерном пространстве с ортогональной метрикой будет равна сумме минимальных элементов:

$$L = 55 + 55 + 70 + 95 = 275 \text{ ед. длины.}$$

Для наглядности на рис.3.23 построена аксонометрическая (косоугольная фронтальная диметрия) проекция конфигурации кратчайшего дерева.

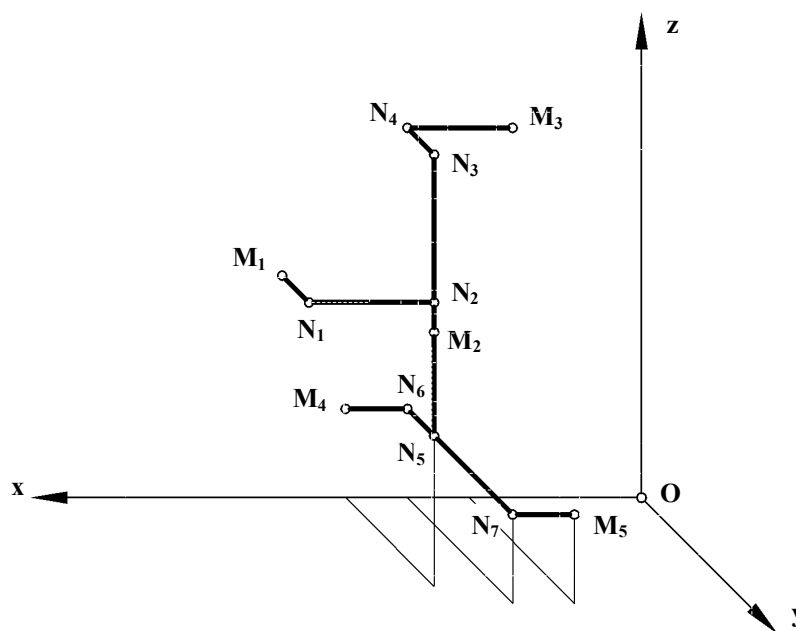


Рис.3.23 Одна из кратчайших связывающих линий для заданных точек M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 .

4. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ СВЯЗЫВАЮЩИХ ЛИНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С ПОЛЯРНОЙ МЕТРИКОЙ

4.1 Состояние вопроса построения кратчайших связывающих линий на плоскости с полярной метрикой

Наряду с евклидовыми и ортогональными расстояниями, на практике имеет важное значение введенное нами полярное расстояние. Задача построения кратчайших связывающих линий с полярной метрикой возникает при оптимизации кинематической схемы манипуляторов, при проектировании метрополитенов, кольцевых трубопроводных систем и т.д.

В [60] введена новая метрика - полярное расстояние между точками плоскости. Исследована геометрия плоскости с полярной метрикой.

В настоящее время нет методики построения кратчайших связывающих линий для множества точек плоскости с полярной метрикой. Поэтому в работе на основе изучения геометрии плоскости с полярной метрикой предлагается алгоритм построения кратчайших связывающих линий.

4.2 Введение понятия полярного расстояния

Наряду с ортогональным и евклидовым расстоянием, как показали результаты наших исследований, имеет важное значение на практике введенное нами полярное расстояние. Для введения на рассмотрение полярного расстояния рассмотрим некоторую плоскость α с фиксированной полярной системой координат. Пусть точка O является полюсом, а луч $[O\rho)$ – полярной осью и $[OA]$ – единичным отрезком (рис.4.1.). Тогда положение одной точки M данной плоскости, отличной от полюса O , можно охарактеризовать двумя числами:

- 1) числом $\rho=|OM|$, выражающим расстояние точки M от полюса O и называемым полярным радиусом точки M ;
- 2) числом φ , определяемым углом между прямыми OM и Op , отчитываем против движения часовой стрелки от полярной оси Op до луча $[OM)$ и, как известно, называемым полярным углом точки M . Числа ρ и φ являются полярными координатами точки M , определяющими положение этой точки на плоскости α . Если точка M совпадает с точкой O , то $\rho=0$. Тогда угол α - неопределенный. Мы получим все остальные точки плоскости, если полярный радиус ρ будет изменяться от нуля до плюс бесконечности, а полярный угол φ – от нуля до 2π . Полярный радиус ρ – всегда величина положительная ($\rho>0$), так как под ρ понимается расстояние от полюса до точки M , а расстояние, как и всякая длина, не может быть отрицательным.

По некоторым практическим соображениям на плоскости с полярной системой координат оставляем свободными только два направления движения, запретив все остальные направления перемещения точки. Разрешаются движения по concentрическим окружностям, проводимым из центра, совпадающего с полюсом, и по лучам, исходящим из полюса 0. Пучок прямых с носителем в точке 0 и множество всех concentрических окружностей, проведенных из центра 0, образуют ортогональную полярную сетку.

Рассмотрим две точки M_1 и M_2 (рис.4.2.). Тогда от одной из этих точек до другой можно прийти, перемещаясь по дугам concentрических окружностей, проводимых из полюса 0, и по прямым, проходящим через полюс 0. Множество всех возможных линий, связывающих точки M_1 и M_2 , образует четырехугольник $M_1N_1M_2N$, две стороны M_1N_1 и M_2N которого будут дугами concentрических окружностей, а две другие стороны M_1N и N_1M_2 – отрезками прямых. Один из возможных путей $M_1N^1N_1^1N^{11}N_1^{11}N^{111}N_1^{111}N^{1111}M_2$ показан на рис. 4.2., который состоит из четырех дуг (M_1N^1 , $N_1^1N^{11}$, $N_1^{11}N^{111}$, $N_1^{111}N^{1111}$) и четырех радиальных отрезков ($N^1N_1^1$, $N_1^{11}N^{11}$, $N_1^{111}N^{1111}$, $N^{1111}M_2$). Очевидно, что кратчайшая линия, связывающая точки M_1 и M_2 , состоит из отрезка M_1N прямой и дуги NM_2 окружности, выделенная на рис.4.2. жирной линией.

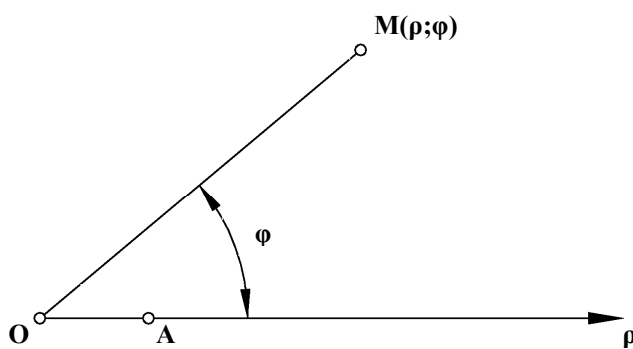


Рис. 4.1 Точка М в полярной системе координат

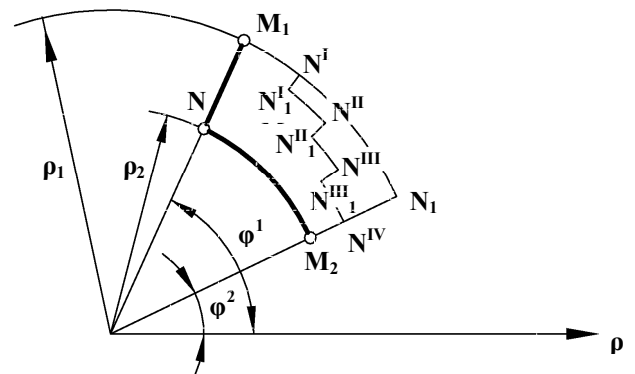


Рис. 4.2 Отрезок на плоскости с полярной метрикой

Рассмотрим нижеприведенную функцию, определяемую расположением точек M_1 и M_2 на плоскости с фиксированной полярной системой координат [60, 92]:

$$d(M_1, M_2) = \begin{cases} \rho_1 + \rho_2, & \text{если } |\varphi_1 - \varphi_2| \geq 2, \\ |\rho_1 - \rho_2| + |\rho_1(\varphi_1 - \varphi_2)|, & \text{если } |\varphi_1 - \varphi_2| < 2 \text{ и } \rho_1 < \rho_2, \\ |\rho_1 - \rho_2| + |\rho_2(\varphi_1 - \varphi_2)|, & \text{если } |\varphi_1 - \varphi_2| < 2 \text{ и } \rho_1 > \rho_2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Где:

ρ_1, φ_1 – полярные координаты точки M_1 ;

ρ_2, φ_2 – полярные координаты точки M_2 .

Как известно, что любую функцию, зависящую от расположения точек M_1 и M_2 , можно рассматривать как расстояние между ними, если эта функция

является всегда положительной и симметричной, а как же имеет место, так называемое неравенство треугольника, кроме того, это функция должна быть невырожденной. Действительно, функция (4.1) обладает указанными свойствами расстояния:

- 1) $d(M_1, M_2) \geq 0$, т.е. функция (3,1) всегда является положительной;
- 2) $d(M_1, M_2) = d(M_2, M_1)$ (симметричность); расстояние от точки M_1 до точки M_2 равно расстоянию от точки M_2 до точки M_1 ;
- 3) расстояние от точки M_1 до точки M_2 равно или меньше суммы расстояний между точками M_1, M_3 и между точками M_3, M_2 , т.е. $d(M_1, M_2) \leq d(M_1, M_3) + d(M_3, M_2)$; $d(M_1, M_3) \leq d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3)$ и $d(M_2, M_3) \leq d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3)$ (неравенство треугольника);
- 4) $d(M_1, M_2) = 0$ тогда и только тогда, когда точки M_1 и M_2 совпадают (невырожденность).

Величину, вычисляемую по формуле (4.1) для точек M_1 и M_2 , назовем полярным расстоянием этих точек. Пространство, в котором расстояние между двумя точками вычисляется по формуле (4.1), назовем пространством с полярной метрикой.

4.3 "Отрезки", "окружность" и эквидистанционные линии на плоскости с полярной метрикой

На плоскости с полярной метрикой, в отличие от плоскости с евклидовой метрикой (в зависимости от расположения точек M_1 и M_2 относительно выбранной полярной системы координат), имеем отрезки различных видов, соединяющие заданные точки кратчайшей линией [60, 92, 93].

Определение. "Отрезком", соединяющим точки M_1 и M_2 плоскости E_2 с полярной метрикой, назовем такое множество точек E_{M_1, M_2} этой плоскости E_2 , что для любой точки M_3 множества E_{M_1, M_2} выполнено равенство

$$d(M_1, M_2) = d(M_1, M_3) + d(M_3, M_2).$$

Для различных точек $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ в зависимости от их расположения, возможны следующие частные случаи.

1. Пусть $\varphi_1 = \varphi_2$, $\rho_1 \neq \rho_2$. Тогда расстояние между точками M_1 и M_2 на основании (4.1) будет равно

$$d(M_1, M_2) = |\rho_1 - \rho_2|,$$

а множество точек E_{M_1, M_2} для которых выполняется вышеприведенное равенство, заполняет промежуток между точками M_1 и M_2 (рис. 4.3,а), при этом точки M_1, M_2 и 0 коллинейны. В этом случае понятия "отрезка" на плоскостях с полярным и евклидовым расстояниями совпадают.

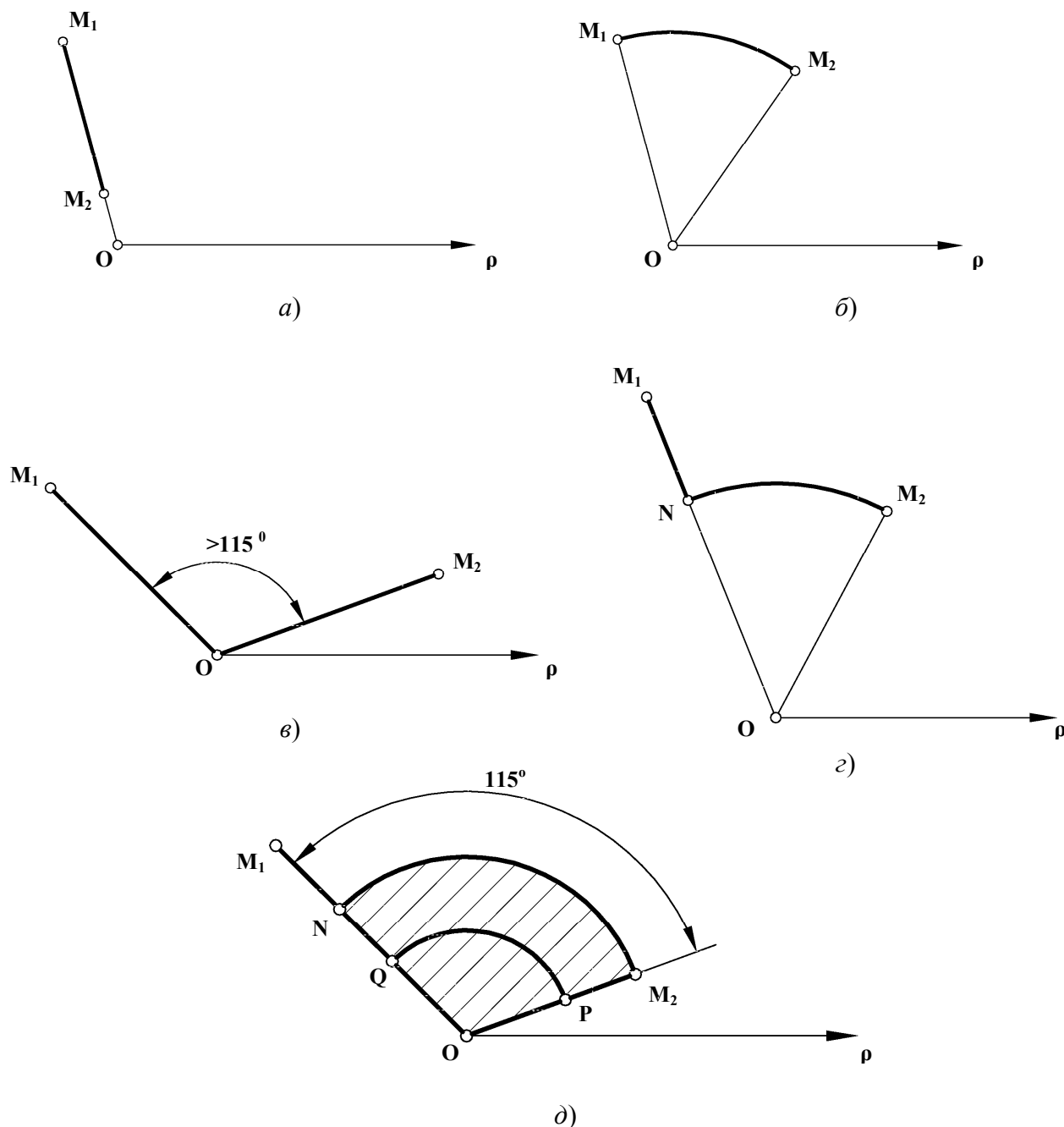


Рис 4.3 а) радиальный, б) дуговой, в) магистральный, г) дугорадиальный отрезки. д) соединение двух точек различными отрезками при $|\varphi_1 - \varphi_2| = 2$.

2. Пусть $\rho_1 = \rho_2$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, $|\varphi_1 - \varphi_2| < 2$. Тогда расстояние между точками M_1 и M_2 будет равно

$$d(M_1, M_2) = |\rho_1 (\varphi_1 - \varphi_2)| = |\rho_2 (\varphi_1 - \varphi_2)|,$$

а множество точек E_{M_1, M_2} заполняет промежуток между точками M_1 и M_2 по дуге окружности с центром в точке O и радиусом, равным $\rho_1 = \rho_2$ (рис. 4.3, б).

3. Пусть $|\varphi_1 - \varphi_2| \geq 2$. Тогда расстояние между точками M_1 и M_2 на основании формулы (4.1) будет равно

$$d(M_1, M_2) = \rho_1 + \rho_2.$$

Множество точек E_{M_1, M_2} состоит из двух отрезков $[M_1O]$ и $[OM_2]$, угол между которыми не менее 115° (рис.4.3, в).

4. Пусть $\rho_1 \neq \rho_2$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$ и $|\varphi_1 - \varphi_2| < 2$. Тогда расстояние между точками M_1 и M_2 (предположим, что $\rho_2 < \rho_1$) будет равно

$$d(M_1, M_2) = |\rho_1 - \rho_2| + |\rho_2(\varphi_1 - \varphi_2)|,$$

а множество точек E_{M_1, M_2} заполняет ломаную M_1NM_2 , состоящую из отрезка M_1N и дуги NM_2 (рис.4.3, з). Этот общий случай можно разбить на два случая, один из которых совпадает с первым, а другой - со вторым, рассмотренными выше частными случаями.

Таким образом, на плоскости E_2 с полярной метрикой нужно различить четыре вида отрезков, соединяющих M_1 и M_2 в зависимости их расположения относительно фиксированной полярной системы координат. Их будем называть, соответственно, радиальным (рис.4.3, а), дуговым (рис.4.3, б), магистральным (рис.4.3, в) и радиальнодуговым или дугорадиальным (рис. 4.3, з) отрезками.

Следует отметить, что точки $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ при $|\varphi_1 - \varphi_2| = 2$ могут быть соединены между собой различными отрезками (рис.4.3, д), т.к.

$$d(M_1, M_2) = |M_1N| + |\overset{\circ}{NM}_2| = |M_1O| + |OM_2| = |M_1Q| + |\overset{\circ}{QP}| + |PM_2|.$$

Точнее говоря, при этом существует бесконечное множество отрезков, соединяющих точки M_1 и M_2 , которое заполняет заштрихованный на рис. 4.3, д сектор круга.

Определение. Множество точек $\{M_i\}$ плоскости E_2 , находящихся на расстоянии $d(M_0, M_i) = r$ от данной точки $M_0 \in E_2$, называется "окружностью", а точка M_0 - центром, величина r – радиусом этой "окружности" [60].

Если M_0 совпадает с полюсом O полярной системы координат, то окружность на плоскости с полярной метрикой совпадает с обычной окружностью плоскости с евклидовой метрикой (рис. 4.4, а). Построим "окружность" с центром в точке $M_0(\rho_0, \varphi_0)$ и радиусом r . Предположим, что $|OM_0| = \rho_0 > r$. Тогда уравнение "окружности" в общем виде можно записать так:

$$r = \begin{cases} |\rho - \rho_0| + |\rho_0(\varphi - \varphi_0)|, & \text{если } \rho_0 < \rho; \\ |\rho - \rho_0| + |\rho(\varphi - \varphi_0)|, & \text{если } \rho_0 > \rho. \end{cases} \quad (4.2)$$

Среди точек искомой "окружности" имеются такие, которые соединяются с центром "окружности" радиальным или дуговым "отрезками". Причем имеются только две точки M_1 и M_3 , которые соединяются с центром радиальными "отрезками", а поэтому их координаты, соответственно, равны $\rho_0 + r, \varphi_0$ и $\rho_0 - r, \varphi_0$. А так же имеются только две точки M_2 и M_4 (рис.4.4, б), которые соединяются с центром дуговыми "отрезками", поэтому их координаты, соответственно, равны $\rho_0, \varphi_0 - r/\rho_0$ и $\rho_0, \varphi_0 + r/\rho_0$.

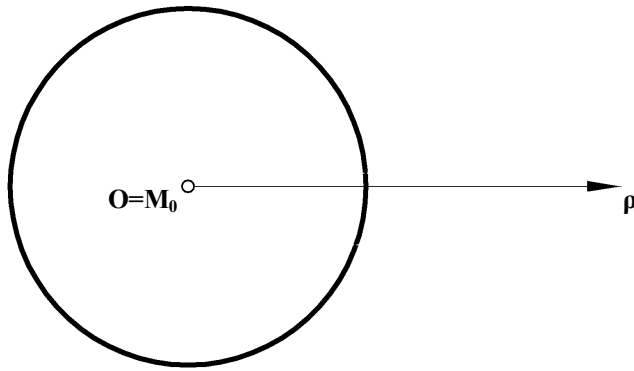


Рис. 4.4,а Окружность плоскости с полярной метрикой, когда полюс служит центром этой окружности

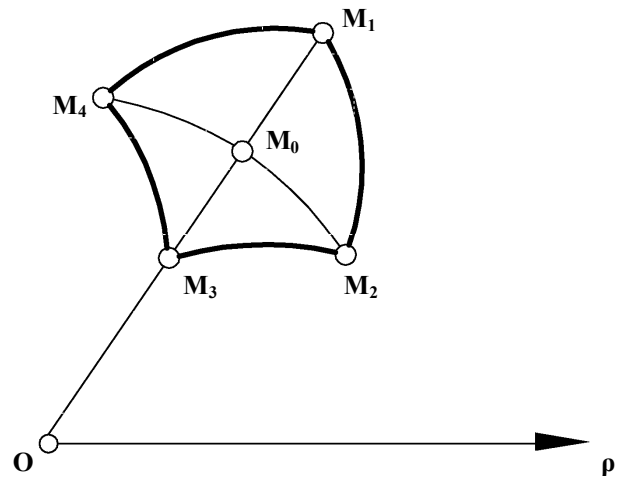


Рис. 4.4,б «Окружность» на плоскости с полярной метрикой, когда центр окружности не совпадает полюсом.

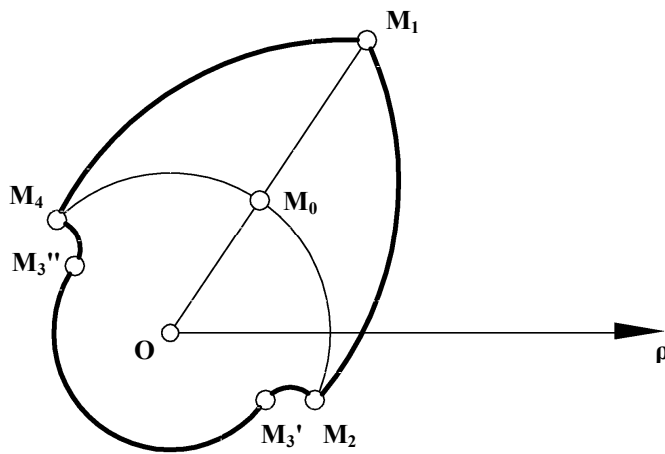


Рис. 4.4,в Усложненная «окружность»

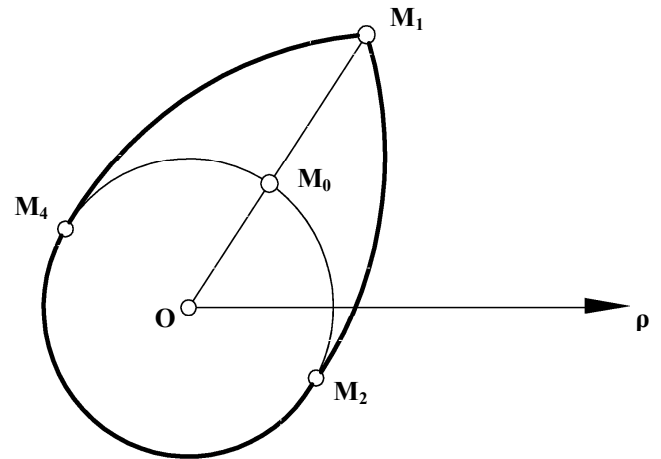


Рис. 4.4,г Упрощённая «окружность»

Все остальные точки искомой "окружности" разбиваются на четыре множества: первое – это множество точек искомой "окружности", расположенных между точками $M_1(\rho_0 + r, \varphi_0)$ и $M_2(\rho_0, \varphi_0 - r/\rho_0)$; второе – это множество точек искомой "окружности", расположенных между точками $M_2(\rho_0, \varphi_0 - r/\rho_0)$ и $M_3(\rho_0 - r, \varphi_0)$; третье множество расположено между точками $M_3(\rho_0 - r, \varphi_0)$ и $M_4(\rho_0, \varphi_0 + r/\rho_0)$ и четвертое множество – между точками $M_4(\rho_0, \varphi_0 + r/\rho_0)$ и $M_1(\rho_0 + r, \varphi_0)$. Любая точка, принадлежащая одному из этих четырех множеств, может быть присоединена с центром $M_0(\rho_0, \varphi_0)$ только дугорадиальным отрезком. Координаты точек первого множества удовлетворяют уравнению:

$$\rho = r + \rho_0(1 - \varphi_0) + \rho_0\varphi; \quad (4.3.)$$

$$\text{второго множества} - \rho = \frac{\rho_0 - r}{1 - \varphi_0 + \varphi}; \quad (4.4)$$

$$\text{третьего множества} - \rho = \frac{\rho_0 - r}{1 + \varphi_0 - \varphi}; \quad (4.5)$$

$$\text{четвертого множества} - \rho = r + \rho_0(1 + \varphi_0) - \rho_0 \varphi; \quad (4.6)$$

где: ρ, φ – координаты точки, принадлежащей искомой "окружности", причем $(\rho_0 - r < \rho < (\rho_0 + r))$ и $(\varphi_0 - r/\rho_0 < \varphi < (\varphi_0 + r/\rho_0))$.

Известно, что (4.3) и (4.6) являются уравнениями спирали Архимеда, а (4.4) и (4.5) – уравнениями гиперболической спирали.

Таким образом, "окружность" на плоскости с полярной метрикой в данном случае представляет собой с позиции плоскости с евклидовой метрикой криволинейный четырехугольник: две его стороны, расположенные ближе к полюсу 0, являются отрезками гиперболической спирали, а другие две, расположенные дальше от полюса, – отрезками спирали архимеда. И, наоборот, отсюда следует, что гиперболическая спираль и спираль Архимеда могут быть определены как множество точек, равноудаленных, от заданной точки M_0 на плоскости с фиксированной полярной системой координат и полярным расстоянием.

Предположим, что $|M_0O| = \rho_0 < r$. Тогда точки M_1, M_2 и M_4 строятся точно так же, как на рис.4.4,б. Координаты точек первого множества по прежнему удовлетворяют равенство (4.3), а координаты точек четвертого множества – равенство (4.6). Теперь второе и третье множество следует разбить, в свою очередь, на три (рис.4.4,в): 1) множество точек искомой "окружности", расположенных между точками M_2 и M_3' ; 2) множество точек искомой "окружности", расположенных между точками M_3' и M_3'' ; 3) множество точек искомой "окружности", расположенных между точками M_3'' и M_4 . Первое и третье множества из этих трех являются по прежнему точками соответствующего отрезка гиперболической спирали. Точки M_3' и M_3'' определяются как точки пересечения окружности, проведенной из центра 0 радиусом $|r - \rho_0|$, с гиперболическими спиралями, проведенными, соответственно, через точки M_2 и M_4 . Для построения этих гиперболических спиралей могут быть использованы уравнения (4.4) и (4.5). Таким образом "окружность" на плоскости с полярной метрикой имеет вид, указанный на рис. 4.4,в. Если $\rho_0 \leq r/2$, то участки гиперболической спирали исчезают и "окружность" имеет вид, представленный на рис. 4.4, г. Последняя "окружность" состоит всего из трех участков: 1) множество точек, расположенных между точками M_1 и M_2 , которое является отрезком спирали Архимеда, определяемое уравнением (4.3); 2) множество точек, принадлежащих дуге обычной окружности с центром в

точке 0 и радиусом, равным $r = \rho_0$, и не содержащей точку M_0 ; 3) множество точек, расположенных, между точками M_1 и M_4 , которое являются отрезком спирали Архимеда, определяемой уравнением (4.6).

Таким образом, на плоскости с полярной метрикой следует различать четыре вида окружностей: обычная окружность (рис.4.4,а), нормальная окружность (рис.4.4,б), усложненная окружность (рис.4.4,в) и упрощенная окружность (рис.4.4,г). Если центр окружности совпадает с полюсом, то получается обычная окружность. Если полярный радиус центра окружности больше радиуса искомой, то получается нормальная окружность. Если полярный радиус центра окружности меньше радиуса искомой окружности, но имеет место $r > \rho_0 > \frac{r}{2}$, то усложненная окружность. Когда полярный радиус центра окружности равен или меньше половины радиуса, тогда получается упрощенная окружность.

Теперь используем полученные свойства и уравнения "окружности" на плоскости с полярной метрикой для построения эквидистанционной линии для двух точек.

Эквидистанционной линией для одной точки порядка g является окружность с центром в этой точке и радиусом, равным g .

Как мы знаем, что на плоскости с евклидовой метрикой эквидистанционной линией кратчайшего дерева KD_2 является четырехцентровый овал, а на плоскости с ортогональной метрикой, в зависимости от расположения заданных точек M_1 и M_2 , эквидистанционной линией для KD_2 был шестиугольник или восьмиугольник. На плоскости с полярной метрикой конфигурация эквидистанционной линии для KD_2 зависит от вида соответствующего отрезка, соединяющего точки M_1 и M_2 .

Пусть точки M_1 и M_2 соединены между собой радиальным отрезком (рис.4.5,а). Тогда эквидистанционная линия состоит из шести участков. Участки между точками 1 и 2, 1 и 3 являются отрезками спирали Архимеда, а участки между точками 1' и 2', 1' и 3' отрезками гиперболической спирали. Точки 2 и 2', 3 и 3' соединены между собой отрезками также гиперболической спирали, но с другими параметрами. Точки 1 и 1' присоединяются к KD_2 точек M_1 и M_2 радиальными отрезками, точки 2, 2', 3 и 3', а также точки эквидистанционной линии, расположенные между точками 2 и 2', 3 и 3' – дугowymi отрезками. Остальные точки эквидистанционной линии, а именно точки, расположенные между точками 1 и 2, 1 и 3, 1' и 2', 1' и 3' присоединяются к KD_2 точек M_1 и M_2 дугорадиальными отрезками. Построение эквидистанционной линии порядка g для двух радиально соединенных точек M_1 и M_2 заключается в проведении двух "полуокружностей", соответственно, с центрами в точках M_1 и M_2 и радиусом g , а также отрезков гиперболических спиралей.

Пусть точки M_1 и M_2 соединены между собой дугowym отрезком (рис.4.5,б). Эквидистанционная линия в этом случае также состоит из шести участков.

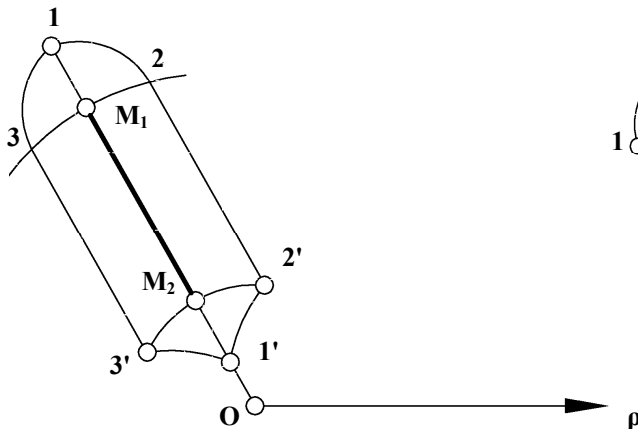


Рис.4.5,а Эквидистанционная линия радиального отрезка

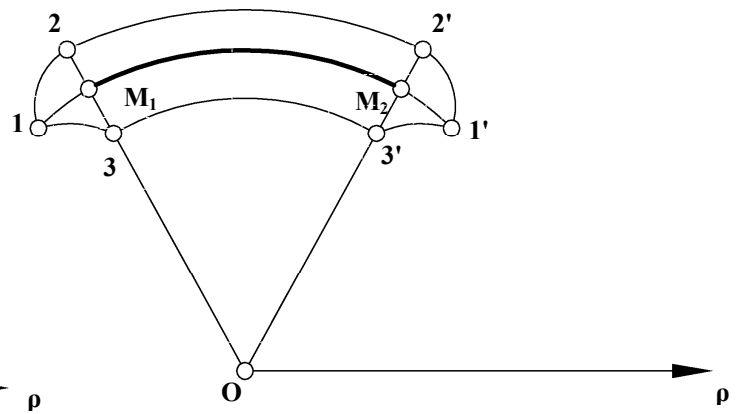


Рис. 4.5,б Эквидистанционная линия дугового отрезка

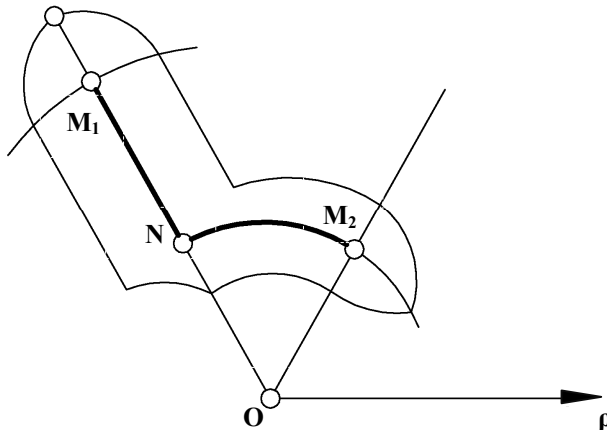


Рис.4.5,в Эквидистанционная линия дугорадиального отрезка

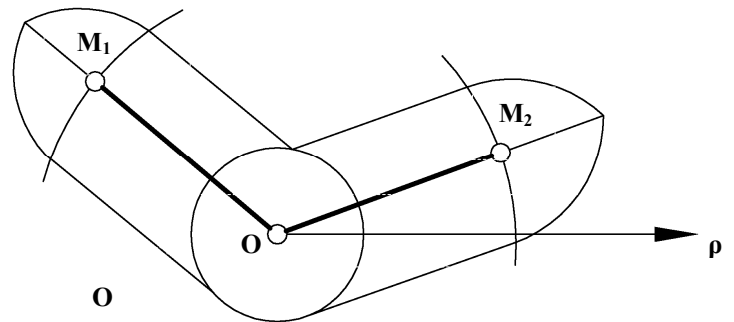


Рис.4.5,г Эквидистанционная линия магистрального отрезка

Участки между точками 1 и 2, 1' и 2' являются отрезками спирали Архимеда, а участки между точками 1 и 3, 1' и 3' – отрезками гиперболической спирали. Точки 2 и 2', а также точки 3 и 3' соединены между собой дугами обычных окружностей, проведенных из центра 0. Точки 2, 2', 3 и 3', а также точки, расположенные между точками 2 и 2', 3 и 3' присоединяются КД₂ точек M₁ и M₂ радиальными отрезками. Только две точки 1 и 1' присоединяются к точкам M₁ и M₂ дуговыми отрезками. Все остальные точки, а именно точки расположенные между точками 1 и 2, 1 и 3, 1' и 2', 1' и 3' присоединяются к КД₂ радиальнодуговыми отрезками. Построение эквидистанционной линии порядка r для двух точек M₁ (ρ_1, φ_1) и M₂ (ρ_2, φ_2), соединенных между собой дуговым отрезком, заключается в определении объединения четырех окружностей. Две окружности проведены из центров M₁ и M₂ с радиусом r . Другие две окружности проведены из центра 0, соответственно, радиусами $\rho + r$ и $\rho - r$.

Пусть теперь точки M_1 и M_2 соединены между собой радиальнодуговым отрезком (рис.4.5,в). Такой отрезок состоит из двух частей: радиальной (отрезок M_1N) и дуговой (дуга NM_2 окружности центром точки O). Поэтому эквидистанционная линия может быть построена отдельно для первой и для второй частей, а затем они объединяются в одно целое. Как видно из рис. 4.5,в, эквидистанционная линия KD_2 точек M_1 и M_2 , соединенных между собой радиальнодуговым отрезком, состоит из 9 участков: два (две дуги) отрезка обычной окружности, четыре отрезка гиперболической спирали и три отрезка спирали Архимеда.

Если угол M_1OM_2 больше 115° , то они соединяются между собой магистральным отрезком (рис.4.5,г). Эквидистанционная линия в этом случае также состоит из 9 участков. Из них четыре участка представляют собой отрезки гиперболической спирали, один участок – дуга обычной окружности с центром в точке O , а остальные четыре участка – отрезки спирали Архимеда. Для построения эквидистанционной линии порядка r магистрального отрезка, соединяющего точки M_1 и M_2 , следует проводить три окружности одинакового радиуса из центров M_1 , M_2 и O . Затем следует проводить четыре отрезка гиперболической спирали.

Результаты наших исследований показали, что эквидистанционная линия для любого кратчайшего дерева, соединяющего дискретное и конечное множество точек, состоит из объединения указанных на рис. 4.5 четырех видов эквидистанционных линий для двух точек. Поэтому нам удалось разработать универсальный алгоритм построения эквидистанционной линии порядка r для KD_m , связывающего множество из m точек. На основе алгоритма составлен пакет прикладных программ. Эквидистанционная линия позволяет определить расстояния от точки до кратчайшего дерева и между кратчайшими деревьями.

4.4 Построение кратчайших связывающих линий для трех, четырех и пяти точек плоскости с полярной метрикой

Выше было установлено, что на плоскости E_2 с полярной метрикой различают четыре вида отрезка, соединяющих точки M_1 и M_2 в зависимости от их расположения относительно фиксированной полярной системы координат.

Пусть на плоскости E_2 относительно фиксированной полярной системы координат заданы точки $M_1(p_1, \varphi_1)$, $M_2(p_2, \varphi_2)$ и $M_3(p_3, \varphi_3)$. Требуется соединить их линией кратчайшей длины. В начале рассмотрим некоторые частные случаи расположения трех точек [94, 95].

Допустим, что точки $M_1(p_1, \varphi_1)$, $M_2(p_2, \varphi_2)$, $M_3(p_3, \varphi_3)$ расположены на одной радиальной прямой (рис.4.6,а). Тогда $\rho_1 \neq \rho_2 \neq \rho_3$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$. Длина L кратчайшей связывающей точки M_1 , M_2 и M_3 линии будет равна: $L = d(M_1, M_3) + d(M_3, M_2)$, где $d(M_1, M_3) = |\rho_1 - \rho_3|$ и $d(M_3, M_2) = |\rho_3 - \rho_2|$, если

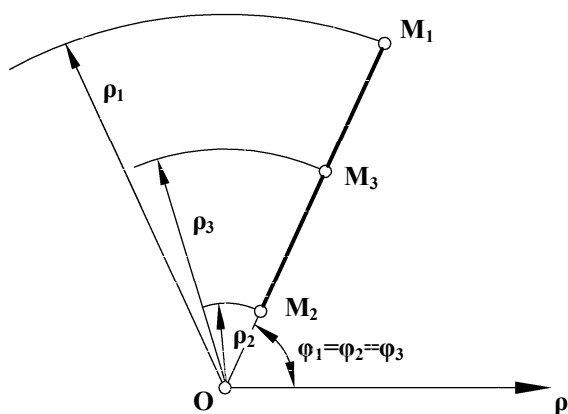


Рис. 4.6,а Радиальное соединение

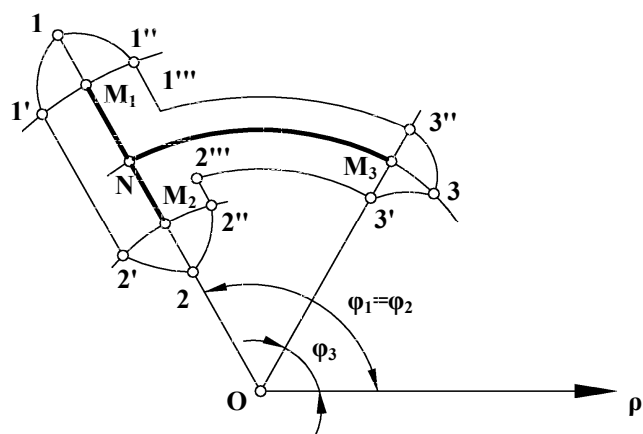


Рис. 4.6,б Радиальнодуговое соединение

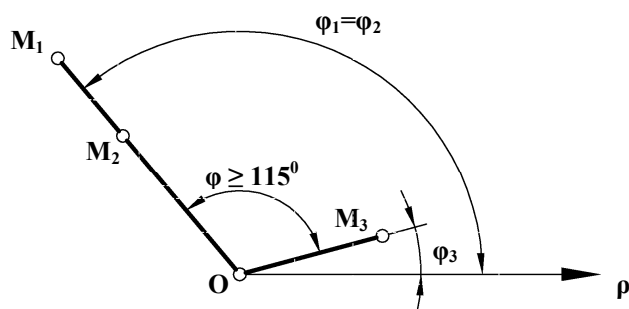


Рис. 4.6,в Магистральное соединение

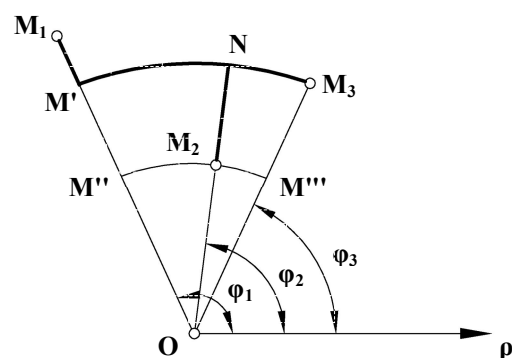


Рис. 4.6,г Дугорадиальное соединение

точка M_3 расположена между точками M_1 и M_2 . Поэтому $L = |\rho_1 - \rho_3| + |\rho_3 - \rho_2| = |\rho_1 - \rho_2|$.

Пусть заданные точки M_1 , M_2 и M_3 расположены так, как показано на рис. 4.6, б. Сравниваем расстояния между точками. Кратчайшим расстоянием является линия, связывающая точки M_1 и M_2 . Соединяем их радиальным отрезком. На втором шаге соединяются точки N и M_3 дуговым отрезком, если $\angle M_1OM_3 < 115^\circ$. Длина L кратчайшей связывающей линии при $\varphi_2 - \varphi_3 < 2$ и $\rho_2 < \rho_3$ равна $L = |M_1M_2| + |NM_3| = |\rho_1 - \rho_2| + |\rho_3(\varphi_2 - \varphi_3)|$. В данном случае кратчайшая связывающая линия является дугорадиальным отрезком.

Пусть точки $M_1(\rho_1, \varphi_1)$, $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ и $M_3(\rho_3, \varphi_3)$ расположены так, что $\varphi_1 = \varphi_2$, $\varphi_2 - \varphi_3 \geq 2$ (рис. 4.6, в). Тогда длина L кратчайшей связывающей линии равна $L = d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3)$. Расстояние между точками M_2 и M_3 : $d(M_2, M_3) = |\rho_2 + \rho_3|$. Кратчайшая связывающая линия является в этом случае магистральным отрезком. Поэтому $L = |\rho_1 - \rho_2| + |\rho_2 + \rho_3| = |\rho_1 + \rho_3|$.

Теперь рассмотрим точки M_1 , M_2 и M_3 , которые занимают на плоскости с полярными расстояниями более общее положение. На рис. 4.6 представлены два варианта расположения трех точек. На рис. 4.6,б точки M_1 и M_2 расположены радиально, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2$. Проведена прямая, проходящая через точки M_1 , M_2 и O . Построив эквидистанционную линию кратчайшего дерева с

вершинами в точках M_1 и M_2 , увидим, что точку M_3 следует присоединить к КД₂ дуговым отрезком. Точка присоединения N является общей точкой трех линий, сходящихся к ней. Изображена эквидистанционная линия кратчайшего дерева трех точек M_1 , M_2 и M_3 , которая состоит из 11 участков. Участки эквидистанционной линии, между точками 1 и 1', 1 и 1'', 3 и 3'' являются отрезками спирали Архимеда, участки, расположенные между 2 и 2', 2 и 2'', 3 и 3' – отрезками гиперболической спирали. В состав эквидистанционной линии входят еще три отрезка гиперболической спирали 1' 2', 2'' 2''' и 1'' 1''', две дуги 3'' 1''' и 3' 2''' окружностей, проведенных из центра 0. Точку N принято называть узловой точкой. Допустим, что заданные точки M_1 , M_2 и M_3 расположены как показано на рис.4.6,з. Точка M_2 расположена внутри угла M_1OM_3 и сумма углов между радиальными отрезками M_1O , M_2O и OM_3 меньше 115° , т.е. $\angle M_1OM_2 + \angle M_2OM_3 < 115^\circ$. Очевидно, что в этом случае точки M_1 , M_2 и M_3 соединяются между собой только дугорадиальными отрезками. Рассмотрим два случая соединения.

1) точка M_1 соединяется с точкой M'' отрезком прямой, затем точка M'' соединяется с точкой M''' дугой окружности, проведенной из центра 0 через точку M_2 ; После этого остается провести отрезок, соединяющий точки M''' и M_3 ;

2) точка M_1 соединяется с точкой M' отрезком прямой, затем точка M' соединяется с точкой M_3 дугой окружности, проведенной из центра 0; после этого остается провести прямую OM_2 , которая пересекает дугу окружности в узловой точке N .

Длина связывающей линии:

для первого случая $L = |M_1M''| + |M'' \cup M'''| + |M'''M_3|$;

для второго случая $L = |M_1M'| + |M_2N| + |M' \cup M_3|$.

Сравнивая найденные величины L , можно определить, что во втором случае заданные точки M_1 , M_2 и M_3 соединяются более короткой линией через точку N . Из этого случая устанавливаем следующее: если рассматривать как равнобедренный треугольник с углом при вершине $< 115^\circ$, то внутри такого треугольника существует узловая точка N , связывающие точки M_1 , M_2 и M_3 линией кратчайшей длины. Следовательно, на первом шаге соединяем точки M_2 и M_3 , как расположенные близко друг к другу, через узловую точку N . На втором шаге присоединяем точку M_1 с точкой N через точку M' . Координаты узловой точки N , соответственно, равны $\rho_N = \rho_3$ и $\varphi_N = \varphi_2$. Поэтому можно писать так: $N(\rho_3, \varphi_2)$.

Рассмотрим построения кратчайших связывающих линий для четырех точек плоскости $M_1(\rho_1, \varphi_1)$, $M_2(\rho_2, \varphi_2)$, $M_3(\rho_3, \varphi_3)$, $M_4(\rho_4, \varphi_4)$ [94]. Пусть они расположены так, как показаны на рис. 4.7,а. Сравнивая расстояния между заданными точками, определяем, что ближайшими соседями являются точки M_3 и M_4 . Для этого случая кратчайшим расстоянием между точками M_3 и M_4

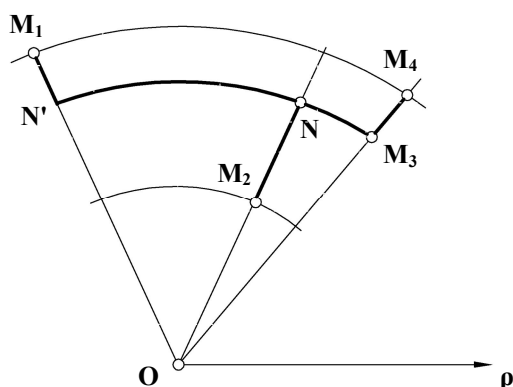


Рис. 4.7,а

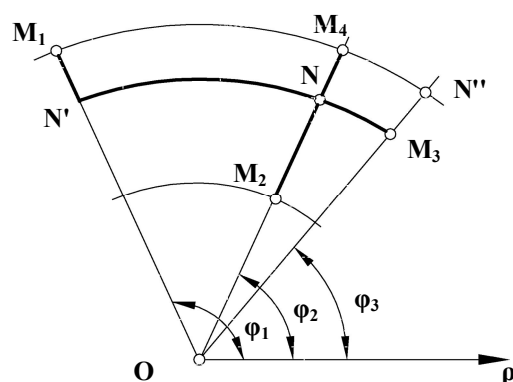


Рис. 4.7,б

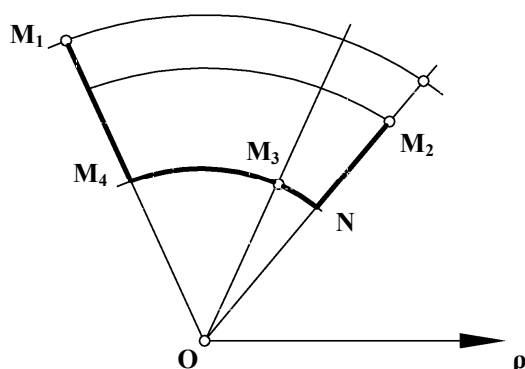


Рис. 4.7,в

является радиальный отрезок M_3M_4 . На следующем шаге мы должны сравнить расстояния от этого отрезка до точек M_2 и M_1 . Согласно примеру (рис.4.6,з), к ближайшей точке M_2 точки M_3 и M_4 соединяются через узловую точку N и образуют кратчайшее дерево $КД_3$. На втором шаге соединяем точку M_2 с $КД_2$ точек M_3 и M_4 . На последнем шаге соединяем точку M_1 через точку N' радиальнодуговым отрезком с узловой точкой N в кратчайшее дерево $КД_4$. Полученная конфигурация кратчайших связывающих линий является оптимальной. Суммарная длина L $КД_4$ для точек M_1, M_2, M_3 и M_4 (рис.4.7,б) определяется следующим образом

$$L = |M_1N'| + |N'N| + |NM_3| + |M_2N| + |NM_4| = |M_1N'| + |N'M_3| + |M_2M_4| \text{ или} \\ L = |\rho_1 - \rho_3| + |\rho_3(\varphi_1 - \varphi_3)| + |\rho_2 - \rho_4|.$$

Допустим, что заданные точки M_1, M_2, M_3 и M_4 расположены так, как показано на рис.4.7,в. Тогда на первой ступени построения кратчайшей связывающей линии для них ближайшими соседями будут точки M_4 и M_3 . Соединяем их дуговым отрезком. На втором шаге к $КД_2$ точек M_3 и M_4 присоединяем ближайшую к нему точку M_2 через точку N дугорадиальным отрезком. На последнем шаге точка M_1 соединяется с вершиной M_4 кратчайшего дерева $КД_3$ радиальным отрезком. Суммарная длина L кратчайшего дерева для четырех точек, построенного на рис. 4.7, в, равна $L = |\rho_1 - \rho_4| + |\rho_4(\varphi_1 - \varphi_2)| + |\rho_2 - \rho_4|$.

Пусть заданы пять точек M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 (рис. 4.8). На первой ступени построения соединяем точки M_3 и M_2 через точку N' радиально - дуговым отрезком, как ближайших соседей. Полученное КД₂ соединяем с точкой M_4 через точку N'' и получим кратчайшее дерево для трех точек M_2, M_3 и M_4 . На третьей ступени КД₃ соединим с точкой M_5 посредством точки N . На четвертой ступени точку M_1 присоединим к кратчайшему дереву, построенному для точек M_2, M_3, M_4 и M_5 , дуговым отрезком M_1N . Суммарная кратчайшая длина L , связывающей фиксированные точки M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 линии, равна $L = |\rho_5 - \rho_2| + |\rho_4 - \rho_3| + |\rho_1(\varphi_1 - \varphi_2)| + \rho_3(\varphi_5 - \varphi_4)|$.

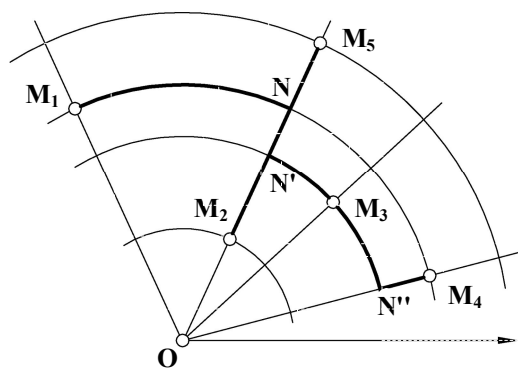


Рис. 4.8 Кратчайшее соединение для 5 точек

Приведем еще один численный пример построения КД₅ для точек $M_1(40; 0, 261)$, $M_2(60; 0, 52)$, $M_3(50; 1, 57)$, $M_4(20; 1, 831)$ и $M_5(30; 2, 35)$, изображенных на рис. 4. 9.

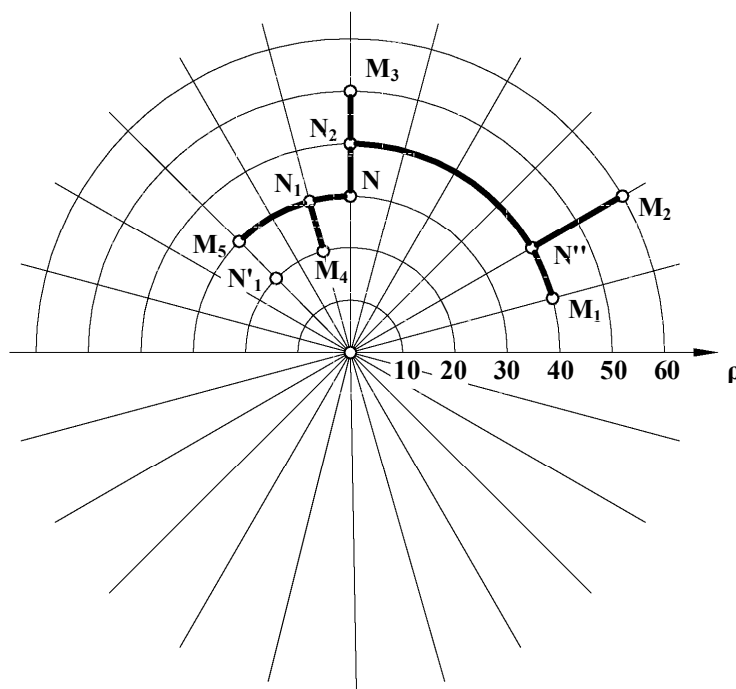


Рис. 4.9 Численный пример построения кратчайшей связывающей линии для 5-и точек

Вычисляем полярные расстояния между заданными точками M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 по формуле (4.1). Полученные значения вносим в табл.4.1, представляющую матрицу расстояний. Отыскивается минимальный элемент матрицы (табл. 4.1).

Таблица 4. 1.

Матрица расстояний между заданными точками

Точки	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
M_1	∞	30,44	62,36	51,4	70,00
M_2	30,44	∞	74,2	66,1	84,93
M_3	62,36	74,2	∞	35,22	43,39
M_4	51,4	66, 1	35,22	co	20,44
M_5	70,00	84,93	43,35	20,44	∞

Таблица 4.2.

Промежуточная матрица расстояний

Точки и КД	M_1	M_2	M_3	$M_4 \cap N_1' - M_5$
M_1	∞	30,44	62,36	51,4
M_2	30,44	∞	74,2	66,1
M_3	62,36	74,2	∞	35,22
$M_4 \cap N_1' - M_5$	51,4	66,1	35,22	∞

Таблица 4.3.

Конечный результат матрицы расстояний

Точки и КД	M_3	$M_1 \cap N'' - M_2$	$M_4 - N_1 - M_5$
M_3	∞	62,36	35,22
$M_1 \cap N'' - M_2$	62,36	∞	51,4
$M_4 - N_1 - M_5$	35,22	51,4	∞

Из табл.4.1 видно, минимальным расстоянием обладает пара, состоящая из точек M_4 и M_5 , которое равно 20,44. Вычеркиваются соответствующие строки и столбцы этой матрицы. Составляется новая матрица расстояний для точек M_1 , M_2 , M_3 и кратчайшего дерева $M_4-N_1' \cap M_5$ (табл. 4.2). Рассматривая эту матрицу, находим минимальный элемент, составляющий 30,44. Это означает, что кратчайшим расстоянием обладают точки M_1 и M_2 . Вычеркиваем строки и столбцы, соответствующие минимальному элементу. Составляется новая матрица расстояний для одной точки M_3 и двух КД: $M_1 \cap N'' - M_2$ и $M_4 - N_1 \cap M_5$. Из таблицы 4.3 находим минимальный элемент, составляющий 35,22. Это означает, что следует присоединить точку M_3 к кратчайшему дереву $M_4 - N_1 \cap M_5$ через точку N . При этом точка N преобразуется в узловую точку. КД трех точек M_3 , M_4 , M_5 имеет следующую топологию:

$$M_3-N \cap N_1 \begin{matrix} \nearrow M_4 \\ \searrow M_5 \end{matrix}.$$

Теперь осталось объединить два кратчайших дерева КД₂ точек M_1 M_2 и КД₃ точек M_3 , M_4 , M_5 в одно кратчайшее дерево КД₅ путем проведения дугового отрезка N_2N'' (рис.4.9). При этом точка N'' превращается в узловую точку.

Суммарная длина L кратчайшей связывающей точки M_1 , M_2 , M_3 , M_4 и M_5 на плоскости с полярным расстоянием будет равна

$$L = |M_1 \hat{N}_2| + |M_2 N''| + |M_3 N| + |M_4 N_1| + |M_5 \hat{N}| = \\ = 40 \cdot 0,261 + |60 - 40| + |50 - 30| + |20 - 30| + 30 \cdot 0,783 = 125,8 \text{ ед. длины.}$$

Обобщая результаты проведенных нами исследований можно сказать, что кратчайшая связывающая линия для компланарного множества точек с полярной метрикой обладает следующими свойствами:

- конфигурация кратчайших связывающих линий представляет дерево, т.е. она не имеет замкнутых участков;
- кратчайшее связывающее дерево состоит из совокупности радиальных, дуговых, магистральных и дугорадиальных отрезков;
- если точка M_i является вершиной кратчайшего дерева, то в ней сходятся не более четырех отрезков;
- для трех данных точек существует узловая точка N , минимизирующая суммарную длину связывающей линии, если угол между смежными радиальными отрезками меньше 115° ;
- эквидистанционная линия кратчайших связывающих деревьев всегда является замкнутой линией, состоящей из отрезков спирали Архимеда, гиперболической спирали, дуговых отрезков и отрезков прямой линии.

4.5 Алгоритм построения кратчайших связывающих линий для m точек плоскости с полярной метрикой

На плоскости с полярной метрикой задано конечное множество из m точек, которых необходимо связать между собой линией кратчайшей длины. Эта нерешенная в общем виде оптимизационная задача имеет важное значение в различных областях науки и техники. Поэтому предлагаются решения, близкие к оптимальному и удовлетворяющие потребности инженерной практики. До сих пор эта задача рассматривалась в пространствах с евклидовой метрикой. Теперь впервые она исследуется для пространства с полярными расстояниями. Оказалось, что геометрия пространств с полярной метрикой не изучена до нас. Поэтому нам пришлось в предыдущих параграфах привести некоторые сведения, касающиеся геометрии плоскости с полярными расстояниями. В частности, были более подробно исследованы конфигурация, свойства, эквидистанционные линии, основные этапы построения кратчайших связывающих линий для трех, четырех и пяти компланарных точек. Обобщая результаты выполненных нами исследований, можно предложить следующий алгоритм построения кратчайших связывающих линий на плоскости с полярной метрикой [95].

1. Выбираем полярную систему координат, а затем определяем положения заданных точек $M_1, M_2, \dots, M_m$ по полярным координатам. Проводим из центра O (полнос) концентрические окружности, радиусы которых отличаются друг от друга на единицу длины. Проводим равномерные лучи пучка носителем O ; можно проводить лучи через каждые 2° или 3° в зависимости от требуемой точности. Тогда образуется полярная сетка, а заданные точки $M_1, M_2, \dots, M_m$ можно считать расположенными в узлах этой сетки.

2. Определяются расстояния между точками $M_1, M_2, \dots, M_m$. Для этого нужно воспользоваться формулой (4.1) или применять непосредственные измерения на изображениях. Составляется матрица расстояний.

3. Из множества заданных точек выбирается две точки M_k и M_j , расстояние между которыми наименьшее, чем для любой другой пары. Строятся KD_2 и эквидистанционная линия для этих точек.

4. На последующих шагах алгоритма производится переход от KD_i , построенного для группы из i точек, к KD_{i+1} для группы из $i+1$ точек. При этом определяются: а) очередная $(i+1)$ -я точка, которая должна быть подключена к дереву; б) конфигурация KD_{i+1} . При этом построенное KD_i войдет в состав KD_{i+1} с некоторыми структурными изменениями.

Если угол между смежными радиусами, на которых лежат соединяемые точки, больше или равен 115° , то они соединяются между собой магистральным отрезком, а если этот угол меньше 115° , то точки соединяются между собой посредством дугорадиального отрезка.

После построения KD_i может возникнуть необходимость соединения на следующем шаге двух близких друг к другу точек, не вошедших в KD_i и дающих начало новой группе соединяемых точек, т. е. образуется новое кратчайшее поддерево. Такие поддерева должны далее соединяться по принципу ближайшего соседа.

С помощью этого алгоритма были определены оптимальные конфигурации связывающие заданные объекты линий, были решены многочисленные практические задачи на построение кратчайших связывающих деревьев в пространствах с полярной метрикой. Исходя из опыта применения, следует отметить эффективность и быструю сходимость разработанного нами алгоритма. Действительно, если применить его для определения кратчайшей связывающей линии для m исходных точек, то мы получим решение этой задачи после $m-1$ шагов, т.е. алгоритм быстро сходится. Некоторая трудность возникает при определении расстояния от точек до кратчайшей связывающей линии и между кратчайшими связывающими линиями. Для этого строятся эквидистанционные линии. В предыдущих параграфах были разработаны методы построения эквидистанционных линий для двух, трех и четырех точек. Полученная методика построения эквидистанционных линий применима для любого конечного числа точек. Приведем только один пример для того, чтобы показать применение нашего алгоритма и дать некоторые дополнительные разъяснения и методические указания.

Пусть в полярной системе координат задано множество точек $M_1, M_2, \dots, M_{18}$ (рис.4.10). Допустим, что заданные точки расположены на узлах полярной сетки, т.е. в точках пересечения концентрических окружностей и радиусов относительно полюса O . Построение разбивается на семнадцать ступеней. Расстояния между точками вычисляются по формуле (4.1). Согласно разработанному алгоритму, выбираем из заданного множества точек пару, имеющую

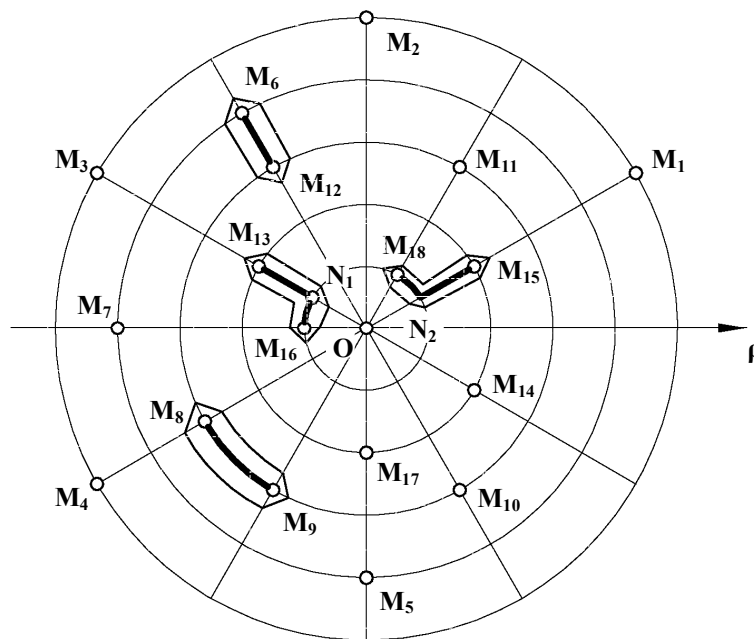


Рис. 4.10 Первые четыре этапа построения КД для 18-и точек

кратчайшее расстояние. Такой парой оказались точки M_6 и M_{12} . Соединяем их радиальным отрезком и строим эквидистанционную линию (рис.4.10). На второй ступени должны быть соединены точки M_8 и M_9 дуговым отрезком и построена соответствующая эквидистанционная линия. На третьей и четвертой ступенях объединяются точка M_{13} с точкой M_{16} и точка M_{15} с точкой M_{18} , которые имеют одинаковые расстояния. Причем они соединяются попарно между собой через точки N_1 и N_2 дугорадиальными отрезками, т.к. углы между смежными радиусами (OM_{18}) и (OM_{15}), а также (OM_{13}) и (OM_{16}) меньше 115° . Строятся соответствующие эквидистанционные линии. На пятой ступени объединяются в одно кратчайшее поддерева

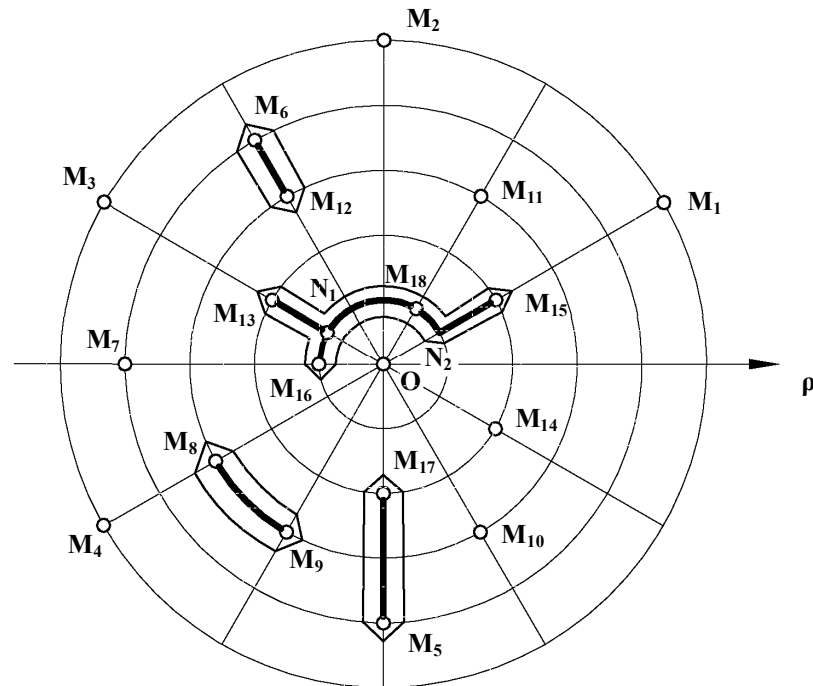


Рис. 4.11 Первые шесть этапов построения КД для 18-и точек

$M_{13} - N_1 \cap M_{16}$ и $M_{15} - N_2 \cap M_{18}$. Расстояния между двумя кратчайшим деревьями, как было указано выше, определяется по формуле (4.1). Эти два поддерева объединены в одно кратчайшее дерево (рис.4. 11). Структура этого кратчайшего дерева имеет вид:

$$M_{13} - N_1 \cap M_{16} \\ M_{18} \cap N_2 - M_{15} .$$

Строим эквидистанционную линию $КД_4$ точек M_{13} , M_{15} , M_{16} и M_{18} . На шестой ступени соединены точки M_5 и M_{17} радиальным отрезком. Построена соответствующая эквидистанционная линия. На седьмой ступени сравниваются расстояния между кратчайшими поддеревами:

$$M_6 - M_{12}; \quad M_5 - M_{17}; \quad M_8 \cap M_9; \quad M_{13} - N_1 \cap M_{16} \\ M_{18} \cap N_2 - M_{15}$$

и оставшимися точками $M_1, M_2, M_3, M_4, M_7, M_{10}, M_{11}$ и M_{14} . Расстояние между какой-либо точкой и $КД_i$ определяется, как было указано выше, по формуле (4.1). Наименьшим расстоянием обладает пара, состоящая из $КД_4$, построенного на пятой ступени, и точки M_{11} . Соединяем их радиальным отрезком и строим

$$M_{13}-N_1 \frown M_{16} \\ M_{18} \frown N_2-M_{15}$$

эквидистанционную линию (рис.4.12). На восьмой ступени присоединяем точку M_4 к кратчайшему дереву $M_8 - M_9$ радиальным отрезком и строим соответствующую эквидистанционную линию.

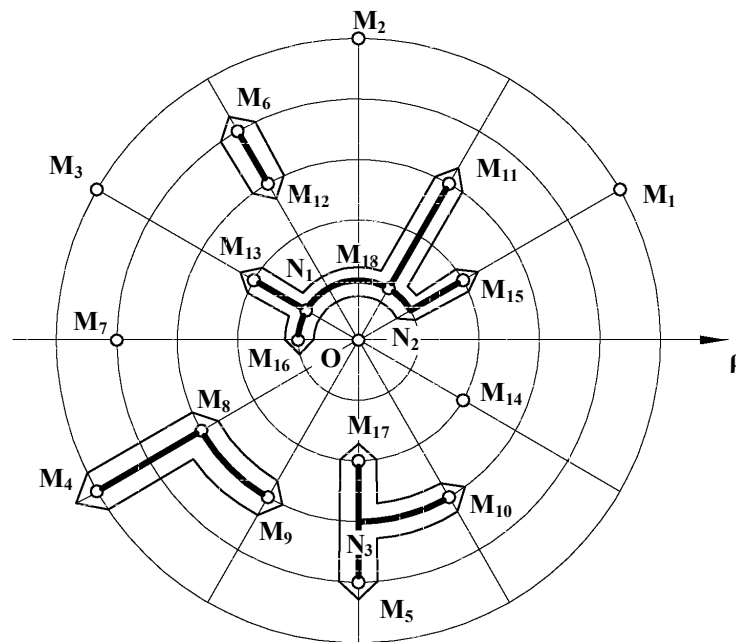


Рис. 4.12 Начальные девять этапов построения КД для 18-и точек

На девятой ступени присоединяем к $КД_2$, полученному на шестой ступени, точку M_{10} дуговым отрезком и строим соответствующую эквидистанционную линию. На десятой ступени сравниваем расстояния между кратчайшими поддеревьями $M_6 - M_{12}$, $M_4 - M_8 \cap M_9$,

$$M_{17}-N_3 \frown M_{10} \text{ ,} \quad M_{13}-N_1 \frown M_{16} \\ M_{18} \frown N_2-M_{15}$$

и оставшимися точками M_1, M_2, M_3, M_7 и M_{14} . Наименьшим оказалось расстояние между кратчайшими поддеревьями:

$$M_4 - M_8 \cap M_9 \text{ и } M_{17}-N_3 \frown M_{10} \text{ .}$$

Объединяем их в одно кратчайшее поддерево и строим эквидистанционную линию этого поддерева (рис.4.13.).

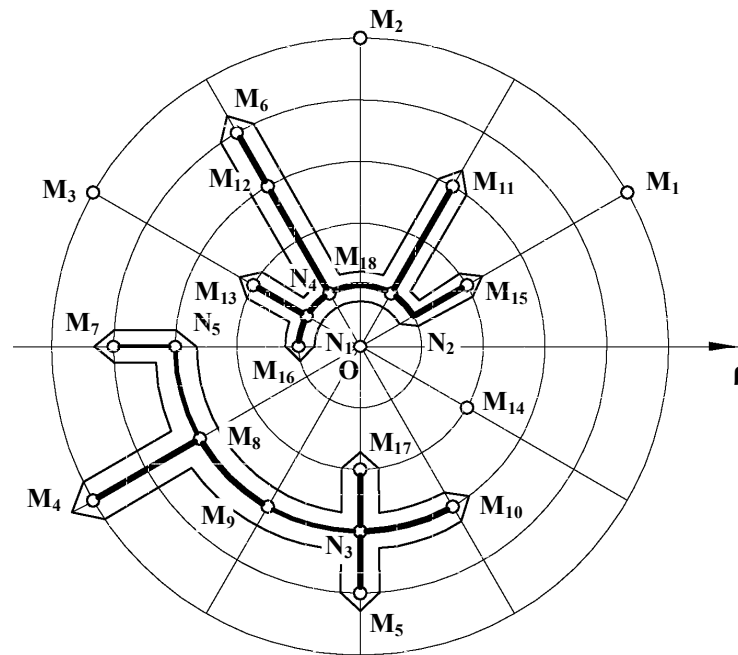


Рис. 4.13. Начальный десять этапов построения КД для 18-и точек

Следует отметить, что в узловой точке N_3 сходятся четыре ребра кратчайшего дерева:

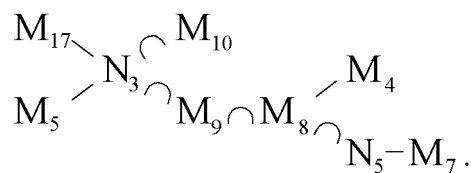
$$\begin{array}{c} M_9 \curvearrowright N_3 \curvearrowleft M_5 \\ M_{17} \curvearrowleft N_3 \curvearrowright M_{15} \end{array}$$

На одиннадцатой ступени объединяется кратчайшее поддерево M_6 - M_{12} и $КД_5$, полученное на седьмой ступени. Объединив их в одно, получим $КД_7$ со следующей структурой:

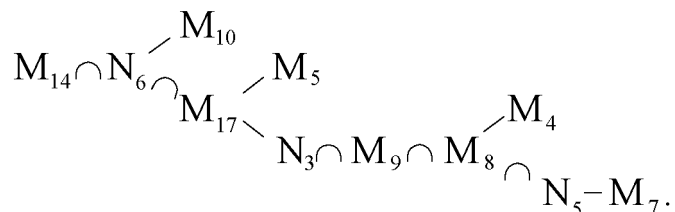
$$\begin{array}{c} M_{13} - N_1 \curvearrowright M_{16} \\ \curvearrowleft N_4 \curvearrowright M_{12} - M_6 \\ \curvearrowleft M_{18} \curvearrowright N_2 - M_{15} \end{array}$$

Строится эквидистанционная линия этого кратчайшего дерева, связывающего точки M_6 , M_{11} , M_{12} , M_{13} , M_{15} , M_{16} и M_{18} .

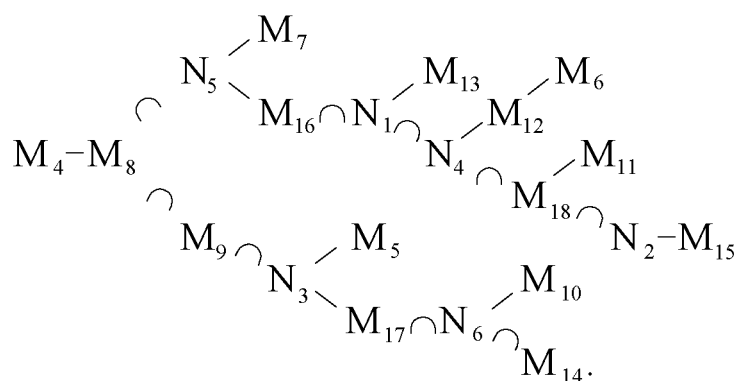
На двенадцатой ступени присоединяется к кратчайшему дереву, полученному на десятой ступени, точка M_7 . Эта точка присоединяется дугорадиальным отрезком через точку M_8 к кратчайшему дереву точек M_4 , M_5 , M_8 , M_9 , M_{10} и M_{17} . Структура полученного $КД_7$:



На тринадцатой ступени сравниваем расстояния между двумя кратчайшими поддеревьями, полученными на одиннадцатой и двенадцатой ступенях, и оставшимися точками M_1 , M_2 , M_3 и M_{14} . Присоединяем к кратчайшему дереву, полученному на предыдущей ступени построения, точку M_{14} :

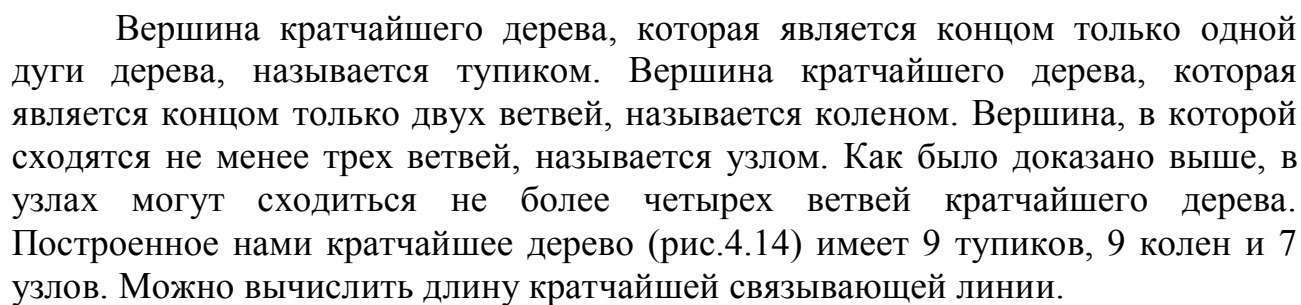


Тогда на четырнадцатой ступени, исходя из принципа ближайшего соседа, должны быть объединены в одно дерево два кратчайших поддерева, построенные до этого. Расстояние между этими кратчайшими деревьями определяется длиной отрезка, соединяющего точку M_{18} одного поддерева с точкой N_5 другого поддерева. В результате этого у нас осталось три точки M_1 , M_2 , M_3 и образовалось одно КД₁₅:



Теперь на пятнадцатой ступени к этому кратчайшему дереву присоединим точку M_3 через точку M_{13} , а на шестнадцатой ступени – точку M_1 через точку M_{15} .

На последней, семнадцатой ступени, точку M_2 через точку N_7 присоединяем с точкой M_6 кратчайшего дерева точек M_1 , M_3 , M_4 , M_5 , M_6 , M_7 , M_8 , M_9 , M_{10} , M_{11} , M_{12} , M_{13} , M_{14} , M_{15} , M_{16} , M_{17} и M_{18} . Структура полученного КД₁₈ имеет следующий вид:



5. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕЙ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ

Транспортная система в условиях Республики Казахстан приобретает особую значимость.

На национальном уровне неадекватное развитие транспортной системы проявляется в неоправданно завышенных затратах в сферах производства и предоставления услуг, сдерживании развития практически всех отраслей экономики. В глобальном масштабе отсутствие должной интеграции региональной транспортной системы в мировую транспортную систему влечет за собой ограничение доступа национальной экономики к мировым рынкам, отставание в ее развитии. Следует особо учитывать то, что только посредством транспортной системы возможно согласование всех сторон общественного воспроизводства не только в пространстве – рациональное размещение производительных сил, обеспечение экономических связей на внутреннем и внешнем рынках, но и во времени, т.е. производства и реализация продукции, оборот капитала и т.п.

Временной фактор, на который транспорт оказывает решающее влияние, предопределяет темпы дальнейших экономических преобразований в городах Казахстана в целом [96].

Транспортная система включает в себя в качестве элементов: 1) транспортную сеть с соответствующим обустройством; 2) подвижной состав, обеспечивающий перевозки; 3) людей, которые являются клиентами транспортной системы или участниками движения.

Под транспортной сетью понимается сеть, связывающая на некотором участке территории заданное множество пунктов и предназначенных для транспортировки из одних пунктов в другие материального, энергетического или информационного потока. Транспортную сеть могут составить сети автомобильных дорог, нефтяная или газосборная трубопроводная сеть, либо сеть линий электропередач и др.

В дальнейшем рассмотрим формирование сетей автомобильных дорог. Одним из этапов оптимального проектирования сетей автомобильных дорог является выбор ее наиболее выгодной транспортировки или конфигурации. В практике проектирования выбор конфигурации сети производится с учетом реальных условий рассматриваемого региона или города в соответствии со структурой экономико-социального комплекса и отражает основные направления его развития. Поэтому при проектировании сетей автомобильных дорог следует рассматривать случай регион и город, в соответствии которого решаются различные задачи и требования.

Для конфигурации сети дорог должны быть положены следующие основные требования:

1. Случай регион:

- сеть должна охватывать все населенные пункты, промышленные и производственные объекты, культурно-исторические места государственного значения;

- сеть должна иметь суммарную наименьшую протяженность;

- сеть должна иметь кратчайший путь к главной автомагистрали или железной дороге;

- иметь возможно меньшую строительную стоимость.

2. Случай город:

В связи с большой разнородностью и сложных транспортных процессов, происходящих в городе, отдельные звенья транспортной сети специализируются на пропуске потоков определенного типа, что позволяет повысить качество транспортного обслуживания и приводит к формированию определенных структурных свойств сети. Поэтому можно считать, что транспортная сеть включает в себя подсети, предназначенные для передвижений различных видов транспортных средств, следовательно, для конфигурации сети должны быть положены следующие требования:

- геометрия сети или конфигурация отражает общую планировочную структуру города и иметь возможность развития по мере развития города;

- структура сети дорог для движения пассажирских и грузовых автомобилей соответствует планировочной структуре города и функциональному зонированию его территории и обеспечивает приоритетные условия движения пассажирских и грузовых автомобилей между основными грузоформирующими объектами города;

- при прокладке дорог максимально используются территории производственных и санитарно-защищенных зон, территории вдоль железных дорог;

- протяженность и плотность сети должны обеспечивать минимизацию транспортных связей и экологического воздействия транспортных средств на окружающую среду;

- иметь возможно меньшую строительную стоимость.

Выше изложенное свидетельствует, что исследования свойств сети и определения ее оптимальной конфигурации наименьшей протяженности удовлетворяющие наперед заданным условиям является сложной и многовариантной задачей.

5.1 Кратчайшие связывающие сети автомобильных дорог на плоскости с евклидовой метрикой

Сети автомобильных дорог характеризуются своими геометрическими размерами, топологией и метрикой. В процессе проектирования узлы сети и все корреспондирующие пункты геометрически моделируются точками, а дороги связывающие эти узлы и пункты – линиями. Тогда конфигурацию сети можно отображать в виде различной геометрической модели [96, 97]: 1)

прямоугольную, рисунок 5.1; 2) радиально-кольцевую, рисунок 5.2; 3) евклидовую, рисунок 5.3; 4) комбинированную, рисунок 5.4.

В такой постановке определение оптимальной конфигурации сети дорог можно свести к следующей геометрической задаче: дано конечное множество компланарных точек и требуется связать их линией кратчайшей длины.

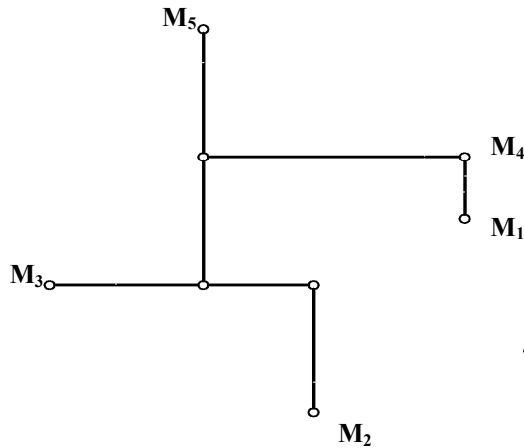


Рис. 5.1 Прямоугольная модель

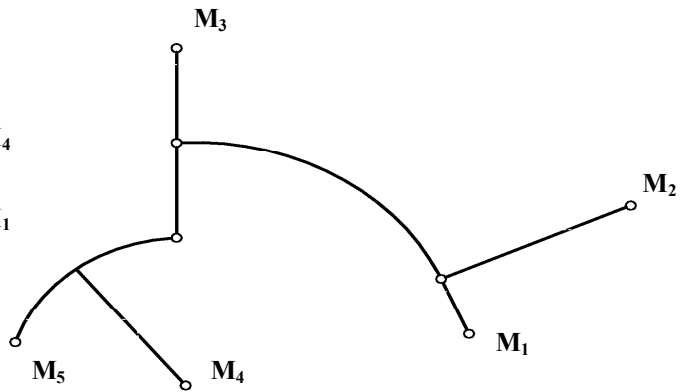


Рис. 5.2 Радиально-кольцевая модель

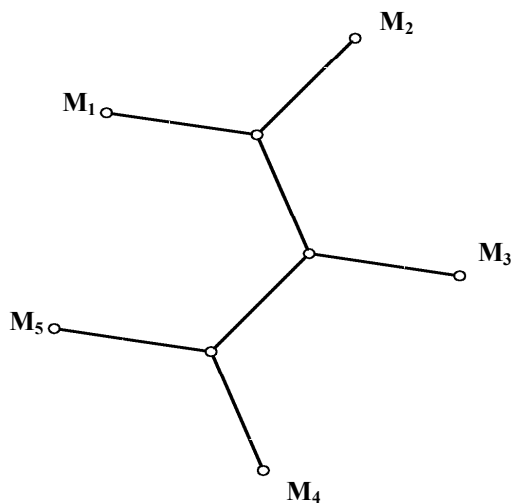


Рис. 5.3 Евклидова модель

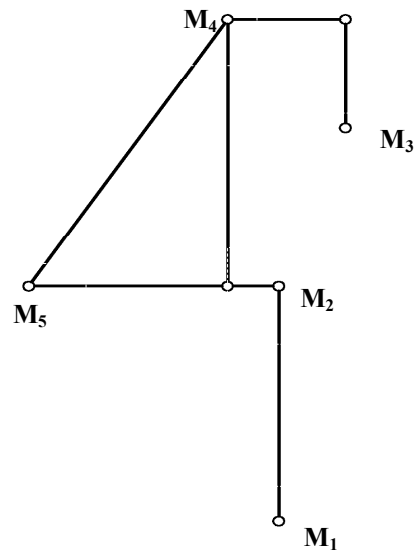


Рис. 5.4 Комбинированная модель

Задача состоит в минимизации затрат на строительство сети, связывающей заданные пункты и узлы.

Расстояния между узлами и пунктами определяются в зависимости от модели сети следующими формулами:

$$d(M_1, M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|; \quad (5.1)$$

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}; \quad (5.2)$$

$$d(M_1, M_2) = \begin{cases} \rho_1 + \rho_2, & \text{если } |\varphi_1 - \varphi_2| \geq 2, \\ |\rho_1 - \rho_2| + |\rho_1(\varphi_1 - \varphi_2)|, & \text{если } |\varphi_1 - \varphi_2| < 2 \text{ и } \rho_1 < \rho_2, \\ |\rho_1 - \rho_2| + |\rho_2(\varphi_1 - \varphi_2)|, & \text{если } |\varphi_1 - \varphi_2| < 2 \text{ и } \rho_1 > \rho_2. \end{cases} \quad (5.3)$$

Где: x_1, y_1 – декартовы координаты точки M_1 ;

x_2, y_2 – декартовы координаты точки M_2 ;

ρ_1, φ_1 – полярные координаты точки M_1 ;

ρ_2, φ_2 – полярные координаты точки M_2 .

Далее задача минимизации сети сводится к задаче Штейнера [2, 3], где допускается введение дополнительных точек, которые в общем случае позволяют получить более короткую сеть, чтобы суммарная длина сети определялась из выражения:

$$L = \sum_i \sum_j q_{ij} d_{ij},$$

где: d_{ij} – расстояние между пунктами i и j ;

q_{ij} – коэффициент зависящий от многих факторов: затраты на строительство, эксплуатацию и др.

Для построения кратчайшей связывающей сети применим следующую методику:

Шаг 1. Заданные пункты геометрически моделируются точками.

Шаг 2. Производится анализ и изучения геометрии трассы дорог. В плане она может представить прямую, ломаную или кривую линию.

Шаг 3. Для установления положения линии необходимо иметь данные об отметке начальной и конечной точек, максимальный и минимальный допустимый уклон дорог.

Шаг 4. Определяются координаты точек и вычисляются расстояния между ними по формуле (5.1), (5.2) или (5.3).

Шаг 5. Из множества точек выбираются две точки, расстояние между которыми не больше, чем для любой другой пары. Строится кратчайшее дерево (КД).

Шаг 6. Определяется очередная точка, которая должна быть подключена к дереву.

Шаг 7. После построения КД может возникнуть необходимость соединения на следующем шаге двух КД и дающих начало новой группе соединяемых точек, т.е. образуется новое кратчайшее поддерево.

Такие поддерева дальше должны соединяться между собой на основе принципа наименьшего удлинения КД при каждом отдельном шаге построения.

Шаг 8. В конце получаем единственное дерево, связывающее все точки.

Шаг 9. Рассчитывают экономическую эффективность путем сравнительно-техничко-экономического анализа существующей схемы с новым вариантом.

При существующей схеме сети, при помощи данного метода, также можно определить кратчайший маршрут перемещения транспорта в заданный пункт.

Преимущество данного метода построения оптимальной конфигурации сети дорог проявляется в применении ЭВМ. Используя пакет программ можно в кратчайшее время просмотреть и вычислить всевозможные оптимальные варианты сети, а также варьировать другими параметрами соответствующие определенным требованиям.

5.2 Геометрическое моделирование трассы автомобильных дорог

Автомобильные дороги являются линейными сооружениями, связывающими различные пункты между собой, а под трассой автомобильных дорог понимают ось этих линейных сооружений [98]. Геометрической точки зрения трасса автомобильных дорог представляет собой составную пространственную кривую, получаемую сопряжением различных линий. Эту составную пространственную кривую можно проецировать на две взаимно-перпендикулярные плоскости, одну из которых располагают горизонтально. Горизонтальную проекцию трассы принято называть планом. На первом этапе проектирования линейных сооружений определяется положение трассы на плане. Трасса состоит из отдельных участков, к которым предъявляются следующие требования:

- элементы трассы должны быть математически строго определены и быть простыми в производстве расчетов;
- геометрические параметры элементов должны соответствовать требованиям динамики движения;
- строительство и эксплуатация трассы должны быть экономичными.

В качестве основных элементов трассы выступают отрезки прямых и дуги окружностей. При этом возникает задача на сопряжение двух прямых, решение которой излагается в учебниках геометрии [99]. Однако, такое сопряжение двух прямых не удовлетворяет требованиям динамики движения. При движении автомобиля по дуге окружности (по кривой) возникает центробежная сила, вызванная центростремительным ускорением. Как известно, центробежная сила при постоянной скорости пропорциональна кривизне кривой. Прямая имеет нулевую кривизну, а окружность – постоянную кривизну. В точке сопряжения возникает скачок кривизны трассы. Для уменьшения величины скачка можно применить несколько стыкованных между собой дуг окружностей различных радиусов.

Пусть требуется построить сопряжение прямых a и b двумя дугами различных окружностей. Заданы угол α между прямыми a и b , точки сопряжения $A \in a$ и $B \in b$, радиус сопряжения R_1 (рис. 5.5). В точке A восстановим перпендикуляр к прямой a и отложим величину R_1 на этот перпендикуляр, получим центр O_1 первой окружности. Проводим окружность из центра O_1 , которая проходит через точку A и пересекает прямую, проведенную через точку O_1 перпендикулярно к прямой b , в точке Y . Прямая

ВУ пересекает построенную окружность в точке С, которая является точкой сопряжения окружностей радиусами R_1 и R_2 . Прямая, проведенная через точку В параллельно прямой O_1Y , пересекает прямую CO_1 в точке O_2 . Теперь остается точку А соединить с точкой С дугой

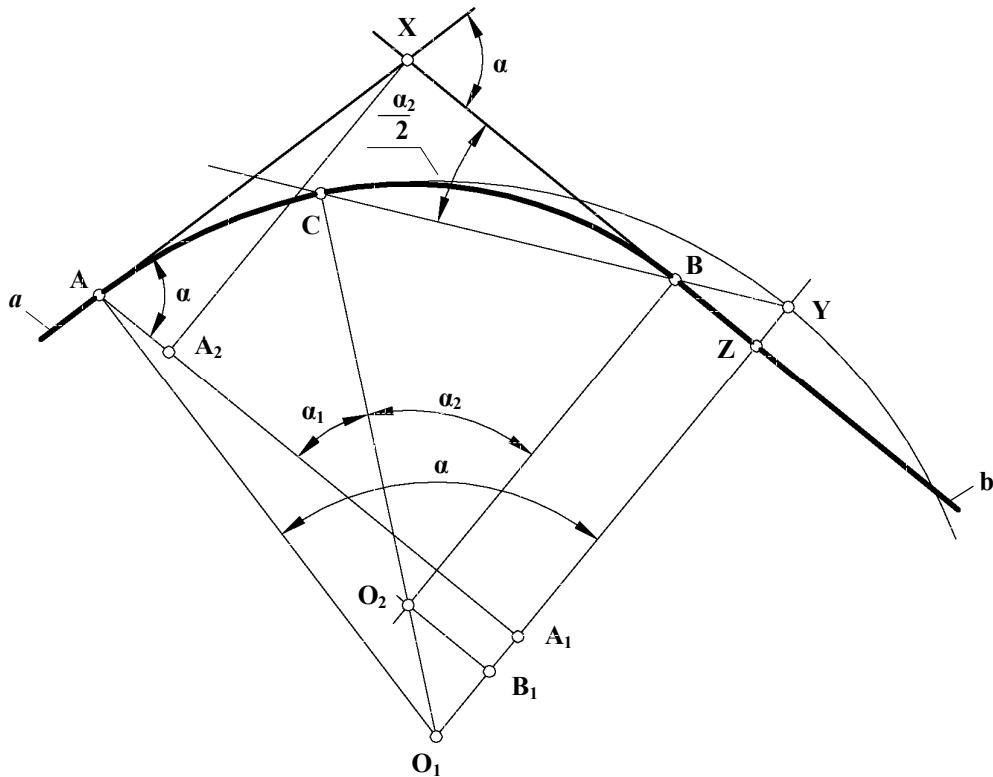


Рис. 5.5 Сопряжение двух прямых a и b двумя дугами окружностей, различных радиусов

окружности с центром в точке O_1 , а затем точку C – с точкой B дугой окружности с центром в точке O_2 . Для вычисления величин радиуса R_2 , углов α_1 и α_2 опустим перпендикуляр из точки A на прямую O_1Y . Основанием этого перпендикуляра будет точка A_1 . Опускаем из точки X ($X = a \cap b$) перпендикуляр на прямую AA_1 . Основанием этого перпендикуляра будет точка A_2 . Из прямоугольного треугольника AA_1O_1 имеем:

$$|AA_1| = R_1 \sin \alpha; \quad |O_1A_1| = R_1 \cdot \cos \alpha.$$

Из прямоугольного треугольника AA_2X имеем:

$$|AA_2| = |AX| \cdot \cos \alpha; \quad |A_2X| = |AX| \cdot \sin \alpha.$$

Введем прямоугольную декартовую систему координат. В качестве оси абсцисс выступает прямая b и в качестве оси ординат – прямая A_2X . Тогда можно определить координаты центра сопряжения O_1 :

$$x = |AA_1| - |AA_2| = R_1 \cdot \sin \alpha - |AX| \cdot \cos \alpha;$$

$$y = |O_1A_1| + |A_2X| = R_1 \cos \alpha + |AX| \cdot \sin \alpha.$$

Из прямоугольного треугольника BYZ имеем:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} = \frac{|YZ|}{|BZ|} = \frac{R_1 - y}{x - |BX|} \Rightarrow \alpha_2 = 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{R_1 - y}{x - |BX|}.$$

Тогда $\alpha_1 = \alpha - \alpha_2$.

Если из точки O_2 опустить перпендикуляр на прямую O_1Y , то получим прямоугольный треугольник $O_1B_1O_2$. Из этого треугольника

$$|O_1O_2| = |O_1B_1| \cdot \cos \alpha_2; \quad |O_1O_2| = |R_1 - R_2| \cdot \cos \alpha_2; \quad |O_1B_1| = y - R_2.$$

Поэтому

$$R_1 - R_2 = \frac{y - R_2}{\cos \alpha_2} \Rightarrow R_2 = \frac{y - R_1 \cdot \cos \alpha_2}{1 - \cos \alpha_2}.$$

Пусть требуется построить сопряжение прямых a и b тремя дугами окружностей радиусов R_1 , R_2 , и R_3 при известных точках сопряжения $A(\in a)$ и $B(\in b)$. В точке A восстановим перпендикуляр к прямой a (рис. 5.6). Если на этот перпендикуляр отложим отрезок, равный R_1 , то получим точку O_1 . Аналогичным построением по отношению прямой b и точки B получим центр O_2 . $|AO_1| = R_1$; $|BO_2| = R_2$. Теперь центром в точке O_1 и радиусом $R_3 - R_1$ проводим одну окружность, а затем центром в точке O_2 и радиусом $R_3 - R_2$ проводим другую окружность. Проведенные окружности пересекаются в точке O_3 . Проведем лучи $[O_3O_1)$ и $[O_3O_2)$. Из центра O_1 проводим дугу окружности от точки A до точки C_1 (точка пересечения этой окружности и луча $[O_3O_1)$), из центра O_3 – от точки C_1 до точки C_2 и, наконец, из центра O_2 – от точки C_2 до точки B . Иногда возникает необходимость в сопряжении параллельных прямых (рис. 5.7).

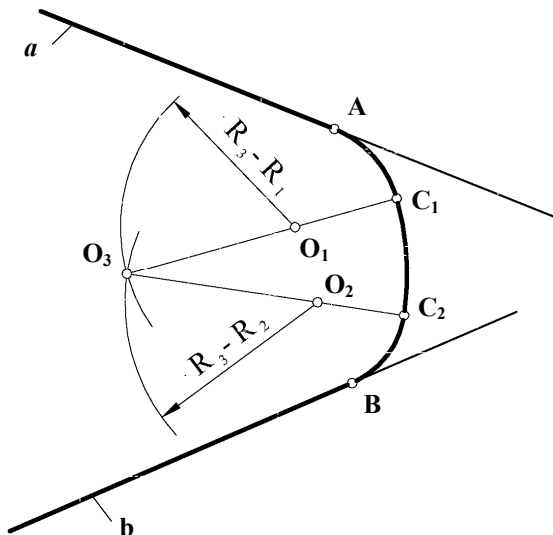


Рис. 5.6 Сопряжение прямых a и b тремя дугами окружностей различных радиусов

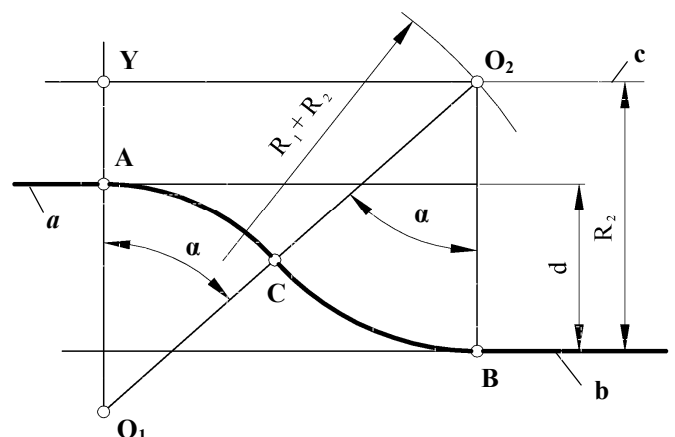


Рис. 5.7 Сопряжение двух параллельных прямых

Рассмотрим переход от прямой a в прямую b при помощи двух дуг радиусами R_1 и R_2 . Центры этих дуг расположены на разных сторонах дороги. Известными являются также точка сопряжения $A(\in a)$ и расстояние между прямыми d . Через точку A проводим прямую, перпендикулярную к прямой a , отложим отрезок AO_1 , равный R_1 . Построив прямую c , отстоящую от прямой b на расстоянии R_2 , и проводив окружность из центра O_1 радиусом $R_1 + R_2$, находим в их пересечении точку O_2 . Основание V перпендикуляра, опущенного из точки O_2 на прямую b , служит второй точкой сопряжения. Соединяем точки O_1 и O_2 отрезком прямой. Теперь надо проводить дугу окружности из центра O_1 через точку A до пересечения прямой O_1O_2 в точке C . Остается соединить дугой окружности из центра O_2 точки V и C . Прямые c и AO_1 пересекаются в точке Y . Из прямоугольного треугольника O_1YO_2 находим:

$$|YO_2| = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (O_1Y)^2} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (R_1 + R_2 - d)^2} = \sqrt{d^2 + 2d(R_1 + R_2)};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|YO_2|}{(O_1Y)} = \frac{\sqrt{d^2 + 2d(R_1 + R_2)}}{R_1 + R_2 - d} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{d^2 + 2d(R_1 + R_2)}}{R_1 + R_2 - d}.$$

Сопряжение двух непараллельных между собой прямых a и b двумя дугами окружностей R_1 и R_2 (рис. 5.8) ни чем не отличается от предыдущего случая.

Однако, применение кривых с постоянной кривизной (прямая и окружность) для моделирования трассы автомобильных дорог имеет определенные границы.

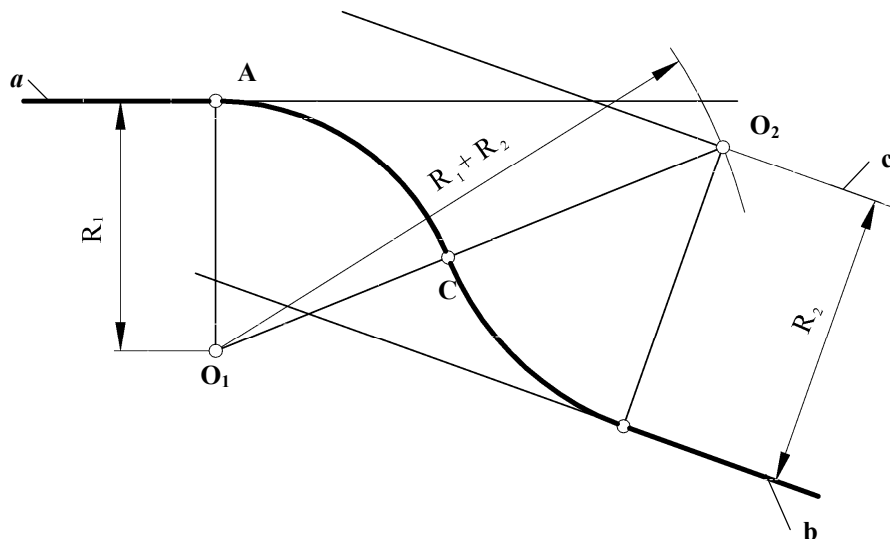


Рис. 5.8 Сопряжение двух непараллельных прямых

Для наглядного объяснения рассмотрим график изменения кривизны k в зависимости от длины l кривой в прямоугольной системе координат. Наверху (рис.5.9) приведен план трассы автомобильной дороги, состоящей из двух участков: прямолинейного и кругового, а внизу – график изменения кривизны.

Возникающей в точке А скачок кривизны можно уменьшить (как было указано выше), если размещать промежуточную дугу окружности большего радиуса (рис.5.10).

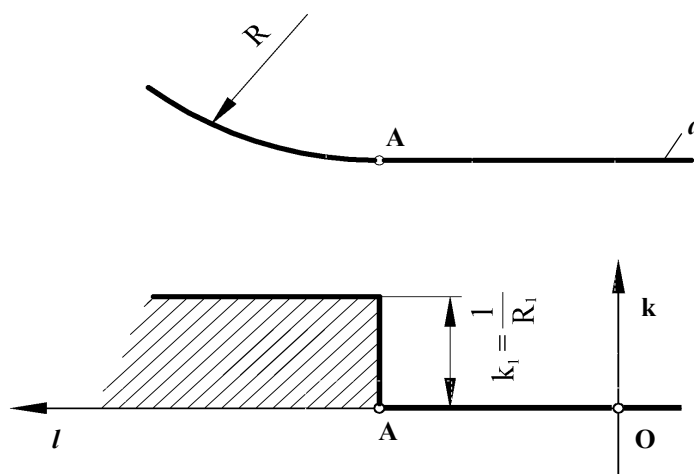


Рис. 5.9 График изменения кривизны k в зависимости от длины l

К сожалению этим нельзя достичь удовлетворительного решения полностью отвечающего требованиям, предъявляемым к трассе. В точках сопряжения линия справа и линия слева должны иметь одинаковую кривизну, т.е. в стыках надо обеспечить гладкость второго порядка. Нужна кривая переменной кривизны, причем кривизна должна плавно и непрерывно изменяться, начиная с нуля. В качестве наиболее подходящей кривой в практике нашло применение Корню спираль, называемой клотоидой. Поскольку у клотоиды изменение кривизны происходит пропорционально длине кривой, то можно полностью исключить скачок в кривизне.

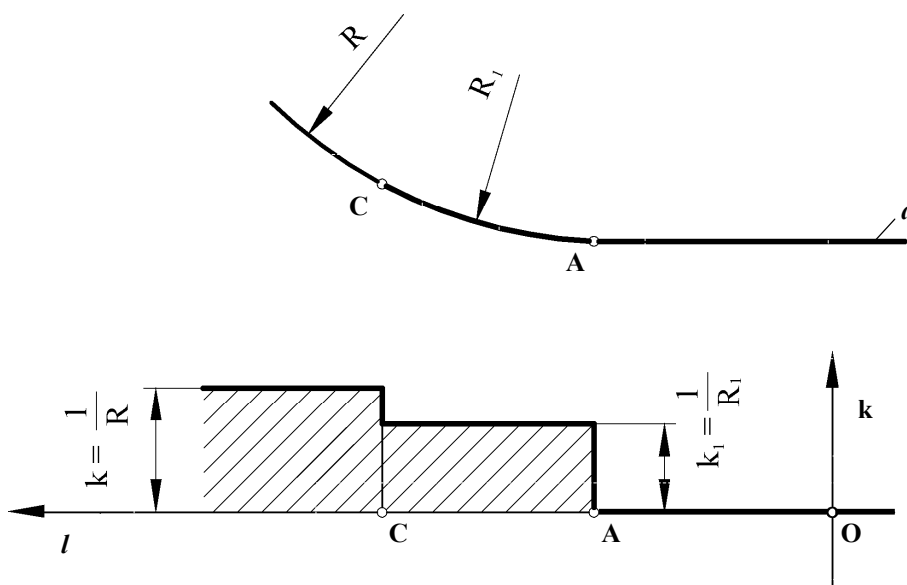


Рис. 5.10 Уменьшение скачка введением промежуточной кривой с малой кривизной

Корню спираль состоит из двух ветвей (рис.5.11), симметрично расположенных относительно начала координат.

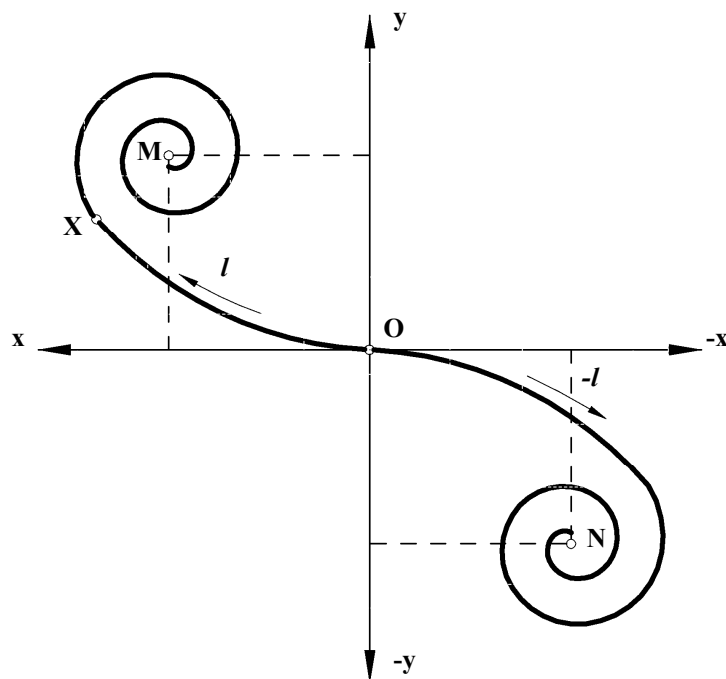


Рис. 5.11 Корню спираль

Уравнение клотоиды в естественных координатах имеет следующий вид:

$$l = P^2 \cdot k,$$

где: l – длина отрезка клотоиды от начала координат до точки X;

k – кривизна в точке X; P – параметр, показывающий изменение кривизны на

каждую единицу длины. $M\left(\frac{P\sqrt{\pi}}{2}, \frac{P\sqrt{\pi}}{2}\right)$ и $N\left(-\frac{P\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{P\sqrt{\pi}}{2}\right)$ являются

асимптотическими точками клотоиды. В асимптотических точках $l = \infty$ и $k = \infty$, а в начале координат $l = 0$ и $k = 0$. Параметр P может принимать значения от нуля до бесконечности. Поэтому существует бесконечное множество подобных друг другу клотоид. Параметр P для клотоиды играет такую же роль, что радиус R для окружности. Длина отрезка клотоиды зависит от значения параметра P . Например, при значении радиусов кривизны в начале и в конце, соответственно, $R_1=500$ м и $R_2=900$ м длина отрезка клотоиды равна 80 м, если $P=300$; 222 м, если $P=500$; 436 м, если $P=700$.

Рассмотрим сопряжение прямой и окружности отрезком клотоиды. В этом случае используют отрезок клотоиды, начинающийся в точке сопряжения А, совпадающей с началом координат и принадлежащей данной прямой, и оканчивающийся в точке В с кривизной $k = \frac{1}{R}$ (где R – радиус данной окружности). 1 – прямая, 2 – клотоида, 3 – окружность (рис. 5.12, а). На рисунке 5.12, б приведен график изменения кривизны в зависимости от длины

трассы. Ниже приведены формулы для вычисления основных параметров, определяющих геометрию клотоиды.

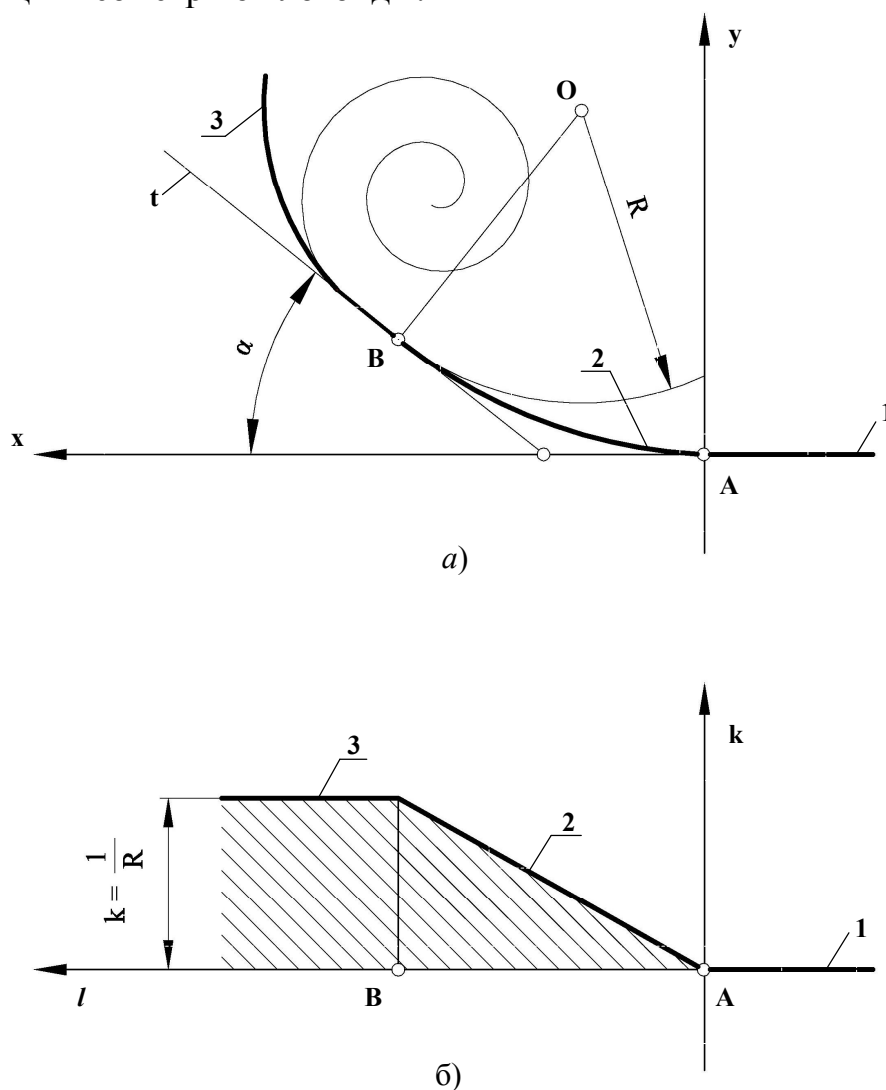


Рис. 5.12 План (а) и график (б) изменения кривизны $k=f(l)$

Из уравнения клотоиды можно определить длину отрезка клотоиды

$$l = \frac{P^2}{R}$$

и угол наклона α касательной, проведенной в точке В. Известно, что кривизной называется изменение угла наклона касательной на единицу длины. Поэтому

$$k = \frac{d\alpha}{dl}.$$

С другой стороны, из уравнения клотоиды имеем

$$k = \frac{l}{P^2}.$$

$$\text{Отсюда } \frac{d\alpha}{dl} = \frac{l}{P^2} \Rightarrow \alpha = \int_0^l \frac{l}{P^2} dl = \frac{l^2}{2P^2}; \quad \alpha = \frac{l^2}{2 \cdot P^2}.$$

Ясно, что угол α измеряется в радианах.

Для определения координат точки В рассмотрим бесконечно малый отрезок клотоиды. Тогда можно писать, что

$$dx = dl \cdot \cos \alpha \quad \text{и} \quad dy = dl \cdot \sin \alpha \Rightarrow dx = dl \cos \frac{l^2}{2P^2} \quad \text{и} \quad dy = dl \cdot \sin \frac{l^2}{2P^2}.$$

Интегрируем последние выражения. Тогда для прямоугольных координат получим следующие интегралы:

$$x = \int_0^l \cos \frac{l^2}{2P^2} \cdot dl; \quad y = \int_0^l \sin \frac{l^2}{2P^2} \cdot dl.$$

Эти интегралы не могут быть вычислены точно. Разложив тригонометрические функции в ряд, выполнив последующие почленное интегрирование получаем формулы для определения декартовых координат любой точки (в том числе и точки В) клотоиды:

$$x = l - \frac{l^5}{40 \cdot P^2} + \frac{l^9}{3456 \cdot P^8} - \dots; \quad y = \frac{l^3}{6 \cdot P^2} - \frac{l^7}{336 \cdot P^6} + \frac{l^{11}}{44240 \cdot P^{10}} - \dots$$

Координаты центра О окружности

$$x_0 = x - R \cdot \sin \alpha; \quad y_0 = y + R \cdot \cos \alpha.$$

Сопряжение двух окружностей отрезком клотоиды. Возможны два варианта расположения окружностей.

Первый вариант. Для сопряжения окружностей радиусами R_1 и R_2 должны быть выполнены следующие условия:

- окружности имеют различные радиусы и при этом $R_1 > R_2$;
- окружность радиуса R_2 расположена внутри окружности радиуса R_1 (рис. 5.13, а). На рисунке 5.13, б представлен график изменения кривизны вдоль трассы. 1 – окружность радиуса R_1 , 2 – клотоида, 3 – окружность радиуса R_2 . $R_1 = |O_1A|$; $R_2 = |O_2B|$.

Зная координаты центров окружностей можно найти основные параметры клотоиды. При этом определяется сдвигка f , представляющая собой кратчайшее расстояние по нормали между окружностями и находящаяся на прямой, соединяющей центры O_1 и O_2 данных окружностей.

$$f = |CD| = R_1 - R_2 - |O_1O_2|.$$

Для приближенного вычисления длины l_k отрезка клотоиды можно ее заменить кубической параболой. Тогда для сдвигки получаем следующее соотношение:

$$f = \frac{l_k^2}{24} \cdot k.$$

$$\text{Заменяем кривизну ее приращением } \Delta k = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}. \quad \text{Тогда } f = \frac{l_k^2}{24} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

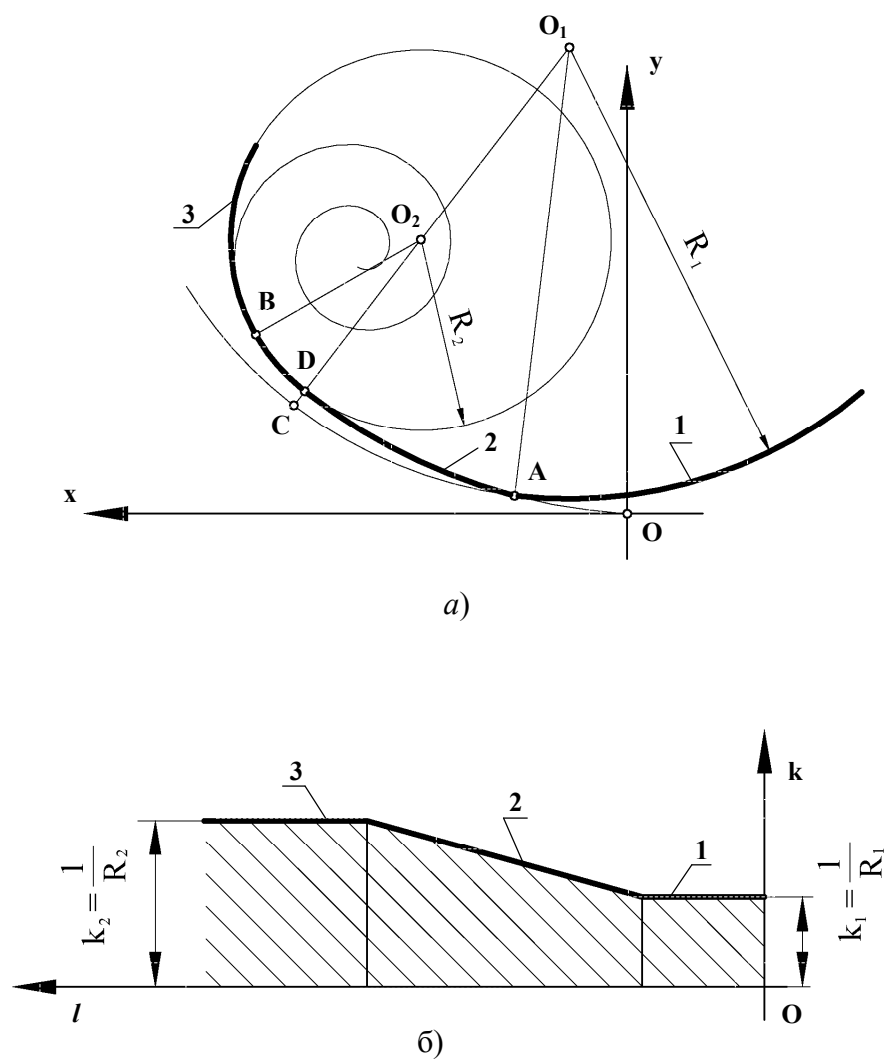


Рис. 5.13 а) план; б) график изменения кривизны

Отсюда определяется длина клотоиды;

$$l_k = \sqrt{\frac{24 \cdot f \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2}}.$$

Приближенное значение параметра P определяется из уравнения клотоиды:

$$P = \sqrt{\frac{l_k \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2}}.$$

Второй вариант. Условие первого варианта не всегда выполняется. Чаще всего данные окружности располагаются так, что $|O_1O_2| > R_1 + R_2$. Здесь O_1 и O_2 – центры данных окружностей, а R_1 и R_2 – радиусы этих окружностей. Проводим прямую между данными окружностями так, чтобы она не имела общих точек с ними. Принимаем эту прямую за ось абсцисс (рис.5.14).

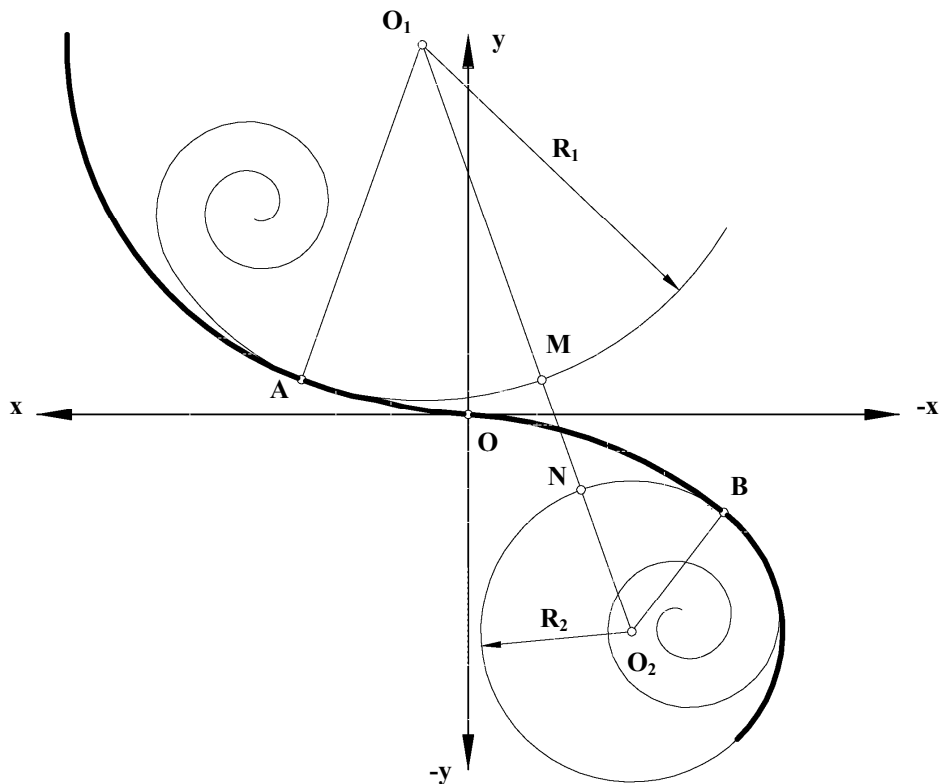


Рис. 5.14 Сопряжение двух окружностей отрезком клотоиды

Ось ординат проводится перпендикулярно к ней и между центрами данных окружностей. Тогда эта задача распадается на две задачи, рассмотренные выше и в которых прямая и окружность сопрягаются отрезком клотоиды. Первая задача состоит в том, что окружность с центром в точке O_1 и радиусом R_1 сопрягается с лучом $[Ox-)$ и точка сопряжения совпадает с началом координат. Во второй задаче окружность с центром в точке O_2 и радиусом R_2 сопрягается с лучом $[Ox)$, причем точка O является точкой сопряжения, принадлежащей прямой. При этом AO является отрезком клотоиды параметра P_1 , а OB – отрезком клотоиды параметра P_2 . Желательно иметь отрезки двух различных ветвей одной клотоиды, т.е. $P_1 = P_2 = P$. Часть трассы, проходящей через точку A до точки O имеет вогнутость, направленную в одну сторону, а другая часть трассы – имеет вогнутость, направленную в другую сторону. В точке изменения направления обе ветви клотоиды имеют общую касательную, совпадающую с осью абсцисс.

Точное определение параметра P клотоиды требует сложных вычислений. Поэтому можно пользоваться приближенным методом, вычисляется промежуточное значение длины клотоиды по формуле:

$$l_k^1 = 2 \cdot \sqrt{(R_1 + R_2 + |MN|)^2 - \left[R_1 + R_2 + \frac{|MN|}{3,6} \right]^2},$$

где M и N – точки пересечения отрезка O_1O_2 прямой первой и второй

окружностями.

Тогда первоначальное значение параметра вычисляется так же, как и в первом варианте:

$$P^1 = \sqrt{\frac{l_k^1 R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2}}.$$

Таким образом удалось обеспечить плавный переход от одной линии к другой. Однако, хотя этим устраняются скачки в кривизне при переходе от прямой к окружности или от одной окружности к другой, все же на графике изменения кривизны имеются изломы в начале переходной кривой в точке *A* и в конце отрезка клотоиды в точке *B*. Излом на графике изменения кривизны показывает, что отсутствует плавность при переходе от одного участка трассы к другому. Отсутствие плавности оказывает отрицательное влияние на условия движения, хотя в меньшей мере, чем скачок в кривизне. Поэтому надо обеспечить плавный характер изменения кривизны в пределах переходной кривой. Для этого предлагается заменить клотоиду другой кривой, обеспечивающей плавное изменение кривизны. Пусть график изменения кривизны имеет вид, показанный на рис. 5.15, *a*.

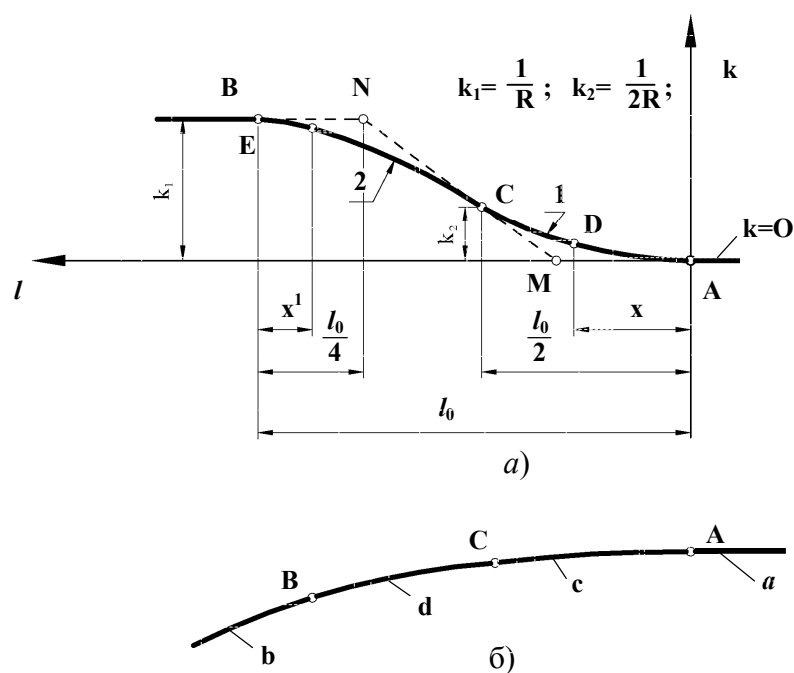


Рис. 5.15

a) График изменения кривизны: k - кривизна; l - длина трассы; M, N – изломы; 1 – первая парабола; 2 – вторая парабола; A – вершина первой параболы; B – вершина второй параболы; C – точка в которой сопрягаются параболы; E и D – текущие точки, принадлежащие соответственно первой и второй параболе.

б) Трасса: a – прямая; b – дуга окружности радиуса R ; c – кривая четвертого порядка, описываемое уравнением (5.5); d – кривая четвертого порядка, описываемое уравнением (5.6); A , B и C точки сопряжения.

Изломы закруглены с двумя параболой, стыкованными в точке C . Вершины этих парабол находятся соответственно в точках A и B . Каноническое уравнение параболы

$$k = p \cdot x^2,$$

p - параметр параболы. Для приближенных расчетов можно считать, что $x \approx l$. Для определения параметра рассмотрим точку C , координаты которой равны:

$$x = \frac{l_0}{2} \quad \text{и} \quad k = \frac{1}{2R}.$$

Подставляя эти координаты в уравнение параболы, находим:

$$p = \frac{2}{R \cdot l_0^2}.$$

Тогда уравнение первой параболы будет иметь следующий вид:

$$k = \frac{2 \cdot x^2}{R \cdot l_0^2},$$

а уравнение второй параболы –

$$k = \frac{1}{R} - \frac{2(l_0 - x')^2}{R l_0^2},$$

где $x' = l_0 - x$, причем x' относится к точке B .

Теперь надо получить уравнение переходной кривой, зная закономерность изменения ее кривизны. Известно, что кривизной кривой в некоторой ее точке называется изменение угла наклона касательной на единицу длины, т.е.

$$k = \frac{d\alpha}{dx}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Учитывая вышеприведенное допущение $l \approx x$, получим:

$$k = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \Rightarrow y = \int_0^{l_0/2} \int_0^{l_0/2} k \cdot dx^2.$$

Уравнение переходной кривой, соответствующей первой параболы

$$y = \int_0^{l_0/2} \int_0^{l_0/2} k \cdot dx^2 = \int_0^{l_0/2} \int_0^{l_0/2} \frac{2x^2}{R l_0^2} dx^2 = \frac{x^4}{6 \cdot R \cdot l_0^2} \div$$

$$y = \frac{x^4}{6 \cdot R \cdot l_0^2}. \quad (5.5)$$

Уравнение переходной кривой, соответствующей второй параболы

$$y = \int_0^{l_0/2} \int_0^{l_0/2} k \cdot dx^2 = \int_0^{l_0/2} \int_0^{l_0/2} \left(\frac{1}{R} - \frac{2(l_0 - x')^2}{R \cdot l_0^2} \right) dx^2 = \frac{x^2}{2R} - \frac{x^4}{6 \cdot R \cdot l_0^2};$$

$$y = \frac{x^2}{2R} - \frac{x^4}{6 \cdot R \cdot l_0^2} \quad (5.6)$$

Таким образом, для получения гладкого графика изменения кривизны трассы следует клотоиду заменить двумя отрезками кривых четвертого

порядка, причем первый отрезок описывается уравнением (5.5), а второй отрезок – уравнением (5.6).

Геометрическое моделирование трассы автомобильных дорог составными линиями из отрезков различных кривых, где в качестве переходной кривой используются кривые четвертого порядка, описываемые уравнениями (5.5) и (5.6), обеспечивает плавность и непрерывность графика изменения кривизны. Поэтому становится возможным значительное повышение скорости движения транспорта. Движение по такой трассе становится более безопасным, создается благоприятные психологическое и эстетическое восприятия.

6. РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ПОСТРОЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ СВЯЗЫВАЮЩИХ ЛИНИЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО В ПРТС РАБОТАХ

6.1 Особенности конфигурации транспортных схем ПРТС работ

Эффективная организация ПРТС работ во многом зависит от выбора конфигурации транспортных схем. Особенности конфигурации транспортных схем ПРТС работ заключается в том, что они зависят от различных факторов, присущих только данной отрасли промышленности. Например, схемы конвейерного транспорта карьеров зависят от горнотехнических условий, системы вскрытия и разработки месторождения, применяемого вскрышного и добычного оборудования, производственной мощности карьеров. В то же время по мере добычи горной породы изменяется фронт работы, меняется месторасположение добычных экскаваторов и погрузочных машин, вследствие чего изменяется в целом и транспортная схема.

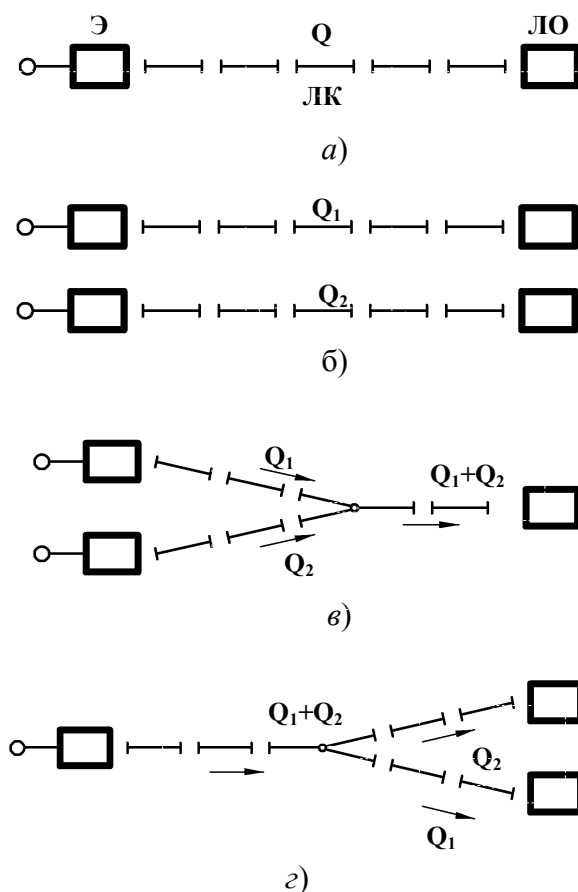


Рис. 6.1 Э - экскаватор; ЛО - ленточный отвалообразователь; ЛК - ленточный конвейер.

Основные структурные схемы конвейерного транспорта:

- а) - последовательная,
- б) - параллельная,
- в) - с объединением грузопотоков,
- г) - с разделением грузопотоков.

Поэтому определение рациональной конфигурации транспортных схем является сложной и многовариантной задачей [101]. Большое число схем транспортирования горной породы в карьерах приведено в работе [102]. Они могут быть сведены к четырем основным схемам. На рис.6.1,*а* показана схема конвейерной линии с последовательным расположением, на рис.6.1,*б* – с параллельным расположением, на рис.6.1, *в* – с объединением грузопотоков, на рис.6.1,*г* с разделением грузопотоков. На открытых разработках у нас в стране и за рубежом каждая из приведенных схем применяется как самостоятельно, так и в сочетании с другими схемами. Таких схем, то следует построить ее так, чтобы суммарная протяженность была минимальной.

Анализ известных работ показывает, что методика определения таких схем сложной конфигурации еще не разработана. Аналогичные задачи построения рациональной конфигурации транспортных схем возникает также на предприятиях машиностроительной и металлургической промышленности. На указанных предприятиях выдвигаются требования к выбору генерального плана, транспорта и компоновки цехов, которые обеспечивали бы возможное расширение без нарушения ритмов производства. Выполнение этих требований достигается в основном применением конвейерного транспорта, что позволяет создать компактный генеральный план и уменьшить протяженность коммуникации, адресования основных грузопотоков к месту складирования по кратчайшему пути.

В таких случаях применение типовых проектов схем транспорта является малоэффективным. Поэтому возникают нестандартные задачи оптимизации транспортных схем ПРТС работ. Исследования показывают, что для решения таких задач эффективными являются методы геометрического моделирования транспортных схем.

6.2 Влияние на конфигурацию транспортных схем геометрии трассы

При определении транспортных схем ПРТС работ необходимо учитывать геометрию трассы для транспортировки грузов, так как прокладка трассы осуществляется по стационарным или изменяющимся во времени траекториям. Направление, длина и конфигурация трассы существенным образом влияет на один из главных факторов, как выбор типа оптимальной транспортирующей машины.

По направлению и трассе перемещения грузов транспортирующие машины разделяют на три группы [103]. Машины первой группы вертикально замкнутые. Они располагаются в одной вертикальной плоскости и перемещают грузы по трассе, состоящей из одного прямолинейного отрезка горизонтального, наклонного, вертикального или из сочетания нескольких отдельных прямолинейных отрезков: горизонтального, наклонного, вертикального и т.п. Машины второй группы горизонтально замкнутые. Они располагаются в одной горизонтальной плоскости на одном горизонтальном уровне по замкнутой трассе разнообразного очертания. Машины третьей

группы – пространственные. Они располагаются в пространстве и перемещают грузы по сложной пространственной трассе с горизонтальными, наклонными и вертикальными участками.

Поэтому методика проектирования транспортных систем ПРТС работ должна отвечать двум стадиям:

- **Технико-экономическое обоснование и планировка транспортных систем.** На этой стадии необходимо изучить геометрию трассы для перемещения грузов. Трассу можно охарактеризовать как последовательность отрезков пересекающихся прямых. Протяженность трассы между отдельными пунктами должна быть минимальной. Элементы трассы должны в полной мере отвечать специфике движения транспортных средств, для которых предназначается дорога. Трасса конвейера в плане представляет собой прямую или ломаную линию. Для установления положения прямых в профиле необходимо иметь данные: отметки начальной и конечной точек, максимальный и минимальный допустимые уклоны трассы.

После определения трассы выбирают вид транспорта и определяют основные параметры для укрупненного технико-экономического расчета;

- **Технических проект.** На этой стадии выполняют для конвейера детальный тяговый расчет и определяют капиталовложения, эксплуатационные расходы и приведенные затраты.

6.3 Условия применимости предложенной методики для решения транспортных задач

Для погрузочно-разгрузочных и транспортно-складских работ характерно наличие большого количества отправных и приемных пунктов. Следствием этого является разветвленность транспортных схем, сопровождающихся формированием некоторого количества дополнительных транспортных пересечений (пункты, узлы и вершина), координаты которых являются неизвестными.

Трасса транспортных систем, связывающих такие пункты и узлы, должна иметь минимальную необходимую длину и включать наименьшее число транспорта при минимуме затрат на капитальное строительство и эксплуатацию.

Поэтому при решении таких задач необходимо найти кратчайшие расстояния от каждого пункта до всех остальных и соответствующие им пути.

При ее решении находятся коэффициенты целевой функции транспортной задачи: расстояния, стоимость транспортирования, приведенные затраты, металлоемкость, капиталовложение, время строительства и т.д. Необходимо построить связывающую сеть с добавлением дополнительных вершин так, чтобы суммарная длина пути связывающих эти пункты определялась из выражения

$$L = \sum_i \sum_j q_{ij} d_{ij} , \quad (6.1)$$

где: q_{ij} – коэффициент, зависящий от многих факторов: стоимости транспортирования, металлоемкости, затрат на строительство и эксплуатацию и др.;
 d_{ij} – расстояние между пунктами i и j .

Здесь следует отметить, что коэффициент q еще зависит от величины d . Поэтому приведенное выше выражение для определения суммарной длины пути является нелинейной функцией расстояний.

Выше нами было отмечено, что при проектировании транспортных систем отправные и приемные пункты, пересечения дорог моделируются точками, а транспортные средства, например, конвейеры, связывающие эти пункты, – линиями. Тогда определения рациональной конфигурации транспортной схемы можно свести к построению кратчайших связывающих линий в пространствах с евклидовой, ортогональной и полярной метрикой, служащих геометрическими моделями транспортных схем ПРТС работ.

6.4 Методика геометрического моделирования транспортных схем

Настоящая методика разработана для геометрического моделирования транспортных схем в ПРТС работах с целью определения их оптимальной конфигурации, позволяющей перемещать и адресовать грузы и материалы по кратчайшему пути, что в целом уменьшит капитальные и эксплуатационные затраты.

Суть методики построения кратчайших связывающих линий для решения транспортных задач заключается в следующем:

- производится анализ и изучение геометрии трассы для транспортировки грузов. Трасса конвейера в плане представляет прямую или ломаную линию, для установления положения этих прямых или ломаной в профиле необходимо иметь данные о отметке начальной и конечной точек, максимальный и минимальный допустимые уклоны трассы. Грузы могут перемещаться на плоской или сложной пространственной трассе с горизонтальными, наклонными и вертикальными участками;

- места погрузки и выгрузки, пересечение путей моделируется точками, а транспортные средства, например, конвейеры, соединяющие эти места, – линиями. Выбирается один из методов определения кратчайших путей путем построения кратчайших связывающих линий с евклидовой, ортогональной или полярной метрикой, в зависимости от траектории движения грузов;

- составляется транспортная схема ПРТС работ и выявляется последовательность выполнения производственных процессов;

- выбираются виды транспортных средств ПРТС работ для конкретного объекта;

- рассчитывают экономическую эффективность путем сравнительного технико-экономического анализа существующей схемы с новым вариантом.

Следует отметить, что геометрическое моделирование и графическое изображение технологии ПРТС работ увеличивает ее наглядность, помогает проанализировать все этапы погрузки и выгрузки, составить транспортную

схему, разработать более рациональную последовательность технологических операций, выбрать виды транспортных средств.

Далее излагается применение этой методики для определения кратчайших путей доставки грузов в ПРТС работах на различных предприятиях промышленности.

6.5 Определение оптимальной схемы транспортных линий на карьерах

В условиях карьеров транспортирование находится в тесной взаимосвязи со смежными технологическими процессами: разрушением, выемкой, погрузкой, складированием и отвалообразованием.

Транспортирование на карьере является важнейшим звеном технологического процесса добычи и в значительной степени определяющим эффективность и экономичность разработки. Расходы на конвейерный транспорт получают все большее применение при перемещении горной массы, достигают 50-60% от общих расходов и значительно возрастают с увеличением глубины работ.

Конвейерный транспорт получает все большее применение при транспортировании горной массы. При конвейерном транспорте сокращается протяженность транспортных коммуникаций за счет подъема груза конвейерами под углом 18-20°, а при использовании специальных конвейеров - под углом 30-45° и более. Для обслуживания конвейеров требуется небольшой штат рабочих, возможно централизованное автоматизированное управление ими. Производительность отдельных конвейерных установок достигает 20-30 тыс.м³/ч. Они отличаются малым расходом электроэнергии, не загрязняют атмосферу вредными выбросами, эксплуатация их более безопасна и комфортна по сравнению с другими видами транспорта.

Конвейерный транспорт, как известно, имеет малую мобильность, особенно в стесненных условиях разработки.

Необходимая маневренность конвейерных установок может быть достигнута применением связывающих вставок в виде короткозвенных конвейеров, обеспечивающих гибкость всей системы.

В последние годы в зарубежной практике получают распространение так называемые мобильные конвейеры, имеющие секции небольшой длины и массы, легко и быстро передвигаемые с помощью тракторной тяги или переносимые кранами [104].

Оптимизация общей схемы конвейерного транспорта, как правило, может быть выполнена только при проектировании горного предприятия в целом, так как многообразие вариантов схем определяется горнотехническими условиями. Однако, даже при выбранной общей схеме транспорта, проектирование единичной протяженной конвейерной линии является многовариантной задачей [101].

Одним из основных направлений оптимизации конвейерных линий является определение кратчайшего пути транспортирования горной массы от места погрузки до места разгрузки, что позволяет уменьшить капитальные расходы и эксплуатационные затраты.

Технологическая линия при конвейерном транспорте в общем случае включает: забойные конвейеры, принимающие груз от экскаваторов; передаточные конвейеры, соединяющей забойный конвейер с отвальным или подъемным; отвальные, подающие вскрышную породу на отвалообразователь; магистральные, наклонные (подъемные) или горизонтальные конвейеры, собирающие грузопотоки с нескольких уступов; межуступные перегружатели.

Следовательно, основная задача оптимизации конвейерных линий на поверхности месторождения заключается в том, чтобы для некоторого заданного количества фиксированных вершин (пункты погрузки и разгрузки, отвалов, места складирования и т.п.) определить количество и наилучшее расположение дополнительных вершин (пунктов объединения или разъединения) и определить кратчайший путь, соединяющий эти вершины.

В такой постановке решение задачи сводится к проблеме Штейнера – построению кратчайших связывающих линий для заданного множества точек с введением дополнительных вершин, оптимизирующих ее решение.

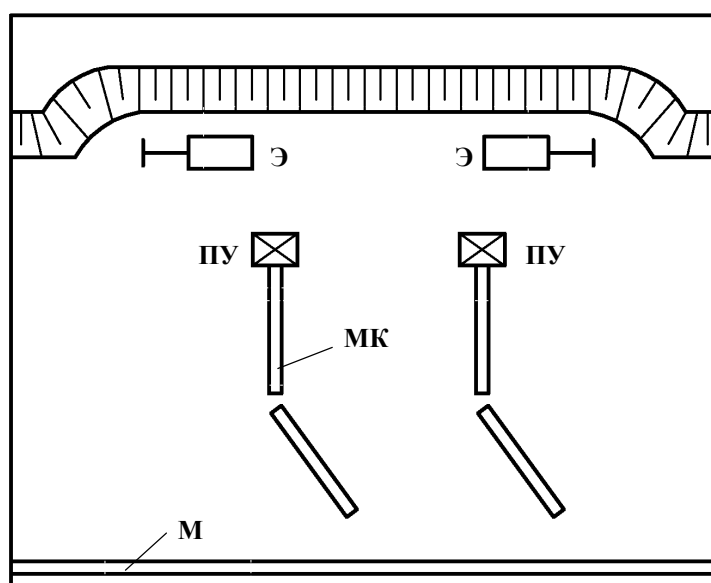
Наиболее простая постановка задачи оптимизации транспортной схемы заключается в представлении земной поверхности в виде плоскости и отсутствии на ней "запретных" зон. Решение такой задачи является, безусловно, ориентированным, требующим последующей корректировки транспортной схемы с учетом рельефа поверхности.

Рассмотрим существующую схему расположения конвейерной линии, состоящей из четырех мобильных конвейеров, магистрального конвейера, двух перегрузочных устройств и двух экскаваторов (рис.6.2, а). Используя построения кратчайшего дерева Штейнера для трех точек (см. 6.2), данную схему можно привести к виду, показанному на рис.6.2,б. Из нее видно, что число конвейеров сократилось с четырех до трех [105].

Рассмотрим транспортную схему конвейерных линий (рис.6.3, а). Комплекс состоит из трех экскаваторов (Э), шести мобильных конвейеров (МК), дробилки (Д), конвейера (М). Суммарная длина конвейерных линий составляет $L=338$ м.

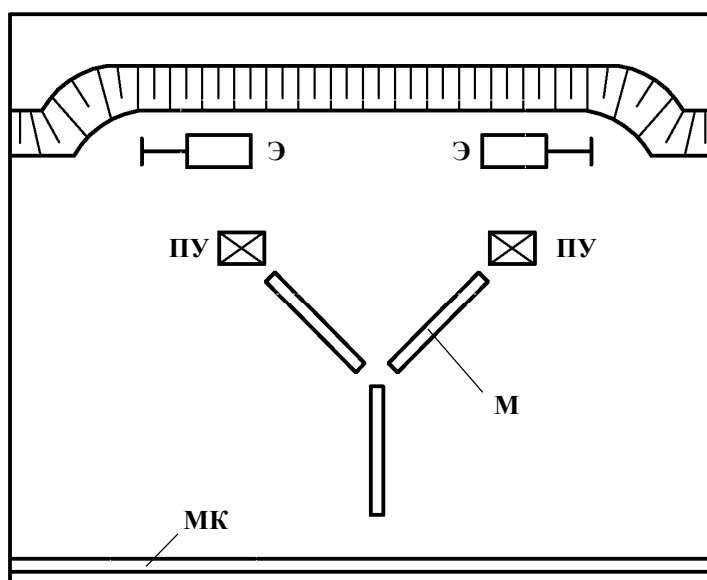
Согласно предложенной методике, геометрическими моделями указанных устройств и оборудования служат точки M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 . Эти точки расположены на вершинах выпуклого пятиугольника. Далее, применяя методику построения кратчайших связывающих линий для заданного множества точек с евклидовой метрикой, получаем схему конвейерных линий, показанную на рис.6.3,б. Протяженность схемы составляет $L_1=118$ м. $L_1 < L$, т.е. протяженность линий сократилась на 22 м.

Существующая схема конвейерных линий



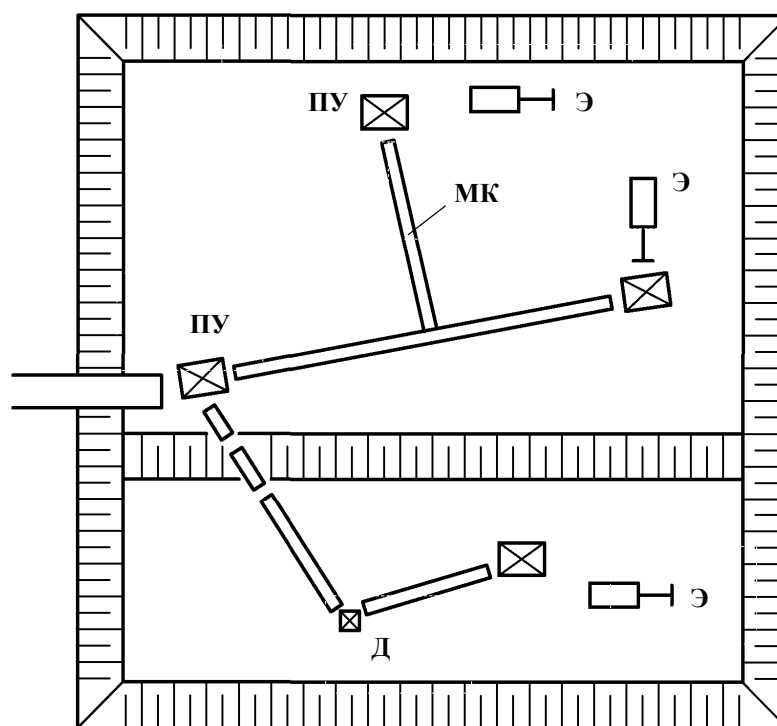
а)

Предложенная схема конвейерных линий

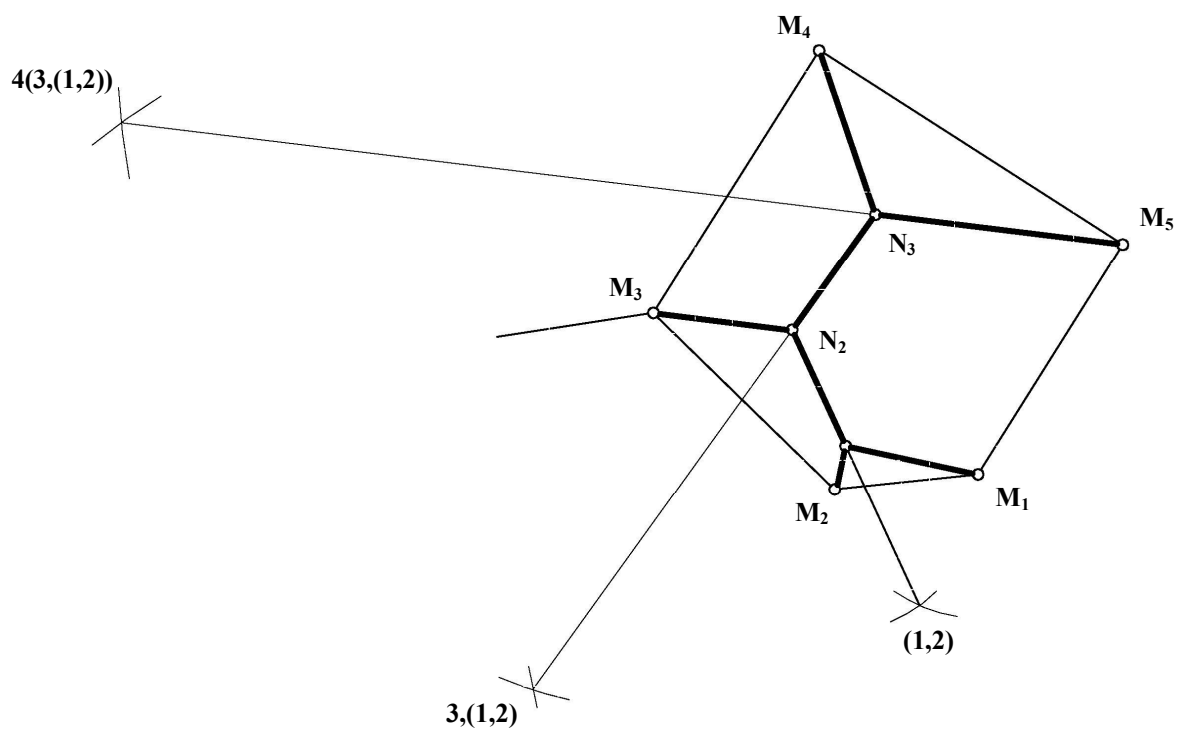


б)

Рис. 6.2 Существующая и предложенная конфигурация схем конвейерных линий



а)



б)

Рис. 6.3 Конфигурации конвейерных линий для своза горной массы

6.6 Определение кратчайшего пути и усовершенствования конвейерных линий в акционерном обществе "Алматинский завод тяжелого машиностроения"

Сталелитейное производство АО АЗТМ характерно большими грузопотоками различных грузов; здесь надо транспортировать и перегружать металл, флюсы и топливо, формовочную землю, стержни, пустые формы, формовочную смесь, песок, уголь, отходы и т.д.

Одним из важных факторов, влияющих на эффективность производства, является расположение основных транспортирующих машин.

Рассмотрим порядок транспортирования груза в выбивном отделении сталелитейного цеха (рис.6.4, а).

Горелая земля подается из выбивной решетки в питатель 2, представляющий собой короткозвенный ленточный конвейер длиной 4 м. Далее груз передается через ленточные конвейеры 3, 4, 5, 6, 7, 8 в наклонный конвейер 9 (угол наклона 8°), оттуда – в элеватор 11. На конвейер 9 дополнительно подается груз с другого направления через конвейер 10. Суммарная длина конвейерных линий равна 333,60 м.

Основным критерием оптимальности транспортной схемы является протяженность конвейерных линий, т.е. расстояние перемещения груза от места загрузки (выбивная решетка) до места разгрузки (элеватор). Уменьшение ее длины позволило бы сократить капитальные расходы и эксплуатационные затраты.

Тогда задачу проектирования транспортной схемы можно сформулировать следующим образом: при заданном расположении места загрузки (выбивная решетка 1), места разгрузки (элеватор 11) и конвейеров 9, 10, требуется определить оптимальную конфигурацию расположения конвейерной линии, имеющей минимальную протяженность. Задачу решаем в три этапа. Используем методику и алгоритм построения кратчайших связывающих линий для заданного множества точек на плоскости с ортогональной метрикой, предложенные в третьей главе и в [106, 108, 110].

1-й этап. Построение транспортной схемы проводим в виде дерева кратчайшей длины. Выбивную решетку 1, элеватор 11 и места соединения конвейеров 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 моделируем как заданные точки $M_1, M_2, \dots, M_9$ (рис.6.4,б). Считаются известными расстояния между этими точками. Изучив визуально расположения заданных точек, определим, что для соединения точек M_1 и M_2 линией кратчайшей длины ограничимся рассмотрением прямоугольной сетки M_2AM_1N . Точки M_1 и M_2 можно соединить множеством отрезков кратчайшей длины, заключенных внутри прямоугольника.

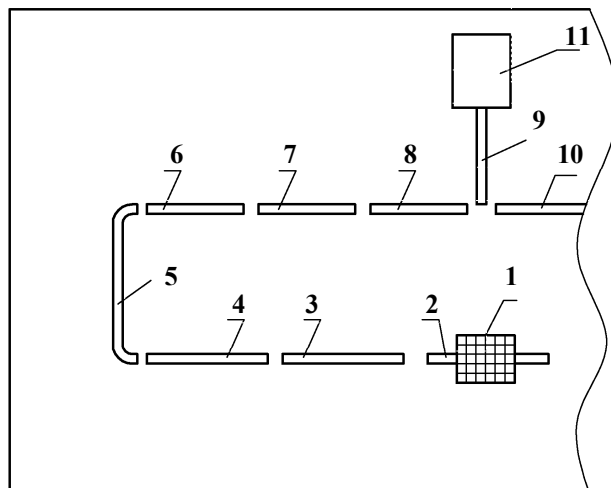
Соединяем точки M_1 и M_2 ломаной M_1NM_2 , т.к. согласно технологическому процессу в точке M_3 примыкает конвейер 10.

2-й этап. Выявляем, что участок M_1NM_2 попадает в запретную зону, поэтому по линии M_1N и NM_2 прорубаем подземный тоннель. Монтируемые

конвейеры на участке M_1N располагаются наклонно под углом 18° , на участке NM_3 - горизонтально, а на участке M_3M_2 - наклонно.

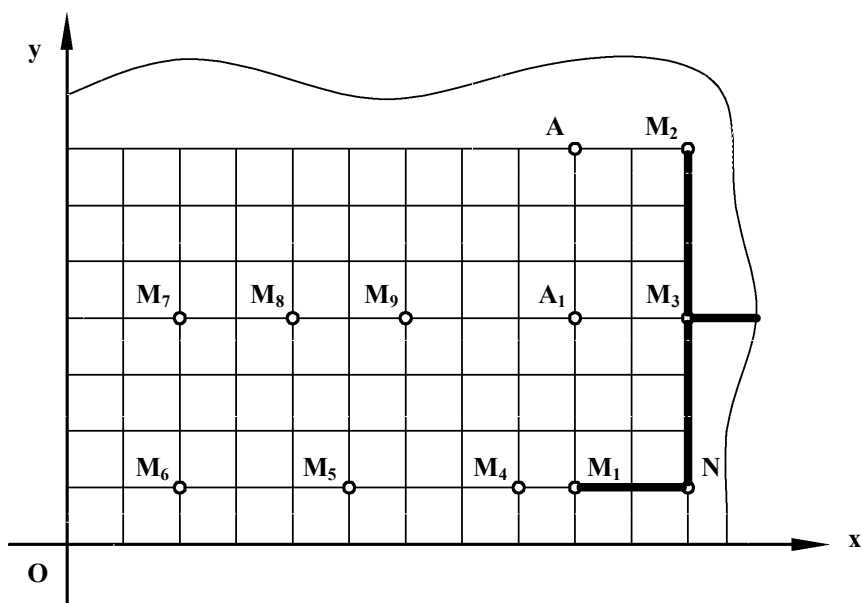
Число конвейеров сократилось с 9 до 5 линий. Протяженность транспортной схемы первоначально составляет 336,6 м, после оптимизации - 122,6 м.

3-й этап. Выбираются типы конвейеров и производится расчет их показателей.



а)

1 -выбивная решетка;
2-10 ленточные конвейеры;
11- бункер.



б)

Рис. 6.4 Структурная схема конвейерных линий АО АЗТМ

6.7 Применение разработанной методики построения кратчайших связывающих линий в условиях автоматизированного склада

Цель создания и функционирования любого склада состоит в том, чтобы принимать с транспорта грузопоток одними параметрами, перерабатывать и выдавать его на другой транспорт с другими параметрами и выполнять эти преобразования с минимальными приведенными затратами. Трудности при проектировании складов возникают вследствие многовариантности возможных технических решений и постоянной изменяемости состояния складов в процессе эксплуатации.

Анализ состояния складских работ проводят как по предприятию или организации в целом, так и по отдельным участкам, складам. При этом исследованию подлежат все операции, связанные с перемещением и складированием грузов. Перемещение и складирование грузов осуществляется в физических пространствах с различной размерностью и метрикой. Если транспортировка грузов происходит в одной плоскости, то траектория движения грузов определяется двумя координатами. При транспортировке грузов в пространстве, траектория движения определяется тремя координатами. Одним из главных факторов, влияющих на стоимость внутризаводских транспортировок грузов, является расстояние (маршруты) и количество перевозимых грузов.

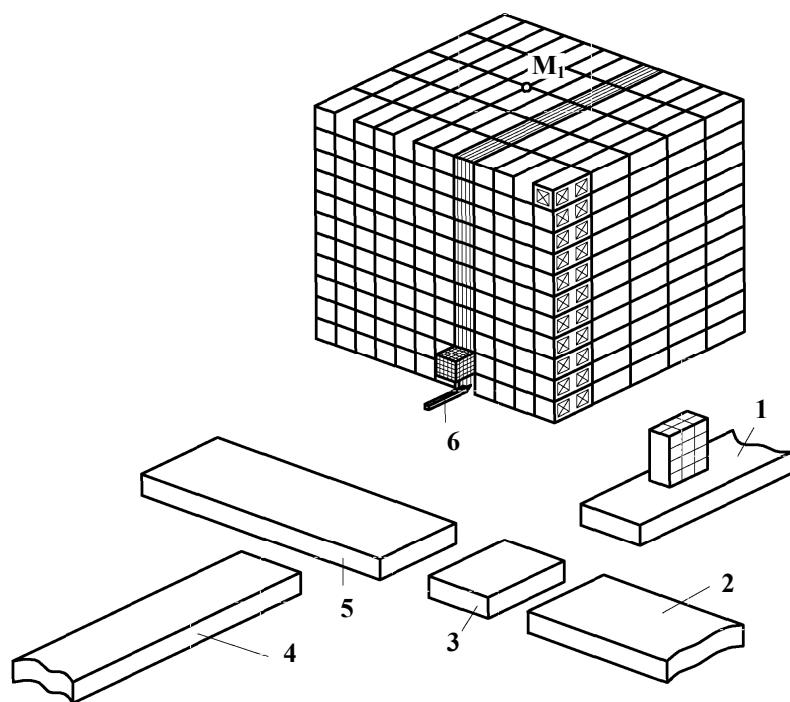


Рис. 6.5 Одна из секций автоматизированного склада

1 и 2 – конвейеры; 3 – поворотная секция; 4 – роликовый конвейер; 5 – раздаточный конвейер; 6 – кран-штабелер

Поэтому эффективная и бесперебойная работа производства в целом зависит от выбора оптимальных маршрутов следования и адресования грузов. Графическое изображение ПРТС работ увеличивает ее наглядность, помогает проанализировать все этапы и приемы выполнения работы [107]. В частности; технологические процессы переработки груза на складах целесообразно предоставлять в виде аксонометрических изображений.

На рис.6.5 представлена одна из секций автоматизированного склада. Грузы на склад прибывают по роликовому конвейеру 4, поступают внешние грузы для переработки. Для передачи с конвейеров 1 и 2 на раздаточный конвейер 5 используется поворотная секция 3. С конвейера 5 груз передается на стол, оттуда с помощью крана-штабелера 6 в ячейки стеллажей.

Траектория движения грузов на складе определяется тремя координатами x , y и z , а траектория движения грузов на конвейерах 1, 2, 3, 4, 5 - двумя координатами x , y . Будем считать, что все координаты расположения ячеек и места погрузок известны. Тогда для определения кратчайшего пути транспортирования грузов можно применить алгоритм построения кратчайших связывающих линий в трехмерном пространстве с ортогональной метрикой для заданного множества точек. Склад представляем в виде трехмерной сети (рис.3.20.). Ячейки стеллажей на этажах моделируются прямоугольными параллелепипедами. Если требуется доставить груз, расположенный в точке M_1 к вагону, расположенному за пределами цеха, то согласно предложенному алгоритму рассчитываются расстояния между всеми точками (пункты перегрузки, пересечений конвейерных линий) и составляются в определении минимального элемента матрицы расстояний. Каждому элементу матрицы расстояний соответствует две точки, или точка и кратчайшее поддерево, или два кратчайших поддерева. Если задано m точек, то алгоритм состоит из $m-1$ шагов.

В конце решения мы получаем одно единственное дерево, имеющее кратчайшую длину и соответствующее искомому пути [109].

Указанный алгоритм реализован в виде ППП "ORTSET", что позволяет автоматизировать процесс переработки грузов в автоматизированных складах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии, посвященной разработке геометрических методов определения оптимальной конфигурации инженерных сетей, изложены следующие результаты, полученные авторами:

1. На основе изучения литературных источников по рассматриваемой проблеме, анализа и исследования конфигурации инженерных сетей обобщены и улучшены существующие и предложены новые методы построения оптимальных связывающих линий.

2. Сформулированы и доказаны необходимые условия, которым должны отвечать кратчайшие связывающие линии для заданного множества точек. Предложена методика построения кратчайшего дерева Штейнера для компланарного множества точек с евклидовой метрикой в диалоговом режиме "специалист-компьютер", в которой специалист на основе визуального изучения расположения точек разбивает их на полные компоненты, а компьютер определяет точек Штейнера, а также топологию кратчайшей связывающей линии (КСЛ).

3. Впервые исследована геометрия пространства с ортогональной метрикой. Разработаны геометрические алгоритм построения КСЛ для конечного множества точек плоскости и трехмерного пространства с ортогональной метрикой.

4. Впервые исследована геометрия плоскости с полярной метрикой. Предложен оригинальный алгоритм построения кратчайших связывающих компланарное множество из m точек линий с полярной метрикой. В этом алгоритме для определения расстояния от точки до кратчайшей связывающей линии и расстояния между двумя кратчайшими линиями используются эквидистанционные линии. Разработана методика построения эквидистанционной линии на плоскости с полярной метрикой и доказана, что она является замкнутой и состоит из отрезков прямых, спиралей Архимеда, гиперболической спирали и окружностей.

5. Разработана геометрическая модель трассы автомобильных дорог в виде одномерного обвода второго порядка гладкости, что позволяет значительно повысить скорость и обеспечивает безопасность движения автотранспорта

6. Разработана методика геометрического моделирования транспортных схем в ПРТС работах на основе построения КСЛ, позволяющая оптимизировать их конфигурацию.

6. Проведен анализ проектирования систем конвейерных линий с традиционной схемой и предложенной методикой на основе построения кратчайших связывающих деревьев.

8. Получены условия применимости методики построения кратчайших линий для определения кратчайшего пути транспортирования грузов и оптимизации конвейерных линий. Разработана эффективная методика отыскания нужного груза, его адресования и транспортирования по кратчайшему пути на автоматизированных складах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Steiner J. Über den Punkt kleinsten Entfernung. Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1882 a.d.J. - s.144.
2. Melzak Z. A. On the problem of Steiner // J.Canad.Math.Bull. - 1961. - v.4. - p.143-148.
3. Hanan M. On Steiner's problem with rectilinear distance // SIAM. J. Appl.Math. - 1966. vol.14. - N 2. - p. 203-216.
4. Cockayne E. G. and Melzak Z.A. Steiner's problem for set terminals. - Quart.Appl.Math.26.2. - 1968. - p.213 - 218.
5. Carey M. R., Czumak R. L. and Johnson D.S. The Complexity of computing Steiner minimal trees // SIAM.Appl.Math. - 1977. - vol. 32, - p.262-269.
6. Chung F. R. and Czumak R. L. Steiner trees for ladder-Annals Discrete Math. - 1978. - N 2. - p.23-39.
7. Pollak H. O. Some remarks on the Steiner problem // J. Combin Theory.Ser. - 1978. - a.24. - p.278-295.
8. Du D. Z., Hwang F.X. and Hwang F.X. Steiner minimal trees // J.Combinatorial Theory, - 1982. N3. - p.396-400.
9. Иванов А. О., Тужилин А. К. Задачи Штейнера для выпуклых границ или плоские минимальные сети // Матем.сб. - М.: 1991. -Т.182. N 12. - С. 1813-1844.
10. Есмуханов Ж. М. Методы отыскания оптимальных решений конструктивных задач и их технические применения: Кандидатская диссертация по специальности 05.01.01 «Прикладная геометрия и инженерная графика». -М., 1969. - 254 с.
11. Есмуханов Ж. М. Графическое решение одной экстремальной задачи //Сборник по вопросам математики и механики КазГУ им. С.М.Кирова.-Алма-Ата: КазГУ, 1973.-С.25-31.
12. Есмуханов Ж. М. Графический алгоритм обобщенной проблемы Я.Штейнера //Прикладная геометрия и инженерная графика. - Алма-Ата: КазПТИ, 1974. Вып.І. -С.19-23.
13. Бабаян Б. А., Попов В. С. Нахождение связывающей сети абсолютно минимальной длины. // Труды семинара отдела структурных логических схем. - М. : ИТМ и ВТ АН СССР, 1969. Вып.7. - С.27-45.
14. Борисов Г. А., Земляченко В. И., Кукин В. Д. Проблема Штейнера и ее приложения // Доклады на заседании Президиума Корельского филиала АН СССР. - М., 1984. - С.41-43.
15. Гильберт Е. Н., Поллак Г. О. Минимальные деревья Штейнера // Кибернетический сборник. - М.: Мир, 1974. Вып.8. С.19-50.
16. Якутавичене Д. А. Алгоритм для решения задачи о кратчайшем соединении точек плоскости // Самонастраивающиеся системы. -М. : Наука, 1965. С.287.

17. Cockayne E. G. On the efficiency of Algorithm for Steiner minimal trees // SIAM.J.Appl.Math., 1970-18. - N 1. - p.150-159.

18. Моцкус И. Б. Многэкстремальные задачи в проектировании. – М.: Наука, 1967. - С.215.

19. Шалтянис В., Варнайтес А. Об одном методе уменьшения размерности при решении многэкстремальных задач // Теория оптимальных решений. - Вильнюс, 1985. Вып.1. - С.43-46.

20. Юшка Ф. П. Численные методы построения сети минимальной длины // Теория оптимальных решений. - Вильнюс, 1975. Вып.1. - С.28-33.

21. Прим Р. К. Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения // Кибернетический сборник. N 2. - М.: ИЛ, 1961. С.95-107.

22. Мульдеков И. О. Методы решения некоторых конструктивных задач на римановой (сферической) плоскости на основе экстремальных свойств геодезических // Автореферат дис.канд.тех.наук. М.: МАИ, 1973. - 21 с.

23. Есмуханов Ж. М. К вопросу построения связывающего дерева с расстоянием первого порядка // Сборник по вопросам математики и механики. - Алма-Ата: КазГУ, 1973. Вып.4. – С.32-47,

24. Мульдеков И. О. Алгоритм построения кратчайшей связывающей сети // Прикладная геометрия и инженерная графика. - Вып.3. - Алма-Ата, КазПТИ, 1978. – С.78-80.

25. Есмуханов Ж. М. Геометрия плоскости с полярной метрикой // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Алма-Ата: КазПТИ, 1978. Вып.3. – С.10-15.

26. Рыжов Н. Н. О построении кратчайшей линии на топографической поверхности // Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике. - М.: МЭИ, 1958. - С.255-259.

27. Иванов Г. С., Есмуханова Ж. Ж. Построения кратчайших связывающих сетей на топографической поверхности // Начертательная геометрия и машинная графика в практике решения инженерных задач. - Омск: ОШМ, 1987. – С. 27- 32.

28. Лотарев Д. Т. Задача Штейнера для транспортной сети на поверхности, заданной цифровой моделью / Автоматика и телемеханика. - М, 1980. N 10. - С.104-115.

29. Зиман Ю. Л., Рябов Г. Г. Волновой алгоритм и электрические соединения // Электронные вычислительные машины. - М.: ИТМ и ВТ АН СССР, 1965. - С.128.

30. Митчел Д., Д.Маунт Панадимитриц. Дискретная геодезическая задача // Кибернетический сборник. - Вып.27. - М.: Мир, 1990. - С.21-25.

31. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. Введение. - М.: Мир, 1989. - 471 с.

32. Старадетко Е. А. Элементы вычислительной геометрии. - Минск: Наука и техника, 1986. -239 с.

33. Фокс А., Прат Н. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. - М.: Мир, 1982. - 304 с.
34. Васильев В. В., Гайфуллин Э. Ш. Алгоритм решения задачи Штейнера // Теория графов. - М.: МЭИ, 1975. Вып.250. - С.94-100.
35. Кельманс А. К. О построении кратчайшей связывающей сети // Кибернетика и управление. - М.: Наука, 1967. - С.115-130.
36. Коренблюм Б. И., Рыбальский В. И. Оптимальные распределительные сети // Экономика и математические методы. - М.: 1967, Т.3. Вып. 1. - С. 87-92.
37. Цой С. В., Цай С. М. Прикладная теория графов. - Алма-Ата. : Наука, 1971.
38. Березин В. А., Бородавкин Г. Г. Поиск оптимальной конфигурации трубопроводной системы // Строительство трубопроводов. - М., 1976. N 10. - С. 20-21.
39. Кучинский В. М. Об одном методе оптимизации сетей автомобильных дорог // Строительство и архитектура. - М.: 1973. N 3. - С.46-52.
40. Мартынова О. Р. Геометрическое проектирование трубопроводных микросетей и воспроизведение их элементов // Автореферат дис.... канд. техн. наук: 05.01.01. - М.: МАИ, 1990. -18 с.
41. Маханов М. Построение конфигурации групповой водопроводной сети на основе геометрического решения // Начертательная геометрия и черчение. - Алма-Ата: КазПТИ, 1979. - С.72-74.
42. Методы автоматизированного проектирования транспортных сетей. - Петрозаводск, 1989. - 55 с.
43. Хомяк Я. В. Построение оптимальных сетей автомобильных дорог. - М.: Транспорт, 1968. - 144 с.
44. Ященко В. А. Геометрическое моделирование в задачах оптимального проектирования инженерных сетей // Автореферат дис.... канд.техн.наук, - Киев, 1988. - С. 16.
45. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. - Киев: Наук, думка, 1986. - 265 с.
46. . Баранов Г.А., Курейчик В. М., Калашников В. А. Вопросы оптимизации деревьев Штейнера // Электронная техника. Сер.3. Микроэлектронные устройства. - 1978. Вып.3/9. - С.27-30.
47. Бочко Г. Д., Макаров Л. И. Об одном алгоритме трассировки в прямоугольной решетке // Вычислительная техника. - Каунас, 1974. - С.111-113.
48. Геометрические задачи машинной графики больших интегральных схем. ~ М.: Радио и связь, 1987. - 176 с.
49. Есмуханов Ж. М. К вопросу построения связывающего дерева с расстояниями первого порядка // Сборник по вопросам математики и механики КазГУ им. С.М.Кирова. – Алма-Ата: КазГУ, 1973. – С32-40.

50. Калашников В. А., Лебедев Б. К., Литвиненко В.А. Программа построения кратчайшего дерева Штейнера // Республ.фонд алгоритмов и программ. - Киев: ИК АН УССР, 1978, N52f3.

51. Местман Б. Я., Тютин А. А. Приближенное решение задачи Штейнера в планарной решетке // Автоматизированное проектирование цифровых вычислительных машин. - Каунас: Наука, 1973. С.67-71.

52. Ойхман Е. Г. Графические системы для СМ ЭВМ: Интерактивные системы для проектирования печатных плат на СМ ЭВМ / Под ред. Наумова Б.Н. - М.: Наука, 1968. - 191 с.

53. Стрекачинский Г. А., Ордин А. А., Федорин В. А, Оптимальное размещение транспортных сетей шахт. - Новосибирск: Наука, 1981. - 83 с.

54. Стрекачинский Г. А., Ордин А. А., Федорин В. А. Оптимизация транспортных сетей в прямоугольной метрике // Вопросы транспортных сетей шахт. - Новосибирск, 1976. - С.3-7.

55. Чудова В. Л., Андрес Б. Н. Универсальная процедура построения дерева Штейнера // Автоматизация проектирования СМ ЭВМ. 1982. Вып.93. - С.22-30.

56. Штейн М. Е. Задача Штейнера в ортогональной геометрии // Методы машинного проектирования цифровой аппаратуры. - М.: Советское радио, 1973. - С.258-268.

57. Фридман А., Менон Г. Теория и проектирование переключательных схем / Пер. с англ. - М.: Мир, 1978. - 580 с.

58. Bern M.W. Two probabilistic results on rectilinear Steiner trees // Algorithmica. - 1988. - v. 3. - p.191-204.

59. Komlos J., Shining M. G. Probabilistic partitioning algorithm for the rectilinear Steiner problem // Networks. - 1985. V.15. N 4. - p. 413-424.

60. Есмуханов Ж. М. Геометрия плоскости с полярной метрикой//Прикладная геометрия и инженерная графика: Сб.науч.тр. – Алма-Ата: КазПТИ, 1978. - Вып.3. – С.10-15.

61. Нутенко Л. Я. Использование проблемы Штейнера и ее обобщений для постановки и решения некоторых задач пространственной экономики. - М.: ЦЭМИ АН СССР, 1968. - 82 с.

62. Есмуханова Ж. Ж. Геометрические методы расчета конфигурации развернутых сетей // Автореф. дис. канд.техн.наук: 05.01.01. – М.: МАИ, 1987. - 17 с.

63. Прокофьев В. М. Некоторые свойства кратчайшей линии, соединяющей любое число точек плоскости // Ученые записки Московского гос. пединститута им. Ленина. М.: МГПИ, 1957. Вып.3.-С.53-67.

64. Есмуханов Ж. М., Куспекоев К. А. Технология определения кратчайших связывающих линий средствами интерактивной машинной

графики // Актуальные вопросы современной науки и техники. - Алматы, 1994. - С.87-90. (Сб.науч.тр. Ч.2).

65. Есмуханов Ж. М. Графо-геометрическое моделирование в САПР технических устройств. Доклад по докторской диссертации. – Алматы: КазНТУ, 1995. – 32с.

66. Есмухан Ж. М., Куспеков К. А. Дистанционное поле кратчайших связывающих линии на E^2 . Материалы VI международно-практической конференции, посвященной 125-летию Национального технического университета «Харьковский политехнический институт» и 10-летию Украинской ассоциации по прикладной геометрии. 21-24 апреля 2009 г.- Харьков. – С. 68-73.

67. Куспеков К. А., Есмухан Ж. М. Проблема Штейнера и ее прикладной алгоритм. – Алматы: Научный журнал «Поиск». №1, 2006. с. 227-231.

68. Есмуханов Ж. М. Определение оптимальной конфигурации оросительной сети методом кратчайших соединений компланарного множества равномерно расположенных точек //Проектирование строительных гидротехнических сооружений на оросительных системах. Сб. науч. тр. – Ташкент: ТИИ и МСХ, 1974.-Вып.62. (Соавт. Калауов Е.)

69. Есмуханов Ж. М. Аналитическое решение задачи о кратчайшем соединении трех точек //Тезисы докладов и сообщений на XVI научной конференции. – Алма-Ата: КазПТИ, 1982. – С.16-18.

70. Есмуханов Ж. М. Геометрические основы построения оптимальной конфигурации тепловых сетей: Техотчет по теме №193-68 «С». – Москва: МАИ, 1968. – 98с.

71. Есмуханов Ж. М. Исследование возможностей применения теории графов для расчета электрических сетей: Техотчет по теме № 194-68 «С». – Москва: МАИ, 1969. – 50 с.

72. Есмуханов Ж. М. Геометрические алгоритмы построения дерева кратчайшей длины: Техотчет кафедры НГиГ за 1979 г. – Алма-Ата: КазПТИ, 1979. – 58с.

73. Есмуханов Ж. М. Геометрическое моделирование в науке и технике: Техотчет кафедры НГиГ за 1982г. –А-Ата: КазПТИ, 1982. – 12 с.

74. Есмуханов Ж.М. Исследование прикладной геометрии оптимальных связывающих деревьев: Техотчет кафедры НГиГ за 1983 г. –Алма-Ата: КазПТИ, 1983. – 23 с.

75. Отчет о научно-исследовательской работе «Графо-геометрическое моделирование и разработка графических алгоритмов решение задач науки и техники». КазНТИ № гос. рег. 0198 РК 00156. 2008г. Руководитель Есмуханов Ж. М.

76. Отчет о научно-исследовательской работе «Разработка геометрических моделей инженерных объектов и новых геометрических методов решения технических задач». КазНТИ № гос. рег. 0108 РК 00119. 2008г. Руководитель Куспеков К. А.

77. Есмуханов Ж. М. О кратчайших связывающих деревьях //Технология машиностроения и автоматизация: Сб. науч. тр. – Алма-Ата: КазПТИ, 1977. – Вып.6. – С.78-89.

78. Есмуханов Ж. М. О проблеме оптимальных связывающих деревьев //Прикладная геометрия и инженерная графика.-Киев: Будивельник, 1979. – Вып.27. – С 50-51.

79. Есмуханов Ж. М. Временные рекомендации по определению схемы трассирования водопроводных сетей. – Алма-Ата: Минводхоз КазССР, 1983. – С.24. (Соавт. Маханов М.М, Першин Н.И., Мырзахметов М.М.)

80. Есмуханов Ж.М. К вопросу выбора оптимального связывающего дерева // Там же, что [] – С. 22-23.

81. Есмуханов Ж. М. Некоторые задачи на оптимальное соединение трех точек и их обобщения //Тезисы докладов на XIV научной конференции профессорско-преподавательского состава. – Алма-Ата: КазПТИ, 1978.-С.115-116.

82. Есмуханов Ж. М. Об одном геометрическом алгоритме связывающих деревьев//Материалы всесоюзной конференции по САПР и инженерной графике. – Орел: НТО Машпром, 1978.

83. Есмуханов Ж. М. Оптимальные связывающие линии //Молодые ученые – 10-летию Независимости Казахстана: Труды международной конференции. – Алматы: КазНТУ, 2001.-Ч. 1. –С. 450-453. (Соавт. Сакиева М.К.).

84. Васильев В. В. Алгоритм решения Штейнера с ортогональными расстояниями // Труды МЭИ. Системы автоматизированного проектирования. - М.: 1978. Вып.368. -С.41-46.

85. Есмуханов Ж. М., Куспеков К. А. Об одном алгоритме построения кратчайших связывающих линий в двумерном пространстве с ортогональной метрикой. Алматы, 1994. Деп. в КазгосИНТИ 6.06.1994. - 10 с. - N 5054.

86. Есмуханов Ж. М. О кратчайших связывающих линиях в пространстве с расстояниями первого порядка//Там же, что [] – С.45-52.

87. Куспеков К. А., Есмуханов Ж. М. Проблема Штейнера в пространствах с расстояниями первого порядка // Компьютерная геометрия и графика в инженерном образовании. - Нижний Новгород: НПИ, 1991. - С.121.

88. Есмуханов Ж. М. Аналогии коники в пространстве с расстояниями первого порядка //Вопросы преобразования и применения ЭВМ в начертательной геометрии. Сб. научных трудов. – Алма-Ата: КазПТИ, 1988.- С.17-27.

89. Есмуханов Ж. М. Построение кратчайшей линии, связывающей n точек в двумерном и трехмерном пространствах Г. Минковского //Материалы научно-технической конференции факультета общетехнических наук. –Москва: МАИ, 1970. – С.6-7.

90. Джиенкулов С. А., Саргужин М. Х. Расчеты перспективных ленточных конвейеров. Алматы: РИК, 1994. – 355с.

91. Куспеков К. А. Геометрические основы построения рациональной конфигурации связывающих инженерных сетей // Республиканская научно-техн.конф.: Роль науки и техники в решении народнохозяйственных задач. - Шевченко: ОТФ КазПТИ, 1990. - С.714.

92. Есмухан Ж. М., Куспеков К. А. Особенности плоскости с полярной метрикой. Алматы: «Вестник» КазНТУ им. К.И. Сатпаева. №6 (50). 2005г. С.226-230.

93. Куспеков К. А. Алгоритм построения кратчайших связывающих линии на плоскости с полярной метрикой. Современные проблемы геометрического моделирования. Материалы второй украинско – российской научно-практической конференции. 24-27 апреля 2007г. спец выпуск. - Харьков, 2007. – с.158-163.

94. Куспеков К. А. Кратчайшие связывающие линии в пространствах с полярной метрикой // Проблемы графической подготовки инженера. - Минск: ВПТА, 1992. - С.114.

95. Куспеков К. А. Кратчайшая связывающая линия на плоскости с полярной метрикой. Алматы, 1994. Деп. в КазгосИНТИ 6.06.1994, N 5055.

96. Куспеков К. А. Геометрические методы определения оптимальной конфигурации сетей автомобильных дорог. Труды международной конференции «Инженерное образование и наука в XXI веке, посвященной 70-летию КазНТУ им. К.И. Сатпаева». Индустриально - инновационное развитие экономики. Т.2.-Алматы: КазНТУ, 2004. - С.155-160.

97. Куспеков К. А. Теоретические основы построения кратчайших связывающих сетей автомобильных дорог в пространствах с евклидовой метрикой. Материалы четвертой международной научно-практической конференции «Транспорт Евразии XXI века». 17-19 октября 2006г. Т.2 Алматы С.179-181

98. Есмухан Ж. М., Куспеков К. А. Геометрическое моделирование трассы автомобильных дорог. – Алматы: Научный журнал «Поиск». №1, 2006. С. 227-231.

99. Куспеков К. А. геометрические методы расчета оптимальных вариантов трубопроводных сетей транспортировки нефти и нефтепродуктов. Материалы международной научно-практической конференции «Проблемы и перспективы развития нефтяной промышленности». 14-15 декабря 2005г. Алматы, КазНТУ, С. 270-273.

100. Есмухан Ж. М., Куспеков К. А. Улучшение геометрической модели трассы автомобильных дорог. Современные проблемы геометрического моделирования. Материалы второй украинско–российской научно-практической конференции. 24-27 апреля 2007г. Спец выпуск. - Харьков, 2007. – с.102-107.

101. Дьячков В. А., Шахмейстер Л. Г., Дмитриев В. Г. и др. Ленточные конвейеры в горной промышленности. Под ред. чл.-корр. АН СССР Спиваковского А. О. 7vМ.: Недра, 1982. - 349 с.

102. Мельников Н. В., Потапов М. Г., Комраком А. Н. Метод оценки надежности схем поточной технологии на карьерах. - М.: ИСД, 1969. - 47 с.

103. Спиваковский А. Д., Дьячков В. К. Транспортирующие машины. - М.: Машиностроение, 1983. - 486 с.

104. Васильев М. В. Транспортные процессы и оборудование на карьерах. М.: Недра, 1986. - 239 с.

105. Куспеков К. А. Определение оптимальной схемы применения конвейерных систем // Научный журнал Мин.обр.РК "Поиск", N 4. Алматы, 1995. - С, 130-133.

106. Джиенкулов С. А., Куспеков К. А. Геометрические методы определения кратчайшего маршрута при погрузочно-разгрузочных, транспортных и складских работах // Поиск. N 4. - Алма-Ата: 1995. - С.127-130.

107. Маликов О. Б. Опыт разработки технологии перегрузочных работ в графическом виде. - Л.: ЛДНТМ, 1972. - 32 с.

108. Куспеков К. А. Геометрические основы построения оптимальной конфигурации конвейерных систем. Труды международного симпозиума посвященной 100-летию со дня рождения К.И. Сатпаева. 7-8 апреля 1999г. ИИА «Айкос», часть 3, С. 193-195. Алматы.

109. Куспеков К. А. Поиск кратчайшего маршрута перемещения штучных грузов в автоматизированных складах. Перспективы и развития транспортной техники. Сборник научных трудов посвященной 70-летию юбилею академика международной академии транспорта, д.т.н., проф. Джиенкулова С. А. Алматы, 2003 С. 284-286.

110. Куспеков К. А. Построения кратчайших связывающих линии с ортогональной метрикой средствами компьютерной графики. Труды международного симпозиума посвященной 100-летию со дня рождения К.И. Сатпаева. 7-8 апреля 1999г. ИИА «Айкос», часть 3, С. 195-197. Алматы.

111. Есмуханов Ж. М. Graphic and geometrical modeling in applied geometry // The applied geometry and engineering graphics, Issue№70, Kyiv, 2002.-С.137.

112. Куспеков К. А. Геометрические методы определения оптимальной конфигурации трубопроводной сети сбора и транспорта нефти. Труды международной научной конференции «Наука и образование – ведущий фактор стратегии Казахстан 2030». 24-25 апреля 2008г. Караганда. Выпуск 1. С.322-324.

113. Куспеков К. А. Геометрическое моделирование железных дорог. Труды международной научной конференции «Наука и образование – ведущий фактор стратегии Казахстан 2030». 24-25 апреля 2008г. Караганда. Выпуск 2. С.237-240.

114. Куспеков К. А. Моделирования газораспределительных сетей кратчайшими связывающими линиями с ортогональной метрикой. Материалы международной научно-практической конференции «Проблемы и перспективы развития нефтяной промышленности». 14-15 декабря 2005г. Алматы, КазНТУ, С. 274-276.

115. Аль-Фараби. Математические трактаты. Алма-Ата, «Наука», 1972. С.15-35. 191-192, 195-196, 197-198.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. ПОСТРОЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ СВЯЗЫВАЮЩИХ ЛИНИЙ НА ПЛОСКОСТИ С ЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКОЙ	8
1.1 Краткий обзор исследований по построению кратчайших связывающих линий	8
1.2 Некоторые определения и необходимые условия кратчайших связывающих линий для компланарных точек с евклидовой метрикой	9
1.3 Построения кратчайших связывающих линий для трех точек плоскости. Эквидистанционные линии и фрагменты	13
1.4 Основные свойства КДШ для n точек плоскости	22
1.5 Основные формулы для подсчета числа связывающих деревьев для компланарного множества точек	23
1.6 Построение кратчайших связывающих линий для четырех и пяти точек	25
1.7 Алгоритм построения кратчайших связывающих линий для n точек плоскости	29
2. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЙ Я.ШТЕЙНЕРА	32
2.1 О проблеме Я. Штейнера	32
2.2 Построение минимального дерева, связывающего заданные точки	33
2.3 Проблема Штейнера на поверхности φ в пространстве E_2	37
2.4 О кратчайшем соединении компланарных плоских фигур	41
3. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ СВЯЗЫВАЮЩИХ ЛИНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С ОРТОГОНАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ	46
3.1 Анализ исследований, посвященных построению кратчайших связывающих линий в пространствах с ортогональной метрикой	46
3.2 Некоторые определения и свойства кратчайших связывающих линий для компланарных точек с ортогональной метрикой	46
3.3 Кратчайшие связывающие линии для двух точек. Эквидистанционные линии и фрагменты	47
3.4 Построения кратчайших связывающих линий для трех, четырех и пяти точек плоскости	50
3.5 Алгоритм построения кратчайших связывающих линий для n точек плоскости	56
3.6 Основные свойства кратчайших связывающих линий в трёхмерном пространстве с ортогональной метрикой	59
3.7 Построение кратчайших связывающих линий для трех, четырех и пяти точек трехмерного пространства с ортогональной метрикой ...	63
3.8 Построение кратчайших связывающих линий для n	

точек трехмерного пространства	67
4. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ СВЯЗЫВАЮЩИХ ЛИНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С ПОЛЯРНОЙ МЕТРИКОЙ	71
4.1 Состояние вопроса построения кратчайших связывающих линий на плоскости с полярной метрикой	71
4.2 Введение понятия полярного расстояния	71
4.3 "Отрезки", "окружность" и эквидистанционные линии на плоскости с полярной метрикой	73
4.4 Построение кратчайших связывающих линий для трех, четырех и пяти точек плоскости с полярной метрикой	80
4.5 Алгоритм построения кратчайших связывающих линий для n точек плоскости с полярной метрикой	88
5. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕЙ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ	96
5.1 Кратчайшие связывающие сети автомобильных дорог на плоскости с евклидовой метрикой	97
5.2 Геометрическое моделирование трассы автомобильных дорог	100
6. РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ПОСТРОЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ СВЯЗЫВАЮЩИХ ЛИНИЙ ПРИМЕНительно В ПРТС РАБОТАХ. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ	113
6.1 Особенности конфигурации транспортных схем ПРТС работ	113
6.2 Влияние на конфигурацию транспортных схем геометрии трассы ..	115
6.3 Условия применимости предложенной методики для решения транспортных задач	116
6.4 Методика геометрического моделирования транспортных схем	117
6.5 Определение оптимальной схемы транспортных линий на карьерах	118
6.6 Определение кратчайшего пути и усовершенствования конвейерных линий в акционерном обществе "Алматинский завод тяжелого машиностроения"	122
6.7 Применение разработанной методики построения кратчайших связывающих линий в условиях автоматизированного склада	124
6.8 Техничко-экономический анализ применения методов определения кратчайших путей	126
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	131
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	132

Научное издание

Научное издание

Есмухан Жанузак Мухитулы
Куспеков Кайырбек Амиргазыулы

ПРИКЛАДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ СЕТЕЙ

Редактор
М.Ахмет

Компьютерная верстка
С. Джусанбаева

Подписано в печать «09» июля 2012 г.
Формат 60x84 1/16. Бумаги оффсетная
Уч. изд.л. 8,2. Усл. п.л. 8,2. Тираж 500. Заказ № 53.