

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН**

Казахский национальный технический университет
имени К.И. Сатпаева

О.П. Волобуева

СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рекомендовано научно-методическим советом университета
в качестве учебного пособия

Алматы 2012

УДК 004.4 (075.8)

В 68

В 68 Волобуева О.П. Системы оптимального управления: Учеб. пособие. – Алматы: КазНТУ, 2012. – 154 с. Ил. 43. Табл. 3. Библиогр. – 19 назв.

ISBN 978-601-228-374-7

Учебное пособие является частью комплекса учебных материалов по дисциплине “Системы оптимального управления”.

В пособии приведен современный математический аппарат описания динамических систем в пространстве состояний. Дается анализ свойств САУ: устойчивость по А.М. Ляпунову, наблюдаемость и управляемость по Р. Калману и Е. Гильберту. Приводится общий вид критерия оптимального управления и некоторые частные критерии оптимальности.

В двух главах пособия представлены принципы максимума Л.С. Понтрягина и оптимальности Р. Беллмана. Последняя глава посвящена методам и алгоритмам синтеза систем оптимального управления в непрерывной и дискретной формах.

Учебное пособие не претендует на исчерпывающую полноту рассматриваемых вопросов из-за ограниченности объема. Пособие предназначено для докторантов специальности “6D0704 – Вычислительная техника и Программное обеспечение”, а также может быть использовано исследователями и проектировщиками систем оптимального управления, т. к. содержит рабочие алгоритмы и многочисленные практические примеры.

УДК 004.4 (075.8)

Рецензенты:

Б.Д. Хисаров, канд. техн. наук, проф. АУЭС

Б.К. Курманов, канд. техн. наук, доц. КБТУ

Г.З. Казиев, д-р техн. наук, проф.

Печатается по плану издания Министерства образования
и науки Республики Казахстан на 2012 год

ISBN 978-601-228-374-7

© О.П. Волобуева, 2012

© КазНТУ, 2012

ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории оптимального управления связано с ростом требований не только к быстродействию и точности технических систем, но и к системам организационного управления в условиях рыночной экономики. Увеличение быстродействия возможно лишь при правильном распределении ограниченных ресурсов управления, и поэтому учет ограничений на управление стал одним из центральных в теории оптимального управления. С другой стороны, построение систем регулирования высокой точности привело к необходимости учёта взаимовлияния отдельных каналов системы при решении задачи синтеза современных сложных многосвязных систем. Именно математическая теория оптимального управления предлагает модели и методы построения оптимальных по быстродействию систем, аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), а также построения оптимальных систем на базе метода динамического программирования. Метод динамического программирования применим не только к оптимальным задачам динамики, но и к весьма широкому кругу технических, медицинских и экономических задач, в которых связи между фазовыми координатами, управлением и критерием оптимальности могут задаваться как в виде уравнений весьма произвольного вида, так и в виде экспериментально определенных графиков или таблиц численных данных. В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности Р. Беллмана.

Сложность задач теории оптимального управления требует определенную математическую базу: теорию дифференциальных уравнений – описание поведения динамических систем в пространстве состояний; теорию матриц – проверка необходимых свойств системы, таких как устойчивость движения по А.М. Ляпунову, наблюдаемость и управляемость по критериям

Р. Калмана и Е. Гильберта; аппарат вариационного исчисления. Развитие теории оптимального управления на этой базе с использованием различных критериев оптимальности дало толчок, в свою очередь, развитию численных методов решения краевых задач.

В данном пособии рассматривается необходимый математический аппарат для решения задачи синтеза систем оптимального управления. Рассматриваются оба класса задач теории оптимального управления, базирующихся на принципе максимума Л.С. Понтрягина и методе динамического программирования Р. Беллмана: 1) оптимизация программы управления; 2) оптимизация закона управления. Первый класс задач возникает, когда процессы в управляемой системе задаются априори определенной программой изменения регулируемой величины во времени. В случае оптимизации той или иной программы управления она не задается, а отыскивается в результате расчета по выбранному критерию оптимальности. При этом находятся программы изменения оптимального управления $u_{opt}(t)$ и оптимальных фазовых траекторий $x_{opt}(t)$. Второй класс задач рассматривает оптимальное построение системы управления для осуществления заданной программы управления. Причем программа управления может быть заданной либо решением задачи 1, либо каким-нибудь другим способом. Следует отметить, что при решении задачи 2 удобнее рассматривать динамику системы в отклонениях от требуемых величин или программ.

Несмотря на то, что в данном пособии излагаются формализованные модели и методы теории оптимального управления, следует отметить, что синтез системы оптимального управления является самостоятельной творческой задачей, решение которой требует учёта особенностей объекта, опыта и интуиции разработчика. Учебное пособие не претендует на исчерпывающую полноту рассматриваемых вопросов из-за ограниченности объема. Пособие предназначено для докторантов специальности “6D0704 – Вычислительная техника и Программное обеспечение”, а также может быть использовано исследователями и про-

ектировщиками систем оптимального управления, т. к. содержит рабочие алгоритмы и численные примеры.

В заключение каждой главы приводятся контрольные вопросы и упражнения, позволяющие закреплять теоретический материал. Каждая глава в данном учебном пособии автономна, тем не менее, желательно последовательное прочтение пособия.

Автор выражает свою признательность профессору Д.Н. Шукаеву за деятельное участие в обсуждении отдельных глав, способствующих улучшению качества пособия. Все замечания и пожелания автор примет с благодарностью и использует их в дальнейшей работе над темой.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ОПИСАНИЯ СИСТЕМ. АНАЛИЗ СВОЙСТВ САУ

В данной главе представлен не только современный математический аппарат описания динамических систем, но и теоремы и критерии исследования их основных свойств.

1.1. Современный математический аппарат описания САУ

Объектом управления является динамическая система, свойства которой описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{array} \right. \quad (1.1.1)$$

Систему дифференциальных уравнений (1.1.1) можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\dot{X} = AX, \quad (1.1.1a)$$

где матрица $A(n*n)$; векторы $X(n*1)$, $\dot{X}(n*1)$.

Запишем решение системы (1.1.1). Это система однородных уравнений, поэтому общее решение представляется в матричной форме следующим образом:

$$X(t) = e^{At} X_0, \quad (1.1.2)$$

где X_0 – начальное значение вектора X в момент

$$t=t_0=0, \quad X(0) \neq 0.$$

7

Математическое описание САУ в пространстве состояний

Математическое описание ОУ или математическая модель ОУ в общем виде в пространстве состояний представляется следующим образом:

[illegible]

где x_i – переменные состояния системы ($i = \overline{1, n}$); u_j – переменные управления ($j = \overline{1, m}$).

Система уравнений (1.1.5) называется *уравнениями состояния*.

Обозначим через $y_k(k = \overline{1, r})$ выходные переменные объекта управления. Тогда

[illegible]

Ниже приведено представление объекта управления в пространстве состояний (рисунок 1.1).

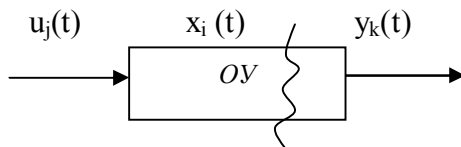


Рис. 1.1. Представление ОУ в пространстве состояний

Функции $f_i(i = \overline{1, n}), \varphi_k(k = \overline{1, r})$ представляют собой математическую запись тех физических законов, которым подчиняется поведение объекта управления.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \\ y_r = \varphi_r(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{array} \right. . \quad (1.1.6 \text{ a})$$

Систему уравнений (1.7) и (1.7а) часто называют *уравнениями наблюдений*. Запишем уравнения объекта в векторной форме следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X, U) \\ Y = \varphi(X) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{X} = f(X, U), \\ Y = \varphi(X, U) \end{cases}$$

где $f(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ – нелинейные векторные функции векторных аргументов (x, u) .

Дифференциальные уравнения, описывающие поведение элементов САУ, обычно бывают нелинейными. Нелинейные уравнения сложны для анализа и, тем более, для решения задач синтеза.

Поэтому удобнее сначала линеаризовать дифференциальные уравнения и получить уравнения первого приближения, которые значительно проще для исследования.

Пусть динамическая система описывается уравнениями $\dot{X} = f(X, U)$, $Y = \varphi(X, U)$.

Рассмотрим уравнения САУ в виде (1.6) и (1.7, а) и разложим нелинейные функции для x_i, y_k ($i=1, n, \quad k=1, r$) в ряд Тейлора в окрестности рабочего режима (*):

$$\begin{aligned} x_i^0 &\neq 0 & (i = \overline{1, n}); \\ u_j^0 &\neq 0 & (j = \overline{1, m}). \end{aligned} \quad (*)$$

Причем все слагаемые 2-го и выше порядка поместим в слагаемые R_i, F_k ($i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, r}$).

Тогда система уравнений состояния примет следующий вид:

[illegible]

Соответственно система уравнений наблюдения будет выглядеть следующим образом:

[illegible]

где
$$a_{ij} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right)^0, \quad b_{ij} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right)^0, \quad c_{kj} = \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right)^0, \quad d_{kj} = \left(\frac{\partial y_k}{\partial u_j} \right)^0$$
$$\forall \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \quad k = \overline{1, r}$$

представляют собой константы, определяемые как значения соответствующих частных производных, вычисленные в точке рабочего режима (*).

Если отклонения переменных x_i, u_j от их значений в рабочем режиме (*) $(x_i - x_i^0), (u_j - u_j^0)$ достаточно малы, то в (1.1.8) и (1.1.9) можно пренебречь нелинейными остатками R_i, F_i ввиду

В дальнейшем будем пользоваться именно этим описанием динамической системы.

Нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы

Если для заданной матрицы A некоторый вектор V удовлетворяет следующему уравнению:

$$AV = \lambda V,$$

то λ называется собственным числом матрицы A , (λ – скаляр); V – собственным вектором.

Решим задачу нахождения собственного числа и собственного вектора. Если перенесем переменные в левую часть последнего уравнения и вынесем вектор V вправо, то получим следующее уравнение:

$$(A - \lambda I)V = 0, \quad (1.1.14)$$

где 0 – нулевой вектор, т. е. $0' = |0_1, 0_2, \dots, 0_n|$.

Для того чтобы уравнение (1.15) имело решение, необходимо, чтобы определитель матрицы $(A - \lambda I)$ был равен нулю, т. е.

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (1.1.15)$$

Раскрывая определитель, получаем полиномиальное уравнение следующего вида:

$$\lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + a_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + a_2 \lambda + a_1 = 0, \quad (1.1.15a)$$

где $a_i (i = \overline{1, n})$ – коэффициенты характеристического полинома.

Полученное уравнение (1.1.15) полиномиальное относительно λ и называется *характеристическим уравнением* матрицы A . Корни характеристического полинома (1.16, а) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются *собственными значениями (собственными числами)* матрицы A .

Собственные векторы матрицы

Для всевозможных значений λ_i ($i = \overline{1, n}$) может быть найдено решение характеристического уравнения в виде вектора V . Пусть $V=V_i$ есть вектор, соответствующий λ_i . Тогда можно записать

$$(A - \lambda_i I)V_i = 0, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Здесь векторы V_i , соответствующие собственным значениям λ_i , называются *собственными векторами матрицы A* . Существуют несколько методов определения V_i ($i = \overline{1, n}$). Ниже рассмотрен один из способов определения собственных векторов.

Прямое определение собственных векторов

Пусть имеем линейное однородное уравнение

$$\dot{X} = AX \quad (1.1.16)$$

Заданы начальные условия $X(0) = X_0 \neq 0$.

Решение имеет вид

$$\begin{cases} X_1(t) = v_{11} \exp(\lambda_1 t) + \dots + v_{n1} \exp(\lambda_n t) \\ \dots \\ X_n(t) = v_{1n} \exp(\lambda_1 t) + \dots + v_{nn} \exp(\lambda_n t) \end{cases} \quad (1.1.17)$$

или в векторной форме

$$X(t) = V \exp(\lambda t) = V_1 \exp(\lambda_1 t) + \dots + V_n \exp(\lambda_n t),$$

$$\exp(\lambda t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \dots \\ e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} v_{11} & \dots & v_{n1} \\ v_{12} & \dots & v_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{1n} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix} = |V_1 \dots V_n|,$$

где v_{ij} – собственные векторы $(i, j = \overline{1, n})$, V_i – вектор столбец $\forall i = \overline{1, n}$.

Это так называемое каноническое преобразование, в котором матрицей линейного преобразования является матрица собственных векторов V . Возвращаясь к дифференциальному уравнению (1.1.16), можем записать

$$\dot{X} = AV \exp(\lambda t) = A[V_1 \exp(\lambda_1 t) + \dots + V_n \exp(\lambda_n t)] \quad (1.1.18)$$

Дифференцирование уравнения (1.1.17) по t дает

$$\dot{X} = \lambda_1 V_1 \exp(\lambda_1 t) + \dots + \lambda_n V_n \exp(\lambda_n t)$$

Так как левые части уравнений (1.1.16) и (1.1.18) равны, то и правые должны быть равны. Отсюда находим, что собственные векторы V_i удовлетворяют (для случая, когда все λ_i различны) следующему соотношению:

$$\lambda_i V_i \exp(\lambda_i t) = AV_i \exp(\lambda_i t).$$

Поделив обе части уравнения на $\exp(\lambda_i t) \neq 0$, получим

$$\lambda_i V_i = AV_i \text{ или } (A - \lambda_i I) V_i = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (1.1.19)$$

Следовательно, собственные векторы V_i (соответствующие собственным значениям λ_i) можно определить из уравнения (1.1.19). Если матрица A имеет " n " различных собственных значений, то собственные векторы V_i являются *линейно независимыми*. Так как матрица $(A - \lambda_i I)$ системы (1.1.13) имеет ранг, который не превосходит величины $(n-1)$, то каждый из собственных векторов V_i определяется с точностью до произвольного множителя $\forall i = \overline{1, n}$.

Процедура диагонализации или приведения к каноническому виду

Диагональная матрица A по определению равна

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Предположим, что матрица собственных векторов известна. Получим произведение

$$A V = [\lambda_1 V_1, \dots, \lambda_n V_n] \quad (\lambda_i = \text{const}).$$

Учитывая (1.1.19), запишем

$$V A = A (V_1, \dots, V_n) = A V,$$

откуда $A = V^{-1} A V$.

Эта процедура и называется диагонализацией матрицы A (т. е. получение диагональной матрицы A через исходную матрицу A).

Следует отметить, что диагонализация матрицы A осуществляется, если ее собственные значения различны.

Используя V как матрицу преобразования, получим следующие канонические уравнения состояния и наблюдения:

(производится замена переменных $x = Vx^*$)

$$\begin{aligned} V\dot{x}^* &= A V x^* + B u; \\ V^{-1} V \dot{x}^* &= V^{-1} A V x^* + V^{-1} B u, \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \Lambda x^* + B^* u \\ y^* = C^* x^* \end{cases} \quad (1.1.21)$$

Здесь $\Lambda = V^{-1} A V$, $B^* = V^{-1} B$, $C^* = C V$.

Через x^* обозначен преобразованный вектор состояния. В скалярной форме имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = \lambda_1 x_1^* + b_{11}^* u_1 + b_{12}^* u_2 + \dots + b_{1m}^* u_m, \\ \dot{x}_2^* = \lambda_2 x_2^* + b_{21}^* u_1 + b_{22}^* u_2 + \dots + b_{2m}^* u_m, \\ \vdots \\ \dot{x}_n^* = \lambda_n x_n^* + b_{n1}^* u_1 + b_{n2}^* u_2 + \dots + b_{nm}^* u_m. \end{cases}$$

Следовательно, каноническое преобразование приводит к системе уравнений состояния, в котором каждая производная (канонической) переменной состояния зависит только от соответствующей (канонической) переменной состояния и от входных сигналов.

1.2. Устойчивость систем по А.М. Ляпунову

Понятие устойчивости для динамических систем впервые ввел русский ученый А.М. Ляпунов.

В общем случае, рассматривая нелинейные системы, вводят понятия *устойчивости “в малом”*, *“в большом”* и *“в целом”*. Система *устойчива “в малом”*, если констатируют лишь факт наличия области устойчивости, но не определяют каким-либо образом ее границы. Систему называют *устойчивой “в большом”*, когда определяют границы области устойчивости, т. е. определены границы области начальных отклонений, при которых система возвращается в исходное состояние, и выяснено, что реальные начальные отклонения принадлежат этой области. В том случае, когда система возвращается в исходное состояние при любых начальных отклонениях, систему называют *устойчивой “в целом”*.

Понятие устойчивости распространяется на более общий случай, когда в качестве невозмущенного состояния рассматривают не положение равновесия системы, а ее движение.

Пусть состояние динамической системы определяется независимыми координатами $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. Движение системы определяется некоторым законом изменения координат: $x_{10}(t)$, $x_{20}(t)$, ..., $x_{n0}(t)$. Заданное движение называется *невозмущенным движением*. Приложение внешних сил к рассматриваемой системе вызовет отклонение действительного движения от заданного:

$$x_1(t) \neq x_{10}(t), x_2(t) \neq x_{20}(t), \dots, x_n(t) \neq x_{n0}(t).$$

Действительное движение системы называют *возмущенным движением*.

Определение. Заданное невозмущенное движение будет *устойчивым*, если в результате приложения внешних сил, которые затем снимаются, возмущенное движение по истечении некоторого времени войдет в заданную область:

$$|x_i(t) - x_{i0}(t)| \leq \xi_i \quad \forall \xi_i > 0, \quad \xi_i = \text{const}; \quad (i = \overline{1, n}).$$

Рассмотрим вопрос устойчивости более подробно. Впервые строгое определение устойчивости было дано русским ученым А.М. Ляпуновым в 1892 г.

Пусть динамическая система описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в форме Коши:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (i = \overline{1, n}); \quad (1.2.1)$$

$$\dot{x} = F(x);$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}; \quad F(x) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_n \end{pmatrix} - \text{нелинейные вектор-функции векторного аргумента.}$$

торного аргумента.

Если при $t = t_0$ заданы начальные значения x_{i0} , то решение может быть представлено в виде $x_i = x_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})^T$, $(i = \overline{1, n})$.

Пусть установившийся процесс (рабочий режим) в системе характеризуется координатами $x_i^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T$, $(i = \overline{1, n})$. Введем отклонения координат $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ $(i = \overline{1, n})$, характеризующие отклонения процесса от установившегося.

Систему уравнений (1.2.1) перепишем для отклонений:

$$\frac{d\Delta x_i}{dt} = f_i(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n), \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1.2.2)$$

где f_i – некоторые нелинейные функции. Уравнения (1.2.2) называются *уравнениями возмущенного движения*. Начальные значения отклонений Δx_{i_0} , $(i = \overline{1, n})$ носят названия *возмущений*. Решение возмущенного движения системы (1.2.2) для некоторых начальных отклонений $\Delta x_i = \Delta x_i(\Delta x_{10}, \Delta x_{20}, \dots, \Delta x_{n0}, t)$ представляет собой *возмущенное движение*.

А. М. Ляпунов дал следующие определения устойчивости.

Определение I. Невозмущенное движение $\Delta x_i = 0$ называется *устойчивым* по Ляпунову по отношению к переменным x_i , если при всяком заданном положительном числе $\xi > 0$, как бы мало оно ни было, возможно выбрать другое положительное число $\gamma > 0$ такое, что для всех возмущений Δx_{i0} , удовлетворяющих условию

$$\|\Delta x_{i0}\| < \gamma_i, \quad (1.2.3)$$

возмущенное движение (1.2.2) будет для времени $t > t_0$ удовлетворять неравенству:

$$\|\Delta x_i\| < \xi_i \quad (1.2.4)$$

Здесь под нормой будем понимать

$$\|\Delta x_i\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}.$$

Определение 2. Невозмущенное движение $\Delta x_i = 0$ называется *асимптотически устойчивым*, по Ляпунову, если в дополнение к первому определению выполняется условие:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x_i(t) = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (1.2.5)$$

Определение 3. Невозмущенное движение называется *неустойчивым*, по Ляпунову, если существует какой-либо момент времени $t = t_1 > t_0$, при котором нарушается условие (1.2.4), т. е. $\|\Delta x_i\| \geq \xi_i \quad (i = \overline{1, n})$.

Геометрическая интерпретация

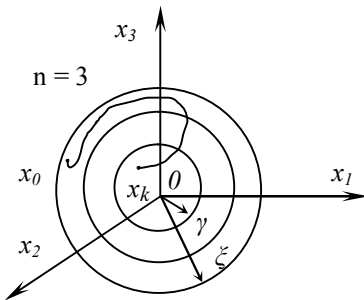


Рис. 1.2, а. Движение системы устойчиво

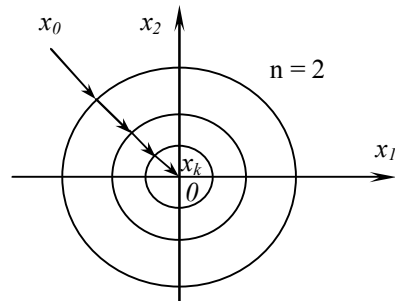


Рис. 1.2, б. Движение системы асимптотически устойчиво

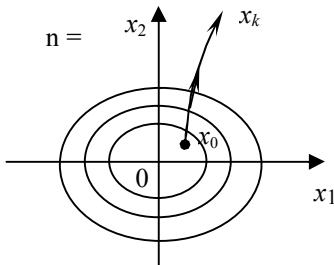


Рис. 1.2, в. Движение неустойчивой системы

Физическое понятие устойчивости. Устойчивость является одним из необходимых условий, обеспечивающих нормальное функционирование динамической системы управления. Линейная система устойчива, если ее реакция на любое ограниченное воздействие также ограничена, и неустойчива, если ее реакция на ограниченное воздействие неограниченна.

Теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению (первый метод Ляпунова)

Пусть САУ в пространстве состояний описывается дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.2.6)$$

здесь $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор отклонений.

Геометрическая трактовка условия устойчивости по Ляпунову в пространстве трех переменных (рис. 1.2, а): если при возмущениях, не выведших точку $B_0(x_{10}, x_{20}, x_{30})$ за границу сферы γ , возмущенное движение будет таково, что точка не выйдет за границу сферы ξ (B_k), то оно устойчиво.

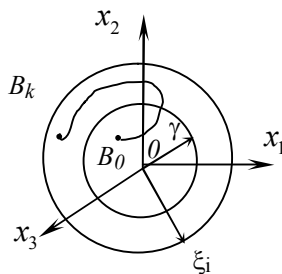


Рис. 1.2, а. Движение системы устойчиво

Пусть динамической системе соответствует система уравнений (1.2.1). Если нелинейные функции $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ допускают разложение в степенные сходящиеся ряды, то уравнения вида (1.2.6) после этого разложения принимают следующий вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + R_i(x_1, \dots, x_n),$$

где $R_i(x_1, \dots, x_n)$ – функции, не содержащие членов ниже второго порядка отклонений. Если отклонения достаточно малы, то пренебрегая R_i , получаем *линеаризованные уравнения*, называемые *уравнениями первого приближения*:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.2.7)$$

В матричной форме $\dot{X} = AX$. А почему не $\dot{X} = AX + BU$? Речь идет об устойчивости, следовательно, $U(t) \equiv 0$.

Характеристическое уравнение системы

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (1.2.8)$$

где λ – собственные числа матрицы A или корни характеристического уравнения:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda_i = \alpha_i \pm j\beta_i.$$

Для исследования устойчивости принципиально важны следующие две теоремы Ляпунова А.М.

ТЕОРЕМА 1. Если вещественные части всех корней λ_i ($i = \overline{1, n}$) характеристического уравнения (1.2.8) первого при-

ближения (1.2.7) отрицательны, то невозмущенное движение $\Delta x_i = 0$ асимптотически устойчиво, т. е. если $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x_i(t) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Если среди корней λ_i характеристического уравнения (1.2.8) первого приближения (1.2.7) имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво, т. е. если $\operatorname{Re} \lambda_k(A) > 0$, $k \neq i$, хотя $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$ и $\|\Delta x_{i_0}\| < \varepsilon_i \quad \forall i = \overline{1, n}$.

Замечание. Если среди корней характеристического уравнения имеется один или несколько нулевых корней, а вещественные части остальных корней отрицательны, то этот случай называется критическим.

Система уравнений в критическом случае называется нейтрально устойчивой системой.

В критическом случае устойчивость невозмущенного движения не может быть оценена по первому приближению (1.2.7).

Итак, в соответствии с теоремами Ляпунова:

1) Движение линейной системы устойчиво, причем устойчиво асимптотически, если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, т. е. $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$.

2) Движение линейной системы неустойчиво, если среди корней ее характеристического уравнения есть хотя бы один корень с вещественной положительной частью $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0 \quad \forall i = \overline{1, n-1}; \operatorname{Re} \lambda_k(A) > 0$.

3) Движение линейной системы нейтрально устойчиво, если среди ее корней характеристического уравнения один нулевой, а у остальных – отрицательные вещественные части $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0 \quad \forall i = \overline{1, n-1}; \operatorname{Re} \lambda_k(A) = 0, i \neq k$.

Теоремы Ляпунова имеют огромное значение, т. к. они позволяют судить об устойчивости нелинейных систем по их линеаризованным уравнениям (уравнениям первого приближения). Это первый метод Ляпунова, позволяющий судить об устойчивости систем.

Устойчивость в малом, большом и целом

В нелинейных системах движение или равновесие, устойчивое в малом, может оказаться неустойчивым при больших отклонениях. Тогда первый метод Ляпунова для исследования устойчивости на основе уравнений линейного приближения недостаточен для полного исследования устойчивости в нелинейных системах. Рассмотрим определение устойчивости нелинейных динамических систем.

Пусть математическое описание *нелинейной* САУ задано в виде

$$\dot{x} = f(x),$$

где $f(0) = 0$, $t = t_0$, $x(t_0) = x_0$, $x_0 \neq 0$.

Нелинейную систему можно представить при малых отклонениях в линейной форме ($u(t) \equiv 0$) следующим образом:

$$\dot{x} = Ax,$$

где, $x \in R^n$, $A(n \times n)$ – матрица коэффициентов;

координаты равновесия (покоя)

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если точка равновесия $X = 0$ устойчива, то вокруг начала координат существует область притяжения траекторий – область L (рис. 1.3).

Если известно лишь то, что область притяжения существует, то считают, что состояние равновесия устойчиво “*в малом*”.

Устойчивость “*в малом*” констатирует факт наличия устойчивости, но не определяет величину начальных отклонений.

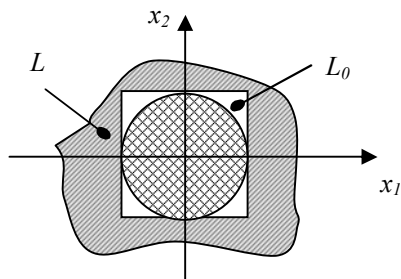


Рис. 1.3. Устойчивость “в малом”

Устойчивость “в большом”. Будем считать, что в нашей системе известна рабочая область функционирования системы L_0 (в отклонениях)

$$\dot{x} = f(x).$$

Причем $|x| \leq L_0$ – в процессе функционирования, т. е. в области рабочих отклонений системы.

Если область L_0 целиком принадлежит области L , то равновесие устойчиво “в большом” (рис. 1.5). Если часть области находится вне области L , то равновесие устойчиво “в малом”, но неустойчиво “в большом” (рис. 1.4).

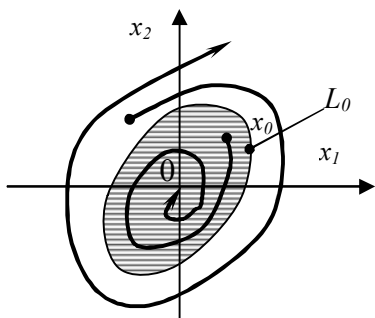


Рис. 1.4. Устойчивость системы “в малом”, неустойчивость “в большом”

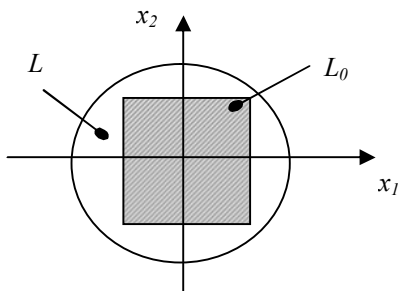


Рис. 1.5. Устойчивость системы “в большом”

Любая точка внутри заштрихованной области придет в начало координат.

Пример 1.1. Пусть имеется нелинейная система. Известна рабочая область функционирования системы L_0 , которая содержит точку $X = 0$ (начало координат),

$$L_0 = \{x : \lim_{x \rightarrow 0} x(t, t_0, x_0) = 0\}.$$

Тогда множество переменных состояния в L_0 при любых значениях x приводит систему к началу координат.

Устойчивость “в большом” будет иметь место, если $L_0 \in L$, где L_0 – область рабочих отклонений системы.

Если область L распространяется на все пространство, то равновесие называют устойчивым “в целом” (рис. 1.6).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ f(0) &= 0, \end{aligned}$$

т. е. область L обязательно включает начало координат.

Областью устойчивости L будет все пространство переменных состояния. Для *линейной* системы устойчивость “в целом” показана на рис. 1.6.

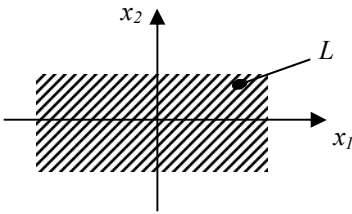


Рис. 1.6. Устойчивость «в целом»

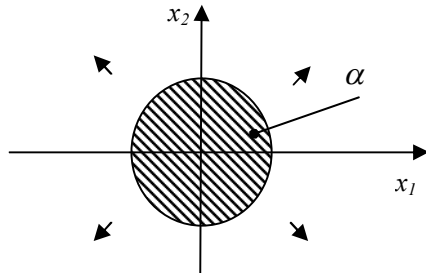


Рис. 1.7. Устойчивость линейной системы

Если $|x_0| \leq \alpha$, где $\alpha = const$, то динамическая система будет устойчива всюду (рис. 1.7).

Для исследования устойчивости “в большом” и “в целом” используют специальные методы, из которых ниже кратко будет рассмотрен второй (прямой) метод А.М. Ляпунова.

Второй (прямой) метод Ляпунова

Используя второй метод Ляпунова, можно судить о свойствах системы, не зная ее решения, а имея только уравнение этой системы. Второй (прямой) метод Ляпунова основывается на построении специальных функций Ляпунова, позволяющих получить достаточные условия устойчивости равновесия “в большом”.

В дальнейшем понадобятся следующие сведения: *знакоопределенные, знакопостоянные и знакопеременные функции*.

Рассмотрим вещественное n -мерное пространство R^n ; вектор, принадлежащий ему, будем обозначать $x \in R^n$.

Пусть нелинейная система описывается уравнением в общем виде

$$\dot{x} = f(x),$$

заданы начальные условия $f(0) = 0$.

Введем в рассмотрение скалярную функцию $V(x)$ векторного аргумента. В пространстве R^n рассмотрим некоторую область D , которая включает в себя обязательно начало координат. Область D – это область нормального функционирования САУ (рис. 1.8).

Определение 1. Функция $V(x)$ называется *знакоопределенной* в области D , если в этой области она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} V(x) \neq 0, & \text{если } x \neq 0, \\ V(x) = 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Определение 2. Функция $V(x)$ называется *знакоопределенной положительной* в области D , если в этой области она удовлетворяет следующим условиям (рис. 1.9, а):

$$\begin{cases} V(x) > 0, & \text{при } x \neq 0, \\ V(x) = 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Определение 3. Функция $V(x)$ называется *знакоопределенной отрицательной* в области D , если в этой области она удовлетворяет следующим условиям (рис. 1.9, б):

$$\begin{cases} V(x) < 0, & \text{при } x \neq 0, \\ V(x) = 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

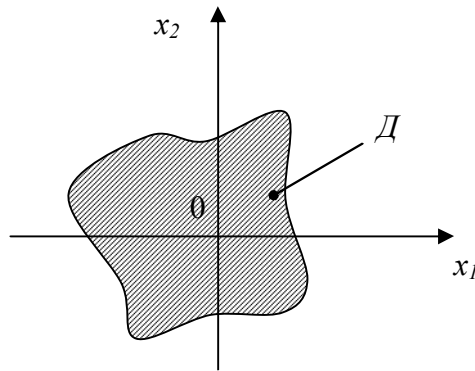


Рис. 1.8. Область нормального функционирования системы

Пример 1.2

Пусть $x \in R^2$, $V(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2$
(рисунок 1.9, а)

Пример 1.3

Пусть $x \in R^2$, $V(x) = -2x_1^2 - 5x_2^2$
(рисунок 1.9, б)

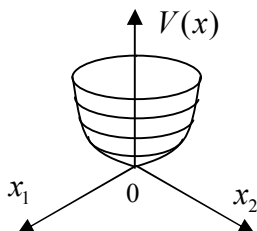


Рис. 1.9, а. Функция знакоопределенная положительная

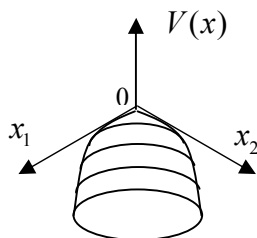


Рис. 1.9, б. Функция знакоопределенная отрицательная

Определение 4. Функция $V(x)$ называется *знакопостоянной* в области D , если в этой области она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} V(x) \neq 0, & \text{при } x \neq 0, \\ V(x) = 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Определение 5. Функция $V(x)$ называется *знакопостоянной положительной* в области D , если в этой области она удовлетворяет следующим условиям (рисунок 1.9, а):

$$\begin{cases} V(x) \geq 0, & \text{при } x \neq 0, \\ V(x) = 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Определение 6. Функция $V(x)$ называется *знакопостоянной отрицательной* в области D , если в этой области она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} V(x) \leq 0, & \text{при } x \neq 0, \\ V(x) = 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Пример 1.4

Пусть $x \in R^1$, $V(x) = 2x^2$
(рисунок 1.9, с)

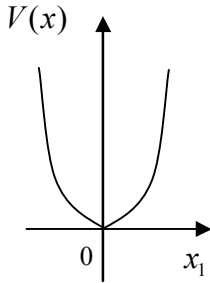


Рис. 1.9, с. Функция знакоопределенная положительная

Пример 1.5

Пусть $x \in R^2$, $V(x) = x_1^2 + x_2^2$
(рисунок 1.9, d)

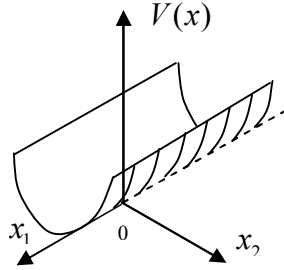


Рис. 1.9 d. Функция знакопостоянная положительная

Пример 1.6. Пусть $x \in R^n$.

Тогда следующие функции будут

$V(x) = x^T x$ — знакоопределенной положительной;

$V(x) = -x^T x$ — знакоопределенной отрицательной.

Пример 1.7. Пусть $x \in R^1$ (рис. 1.9, е).

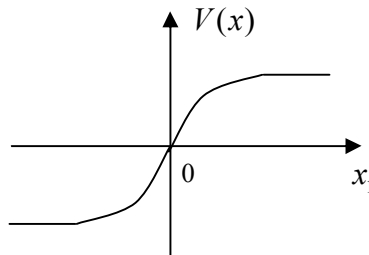


Рис. 1.9, е. Функция знакопеременная

Определение 7. Функция $V(x)$ называется *знакопеременной* в области D , если в этой области она может принимать значения обоих знаков $-a_1$, $V(x) > 0$ и $V(x) < 0$, при $x \neq 0$ (рис. 1.9, е).

Теоремы второго (прямого) метода Ляпунова

Пусть нелинейная САУ (рис. 1.10) описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{x} = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.2.9, a)$$

$$u = f(y) \% ; \quad (1.2.9, b)$$

$$f(0) = 0. \quad (1.2.9, c)$$

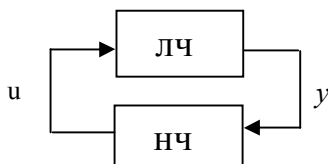


Рис. 1.10. Представление нелинейной системы

Пусть линейная часть системы описывается системой дифференциальных уравнений в форме (1.2.9, а), заданы начальные условия $x(0) = 0$; нелинейная часть системы описывается уравнением (1.2.9, b); уравнение (1.2.9, c) показывает, что рабочая область D содержит в себе начало координат.

Здесь x – отклонение от установившегося движения, т. е. динамическая система имеет невозмущенное движение от начального условия $t=t_1 > t_0$ или рабочий режим. Пусть $V(x)$ – функция Ляпунова.

ТЕОРЕМА 1. Если для системы (1.2.9, а) существует знакоопределенная положительная функция $V(x)$ в области D ,

полная производная которой по времени $\frac{dV}{dt}$, взятая в силу системы (1.2.9, а), является функцией знакоопределенной отрицательной, то невозмущенное движение $x = 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Если функция $V(x)$ удовлетворяет условиям определения 2, т. е. функция $V(x)$ является знакоопределенной положительной:

$$\begin{cases} V(x) > 0 & \text{при } x \neq 0 \\ V(x) = 0 & \text{при } x = 0 \end{cases},$$

а ее полная производная $\frac{dV}{dt}$ является знакоопределенной отрицательной, т. е.

$$\frac{dV}{dt} < 0 \quad \text{при } x \neq 0,$$

$$\text{где } \frac{dV}{dt} \triangleq (\nabla V)^T \frac{dx}{dt} = (\nabla V)^T f(x, t),$$

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad - \text{градиент скалярной функции } V(x),$$

$f(x, t)$ – правая часть уравнения (1.2.9, а),

то невозмущенное движение асимптотически устойчиво по Ляпунову, т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ при $t \rightarrow \infty$ (рис. 1.11).

ТЕОРЕМА 2. Если для системы (1.2.9, а) существует в области D знакоопределенная положительная функция $V(x)$, полная производная которой по времени $\frac{dV}{dt}$, взятая в силу системы (1.2.9, а), является функцией знакпостоянной отрицательной, то невозмущенное движение $x = 0$ устойчиво по Ляпунову.

Если $\begin{cases} V(x) > 0 \\ \frac{dV}{dt} \leq 0 \end{cases}$, то невозмущенное движение просто устойчиво по Ляпунову (рисунок 1.12), причем

$$|x_k| \geq \alpha, \alpha > 0,$$

где x_k — конечное значение, которое не доходит до начала координат.

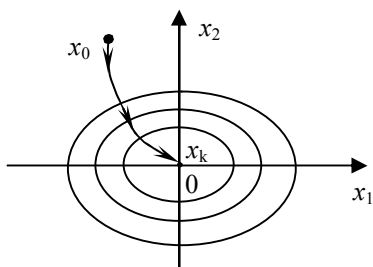


Рис. 1.11. Движение системы асимптотически устойчиво

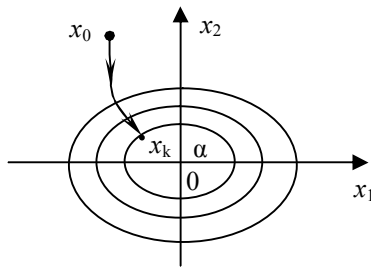


Рис. 1.12. Движение системы устойчиво

ТЕОРЕМА 3. Если для системы (1.2.9а) в области D существует знакоопределенная положительная функция $V(x)$, полная производная которой по времени, взятая в силу системы (1.2.9, а) в некоторой части области D , содержащей в себе начало координат, совпадает по знаку со знаком функции $V(x)$, то

невозмущенное движение $x = 0$ неустойчиво по Ляпунову.

Если $\begin{cases} V(x) > 0 \\ \frac{dV}{dt} > 0 \end{cases}$, то невозмущенное движение неустойчиво по

Ляпунову (рис. 1.13).

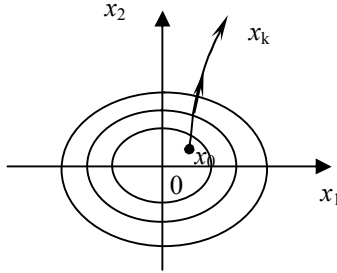


Рис. 1.13. Движение системы неустойчиво по Ляпунову

Задача о нахождении функции Ляпунова, которая для конкретной системы дала бы необходимое и достаточное условие устойчивости, весьма сложна.

Квадратичная форма

Пусть задана линейная динамическая система следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u(t) \equiv 0.$$

Рассмотрим свободную систему вида:

$$\dot{x} = Ax.$$

Выберем функцию следующего вида:

$$V = x^T P x, \quad (1.2.10)$$

где $P(n \times n)$ – постоянная матрица; причем $P^T = P$ – симметрическая матрица, т. е. $P_{ij} = P_{ji} \quad \forall i, j = \overline{1, n}$.

Квадратичную форму (вида 1.2.10) будем рассматривать в качестве функции Ляпунова, но прежде рассмотрим свойства квадратичной формы.

Свойства квадратичной формы

Критерии Сильвестра

Критерий 1. Квадратичная форма является знакоопределенной положительной, если все главные диагональные миноры матрицы P положительны.

Матрица $P > 0$ – матрица P положительно определенная, т. е.

$$P_{11} > 0; \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} > 0; \dots \det P > 0.$$

Критерий 2. Квадратичная форма является знакоопределенной отрицательной, если знаки главных диагональных миноров чередуются, начиная с отрицательного знака.

$P < 0$ означает, что матрица P отрицательно определенная, т. е.

$$P_{11} < 0; \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} > 0; \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} < 0 \text{ и т. д.,}$$

т. е. знаки чередуются, начиная с отрицательного знака.

Построение функции Ляпунова для линейных систем

Рассмотрим наряду с системой (1.2.9а) систему, транспонированную к ней:

$$(\dot{x})^T = x^T A^T.$$

Матрицу P выберем знакоопределенной положительной, т. е. $P > 0$. Возьмем производную от функции Ляпунова вида (1.2.10)

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x = x^T (A^T P + P A) x = -x^T Q x,$$

где $Q(n \times n)$ – симметрическая матрица, т. е. $Q = Q^T$, кроме того, $Q > 0$ – знакоопределенная положительная матрица. Следовательно,

$$A^T P + P A = -Q. \quad (1.2.11)$$

Итак, уравнение (1.2.11) есть *матричное уравнение Ляпунова*. Решением матричного уравнения является матрица P .

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы матрица A была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы матричное уравнение (1.2.11) имело положительно-определенное решение $P > 0$ при любой положительно-определенной матрице $Q > 0$.

Матричное уравнение (1.2.11) сводится к системе $\frac{(n+1)n}{2}$ линейных алгебраических уравнений, где n – порядок системы.

Пример 1.8. Пусть задана линейная динамическая система 2-го порядка следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = -5x_2 \end{cases},$$

где $x \in R^2$.

Задана функция Ляпунова $V(x)$ следующего вида:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

или

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2}x^T P x, \text{ где } P = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}.$$

Определить устойчивость системы по Ляпунову.

Алгоритм и решение

1) Заданная функция $V(x)$ – знакоопределенная положительная, т. к. $\begin{cases} V(x) > 0 & \text{при } x \neq 0 \\ V(x) = 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$.

2) Следует определить знак ее полной производной.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -2x_1^2 - 5x_2^2 = -(2x_1^2 + 5x_2^2), \\ \frac{dV}{dt} &\stackrel{\Delta}{=} (\nabla V)^T \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt}; \\ \frac{dV}{dt} &= -(2x_1^2 + 5x_2^2) < 0. \end{aligned}$$

Вывод: система *асимптотически устойчива* при любых значениях x_1, x_2 (рис. 1.11).

Пример 1.9. Пусть задана линейная динамическая система 2-го порядка, следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases},$$

где $x \in R^2$.

Задана функция Ляпунова вида

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) > 0.$$

Определить устойчивость системы по Ляпунову.

Решение:

$$\frac{dV}{dt} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2 < 0 \quad \text{при } x_2 > x_1.$$

Вывод: система *асимптотически устойчива* по Ляпунову при условии $x_2 > x_1$ (рис. 1.11).

Этот метод был обобщен американским ученым Р. Калманом.

Теорема Калмана. Вещественные части характеристических корней матрицы A будут меньше нуля $\alpha < 0$ тогда и только тогда, когда для любой симметричной положительно определенной матрицы Q существует симметричная положительно определенная матрица P , которая является единственным решением уравнения следующего вида:

$$-2\alpha P + A^T P + P A = -Q,$$

где $\operatorname{Re} \lambda_i(A) \leq \alpha_i$; $\alpha = \text{const}$.

Пример 1.10. Пусть задана линейная динамическая система 2-го порядка, следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 2x_2 \end{cases}.$$

Задана функция Ляпунова

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Определить устойчивость системы по Ляпунову.

Алгоритм и решение

1) Определим условия, при которых функция Ляпунова знакоопределенная отрицательная.

$$\frac{dV}{dt} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1(5x_1 - 3x_2) + x_2(-4x_1 + 2x_2) < 0;$$

$$5x_1^2 - 3x_1x_2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 < 0;$$

$$5x_1^2 \neq 0 \Rightarrow \frac{5x_1^2}{5x_1^2} - \frac{7x_1x_2}{5x_1^2} + \frac{2x_2^2}{5x_1^2} < 0.$$

2) Введем обозначение $\frac{x_2}{x_1} = z$.

$$\frac{2}{5}z^2 - \frac{7}{5}z + 1 < 0;$$

$$z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{5}{2} < 0;$$

$$z_{1,2} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{5}{2}};$$

$$z_{1,2} = \frac{7}{4} \pm \frac{3}{4}; \quad z_1 = 1, z_2 = \frac{10}{4}.$$

Вывод: система *асимптотически устойчива* по Ляпунову при выборе переменных в следующем диапазоне $x_1 \in (0.4x_2, x_2)$ (рис. 1.11).

Методы построения функций Ляпунова для нелинейных систем

Задача о нахождении функции Ляпунова для нелинейных систем весьма сложна и иногда практически неразрешима. Ниже представлены два подхода, два метода построения функции Ляпунова для нелинейных систем.

1. Метод Красовского Н.Н.

Рассмотрим нелинейную систему, математическая модель которой записана в матричной форме:

$$\dot{x} = X(x), \quad (1.2.12)$$

где $X(x)$ – векторная функция векторного аргумента; она удовлетворяет условию $X(0) = 0$, т. е. начало координат является рабочей точкой.

Выберем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы *относительно производных*

$$V = X^T P X. \quad (1.2.13)$$

Причем, $\lambda_i(P) > 0, (i = \overline{1, n})$ – собственные значения матрицы P . Матрица P – симметричная матрица $P^T = P$. Необходимо наложить условие на симметричную матрицу Q , равную

$$Q = \left(P \frac{\partial X}{\partial x} \right)^T + \left(P \frac{\partial X}{\partial x} \right).$$

Симметричная матрица Q должна удовлетворять критерию 2 Сильвестра – условию *знакоопределенной отрицательности* (знаки главных диагональных миноров чередуются, начиная с отрицательного знака).

Если задана векторная функция $X(x)$, то чтобы найти ее производную, следует продифференцировать ее по правилам сложной функции:

$$\dot{X}(x) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \dot{x}.$$

Итак, функция Ляпунова выбрана вида (1.2.13), ее полная производная в силу уравнений (1.2.12) будет иметь следующий вид:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{X}^T PX + X^T P \dot{X} = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \dot{x} \right]^T PX + X^T P \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \dot{x} = \dot{x}^T \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^T PX + X^T P \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \dot{x} \Big|_{\dot{x} = X(x)} = X^T(x)$$

Запишем последнее уравнение через производную X и вынесем за скобки влево X^T , а вправо X :

$$\begin{aligned} X^T \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^T PX + X^T P \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) X &= X^T \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^T P + P \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \right] X = \\ &= X^T \left[\left(P \frac{\partial X}{\partial x} \right)^T + \left(P \frac{\partial X}{\partial x} \right) \right] X = X^T Q X. \end{aligned}$$

Так как по условию матрица $Q < 0$, то $\frac{dV}{dt} = X^T Q X < 0$.

Функция Ляпунова была выбрана $V = X^T P X > 0$. Следовательно, система асимптотически устойчива по Ляпунову, т. к.

$$V(x) > 0, \quad \frac{dV}{dt} < 0.$$

II. Метод переменного градиента или метод Шульца-Гибсона

Пусть нелинейная САУ описывается уравнением следующего вида:

$$\dot{x} = f(x);$$

пусть $f(0) = 0$ – некоторая рабочая точка, соответствующая невозмущенному движению $x = 0$.

Задан градиент скалярной функции: $\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^T$

или

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \\ \dots \\ \nabla V_n \end{bmatrix}.$$

В результате выбора функции $V(x)$ хорошо бы получить отрицательную производную

$$\frac{dV}{dt} < 0.$$

При этом следует учесть, что *векторное поле градиента функции Ляпунова должно быть потенциальным*, т. е.

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \nabla V_k}{\partial x_i} \quad \forall i \neq k, \quad i, k = \overline{1, n}.$$

Эти функции задаются в виде одномерных или многомерных полиномов.

Функция Ляпунова находится тогда следующим образом:

$$V = \int (\nabla V)^T dx = \int \nabla V_1(\xi_1, 0, 0, \dots, 0) d\xi_1 + \int \nabla V_2(x_1, \xi_2, 0, 0, \dots, 0) d\xi_2 + \dots + \int \nabla V_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_n) d\xi_n. \quad (*)$$

Получив функцию Ляпунова, всегда можно найти ее полную производную.

Пример 1.11

Пусть уравнения динамики системы в пространстве состояний заданы следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2^2 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 \end{cases}; \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Определить устойчивость системы по Ляпунову.

Алгоритм и решение

1) Записывается градиент функции Ляпунова в форме Шульца-Гибсона следующим образом:

$$\nabla V = \begin{vmatrix} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 \end{vmatrix}. \quad (**)$$

2) Определяется полная производная функции Ляпунова:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \nabla V^T \dot{x} = \nabla V_1 \dot{x}_1 + \nabla V_2 \dot{x}_2 = (\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2)(-x_1 x_2^2 + x_2) - (\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2)x_1^3 = \\ &= -\alpha_{11} x_1^2 x_2^2 + \alpha_{11} x_1 x_2 - \alpha_{12} x_1 x_2^3 + \alpha_{12} x_2^2 - \alpha_{21} x_1^4 - \alpha_{22} x_1^3 x_2 < 0 \end{aligned}$$

3) Необходимо определить α_{ij} такие, чтобы $\dot{V}(x) < 0$.

Пусть $\alpha_{11}=+1$; $\alpha_{12}=-\alpha_{21}$; $\alpha_{12}=-1$; $\alpha_{21}=+1$.

Тогда

$$\frac{dV}{dt} = -x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 (1 + x_2^2) - x_2^2 - x_1^4 - \alpha_{22} x_1^3 x_2 < 0.$$

4) Слагаемые $-x_1^2 x_2^2 < 0$
 $-(x_1^2 + x_2^4) < 0$ при любых $x_i \neq 0$ ($i=1,2$).

Следовательно, надо

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 (1 + x_2^2 - \alpha_{22} x_1^2) = 0. \\ \text{Так как} \quad & x_1 \neq 0; x_2 \neq 0, \text{ то} \\ & 1 + x_2^2 - \alpha_{22} x_1^2 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда} \quad \alpha_{22} = \frac{1 + x_2^2}{x_1^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2}.$$

5) При таком выборе коэффициентов α_{ij} получим

$$\frac{dV}{dt} = -x_1^2 x_2^2 - x_1^2 - x_2^4 < 0.$$

6) Чтобы определить функцию Ляпунова $V(x)$, подставим найденные коэффициенты в градиент (**):

$$\nabla V = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + \frac{x_2}{x_1^2} + \frac{x_2^3}{x_1^2} \end{pmatrix}.$$

7) Используя выражение (*), получим функцию Ляпунова следующего вида:

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^x \nabla V^T dx = \int_0^{x_1} \nabla V_1(\xi_1, 0) d\xi_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, \xi_2) d\xi_2 = \\ &= \int_0^{x_1} \xi_1 d\xi_1 + \int_0^{x_2} \left(x_1 + \frac{\xi_2}{x_1^2} + \frac{\xi_2^3}{x_1^2} \right) d\xi_2 = \frac{1}{2} x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2 x_1^2} + \frac{x_2^4}{4 x_1^2} > 0. \end{aligned}$$

Вывод: исходная система асимптотически устойчива по

$$\text{Ляпунову, т. к. } \begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) < 0 \end{cases}$$

Существуют различные формы функции Ляпунова, предложенные А.И. Лурье, Г. Сеге, В.И. Постниковым.

Следует еще раз подчеркнуть основные выводы:

- a) $\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) < 0 \end{cases}$ – функция должна быть знакоопределенной положительной;
– производная должна быть знакоопределенной отрицательной, что обеспечит системе *асимптотическую устойчивость по Ляпунову*.
- b) $\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) \leq 0 \end{cases}$ – функция должна быть знакоопределенной положительной;
– её полная производная может быть знакопостоянной отрицательной, что обеспечит системе *устойчивость по Ляпунову*.
- c) $\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) > 0 \end{cases}$ – обе функции знакоопределенные положительные, что принесет системе *неустойчивость по Ляпунову*.

1.3. Понятие об управляемых объектах. Критерии управляемости

При анализе и синтезе линейных систем управления важную роль играет понятие управляемости. ОУ может обладать или не обладать им. Интуитивно ясно, что если ОУ обладает свойством управляемости, то для него можно синтезировать закон управления. Без учета свойств управляемости можно допустить ошибку не только в определении порядка объекта, но и в определении устойчивости системы и др.

Впервые понятие управляемости было введено американским ученым Ричардом Калманом (1960 г.).

Определение управляемости. Пусть система описывается уравнениями:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.3.1)$$

$$y = Cx \quad , \quad (1.3.2)$$

где $x(n*1)$ – вектор состояния; $u(m*1)$ – вектор управления; $y(r \times 1)$ – вектор выходных переменных или вектор измерений; $A(n \times n)$ – матрица, характеризующая ОУ, $B(n \times m)$ – матрица, характеризующая канал управления, $C(r \times n)$ – матрица наблюдений.

Определение. Система (1.3.1) – (1.3.2) называется *вполне управляемой*, если для нее существует ограниченный входной сигнал $u(t)$, переводящий ее из любого начального состояния X_0 в любое наперед заданное конечное состояние X_k за конечное время.

Критерии управляемости

Квадратная матрица $V(n \times n)$, образованная собственными векторами исходной матрицы A ,

$$V = (V_1, V_2, \dots, V_n); \quad (A - \lambda_i I)V_i = 0 \quad \forall i = \overline{1, n},$$

называется *модальной* для матрицы A .

При помощи линейного преобразования координат $X = V \cdot X^*$, где V – модальная матрица для исходной матрицы A , преобразуем уравнения состояния системы и наблюдения (1.3.1), (1.3.2), как показано выше, к диагональному виду

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \Lambda x^* + B^* u \\ y^* = C^* x^* \end{cases}, \quad \begin{matrix} (1.3.3) \\ (1.3.4) \end{matrix}$$

где $\Lambda = V^{-1}AV$, $B^* = V^{-1}B$, $C^* = CV$.

ствующую переменную состояния не может повлиять выбор управления. Следовательно, это состояние системы неуправляемо.

Однако, если ни одна из строк матрицы B^* не равна нулю, то можно доказать, что любое состояние $X_i^*(t_0)$ может быть переведено в любое состояние $X_i^*(t_1)$, т. е. система управляема. Доказательство строится на основе решения уравнения (1.3.3). Решение этого дифференциального уравнения состоит из суммы общего и частного

$$X_i^*(t_1) = e^{\lambda_i(t_1-t_0)} X_i^*(t_0) + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_1} e^{\lambda_i(t_1-\tau)} b_{ij}^* u_j(\tau) d\tau, \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (1.3.5)$$

Всегда можно так определить $X_i^*(t_0) = 0$, $t_0 = 0$, чтобы получить

$$X_i^*(t_1) = \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_1} e^{\lambda_i(t_1-\tau)} b_{ij}^* u_j(\tau) d\tau, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Следовательно, уравнение (1.3.5) показывает, что если все строки в матрице B^* линейно независимы, то можно потребовать, чтобы управление U_j ($\forall i = \overline{1, n}$) было постоянным внутри интервала интегрирования, и решать “ n ” уравнений с “ n ” неизвестными U_j , чтобы удовлетворить “ n ” произвольным различным $X_i^*(t_1)$ ($\forall i = \overline{1, n}$).

Пример 1.12. Пусть задана система

$$\dot{X} = AX + BU,$$

где $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Необходимо установить: управляема ли система по критерию Е. Гильберта.

Алгоритм и решение

1) Матрица преобразования (собственных векторов) для диагонализации матрицы A и обратная матрица найдены ранее

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}; \quad \Lambda = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$B^* = V^{-1}B = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2) Тогда можно каноническую систему

$$\dot{X}^* = \Lambda X^* + B^*U$$

записать в скалярной форме следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{X}_1^* = \lambda_1 X_1^* + b_{11}^* u_1, & \text{т.е. } \dot{X}_1^* = -X_1^*, \\ \dot{X}_2^* = \lambda_2 X_2^* + b_{21}^* u_1, & \text{т.е. } \dot{X}_2^* = 5X_2^* + u_1. \end{cases}$$

$$\text{Здесь } \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вывод: на состояние $\dot{X}_1^*$ не влияет входной сигнал – управление, следовательно, система неуправляема.

Рассмотрим другой критерий управляемости, не требующий преобразования системы уравнений к диагональному виду.

Критерий управляемости Р. Калмана. Пусть система описывается уравнением:

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

где u – скалярное управление, т. е. $u \in R^1$.

В начальный момент времени $t = 0$ состояние системы задано $x(0) \neq 0$. Желаемое конечное состояние системы в конечный момент времени $t = t_k$ ($t_k > 0$) обозначим как $x(k)$.

Управляемость определяет условия, при которых управление переводит систему из начального состояния $x(0)$ в конечное $x(k)$. Это означает, что для $t = 0, 1, 2, \dots, k$ справедливы следующие соотношения:

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k), \text{ т.е.}$$

$$x(1) = Ax(0) + bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + bu(1) = A(Ax(0) + bu(0)) + bu(1) = A^2x(0) + Abu(0) + bu(1)$$

$$x(3) = Ax(2) + bu(2) = A^3x(0) + A^2bu(0) + Abu(1) + bu(2)$$

.....

$$x(k) = A^kx(0) + A^{k-1}bu(0) + A^{k-2}bu(1) + \dots + A^0bu(k-1).$$

Естественно, что $A^0 = A^{k-k}$.

Систему уравнений можно записать следующим образом:

$$x(k) - A^kx(0) = (A^{k-1}b, A^{k-2}b, \dots, b) \cdot \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \dots \\ u(k-1) \end{pmatrix}. \quad (1.3.6)$$

Для того, чтобы система уравнений (1.3.6) имела решение относительно переменных $u(0), u(1), \dots, u(k-1)$, матрица $(A^{k-1}b, A^{k-2}b, \dots, b)$ должна иметь ранг, равный k . Отсюда следует другой критерий управляемости.

Формулировка критерия управляемости Р. Калмана. Для полной управляемости динамической системы необходимо и достаточно, чтобы ранг блочной матрицы управляемости

$$K_u = (b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b)$$

был равен порядку системы “ n ”, т. е. $\text{rang } K_u = n$.

Сформулированный критерий легко распространить на системы с векторным управлением. Пусть $u(l \times l)$ – вектор управления. Тогда матрица управляемости K_u размера $(n \times ln)$ имеет следующий вид:

$$K_u = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B), \quad (1.3.7)$$

где $B(n \times l)$ – матрица. Если из столбцов матрицы управляемости K_u составить все возможные матрицы размера $(n \times n)$ и среди них будет хотя бы одна, ранг которой равен порядку системы “ n ”, то система с векторным управлением является вполне управляемой, в противном случае – неуправляемой.

Пример 1.13. Пусть задано математическое описание САУ в виде системы уравнений (1.3.1), где матрицы A и B равны:

$$A = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -3 \\ 4 \end{vmatrix}.$$

Определить управляемость исследуемой системы по критерию Р. Калмана.

Алгоритм и решение

1) Следует построить блочную матрицу управляемости и определить ее ранг.

Матрица $A(2 \times 2)$, следовательно, порядок системы равен двум, т. е. $n = 2$. Записывается матрица управляемости для данной системы

$$K_u = (B, AB).$$

2) Определяется ранг матрицы управляемости:

$$AB = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}; K_u = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}; \Delta_1 = -3 \neq 0; \Delta_2 = -23 \neq 0; \text{rang } K_u = 2.$$

Вывод: исследуемая система *вполне управляема*, т. к. ранг блочной матрицы управляемости равен порядку системы.

1.4. Наблюдаемость динамических систем. Критерии наблюдаемости

Методы синтеза различных законов управления требуют в общем случае для своей реализации полного вектора состояния. Если некоторые компоненты вектора состояния недоступны измерению, то непосредственная реализация законов управления невозможна. В этих случаях возникает необходимость в способах, которые позволили бы косвенно оценить компоненты вектора состояния, мало доступные или вовсе недоступные прямому измерению. В современной теории управления такие способы существуют. Они основаны на использовании уравнений движений объекта, которые считаются известными. Устройства для измерения координат объекта, в основу которых положены уравнения самого объекта, называются наблюдающими устройствами (НУ).

Пусть исследуемая САУ описывается системой уравнений (1.3.1), (1.3.2). В случае, когда измерению доступен лишь выходной вектор Y вместо полного вектора состояния X , необходимо найти разумную замену (оценку) вектора состояния системы. Для оценки вектора состояния естественно воспользоваться информацией о входных и выходных переменных системы и о ее структуре (размерностях матриц A , B , C). Если ранг матрицы наблюдений C равен порядку системы $\text{rang}(C) = n$, т. е. $r = n$, то возможно определение вектора состояния X через алгебраические операции с использованием *лишь мгновенных значений вектора выхода*. В этом случае $\hat{X} = C^{-1}Y$, где $\hat{X}(n \times 1)$ – оценка вектора состояния системы.

В случае, когда $r < n$ такой метод использовать нельзя, т. к. матрица наблюдений C вырождена ($\det C = 0$) и для нее не суще-

ствуется обратной матрицы. В реальных условиях, как правило, $r \ll n$.

Введем понятие наблюдаемости.

Определение. Система (1.3.1)–(1.3.2) называется *вполне наблюдаемой*, если начальное состояние $x(0)$ может быть определено через значения вектора выходных переменных $y(t)$, измеряемого на конечном интервале времени $0 \leq t \leq T$.

Введем критерий наблюдаемости, который позволит на основе значений матриц A и C определить наблюдаемость системы. Для этого приведем систему (1.3.1), (1.3.2) к диагональной форме при помощи линейного преобразования, т. е. получим систему (1.3.3) – (1.3.4).

Используя представление системы в диагональной форме (1.3.3) – (1.3.4), можно привести следующий критерий наблюдаемости.

Формулировка критерия наблюдаемости Е. Гильберта. Если матрица C^* не содержит нулевых столбцов, то система (1.3.3) – (1.3.4) является вполне наблюдаемой, в противном случае – ненаблюдаемой.

Из критерия следует, что вектор выходных переменных $y(t)$ вполне наблюдаемой системы должен содержать *полный вектор состояния* $x(t)$.

Пример 1.14. Пусть задана система следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU, \\ Y = CX \end{cases}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Определить наблюдаемость заданной системы.

Алгоритм и решение

1) Для определения наблюдаемости системы в данном примере необходимо вычислить

$$C^* = CV = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

2) Поскольку первый столбец матрицы C^* равен нулю, то система ненаблюдаемая, что видно наглядно в скалярной форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = -x_1^* + 2/3u \\ \dot{x}_2^* = 5x_2^* + 7/3u \\ y^* = 3x_2^* \end{cases}.$$

Вектор наблюдений содержит только один вектор состояния, а именно: x_2^* .

Вывод: исследуемая система не наблюдаема.

Существует другой критерий наблюдаемости, не требующий преобразований уравнений системы к диагональной форме, который использует исходные матрицы A и C .

Формулировка критерия наблюдаемости Р. Калмана. Для того чтобы система (1.3.1), (1.3.2) была вполне наблюдаемой необходимо и достаточно, чтобы ранг блочной матрицы наблюдаемости

$$K_n^T = \left(C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T \right) \quad (1.4.1)$$

был равен порядку системы “ n ”, т. е. $\text{rang } K_n^T = n$.

Из вида матрицы наблюдаемости следует, что ее размер равен $(n \times nr)$, т. е. она имеет n строк и nr столбцов. Если из столбцов матрицы наблюдаемости K_n^T можно составить хотя бы одну матрицу размера $(n \times n)$, ранг которой равен порядку системы n , то система является вполне наблюдаемой.

Доказательство. Пусть дана система в виде (1.3.1) – (1.3.2). Полагая, что входной вектор $u(t)$ может быть измерен, можно сказать, что равенство нулю вектора $u(t)$ не влияет на критерий наблюдаемости. Поэтому для упрощения последующего анализа положим $u(t)=0$.

$$Y(t) = CX(t); \quad Y(t) = Ce^{A(t-t_0)} X(t_0), \quad X(t_0) \neq 0. \quad (1.4.2)$$

Экспоненту $\exp(At)$, мы уже знаем, можно представить бесконечным степенным рядом матрицы A

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots + \frac{A^n}{n!}t^n + \dots \quad \text{или} \quad e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) A^i.$$

Тогда уравнение (1.4.2) приводится к виду

$$Y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t-t_0) CA^i X(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} CA^i \gamma_i(t-t_0) X(t_0) \quad (1.4.3)$$

Обозначим

$$K_n^T = (C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T) \\ \text{и} \quad \Gamma = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_{n-1}].$$

Тогда уравнение (1.4.2) принимает вид

$$Y(t) = \Gamma K_n^T X(t_0).$$

Таким образом, для полной наблюдаемости системы уравнений (1.3.1) – (1.3.2), необходимо и достаточно, чтобы “ n ” столбцов матрицы K были линейно независимы, т. е. чтобы матрица K имела ранг “ n ” (при различных γ_i и, следовательно, Γ в различные значения времени t_i). Критерий доказан.

Пример 1.15. Пусть задана система следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU, \\ Y = CX \end{cases}$$

$$\text{где матрицы} \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Определить наблюдаемость заданной системы.

Алгоритм и решение

- 1) Строится блочная матрица наблюдаемости K_n :

$$K_n = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}; \quad \text{здесь} \quad A^T C^T = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

- 2) Определяется ранг блочной матрицы наблюдаемости K_n :

$\Delta_1 = 1 \neq 0$; $\Delta_2 = 30 \neq 0$, следовательно, ранг блочной матрицы наблюдаемости $K_n = 2$, т. е. порядку системы $n = 2$.

Вывод: система вполне наблюдаема по критерию Р. Калмана.

Чтобы оценить наблюдаемость системы при $r \ll n$, необходимо построить наблюдающее устройство (НУ).

Пусть $\hat{X}$ представляет собой оценку вектора состояния X . Если некоторые компоненты вектора X недоступны измерению, то необходимо построить такую оценку вектора состояний $\hat{X}$, чтобы $|\hat{X} - X| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим некоторую динамическую систему, входами которой являются входы исходной линейной системы, а выходы представляют собой компоненты вектора $\hat{X}$ – оценки вектора состояний. Введем следующее определение НУ.

Определение. Динамическая система, которая формирует на выходе оценку вектора состояния $\hat{X}$ по данным о входах и выходах исходной системы, называется наблюдающим устройством.

Схематически ОУ совместно с наблюдающим устройством можно представить в следующем виде (рис. 1.14):

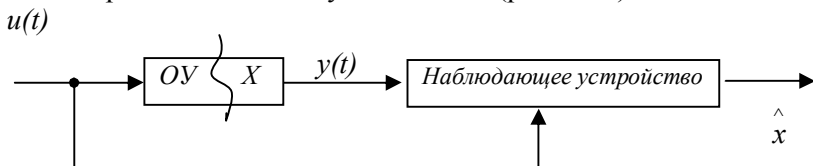


Рис. 1.14. Структурная схема системы с наблюдающим устройством

Наиболее простым способом построения НУ является прямое моделирование динамики управляемого объекта средствами аналоговой или цифровой вычислительной техники.

Контрольные вопросы и упражнения:

1. Записать решение однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, представленной в форме Коши, в скалярной и матричной формах.
2. Что выражают общее и частное решения системы дифференциальных уравнений в теории управления?
3. Как можно представить степенным рядом экспоненциальную матрицу?
4. Что собой представляют линеаризованные уравнения состояния объекта и уравнения наблюдения?
5. Пусть задана линейная динамическая система 2-го порядка следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = 9x_1 - 2x_2 \\ \dot{x} = -3x_1 + 7x_2 \end{cases}$$

Задана функция А.М. Ляпунова

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Определить устойчивость движения системы по второму (прямому) методу Ляпунова.

6. Как определяются собственные числа матрицы? Привести прямой метод определения собственных векторов матрицы.
7. Сформулировать теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости движения системы по первому приближению.
8. Пусть задана линейная динамическая система следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u(t) \equiv 0.$$

Заданы матрицы $A = \begin{bmatrix} 26 \\ 84 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$. Определить устойчивость движения системы по первому методу Ляпунова.

9. Сформулировать теоремы второго (прямого) метода Ля-

пунова об устойчивости движения системы.

10. Пусть задана линейная динамическая система 2-го порядка следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x_1 \\ \dot{x} = -4x_2 \end{cases}.$$

Задана функция А.М. Ляпунова

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Определить устойчивость движения системы по второму (прямому) методу Ляпунова.

11. Дать определения управляемости и наблюдаемости динамических систем. Сформулировать критерии управляемости и наблюдаемости Р. Калмана и Е. Гильберта.

12. Математическое описание линейной динамической системы задано в пространстве состояний в канонической форме

$$\begin{aligned} \dot{X}^* &= AX^* + B^*U, \quad \text{где } A^* = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}; B^* = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}; C^* = \begin{vmatrix} 1 & 2 \end{vmatrix}. \\ Y^* &= C^*X^* \end{aligned}$$

Устойчиво ли движение системы по Ляпунову, управляема и наблюдаема ли система по критерию Е. Гильберта?

13. Математическое описание линейной динамической системы задано в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU, \quad \text{где } A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}; C = \begin{vmatrix} -1 \\ 5 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}. \\ Y &= C^T X \end{aligned}$$

Устойчиво ли движение системы по Ляпунову, управляема и наблюдаема ли система по критерию Р. Калмана?

2. ОБ ОСНОВНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Изучение *управляемых объектов* и нахождение наилучших способов *управления* составляют основную цель всех последующих рассуждений.

Задание начального фазового состояния x_0 и управления $u(t)$ однозначно определяют дальнейшее движение объекта. Это движение заключается в том, что фазовая точка с координатами

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),$$

изображающая состояние объекта, с течением времени перемещается, описывая в фазовом пространстве некоторую линию, называемую *фазовой траекторией* рассматриваемого движения объекта (рис. 2.1, а).

Пару векторных функций $(u(t), x(t))$, т.е. управление $u(t)$ и соответствующую фазовую траекторию $x(t)$, мы будем называть в дальнейшем *процессом управления* или просто *процессом*.

Таким образом, состояние *управляемого объекта* в каждый момент времени характеризуется *фазовой точкой* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. На движение объекта можно воздействовать при помощи *управляющего вектора (параметра)*

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m).$$

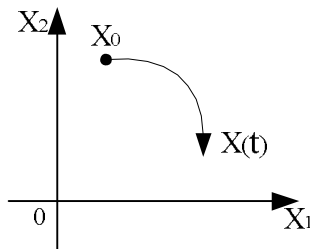


Рис. 2.1, а. Траектория движения объекта

Процесс полностью определяется, если задано управление $u(t)$ (при $t > t_0$) и начальное фазовое состояние $x_0 = x(t_0)$. Тот факт, что задание начального фазового состояния (в момент $t = t_0$) позволяет однозначно определить фазовую траекторию $x(t)$, $t > t_0$, с помощью системы (2.1) вытекает из *теоремы о существовании и единственности решений системы дифференциальных уравнений*.

Предположим, что, зная начальное фазовое состояние x_0 и управление $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$, мы определили фазовую траекторию $x(t)$ (с помощью системы уравнений 2.1). Если мы изменим управление $u(t)$ (сохранив то же начальное состояние x_0), то получим некоторую другую траекторию, исходящую из той же точки x_0 ; вновь изменим управление $u(t)$ — получим еще одну траекторию и т. д. Таким образом, рассматривая различные управления $u(t)$, мы получим множество траекторий, исходящих из точки x_0 (рис. 2.1 а).

Разумеется, это не противоречит теореме единственности в теории дифференциальных уравнений, так как, заменяя функции $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ другими функциями, мы переходим от системы (2.1) к другой системе дифференциальных уравнений относительно фазовых координат $x_1, x_2, \dots, x_n$. *Задача оптимального быстрогодействия*, которую в дальнейшем мы будем рассматривать, заключается в отыскании такого управления $u(t)$, для которого соответствующая фазовая траектория $x(t)$ проходит через точку x_k и переход из x_0 в x_k осуществляется за кратчайшее время. Такое управление $u(t)$ будем называть *оптимальным управлением*; точно также соответствующую траекторию $x(t)$, по которой фазовая точка за кратчайшее время переходит из состояния x_0 в состояние x_k , будем называть *оптимальной траекторией* (рис. 2.1, б).

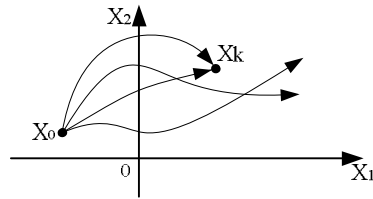


Рис. 2.1, б. Траектории движения объекта

Задача оптимального перехода из начального состояния в конечное представляет собой краевую задачу, где начальные и конечные точки могут быть заданы одним из четырех способов, представленных на рис. 2.2. Фазовые портреты перехода системы из начального состояния в конечное для различных задач (рис. 2.2):

- а) задача с фиксированными концами,
- б) задача с фиксированным первым концом (фиксированная начальная точка и множество конечных значений),
- в) задача с фиксированным правым концом,
- г) задача с подвижными концами.

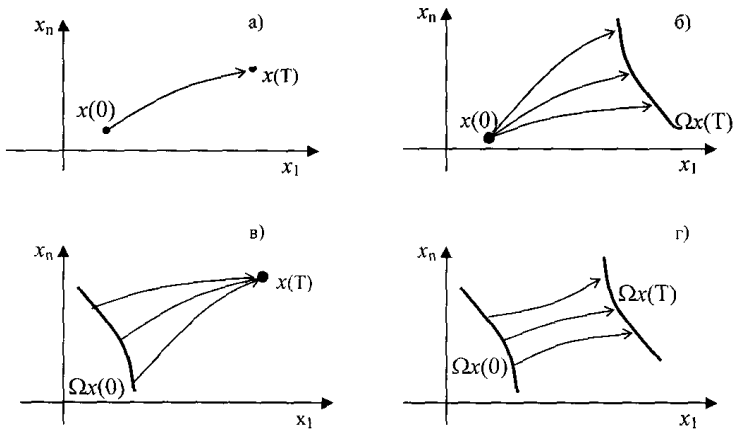


Рис. 2.2. Фазовые портреты перехода системы

Для объекта множество начальных состояний может в общем случае совпадать со всем множеством состояний либо с рабочей областью, а множество конечных состояний является подпространством множества состояний или рабочей области.

Пример 2.1. В любую ли точку пространства состояний можно перевести объект, описываемый системой уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 2u. \end{cases}$$

Алгоритм и решение

1) Запишем уравнения статики для данного объекта:

$$\begin{cases} 2x_1^0 - x_2^0 + u = 0 \\ -x_1^0 - x_2^0 + 2u = 0. \end{cases}$$

2) Подставив во второе уравнение значение $u(t)$ из первого уравнения

$$u = x_2^0 - 2x_1^0,$$

получим

$$-5x_1^0 + x_2^0 = 0.$$

3) Получили множество конечных состояний, описываемое уравнением

$$x_2^0 = 5x_1^0.$$

Вывод: множество конечных состояний, задаваемое для объекта (системы), должно быть реализуемым.

Допустимые управления

Обычно управляющие параметры $u_1, u_2, \dots, u_m$ не могут принимать совершенно произвольные значения, а подчинены некоторым ограничениям. Так ограничение $-1 \leq u \leq +1$ оз-

начает, что двигатель, например, может развивать силу, направленную в любую сторону, но не превосходящую единицы по величине (ограничения всегда следуют из природы объекта). Управляющими параметрами могут быть, например, количество подаваемого в двигатель топлива, температура, сила тока, напряжение и т. п., которые не могут принимать сколь угодно больших значений.

В общем случае будем считать, что в соответствии с конструкцией объекта и условиями его эксплуатации задано в пространстве переменных $u_1, u_2, \dots, u_m$ некоторое множество U (рис. 2.3) и управляющие параметры $u_1, u_2, \dots, u_m$ должны в каждый момент времени принимать лишь такие значения, для которых точка $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ принадлежит множеству U . Иначе говоря, разрешается рассматривать лишь такие управления $u(t)$, что $u(t) \in U$ для любого t . Множество U будем называть *областью управления*.

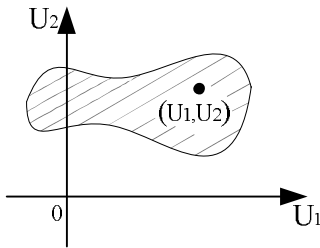


Рис. 2.3. Область управления

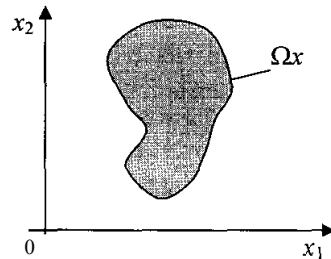


Рис. 2.4. Общий вид рабочей области пространства состояний

В дальнейшем будем предполагать, что указание области управления входит в математическое определение объекта, т. е. что для математического задания объекта (рис. 2.4) надо указать закон его движения (2.1) и область управления U (рис. 2.3). Заметим, что для технических задач особенно важен и характерен случай *замкнутого* множества U , т. е. случай, когда точка $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ может находиться не только *внутри* мно-

жества U , но и на его границе. Это условие означает, что для «рулей» допустимы и их крайние положения (рис. 2.5). Задается Ω_U – область допустимых значений управляющего воздействия. На практике область Ω_U задается также с помощью модульных соотношений:

$$|U_i| \leq U_{\text{зад.}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

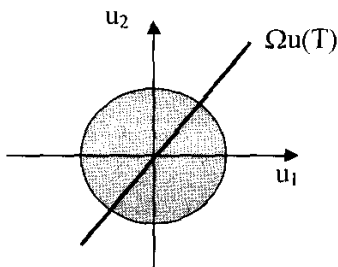


Рис. 2.5. Вид рабочей области пространства управлений, заданной модульными соглашениями

Наконец, сделаем еще одно предположение о характере управлений. Будем предполагать, что «рули», положение которых характеризуются управляющими параметрами $u_1, u_2, \dots, u_m$, *безынерционны*. Таким образом, мы можем *мгновенно* переключать эти «рули» из одного положения в другое, т. е. мгновенно менять (скачком) значения управляющих параметров $u_1, u_2, \dots, u_m$. В соответствии с этим будем рассматривать не только непрерывные, но и произвольные *кусочно-непрерывные* управления $u(t)$, т. е. управления, состоящие из конечного числа непрерывных кусков (рис. 2.6).

Допустимым управлением будем называть всякую кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, со значениями в области U , непрерывную концах отрезка $t_0 \leq t \leq t_1$, на котором она задана. Задача об оптимальных быстродействиях уточняется теперь следующим образом:

Среди всех допустимых управлений $u=u(t)$, под воздействием которых объект переходит из заданного начального состояния x_0 в предписанное конечное состояние x_k , найти такое, для которого этот переход осуществляется за кратчайшее время.

Кусочно-непрерывные управления хороши тем, что, во-первых, они позволяют получить для достаточно широкого класса примеров *точное математическое решение* оптимальной задачи и, во-вторых, достаточно наглядны и удобны для технической реализации.

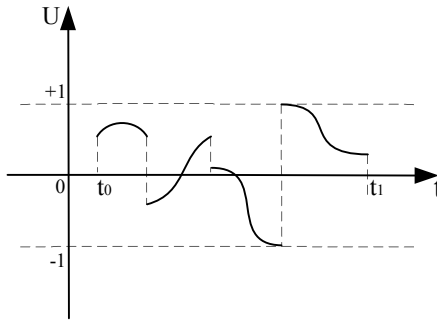


Рис. 2.6. Кусочно-непрерывное управление

Об основных направлениях в теории оптимальных процессов

В 1961 г. русский академик Л.С. Понтрягин (со своими учениками) опубликовал работу, в которой был изложен принцип, ведущий к решению общей задачи о нахождении оптимального по скорости переходного процесса в непрерывных системах, получивший в дальнейшем название – *принцип максимума*. Принцип максимума был обоснован как необходимый и достаточный признак оптимального процесса для линейных систем и необходимый признак оптимального процесса для нелинейных систем. Кроме того, принцип максимума был обобщен на случай минимизации интеграла и на случай ограничений координат объекта. Для применения принципа максимума необ-

ходимо иметь описание динамической системы в виде дифференциальных уравнений, решить так называемые сопряженные уравнения совместно с основными уравнениями, добавить условия трансверсальности и найти максимальное значение функции Гамильтона.

Почти одновременно с опубликованием принципа максимума американским математиком Р. Беллманом был разработан метод динамического программирования. Методом динамического программирования можно исследовать системы оптимального управления значительно более широкого класса, чем системы, описываемые дифференциальными уравнениями. Поэтому он применим не только к оптимальным задачам динамики, но и к весьма широкому кругу технических, медицинских и экономических задач, в которых связи между фазовыми координатами, управлением и критерием оптимальности могут задаваться как в виде уравнений весьма произвольного вида, так и в виде экспериментально определенных графиков или таблиц численных данных. В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности Р. Беллмана. Формулировка принципа оптимальности Р. Беллмана: каким бы ни было начальное состояние системы x_0 и начальное оптимальное управление u^* (на интервале $t_0 \leq t \leq t_k$), последующее управление u_k (на интервале $t_k \leq t \leq T$) всегда должно быть также оптимальным относительно состояния, возникшего в результате первого этапа управления.

Далее оба основных направления в теории оптимальных процессов будут рассмотрены достаточно подробно.

Контрольные вопросы и упражнения:

1. Что представляет собой пара векторных функций $(u(t), x(t))$, т. е. управление $u(t)$ и фазовая траектория $x(t)$?
2. Привести словесную формулировку задачи оптимального быстродействия.
3. Что собой представляют допустимые управления?

4. Как можно задать область управления?
5. Что означает замкнутость множества управления?
6. Почему принимается предположение о характере управлений – безынерционны?
7. Почему в системах оптимального управления используются кусочно-непрерывные управления?
8. Математическое описание САУ задано в пространстве состояний следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + 3u \end{cases}.$$

Определить множество конечных состояний, в которое можно перевести объект управления.

3. КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ

Прежде чем рассмотреть критерии оптимальности управления обратимся к истории возникновения задач оптимизации. По своему смыслу эти задачи являются вариационными. Годом рождения классического вариационного исчисления принято считать 1696 год, когда И. Бернулли опубликовал статью под названием “Новая задача, к решению которой приглашаются математики”. В этой статье И. Бернулли поставил следующую проблему (рис. 3.1):

В вертикальной плоскости даны две точки A и B . Определить путь AMB , спускаясь по которому под влиянием собственной тяжести, тело, начав двигаться из точки A , дойдет до другой точки B в кратчайшее время. Поставленная задача получила название задачи о брахистохроне, т. е. кривой наискорейшего спуска.

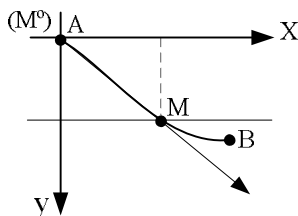


Рис. 3.1. Траектория падающего тела

Решение этой задачи было дано самим И. Бернулли, Лейбницем, Я. Бернулли, Лопиталем и Ньютоном. Как видите, в этой задаче нет никаких ограничений. Это задача классического вариационного исчисления.

Однако при построении оптимальных процессов необходимо учитывать различного рода ограничения типа неравенств, задающие замкнутые области допустимых изменений переменных. Такого рода ограничения были охвачены лишь новой теорией, созданной в середине XX столетия Л.С. Понтрягиным и его учениками (1961 г.) и Р. Беллманом (1960 г.), теорией оптимального управления.

3.1. Некоторые частные критерии оптимальности

Рассмотрим уравнение управляемой системы

$$\dot{x} = \varphi(x, u), \quad (3.1.1)$$

где $x(n \times 1)$ – вектор переменных состояния, в теории оптимального управления – фазовые переменные; $u(m \times 1)$ – вектор управления (параметры управления).

Соотношения вида (3.1.1), т. е. выражение $\dot{x} = \varphi(x, u)$, называются *дифференциальной связью*; соотношения $\varphi = 0$ называются *граничными условиями*. В реальных задачах (задачах физики, химии, механики и др.) характер дифференциальных связей определяется законами природы, а параметры управления $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ характеризуют возможности человека. Эти возможности в реальных задачах не безграничны. Следовательно, необходимо накладывать ограничения типа

$$u \in U,$$

где U – замкнутое допустимое множество; произвольное, но управление $u \in R^r$.

При постановке различных задач управления обычно формулируется цель, ради которой осуществляется управление. Например, целью управления может быть перевод системы из одного состояния X^0 в другое X^T . Эта цель может быть достигнута различными способами, т. е. может существовать несколько вариантов выбора управлений, которые обеспечивают достижение указанной цели. В этом случае возникает задача выбора из вариантов допустимых (т. е. таких, которые обеспечивают достижение поставленной цели) управлений в каком-либо смысле (например, в смысле наискорейшего достижения цели или в смысле наименьших затрат ресурсов и т. д.). Следовательно, необходимы критерии, по величине которых можно определить степень достижения цели.

Критерий оптимальности управления можно записать в следующем виде:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u) dt \rightarrow \text{extr}, \quad (3.1.2)$$

где $F(x, u)$ – скалярная функция векторных аргументов $x(t)$, $u(t)$. Управление, обеспечивающее экстремальное значение критерия, и будет оптимальным в смысле заданного конкретного критерия ($\text{extr} \rightarrow \max$ либо $\text{extr} \rightarrow \min$ в зависимости от смысла задачи).

1. Критерий максимального быстрогодействия

Это наиболее простой критерий, для которого

$$F(x, u) = 1, \quad J_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt = (t_1 - t_0) \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Физический смысл этого критерия: перевод системы из $x^0(t_0)$ в $x^k(t_1)$ за минимальное время.

2. Критерий качества переходных процессов

Если $F(x, u) = x_1^2, \quad \forall i = \overline{1, n}$, то

$$J_2 = \int_0^{\infty} x_1^2 dt \rightarrow \min_{u \in U},$$

где x_1 – отклонение одной из компонент вектора фазовых переменных X от установившегося значения. Этот критерий используется для косвенного анализа переходных процессов в замкнутых системах.

3. Обобщенный критерий качества переходных процессов

Пусть

$$F(x, u) = x^T Q x,$$

где Q – положительно-определенная матрица, $Q > 0$. Тогда

$$J_3 = \int_0^{\infty} x^T Q x dt \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Этот критерий минимизирует квадратичные интегральные отклонения всех компонент вектора X от установившегося движения.

4. Критерий аналитического конструирования оптимального регулятора

В этом случае

$$F(x, u) = x^T Q x + u^T R u,$$

где $Q > 0$, $R > 0$ (т. е. матрица Q является знакопостоянной, а матрица R – знакоопределенной положительной). Тогда

$$J_4 = \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q x + u^T R u) dt \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Разнообразие практических задач управления позволяет формулировать множество других критериев оптимальности управления, учитывающих специфику задачи или системы.

3.2. Общий вид критерия оптимального управления

Общий вид критерия оптимального управления записывается в общем виде следующим образом:

$$J[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u) dt + g[t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)] \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Функционал $J[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1]$ состоит из двух частей. Первая называется *интегральной* составляющей, вторая – *терминальной* (конечной).

Постановка задачи оптимального управления

Пусть заданы

$$J[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)dt + g[t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)] \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad (3.2.1)$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad (3.2.2)$$

$$u \in U \quad \text{либо} \quad |u| \leq U_{\max}, \quad \phi[t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)] = 0 \quad (3.2.3)$$

где $U_{\max}$ – возможно допустимое управление.

Функции F, g, φ, ϕ непрерывны по совокупности переменных и дифференцируемы по переменным x, t . Задано множество $u \in R^r$, т. е. множество вещественных управлений.

Необходимо определить оптимальный процесс.

Допустимым процессом в задаче (3.2.1) ÷ (3.2.3) называют совокупность $[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1]$, если выполнены следующие требования:

1) вектор-функция $u(\bullet)$ определена и кусочно-непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$;

2) для всех t выполнено включение $u(t) \in U, t \in [t_0, t_1]$;

3) функция $x(\bullet)$ дифференцируема во всех точках, кроме точек, где $u(\bullet)$ терпит разрыв и во всех точках дифференцируемости $x(\bullet)$ выполнено равенство $\dot{x}(t) = \varphi[t, x(t), u(t)]$;

4) удовлетворяются граничные условия $\phi[t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)] = 0$.

Только среди таких допустимых процессов и будет ис-
каться оптимальный.

Допустимый процесс $[\bar{x}(\bullet), \bar{u}(\bullet), \bar{t}_0, \bar{t}_1]$ называется *оптимальным*, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого допусти-

мого процесса $[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1]$, для которого $\|t_0 - \bar{t}_0\| < \varepsilon$,
 $\|t_1 - \bar{t}_1\| < \varepsilon$, $\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon$, $t \in [t_0, t_1] \cap [\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ выполняется
 следующее неравенство:

$$J[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1] \geq J[\bar{x}(\bullet), \bar{u}(\bullet), \bar{t}_0, \bar{t}_1].$$

Для n -мерного вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ число $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

(Евклидова норма).

Таким образом, здесь учитывается лишь близость фазовых переменных, но не управлений. Принято различать два класса задач теории оптимального управления.

Задача 1. Оптимизация программы управления

Этот класс задач возникает, когда процессы в управляемой системе задаются априори определенной программой изменения регулируемой величины во времени. В случае оптимизации той или иной программы управления она не задается, а отыскивается в результате расчета по выбранному критерию оптимальности ($J_1 \div J_5$). При этом находятся программы изменения оптимального управления $u_{opt}(t)$ и оптимальных фазовых траекторий $x_{opt}(t)$.

Задача 2. Оптимизация закона управления

Этот класс задач рассматривает наилучшее построение системы управления для осуществления заданной программы управления. Причем программа управления может быть заданной либо решением задачи 1, либо каким-нибудь другим способом. Смысл оптимизационной задачи 2 заключается в следующем. При реализации программы управления, найденной в результате решения задачи 1, могут возникнуть нежелательные

отклонения $\Delta x(t)$ от $x_{opt}(t)$. Если в этих условиях оставить $u_{opt}(t)$ неизменной, то программа управления уже не будет оптимальной. Поэтому к $u_{opt}(t)$ необходимо добавить $\Delta u(t)$, которое будет оптимальным образом (в смысле выбранного критерия) подавлять нежелательные отклонения $\Delta x(t)$.

Следует отметить, что при решении задачи 2 удобнее рассматривать динамику системы в отклонениях от требуемых величин или программ.

3.3. Методы классического вариационного исчисления

В вариационном исчислении *критерий оптимальности* называется *функционалом*, а функция, обеспечивающая экстремум этому функционалу, называется *экстремалью*.

1. Уравнение Эйлера

Пусть необходимо найти экстремаль функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt \rightarrow \min_x. \quad (3.3.1)$$

Экстремали находятся среди решений уравнений Эйлера, которые имеют вид:

$$F_x - \frac{d}{dt} [F_{\dot{x}}] = 0, \quad (3.3.2)$$

где $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$; $F_{\dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$.

Пример 3.1. Пусть задан функционал вида

$$J = \int_0^{\infty} [x^2 + T^2 \dot{x}^2] dt.$$

Необходимо найти экстремаль, используя уравнение Эйлера.

Алгоритм и решение

1) $F(t, x, \dot{x}) = x^2 + T^2 \dot{x}^2$, где $T > 0$ – заданная постоянная.

2) Найдем соответствующие производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2T^2 \dot{x}; \quad \frac{d}{dt} [F_{\dot{x}}] = 2T^2 \ddot{x}.$$

3) Подставив в уравнение Эйлера (3.3.2), получим:

$$2x - 2T^2 \ddot{x} = 0 \quad \xrightarrow{2 \neq 0} \quad T^2 \ddot{x} - x = 0. \quad (3.3.3)$$

4) Характеристическое уравнение: $T^2 s^2 - 1 = 0$;

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{1/T^2} = \pm \frac{1}{T}$$

5) Запишем решение уравнения (3.3.3)

$$x(t) = c_1 \exp \left[-\frac{1}{T} t \right] + c_2 \exp \left[\frac{1}{T} t \right],$$

где c_1 – постоянные интегрирования ($i=1,2$).

Так как необходимо минимизировать функционал (3.3.1), то произвольную постоянную интегрирования c_2 положим равной нулю. Тогда

$$x(t) = c_1 \exp \left[-\frac{1}{T} t \right] \quad \text{при} \quad t=0, x(0) = x_0 \neq 0.$$

6) Следовательно, оптимальная траектория движения,

$$x(t) = x_0 \exp \left[-\frac{1}{T} t \right]$$

есть экстремаль.

Это есть решение дифференциального уравнения первого порядка. Отсюда экстремаль является решением уравнения следующего вида:

$$T \dot{x} + x = 0.$$

2. Уравнение Эйлера-Пуассона

Если необходимо минимизировать функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}] dt \rightarrow \min_x, \quad (3.3.4)$$

то экстремали будем искать среди решений уравнения Эйлера-Пуассона, имеющего следующий вид:

$$F_x - \frac{d}{dt} [F_{\dot{x}}] + \frac{d^2}{dt^2} [F_{\ddot{x}}] - \dots + [-1]^n \frac{d^n}{dt^n} [F_{x^{(n)}}] = 0, \quad (3.3.5)$$

$$\text{где } F_x = \frac{\partial F}{\partial x}; \quad F_{\dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}; \quad \dots \quad F_{x^{(n)}} = \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}.$$

Для затухающих процессов решение этого уравнения соответствует общему решению дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами или системе уравнений 1-го порядка в форме Коши.

3. Задачи на условный экстремум

Пусть задан функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n] dt \rightarrow \min_x \quad (3.3.6)$$

и дополнительные уравнения, называемые уравнениями связи:

$$\varphi_k[t, x_1, x_2, \dots, x_n] = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad m \leq n. \quad (3.3.7)$$

Необходимо найти экстремали для заданного функционала.

Такого рода вариационные задачи встречаются в САУ, т. к. обычно задается вид функционала и система уравнений, описывающих ОУ. Смысл введенных связей заключается в том, что экстремали нужно искать среди функций, удовлетворяющих уравнениям связи.

Алгоритм

1) Вводят неопределенные множители Лагранжа λ_i ($i=\overline{1,m}$). Затем вводят функцию следующего вида:

$$V = F + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k [t, x_1, x_2, \dots, x_n].$$

2) Для функции V записывают систему уравнений Эйлера:

$$V_{x_i} - \frac{d}{dt} [V_{\dot{x}_i}] = 0 \quad \forall i=\overline{1,n}.$$

3) Решают систему из $(n+m)$ уравнений

$$\begin{cases} V_{x_i} - \frac{d}{dt} [V_{\dot{x}_i}] = 0 & (i=\overline{1,n}), (k=\overline{1,m}) \\ \varphi_k [t, x_1, x_2, \dots, x_n] = 0, \end{cases}$$

относительно $(n+m)$ неизвестных x_i ($i=\overline{1,n}$) и λ_k ($k=\overline{1,m}$) ($\lambda_k > 0$ в задачах минимизации).

Следует отметить, что в САУ уравнения связи обычно бывают дифференциальными (описание САУ), т. е. имеют вид:

$$\varphi_k [t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n] = 0, \quad k=\overline{1,m}, \quad m \leq n. \quad (3.3.8)$$

Пример 3.2. Пусть заданы уравнения связи

$$\dot{x} = f(x, u),$$

и функционал вида

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u) dt \rightarrow \min_u.$$

Необходимо найти экстремали, доставляющие минимум заданному функционалу.

Алгоритм и решение

1) Преобразуем уравнения системы к виду

$$\varphi(x, u) = \dot{x} - f(x, u) = 0.$$

2) Записываем функцию Лагранжа $V = F + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k$.

3) Составим систему уравнений Эйлера по переменным (x, u) , которую дополним уравнениями связи:

$$\begin{cases} V_x - \frac{d}{dt}[V_{\dot{x}}] = 0 \\ V_u - \frac{d}{dt}[V_{\dot{u}}] = 0 \\ \varphi(x, u) = \dot{x} - f(x, u) = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему из $(2n+r)$ уравнений, находят экстремали.

3.4. Линейные системы, оптимальные по быстродействию. Принцип максимума Л.С. Понтрягина

Рассмотрим *решение задачи I* для линейных систем, в которой критерием оптимальности управления является время перехода системы из одного состояния в другое.

Пусть система описывается уравнением вида

$$\dot{x} = Ax + bu = f[x(t), u(t)], \quad (3.4.1)$$

где A ($n \times n$) – матрица постоянных коэффициентов, $u(t)$ – скалярное управление, на которое наложено ограничение

$$u \in U, \quad |u| \leq u_{\max}, \quad (3.4.2)$$

где $u_{\max}$ – максимально допустимое отклонение управления; U – допустимое множество.

В начальный момент времени $t = t_0 = 0$ состояние системы определяется $x(t_0) = x_0 \neq 0$, в конечный момент времени $t = T$ ($T > t_0$) система должна находиться в состоянии $x(T) = x_T$. Критерий оптимальности управления

$$J = \int_0^T F(\bullet) dt \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (3.4.3)$$

Для нахождения оптимального управления используется принцип максимума Л.С. Понтрягина.

Рассмотрим систему уравнений, составленную относительно дополнительных переменных (*сопряженные переменные*):

$$\frac{d\phi_i}{dt} \overset{\Delta}{=} - \sum_{K=0}^n \frac{\partial f_K}{\partial x_i} \phi_K, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.4.4)$$

Введем функцию Гамильтона

$$H(\phi, x, u) \overset{\Delta}{=} \sum_{K=0}^n \phi_K f_K(x, u). \quad (3.4.5)$$

Тогда уравнения (3.4.1) и (3.4.4) можно объединить в одну систему уравнений, называемую гамильтоновой системой:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \phi_i} \\ \frac{d\phi_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.4.6)$$

Еще раз выпишем задачу оптимального управления в этом случае:

$$J = \int_{t_0}^T dt \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (3.4.7)$$

$$\dot{x} = Ax + bu = f(x, u) \quad (3.4.8)$$

$$u \in U, \quad u \in R^1; \quad |u| \leq u_{\max}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.4.9)$$

Оптимальным будет процесс $[\bar{x}^*(\bullet), \bar{u}^*(\bullet), 0, T]$, если найдется такое $\bar{u}^*(\bullet)$, при котором будет выполняться неравенство

$$J[\bar{x}^*(\bullet), \bar{u}^*(\bullet), 0, T] \leq J[x(\bullet), u(\bullet), 0, T] \quad \text{при } \|x^*(t) - x(t)\| < \varepsilon, \quad \|t - T\| < \varepsilon.$$

Принцип максимума Л.С. Понтрягина формулируется следующим образом:

Для того чтобы управление $u(t)$ было оптимальным, необходимо, чтобы существовала такая ненулевая непрерывная вектор-функция $\phi^T(t) = [\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)]$, соответствующая в силу уравнений (3.4.6) функциям

$$u^T(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)] \quad \text{и} \quad x^T(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)],$$

чтобы:

1) при любом t , взятом в рассматриваемом интервале времени $0 \leq t \leq T$, функция Гамильтона $H[\phi(t), x(t), u]$, рассматриваемая как функция переменного $u \in U$, достигала в точке $u = u^{*-}(t)$ максимума

$$H[\bar{\phi}^*(t), \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)] = M[\phi(t), x(t)],$$

$$\text{где} \quad M[\phi(t), x(t)] = \sup_{u \in U} H[\phi, x, u];$$

2) в конечный момент времени $t=T$ выполнялись бы соотношения следующего вида:

$$\phi(T) \leq 0; \quad M[\phi(T), x(T)] = 0.$$

Укрупненный алгоритм нахождения оптимального управления, удовлетворяющего принцип максимума Л.С. Понтрягина.

1) Необходимо составить уравнения относительно вектора сопряженных переменных ϕ ($n \times 1$), которые имеют вид

$$\frac{d\phi_i}{dt} = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \phi_k, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{т. к. } f_0(x, u) = 1 \quad (3.4.10)$$

или в матричной форме:

$$\dot{\phi} = -A^T \phi. \quad (3.4.10, a)$$

Здесь f_k есть правая часть уравнения системы, т. е.

$$\dot{x} = Ax + bu \stackrel{\Delta}{=} f(x, u) \quad \text{или} \quad \dot{x} = f(x, u).$$

2) Найти решение уравнений относительно ϕ , которое будет выражаться через матричную экспоненту

$$\phi(t) = e^{-A^T t} \phi(t_0). \quad (3.4.11)$$

3) Составим функцию Гамильтона, которая равна

$$H(\phi, x, u) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=0}^n \phi_k f_k(x, u),$$

но т. к. по быстрдействию $f_0 \equiv 1$, то в матричной форме

$$H(\phi, x, u) = 1 + \phi^T f(x, u) = 1 + \phi^T (Ax + bu) = 1 + \phi^T Ax + \phi^T bu. \quad (3.4.12)$$

4) Для того чтобы управление было оптимальным необходимо, согласно принципа максимума Л.С. Понтрягина, чтобы функция Гамильтона $H(\bullet)$ достигла максимума по переменной u (t).

Так как переменная u входит только в последний член функции Гамильтона $H(\bullet)$, то максимум $H(\bullet)$ достигает при следующих условиях:

$$M(\phi, x, u) = \max_{u \in U} H(\phi, x, u) = I + \phi^T A x + |\phi^T b u|.$$

Следовательно, оптимальное по быстродействию управление будет

$$u^*(t) = u_{\max} \bullet \text{sign}[\phi^T(t)b], \quad \text{где } \phi(t) = e^{-At} \phi(t_0). \quad (3.4.13)$$

Таким образом, оптимальное управление задается кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения $u = \pm u_{\max}$ в зависимости от выхода сопряженной системы (рис. 3.2).

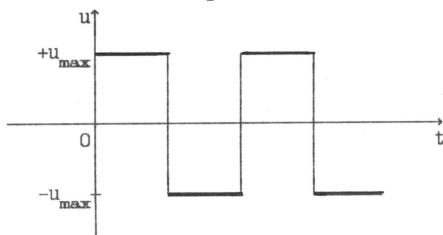


Рис. 3.2. Оптимальное управление

Из выражения (3.4.13) оптимального управления видно, что оно может быть определено точно как функция времени $u(t)$, если известны временные зависимости $\phi(t)$. Но для того, чтобы определить $\phi(t)$, необходимо знать начальное $\phi(t_0)$ или конечное $\phi(T)$ условие. А они являются нелинейными функциями граничных условий $x(t_0)$, $x(T)$ и не могут быть определены заранее. Это осложняет непосредственное использование полученных результатов.

Пример 3.3. Пусть задан критерий оптимальности по быстродействию

$$J = \int_0^T dt \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Структурная схема ОУ задана следующего вида:

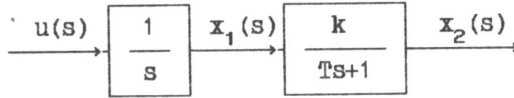


Рис. 3.3. Структурная схема ОУ

Необходимо перевести ОУ из начального состояния $t=0$, $x_1(0)=x_{10}$, $x_2(0)=x_{20}$ в новое состояние $x_1=x_{1K}$, $x_2=x_{2K}$ за минимальное время при ограничении на управление $|u| \leq u_{\max}$.

Алгоритм и решение

1) Запишем уравнения ОУ в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u = f_1(x, u) \\ \dot{x}_2 = \frac{k}{T} x_1 - \frac{1}{T} x_2 = f_2(x, u) \end{cases}$$

2) Запишем уравнения для сопряженных переменных:

а) в векторной форме:

$$\dot{\phi} = -A^T \phi; \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ k & -\frac{1}{T} \end{vmatrix}; \quad A^T = \begin{vmatrix} 0 & \frac{k}{T} \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{vmatrix};$$

$$\dot{\phi} = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{k}{T} \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{vmatrix} \phi \Rightarrow \begin{cases} \dot{\phi}_1 = -\frac{k}{T} \phi_2; \\ \dot{\phi}_2 = \frac{1}{T} \phi_2 \end{cases};$$

в) в скалярной форме:

$$\dot{\phi}_i = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \phi_k, \quad i=\overline{1,2}; \quad k=\overline{1,2};$$

$$i=1: \dot{\phi}_1 = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \phi_2 = -\frac{k}{T} \phi_2, \quad i=2:$$

$$\dot{\phi}_2 = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \phi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \phi_2 = \frac{1}{T} \phi_2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = -\frac{k}{T} \phi_2 \\ \dot{\phi}_2 = \frac{1}{T} \phi_2 \end{cases}$$

3) Найдем из второго уравнения ϕ_2

$$\int \frac{d\phi_2}{\phi_2} = \int \frac{1}{T} dt \Rightarrow \ln \phi_2 = \frac{1}{T} t + C_2.$$

Пропотенцируем

$$\phi_2 = e^{t/T + C_2} = C_2 e^{t/T}, \quad C_2 = e^{C_2}.$$

Подставим ϕ_2 в первое уравнение и получим ϕ_1 :

$$\frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{kC_2}{T} e^{t/T}; \quad \int d\phi_1 = \int -\frac{kC_2}{T} e^{t/T} dt;$$

$$\phi_1 = -\frac{kC_2}{T} \int e^{t/T} dt = -kC_2 e^{t/T} + C_1;$$

(правило интегрирования: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$).

4) Составим функцию Гамильтона

$$H(\phi, x, u) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=0}^n \phi_k f_k(x, u), \quad f_0=1, \quad \phi_0=1.$$

$$H = 1 + \phi^T f = 1 + \phi_1 f_1 + \phi_2 f_2 = 1 + [C_1 - kC_2 e^{t/T}]u +$$

$$+ C_2 e^{t/T} \left[\frac{k}{T} x_1 - \frac{1}{T} x_2 \right].$$

5) Рассмотрим слагаемое, зависящее от управления

$$H^0 = [C_1 - kC_2 e^{t/T}]u.$$

Для того чтобы функция Гамильтона была максимальна, необходимо поддерживать управление, равное $u_{\max}$, т. е.

$$H_{\max}^0 = [C_1 - kC_2 e^{t/T}] u_{\max}.$$

Кроме того, необходимо чтобы $u_{\max}$ меняло свой знак столько раз, сколько раз его меняет функция ϕ_1 , т. е.

$$\phi_1 = [C_1 - kC_2 e^{t/T}],$$

$$u^*(t) = u_{\max} \cdot \text{sign}[C_1 - kC_2 e^{t/T}].$$

Итак, оптимальное управление найдено с помощью принципа максимума Понтрягина (рис. 3.4). Осталось только найти моменты переключения $u^* = \pm I$.

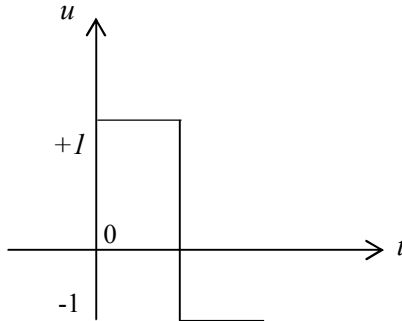


Рис. 3.4. Оптимальное управление

Теорема А. Фельдбаума об n -интервалах

Теорема А. Фельдбаума об n -интервалах дает минимальное число переключений оптимального управления для достижения поставленной цели.

Пусть управляемая система описывается уравнением вида

$$\dot{x} = Ax + bu.$$

Пусть матрица A в системе такова, что ее характеристический полином

$$\det(sI - A) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1$$

имеет вещественные отрицательные или нулевые корни. Согласно принципа максимума, оптимальное управление имеет вид

$$u^* = u_{\max} \operatorname{sign}[b^T \phi],$$

где вектор $\phi(t)$ определяется как

$$\phi(t) = e^{-A^T t} \phi(t_0).$$

Тогда функция $u(t)$ может быть записана через $\phi(t)$ следующим образом:

$$u^*(t) = u_{\max} \operatorname{sign}[b^T e^{-A^T t} \phi(t_0)].$$

Обозначим

$$\sigma(t) = b^T e^{-A^T t} \phi(t_0), \quad \text{тогда}$$

$$u^*(t) = u_{\max} \operatorname{sign}[\sigma(t)].$$

Так как число нулей (корней) функции $\sigma(t)$ на интервале $0 < t < \infty$ не превышает числа $(n-1)$, где n порядок системы, то функция, модуль которой не превышает $u_{\max}$, является кусочно-постоянной функцией, имеющей на интервале $t_0 < t < T$ не более $(n-1)$ точек разрыва. Отсюда следует *теорема об n -интервалах*.

Теорема А. Фельдбаума. Если характеристический полином матрицы A имеет вещественные отрицательные или нулевые корни, то для оптимального управления необходимо и достаточно n интервалов максимального значения управления $u_{\max}$, а знаки на интервалах должны чередоваться $(n-1)$ раз.

Эта теорема значительно облегчает нахождение оптимальных управлений, т. к. она исключает необходимость определения функций ϕ_i ($i=\overline{1,n}$) и их анализа.

На рис. 3.6 представлены оптимальные траектории движения системы.

Пример 3.4

Для объекта, представленного математической моделью (3.4.14) в пространстве состояний, необходимо обеспечить переход из начальной точки $x_0(t)$ в конечную $x_k(t)$ за время $T=1[\text{с}]$ с качеством процесса

$$J = \min_{U \in \Omega_U} \int_0^T (u^T Q u) d\tau.$$

Алгоритм и решение

1) Математическая модель объекта имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}. \quad (3.4.14)$$

Заданы начальные и конечные значения состояния объекта

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0 & x_1(T) &= 1 \\ x_2(0) &= 0 & x_2(T) &= 0 \end{aligned}. \quad (3.4.15)$$

2) Записываются и вводятся переменные

$$z = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} u^2 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix},$$

$$\Psi = [\Psi_0 \ \Psi_1 \ \Psi_2].$$

3) Составляется функция Гамильтона

$$H(\Psi, Z, U) = \Psi_0 u^2 + \Psi_1 x_2 + \Psi_2 u.$$

4) Для того чтобы управление было оптимальным, необходимо чтобы функция Гамильтона достигла максимума по переменной u управления

$$\max_{U \in \Omega_U} H : \frac{\partial H}{\partial u} = 2\Psi_0 u + \Psi_2,$$

$$u^* = -\Psi_2 / 2\Psi_0.$$

5) Находим решение гамильтоновой системы:

$$\dot{\Psi}_0 = -\frac{\partial H}{\partial z_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0, \quad \Psi_0 = C_0 = \text{const};$$

$$\dot{\Psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial z_2} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \Psi_1 = C_1 = \text{const};$$

$$\dot{\Psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial z_3} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\Psi_1 = -C_1, \quad \Psi_2 = C_1 t + C_2.$$

6) Отсюда оптимальное управление

$$u^* = -\frac{\Psi_2}{2\Psi_0} = -\frac{C_1 t + C_2}{2C_0} = b_1 t + b_2.$$

7) Для определения констант b_1, b_2 необходимо решить краевую задачу.

Запишем уравнение замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = b_1 t + b_2 \end{cases}.$$

8) Проинтегрируем

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t (b_1 \tau + b_2) d\tau = \frac{1}{2} b_1 t^2 + b_2 t,$$

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t \left(\frac{1}{2} b_1 \tau^2 + b_2 \tau \right) d\tau = \frac{1}{6} b_1 t^3 + \frac{1}{2} b_2 t^2.$$

9) Рассмотрим конечную точку $t = T = l c$

$$\begin{cases} x_1(T) = 1 \\ x_2(T) = 0 \end{cases}.$$

Тогда

$$\begin{cases} 1 = 1/6b_1 + 1/2b_2 \\ 0 = 1/2b_1 + b_2 \end{cases}$$

10) Получили систему уравнений, из которой находим $b_2 = 6, b_1 = -12$.

11) Запишем закон оптимального управления

$$u^* = -12t + 6.$$

Используя теорему А. Фельдбаума об n - интервалах, получим, что оптимальное управление меняется $(n-1)$ раз (рис. 3.5). Оптимальные траектории движения системы показаны на рис. 3.6.

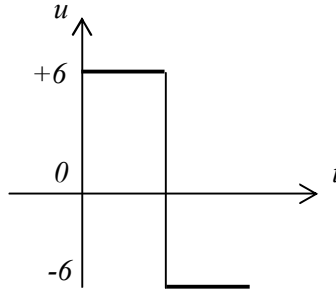


Рис. 3.5. Полученное оптимальное управление

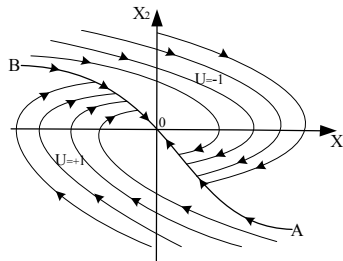


Рис. 3.6. Оптимальные траектории движения системы

Контрольные вопросы и упражнения:

1. Привести постановку задачи оптимального управления.
2. Перечислить некоторые частные критерии оптимально-

сти, показав их физический смысл.

3. Показать различия между двумя классами задач теории оптимального управления.

4. Показать основные характеристики методов классического вариационного исчисления.

5. Что характерно для задачи на условный экстремум?

6. Что выражают экстремали уравнения Эйлера-Пуассона?

7. Привести полную формулировку принципа максимума Л.С. Понтрягина.

8. Математическое описание линейной динамической системы задано в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU, \text{ где } A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -0,8 \end{vmatrix}; C = \begin{vmatrix} -1 \\ 5 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}. \\ Y &= C^T X \end{aligned}$$

Необходимо перевести систему из начального состояния $x_0(t)$ в конечное $x_k(t)$ за минимальное время при ограничении на управление

$$|u| \leq u_{\max}.$$

9. Сформулировать теорему А. Фельдбаума об n -интервалах переключения оптимального управления.

10. Математическое описание линейной динамической системы задано в пространстве состояний в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}.$$

Заданы начальные и конечные значения состояния объекта управления

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0 & x_1(T) &= 3 \\ x_2(0) &= 0 & x_2(T) &= 0 \end{aligned}$$

Необходимо обеспечить переход из начальной точки $x_0(t)$ в конечную $x_k(t)$ за время $T = 3$ [с] с качеством процесса

$$J = \min_{U \in \Omega_U} \int_0^T (u^T Q u) d\tau.$$

4. ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ Р. БЕЛЛМАНА

Глава посвящена методу динамического программирования в непрерывной и дискретной формах. Показана связь метода динамического программирования с функцией Ляпунова.

4.1. Формулировка принципа оптимальности

Формулировка принципа оптимальности Р. Беллмана: каким бы ни было начальное состояние системы x_0 и начальное оптимальное управление u^* (на интервале $t_0 \leq t \leq t_k$), последующее управление u_k (на интервале $t_k \leq t \leq T$) всегда должно быть также оптимальным относительно состояния, возникшего в результате первого этапа управления.

Рассмотрим уравнение управляемой системы, представленное в отклонениях от номинального режима, т. е. уравнение возмущенного движения относительно некоторой траектории:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), \\ f(0, 0, t) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

где $x(n^*I)$ – вектор отклонения фазовых переменных; $u(m^*I)$ – вектор управления; $f(n^*I)$ – векторная функция векторных аргументов x, u ; t – время.

В начальный момент времени $t=t_0$ состояние системы $x(t_0)=x_0$. На вектор фазовых переменных x и вектор управления u могут быть наложены различные ограничения $x \in X, u \in U$.

Пусть критерий оптимальности управления выражен функционалом следующего вида:

$$J = \int_{t_0}^T W(x, u, t) dt. \quad (4.1.2)$$

Необходимо перевести систему из начального состояния $x(t_0)=x_0$ в конечное состояние $x(T)=x_T$.

В общем случае такой перевод можно осуществить неединственным образом.

Сформулируем следующую задачу. Найти функцию $u(x, t)$ (до сих пор мы находили $u(t)$; здесь же закон управления является функцией не только времени, но и текущих значений вектора фазовых переменных), доставляющую минимум критерию оптимальности (4.1.2) при любых начальных отклонениях X_0 из области

$$\|X_0\| \leq D,$$

содержащей начало координат $x=0$.

Из постановки задачи видно, что она относится к классу задач оптимизации закона управления (т. е. к задаче 2 по классификации, показанной ранее).

Для решения поставленной задачи введем на рассмотрение функцию

$$V(x(t), t) = \min_{u \in U} \int_{t_0}^T W(x, u, t) dt. \quad (4.1.3)$$

Если T – фиксированное число, то $V(\bullet)$ будет зависеть от начального значения x_0 и нижнего предела интегрирования t_0 . В этом можно убедиться, если замкнуть систему (4.1.1) любым допустимым законом управления, проинтегрировать ее и вычислить (4.1.2).

Для получения принципа оптимальности предположим, что имеется оптимальная траектория $x_{op}(t)$ (рис. 4.1).

Обозначим через $u_0^*(t)$ оптимальное управление, переводящее систему из x_0 в x_T , а через $u_k(t)$ – управление, переводящее систему из x_k в x_T , где $x_k = x(t_k)$, $t_0 < t_k < T$, $x(t_k) \in x_{opt}(t)$.

Соответствующие значения функции $V(\bullet)$ будут равны $V(x_0, t_0) = V_0$, $V(x_k, t_k) = V_k$. Из этого следует

$$u_0^*(t) : x_0 \rightarrow x_T, \quad V(x_0, t_0) = V_0 \quad V_0 \neq V_k, \quad \text{но} \quad V_k = \min_{u \in U} \int_{t_k}^T W(\bullet) dt.$$

$$u_k(t) : x_k \rightarrow x_T, \quad V(x_k, t_k) = V_k.$$

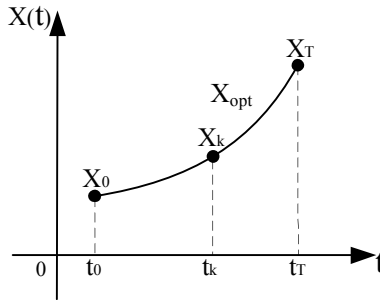


Рис. 4.1. Оптимальная траектория перевода системы из x_0 в x_T

Следовательно, на участке (t_k, T) имеем $u_k(t) \equiv u^*(t)$.

Принцип оптимальности, сформулированный Р. Беллманом, сводится к следующему: каким бы ни было начальное состояние x_0 и начальное оптимальное управление $u^*(t)$, последующее управление u_k всегда должно быть также оптимальным относительно состояния, возникшего в результате первого этапа управления. Таким образом, согласно этому принципу, оптимальное управление на интервале $t_k \leq t \leq T$ не зависит от того, как попала система в точку x_k , а определяется лишь ее состоянием x_k в рассматриваемый момент времени t_k . По-другому: кусок оптимальной траектории является частью всей оптимальной траектории, т. е. отрезок экстремали также является экстремалью.

4.2. Получение функционального уравнения Р. Беллмана. Метод динамического программирования

Для нахождения оптимального управления методом динамического программирования необходимо решить *специальное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных*, называемое функциональным уравнением Р. Беллмана. Получим это уравнение.

Пусть функция $V(\bullet)$ в выражении (4.1.3) является функцией гладкой, дифференцируемой по переменным x, t . Согласно принципу оптимальности Беллмана, независимо от того, каким было управление на отрезке (t_0, t) , на следующем отрезке (t, T) оно должно быть выбрано оптимальным.

Возьмем любое число $s>0, t+s<T$. Тогда

$$V[x(t+s), t+s] = \min_{u \in U} \int_{t+s}^T W[x(\tau), u(\tau), \tau] d\tau. \quad (4.2.1)$$

Оптимальное управление $u(\tau)$ должно доставлять минимум критерию (4.2.1) для любого $s>0$.

Из (4.1.3) имеем

$$\begin{aligned} V[x(t), t] &= \min_u \int_t^T W d\tau = \min_u \left[\int_t^{t+s} W d\tau + \int_{t+s}^T W d\tau \right] = \min_u \\ &\int_t^{t+s} W d\tau + \min_u \int_{t+s}^T W d\tau = \min_u \int_t^{t+s} W d\tau + V[x(t+s), t+s]. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Так как было сделано предположение о гладкости функции $V(\bullet)$, то существует предел

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{V[x(t+s), t+s] - V[x(t), t]}{s} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T \dot{x}, \quad (4.2.3)$$

где $\frac{\partial V}{\partial x}$ – вектор-градиент скалярной функции $V(x, t)$ по переменной x размера $(n \times 1)$:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T \triangleq (\text{grad } V)^T = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right].$$

В выражении (4.2.2) сделаем следующие преобразования:

а) для интеграла используем теорему о среднем

$$V[x(t), t] = \min_u \int_t^{t+s} W d\tau + V[x(t+s), t+s] = \min_u [W^* s] + V[x(t+s), t+s];$$

б) вычтем и прибавим $V[x(t), t]$:

$$V[x(t), t] = \min_u [W^* s] + V[x(t+s), t+s] - V[x(t), t] + V[x(t), t];$$

т. к. $V[x(t), t] \neq 0$, поэтому сократим обе части полученного выражения на $V[x(t), t]$ и вынесем за скобки оператор s . Получим

$$0 = \min_u \left[W^* + \frac{V[x(t+s), t+s] - V[x(t), t]}{s} \right] s.$$

Сокращая на s ($s \neq 0$) и переходя к пределу, получим

$$0 = \min_u \lim_{s \rightarrow 0} \left[W^* + \frac{V[x(t+s), t+s] - V[x(t), t]}{s} \right].$$

Учитывая (4.2.3), получим

$$0 = \min_u \left[W(x, u, t) + \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T f(x, u) \right]. \quad (4.2.4)$$

Это и есть основное функциональное уравнение Р. Беллмана. Функциональное уравнение Р. Беллмана является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных относительно неизвестной функции $V(x, t)$. Если для (4.2.4) существует решение $V(x, t)$, то соответствующее ему управление $u(x, t)$ будет доставлять минимум критерию (4.2.2).

Метод динамического программирования

Динамическое программирование можно определить как метод оптимизации многошаговых процессов принятия реше-

ний (средство отыскания экстремальных значений функции, позволяющее указать пути решения целого класса задач оптимизации в теории управления).

В основе метода динамического программирования лежат два следующих важных принципа.

1. *Принцип оптимальности* утверждает, что необходимо всегда обеспечивать оптимальное (в смысле принятого критерия) продолжение процесса относительно уже достигнутого его состояния, т. е. решение на каждом последующем шаге должно приниматься с учётом результата, достигнутого на предыдущих шагах, и в соответствии с принятыми критерием эффективности действий. Ниже будет показано, что этот принцип имеет довольно простую математическую интерпретацию, выражающуюся в составлении определенных рекуррентных соотношений.

2. *Принцип вложения* утверждает, что природа — характер задачи, допускающий использование метода динамического программирования, не меняется при изменении количества шагов процесса, т. е. форма такой задачи инвариантна относительно количества шагов процесса или итераций N . В этом смысле всякий конкретный процесс с заданным числом N оказывается как бы вложенным в семейство подобных ему процессов и может рассматриваться с позиции более широкого класса задач.

Реализация названных принципов дает гарантию того, что решение, принимаемое на очередном шаге, окажется наилучшим с точки зрения всего процесса в целом (а не «узких интересов» данного этапа); последовательность решения (одношаговой, двухшаговой и т. д.) задач приведет к решению исходной N -шаговой задачи.

Особенности построения схемы динамического программирования. Схема динамического программирования строится так, что первым исследуется конечный этап того реального явления, которое отражено в задаче оптимизации. Этот этап, как правило, может быть изучен и спланирован сам по себе наилучшим (в смысле принятого критерия) образом, поскольку является последним. Но сделать это можно лишь на основе предположений об ожидаемых исходах предшествующего (но еще не

изученного) этапа. Такой подход позволяет определить набор условных оптимальных решений. После анализа конечного этапа, нужно рассмотреть аналогичную задачу применительно к предпоследнему этапу процесса, но потребовать при этом, чтобы желаемый эффект был достигнут не на этапе отдельно, а на двух последних этапах вместе. Тем самым будет найден второй набор условных оптимальных решений. Повторив подобные операции (для третьего от конца, четвертого от конца и т. д. этапов исследуемого процесса), можно найти решение задачи в целом.

Рассмотрим особенности построения одной из схем динамического программирования. Пусть дано “ n ” неотрицательных известных функций вида $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_i(x_i), \dots, f_n(x_n)$, где $0 \leq x_i \leq M$ – дискретные значения аргументов этих функций, на которые наложены некоторые ограничения.

Для простоты предположим, что

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b_n, a_i > 0. \quad (*)$$

Пусть для любого набора $x_1, x_2, \dots, x_n$ существует *аддитивный критерий*:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i).$$

Предположим, что ограничения, наложенные на аргумент x_i , такие, что существует верхняя $\sup F(x_1; x_2; \dots; x_n)$ или нижняя $\inf F(x_1; x_2; \dots; x_n)$ граница множества аддитивных критериев, т. е.

$$\Phi_{1,2,\dots,n}(b_n) = \text{extr} F(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (**)$$

Определим такой набор $x_1, x_2, \dots, x_n$ для соответствующих функций $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_i(x_i), \dots, f_n(x_n)$, чтобы удовлетворив ограничению (*), получить экстремальное значение

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т. е. найдём $\Phi_{1,2,\dots,n}(b_n)$ и соответствующей ей (границы) набор аргументов.

Предположим, что из совокупности $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ выделена и зафиксирована величина x_n . Если в этой ситуации найти экстремальное значение $F(x_1, \dots, x_{n-1})$ по остальным переменным, то окажется, что полученное решение будет зависеть от выбранного значения x_n . Действительно, вследствие аддитивности критерия $F(x_1, \dots, x_n)$ справедливо следующее равенство:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_n(x_n) + \text{extr} \left[\sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) \right],$$

которое подтверждает предыдущее высказывание (слагаемое можно вынести за знак extr экстремума, поскольку оно связано только с x_n).

При любом постоянно целом значении $x_n \geq 0$ переменные $x_1, \dots, x_{n-1}$ должны удовлетворять неравенству

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \leq b_n - a_n x_n,$$

вытекающему из исходного ограничения (*) и требования неотрицательности и целочисленности.

Введя обозначение

$$\Phi_{1,2,\dots,(n-1)}(b_{n-1}) = \text{extr} \left[\sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) \right],$$

где $b_{n-1} = b_n - a_n x_n$, — можно утверждать, что

$$\Phi_{1,2,\dots,n}(b_n) = \text{extr} \{ f_n(x_n) + \Phi_{1,2,\dots,(n-1)}(b_{n-1}) \},$$

где x_n принимает значения $0, 1, 2, \dots, \Phi(b_n / a_n)$.

Таким образом, если известна граница заданного аддитивного критерия $\Phi_{1,2,\dots,(n-1)}(b_{n-1})$, первоначальная задача сводится к одномерной задаче оптимизации.

Поскольку $\Phi_{1,2,\dots,(n-1)}(b_{n-1})$ – верхняя (нижняя) граница множества $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, то задача отыскания этой границы полностью совпадает с исходной (различие лишь в числе переменных).

Следовательно, выделив x_{n-1} и повторив все предыдущие рассуждения, приходим к выводу, что

$$\Phi_{1,2,\dots,(n-1)}(b_{n-1}) = \text{extr}[f_{n-1}(x_{n-1}) + \Phi_{1,2,\dots,(n-2)}(b_{n-2})].$$

Систематизируя вышеизложенное, можно привести рекуррентные зависимости для отыскания (**)

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{1,2}(b_2) &= \text{extr}[f_2(x_2) + f_1(b_n - a_2 x_2)] \\ \Phi_{1,2,3}(b_3) &= \text{extr}[f_3(x_3) + \Phi_{12}(b_n - a_3 x_3)] \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi_{1,2,\dots,n}(b_n) &= \text{extr}[f_n(x_n) + \Phi_{12\dots(n-1)}(b_n - a_n x_n)] \end{aligned} \right\}.$$

В заключение следует кратко отметить *преимущества метода динамического программирования*

- Методом динамического программирования можно исследовать системы оптимального управления значительно более широкого класса, чем системы, описываемые дифференциальными уравнениями. Поэтому он применим не только к оптимальным задачам динамики, но и к весьма широкому кругу технических, медицинских и экономических задач, в которых связи между фазовыми координатами, управлением и критерием оптимальности могут задаваться как в виде уравнений весьма произвольного вида, так и в виде экспериментально определенных графиков или таблиц численных данных.

- Метод дает возможность решать задачи, которые не исследовались ранее из-за отсутствия соответствующего матема-

тического аппарата: например, вариационные задачи с ограничениями – неравенствами или конечномерные экстремальные задачи с дискретной структурой.

- Метод позволяет упростить поиск оптимальных решений в ряде случаев за счет резкого сокращения объёмов вычислений.

- Метод допускает широкое применение средств вычислительной техники, что облегчает сложные исследования.

К недостаткам можно отнести отсутствие универсального алгоритма, который был бы пригоден для решения всех задач. Дело в том, что алгоритмы в рамках динамического программирования объединены лишь общей идеей и в каждом конкретном случае должны формироваться применительно к условиям задачи. Кроме того, возникают значительные трудности при анализе задач большой размерности.

4.3. Связь метода динамического программирования с функцией А.М. Ляпунова

Рассмотрим случай, когда верхний предел в критерии оптимальности равен бесконечности, т.е.

$$J = \int_{t_0}^{\infty} W(x, u, t) dt \rightarrow \min_{u(x, t)}.$$

Пусть в результате решения уравнения Р. Беллмана найдена производящая функция $V(x, t)$ и соответствующее оптимальное управление $u(x, t)$. Из уравнения Р. Беллмана

$$0 = \min_u \left[W(x, u, t) + \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T f(x, u, t) \right]$$

имеем

$$0 = \min_u \left[W(x, u, t) + \frac{dV}{dt} \right].$$

Здесь $\frac{dV}{dt}$ – полная производная функции $V(\bullet)$.

Подставим сюда найденное оптимальное управление $u^*(x, t)$

$$W[x, u^*(x, t), t] + \frac{dV}{dt} = 0.$$

Откуда имеем

$$\frac{dV}{dt} = -W[x, u^*(x, t), t].$$

Пусть $W(\bullet)$ – знакоопределенная по x и положительная функция. Обычно для управляемой системы должно выполняться условие $x(\infty)=0, u(\infty)=0$ (здесь уравнения системы заданы в отклонениях). В рассматриваемом случае (верхний предел в критерии равен бесконечности) функция $V(\bullet)$ также должна удовлетворять граничному условию $V[x(\infty), \infty]=0$. Все эти условия будут выполнены, если решением уравнения Беллмана будет функция $V(\bullet)$, которая будет знакоопределенной положительной. Действительно, в этом случае решение уравнения Р. Беллмана $V(\bullet)$ будет функцией А.М. Ляпунова для замкнутой системы и ее асимптотическая устойчивость гарантируется.

Связь между методом динамического программирования и функцией А.М. Ляпунова заключается в следующем. Принципу оптимальности Р. Беллмана удовлетворяет некоторое *множество производящих функций* $V(\bullet)$. Действительное же решение задачи дают лишь те из них, которые являются функцией А.М. Ляпунова для замкнутой системы. Такие функции называются *оптимальными функциями Ляпунова*.

Найденные по этим функциям законы управления обеспечивают:

- во-первых, оптимальность в смысле заданного критерия;
- во-вторых, асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Контрольные вопросы и упражнения:

1. Фирма имеет два дочерних предприятия. По каждому дочернему предприятию известен возможный прирост прибыли (табл. 1):

Таблица 1

Возможный прирост прибыли

x	$q_1(x)$	$q_2(x)$
0	0	0
20	22	18
40	30	35
60	41	45
80	55	47
100	63	69

Требуется распределить средства $C=100$ [тыс.у.е.] между дочерними предприятиями так, чтобы общий прирост фирмы $\varphi_n(C)$ был максимальным

$$\varphi_n(C) = \max [q_n(x) + \varphi_{n-1}(C-x)]$$

$$0 \leq x \leq C$$

$$x = 20k, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots$$

2. Сформулировать принцип оптимальности Р. Беллмана.

3. Записать основное функциональное уравнение Р. Беллмана – специальное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных.

4. Фирма имеет два дочерних предприятия. По каждому дочернему предприятию известен возможный прирост прибыли (табл. 2):

Таблица 2

Возможный прирост прибыли

x	$q_1(x)$	$q_2(x)$
0	0	0
20	15	17
40	25	22
60	33	40
80	49	45
100	60	61

Требуется распределить средства $C=100$ [тыс. у.е.] между дочерними предприятиями так, чтобы общий прирост фирмы $\varphi_n(C)$ был максимальным

$$\begin{aligned}\varphi_n(C) &= \max [q_n(x) + \varphi_{n-1}(C-x)] \\ 0 &\leq x \leq C \\ x &= 20k, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

5. Сформулировать принципы оптимальности и вложения. Показать использование их в схеме динамического программирования.

6. Почему в методе динамического программирования начинают просмотр с обратного прохода и только затем осуществляют прямой проход.

7. Привести полную характеристику метода динамического программирования Р. Беллмана.

8. Показать достоинства и недостатки метода динамического программирования.

9. Показать связь метода динамического программирования с функцией А.М. Ляпунова.

5. МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В данной главе представлены методы и алгоритмы синтеза систем оптимального управления в непрерывной и дискретной формах. Приведены многочисленные реальные примеры синтеза оптимальных систем управления.

5.1. Аналитическое конструирование оптимального регулятора (АКОР)

Задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов была впервые поставлена и решена русским ученым А. М. Лётовым. Эта задача является типичной задачей класса 2 (по классификации, приведенной выше). Решением задачи является синтез оптимального закона управления.

Рассмотрим задачу аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР).

Пусть объект управления описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (5.1.1)$$

где $A (n \times n)$ – матрица постоянных коэффициентов; $x (n \times 1)$ – вектор фазовых переменных; $b (m \times 1)$ – вектор постоянных коэффициентов; u – скаляр, $u \in R^1$.

В начальный момент времени при $t=0$ обозначим состояние системы $x(0) = x_0 \neq 0$.

Будем искать закон управления в виде функции:

$$u = u(x), \quad u \in U. \quad (5.1.2)$$

Для закона управления в системе обеспечивается следующее условие: $x(\infty) = 0$, т. е. система асимптотически устойчива.

Минимизируется критерий следующего вида:

$$J = \int_0^{\infty} W(x, u) dt \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (5.1.3)$$

$$W(x, u) = x^T Q x + r u^2, \quad (5.1.4)$$

где r – знакоопределенная положительная константа ($r > 0$); Q – знакопостоянная положительная матрица ($Q \geq 0$).

Для решения этой задачи воспользуемся *методом динамического программирования*. Для этого запишем функциональное уравнение Беллмана в следующем виде:

$$\min_{\{u\}} (W(x, u) + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right]_u f(x, u)) = 0, \quad (5.1.5)$$

где $f(x, u) = Ax + bu$.

Запишем это выражение в развернутом виде:

$$\min_{\{u\}} (x^T Q x + r u^2 + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right] (Ax + bu)) = 0. \quad (*)$$

Рассмотрим члены, зависящие от управления u

$$r u^2 + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right] bu.$$

Произведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} r u^2 + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right] bu &= r \{ (u^2 + r^{-1} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right] bu) \pm \frac{1}{4} \left[r^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T b \right]^2 \} = \\ &= r \{ (u + \frac{1}{2} r^{-1} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right] b)^2 - \frac{1}{4} \left[r^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T b \right]^2 \}. \end{aligned}$$

Последнее выражение имеет минимум при

$$u = -\frac{1}{2} r^{-1} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right] b.$$

Так как представлено управление $u(x)$, доставляющее минимум (*), с учетом этого уравнение (*) запишется следующим образом:

$$x^T Q x + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right] A x - \frac{1}{4} r^{-1} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T b \right]^2 = 0. \quad (**)$$

Неизвестным здесь является функция $V(\bullet)$. Будем искать функцию $V(\bullet)$ в виде

$$V = x^T P x.$$

Причем функция $V(\bullet)$ должна удовлетворять условию

$$V(x(\infty)) = 0.$$

Возьмем производную от функции $V(\bullet)$ и подставим в уравнение (**). В результате имеем следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= x^T P + P x = 2x^T P, \\ x^T Q x + x^T P A x + x^T A^T P x - r^{-1} x^T P b P^T b^T x &= 0, \\ x^T (Q + P A + A^T P - r^{-1} P b P^T b^T) x &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

где $P(n \times n)$ – симметрическая положительно определенная матрица, т. е. $P^T = P$; $P > 0$.

Получим нелинейное матричное уравнение, которое должно существовать при любых значениях x , поэтому можем переписать его в виде:

$$Q + P A + A^T P - r^{-1} P b P^T b^T = 0. \quad (5.1.7)$$

Полученное уравнение (5.1.7) называется матричным уравнением Риккати.

С учетом симметрии матрицы P , это уравнение эквивалентно системе уравнений $\frac{n(n+1)}{2}$, но уже скалярных алгебраических уравнений относительно неизвестных элементов матрицы P . Для решения матричного уравнения Риккати нужно привлекать численные методы.

Если матрица P найдена, то, подставив ее в закон управления, получим оптимальное управление:

$$U^* = -\frac{1}{2} r^{-1} 2X^T P b = -r^{-1} X^T (P b) = -r^{-1} (b^T P)x = -K^T x,$$

где $K^T = +r^{-1} b^T P$ – вектор коэффициентов; $u^* = u(x)$.

Покажем, что спроектирована не только оптимальная система, но и асимптотически устойчивая.

Запишем уравнение для замкнутой системы

$$\dot{X} = Ax + bu = (Ax - bK^T X) = (A - bK^T)x.$$

Запишем подынтегральную функцию $W(\bullet)$ с учетом этого

$$W = X^T QX + r (-K^T X)(-K^T X) = X^T Q_k X,$$

т. е. квадратичная форма, тогда $W > 0$; здесь $Q_k = Q + rK K^T$.

Пусть Q_k – положительно определенная матрица. Тогда уравнение Р. Беллмана можно записать в следующем виде:

$$\min_{\{u\}} (W + \frac{dV}{dt}) = 0.$$

Если в это уравнение подставить оптимальное управление, то получим

$$W(x, u^*(x)) + \frac{dV}{dt} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dV}{dt} = -W(x, u(x)).$$

Следовательно, в соответствии с *прямым (вторым) методом Ляпунова* для асимптотической устойчивости замкнутой системы матрица P должна быть симметрической и положительно определенной, т. е. $P = P^T$ и $P > 0$.

Рассмотрим конкретный пример (рис. 5.1).

Пример 5.1. Пусть объект управления описывается уравнением следующего вида:

$$\dot{x} = ax + bu,$$

где a и b – скаляры; x – фазовые переменные в отклонениях; u – скалярное управление, $u \in R^1$.

Необходимо найти оптимальное управление, переводящее систему из начального состояния при $t=0$: $x(0)=x_0 \neq 0$ в конечное $x_k(t, \infty)$: $x(\infty)=0$.

При этом необходимо минимизировать критерий следующего вида:

$$J = \int_0^{\infty} W(x, u) dt \rightarrow \min_{u(x)},$$

где $W(x, u) = qx^2 + ru^2$; $q > 0$, $r > 0$ – скаляры.

Алгоритм и решение

1) Используем метод динамического программирования. Записываем уравнение Р. Беллмана

$$\min_{\{u\}} (qx^2 + ru^2 + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right] (ax + bu)) = 0.$$

2) Выделим члены, зависящие от управления u :

$$ru^2 + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right] bu = r \left(u + \frac{1}{2} r^{-1} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right] b \right)^2 - \frac{1}{4} r^{-1} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right] b^2.$$

3) Выберем управление

$$u = -\frac{1}{2} r^{-1} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right] b.$$

Тогда

$$(qx^2 + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right] ax - \frac{1}{4} r^{-1} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T b \right]^2) = 0.$$

4) Будем искать функцию $V(\bullet)$ в виде

$$V(\bullet) = px^2,$$

где p – неизвестная константа.

$$qx^2 + 2px^2 a - r^{-1} b^2 p^2 x^2 = 0, \quad (x \neq 0)$$

$$r^{-1} b^2 p^2 - 2pa - q = 0,$$

$$p_{1,2} = \frac{r}{b^2} \left(a \pm \sqrt{a^2 + \frac{qb^2}{r}} \right).$$

5) Выбираем

$$p = \frac{r}{b^2} \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{qb^2}{r}} \right).$$

6) Используем найденное p в законе управления

$$u^* = -\frac{1}{b} \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{qb^2}{r}} \right) X, \quad \text{тогда} \quad u^* = -Kx.$$

Что и требовалось найти.

Пример 5.2. Использование метода синтеза систем с заданным спектром для решения задачи АКОР.

Для решения задачи АКОР методом динамического программирования необходимо решать *нелинейное матричное уравнение Риккати*. Для решения такого уравнения необходимо использовать численные методы. При использовании численных методов возникает много проблем, связанных с выбором начального приближения, устойчивости и т. д. Поэтому рассмотрим другой метод, который сводится к процедуре синтеза сис-

тем с заданным спектром. Этот метод не требует решения матричных уравнений Риккати.

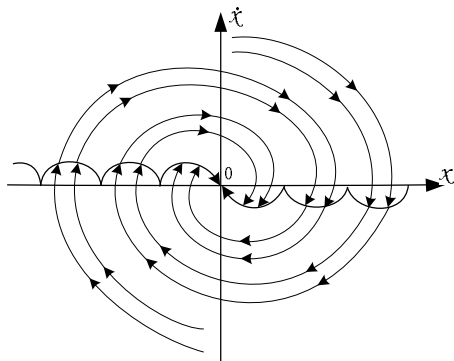


Рис. 5.1. Траектории оптимального движения системы

Рассмотрим систему вида:

$$\dot{x} = Ax + bu.$$

Найти оптимальное управление u_{opt} , которое минимизирует критерий следующего вида:

$$J = \int_0^{\infty} W(x, u) dt,$$

где $W = \frac{1}{2} (X^T QX + ru^2)$. Перевести систему из $x(0)$ в $x(\infty)$.

Алгоритм и решение

1) Обозначим

$$\varphi(u, x) = \dot{x} - (Ax + bu).$$

2) Введем вектор неопределенных множителей Лагранжа $\lambda(n \times 1)$. С помощью этого вектора введем новую подынтегральную функцию:

$$F = W + \lambda^T \varphi(u, x).$$

3) Используем классический метод вариационного исчисления; запишем уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right) = 0. \end{cases}$$

4) Подставим в эти уравнения выражения производных функций F , предварительно подставив в нее $W(x, u)$ и $\varphi(x, u)$:

$$F = \frac{1}{2} (X^T Q X + r u^2) + \lambda^T (\dot{x} - (A x + b u));$$

5) Уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} X^T Q - \lambda^T A - \dot{\lambda} = 0 \\ r u - \lambda^T b = 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{\lambda} = X^T Q - \lambda^T A, \quad u = r^{-1} \lambda^T b.$$

6) Подставим значение управления u в уравнение объекта:

$$\dot{X} = A x + b r^{-1} b^T \lambda.$$

7) Тогда имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = X^T Q - \lambda^T A \\ \dot{X} = A X + b r^{-1} b^T \lambda \end{cases}.$$

8) Приведем эту систему к виду:

$$\dot{Z} = D Z,$$

где Z – вектор, размерности $(2n+1)$.

$$Z = \begin{vmatrix} X \\ \lambda \end{vmatrix}; \quad D = \begin{vmatrix} A & br^{-1}b^T \\ Q & -A \end{vmatrix}; \quad \dot{Z} = \begin{vmatrix} \dot{X} \\ \dot{\lambda} \end{vmatrix}.$$

9) Характеристический полином матрицы D имеет вид:

$$\det(sI - D) = s^{2n} + d_n s^{2(n-1)} + d_{(n-1)} s^{2(n-2)} + \dots + d_2 s^2 + d_1 s^0 \quad (\text{прим. } d_1 s^{2(n-n)}).$$

Отметим ряд свойств записанного полинома:

- полином содержит только четные степени переменной s ;
- корни его расположены симметрично относительно мнимой оси комплексной плоскости корней;
- “ n ” собственных значений матрицы замкнутой системы находятся среди $2n$ корней характеристического полинома.

Третье свойство можно использовать для нахождения оптимального закона управления путем использования процедуры синтеза систем с заданным спектром. Для значений матрицы D и s выбрать из них n штук с отрицательной вещественной частью, которые следует считать заданным спектром замкнутой системы.

5.2. Метод скользящей вариации

Результаты использования методов последовательных приближений в задачах оптимального управления, основанных на принципе максимума Понтрягина, демонстрируют их эффективность при решении прикладных задач. Ниже представлена суть метода, приведен пример использования метода скользящей вариации для линейной системы (линейно-выпуклый случай) и доказано утверждение, показывающее правило останова.

Постановка задачи

Имеется объект, который описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (5.2.1)$$

где $x(t) = R^n, u(t) \in R^r (r \leq n)$ – траектория и управление в момент времени t . Предполагается, что $f(x, u)$ – непрерывна, удовлетворяет условию Липшица по x и условию роста:

$$\langle x, f(x, u) \rangle \leq c(1 + |x|^2), \quad c = \text{const}, \quad c > 0. \quad (5.2.2)$$

При этом известно, что объект вполне управляем; вектор управления $u(t)$ удовлетворяет в каждый момент времени t ограничению

$$u(t) \in U, \quad (5.2.3)$$

где U – замкнутое множество. Эта замкнутость и не позволяет исследовать поведение управляемого объекта методами классического вариационного исчисления.

Априори известно, что

$$(X(0), X(T)) \in M \subset R^n \times R^n, \quad (5.2.4)$$

где M – некоторое замкнутое множество. Кроме того, в каждый момент времени t состояние объекта должно удовлетворять следующим фазовым ограничениям:

$$G_i(t, x(t)) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad t \in [0, T]. \quad (5.2.5)$$

Задан критерий качества управления, т. е. функционал следующего вида:

$$J(x_0, u(\bullet), x(\bullet)) = \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt + \sigma_0(x_0, x(T)). \quad (5.2.6)$$

Задача оптимального управления заключается в нахождении такого допустимого управления $u^*(t)$ и соответствующей ему траектории $x^*(t)$, удовлетворяющей ограничениям (5.2.4 –

5.2.5), которые минимизируют функционал заданного качества $J(x_0, u(\bullet), x(\bullet))$.

Для решения задачи (5.2.1 – 5.2.6) можно использовать метод скользящей вариации, который будет описан ниже для одного класса задач.

Оказывается, что при весьма общих предположениях задача (5.2.1–5.2.6) может быть сведена к следующей простейшей задаче оптимального управления:

$$J_1(u) = \varphi(x(T)) \longrightarrow \min_u \quad (5.2.7)$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (5.2.8)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in [0, T]. \quad (5.2.9)$$

Возможно, что при таком сведении функционал в новой задаче может оказаться недифференцируемым. Всюду далее будем полагать, что функция

$$f(x, U) = \{f(x, u), u \in U\}$$

выпукла, начальное состояние X_0 фиксировано, отрезок времени $[0, T]$ задан. Функция $\varphi(x)$ – дважды дифференцируема на E^n ; вектор-функция $f(x, u)$ – непрерывна по своим аргументам на прямом произведении $E^n * U$ и имеет непрерывную производную $f_x(x, u)$ второго порядка; множество U — выпуклый компакт (если некоторая бесконечная последовательность точек имеет предельную точку). Класс допустимых управлений определим как множество измеримых на отрезке времени $[0, T]$ вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих ограничению (5.2.3).

Метод скользящей вариации для простейшей задачи управления

Метод скользящей вариации связан с методом неклассической вариации функционала вдоль управления $u(t)$ В.А. Срочко и основан на методе получения необходимых условий опти-

мальности траекторий, предложенных Р.В. Гамкрелидзе и независимо А.А. Милютиним и А.Я. Дубовицким.

Опишем k - итерацию. Пусть на k - шаге итерационного процесса получены допустимое управление $u^k(t), t \in [0, T]$ и соответствующие ему фазовая и сопряженная траектории $x^k(t), \psi^k(t)$. Найдено вспомогательное управление $\hat{u}^k(t)$ из условия максимума гамильтониана

$$\hat{u}^k(t) = \arg \max_{u \in U} H(\psi^k(t), x^k(t), u), \quad t \in [0, T].$$

Опишем семейство траекторий, зависящее от параметра $\lambda_k \in [0, 1]$ и являющееся решением уравнения следующего вида:

$$\dot{x}_\lambda^k = (1 - \lambda_k) f(x_\lambda^k(t), u^k(t)) + \lambda_k f(x_\lambda^k, \hat{u}^k(t)). \quad (5.2.10)$$

В работах показано, что для траектории $x_\lambda^k(\bullet)$ существует такое допустимое управление $\hat{u}^k(t)$, что

$$\dot{x}_\lambda^k = f(x_\lambda^k(t), u_\lambda^k(t)).$$

Важное свойство траектории $x_\lambda(\bullet)$ заключается в том, что существует производная по параметру решения

$$z(t) = \frac{\partial x_\lambda(t)}{\partial \lambda} = \frac{\partial x(t, \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0},$$

которая является решением следующего уравнения в вариациях:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^k(t), u^k(t)) z(t) + f(x^k(t), \hat{u}^k(t)) - f(x^k(t), u^k(t)), \quad (5.2.11) \\ z(0) &= 0. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial \varphi(x(T; \lambda))}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \langle \nabla \varphi(x^k(T)), z(T) \rangle,$$

где $z(T)$ определяется следующим образом:

$$z(T) = \int_0^T \phi(T, t) [f(x^k(t), \hat{u}^k(t)) - f(x^k(t), u^k(t))] dt.$$

Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \int_0^T [\phi^*(T, t) (-\nabla \varphi(x^k(T)), f(x^k(t), u^k(t)) - f(x^k(t), \hat{u}^k(t)))] dt. \quad (5.2.12)$$

Здесь и далее $\phi(t, t)$ – фундаментальная матрица решений, знак (*) означает транспонирование.

Легко проверить, что $\psi^k(t)$ есть решение следующей сопряжённой системы:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^k &= -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^k(t), u^k(t))\right)^* \psi^k(t), \\ \psi^k(T) &= -\nabla \varphi(x^k(T)). \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Выбор вспомогательного управления $\hat{u}^k(t)$ осуществляется из условия

$$\langle \psi^k(t), f(x^k(t), \hat{u}^k(t)) \rangle = \max_{u \in U} \langle \psi^k(t), f(x^k(t), u) \rangle. \quad (5.2.14)$$

При таком выборе вспомогательного управления $\hat{u}^k(t)$ имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x(T; \lambda)) = \int_0^T [\langle \psi^k(t), f(x^k(t), \hat{u}^k(t)) \rangle - \max_{u \in U} \langle \psi^k(t), f(x^k(t), u) \rangle] dt \leq 0. \quad (5.2.15)$$

Тогда имеем, что для всех $\lambda \in [0,1]$

$$\varphi(x(T;\lambda)) - \varphi(x(T;0)) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x(T;0))\lambda + r(\lambda),$$

$$\text{где } r(\lambda) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}(x(T;\theta_\lambda)), \quad \theta_\lambda \in (0,1). \quad (5.2.16)$$

Из предположений о непрерывной дифференцируемости и условия роста на правую часть (5.2.8) следует, что существует постоянная $R > 0$ такая, что

$$\|r(\lambda)\| \leq R\lambda^2. \quad (5.2.17)$$

Причём постоянная R определяется только X_0 , T и её можно вычислить заранее.

Полагая, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x(T;\lambda)) = \int_0^T [H(\psi^k(t), x^k(t), \hat{u}^k(t)) - \max_{u \in U} H(\psi^k(t), x^k(t), u)] dt < 0,$$

выберем

$$\lambda_k = \frac{1}{2R} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x^k(T)) \right|. \quad (3.2.18)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x^{k+1}(T)) - \varphi(x^k(T)) &\leq \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x(T;0))\lambda_k + R\lambda_k^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2R} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x(T;0)) \right| \left[- \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right| \right] = - \frac{1}{4R^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x(T;0)) \right| \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Покажем сходимость любой подпоследовательности $\{x^k(t)\}$ в множество X^* . Определим множество X^* как мно-

жество оптимальных траекторий, удовлетворяющих принципу максимума:

$$1) H(\psi(t), x(t), u(t)) - \max_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u) = 0 \\ n.e.t \in [0, T]; \quad (5.2.20)$$

$$2) \dot{\psi} = -f'_x(x, u)^* \psi, \quad \psi(T) = -\nabla \varphi(x(T)). \quad (5.2.21)$$

Очевидно, что $X^* \subset X$ и $X \setminus X^* \neq \emptyset$.
Выберем функцию

$$f_1(x^k(t)) = -\frac{1}{4R^2} \int [H(x^k(t), \psi^k(t), \hat{u}^k(t)) - \max_{u \in U} H(\psi^k(t), x^k(t), u)] dt. \quad (5.2.22)$$

Из (5.2.22) видно, что свойства этой функции таковы, что

$$f_1(x^k(t)) > 0 \quad \text{для всех } x^k(t) \in X \setminus X^*, \\ f_1(x^*(t)) = 0 \quad \text{для всех } x^*(t) \in X^*.$$

Функция $f_1(x^k(t))$ – непрерывная функция на $t \in [0, T]$.
Имеем (5.2.22)

$$\varphi_1(x^{k+1}(t)) - \varphi_1(x^k(t)) \leq -f_1(x^k(t)), t \in [0, T].$$

Тогда из монотонности и ограниченности последовательности $\{\varphi_1(x^k)\}$ следует, что

$$\varphi_1(x^k(t)) - \varphi_1(x^{k+1}(t)) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty; \quad \text{значит,} \\ f_1(x^k(t)) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Из непрерывности функции $f_1(x^k(t))$ следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^k(t), X^*) = 0,$$

где $\rho(x^k(t), X^*)$ – расстояние от траектории $x^k(t)$ до множества X^* и определяется следующим образом:

$$\rho(x^k(t), X^*) = \inf_{|x^*(t)|} \|x^k(t) - x^*(t)\|$$

$$|x^*(t)| = \sup_{\tau \in [0, T]} |x(\tau)|$$

Пример 5.3. Линейная система (линейно-выпуклый случай)

Пусть вполне управляемый объект описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax(t) + u(t),$$

$$x(0) = x_0, u(t) \in U, t \in [0, T].$$

Критерий качества управления $(x(T))$ – есть выпуклая функция. Сопряжённая задача для $\psi(\tau)$ записывается следующим образом:

$$\dot{\psi} = -A^* \psi,$$

$$\psi(T) = -\nabla \varphi(x(T)).$$

Последовательно решив пару задач Коши на k -шаге, находят фазовую и сопряжённую траектории $x^k(t)$ и $\psi^k(t)$.

Вспомогательное управление $\hat{u}^k(t)$ определяют из условия (5.2.14). Далее траектория системы определяется как

$$x_{\lambda}^{k+1}(t) = (1 - \lambda_k)x_{\lambda}^k(t) + \lambda_k \hat{x}_{\lambda}^k(t). \quad (5.2.23)$$

Очередное приближение управления находится по следующему правилу:

$$u^{k+1}(t) = (1 - \lambda_k)u^k(t) + \lambda_k \hat{u}^k(t). \quad (5.2.24)$$

Выше показана сходимость любой подпоследовательности $\{x^k(t)\}$ в множество X^* , траектории в котором удовлетворяют принцип максимума (5.2.20-5.2.22). Заметим, что в рассматриваемом линейно-выпуклом случае множество X^* является множеством экстремально-оптимальных траекторий.

Рассмотрим *правило останова*. Для этого докажем следующее утверждение.

Утверждение. Если на k - шаге

$$\int_0^T [H(\psi^k(t), x^k(t), \hat{u}^k(t)) - \max_{u \in U} H(\psi^k(t), x^k(t), u)] dt \geq -\varepsilon, \quad (5.2.25)$$

$$\text{то } \varphi(x^k(T)) \leq \min \varphi(x(T)) + \varepsilon. \quad (5.2.26)$$

Доказательство. Предположим, найдены оптимальные траектории $x^*(t), u^*(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(x^*(T)) - \varphi(x^k(T)) &\geq \langle \nabla \varphi(x^k(T)), x^*(T) - x^k(T) \rangle = \\ &= \int_0^T \langle \nabla \varphi(x^k(t)), \phi(T, t)(u^*(t) - u^k(t)) \rangle dt = \int_0^T \langle \phi^*(T, t)(-\nabla \varphi(x^k(t))), (-u^*(t) + u^k(t)) \rangle dt = \\ &= \int_0^T \langle \psi^k(t), u^k(t) - u^*(t) \rangle dt \geq \int_0^T [\langle \psi^k(t), u^k(t) \rangle - \max_{u \in U} \langle \psi^k(t), u \rangle] dt \geq -\varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. $\varphi(x^*(T)) - \varphi(x^k(T)) \geq -\varepsilon$.

Что и требовалось доказать.

Параметрический синтез нелинейных законов управления прямым методом Ляпунова

Пусть задана линейная САУ следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (5.2.27)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^1$, A, B – матрицы постоянных коэффициентов соответствующих размерностей.

Выберем закон управления

$$u = -tx + u_0, \quad (5.2.28)$$

где u_0 – дополнительный сигнал; t – вектор параметров закона управления.

Замкнув заданную систему выбранным законом управления

$$\dot{x} = Ax - Btx + Bu_0 = Cx + Bu_0,$$

где $C = A - Bt$, можно вложить какие-то определенные свойства в замкнутую систему.

Это возможно, когда амплитуда управляющего сигнала ограничена:

$$|u_i| \leq u_{i_{\max}}, i = \overline{1, l}.$$

Во многих случаях нелинейный синтез позволяет улучшить динамические характеристики линейной системы.

Пример 5.4

Пусть система задана уравнениями (5.2.27) – (5.2.28).

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные $\alpha < 0$; пусть $x \in R^2$. На рис. 5.2 показаны фазовые портреты линейной и нелинейной систем. Вполне очевидно, что нелинейная система более быстродействующая, чем линейная.

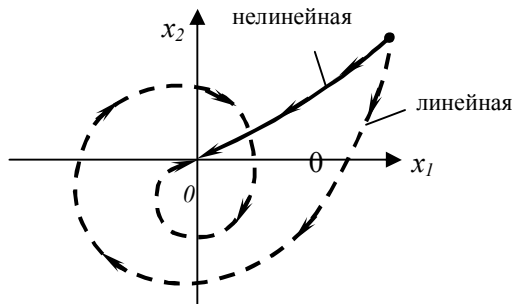


Рис. 5.2. Фазовый портрет

Решим задачу параметрического синтеза нелинейной САУ, используя второй (прямой) метод Ляпунова.

Наряду с уравнением (5.2.27) рассмотрим транспонированную систему:

$$\dot{x}^T = x^T A^T + u^T B^T. \quad (5.2.29)$$

Пусть матрица A системы (5.2.27) устойчивая, т. е. собственные значения матрицы имеют отрицательные вещественные части:

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Выберем функцию Ляпунова в квадратичной форме следующего вида:

$$V = x^T P x,$$

где $P = P^T$, $P > 0$, т. е. P симметрическая и положительно определенная матрица.

Запишем полную производную функции Ляпунова:

$$\frac{dV}{dt} = x^T \dot{P} x + x^T P \dot{x}. \quad (5.2.30)$$

Подставим (5.2.27) и (5.2.28) в (5.2.30). Тогда полная производная функции Ляпунова будет равна следующему:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (x^T A^T + u^T B^T) P x + x^T P (A x + B u) = x^T A^T P x + u^T B^T P x + x^T P A x + x^T P B u = \\ &= (x^T A^T P x + x^T P A x) + (u^T B^T P x + x^T P B u) = -x^T Q x + 2u^T B^T P x = -x^T Q x + 2u^T (C x) \end{aligned}$$

где $C = B^T P$, $Q = Q^T$ – симметричная матрица, $Q > 0$ – знакоопределенная положительная.

Следовательно, полная производная функции Ляпунова равна следующему:

$$\frac{dV}{dt} = -x^T Q x + 2u^T (C x). \quad (5.2.31)$$

Выберем закон управления $u = u_{\max} \text{sign}(Cx)$.

При таком выборе функции управления второе слагаемое в уравнении (5.2.31) будет всегда отрицательным (первое и так отрицательное). Следовательно, $\frac{dV}{dt} < 0$, что обеспечит асимптотическую устойчивость системе по Ляпунову.

Таким образом, процедура параметрического синтеза нелинейной САУ распадается на два следующих этапа:

1) Необходимо решить матричное уравнение Ляпунова следующего вида:

$$A^T P + PA = -Q.$$

Задавшись $Q = Q^T > 0$, находят решение матричного уравнения – матрицу P , причем $P = P^T$; $P > 0$.

2) Следует определить матрицу C , равную

$$C = B^T P.$$

Ниже представлена (рис. 5.3) матричная структурная схема системы с заданным типом нелинейности (система 1).

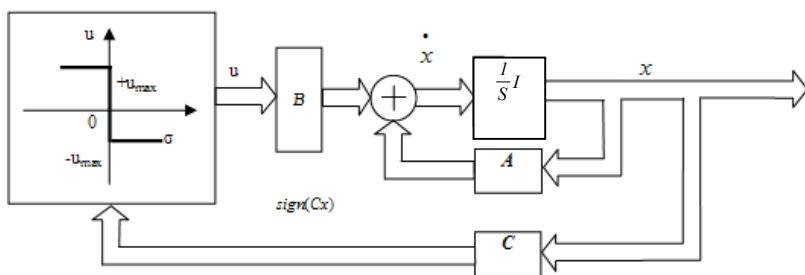


Рис. 5.3. Матричная структурная схема системы 1

Каждая компонента вектора управления должна проходить через нелинейность такого типа. Поэтому в системе должно быть l штук релейных характеристик.

Этот же подход позволяет реализовать другие законы управления. Например: $u = -\text{sat}(Cx)$, где sat – функция насыщения, т. е. другая нелинейность рис. 5.4 (система 2).

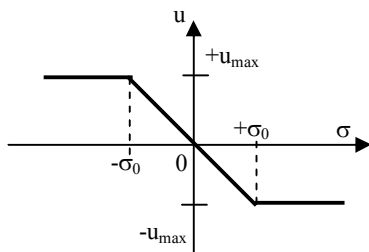


Рис. 5.4. Нелинейность с насыщением

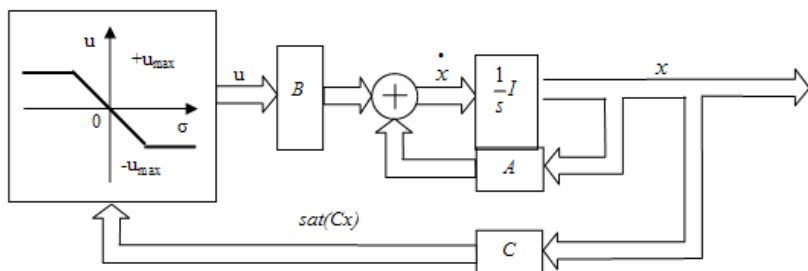


Рис. 5.5. Матричная структурная схема системы 2

Реакция второй системы несколько замедлена по сравнению с первой системой, т. е. быстродействие меньше, но перерегулирование у 2-ой системы меньше, чем у первой, что наглядно показывают переходные процессы систем (рис. 5.6).

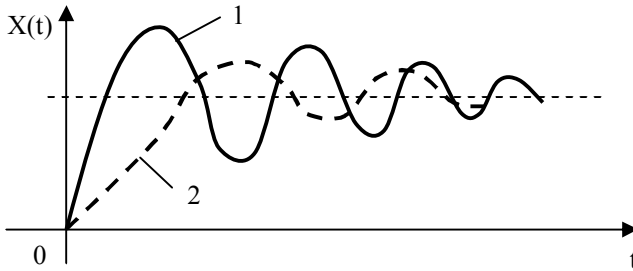


Рис. 5.6. Переходные процессы

Пример 5.5

Задано математическое описание системы, представленной на рис. 5.7, следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = ku(t) \\ \varepsilon(t) = \gamma_{зад} - \gamma(t) \quad \text{или} \quad \ddot{\varepsilon}(t) = -ku(t) \\ u(t) = \varphi(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \end{cases}$$

Синтезировать оптимальный автомат стабилизации крена летательного аппарата по следующему квадратичному критерию:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + \dot{\varepsilon}^2(t) + \varphi^2(t)] dt.$$

Блок-схема автомата стабилизации крена летательного аппарата приведена на рис. 5.7.

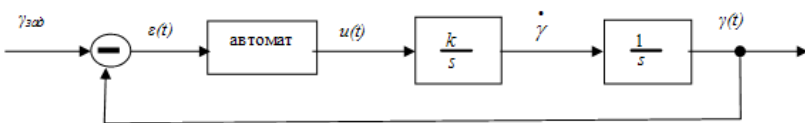


Рис. 5.7. Схема стабилизации летательного аппарата

Алгоритм и решение

1) Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{1}{k} \varepsilon(t) \\ x_2(t) = -\frac{1}{k} \dot{\varepsilon}(t); m.e. \dot{x}_1(t) = x_2(t) \end{cases} \quad \text{при } k=1.$$

2) Запишем дифференциальные уравнения системы относительно ошибки

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \quad (5.2.32)$$

3) Пусть $k=1$, тогда критерий оптимальности:

$$J(x,u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt.$$

4) Найдем оптимальный закон управления в форме обратной связи $u^*(x_1, x_2)$.

5) Составим уравнение Беллмана, которое для рассматриваемой задачи имеет вид

$$-\frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial t} = \min_{u \in V} \left[\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) + \frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial x_2} \dot{x}_2 \right].$$

6) Подставим сюда значения производных $\dot{x}_1(t)$ и $\dot{x}_2(t)$:

$$-\frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial t} = \min_{u \in V} \left[\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) + \frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial x_2} u \right]. \quad (5.2.33)$$

7) Минимизируя правую часть уравнения по "u", найдём

$$\frac{\partial(\bullet)}{\partial u} = 0 ; \quad u + \frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial x_2} = 0 .$$

$$\text{Откуда} \quad u^* = - \frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial x_2} .$$

8) Подставляя u^* в уравнение (5.2.33), получим соотношение

$$\begin{aligned} - \frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial t} = & \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial x_2} \right]^2 + \\ & + \frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial x_1} x_2 \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u^2 + \frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial x_2} u = & \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial J(\bullet)}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial J(\bullet)}{\partial x_2} \right)^2 = \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial J(\bullet)}{\partial x_2} . \end{aligned}$$

9) Решая уравнение (5.2.34), найдем

$$J(x, u) = \frac{1}{2} (\alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2),$$

где α, β, γ — некоторые вещественные числа.

Подставляя

$$\frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial x_1} = \alpha x_1 + \beta x_2; \quad \frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial x_2} = \beta x_1 + \gamma x_2$$

в уравнение (5.2.34), получим

$$\frac{1}{2} x_1^2(1-\beta^2) + x_2^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma^2}{2} + \beta \right) + x_1 x_2 (\alpha - \gamma\beta) = 0.$$

10) Поскольку последнее соотношение должно выполняться для любых x_1 и x_2 , то

$$\begin{cases} 1-\beta^2=0; & \beta = +1; \\ 1-\gamma^2+2\beta=0; & \gamma = \pm\sqrt{3}; \\ \alpha-\gamma\beta=0. & \alpha = \pm\sqrt{3}; \end{cases} \quad (\text{при } \beta=-1, \gamma=\pm j).$$

Выделяя решение этой системы уравнений, для которых α, β, γ вещественные числа, имеем два следующих решения:

$$\text{I)} \quad \beta = 1; \quad \gamma = \sqrt{3}; \quad \alpha = \sqrt{3};$$

$$\text{II)} \quad \beta = 1; \quad \gamma = -\sqrt{3}; \quad \alpha = -\sqrt{3}.$$

11) Тогда оптимальное управление будет равно

$$u^* = -\frac{\partial J(x^*, u^*)}{\partial x_2} = -(\beta x_1 + \gamma x_2).$$

Откуда имеем

$$\begin{cases} u_I^*(x_1, x_2) = -x_1 - \sqrt{3}x_2; \\ u_{II}^*(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{3}x_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u_I^*(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \varepsilon + \sqrt{3}\dot{\varepsilon}; \\ u_{II}^*(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = -\varepsilon - \sqrt{3}\dot{\varepsilon}. \end{cases} \quad (5.2.35)$$

12) Подставляя полученное оптимальное управление (5.2.35) в уравнение (5.2.32), заметим, что в первом случае движение системы асимптотически устойчиво, а во втором – неустойчиво. Покажем это.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \sqrt{3}x_2, \end{array} \right. \quad \text{т.к.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{\kappa} \varepsilon \\ x_2 = -\frac{1}{\kappa} \dot{\varepsilon}. \end{array} \right.$$

Ранее

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{array} \right\}; \quad u_I(t) = \varepsilon + \sqrt{3} \dot{\varepsilon}. \quad \text{Тогда при } \kappa = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\varepsilon \\ x_2 = -\dot{\varepsilon} \end{array} \right\}.$$

Имеем следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \sqrt{3} x_2 \end{array} \right.$$

или

$$\dot{X} = AX,$$

$$\text{где } A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & (-\sqrt{3} - \lambda) \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \sqrt{3}\lambda + 1 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} - 1};$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm j\frac{1}{2}; \quad \text{т. е.} \quad \begin{array}{l} \operatorname{Re} \lambda_1 < 0, \\ \operatorname{Re} \lambda_2 < 0 \end{array} \quad \text{что и требовалось доказать.}$$

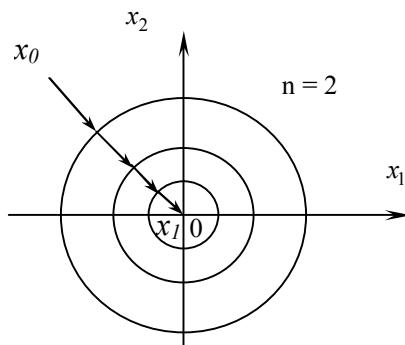


Рис. 5.8. Геометрическая интерпретация асимптотической устойчивости движения системы

Структурная схема оптимальной системы стабилизации летательного аппарата по углу крена представлена на рис. 5.9.

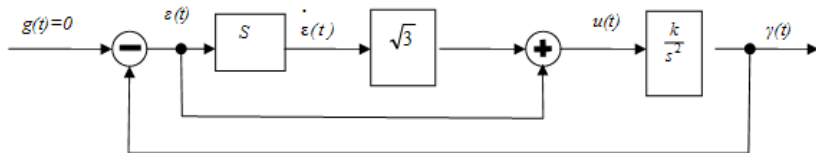


Рис. 5.9. Структурная схема системы оптимального управления

Пример 5.6

Задана динамическая система (рис. 5.10), математическое описание которой имеет следующий вид:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = \dot{u}(t).$$

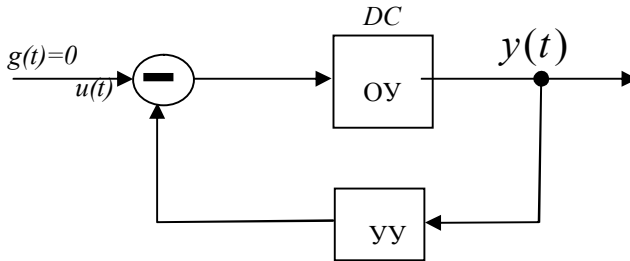


Рис. 5.10. Исследуемая динамическая система

Выделить область управляемости и синтезировать оптимальный по быстродействию закон при следующих ограничениях на функцию управления:

$$|u(t)| \leq 1.$$

Алгоритм и решение

- 1) Понизим порядок уравнения, введя следующие обозначения:

$$y_1 = y(t); \quad y_2 = \dot{y}(t).$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2(t) \\ \dot{y}_2 = -y_2(t) + u(t). \end{cases}$$

- 2) Проведем замену переменных:

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1(t) + y_2(t) - u(t) \\ x_2(t) = y_2(t) - u(t). \end{cases} \quad (*)$$

Запишем исходную систему уравнений следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0; & f_1(x, u) = 0 \\ \dot{x}_2 = -x_2(t) - u(t); & f_2(x, u) = -x_2 - u. \end{cases}$$

3) Согласно необходимым условиям максимума для определения оптимального управления составим гамильтониан:

$$H(x, u, \varphi) = -1 - \varphi_2(t)x_2 - \varphi_2(t)u.$$

4) Максимизируя эту функцию по $u(t)$, найдем оптимальное управление

$$u^*(t) = -\text{sign} \varphi_2(t).$$

5) Функция $\varphi_2(t)$ согласно условиям максимума удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\varphi}_2(t) = -\frac{\partial H(x, u, \varphi)}{\partial x_2} = -\varphi_2(t).$$

$$\text{Решение } \varphi_2(t) = C_2 e^{-t}.$$

6) Подставляя решение этого уравнения в функцию управления получим

$$u^*(t) = U \max \text{sign } e^{-t} c_2,$$

где C_2 — постоянная интегрирования.

7) Пусть $u^*(t) = \Delta = \pm 1$; в этом случае решение исходной системы уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 \\ x_2(t) = c_2 e^{-t} - \Delta(1 - e^{-t}); \end{cases} \quad (\text{на входе } l(t) \Rightarrow \dot{h}(t)).$$

8) Выделим на фазовом пространстве переменных x_1 и x_2 множество точек, для которых $\dot{y} = y = 0$. Согласно уравнениям связи (*) в точках этой области $x_2 = x_1$. Следовательно,

синтезируемое управление постоянно и должно обеспечивать попадания фазовых траекторий на прямую $x_2 = x_1$ (рис. 5.11).

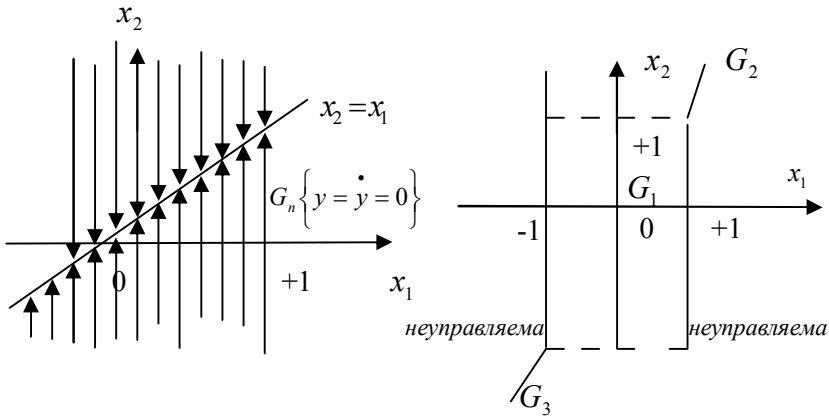


Рис. 5.11 Оптимальные траектории Рис. 5.12. Области управления

Как видно из рис. 5.11 не все точки фазового пространства (x_1, x_2) удовлетворяют этому условию. Точки, для которых эти условия выполняются, входят в область управляемости. Для рассматриваемой задачи областью управляемости является множество вида

$$G_{упр} = G_1 U G_2 U G_3,$$

где

$$G_1 = \{(x_1, x_2) : |x_2| \leq 1\}$$

$$G_2 = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 1, x_1 \leq x_2\}$$

$$G_3 = \{(x_1, x_2) : x_2 \leq -1, x_1 \geq x_2\}.$$

Взаимное расположение управляемых и неуправляемых областей системы показано на рис. 5.12.

Для управляемых областей оптимальный по быстродействию закон имеет вид

$$u(x_1, x_2) = \text{sign}(x_2 - x_1). \quad (**)$$

После подстановки выражений (*) в формулу (**) оптимальный закон управления объектом относительно выходных координат примет вид

$$u\left(y, \dot{y}\right) = -\text{sign } y.$$

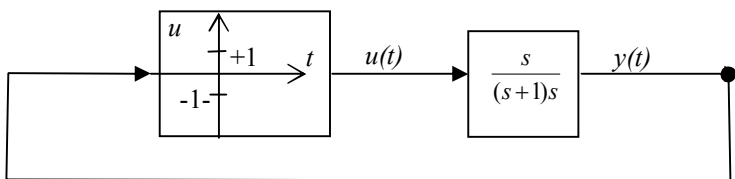


Рис. 5.13. Структурная схема оптимальной системы

5.3. Решение задачи оптимального синтеза в дискретной форме

Русский ученый А.М. Лётов в 1960 г. впервые ввел термин *АКОР* – аналитическое конструирование оптимальных регуляторов – для синтеза автоматических регуляторов путем минимизации функционала следующего вида:

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} x'(t_2) S x(t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} x'(t) Q x(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} u'(t) R u(t) dt \quad (5.3.1)$$

при $t_2 = \infty$, $t_1 = 0$, $u \in \mathbb{R}^1$. Здесь и далее используется знак (') транспонирования матриц.

Объект управления – линейный автономный вполне управляемый и наблюдаемый. Практически одновременно была опубликована работа Ричарда Калмана, в которой решена задача АКОР в несколько общем виде с использованием этого же функционала (5.3.1). В последующем обе работы получили широкую известность и применение.

В данном параграфе рассматривается оптимальное управление *линейным автономным объектом* при переводе его из *заданного начального состояния в нулевое*; исследуется изменение собственных движений и стабилизация ОУ с помощью обратных связей по состоянию. Рассматривается решение задачи АКОР, представленное Р. Калманом и Р. Кепке, где нахождение оптимального управления осуществляется путем прогонки решения в обратном времени.

Решение задачи АКОР

Задано уравнение дискретного линейного автономного ОУ в пространстве состояний

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (5.3.2)$$

$$y_k = C'x_k$$

с постоянными матрицами A , B , C соответствующих размерностей, а также начальные условия $x_0 \neq 0$. Триада (A, B, C) полностью управляема и наблюдаема (рис. 5.14).

Задача состоит в построении регулятора, формирующего такой вектор управляющих переменных u_k из вектора переменных состояния x_k , который переводит систему в конечное состояние $X_N \approx 0$ и минимизирует квадратичный критерий качества следующего вида:

$$\mathfrak{J} = x_N' S x_N + \sum_{k=0}^{N-1} [x_k' Q x_k + u_k' R u_k], \quad (5.3.3)$$

где матрицы S и Q – положительно полуопределены и симметричны, матрица R – положительно определена и симметрична, так что выполняются следующие условия:

$$x'Sx \geq 0, \quad x'Qx \geq 0, \quad u'Ru > 0.$$

Следует отметить, что матрицы S и Q выбираются равными, когда $X_N \approx 0$.

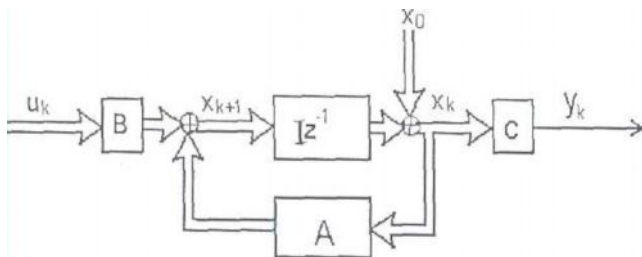


Рис. 5.14. Матричная схема ОУ в пространстве состояний

Математическая постановка задачи

Пусть задан ОУ следующего вида:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= C'x_k. \end{aligned}$$

Необходимо найти оптимальное управление u_k^* , минимизируя функционал следующего вида:

$$\mathfrak{J} = X_N' Q X_N + \sum_{k=0}^{N-1} [X_k' Q X_k + u_k' R u_k] \rightarrow \min_{u_k} \forall k = \overline{0, N-1}, \quad (5.3.4)$$

при ограничениях

$$u_k \in U, \quad \psi_0 = \psi_k = 0.$$

Здесь U – выпуклое замкнутое множество.

Определение оптимальной управляющей переменной является задачей *динамической оптимизации*. В соответствии с принципом оптимальности каждый отрезок оптимальной траектории также является оптимальным. Это означает, что если известна конечная точка, оптимальная траектория может быть найдена в обратном направлении, т. е. путем прогонки решения в обратном времени.

Для минимизации функции (5.3.4) необходимо обеспечить выполнение соотношений

$$\min_{U_{N-1}} \{ \dots \} = \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial U_{N-1}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial^2 U_{N-1}} > 0. \quad (5.3.5)$$

Используя правила вычисления производных от векторов и матриц, получим

$$u_{N-i}^* = -(R + B'QB)^{-1} B' Q A X_{N-j} = -K_{N-j} X_{N-j}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Здесь и далее $I(n \times n)$ – единичная матрица. Таким образом, получили регулятор состояния с переменными параметрами

$$U^*_{N-j} = -K_{N-j} X_{N-j}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (5.3.6)$$

который формирует пропорциональную отрицательную обратную связь по состоянию на входе объекта с помощью изменяющейся матрицы коэффициентов передачи K_{N-j} (рис. 5.15). Параметры такого регулятора определяются в результате решения следующих рекуррентных уравнений:

$$\begin{aligned} K_{N-j} &= (R + B'P_{N-j+1}B)^{-1} B' P_{N-j+1}A \\ P_{N-j} &= Q + A' P_{N-j+1} [I - B(R + B'P_{N-j+1}A)] \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

с исходной матрицей $P_N = Q$. Последнее уравнение (5.3.7) является разностным матричным уравнением Риккати.

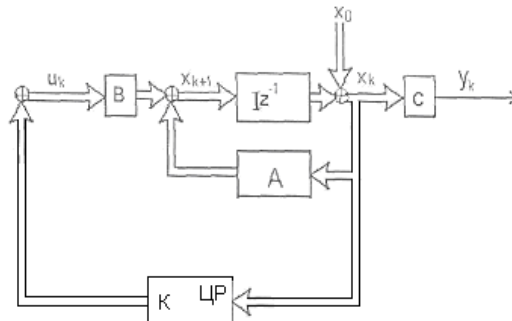


Рис. 5.15. Матричная схема ОУ с регулятором состояния

При $N \rightarrow \infty$ матрица коэффициентов передачи K_{N-j} стремится к фиксированному конечному значению

$$\bar{K} = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{K}_{N-j}, \quad j = \overline{1, N},$$

т. е. в пределе получаем регулятор с постоянными параметрами

$$U_k^* = -\bar{K}X_k. \quad (5.3.8)$$

Матрица этого регулятора удовлетворяет следующему уравнению:

$$\bar{K} = (R + B' \bar{P} B)^{-1} B' \bar{P} A, \quad (5.3.9)$$

при $P = P_0$, являющемся решением стационарного матричного уравнения Риккати

$$\bar{P} = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{P}_{N-j} = Q + A' \bar{P} [I - B(R + B' \bar{P} B)^{-1} B' \bar{P}] A. \quad (5.3.10)$$

Решение нелинейного уравнения (5.3.10) может быть получено с помощью рекуррентного уравнения (5.3.7). Регулятор состояния с постоянными параметрами (5.3.8) наиболее пригоден для практического применения, поэтому используется в данной работе.

Для замкнутой системы из уравнений (5.3.2) и (5.3.8) имеем

$$X_{k+1} = [A - B \bar{K}] X_k. \quad (5.3.11)$$

Соответствующее уравнению (5.3.11) характеристическое уравнение записывается в виде

$$\det[zI - A + B \bar{K}] = 0. \quad (5.3.12)$$

Эта замкнутая система является *асимптотически устойчивой*, т. к. ОУ (5.3.12) обладает свойством полной управляемости. Если же это не так, то неуправляемая часть системы должна иметь, по крайней мере, асимптотически устойчивые собственные значения.

Экспериментальные исследования различных ОУ из выделенного класса показали, что решение задачи АКОР рассматриваемым методом достигается достаточно быстро, за 10-15 шагов.

Графически зависимость коэффициентов регулятора состояния для одного из ОУ из выделенного класса представлена на рис. 5.16.

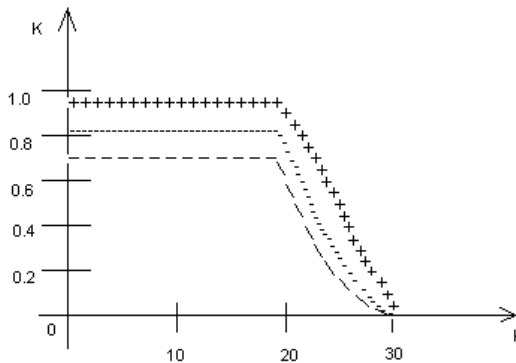


Рис. 5.16. Зависимость коэффициентов передачи по каналам управления системы

Здесь приняты следующие обозначения: + с коэффициентом K_1 , • K_2 , - K_3 .

Контрольные вопросы и упражнения:

1. Какое значение имеет решение задачи аналитического конструирования оптимального регулятора (АКОР)?
2. Привести формализованную постановку задачи АКОР, решаемую методом динамического программирования.
3. Привести укрупненный алгоритм решения задачи АКОР для дискретной системы.
4. Сформулировать задачу динамической оптимизации.
5. Почему необходима прогонка решения в обратном времени?

6. Чем отличается отрицательная обратная связь (ООС) по состоянию от обычной ООС?

7. Показать, что спроектированная система не только система оптимального управления, но и асимптотически устойчивая.

8. Показать применение принципа оптимальности Р. Беллмана при прогонке решения в обратном времени.

9. Привести постановку задачи оптимального управления, где множество допустимых управлений – замкнутое множество.

10. Почему нельзя исследовать поведение управляемого объекта методами классического вариационного исчисления при $u \in V$, где V – замкнутое множество?

8. Что является необходимыми условиями для оптимальности траекторий в методе скользящей вариации?

9. Что собой представляет «игольчатая» вариация управления?

10. Что означает неклассическая вариация функционала?

11. Получить оптимальное управление как функцию от фазовых переменных, т. е. $u^* = u(x)$.

12. К какому классу задач в теории оптимальных систем относится задача АКОР?

16. Чем отличается метод скользящей вариации от методов классического вариационного исчисления?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем учебном пособии представлен математический аппарат для описания систем в пространстве состояний, проверки основных свойств динамической системы, а именно: устойчивости по А.М. Ляпунову, наблюдаемости и управляемости по Р. Калману и Е. Гильберту.

В учебном пособии рассмотрен набор необходимых условий оптимальности как для двух основных задач оптимального управления, так и для случая, когда управление выбирается из замкнутого множества. Также показаны алгоритмы решения задачи параметрического синтеза для систем оптимального управления.

Для решения задач, оптимальных по быстродействию, используется принцип максимума Л.С. Понтрягина. Кроме того, приведена теорема А.А. Фельдбаума об n -интервалах, которая показывает минимальное число переключений оптимального управления $u(t)$ для достижения поставленной цели.

Для нахождения оптимального управления $u(x, t)$, когда закон оптимального управления является функцией не только времени, но и текущих значений вектора фазовых переменных, получено нелинейное дифференциальное уравнение Р. Беллмана в частных производных. Показана связь между методом динамического программирования и функцией А.М. Ляпунова; кроме того, найденные по этим функциям законы управления обеспечивают:

- оптимальность в смысле заданного критерия;
- асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Последняя глава посвящена моделям и методам синтеза оптимальных систем управления, описание которых задано в пространстве состояний в непрерывной и дискретной формах. Задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) была впервые поставлена и решена русским ученым А.М. Лётовым. Для решения задачи АКОР используется метод динамического программирования Р. Беллмана; найдено оптимальное управление, которое гарантирует асимптотическую ус-

тойчивость замкнутой системе. Кроме того, показан численный пример решения задачи АКОР с использованием классического метода вариационного исчисления, а также метод, представленный Р. Калманом и Р. Кепке, где нахождение оптимального управления осуществляется путём прогонки решения в обратном времени. При нахождении оптимального управления с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина в случае, когда управление $u \in V$, где V – замкнутое множество, показан метод скользящей вариации.

Следует отметить, что для более глубокого изучения вопросов, рассматриваемых в данном учебном пособии, необходимо обратиться к приведенному библиографическому списку, в который включены работы, ставшие классическими. Кроме того, за рамками настоящего учебного пособия остался широкий круг вопросов, связанных с построением оптимальных управлений, функционирующих в условиях неопределённости стохастической или нечеткой природы. Автор надеется, что эти вопросы будут представлены в дальнейшем, как результаты продолжения работы в данном направлении.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.В.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1976. – 629 с.
2. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1968. – 308 с.
3. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления. – М.: Наука, 1971. – 115 с.
4. *Фельдбаум А.А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. – М.: Наука, 1966. – 624 с.
5. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. – М.: Наука, 1985. – 520 с.
6. *Лётов А.М.* Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1969. – 360 с.
7. *Беллман Р.* Динамическое программирование. – М.: Мир, 1960. – 400 с.
8. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965. – 458 с.
9. *Беллман Р., Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления. – М.: Наука, 1969. – 118 с.
10. *Черноусько Ф.Л.* Динамическое программирование. – М.: Наука, 2001. – 139 с.
11. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука. 1978. – 488 с.
12. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
13. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. Единый подход. – М.: Мир, 1974. – 374 с.
14. *Сборник задач по ТАУ и управлению /Под ред. В.А. Бесекерского–* М.: Наука, 1988. – 475 с.
15. *Топчиев Ю.И., Цыпляков А.П.* Задачник по ТАУ. – М.: Машиностроение, 1987. – 592 с.
16. *Волобуева О.П.* Основы теории управления: Учебник. – Алматы: Ассоциация вузов РК, 2005. – 256 с.

17. *Волобуева О.П.* Исследование динамики САУ: Учеб. пособие. – Алматы: КазНТУ, 1999. – 86 с.

18. *Волобуева О.П.* Исследование линейных автономных дискретных САУ. – Алматы: КазНТУ, 1995. – 28с.

19. *Волобуева О.П.* Нахождение оптимального управления линейной динамической системой методом скользящей вариации. // Применение вычислительных средств в научных исследованиях и учебном процессе.– М.: МГУ, 1992. – С. 19 – 24.

Приложение А

ГЛОССАРИЙ

- **Система**, заданная в пространстве состояний, называется *вполне управляемой*, если для нее существует ограниченный

входной сигнал $u(t)$, переводящий ее из любого начального состояния X_0 в любое наперед заданное конечное состояние X_k за конечное время.

- **Система**, заданная в пространстве состояний, называется **вполне наблюдаемой**, если начальное состояние $x(0)$ может быть определено через значения вектора выходных переменных $y(t)$, измеряемого на конечном интервале времени $0 \leq t \leq T$.

- **Допустимым управлением** будем называть всякую кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, со значениями в области U , непрерывную на концах отрезка $t_0 \leq t \leq t_1$, на котором она задана.

- **Задача оптимального быстродействия**: среди всех допустимых управлений $u=u(t)$, под воздействием которых объект переходит из заданного начального состояния x_0 в предписанное конечное состояние x_1 , найти такое, для которого этот переход осуществляется за кратчайшее время.

- **Критерий оптимальности** называется **функционалом**, а **функция**, обеспечивающая экстремум этому функционалу, называется **экстремалью**.

- **Задача оптимального перехода** из начального состояния в конечное представляет собой **краевую задачу**.

- **Оптимальное управление** задается кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения $u = \pm u_{\max}$ в зависимости от выхода сопряженной системы.

- **Принцип максимума Л.С. Понтрягина** – принцип, ведущий к решению общей задачи о нахождении оптимального по скорости переходного процесса в непрерывных системах. Принцип максимума обоснован как необходимый и достаточный признак оптимального процесса для линейных систем и необходимый признак оптимального процесса для нелинейных систем.

- **Принцип оптимальности Р. Беллмана:** каким бы ни было начальное состояние системы x_0 и начальное оптимальное управление u_0^* (на интервале $t_0 \leq t \leq t_k$), последующее управление u_k (на интервале $t_k \leq t \leq T$) всегда должно быть также оптимальным относительно состояния, возникшего в результате первого этапа управления. По другому: кусок оптимальной траектории является частью всей оптимальной траектории, т. е. отрезок экстремали также является экстремалью.

- **Теорема А. Фельдбаума.** Если характеристический полином матрицы A имеет вещественные отрицательные или нулевые корни, то для оптимального управления *необходимо и достаточно* n интервалов максимального значения управления $u_{\max}$, а знаки на интервалах должны чередоваться $(n-1)$ раз.

- **Метод динамического программирования** есть метод оптимизации многошаговых процессов принятия решений, т. е. средство отыскания экстремальных значений функции, позволяющее указать пути решения целого класса задач оптимизации в теории управления.

- Принципу оптимальности Р. Беллмана удовлетворяет некоторое **множество производящих функций** $V(\bullet)$. Действительное же решение задачи дают лишь те из них, которые являются функцией А.М. Ляпунова для замкнутой системы. Такие функции называются **оптимальными функциями Ляпунова**. Найденные по этим функциям законы управления обеспечивают: во-первых, оптимальность в смысле заданного критерия; во-вторых, асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Приложение Б

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Описание динамической системы в пространстве состояний имеет вид: $\dot{X} = AX + BU$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Устойчиво ли движение системы по Ляпунову; управляема ли система по критерию Р. Калмана?

- А) $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 4$; система управляема; неустойчиво;
- В) $\lambda_1 = -2; \lambda_2 = 4$; система неуправляема; неустойчиво;
- С) $\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -4$; система управляема; неустойчиво;
- Д) $\lambda_1 = -2; \lambda_2 = 4$; система управляема; устойчиво;
- Е) $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -4$; система неуправляема; устойчиво.

2. Математическое описание линейной динамической системы задано в пространстве состояний в канонической форме

$$\dot{X}^* = AX^* + B^*U, \text{ где } A^* = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}; B^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}; C^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Устойчиво ли } Y^* = C^*X^*$$

движение системы по Ляпунову; управляема и наблюдаема ли система по критерию Е. Гильберта?

- А) Неуправляемая, ненаблюдаемая; неустойчиво;
- В) Неуправляемая, наблюдаемая; асимптотически устойчиво;
- С) Управляемая, наблюдаемая; асимптотически устойчиво;
- Д) Управляемая, ненаблюдаемая; неустойчиво;
- Е) Неуправляемая, ненаблюдаемая; устойчиво.

3. Математическое описание линейной динамической системы задано в пространстве состояний в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 \end{cases}.$$

Задана функция А.М. Ляпунова:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Определить устойчивость движения системы по второму (прямому) методу Ляпунова.

- А) Асимптотически устойчиво при $x_1 > x_2$;
- В) Движение системы неустойчиво при $x_1 = x_2$;
- С) Устойчиво при $2x_1 > x_2$;
- Д) Устойчиво при $x_1 \geq x_2$;
- Е) Асимптотически устойчиво при $x_2 > x_1$.

4. Математическое описание линейной динамической системы задано в пространстве состояний $\dot{X} = AX + BU$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Устойчиво ли движение системы по Ляпунову; управляема ли система по критерию Р. Калмана?

- А) $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 5$; система неуправляема; неустойчиво;
- В) $\lambda_1 = -5; \lambda_2 = 1$; система управляема; устойчиво;
- С) $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -5$; система управляема; устойчиво;
- Д) $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 5$; система неуправляема; устойчиво;
- Е) $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 5$; система управляема; неустойчиво.

5. Математическое описание линейной динамической системы задано в пространстве состояний в канонической форме $\begin{bmatrix} \dot{X}_1^* \\ \dot{X}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$. Устойчиво ли движение системы по Ляпунову? Вполне управляема ли система по критерию Е. Гильберта и какой системе в скалярной форме соответствует?

- А) Неустойчиво; система неуправляема, $\begin{cases} \dot{X}_1^* = 2X_1^* + 3U_1 - U_2, \\ \dot{X}_2^* = -5X_2^* \end{cases}$
- В) Устойчиво; система управляема, $\begin{cases} \dot{X}_1^* = -5X_1^* - U_1 + 3U_2, \\ \dot{X}_2^* = 2X_2^* + 3U_1 - U_2 \end{cases}$
- С) Неустойчиво; система неуправляема, $\begin{cases} \dot{X}_1^* = 2X_1^* - U_1 + 3U_2, \\ \dot{X}_2^* = -5X_2^* \end{cases}$
- Д) Неустойчиво; система неуправляема, $\begin{cases} \dot{X}_1^* = -5X_2^* - U_1 + 3U_2, \\ \dot{X}_2^* = 2X_1^* + 3U_1 - U_2 \end{cases}$
- Е) Устойчиво; система неуправляема, $\begin{cases} \dot{X}_1^* = -5X_2^* - U_1 + 3U_2, \\ \dot{X}_2^* = 2X_1^* + 3U_2 \end{cases}$

6. Пусть задана линейная динамическая система 2-го порядка, следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = -7x_1 + 6x_2 \\ \dot{x} = 10x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

Задана функция А.М. Ляпунова:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Определить устойчивость движения системы по второму (прямому) методу Ляпунова.

- А) Асимптотически устойчиво при $x_1 \in (3x_2; 0,5x_2)$;
- В) Движение системы устойчиво при $x_1 \in (0,33; 4x_2)$;
- С) Неустойчиво при $x_1 \in (2x_2; 3x_2)$;
- Д) Асимптотически устойчиво при $x_1 \in (0,29x_2; 2x_2)$;
- Е) Устойчиво при $x_1 \in (0,55x_2; 0,95x_2)$.

7. Как можно определить процесс управления?

- A) Задать полный вектор управления $u(t)$;
- B) Задать полный вектор фазовой траектории $x(t)$;
- C) Задать пару векторных функций $(u(t), x(t))$;
- D) Задать пару векторных функций $(u(t), x(t))$ и x_0 ;
- E) Задать полный вектор управления $u(t)$, но не задавать $x(t)$.

8. Если переход из начального состояния x_0 в конечное x_k осуществляется за кратчайшее время, то задачу называют задачей

- A) Оптимальной точности;
- B) Оптимального быстродействия;
- C) Оптимальной траектории;
- D) Оптимального регулятора;
- E) Оптимальной.

9. Что означает предположение, что “рули” безынерционны?

- A) Можно переключать из одного положения в другое за довольно короткое время;
- B) Переключать из одного положения в другое за довольно продолжительное время;
- C) Мгновенно переключать из одного положения в другое;
- D) Не мгновенно переключать из одного положения в другое;
- E) Невозможно переключать из одного положения в другое.

10. Что является необходимым и достаточным признаком оптимального процесса для линейных систем?

- A) Принцип оптимальности;
- B) Принцип вложенности;
- C) Принцип нелинейности;
- D) Принцип максимума;
- E) Принцип безынерционности.

11. Назовите физический смысл следующего критерия оптимальности:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} dt = (t_1 - t_0) \rightarrow \min_u .$$

- A) Критерий максимального быстродействия;
- B) Критерий качества переходных процессов;
- C) Обобщенный критерий качества переходных процессов;
- D) Общий вид критерия оптимального управления;
- E) Критерий аналитического конструирования оптимального регулятора.

12. Назовите физический смысл следующего критерия оптимальности:

$$J = \int_0^{\infty} x_1^2 dt \rightarrow \min_u .$$

- A) Критерий максимального быстродействия;
- B) Критерий качества переходных процессов;
- C) Обобщенный критерий качества переходных процессов;
- D) Общий вид критерия оптимального управления;
- E) Критерий АКОР.

13. Назовите физический смысл следующего критерия оптимальности:

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x dt \rightarrow \min_u .$$

- A) Критерий максимального быстродействия;
- B) Критерий качества переходных процессов;
- C) Обобщенный критерий качества переходных процессов;
- D) Общий вид критерия оптимального управления;
- E) Критерий АКОР.

14. Назовите физический смысл следующего критерия оптимальности:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \rightarrow \min_u.$$

- А) Критерий максимального быстродействия;
- В) Критерий качества переходных процессов;
- С) Обобщенный критерий качества переходных процессов;
- Д) Общий вид критерия оптимального управления;
- Е) Критерий АКОР.

15. Назовите физический смысл следующего критерия оптимальности:

$$J(\bullet) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u) dt + g[t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)] \rightarrow \min_{u \in U}.$$

- А) Критерий максимального быстродействия;
- В) Критерий качества переходных процессов;
- С) Обобщенный критерий качества переходных процессов;
- Д) Общий вид критерия оптимального управления;
- Е) Критерий АКОР.

16. Какое уравнение в методе классического вариационного исчисления характеризуется следующим видом:

$$F_x - \frac{d}{dt} [F_{\dot{x}}] = 0.$$

- А) Уравнение Эйлера;
- В) Уравнение Пуассона;
- С) Уравнение Эйлера-Пуассона;
- Д) Уравнение Беллмана;
- Е) Уравнение Ляпунова.

17. Какое уравнение в методе классического вариационного исчисления характеризуется следующим видом:

$$F_x - \frac{d}{dt} [F_{\dot{x}}] + \frac{d^2}{dt^2} [F_{\ddot{x}}] - \dots + [-1]^n \frac{d^n}{dt^n} [F_{x^{(n)}}] = 0.$$

- А) Уравнение Эйлера;
- В) Уравнение Пуассона;
- С) Уравнение Эйлера-Пуассона;
- Д) Уравнение Беллмана;
- Е) Уравнение Ляпунова.

18. Если необходимо, чтобы функция Гамильтона достигала максимума по переменной $u(t)$, то это

- А) Метод динамического программирования Р. Беллмана;
- В) Метод аналитического конструирования оптимального регулятора;
- С) Метод скользящей вариации;
- Д) Метод принципа максимума Л.С. Понтрягина;
- Е) Метод Р. Калмана и Р. Кепке.

19. Если оптимальное управление задается кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения $u^* = \pm u_{max}$ в зависимости от выхода сопряженной системы, то это

- А) Метод динамического программирования Р. Беллмана;
- В) Метод АКОР;
- С) Метод скользящей вариации;
- Д) Метод принципа максимума Л.С. Понтрягина;
- Е) Метод Р. Калмана и Р. Кепке.

20. Если найденное оптимальное управление является функцией не только времени, но и текущих значений вектора фазовых переменных, т. е. $u^*(x, t)$, то это

- А) Метод динамического программирования Р. Беллмана;
- В) Метод АКОР;
- С) Метод скользящей вариации;

- Д) Метод принципа максимума Л.С. Понтрягина;
Е) Метод Р. Калмана и Р. Кепке.

21. Если на управление наложено ограничение, что множество допустимых управлений – замкнутое множество, и что допускается “игольчатая” вариация управления, то это

- А) Метод динамического программирования Р. Беллмана;
В) Метод АКОР;
С) Метод скользящей вариации;
Д) Метод принципа максимума Л.С. Понтрягина;
Е) Метод Р. Калмана и Р. Кепке.

Таблица 3

Таблица правильных ответов

Номер вопроса	Уровень сложности	Правильные ответы
1	2	В
2	1	С
3	2	Е
4	2	Е
5	2	С
6	3	Д
7	1	С
8	2	В
9	3	С
10	1	Д
11	1	А
12	1	В
13	1	С
14	1	Е
15	1	Д
16	1	А
17	3	С
18	3	Д
19	3	Д
20	3	А
21	2	С

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ОПИСАНИЯ СИСТЕМ. АНАЛИЗ СВОЙСТВ САУ.....	6
1.1. Современный математический аппарат описания САУ.....	6
1.2. Устойчивость систем по А.М. Ляпунову.....	16
1.3. Понятие об управляемых объектах. Критерии управляемости.....	43
1.4. Наблюдаемость динамических систем. Критерии наблюдаемости.....	50
2. ОБ ОСНОВНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	57
3. КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ.....	66
3.1. Некоторые частные критерии оптимальности.....	67
3.2. Общий вид критерия оптимального управления.....	69
3.3. Методы классического вариационного исчисления.....	72
3.4. Линейные системы, оптимальные по быстродействию. Принцип максимума Л.С.Понтрягина.....	76
4. ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ Р.БЕЛЛМАНА.....	89
4.1. Формулировка принципа оптимальности.....	89
4.2. Получение функционального уравнения Р. Беллмана. Метод динамического программирования.....	91
4.3. Связь метода динамического программирования с функцией А.М. Ляпунова.....	98
5. МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	102
5.1. Аналитическое конструирование оптимального регулятора (АКОР).....	102
5.2. Метод скользящей вариации.....	110
5.3. Решение задачи параметрического синтеза в дискретной форме.....	132
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	139
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	141
ПРИЛОЖЕНИЕ А. ГЛОССАРИЙ.....	143
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ.....	145

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ
ВОЛОБУЕВА ОЛЬГА ПЕТРОВНА
СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Нач. РО НТИЦ
Редактор
Компьютерная верстка

З.А. Губайдулина
Г.М. Дюсенбаева
Л.Т. Касжанова

Подписано в печать

Формат 60х84 1/16. Бумага типографская №1. Уч. изд.л. 9,6.
Усл. 8,9. Тираж 300 экз. Заказ №
Цена договорная

Издание Казахского национального технического университета
имени К.И. Сатпаева
Информационно-издательский центр КазНТУ
г. Алматы, ул. Ладыгина, 32.

ISBN 978-601-228-374-7

