Р.Қ. Шакенова

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА

курсының алғашқы тарауларына арналған есептер мен мысалдар

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$$

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\,dt$$

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық университеті

Р.Қ. Шакенова

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА
курсының алғашқы тарауларына арналған есептер мен мысалдар

Университеттің Ғылыми-әдістемелік кеңесі оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2011

ЖОК 510 (075.8)
ББК 22.1 я 73

Ш 18 Р.Қ. Шакенова. Жоғары математика курсының алғашқы тарауларына арналған есептер мен мысалдар: Көмекші оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2011. –129 б.

ISBN 978-601-228-276-4

Көмекші оқу құралы университеттердің, институттардың инженер-техникалық, инженер-экономикалық, экономикалық жоғары оқу орындары студенттеріне – математика курсының қазіргі бағдарламасына сай сәйкестендіріліп жазылған. Сонымен қатар, бұл құралды мектептің жоғары сынып оқушылары да, сырттай оқитын студенттер де пайдалана алады.

Пікір жазғандар: *Ә.Сақабеков* – физ.-мат. ғыл. докт.,
профессор, ҚБТУ;
М.Қ. Дауылбаев – физ.-мат. ғыл. докт.,
профессор, ҚазҰУ;
Е.Н. Әмірғалиев – техн. ғыл. докт.,
профессор, ҚазҰТУ.

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2011 жылғы жоспары бойынша басылды.

ISBN 978-601-228-276-4

© Шакенова Р., 2011
© ҚазҰТУ, 2011

АЛҒЫ СӨЗ

Соңғы жылдары студенттердің, тіпті мектеп оқушыларының да физика, математика сабақтарын оқуға ынтасы төмендеп кетті. Сондықтан осы көмекші оқу құралы – студенттерге, әсіресе тау-кен, полиграфия саласында оқитын қазақ топтарына пайдалы болар деп жазылған.

Тау-кен, металлургия және полиграфия институттарының 050711, 050724, 050903, 050907, 050722, 050720, 050709 мамандықтарының студенттері көмекші құрал ретінде пайдаланса орынды болар деген ниетпен алғашқы кітаптың екінші толықтырылған басылымы – оқушылар қауымына ұсынылып отыр.

Элементар математиканың тереңдетілген мәселе есептері, студенттердің ойлау қабілеттерін арттыру мақсатында берілген. Химия, экономика, физика салаларына сәйкес құрастырылған есептер – 050720, 050709 т.б. мамандықтар үшін қажетті.

Бірінші кітап «Элементар және жоғары математика» деген атпен 2008 жылы «Дәуір» баспасынан шыққан.

І Бөлім. ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА ЕСЕПТЕРІ

1.1. Екінші және үшінші ретті анықтауыштар

Екінші ретті анықтауыш деп келесі өрнекпен анықталатын $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ санды айтады.

Үшінші ретті анықтауыш деп келесі өрнекпен анықталатын

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} -$$

$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ санды айтады.

Мұндағы $a_1, b_1, a_2, b_2, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ әріптері анықтауыштың элементтері деп аталады. Үшінші ретті анықтауыштағы элементтердің бірінші индексі элемент тұрған жолды, екінші индексі бағанды көрсетеді. Берілген элементтің миноры дегеніміз – сол элемент тұрған жол мен бағанды сызып тастағаннан кейінгі қалған анықтауыш. Берілген элементтің алгебралық толықтауышы дегеніміз – сол элементтің тұрған жолы мен бағанының нөмірлерінің қосындысы жұп болса, өз таңбасымен алынатын минор, егер тақ болса, кері таңбамен алынатын минор. Алгебралық толықтауыштар келесі формуламен анықталады: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, мұндағы M_{ij} a_{ij} элементінің миноры. Анықтауыштар үлкен әріптермен белгіленеді, мысалы, $A, B, C, \ldots$ т.б.

Анықтауыштың қасиеттері

1. Анықтауыштың мәні егер оның әрбір жолын сәйкес нөмірлі бағанымен орын ауыстырғаннан өзгермейді.

1 – мысал.

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$. Екеуінің де мәні 13-ке тең.

2. Анықтауыштың қандай да бір екі жолының немесе қандай да бір екі бағанының орындарын ауыстырғанда анықтауыштың алғашқы есептелген мәнінің таңбасы қарама-қарсыға өзгереді.

2 – мысал.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Екі жолының немесе екі бағанының элементтері өзара пропорционал болатын анықтауыштың мәні 0-ге тең.

3 – мысал.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Анықтауыштың қандай да бір жолының немесе бағанының ортақ көбейткішін анықтауыш таңбасының алдына шығаруға болады.

4 – мысал.

$$\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot(-3) \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

5. Егер анықтауыштың қандай да бір жолының немесе бағанының әрбір элементі екі қосылғыштан құралса, онда анықтауыш екі анықтауыштың қосындысынан тұрады. Бірінші анықтауыштағы қосындының орнында бірінші қосылғыш, ал екінші анықтауышта екінші қосылғыш тұрады. Екі анықтауыштың басқа элементтері берілген анықтауыштың қалған элементтерімен бірдей.

5 – мысал.

$$\begin{vmatrix} 1+5 & 2 & 3 \\ 2+3 & 4 & 6 \\ 3+7 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 7 & 6 & -1 \end{vmatrix}.$$

6. Егер анықтауыштың қандай да бір бағанының немесе жолының элементтеріне басқа оған параллель бағанының немесе жолының элементтерін кез келген санға көбейтіп қосса, онда анықтауыштың мәні өзгермейді.

6 – мысал.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2\cdot 2 & 2 & 3 \\ 2+2\cdot 4 & 4 & 6 \\ 3+2\cdot 6 & 6 & -1 \end{vmatrix}.$$

7. Анықтауышты есептеу үшін келесі ережені пайдаланған ыңғайлы: анықтауыштың мәні оның кез келген жолының (бағанының) элементтері мен олардың алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысына тең.

Есептер

Алдын ала ықшамдап алып, анықтауыштарды есептеу керек:

1.1. $\begin{vmatrix} x^2+a^2 & ax & 1 \\ y^2+a^2 & ay & 1 \\ z^2+a^2 & az & 1 \end{vmatrix}$.

1.2. $\begin{vmatrix} 15325 & 15323 & 37527 \\ 23735 & 23735 & 17417 \\ 23737 & 23737 & 17418 \end{vmatrix}$.

1.3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$.

1.4. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.5. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

1.6. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. 1.7. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2. Матрицалар және оларға қолданылатын амалдар

Белгілі бір жиынның a_{ij} элементтерінен құралған m жолымен, n бағаннан тұратын тікбұрышты кестені матрица деп атаймыз және оны былай белгілейміз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицалар латынның бас әріптерімен белгіленеді, a_{ij} элементіндегі бірінші индекс жолдың, ал екінші индекс бағанның нөмірін көрсетеді. Жолдар саны мен бағандар саны өзара тең матрицалар квадрат матрицалар деп аталады. Өлшемдері бірдей екі матрицаның барлық сәйкес элементтері өзара тең болса, онда ондай екі матрица тең деп аталады (өлшемдері бірдей деген сөз – жолдар саны мен бағандар саны бірдей деген ұғымды береді).

Матрицаларға қолданылатын негізгі амалдар.

1. Матрицаларды өзара қосу және алу. Бұл амал тек өлшемдері бірдей матрицалар үшін орынды болады. Элементі a_{ij} болатын A матрицасымен элементі b_{ij} болатын B матрицасының қосындысы (айырымы) деп элементі $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ болатын C матрицасын айтады.

2. Матрицаны санға көбейту. A матрицасын λ санына көбейту деп, элементі $\lambda \cdot a_{ij}$ болатын, өлшемі берілген матрицамен бірдей B матрицасын айтады.

3. Матрицаларды өзара көбейту. Көбейту амалы, егер бірінші матрицаның бағандар саны екінші матрицаның жолдар санына тең болған кезде ғана, орынды болады. $m\times n$ өлшемді A матрицасын $n\times p$ өлшемді B матрицасына көбейту деп $m\times p$ өлшемді C матрицасын айтады. Мұндағы $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$. $A\cdot B=B\cdot A$ заңы ылғи орындала бермейді.

Есептер

1.8. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ матрицалары берілген. $A\cdot B$ және $B\cdot A$ матрицаларын есепте.

1.9. $A=\begin{pmatrix}5 & 9 & 7\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 0 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & 0\end{vmatrix}$, $(A\cdot B)\cdot C$ және $A\cdot(B\cdot C)$ табу керек.

1.10. $A=\begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & -8\\ -3 & 6 & 9\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 0\end{vmatrix}$, $(A+3\cdot B)^2$ табу керек.

1.3. Анықтауыштарды теңдеулер жүйесін шешуге қолдану

n-ші ретті квадрат матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

ерекше емес матрица деп аталады, егер оның анықтауышы нөлге тең емес болса. Керісінше жағдайда, анықтауышы нөлге тең болса, онда ол ерекше матрица деп аталады. A^{-1} матрицасы квадратты ерекше емес A матрицасына кері матрица деп аталады, егер төменгі теңдік орындалатын болса:

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$, мұндағы E $-$ n-ші ретті бірлік матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$ A үшін жалғыз кері матрица келесі формула бойынша табылады: $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A}$, $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Мұндағы

A^* – тіркелген матрица, элементтері A матрицасының транспонирленген түріндегі алгебралық толықтауыштарынан құралған. A матрицасын транспонирлеу үшін оның жолдарымен сол нөмірлі бағандарының орындарын ауыстырса болғаны. Ал $\det A$ деген A – матрицасының анықтауышы.

Матрицаның рангісі деп оның нөлге тең емес минорының ең үлкен ретін айтамыз. Матрицадан бірнеше жасанды анықтауыштар құрастыруға болады. Мысалы,

$A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасы үшін бірінші ретті анықтауыштар немесе минорлар келесі болады:

$|-8|$, $|-5|$, $|-1|$, $|1|$, т.т. Ал екінші ретті анықтауыштар:

$\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -8 & -7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, т.т. Ал үшінші ретті анықтауыш:

$\begin{vmatrix} -8 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -7 & -5 & -5 \\ -3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, т.т. Жол немесе баған деген сөздерді қатар деген сөзбен ауыстырайық. Матрица рангісі өзгермейді, егер:

1) екі параллель қатарларының орнын алмастырса;
2) қатардың әрбір элементін нөлге тең емес санға көбейтсе;
3) қатардың элементтеріне басқа қатардың сәйкес элементтерін нөлге тең емес санға көбейтіп қосса.

Бұл түрлендірулер элементар түрлендірулер деп аталады.

Кронекер-Капелли теоремасы. n белгісізі бар m сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

үйлесімді болуы үшін (1) жүйенің негізгі матрицасының рангісі мен $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ келесі кеңейтілген матрицаның

$D = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ рангісінің тең болуы қажетті және жеткілікті.

Басқаша айтқанда $r_A = r_D = r$. Егер $r_A = r_D$ және $r = n$ болса, онда (1) жүйенің жалғыз шешімі бар, егер $r < n$ болса, онда жүйенің шексіз көп шешімі болады, ол шешімдер $n - r$ еркін параметрлерге тәуелді болады. Егер жүйенің оң жағындағы бос мүшелері нөлге тең болса, онда жүйе біртекті деп аталады.

Матрицалық әдіс. (1) жүйе берілсін, тек $m = n$ болсын және $\det A \neq 0$. Онда жүйенің негізгі матрицасының кері матрицасы бар және ол жалғыз. Жүйені матрицалық түрде жазсақ: $AX = B$ теңдеуін аламыз. Бұдан белгісіздерді келесі түрде аламыз: $X = A^{-1} \cdot B$.

Крамер формуласы. Егер (1) жүйе үшін $m = n$, $\det A \neq 0$ орындалсын. Онда белгісіздерді келесі теңдіктер арқылы табамыз:

$x_i = \dfrac{\Delta_n^{(i)}}{\Delta_n}$, $i = 1,...,n.$ $\Delta_n = \det A$, $\Delta_n^{(i)}$- бос мүшелерді i-ші бағанмен ауыстырғанда шыққан n-ші ретті анықтауыштар.

Жордан-Гаусс әдісі. Қарапайым түрлендірулер көмегімен берілген (1) жүйені өзіне пара-пар жүйеге айналдырамыз. Бірінші теңдеуден басқа теңдеулерде x_1 белгісізі болмайтындай, ал екінші теңдеуден басқа теңдеулерде x_2 белгісізі болмайтындай, т.с.с. амалдар жасаймыз. Ең соңында ақырғы теңдеудегі белгісізді тапқаннан соң, жоғарғы теңдеулерге көтерілеміз, бірінші теңдеудегі x_1 немесе басқа да белгісіздер табылғанға дейін.

Есептер

1.11. Жүйенің үйлесімділігін зерттеп, матрицалық әдіспен шешімдерін табу керек:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

1.12. Крамер әдісімен теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 = -6, \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$$

1.13. Жордан-Гаусс әдісімен белгісіздерді табу керек:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

1.14. Крамер әдісімен теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$$

1.15. Жордан-Гаусс әдісімен белгісіздерді табу керек:

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$$

1.4. Векторлар

Жалпы вектор дегеніміз – кез келген бағытталған шама. Ал скалярлық шама бағыты жоқ шама. Геометрияда вектор – кез келген бағытталған кесінді.

Вектордың басы және соңы болады. Басы A нүктесінде, ал соңы B нүктесінде орналасқан векторды $\vec{AB}$ деп белгілейді. Бір әріппен де векторды белгілеуге болады, бұл жағдайда ол қалың қара шрифтпен немесе бояумен жазылады - $\boldsymbol{a}$, немесе $\vec{a}$ түрінде.

Вектордың ұзындығы скаляр шама және ол былай белгіленеді: $|\vec{AB}|$, немесе кей-кезде екі вертикаль сызықсыз AB, a деп те белгіленеді және оны вектордың модулі деп атайды.

Векторларды өзара қосуға, алуға болады және векторды санға көбейтуге болады. Бірақ бұл амалдар алгебралық амалдармен бірдей болмағандықтан векторларға байланысты амалдар бар геометрия бөлімін векторлық алгебра деп атайды.

Параллель немесе бір түзудің бойында жатқан векторларды коллинеар векторлар деп атайды. Бұл векторлар бір бағытта немесе қарама-қарсы бағытта да жатуы мүмкін. Басы мен соңы бір нүктеде түйіскен векторды нөл вектор деп атайды. Бұл вектордың бағыты жоқ болғандықтан оны кез келген векторға коллинеар деп алуға болады.

Бір немесе параллель жазықтықтарда жатқан векторларды компланар векторлар деп атайды.

Екі нөл емес векторлардың модульдері тең және бағыттары бірдей болса, онда олар тең деп аталады. Бірнеше векторлардың бастарын бір ортақ нүктеге жылжытып әкелуге болады. Екі нөл емес векторлардың модульдері тең, ал бағыттары қарама-қарсы болса, онда олар бір-біріне қарсы векторлар деп аталады және модульдері бір-біріне қарсы таңбада алынады. Екі векторды үшбұрыштар ережесімен өзара қосуға болады. Бірінші $\vec{a}$ векторының басын бір A нүктесіне, соңын B нүктесіне параллель көшіреді, содан соң екінші $\vec{b}$ векторының басын бірінші вектордың соңғы нүктесіне апарып параллель көшіреді. Артынан пайда болған басы A нүктесінде, соңы екінші вектордың соңғы нүктесі C болатын $\vec{c}$ векторын екі вектордың қосындысы деп атайды: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Екі вектордың айырмасы дегеніміз бірінші векторға екінші векторды қарсы бағытта қосу болып шығады.

Берілген түзуде оң бағытты таңдап алса, онда бұл түзуді өс деп қабылдауға болады. $\vec{a}$ векторының L түзуіне проекциясы деп $|\vec{a}|\cdot\cos\phi$ санын айтады, проекцияны былай белгілейді: $np_L \vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\phi$, мұндағы ϕ бұрышы вектормен берілген өстің арасындағы бұрыш. $\vec{a}$ векторының координаталары деп оның OX, OY, OZ декарттық координаталар жүйесіндегі өстерге ортогональ проекцияларын айтады. Оларды x, y, z әріптерімен белгілейді, немесе $\vec{a} = (x, y, z)$ деп белгілейді. Екі вектор өзара тең болуы үшін сәйкес координаталары тең болса болғаны.

$\vec{a}_i$, $i = 1,...,n$ векторлар жүйесі берілсін. Егер осы векторлар үшін келесі теңдік $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{a}_i = 0$ тек барлық $\lambda_i = 0$ үшін ғана орындалса, онда бұл векторлар сызықты тәуелсіз деп аталады, ал егер осы λ_i-дің ең болмағанда біреуі 0-ге тең болмағанда орындалса, онда векторлар сызықты тәуелді деп аталады.

Өзара сызықты тәуелсіз реттелген үш $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторлар жүйесі R_3 кеңістігінде базис құрайды. Кеңістіктегі кез келген $\vec{a}$ векторын базис векторлар арқылы жіктеуге болады: $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, мұндағы x, y, z берілген $\vec{a}$ векторының $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ базисіндегі координаталары. Егер базистік векторлар өзара перпендикуляр және әрқайсысының ұзындығы бірге тең болса, онда мұндай базисті ортонормальды базис деп атаймыз. Мұндай базистік векторларды $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ деп белгілейміз. Кеңістіктегі берілген үш вектордың компланар болуы үшін олардың координаталарынан құралған үшінші ретті анықтауыштың 0-ге тең болуы жеткілікті.

Кесіндіні берілген қатынаста бөлу үшін келесі формулалар қолданылады:

Берілген AB кесіндісі C нүктесі арқылы $\frac{AC}{CB} = \lambda$ қатынасында бөлінсін. Онда C нүктесінің координаталары келесі формулалармен анықталады:

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1+\lambda} \qquad (2)$$

Егер $\lambda = 1$ болса онда кесінді ортасынан қақ бөлінеді.

$\vec{a}$ векторының $\vec{b}$ векторымен скаляр көбейтіндісі деп екі вектордың арасындағы бұрыштың косинусымен олардың модульдерінің көбейтіндісін айтады: $c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi$.

Егер $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ болса, онда $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ базисінде олардың скаляр көбейтіндісі былай табылады: $c = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

$\vec{a}$ векторының модулі былай есептеледі: $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. Сол сияқты $\vec{b}$ векторының модулі де табылады: $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$. Скаляр көбейтіндінің кейбір қасиеттері:

1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$;

2) $(\lambda\vec{a}),\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})=\vec{a}(\lambda\vec{b})$;

3) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$;

4) $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$;

5) $(\vec{a},\vec{b})=0$ пара-пар $a\vec{\perp}\vec{b}$;

6) $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$.

Векторлық және аралас көбейтінді туралы. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторының векторлық көбейтіндісі деп төменгі үш шартты қанағаттандыратын $\vec{c}$ векторын айтады:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\phi$;

2) $c\vec{\perp}\vec{a}$, $c\vec{\perp}\vec{b}$;

3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ үштігі оң. Оң, сол ұғымы былай түсіндіріледі. Бір жазықтықта жатпайтын, өзара параллель емес үш вектор берілсін. $\vec{a}$ бірінші вектор, $\vec{b}$ екінші вектор, $\vec{c}$ үшінші вектор болсын. Үш векторды бір нүктеден шығатындай етіп, орналастырайық. $\vec{a}$-ға $\vec{OA}$, $\vec{b}$-ға $\vec{OB}$, $\vec{c}$-ға $\vec{OC}$ векторлары сәйкес келеді және олар бір жазықтықта жатпайды. Егер C нүктесіндегі бақылаушы үшін $\vec{OA}$ векторын $\vec{OB}$ векторына бұратын ең қысқа жол сағат тіліне қарсы бағытта жүретін болса, онда үштік векторлар оң, ал сағат тілімен бағыттас болса – сол деп аталады.

Векторлық көбейтіндінің негізгі қасиеттері:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$;

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$;

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

4) $\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}$ векторы мен $\vec{b}$ векторы параллель;

5) $|\vec{a}\times\vec{b}|=S$, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларынан құралған параллелограмның ауданын береді.

Егер $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, ал $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ болса, онда екі вектордың векторлық көбейтіндісі векторлардың координаталары арқылы былай өрнектеледі:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right).$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп келесі санды айтады: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$. Аралас көбейтіндінің негізгі қасиеттері:

1) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ сондықтан аралас көбейтіндіні қысқаша $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ деп те жазады.

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}=-\vec{b}\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}=-\vec{c}\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}=-\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{b}$.

3) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\pm V$, аралас көбейтіндінің геометриялық мағынасы – үш вектордан құрылған параллелепипедтің көлемін береді. Егер векторлар үштігі оң болса көлем оң таңбамен, векторлар үштігі сол болса теріс таңбамен алынады.

4) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0\Leftrightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары компланар.

Егер $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, ал $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$ болса, онда осы үш вектордың аралас көбейтіндісі төмендегідей жазылады:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Есептер

1.16. Қабырғалары $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$ болатын ABC үшбұрышының $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ медианаларын $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ қабырғалары арқылы өрнектеңдер.

1.17. Үшбұрышты $SABC$ пирамидасының ABC үшбұрышы табанын құрайды, ал S пирамиданың төбесі болсын. Берілген векторлар: $\vec{a}=\overrightarrow{SA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{SB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{SC}$. O нүктесі ABC үшбұрышының ауырлық центрі деп есептеп $\overrightarrow{SO}$ векторын табу керек.

1.18. $ABCD$ параллелограмының екі төбесі: $A(2,-3,-5)$, $B(-1,3,2)$ және диагональдарының қиылысу нүктесі $E(4,-1,7)$ берілген. Параллелограмның қалған екі төбесінің координаталарын табу керек.

1.19. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш $\phi=\frac{2\pi}{3}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. $\left(\vec{a}\right)^2$, $\left(\vec{b}\right)^2$, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$, $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$ мәндерін табу керек.

1.20. $\vec{a}=(4,-2,-4)$, $\vec{b}=(6,-3,2)$. $(\vec{a},\vec{b})$, $(\vec{a})^2$, $(\vec{b})^2$ табу керек.

1.21. ABC үшбұрышының төбелерінің координаталары берілген: $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$, $C(3,-2,1)$. B төбесінің сыртқы бұрышын есептеп табу керек.

1.22. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары өзара перпендикуляр және $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. $|\vec{a}\times\vec{b}|$, $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|$ табу керек.

1.23. $\vec{a}=(3,-1,-2)$, $\vec{b}=(1,2,-1)$ берілген, $\vec{a}\times\vec{b}$ векторының координаталарын табу керек.

1.24. Төбелері $A(1,2,0)$, $B(3,0,3)$, $C(5,2,6)$ болатын ABC үшбұрышының ауданын табу керек.

1.25. Берілген векторлар $\vec{a}=(2,3,1)$, $\vec{b}=(1,-1,3)$, $\vec{c}=(-1,9,-11)$ компланар ма?

1.5. Жазықтықтар

Жазықтықтың жалпы теңдеуі мына түрде беріледі:

$Ax+By+Cz+D=0$, мұндағы A,B,C бір мезгілде 0-ге тең болмауы керек.

Берілген $A(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтіп, $\vec{n} = (A, B, C)$ векторына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуі былай жазылады:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

$\vec{n} = (A, B, C)$ векторы берілген жазықтықтың нормаль векторы деп аталады.

Жазықтықтың кеңістіктегі әр түрлі орналасулары

1. $Ax + By + Cz = 0$ координаталар басынан өтетін жазықтық.
2. $Ax + By + D = 0$ теңдеуі OZ өсіне параллель жазықтық.
3. $Ax + Cz + D = 0$ теңдеуі OY өсіне параллель жазықтық.
4. $By + Cz + D = 0$ теңдеуі OX өсіне параллель жазықтық.
5. $Ax + D = 0$ теңдеуі YOZ координаталар жазықтығына параллель жазықтық.
6. $By + D = 0$ теңдеуі XOZ координаталар жазықтығына параллель жазықтықты көрсетеді.
7. $Cz + D = 0$ теңдеуі XOY координаталар жазықтығына параллель жазықтықты көрсетеді.
8. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ YOZ, XOZ, XOY жазықтықтарының теңдеулері.

Егер екі жазықтық параллель болса, онда олардың нормаль векторлары коллинеар болады. Мысалы, келесі берілген екі жазықтық үшін:

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ параллельдік шарт төмендегідей болады:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Ал берілген екі жазықтықтардың перпендикулярлық шарты төмендегідей болады:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Екі жазықтық арасындағы бұрыш

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ және $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ жазықтықтары арасындағы бұрыш келесі формула арқылы анықталады:

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$ арадағы бұрыш төрт екіжақты болғандықтан бір бұрышты оң таңбамен алсақ, келесі бұрышты $180^\circ-\varphi$ ретінде алуға болады.

Берілген үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі

Егер берілген үш нүкте $A_0(x_0,y_0,z_0)$, $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$ бір түзудің бойында жатпайтын болса, онда үшеуі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі келесі түрде беріледі:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$ Немесе бұл шарт үш вектордың компланарлық шартын көрсетеді: $\overrightarrow{A_0A}$, $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$.

Жазықтықтың кесінділік теңдеуі

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, мұндағы a,b,c координаталар өстеріндегі жазықтықтың қиып өтетін кесінділері.

Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

Берілген $A_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесінен $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығына дейінгі қашықтық келесі формуламен анықталады:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Жазықтықтың бағыттауыш косинустары

$Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығы берілсін. Осы жазықтықтың бағыттауыш косинустары немесе полярлық параметрлері келесі формулалармен анықталады:

$$\cos\alpha=\mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\qquad \cos\beta=\mp\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$ Координаталар басынан берілген жазықтыққа дейінгі қашықтық мына формуламен анықталады:

$$d=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$ Бағыттауыш косинустардың таңбасы минус таңбасымен алынады, егер $D>0$ болса, егер $D<0$ болса, онда оң таңбамен алынады. Егер $D=0$ болса, онда не оң, не теріс таңба алынады.

Есептер

1.26. OXZ жазықтығына параллель және $M_0(7,-3,5)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

1.27. OZ осі және $A(-3,1,-2)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

1.28. OX осіне параллель және $A(4,0,-2)$, $B(5,1,7)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазу керек.

1.29. Нормаль векторы $\vec{n}=(1,-2,3)$ болатын және $B(2,1,-1)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

1.30. $C(3,4,-5)$ нүктесі арқылы өтетін, берілген келесі екі векторға $\vec{a}=(3,1,-1)$, $\vec{b}=(1,-2,1)$ параллель болатын жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

1.31. Тетраэдрдің бір жағының теңдеуін табу керек. Төбелерінің координаталары мынандай $A(5,4,3)$, $B(2,3,-2)$, $C(3,4,2)$, $D(-1,2,1)$.

1.32. Берілген жазықтыққа $2x-7y+5z+9=0$ перпендикуляр және келесі екі нүкте $M_1(1,1,1)$, $M_2(2,3,4)$ арқылы өтетін жазықтық теңдеуін табу керек.

1.33. Берілген келесі екі жазықтықтар арасындағы бұрышты табу керек:

$x-2y+2z-3=0$, $3x-4y+5=0$.

1.6. Кеңістіктегі түзулер

$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$ жүйесі, егер A_1, B_1, C_1 коэффициенттері A_2, B_2, C_2 коэффициенттеріне пропорционал болмаса, түзуді көрсетеді.

L түзуі келесі жүйе арқылы берілсін:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Ал P жазықтығы келесі теңдеу арқылы берілсін: $Ax+By+Cz+D=0$. Берілген түзу мен жазықтық қиылысуы мүмкін немесе өзара параллель орналасады, мүмкін түзу толығымен жазықтықта жатады.

Түзудің бағыттаушы векторы дегеніміз – осы түзуде, немесе оған параллель жататын вектор. (3) түзуінің бағыттаушы векторын табу үшін P_1 жазықтығының нормаль векторымен P_2 жазықтығының нормаль векторының векторлық көбейтіндісін табу керек. Мұндағы P_1 жазықтығы (3) жүйенің бірінші теңдеуін көрсетеді, ал P_2 жазықтығы екінші теңдеуін көрсетеді. Түзудің нормаль векторы $\vec{n}=(l,m,n)$ болсын. Координата өстерімен осы түзудің арасындағы бұрыштарды келесі формулалармен анықтауға болады:

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Түзу координата өсімен екі түрлі бұрыш жасайды да, бұл формула солардың тек біреуін көрсетеді.

Түзудің векторлық-параметрлік теңдеуі. Түзу $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы $\vec{s} = (m, n, p)$ векторына параллель өтсін, ал $A(x, y, z)$ нүктесі түзудің бойындағы кез келген нүкте болсын. A_0 нүктесінің радиус-векторы $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, A нүктесінің радиус-векторы $\vec{r} = (x, y, z)$ болсын (нүкте мен координаталар басын қосатын вектор радиус-векторды көрсетеді, басы координаталар басында, ал соңы берілген нүктеде болады). Сонда түзудің векторлық-параметрлік теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}, \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{4}$$

Мұндағы $\vec{s}$ түзудің бағыттаушы векторы, ал t параметрі болады.

Түзудің параметрлік теңдеуі. (4) теңдеуден үш скалярлық теңдеулер аламыз:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{5}$$

осы теңдеулер түзудің параметрлік теңдеуі деп аталады.

Түзудің канондық теңдеуі. (5) теңдеуді t параметрі арқылы шешіп, түзудің канондық теңдеуін аламыз:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{6}$$

Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі. Егер түзу екі $A_1(x_1, y_1, z_1)$ және $A_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелер арқылы өтетін болса, онда ол түзудің теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{7}$$

Егер түзулер канондық теңдеулер арқылы берілсе:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ және } \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}. \tag{8}$$

онда олардың арасындағы бұрыш келесі формулалар арқылы анықталады:

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{9}$$

Екі түзудің перпендикулярлық шарты: $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

$\frac{x - x_0}{v} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ түзуі мен $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығының арасындағы бұрышты келесі формула арқылы есептеуге болады:

$$\sin\varphi = \frac{|Av + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{v^2 + n^2 + p^2}}. \tag{10}$$

Жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі келесі түрде беріледі:

$$Ax + By + C = 0. \tag{11}$$

Мұндағы A, B, C нақты сандар, $A^2 + B^2 > 0$. Келесі вектор $\vec{n} = (A, B)$ түзудің нормаль векторы деп аталады және сол түзуге

перпендикуляр болады. (11) теңдеуді келесі түрге келтіруге болады:

$$y = kx + b, \quad k = tg\alpha . \tag{12}$$

Бұл теңдеу **түзудің бұрыштық коэффициентті теңдеуі** деп аталады.

$A_0(x_0, y_0)$ **нүктесі** арқылы өтетін, **бұрыштық коэффициенті** k-ға тең түзудің теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{13}$$

Түзудің параметрлік теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases} \tag{14}$$

Мұндағы (m, n) түзудің бағыттаушы векторының координаталары, ал (x_0, y_0) түзудің бойында жататын нүктенің координаталары.

Түзудің канондық теңдеуі:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Түзудің кесінділік теңдеуі:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Егер екі түзу өздерінің жалпы теңдеуі арқылы берілсе:

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, онда екеуінің арасындағы бұрыш келесі формула арқылы анықталады:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Бұл түзулердің перпендикулярлық шарты төмендегідей болады:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Ал параллельдік шарты: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, екі түзудің беттесуі: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Егер түзулер бұрыштық коэффициенттері арқылы берілсе $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, онда олардың арасындағы бұрыш келесі формула арқылы есептелінеді:

$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$. $A_0(x_0, y_0)$ нүктесінен $Ax + By + C = 0$ түзуіне дейінгі қашықтық келесі формула бойынша есептелінеді:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Есептер

1.34. $M_0(2,0,-3)$ нүктесі арқылы өтетін, $\vec{s}(2,-3,5)$ векторына параллель болатын түзудің канондық теңдеуін тап.

1.35. $M_0(2,0,-3)$ нүктесі арқылы өтетін, мына түзуге $\begin{cases} 2x - y + 3z - 11 = 0, \\ 5x + 4y - z + 8 = 0. \end{cases}$ параллель болатын түзудің канондық теңдеуін тап.

1.36. Берілген түзу $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ мен жазықтықтың $3x - 3y + 2z - 5 = 0$ өзара орналасуын анықта.

1.37. Берілген түзу $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ мен жазықтықтың $x+2y-4z+1=0$ өзара орналасуын тап.

1.38. Берілген түзу $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ мен жазықтықтың $3x-y+2z-5=0$ өзара орналасуын тап.

1.39. Берілген екі нүкте $A(-1,3)$, $B(4,5)$ арқылы өтетін түзудің теңдеуін жаз.

1.40. $A(-2,3)$ нүктесі $2x-3y+8=0$ түзуіне перпендикуляр түзудің бойында жатыр. Сол нүктеден өтетін түзудің теңдеуін тап.

1.7. Екінші ретті сызықтар мен беттер

Жазықтықтағы екінші ретті сызықтар деп декарттық координаталары келесі теңдеуді қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орнын айтады:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0.$$

Мұндағы коэффициенттер нақты тұрақты сандар, $a^2_{11}+a^2_{12}+a^2_{22}\neq 0$.

Дербес жағдайларды қарастырайық. **Шеңбер:**

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, мұндағы шеңбердің центрі (x_0,y_0) нүктесінде орналасқан, радиусы R . **Эллипс.** Канондық теңдеуі мына түрде жазылады:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. a,b - жарты өстері деп аталады. Фокустары деп аталатын, берілген екі нүктеден қашықтықтарының қосындысы тұрақты $2a$ санына тең жазықтық нүктелерінің геометриялық орны эллипс деп аталады. Фокустарының координаталары $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

$a>b$ немесе $a<b$ болуы мүмкін. Бірінші жағдайда $b^2=a^2-c^2$, ал екінші жағдайда $a^2=b^2-c^2$ болады.

Фокустарының ара қашықтығы үлкен өсінің ұзындығына қатынасы эксцентриситет деп аталады. $e=\frac{c}{a}$, егер $a>b$ болса, $e=\frac{c}{b}$, егер $a<b$. Кез-келген жағдайда да $0\le e<1$. Директрисалары деп аталатын түзулер келесі теңдеулермен анықталады:

$x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$, егер $a>b$, $y=\pm\frac{b}{e}=\pm\frac{b^2}{c}$, егер $a<b$ болса.

Гипербола. Фокустары деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтықтарының айырмасының абсолют шамасы тұрақты $2a$ санына тең жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орны гипербола деп аталады.

Канондық теңдеуі мына түрде жазылады:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, мұндағы a- нақты өсі, ал b- жорамал өсін көрсетеді. Асимптоталары келесі түрде жазылады: $y=\pm\frac{b}{a}x$, директрисалары $x=\pm\frac{a}{e}$

Гипербола үшін әруақытта келесі теңдік орындалады:

$b^2=c^2-a^2$, сондықтан $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>1$.

Парабола. Фокусы деп аталатын берілген F нүктесінен, директрисасы деп аталатын берілген d түзуінен бірдей қашықтықта жатқан жазықтық нүктелерінің геометриялық орны парабола деп аталады. Параболаның канондық теңдеуі:

$y^2=2px$, директрисасы $x=-\frac{p}{2}$ теңдеуімен анықталады, OY өсіне параллель өтеді. Параболаның эксцентриситеті 1-ге тең. Параболаның басқаша жазылған да түрлері бар, өстерін ауыстырғанда шығады, мысалы:

$x^2=2py$, $y^2=-2px$.

Екінші ретті бет деп – кеңістіктегі декарттық координаталары келесі теңдеуді қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орнын айтады:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$$

Мұндағы коэффициенттер тұрақты сандар, келесі шарт орындалуы керек:

$$a^2{}_{11} + a^2{}_{22} + a^2_{33} + a^2_{12} + a^2_{13} + a^2_{23} \neq 0.$$

Канондық теңдеулері.

Үш өсті эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Бірқуысты гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Екіқуысты гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$

Екінші ретті конус: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$

Эллипстік параболоид: $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$, $(p > 0, q > 0)$, немесе келесі түрі $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$. Гиперболалық параболоид: $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$, $(p > 0, q > 0)$, немесе келесі түрде: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$

Гиперболалық цилиндр: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Эллипстік цилиндр: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Параболалық цилиндр: $y^2 = 2px.$

Параллель жазықтықтар жұбы: $\frac{x^2}{a^2}=1.$

Қабаттасқан жазықтықтар жұбы: $x^2=0$.

Есептер

1.41. Эллипстің канондық теңдеуі $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ берілген. Жарты өстерін, фокустарын, эксцентриситетін, директрисасын табу керек.

1.42. Гиперболаның канондық теңдеуі берілген $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1.$ Жарты өстерін, фокустарын, эксцентриситетін, асимптоталарын, директрисаларын табу керек.

1.43. Параболаның канондық теңдеуі берілген $x^2=6y$. Директрисасы мен фокусын табу керек.

1.44. Кіші жарты өсінің ұзындығы 24-ке тең, ал фокустарының арасы 10-ға тең эллипстің канондық теңдеуін табу керек.

1.45. Фокустарының арасы 6-ға тең, эксцентриситеті $\frac{3}{5}$-ке тең эллипстің канондық теңдеуін табу керек.

6-9 – мысалдардағы беттердің түрін анықтаңыз.

1.46. $x^2+2y^2+4z^2=2$.

1.47. $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0$.

1.48. $36x^2+16y^2-9z^2+18z=9$.

1.49. $x^2+y^2+z^2=2z$.

1.8. Функциялар. Шектер

D x айнымалысының анықталу облысы болсын. Егер x айнымалысының әрбір элементіне белгілі бір f ережесімен y айнымалысының жалғыз элементі сәйкес келсе, онда $y=f(x)$ функциясы берілді деп айтамыз, y айнымалысының қабылдайтын мәндер жиыны оның мәндер облысы деп аталады

және оны E әрпімен белгілеуге болады. Анықталу және мәндер облыстары сандық жиындарда жатыр деп есептейік.

Сандық тізбек $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ берілсін. Егер n өскен сайын y_n мүшесі b санына шексіз жақындай берсе, онда b саны осы тізбектің шегі деп аталады. Басқа да дәлірек анықтамасы бар.

Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $|y_n - b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $n \geq N$ саны табылса, онда b саны $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ тізбегінің шегі деп аталады.

Егер $f(x)$ функциясы b санына шексіз жақындаса, онда b саны $f(x)$ функциясының $x \to a$ шегі деп аталады (оң немесе сол жағынан ұмтылуы мүмкін).

Бұл жағдай келесі түрде жазылады: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Функция a нүктесінің белгілі бір маңайында анықталсын. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\partial > 0$ саны, мына $0 < |x - a| < \partial$ теңсіздік орындалғанда келесі $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздік орындалатындай табылса, онда A саны $y = f(x)$ функциясының $x \to a$ шегі деп аталады.

Немесе басқаша былай жазылады: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, x a-ға оң жағынан немесе сол жағынан ұмтылуы мүмкін: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$. $f(x)$ функциясының a нүктесінде шегі болуы үшін оның екі біржақты шектері бар болып және өзара тең болуы қажетті және жеткілікті: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. Шектер жөніндегі келесі теоремалар орынды болады. $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = b$ $(i = 1, ..., n)$ бар болсын. Онда келесі теңдіктер орындалады: $\lim\limits_{x \to a} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lim\limits_{x \to a} f_i(x)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ және $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) \neq 0$ бар болсын, онда $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}$. Мұндағы a шектелген шама.

Тамаша шектер. Бірінші тамаша шек: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, екінші тамаша шек: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \approx 2.71828$. Соңғы 1828 Л. Толстойдың туған жылын көрсетеді, есте сақтауға ыңғайлы.

Ақырсыз аз шама дегеніміз – шектік мәні нөлге ұмтылатын шама. Ал айнымалының абсолют шамасының шектік мәні ақырсыз үлкен сан болса, онда ол шама ақырсыз үлкен шама деп аталады. Егер y ақырсыз үлкен шама болса, онда $\frac{1}{y}$ ақырсыз аз шама болады. Тұрақты шаманың шегі өзіне ұмтылады. Егер $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ орындалса, онда екі ақырсыз аз $\alpha(x), \beta(x)$ шамалары эквивалентті деп аталады және былай белгіленеді: $\alpha(x) \leftrightarrow \beta(x)$. Мына шамалар өзара эквивалентті болады: егер $x \to 0$, онда $\sin \alpha x \leftrightarrow \alpha x$, $tgx \leftrightarrow x$, $\ln(1+x) \leftrightarrow x$, $e^{\alpha x} - 1 \leftrightarrow \alpha x$. Егер $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, $C \neq 0$, онда $\alpha(x), \beta(x)$ реттері бір ақырсыз аз шама деп аталады. Егер $C = 0$, онда $\alpha(x)$ шексіз аз шамасы $\beta(x)$ шексіз аз шамасына қарағанда жоғары ретті шексіз аз шама деп аталады.

$y = f(x)$ функциясы $x = a$ нүктесінде үзіліссіз деп аталады, егер осы нүктеде және оның маңайында функция анықталған болса, $x = a$ нүктесінде функцияның ақырлы шегі бар болса және келесі теңдік орындалса: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Осы 3 шарт орындалғанда ғана функция берілген нүктеде үзіліссіз болады. Ең болмағанда бір шарты бұзылса, онда үзіліс нүктесі болғаны. Егер $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ оң және сол жақ шектері бар болса, бірақ екеуі өзара тең болмаса, онда a нүктесі бірінші текті үзіліс нүктесі деп аталады, егер ең болмағанда осы екі шектің біреуі жоқ болса немесе шексіздікке тең болса, онда a нүктесі екінші текті үзіліс нүктесі деп аталады. Егер $\lim\limits_{x \to a} f(a)$ бар болып және a нүктесінде $f(x)$ функциясы не анықталмаған, не болмаса

$f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$ болса, онда a нүктесі $f(x)$ функциясының жөндеуге келетін үзіліс нүктесі деп аталады.

Есептер

1.50. $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ функциясының анықталу облысын табу керек .

1.51. $y = \arccos\dfrac{2x}{1+x}$ функциясының анықталу облысын табу керек.

1.52. $y = \sqrt{25 - x^2} + \lg\sin x$ функциясының анықталу облысын табу керек.

1.53. $y = 2^{\sin\sqrt[3]{x}}$ күрделі функцияны қарапайым функциялар композициясы түрінде көрсету керек.

5-15 – мысалдардағы шектерді табыңыз.

1.54. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^2 + 3n - 5}{1 - n^2}$.

1.55. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^2 + 10x + 20}{x^3 - 10x^2 - 1}$.

1.56. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$.

1.57. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg3x}{\sin 2x}$.

1.58. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 6x}{x\sin 3x}$.

1.59. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin 3(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$.

1.60. $\lim\limits_{x \to \infty} x(\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 + 1})$.

1.61. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{\sqrt{x-1} - 2}$.

1.62. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-1}\right)^{x}$.

1.63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 10x}$.

1.64. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}$.

1.9. Дифференциалдық есептеу

$y=f(x)$ функциясының өсімшесі дегеніміз мына шама: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, мұндағы Δx аргументтің өсімшесін көрсетеді. Егер функцияның өсімшесінің аргументтің өсімшесіне (Δx өз еркінше 0-ге ұмтылғандағы) қатынасының ақырлы шегі бар болса, онда ол шек $y=f(x)$ функциясының туындысы деп аталады және оны былай белгілеуге болады: y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$. Сонымен туындыны былай өрнектеуге болады:

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'=f'(x)$. Туынды функцияның аргумент бойынша өзгеру жылдамдығын көрсетеді. Туынды табу операциясын функцияны дифференциалдау деп атайды. Дифференциалдық есептеудің негізін салғандардың ішінде Ньютон мен Лейбницті ерекше атауға болады. Дифференциалдау ережелері:

$c'=0$, тұрақты шаманың туындысы 0-ге тең;

$x'=1$;

$(u+v)'=u'+v'$;

$(Cu)'=Cu'$;

$(u\cdot v)'=u'v+uv'$;

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$;

Элементар функциялар туындыларының негізгі кестесі

$\sin' x = \cos x;$ $\quad ctg' x = -\frac{1}{\sin^2 x};$

$\cos' x = -\sin' x;$ $\quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$tg' x = \frac{1}{\cos^2 x};$ $\quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$arctg' x = \frac{1}{1+x^2};$ $\quad arcctg' x = -\frac{1}{1+x^2}$

$(a^x)' = a^x \ln a;$ $\quad (e^x)' = e^x;$

$\ln' x = \frac{1}{x};$ $\quad \lg' x = \lg e \cdot \frac{1}{x} \approx 0.4343 \cdot \frac{1}{x};$

$(x^n)' = nx^{n-1};$ $\quad \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

Егер $y = f(u)$, ал $u = \phi(x)$ болса, онда күрделі $y = f(\phi(x))$ функциясының туындысы келесі түрде өрнектеледі:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Егер $y = f(x)$ функциясына кері $x = g(y)$ функциясы бар болса, онда $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$, бірақ $g'(y) \neq 0$ орындалуы керек.

$y = f(x)$ функциясына $A(x_0, f(x_0))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуі келесі түрде жазылады:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Ал осы нүктеде жүргізілген перпендикулярдың теңдеуі келесі түрде жазылады:

$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, бірақ $f'(x_0) \neq 0$ орындалуы керек.

Логарифмдік дифференциалдау

$(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Егер $y = u^v$, $u = u(x)$, $v = v(x)$ болса, онда келесі формула дұрыс:

$$y' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'.$$

Жоғары ретті туындылар.

Функцияның n-ші ретті туындысы деп оның $n-1$ ретті туындысының туындысын айтады және ол былай белгіленеді:

$$y^{(n)},\ (y^{(n-1)})',\ \frac{dy^{(n-1)}}{dx}.$$

$y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі мәні Δx өсімшесіне сәйкес мына түрде жазылса: $\Delta y(x_0) = A \cdot \Delta x + 0(\Delta x)$, онда $y = f(x)$ функциясы x_0 **нүктесінде дифференциалданады дейді,** мұндағы A Δx-ке тәуелсіз сан, $0(\Delta x)$ $\Delta x \to 0$ ақырсыз аз шама.

Функция берілген нүктеде дифференциалдануы үшін оның осы нүктеде туындысы болуы қажетті және жеткілікті. **Жуықтап есептеу үшін дифференциалды қолдану:**

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Ролль теоремасы. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және осы кесіндінің ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болсын және келесі шарт орындалсын: $f(a) = f(b)$. Онда осы кесінді бойынан ең болмағанда бір $x = c$ нүктесі табылып, келесі теңдік $f'(c) = 0$ орындалады.

Лагранж теоремасы. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және осы кесіндінің ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болсын, онда осы кесінді бойынан ең болмағанда бір $x = c$ нүктесі табылып, келесі теңдік $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ орындалады.

Коши теоремасы. Егер $y = f(x)$ және $y = \phi(x)$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз, кесіндінің ішкі нүктелерінде дифференциалданатын және $\phi'(x) \neq 0$ болсын, онда осы кесіндіде ең болмағанда бір $x = c$ нүктесі табылып, келесі теңдік $\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)} = \frac{f'(c)}{\phi'(c)}$ орындалады.

Лопиталь ережесі ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандықтарын ашу үшін керек). Егер $y = f(x)$, $y = \phi(x)$ функциялары $x = x_0$ нүктесінің маңайында Коши теоремасының шартын қанағаттандырса және $x \to x_0$ нөлге (немесе $\pm\infty$) ұмтылса және $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ бар болса, онда $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)}$ бар болады және осы екі шек өзара тең:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}.$$

Лопиталь ережесі $x_0 = \pm\infty$ болғанда да орындалады.

Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және дифференциалданатын болса, және оның туындысы (x бойынша) оң (теріс) болса, онда функция осы кесіндіде өседі (кемиді).

Егер $x = a$ нүктесінің маңайындағы барлық x-тер үшін $f(x)$ функциясының мәндері $f(a)$ мәнінен аз болса, онда $x = a$ нүктесінде $y = f(x)$ функциясы өзінің максимум мәнін қабылдайды. Егер $x = a$ нүктесінің маңайындағы барлық x-тер үшін $f(x)$ функциясының мәндері $f(a)$ мәнінен үлкен болса, онда $x = a$ нүктесінде $y = f(x)$ функциясы өзінің минимум мәнін қабылдайды.

Функцияның максимум немесе минимум мәндерін қабылдайтын нүктелерін оның экстремум нүктелері деп айтады.

$[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз $y=f(x)$ функциясы берілсін. Егер кез келген $x\in[a,b]$ нүктесінде $y=f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанамалар функция графигінен жоғары жатса, онда $y=f(x)$ функциясының графигі дөңес деп аталады. Ал егер, керісінше жанамалар төмен жатса, онда $y=f(x)$ функциясының графигі ойыс деп аталады.

Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ орындалса, онда $x=a$ түзуі $y=f(x)$ функциясының графигінің тік асимптотасы болады.

Функцияның бірінші туындысының нөлге айналатын (үзілетін) нүктелерін күдікті нүктелер деп атайды.

Теорема (төңіректік экстремумның қажетті шарты. Атынан көрініп тұрғандай төңіректік экстремум нүктенің белгілі бір аймағындағы экстремумды ғана қарастырады).

Егер $y=f(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінде экстремумдік мән қабылдаса, онда $f'(x)=0$ немесе туынды жоқ. Экстремумдік нүктелерде функцияның графигіне жүргізілген жанама OX өсіне параллель болады.

Теорема (төңіректік экстремумның бірінші жеткілікті белгісі). $y=f(x)$ функциясы күдікті $x=x_0$ нүктені қамтитын белгілі бір интервалда үзіліссіз және дифференциалданатын болсын (осы нүкте кірмеуі де мүмкін). Егер $f'(x)$ $x<x_0$ мәндерінде оң болып, ал $x>x_0$ мәндерінде теріс болса, онда $x=x_0$ нүктесінде $y=f(x)$ функциясы максимум мән қабылдайды. Егер $x<x_0$ болғанда $f'(x)$ теріс болып, ал $x>x_0$ болғанда оң болса, онда $x=x_0$ нүктесінде $y=f(x)$ функциясы минимум мән қабылдайды.

Теорема (төңіректік экстремумның екінші жеткілікті белгісі). $y=f(x)$ функциясы екі рет дифференциалданатын және $f'(x_0)=0$ болсын. Егер $f''(x_0)<0$ болса, онда $x=x_0$ нүктесінде функция төңіректік максимум мәнді қабылдайды. Егер $f''(x_0)>0$ болса, онда төңіректік минимум мәнді қабылдайды.

Теорема (функция графигінің дөңестігінің (ойыстығының) жеткілікті шарты). Егер (a,b) интервалының барлық нүктелерінде $y=f(x)$ функциясының екінші ретті туындысы теріс (оң) болса, $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$), онда $y=f(x)$ қисығы осы интервалда дөңес (ойыс).

Теорема (иілу нүктесінің жеткілікті белгісі). Егер $x=x_0$ нүктесінде $f''(x)=0$ немесе екінші ретті туынды жоқ болса және осы нүкте арқылы өткенде $f''(x)$ таңбасын ауыстырса, онда $y=f(x)$ қисығының $x=x_0$ нүктесі иілу нүктесі болады.

Егер келесі шектер бар болса: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$, онда $y=kx+b$ түзуі $y=f(x)$ қисығының көлбеу асимптотасы болады.

Доға ұзындығының дифференциалы. $y=f(x)$ теңдеуімен берілген l жазық сызықтың доғасы ұзындығының дифференциалы мына формуламен анықталады:

$$dl=\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Егер сызық мына теңдеумен берілсе: $x=\phi(y)$, онда

$$dl=\sqrt{1+(\phi'(y))^2}\,dy.$$

Егер сызық параметрлік теңдеумен $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$ берілсе, онда $dl=\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\phi'(t))^2}\,dt$. Егер сызық полярлық теңдеумен $\rho=\rho(\varphi)$ берілсе, онда $dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$.

Есептер

1-11 – мысалдардағы функциялардың туындыларын табыңыз.

1.65. $y=5x^4-3\cdot\sqrt[7]{x^3}+\dfrac{7}{x^5}+4.$

1.66. $y=x^3\cdot\sin x.$

1.67. $y=\dfrac{(x^4+1)}{(x^4-1)}$.

1.68. $y=(x^5+3x-1)^4$.

1.69. $y=\dfrac{\sin^2 x}{(x^3+1)}$.

1.70. $y=\sin(tg\sqrt{x})$.

1.71. $y=x\cdot ctg^2 7x$.

1.72. $y=\ln^5(x-2^{-x})$.

1.73. $y=(\sin 2x)^{x^3}$.

1.74. $y=3^{x^2}-tg^4 2x$.

1.75. $y=(\sin 3x)^{\cos 5x}$.

1.76. $y=\ln(1+x^2)$ функциясының екінші ретті дифференциалын тап.

1.10. Интегралдық есептеу

(a,b) интервалында $y=f(x)$ функциясы берілсін. Егер $F'(x)=f(x)$ орындалса, онда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының (a,b) интервалындағы алғашқы функциясы деп аталады. Функцияның кез келген екі алғашқы функциясының айырмасы тұрақты санға тең болады.

(a,b) интервалында анықталған $f(x)$ функциясының $F(x)+C$ – алғашқы функцияларының жиыны $f(x)$ функциясының анықталмаған интегралы деп аталады, C – кез келген тұрақты сан. Анықталмаған интегралды былай белгілейміз:

$$\int f(x)dx=F(x)+C\,.$$

Интегралдаудың негізгі ережелері:

$$\int f'(x)dx=\int df(x)=f(x)+C\,,\qquad d\int f(x)dx=d(F(x)+C)=f(x)dx\,,$$

$$\int(f(x)\pm\varphi(x))dx=\int f(x)dx\pm\int\varphi(x)dx\,,\quad \int\alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx\,,\ (\alpha\ \text{- const}),$$

Егер $\int f(x)dx = F(x) + C$, онда $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, мұндағы a,b - тұрақты сандар, $a \neq 0$.

Элементар функциялардың анықталмаған интегралдарының кестесі:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \qquad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, x \neq \pi \cdot n. \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C; \quad a \neq 0.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C; \quad a \neq 0.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C; \qquad \int tgxdx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C; \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C; \qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

Айнымалыны ауыстыру арқылы интегралдау. $x=\varphi(t)$ функциясының туындысы үзіліссіз болса, онда анықталмаған интегралда жаңа t айнымалысына көшуге болады:

$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, осы интегралды есептеген соң алғашқы айнымалыға қайтадан ауысамыз.

Бөліктеп интегралдау дегеніміз – келесі формулаға негізделген интегралдау әдісі: $\int udv=uv-\int vdu$, $\int vdu$ интегралы оңай табылатындай етіп алынады.

Егер интеграл астындағы өрнек рационал функция түрінде берілсе, онда интеграл астындағы өрнекті қарапайым келесі түрдегі рационал бөлшектерге келтіруге болады:

1. $\frac{A}{x-a}$. 2. $\frac{A}{(x-a)^k}$. 3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$. 4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$.

Әрбір қарапайым рационал бөлшекті жеке-жеке интегралдауға болар еді. Тек қана квадрат үшмүшеліктен толық квадрат бөліп шығару қажет болады.

$\int \sin^m x\cdot\cos^n xdx$ түрінде берілген интегралдарды есептеу үшін келесі ауыстырулар жасаған ыңғайлы:

1) егер n - тақ бүтін оң сан болса, онда $t=\sin x$;

2) егер m - тақ бүтін оң сан болса, онда $t=\cos x$;

Тригонометриялық өрнектерді интегралдау. $\int R(\cos x,\sin x)dx$ өрнектері берілсе, R – рационал функция, онда универсал ауыстыру формуласын пайдаланған тиімді:

$$z=tg\frac{x}{2},\ \sin x=\frac{2z}{1+z^2},\ \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2},\ dx=\frac{2dz}{1+z^2}.$$

Интеграл астындағы өрнектер $\sqrt{a^2-x^2}$ сияқты өрнекті қамтыса, онда мына ауыстыру тиімді:

$x=a\sin t$ немесе $x=a\cos t$, ал $\sqrt{x^2+a^2}$ өрнегі үшін мына ауыстыру: $x=atgt$ немесе $x=actgt$.

$\int R(x,(\frac{px+q}{rx+s})^{\alpha},(\frac{px+q}{rx+s})^{\beta},...)dx$ түріндегі интегралдар үшін мына ауыстыру ыңғайлы:

$\frac{px+q}{rx+s}=t^n$, мұндағы n α,β – бөлшектерінің ортақ бөлімі, α,β – рационал сандар, p,q,r,s - тұрақты сандар.

$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ интегралы Эйлер ауыстыруымен шығарылады:

$\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}=t$, немесе $ax^2+bx+c=(t-x\sqrt{a})^2$, егер $a>0$ болса.

Егер $c>0$ болса, онда Эйлердің келесі ауыстыруы жарайды: $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}$.

Анықталған интеграл. $f(x)$ функциясы (a,b) $(a\neq b)$ интервалының ішкі және шеткі нүктелерінде үзіліссіз болсын. Интервал арасын бөліктерге бөлеміз: $(x_0,x_1),(x_1,x_2),...,(x_n,x_{n+1})$, мұндағы $a=x_0$, $b=x_{n+1}$. Әрбір аралықтан бір нүктеден $\xi_1\in(x_0,x_1)$, $\xi_2\in(x_1,x_2)$,..., $\xi_{n+1}\in(x_n,x_{n+1})$ аламыз да төменгі қосындыны құрастырамыз:

$$S_n=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+...+f(\xi_{n+1})(x_{n+1}-x_n) \qquad (1)$$

Теорема. $(x_0,x_1),(x_1,x_2),...,(x_n,x_{n+1})$ бөліктерінің саны шексіз өскен сайын олардың ең ұзын бөлігінің ұзындығы 0-ге ұмтылады. Онда S_n қосындысы қайсыбір S шегіне ұмтылады. Осы S шегі бөліктердің бөліну әдісіне және ξ_i нүктелерінің алынуына байланысты емес.

Ең ұзын бөлік 0-ге ұмтылғандағы (1) қосындының ұмтылатын шегі $f(x)$ функциясының анықталған интегралы деп аталады және былай белгіленеді:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx. \qquad \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$. $\int_a^b (f(x) \pm \phi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \phi(x)dx$.

Егер $\phi(x) \le f(x)$, $\forall x \in [a,b]$, онда $\int_a^b \phi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$, $(a < b)$,

Егер $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, ал $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ болса, онда келесі өрнек орынды: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда осы кесіндіден ең болмағанда бір $x = c$ нүктесі табылып, $a \le c \le b$, келесі теңдік $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ орындалады.

Егер $f(x)$ функциясы үзіліссіз болып және $H(x) = \int_a^x f(t)dt$ болса, онда келесі өрнек орынды:

$H'(x) = f(x)$. Немесе $H(x)$ $f(x)$ үшін алғашқы функцияның рөлін атқарып тұр.

Ньютон-Лейбниц формуласы. Егер $F(x)$ $f(x)$ үшін қайсыбір алғашқы функциясы болса, онда келесі өрнек орынды:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Егер $u(x), v(x)$ функциялары және олардың туындылары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда келесі теңдік орындалады:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)du(x).$$

Соңғы формула анықталған интеграл үшін бөліктеп интегралдау формуласы деп аталады.

Есептер

Төмендегі интегралдарды есептеңіз.

1.77. $\int (3x - \sqrt[7]{x^5} + 2\sin x - 3)dx$.

1.78. $\int(\sin 3x + x\sqrt{1+x^2})dx$.

1.79. $\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$.

1.80. $\int(x^7 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2^x)dx$.

1.81. $\int tg\,3x dx$.

1.82. $\int\frac{x-x^3}{\sqrt{9-x^4}}dx$.

1.83. $\int(e^{2x} + e^{-2x})dx$.

1.84. $\int(\sqrt[6]{1-7x^3}\cdot x^2 dx$.

1.85. $\int\cos^3 2x\cdot\sin^4 2x dx$.

1.86. $\int\frac{x^2-9}{x^2+9}dx$.

1.87. $\int\sqrt[m]{x^n}dx$.

1.88. $\int 10^x dx$.

1.89. $\int a^x\cdot e^x dx$.

1.90. $\int\frac{dx}{x^2+4x+20}$.

1.91. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$.

1.92. $\int x\sqrt[5]{(5x^2-3)^7}dx$.

1.93. $\int x\cos 3x dx$.

1.94. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$.

1.95. $\int\frac{dx}{e^x+1}dx$.

1.96. $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

1.97. $\int e^x\cos x dx$.

1.98. $\int\frac{dx}{3x-4\sqrt{x}}$.

1.99. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-7\sqrt[4]{x}}$.

1.100. $\int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$.

1.101. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$.

1.102. $\int_1^2 (2x^2+\frac{2}{x^4})dx$.

1.103. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

1.104. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

1.105. $\int_1^e \ln x dx$.

1.106. $\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x}dx$.

II Бөлім. ЭЛЕМЕНТАР МАТЕМАТИКА ЕСЕПТЕРІ

2.1. Құрамында A, B, C элементтері бар үш қоспа берілген. Бірінші қоспаға тек A мен B элементтері ғана салмақ бойынша 3:5 қатынасындай кіреді. Ал екінші қоспаға тек B мен C элементтері ғана салмақ бойынша 1:2 қатынасындай мөлшерде кіреді. Ал үшінші қоспаға A мен C элементтері ғана салмақ бойынша 2:3 қатынасында кіреді. Осы үш түрлі қоспаның әрқайсысын A, B, C элементтері салмақ бойынша 3:5:2 қатынасындай кіретіндей етіп бір-біріне қандай қатынаста алу керек?

2.2. A мен B пункттерінен екі ұшақ бір-біріне қарама-қарсы ұшады, содан соң AB пункттерінің ортасынан қашықтығы a км жерде кездескен. Егер бірінші ұшақ екіншісінен b сағат кешігіп шықса, онда олар AB-ның ортасында кезігер еді. Ал егер керісінше, екінші ұшақ біріншісімен салыстырғанда b сағат кешігіп шықса, онда олар B-дан жолдың төрттен бір қашықтығындай жерде кездесер еді. AB-ның ұзындығы мен ұшақтардың жылдамдықтарын табыңдар.

2.3. Жылдың басында банкке салынған ақша жылдың соңында өсетіні белгілі (әр банктің өз проценті бар). Жылдың басында ақшаның $\frac{5}{6}$ бөлігі бірінші банкке салынды. Ал қалған бөлігі екінші банкке салынды. Жылдың аяғында екі банктегі ақшаларды қоса есептегенде барлығы 670 ақша бірлігін құрады. Екінші жылдың соңында барлық ақша 749 болды. Егер алғашқысында ақшаның $\frac{5}{6}$ бөлігін екінші банкке, ал қалған бөлігін бірінші банкке салғанда, онда екі банктегі ақшаның мөлшері бірінші жылдың соңында 710-ға теңесер еді. Шын мәнісінде алғашқысында барлық ақша тек қана бірінші банкке салынды деп есептеп, екінші жылдың соңында қанша ақша алынғанын есепте.

2.4. Екі жаяу A мен B пункттерінен бір уақытта бір-біріне қарама-қарсы шықты. Біріншісі A-дан B-ға, екіншісі B-дан A-ға. Әрқайсысы тұрақты жылдамдықпен тоқтамай жүреді. Қарсы

пунктке жеткен соң кері бұрылады да, шыққан пунктіне қарай жүреді. Олар екінші рет кездескен кезде бірінші жаяудың екіншіге қарағанда 4 км артық жүргені белгілі болды. Ары қарай жүре беріп, бірінші жаяу А пунктіне екінші кездесуден кейін 1 сағаттан соң жетті. Ал екінші жаяу В пунктіне екінші кездесуден кейін 2,5 сағаттан кейін жетті. Бірінші жаяудың жылдамдығын тап.

2.5. А мен В қалаларының арасы 105 км. А қаласынан v км/сағ тұрақты жылдамдықпен автобус шығады. 30 минуттан кейін А қаласынан оның артынан 40 км/сағ жылдамдықпен автомобиль шығады. Автомобиль автобусты қуып жеткен соң кері бұрылып, бұрынғы жылдамдығымен жүреді. Автобустың В пунктіне жеткен уақытынан автомобильдің А пунктіне жеткен уақыты кеш болуы үшін автобустың жылдамдығы қай аралықта болуы керек.

2.6. Меншікті салмақтары әр түрлі A,B,C заттары берілген. Бұлардан әр түрлі қоспалар жасалған. I-і қоспада бірдей көлемдегі B,C алынған, II-і қоспада бірдей көлемдегі C,A алынған, III-і қоспада бірдей көлемдегі A,B алынған. Осы қоспалардың меншікті салмақтарының қатынастары: $7:6:3$. C затының меншікті салмағының B затының меншікті салмағына қарағанда неше есе артық екенін табу керек. Қоспаның көлемі оның қосынды заттарының көлемдерінің қосындысына тең деп алу керек.

2.7. Радиусы R-ге тең шеңбердің бойымен екі нүкте бірқалыпты қозғалыспен бір бағытта жүріп келеді. Бір нүкте екіншісіне қарағанда шеңберді толық айналып шығуға t сек. аз уақыт жібереді. Нүктелер T уақыт өткенде кездесіп отырады. Нүктелердің жылдамдықтарын табу керек.

2.8. Алтыны бар үш қоспа бар. Әрқайсысының салмағы 1 кг. Егер бірінші қоспаның 500 гр.-мен екінші қоспаның 200 гр.-ын қосып балқытса, онда осы шыққан қоспадағы алтынның мөлшері 300 гр.-дық үшінші қоспадағыдай болып шығар еді. Әрбір қоспадағы алтынның мөлшері, қоспалардың реттік нөмірлері бойынша алсақ, геометриялық прогрессия құрайды. Екінші түрдегі қоспадан, алтынының мөлшері 300 гр.-дық үшінші

түрдегі қоспаның алтынының мөлшеріне тең болуы үшін, қанша алу керек.

2.9. Бірнеше самосвал A пунктінде өзіне жүк тиейді. Тиеуге бәріне бірдей уақыт кетеді. Содан соң жүкті B пунктіне апарады да кері қайтады. Жүкті лезде түсіреді. Машиналардың жылдамдықтары бірдей. Жүгі бар машинаның жылдамдығы жүгі жоқ машинаның жылдамдығының $\frac{6}{7}$ бөлігін құрайды. A пунктінен бірінші болып Петров шықты. Кері қайтқан жолында ол Ивановты кездестірді. Иванов A пунктінен ең соңғы шыққан еді. Петров осы кездесуден кейін 6 минуттан соң A пунктіне жетті. Сосын тез жүгін тиеді де B пунктіне кетті. Тағы да Ивановты кездестірді, екінші рет, алғашқы кездесуден кейін 40 минут өтіпті. Екінші кездескен жерден A пунктіне дейін Иванов 16 минуттан кем емес, бірақ 19 минуттан артық емес уақыт жүрді. Жүк тиеу уақытын табу керек.

2.10. Жұмысшылар A мен B бірдей күн жұмыс істеді. Егер A 1 күн кем, ал B 7 күн кем істегенде, онда A 7200 теңге, ал B 6480 теңге табар еді. Егер, керісінше A 7 күн кем, ал B 1 күн кем істегенде, онда B A-ға қарағанда 3240 теңге көп табар еді. Әрқайсысы шын мәнісінде қаншадан ақша тапты.

2.11. A пунктінен B пунктіне дейінгі жолдың жартысын велосипедші жаяудың сол AB жолының $\frac{1}{3}$ жүрген уақытына қарағанда 2 сағат тез жүреді. AB жолын жүруге кеткен велосипедшінің уақытында жаяу 24 км. жол жүрер еді. Егер велосипедшінің жылдамдығы 7 км/сағ –на өссе, онда жаяудың 18 км жүруге кеткен уақытында велосипедші AB жолын және тағы да 3 км. жол жүрер еді. Жаяудың жылдамдығын табу керек.

2.12. Үш ерітіндідегі спирттің салмақ бойынша проценттері геометриялық прогрессияны құрайды. Егер бірінші, екінші, үшінші ерітінділерді салмақ бойынша келесі қатынаста қоссақ: $2:3:4$, ондағы шыққан ерітіндідегі спирттің проценті 32 болар еді. Егер ерітінділерді $3:2:1$ қатынасында араластырсақ, онда шыққан ерітіндідегі спирт 22% құрар еді. Үш ерітіндінің әрқайсысындағы спирттің проценттік мөлшерін табу керек.

2.13. Зертханада 4 түрлі концентрациясы бар тұздар кездеседі. Егер 1-ші, 2-ші, 3-і тұздық ерітінділерді салмағы бойынша келесі қатынаста қоссақ: $3:2:1$, онда 15% тұзы бар ерітінді шығады. Егер 2-ші, 3-ші, 4-ші ерітінділерді бірдей мөлшерде қоссақ, онда 24% тұзы бар ерітінді шығады. Егер 1-ші, 3-ші ерітінділерді бірдей мөлшерде қоссақ, онда 10% тұзы бар ерітінді шығады. Егер 2-ші, 4-ші ерітінділерді $2:1$ қатынасында қоссақ қанша процент тұзы бар ерітінді шығады.

2.14. Екі дене шеңбердің бойымен бір бағытта қозғалады. Біреуі екіншісін t_1 сек. сайын қуып жетеді. Егер осы денелер бір-біріне қарсы бағытта қозғалса, онда олар t_2 сек. сайын кездесер еді. Шеңбердің радиусы R- ге тең деп алып, денелердің жылдамдықтарын табу керек.

2.15. Көлемі $24 м^3$ болатын резервуарға екі труба жалғасқан. Бірінші труба арқылы су резервуардан тек сыртқа $2 м^3$/сағ төгіледі, ал екінші труба арқылы резервуарға су толады. Басында резервуар бос болғанда, екі трубаны қатар ашқан, сосын резервуардың жартысы суға толған соң бірінші трубаны жапқан, ал екінші трубадан су құйылып тұрған. Резервуар 28 сағ. 48 мин.-та толған. Екінші труба арқылы 1 сағатта қанша су ағатынын табу керек.

2.16. Екі дене әр түрлі нүктелерден бастап бір бағытта қозғалып келеді. Аралары бастапқыда 20 м болған. Артындағы дене жоғары үдеумен қозғалса, алдындағы дене төменгі үдеумен қозғалып келеді. Артқы дене бірінші секундта 25 м жер жүрсе, келесі секундта $\frac{1}{3}$ м-ге одан артық жүреді. Ал алдыңғы дене бірінші секундта 30 м жүрсе, келесі секундта $\frac{1}{2}$ м-ге одан кем жүреді. Қанша секундтан кейін артқы дене алдыңғысын қуып жетеді.

2.17. A пристанінен төмен B пристаніне қарай су ағысы бойынша екі қайық кетті. Бірінші қайық екіншісіне қарағанда 2 сағ. ерте жетеді. Егер осы қайықтар екі пристаннен (біріншісі А-дан, екіншісі В-дан) бір-біріне қарсы жүзсе, онда олар 3 сағ. соң

кездесер еді. Екі пристанның арасы 23 км. Екінші қайықтың жылдамдығы ағынсыз, тынық судағы, су ағысының жылдамдығынан 3 есе артық. Су ағысының жылдамдығын табу керек.

2.18. Бассейн екі труба арқылы толтырылады. Егер ол тек бірінші труба арқылы ғана толса, онда екінші трубамен толтыру уақытына қарағанда 22 мин. көп жұмсалар еді. Екі труба қатарынан істегенде бассейн 1 сағ. толады. Бассейнді әрбір труба жеке қанша уақытта толтырады.

2.19. Екі турист A мен B пункттерінен бір-біріне қарсы шығып, B пунктінен 4 км. жерде кездесті. Ары қарай B, A пункттеріне сәйкес жеткен соң олар кері қайтты. Кері жолда олар тағы да A пунктінен 2 км. жерде кездесті. Бірінші кездескеннен кейін 2 сағат өткен екен. Туристердің жылдамдықтарымен A мен B пункттерінің арасын табу керек.

2.20. Бір жұмысты бітіруге жұмысшыларға әр түрлі уақыт керек. Мысалы, 3-ші жұмысшы 1-і жұмысшыға қарағанда жұмысты 1 сағат бұрын бітіреді. Үшеуі бірігіп істегенде жұмыс 1 сағатта бітеді. Егер 1-ші жұмысшы 1 сағат, содан соң 2-ші жұмысшы 4 сағат істесе, әрқайсысы жеке, онда барлық жұмыс бітер еді. Әрқайсысы жеке қанша уақытта жұмысты бітірер еді.

2.21. Әр түрлі проценттік хромы бар екі түрлі шойынды балқытылған. Егер шойынның бір түрін екінші түрінен 5 есе көп қосып балқытса, онда шыққан қоспадағы хромның проценті аз қосылған шойындағы хромның процентінен 2 есе көп болар еді. Егер шойынның екі түрінен де бірдей шамада қосып балқытса, онда шыққан қоспада 8% хром болар еді. Әр түрдегі шойынның құрамындағы хром процентін табу керек.

2.22. Бассейн екі кран арқылы толтырылады. Егер бірінші кранды 10 мин. бойы, ал екіншісін 20 мин. бойы ашып қойса, бассейн толар еді. Егер бірінші кран 5 мин. бойы, екіншісі 15 мин. бойы ашық болса, онда бассейннің $\frac{3}{5}$ бөлігі толар еді. Кранның әрқайсысы жеке қанша уақытта бассейнді толтырар еді.

2.23. Банкке ақша салушы адамға банк жылдың соңында процент өсімі бойынша 600 теңге ақша есептеді. Адам 4400 теңге

үстінен өзі қосып тағы да бір жылға ақшасын банкте қалдырды. Келесі жылы банктегі ақша процентімен есептегенде барлығы 25750 теңге құрады. Банктің проценті неге тең еді және адам алғашқыда банкке қанша ақша салды.

2.24. Екі жеңіл машина бір пункттен бір бағытта бір уақытта шықты. Бірінші машинаның жылдамдығы 70 км. сағатына, екіншісінікі 60. Жарты сағат өткен соң сол пункттен сол бағытта үшінші машина шықты. Үшінші машина бірінші машинаны екінші машинаға қарағанда 2 сағат артық уақыттан соң қуып жетті. Үшінші машинаның жылдамдығын табу керек.

2.25. 96% қышқылы бар ыдыстан 2.5 литр ерітіндіні алып тастап, үстіне 2.5 литр 80% қышқылы бар сондай ерітіндіні құйды. Содан соң тағы да 2.5 литрді алып тастап, үстіне 2.5 литр 80% қышқылы бар сондай ерітіндіні тағы да құйды. Соңында ыдыста 89% қышқылы бар ерітінді қалды. Ыдыстың көлемін тап.

2.26. Екі жәшікте 29-дан аса деталь бар. Бірінші жәшіктен 2 деталь алсақ, онда ондағы детальдар саны екінші жәшіктегі детальдар санынан 3 есе артық болар еді. Бірінші жәшіктегі детальдар санын 3 есе арттырғанда, екінші жәшіктегі 2 есе арттырылған детальдар санынан бәрібір көп болар еді, бірақ айырмасы 60-тан кем. Әрбір жәшіктегі детальдар санын табу керек.

2.27. 10% ас тұзы бар 80 грамдық ерітінді құйылған колбадан біраз ерітіндіні пробиркаға құйып алады. Пробиркадағы ерітіндіні тұзының мөлшері алғашқыдан 3 есе көбейгенше парлайды, терлетеді. Содан соң шыққан ерітіндіні қайтадан колбаға құяды. Сонда колбадағы тұз 2% -ке көбейеді. Колбадан пробиркаға мөлшері қанша ерітінді құйып алынған.

2.28. Массасы бойынша 12% тұзы бар бутылкадан 1 литр алынып, орнына 1 литр су құйылған. Содан соң тағы да 1 литр алынып, орнына 1 литр су құйылған. Бутылкада массасы 3% тұз қалған. Бутылканың көлемін табу керек.

2.29. Азамат банкке тұрақты процент бойынша ақша салды. Алғашқы екі жылда салым 60000 теңгеге өсті, үшінші жылы тағы 49000 теңгеге өсті. Банк проценті мен алғашқы ақша мөлшерін табу керек.

2.30. A -дан C- ға сағат 9.00-де жүрдек поезд шықты. Сол уақытта AC жолының арасында орналасқан B-дан, біреуі A-ға, екіншісі C-ға екі жолаушылар таситын поездар шықты. Екеуінің жылдамдықтары өзара тең. Жүрдек поезд бірінші жолаушылық поезды өздері шыққан уақыттан 3 сағаттан кеш емес уақытта кездестіреді, содан соң өзі B-ға сол күні 14.00-ден ерте емес уақытта, ал C-ға, бірінші жолаушылық поезды кездестірген уақыттан 12 сағат өткен соң, екінші жолаушылық поезбен бір уақытта жетті. Бірінші жолаушылар таситын поездің A-ға келген уақытын табу керек.

2.31. Үш бригада бір жұмысты бірігіп бітірулері керек. Бірінші және екінші бригада бірігіп істегенде оны үшінші бригадаға қарағанда 36 мин. тезірек бітіреді. Бірінші және үшінші бригада бірігіп жұмыс бітіретін уақытта екінші бригада жұмыстың тек жартысын ғана бітірер еді. Ал екінші және үшінші бригада бірігіп жұмыс бітіретін уақытта бірінші бригада жұмыстың тек $\frac{2}{7}$ бөлігін ғана бітіреді. Үшеуі біріксе жұмыс қанша уақытта бітеді.

2.32. Екі мотоциклист A пунктінен бір уақытта әр түрлі, бірақ тұрақты жылдамдықпен шығады. B пунктіне жеткен соң кері бұрылады. Бірінші мотоциклист екіншісін басып озып, кері жолда оны B-дан 13 км. жерде тағы да кездестіреді. Содан соң A-ға жеткен соң тағы да кері қайтады, A-дан B-ға дейінгі аралықтың $\frac{1}{7}$ бөлігінде тағы да екінші мотоциклисті кездестіреді. A мен B-ның қашықтығын табу керек.

2.33. 500 кг. балқытылған қоспада мыс пен қалайы бар. Осы қоспадан массасы құрамындағы мыстың массасынан 100 кг. артық болатын қоспаның бөлігін алып тастады. Содан соң алынып тасталған қоспаның массасына тең қалайы қосылды. Артынан қосылған қалайының массасына тең қоспаны тағы да алып тастады. Ең соңында мыстың мөлшері қоспада алғашқысымен салыстырғанда $\frac{25}{4}$ есе азайғаны білінді. Алғашқы қоспадағы қалайының процентін табу керек.

2.34. Бірінші жылы 400 мың тонна мұнай өндірілді, содан соң бірнеше жылдар бойы мұнай өндіру жыл сайын 50 процентке артып отырды. Артынан 9 жыл бойы мұнайдың жыл сайынғы өнімі өзгерген жоқ. Барлық мұнай өнімі ең соңында 35 млн. 650 мың тоннаны құрады. Қанша жыл мұнай өндірілгенін табу керек.

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА ЕСЕПТЕРІНІҢ ШЫҒАРУ ЖОЛДАРЫ МЕН ЖАУАПТАРЫ

1.1. Екінші және үшінші ретті анықтауыштар

1.1. Бірінші жолдың элементтерінен екінші жолдың сәйкес элементтерін аламыз, немесе ол екінші жолдың элементтерін “-1”-ге көбейтіп, бірінші жолдың элементтеріне қосқанға тең:

$\begin{vmatrix} x^2-y^2 & a(x-y) & 0 \\ y^2-z^2 & a(y-z) & 0 \\ z^2+a^2 & az & 1 \end{vmatrix}$. Содан кейін алынған анықтауышты үшінші бағанның элементтері бойынша жіктейміз, бұл бағанның екі элементі 0-ге тең болғандықтан тек ең соңғы 1-ге тең элементі бойынша ғана жіктеледі:

$1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} x^2-y^2 & a(x-y) \\ y^2-z^2 & a(y-z) \end{vmatrix}$. Ортақ көбейткіштерді анықтауыштың алдына шығарамыз:

$(x-y)\cdot(y-z)\cdot\begin{vmatrix} x+y & a \\ y+z & a \end{vmatrix} = a\cdot(x-y)\cdot(y-z)\cdot\begin{vmatrix} x+y & 1 \\ y+z & 1 \end{vmatrix}$. Ары қарай есептеп табамыз:

$$a\cdot(x-y)\cdot(y-z)\cdot(x+y-y-z) = a\cdot(x-y)\cdot(y-z)\cdot(x-z).$$

Жауабы: $a\cdot(x-y)\cdot(y-z)\cdot(x-z)$.

1.2. Бірінші бағанның элементтерінен екінші бағанның элементтерін сәйкес аламыз:

$\begin{vmatrix} 2 & 15323 & 37527 \\ 0 & 23735 & 17417 \\ 0 & 23737 & 17418 \end{vmatrix}$. Бірінші бағанның элементтері бойынша жіктейміз:

$2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 23735 & 17417 \\ 23737 & 17418 \end{vmatrix}$. Екінші жолдың элементтерінен бірінші жолдың элементтерін сәйкес аламыз да есептейміз:

$$2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 23735 & 17417 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (23735 \cdot 1 - 17417 \cdot 2) =$$
$$= 2 \cdot (23735 - 34834) = -22198.$$

Жауабы: -22198.

1.3. Бірінші жолдың элементтерін 2-ге көбейтіп, төртінші жолдың элементтеріне сәйкес қосамыз:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$. Үшбұрышты, диагональдың астыңғы немесе үстіңгі элементтерінің барлығы 0-ге тең, анықтауыштың мәні диагональ бойындағы элементтердің көбейтіндісіне тең.

Жауабы: 48.

1.4. -36. 1.5. 0. 1.6. 16. 1.7. 87.

1.2. Матрицалар және оларға қолданылатын амалдар

1.8. $A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot 0+1\cdot 3+0\cdot 1 & 1\cdot 7+1\cdot 4+0\cdot 0\\ 3\cdot 0-1\cdot 3+5\cdot 1 & 3\cdot 7-1\cdot 4+5\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 11\\ 2 & 17\end{pmatrix}$.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0\cdot 1+7\cdot 3 & 0\cdot 1+7\cdot(-1) & 0\cdot 0+7\cdot 5\\ 3\cdot 1+4\cdot 3 & 3\cdot 1+4\cdot(-1) & 3\cdot 0+4\cdot 5\\ 1\cdot 1+0\cdot 3 & 1\cdot 1+0\cdot(-1) & 1\cdot 0+0\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & -7 & 35\\ 15 & -1 & 20\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Жауабы: $A\cdot B\neq B\cdot A$.

1.9.

$$AB=\begin{pmatrix}5 & 9 & 7\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 9\\ 0 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 5+9\cdot 0+7\cdot 0 & 5\cdot 9+9\cdot 3+7\cdot 2\\ 0\cdot 5+3\cdot 0-2\cdot 0 & 0\cdot 9+3\cdot 3-2\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}25 & 86\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

$$(AB)C=\begin{pmatrix}25 & 86\\ 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\cdot 3-1\cdot 86 & 25\cdot 4+86\cdot 0\\ 0\cdot 3+5\cdot(-1) & 0\cdot 4+5\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-11 & 100\\ -5 & 0\end{pmatrix}.$$

$$BC=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 0 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 3+9\cdot(-1) & 5\cdot 4+9\cdot 0\\ 0\cdot 3+3\cdot(-1) & 0\cdot 4+3\cdot 0\\ 0\cdot 3+2\cdot(-1) & 0\cdot 4+2\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 20\\ -3 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}5 & 9 & 7\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 20\\ -3 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5\cdot 6+9\cdot(-3)+7\cdot(-2) & 5\cdot 20+9\cdot 0+7\cdot 0\\ 0\cdot 6+3\cdot(-3)-2\cdot(-2) & 0\cdot 20+3\cdot 0-2\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 100\\ -5 & 0\end{pmatrix}.$$

Жауабы: сонымен $(AB)C = A(BC)$.

1.10. $(A+3\cdot B)=\begin{pmatrix}1+3\cdot(-2) & 4+3\cdot 1 & 7+3\cdot(-1)\\ 2+3\cdot 1 & 5+3\cdot 0 & -8+3\cdot 2\\ -3+3\cdot 4 & 6+3\cdot(-1) & 9+3\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 7 & 4\\ 5 & 5 & -2\\ 9 & 3 & 9\end{pmatrix}$.

$$(A+3\cdot B)^2=\begin{pmatrix}-5 & 7 & 4\\ 5 & 5 & -2\\ 9 & 3 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 7 & 4\\ 5 & 5 & -2\\ 9 & 3 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}96 & 12 & 2\\ -18 & 54 & -8\\ 51 & 105 & 111\end{pmatrix}.$$

Жауабы: $(A+3\cdot B)^2=\begin{pmatrix}96 & 12 & 2\\ -18 & 54 & -8\\ 51 & 105 & 111\end{pmatrix}$.

1.3. Анықтауыштарды теңдеулер жүйесін шешуге қолдану

1.11. Теңдеулер жүйесінің рангісін көмкерілген минорлар әдісімен табайық. Ол үшін төменгі бірінші, екінші және үшінші ретті анықтауыштарды құрастырып, сандық мәндерін тексеріп шығамыз.

$D=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$. Мұндағы ең соңғы бағанның элементтері – жүйенің бос мүшелері. Бірінші ретті анықтауыш құрайық: $\Delta_1 = 2 \neq 0$, екінші ретті анықтауышты осы бірінші ретті анықтауышты қоршап тұрған элементтерден құраймыз: $\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4+1\neq 0$, үшінші ретті анықтауышты екінші ретті анықтауышты қоршап тұрған элементтерден құраймыз:

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, нольге айналатын анықтауыш шыққанға дейін құрастыра беруге болады. Келесі үшінші ретті анықтауыштың мәнін есептейік: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$. Демек, $r_A = r_B = 3$, негізгі матрица мен кеңейтілген матрицаның рангілері тең. Кронекер-Капелли теоремасы бойынша жүйе үйлесімді. Матрицалық әдіспен белгісіздерді табайық. Кері матрицаны есептеп аламыз, ол үшін алдымен транспонирленген матрицаның барлық алгебралық толықтауыштарын есептейміз.

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad A_{11}^T = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$A_{12}^T = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-0) = 1, \; A_{13}^T = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21}^T = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; A_{22}^T = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{23}^T = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2, \; A_{31}^T = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{32}^T = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \; A_{33}^T = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

$A^{-1}=\dfrac{\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}}{7}$, $X=A^{-1}\cdot B=\dfrac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -2\end{pmatrix}$. Осыдан келесі теңдіктер шығады:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}3\cdot(-1)+1\cdot(-2)+1\cdot(-2)\\ -1\cdot(-1)+2\cdot(-2)+2\cdot(-2)\\ 1\cdot(-1)-2\cdot(-2)+5\cdot(-2)\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-7\\ -7\\ -7\end{pmatrix},$$ бұдан аламыз:

$x_1=-1,\ x_2=-1,\ x_3=-1.$

Жауабы: $x_1=-1,\ x_2=-1,\ x_3=-1.$

1.12. Алдымен жүйенің анықтауышын есептеп аламыз:

$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$, $\det A=13$. Бос мүшелер бағанын бірінші белгісіздер тұрған бағанға ауыстырамыз:

$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ -6 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=13$. Ары қарай бірінші белгісізді табамыз:

$x_1=\dfrac{\Delta_1}{\det A}=\dfrac{13}{13}=1$. Бос мүшелер бағанын енді екінші белгісіздер тұрған бағанмен ауыстырамыз:

$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & -6 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-26$. Екінші белгісізді табамыз:

$x_2=\dfrac{\Delta_2}{\det A}=\dfrac{-26}{13}=-2$. Бос мүшелер бағанын үшінші белгісіздер тұрған бағанмен ауыстырамыз:

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Үшінші белгісізді табамыз: $x_3 = \frac{\Delta_3}{\det A} = \frac{0}{13} = 0$.

Жауабы: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$.

1.13. $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 2 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, бұл матрицадағы 4-ші баған элементтері жүйенің бос мүшелері. Енді 1-ші жолдың элементтерін (-3)-ке көбейтіп, 3-ші жолдың элементтеріне сәйкес қосамыз, қорытынды элементтер 3-ші жолға жазылады. Ал бірінші жолдың элементтері өзгеріссіз қалады:

$D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 2 & 3 & 5 & 12 \\ 0 & 11 & -11 & 66 \end{pmatrix}$, енді 1-ші жолдың элементтерін (-2)-ге көбейтіп, 2-ші жолдың элементтеріне сәйкес қосамыз:

$D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 11 & -11 & 66 \end{pmatrix}$, 3-ші жолдың элементтерінен 2-ші жолдың элементтерін сәйкес алайық:

$D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \end{pmatrix}$, теңдеулер құрастырайық, ең соңғы жолдың элементтерінен бастап жоғары қарай жүреміз:

$-10x_3 = 10$, $11x_2 - x_3 = 56$, $x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22$. Осы теңдеулерден келесі белгісіздерді табамыз: $x_3 = -1$, $x_2 = 5$, $x_1 = 1$.

Жауабы: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = -1$.

1.14. $x = -1,\ y = 0,\ z = 1.$ **1.15.** $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = -1.$

1.4. Векторлар

1.16. Үшбұрыш қабырғаларының бағыттарын сағат тілінің бағытымен бағыттас етіп алайық. Алдымен $\vec{AB}$, соған жалғастырылған басы осы вектордың аяғы болатын $\vec{BC}$ векторын саламыз, содан соң басы екінші вектордың аяғы болатын $\vec{CA}$ векторын салып үшбұрыш шығарып векторларды тұйықтаймыз. Суретін өздерің салыңдар. Сонда келесі теңдіктерді аламыз:

$$\vec{AT} = \vec{c} + \frac{\vec{a}}{2} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a},\quad \vec{BN} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},\quad \vec{CP} = \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Жауабы: $\vec{AT} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a},\ \vec{BN} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},\ \vec{CP} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$

1.17. Берілген пирамиданың суретін салу керек. Табан болатын үшбұрыштағы қабырғалар бағытын сағат тілі бағытымен аламыз: $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$. Үшбұрыштың ауырлық центрі медианаларының қиылысу нүктесінде жататыны белгілі. Ал медиана қабырғаны ортасынан бөледі. Осы қасиетін пайдаланып, келесі теңдіктерді аламыз:

$$\vec{CA} = \vec{a} - \vec{c},\ \vec{AD} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \vec{c} - \vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{c}}{2} = \frac{2\vec{c} - 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}}{2} = \frac{\vec{c} + \vec{b}}{2} - \vec{a}.$$

$$\vec{AO} = \frac{2}{3}\vec{AD} = \frac{2}{3}\left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \vec{a}\right) = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} - \frac{2\vec{a}}{3}.$$

$$\vec{SO} = \vec{SA} + \vec{AO} = \vec{a} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} - \frac{2\vec{a}}{3} = \frac{\vec{a}}{3} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

Жауабы: $\vec{SO} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$

1.18. Диагональдардың қиылысу нүктесі оларды ортасынан қақ бөледі. Сонымен келесі теңдіктер орынды болады: $BE = ED$, $AE = EC$. E нүктесі AC кесіндісінің ортасы болғандықтан келесі теңдіктер орынды болады:

$x_E = \frac{x_A + \lambda \cdot x_C}{1+\lambda}$, кесінді екіге бөлінгендіктен $\lambda = 1$. Содан соң келесі теңдікті аламыз: $4 = \frac{2 + x_C}{2}$, $x_C = 6$, $y_E = \frac{y_A + \lambda \cdot y_C}{1+\lambda}$, $-1 = \frac{-3 + y_C}{2}$, $y_C = 1$, $z_E = \frac{z_A + \lambda \cdot z_C}{1+\lambda}$, $7 = \frac{-5 + z_C}{2}$, $z_C = 19$. Осы әдіспен келесі D нүктесінің координаталарын іздейміз: $x_E = \frac{x_B + \lambda \cdot x_D}{2}$, $4 = \frac{-1 + x_D}{2}$, $x_D = 9$. $y_E = \frac{y_B + \lambda \cdot y_D}{2}$, $-1 = \frac{3 + y_D}{2}$, $y_D = -5$, $z_E = \frac{z_B + z_D}{2}$, $z_D = 12$.

Жауабы: $C(6, 1, 19)$, $D(9, -5, 12)$.

1.19. $\left(\vec{a}\right)^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{a}) = 3 \cdot 3 \cdot \cos 0^0 = 9$.

$\left(\vec{b}\right)^2 = |\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{b}, \vec{b}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos 0^0 = 16$.

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = (\vec{a})^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b})^2 = 9 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 16 = 25 + 24 \cdot (-\frac{1}{2}) = 13.$

$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = (\vec{a})^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b})^2 = 9 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 16 = 25 - 24 \cdot (-\frac{1}{2}) = 37.$

Жауабы: $\left(\vec{a}\right)^2 = 9$, $\left(\vec{b}\right)^2 = 16$, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = 13$, $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = 37$.

1.20. $(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 22$.

Бұл нәтижені i, j, k базисінде алдық. Енді $\left(\vec{a}\right)^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2$, $\left(\vec{a}\right)^2 = 36$, $\left(\vec{b}\right)^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2$, $\left(\vec{b}\right)^2 = 36 + 9 + 4 = 49$.

1.21. ABC үшбұрышы қабырғаларының бағытын сағат тілі бағытымен қабылдайық: AB, BC, CA кесінділері қабырғалар құрасын. B төбесінен асыра BC қабырғасын созайық, созылған қабырғаның жалғасынан D нүктесін белгілеп алайық. AB кесіндісінің ұзындығын табайық:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} =$$

$$= ((-4-(-1))^2 + (-2-(-2))^2 + (0-4)^2)^{\frac{1}{2}} = (9+0+16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5.$$

Сонымен $AB = 5$, BC қабырғасының да ұзындығын осы әдіспен есептейік:

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} =$$

$$= ((3-(-4))^2 + (-2-(-2))^2 + (1-0)^2)^{\frac{1}{2}} = (49+0+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{50}.$$

Келесі CA қабырғасының ұзындығын есептейміз:

$$CA = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2} =$$

$$= ((-1-3)^2 + (-2-(-2))^2 + (4-1)^2)^{\frac{1}{2}} = (16+0+9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5.$$

CA=5, $AB = CA = 5$ тең бүйірлі үшбұрыш және Пифагор теоремасы бойынша $AB^2 + CA^2 = BC^2$, демек $\angle BAC = 90^\circ$, ендеше $\angle ABC = \angle BCA = 45^\circ$. Сыртқы $\angle DBA = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Осы есепті

косинустар теоремасы бойынша шығаруға да болады: $CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$, $5^2 = 5^2 + 50 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{50} \cdot \cos\angle ABC$, $5 = \sqrt{50} \cdot \cos\angle ABC$, $\cos\angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, демек сыртқы $\angle DBA = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$.

Жауабы: B төбесіндегі сыртқы бұрыш $\angle DBA = 135^\circ$.

1.22. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 4 \cdot \sin 90^\circ = 12$,

$|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = |\vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b}|$, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$, $\vec{b} \times \vec{b} = 0$, $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ болғандықтан келесі теңдік орынды: $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = |-2\vec{a} \times \vec{b}| = 24$.

Жауабы: $|\vec{a} \times \vec{b}| = 12$, $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = 24$.

1.23.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(1+4) - \vec{j}(-3+2) + \vec{k}(6+1) = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}.$$

Жауабы: $\vec{a} \times \vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$. Немесе $\vec{a} \times \vec{b} = (5,\ 1,\ 7)$.

1.24. $\vec{AB}$ векторын табайық: $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (2,-2,3)$, немесе $\vec{AB} = \vec{AB}(2,-2,3)$. Сол сияқты $\vec{AC}$ векторының координаталарын табамыз: $\vec{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (4,0,6)$, немесе $\vec{AC} = \vec{AC}(4,0,6)$. $ABDC$ параллелограмының ауданын есептейік:

$S_{ABDC} = ?, ал$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 8\vec{k}$. Параллелограмның ауданы осы векторлық көбейтіндінің модулі ретінде табылса, үшбұрыштың ауданы параллелограмм ауданының жартысы ретінде табылады. Сонымен:

$$S_{ABDC} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-12)^2 + 8^2} = \sqrt{208},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{208} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Жауабы: $S_{ABC} = 2\sqrt{13}$.

1.25. Үш вектордың аралас көбейтіндісін табамыз, анықтауышты есептейміз:

$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 0$, демек үш вектор компланар.

Жауабы: үш вектор компланар.

1.5. Жазықтықтар

1.26. $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтықтың жалпы теңдеуі. OXZ-ке параллель болғандықтан ізделінді теңдеу келесі түрде жазылады: $By + D = 0$, $By = -D$. Берілген нүктенің координаталық мәнін осы соңғы теңдеуге қоямыз $-3B = -D$, $B = \frac{D}{3}$, қайтадан апарып осы мәнді $By + D = 0$ теңдеуіне қоямыз $\frac{D}{3}y + D = 0$, қысқартқан соң келесі теңдеуді аламыз: $\frac{y}{3} + 1 = 0$, немесе $y + 3 = 0$.

Жауабы: $y + 3 = 0$.

1.27. OZ осі арқылы өтетіндіктен ізделінді жазықтық мына түрде жазылады $Ax+By+D=0$ және бас нүкте арқылы да өтетіндіктен, $O(0,0,0)$ арқылы, бас нүкте координаталарын ізделінді теңдеуге қойып $A\cdot 0+B\cdot 0+D=0$ теңдеуінен $D=0$ мәнін табамыз. Сонымен ізделінді теңдеу $Ax+By=0$ түрінде жазылады, берілген нүктенің координаталарын осы теңдеуге қойсақ $-3A+B=0$ шығады, бұдан $B=3A$ аламыз. Осы мәнді қайтадан $Ax+By=0$ теңдеуіне қоямыз: $Ax+3Ay=0$, қысқартқан соң келесі теңдеу шығады: $x+3y=0$. Сонымен ізделінді теңдеудің

Жауабы: $x+3y=0$.

1.28. Ізделінді теңдеу келесі түрде жазылады: $By+Cz+D=0$. Берілген нүктелердің координаталарын осы теңдеуге қойып, келесі жүйені аламыз:

$\begin{cases} B\cdot 0+C\cdot(-2)+D=0, \\ B\cdot 1+C\cdot 7+D=0. \end{cases}$ бұдан келесі мәндерді табамыз: $D=2C$, $B=-9C$. Осы мәндерді $By+Cz+D=0$ теңдеуіне қоямыз: $-9Cy+Cz+2C=0$. Қысқартқан соң келесі теңдеу шығады: $-9y+z+2=0$. Немесе $9y-z-2=0$ түрде жазу ыңғайлырақ болар еді. Сонымен

Жауабы: $9y-z-2=0$.

1.29. Берілген нүкте арқылы өтетін, нормаль векторы белгілі жазықтық теңдеуі мына түрде жазылады: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Нормаль вектор $\vec{n}=(1,-2,3)$ координаталары $(A=1,B=-2,C=3)$. Нүкте координаталарын және нормаль вектор координаталарын $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ теңдеуіне қоямыз, сонда келесі теңдеу шығады: $1(x-2)+(-2)(y-1)+3(z-(-1))=0$, осыдан келесі теңдеу шығады:

$x-2y+3z+3=0$.

Жауабы: $x-2y+3z+3=0$.

1.30. Берілген екі векторға да перпендикуляр вектор екі вектордың векторлық көбейтіндісі ретінде табылады:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -i - 4j - 7k$, $\vec{n} = (-1,-4,-7)$ ізделінді жазықтықтың нормаль векторын береді. Қалғаны алдыңғы есепке ұқсас есептелінеді. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ теңдеуіне берілген нүктенің мәндерін және нормаль вектордың координаталарының мәндерін қоямыз: $-1(x-3)-4(y-4)-7(z-(-5))=0$, немесе келесі теңдеуді аламыз: $-x-4y-7z-16=0$, бұған пара-пар мына теңдеу шығады: $x+4y+7z+16=0$.

Жауабы: $x+4y+7z+16=0$.

1.31. A,B,C нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін құрастырайық:

$\begin{vmatrix} x-5 & y-4 & z-3 \\ 2-5 & 3-4 & -2-3 \\ 3-5 & 4-4 & 2-3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x-5 & y-4 & z-3 \\ -3 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Бұдан келесі теңдеуді аламыз:

$x+7y-2z-27=0$.

Жауабы: $x+7y-2z-27=0$.

1.32. Берілген нүкте арқылы өтетін, нормаль векторы берілген жазықтық теңдеуіне берілген бірінші нүктенің координаталарын қояйық. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ теңдеуіне тиісті координаталарды қойған соң мына теңдеуді аламыз: $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$, осыдан соң дәл осы теңдеуге екінші берілген нүктенің координаталарын қоямыз: $A(2-1)+B(3-1)+C(4-1)=0$, $A+2B+3C=0$. Ізделінді жазықтық берілген жазықтыққа перпендикуляр болатындықтан келесі теңдік орындалуы керек:

$A_1A+B_1B+C_1C=0$, мұндағы A_1,B_1,C_1 берілген жазықтықтың нормаль векторының координаталары $(A_1=2,B_1=-7,C_1=5)$, ал ізделінді жазықтықтың нормаль векторының координаталары A,B,C болады. Мәндерді орнына қойған соң келесі теңдеуді аламыз: $2A-7B+5C=0$. Келесі теңдеулер жүйесін құрастырамыз:

$\begin{cases}2A-7B+5C=0,\\ A+2B+3C=0.\end{cases}$ жүйенің екінші теңдеуін 2 санына көбейтіп, шыққан теңдеуден жүйенің бірінші теңдеуін алып тастағанда келесі теңдікті аламыз:

$11B+C=0$, $C=-11B$. Осы шыққан мәндерді келесі теңдікке қоямыз $A+2B+3C=0$, сонда $A+2B-33B=0$ теңдеуін аламыз. Бұдан $A=31B$, $B=t$ деген параметр ретінде алсақ, $A=31t$ болады. A,B,C- ның мәндерін $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$ теңдеуіне қойсақ келесі теңдеу шығады: $31t(x-1)+t(y-1)-11t(z-1)=0$, бірдей параметрге қысқартқан соң келесі теңдеуді аламыз: $31(x-1)+(y-1)-11(z-1)=0$. Бұдан келесі теңдеу шығады:

$31x+y-11z-21=0$.

Жауабы: $31x+y-11z-21=0$.

1.33. Екі жазықтық арасындағы бұрыштың косинусы келесі формуламен анықталады:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$ Орнына нормаль векторлардың координаталарының мәндерін қойып, келесі теңдікті аламыз:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot3-2\cdot(-4)+2\cdot0}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}}=\frac{11}{15}.$$ Сонымен екі жазықтық арасындағы бұрыш $\varphi=\arccos\frac{11}{15}$.

Жауабы: $\varphi=\arccos\frac{11}{15}$.

1.6. Кеңістіктегі түзулер

1.34. $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ формуласы бойынша мәндерді орнына қоямыз, келесі теңдеуді аламыз:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-0}{-3}=\frac{z-(-3)}{5}.$$

Жауабы: $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-(-3)}{5}$.

1.35. Берілген түзуге параллель болатын түзудің бағыттас векторын табамыз, ол жүйедегі екі жазықтықтың нормаль векторларының векторлық көбейтіндісіне тең болады:

$\vec{m}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}=-11i+17j+13k$, немесе $\vec{m}(-11,17,13)$. Ізделінді түзудің канондық теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$\frac{x-2}{-11}=\frac{y-0}{17}=\frac{z-(-3)}{13}.$$

Жауабы: $\frac{x-2}{-11}=\frac{y}{17}=\frac{z+3}{13}$.

1.36. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}=t$ деп белгілеп аламыз. Белгісіздерді осы параметр арқылы өрнектейміз:

$x=2t-1$, $y=4t+3$, $z=3t$. Жазықтық теңдеуіне $3x-3y+2z-5=0$ осы мәндерді қоямыз:

$3(2t-1)-3(4t+3)+2\cdot 3t-5=0$. Бұдан келесі теңсіздік шығады: $-17=0$.

$\sin\varphi = \dfrac{|Av+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{v^2+n^2+p^2}}$ осы формуладан көріп отырмыз, егер түзу мен жазықтық параллель болса, онда $Av+Bn+Cp=0$ шарты орындалады. Осы шартты тексерейік, $\vec{a}(2,4,3)$ түзудің бағыттас векторы, ал $\vec{n}(3,-3,2)$ жазықтықтың нормаль векторы, есептесек: $3\cdot 2+(-3)\cdot 4+2\cdot 3=0$, $0=0$, демек түзу мен жазықтық параллель орналасқан.

Жауабы: түзу мен жазықтық параллель орналасқан.

1.37. $\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}=t$ деп белгілейміз. Келесі теңдіктерді аламыз:

$x=8t+13$, $y=2t+1$, $z=3t+4$. Жазықтық теңдеуіне $x+2y-4z+1=0$ осы мәндерді апарып қоямыз:

$8t+13+2(2t+1)-4(3t+4)+1=0$, $0=0$. Демек түзу жазықтықта жатыр.

Жауабы: түзу жазықтықта жатыр.

1.38. $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{4}=t$ деп белгілейміз. Белгісіздерді осы параметр арқылы жазамыз, сонда келесі теңдіктер шығады:

$x=5t+7$, $y=t+4$, $z=4t+5$. Жазықтық теңдеуіне $3x-y+2z-5=0$ осы мәндерді апарып қоямыз:

$3(5t+7)-(t+4)+2(4t+5)-5=0$, $22t+22=0$, $t=-1$.
Белгісіздердегі параметр орнына шыққан мәнді қоямыз:

$x=5(-1)+7=2$, $y=-1+4=3$, $z=4(-1)+5=1$. Демек түзу мен жазықтық белгісіздердің шыққан мәндерінде қиылысады.

Жауабы: $x=2$, $y=3$, $z=1$ координаталары осы мәндерді қабылдайтын нүктеде түзу мен жазықтық қиылысады.

1.39. $\frac{x-(-1)}{4-(-1)}=\frac{y-3}{5-3}$, екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуіне берілген нүктелердің мәндерін қоямыз. Сонымен келесі теңдеуді аламыз:

$2x-5y+17=0$.

Жауабы: $2x-5y+17=0$.

1.40. Екі түзудің перпендикулярлық шартын жазайық:

$A_1A_2+B_1B_2=0$, берілген түзудің нормаль векторы $\vec{n}(2,-3)$, ал ізделінді түзудікі $\vec{n}_2(A_2,B_2)$, теңдеуге қоямыз: $2A_2-3B_2=0$, $B_2=\frac{2A_2}{3}$. Ізделінді түзудің жалпы теңдеуі келесі түрде жазылады:

$A_2x+B_2y+C_2=0$, немесе $A_2x+\frac{2A_2}{3}y+C_2=0$. Берілген нүктенің мәнін соңғы теңдеуге қоямыз:

$A_2(-2)+\frac{2A_2}{3}3+C_2=0$, немесе $-2A_2+2A_2+C_2=0$, $C_2=0$. Ізделінді түзудің жалпы теңдеуіне қайта оралсақ келесі теңдеуді аламыз:

$A_2x+\frac{2A_2}{3}y=0$, ортақ көбейткішке қысқарта отырып келесі теңдеуді аламыз:

$x+\frac{2}{3}y=0$, басқаша $3x+2y=0$.

Жауабы: $3x+2y=0$.

1.7. Екінші ретті сызықтар мен беттер

1.41. Эллипстің канондық теңдеуінен табамыз: $a=5$, $b=3$, $c^2=a^2-b^2$, $c=\pm 4$. Фокустары $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$ болады, $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$, $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25}{4}$. Ең соңғы теңдеулер эллипстің директрисаларын көрсетеді.

Жауабы: $a=5$, $b=3$, $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$, $e=0.8$, $x=\pm\frac{25}{4}$.

1.42. Гиперболаның канондық теңдеуінен табамыз: $a=6$, $b=8$, ылғи $b^2=c^2-a^2$ орындалатындықтан, келесі теңдік орынды: $c^2=a^2+b^2$, осыдан $c=\pm 10$, фокустары $F_1(-10,0)$, $F_2(10,0)$ екені шығады. Эксцентриситеті $e=\frac{c}{a}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}>1$, директрисасы $D_1=x=\frac{-a}{e}=\frac{-6}{\frac{5}{3}}=-\frac{18}{5}$, $D_2=x=\frac{a}{e}=\frac{6}{\frac{5}{3}}=\frac{18}{5}$.

Асимптоталары: $y=\pm\frac{b}{a}x$, $y=\pm\frac{8}{6}x=\pm\frac{4}{3}x$.

Жауабы: $a=6$, $b=8$, $F_1(-10,0)$, $F_2(10,0)$, $e=\frac{5}{3}$, $D_1=x=-3.6$, $D_2=x=3.6$, $y=\pm\frac{4}{3}x$.

1.43. $6=2p$, $p=3$, параболаның директрисасы $D=\frac{-p}{2}=\frac{-3}{2}$, фокусы $F(0,\frac{3}{2})$.

Жауабы: $D=-1.5$, $F(0,1.5)$.

1.44. $2c=10$, $c=5$, $b=\frac{24}{2}=12$, $b^2=a^2-c^2$, $12^2=a^2-5^2$, $a^2=169$, $a=13$, сонымен эллипстің теңдеуі былай жазылады: $\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{12^2}=1$ немесе $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$.

Жауабы: эллипстің канондық теңдеуі $\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{12^2}=1$.

1.45. $2c=6$, $c=3$, $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$, $a=5$, $b^2=a^2-c^2$, $b^2=25^2-3^2=16$, $b=4$,

сонымен эллипстің канондық теңдеуі $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ немесе $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Жауабы: эллипстің канондық теңдеуі $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$.

1.46. $x^2+2y^2+4z^2=2$, бос мүшеге бөліп ықшамдаймыз:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{2y^2}{2}+\frac{4z^2}{2}=1,\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{\frac{1}{2}}=1,\ a=\sqrt{2},\ b=1,\ c=\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Жауабы: эллипсоид.

1.47. $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0$, толық квадрат бөліп шығарамыз:

$$(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+(y+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+(z-2)^2-4=0,$$

$(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{5}{2})^2+(z-2)^2=\frac{25}{2}$, осы өрнекті бос мүшеге (оң жағындағы) бөлеміз де келесі өрнекті аламыз:

$$\frac{(x-\frac{3}{2})^2}{\frac{25}{2}}+\frac{(y+\frac{5}{2})^2}{\frac{25}{2}}+\frac{(z-2)^2}{\frac{25}{2}}=1,\ \frac{(x-\frac{3}{2})^2}{\left(\sqrt{\frac{25}{2}}\right)^2}+\frac{(y+\frac{5}{2})^2}{\left(\sqrt{\frac{25}{2}}\right)^2}+\frac{(z-2)^2}{\left(\sqrt{\frac{25}{2}}\right)^2}=1.$$

$a=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}},\ b=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}},\ c=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}.$

Жауабы: центрі $(\frac{3}{2},-\frac{5}{2},2)$, радиусы $R=\frac{5}{\sqrt{2}}$ болатын шар.

1.48. $36x^2+16y^2-9z^2+18z=9$, толық квадраттар бөліп шығарамыз: $36x^2+16y^2-9((z-1)^2-1)=9$, $36x^2+16y^2-9(z-1)^2+9=9$,

$36x^2+16y^2-9(z-1)^2=0$, $x^2+\frac{16}{36}y^2-\frac{9}{36}(z-1)^2=0$,

$x^2+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{(z-1)^2}{2^2}=0$ - екінші ретті конусты көрсетеді, $a=1$, $b=\frac{3}{2}$, сол сияқты $c=2$.

Жауабы: $x^2+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{(z-1)^2}{2^2}=0$ - екінші ретті конус.

1.49. $x^2+y^2+z^2=2z$, толық квадрат бөлеміз: $x^2+y^2+z^2-2z=0$,

$x^2+y^2+(z-1)^2-1=0$, $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, центрі $(0,0,1)$ нүктесінде, радиусы 1-ге тең шар.

Жауабы: $x^2+y^2+(z-1)^2=1$.

1.8. Функциялар. Шектер

1.50. $x^2-6x+5\geq 0$ анықталу облысын көрсетеді. Теңдеудің түбірлерін табу керек: $x^2-6x+5=0$, $x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-5}$, $x_1=3-2=1$, $x_2=3+2=5$.

Түбір астындағы функция түбірлері арқылы келесі көбейткіштерге жіктеледі: $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$, интервалдар әдісімен $(x-1)(x-5)\geq 0$ орындалатын облысты іздейміз. Ол $(-\infty,1]\cup[5,\infty)$.

Жауабы: $(-\infty,1]\cup[5,\infty)$.

1.51. $\left|\frac{2x}{1+x}\right|\leq 1$, бұдан келесі жүйені аламыз: $\begin{cases}\frac{2x}{1+x}\leq 1,\\ \frac{2x}{1+x}\geq -1.\end{cases}$, $\begin{cases}\frac{x-1}{1+x}\leq 0,\\ \frac{3x+1}{1+x}\geq 0.\end{cases}$, интервалдар әдісімен шешіп келесі жауапты аламыз: $[-\frac{1}{3},1]$

Жауабы: $[-\frac{1}{3},1]$.

1.52. Анықталу облысын келесі түрде іздейміз: $25-x^2\geq 0$, $\sin x>0$, немесе жүйе құрсақ: $\begin{cases}\sin x>0,\\ x^2\leq 25.\end{cases}$, $\begin{cases}\sin x>0,\\ x\leq 5,\\ x\geq -5.\end{cases}$, интервалдар әдісімен шешіп жауабын табамыз: $(0,\pi)$.

Жауабы: $(0,\pi)$.

1.53. Көрсеткіштік функция $y=2^u$, тригонометриялық $u=\sin v$, дәрежелік функция $v=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ осы үш функциялардың композициясы берілген функция болады.

Жауабы: $y=2^u$, $u=\sin v$, $v=x^{\frac{1}{3}}$, немесе $y=f(u(v(x)))$.

1.54. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+3n-5}{1-n^2}$ шекте алымын да, бөлімін де ортақ n^2-қа бөлеміз, сонда келесі өрнекті аламыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-1}=\dfrac{3}{-1}=-3.$

Жауабы: -3.

1.55. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+10x+20}{x^3-10x^2-1}$ өрнекте алымын да, бөлімін де x^3 бөлеміз, сонда келесі өрнекті аламыз: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}+\frac{20}{x^3}}{1-\frac{10}{x}-\frac{1}{x^3}}=\dfrac{0}{1}=0.$

Жауабы: 0.

1.56. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$ өрнекте алымын да, бөлімін де көбейткіштерге жіктейміз: $8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1)$, $6x^2-5x+1=(3x-1)(2x-1)$, $6x^2-5x+1=0$ теңдеуінен түбірлерін табамыз: $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\dfrac{5\pm1}{12}$, $x_1=\dfrac{5-1}{12}=\dfrac{1}{3}$, $x_2=\dfrac{5+1}{12}=\dfrac{1}{2}$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ жіктелетіндігі мектептен белгілі, сонымен $\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\dfrac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(3x-1)(2x-1)}=\dfrac{4x^2+2x+1}{3x-1}.$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\frac{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}+1}{3\cdot\frac{1}{2}-1}=6.$$

Жауабы: 6.

1.57. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg3x}{\sin2x}\leftrightarrow\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$, шексіз аз шамалардың өзара пара-парлығынан шығады.

Жауабы: $\frac{3}{2}$.

1.58. $\frac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}=\frac{2\sin^2 3x}{x\sin 3x}=\frac{2\sin 3x}{x}=\frac{2\sin 3x}{3x}\cdot 3=6$, бұл $x\to 0$ бірінші тамаша шекті пайдалана отырып алынған өрнек, себебі $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Жауабы: 6.

1.59. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin 3(x-2)}{x^2-3x+2}$ өрнегінде түрлендіру жасаймыз: $x^2-3x+2=0$ теңдеуінің түбірлерін табу керек, көбейткіштерге жіктеген соң келесі өрнек шығады: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, сонымен

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin 3(x-2)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sin 3(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sin 3(x-2)}{3(x-2)}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-1}=1\cdot 3=3.$$

Жауабы: 3.

1.60. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1})$ өрнегін түйіндес өрнекке көбейтеміз және бөлеміз:

$$\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1})\cdot\frac{(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+1})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2+5-x^2-1}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+1}})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{4}{1+1}=2.$$

Жауабы: 2.

1.61. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}$ өрнегінде бөлімін түйіндесіне көбейтеміз және бөлеміз:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}=\lim_{x\to 5}\frac{(x^2-25)(\sqrt{x-1}+2)}{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)}=$$
$$=\lim_{x\to 5}(x+5)(\sqrt{x-1}+2)=(5+5)(2+2)=40.$$

Жауабы: 40.

1.62. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)^x$ өрнегін түрлендіреміз:

$$\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)^x=\frac{x(1+\frac{3}{x})}{2x(1-\frac{1}{2x})}=\frac{1}{2}\frac{(1+\frac{3}{x})}{(1-\frac{1}{2x})},\quad \frac{3}{x}=\frac{1}{y},\ x=3y,\ -\frac{1}{2x}=\frac{1}{t},\ t=-2x,$$

$x=-\frac{t}{2}$, $x\to\infty$, $t\to-\infty$, осылай айнымалыны ауыстырған соң келесі өрнекті аламыз, алымы бойынша: $\lim\limits_{y\to\infty}[(1+\frac{1}{y})^y]^3=e^3$, бөлімі бойынша:

$\lim\limits_{t\to-\infty}(1+\frac{1}{t})^{-\frac{t}{2}}=\lim\limits_{t\to-\infty}[(1+\frac{1}{t})^t]^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$, сонымен ең соңында мына өрнек алынады: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{2})^x\cdot e^3\cdot e^{-\frac{1}{2}}=0$.

Жауабы: 0.

1.63. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{\sin 10x}$ өрнегінде айнымалыны ауыстырамыз:

$t=5x$, $x\to 0$, $t\to 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{\sin 10x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{2\sin 5x\cos 5x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{(e^t-1)}{2\frac{\sin t}{t}\cdot t\cdot\cos t}=\left|\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1\right|$

және $\left|\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\right|$, $\cos 0=1$ болғандықтан $\lim\limits_{t\to 0}\frac{(e^t-1)}{2\frac{\sin t}{t}\cdot t\cdot\cos t}=\frac{1}{2}$.

Жауабы: $\frac{1}{2}$.

1.64. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}$ өрнегін келесі түрде түрлендіреміз: $\dfrac{3x+2}{3x-1}=1+\dfrac{3}{3x-1}$, $\dfrac{3}{3x-1}=\dfrac{1}{t}$, $3t=3x-1$, $x=t+\dfrac{1}{3}$, $x\to\infty$, $t\to\infty$,

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{4(t+\frac{1}{3})-1}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{4t+\frac{4}{3}-1}=\lim\limits_{t\to\infty}[(1+\dfrac{1}{t})^{t}]^4\cdot\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{\frac{1}{3}}$, ең соңында келесі өрнекті аламыз:

$\lim\limits_{t\to\infty}[(1+\dfrac{1}{t})^{t}]^4\cdot\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{\frac{1}{3}}=\left|\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{\frac{1}{3}}=1\right|=e^4$. Сонымен

Жауабы: e^4.

1.9. Дифференциалдық есептеу

1.65. Берілген функцияның туындысын табамыз:

$$y'=(5x^4-3\cdot\sqrt[7]{x^3}+\frac{7}{x^5}+4)'=20x^3-3\cdot\frac{3}{7}\cdot x^{\frac{3}{7}-1}+7\cdot(-5)x^{-6}+$$

$$+0=20x^3-\frac{9}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt[7]{x^4}}-\frac{35}{x^6}.$$

Жауабы: $y'=20x^3-\dfrac{9}{7}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^4}}-\dfrac{35}{x^6}$.

1.66. $y'=(x^3\cdot\sin x)'=3x^2\sin x+x^3\cos x$.

Жауабы: $y'=3x^2\sin x+x^3\cos x$.

1.67. $y'=(\dfrac{(x^4+1)}{(x^4-1)})'=\left|\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\right|=\dfrac{4x^3(x^4-1)-(x^4+1)4x^3}{(x^4-1)^2}=\dfrac{-8x^3}{(x^4-1)^2}$.

Жауабы: $y'=\dfrac{-8x^3}{(x^4-1)^2}$.

1.68. $y' = ((x^5 + 3x - 1)^4)' = 4(x^5 + 3x - 1)^3(5x^4 + 3)$.

Жауабы: $y' = 4(x^5 + 3x - 1)^3(5x^4 + 3)$.

1.69. $y' = (\frac{\sin^2 x}{(x^3+1)})' = \frac{2\sin x\cos x(x^3+1) - \sin^2 x \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} =$

$= \frac{\sin 2x(x^3+1) - 3x^2\sin^2 x}{(x^3+1)^2}$.

Жауабы: $y' = \frac{\sin 2x(x^3+1) - 3x^2\sin^2 x}{(x^3+1)^2}$.

1.70. $y' = (\sin(tg\sqrt{x}))' = \cos(tg\sqrt{x})(tg\sqrt{x})' = \cos(tg\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' =$

$= \cos(tg\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{\cos(tg\sqrt{x})}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(tg\sqrt{x})}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$.

Жауабы: $y' = \frac{\cos(tg\sqrt{x})}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$.

1.71. $y' = (x \cdot ctg^2 7x)' = ctg^2 7x + x \cdot (ctg^2 7x)' = ctg^2 7x + x \cdot 2ctg7x \cdot (ctg7x)' =$

$= ctg^2 7x + 2xctg7x \cdot \frac{-1}{\sin^2 7x} \cdot (7x)' = ctg^2 7x + 2xctg7x\frac{-7}{\sin^2 7x} =$

$= ctg^2 7x - \frac{14xctg7x}{\sin^2 7x}$.

Жауабы: $y' = ctg^2 7x - \frac{14xctg7x}{\sin^2 7x}$.

1.72. $y' = (\ln^5(x-2^{-x}))' = 5\ln^4(x-2^{-x}) \cdot \frac{1}{x-2^{-x}} \cdot (x-2^{-x})' =$

$= \frac{5\ln^4(x-2^{-x})}{x-2^{-x}} \cdot (1-2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-x)') = \frac{5\ln^4(x-2^{-x})}{x-2^{-x}}(1+\frac{\ln 2}{2^x}).$

Жауабы: $y' = \frac{5\ln^4(x-2^{-x})}{x-2^{-x}}(1+\frac{\ln 2}{2^x}).$

1.73. $y = (\sin 2x)^{x^3}$ теңдіктің екі жағынан логарифм аламыз:

$\ln y = x^3 \ln\sin 2x$, енді теңдіктің екі жағын да дифференциалдаймыз:

$(\ln y)' = (x^3 \ln\sin 2x)'$, $\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln\sin 2x + x^3 \cdot \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot (2x)' =$

$= 3x^2 \ln\sin 2x + 2x^3 \cdot ctg\,2x$, $y' = y(3x^2 \ln\sin 2x + 2x^3 \cdot ctg\,2x)$,

$y' = (\sin 2x)^{x^3} \cdot (3x^2 \ln\sin 2x + 2x^3 \cdot ctg\,2x)$.

Жауабы: $y' = (\sin 2x)^{x^3} \cdot (3x^2 \ln\sin 2x + 2x^3 \cdot ctg\,2x)$.

1.74. $y' = (3^{x^2} - tg^4 2x)' = 3^{x^2} \cdot \ln 3 \cdot 2x - 4tg^3 2x \cdot \frac{2}{\cos^2 2x} = 2\ln 3 \cdot x \cdot 3^{x^2} -$

$- \frac{8tg^3 2x}{\cos^2 2x} = 2x(\ln 3) \cdot 3^{x^2} - \frac{8tg^3 2x}{\cos^2 2x}$.

Жауабы: $y' = 2x(\ln 3) \cdot 3^{x^2} - \frac{8tg^3 2x}{\cos^2 2x}$.

1.75. $y = (\sin 3x)^{\cos 5x}$ туындысын табу үшін келесі формуланы қолданамыз:

$y' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u'$, мұндағы $u = \sin 3x$, $v = \cos 5x$,

$y' = (\sin 3x)^{\cos 5x} \cdot \ln \sin 3x \cdot (\cos 5x)' + \cos 5x \cdot (\sin 3x)^{\cos 5x - 1} \cdot (\sin 3x)' =$

$= -\sin 5x \cdot 5 \cdot (\sin 3x)^{\cos 5x} \cdot \ln \sin 3x + 3\cos 3x \cos 5x \cdot (\sin 3x)^{\cos 5x - 1} =$

$= -5\sin 5x \cdot (\sin 3x)^{\cos 5x} \cdot \ln \sin 3x + 3\cos 3x \cos 5x \cdot (\sin 3x)^{\cos 5x - 1}$.

Жауабы: берілген функцияның туындысы келесі өрнек болады:

$y' = -5\sin 5x \cdot (\sin 3x)^{\cos 5x} \cdot \ln \sin 3x + 3\cos 3x \cos 5x \cdot (\sin 3x)^{\cos 5x - 1}$.

1.76. $y' = (\ln(1+x^2))' = \dfrac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \dfrac{2x}{1+x^2}$, ал екінші ретті туындысы:

$$y'' = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Жауабы: $y'' = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $d^2y = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} dx^2$.

1.10. Интегралдық есептеу

1.77. $\int (3x - \sqrt[7]{x^5} + 2\sin x - 3)dx = 3\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^{\frac{5}{7}+1}}{\frac{5}{7}+1} + 2(-\cos x) - 3x + c =$

$= \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{7}{12} x \cdot \sqrt[7]{x^5} \dfrac{x^{\frac{5}{7}+1}}{\frac{5}{7}+1} - 2\cos x - 3x + c$.

Жауабы: $\dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{7}{12} x \cdot \sqrt[7]{x^5} \dfrac{x^{\frac{5}{7}+1}}{\frac{5}{7}+1} - 2\cos x - 3x + c$.

1.78. $\int(\sin 3x + x\sqrt{1+x^2})dx = \frac{-\cos 3x}{3} + \int x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx =$

$$\left|1+x^2 = t, 2xdx = dt, xdx = \frac{dt}{2}\right| = \frac{-\cos 3x}{3} + \int t^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{2} = \frac{-1}{3}\cos 3x + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$\frac{-1}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{-1}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + c\,.$$

Жауабы: $\frac{-1}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + c\,.$

1.79. $\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx = \left|t = e^{2x}+3, dt = 2e^{2x}dx, e^{2x}dx = \frac{dt}{2}\right| = \int\frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c =$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+3\right| + c\,.$$

Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+3\right| + c\,.$

1.80. $\int(x^7 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2^x)dx = \frac{x^{7+1}}{8} - \frac{x^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1} + \frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{x^8}{8} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{2^x}{\ln 2} + c\,.$

Жауабы: $\frac{x^8}{8} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{2^x}{\ln 2} + c\,.$

1.81. $\int tg3xdx = \int\frac{\sin 3x}{\cos 3x}dx = \left|t = \cos 3x, dt = -3\sin 3xdx, \sin 3xdx = \frac{-dt}{3}\right| =$

$$= \frac{-1}{3}\int\frac{dt}{t} = \frac{-1}{3}\ln|t| + c = \frac{-1}{3}\ln|\cos 3x| + c\,.$$

Жауабы: $\frac{-1}{3}\ln|\cos 3x| + c\,.$

1.82. $\int \frac{x-x^3}{\sqrt{9-x^4}}dx = \int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}} - \int \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^4}} = \left| t = x^2, dt = 2xdx, xdx = \frac{dt}{2} \right| =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{\sqrt{9-t^2}}; \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + c = \arcsin\frac{x^2}{3} + c.$

$\int \frac{tdt}{\sqrt{9-t^2}} = \left| z = 9-t^2, dz = -2tdt, tdt = \frac{-dz}{2} \right| = \frac{-1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{-1}{2}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$

$-z^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{9-t^2} + c = -\sqrt{9-x^4} + c$. Сонымен $\int \frac{x-x^3}{\sqrt{9-x^4}}dx =$

$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{3} - \sqrt{9-x^4} + c.$

Жауабы: $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{3} - \sqrt{9-x^4} + c.$

1.83. $\int (e^{2x} + e^{-2x})dx = \left| t = 2x, dt = 2dx, dx = \frac{dt}{2}; z = -2x, dx = \frac{-dz}{2} \right| =$

$\frac{1}{2}\int e^t dt - \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^z + c = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + c.$

Жауабы: $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + c.$

1.84. $\int (\sqrt[6]{1-7x^3} \cdot x^2 dx = \left| t = 1-7x^3, dt = -21x^2 dx, x^2 dx = \frac{-dt}{21} \right| =$

$= \int \sqrt[6]{t}(\frac{-1}{21})dt = \frac{-1}{21}\int t^{\frac{1}{6}} dt = \frac{-1}{21}\frac{t^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{7}{6}} + c = \frac{-2}{49}t^{\frac{7}{6}} + c = \frac{-2}{49}\sqrt[6]{(1-7x^3)^7} + c.$

Жауабы: $\frac{-2}{49}\sqrt[6]{(1-7x^3)^7} + c.$

1.85. $\int \cos^3 2x \cdot \sin^4 2x dx = \int \cos^2 2x \sin^4 2x \cos 2x dx =$

$= \frac{1}{2}\int (1-\sin^2 2x)\sin^4 2x d\sin 2x = \frac{1}{2}\int \sin^4 2x d\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin^6 2x d\sin 2x dx =$

$= \frac{1}{2}\frac{\sin^5 2x}{5} - \frac{1}{2}\frac{\sin^7 2x}{7} + c = \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{1}{14}\sin^7 2x + c.$

Жауабы: $\frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{1}{14}\sin^7 2x + c.$

1.86. $\int \frac{x^2-9}{x^2+9} dx = \int \frac{(x-3)(x+3)}{x^2+9} dx =$ немесе $\int \frac{x^2-9}{x^2+9} dx = \int \frac{x^2+9-18}{x^2+9} dx =$

$= \int dx - \int \frac{18}{x^2+9} dx = x - 18 \cdot \frac{1}{3} arctg \frac{x}{3} + c = x - 6 arctg \frac{x}{3} + c.$

Жауабы: $x - 6 arctg \frac{x}{3} + c.$

1.87. $\int \sqrt[m]{x^n} dx = \int x^{\frac{n}{m}} dx = \frac{x^{\frac{n}{m}+1}}{\frac{n}{m}+1} + c = \frac{x^{\frac{n+m}{m}}}{\frac{n+m}{m}} + c = \frac{m}{n+m} x^{\frac{n+m}{m}} + c.$

Жауабы: $\frac{m}{n+m} x^{\frac{n+m}{m}} + c.$

1.88. $\int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + c.$

Жауабы: $\frac{10^x}{\ln 10} + c.$

1.89. $\int a^x \cdot e^x dx = \int (ae)^x dx = \frac{(ae)^x}{\ln ae} + c = \frac{a^x e^x}{\ln a + 1} + c.$

Жауабы: $\frac{a^x e^x}{\ln a + 1} + c.$

1.90. $\int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+16} = \frac{1}{4} arctg \frac{x+2}{4} + c$.

Жауабы: $\frac{1}{4} arctg \frac{x+2}{4} + c$.

1.91. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}} = \left| t^2 = x+3, 2tdt = dx \right| = \int \frac{2tdt}{1+t} = \int \frac{2t+2-2}{1+t} dt =$

$= \int \frac{2(t+1)}{t+1} dt - \int \frac{2}{t+1} dt = \int 2dt - \int \frac{2}{t+1} dt = 2t - 2\ln|t+1| + c =$

$= 2\sqrt{x+3} - 2\ln\left|1+\sqrt{1+\sqrt{x+3}}\right| + c$.

Жауабы: $2(\sqrt{x+3} - \ln\left|1+\sqrt{1+\sqrt{x+3}}\right|) + c$.

1.92. $\int x\sqrt[5]{(5x^2-3)^7}\, dx = \left| t = 5x^2-3, dt = 10xdx, xdx = \frac{dt}{10} \right| = \int t^{\frac{7}{5}} \frac{dt}{10} =$

$= \frac{1}{10} \frac{t^{\frac{7}{5}+1}}{\frac{7}{5}+1} + c = \frac{1}{24} \sqrt[5]{(5x^2-3)^{12}} + c$.

Жауабы: $\frac{1}{24} \sqrt[5]{(5x^2-3)^{12}} + c$.

1.93. $\int x\cos 3xdx = \left| u = x, du = dx, dv = \cos 3xdx, v = \frac{\sin 3x}{3} \right| =$

$= \left| uv - \int vdu \right| = x\frac{\sin 3x}{3} - \frac{1}{3}\int \sin 3xdx = \frac{x\sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + c$.

Жауабы: $\frac{x\sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + c$.

1.94. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}} = \left| t = x^2, dt = 2xdx, xdx = \frac{dt}{2} \right| = \int \frac{dt}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + c =$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + \sqrt{x^4+1}\right| + c.$$

Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2 + \sqrt{x^4+1}\right| + c.$

1.95. $\int \frac{dx}{e^x+1}dx = \left|x = -\ln t, dx = -\frac{dt}{t}, t = e^{-x}\right| = -\int \frac{dt}{t(e^{-\ln t}+1)} =$

$$= -\int \frac{dt}{t(\frac{1}{t}+1)} = -\int \frac{dt}{1+t} = -\ln|t+1| + c = -\ln\left|e^{-x}+1\right| + c.$$

Жауабы: $-\ln\left|e^{-x}+1\right| + c$.

1.96. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \left|t = \sin x, dt = \cos x dx\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2+1}\right| + c =$

$$= \ln\left|\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 1}\right| + c.$$

Жауабы: $\ln\left|\sin x + \sqrt{\sin^2 x+1}\right| + c.$

1.97. $\int e^x \cos x dx = \left|u = e^x, du = e^x dx, \cos x dx = dv, v = \sin x\right| =$

$= e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx = \left|I_2 = \int \sin x \cdot e^x dx\right|.$

$\left|I_2 = \int \sin x \cdot e^x dx = \left|u = e^x, du = e^x dx, dv = \sin x dx, v = -\cos x\right| =\right.$

$\left.= e^x(-\cos x) - \int(-\cos x)e^x dx = -\cos x \cdot e^x + \int \cos x \cdot e^x dx = -\cos x \cdot e^x + I_1.\right|$

$\left|I_1 = e^x \sin x - I_2\right|$, $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - (-\cos x \cdot e^x + \int \cos x \cdot e^x dx) =$

$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + \cos x \cdot e^x - \int \cos x \cdot e^x dx).$

$2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + \cos x \cdot e^x$, $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x + \cos x \cdot e^x) + c$.

$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$.

Жауабы: $\frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$.

1.98. $\int \frac{dx}{3x - 4\sqrt{x}} = \left| x = u^2, dx = 2udu \right| = \int \frac{2udu}{3u^2 - 4u} = \int \frac{2udu}{u(3u-4)} =$

$= \frac{2}{3}\int \frac{du}{u - \frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\ln\left|u - \frac{4}{3}\right| + c = \frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{x} - \frac{4}{3}\right| + c$.

Жауабы: $\frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{x} - \frac{4}{3}\right| + c$.

1.99. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 7\sqrt[4]{x}} = \left| (2,4) = 4, x = u^4, dx = 4u^3 du \right| = \int \frac{4u^3}{u^2 - 7u} du =$

$= \int \frac{4u^3}{u^2 - 7u} du = \int \frac{4u^2}{u-7} du = 4\left(\int \frac{(u^2 - 49)}{u-7} du + \int \frac{49}{u-7} du \right) =$

$= 4\int (u+7) du + 4 \cdot 49 \ln|u-7| + c = 2u^2 + 28u + 196\ln\left|\sqrt[4]{x} - 7\right| + c =$

$= 2\sqrt{x} + 28\sqrt[4]{x} + 196\ln\left|\sqrt[4]{x} - 7\right| + c$.

Жауабы: $2\sqrt{x} + 28\sqrt[4]{x} + 196\ln\left|\sqrt[4]{x} - 7\right| + c$.

1.100. $$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx = \left|\int x^m \cdot (a+bx^n)^p\,dx\right| = \left|\begin{matrix} p=\frac{2}{3}, m=5, n=3, \\ \frac{m+1}{n}=\frac{5+1}{3}=2 \end{matrix}\right|,$$

соңғы 2 саны бүтін сан болғандықтан келесі түрдегі Чебышевтің ауыстыруы қолданылады: $p=\frac{r}{s}, s>0$, $p=\frac{2}{3}$, $s=3$, осыдан $1+x^3=u^3$. Сонымен келесі түрге келтіреміз:

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx = \left|1+x^3=u^3, x^3=u^3-1, 3x^2dx=3u^2du\right| =$$

$$= \int (u^3-1)(u^3)^{\frac{2}{3}} u^2 du = \int (u^3-1)u^2u^2du = \int u^7du - \int u^4du =$$

$$= \frac{u^8}{8} - \frac{u^5}{5} + c = \frac{(1+x^3)^2}{8}(\sqrt[3]{1+x^3})^2 - \frac{(1+x^3)}{5}(\sqrt[3]{1+x^3})^2 + c\,.$$

Жауабы: $\frac{(1+x^3)^2}{8}(\sqrt[3]{1+x^3})^2 - \frac{(1+x^3)}{5}(\sqrt[3]{1+x^3})^2 + c\,.$

1.101. $$\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} = \left|\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}\right| =$$

$$= \int \frac{dx}{3\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{3+2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{3+1+\cos 2x} =$$

$$= \int \frac{d2x}{2(4+\cos 2x)} = \left|\cos 2x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, d2x = \frac{2dz}{1+z^2}\right| = \int \frac{2dz}{2(1+z^2)(4+\frac{1-z^2}{1+z^2})} =$$

$$= \int \frac{dz}{(4+4z^2+1-z^2)} = \int \frac{dz}{5+3z^2} = \int \frac{dz}{3(z^2+\frac{5}{3})} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^2+(\sqrt{\frac{5}{3}})^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}} arctg \frac{z}{\sqrt{\frac{5}{3}}} + c = \frac{1}{\sqrt{15}} arctg \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot tgx + c .$$

Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{15}} arctg \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot tgx + c$.

1.102. $\int_1^2 (2x^2 + \frac{2}{x^4})dx = 2(\frac{x^3}{3} + \frac{x^{-4+1}}{-3})\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{2}{3}(2^3 - 1) + \frac{2}{-3}(2^{-3} - 1) =$

$$= \frac{14}{3} + \frac{7}{12} = \frac{21}{4}.$$

Жауабы: $\frac{21}{4}$.

1.103. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left| 1 + \ln x = t, dt = \frac{dx}{x}, x = 1, t = 1, x = e^3, t = 4 \right| =$

$$= \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_1^4 t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 = 2(2-1) = 2 .$$

Жауабы: 2.

1.104. $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = \left| x = 2\sin t, dx = 2\cos t dt, x = 0, t = 0, x = 2, t = \frac{\pi}{2} \right| =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\, 2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \cdot 2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(\frac{\pi}{2} - 0) + \sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) - \sin 0 = \pi .$$

Жауабы: π.

1.105. $\int_1^e \ln x dx = \left| t = \ln x, dt = \frac{dx}{x}, x = 1, t = 0, x = e, t = 1, dx = xdt = e^t dt \right| =$

$\int_0^1 te^t dt = \left| u = t, du = dt, e^t dt = dv, v = e^t \right| = te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = 1 \cdot e - 0 - (e - e^0) =$

$= 1 \cdot e - 0 - (e - e^0) = e - e + 1 = 1.$

Жауабы: 1.

1.106. $\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x} dx = \left| x = t^2, dx = 2tdt, x = 0, t = 0, x = \pi^2, t = \pm\pi, t = \pi \right| =$

$= \int_0^{\pi} \cos t \cdot 2tdt = \int_0^{\pi} 2t \cos t dt = \left| u = t, du = dt, \cos t dt = dv, v = \sin t \right| =$

$= 2t \sin t \Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin t dt = 2\pi \sin\pi - 0 - 2(-\cos t) \Big|_0^{\pi} = 2\cos t \Big|_0^{\pi} = 2(\cos\pi - \cos 0) =$

$= 2(-1-1) = -4.$

Жауабы: -4.

ЭЛЕМЕНТАР МАТЕМАТИКА ЕСЕПТЕРІНІҢ ШЫҒАРУ ЖОЛДАРЫ МЕН ЖАУАПТАРЫ

2.1. Бірінші қоспа салмақ бойынша x бөліктен, екінші қоспа y бөліктен, үшінші қоспа z бөліктен тұрады деп алайық. Мұнда x+y+z=u деп белгілейік. Келесі теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{x}{x+y+z}\cdot\dfrac{3}{8}+\dfrac{z}{x+y+z}\cdot\dfrac{2}{5}}{\dfrac{x}{x+y+z}\cdot\dfrac{5}{8}+\dfrac{y}{x+y+z}\cdot\dfrac{1}{3}}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{\dfrac{x}{x+y+z}\cdot\dfrac{5}{8}+\dfrac{y}{x+y+z}\cdot\dfrac{1}{3}}{\dfrac{y}{x+y+z}\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{z}{x+y+z}\cdot\dfrac{3}{5}}=\dfrac{B}{C}=\dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{\dfrac{x}{x+y+z}\cdot\dfrac{3}{8}+\dfrac{z}{x+y+z}\cdot\dfrac{2}{5}}{\dfrac{y}{x+y+z}\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{z}{x+y+z}\cdot\dfrac{3}{5}}=\dfrac{A}{C}=\dfrac{3}{2}. \end{cases} \qquad (2.1)$$

(2.1) теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуінен келесі теңдеуді аламыз:

$$\frac{\dfrac{3x}{8}+\dfrac{2z}{5}}{\dfrac{5x}{8}+\dfrac{y}{3}}=\frac{3}{5}.$$

(2.1) теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуінен келесі теңдеуді аламыз: $\dfrac{\dfrac{5x}{8}+\dfrac{y}{3}}{\dfrac{2y}{3}+\dfrac{3z}{5}}=\dfrac{5}{2}$. (2.1) теңдеулер жүйесінің үшінші теңдеуінен келесі теңдеуді аламыз: $\dfrac{\dfrac{3x}{8}+\dfrac{2z}{5}}{\dfrac{2y}{3}+\dfrac{3z}{5}}=\dfrac{3}{2}$. Алынған үш теңдеудің біріншісін шешеміз:

$$\frac{\dfrac{15x+16z}{40}}{\dfrac{15x+8y}{24}}=\frac{3}{5}. \qquad 15x+16z=15x+8y, \quad y=2z.$$

Екінші теңдеуін шешеміз: $\dfrac{\dfrac{15x+8y}{24}}{\dfrac{10y+9z}{15}}=\dfrac{5}{2}.$ $\dfrac{15x+8y}{10y+9z}=4.$

$3x=20z.$ Осылардан шығатын қорытынды: x=20 бөліктен, y=6 бөліктен, z=3 бөліктен тұрады, немесе: x:y:z=20:6:3.

Жауабы: x:y:z=20:6:3.

2.2. Барлық жолды S деп белгілеп аламыз. v_1 - бірінші ұшақтың жылдамдығы, v_2 - екінші ұшақтың жылдамдығы. Келесі теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{S}{2}+a}{v_1}=\dfrac{\frac{S}{2}-a}{v_2},\\ \dfrac{\frac{S}{2}}{v_1}+b=\dfrac{\frac{S}{2}}{v_2},\\ \dfrac{\frac{S}{4}\cdot 3}{v_1}=\dfrac{\frac{S}{4}}{v_2}+b.\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{S+2a}{v_1}=\dfrac{S-2a}{v_2},\\ \dfrac{S}{2v_1}+b=\dfrac{S}{2v_2},\\ \dfrac{3S}{4v_1}=\dfrac{S}{4v_2}+b.\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{S+2a}{S-2a},\\ \dfrac{S}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{v_2}-\dfrac{1}{v_1}\right)=b,\\ S\cdot\left(\dfrac{3}{4v_1}-\dfrac{1}{4v_2}\right)=b.\end{cases}$$

$$\begin{cases}v_1S-2av_1=v_2S+2av_2,\\ S=\dfrac{2bv_1v_2}{v_1-v_2},\\ S=\dfrac{bv_1v_2}{3v_2-v_1}.\end{cases} \qquad \begin{cases}S(v_1-v_2)=2a(v_1+v_2),\\ S=\dfrac{2bv_1v_2}{v_1-v_2},\\ S=\dfrac{bv_1v_2}{3v_2-v_1}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{2a(v_1+v_2)}{v_1-v_2}=\dfrac{2bv_1v_2}{v_1-v_2},\\ \dfrac{2bv_1v_2}{v_1-v_2}=\dfrac{bv_1v_2}{3v_2-v_1}.\end{cases} \qquad \begin{cases}a(v_1+v_2)=bv_1v_2,\\ \dfrac{2}{v_1-v_2}=\dfrac{1}{3v_2-v_1}.\end{cases}$$

$6v_2 - 2v_1 = v_1 - v_2.$ $\quad v_1 = \frac{7v_2}{3}.$ $\quad a(v_2 + \frac{7v_2}{3}) = bv_2\frac{7v_2}{3}.$

$a\frac{10v_2}{3} = \frac{7bv_2^2}{3}.$ $\quad 10av_2 = 7bv_2^2.$ $\quad 10a = 7bv_2.$ $\quad v_2 = \frac{10a}{7b}.$

$v_1 = \frac{7\cdot 10a}{7b} = \frac{10a}{b}.$ $\quad S = \frac{2bv_1v_2}{v_1 - v_2} = \frac{2b\cdot\frac{10a}{b}\cdot\frac{10a}{7b}}{\frac{10a}{b} - \frac{10a}{7b}} = \frac{10a}{3}.$

Жауабы: $S = \frac{10a}{3}.$ $\quad v_1 = \frac{10a}{b}.$ $\quad v_2 = \frac{10a}{7b}.$

2.3. Алғашқы салынған ақшаны L деп белгілеп аламыз, x – бірінші банктің өсім проценті, y – екінші банктің өсім проценті болсын. Келесі теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} \frac{5L}{6} + \frac{5L}{6}\cdot\frac{x}{100} + \frac{L}{6} + \frac{L}{6}\cdot\frac{y}{100} = 670, \\ (\frac{5L}{6} + \frac{5L}{6}\cdot\frac{x}{100}) + (\frac{5L}{6} + \frac{5L}{6}\cdot\frac{x}{100})\cdot\frac{x}{100} + (\frac{L}{6} + \frac{L}{6}\cdot\frac{y}{100}) + \\ + (\frac{L}{6} + \frac{L}{6}\cdot\frac{y}{100})\cdot\frac{y}{100} = 749, \\ \frac{5L}{6} + \frac{5L}{6}\cdot\frac{y}{100} + \frac{L}{6} + \frac{L}{6}\cdot\frac{x}{100} = 710. \end{cases}$$

$\frac{5L}{6} + \frac{5Ly}{600} + \frac{L}{6} + \frac{Lx}{600} = 710,$ $\quad \frac{5L}{6} + \frac{5Lx}{600} + \frac{L}{6} + \frac{Ly}{600} = 670,$

$\frac{5L}{6} + \frac{5Lx}{600} + (\frac{5L}{6} + \frac{5Lx}{600})\cdot\frac{x}{100} + \frac{L}{6} + \frac{Ly}{600} + (\frac{L}{6} + \frac{Ly}{600})\cdot\frac{y}{100} = 749,$

$L + \frac{Ly}{120} + \frac{Lx}{600} = 710,\ 600L + 5Ly + Lx = 426000.$ (2.3.1)

$500L + 5Lx + 100L + Ly = 402000.$ (2.3.2)

$$\frac{600L+5Lx+Ly}{600}+\frac{5Lx}{600}+\frac{5Lx^2}{600\cdot 100}+\frac{Ly}{600}+\frac{Ly^2}{600\cdot 100}=749. \qquad (2.3.3)$$

(2.3.2) - ден аламыз: $5Lx+Ly=402000-600L.$ (*)

(2.3.1) - ден аламыз: $5Ly+Lx=426000-600L.$ (**)

$$600000L+(402000-600L)\cdot 100+(402000-600L)\cdot 100+$$
$$+5Lx^2+Ly^2=749\cdot 600\cdot 100$$

$$600000L+40200000-600000L+40200000-600000L+$$
$$+5Lx^2+Ly^2=44940000$$

$$5Lx^2+Ly^2-600000L+80400000=44940000.$$

$$5Lx^2+Ly^2-600000L+35460000=0. \qquad (***)$$

(*), (**) екеулерін бір-біріне қосып, сонан соң бірінен бірін алып, ортақ санға қысқартамыз:

$$6Lx+6Ly=402000+426000-1200L,\ 6Lx+6Ly=828000-1200L,$$

$$4Ly-4Lx=24000.\ \ 6L(x+y)=828000-1200L.$$

$$L(x+y)=138000-200L, \qquad (2.3.4)$$
$$L(y-x)=6000. \qquad (2.3.5)$$

(2.3.4), (2.3.5) бір-біріне қосып және бір-бірінен алып, келесі теңдеулерді шығарамыз:

$$\begin{cases}2Ly=144000-200L,\\ 2Lx=132000-200L\end{cases}\qquad \begin{cases}Ly=72000-100L,\\ Lx=66000-100L\end{cases}$$

$y=\frac{72000-100L}{L}$, $y=\frac{66000-100L}{L}$. Алынған белгісіздерді (***)-ге қойып келесі теңдеуді аламыз:

$$5L(\frac{66000-100L}{L})^2+L(\frac{72000-100L}{L})^2-60000L+35460000=0.$$

$$5L(\frac{4356000000-13250000L+10000L^2}{L^2})+$$

$$+L(\frac{5184000000-14400000L+10000L^2)}{L^2}-60000L+35460000=0.$$

$$\frac{21780000000-66000000L+50000L^2}{L}+$$

$$+\frac{5184000000-14400000L+10000L^2}{L^2}-60000L+35460000=0.$$

$$21780000000-66000000L+50000L^2+5184000000-14400000L+$$

$$+10000L^2-60000L^2+35460000L=0$$

10000 – ға қысқартамыз да келесі теңдеуді аламыз:

$2178000-6600L+518400-1440L+3546L=0$. Осыдан:

$2696400-4494L=0$. $L=600$. Процентті табамыз:

$x=\frac{66000-100\cdot 600}{600}=10$. Бұдан $x=10$ процент екені шықты. Бірінші жылы:

$600+\frac{600}{100}\cdot 10=660$ ақша болды, екінші жылы: $660+\frac{660}{100}\cdot 10=726$ ақшаға айналды.

Жауабы: 726 ақша бірлігіне тең.

2.4. Жолды S – деп белгілеп аламыз. Бірінші жаяудың жылдамдығын v_1 деп, екінші жаяудың жылдамдығын v_2 деп келісейік, х – бірінші жаяудың екінші рет кездесуге дейінгі жүрген жолы, ал у – екінші жаяудың екінші рет кездесуге дейінгі

жүрген жолы. Сонымен екінші рет кездесуге дейін бірінші жаяу S+x, ал екінші жаяу S+y жол жүрді. Келесі теңдеулер орынды болады:

$$\frac{S+x}{v_1}=t,\ \frac{S+y}{v_2}=t,\ S+x-(S+y)=4,\ \frac{y}{v_1}=1,\ \frac{x}{v_2}=2.5.$$

Келесі теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases}\frac{S+x}{v_1}=\frac{S+y}{v_2},\\ x+y=S,\\ x-y=4,\\ y=v_1,\\ x=2.5\cdot v_2.\end{cases}$$

Шешеміз: $y=v_1,\ x=y+4,\ 2x=S+4,$

$$\frac{S+\frac{S+4}{2}}{v_1}=\frac{S+v_1}{v_2},\ v_2=\frac{x}{2.5}=\frac{S+4}{2\cdot 2.5}=\frac{S+4}{5},\ \frac{S+\frac{S+4}{2}}{v_1}=\frac{S+v_1}{\frac{S+4}{5}}.$$

$$\frac{3S+4}{2\cdot v_1}=\frac{5(S+v_1)}{S+4}.\quad x=v_1+4,\ y=v_1,\ x+y=S,\ v_1+4+v_1=S,$$

Жүйе құрамыз: $\begin{cases}\frac{3S+4}{2v_1}=\frac{5(S+v_1)}{S+4},\\ 2v_1+4=S.\end{cases}\quad \frac{3(2v_1+4)+4}{2v_1}=\frac{5(2v_1+4+v_1)}{2v_1+4+4},$

$$\frac{6v_1+12+4}{2v_1}=\frac{15v_1+20}{2v_1+8},\quad \frac{3v_1+8}{v_1}=\frac{15v_1+20}{2v_1+8},$$

$$(3v_1+8)\cdot(2v_1+8)=v_1\cdot(15v_1+20),\quad 6v_1^2+24v_1+16v_1+64=15v_1^2+20v_1.$$

$$9v_1^2-20v_1-64=0,\ v_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100+576}}{9}=\frac{10\pm 26}{9},\quad v_1=4,\quad v_2=-\frac{16}{9}.$$

Жауабы: $v_1=4.$

2.5. Автомобиль А пунктінен х қашықтықта автобусты қуып жетті деп есептейік. Келесі теңдеулерді құрамыз:

$$\frac{x}{v}-\frac{1}{2}=\frac{x}{40},\quad \frac{105-x}{v}<\frac{x}{40},\quad \frac{2x-v}{2v}=\frac{x}{40},\quad \frac{2x-v}{v}=\frac{x}{20}.$$

$40x-20v=vx,\ \ x=\frac{20v}{40-v},\ \ \frac{105-\frac{20v}{40-v}}{v}<\frac{\frac{20v}{40-v}}{40},\ \ v\neq 40$ деп алып, ортақ бөлімге келтіріп қысқартамыз:

$$\frac{4200-105v-20v}{(40-v)v}<\frac{20v}{(40-v)v},\ \ \frac{-8400+250v+v^2}{2v}>0,$$

$$v^2+250v-8400>0,\ \ v_{1,2}=\frac{-125\pm\sqrt{15625+8400}}{1}=-125\pm 155,$$

$v_1=-280,\ v_2=30$. Бұдан $v>30,\ v\neq 40$ болғандықтан

Жауабы: $v\in(30,40)$.

2.6. *I* -і қоспада *B* заты V_1 көлемде, *C* заты да V_1 көлемде алынды. Ал *II* -і қоспада *C* заты V_2 көлемде, *A* заты да V_2 көлемде алынды. Ал *III* -і қоспада *A* заты V_3 көлемде, *B* заты да V_3 көлемде алынды, немесе қысқаша былай алуға болар еді:

$I\to V_1\to B,C;\quad II\to V_2\to C,A;\quad III\to V_3\to A,B;$ Салмақтары келесі сәйкестікте болсын: $P_1\to A,\ \ P_2\to B,\ \ P_3\to C$. Меншікті салмақты келесі формула арқылы табатынымыз белгілі: $p=\frac{P}{V}$, сонда $p_1\to A,\ \ p_2\to B,\ \ p_3\to C$ әр заттың меншікті салмағын өрнектейміз. Келесі теңдеулерді құрастырамыз:

$$\frac{p_2V_1+p_3V_1}{2V_1}:\frac{p_3V_2+p_1V_2}{2V_2}:\frac{p_1V_3+p_2V_3}{2V_3}=7:6:3,\qquad \frac{p_3}{p_2}=?$$ осы меншікті салмақтар қатынасын іздеп отырмыз. Сонымен келесі теңдік шығады:

$\frac{(p_2+p_3)V_1}{2V_1}:\frac{(p_3+p_1)V_2}{2V_2}:\frac{(p_1+p_2)V_3}{2V_3}=7:6:3,$ қысқартқан соң келесі теңдік шығады:

$\frac{(p_2+p_3)}{2}:\frac{(p_3+p_1)}{2}:\frac{(p_1+p_2)}{2}=7:6:3$, жүйе құрамыз:

$$\begin{cases} \frac{p_2+p_3}{2}:\frac{p_3+p_1}{2}=\frac{7}{6}, \\ \frac{p_3+p_1}{2}:\frac{p_1+p_2}{2}=\frac{6}{3}=2, \\ \frac{p_2+p_3}{2}:\frac{p_1+p_2}{2}=\frac{7}{3}. \end{cases}$$ бұдан келесі өрнектерді аламыз:

$\frac{p_2+p_3}{p_3+p_1}=\frac{7}{6}$, $\frac{p_3+p_1}{p_1+p_2}=2$, $\frac{p_2+p_3}{p_1+p_2}=\frac{7}{3}$. Келесі жүйені аламыз:

$$\begin{cases} 6p_2+6p_3=7p_3+7p_1, (2.6.1) \\ p_3+p_1=2p_1+2p_2, (2.6.2) \\ 3(p_2+p_3)=7(p_1+p_2). (2.6.3) \end{cases}$$ $(2.6.3)-(2.6.1)$ екі теңдеудің айырмасы келесі өрнекті береді: $3p_2+3p_3-6p_2-6p_3=7p_1+7p_2-7p_3-7p_1$, $(2.6.1)$-і теңдеуден келесі өрнекті аламыз:

$$6p_2=p_3+7p_1, \quad (2.6.4)$$
$$3p_2+3p_3=7p_1+7p_2 \quad (2.6.5)$$

$(2.6.5)-(2.6.4)$ екі теңдеудің айырмасы келесі өрнекті береді:

$-3p_2+3p_3=7p_2-p_3$, $10p_2=4p_3$, $\frac{p_3}{p_2}=\frac{5}{2}$.

Жауабы: $\frac{p_3}{p_2}=\frac{5}{2}$.

2.7. Тез жүретін нүкте T уақытта v_1T жолын жүреді де, ал жай жүретін нүкте v_2T жолын жүреді. Келесі теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi R}{v_1}+t=\dfrac{2\pi R}{v_2}, \\ v_2T+2\pi R=v_1T. \end{cases} \qquad 2\pi R\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)=-t, \quad 2\pi R\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right)=t.$$

$$2\pi R\frac{v_1-v_2}{v_1v_2}=t, \ \ (v_1-v_2)T=2\pi R, \ \ v_1-v_2=\frac{2\pi R}{T}, \ \ 2\pi R\frac{2\pi R}{Tv_1v_2}=t,$$

$$\frac{4\pi^2R^2}{v_1v_2}=tT, \ \ v_1=\frac{4\pi^2R^2}{tTv_2}, \ \ \left(\frac{4\pi^2R^2}{tTv_2}-v_2\right)T=2\pi R, \ \ \frac{4\pi^2R^2}{tTv_2}-v_2=\frac{2\pi R}{T},$$

$$4\pi^2R^2-tT(v_2)^2=2\pi Rtv_2, \ \ tTv_2^2+2\pi Rtv_2-4\pi^2R^2,$$

$$v_{2(1,2)}=\frac{-\pi Rt\pm\sqrt{\pi^2R^2t^2+4\pi^2R^2tT}}{tT}=\frac{-\pi Rt\pm\sqrt{\pi^2R^2t(t+4T)}}{tT}=$$
$$=\frac{-\pi Rt\pm\pi R\sqrt{t(t+4T)}}{tT}=-\pi R\left(\frac{1}{T}\pm\sqrt{\frac{t+4T}{tT^2}}\right).$$

Жауабы: $v_{2(1,2)}=-\pi R\left(\frac{1}{T}\pm\sqrt{\frac{t+4T}{tT^2}}\right)$. Осы есепті басқа жолмен қайта шығарып көрген қызық болар еді.

2.8. Бірінші қоспада a мөлшерлі алтын бар, екінші қоспада aq мөлшерлі алтын бар, ал үшінші қоспада aq^2 мөлшерлі алтын бар деп алайық. Сонда келесі теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2}+\dfrac{aq}{5}=\dfrac{aq^2}{1000}\cdot 300, \\ \dfrac{aq}{1000}\cdot x=\dfrac{aq^2}{1000}\cdot 300. \end{cases} \qquad \frac{5a+2aq}{10}=\frac{aq^2}{10}\cdot 3, \text{ осыдан } 2=3(q-1), \ q=\frac{5}{3},$$

Жүйенің екінші теңдеуінен $x = 300q$, $x = 300 \cdot \frac{5}{3} = 500$ аламыз.

Жауабы: $x = 500$ грамм алу керек.

2.9. AB пунктінің ортасындағы әйтеуір бір C пунктінде Петров Ивановты кездестірсін, бірінші рет. Петров CA жолын 6 минут жүрді, немесе $\frac{1}{10}$ сағат. Жүк p сағат тиелсін, 40 минут $\frac{2}{3}$ сағатқа тең. Келесі теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} (\frac{2}{3} - \frac{1}{10} - p)\frac{6}{7}v \geq \frac{16v}{60}, \\ (\frac{2}{3} - \frac{1}{10} - p)\frac{6}{7}v \leq \frac{19v}{60}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{17-30p}{30} \cdot \frac{6}{7}v \geq \frac{4v}{15}, \\ \frac{17-30p}{30} \cdot \frac{6}{7}v \leq \frac{19v}{60}. \end{cases}$$

$z = 17 - 30p$ деп белгілеп аламыз, $\begin{cases} \frac{z}{30} \cdot \frac{6}{7}v \geq \frac{4v}{15}, \\ \frac{z}{30} \cdot \frac{6}{7}v \leq \frac{19v}{60}. \end{cases}$

есептей келіп келесі өрнекті аламыз: $\frac{4}{15} \leq \frac{z}{35} \leq \frac{19}{60}$, содан соң есептеулер жүргізгеннен соң ең соңында мына өрнек шығады:

$12 \leq p \leq 15$. Сонымен жүк тиеу уақыты жуықтап осы аралықта жатыр.

Жауабы: жүк тиеу уақыты $12-15$ минутты алады.

2.10. A-ның t күндегі жалақысы S теңге болсын. B-ның t күндегі жалақысы S_2 тенге болсын. Келесі теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} (t-1)\frac{S}{t} = 7200, \\ (t-7)\frac{S_2}{t} = 6480, \\ (t-7)\frac{S}{t} + 3240 = (t-1)\frac{S_2}{t}. \end{cases}$$

$\frac{S}{t}, \frac{S_2}{t}$ - A, B-дың 1 күндік жалақылары.

Жүйеден келесі теңдеулерді табамыз:

$\frac{S}{t}=\frac{7200}{t-1}$, $\frac{S_2}{t}=\frac{6480}{t-7}$, $(t-7)\frac{S}{t}+3240=(t-1)\frac{S_2}{t}$, бұдан келесі теңдеулерді аламыз:

$(t-7)\frac{7200}{t-1}+3240=(t-1)\frac{6480}{t-7}$, бірнеше түрлендірулерден кейін келесі теңдеуді аламыз:

$$11t^2-316t+1025=0,\ t_{1,2}=\frac{158\pm\sqrt{24964-11275}}{11}=\frac{158\pm117}{11},$$

$$t_1=25,\ t_2=\frac{41}{11},\ S=\frac{7200\cdot25}{24}=7500,\ S_2=\frac{6480\cdot25}{18}=9000.$$

Жауабы: A- ның жалақысы $S=7500$, B-ның жалақысы $S_2=9000$.

2.11. Велосипедшінің жылдамдығы v_1, жаяудың жылдамдығы v_2 болсын. Жолдың ұзындығы S. Келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases}\frac{S}{2v_1}+2=\frac{S}{3v_2},\\ \frac{S}{v_1}\cdot v_2=24,\\ \frac{18}{v_2}=\frac{S+3}{v_1+7}.\end{cases}$$

Жүйенің екінші теңдеуінен келесі теңдеуді аламыз:

$S=\frac{24v_1}{v_2}$, жүйенің үшінші теңдеуінен келесі теңдеуді аламыз:

$18(v_1+7)=v_2(S+3)=v_2(\frac{24v_1}{v_2}+3)=24v_1+3v_2$, $18v_1+126=24v_1+3v_2$,

$126=6v_1+3v_2$, жүйенің бірінші теңдеуінен: $S(\frac{1}{3v_2}-\frac{1}{2v_1})=2$, түрлендірулерден соң: $S=\frac{12v_1v_2}{2v_1-3v_2}$ аламыз, $S=\frac{24v_1}{v_2}$ теңдеуін соңғы алған өрнекке теңестіреміз:

$\frac{24v_1}{v_2}=\frac{12v_1v_2}{2v_1-3v_2}$, осы өрнектен түрлендірулерден соң келесі өрнекті аламыз:

$v_2^2+6v_2=4v_1$, келесі теңдікпен $126=6v_1+3v_2$ жүйе құрамыз:

$\begin{cases} v_2^2+6v_2=4v_1, \\ 6v_1+3v_2=126. \end{cases}$ Біраз түрлендірулерден соң келесі теңдеуді аламыз:

$v_2^2+8v_2-84=0$, $v_{2(1,2)}=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{1}=-4\pm10$, оң жауабын аламыз, $v_2=6$, $v_1=\frac{42-v_2}{2}=\frac{42-6}{2}=18$.

Жауабы: $v_1=18$, $v_2=6$.

2.12. $I\to a$, $II\to aq$, $III\to aq^2$ әр ерітіндідегі спирттің проценті геометриялық прогрессия құрайды деген. Келесі теңдеулерді аламыз:

$2:3:4\to32\%$, $3:2:1\to22\%$ құрайды, барлығы $2+3+4=9$ болғандықтан келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} \frac{2T}{9}\cdot\frac{a}{100}+\frac{3T}{9}\cdot\frac{aq}{100}+\frac{4T}{9}\cdot\frac{aq^2}{100}=\frac{32T}{100}, \\ \frac{3Q}{6}\cdot\frac{a}{100}+\frac{2Q}{6}\cdot\frac{aq}{100}+\frac{Q}{6}\cdot\frac{aq^2}{100}=\frac{22Q}{100}. \end{cases}$$

Осы теңдеулер жүйесін шешіп, келесі өрнекті аламыз:

$$\begin{cases} (\frac{1}{450}+\frac{q}{300}+\frac{q^2}{225})a=\frac{8}{25}, \\ (\frac{1}{200}+\frac{q}{300}+\frac{q^2}{45})a=\frac{11}{50}. \end{cases}$$

екі теңдеуді біріне-бірін бөліп, түрлендірулер жасап, келесі өрнекті аламыз:

$$20q^2-15q-50=0,\ \ q_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{225+4000}}{40}=\frac{15\pm 65}{40},\ \ q_1=2,$$

$$q_2=\frac{-5}{4};\ \ q_1=2 \text{ үшін } a=12(\%),\ \ aq=24(\%),\ \ aq^2=48(\%).$$

Жауабы: бірінші ерітіндіде 12, екінші ерітіндіде 24, үшінші ерітіндіде 48 процент спирт болған.

2.13. $I\to a$, $II\to b$, $III\to c$, $IV\to d$ төрт түрлі тұздық ерітінділерде сәйкес a,b,c,d тұздың проценттік концентрациясы бар деп есептейік. Төменгі кестені құрайық:

I	II	III	IV	
3:	2:	1		$\to 15\%$
	1:	1:	1	$\to 24\%$
1:		1		$\to 10\%$
	2:		1	$\to ?\%$

кестенің екінші жолындағы бөліктер саны 6-ға тең, үшінші жолындағы 3-ке тең, төртінші жолындағы 2-ге тең, бесінші жолындағы 3-ке тең. Осыған байланысты келесі теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} \frac{3T}{6}\cdot a+ & \frac{2T}{6}\cdot b+ & & \frac{T}{6}\cdot c= & 15T, \\ & \frac{Q}{3}\cdot b+ & \frac{Q}{3}\cdot c+\frac{Q}{3}\cdot d= & 24Q, \\ \frac{P}{2}\cdot a+ & & & \frac{P}{2}\cdot c= & 10P, \\ \frac{2K}{3}\cdot b+ & & & \frac{K}{3}\cdot d= & ? \end{cases}$$

Қысқартқан соң келесі жүйені аламыз:

$$\begin{cases} \frac{a}{2}+ \frac{b}{3}+ \frac{c}{6}= 15, (2.13.1) \\ \frac{b}{3}+ \frac{c}{3}+\frac{d}{3}= 24, (2.13.2) \\ \frac{a}{2}+ \frac{c}{2}= 10, (2.13.3) \\ \frac{2b}{3}+ \frac{d}{3}= ?(2.13.4) \end{cases}$$

(2.13.1)+(2.13.2) қоссақ келесі өрнекті табамыз: $\frac{a}{2}+\frac{2b}{3}+\frac{c}{6}+\frac{c}{3}+\frac{d}{3}=39$, $\frac{2b}{3}+\frac{d}{3}+\frac{a}{2}+\frac{c}{2}=39$, $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}=10$ болғандықтан келесі өрнекті аламыз:

$\frac{2b}{3}+\frac{d}{3}+10=39$, сонымен $\frac{2b}{3}+\frac{d}{3}=29$.

Жауабы: 29%.

2.14. Екінші дене t_1 уақытта v_2t_1 жол жүреді. Ал бірінші дене $2\pi R+v_2t_1$ жол жүреді, сонымен $\frac{v_2t_1+2\pi R}{v_1}=t_1$, егер қарсы бағытта қозғалса, онда келесі теңдеуді аламыз:

$v_1t_2+v_2t_2=2\pi R$, келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} \frac{v_2t_1+2\pi R}{v_1}=t_1, \\ v_2t_2+v_1t_2=2\pi R. \end{cases}$$ түрлендірулер жасап, жүйені шешіп, келесі мәндерді табамыз: $v_1=\frac{\pi R(t_1+t_2)}{t_1t_2}$, $v_2=\frac{\pi R(t_1-t_2)}{t_1t_2}$.

Жауабы: $v_1=\frac{\pi R(t_1+t_2)}{t_1t_2}$, $v_2=\frac{\pi R(t_1-t_2)}{t_1t_2}$.

2.15. 28 сағ. 48 мин. = $\frac{144}{5}$ сағ. Келесі теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} v_2 t - v_1 t = \frac{V}{2} = 12, \\ (\frac{144}{5} - t)v_2 = \frac{V}{2} = 12. \end{cases} \qquad \begin{cases} (v_2 - 2)t = 12, \\ (\frac{144}{5} - t)v_2 = 12. \end{cases}$$ жүйенің бірінші теңдеуінен $v_2 = \frac{12 + 2t}{t}$, осы шыққан өрнекті жүйенің екінші теңдеуіне қойып, келесі теңдеуді аламыз:

$$5t^2 - 84t - 864 = 0,\ t_{1,2} = \frac{42 \pm \sqrt{1764 + 4320}}{5} = \frac{42 \pm \sqrt{6084}}{5} = \frac{42 \pm 78}{5},$$

$$t_1 = \frac{42 + 78}{5} = 24,\ t_2 = \frac{42 - 78}{5} = -7.2, \text{ бұдан } v_2 = \frac{12 + 2 \cdot 24}{24} = 2.5.$$

Жауабы: екінші труба арқылы сағатына 2.5 $м^3$ су резервуарға ағады.

2.16. Артқы дене келесі арифметикалық прогрессия бойынша қозғалады:

$S_1 = a_1 + (a_1 + p) + ... = 25 + 25 + \frac{1}{3} + ...$, ал алдыңғы дене келесі арифметикалық прогрессия бойынша қозғалады:

$S_2 = b_1 + (b_1 + p) + ... = 30 + 30 - \frac{1}{2} + ...$, артқысы алдыңғысын n секундта қуып жетті деп есептесек, келесі өрнекті аламыз:

$$S_1 - S_2 = \frac{(25 + 25 + (n-1)\frac{1}{3})n}{2} - \frac{(30 + 30 + (n-1)(\frac{-1}{2}))n}{2} = 20,$$

түрлендіре келесі өрнекті аламыз:

$$5n^2-59n-240=0,\quad n_{1,2}=\frac{59\pm\sqrt{3481+4800}}{10}=\frac{59\pm\sqrt{8281}}{10}=\frac{59\pm91}{10},$$

$$n_1=\frac{59+91}{10}=15,\quad n_2=\frac{59-91}{10}=-3.2.$$

Жауабы: 15 секундта қуып жетеді.

2.17. Келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases}3(v_1+v)+3(v_2-v)=23,\\ \dfrac{23}{v_1+v}+2=\dfrac{23}{v_2+v},\\ v_2=3v.\end{cases}$$ Осы теңдеулер жүйесін шешіп, келесі жауапты табамыз: $v=11.5$.

Жауабы: судың жылдамдығы сағатына $v=11.5$ км.

2.18. Бассейннің көлемі V, бірінші трубаның құю жылдамдығы v_1, екіншісінікі v_2. Келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases}\dfrac{V}{v_1}-\dfrac{V}{v_2}=\dfrac{11}{30},\\ \dfrac{V}{v_1+v_2}=1.\end{cases}$$ $\dfrac{V}{v_1}=x$, $\dfrac{V}{v_2}=y$ деп белгілеп алсақ келесі өрнек шығады: $\begin{cases}x-y=\dfrac{11}{30},\\ \dfrac{xy}{x+y}=1.\end{cases}$ Түрлендіре отырып, келесі өрнекті аламыз:

$$30y^2-49y-11=0,\quad y_{1,2}=\frac{49\pm\sqrt{2401+1320}}{60}=\frac{49\pm61}{60},\quad y_1=\frac{11}{6},$$

$y_2=\dfrac{-12}{60}=\dfrac{-1}{5}$, $x=\dfrac{11+30y}{30}$ болғандықтан, $x_1=\dfrac{11+30\cdot\frac{11}{6}}{30}=\dfrac{66}{30}=\dfrac{11}{5}$.

Жауабы: бірінші труба $x_1 = \frac{11}{5}$ сағ., екінші труба $y_1 = \frac{11}{6}$ сағ. бассейнді толтырады.

2.19. AB-ның арасын S деп белгілейік. Бірінші туристің жылдамдығы v_1, екінші туристің жылдамдығы v_2 болсын. Келесі теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} \frac{S-4}{v_1} = \frac{4}{v_2}, \\ \frac{S+2}{v_1} = 2, \\ \frac{S-2}{v_2} = 2. \end{cases}$$

Осы жүйедегі теңдеулерді түрлендірген соң келесі теңдеуді аламыз: $S = \frac{4v_1 + 4v_2}{v_2}$, $v_1 = v_2 + 2$.

$$v_2^2 - 3v_2 - 4 = 0,\ v_{2(1,2)} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2},\ v_{2(1)} = \frac{3+5}{2} = 4,\ v_{2(2)} = -1.$$

Ал $v_1 = v_2 + 2 = 6$, $S = 10$ км.

Жауабы: $v_2 = 4\ \frac{êì}{ñàƒàò}$, $v_1 = 6\ \frac{êì}{ñàƒàò}$, $S = 10$км.

2.20. Бірінші жұмысшы жұмысты t уақытта, екінші жұмысшы жұмысты z уақытта, үшінші жұмысшы $t-1$ уақытта бітіреді. Бірінші жұмысшы бір сағатта жұмыстың $\frac{1}{t}$, сол сияқты әрқайсысын есептеп келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{t} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t-1}} = 1, \\ \frac{1}{t} + \frac{4}{z} = 1. \end{cases}$$

Түрлендіре келе мына теңдеуді аламыз: $z = \frac{4t}{t-1}$,

$$3t^2-10t+3=0,\quad t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3}=\frac{5\pm4}{3},\quad t_1=3,\quad t_2=\frac{1}{3},\quad z=6.$$

Үшінші жұмысшы $t-1=3-1=2$ сағатта бітіреді.

Жауабы: Бірінші жұмысшы 3 сағатта, екіншісі 6 сағатта, үшінші жұмысшы 2 сағатта жұмысты бітіреді.

2.21. Бір түрінен шойынның $5x$ мөлшерде, екінші түрінен x мөлшерде шойын алынды, $I\to5x\to p\%$ хром бар, $II\to x\to t\%$ хром бар деп алып, келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases}\dfrac{5xp+xt}{x+5x}=2t,\\ \dfrac{xp+xt}{x+x}=\dfrac{8}{100}=\dfrac{2}{25}.\end{cases}$$ Жүйені түрлендіре келе мына теңдеуді

аламыз: $p=\dfrac{11t}{5}$, $t=\dfrac{1}{20}=5\%$, $p=\dfrac{11\cdot5}{5}=11\%$.

Жауабы: Біреуінде $p=11\%$, екіншісінде $t=5\%$ хром бар.

2.22. 10 мин.$=\dfrac{1}{6}$ сағатқа, 20 мин. $=\dfrac{1}{3}$ сағат, ал бассейн көлемі V, кранның жылдамдықтары сәйкес v_1, v_2 болсын. Келесі теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases}v_1\cdot\dfrac{1}{6}+v_2\cdot\dfrac{1}{3}=V,\\ v_1\cdot\dfrac{1}{12}+v_2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{5}.\end{cases}$$ Түрлендірген соң келесі теңдеуді аламыз:

$5v_1=18V$, $5v_2=6V$, бұдан $\dfrac{V}{v_1}=\dfrac{5}{18}$, $\dfrac{V}{v_2}=\dfrac{5}{6}$.

Жауабы: Бірінші кран $\dfrac{50}{3}$ минутта, екінші кран 50 минутта бассейнді толтырады.

2.23. Алғашқы ақша x теңге болсын, ал процент t болсын. Келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases}(x+xt+4400)\cdot t+(x+xt+4400)=25750,\\ xt=600.\end{cases}$$ Теңдеулер жүйесін түрлендірген соң келесі өрнекті аламыз:

$x=\frac{600}{t}$, $500t^2-2015t+60=0$, $t_{1,2}=\frac{2015\pm\sqrt{4060225-120000}}{1000}=$ $=\frac{2015\pm1985}{1000}$.

$t_1=\frac{2015+1985}{1000}=4$, $t_2=\frac{2015-1985}{1000}=0.03$, процентпен санағанда біріншісі 400%, ал екіншісі 3%, сонымен банкке, банк 400% бермейтіндіктен, $x=\frac{600}{t}=\frac{600}{0.03}=20000$ теңге салынған.

Жауабы: банк 3% процент өсім берген, алғашқы ақша 20000 теңге құрайды.

2.24. $I\to(t+\frac{1}{2})70\to S_1$, $II\to(t+\frac{1}{2})60\to S_2$, мұндағы t - үшінші машинаның екінші машинаны қуып жетуге кеткен уақыты. Келесі жүйені құрамыз:

$$\begin{cases}\frac{(t+\frac{1}{2})\cdot70+2v_1}{v_3}-2=t,\\ (t+\frac{1}{2})\cdot60=t\cdot v_3.\end{cases}$$ Ықшамдаған соң келесі теңдеу шығады:

$v_3=\frac{10t+145}{2}$, $10t^2+25t-60=0$, $2t^2+5t-12=0$,

$t_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{4}=\frac{-5\pm11}{4}$, $t_1=\frac{-5+11}{4}=\frac{3}{2}$, $t_1=-4$.

$v_3=\frac{10t+145}{2}=\frac{10\cdot\frac{3}{2}+145}{2}=\frac{160}{2}=80$ км. сағатына.

Жауабы: үшінші машина сағатына 80 км. жүрген екен.

2.25. Ыдыстың көлемін V деп белгілейік. Келесі теңдеуді құрамыз:

$\frac{(V-2.5)\cdot 0.96+2.5\cdot 0.8}{V}=\frac{(V-2.5)\cdot 0.96+2}{V}=l$ - жаңа қоспа ішіндегі қышқылдың мөлшері. Келесі теңдеу шығады:

$\frac{(V-2.5)\cdot l+2.5\cdot 0.8}{V}=\frac{(V-2.5)\cdot l+2}{V}=0.89$, Орынына қойып, келесі өрнекті аламыз:

$\frac{(V-2.5)\cdot[\frac{(V-2.5)\cdot 0.96+2.5\cdot 0.8}{V}]+2}{V}=0.89$, түрлендіре келе келесі өрнекті аламыз:

$7V^2-80V+100=0$, $V_{1,2}=\frac{40\pm\sqrt{1600-700}}{7}=\frac{40\pm 30}{7}$, $V_1=10$ литр,

$V_2=\frac{10}{7}$ литр, бірақ бұл өте аз, 2.5 литр төгіп тастау үшін. Сондықтан

Жауабы: $v=10$ литр.

2.26. Келесі теңдеулер жүйесін құрайық:

$\begin{cases} t+p>29, \\ p-2>3t, \\ 3p-2t<60. \end{cases}$ Шеше келе келесі өрнекті аламыз:

Бірінші жәшікте $p=24$, екінші жәшікте 7 деталь болған.

Жауабы: бірінші жәшікте 24, екіншіде 7 деталь болған.

2.27. Колбадан пробиркаға x грамм ерітінді құйылды деп алайық. Келесі теңдеуді құрамыз:

$$\frac{(80-x)\cdot 0.1+x\cdot 0.3}{80}=0.12,\quad x=8.$$

Жауабы: пробиркаға 8 грамм ерітінді құйылған.

2.28. Бутылканың көлемін V деп есептейік. Келесі теңдеуді аламыз:

$\frac{(V-1)\cdot 0.12+1\cdot 0}{V}=l$ бірінші қопадан шыққан тұздың мөлшері.

$\frac{(V-1)\cdot l+1\cdot 0}{V}=0.03$ екінші қоспадағы тұздың мөлшері.

Алғашқы теңдеуді соңғы теңдеудің орнына қойып келесі өрнекті аламыз:

$\frac{(V-1)\cdot(V-1)\cdot 0.12}{V}:V=0.03$, түрлендірген соң келесі өрнекті аламыз:

$3V^2-8V+4=0$, $V_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{3}=\frac{4\pm 2}{3}$, $V_1=2$, $V_2=\frac{2}{3}$ екінші жауаптың мағынасы жоқ болғандықтан 2-ні қалдырамыз.

Жауабы: бутылка сиымдылығы 2 литр.

2.29. Алғашқы ақша x болсын, процент q-ге тең. Келесі қатынастар орынды болар еді:

$I\to xq+x$ бірінші жылғы өскен ақша, $II\to(xq+x)q+xq+x$,

$III\to((xq+x)q+xq+x)q+((xq+x)q+xq+x)$.

Келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$\begin{cases}(xq+x)q+xq=60000,\\((xq+x)q+xq+x)q=49000.\end{cases}$ Түрлендіре келесі теңдеуді аламыз:

$\begin{cases}(60000+x)q=49000,\\ xq(q+2)=60000.\end{cases}$ Түрлендіре келе келесі өрнекті аламыз:

$$x=\frac{3600000}{49q+38},\ 360q^2+426q-228=0,\ 60q^2+71q-38=0,$$

$$q_{1,2}=\frac{-71\pm\sqrt{5041+9120}}{120}=\frac{-71\pm119}{120},\ q_1=\frac{-71+119}{120}=\frac{2}{5},$$ теріс жауабы мағынасыз, $x=62500$.

Жауабы: 40%, алғашқы салым 62500 теңге болады.

2.30. v_1- жүрдек поездің, $v_2=v_3$ жолаушылар таситын поездердің жылдамдықтары болсын. Келесі теңдеулерді аламыз:

$I-i\to C-дейін, жүрдек\to 15$ сағат жүрді,

$III-i\to C-дейін, жолаушылы\ \to 15$ сағат жүрді,

$3v_1+3v_2=AB,\ \ \frac{AB}{v_2}=\tau$ - екінші поездің жүрген уақыты, ал $9.00+\tau$ оның A-ға келген уақыты, келесі теңдеуді аламыз:

$$\frac{AB}{v_2}=\frac{3v_1+3v_2}{v_2}=3\frac{v_1}{v_2}+3=\tau,\ \ 3v_1+3v_2+15v_3=S,\ \ \frac{S}{v_1}=15,$$

$$\frac{3v_1+3v_2+15v_3}{v_1}=3+\frac{18v_2}{v_1}=15,\ v_2=v_3 \text{ болғандықтан, } \frac{18v_2}{v_1}=12,$$

$\frac{v_1}{v_2}=\frac{3}{2}$, бұдан $3\frac{v_1}{v_2}+3=\tau$ болғандықтан $3\cdot\frac{3}{2}+3=\frac{15}{2}=\tau$, келген уақыты: $9.00+\frac{15}{2}=16.30$ болады.

Жауабы: жолаушы таситын поезд A-ға 16.30-да келді.

2.31. $I \to v_1$ сағатта бірінші бригада, $II \to v_2$ сағатта екінші бригада, $III \to v_3$ сағатта үшінші бригада жұмысты жеке бітірер еді. Келесі жүйені құрамыз:

$$\begin{cases} 1:(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}) = v_3 - \frac{3}{5}, \\ 1:(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_3}) = \frac{v_2}{2}, \\ 1:(\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}) = \frac{v_1 \cdot 2}{7}. \end{cases}$$

Осы жүйені түрлендірген соң келесі өрнектерді аламыз: $v_1 = 2v_3$, $v_2 = \frac{4v_3}{3}$, түрлендірулерден соң келесі теңдеуді аламыз:

$10v_3^2 = 30v_3$, $v_3 = 3$, $v_2 = 4$, $v_1 = 6$. Ал үшеуі бірігіп жұмысты

$1:(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$ күнде бітірер еді.

Жауабы: $\frac{4}{3}$ күнде немесе 24+8=32 сағатта бітіреді.

2.32. Келесі жүйені құрамыз:

$$\begin{cases} \frac{S+13}{v_1} = \frac{S-13}{v_2}, \\ \frac{2S+\frac{S}{7}}{v_1} = \frac{S+\frac{6S}{7}}{v_2}. \end{cases}$$

Бұдан келесі өрнекті аламыз:

$v_1 = \frac{15v_2}{13}$, $14 = \frac{S}{13}$, $S = 182$.

Жауабы: жол $S = 182$ км.

2.33. Қоспада p кг. мыс, t кг. қалайы бар деп есептейік. Келесі өрнекті құрамыз: $\frac{p}{500}$- мыстың қоспадағы проценті, $\frac{t}{500}$- қалайының қоспадағы проценті. Бірінші рет қалған қоспа: $500-(p+100)$ болады, осы қоспадағы мыстың проценті:

$\frac{[500-(p+100)]\cdot p}{500}\cdot\frac{1}{500}=k$ процентті алып тастады, сонымен

$\frac{[500-(p+100)]\cdot p}{500\cdot 500}=\frac{p}{500}:\frac{25}{4}$, $p=320$, $t=180$. Демек қалайының мөлшері 180 кг болған, немесе $\frac{180}{500}=0.36$, немесе 36 процент.

Жауабы: 36%.

2.34. Бірінші жылы t мұнай өндірсе, келесі жылы $1.5t$, одан арғы жылы $2.25t$ мұнай өндіріледі, үшінші жылы $3.375t$, геометриялық прогрессия бойынша мұнай өндірілген алғашқы жылдары. Егер барлығы n жыл өндірілсе, онда барлығы осы жылдарда:

$V_n=\frac{t(1-q^n)}{1-q}$ мұнай өндіріледі. Ал 9 жыл бойы барлығы:

$V=9\cdot(1.5)^{n-1}\cdot 400000$ мұнай өндірген болады, сонымен келесі теңдеуді аламыз:

$\frac{400000(1-(1.5)^n)}{1-1.5}=-800000(1-(1.5)^n)=V_n$, содан соң келесі өрнекті аламыз:

$-800000(1-(1.5)^n)+9\cdot(1.5)^{n-1}\cdot 400000=35650000$, 10000-ға бөліп, түрлендірген соң келесі теңдеуді аламыз:

$480(1.5)^{n-1}=3645$, $(1.5)^{n-1}=\frac{3645}{480}=(\frac{3}{2})^5=(1.5)^{n-1}$,осыдан келесі:

$n-1=5$, $n=6$ жыл шығады.

Жауабы: Барлығы мұнайды 15 жыл өндірген.

Өзін өзі бақылау үшін тест тапсырмалары

1. Егер анықтауштың қандай да бір жол элементтеріне сәйкес басқа жол элементтерін k санына көбейтіп қоссақ, онда анықтауыш A) таңбасы өзгереді; **B) өзгермейді;** C) таңбасы өзгермейді; D) k –есе артады; E) k –есе азаяды.

2. $y = k_1 x + b_1$ және $y = k_2 x + b_2$ түзулерінің арасындағы бұрышының тангенсін табыңыз:

A) $\frac{k_1 + k_2}{1 + k_1 k_2}$; B) $\frac{1 + k_1 k_2}{k_1 - k_2}$; C) $k_1 k_2$; **D)** $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$**;** E) $\frac{k_1 + k_2}{1 - k_1 k_2}$.

3. Егер түзу $\vec{S} = (m,n,p)$ векторының бағытымен (x_0, y_0, z_0) нүктесінен өтсе онда, оның параметрлік теңдеуі мына түрде болады

A) $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$**;** B) $x = mt;\ y = nt;\ z = pt$;

C) $x = x_0 + mt;\ y = y_0 + nt;\ z = z_0 + pt$; D) $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$; E) $xm + yn + zp = t$.

4. Егер жазықтық (x_0, y_0, z_0) нүктесінен өтіп $\vec{n} = (A,B,C)$ векторына перпендикуляр болса, онда оның теңдеуі мына түрде болады

A) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$**;** B) $Ax + By + Cz + x_0 y_0 z_0 = 0$;

C) $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + xyz = 0$; D) $\frac{A}{x_0} + \frac{B}{y_0} + \frac{C}{z_0} = 0$;

E) $\frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{y - y_0} + \frac{C}{z - z_0} = 0$.

5. Егер $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ болса, онда $A \cdot B$-ны тап

A) $\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 21 & -6 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$;

E) $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.

6. Мына $\begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауыштың A_{12} алгебралық толықтауышын табыңыз

A) –8; B) 22; C) -14; D) 14; **E)** -22.

7. Егер $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}.$ болса, онда $cos(\vec{a}, \hat{} \ \vec{b})$-ны табыңыз

A) $\frac{-1}{\sqrt{15}}$; B) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; C) $\frac{3}{\sqrt{15}}$; **D);** E$\frac{1}{\sqrt{15}}$) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. Егер $\vec{a} = 7\vec{i} - 5\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}, \vec{b} = -7\vec{i} + 5\vec{j} - \sqrt{2}\vec{k}$ болса, онда $\vec{a} \times \vec{b}$ -ны табыңыз

A) $\vec{0}$**;** B) $27\vec{i} - 35\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$; C) $5\vec{i}$; D) $21\vec{i} + 3\sqrt{2}\vec{k}$; E) $5\vec{i}$.

9. $M_0(3;-6;7)$ нүктесінен $4x - 3z - 1 = 0$ жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңыз.

A) 1; B) -2; **C) 2;** D) 0; E) -1.

10. $2x - y - 3 = 0$ және $x + 3y + 2 = 0$ түзулердің қиылысу нүктесін табыңыз.

A) $(-2;1)$; B) $(-1;1)$; C) $(2;-1)$; **D)** $(1;-1)$**;** E) $(0;-2)$.

11. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{2 + x}$

A) 0; B) 1; C) -1; D) 2; E) 3.

12. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{tg(x-2)}{5(x-2)}$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1; C) 0; D) 5; **E)** $\frac{1}{5}$

13. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 10x^3 - 5}{5x^3 + 8x^2 + 7x}$

A) –2; B) 0; C) 5; D) ∞; E) $-\frac{5}{7}$

14. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x}$

A) ∞; B) 1; **C) 0;** D) 2; E) шегі жоқ.

15. Шекті табыңыз $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

A) 0; **B)** $\dfrac{3}{2}$**;** C) 3; D) 1; E) 5.

16. $f(x)$ функциясының дифференциялының формуласын табыңыз.

A) $f'(x)-dx$; B) $f(x)dx$; C) $f'(x)$; D) $f'(x)+dx$; **E)** $f'(x)dx$.

17. $y=y(x)$ функциясы $x=e^{-t}$; $y=t^3$; $-\infty<t<\infty$ параметрлік түрде берілген. Осы функцияның y'_x туындысын табыңыз.

A) $-te^t$; **B)** $-3t^2e^t$**;** C) t^2e^{-t}; D) $\dfrac{3t^2}{e^t}$; E) te^{-t^2}.

18. $y=\ln\left(e^{-x}+xe^{-x}\right)$ функциясының y'_x туындысын табыңыз.

A) $y'=-\dfrac{x}{1+x}$**;** B) $y'=-\dfrac{x^2}{1+x}$; C) $y'=\dfrac{x}{1+x}$; D) $y'=-\dfrac{x}{(1+x)^2}$;

E) $y'=x(1+x)$.

(Дұрыс жауаптар қара шрифтпен белгіленген**).**

ҚАЖЕТТІ ФОРМУЛАЛАР

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \quad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \quad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}; \quad tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}};$$

Үшбұрыштағы кейбір қатынастар

ABC үшбұрышы берілсін, a,b,c арқылы үшбұрыштың қабырғаларын белгілейік, A,B,C арқылы үшбұрыштың бұрыштарын белгілейік. Үшбұрыштың жарты периметрі келесі формула арқылы берілсін: $p = \frac{a+b+c}{2}$. Сырттай сызылған

шеңбердің радиусын R деп белгілейік. Кейбір қажетті формулаларды еске салайық.

Үшбұрыш ауданын есептеу: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $S = \frac{bc\sin A}{2}$;

Косинустар теоремасы: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$;

Синустар теоремасы: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$;

Тангенстер теоремасы: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\frac{A+B}{2}}{tg\frac{A-B}{2}} = \frac{ctg\frac{C}{2}}{tg\frac{A-B}{2}}$;

Дәрежелер

$(abc...)^n = a^n b^n c^n ...$, $a^n b^n c^n ... = (abc...)^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$,

$a^n a^z = a^{n+z}$, $\frac{a^n}{a^z} = a^{n-z}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$, $a \neq 0$. Егер дәреже көрсеткіші бөлшек болса, онда келесі теңдік орынды: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Түбірлер

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$, $\sqrt[n]{abc...} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}...$, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}... = \sqrt[n]{abc}...$,

$(\sqrt[n]{a})^z = \sqrt[n]{a^z}$, $\sqrt[n]{a^z} = (\sqrt[n]{a})^z$.

Квадрат теңдеулерді шешу

$ax^2 + bx + c = 0$ теңдеуінің түбірлерін анықтау формуласы:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, егер b жұп сан болса, онда келесі формула орынды:

$x = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$, Виет теоремасы бойынша келтірілген квадрат теңдеу үшін $x^2 + px + q = 0$ түбірлері келесі теңдеулерді қанағаттандырады:

$x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Түбірлері бойынша квадрат теңдеуді былай жіктеуге болады:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Пропорциялар

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ орындалса, онда келесі теңдік орынды болады: $ad = bc$, сонымен қатар келесі теңдіктер де орындалады:

$\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}$, $\dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}$.

Логарифмдер

$\log_a N = x$, $a^x = N$, $a^{\log_a N} = N$, $\log(bc) = \log b + \log c$,

$\log \dfrac{b}{c} = \log b - \log c$, $\log N^n = n \log N$, $\lg 10 = 1$, $\ln e = 1$.

$e \approx 2{,}71828183$, $\log 1 = 0$.

Кейбір өлшемдер

1 миллион - мың мыңға тең;

1 миллиард – мың миллионға тең;

1 триллион – миллион миллионға тең;

1 квадриллион – миллион миллиардқа тең;

1 квинтиллион – миллион триллионға тең;

1 секстиллион – миллион квадриллионға тең. Ары қарай септиллион, октиллион, ониллион, дециллион, ундециллион, т.т кете береді.

АСТРОНОМИЯЛЫҚ ДЕРЕКТЕР

Жердің массасы $6\cdot10^{27}$ грамм болады. Жер мен Айдың ара қашықтығы мөлшері 384000 км. Жердің тығыздығы жуықтап алғанда 5,5грамм бір куб сантиметрде. Аспан кеңістігінде миллиардтаған галактикалар бар. Әрбір галактикада бірнеше миллиардтаған жұлдыздар болады. Бізге көрінетін аспан кеңістігінде 10 000 000 000 000 000 000 000 жұлдыздар болады. Ашық аспанда түнгі мезгілде адам мөлшері 2000-3000 жұлдыз көре алады. Ал бинокль 10 000 есе артық жұлдыз көрсетеді. Екі көрші галактика арасы бірнеше миллион жарық жылдарын береді. Бір куб сантиметр жұлдыз затына 10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 куб сантиметр бос кеңістік келеді. Сонымен аспан әлеміндегі вакуум лабораторияда алынатын вакуумнен 10 триллион есе тығыздығы аз вакуум болады. Күн орташа жұлдыз. Бет жағындағы температурасы 6000 градус болса, ортасында мөлшері 20 миллион градусқа дейін артады. Жерден Күнге дейінгі қашықтық 150 000 000 километрді құрайды. Сутегі атомының массасы 0,0 000 000 000 000 000 000 000 017 грамм болады. Құс жолы галактикасындағы жұлдыздар саны 100 000 000 000 мөлшерінде. Жердің жасы мөлшері $4\cdot10^{9}$ жыл құрайды. Айдың радиусы мөлшері 1670 км, ал көлемі $2\cdot10^{25}$ сантиметр кубты құрайды, массасы $7\cdot10^{25}$ грамм болады.

Иоганн Кеплер – атақты неміс астрономы. Марсты зерттеу арқылы ол планеталар эллипс бойынша қозғалатынын анықтаған. Эллипстің бір фокусында Күн, ал екінші фокусында планета қозғалады – бұл Кеплердің бірінші заңын береді. Галилео Галилей 1610 жылы Юпитердің 4 спутнигін ашқан. Жерден спутник аспанға ұшыру үшін оған небәрі секундына 11,2 км жылдамдық берсе болғаны екен. Күннің массасы $2\cdot10^{33}$ грамм мөлшерін береді екен, ал радиусы 696 000 километрге тең. Бір жарық жыл мөлшері $9{,}5\cdot10^{12}$ километрге тең. Құс Жолы галактикасы біздің галактика, немесе Күн системасы орналасқан галактика. Күн Құс Жолы галактикасының центрін секундына

300 км жылдамдықпен айналады екен. Мейалл Күннің осындай жылдамдықпен Аққулар шоқжұлдызындағы Денеб жұлдызына Галактика ортасына 90 градус бұрыш жасап жылжып, жақындап бара жатқанын көрсеткен. Галактика ортасының массасы $2\cdot10^{11}$ Күн массасын береді. Ең ауыр жұлдыз – Пласкетта жұлдызы, массасы 100 Күннің массасын құрайды, көрінетін жұлдыздар ішіндегі. Екі галактика мөлшері 10^9 жыл уақыт аралығында соғысуы мүмкін. Бұл соғысу аспан әлемінің дамуына зор ықпал етеді.

ТАРИХИ ДЕРЕКТЕР

Ғасырлар бойы математиктер – математика ірге тасы дұрыс салынған деп есептеп келді. Оған дәлел ертедегі гректер негізін салған геометрия ғылымы болды. Евклид геометриясы абсолют шындық болып көрінді.

Тек XIX ғасырдың ортасында математиктер – математика заңдылықтарының абсолют шындық емес екенін мойындай бастады. Жаңадан ашылған Бойаи, Лобачевский, Риман еңбектері жаңа теориялар, жаңа ұғымдар әкелді. Геометрия соңынан алгебра да күрт көтерілген еді. Оған әсіресе араб, индус математиктері көп атсалысқан. Сол заманда араб тілінде сөйлеген түрік тілдес математиктер де көп кездескен.

Таяу шығыстан алгебра Европаға ауысты. Европа ғалымдары Шығыс әлемі бастап кеткен математиканы ары қарай жалғастырды. Алгебра ғылымында да қайшылықтар кездесе бастады. Мысалы, химияда сутегі мен оттегін қоссақ су аламыз:

$$H_2 + O_2 = H_2O, \qquad 2H_2 + O_2 = 2H_2O.$$

Егер екі бөлікті сутегі мен бір бөлікті оттегін өзара қоссақ, онда екі бөлікті су буын аламыз, үш бөлікті емес, сонымен мына теңдік орындалып отыр:

$2+1=2$. Сол сияқты:

1 бөлік азот + 3 бөлік оттегі = 2 бөлік аммиак, 1+3=2. Жай арифметика заңдылығы орындалмай тұр. Газдарды бөлік түрінде қоссақ, қосу амалы орындалмайды. Бірақ бұл құбылысты химияда, физикада Авагадро заңымен түсіндіруге болады.

Математиктер өз фундаментіміз тесік емес пе екен деп, соны қайтадан қарастыруға, бүтіндеуге кірісті. Математиктер дөрекі түрде айтқанда 4 бағытқа бөлінді:

– Логиктер;

– Формалистер;

– Интуиционистер;

– Теоретикалық-жиынды концепцияны ұстанушылар. Әрқайсысы өз бағыттарындағы ірге тастарын жөндеуге кірісті. Әрқайсысы өз бағытын дұрыс, қалғандары бұрыс деп бір-бірімен көп айтысты.

Соңынан 23 проблема көтерілді. Ең маңыздылары 2 еді.

1900 жылы II дүниежүзілік математиктер Конгресінде, Парижде Гильберт – **математиканың қайшылықсыздығы туралы бірінші проблеманы көтерді.**

Ал екінші проблема – математиканың бір саласындағы математикалық аксиомалар жүйесінде осы саладағы кез келген тұжырымды осы аксиомалар көмегімен дәлелдеуге бола ма, жоқ па?

1930 жылы Курт Гедель «Кез келген бүтін сандар арифметикасын қамтитын күшті математикалық жүйенің қайшылықсыздығы осы жүйедегі аксиомалар көмегімен дәлелдене алмайтындығы туралы» жаңалық ашты. Енді Аристотель ашып кеткен «үшінші жолдың жоқ» екені туралы аксиома «Бір тұжырым не дұрыс, не бұрыс» деген өзгеріске ұшырайтын болды.

XIX-XX ғасырларда, одан да ерте заманда физикадан ажырамай бірге дамып келе жатқан математика ірге тасымызды қайта қарастырамыз деп бөлектене, изоляцияға түсе бастады. Математиктер екі лагерьге:

– таза математиктер;

– кәделі математиктер болып бөлініп кетті.

Кәделі математиктер практикалық есептерге көп көңіл бөлді. Ал таза математиктер абстракциялық, ешкім түсінбейтін бөлек проблемаларымен ерекшеленді. Әр бағыттағы математиктер туралы аңыз мынадай. Жеті соқыр бір пілді қарап жүр екен, құйрығын ұстап «піл жіпке ұқсайды» дейді біреуі. Екіншісі аяғын ұстап «піл колоннаға ұқсайды екен» депті. Сол сияқты төрт бағыттағы математиктер де өзара айтысады. Әзірше шығатын тұжырым – мүмкін математика бірнеше шығар!

Жалпы математика жаратылыстану ғылымдарына жатады. Физикадағы квантты механика, салыстырмалық теориясы, т.б. математика көмегімен түсіндіріледі ғой. Әрине математиканы тарихтан бөліп қарауға болмайды. Әр заманның өзіне сай математикасы бар.

IX ғасырда туған алгебраның негізін салушы түрік тілдес Орта Азияның ұлы ғалымы Әбу Абдолла Мұхаммед Хорезми болған. Ол арифметиканы да жоғары сатыға көтерген. Орта ғасырларда араб шапқыншылары 636 жылы Сирия мен Палестинаны, 640 жылы Арменияның бір бөлігін, 644 жылы солтүстік Иранды, 645 жылы Мысырды, 654 жылы Азербайжан мен Грузияның бір бөлігін басып алып, ұлан байтақ империя – Араб халифаты құрылды. Бағдатта академия ашылды. Оны «Даналық үйі – Бәйіт әл хирма» деп атады. Хорезми 787 жылы Хиуада туып, 850 жылы шамасында Бағдатта қайтыс болған. Ол ана тілімен қатар парсы, араб, санкрит, ескі еврей тілдерін біліп, 20 жасында ғылым қуып, керуенге ілесіп Бағдатқа келген. Бес тілді еркін білген математик, астроном, географ, тарихшы, дәрігер Хорезми Бағдатта аға ғалым ретінде даңққа бөленді. Оның «Астрономиялық таблицалар» атты әйгілі еңбегі Европада негізгі құрал болып бертінге дейін пайдаланылды. 1914 жылы Копенгагенде неміс тілінде қайта басылып шықты. Бізге жеткен екі кітабы «Үнді есебі бойынша қосу мен азайту кітабы» және «Әлджәбір мен уәлмикәбәлә есебі жөніндегі қысқаша кітап». Біріншісінде арифметика, екіншісінде алгебра баяндалады. Әл-Хорезми осы еңбектерінде алғаш рет ондық санау жүйесін орнықтырды. Ол үшін оған бүкіл адамзат рахмет айтуы керек. «Әл-джәбір» атауынан алгебра, «Әл-Хорезми» атауынан

алгорифм шықты. Ол заманнан бері бірнеше ғасырлар өтті. Алгебра көп салаға бөлініп кетті: сызықтық алгебра, векторлық алгебра, логикалық алгебра, көпмүшеліктер алгебрасы, Ли алгебрасы т.б. Алгебра бірталай ғылыми пәндердің – сандар теориясының, математикалық анализдің, өрістер, сақиналар теориясының, т.т. шығуына негіз болды.

Көшпенділер өмірінде кәделі астрономия мен кәделі математиканың элементтері пайдаланылды деп айтуға да болады. Темірқазық, Үркер,т.б. жұлдыздар атауы жай ғана атау емес, белгілі бір заңдылықты байқағаннан кейінгі қойылған атаулар болған. Ауа райының суытатынын, жылитынын аспан денелеріне қарап көшпенділер анықтаған.

Дифференциалдық және интегралдық есептеулердің негізін салғандардың ішінде Ньютон мен Лейбницті атап өтуге болады. Бірақ олар өз теорияларын анық фундаментке салып, толық дәлелдеп бермеді, сондықтан көптеген сын пікірлер естуге мәжбүр болды. Солай 17 ғасырдың аяғында біраз түсініксіз жайттар орын алды. Математикалық анализдің негізгі ядросы болған осы дифференциалдық және интегралдық есептеуге философ епископ Джордж Беркли көп қарсылық білдірді. “Осы ұғымдар дінге көп қауіп төндіреді” деп ұққан епископ Ньютон мен Лейбництің осал жерлерін ашып тұрып көрсетті. “Біресе шексіз аз шаманы бар деп есептейді, біресе оны жоғалтып жібереді, сонда ол шексіз аз шама қандай шама, ақылға сиымсыз, сөйте тұра өздері діннің қағидаларына сенімсіздікпен қарайды” деген пікірлер айтылған. Метафизикалық көзқараста болған ғалымдар өздерінің жаңа есептеулерімен жоғары математика, немесе диалектика заңдылықтары орындалатын математика белесін ашқандарын өздері де түсінбеген. Әдістері бойынша есептер дұрыс шығып отырған соң әр түрлі сын пікірлерге көп мән бере қоймаған. Кейіннен немістің классик философтары К. Маркс пен Ф. Энгельс өз еңбектерінде осы Ньютон мен Лейбництің жұмыстарына баға беріп, тоқтап өткен. Энгельстің “Диалектика природы” деген еңбегінде, Маркстің “Туынды және символдық дифференциалдық коэффициент” деген еңбектерінде осы мәселелер қарастырылған. Диалектиканың теріске шығаруды

теріске шығару заңдылығын Энгельс келесі түрде түсіндіреді. Мысалы, x шамасын алайық, сосын оны дифференциалдасақ dx шығады, бұл операция алғашқы шаманы теріске шығарып тұр. Енді интегралдасақ соңғы шыққан шаманы, келесі өрнекті аламыз: $\int dx = x + C$. Не көріп тұрмыз, соңғы теріске шығарғанды теріске шығарып тұрмыз. Ең соңында алғашқы шамадан көп шама алдық. "Диалектиканың заңдылықтары жоғары математикада өте жақсы көрінеді" деген Энгельс. Жерге себілген дәннен өсімдік, ал өсімдіктен көптеген дәндер қайта болатыны туралы мысалға осы математикалық мысал пара-пар сияқты.

Берклидің сындарына Эйлер жауап бергісі келді. Бірақ ол да толық дәлелдер келтіре алмады. Кейіннен математикалық анализдің негізін салуды Лагранж, Коши, Вейерштрасс, т.б. жалғастырды.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. М.: Мир, 1984.

2. *Абылайханов Т.Т., Абылайханов Т.Т.* Математика есептері. Алматы.: Рауан, 1995.

3. *О. Струве, Б. Линдс, Э. Пилланс.* Элементарная астрономия. М.: 1964.

4. *Қабдықайыр Қ.* Жоғары математика. Алматы.: 2005.

5. *Маркс К.* Производная и символический дифференциальный коэффициент //Под знаменем марксизма. 1933. N1. –С. 15-73.

6. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре и началам анализа за курс 11-летней школы с углубленным изучением математики. Алматы.: 1999.

7. *Рябушко А.П. и др.* Индивидуальные задания по высшей математике. Т.1. Минск.: Вышэйшая школа, 2002.

8. *Рябушко А.П. и др.* Индивидуальные задания по высшей математике. Т.2. Минск.: Вышэйшая школа, 2002.

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз.....3
Бірінші бөлім. Жоғары математика есептері.....4
1.1. Екінші және үшінші ретті анықтауыштар.....4
1.2. Матрицалар және оларға қолданылатын амалдар.....7
1.3. Анықтауыштарды теңдеулер жүйесін шешуге қолдану..8
1.4. Векторлар.....12
1.5. Жазықтықтар.....17
1.6. Кеңістіктегі түзулер.....21
1.7. Екінші ретті сызықтар мен беттер.....26
1.8. Функциялар. Шектер.....29
1.9. Дифференциалдық есептеу.....33
1.10. Интегралдық есептеу.....39
Екінші бөлім. Элементар математика есептері.....46
Жоғары математика есептерінің шығару жолдары мен жауаптары.....53
Элементар математика есептерінің шығару жолдары мен жауаптары.....91
Өзін өзі бақылау үшін тест тапсырмалары.....115
Қажетті формулалар.....118
Астрономиялық деректер.....121
Тарихи деректер.....122
Пайдаланылған әдебиеттер тізімі..... 127

Оқулық басылым

Р.Қ. Шакенова

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА
курсының алғашқы тарауларына
арналған есептер мен мысалдар

Оқу құралы

РББ бастығы *З.А. Ғұбайдулина*
Редакторы *А И. Бейсебаева*
Компьютерде беттеген *Л.Т. Қасжанова*

Басуға қол қойылды 11.03.2011 ж.
Баспаханалық қағаз №1. Шартты баспа табағы 7,0.
Көлемі 8,0 есепті-баспа табақ. Таралымы 500 дана. Тапсырыс №139
Пішіні 60 х 84 1/16. Бағасы келісім бойынша.

Қ.И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық университетінің басылымы,
Ғылыми-техникалық баспа орталығы.
Алматы қ-сы, Ладыгин 32

ISBN 978-601-228-276-4