

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН**

**Казахский национальный технический университет
имени К.И. Сатпаева**

Кафедра «Прикладная механика и основы конструирования машин»

Косболов С.Б., Бекенов Е.Т.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Алматы 2011

УДК 621.01
ББК 83
К 81

Косболов С.Б., Бекенов Е.Т.
Оптимальное проектирование. – Алматы:
ҚазАқпарат, 2011. – 164 с.

ISBN 978-601-06-0402-8

В учебном пособии излагаются методы исследования и проектирования современных машин в объеме предусмотренной программой курса «Оптимальное проектирование» для машиностроительных факультетов университетов. Основные разделы учебного пособия: исследование плоских механизмов, синтез исходных кинематических цепей, кинематический анализ плоских рычажных механизмов с применением векторного исчисления, синтез плоских рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей.

Разделы 4.2 – 4.6 написаны к.т.н. Бекеновым Е.Т., остальные разделы написаны д.т.н. Косболовым С.Б.

Учебное пособие предназначено для студентов, преподавателей и магистрантов машиностроительной специальности.

Библиогр. 4 наим.

Рекомендовано ученым советом Казахского национального технического университета имени К.И. Сатпаева

Рецензенты: д-р техн. наук Е.С. Темирбеков; д-р техн. наук, чл.-корр. НИА РК А.А. Джомартов, д-р техн. наук, заведующий кафедрой «Стандартизация, сертификация технологии машиностроительного производства» Казахского национального технического университета имени К.И. Сатпаева Т.М. Мендебаев.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Синтез исходных кинематических цепей	8
1.1 Постановка задач	8
1.2 Синтез исходной кинематической цепи с вращательными парами	13
1.3 Синтез модификации исходных кинематических цепей с вращательными парами	21
1.4 Синтез исходной кинематической цепи с поступательными парами	30
1.5 Синтез модификации исходных кинематических цепей с поступательными парами	40
2 Кинематический анализ плоских рычажных механизмов с применением векторного исчисления	50
2.1 Кинематический анализ плоских рычажных механизмов II класса	50
2.2 Кинематический анализ плоских рычажных механизмов III класса	54
2.3 Кинематический анализ плоских рычажных механизмов IV класса	58
3 Применение метода ψ – преобразования для решения анализа и синтеза плоских рычажных механизмов	64
3.1 О выборе метода поиска глобального экстремума	64
3.2 Сущность метода ψ – преобразования	65
3.3 Вычисление n – мерных интегралов с использованием оптимальных ЛП _τ – последовательностей	66
3.4 Алгоритм решения задач оптимизации при анализе и синтезе плоских рычажных механизмов	69
4 Синтез плоских рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей	73
4.1 Общая методика синтеза плоских рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей	73
4.2 Синтез передаточных механизмов	78
4.3 Синтез направляющих механизмов	87
4.4 Синтез перемещающих механизмов	94
4.5 Синтез механизма компенсации уточных нитей на многоцветном ткацком станке СТБ	99
4.6 Синтез перемещающего механизма IV класса с двумя ведущими звеньями	104
Литература	111

ВВЕДЕНИЕ

С фундаментальными исследованиями выдающегося математик и механик П. Л. Чебышева и Л. Бурместера связаны возникновение общей постановки задачи приближенного синтеза шарнирных механизмов и формирование его методологических основ. Впервые сформулировал задачу аналитического синтеза механизмов в виде задачи приближения функции выдающийся математик и механик П.Л. Чебышев [1–3]. П.Л. Чебышев впервые сформулировал задачу аналитического синтеза механизмов, разработал метод нахождения их параметров кинематической схемы, установил необходимые и достаточные условия наилучшего приближения. Используемый П.Л. Чебышевым метод наилучшего приближения при решении задач синтеза механизмов применяется для обеспечения равномерного приближения аппроксимирующей кривой к заданной кривой. Но при этом число заданных узлов интерполирования должно быть на единицу больше, чем число вычисляемых параметров кинематической схемы синтезированного механизма.

Однако у исследователей метод наилучшего приближения для синтеза механизмов получил ограниченное применение, так как отклонение, используемое в задачах синтеза механизмов, должно представляться в виде полиномов по Чебышевской системе функций. В большинстве случаев составление функции отклонения по Чебышеву не позволяет описать взаимосвязь относительных перемещений звеньев в рычажных механизмах.

Синтез механизмов по Чебышеву получил дальнейшее развитие в работах З.Ш. Блоха [4–5], И.И. Артоболевского [6–7], Н.И. Левитского [8], С.А. Черкудинова [9], М.В. Семенова [10], Я.Л. Геронимуса [11] и других авторов.

Дальнейшие усилия по развитию идеи Чебышева были направлены на исследования по отысканию наилучшего приближения через интерполяционный синтез механизмов в виде аналитического и графического способов. Аналитические процедуры синтеза механизмов, основанные на векторном методе составления уравнения замкнутости кинематической цепи, были предложены Е. П. Новодворским [12] и В.А. Зиновьевым [13], а графическое решение аналитическим уточнением параметров – в работе Б. И. Степанова [14].

Созданную теоретическую базу в области структурного, кинематического и динамического анализа, а также структурно – кинематического синтеза плоских рычажных механизмов, основанную на выше указанных работах, дополнили работы Л.В. Ассура [15], С. Н. Кожевникова [16], В.И. Доронина [17], Ю. Л. Саркисяна [18] и других. Эти исследования проводились только для механизмов II, III и изредка IV классов по классификации И.И. Артоболевского. Этим можно объяснить тот факт, что из огромного разнообразия механизмов в промышленности в основном применяются плоские рычажные механизмы II и III классов, хотя МВК, содержащие в своем

составе группы Ассура IV и более высоких классов, обладают широкими функциональными возможностями.

История возникновения и развития теории пространственных механизмов охватывает более столетия. В настоящее время число публикаций в этой области весьма велико. На основе исторического обзора и рассмотрения современной литературы авторским коллективом Ф.М. Диментбергом, Ю.Л. Саркисяном и М.К. Усковым сделан анализ современного состояния теории пространственных механизмов с низшими парами, включающий вопросы структуры, кинематики, кинетостатики, динамики и синтеза, а также применения теории пространственных механизмов для описания некоторых природных процессов [19].

Здесь приводим лишь обзор основных работ в области структурного, кинематического, динамического анализа и синтеза пространственных механизмов с целью показать современные направления развития теории; анализа и синтеза пространственных механизмов.

Методы кинематического анализа пространственных рычажных механизмов по приемам определения кинематических параметров разделяются на три вида: графический, графо-аналитический и аналитический. По мере становления науки теории механизмов и машин существенно менялись и содержание методов исследования движений звеньев механизмов.

Подробный анализ исследований по кинематическому анализу пространственных механизмов с использованием всевозможных аналитических методов описан в монографии П.А. Лебедева, выявлены их достоинства и недостатки, подразделены все методы на алгебраические и геометрические [20].

Задачи синтеза механизмов в основном развивались в двух направлениях: алгебраические методы аппроксимационного синтеза рычажных механизмов и методы синтеза рычажных механизмов на основе аппроксимационной кинематической геометрии. Развитие двух этих направлений синтеза механизмов оказало решающее влияние на формирование методов аппроксимационного синтеза рычажных механизмов, основы которой в наиболее полной форме изложены в монографии Ю.Л. Саркисяна [18].

Геометрические преобразования, связанные с кинематической инверсией пространственных механизмов, были разработаны и применены к задачам синтеза по положениям в работах К.С. Иванова, в которых разрабатывается метод синтеза на основе обращения движения. В качестве взвешенной разности принимается функция отклонения воспроизводимой кривой от заданной, получаемая после подстановки координат воспроизводящей точки механизма в выражение за данной функции взамен ее текущих координат. Причем координаты воспроизводящей точки механизма выражаются через его искомые параметры с помощью обращения движения механизма [21].

В связи с появлением современных высокоскоростных ЭВМ созданы оптимизационные методы синтеза механизмов, которые рассмотрены в работах Р.И. Ализаде, И.Г. Новрузбекова, Ф. Фрейденштейна, Дж. Сандора, Э.И. Пейсаха, Ю.Л. Саркисяна и других авторов.

Преимущества оптимизационных методов синтеза механизмов проявляются особенно в тех случаях, когда "классические" методы кинематического синтеза, основанные на кинематической геометрии или различных способах аппроксимации, неприменимы или малоэффективны. Успех поиска оптимального механизма во многом зависит от выбора исходного приближения, определяемого классическими методами, в то время как механизм, спроектированный классическими методами, часто требует оптимизации с учетом дополнительных условий синтеза.

В настоящее время разработаны основы анализа и синтеза ПМВК, включающие аналитические методы структурного, кинематического, кинетостатического и динамического анализа, а также структурно-кинематического синтеза. Структурно-кинематический синтез ПМВК проводится на основе кинематической инверсии, представляющей собой метод группового покоординатного спуска, т.е. метод нулевого порядка.

Для повышения скорости сходимости и точности вычисления необходимы градиентные методы первого и второго порядка.

Использование МВК в манипуляционных устройствах, по сравнению с существующими их антропоморфными конструкциями, повышает точность позиционирования и быстродействие вследствие большой жесткости конструкции, увеличивает грузоподъемность за счет распределения сил по контурным звеньям. Кроме того, в МВК имеется возможность реализации сложных программных траекторий одного или нескольких рабочих органов, что значительно упрощает системы управления манипуляционными роботами, созданными на базе МВК.

Фундаментальные исследования МВК с точки зрения единообразия их структурной классификации и методов исследования и проектирования изложены в монографии У.А. Джолдасбекова [22]. На основе метода развития изменяемых замкнутых контуров получены разновидности одно- и многоконтурных групп Ассура высоких классов. Выведены структурные формулы, определяющие соотношения между классом, порядком групп Ассура и количеством звеньев, кинематических пар, поводков и внешних шарниров бесповодковых контурных звеньев.

Проведена структурная классификация МВК, согласно которой все одноконтурные МВК с одним ведущим звеном сгруппированы в 3 вида:

1. МВК, которые методом замены ведущего звена сводятся к механизмам II и III классов;
2. Механизмы Ассура, т.е. механизмы, содержащие в своем составе группы Ассура k -го класса ($k \geq 4$), $(k - 1)$ -го порядка и с $(k - 2)$ — мя поводками, у которых не понижается класс методом замены ведущего звена;
3. МВК, которые методом замены ведущего звена сводятся к механизмам Ассура и наложенным к ним двухповодковым группам.

Для МВК второго и третьего видов в монографии разработаны графо-аналитические методы кинематического и кинетостатического анализа.

Качественное исследование и выявление функциональных возможностей МВК возможны при наличии численных и аналитических методов их анализа и синтеза.

Первыми научными исследованиями в области аналитической кинематики и кинетостатики сложных плоских рычажных механизмов, в том числе МВК, являются работы Н.Г. Бруевича, посвященные решению задач кинематики и кинетостатики этих механизмов на основе векторных исчислений.

В работах Джолдасбекова У.А., Байгунчекова Ж.Ж. изложен метод условных обобщенных координат, позволяющий определить число сборок и положения звеньев групп Ассура независимо от их класса и порядка. Данный метод основан на преобразовании групп Ассура высоких классов в механизмы II класса путем удаления некоторых звеньев и выбора условных ведущих звеньев за счет появившихся степеней свободы.

В последнее время методы синтеза МВК развиваются в том направлении, когда наряду со структурным синтезом проводится их кинематический синтез. Согласно этим методам сначала синтезируются многоподвижные незамкнутые или замкнутые кинематические цепи, названные исполнительными кинематическими цепями, которые воспроизводят заданные законы движения входного и выходного звеньев. Затем на движения звеньев исполнительных кинематических цепей налагаются связи при помощи звеньев с отрицательными степенями свободы, параметры синтеза которых также определяются. В результате выполнения этих этапов и заданных условий синтеза формируются МВК с определенной структурой и метрическими параметрами.

Один из основных подходов к кинематическому синтезу механизмов с низшими парами связан с именем немецкого ученого Л. Бурместера, и суть его заключается в следующем. При прохождении рассматриваемого тела через заданные положения соответствующие положения определенных точек и линий тела остаются на одной сфере, окружности, гиперболоиде вращения и других, легко механизированных кривых и поверхностях. Тогда, если наложить связи на движение тела, ведя указанные точки и прямые по соответствующим кривым и поверхностям, тело, очевидно, пройдет через заданные положения. Эти связи можно реализовать посредством простейших незамкнутых кинематических цепей. Описанный подход относится к геометрическим методам синтеза механизмов. Теоретическая основа этих методов – кинематическая геометрия конечно-удаленных положений твердого тела, известная в случае плоскопараллельного движения, как теория Бурместера.

Теория синтеза плоских механизмов постоянно развивается и совершенствуется. Предлагаются новые методы синтеза, решаются новые задачи, отражающие требования передовой современной практики конструирования машин и механизмов.

1 Синтез исходных кинематических цепей

В настоящей главе рассмотрены задачи кинематического синтеза четырехзвенных исходных кинематических цепей (ИКЦ), возникающие при проектировании любых плоских рычажных механизмов, включая механизмы высоких классов с заданными законами движения входного и выходных звеньев.

Решение задачи основано на задании плоскопараллельного движения двух твердых тел относительно третьего неподвижного с использованием теории аппроксимационной кинематической геометрии.

1.1 Постановка задач

Пусть заданы N конечноудаленных положений двух плоскостей Q_1 и Q_2 (сечений твердых тел)

$$Q_1(X_A, Y_A, \varphi_i), \quad Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, \psi_i) \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1.1)$$

относительно неподвижной плоскости Q . Жестко свяжем с плоскостями Q , Q_1 и Q_2 соответственно прямоугольные системы координат OXY , Ax_y и $D_i x' y'$. Плоскость Q_1 совершает вращательное движение вокруг точки A с координатами X_A, Y_A , определяемое углом поворота φ , а плоскость Q_2 – плоскопараллельное движение, определяемое траекторией ее точки D с координатами X_D, Y_D и углом поворота ψ .

Чтобы получить согласованное движение двух подвижных плоскостей Q_1 и Q_2 необходимо наложить на них геометрические связи, что можно сделать двумя способами:

1) в виде двухшарнирного звена, в результате чего получим четырехзвенную ИКЦ $ABCD$ с вращательными парами, имеющую три степени свободы и представленную на рисунок 2.1, таблица 1.1. (Здесь и далее номера рисунков из таблиц 1.1, и 1.3 будут соответствовать номеру строки и столбца таблицы, на пересечении которых расположен рисунок).

Необходимо определить положения точек $A \in Q$, $B \in Q_1$ и $C \in Q_2$ из условия обеспечения заданных законов движения подвижных плоскостей.

2) в виде кулисной группы, причем направляющая кулисы связана с одной плоскостью, а камень кулисы шарнирно связан с другой плоскостью. В результате получим два варианта открытой четырехзвенной кинематической цепи ACD и ABD с вращательными и поступательными парами, имеющей три степени свободы (рисунок 2.1 соответственно таблица 1.2 и 1.3).

Необходимо определить коэффициенты уравнения прямой, положения шарнира B или C на соответствующих плоскостях Q_1 или Q_2 и шарнира $A \in Q$.

Определение линейных размеров ИКЦ $ABCD$, ACD и ABD сведем к следующим трем задачам:

Таблица 1.1

	1	2
1	$x_B = y_B = 0$ x_A, y_A, R, x_C, y_C 	$x_B = y_B = 0, x_{A_i}, y_{A_i}$ x_C, y_C, R
2	$x_A, y_A, R, x_B, y_B, x_C, y_C$ 	x_{A_i}, y_{A_i} x_B, y_B, R, x_C, y_C
3	$x_C = y_C = 0$ x_A, y_A, x_B, y_B, R 	$x_C = y_C = 0, x_{A_i}, y_{A_i}$ x_B, y_B, R

Таблица 1.2

	1		2	
	$a=c=0$	x_A, y_A, x_C, y_C	$a=c=0$	x_C, y_C
1				
2	x_A, y_A, a, c, x_C, y_C		x_{A_i}, y_{A_i}	a, c, x_C, y_C
3	$x_C = y_C = 0$	x_A, y_A, a, c	$x_C = y_C = 0, x_{A_i}, y_{A_i}$	a, c

1⁰. Требуется найти на плоскости Q , Q_1 и Q_2 соответственно такие точки $A(X_A, Y_A)$, $B(x_B, y_B)$, и $C(x'_C, y'_C)$, чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях плоскостей Q_1 и Q_2 , определяемых соотношениями (1.1), мало отличались от некоторой постоянной величины R .

Переменные координаты X_{Bi}, Y_{Bi} точки B и X_{Ci}, Y_{Ci} точки C в системе OXY выражаются через их постоянные координаты x_B, y_B и x'_C, y'_C в системах Ax и $Dx'y'$ известными формулами линейного преобразования:

$$\begin{bmatrix} X_{Bi} \\ Y_{Bi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & X_A \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & Y_A \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

$$\begin{bmatrix} X_{Ci} \\ Y_{Ci} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & -\sin \psi_i & X_{Di} \\ \sin \psi_i & \cos \psi_i & Y_{Di} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_C \\ y'_C \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

Поскольку мы ищем здесь связь между двумя подвижными плоскостями Q_1 и Q_2 в виде двухшарнирного звена, то эту задачу будем называть задачей синтеза исходных кинематических цепей ИКЦ с вращательными парами.

В данной задаче имеется семь неизвестных параметров. Это координаты X_A, Y_A точки $A \in Q$, координаты x_B, y_B , точки $B \in Q_1$, координаты x'_C, y'_C , точки $C \in Q_2$ и расстояние R между точками B и C .

2⁰. Требуется найти на плоскости Q точку $A(X_A, Y_A)$, на плоскости Q_1 найти прямую

$$ax + by + c = 0 \quad (1.4)$$

и на плоскости Q_2 точку $C(x'_C, y'_C)$ так, чтобы траектория точки $C(x'_C, y'_C)$ в ее движении относительно плоскости Q_1 приближалось к искомой прямой (1.4).

Уравнение прямой (1.4) на неподвижной плоскости Q_1 определяется по известным формулам линейного преобразования

$$a[(X - X_A)\cos \varphi_i + (Y - Y_A)\sin \varphi_i] + b[-(X - X_A)\sin \varphi_i + (Y - Y_A)\cos \varphi_i] + c = 0 \quad (1.5)$$

В этой задаче также имеется семь неизвестных параметров. Это коэффициенты уравнения прямой a, b, c , координаты x'_C, y'_C точки $C \in Q_2$ и координаты X_A, Y_A точки $A \in Q$.

При решении данной задачи в такой формулировке получим открытую ИКЦ ACD с вращательными и поступательными парами (рисунок 2.1, таблицы 1.2).

3⁰. Требуется найти на плоскости Q точку $A(X_A, Y_A)$, на плоскости Q_1 точку $B(x_B, y_B)$ и на плоскости Q_2 прямую

$$ax + by + c = 0 \quad (1.6)$$

так, чтобы траектория точки $B_i(x_B, y_B)$ в ее движении относительно плоскости Q_2 приближалась к искомой прямой (1.6) (рисунок 2.1, таблица 1.3).

Уравнение прямой (1.6) на неподвижной плоскости Q определяется по известным формулам линейного преобразования

$$a[(X - X_{D_i})\cos\psi_i + (Y - Y_{D_i})\sin\psi_i] + b[-(X - X_{D_i})\sin\psi_i + (Y + Y_{D_i})\cos\psi_i] + c = 0 \quad (1.7)$$

Здесь тоже имеется семь неизвестных параметров. Это коэффициенты уравнения прямой a, b, c , координаты x_B, y_B точки $B \in Q_1$ и координаты X_A, Y_A точки $A \in Q$.

Поскольку во второй и третьей задачах связь подвижными плоскостями ищется в виде кулисной пары, то эти задачи будем называть задачами синтеза ИКЦ с поступательными парами, хотя в ИКЦ наряду с поступательными парами имеются и вращательные.

Рассмотрим решения этих задач на основе аппроксимационной кинематической энергии.

1.2 Синтез ИКЦ с вращательными парами

Введем взвешенную разность для i -го положения плоскостей вида

$$\Delta q_i = \left| \overline{B_i C_i} \right|^2 - R^2 = (X_{C_i} - X_{B_i})^2 + (Y_{C_i} - Y_{B_i})^2 - R^2, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.8)$$

Взвешенная разность Δq_i является функцией семи параметров $X_A, Y_A, x_B, y_B, R, x'_C, y'_C$ (рисунок 2.1, таблица 1.1). Группируя эти параметры по три с общим параметром R , взвешенную разность можно представить в трех различных формах. Выражая Δq_i через X_A, Y_A и R , получим первую форму в виде

$$\Delta q_i^{(1)} = (\tilde{X}_{A_i} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A)^2 - R^2, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.9)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{A_i} \\ \tilde{Y}_{A_i} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & 0 \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \psi_i & -\sin \psi_i & X_{Di} \\ \sin \psi_i & \cos \psi_i & Y_{Di} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_C \\ y'_C \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Составляя сумму квадратов взвешенной разности для N положений, имеем

$$S = \sum_{i=1}^N \left[\Delta_{qi}^{(1)} \right]^2 \quad (1.11)$$

Необходимые условия минимуму суммы по переменным X_A, Y_A и R

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (1.12)$$

с учетом (1.9) и (1.11) дают следующую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \cdot (\tilde{X}_{A_i} - X_A) &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \cdot (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A) &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \cdot R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Исключим из рассмотрения тривиальной случай $R = 0$. Тогда из последней строки системы (1.13) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} = 0 \quad (1.14)$$

С учетом (1.14) система уравнений (1.13) принимает вид

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \cdot \tilde{X}_{A_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \cdot \tilde{Y}_{A_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} = 0 \quad (1.15)$$

Подставляя выражения для $\Delta_{qi}^{(1)}$ из (1.9) в систему (1.15), получим

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[2\tilde{X}_{A_i}^2 X_A + 2\tilde{X}_{A_i} \tilde{Y}_{A_i} Y_A + \tilde{X}_{A_i} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2) \right] &= \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{A_i}^2 + \tilde{Y}_{A_i}^2) \tilde{X}_{A_i}, \\ \sum_{i=1}^N \left[2\tilde{X}_{A_i} \tilde{Y}_{A_i} X_A + 2\tilde{Y}_{A_i}^2 Y_A + \tilde{Y}_{A_i} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2) \right] &= \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{A_i}^2 + \tilde{Y}_{A_i}^2) \tilde{Y}_{A_i}, \\ \sum_{i=1}^N \left[2\tilde{X}_{A_i} X_A + 2\tilde{Y}_{A_i} Y_A + (R^2 - X_A^2 - Y_A^2) \right] &= \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{A_i}^2 + \tilde{Y}_{A_i}^2). \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Система (1.16) линейна относительно переменных X_A, Y_A и $H_1 = \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2)$, поэтому целесообразно перейти к этим переменным, если существует невырожденное преобразование между старыми и новыми переменными. Якобиан такого преобразования

$$\left\| \frac{d(X_A, Y_A, H_1)}{d(X_A, Y_A, R)} \right\| = R$$

отличен от нуля при $R \neq 0$, и, следовательно, система (1.16) может быть записана в виде:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i} \tilde{Y}_{A_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i} \tilde{Y}_{A_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{A_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{A_i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{A_i}^2 \tilde{X}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{A_i}^2 \tilde{Y}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{A_i}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

где

$$R_{A_i}^2 = \tilde{X}_{A_i}^2 + \tilde{Y}_{A_i}^2$$

Система (1.17) позволяет определить неизвестные X_A, Y_A и R при заданных значениях переменных x_B, y_B, x'_C, y'_C , т.е. описывает некоторое соответствие между точками B, C , и A плоскостей Q_1, Q_2 , и Q .

Решение этой системы уравнений по правилу Крамера может быть записано в виде

$$(X_A, Y_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{X_A}, D_{Y_A}, D_{H_1}) \text{ при } D_1 \neq 0 \quad (1.18)$$

откуда

$$R = \left(X_A^2 + Y_A^2 + 2H_1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Выражая Δ_{q_i} через x_B, y_B и R получим вторую форму в виде

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = \left(\tilde{X}_{B_i} - x_B \right)^2 + \left(\tilde{Y}_{B_i} - y_B \right)^2 - R^2, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.19)$$

где

$$\begin{bmatrix} X_{B_i} \\ Y_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & 0 \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\psi_i - \varphi_i) & -\sin(\psi_i - \varphi_i) & 0 \\ \sin(\psi_i - \varphi_i) & \cos(\psi_i - \varphi_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_C \\ y'_C \\ 1 \end{bmatrix}$$

Аналогично условия минимума суммы по переменным x_B, y_B и R .

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (1.20)$$

сводятся к системе линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} \tilde{Y}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} \tilde{Y}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{B_i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{B_i}^2 \tilde{X}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{B_i}^2 \tilde{Y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{B_i}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{B_i}^2 &= \tilde{X}_{B_i}^2 + \tilde{Y}_{B_i}^2, \\ H_2 &= \frac{1}{2} (R^2 - x_B^2 - y_B^2) \end{aligned}$$

Выражая Δ_{q_i} через x'_C, y'_C и R , получим третью форму в виде

$$\Delta_{q_i}^{(3)} = \left(\tilde{X}_{C_i} - x'_C \right)^2 + \left(\tilde{Y}_{C_i} - y'_C \right)^2 - R^2, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.22)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{C_i} \\ \tilde{Y}_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \psi_i & \sin \psi_i & 0 \\ -\sin \psi_i & \cos \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\varphi_i - \psi_i) & -\sin(\varphi_i - \psi_i) & 0 \\ \sin(\varphi_i - \psi_i) & \cos(\varphi_i - \psi_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Условия минимума суммы по переменным x'_C, y'_C и R

$$\frac{\partial S}{\partial x'_C} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial y'_C} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0. \quad (1.23)$$

сводятся к системе линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i} \tilde{Y}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i} \tilde{Y}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{C_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{C_i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_C \\ y'_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{C_i}^2 \tilde{X}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{C_i}^2 \tilde{Y}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{C_i}^2 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{C_i}^2 &= \tilde{X}_{C_i}^2 + \tilde{Y}_{C_i}^2 \\ H_3 &= \frac{1}{2} (R^2 - x_c'^2 - y_c'^2) \end{aligned}$$

Чтобы получить необходимые условия минимума суммы (1.11) по всем семи переменным

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0, \quad (j = X_A, Y_A, R, x_B, y_B, x'_C, y'_C) \quad (1.25)$$

следует рассмотреть совместно системы уравнений (1.12), (1.20) и (1.23). Исключая первые три неизвестные X_A, Y_A и R на основе системы уравнений (1.17), придем к системе четырех уравнений с четырьмя неизвестными x_B, y_B, x'_C, y'_C , которую удобно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial x'_c} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(3)}}{\partial y'_c} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

На основе выражений (1.19) и (1.22) имеем

$$\frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} = -2\tilde{X}_{B_i}, \quad \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} = -2\tilde{Y}_{B_i}, \quad \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_c} = -2\tilde{X}_{c_i}, \quad \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_c} = -2\tilde{Y}_{c_i}.$$

Подставляя эти выражения и значения $\Delta_{q_i}^{(2)}$ из (1.9) с учетом (1.16), (1.17) в систему (1.26), получим

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} X_A + \tilde{Y}_{A_i} Y_A + H_1 - \frac{1}{2} R_{A_i}^2 \right] \cdot \tilde{X}_{B_i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} X_A + \tilde{Y}_{A_i} Y_A + H_1 - \frac{1}{2} R_{A_i}^2 \right] \cdot \tilde{Y}_{B_i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} X_A + \tilde{Y}_{A_i} Y_A + H_1 - \frac{1}{2} R_{A_i}^2 \right] \cdot \tilde{X}_{C_i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} X_A + \tilde{Y}_{A_i} Y_A + H_1 - \frac{1}{2} R_{A_i}^2 \right] \cdot \tilde{Y}_{C_i} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Подставляя значения X_A , Y_A и H_1 из (1.18) в (1.27) и предполагая, что $D_1 \neq 0$, найдем

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N [\tilde{X}_{A_i} D_{X_A} + \tilde{Y}_{A_i} D_{Y_A} + D_{H_1} - \frac{1}{2} R_{A_i}^2 D_1] \cdot \tilde{X}_{B_i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N [\tilde{X}_{A_i} D_{X_A} + \tilde{Y}_{A_i} D_{Y_A} + D_{H_1} - \frac{1}{2} R_{A_i}^2 D_1] \cdot \tilde{Y}_{B_i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N [\tilde{X}_{A_i} D_{X_A} + \tilde{Y}_{A_i} D_{Y_A} + D_{H_1} - \frac{1}{2} R_{A_i}^2 D_1] \cdot \tilde{X}_{C_i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N [\tilde{X}_{A_i} D_{X_A} + \tilde{Y}_{A_i} D_{Y_A} + D_{H_1} - \frac{1}{2} R_{A_i}^2 D_1] \cdot \tilde{Y}_{C_i} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Уравнения системы (1.28) по виду совпадают с двумя уравнениями девятой степени относительно двух неизвестных параметров x_B, y_B . точки $B \in e$, приведенными в работе [38]. В отличие от указанной работы, в данном случае, имеем систему из четырех уравнений относительно четырех неизвестных x_B, y_B, x'_C, y'_C .

Следовательно, каждое уравнение этой системы (1.28) есть алгебраическое уравнение девятой степени относительно x_B, y_B, x'_C, y'_C откуда общее число решений равно $9^4=6561$, среди которых число вещественных равно $5^4=625$ [38]. Однако эти решения могут соответствовать как точкам минимума, так и точкам максимума, седловым и гребневым точкам поверхности $S=S(x_B, y_B, x'_C, y'_C)$. Для установления вида экстремальной точки необходимо дополнительно исследовать матрицу вторых производных функций S . Однако, такой путь определения точек минимума функции S вряд ли целесообразно использовать, так как решение системы нелинейных уравнений (1.28) само по себе представляет очень трудоемкую задачу. Гораздо эффективнее применение приводимого ниже алгоритма поиска минимума функции S , основанного на следующей теореме.

Теорема. Если $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}$ минимальные значения суммы S , определяемые для N положений соответствующих пар точек

$$\begin{aligned} \{B^{(0)}(x_B^{(0)}, y_B^{(0)}) \in Q_1, C^{(0)}(x'_c{}^{(0)}, y'_c{}^{(0)}) \in Q_2\}, \\ \{A^{(1)}(x_A^{(1)}, y_A^{(1)}) \in Q, C^{(0)}(x'_c{}^{(0)}, y'_c{}^{(0)}) \in Q_2\}, \\ \{A^{(1)}(x_A^{(1)}, y_A^{(1)}) \in Q, B^{(1)}(x_B^{(1)}, y_B^{(1)}) \in Q_1\} \end{aligned}$$

таких, что

$$\begin{aligned}
S_1^{(1)} &= \min_{X_A, Y_A, R} S[X_A, Y_A, R, x_B^{(0)}, y_B^{(0)}, x_C^{(0)}, y_C^{(0)}] = S[X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, R_1^{(1)}, x_B^{(0)}, y_B^{(0)}, x_C^{(0)}, y_C^{(0)}], \\
S_2^{(1)} &= \min_{X_B, Y_B, R} S[X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, R, x_B, y_B, x_C^{(0)}, y_C^{(0)}] = S[X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, R_2^{(1)}, x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, x_C^{(0)}, y_C^{(0)}], \\
S_3 &= \min_{x_C', y_C', R} S[X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, R, x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, x_C', y_C'];
\end{aligned}$$

то

$$S_3^{(1)} \leq S_2^{(1)} \leq S_1^{(1)}.$$

Доказательство. Система (1.17) при $D_1 \neq 0$ определяет для произвольных точек $B^{(0)} \in Q_1$ и $C^{(0)} \in Q_2$ единственное решение $(X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, R_1^{(1)})$, соответствующее минимуму суммы S по переменным X_A, Y_A и R [55]. Поэтому для заданной пары $(B^{(0)}, C^{(0)})$ справедливо равенство

$$S_1^{(1)} = \min_{X_A, Y_A, R} S[X_A, Y_A, R, x_B^{(0)}, y_B^{(0)}, x_C^{(0)}, y_C^{(0)}] = S[X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, R_1^{(1)}, x_B^{(0)}, y_B^{(0)}, x_C^{(0)}, y_C^{(0)}].$$

Аналогично, система (1.21) при $D_2 \neq 0$ определяет для точек $A^{(1)} \in Q$ и $C^{(0)} \in Q_2$ единственное решение $(X_B^{(1)}, Y_B^{(1)}, R_2^{(1)})$, соответствующее минимуму суммы S по переменным x_B, y_B и R :

$$\begin{aligned}
S_2 &= S[X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, R_2^{(1)}, x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, x_C^{(0)}, y_C^{(0)}] = \min_{X_B, Y_B, R} S[X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, R, x_B, y_B, x_C^{(0)}, y_C^{(0)}] \leq \\
&\leq \min_{X_B, Y_B} S_1^{(1)}[X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, R_1^{(1)}, x_B, y_B, x_C^{(0)}, y_C^{(0)}] \leq S_1^{(1)}
\end{aligned}$$

Система (1.24) при $D_3 \neq 0$ определяет для точек $A^{(1)} \in Q$, $B^{(1)} \in Q_1$ единственное решение $(x_C^{(1)}, y_C^{(1)}, R_3^{(1)})$, соответствующее минимуму суммы S по переменным x_C', y_C' и R :

$$\begin{aligned}
S_3 &= S[X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, R_3^{(1)}, x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, x_C^{(1)}, y_C^{(1)}] = \min_{x_C', y_C', R} S[X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, R, x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, x_C', y_C'] \leq \\
&\leq \min_{x_C', y_C'} S_2^{(1)}[X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, R_2^{(1)}, x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, x_C', y_C'] \leq S_2^{(2)}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_3^{(1)} \leq S_2^{(1)} \leq S_1^{(1)}.$$

Алгоритм минимизации функции S :

1. Задаемся произвольно точками $B^{(0)} \in Q_1$, $C^{(0)} \in Q_2$ и проверяем условие $D_1 \neq 0$.
2. Решаем систему линейных уравнений (1.17) и определяем $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, R_1^{(1)}$.
3. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q$, $C^{(0)} \in Q_2$ и проверяем условие $D_2 \neq 0$.
4. Решаем систему уравнений (1.21) и определяем $x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, R_2^{(1)}$.
5. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q$, $B^{(1)} \in Q_2$ и проверяем условие $D_3 \neq 0$.
6. Решаем систему уравнений (1.24) и определяем $x'_C{}^{(1)}, y'_C{}^{(1)}, R_3^{(1)}$.
7. Далее циклически повторяем шаги 1-6, принимая
 $A^{(i)} = A^{(i+1)}, B^{(i)} = B^{(i+1)}, C^{(i)} = C^{(i+1)}, i = 0, 1, 2, \dots$

При этом получим убывающую последовательность значений целевой функции $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, S_3^{(2)}, S_1^{(3)}, \dots$, имеющую предел, равный значению функции S в точке локального минимума.

Итерационный процесс поиска минимума функции S можно завершить при выполнении неравенств

$$|R^{(k)} - R^{(k-1)}| \leq \varepsilon, |X_A^{(k)} - X_A^{(k-1)}| \leq \varepsilon, |Y_A^{(k)} - Y_A^{(k-1)}| \leq \varepsilon,$$

где ε – задаваемая погрешность.

Следует отметить, что такой алгоритм применим для решения задачи синтеза ИКЦ $ABCD$ с вращательными парами лишь при отсутствии каких-либо ограничений на ее параметры.

В результате решения данной задачи определяются точки

$$A(X_A, Y_A) \in Q, \quad B(x_B, y_B) \in Q_1, \quad C(x'_C, y'_C) \in Q_2$$

такие, что совмещая с ними плоские шарниры, получаем искомую ИКЦ в виде открытой цепи $ABCD$ с тремя степенями свободы (рисунок 2.1, таблица 1.1).

Фиксируя или задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, можно получить различные модификации ИКЦ (таблица 1.1).

1.3 Синтез модификаций ИКЦ с вращательными парами

Рассмотрим решение задачи синтеза ИКЦ при различных комбинациях заданных и искомых параметров ИКЦ.

1. Пусть заданы координаты X_{A_i}, Y_{A_i} точки A и угол поворота φ_i плоскости Q_1 и координаты X_{D_i}, Y_{D_i} точки D и угол поворота ψ_i плоскости Q_2 .

Требуется найти на плоскости Q_1 и Q_2 соответственно такие точки $B(x_B, y_B)$ и $C(x'_C, y'_C)$, чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях плоскостей Q_1 и Q_2 , определяемых соотношениями (1.1), мало отличались от некоторой постоянной величины R .

Задача сводится к определению пяти параметров x_B, y_B, x'_C, y'_C и R открытой трехзвенной ИКЦ $ABCD$ с вращательными парами (рисунок 2.2, таблица 2.1), т.к. в выражении (1.2) координаты X_A, Y_A точки A заданы.

Для решения задачи в этом случае взвешенную разность Δq_i , определяемую равенством (1.8), можно представить в двух различных формах относительно x_B, y_B, R и x'_C, y'_C, R . Выражая Δq_i через x_B, y_B и R , получим первую форму

$$\Delta^{(1)} q_i = (\tilde{X}_{B_i} - x_B)^2 + (\tilde{Y}_{B_i} - y_B)^2 - R^2, \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1.29)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{B_i} \\ \tilde{Y}_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_{A_i} \\ Y_{D_i} - Y_{A_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\psi_i - \varphi_i) & -\sin(\psi_i - \varphi_i) & 0 \\ \sin(\psi_i - \varphi_i) & \cos(\psi_i - \varphi_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_C \\ y'_C \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.30.)$$

Составляя сумму квадратов взвешенной разности для N положений, имеем

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta^{(1)} q_i]^2. \quad (1.31)$$

Необходимые условия минимума суммы по переменным x_B, y_B и R

$$\frac{dS}{dx_B} = 0, \quad \frac{dS}{dy_B} = 0, \quad \frac{dS}{dR} = 0 \quad (1.32)$$

с учетом (1.29) и (1.31) (в предположении, что $R \neq 0$) можно получить систему уравнений

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} \tilde{Y}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} \tilde{Y}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{B_i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{B_i}^2 \tilde{X}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{B_i}^2 \tilde{Y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{B_i}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

где

$$H_2 = \frac{1}{2}(R^2 - x_B^2 - y_B^2) \quad (1.34)$$

$$\tilde{R}_{B_i}^2 = \tilde{X}_{B_i}^2 + \tilde{Y}_{B_i}^2. \quad (1.35)$$

Система (1.33) позволяет определить неизвестные x_B, y_B и R при заданных значениях переменных x_C, y_C , т.е. описывает некоторое соответствие между точками B и C плоскостей Q_1 и Q_2 .

Решение системы уравнений (1.33) по правилу Крамера может быть записано в виде

$$(x_B, y_B, H_2) = \frac{1}{D}(D_{x_B}, D_{y_B}, D_{H_2}), \quad (D \neq 0) \quad (1.36)$$

откуда

$$R^2 = (x_B^2 + y_B^2 + 2H_2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.37)$$

Рассмотрим движение подвижной плоскости Q_1 относительно Q_2 . Взвешенную разность Δq_i для данного случая можно представить в другой форме через x'_C, y'_C и R

$$\Delta^{(2)} q_i = (\tilde{X}_{C_i} - x'_{C_i})^2 + (\tilde{Y}_{C_i} - y'_{C_i})^2 - R^2, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.38)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{C_i} \\ \tilde{Y}_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \psi_i & \sin \psi_i & 0 \\ -\sin \psi_i & \cos \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{A_i} - X_{D_i} \\ Y_{A_i} - Y_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\psi_i - \varphi_i) & -\sin(\psi_i - \varphi_i) & 0 \\ \sin(\psi_i - \varphi_i) & \cos(\psi_i - \varphi_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

условия минимума суммы по переменным по x'_C, y'_C и R

$$\frac{dS}{dx'_C} = 0, \quad \frac{dS}{dy'_C} = 0, \quad \frac{dS}{dR} = 0 \quad (1.40)$$

сводятся к системе линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i} \tilde{Y}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i} Y_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{C_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{C_i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_C \\ y'_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{C_i}^2 \tilde{X}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{C_i}^2 Y_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{C_i}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.41)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{C_i}^2 &= \tilde{X}_{C_i}^2 + \tilde{Y}_{C_i}^2 \\ H_3 &= \frac{1}{2}(R^2 - x_C'^2 - y_C'^2) \end{aligned}$$

Система (1.41) позволяет определить неизвестные x_C, y_C и R при заданных значениях переменных x_B, y_B , т.е. описывает некоторое соответствие между точками B и C плоскостей Q_1 и Q_2 .

Для установления однозначного соответствия между решениями, получаемыми при рассмотрении движения плоскостей Q_2 относительно плоскости Q_1 и, наоборот, плоскости Q_1 относительно Q_2 , необходимо минимизировать функцию $S(x_B, y_B, R, x'_C, y'_C)$, пяти переменных.

Необходимыми условиями минимума суммы S являются

$$\frac{dS}{dj} = 0, (j = x_B, y_B, R, x'_C, y'_C) \quad (1.42)$$

Для получения системы (1.42) следует рассмотреть совместно системы уравнений (1.33) и (1.41). Первые три из условий стационарности (1.42) приводят к системе (1.33), а последние два условия (1.42) представим следующим образом:

$$\sum_{i=1}^N \Delta q_i^{(1)} \frac{d\Delta q_i^{(2)}}{dx'_C} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \Delta q_i^{(1)} \frac{d\Delta q_i^{(2)}}{dy'_C} = 0 \quad (1.43)$$

Подставляя значения $\Delta q_i^{(1)}$ из (1.29) и вычисляя на основе (1.38) частные производные

$$\frac{d\Delta q_i^{(2)}}{dx'_C} = -2\tilde{X}_{C_i}, \quad \frac{d\Delta q_i^{(2)}}{dy'_C} = -2\tilde{Y}_{C_i},$$

приведем систему (1.43) к виду

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{B_i} \cdot x_B + \tilde{Y}_{B_i} \cdot y_B + H_2 - \frac{1}{2} \tilde{R}_{B_i}^2 \right] \cdot \tilde{X}_{C_i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{B_i} \cdot x_B + \tilde{Y}_{B_i} \cdot y_B + H_2 - \frac{1}{2} \tilde{R}_{B_i}^2 \right] \cdot \tilde{Y}_{C_i} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

Подставляя в (1.44) значения неизвестных x_B, y_B, H_2 из (1.36), получим

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{B_i} \cdot D_{x_B} + \tilde{Y}_{B_i} \cdot D_{y_B} + D_{H_2} - \frac{1}{2} \tilde{R}_{B_i}^2 \cdot D \right] \cdot \tilde{X}_{C_i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{B_i} \cdot D_{x_B} + \tilde{Y}_{C_i} \cdot D_{y_B} + D_{H_2} - \frac{1}{2} \tilde{R}_{B_i}^2 \cdot D \right] \cdot \tilde{Y}_{C_i} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

Преобразуя систему (1.45) с учетом (1.29), (1.36), и (1.39) убеждаемся, что это система двух уравнений девятой степени относительно, что это система двух уравнений девятой степени относительно x'_C, y'_C . В данном случае, в отличие от работы [38] рассматривается относительное движение двух подвижных плоскостей Q_1 и Q_2 . И, естественно, необходимо дополнительно учитывать параметры $X_{A_i}, Y_{A_i}, \varphi_i$ движения плоскости Q_1 . Среди решений этой системы число вещественных корней равно $5^2 = 25$. Поскольку нас интересуют лишь точки минимума функции $S(x_B, y_B, R, x'_C, y'_C)$, то для нахождения минимума можно использовать алгоритм, приведенный в п. 1.2, учитывая, что параметры X_A и Y_A заданы или итеративный метод, основанный на кинематической инверсии [38].

В зависимости от характера заданных движений плоскостей $Q_1(X_{A_i}, Y_{A_i}, \varphi_i)$ и $Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, \psi_i)$, ($i = \overline{1, N}$) приходим к следующим механизмам и кинематическим цепям:

а) Если точки $A(X_A, Y_A)$ и $D(X_D, Y_D)$ фиксированы на плоскости Q , то в результате синтеза ИКЦ получим передаточный шарнирный четырехзвенник $ABCD$. Здесь следует отметить, что при данном подходе нет необходимости прибегать к использованию обращения движения, т.е. производить перестановку углов φ_0, φ , и ψ_0, ψ , принимая за φ и ψ соответственно углы между линией AD и осями AX и Dx , жестко связанные с AB и CD под углами φ_0 и ψ_0 , после чего определить положение системы $Dx'y'$ и Axy .

б) Если $\psi_i = const$ и точка $D(X_{D_i}, Y_{D_i})$ движется по прямой, то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ с поступательной парой. Если при этом еще и $\varphi_i = const$, а точка $A(X_A, Y_A)$ движется по прямой, то получим кинематическую цепь $ABCD$ с двумя поступательными парами.

II. Пусть заданы координаты $x'_C = y'_C = 0$ точки $C(x'_C, y'_C) \in Q_2$, координаты X_{D_i}, Y_{D_i} точки D плоскости Q_2 и угол поворота φ плоскости Q_1 , а искомыми параметрами являются: X_A, Y_A, x_B, y_B и R .

Требуется найти на плоскости Q и Q_1 соответственно такие точки $A(X_A, Y_A)$ и $B(x_B, y_B)$, чтобы расстояние между точками B и D во всех положениях мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

Задача сводится к синтезу разомкнутой трехзвенной цепи ABD по пяти неизвестным параметрам X_A, Y_A, x_B, y_B и R (рисунок 3.1, таблица 1.1).

Для решения задачи взвешенную разность (1.8) с учетом формул (1.2) и (1.3) можно представить в двух различных формах с общим параметром R . Выражая Δq_i через X_A, Y_A и R имеем

$$\Delta q_i^{(1)} = (\tilde{X}_{A_i} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A)^2 - R^2, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.46)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{A_i} \\ \tilde{Y}_{A_i} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & X_{D_i} \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & Y_{D_i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Необходимые условия минимума суммы по переменным X_A, Y_A и R

$$\frac{dS}{dx_A} = 0, \quad \frac{dS}{dy_A} = 0, \quad \frac{dS}{dR} = 0 \quad (1.47)$$

сводятся к системе линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i} \tilde{Y}_{A_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i} \tilde{Y}_{A_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{A_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{A_i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{A_i}^2 \tilde{X}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{A_i}^2 \tilde{Y}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{A_i}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.48)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{A_i}^2 &= \tilde{X}_{A_i}^2 + \tilde{Y}_{A_i}^2 \\ H_1 &= \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2) \end{aligned}$$

Система (1.48) позволяет определить неизвестные параметры X_A , Y_A и R при заданных значениях переменных x_B , y_B , т.е. описывает соответствие между точками B и A плоскостей Q_1 и Q .

Решение системы (1.48) по правилу Крамера может быть записано в виде

$$(X_A, Y_A, H_1) = \frac{1}{D} (D_{X_A}, D_{Y_A}, D_{H_1}) \text{ при } D_1 \neq 0, \quad (1.49)$$

откуда

$$R = (X_A^2 + Y_A^2 + 2H_1)^{\frac{1}{2}}.$$

Выражая Δq_i через x_B , y_B и R , по аналогии имеем

$$\Delta q_i^{(2)} = (\tilde{X}_{B_i} - x_B)^2 + (\tilde{Y}_{B_i} - y_B)^2 - R^2, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.50)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{B_i} \\ \tilde{Y}_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Из необходимых условий минимума суммы S по переменным x_B , y_B и R получим систему линейных уравнений относительно x_B , y_B и $H_2 = \frac{1}{2}(R^2 - x_B^2 - y_B^2)$:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} \tilde{Y}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} \tilde{Y}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{B_i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{B_i}^2 \tilde{X}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{B_i}^2 \tilde{Y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{B_i}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.51)$$

Для установления однозначного соответствия между решениями, получаемыми при рассмотрении движения плоскости Q_1 относительно Q и обратно, необходимо совместно решить системы (1.48) и (1.51). Чтобы получить необходимые условия минимума суммы S по всем пяти параметрам

$$\frac{dS}{dj} = 0, \quad (j = x_A, y_A, R, x_B, y_B) \quad (1.52)$$

необходимо рассмотреть совместно системы уравнений (1.47) и (1.51). Исключая первые три неизвестные X_A, Y_A и R на основе системы уравнений (1.51), придем к системе двух уравнений с двумя неизвестными x_B, y_B которую удобно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta q_i^{(1)} \frac{d\Delta q_i^{(2)}}{dx_B} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \Delta q_i^{(1)} \frac{d\Delta q_i^{(2)}}{dy_B} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Подставляя (1.46), (1.49) и (1.50) в (1.53), получим

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} \cdot D_{x_A} + \tilde{Y}_{A_i} \cdot D_{y_A} + D_{H_1} - \frac{1}{2} D_1 \tilde{R}_{A_i}^2 \right] \cdot \tilde{X}_{B_i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} \cdot D_{x_A} + \tilde{Y}_{A_i} \cdot D_{y_A} + D_{H_1} - \frac{1}{2} D_1 \tilde{R}_{A_i}^2 \right] \cdot \tilde{Y}_{B_i} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

Каждое уравнение системы (1.54) представляет собой алгебраическое уравнение девятой степени относительно неизвестных параметров x_B, y_B . Как и в предыдущем случае среди этих решений число вещественных равно $5^2 = 25$. Для нахождения минимума функции $S(X_A, Y_A, R, x_B, y_B)$ можно использовать алгоритм, приведенный в работе [55], или алгоритм, приведенный в п. 1.2, учитывая в последнем случае, что $x'_C = y'_C = 0$.

Если точка $D(X_{D_i}, Y_{D_i})$ движется по прямой, то в результате синтеза получим кинематическую цепь ABD , представляющую собой передаточный кривошипно-ползунный четырехзвенный механизм ABD .

III. Пусть заданы координаты $x_B = y_B = 0$ точки B на подвижной плоскости Q_1 , поворота ψ_i плоскости Q_2 , а координаты X_A, Y_A точки A являются искомыми, то задача сводится к определению круговой точки $C(x'_C, y'_C)$ на плоскости Q_2 и ее центра на плоскости Q по заданным ее параметрам $X_{D_i}, Y_{D_i}, \psi_i (i = \overline{1, N})$ (рисунок 1.1, таблица 1.1).

Действительно, выражение (1.8) с учетом формул (1.2) и (1.3) примет вид:

$$\Delta q_i = |\overline{AC_i}|^2 - R^2 = (X_{C_i} - X_A)^2 + (Y_{C_i} - Y_A)^2 - R^2, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.58)$$

После несложных преобразований взвешенную разность (1.58) можно представить в виде следующего многочлена:

$$\Delta q_i = -2 \left[X_{C_i} X_A + Y_{C_i} \cdot Y_A + H - \frac{1}{2} R_{C_i}^2 \right], \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.59)$$

где

$$R_{C_i}^2 = X_{C_i}^2 + Y_{C_i}^2, \quad (1.60)$$

$$H = \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2) \quad (1.61)$$

В данном случае функция S также зависит от пяти искоемых параметров. Это координаты x'_C, y'_C точки C плоскости Q_2 , координаты X_A, Y_A точки A – центра искомой окружности на плоскости Q и R – расстояние между точками A и C .

Данная задача подробно исследована в работе [38]. Для ее решения можно применить и алгоритм, приведенный в п. 1.2, полагая $x_B = y_B = 0$, но в этом частном случае данный алгоритм полностью совпадает с методом кинематической инверсии [38].

IV. Пусть заданы координаты $x_B = y_B = 0$ точки B на плоскости Q_1 , координаты X_A, Y_A точки A , координаты X_{D_i}, Y_{D_i} точки D и угол поворота ψ_i плоскости Q_2 . Требуется найти на плоскости Q_2 такую точку $C(x'_C, y'_C)$, чтобы расстояние между точками A и C во всех положениях точки A и плоскости Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

Задача в этом случае сводится к синтезу разомкнутой двухзвенной цепи ACD по трем неизвестным параметрам x'_C, y'_C, R (рисунок 1.2, таблица 1.1). Эта модификация ИКЦ, представленных на рисунке 1.1 и 2.2 таблицы 1.1, соответственно при условиях $X_A = X_{A_i}, Y_A = Y_{A_i}$ и $x_B = y_B = 0$. Поэтому для определения параметров x'_C, y'_C, R могут быть использованы условия минимума целевых функций указанных двух модификаций ИКЦ. Из этих двух условий предпочтительнее использовать непосредственно условия (1.39), сводящиеся к системе линейных уравнений (1.41), полагая в них $x_B = y_B = 0$ и определяя оптимальные значения искоемых параметров как решение системы (1.41).

V. Пусть заданы координаты $x'_C = y'_C = 0$ точки C на плоскости Q_2 , координаты X_A, Y_A точки A и угол поворота φ_i плоскости Q_1 и координаты

X_{D_i}, Y_{D_i} точки D плоскости Q_2 . Требуется найти на плоскости Q_1 такую точку $B(x_B, y_B)$, чтобы расстояние между точками B и D во всех положениях плоскости Q_1 и точка D мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

Задача в этом случае сводится к синтезу разомкнутой двухзвенной цепи ABD по трем неизвестным параметрам x_B, y_B, R (рисунок 3.2, таблица 1.1). Эта модификация ИКЦ может рассматриваться как частный случай любого из двух модификаций ИКЦ, представленных на рисунках 2.2 и 3.1 таблицы 1.1, соответственно при условиях $x'_C = y'_C = 0$ и $X_A = X_{Ai}, Y_A = Y_{Ai}$. Поэтому для определения параметров x_B, y_B, R могут быть использованы условия минимума целевых функций указанных модификаций ИКЦ. Из этих двух условий предпочтительнее использовать непосредственно условия (1.30), сводящиеся к системе линейных уравнений (1.33), полагая в них $x'_C = y'_C = 0$ и определяя искомые параметры как решение системы (1.33).

1.4 Синтез ИКЦ с поступательными парами

Рассмотрим решение двух задач синтеза ИКЦ с поступательными парами.

1. Для синтеза первого варианта ИКЦ составим величину отклонения Δq_i точки $C_i(x'_C, y'_C)$ от прямой (1.5) в виде

$$\begin{aligned} \Delta q_i = & a[(X_{C_i} - X_A)\cos\varphi_i + (Y_{C_i} - Y_A)\sin\varphi_i] + \\ & + b[-(X_{C_i} - X_A)\sin\varphi_i + (Y_{C_i} - Y_A)\cos\varphi_i] + C, \end{aligned} \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.62)$$

Вид решения задачи зависит от выбора способа нормализации, т.е. выбора одного из коэффициентов уравнения прямой равным единице; $|a|=1$; $|b|=1$; $|c|=1$; приводящего соответственно к трем формам уравнения прямой. Эти условия нормализации уравнения (1.62) соответствуют трем отклонениям точки $C_i(x'_C, y'_C)$ от прямой, измеренным вдоль оси Ax , Ay и по нормали. В первых двух случаях мы имеем точные выражения отклонений, а в последнем случае получили взвешенное отклонение. Ниже рассмотрим каждый случай отдельно.

1. Пусть $a = -1$, тогда подставляя (1.3) в (1.62) и после несложных преобразований имеем

$$\begin{aligned} \Delta q_i = & (X_A - bY_A)\cos\varphi_i + (bX_A + Y_A)\sin\varphi_i + (-x'_C + by'_C) \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) + \\ & + (-y'_C - bx'_C)\sin(\varphi_i - \psi_i) + bY_i + C - X_i, \end{aligned} \quad (i = \overline{1, N}). \quad (1.63)$$

где

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{D_i} \\ Y_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Как видно из (1.63) выражение Δq_i имеет вид обобщенного полинома, у которого коэффициенты G_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) связаны с искомыми параметрами следующими соотношениями:

$$G_1 = X_A - bY_A, G_2 = bX_A + Y_A, G_3 = -x'_C + by'_C, G_4 = -y_C - bx'_C, G_5 = b, G_6 = C. \quad (1.64)$$

Искомая точка плоскости Q_2 вместе с соответствующей прямой плоскости Q_1 должна обеспечить минимум суммы $S = \sum_{i=1}^N \Delta q_i^2$. Из условия стационарности суммы S , имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dG_1} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i \cdot \cos \varphi_i = 0, \\ \frac{dS}{dG_2} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i \cdot \sin \varphi_i = 0, \\ \frac{dS}{dG_3} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) = 0, \\ \frac{dS}{dG_4} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) = 0, \\ \frac{dS}{dG_5} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i \cdot Y_i = 0, \\ \frac{dS}{dG_6} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

Подставляя значения из (1.63) и (1.65) и после несложных преобразований получим следующую систему линейных уравнений:

$$A_I X_I = B_I \quad (1.66)$$

где

$$A_I = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \cos^2 \varphi_i & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2\varphi_i & \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2\varphi_i & \sum_{i=1}^N \sin^2 \varphi_i & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos^2(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N Y_i \cdot \cos \varphi_i & \sum_{i=1}^N Y_i \cdot \sin \varphi_i & \sum_{i=1}^N Y_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i & \sum_{i=1}^N \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N Y_i \cdot \cos \varphi_i & \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \\ \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N Y_i \cdot \sin \varphi_i & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N Y_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin^2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N Y_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N Y_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N Y_i^2 & \sum_{i=1}^N Y_i \\ \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N Y_i & N \end{bmatrix}$$

$$X_1 = [G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6]^T$$

$$B_1 = \left[\sum_{i=1}^N X_i \cos \varphi_i, \sum_{i=1}^N X_i \sin \varphi_i, \sum_{i=1}^N X_i \cos(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N X_i \sin(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N X_i Y_i, \sum_{i=1}^N X_i \right]^T.$$

Если величины $X_i, Y_i, \cos \varphi_i, \sin \varphi_i, \cos(\varphi_i - \psi_i), \sin(\varphi_i - \psi_i)$ линейно независимы в заданных N положениях, то система (1.66) имеет единственное решение, которое описывает искомое соответствие между прямой плоскости Q_1 и точками A и C плоскостей Q и Q_2 , т.е. квадратическое приближение к прямой при данной нормализации реализуется единственной парой точек $A(X_A, Y_A) \in Q$ и $C \in Q_2$. Координаты точек $A(X_A, Y_A) \in Q$, $C(x'_A, y'_A) \in Q_2$ и коэффициенты прямой b и c плоскости Q_1 определяется из решения (1.64) также единственным образом:

$$X_A = \frac{G_1 + G_2 G_5}{1 + G_5^2}, \quad Y_A = \frac{G_2 - G_1 G_5}{1 + G_5^2}, \quad b = G_5,$$

$$x'_C = -\frac{G_3 + G_4 G_5}{1 + G_5^2}, \quad y'_C = \frac{G_3 G_5 - G_4}{1 + G_5^2}, \quad c = G_6.$$

В частном случае, если $c=0$, то искомая прямая плоскости Q_1 проходит через начало координат системы Ax (рисунок 1.1, таблица 1.2). Искомыми параметрами являются b, X_A, Y_A, x'_C, y'_C и соответственно получим систему линейных уравнений, где матрица A_I имеет пятый порядок.

2. Пусть $b = -1$, тогда взвешенная разность (1.62) преобразуется к виду:

$$\Delta q_i = (-aX_A + Y_A) \cos \varphi_i + (-X_A - aY_A) \sin \varphi_i + (ax'_C - y'_C) \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) + (ay'_C + x'_C) \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) + ax_i + c - Y_i, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.67)$$

Как и в предыдущем случае в выражениях (1.67) коэффициенты G_j связаны с искомыми параметрами следующими соотношениями:

$$G_1 = -aX_A + Y_A, \quad G_2 = -X_A - aY_A, \quad G_3 = ax'_C - y'_C, \quad G_4 = ay'_C + x'_C, \quad G_5 = a, \quad G_6 = c.$$

Из условия стационарности суммы

$$\frac{dS}{dj} = 0, \quad (j = G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6) \quad (1.68)$$

с учетом (1.67) получим следующую линейную систему:

$$A_{II} X_{II} = B_{II},$$

где

$$A_{II} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \cos^2 \varphi_i & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2\varphi_i & \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2\varphi_i & \sum_{i=1}^N \sin^2 \varphi_i & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos^2(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N X_i \cdot \cos \varphi_i & \sum_{i=1}^N X_i \cdot \sin \varphi_i & \sum_{i=1}^N X_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i & \sum_{i=1}^N \cos(\varphi_i - \psi_i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_i \cdot \cos \varphi_i & \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \\ \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_i \cdot \sin \varphi_i & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin^2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N X_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_i^2 & \sum_{i=1}^N X_i \\ \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_i & N \end{bmatrix}$$

$$X_{II} = [G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6]^T$$

$$B_{II} = \left[\sum_{i=1}^N Y_i \cos \varphi_i, \sum_{i=1}^N Y_i \sin \varphi_i, \sum_{i=1}^N Y_i \cos(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N Y_i \sin(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N X_i Y_i, \sum_{i=1}^N X_i \right]^T.$$

Из решения системы (1.68) искомые параметры определяются следующими выражениями:

$$X_A = -\frac{G_2 + G_1 G_5}{1 + G_5^2}, Y_A = \frac{G_1 - G_2 G_5}{1 + G_5^2}, a = G_5,$$

$$x'_C = \frac{G_4 + G_3 G_5}{1 + G_5^2}, y'_C = \frac{G_4 G_5 - G_3}{1 + G_5^2}, c = G_6,$$

3. Пусть $c=-1$, тогда получим уравнение прямой в отрезках. Подставляя (1.3) в (1.62) и после несложных преобразований имеем

$$\Delta q_i = -(aX_A + bY_A) \cos \varphi_i + (bX_A - aY_A) \sin \varphi_i + (ax'_C + by'_C) \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) + (ay'_C - bx'_C) \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) + ax_i + bY_i - 1, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.69)$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= -(aX_A + bY_A), \\ G_2 &= bX_A - aY_A, \\ G_3 &= ax'_C + by'_C, \\ G_4 &= ay'_C - bx'_C, \\ G_5 &= a, \\ G_6 &= b. \end{aligned}$$

Из условия стационарности суммы S с учетом (1.69) получим линейную систему уравнений относительно G_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$):

$$A_{III} X_{III} = B_{III} \quad (1.70)$$

где

$$A_{III} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \cos^2 \varphi_i & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2\varphi_i & \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2\varphi_i & \sum_{i=1}^N \sin^2 \varphi_i & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos^2(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N X_i \cdot \cos \varphi_i & \sum_{i=1}^N X_i \cdot \sin \varphi_i & \sum_{i=1}^N X_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N Y_i \cos \varphi_i & \sum_{i=1}^N Y_i \sin \varphi_i & \sum_{i=1}^N Y_i \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_i \cdot \cos \varphi_i & \sum_{i=1}^N Y_i \cos \varphi_i \\ \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_i \cdot \sin \varphi_i & \sum_{i=1}^N Y_i \sin \varphi_i \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N Y_i \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin^2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N Y_i \sin(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N X_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_i^2 & \sum_{i=1}^N X_i Y_i \\ \sum_{i=1}^N Y_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_i Y_i & \sum_{i=1}^N Y_i^2 \end{bmatrix}$$

$$X_{III} = [G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6]^T$$

$$B_{III} = \left[\sum_{i=1}^N \cos \varphi_i, \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i, \sum_{i=1}^N \cos(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N X_i, \sum_{i=1}^N Y_i \right]^T.$$

Решение системы (1.70) позволяет определить величины G_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), а искомые параметры определяются из следующих выражений:

$$\begin{aligned} X_A &= \frac{G_1 G_6 + G_2 G_6}{G_5^2 + G_6^2}, & Y_A &= \frac{G_1 G_6 - G_2 G_5}{G_5^2 + G_6^2}, & a &= G_5, \\ x'_C &= \frac{G_3 G_5 - G_4 G_6}{G_5^2 + G_6^2}, & y'_C &= \frac{G_4 G_5 + G_3 G_6}{G_5^2 + G_6^2}, & b &= G_6, \end{aligned}$$

Таким образом, в результате решения данной задачи определяются точки $A(X_A, Y_A) \in Q$, $C(x'_C, y'_C) \in Q_2$ и прямая на плоскости Q_1 такие, что совмещая с ними плоские шарниры и ползун, получаем искомую ИКЦ в виде открытой цепи ACD с тремя степенями свободы (рисунок 2.1, таблица 1.2).

II. Рассмотрим синтез второго варианта ИКЦ с поступательными парами. Составим величину отклонения Δq_i точки B от прямой (1.6) в виде

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= a[(X_{B_i} + X_{D_i})\cos\psi_i + (Y_{B_i} - Y_{D_i})\sin\psi_i] + \\ &+ b[-(X_{B_i} + X_{D_i})\sin\psi_i + (Y_{B_i} - Y_{D_i})\cos\psi_i] + c, \quad (i = \overline{1, N}) \end{aligned} \quad (1.71)$$

Как в предыдущем случае решения задачи синтеза ИКЦ зависят от способа нормализации.

1. Случай $c = -l$.

Подставляя (1.2) в (1.71) и после несложных преобразований Δq_i получим обобщенный полином в виде

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= G_1 \cos\psi_i + G_2 \sin\psi_i + G_3 \cos(\varphi_i - \psi_i) + \\ &+ G_4 \sin(\varphi_i - \psi_i) + G_5 \tilde{X}_i + G_6 \tilde{Y}_i - 1, \quad (i = \overline{1, N}) \end{aligned} \quad (1.72)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_i \\ \tilde{Y}_i \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos\psi_i & \sin\psi_i & 0 \\ -\sin\psi_i & \cos\psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{D_i} \\ Y_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} G_1 &= aX_A + bY_A; & G_3 &= ax_B + by_B; & G_5 &= a, \\ G_2 &= aY_A - bX_A; & G_4 &= bx_B - ay_B; & G_6 &= b. \end{aligned}$$

Из условия стационарности суммы $S = \sum_{i=1}^N \Delta q_i^2$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dG_1} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i \cdot \cos \psi_i = 0, \\ \frac{dS}{dG_2} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i \cdot \sin \psi_i = 0, \\ \frac{dS}{dG_3} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) = 0, \\ \frac{dS}{dG_4} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) = 0, \\ \frac{dS}{dG_5} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i \cdot \tilde{X}_i = 0, \\ \frac{dS}{dG_6} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i \tilde{Y}_i = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

Подставляя значение Δq_i из (1.72) в (1.73), получим следующую линейную систему уравнений:

$$A_{IV} X_{IV} = B_{IV}, \quad (1.74)$$

где

$$A_{IV} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \cos^2 \psi_i & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2\psi_i & \sum_{i=1}^N \cos \psi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2\psi_i & \sum_{i=1}^N \sin^2 \psi_i & \sum_{i=1}^N \sin \psi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \psi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin \psi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos^2(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \psi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin \psi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cdot \cos \psi_i & - \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cdot \sin \psi_i & - \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \cos \psi_i & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \sin \psi_i & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \cos(\varphi_i - \psi_i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \cos \psi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & - \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cdot \cos \psi_i & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \cos \varphi_i \\ \sum_{i=1}^N \sin \psi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & - \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cdot \sin \psi_i & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \sin \varphi_i \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) & - \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \sin^2(\varphi_i - \psi_i) & - \sum_{i=1}^N X_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \sin(\varphi_i - \psi_i) \\ - \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \tilde{Y}_i \\ \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \tilde{Y}_i & N \end{bmatrix}$$

$$X_{IV} = [G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6]^T,$$

$$B_{IV} = \left[\sum_{i=1}^N Y_i \cos \psi_i, \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \sin \psi_i, \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \cos(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \sin(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \tilde{Y}_i, \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \right]^T.$$

Решение системы (1.74) позволяет определить величины G_i ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), а искомые параметры ИКЦ ABD находим из следующих соотношений

$$\begin{aligned} X_A &= \frac{G_1 G_5 - G_2 G_6}{G_5^2 + G_6^2}, & Y_A &= \frac{G_2 G_5 + G_1 G_6}{G_5^2 + G_6^2}, \\ x_B &= \frac{G_3 G_5 + G_4 G_6}{G_5^2 + G_6^2}, & y'_B &= \frac{G_3 G_6 - G_4 G_5}{G_5^2 + G_6^2}, & a &= G_5, & b &= G_6 \end{aligned}$$

2. Случай $b = -1$. Здесь взвешенная разность (1.71) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= G_1 \cos \psi_i + G_2 \sin \psi_i + G_3 \cos(\varphi_i - \psi_i) + \\ &+ G_4 \sin(\varphi_i - \psi_i) + G_5 \tilde{X}_i + G_6 + \tilde{Y}_i, \quad (i = \overline{1, N}) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= aX_A - Y_A; & G_3 &= ax_B - y_B; & G_5 &= a, \\ G_2 &= aY_A + X_A; & G_4 &= ay_B - x_B; & G_6 &= b. \end{aligned}$$

Из условия стационарности суммы S получим линейную систему уравнений относительно G_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$):

$$A_V X_V = B_V, \quad ,$$

где

$$A_V = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \cos^2 \psi_i & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2\psi_i & \sum_{i=1}^N \cos \psi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2\psi_i & \sum_{i=1}^N \sin^2 \psi_i & \sum_{i=1}^N \sin \psi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \psi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin \psi_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos^2(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \sin \psi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin \psi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) \\ - \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cos \psi_i & - \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \sin \psi_i & - \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \psi_i & \sum_{i=1}^N \sin \psi_i & \sum_{i=1}^N \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos \psi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & - \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cos \psi_i & \sum_{i=1}^N \cos \psi_i \\ \sum_{i=1}^N \sin \psi_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) & - \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \sin \psi_i & \sum_{i=1}^N \sin \psi_i \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) & - \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \sin^2(\varphi_i - \psi_i) & - \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \psi_i) \\ - \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \\ \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_i & N \end{bmatrix}$$

$$X_V = [G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6]^T,$$

$$B_V = \left[\sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \cos \psi_i, \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \sin \psi_i, \sum_{i=1}^N Y_i \cos(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N Y_i \sin(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \tilde{Y}_i, \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \right]^T.$$

Решение системы позволяет определить величины G_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), а искомые параметры ИКЦ ABD находим из следующих соотношений

$$X_A = \frac{G_2 + G_1 G_5}{1 + G_5^2}, \quad Y_A = \frac{G_2 G_5 - G_1}{1 + G_5^2}, \quad a = G_5$$

$$x_B = \frac{G_4 + G_3 G_5}{G_5^2 - 1}, \quad y_B = \frac{G_4 G_5 + G_3}{G_5^2 - 1}, \quad c = G_6$$

При нормализации коэффициента $|a| = -1$ решение задачи синтез второго варианта ИКЦ аналогично решению по первому варианту.

В результате решения данной задачи определяются точки $A(X_A, Y_A) \in Q$, $B(x_B, y_B) \in Q_1$ и прямая на плоскости Q_2 такие, что совмещая с ними плоские шарниры и ползун, получаем искомую ИКЦ в виде открытой цепи ABD с тремя степенями свободы (рисунок 2.1, таблица 1.3).

Следует отметить, что, несмотря на нелинейность выражения (1.62) относительно искомых параметров $X_A, Y_A, a, b, c, x'_c, y'_c$ или $X_A, Y_A, a, b, c, x_b, y_b$, рассматриваемые задачи за счет существования невырожденных преобразований этих переменных оказались линейными.

В частном случае, когда точка $D(x_D, y_D)$ неподвижна, т.е. плоскость Q_2 вращается вокруг точки $D(x_D, y_D)$, синтез ИКЦ ACD и ABD приводит непосредственно к кулисным механизмам.

Фиксируя или задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, можно получить различные модификации ИКЦ с поступательными парами.

1.5 Синтез модификаций ИКЦ с поступательными парами

Рассмотрим решение задачи синтеза ИКЦ при различных комбинациях заданных и искомых параметров для двух вариантов в отдельности.

Вариант 1.

1⁰. Пусть даны координаты X_{A_i}, Y_{A_i} точки A и угол поворота φ_i плоскости Q_1 и координаты X_{D_i}, Y_{D_i} точки D и угол поворота ψ_i плоскости Q_2

Требуется на плоскости Q_1 найти прямую

$$ax + by + c \quad (1.75)$$

а на плоскости Q_2 точку $C(x_c, y_c)$ так, чтобы траектория точки $C_i(x'_c, y'_c)$ в ее движении относительно плоскости Q_1 приближалась к искомой прямой (1.75).

Задача сводится к определению пяти параметров a, b, c, x'_c, y'_c открытой трехзвенной цепи ACD (рисунок 2.2, таблица 1.2), поскольку в этом случае в выражении (1.2) координаты X_A, Y_A точки A заданы.

Для решения задачи взвешенную разность (1.62) представили в виде

$$\Delta q_i = a[(X_{C_i} + X_{A_i})\cos\varphi_i + (Y_{C_i} - Y_{A_i})\sin\varphi_i] + b[-(X_{C_i} + X_{A_i})\sin\varphi_i + (Y_{C_i} - Y_{A_i})\cos\varphi_i] + c, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.76)$$

Подставляя (1.3) в (1.76), после несложных преобразований получим

$$\Delta q_i = a[(X_{D_i} + X_{A_i})\cos\varphi_i + (Y_{D_i} - Y_{A_i})\sin\varphi_i] + b[-(X_{D_i} + X_{A_i})\sin\varphi_i + (Y_{D_i} - Y_{A_i})\cos\varphi_i] + (ax_C - by_C) \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) + (ay_C - bx_C) \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) + c, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.77)$$

Рассмотрим каждый случай нормализации коэффициентов уравнения прямой отдельно.

1. Случай $a = -1$. Подставляя (1.3) в (1.76), после несложных преобразований получим

$$\Delta q_i = G_1 \cos(\varphi_i - \psi_i) + G_2 \sin(\varphi_i - \psi_i) + G_3 Y_i + G_4 - \tilde{X}_{c_i}, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.78)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_i \\ \tilde{Y}_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i & 0 \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_{A_i} \\ Y_{D_i} - Y_{A_i} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Из условия стационарности суммы S получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dG_1} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i \cdot \cos(\varphi_i - \psi_i) = 0, \\ \frac{dS}{dG_2} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i \cdot \sin(\varphi_i - \psi_i) = 0, \\ \frac{dS}{dG_3} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i \cdot \tilde{Y}_i = 0, \\ \frac{dS}{dG_4} &= \sum_{i=1}^N \Delta q_i = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.79)$$

Подставляя значения Δq_i из (1.78) и (1.79), получим линейную систему:

$$A_{VI} X_{VI} = B_{VI} \quad (1.80)$$

где

$$A_{VI} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \cos^2(\varphi_i - \psi_i) & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos \psi_i \sin(\varphi_i - \psi_i) \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin^2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin \psi_i \sin(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \cos \psi_i & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \\ \sum_{i=1}^N \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i & N \end{bmatrix},$$

$$X_{VI} = [G_1, G_2, G_3, G_4]^T,$$

$$B_{VI} = \left[\sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cos(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \sin(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \tilde{Y}_i, \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \right]^T.$$

Система (1.80) описывает искомое соответствие между прямой и точкой C плоскостей Q_1 и Q_2 соответственно, т.е. единственная точка плоскости Q_2 реализует квадратическое приближение к прямой при данной нормализации. Координаты точки $C(x'_c, y'_c)$ и коэффициенты прямой b и c плоскости Q_1 определяются из решения системы (1.80):

$$x'_c = -\frac{G_1 + G_2 G_3}{1 + G_3^2}; \quad y'_c = \frac{G_1 G_3 - G_2}{1 + G_3^2}; \quad b = G_4; c = G_5$$

2. Случай $b = -1$. С учетом (1.3) и (1.77) имеем:

$$\Delta q_i = G_1 \cos(\varphi_i - \psi_i) + G_2 \sin(\varphi_i - \psi_i) + G_3 \tilde{X}_i + G_4 - \tilde{Y}_i, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.81)$$

где

$$G_1 = ax'_c - y'_c, \quad G_2 = ay'_c + x'_c, \quad G_3 = a, \quad G_4 = c.$$

Из необходимых условий минимума суммы S с учетом (1.81) получим линейную систему уравнений:

$$A_{VII} \cdot X_{VII} = B_{VII} \quad (1.82)$$

где

$$A_{VII} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \cos^2(\varphi_i - \psi_i) & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin^2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cos \psi_i & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \\ \sum_{i=1}^N \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i & N \end{bmatrix}$$

$$X_{VII} = [G_1, G_2, G_3, G_4]^T,$$

$$B_{VII} = \left[\sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \cos(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \sin(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \tilde{Y}_i, \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i^2 \right]^T.$$

Из решения системы (1.82) искомые параметры определяются следующими соотношениями:

$$x'_C = -\frac{G_2 + G_1 G_3}{1 - G_3^2}; \quad y'_C = -\frac{G_1 + G_2 G_3}{1 - G_3^2}; \quad b = G_3, \quad c = G_4.$$

3. Случай $C = -1$. Выражение (1.77) можно представить относительно коэффициентов G_j ($j = 1, 2, 3, 4$) в виде

$$\Delta q_i = G_1 \cos(\varphi_i - \psi_i) + G_2 \sin(\varphi_i - \psi_i) + G_3 \tilde{X}_i + G_4 \tilde{Y}_i - 1, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.83)$$

где

$$G_1 = ax'_C + by'_C,$$

$$G_2 = ay'_C - bx'_C,$$

$$G_3 = a,$$

$$G_4 = b.$$

Из необходимых условий суммы S с учетом (1.83) получим следующую систему линейных уравнений:

$$A_{VIII} X_{VIII} = B_{VIII} \quad (1.84)$$

где

$$A_{VIII} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \cos^2(\varphi_i - \psi_i) & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin^2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \sin(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \cos \psi_i & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \tilde{Y}_i \\ \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \tilde{Y}_i & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i^2 \end{bmatrix}$$

$$X_{VIII} = [G_1, G_2, G_3, G_4]^T,$$

$$B_{VIII} = \left[\sum_{i=1}^N \cos(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i, \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i \right]^T.$$

Система (1.84) позволяет определить величины G_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), а искомые параметры определяются из следующих соотношений:

$$x'_C = -\frac{G_3 G_1 - G_1 G_4}{G_3^2 + G_4^2}; \quad y'_C = \frac{G_2 G_3 + G_1 G_4}{G_3^2 + G_4^2}; \quad a = G_3, \quad b = G_4.$$

В результате решения данной задачи определяются точки $C(x'_C, y'_C) \in Q_2$ и прямая на плоскости Q_1 такие, что совмещая с ними плоский шарнир и ползун, получаем искомую открытую трехзвенную цепь ACD (рисунок 2.2, таблица 1.2).

В зависимости от характера заданных движений плоскостей $Q_1(X_{A_i}, Y_{A_i}, \varphi_i)$ и $Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, \psi_i)$, ($i = \overline{1, N}$), приходим к следующим механизмам и кинематическим цепям:

а) Если точки $A(X_A, Y_A)$ и $D(X_D, Y_D)$ фиксированы на плоскости Q , то в результате синтеза модификации ИКЦ получим передаточный кулисный четырехзвенник.

б) Если точка $D(X_D, Y_D)$ движется по прямой и угол $\psi = const$, $i = \overline{1, N}$, то получим модификацию ИКЦ ACD с поступательной парой. Если при этом еще и $\varphi_i = const$, а точка $A(X_A, Y_A)$ движется по прямой, то получим открытую кинематическую цепь ACD с двумя поступательными парами.

в) Пусть система Ax совпадает с системой OXY , т.е. $X_A = Y_A = \varphi = 0$. Задача сводится к определению точек плоскости Q_2 с N приближенно-коллинеарными положениями.

В этой задаче имеется пять искоемых параметров синтеза. Это коэффициенты прямой a, b, c на неподвижной плоскости Q и координаты x'_C, y'_C точки C на подвижной плоскости Q_2 (рисунок 2.2, таблица 1.1).

С учетом вышеизложенного выражение (1.62) преобразуется к следующему обобщенному полиному:

$$\Delta q_i = G_1 a + G_2 b + G_3 \cos \psi_i + G_4 \sin \psi_i + c, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.85)$$

где

$$G_1 = a,$$

$$G_2 = b$$

$$G_3 = ax'_C + by'_C,$$

$$G_4 = bx'_C - ay'_C.$$

Данная задача была рассмотрена в работе [38].

2. Пусть заданы коэффициенты прямой $a=c=0$, координаты X_{D_i}, Y_{D_i} точки D и угол поворота ψ_i плоскости Q_2 и угол поворота φ_i плоскости Q_1 .

Задача сводится к синтезу открытой трехзвенной цепи ACD (рисунок 1.1, таблица 1.2) с пятью неизвестными параметрами: X_A, Y_A, b, x'_C, y'_C .

Для решения задачи взвешенную разность (1.62) представим в виде

$$\Delta q_i = X_A \sin \varphi_i - Y_A \cos \varphi_i - x'_C \sin(\varphi_i - \psi_i) + y'_C \cos(\varphi_i - \psi_i) + Y_i, \quad (1.86)$$

при $b \neq 0, \quad (i = \overline{1, N})$

Из необходимых условий суммы S с учетом (2.85) получим следующую систему линейных уравнений:

$$A_{IX} X_{IX} = B_{IX} \quad (1.87)$$

где

$$A_{IX} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \sin^2 \varphi_i & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2\varphi_i & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2\varphi_i & \sum_{i=1}^N \cos^2 \varphi_i & \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cos(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin^2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) \\ \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cos(\varphi_i - \psi_i) & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos^2(\varphi_i - \psi_i) \end{bmatrix}$$

$$X_{IX} = [X_A, Y_A, x'_C, y'_C]^T,$$

$$B_{IX} = - \left[\sum_{i=1}^N Y_i \sin \varphi_i, \sum_{i=1}^N Y_i \cos \varphi_i, \sum_{i=1}^N Y_i \sin(\varphi_i - \psi_i), \sum_{i=1}^N Y_i \cos(\varphi_i - \psi_i) \right]^T.$$

Из решения системы (1.87) определяются искомые параметры.

3⁰. Пусть заданы координаты $x'_C = y'_C = 0$ точки C на плоскости Q_2 , угол поворота φ_i плоскости Q_1 и координаты X_{D_i}, Y_{D_i} точки D плоскости Q_2 . Требуется найти на плоскости такую прямую, чтобы во всех заданных положениях точки $D(X_{D_i}, Y_{D_i})$ искомая прямая проходила через них.

Задача в этом случае сводится к синтезу разомкнутой трехзвенной цепи AD по пяти неизвестным параметрам: X_A, Y_A, a, b, c (рисунок 3.1, таблица 1.2). Эта модификация ИКЦ может рассматриваться как частный случай ИКЦ, представленных на рисунке 2.1, таблицы 1.2, соответственно при условиях $x'_C = y'_C = 0$. Поэтому для определения параметров может быть использовано условие минимума целевой функции (1.62), сводящееся к системе линейных уравнений (1.66), (1.68) и (1.70), при условиях $x'_C = y'_C = 0$.

4⁰. Пусть заданы координаты $x'_C = y'_C = 0$ точки C на плоскости Q_2 , координаты X_{D_i}, Y_{D_i} точки D , координаты X_{A_i}, Y_{A_i} точки A и угол поворота φ_i плоскости Q_1 .

Требуется найти на плоскости Q_1 такую прямую, чтобы во всех положениях точки D_i искомая прямая проходила через них.

Задача в этом случае сводится к синтезу открытой двухзвенной цепи AD (рисунок 3.2, таблица 1.2) по трем неизвестным параметрам: a, b и c . Это модификация ИКЦ может рассматриваться как частный случай любого из двух модификаций ИКЦ, представленных на рисунке 3.1 и 2.2 таблицы 1.2, соответственно при условиях $X_A = X_{A_i}, Y_A = Y_{A_i}$ и $x'_C = y'_C = 0$. Поэтому для определения параметров могут быть использованы условия минимума целевых функций указанных двух модификаций ИКЦ. Из этих двух условий предпочтительнее использовать непосредственно условия (1.81), сводящиеся к системе линейных уравнений (1.82), полагая в них $x'_C = y'_C = 0$.

5. Пусть заданы координаты X_{A_i}, Y_{A_i} точки A , угол поворота φ_i плоскости Q_1 , коэффициенты искомой прямой $a=c=0$, и заданы положения точки $D(X_{D_i}, Y_{D_i})$.

Задача сводится к синтезу открытой трехзвенной цепи ACD (рисунок 1.2, таблица 1.2) по трем параметрам: x'_C, y'_C, b .

Эта модификация ИКЦ может рассматриваться как частный случай любого из двух модификаций ИКЦ, представленных на рисунках 1.1 и 2.2 таблицы 1.2, соответственно при условиях $X_A = X_{A_i}, Y_A = Y_{A_i}$ и $a=c=0$. Поэтому для определения параметров x'_C, y'_C, b могут быть использованы условия минимума функций указанных двух модификаций ИКЦ. Из этих двух условий предпочтительнее использовать непосредственно условия (1.81), сводящиеся к системе линейных уравнений (1.82), полагая в них $a=c=0$ и определяя искомые параметры как решение системы (1.82).

Вариант П.

1⁰. Пусть даны координаты X_{A_i}, Y_{A_i} точки A и угол поворота φ_i плоскости Q_1 и координаты X_{D_i}, Y_{D_i} точки D и угол поворота ψ_i плоскости Q_2

Требуется на плоскости Q_2 найти прямую

$$ax + by + c = 0 \quad (1.88)$$

а на плоскости Q_1 точку $B(x_B, y_B)$ так, чтобы траектория точки $B_i(x_B, y_B)$ в ее движении относительно плоскости Q_2 приближалась к искомой прямой (1.88).

Задача сводится к определению пяти параметров a, b, c, x_B, y_B открытой трехзвенной цепи ABD (рисунок 1.2, таблица 1.3).

Для решения задачи взвешенную разность (1.71) с учетом (1.2) представим в виде

$$\Delta q_i = aX_{E_i} + bY_{E_i} + (ax_B + by_B)\cos(\varphi_i - \psi_i) + (bx_B - ay_B)\sin(\varphi_i - \psi_i) + c, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.89)$$

где

$$\begin{bmatrix} X_{E_i} \\ Y_{E_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & \sin \psi_i & 0 \\ -\sin \psi_i & \cos \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{A_i} - X_{D_i} \\ Y_{A_i} - Y_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Как и в предыдущих случаях решения второго варианта задачи синтеза модификации ИКЦ зависят от способа нормализации.

Рассмотрим случай $b = -1$. Подставляя значение b в (1.89), получим обобщенный полином в виде

$$\Delta q_i = G_1 \cos(\varphi_i - \psi_i) + G_2 \sin(\varphi_i - \psi_i) + G_3 X_{E_i} + G_4 - Y_{E_i}, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.90)$$

где

$$G_1 = ax_B - y_B, \quad G_2 = -(x_B + ay_B), \quad G_3 = a, \quad G_4 = c.$$

Из условия стационарности суммы S с учетом (1.90), получим линейную систему уравнений относительно $G_j (j = 1, 2, 3, 4)$:

$$\begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^N \cos^2(\varphi_i - \psi_i) & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_{E_i} \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \cos(\varphi_i - \psi_i) \\
\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin^2(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_{E_i} \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \psi_i) \\
\sum_{i=1}^N X_{E_i} \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_{E_i} \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_{E_i}^2 & \sum_{i=1}^N X_{E_i} \\
\sum_{i=1}^N \cos(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \psi_i) & \sum_{i=1}^N X_{E_i} & N
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
G_1 \\
G_2 \\
G_3 \\
G_4
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^N Y_{E_i} \cos(\varphi_i - \psi_i) \\
\sum_{i=1}^N Y_{E_i} \sin(\varphi_i - \psi_i) \\
\sum_{i=1}^N X_{E_i} Y_{E_i} \\
\sum_{i=1}^N Y_{E_i}
\end{bmatrix} \quad (1.91)$$

Решение системы (1.91) позволяет определить величины G_j ($j = 1, 2, 3, 4$), а искомые параметры модификации ИКЦ находим из следующих соотношений

$$x_B = \frac{G_1 G_3 + G_2}{1 + G_3^2}; \quad y_B = \frac{-(G_2 G_3 + G_1)}{1 + G_3^2}; \quad a = G_3; \quad c = G_4.$$

При нормализации коэффициентов $|a| = -1$, $|c| = -1$ решение задачи синтеза второго варианта ИКЦ аналогично решению по первому варианту.

В результате решения данной задачи определяются точки $B(x_B, y_B) \in Q_2$ и прямой на плоскости Q_1 такие, что совмещая с ними плоский шарнир и ползун, получаем искомую открытую трехзвенную цепь ABD (рисунок 2.2, таблица 1.3).

В зависимости от характера заданных движений плоскостей $Q_1(X_{A_i}, Y_{A_i}, \varphi_i)$ и $Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, \psi_i)$, ($i = \overline{1, N}$), приходим к следующим механизмам и кинематическим цепям:

а) Если точки $A(X_A, Y_A)$ и $D(X_D, Y_D)$ фиксированы на плоскости Q , то в результате синтеза модификации ИКЦ получим передаточный кулисный четырехзвенник с ведущим коромыслом.

б) Если точка $D(X_{D_i}, Y_{D_i})$ движется по прямой и угол $\psi_i = \text{const}$, $i = \overline{1, N}$, то получим модификацию ИКЦ ABD с поступательной парой. Если при этом еще и $\varphi_i = \text{const}$, а точка $A(X_{A_i}, Y_{A_i})$ движется по прямой, получим кинематическую цепь ABD с двумя поступательными парами.

2⁰. Пусть заданы координаты $x_B = y_B = 0$ точки B , угол поворота φ_i плоскости Q_1 и координаты X_{D_i}, Y_{D_i} точки D плоскости Q_2

Требуется найти на плоскости Q_2 такую прямую

$$ax + by + c = 0$$

а на плоскости Q точку $A(X_A, Y_A)$ так, чтобы прямая на плоскости Q_2 в заданных N положениях наиболее близко проходила от неподвижной точки $A(X_A, Y_A) \in Q$.

Задача сводится к определению пяти параметров X_A, Y_A, a, b, c открытой кинематической цепи AD (рисунок 3.1, таблица 1.3).

Для решения задачи взвешенную разность Δq_i , определяемую равенством (1.71), с учетом формул (1.2) и (1.3) представим в следующем виде:

$$\Delta q_i = aX_i + bY_i + (aX_A + bY_A)\cos\psi_i + (aY_A - bX_A)\sin\psi_i + c, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.92)$$

где

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos\psi_i & \sin\psi_i & 0 \\ -\sin\psi_i & \cos\psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{D_i} \\ Y_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Как и в предыдущих случаях, выражение (1.92) сводится к обобщенному полиному, в котором коэффициенты $G_j (j=1,2,3,4,5)$ связаны с искомыми параметрами следующими соотношениями:

$$G_1 = a, \quad G_2 = b, \quad G_3 = aX_A + bY_A, \quad G_4 = aY_A - bX_A.$$

Условия стационарности суммы S приводят к следующей линейной системе уравнений (при нормализации коэффициента прямой $c = -1$):

$$A_X X_X = B_X \quad (1.93)$$

где

$$A_X = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N X_i^2 & \sum_{i=1}^N X_i Y_i & \sum_{i=1}^N X_i \cos\psi_i & \sum_{i=1}^N X_i \sin\psi_i \\ \sum_{i=1}^N X_i Y_i & \sum_{i=1}^N Y_i^2 & \sum_{i=1}^N Y_i \cos\psi_i & \sum_{i=1}^N Y_i \sin\psi_i \\ \sum_{i=1}^N X_i \cos\psi_i & \sum_{i=1}^N Y_i \cos\psi_i & \sum_{i=1}^N \cos^2\psi_i & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2\psi_i \\ \sum_{i=1}^N X_i \sin\psi_i & \sum_{i=1}^N Y_i \sin\psi_i & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2\psi_i & \sum_{i=1}^N \sin^2\psi_i \end{bmatrix},$$

$$X_X = [G_1, G_2, G_3, G_4]^T,$$

$$B_X = \left[\sum_{i=1}^N X_i, \sum_{i=1}^N Y_i, \sum_{i=1}^N \cos\psi_i, \sum_{i=1}^N \sin\psi_i \right]^T$$

Из решения системы (1.86) искомые параметры определяются следующими соотношениями:

$$X_A = -\frac{G_3 G_1 - G_2 G_4}{G_1^2 + G_2^2}; \quad Y_A = \frac{G_2 G_3 + G_1 G_4}{G_1^2 + G_2^2}; \quad a = G_1; \quad b = G_2$$

Остальные случаи нормализации коэффициентов a и b прямой в выражении (1.87) аналогично приводят к решению систем линейных уравнений.

В результате решения данной задачи получим открытую кинематическую цепь AD .

3⁰. Пусть заданы коэффициенты прямой $a=c=0$ плоскости Q_2 , координаты X_{D_i}, Y_{D_i} точки D и угол поворота φ_i плоскости Q_1 .

Задача в этом случае сводится к синтезу разомкнутой четырехзвенной цепи ABD по пяти параметрам: X_A, Y_A, x_b, y_b, b (рисунок 1.1, таблица 1.3) Эта модификация ИКЦ может рассматриваться как частный случай ИКЦ, представленный на рисунке 2.1, таблицы 1.3. Поэтому для определения параметров X_A, Y_A, x_b, y_b, b могут быть использованы условия минимума целевой функции (1.71), соответственно при условии $a=c=0$.

4⁰. Пусть заданы координаты X_{A_i}, Y_{A_i} точки A , угол поворота φ_i плоскости Q_1 , коэффициенты искомой прямой $a=c=0$, и заданы положения точки $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i})$.

Задача сводится к синтезу открытой трехзвенной цепи ABD по трем параметрам: x_b, y_b, b (рисунок 1.2, таблица 1.3). Эта модификация ИКЦ может рассматриваться как частный случай любого из двух модификаций ИКЦ, представленных на рисунках 1.1 и 2.2 таблицы 1.3, соответственно при условиях $X_A = X_{A_i}, Y_A = Y_{A_i}$ и $a=c=0$. Поэтому для определения параметров x_b, y_b, b могут быть использованы условия минимума функций указанных двух модификаций ИКЦ. Из этих двух условий предпочтительнее использовать непосредственно условия (1.71), сводящиеся к системе линейных уравнений (1.91) полагая в них $a=c=0$ и определяя искомые параметры как решение системы (1.91).

5⁰. Пусть заданы координаты $x_b = y_b = 0$ точки B на плоскости Q_1 , координаты X_{A_i}, Y_{A_i} точки A и координаты X_{D_i}, Y_{D_i} точки D , угол поворота ψ_i плоскости Q_2 .

Требуется найти на плоскости Q_2 такую прямую, чтобы прямая на плоскости Q_2 в заданных N положениях наиболее близко проходила от точки $A(X_{A_i}, Y_{A_i}) \in Q$.

Задача в этом случае сводится к синтезу разомкнутой двухзвенной цепи AD по трем параметрам: a, b, c (рисунок 3.2, таблица 1.3). Эта модификация ИКЦ может рассматриваться как частный случай любого из двух модификаций ИКЦ, представленных на рисунках 2.2 и 3.1 таблицы 1.1, соответственно при условиях $x_b = y_b = 0$ и $X_A = X_{A_i}, Y_A = Y_{A_i}$.

Поэтому для определения параметров a, b, c могут быть использованы условия минимума целевых функций указанных модификаций ИКЦ. Из этих двух условий предпочтительнее использовать непосредственные условия (1.71), сводящиеся к системе линейных уравнений (1.91), полагая в них $x_b = y_b = 0$ и определяя искомые параметры как решение системы (1.91).

2 Кинематический анализ плоских рычажных механизмов с применением векторного исчисления

Теория синтеза механизмов и машин тесно связаны с задачей кинематического анализа. Единство задач анализа и синтеза обусловлено совпадением уравнений, определяющих взаимозависимость переменных величин и фиксируемых параметров механизмов и используемых в каждом случае в своих целях. Более того, при решении задачи синтеза необходимо использовать уравнения кинематического анализа в качестве ограничений. Например, при решении задачи синтеза направляющих и передаточных механизмов высоких классов нужно использовать уравнения кинематики для определения угла поворота ψ плоскости, Q_2 если он не задан в случае, когда рассматриваемая задача синтеза разомкнутой четырехзвенной цепи $ABCD$ (см. п.1.2). Поэтому в данной главе предлагается векторный метод кинематического анализа, который хорошо согласуется с изложенным в предыдущей главе методом синтеза ИКЦ, а также может использоваться самостоятельно для решения задач о положениях, скоростях и ускорениях синтезируемого механизма.

2.1 Кинематический анализ плоских рычажных механизмов II класса

В этом подразделе рассматривается задача анализа передаточного и направляющего четырехзвенных механизмов II класса с применением векторного исчисления. Кинематическая схема передаточного механизма представлена на рисунке 2.1. Пусть заданы длины звеньев l_0, l_1, l_2, l_3 и угол поворота φ_1 входного звена AB . Необходимо определить положения, скорость и ускорения всех звеньев.

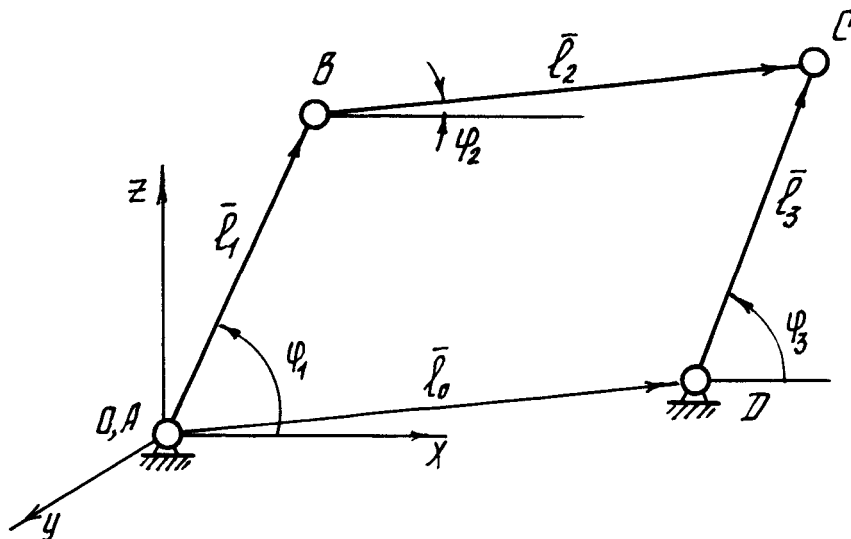


Рисунок 2.1

Запишем условие замкнутости векторного контура

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_0 + \vec{l}_3 \quad (2.1)$$

Введем систему координат $Oxyz$ с единичными ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Положение входного звена AB определяем в виде

$$\bar{l}_1 = l_1 \{ \bar{i} \cos \varphi_1 + \bar{j} \sin \varphi_1 \}$$

Перепишем уравнение (2.1) относительно неизвестных векторов l_2, l_3 в виде

$$\bar{l}_2 - \bar{l}_3 = \bar{l}_0 - \bar{l}_3 = \bar{L} \quad (2.2)$$

Суть предполагаемого метода определения векторов l_2, l_3 состоит в следующем. Разложим искомые вектора l_2 и l_3 по ортогональным векторам $\bar{L}$ и $(\bar{k} \times \bar{L})$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{l}_2 &= p_2 \bar{L} + q_2 (\bar{k} \times \bar{L}) \\ \bar{l}_3 &= p_3 \bar{L} + q_3 (\bar{k} \times \bar{L}) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где p_2, q_2, p_3, q_3 – неизвестные пока координаты векторов $\bar{l}_2$ и $\bar{l}_3$ в новой системе координат.

Подставим уравнения (2.3) в выражение (2.2), получим

$$(p_2 - p_3) \bar{L} + (q_2 - q_3) (\bar{k} \times \bar{L}) = \bar{L} \quad (2.4)$$

Далее учитывая, что $q_2 = q_3 = q$ и $p_2 = p, p_3 = p - 1$ систему (2.3) представим в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{l}_2 &= p \bar{L} + q (\bar{k} \times \bar{L}) \\ \bar{l}_3 &= (p - 1) \bar{L} + q (\bar{k} \times \bar{L}) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

где p и q – неизвестные параметры.

Определим параметры p и q из системы (2.5). Для этого возведем в квадрат обе части первого и второго уравнений системы (2.5):

$$\left. \begin{aligned} l_2^2 &= L^2 (p^2 + q^2) \\ l_3^2 &= L^2 [(p - 1)^2 + q^2] \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{2} + \frac{l_2^2 - l_3^2}{2L^2} \\ q &= \pm \left[\frac{l_2^2}{L^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{l_2^2 - l_3^2}{2L^2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Здесь знак плюс и минус во втором равенстве соответствуют разным сборкам четырехзвенного механизма $ABCD$.

Положения всех звеньев механизма $ABCD$ можно определить из скалярных произведений ортов системы координат $Oxyz$ и найденных векторов. Действительно, для определения положений φ_2 и φ_3 справедливы равенства:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{\bar{l}_2 \cdot \bar{j}}{l_2 \cdot \bar{i}} = \frac{pL_y + qL_x}{pL_x - qL_y} \\ \operatorname{tg} \varphi_3 &= \frac{\bar{l}_3 \cdot \bar{j}}{l_3 \cdot \bar{i}} = \frac{(p - 1)L_y + qL_x}{(p - 1)L_x - qL_y} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

где

$$\bar{L} = L_x \cdot \bar{i} + L_y \cdot \bar{j},$$

$$\bar{L}_x = l_{0x} - l_1 \cos \varphi_1,$$

$$\bar{L}_y = l_{0y} - l_1 \sin \varphi_1$$

и решение системы (2.8) можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= \arctg \frac{pL_y + qL_x}{pL_x - qL_y} \\ \varphi_3 &= \arctg \frac{(p-1)L_y + qL_x}{(p-1)L_x - qL_y} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Перейдем к определению аналогов скоростей. Для этого продифференцируем (2.2) по φ_1 :

$$\bar{l}'_2 - \bar{l}'_3 = -\bar{l}'_1 \quad (2.10)$$

где

$$\bar{l}'_2 = (\bar{k} \times \bar{l}_2) \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = (\bar{k} \times \bar{l}_2) \varphi'_2,$$

$$\bar{l}'_3 = (\bar{k} \times \bar{l}_3) \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = (\bar{k} \times \bar{l}_3) \varphi'_3,$$

$$\bar{l}'_1 = \bar{k} \times \bar{l}_1$$

Отсюда

$$\bar{k} \times \bar{l}_2 \varphi'_2 - \bar{k} \times \bar{l}_3 \varphi'_3 = -\bar{k} \times \bar{l}_1. \quad (2.11)$$

Умножая уравнение (2.11) скалярно на $\bar{l}_3$, получим

$$\varphi'_2 = -\frac{[\bar{l}_3 \bar{k} \bar{l}_1]}{[\bar{l}_3 \bar{k} \bar{l}_2]} \quad (2.12)$$

умножая скалярно на $\bar{l}_2$, аналогично имеем

$$\varphi'_3 = -\frac{[\bar{l}_2 \bar{k} \bar{l}_1]}{[\bar{l}_3 \bar{k} \bar{l}_2]} \quad (2.13)$$

Перейдем к определению аналогов ускорений. Для этого уравнение (2.11) продифференцируем по φ_1 :

$$\bar{k} \times \bar{l}_2 \varphi''_2 - \bar{k} \times \bar{l}_2 \varphi'^2_2 - \bar{k} \times \bar{l}_3 \varphi''_3 + \bar{k} \times \bar{l}_3 \varphi'^2_3 = \bar{k} \times \bar{l}_1 \quad (2.14)$$

Умножая скалярно на $\bar{l}_2$ и $\bar{l}_3$, получим аналоги ускорений звеньев BC и CD в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi''_2 &= \frac{(\bar{L}_1 l_3)}{[\bar{l}_3 \bar{k} \bar{l}_2]} \\ \varphi''_3 &= \frac{(\bar{L}_1 l_2)}{[\bar{l}_3 \bar{k} \bar{l}_2]} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

где

$$\bar{L}_1 = \bar{k} \times \bar{l}_1 + \bar{k} \times \bar{l}_2 \varphi'^2_2 - \bar{k} \times \bar{l}_3 \varphi'^2_3$$

Таким образом, полученные формулы позволяют определить в явном виде положения, скорости и ускорения всех звеньев передаточного механизма $ABCD$.

Положение шатунной точки M звена BM направляющего четырехзвенного механизма $ABMCD$ (рисунок 2.2) определяется в зависимости от положения звена BC следующим образом:

$$\bar{\rho}_M = \bar{l}_1 + \frac{r \cos \theta}{l_2^2} \bar{l}_2 + \frac{r \sin \theta}{l_2^2} (\bar{k} \times \bar{l}_2) \quad (2.16)$$

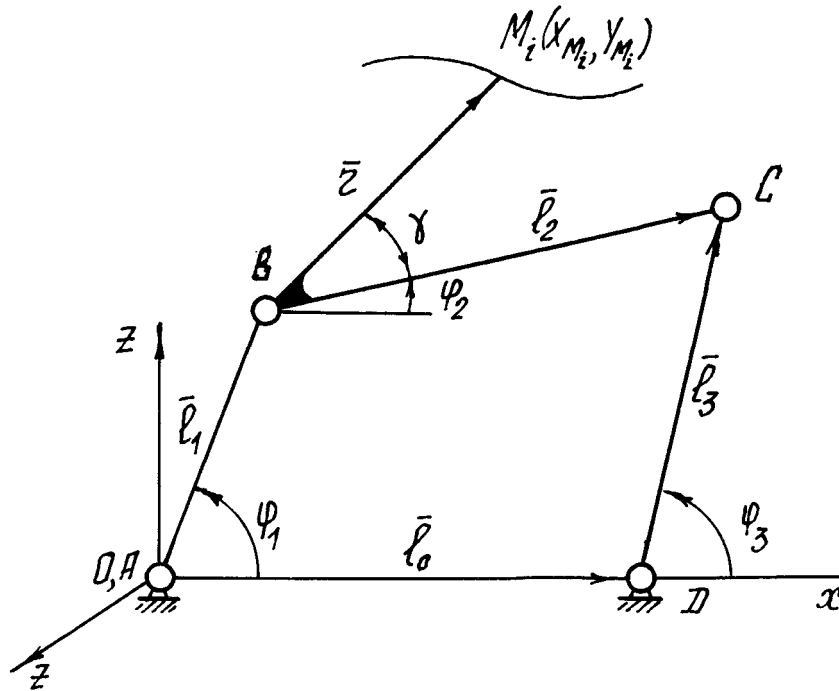


Рисунок 2.2

Аналоги скоростей и ускорений определяются дифференцированием уравнений (2.16) по φ_1 :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}'_M &= -\bar{l}_1 + \frac{r \cos \theta}{l_2} (\bar{k} \times \bar{l}_2) \varphi'_2 - \frac{r \sin \theta}{l_2} \bar{l}_2 \varphi'_2 \\ \bar{\rho}''_M &= -\bar{l}_1 + \frac{r \cos \theta}{l_2} (\bar{k} \times \bar{l}_2) \varphi''_2 - \frac{r \sin \theta}{l_2} \bar{l}_2 \varphi''_2 - \\ &\quad - \frac{r \cos \theta}{l_2} \bar{l}_2 \varphi'^2_2 - \frac{r \sin \theta}{l_2} (\bar{k} \times \bar{l}_2) \varphi'^2_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Рассмотренная методика может быть использована для анализа четырехзвенного механизма с поступательными парами. Можно воспользоваться полученными формулами и непосредственно, осуществив предельный переход при длинах соответствующих звеньев, стремящихся к бесконечности.

На основании формул, выведенных в этом параграфе, был произведен кинематический анализ синтезированных механизмов II класса. Второе уравнение системы (2.9) было применено при синтезе направляющих и

передаточных механизмов для определения неизвестного положения подвижной плоскости Q_2 . В приложении 1 приведена распечатка программы анализа на языке Фортран IV.

2.2 Кинематический анализ плоских рычажных механизмов III класса

Механизмы III класса, благодаря своей структуре, могут обеспечить сложные законы движения шатунных точек и ведомых звеньев. Например, с помощью такого механизма можно воспроизвести заданные движения двух ведомых (выходных) звеньев при одном ведущем (входном) звене.

Вопросы синтеза и кинематического анализа механизмов III класса недостаточно изучены, поэтому эти механизмы получили ограниченное применение в народном хозяйстве.

В данном подразделе рассматривается методика кинематического анализа передаточного механизма III класса с использованием векторного исчисления на примере механизма III класса с ползуном 5 и ведущим звеном 1 (рисунок 2.3).

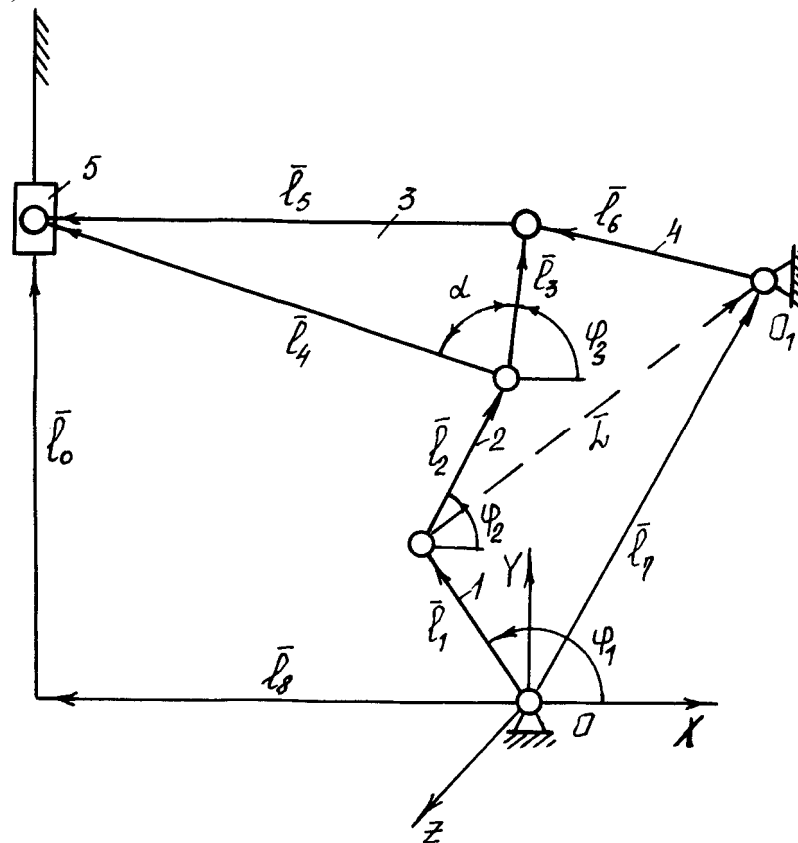


Рисунок 2.3

Для этого механизма можно составить три следующих векторных уравнения замкнутости:

$$\left. \begin{aligned} \bar{l}_2 + \bar{l}_3 - \bar{l}_6 &= \bar{L} \\ \bar{l}_3 + \bar{l}_5 - \bar{l}_4 &= 0 \\ \bar{l}_2 + \bar{l}_4 - \bar{l}_0 &= \bar{l}_8 - \bar{l}_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

где $\bar{L} = \bar{l}_7 - \bar{l}_1$ – известная вектор-функция обобщенной координаты φ_1 .

Выберем любые два из искоемых векторов в системе (2.18) и разложим их по ортогональным векторам $\bar{L}$ и $(\bar{k} \times \bar{L})$. Пусть это будут вектора $\bar{l}_2$ и $\bar{l}_3$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{l}_2 &= p_2 \bar{L} + q_2 (\bar{k} \times \bar{L}), \\ \bar{l}_3 &= p_3 \bar{L} + q_3 (\bar{k} \times \bar{L}), \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - орты системы координат $Oxyz$;

p_2, q_2 и p_3, q_3 – неизвестные пока координаты разложения.

Остальные вектора на основе равенства (2.18) можно выразить через выбранные. Вектор $\bar{l}_4$ определяется поворотом вектора $\bar{l}_3$ на угол α – между ними, а остальные вектора $\bar{l}_6$, $\bar{l}_5$ и $\bar{l}_0$ определяются из равенств (2.18).

Подставляя в полученные выражения (2.19), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{l}_4 &= \frac{l_4}{l_3} [p \bar{L} + q (\bar{k} \times \bar{L})], \\ \bar{l}_5 &= \left(\frac{l_4}{l_3} p - p_3 \right) \bar{L} + \left(\frac{l_4}{l_3} q - q_3 \right) (\bar{k} \times \bar{L}), \\ \bar{l}_6 &= (p_2 + p_3 - 1) \bar{L} + (q_2 + q_3) (\bar{k} \times \bar{L}), \\ \bar{l}_0 &= \bar{l}_1 - \bar{l}_8 + \left(p_2 + \frac{l_4}{l_3} p \right) \bar{L} + \left(q_2 + \frac{l_4}{l_3} q \right) (\bar{k} \times \bar{L}), \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

где

$$p = p_3 \cos \alpha - q_3 \sin \alpha$$

$$q = p_3 \sin \alpha + q_3 \cos \alpha$$

В системе уравнений (2.20) параметры p_2, q_2, p_3, q_3 являются неизвестными. Эти параметры можно определить, возведя в квадрат обе части уравнений (2.19) и третьего уравнения системы (2.20) и скалярно умножая последнее уравнение на $\bar{l}_8$:

$$\left. \begin{aligned} (p_2^2 + q_2^2) L^2 &= l_2^2, \\ (p_3^2 + q_3^2) L^2 &= l_3^2, \\ [(p_3 - p_2 - 1)^2 + (q_2 + q_3)^2] L^2 &= l_6^2, \\ \left(p_2 + \frac{l_4}{l_3} \right) (l_8, \bar{L}) + \left(q_2 + \frac{l_4}{l_3} q \right) [\bar{l}_8, \bar{k}, \bar{L}] &= l_8^2 - (l_8, l_1). \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Эта нелинейная система уравнений в общем случае имеет не единственное решение и число этих решений равно числу сборок механизма.

Систему (2.21) можно упростить, сведя к двум уравнениям относительно q_2 и q_3 . Для этого из второго и последнего уравнения системы (2.21) параметры p_3 и p_2 выразим через q_3 и q_2 :

$$p_3 = \pm \left[\frac{l_3^2}{L^2} - q_3^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.22)$$

$$p_2 = a_{11}p_3 + a_{12}q_3 + a_{13}q_2 + a_{14} \quad (2.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= -\frac{l_4}{l_3}(\cos \alpha - a_{13} \sin \alpha), \\ a_{12} &= \frac{l_4}{l_3}(\sin \alpha - a_{13} \cos \alpha), \\ a_{13} &= -\frac{[l_8, \bar{k}, \bar{L}]}{(\bar{l}_8, \bar{L})}, \\ a_{14} &= \frac{l_8^2 - (\bar{l}_8, \bar{l}_1)}{(\bar{l}_8, \bar{L})}. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя параметры p_2 и p_3 в первое и третье уравнения системы (2.21), имеем систему двух уравнений относительно q_2 и q_3 :

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \pm \left[\frac{l_3^2}{L^2} - q_3^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot a_{11} + a_{12}q_3 + a_{13}q_2 + a_{14} \right\}^2 + q_2^2 &= \frac{l_3^2}{L^2}, \\ \left\{ \pm \left[\frac{l_3^2}{L^2} - q_3^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + a_{11}) + a_{12}q_3 + a_{13}q_2 + a_{14} - 1 \right\}^2 + (q_2 + q_3)^2 &= \frac{l_6^2}{L^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Здесь знаки плюс и минус перед радикалом соответствуют разным сборкам механизма. Из решений системы (2.24) с учетом (2.22) и (2.23) определяем неизвестные параметры p_2, q_2, p_3, q_3 . В качестве начальных приближений проекции соответствующих векторов-функций $\bar{L}$ и $(\bar{k} \times \bar{L})$ для определенного положения механизма, заданного условиями синтеза.

Положения остальных звеньев механизма находятся из скалярных произведений ортов системы координат $Oxuz$ и найденных векторов:

$$\left. \begin{aligned} tg\varphi_2 &= \frac{\bar{l}_2 \bar{j}}{\bar{l}_2 \bar{i}} = \frac{p_2 L_y + q_2 L_x}{p_2 L_x + q_2 L_y} \\ tg\varphi_3 &= \frac{\bar{l}_3 \bar{j}}{\bar{l}_3 \bar{i}} = \frac{p_3 L_y + q_3 L_x}{p_3 L_x - q_3 L_y} \\ tg\varphi_4 &= \frac{\bar{l}_4 \bar{j}}{\bar{l}_4 \bar{i}} = \frac{p L_y + q L_x}{p L_x + q_3 L_y} \\ tg\varphi_6 &= \frac{\bar{l}_6 \bar{j}}{\bar{l}_6 \bar{i}} = \frac{(p_2 + p_3 - 1)L_y + (q_2 + q_3)L_x}{(p_2 + p_3 - 1)L_x - (q_2 + q_3)L_y} \\ l_0 &= l_{1y} - l_{8y} + \left(p_2 + \frac{l_4}{l_3} p \right) \cdot L_x + \left(q_2 + \frac{l_4}{l_3} q \right) \cdot L_y \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

где

$$L_x = l_{7x} - l_1 \cos \varphi_1, \quad L_y = l_{7y} - l_1 \sin \varphi_1$$

Перейдем к определению аналогов скоростей и ускорений. Дифференцируя (2.18) по φ_1 с учетом $\varphi'_3 = \varphi'_4 = \varphi'_5$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{l}_2 \varphi'_2 + \bar{l}_3 \varphi'_3 - \bar{l}_6 \varphi'_6 &= -\bar{l}_1, \\ \bar{l}_2 \varphi'_2 + \bar{l}_4 \varphi'_3 - \bar{i} l'_0 &= -\bar{l}_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Аналоги скоростей звеньев можно определить из решения линейной системы (2.26):

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_2 &= \frac{1}{\Delta} \{ (\bar{l}_1, \bar{j}) [\bar{l}_3, \bar{k}, \bar{l}_6] - (\bar{l}_4, \bar{j}) [\bar{l}_1, \bar{k}, \bar{l}_6] \}, \\ \varphi'_3 &= -\frac{1}{\Delta} \{ (\bar{l}_1, \bar{j}) [\bar{l}_2, \bar{k}, \bar{l}_6] - (\bar{l}_2, \bar{j}) [\bar{l}_1, \bar{k}, \bar{l}_6] \} \\ \varphi'_6 &= \frac{1}{l_6^2} [(\bar{l}_2, \bar{l}_6) \varphi'_2 + (\bar{l}_3, \bar{l}_6) \varphi'_3 + (\bar{l}_1, \bar{l}_6)], \\ l'_0 &= (l'_1, \bar{i}) + (\bar{l}_2, \bar{i}) \varphi'_2 + (\bar{l}_4, \bar{i}) \varphi'_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

где

$$\Delta = (\bar{l}_4 \bar{j}) [\bar{l}_2 \bar{k} \bar{l}_6] - (\bar{l}_2 \bar{j}) [\bar{l}_3 \bar{k} \bar{l}_6]$$

Для определения аналогов ускорений звеньев продифференцируем (2.26) по φ_1 :

$$\left. \begin{aligned} \bar{l}_2 \varphi''_2 + \bar{l}_3 \varphi''_3 - \bar{l}_6 \varphi''_6 &= -\bar{L}_1, \\ \bar{l}_2 \varphi''_2 + \bar{l}_4 \varphi''_3 - \bar{i} l''_0 &= -\bar{L}_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{L}_1 &= \bar{k} \times \bar{l}_1 + \bar{k} \times \bar{l}_2 \varphi_2'^2 + \bar{k} \times \bar{l}_3 \varphi_3'^2 - \bar{k} \times \bar{l}_6 \varphi_6'^2, \\ \bar{L}_2 &= \bar{k} \times \bar{l}_1 + \bar{k} \times \bar{l}_2 \varphi_2'^2 + \bar{k} \times \bar{l}_4 \varphi_3'^2.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Решение линейной системы (2.28) можно аналогично записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned}\varphi_2'' &= \frac{1}{\Delta} \{ (\bar{L}_2, \bar{j}) [\bar{l}_3, \bar{k}, \bar{l}_6] - (\bar{l}_4, \bar{j}) [\bar{L}_1, \bar{k}, \bar{l}_6] \}, \\ \varphi_3'' &= -\frac{1}{\Delta} \{ (\bar{L}_2, \bar{j}) [\bar{l}_2, \bar{k}, \bar{l}_6] - (\bar{l}_2, \bar{j}) [\bar{L}_1, \bar{k}, \bar{l}_6] \}, \\ \varphi_6'' &= \frac{1}{l_6^2} [(\bar{l}_2, \bar{l}_6) \varphi_2'' + (\bar{l}_3, \bar{l}_6) \varphi_3'' + (\bar{L}_1, \bar{l}_6)], \\ l_0'' &= (\bar{L}_2, \bar{i}) + (\bar{l}_2, \bar{i}) \varphi_2'' + (\bar{l}_4, \bar{i}) \varphi_3''\end{aligned}\right\} \quad (2.30)$$

Использование формул (2.25), (2.27) и (2.30) позволяет довольно просто составить алгоритм решения задачи кинематического анализа механизма III класса на ЭВМ.

2.3 Кинематический анализ плоских рычажных механизмов IV класса

При решении задач синтеза передаточных механизмов со сложной передаточной функцией, например, обеспечивающих остановки выходного звена, в большинстве случаев приходим к рычажному механизму IV класса. Этот механизм можно формально рассматривать как шарнирный четырехзвенник с переменной длиной шатуна, чем, очевидно, и достигается реализация сложных законов движения выходного звена. В данном подразделе предлагается векторный метод кинематического анализа механизма IV класса. Составим четыре векторных уравнения замкнутости контуров механизма (рисунок 2.4):

$$\left. \begin{aligned}\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_4 &= \bar{l}_0, \\ \bar{l}_1 + \bar{l}_7 + \bar{l}_8 - \bar{l}_6 &= \bar{l}_0, \\ \bar{l}_2 + \bar{l}_2 &= \bar{l}_7, \\ \bar{l}_4 + \bar{l}_6 &= \bar{l}_5\end{aligned}\right\} \quad (2.31)$$

Перепишем систему (2.31) относительно неизвестных векторов в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned}\bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_4 &= \bar{L}, \\ \bar{l}_7 + \bar{l}_8 - \bar{l}_4 &= \bar{L}, \\ \bar{l}_2 + \bar{l}_9 - \bar{l}_7 &= 0, \\ \bar{l}_4 + \bar{l}_6 - \bar{l}_5 &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (2.32)$$

где

$\bar{l}_0 = \overline{OO_1}$ – вектор, соединяющий стойки механизма,

$\bar{L} = \ell_0 - \ell_1$ – известная вектор-функция обобщенной координаты φ_1 .

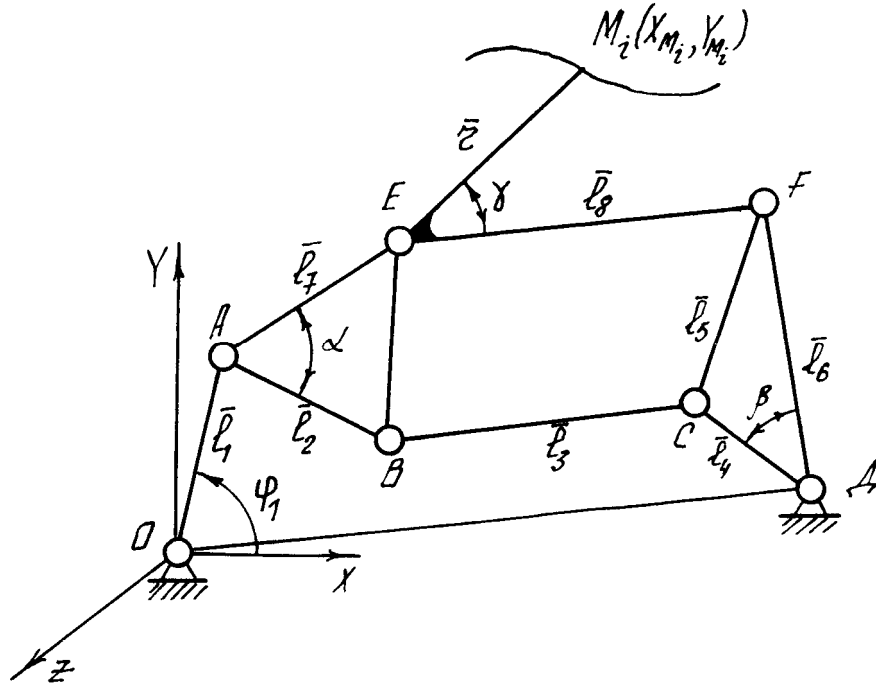


Рисунок 2.4

Выберем любые два из искомых векторов в системе (2.32) и разложим их по ортогональным векторам $\bar{L}$ и $(\bar{k} \times \bar{L})$. Пусть это будут вектора $\bar{\ell}_2$ и $\bar{\ell}_4$:

$$\begin{aligned} \bar{\ell}_2 &= p_2 \bar{L} + q_2 (\bar{k} \times \bar{L}), \\ \bar{\ell}_4 &= p_4 \bar{L} + q_4 (\bar{k} \times \bar{L}), \end{aligned} \quad (2.33)$$

где p_2, q_2, p_4, q_4 – неизвестные координаты разложения.

Остальные неизвестные вектора системы (2.31) можно выразить через выбранные следующим образом. Векторы $\bar{\ell}_7$ и $\bar{\ell}_5$ определяются поворотом на соответствующие углы α и β векторов $\bar{\ell}_2$ и $\bar{\ell}_4$, где α и β известные углы между векторами $\bar{\ell}_2$, $\bar{\ell}_7$ и $\bar{\ell}_4$, $\bar{\ell}_5$ соответственно.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\ell}_7 &= p_7 \bar{L} + q_7 (\bar{k} \times \bar{L}), \\ \bar{\ell}_5 &= p_5 \bar{L} + q_5 (\bar{k} \times \bar{L}), \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_7 &= \frac{\ell_7}{\ell_2} (p_2 \cos \alpha - q_2 \sin \alpha), \\ P_7 &= \frac{\ell_7}{\ell_2} (p_2 \sin \alpha - q_2 \cos \alpha), \\ P_5 &= \frac{\ell_5}{\ell_4} (p_4 \cos \beta - q_4 \sin \beta), \\ P_5 &= \frac{\ell_5}{\ell_4} (p_4 \sin \beta - q_4 \cos \beta). \end{aligned} \right\}$$

Векторы $\bar{\ell}_3, \bar{\ell}_6, \bar{\ell}_8, \bar{\ell}_9$ определяются из системы (2.31) с учетом (2.33) и (2.34) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\ell}_3 &= (1 - p_2 - p_4) - (q_2 + q_4)(\bar{k} \times \bar{L}), \\ \bar{\ell}_6 &= (p_5 - p_4)\bar{L} + (q_5 - q_4)(\bar{k} \times \bar{L}), \\ \bar{\ell}_8 &= (1 + p_5 - p_4 - p_7)\bar{L} + (q_5 - q_4 - q_7)(\bar{k} \times \bar{L}), \\ \bar{\ell}_9 &= (p_7 - p_2)\bar{L} + (q_7 - q_2)(\bar{k} \times \bar{L}) \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

В системах (2.33), (2.34) и (2.35) неизвестными являются p_2, p_4, q_2, q_4 . Для чего определения этих неизвестных параметров возведем в квадрат обе части уравнений системы (2.34), а также первого и третьего уравнений системы (2.35). В результате получаем систему уравнений с четырьмя неизвестными p_2, p_4, q_2, q_4 :

$$\left. \begin{aligned} (p_2^2 + q_2^2)L^2 &= \ell_2^2, \\ (p_4^2 + q_4^2)L^2 &= \ell_4^2, \\ [(1 - p_4 - p_2)^2 + (q_2 + q_4)^2]L^2 &= \ell_3^2, \\ [(1 + p_5 - p_4 - p_7)^2 + (q_5 - q_4 - q_7)^2]L^2 &= \ell_8^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Множество корней системы (2.36) определяют число сборок механизма. Систему уравнений (2.36) можно свести к двум уравнениям относительно q_2 и q_4 . Для этого из первого и второго уравнения системы (2.36) параметры p_2 и p_4 выразим через q_2 и q_4 :

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \pm \left[\sqrt{\frac{l_2^2}{L^2} - q_2^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ p_4 &= \pm \left[\sqrt{\frac{l_4^2}{L^2} - q_4^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Последние два уравнения системы (2.36) с учетом (2.34) и (2.37) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} (1 - p_2 - p_4)^2 + (q_2 + q_4)^2 &= \frac{l_3^2}{L^2}, \\ [a_{11}p_4 + a_{12}q_4 + a_{13}p_2 + a_{14}q_2 + 1]^2 + [-a_{12}p_4 + a_{11}q_4 - a_{14}p_2 + a_{13}q_2]^2 &= \frac{l_8^2}{L^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\ell_5}{\ell_4} \cos \beta - 1, & a_{13} &= -\frac{\ell_7}{\ell_2} \cos \alpha, \\ a_{12} &= -\frac{\ell_5}{\ell_4} \sin \beta, & a_{14} &= \frac{\ell_7}{\ell_7} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Знаки плюс и минус в системе (2.37) соответствуют разным сборкам механизма. Из решений (2.38) с учетом (2.37) определяем неизвестные параметры p_2, p_4, q_2, q_4 . В качестве начальных приближений для решения системы (2.37) берутся проекции искомых векторов на ортогональные вектора $\bar{L}$ и $(\bar{k} \times \bar{L})$ для заданного условиями синтеза положения механизма. Обозначим орты прямоугольной системы координат $Oxyz$ через $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Тогда функции положения выходных звеньев механизма находятся и из скалярных произведений ортов системы координат $Oxyz$ и найденных векторов:

$$\left. \begin{aligned} tq\varphi_2 &= \frac{\bar{\ell}_2 \bar{j}}{\bar{\ell}_2 \bar{i}} = \frac{p_2 L_y + q_2 L_x}{p_2 L_x - q_2 L_y}, \\ tq\varphi_3 &= \frac{\bar{\ell}_3 \bar{j}}{\bar{\ell}_3 \bar{i}} = \frac{(1 - p_2 - p_4) L_y - (q_2 + q_4) L_x}{(1 - p_2 - p_4) \bar{L}_x + (q_2 + q_4) \bar{L}_y}, \\ tq\varphi_4 &= \frac{\bar{\ell}_4 \bar{j}}{\bar{\ell}_4 \bar{i}} = \frac{p_4 L_y + q_4 L_x}{p_4 L_x - q_4 L_y}, \\ tq\varphi_5 &= \frac{\bar{\ell}_5 \bar{j}}{\bar{\ell}_5 \bar{i}} = \frac{p_5 L_y + q_5 L_x}{p_5 L_x - q_5 L_y}, \\ tq\varphi_6 &= \frac{\bar{\ell}_6 \bar{j}}{\bar{\ell}_6 \bar{i}} = \frac{(p_5 - p_4) L_y + (q_5 - q_4) L_x}{(p_5 - p_4) \bar{L}_x - (q_5 - q_4) \bar{L}_y}, \\ tq\varphi_7 &= \frac{\bar{\ell}_7 \bar{j}}{\bar{\ell}_7 \bar{i}} = \frac{p_7 L_y + q_7 L_x}{p_7 L_x - q_7 L_y}, \\ tq\varphi_8 &= \frac{\bar{\ell}_8 \bar{j}}{\bar{\ell}_8 \bar{i}} = \frac{(1 + p_5 - p_4 - p_7) L_y + (q_5 - q_4 - q_7) L_x}{(1 + p_5 - p_4 - p_7) \bar{L}_x - (q_5 - q_4 - q_7) \bar{L}_y}, \\ tq\varphi_9 &= \frac{\bar{\ell}_9 \bar{j}}{\bar{\ell}_2 \bar{i}} = \frac{(p_7 - p_2) L_y + (q_7 - q_2) L_x}{(p_7 - p_2) \bar{L}_x - (q_7 - q_2) \bar{L}_y}, \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

где

$$\begin{aligned} L_x &= \ell_{ox} - \ell_1 \cos \varphi_1, \\ L_y &= \ell_{oy} - \ell_1 \sin \varphi_1. \end{aligned}$$

Аналогичность формул системы (2.39) позволяет вычислить функции положения по единому алгоритму.

Перейдем к определению аналогов скоростей. Для этого продифференцируем первые два уравнения системы (2.31) по координате φ_1 с учетом $\varphi_2' = \varphi_7'$, $\varphi_6' = \varphi_4'$, получим:

$$\begin{aligned} \bar{\ell}_2 \varphi_2' + \bar{\ell}_3 \varphi_3' + \bar{\ell}_4 \varphi_4' &= -\ell_1', \\ \bar{\ell}_7 \varphi_2' + \bar{\ell}_8 \varphi_8' - \bar{\ell}_6 \varphi_4' &= -\ell_1', \end{aligned} \quad (2.40)$$

Умножим скалярно первое уравнение на $\bar{k} \times \bar{\ell}_3$, второе - на $\bar{k} \times \bar{\ell}_8$:

$$\begin{aligned} [\bar{\ell}_2 \bar{k} \bar{\ell}_8] \varphi'_2 + [\bar{\ell}_4 \bar{k} \bar{\ell}_3] \varphi'_4 &= -[\bar{\ell}_1 \bar{k} \bar{\ell}_3], \\ [\bar{\ell}_7 \bar{k} \bar{\ell}_8] \varphi'_2 - [\bar{\ell}_6 \bar{k} \bar{\ell}_8] \varphi'_4 &= -[\bar{\ell}_1 \bar{k} \bar{\ell}_8]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Решение системы (2.41) можно записать в виде определителей из смешанного произведения векторов

$$\begin{aligned} \varphi'_2 &= -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [\bar{\ell}_3 \bar{k} \bar{\ell}_1] & [\bar{\ell}_4 \bar{k} \bar{\ell}_3] \\ [\bar{\ell}_1 \bar{k} \bar{\ell}_8] & [\bar{\ell}_6 \bar{k} \bar{\ell}_8] \end{vmatrix}, \\ \varphi'_4 &= -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [\bar{\ell}_2 \bar{k} \bar{\ell}_3] & [\bar{\ell}_3 \bar{k} \bar{\ell}_1] \\ [\bar{\ell}_7 \bar{k} \bar{\ell}_8] & [\bar{\ell}_8 \bar{k} \bar{\ell}_6] \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} [\bar{\ell}_2 \bar{k} \bar{\ell}_8] & [\bar{\ell}_4 \bar{k} \bar{\ell}_3] \\ [\bar{\ell}_7 \bar{k} \bar{\ell}_8] & [\bar{\ell}_8 \bar{k} \bar{\ell}_6] \end{vmatrix},$$

Остальные передаточные функции находим из системы (2.40)

$$\begin{aligned} \varphi'_3 &= -\frac{1}{\ell_3^2} \left[(\bar{\ell}_1 \bar{\ell}_3) + (\bar{\ell}_2 \bar{\ell}_3) \varphi'_2 + (\bar{\ell}_3 \bar{\ell}_4) \varphi'_4 \right] \\ \varphi'_8 &= \frac{1}{\ell_8^2} \left[(\bar{\ell}_6 \bar{\ell}_8) \varphi'_4 - (\bar{\ell}_7 \bar{\ell}_8) \varphi'_2 - (\bar{\ell}_1 \bar{\ell}_8)' \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

Для определения аналогов ускорений звеньев продифференцируем (2.40) по φ_1 :

$$\begin{aligned} \bar{\ell}_2 \varphi''_2 + \bar{\ell}_3 \varphi''_3 + \bar{\ell}_4 \varphi''_4 &= -\bar{L}_1, \\ \bar{\ell}_7 \varphi''_2 + \bar{\ell}_8 \varphi''_8 - \bar{\ell}_6 \varphi''_4 &= -\bar{L}_2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Здесь вектора $\bar{L}_1$ и $\bar{L}_2$ определяется по вычисленным аналогам скоростей следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{L}_1 &= \bar{k} \times \bar{\ell}_1 + \bar{k} \times \bar{\ell}_2 \varphi'^2_2 + \bar{k} \times \bar{\ell}_3 \varphi'^2_3 + \bar{k} \times \bar{\ell}_4 \varphi'^2_4, \\ \bar{L}_2 &= \bar{k} \times \bar{\ell}_1 + \bar{k} \times \bar{\ell}_7 \varphi'^2_2 + \bar{k} \times \bar{\ell}_8 \varphi'^2_8 - \bar{k} \times \bar{\ell}_6 \varphi'^2_4 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Система (2.44) по своему виду аналогична системе (2.35) Поэтому решение последней системы может быть записано в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2'' &= -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \bar{l}_3 k \bar{L}_1 & \bar{l}_4 k \bar{l}_3 \\ \bar{L}_2 k \bar{l}_8 & \bar{l}_6 k \bar{l}_8 \end{vmatrix}, \\ \varphi_3'' &= -\frac{1}{l_3^2} [(\bar{L}_1 \bar{l}_3) + (\bar{l}_2 \bar{l}_3) \varphi_2'' + (\bar{l}_3 \bar{l}_4) \varphi_1''], \\ \varphi_4'' &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \bar{l}_2 k \bar{l}_3 & \bar{l}_3 k \bar{L}_1 \\ \bar{l}_7 k \bar{l}_8 & \bar{l}_8 k \bar{L}_2 \end{vmatrix}, \\ \varphi_8'' &= \frac{1}{l_8^2} [(\bar{l}_6 \bar{l}_8) \varphi_4'' - (\bar{l}_7 \bar{l}_8) \varphi_2'' - (\bar{L}_2 \bar{l}_8)] \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

На основании выведенных формул составлен алгоритм решения задачи кинематического анализа механизмов IV класса. Замена вращательного ведущего звена на поступательное не вносит существенных изменений в формулы кинематического анализа. По известным вектор – функциям (2.34) можно определить траектории, скорости и ускорения любых точек звеньев механизма. Например, для координат и скоростей точки М звена 7 нетрудно записать:

$$\begin{aligned} X_M &= l_1 \cos \varphi_1 + l_7 \cos \varphi_7 + r \cos(\gamma + \varphi_8), \\ Y_M &= l_1 \sin \varphi_1 + l_7 \sin \varphi_7 + r \sin(\gamma + \varphi_8), \\ X_M' &= -l_1 \sin \varphi_1 - l_7 \sin \varphi_7 \cdot \varphi_7' - r \sin(\gamma + \varphi_8) \cdot \varphi_8', \\ Y_M' &= l_1 \cos \varphi_1 + l_7 \cos \varphi_7 \cdot \varphi_7' + r \cos(\gamma + \varphi_8) \cdot \varphi_8', \end{aligned} \quad (2.47)$$

Данная методика была использована при кинематическом исследовании синтезированных передаточных механизмов IV класса.

3 Применение метода ψ -преобразования для решения задачи и синтеза плоских рычажных механизмов

3.1 О выборе метода поиска глобального экстремума

При синтезе плоских рычажных механизмов обычно приходим к так называемой задаче статической оптимизации [77], когда должны быть определены значения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, при которых функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает свое максимальное или минимальное значение. Задачи анализа и синтеза механизмов приводят к задаче нелинейного программирования, так как оптимизируемая функция, именуемая функцией цели, обычно является нелинейной функцией с линейными или нелинейными ограничениями.

Решение задач нелинейного программирования связано с большими трудностями. Регулярные алгоритмы отыскания глобальных экстремумов разработаны пока лишь для задач выпуклого программирования. Для этого существуют градиентные методы, а также классические методы вариационного исчисления, используемые в случае ограничений в виде равенств Лагранжа. При ограничениях в виде неравенств могут быть применены методы нелинейного программирования и последовательной безусловной минимизации [78]. Разные методы требуют выполнения различных условий, например, метод градиента работает, когда функция цели является выпуклой или вогнутой, но, даже в этом случае, слабым местом этого метода является выбор шага, особенно для многомерных задач. Основными трудностями при решении задач нелинейного программирования являются наличие многоэкстремальности у функции цели, а также необходимость выполнения условия дифференцируемости этой функции в любой точке и, особенно, в точке искомого экстремума. Именно такими свойствами обладают, как правило, целевые функции, используемые при анализе и синтезе механизмов.

При решении многоэкстремальных задач обычно поступают следующим образом: осуществляют градиентный спуск с различных точек и затем сравнивают полученные результаты. Наибольшее (наименьшее) значение среди найденных локальных экстремумов принимают за глобальный экстремум. Поэтому нет гарантии того, что найден именно глобальный экстремум даже при применении метода последовательной безусловной оптимизации. В данном пособии для нахождения экстремума целевых функций для задач синтеза и анализа различных механизмов использован метод ψ -преобразования [77]. Главное достоинство этого метода заключается в том, что это единственный среди известных методов, обеспечивающий сходимость процесса к глобальному экстремуму в многоэкстремальных задачах нелинейного программирования с невыпуклыми целевой функцией и ограничениями.

3.2 Сущность метода ψ -преобразования

Особенность этого метода связана с тем, что объектом исследования и анализа в нем является не сама функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, экстремум который должен быть определен, а некоторая функция $\psi(\xi)$, образуемая в результате преобразования $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. В основе этого преобразования лежит разбиение, применяемой для построения интеграла Лебега. Методом ψ -преобразования можно решать задачи с ограничениями, в которых экстремум может находиться на границе допустимого множества.

Преобразования функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в $\psi(\xi)$ заключаются в определении меры такого множества $E^* \subset E^n$, на котором $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ превосходит заданное значение ξ . Величина ξ изменяется в пределах $F_{min} \leq \xi \leq F_{max}$. Метод позволяет описать закон изменения указанной меры, когда ξ изменяется от минимального до максимального значения функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. В процессе построения преобразованной функции $\psi(\xi)$ образуются также функции $\bar{x}_1(\xi), \bar{x}_2(\xi), \dots, \bar{x}_j(\xi), \dots, \bar{x}_n(\xi)$, благодаря которым представляется возможным определить не только значение глобального экстремума, но и его координаты.

Аналитические возможности осуществления преобразования целевой функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в $\psi(\xi)$ ограничены и получить функцию $\psi(\xi)$ в результате приложения некоторого оператора к $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ возможно лишь в простейших случаях. Поэтому для расчета многомерных задач применяются по точечное построение функции $\psi(\xi), \bar{x}_1(\xi), \bar{x}_2(\xi), \dots, \bar{x}_n(\xi)$ и аппроксимации (экстраполяции) этих функций.

Значение функции $\psi(\xi_v)$ в точке ξ_v определяется при помощи вычисления многомерного интеграла

$$\psi(\xi) = \int \dots \int \theta(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3.1)$$

где $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - характеристическая функция, равная единице всюду, где $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \xi_v$, и нулю, где это условие не выполняется.

Построение функций $\bar{x}_j(\xi)$ ($j=1, N$) также осуществляется по точкам ξ_v . При этом $\bar{x}_j(\xi_v)$ определяется как среднее тех $x_1, x_2, \dots, x_n$, при которых

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \xi_v.$$

Особенности метода ψ -преобразования обуславливают следующую последовательность операций: сначала определяется значение ξ глобального экстремума, а затем определяются координаты $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ искомого глобального экстремума. В дальнейшем подстановкой значений $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ в $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определяется $F^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, которое сравнивается с ξ^* . При

равенстве $F^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и ξ^* задача решена правильно, а если разность $|F^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) - \xi^*|$ превосходит заданное значение точности решения задачи, то это означает, что где-то была допущена ошибка.

На основе теорем, которые доказаны в работе [77], можно сделать следующие выводы относительно функции $\psi(\xi)$:

1. Преобразованная функция $\psi(\xi)$ независимо от размерности прообраза $F(\bar{x})$ определена на прямой и является функцией одной переменной (рисунок 3.1).

2. Преобразованная функция $\psi(\xi)$ для всех функций $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, непрерывных на множестве E , является монотонно убывающей функцией.

3. Значение ξ^* , при котором $\psi(\xi^*) = 0$, равно величине глобального экстремума функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условии, что мера множества $\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{max} \}$ равна нулю.

Для решения задач статической оптимизации функция $\psi(\xi)$ выбирается в обобщенном виде:

$$\psi(\xi) = \int \dots \int_E \rho(\xi, x) \theta(\bar{x}) d\bar{x} \quad (3.2)$$

где

$$\rho(\xi, x) = [F(x) - \xi]^\ell, (\ell = 1, 2, \dots)$$

Координаты глобального экстремума можно определить как центры тяжести с помощью следующего соотношения

$$x(\xi) = \frac{\int \dots \int_E x \rho(\xi, x) \theta(\bar{x}) d\bar{x}}{\int \dots \int_E \rho(\xi, x) \theta(\bar{x}) d\bar{x}} \quad (3.3)$$

Как показано в работе [122] эта обобщенная функция является монотонно убывающей, непрерывной функцией ξ и не имеет разрывов первого рода независимо от вида целевой функции.

3.3 Вычисление n -мерных интегралов с использованием оптимальных ЛП_т – последовательностей

Чтобы определить функцию $\psi(\xi)$ в какой-либо точке ξ_v , необходимо вычислить многомерный интеграл (3.1). Для вычисления этого интеграла необходимо знание границы множества E^* . Границу множества E^* аналитически можно определить лишь в простейших случаях. В общем случае необходимо использовать численные методы определения дискретных точек границы множества E^* и приближенное его построение на основе интерполяции.

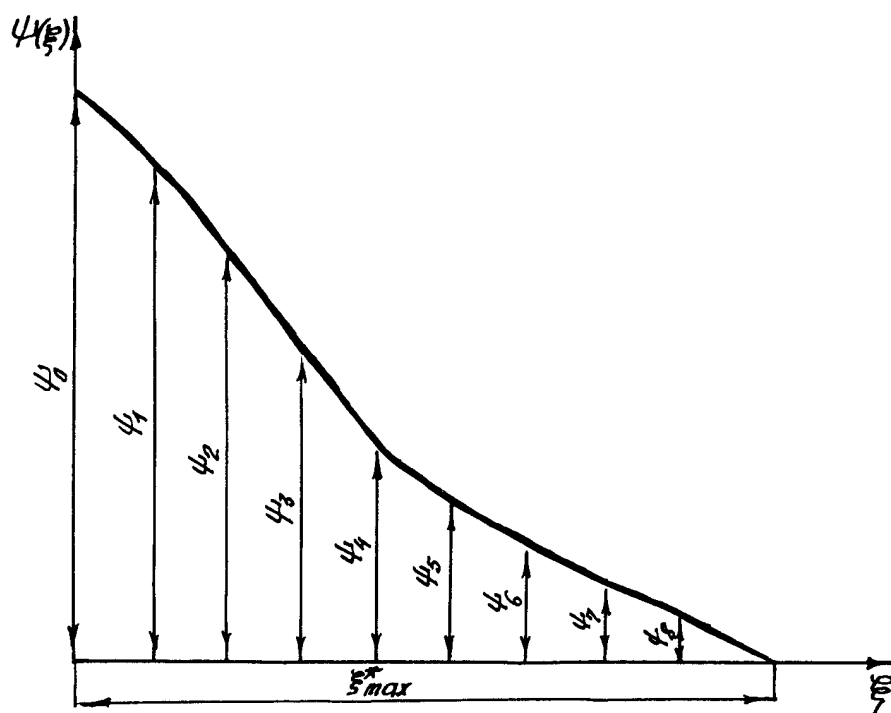
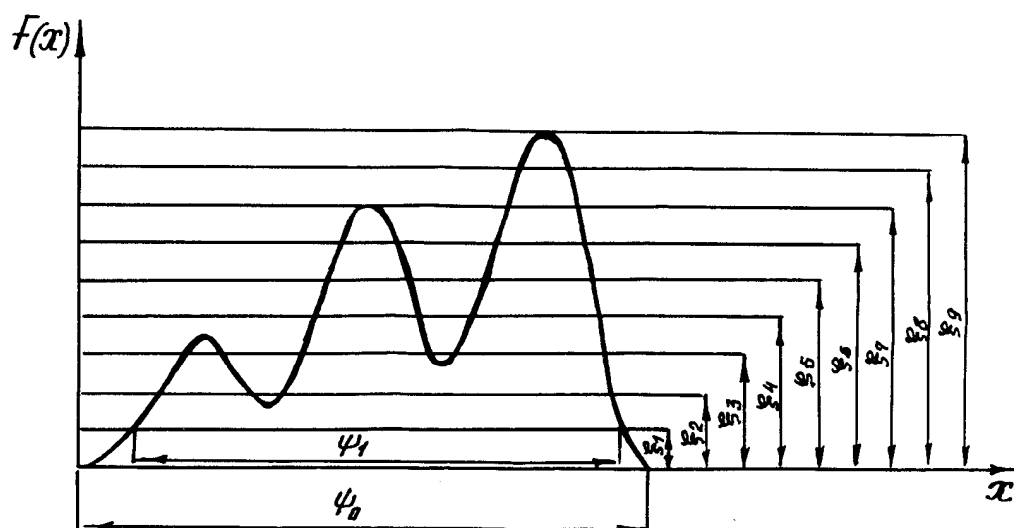


Рисунок 3.1.

Однако такой подход весьма трудоемок и требует больших затрат машинного времени, в особенности, при большой размерности n . Более эффективным считается подход, основанный на использовании оценки значения функции $\psi(\xi)$ по результатам статических испытаний с равномерным распределением случайных точек на множестве E^* . При проведении статических испытаний целесообразно использовать оптимальные ЛП_т – последовательности [79]. ЛП_т – поиск используется для зондирования пространства параметров.

Название ЛП_τ -поиска объясняется тем, что в качестве пробных точек в единичном многомерном кубе K^n используются точки ЛП_τ – последовательностей, которые являются наиболее равномерно распределенными среди всех известных в настоящее время случайных последовательностей. Рассмотрим учет ограничений при применении ЛП_τ – последовательностей.

При синтезе механизмов можно указать разумные пределы изменения каждого из параметров b_i , которые называются параметрическими ограничениями

$$b_i^* \leq b_i \leq b_i^{**} \quad (3.4)$$

Ограничения (3.4) выделяют в пространстве параметров параллелепипед $\Pi = \left\{ \frac{\bar{b}}{b_i^*} \leq b_i \leq b_i^{**}, i = \overline{1, m} \right\}$ объем которого (n -мерный объем) равен произведению

$$V_n = (b_1^{**} - b_1^*) \cdot (b_n^{**} - b_n^*) = \prod_{i=1}^n (b_i^{**} - b_i^*) \quad (3.5)$$

где

$\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ - точки n -мерного пространства параметров.

Кроме параметрических ограничений обычно в условия задачи включаются функциональные ограничения

$$C_\ell^* \leq f_\ell(\bar{b}) \leq C_\ell^{**}, \quad (\ell = 1, 2, \dots, k) \quad (3.6)$$

Здесь $f_\ell(\bar{b})$.- некоторые функции от параметров $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$. Обозначим через G подмножества параллелепипеда Π , состоящее из точек $\bar{b}$, удовлетворяющих ограничениям (3.6).

$$G = \left\{ \frac{\bar{b}}{b_l^*} \leq b_l \leq b_l^{**}, C_l^* \leq f_l(b) \leq C_l^{**}, i = \overline{1, m}, l = \overline{1, K} \right\} \quad (3.7)$$

Для вычисления интеграла вида (3.1) необходимо этот интеграл записать в n - мерном кубе K^n следующим образом:

$$I = \int_{K^m} f(\bar{p}) d\bar{p}, \quad (3.8)$$

где

$\bar{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)^T$ - вектор параметров, приведенных к n -мерному кубу.

Примеры вычисления интегралов высокой кратности при помощи ЛП_τ –последовательностей имеются в [79]. Точка ЛП_τ – последовательности представляет собой последовательность векторов

$$Q_r = (q_{r,1}, q_{r,2}, \dots, q_{r,n}) \quad (r = 1, 2, \dots).$$

При вычислении интеграла (3.8) с учетом вышеизложенных ограничений применяется арифметический алгоритм. В основе этого

алгоритма лежит численное зондирование пространства параметров проектируемого механизма. Последовательно выбираются n пробных точек $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n$, равномерно расположенных в G . В каждой точке $\bar{b}_S (S = \overline{1, N})$, удовлетворяющим ограничениям (3.7), рассчитывается интеграл (3.8) и вычисляются значения всех ограничений. По каждому ограничению составляется таблица испытаний. Таблицы испытаний показывают приближенные значения максимума или минимума функции. В этих расчетах используются точки ЛП_т – последовательности, которая вычисляется с помощью таблиц Д.1 (так называемой таблицей числителей) [79]. Числители $r_t^{(u)}$ направляющих чисел изменяются в диапазоне

$$1 \leq t \leq 51, \quad 1 \leq u \leq 20.$$

Для этого по заданному номеру u вычисляем

$$m = 1 + \left\lfloor \ln r / \ln 2 \right\rfloor$$

а затем для $t = 1, 2, \dots, n$

$$q_{r,t} = \sum_{k=1}^m 2^{-k+1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{u=k}^m \left[2^{\{r \cdot 2^{-u}\}} \right] 2^{\{r_t^{(u)} 2^{k-1-u}\}} \right\} \quad (3.9)$$

В последних двух формулах $[r]$ – целая часть, а $\{r\}$ – дробная часть r .

По таблице Д1 можно вычислить точки Q_r с номерами $0 \leq r \leq 2^{20}$ в кубе K^n размерности $n \leq 51$. Если требуется точка размерности $n \leq 51$, то следует использовать лишь строк таблицы, если количество используемых точек заранее ограничено $i < 2^{\ell_M}$, где $\ell_M < 20$, то можно ограничиться первым ℓ_M столбцами этой таблицы.

Расчет по арифметическому алгоритму вполне приемлем, если количество используемых в расчете точек Q_r не превосходит 10^4 .

4.4 Алгоритм решения задач оптимизации при анализе и синтезе плоских рычажных механизмов

Как было показано в разделе 2, задача анализа плоских рычажных механизмов, начиная с III класса, связана с решением системы алгебраических уравнений вида (2.21) и (2.33). Для решения таких задач, как правило, применяются численные методы, основанные на итерационных процессах. К недостаткам этих методов следует отнести большие затраты машинного времени.

В данном подразделе для решения систем алгебраических уравнений используется возможность сведения их к экстремальной задаче и последующего применения метода ψ -преобразования. Любую систему уравнений, описывающую кинематику механизма в задачах анализа можно записать в виде:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (3.10)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

Решения этой системы, очевидно, доставляют глобальные минимумы функции следующего вида

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^N [f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2 \quad (3.11)$$

При решении задач синтеза механизмов, сводящихся к задачам минимизации целевой функции $F(\bar{x})$ с ограничениями в виде неравенств $q_i(\bar{x}) \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), наиболее часто используются метод штрафных функций, т.е. составляется новая целевая функция

$$\Phi(x) = F(x) - \sum_{i=1}^m \gamma_i q_i(x) \quad (3.12)$$

где

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & \text{при } g_i(x) \leq b_i \\ c, & \text{при } g_i(x) > b_i \end{cases}$$

c - штрафная константа.

Применение штрафных функций приводит к задаче минимизации без ограничений и упрощает попадание в область допустимых значений при использовании статических испытаний.

Для поиска глобального минимума функции $\Phi(x)$ предлагается использовать метод ψ - преобразования, который в отличие от других методов, может определить область глобального минимума функции за относительно небольшое число статических испытаний. Универсальный алгоритм минимизации широкого класса функций вида (3.12) и использованием ψ - преобразования приведен в работе [79]. В настоящей работе предлагается использовать следующую модификацию указанного алгоритма, учитывающую особенности задач синтеза и анализа механизмов и обеспечивающую тем самым большую скорость сходимости к точке глобального минимума:

1. Определяется вектор случайных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий заданным ограничениям с помощью ЛП_т – последовательности.

2. Вычисляется значение целевой функции $\Phi(x)$.

3. Определяется наименьшее $\Phi_{\min}(x)$ и среднее $\Phi_{cp}(x)$ значения $\Phi(x)$ для заданного числа предварительных статистических испытаний S_n :

$$\Phi_{cp} = \frac{1}{S_n} \sum_{i=1}^{S_n} \Phi_i(x)$$

4. Интервал $[\Phi_{\min}(x), \Phi_{\text{cp}}(x)]$ делится на k равных частей и определяется

$$\Delta\xi = \frac{\Phi_{\min}(x) - \Phi_{\text{cp}}(x)}{k}$$

5. Вычисляется значение уровней:

$$\xi_v = \Phi_{\text{cp}}(x) + (v-1)\Delta\xi, \text{ для } v = 1, 2, \dots, k$$

6. Значение $\Phi(x)$ последовательно проверяется на условие $\Phi(x) \geq \xi_v$ для случайных векторов x . Если это неравенство не выполняется, переходим к следующему пункту.

7. Вычисляется значение $[\xi_v - \Phi(x)]^\ell$ для тех $\Phi(x)$, которые удовлетворяют условиям п.6. Результаты сохраняются для следующего суммирования.

8. Вычисляется значение $x_j [\xi_v - \Phi(x)]^\ell$ ($\ell = 1, 2, \dots, n$) и также сохраняется для последующего суммирования.

9. После проведения S статистических испытаний имеем следующие значения сумм

$$y_v = \sum_{i=1}^N [\xi_v - \Phi(x)]_i^\ell, \quad (v = 1, 2, \dots, k)$$

$$\delta_{jv} = \sum_{i=1}^N \{x_j [\xi_v - \Phi(x)]_i^\ell\},$$

10. Вычисляются

$$\psi_v = \psi(\xi_v) = \frac{y_v}{S}, \quad (v = 1, 2, \dots, k)$$

$$x_{jv} = x_j(\xi_v) = \frac{\delta_{jv}}{y_v}, \quad (v = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, n)$$

11. С помощью полиномов Чебышева или полиномов n -го порядка проводится аппроксимация значений $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, определяя коэффициенты аппроксимирующего полинома методом наименьших квадратов.

12. Определяется корень ξ^n полинома, найденного в п.11.

13. С помощью полиномов Чебышева или полиномов n -го порядка осуществляется аппроксимация значений $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jv}, \dots, x_{jk}$. ($j = 1, 2, \dots, n$). Определяются коэффициенты построенных полиномов.

14. Подстановкой значения ξ^* , вычисленного в п.12, в $\bar{x}_j(\xi)$ ($j = 1, n$), определяются значения координат x_j^* глобального экстремума функции цели.

15. Вычисляется значение $\Phi(x)$ для значений

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$$

16. Значение $\Phi(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ сравнивается со значением ξ^* . Совпадение в пределах ошибки означает, что задача решена правильно.

17. При отличии значений $\Phi(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и ξ^* производим вариацию значения ξ^* : определяем соответствующий вектор

$$x^i = x(\xi_i), \quad \xi_i = \xi^* + i\Delta\xi, \quad i = 1, 2, \dots$$

и выбираем среди полученных векторов x^0 такой, что $\Phi(x^0) = \min\{\Phi(x^i)\}$. Это значение x^0 будет являться глобальным минимумом.

18. Для уточнения глобального минимума можно воспользоваться любым методом локальной минимизации. В настоящей работе используется метод конфигураций.

В приложении В приведена программа минимизации функции с ограничениями по методу ψ -преобразования, составленная на языке ФортранIV.

На основе опыта решения многочисленных задач анализа и синтеза различных механизмов с помощью изложенного алгоритма можно дать следующие рекомендации по выбору его параметров:

1) $S_n \geq 10$, так как в противном случае, как правило, ни одна из S_n случайных точек может не попасть в допустимое множество E^* .

2) $k=10$, так как при $k < 10$ не достигается достаточная степень точности аппроксимации функции $\psi(\xi)$, а при $k > 10$ требуется большой объем вычислений.

3) $\ell=2$, так как при этом значении показателя степени для целевых функций, используемых в задачах синтеза, достигается одновременно и достаточная чувствительность, и отсутствие резких колебаний среднего значения случайных величин в зависимости от значения ξ .

$$4) S = \begin{cases} 400, & \text{если } 3 < n < 10, \\ 600 \div 800, & \text{если } 10 \leq n \leq 20. \end{cases}$$

Эти минимальные значения S обеспечивают достаточную точность результатов.

4 Синтез плоских рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей

4.1 Общая методика синтеза плоских рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей

Применим полученные выше решения задач синтеза ИКЦ с вращательными и поступательными парами к синтезу различных классов и типов плоских рычажных механизмов. Отметим, что комбинирование заданных и искомых параметров ИКЦ привело к пятнадцати различным их модификациям, которые приведены в таблицах 1.1, 1.2 и 1.3, составленных для ИКЦ с вращательными и с поступательными парами.

Построение таблиц было основано на последовательном задании определенных групп параметров синтеза. Например, переходу от произвольной клетки таблицы 1.1 вправо соответствует задание координат X_A, Y_A точки A на плоскости Q ; вверх от второй строки – задание координат x_B, y_B точки B на плоскости Q_1 ; вниз от второй строки – задание координат x_C, y_C точки C на плоскости Q_2 . ИКЦ с вращательными парами с семью искомыми параметрами и ИКЦ с поступательными парами (с учетом нормализации коэффициентов прямой) расположены во второй строке и первом столбце соответствующих таблиц. Таким образом имеем по пять различающихся между собой модификаций ИКЦ с вращательными и с поступательными парами (для каждого варианта). В дальнейшем для удобства ссылок на модификации ИКЦ будем их обозначать парой цифр с индексом вида $(i, j)_k$, где i, j – означает соответственно номер строки и столбца таблицы ($i=1,2, j=1,2$), k – номер таблицы ($k'=1,2,3$).

Использование той или иной ИКЦ или их модификаций при синтезе механизмов зависит от заданных условий синтеза. Заданными условиями синтеза в общем случае обычно являются законы движения входного и выходного звеньев механизма. Один из возможных подходов к синтезу механизмов по заданным условиям заключается в следующем.

Необходимо выбрать, во-первых, тип механизма (передаточный, направляющий или перемещающий). По выбранному типу механизма следует, во-вторых, выбрать соответствующую ему ИКЦ или модификации ИКЦ. Если же выбранная ИКЦ имеет число степеней свободы больше, чем требуется синтезируемому механизму, то необходимо, в-третьих, исключить лишние степени свободы ИКЦ путем положения геометрических связей на относительные движения звеньев ИКЦ. Геометрические связи можно наложить различными вариантами, соответствующими различным попарным сочетаниям звеньев ИКЦ и приводящими к соответствующим структурным схемам механизмов. В-четвертых, по полученной структурной схеме механизма следует составить целевую функцию для оптимального синтеза параметров механизма, т.е. перейти от структурного синтеза к параметрическому. В-пятых, для учета дополнительных условий синтеза

следует сформулировать ограничения для параметров механизма в задаче оптимального синтеза. В-шестых, для доведения задачи синтеза до конечного численного результата необходимо иметь регулярный метод отыскания глобального экстремума целевой функции синтеза при наличии указанных ограничений.

Изложенный порядок синтеза механизмов, естественно вытекающий из логического анализа процесса синтеза механизма, позволяет предложить следующую общую методику синтеза механизмов на основе использования ИКЦ и ее модификаций:

1. Выбор типа механизма в зависимости от заданных условий синтеза. Если условиями синтеза заданы:

а) угловые или линейные перемещения двух звеньев механизма, то тип механизма определяем как передаточный;

б) траектория шатунной точки и закон движения входного звена, то тип механизма определяем как направляющий;

в) закон движения шатуна и закон движения входного звена, то тип механизма определяем как перемещающий.

2. Выбор ИКЦ в зависимости от типа механизма. Для каждого из трех типов механизмов рассмотрим выбор соответствующих ИКЦ в отдельности. При синтезе перемещающих механизмов по заданным законам движения входного звена и шатунной плоскости (выходного звена) необходимо выбрать ИКЦ - $(2,1)_1$. Если параметры ИКЦ - $(2,1)_1$ не удовлетворяют дополнительным условиям синтеза, то необходимо перейти к ИКЦ - $(2,1)_2$ и далее к ИКЦ - $(2,1)_3$. Если же задан только закон движения шатунной плоскости, то необходимо выбрать ИКЦ - $(1,1)_1$. Если параметры ИКЦ $(1,1)_1$ не удовлетворяют дополнительным условиям синтеза, то необходимо перейти к ИКЦ - $(1,1)_2$ и далее к ИКЦ - $(1,1)_3$.

При синтезе направляющих механизмов по заданной траектории шатунной точки и закону движения входного звена необходимо выбрать ИКЦ $(3,1)_1$, если входное звено является кривошипом или коромыслом и ИКЦ - $(3,2)_1$, если входное звено является ползуном. Если параметры этих ИКЦ не удовлетворяют дополнительным условиям синтеза, то по аналогии необходимо перейти к соответствующим ИКЦ из таблиц 1.2 и 1.3.

При синтезе передаточных механизмов для согласования угловых перемещений выходного и входного звеньев необходимо выбрать ИКЦ - $(2,2)_1$, что приводит к передаточному четырехзвенному механизму. Если параметры полученного механизма не удовлетворяют дополнительным условиям синтеза, то необходимо перейти к ИКЦ - $(2,2)_2$ и далее к ИКЦ - $(2,2)_3$, которые приводят к кулисным механизмам. Для согласования углового и линейного перемещений двух звеньев необходимо выбрать ИКЦ - $(3,1)_1$, который приводит к кривошипно-ползунному четырехзвеннику.

3. Исключение лишних степеней свободы ИКЦ путем наложения геометрических связей на относительные движения звеньев.

Поскольку геометрическая связь накладывается на относительное движение двух звеньев, то для определения всех возможных вариантов ее

наложения следует рассмотреть все попарные сочетания звеньев ИКЦ. При использовании четырехзвенник ИКЦ – $(2,1)_1$, $(2,1)_2$ или $(2,1)_2$, имеющих три степени свободы, для получения одноподвижного механизма следует исключить две лишние степени свободы, налагая последовательно две геометрические связи. Теоретическое число вариантов наложения первой геометрической связи равно $C_4^2 = 6$. Однако следует из этого числа исключить три варианта, приводящие к рассмотрению пар смежных звеньев и тем самым к образованию неподвижных ферм, откуда число возможных вариантов наложения первой геометрической связи равно трем. Они соответствуют следующим парам звеньев:

I – $(0;2)$; II – $(0;3)$; III – $(1,3)$ (рисунок 4.1)

При наложении второй геометрической связи следует учитывать появление в кинематической цепи пятого звена, реализующего первую геометрическую связь, поэтому рассмотрим каждый из вариантов последней в отдельности.

Вариант I – имеем кинематическую цепь $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \xrightarrow{3} 4 \rightarrow 0$ (рисунок 4.2).

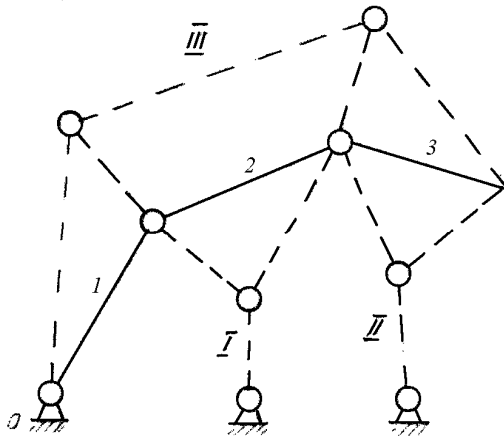


Рисунок 4.1

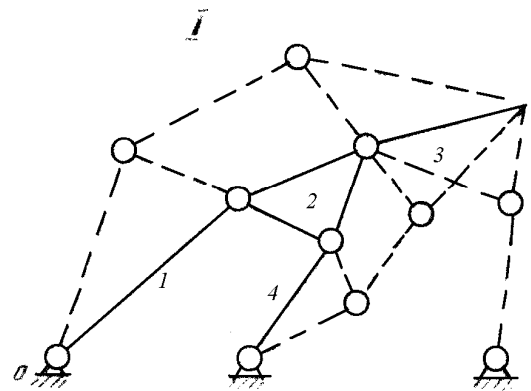


Рисунок 4.2

Число пар несмежных звеньев, не приводящих к образованию ферм равно трем: $(0;3)$, $(1,3)$, $(3;4)$, т.е. имеем три варианта наложения второй геометрической связи, приводящих к трем различным механизмам II класса.

Вариант II- имеем замкнутую кинематическую цепь $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ (рисунок 4.3). Число пар несмежных звеньев здесь равно четырем: $(0;2)$, $(0;3)$, $(1;3)$, $(2;4)$, т.е. имеем четыре варианта наложения второй геометрической связи.

В итоге получаем четыре различных одноподвижных механизма, из которых один - II класса, два - III класса и один - IV класса, однако полученный здесь механизм II класса уже встречался в варианте 1.

Вариант III - имеем кинематическую цепь $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ (рисунок 4.4). Число пар несмежных звеньев, не приводящих к образованию ферм, равно трем: $(0;2)$, $(0;4)$, $(0;3)$, т.е. имеем три варианта наложения второй связи, приводящих к трем одно-подвижным механизмам, из которых два - II класса и один – III класса, однако все они уже встречались в вариантах I и II.

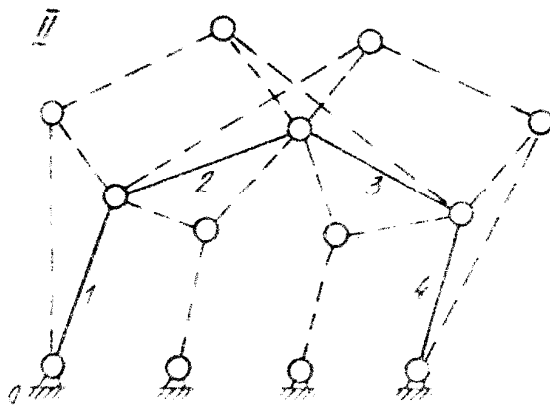


Рисунок 4.3

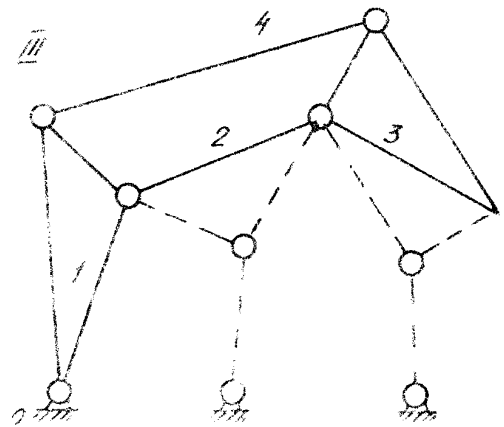


Рисунок 4.4

Таким образом, при использовании четырехзвенной ИКЦ с тремя степенями свободы имеется 10 вариантов наложения двух геометрических связей, приводящих к шести различным механизмам, среди которых три – II класса, два – III класса и один IV класса.

Рассуждая аналогично, можно получить различные возможные механизмы в случае, когда используются модификации ИКЦ.

4. Составление общей целевой функции для оптимизационного синтеза параметров механизма. Выбор варианта наложения геометрических связей определяет структуру механизма и позволяет перейти к синтезу параметров механизма. Наложение геометрических связей можно осуществить не только известными методами [43, 50], но и путем использования ИКЦ – $(2,1)_1$, $(2,2)_2$, $(2,2)_3$, $(1,1)_1$, $(3,1)_3$, имеющих степень подвижности $W = -1$. Удобство их использования при автоматизированном синтезе связано с тем, что целевая функция синтеза, составленная для ИКЦ, применима для любой ее модификации, что позволяет использовать одну и ту же целевую функцию как при синтезе параметров ИКЦ, так и при наложении геометрических связей. Правила использования модификации ИКЦ могут быть сформулированы следующим образом. Если геометрическая связь накладывается на относительное движение:

а) пары подвижных звеньев, то необходимо использовать ИКЦ – $(2,2)_1$ с последующим переходом к ИКЦ – $(1,1)_2$, $(3,1)_3$ при аналогичных условиях. При этом следует учесть, что при использовании ИКЦ – $(2,2)_2$, $(2,2)_3$ или ИКЦ – $(1,1)_2$, $(3,1)_3$ в отличие от ИКЦ с вращательными парами получаются два различных механизма (рисунок 4.6 и 4.7), т.е. при наложении одной геометрической связи можно получить в итоге три различных механизма. Отсюда следует, что при одном варианте наложения двух геометрических связей с помощью ИКЦ можно получить $3^2 = 9$ различных одноподвижных механизмов. Таким образом, общее число различных шестизвенных механизмов, получаемых таким путем, будет равно $9 \times 6 = 54$, из которых $3 \times 9 = 27$ – II класса, $2 \times 9 = 18$ – III класса, 9 – IV класса.

Неизвестные параметры синтезируемых механизмов есть суть неизвестные пока параметры ИКЦ и ее модификаций, из которых образован

механизм. Синтез параметров каждой ИКЦ может быть осуществлен на основе минимизации ее целевой функции, следовательно, для синтеза всех параметров механизма необходимо минимизировать столько целевых функций, сколько ИКЦ образуют данный механизм. Например, при синтезе перемещающего механизма с заданными законами движения входного и выходного звеньев используется ИКЦ - (2,1) и две модификации, следовательно, необходимо минимизировать три целевые функции.

Эти целевые функции можно минимизировать как последовательно, определяя параметры механизма по частям, так и одновременно, составляя суммарную целевую функцию и определяя все параметры механизма одновременно. При наличии ограничений на параметры механизма целесообразно использовать суммарную целевую функцию, поскольку все параметры механизма взаимосвязаны между собой с точки зрения удовлетворения наложенным ограничениям. Таким образом, при синтезе механизмов с ограничениями на параметры суммарная целевая функция имеет вид

$$S = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}^{(j)}]^2, \quad (4.1)$$

M – число используемых ИКЦ;

N – число заданных положений звеньев;

$\Delta_{q_i}^{(j)}$ – взвешенная разность, определяемая выражениями (1.8), (1.62) или (1.71).

5. Формулирование ограничений задачи синтеза. При синтезе механизмов кроме основного кинематического условия, определяемого назначением механизма, часто приходится учитывать и дополнительные условия, в число которых обычно входят допустимые габариты механизма, угол передачи (благоприятной передачи сил), условия существования кривошипа и т.д. Эти дополнительные условия обычно представляются в виде неравенств, содержащих некоторые линейные или нелинейные функции от искоемых параметров механизмов:

$$g_k(x_1, x_2, \dots, x_L) \{ \leq, =, \geq \} b_k, \quad (k = \overline{1, K}) \quad (4.2)$$

где X_ℓ - искоемые параметры механизма, $\ell = \overline{1, L}$

b_k - допустимые размеры,

L - число искоемых параметров,

K - число ограничений.

6. Выбор метода численного решения задачи синтеза. Задача условной минимизации (4.1), (4.2), к которой сводится исходная задача синтеза механизма, относится к классу невыпуклых экстремальных задач, для которых отсутствуют регулярные методы отыскания глобального минимума. Поэтому задачи такого класса решаются, как правило, в два этапа, на первом из которых статистическим методом определяется наиболее вероятная область глобального минимума и выбирается начальное приближение, на

втором – минимизируется целевая функция при выбранном начальном приближении. Однако такой подход требует выполнения большого объема вычислений для достижения достаточной вероятности определения глобального минимума. От этого недостатка свободен метод ψ -преобразования [77], сочетающий в себе достоинства статистических и регулярных методов минимизации и обеспечивающий тем самым близкую к единице вероятность определения глобального минимума при относительно небольшом объеме вычислений. Как ниже показано, что метод ψ -преобразования является эффективным для решения задач анализа и синтеза механизмов.

4.2 Синтез передаточных механизмов

Рассмотрим отдельно два случая задания воспроизводимой функции.

I. Пусть задана функция $\psi = \psi(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_m$, которую необходимо воспроизвести синтезируемым механизмом. Поскольку требуется осуществить согласование двух угловых движений, в соответствии с п.4.1 используем ИКЦ – $(2,2)_1$, таблица 1.1.

Зададимся координатами неизвестных шарниров A и D (рисунок 4.5), принимая равным единице расстояние между ними:

$$X_A = Y_A = Y_D = 0, \quad X_D = 1 \quad (4.3)$$

Разобьем интервал $[0, \varphi_m]$ на $(N-1)$ частей и определим $\psi_i = \psi(\varphi_i)$, $i=1, N$. Тогда задача синтеза четырехзвенника $ABCD$ сводится к определению параметров ИКЦ: x_b, y_b, R, x_c, y_c минимизируя целевую функцию вида (1.3).

При отсутствии ограничений на параметры механизма параметры ИКЦ можно определить, принимая алгоритм, приведенный в п.1.2. Искомые параметры механизма определяются через параметры ИКЦ следующим образом:

$$a = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}, \quad b = R, \quad c = \sqrt{x_C^2 + y_C^2},$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{y_B}{x_B}, \quad \psi_0 = \arctg \frac{y_C}{x_C}. \quad (4.4)$$

В реальных задачах на параметры механизма могут быть наложены различные ограничения:

а) на длины звеньев

$$a_0 \leq a \leq a_1; \quad b_0 \leq b \leq b_1; \quad c_0 \leq c \leq c_1; \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1; \quad \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1; \quad (4.5)$$

б) на углы передачи

$$\gamma_g \leq \gamma_i \leq 180^\circ - \gamma_g \quad (4.6)$$

где γ_g допустимый угол передачи γ ,

в) условие существования кривошипа

$$2a + |b^2 + c^2 - (1 + a^2)| \leq 2bc \cos \gamma_g \quad (4.7)$$

Для решения задачи синтеза необходимо выразить и целевую функцию, и ограничения через одни и те же переменные, что можно сделать двумя путями. Первый – запись целевой функции $S(x_B, y_B, R, x_C, y_C)$ через параметры механизма, учитывая соотношения:

$$x_B = a \cos \varphi_0, y_B = a \sin \varphi_0, R = b, x_C = c \cos \varphi_0, y_C = c \sin \varphi_0, \quad (4.8)$$

Второй – запись ограничений (4.5), (4.6) и (4.7) через параметры ИКЦ, учитывая соотношения (4.2). Для решения полученной задачи следует применить модифицированный алгоритм ψ – преобразования, изложенный в п.3.3.

Если при синтезе два смежных звена имеют относительно большие размеры по сравнению с остальными, то ограничения на параметры механизма (4.5), могут не выполняться и в этом случае необходимо перейти к синтезу кулисных механизмов [12]. Например, когда у шарнирного четырехзвенника $ABCD$ (рисунок 4.5) шарнир B удален в бесконечность, он преобразуется в кулисный механизм ACD .

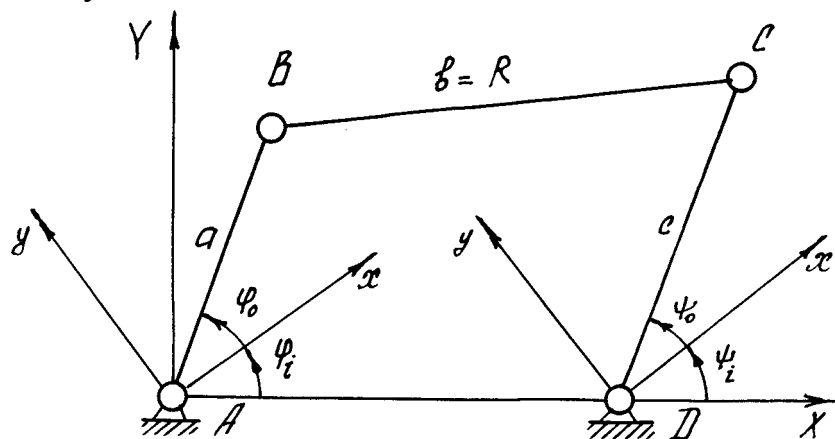


Рисунок 4.5

Спроектируем четырехзвенный кулисный механизм ACD . Для этого в соответствии с общей методикой синтеза механизмов (п.4.1) используем ИКЦ, (2.1)₂, таблица 1.2. Опять же зададимся координатами шарнира D . Тогда задача синтеза кулисного механизма сводится к определению параметров ИКЦ: X_A, Y_A, a, c, x_C, y_C минимизируя целевую функцию вида (1.62).

2. Пусть задана функция перемещения от угла поворота $S = S(\varphi), 0 \leq \varphi \leq \varphi_m$, которую требуется воспроизвести механизмом. Поскольку требуется осуществить согласование поступательного и углового движений, используем ИКЦ – (3,1)₁. Зададимся произвольно уравнением направляющей ползуна, например

$$Y=0. \quad (4.9)$$

Разобьем интервал $[0, \varphi_m]$ на $N-1$ частей и определим

$$S_i = S(\varphi_i), i = 1, N \quad (4.10)$$

Положим

$$X_{D_i} = S_i, Y_{D_i} = 0, i = 1, N \quad (4.11)$$

Тогда задача синтеза кривошипно-ползунного четырехзвенника (рисунок 4.6) сводится к определению параметров ИКЦ: X_A, Y_A, R, x_b, y_b , минимизируя целевую функцию вида (1.8). Искомые параметры механизма определяются через параметры ИКЦ по формулам:

$$a = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}, b = R, \varphi_0 = \arctg \frac{y_B}{x_B}, \quad .$$

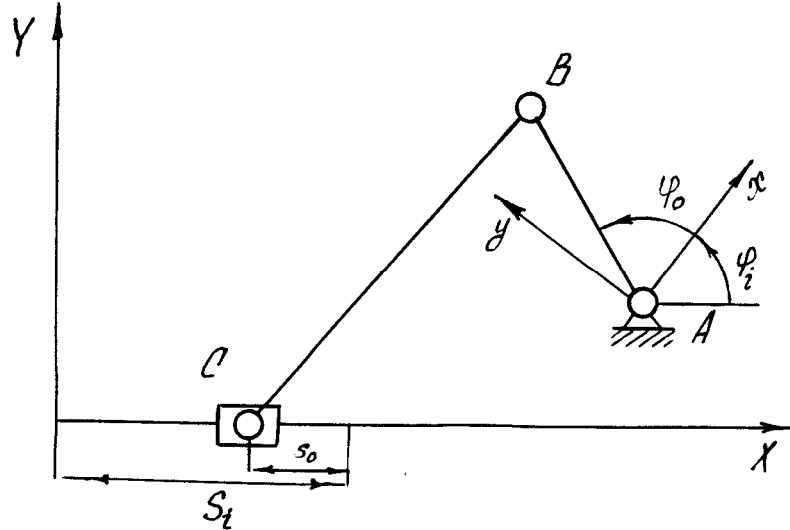


Рисунок 4.6

Рассмотрим примеры:

Пример 1. Рассмотрим задачу синтеза передаточного шарнирного четырехзвенника $ABCD$ (рисунок 4.5). Механизм должен воспроизвести заданную функцию $\psi = \frac{1}{2}\varphi, \varphi \in [0, 80^\circ]$, координирующую углы поворота ψ и φ выходного звена CD и входного звена AB [38]. На размеры звеньев механизма $ABCD$ наложены ограничения в виде:

$$0 \leq a \leq 1,2 ; \quad 1 \leq b \leq 2 ; \quad 2 \leq c \leq 3 ; \quad 0 \leq \varphi_0 \leq \pi ; \quad 0 \leq \varphi_0 \leq \pi .$$

Разделим интервал движения звена AB на 20 равных частей и вычислим $\psi_i = \frac{1}{2}\varphi_i, i = \overline{1, 21}, \varphi_1 = 0, \varphi_{21} = 80^\circ$. Тогда задача синтеза механизма сводится к минимизации целевой функции ИКЦ - $(2,2)_1$ при ограничениях (4.9).

Для удобства решения задачи выразим целевую функцию ИКЦ- $(2,2)_1$ через параметры механизма

$$S = \sum_{i=1}^{21} [\Delta q_i(x_b, y_b, R, x_c, y_c)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(a, b, c, \varphi_0, \psi_0)]^2 \quad (4.12)$$

Для решения этой задачи условной минимизации применим модифицированный алгоритм ψ – преобразования (п.3.3), полагая число

переменных $N=5$, число предварительных испытаний $M_0 = 10$, число основных испытаний $M = 500$, число уровней $K= 10$, точность приближения $L = 2$.

Согласно п.1 алгоритма в подразделе 3.3 определим 10 случайных векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ по предварительным статистическим испытаниям (таблица 4.1). Для каждого значения $\bar{x}$ вычислим значения целевой функции $S(x_1, \dots, x_5)$. Результаты этих вычислений также приведены в таблице 4.2. Среди вычисленных значений S определяются наименьшее и наибольшее значения. Как видно из таблицы 4.2, эти значения равны $\inf S = 7.843221$ и $\sup S = 256,135986$. Таким образом, интервал изменения S будет равняться 248,292765. После этого проводим основные испытания и вычисляем значения $S(x_1, \dots, x_5)$. Часть результатов этих вычислений приведена в таблице 4.3. Затем вычислим значения функции $\psi(\xi)$ и $\bar{x}_i(\xi)$ ($i=1,5$) по формулам п.10 алгоритма. В таблице 4.4. показаны результаты этих вычислений. Согласно значениям $\psi(\xi)$ и $\bar{x}(\xi)$ из таблицы 4.4. строим графики, приведенные на рисунках 4.7 - 4.12. Осуществим аппроксимацию значений $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{10}$ полиномом Чебышева и определим его коэффициенты:

$$\psi(\xi) = 3,179565 \xi^4 - 0,430332 \xi^3 - 0,016271 \xi^2 + 0,004272 \xi$$

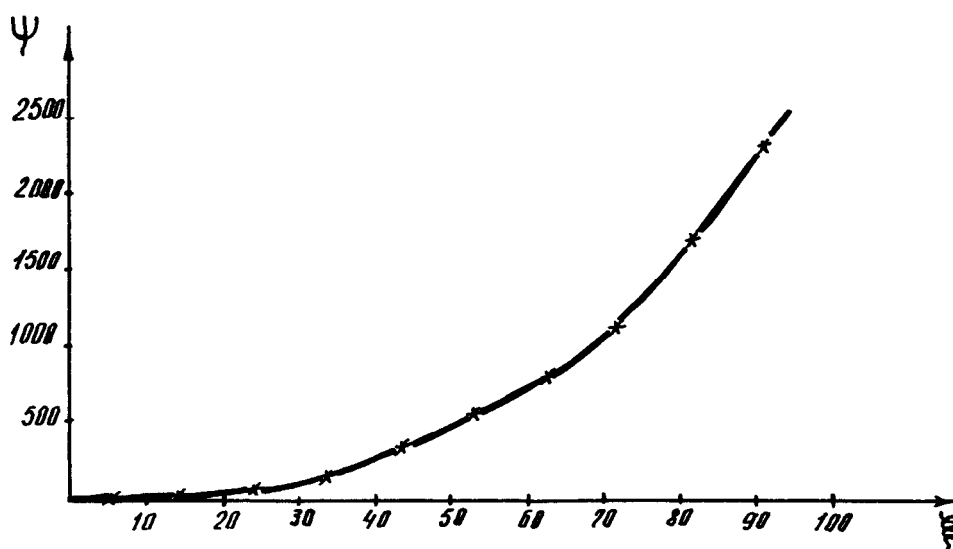


Рисунок 4.7

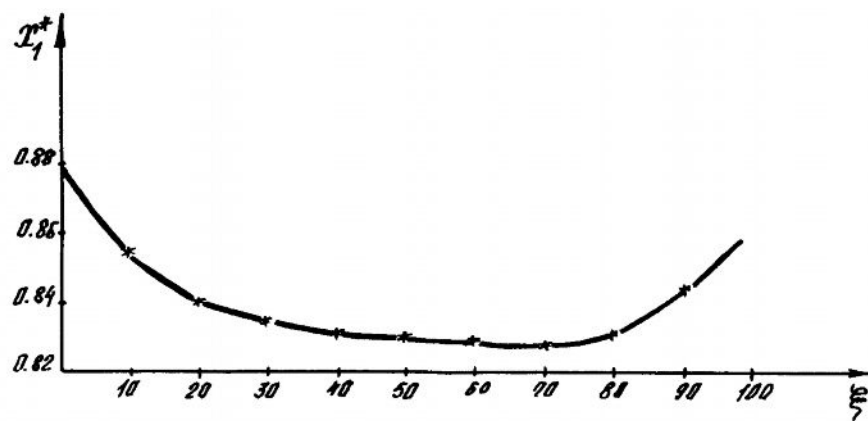


Рисунок 4.8

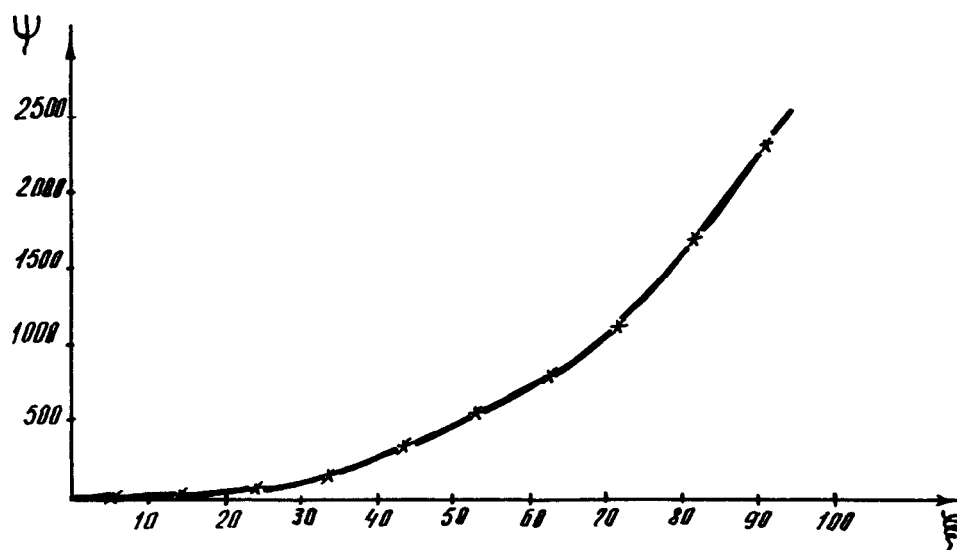


Рисунок 4.9

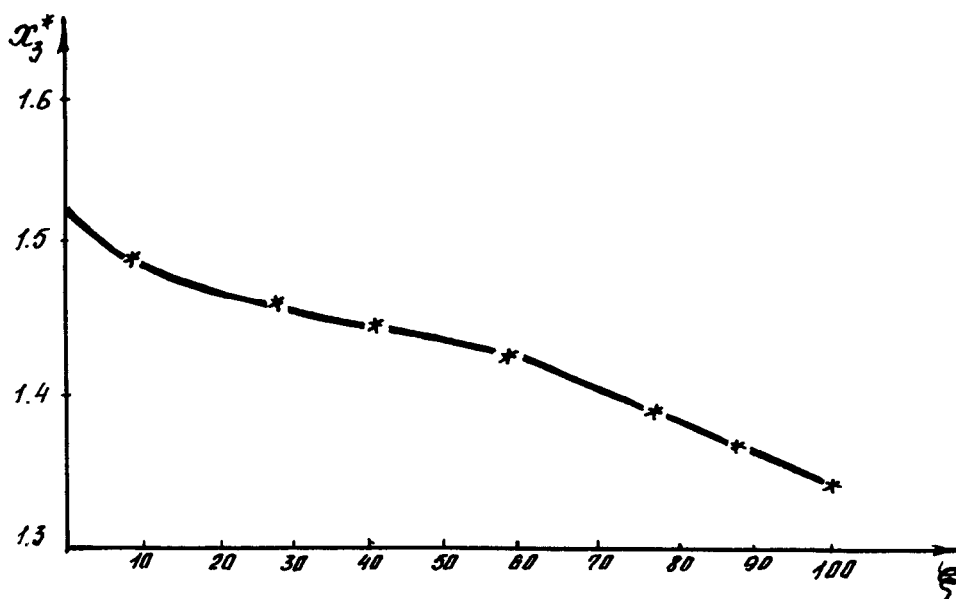


Рисунок 4.10

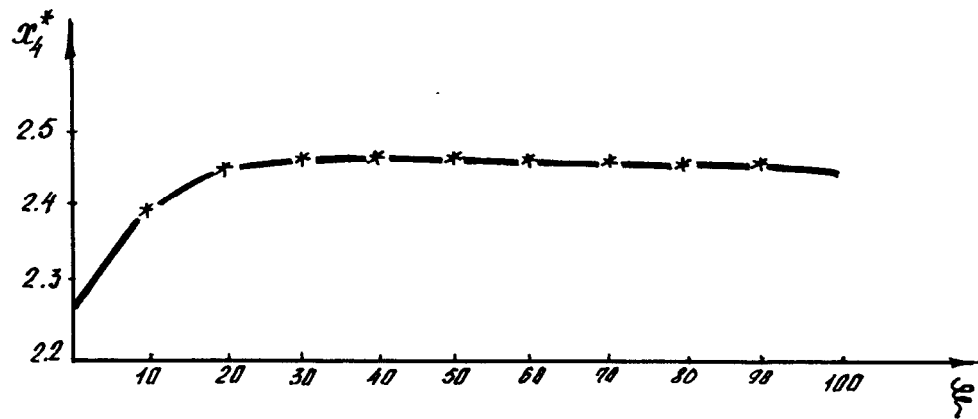


Рисунок 4.11

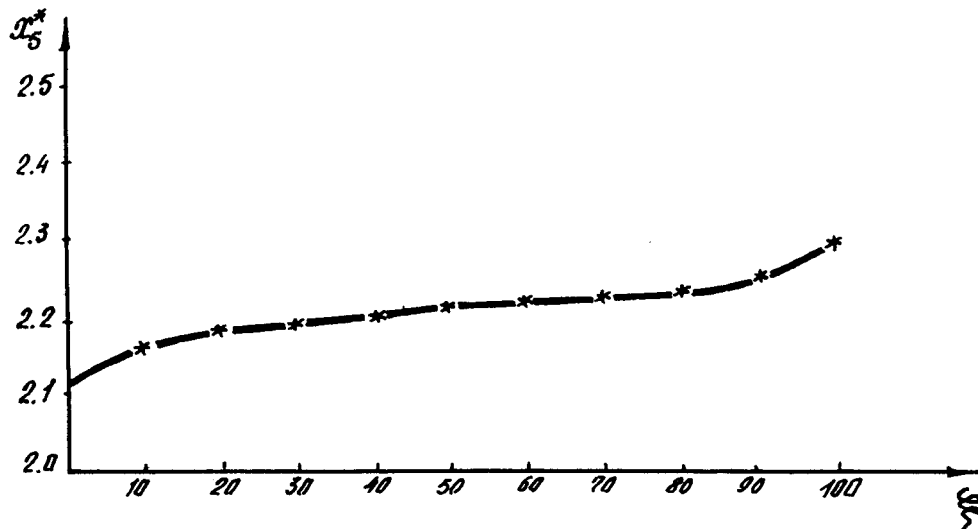


Рисунок 4.12

Аппроксимирующая кривая $\psi(\xi)$ пересечет ось ξ приблизительно в точке $\xi^* = 0,5201$. Это есть приближенное значение глобального минимума $S(x_1, x_2, \dots, x_5) = \xi^* = 0,5201$. Для определения значений координат глобального минимума проведем аппроксимацию значений $x_1(\xi), \dots, x_5(\xi)$ (рисунки 4.8 - 4.12) полиномом Чебышева:

$$x_1(\xi) = 0,967621\xi^4 - 0,013194\xi^3 + 0,000416\xi^2 - 0,000005\xi$$

$$x_2(\xi) = 1,311197\xi^4 - 0,094879\xi^3 + 0,000371\xi^2 - 0,000002\xi$$

$$x_3(\xi) = 2,381914\xi^4 + 0,00457\xi^3 - 0,000045\xi^2$$

$$x_4(\xi) = 1,311197\xi^4 + 0,004879\xi^3 - 0,000143\xi^2 + 0,00002\xi$$

$$x_5(\xi) = 2,502735\xi^4 - 0,019125\xi^3 - 0,000386\xi^2 - 0,00001\xi$$

Для уточнения координат точки $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)$ могут быть применены любые методы поиска локального минимума. В данном и в других остальных примерах нами использованы два метода: метод вариации

в плоскости ψ , а затем метод конфигураций (модифицированный алгоритм метода по координатного спуска).

Таблица 4.1

N	$x_1=\varphi_0$	$x_2=a$	$x_3=b$	$x_4=\psi_0$	$x_5=c$	S
1	0,85	1,57	1,50	2,50	1,57	29,059
2	0,675	2,355	1,25	2,75	0,785	256,136
3	1,025	0,785	1,75	2,25	2,355	34,542
4	0,586	1,963	1,875	2,875	1,963	7,843
5	0,938	0,393	1,375	2,375	0,393	87,599
6	0,763	1,178	1,625	2,125	2,747	28,629
7	1,113	2,747	1,125	2,625	1,177	151,515
8	0,544	2,644	1,687	2,313	0,588	200,958
9	0,894	1,374	1,187	2,813	2,138	9,265
10	0,719	0,589	1,937	2,563	1,374	15,298

Таблица 4.2

N	$x_1=\varphi_0$	$x_2=a$	$x_3=b$	$x_4=\psi_0$	$x_5=c$	S
1	1,014	1,815	1,2968	2,6406	2,0115	2,593
2	0,9867	1,49	1,3359	2,3203	2,87015	4,8282
3	0,5711	2,5757	1,3672	2,039	2,1833	6,5678
4	0,932	1,9379	1,164	2,148	3,1185	0,6625
5	0,864	2,1955	1,23	2,746	2,3673	4,0349
6	0,6012	1,803	1,355	2,871	2,7597	5,5555
7	0,8199	1,9992	1,668	2,308	1,7785	2,2692
8	0,88	1,1407	1,1289	2,285	1,7539	6,4929
9	0,873	1,6742	1,002	2,388	1,9686	7,6304
10	1,1248	2,1158	1,236	2,842	2,9989	3,1795
11	0,9935	1,9195	1,7988	2,279	1,6252	4,7107
12	0,9717	2,8027	1,0801	2,186	2,5083	4,4098
13	0,7255	0,325	1,619	2,162	2,6819	7,7214
14	0,5287	1,9931	1,025	2,506	2,1281	2,134
15	0,5259	3,0357	1,811	2,439	2,7168	7,0797
16	0,7447	2,4469	1,248	2,877	1,1468	3,3095
17	1,099	0,87699	1,748	2,377	2,079	1,8605
18	0,908	2,3979	1,3887	2,205	2,5696	1,7609
19	0,9306	0,926	1,0449	2,049	2,962	3,7729
20	0,6682	1,3185	1,4199	2,424	2,7414	6,2036
21	1,0783	1,2449	1,3184	2,229	2,7904	4,7056

Отсюда можно определить координаты, близкие к глобальному минимуму функции S :

$$x_1^* = \varphi_0 = 1,990811, \quad x_3^* = b = 1,311197, \quad x_5 = c = 2,436064,$$

$$x_2 = a = 0,967621, \quad x_4^* = \psi_0 = 2,205035,$$

Применяя метод вариации, уточняем значение глобального минимума:

$$S^*(x_1, x_2, \dots, x_5) = 0,094, \text{ соответствующее точке с координатами}$$

$$x_1^* = \varphi_0 = 1,560555 \quad x_3^* = b = 1,414835 \quad x_5 = c = 2,43064$$

$$x_2 = a = 0,822997 \quad x_4^* = \psi_0 = 2,205035,$$

Таблица 4.3

N	ξ	ψ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	91,584	2374,4479	0,842	1,43	1,49	2,45	2,16
2	82,279	1757,69	0,84	1,43	1,49	2,45	2,16
3	72,975	1248,575	0,8389	1,44	1,48	2,45	2,17
4	63,6707	841,031	0,8369	1,45	1,47	2,45	2,17
5	54,366	527,342	0,8345	1,46	1,46	2,45	2,17
6	45,061	298,297	0,8318	1,47	1,45	2,44	2,17
7	35,7569	144,89	0,8284	1,50	1,43	2,44	2,18
8	26,454	54,312	0,825	1,56	1,41	2,43	2,21
9	17,148	11,955	0,8358	1,68	1,38	2,43	2,28
10	7,843	0,713	0,888	1,82	1,34	2,4	2,37

Таблица 4.4

	$\psi(\xi)$	$x_1(\xi)$	$x_2(\xi)$	$x_3(\xi)$	$x_4(\xi)$	$x_5(\xi)$
β_0	3,1795565	0,967621	1,990811	1,311197	2,381914	2,50275
β_1	-0,430332	-0,013194	-0,024175	0,004879	0,004557	-0,019125
B_2	-0,016271	0,000416	0,000371	-0,00045	-0,000143	0,000386
B_3	0,0041272	-0,000005	-0,000002		0,000002	-0,000003
B_4	-0,00001					

Уточнение значений $\psi(\xi)$ и $\bar{x}_j(\xi)$ ($i = \overline{1,5}$) методом конфигурации привело к следующему значению глобального минимума $S^*(x_1, x_2, \dots, x_5) = 0,085$, в точке с координатами:

$$x_1 = \varphi_0 = 2,099626 = 120^0 37', \quad x_3 = b = 1,311407, \quad x_5 = c = 2,262872,$$

$$x_2 = a = 0,988847, \quad x_4 = \psi_0 = 2,005707 = 115^0 17',$$

При этом точность вычислений координат минимума составила 10^{-5} и число вычислений функции равно 602.

В таблице 4.5 приведены отклонения $\Delta\psi$ функции ψ от воспроизводимой функции, а на рисунке 4.13 изображен график отклонений. Из этого графика и таблицы следует, что полученное приближение близко к заданной функции. Максимальное отклонение $\Delta\psi_{\max} = 17'$. На рисунке 4.14 изображена схема механизма, воспроизводящего функцию $\psi = \frac{1}{2}\varphi$.

Изменим ограничения, налагаемые на параметры механизма, и примем их в виде

$$0.78 \leq \varphi_0 \leq 2.349; \quad 1.2 \leq b \leq 2; \quad 2 \leq c \leq 3.$$

$$0.5 \leq a \leq 1.20; \quad 3.1415 \leq \varphi_0 \leq 6.28;$$

Таблица 4.5

$\Delta\varphi_1=-0,284863 \cdot 10^{-2}$	$\Delta\varphi_7=0,122452 \cdot 10^{-2}$	$\Delta\varphi_{13}=-0,548363 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\varphi_{19}=0,684738 \cdot 10^{-3}$
$\Delta\varphi_2=-0,104141 \cdot 10^{-2}$	$\Delta\varphi_8=0,968933 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\varphi_{14}=-0,652313 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\varphi_{20}=0,0130177 \cdot 10^{-3}$
$\Delta\varphi_3=0,1688 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\varphi_9=0,638008 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\varphi_{15}=-0,638962 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\varphi_{21}=0,200081 \cdot 10^{-2}$
$\Delta\varphi_4=0,901222 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\varphi_{10}=0,282288 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\varphi_{16}=-0,497818 \cdot 10^{-3}$	
$\Delta\varphi_5=0,126362 \cdot 10^{-2}$	$\Delta\varphi_{11}=-0,553131 \cdot 10^{-4}$	$\Delta\varphi_{17}=-0,226974 \cdot 10^{-3}$	
$\Delta\varphi_6=0,134563 \cdot 10^{-2}$	$\Delta\varphi_{12}=-0,342369 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\varphi_{18}=0,169754 \cdot 10^{-3}$	

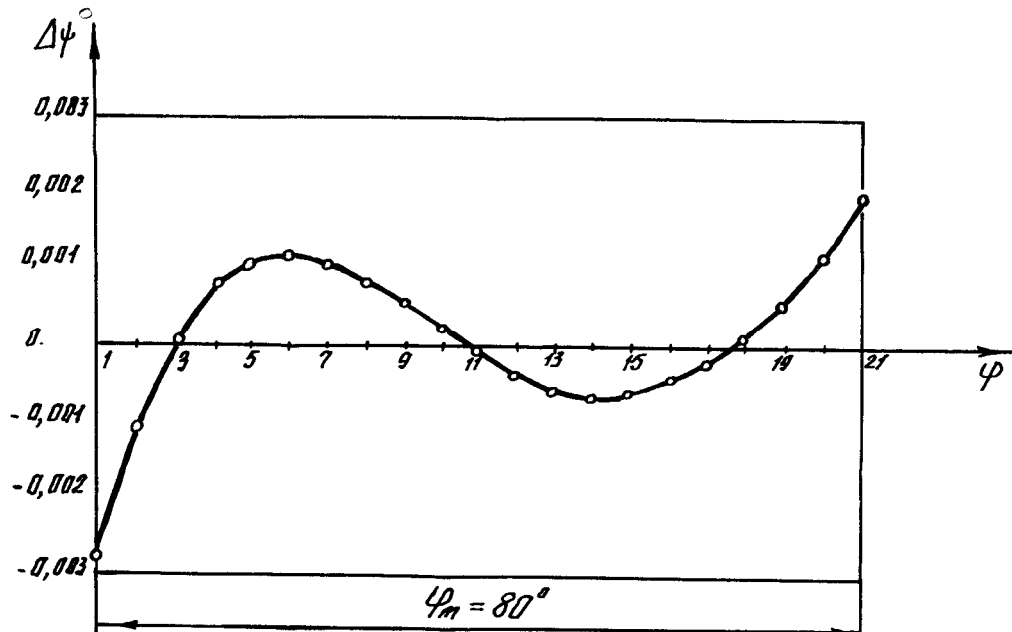


Рисунок 4.13

В данном случае значение глобального минимума равняется $S(x_1, \dots, x_5) = 0.0938482$. Значения координат точки глобального минимума

$$x_1 = \varphi_0 = 2,062996 = 118^0 20' \quad x_3 = b = 1,672771 \quad x_5 = c = 2,508449$$

$$x_2 = a = 1.009463; \quad x_4 = \psi_0 = 3,329731 = 190^0 47',$$

Число вычислений функции равно 1913 и точность вычислений координат минимума составляет 10^{-5} .

Теперь изменим пределы начальных углов отсчета φ_0 и ψ_0 .

$$1,57 \leq \varphi_0 \leq 6.28; \quad 3.1415 \leq \psi_0 \leq 6.28$$

Тогда получим значение глобального минимума $S = 0.1250137$, а значения координат точки глобального минимума равняются:

$$x_1 = \varphi_0 = 3.347672 = 191^0 48' 27'', \quad x_3 = b = 0,814435 \quad x_5 = c = 1,2197818$$

$$x_2 = a = 0.630629, \quad x_4 = \psi_0 = 3,719807 = 213^0 7' 45''$$

Таким образом, результаты синтеза существенным образом зависят от характера налагаемых ограничений.

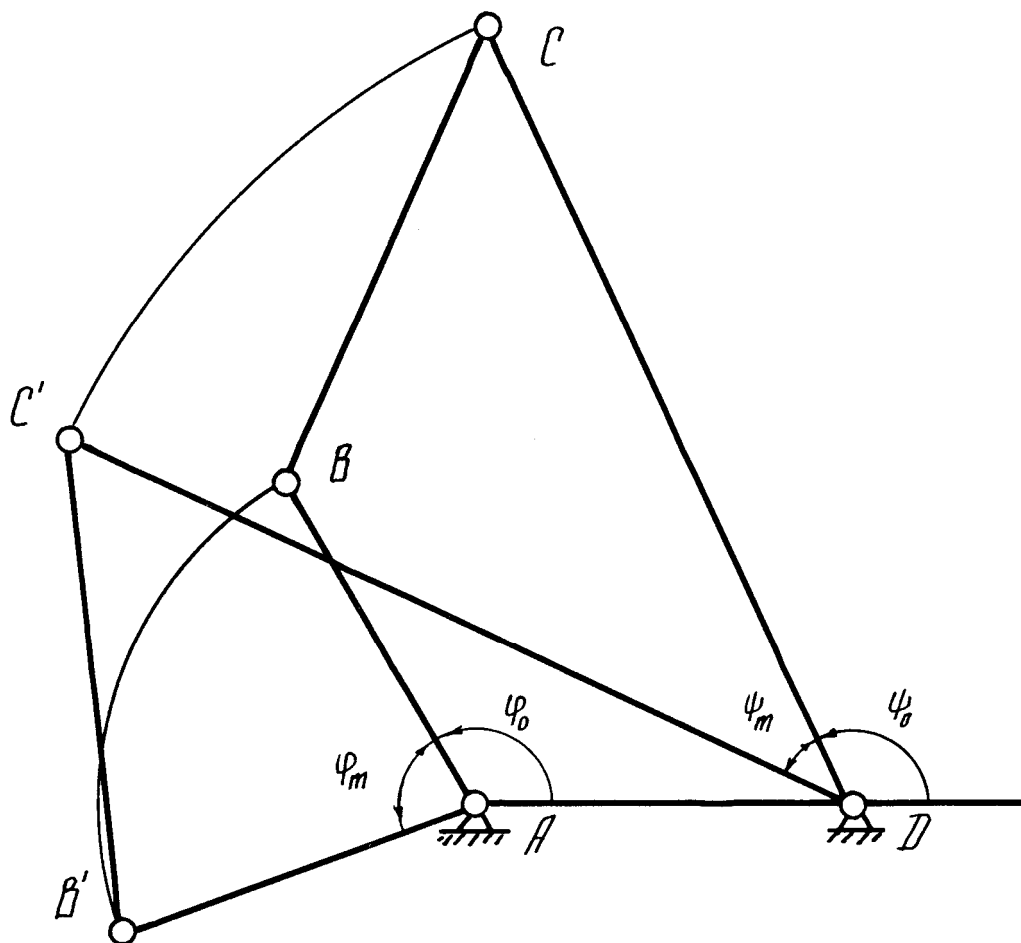


Рисунок 4.14

Пример 2. Рассмотрим задачу синтеза кулисного механизма, воспроизводящего функцию $\psi = \frac{1}{25}\varphi^2$, $0 \leq \varphi \leq 50^\circ$ [13]. Разобьем интервал $[0, 50^\circ]$ на 10 равных частей и вычислим $\psi_i = \frac{1}{25}\varphi_i^2$ $i = \overline{1,11}$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_{11} = 50^\circ$.

Для синтеза механизма используем первый вариант ИКЦ — $(2, I)_2$ с шестью неизвестными параметрами.

Для определения этих параметров воспользуемся условиями минимума целевой функции ИКЦ в виде линейной системы уравнений (1.69). Зададимся координатами $X_D = Y_B = 0$ шарнира D и определим искомые параметры механизма в соответствии с формулами (1.69):

$$X_A = -0.237022; Y_A = 1.0685577; \ell_{AB} = \sqrt{x_b^2 + y_b^2} = 0.238871;$$

$$\ell_{OB} = a = 1; b = 0, \varphi_0 = 90^\circ, \psi_0 = -12^\circ 52' 37''$$

Полученная схема кулисного механизма ACD изображена на рисунке 4.15. Величина максимального отклонения равняется $\Delta\psi_{max} = 27' 15''$, что значительно меньше величины максимального отклонения, полученного в работе [12].

Пример 3. Спроектировать кулисный механизм, воспроизводящий линейную функцию $\psi = 5\sqrt{\varphi}$ в интервале $0 \leq \varphi \leq 100^\circ$ [12]. Разбив рассматриваемый интервал на 11 равных частей, определяем $\psi_i = 5\sqrt{\varphi_i}$, $i = \overline{1,11}$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_N = 100^\circ$. Для синтеза механизма используем второй вариант ИКЦ - $(2,1)_2$, параметры которой находим из условия минимума ее целевой функции в виде системы уравнений (1.74). Решая эту систему уравнений, определяем по аналогии с предыдущим примером параметры механизма:

$$X_D = 0.306329; \quad x_c = 0.50449; \quad \ell_{CD} = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = 2.3027$$

$$Y_D = -1.254869; \quad y_c = 2.246848; \quad \varphi_0 = 90^\circ; \quad \varphi = 77^\circ 20' 42''$$

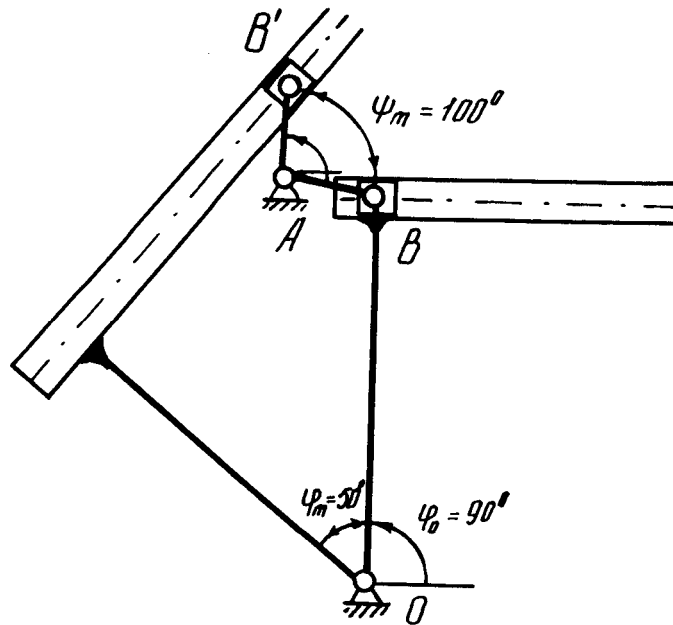


Рисунок 4.15

Схема кулисного механизма приведена на рисунке 4.16. Максимальное отклонение выходного угла поворота механизма от заданной функции составляет 0,2%.

На практике часто встречаются задачи синтеза, условия которых не реализуются с достаточной степенью точности с помощью четырехзвенных механизмов. В этом случае необходимо перейти к синтезу шестизвенных механизмов. Для этого вместо шатуна BC четырехзвенника $ABCD$ (рисунок 4.17) введен диаду BEC [43] и рассмотрим пятизвенную кинематическую цепь $ABCDE$ с двумя степенями свободы. Для получения одноподвижного механизма необходимо исключить одну степень свободы этой цепи путем наложения геометрической связи. Варианты наложения связи были рассмотрены в п.4.1, где показано, что в итоге получаем четыре различных шестизвенных механизма, из которых один – II класса, два – III класса и один – IV класса, при условии использования только ИКЦ с вращательными парами. Ниже в качестве примера рассмотрим синтез механизма,

реализующего зависимость $\psi = \psi(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_m$. Зададимся координатами точек A и E :

$$X_A = Y_A = Y_E = 0, \quad X_E = 1.$$

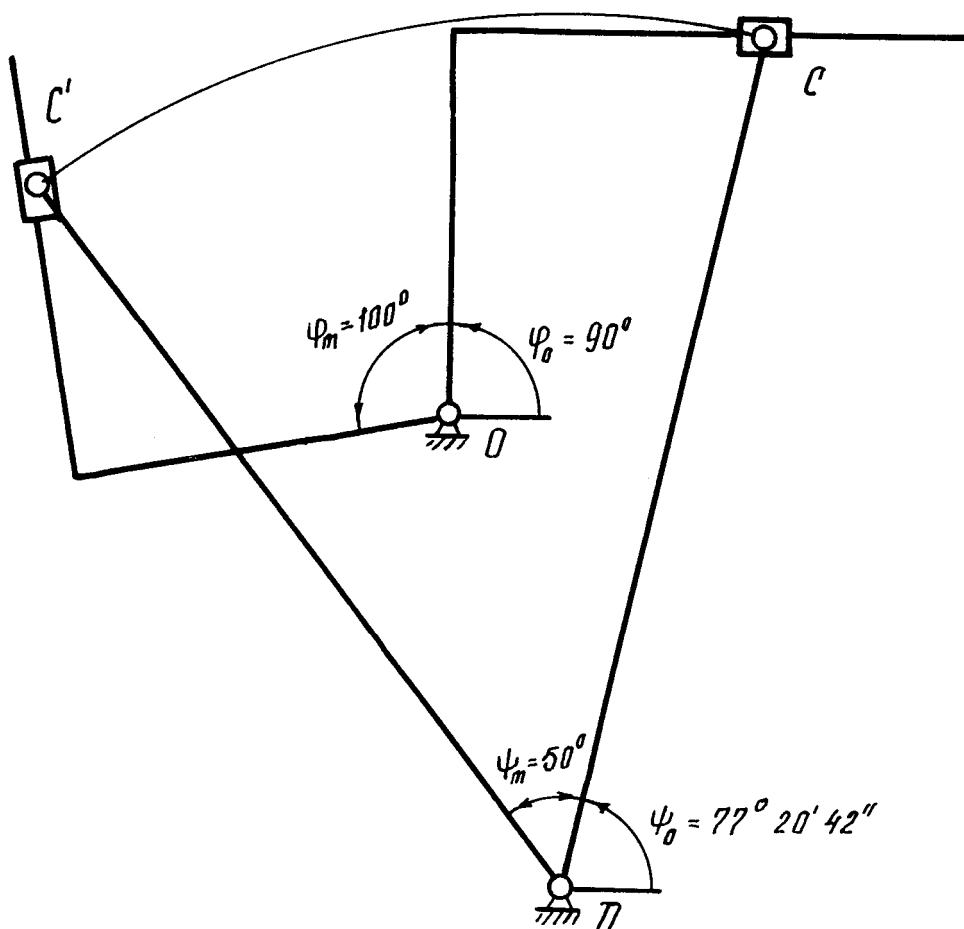


Рисунок 4.16

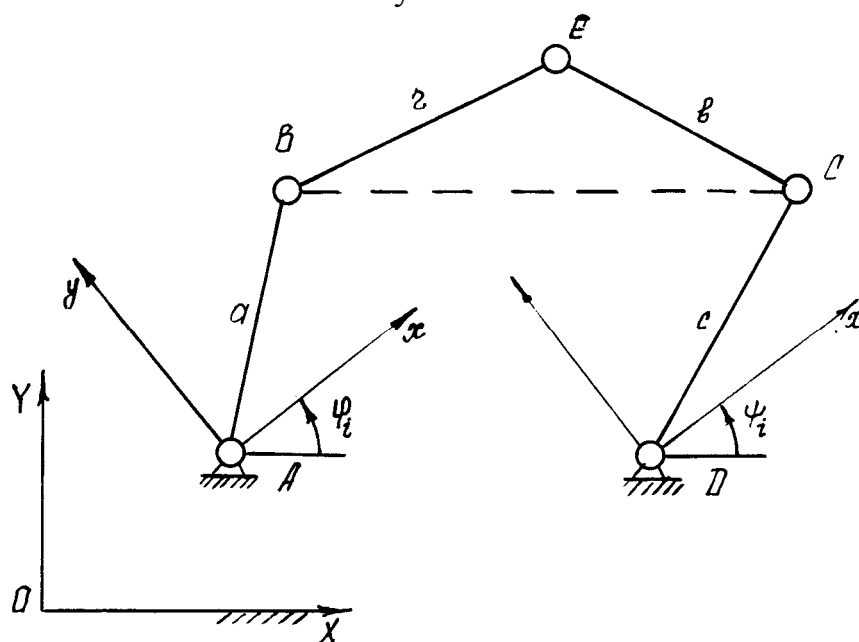


Рисунок 4.17

Остальные параметры механизма $ABCDEFG$ определим с помощью использования ИКЦ. Для этого зададимся угловыми положениями $\psi_i (i = \overline{1, N})$ выходного звена DE в соответствии со значением воспроизводимой функции $\psi = \psi(\varphi)$ при заданных угловых положениях $\varphi_i (i = \overline{1, N})$ входного звена (рисунок 4.18). Тогда координаты точки D могут быть определены с точностью до неизвестных параметров d и ψ_0 звена DE , что в свою очередь, позволит определить угловые положения θ_i звена CD на основе анализа четырехзвенника $ABCD$ по формулам (2.9). Зная координаты точки $D(X_{D_i}, Y_{D_i})$ и угловые положения $\theta_i (i = \overline{1, N})$ звена CD с точностью до неизвестных параметров c и ψ_0 , можно определить параметры четырехзвенника $ABCD$, на основе использования ИКЦ – $(2,1)_1$, целевая функция которой по аналогии с (4.10) имеет вид

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}(x_B, y_B, R, x_C, y_C, x_D, y_D)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}(a, \varphi_0, b, c, d, \psi_0, \theta_0)]^2 \quad (4.13)$$

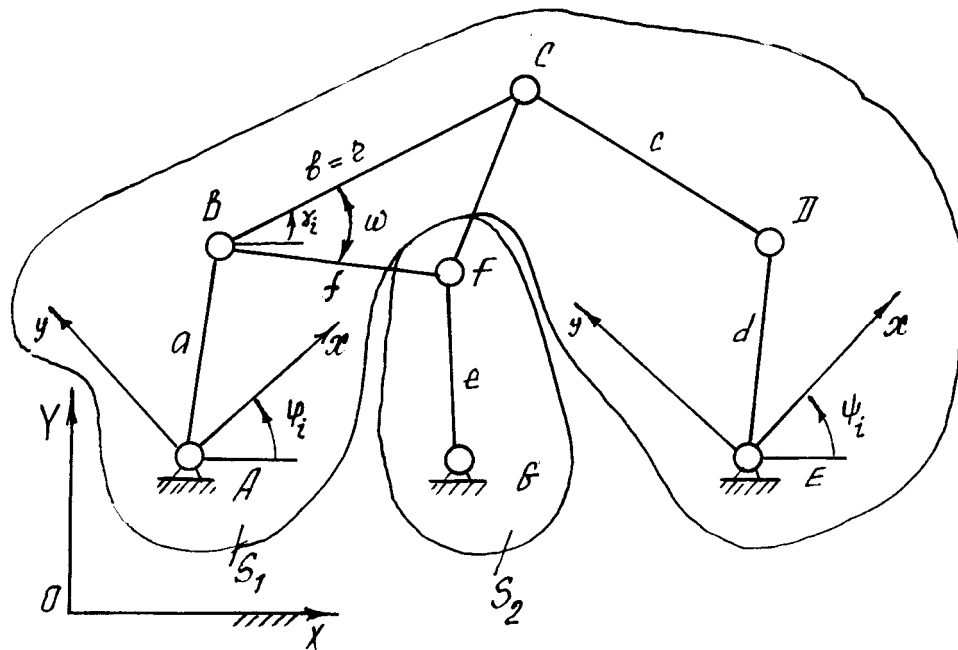


Рисунок 5.18

Для наложения геометрической связи используем ИКЦ – $(1,1)_1$, целевая функция которой имеет вид:

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}(x_F, y_F, R, x_G, y_G)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}(f, \omega, e, x_G, y_G)]^2 \quad (4.14)$$

Параметры механизма $ABCDEFG$ могут быть найдены по частям, а именно, в начале находим параметры $a, b, c, d, \varphi_0, \psi_0, \theta_0$, затем параметры f, ω, e, X_G, Y_G , минимизируя соответственно функции S_1 и S_2 с помощью алгоритма, приведенного в п.1.2. В то же время можно найти все параметры одновременно, минимизируя суммарную целевую функцию

$$S = S_1 + S_2$$

с помощью метода ψ -преобразования. Очевидно, во втором случае найденное значение суммарной целевой функции будет меньше суммы $S_1 + S_2$, полученной в первом случае.

В отличие от известных методов синтеза шестизвенных передаточных механизмов в данном случае нет необходимости предварительно задавать часть параметров механизма, т.к. суммарная целевая функция содержит все неизвестные параметры механизма (рисунок 4.18).

4.3 Синтез направляющих механизмов

Пусть заданы законы движения $X_m = X_m(t)$, $Y_m = Y_m(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, ($t_0 \leq t \leq t_m$) шатунной точки M и входного звена.

Исключая из этих уравнений параметр t , получим следующие зависимости:

$$X_{m_i} = X_m(\varphi_i),$$

$$Y_{m_i} = Y_m(\varphi_i),$$

где

$$\varphi_i = \varphi(t_i), \quad X_{m_i} = X_m(t_i), \quad Y_{m_i} = Y_m(t_i), \quad i = \overline{1, N}$$

t_i - заданные значения $t \in [0, t_m]$.

Требуется спроектировать направляющий механизм, шатунная точка M которого воспроизводит с достаточной степенью точности заданную траекторию при заданном законе движения входного звена.

В первую очередь целесообразно синтезировать наиболее простые четырехзвенные механизмы (рисунок 4.19).

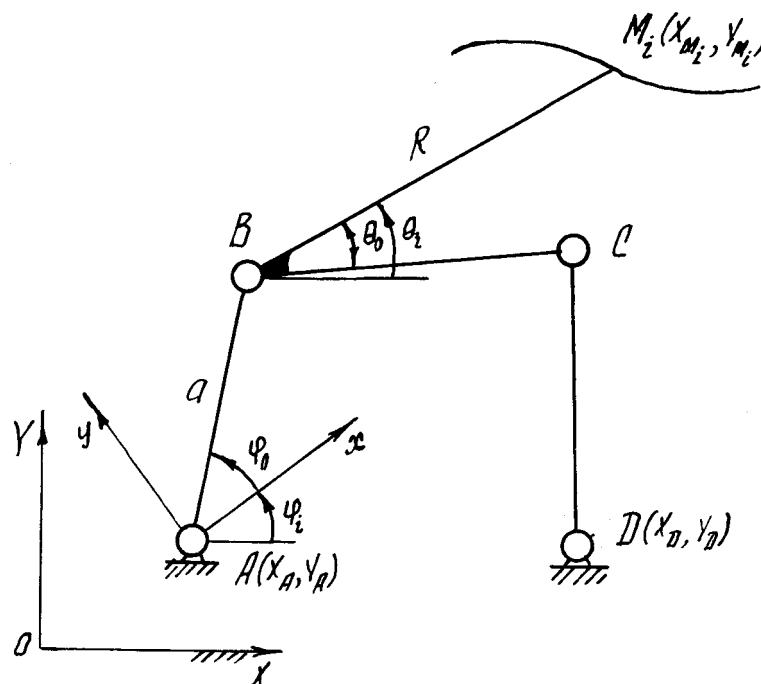


Рисунок 4.19

При синтезе этих механизмов следует использовать ИКЦ - $(3,1)_1$, отождествляя точку D этой ИКЦ с шатунной точкой M механизма, траектория которого задана условиями синтеза. ИКЦ - $(3,1)_1$ имеет две степени свободы и для получения одноподвижного механизма в данном случае необходимо исключить одну степень свободы. Геометрическая связь для исключения этой степени свободы может быть наложена единственным образом, а именно, на движение звена BM относительно стойки. Поскольку геометрическая связь может быть реализована тремя различными модификациями ИКЦ (п.4.1), то в итоге имеем три различных механизма.

Для определения параметров механизма, например, на рисунке 4.19, составим целевые функции ИКЦ - $(3,1)_1$ и ИКЦ - $(1,1)_1$ и выразим их через параметры механизма:

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_A, Y_A, x_B, y_B, R)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(X_A, Y_A, a, \varphi_0, b)]^2,$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_C, y_C, R, X_D, Y_D)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(b, \theta_0, c, X_D, Y_D)]^2.$$

Определение неизвестных угловых положений θ_i звена BM ($i = 0, 1, \dots, N$) производится на основе анализа диады ABM по формулам (2.8). Параметры четырехзвенника могут быть найдены по частям, а именно, вначале параметры $X_A, Y_A, a, \varphi_0, R$, затем $-b, \theta_0, c, X_D, Y_D$, минимизируя соответственно функции S_1 и S_2 с помощью алгоритма (п.1.2). Для одновременного определения всех параметров механизма необходимо минимизировать суммарную целевую функцию $S = S_1 + S_2$ с помощью метода ψ -преобразования.

Если параметры механизма, найденные в результате синтеза, не удовлетворяют наложенным ограничениям, то необходимо от ИКЦ $(3,1)_1$ перейти к использованию ИКЦ - $(3,1)_2$ или $(3,1)_3$.

Если полученные механизмы не обеспечивают требуемой точности воспроизведения заданной траектории, то следует перейти к синтезу шестизвенных механизмов. При синтезе шестизвенных механизмов следует использовать ИКЦ - $(2,1)_1$, отождествляя точку D с шатунной точкой M механизма (рисунок 4.20). ИКЦ - $(2,1)_1$ имеет три степени свободы и для получения одноподвижного механизма необходимо исключить у него две степени свободы. Как было показано в п.4.1, при исключении их путем наложения геометрических связей можно получить 54 различных механизма.

Для определения параметров механизма, например, представленного на рисунке 4.20, составим целевые функции ИКЦ - $(2,1)_1$ и ИКЦ - $(1,1)_1$ и выразим их через параметры механизма:

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(X_A, Y_A, x_B, y_B, R, x_C, y_C)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(X_A, Y_A, a, \varphi_0, b, c, \psi_0)]^2$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_F, y_F, R, x_G, y_G)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(f, \gamma_0, g, X_G, Y_G)]^2$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}(x_D, y_D, R, x_E, y_E)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}(d, \psi_0, e, X_E, Y_E)]^2$$

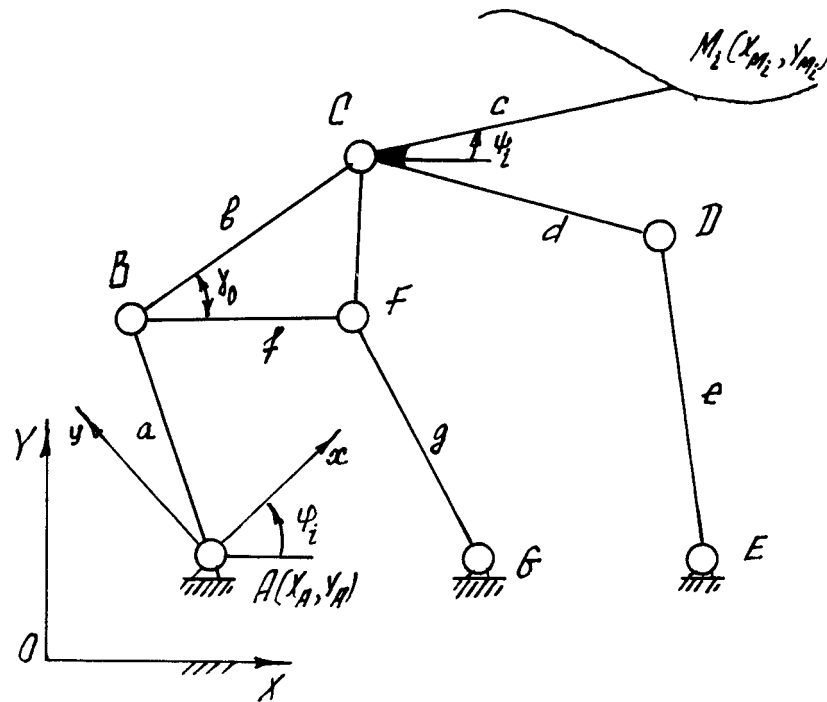


Рисунок 4.20

Определение неизвестных угловых положений γ_i звена BC и ψ_i звена $CM(i = \overline{0, N})$ производится на основе анализа четырехзвенника $ABCM$ по формулам (2.9). Параметры механизма могут быть найдены как по частям, минимизируя последовательно целевые функции S_1 , S_2 и S_3 с помощью алгоритма (п.1.2), так и одновременно, минимизируя суммарную функцию

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

с помощью метода ψ - преобразования.

Если параметры механизма, найденные в результате синтеза, не удовлетворяют заданным условиям синтеза, то необходимо от ИКЦ - $(2,1)_1$ перейти к использованию ИКЦ - $(2,1)_2$. При этом следует учесть, что ИКЦ - $(2,1)_2$ может быть реализована в двух вариантах в зависимости от порядка рассмотрения плоскостей Q_1 и Q_2 и, как следствие, в этом случае можно получить $54 \times 2 = 108$ различных механизмов.

Пример. Рассмотрим задачу синтеза направляющего шестизвенного механизма, преобразующего прямолинейное равномерное движение входного звена (ползуна) в прямолинейное равномерное движение шатунной точки. Пусть параллельные отрезки прямых $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$ являются соответственно траекториями входной A и шатунной P точки механизма. Начало неподвижной системы координат OXY совместим с началом отрезка S . Длины отрезков и расстояние между ними заданы:

$$S_1 = 0, \quad S_N = 0,54, \quad P_1 = -0,51, \quad P_N = 0,69, \quad h = 1,02$$

Необходимо спроектировать шестизвенный механизм, удовлетворяющий основному и дополнительным условиям синтеза. К дополнительным условиям синтеза относятся габариты механизма.

Разбивая рассматриваемые отрезки U и W на $h=11$ равных частей, определим текущие координаты точек A и S (рисунок 4.21):

$$X_A^{(j)} = 0; \quad Y_A^{(j)} = Y^{(0)} + j \cdot S / n; \quad X_P^{(j)} = h; \quad Y_P^{(j)} = Y_P - j \cdot P / n; \quad (j = \overline{1, N})$$

В зависимости от использования ИКЦ можно получить шестизвенные механизмы II, III и IV класса. Для синтеза механизмов II и III класса используются ИКЦ – $(3,2)_1$ и ИКЦ – $(1,1)_1$. Для определения параметров механизма II и III класса составим целевые функции и выразим их через параметры механизма

$$S = S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_B, y_B, R)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(a, \varphi_0, b)]^2;$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_C, y_C, R, X_G, Y_G)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(e, \gamma_0, d, X_G, Y_G)]^2;$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_E, y_E, R, X_D, Y_D)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(f, \omega, g, X_D, Y_D)]^2$$

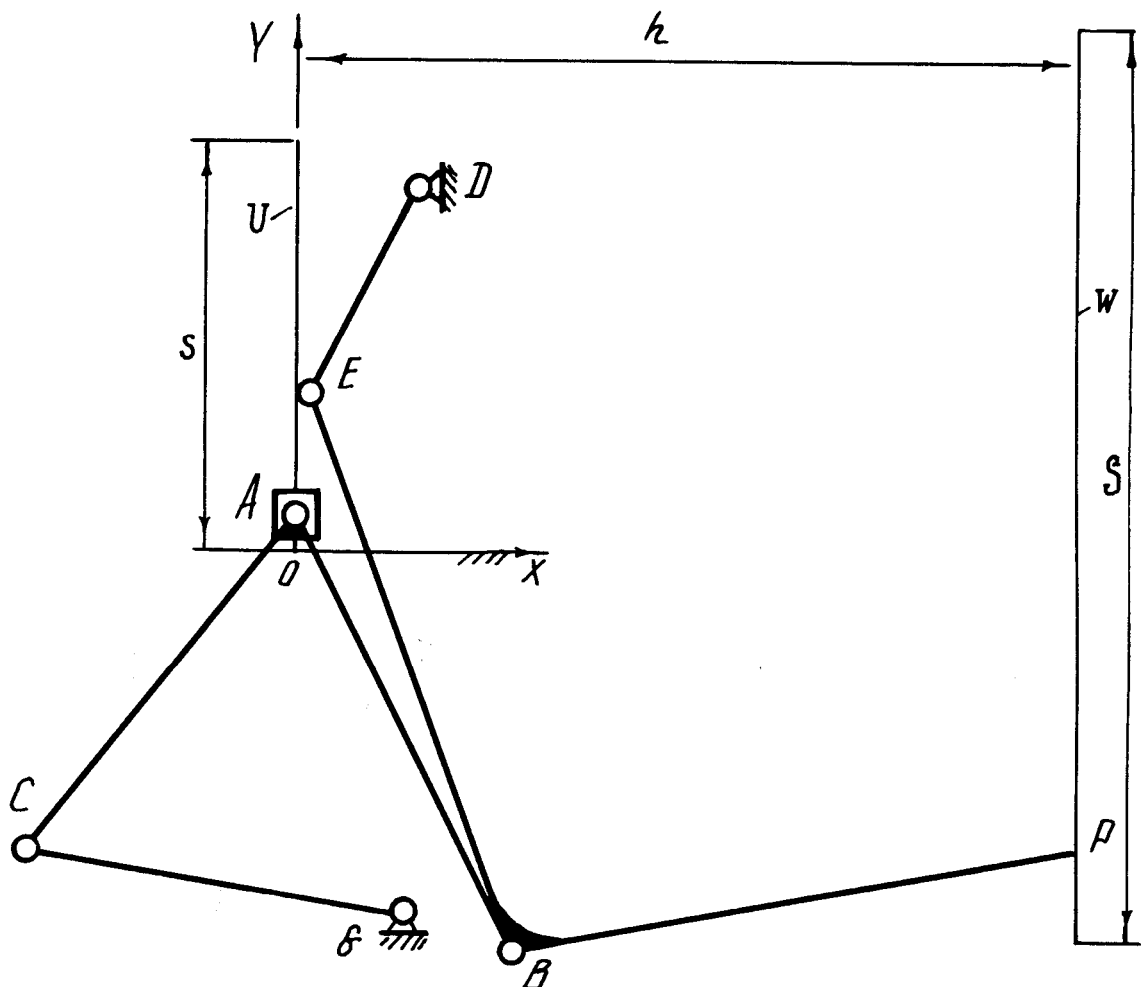


Рисунок 4.21

Определение неизвестных угловых положений звеньев ABP ИКЦ-(3,2)₁ производится на основе анализа четырехзвенника ABP по формулам (2.9) одновременно при минимизации суммарной целевой функции $S = S_1 + S_2 + S_3$ с помощью алгоритма, приведенного в п.3.2.

На габариты механизма наложены ограничения в виде:

$$\begin{aligned} 0 \leq X_D \leq 1, & \quad 0 \leq X_G \leq 1, \\ 0,5 \leq Y_D \leq 0,6 & \quad 0,5 \leq Y_G \leq 1. \end{aligned}$$

Входными данными метода ψ - преобразования были:

число предварительных испытаний $M_0 = 10$,

число основных испытаний $M = 600$,

число уровней $K = 10$,

точность приближения $L = 2$.

Согласно алгоритму было определено значение глобального минимума $S = 0,4205489$, а также значение координат глобального минимума для механизма II класса:

$$\begin{aligned} X_G &= 0,14409, & a &= 0,64, & d &= 0,50175, \\ Y_G &= 0,4797, & b &= 0,75, & f &= 0,31097, \\ X_D &= 0,15167, & c &= 0,56834, & r &= 0,77384, \\ X_D &= 0,47594, & e &= 0,64443, & g &= 1,1771. \end{aligned}$$

При синтезе шестизвенного механизма $ABCDEFGF$ III-класса с теми же ограничениями по методу ψ -преобразования было определено значение глобального минимума $S = 0,390541$, а значение координат глобального минимума:

$$\begin{aligned} X_G &= 0,15167, & a &= 0,6403, & e &= 0,030775, \\ Y_G &= 0,47594, & b &= 0,75015, & f &= 0,79268, \\ X_D &= 0,46519, & c &= 0,77384, & g &= 0,76104, \\ Y_D &= 0,84285, & d &= 0,31097, & r &= 1,1771. \end{aligned}$$

При синтезе шестизвенного механизма IV-класса (рисунок 4.22) с теми же ограничениями по алгоритму п.3.2 было определено значение глобального минимума, $S = 0,0182331$, а значение координат глобального минимума:

$$\begin{aligned} X_D &= 0,97413, & a &= 0,6404, & e &= 0,6203, \\ Y_D &= 0,65506, & b &= 0,7502, & r &= 0,234987, \\ h &= 0,046337, & c &= 0,66107, & k &= 0,88841, \\ g &= 0,68264, & d &= 0,84267, & f &= 0,63267. \end{aligned}$$

Таким образом, спроектированы направляющие механизмы II, III и IV класса, удовлетворяющие дополнительным условиям синтеза.

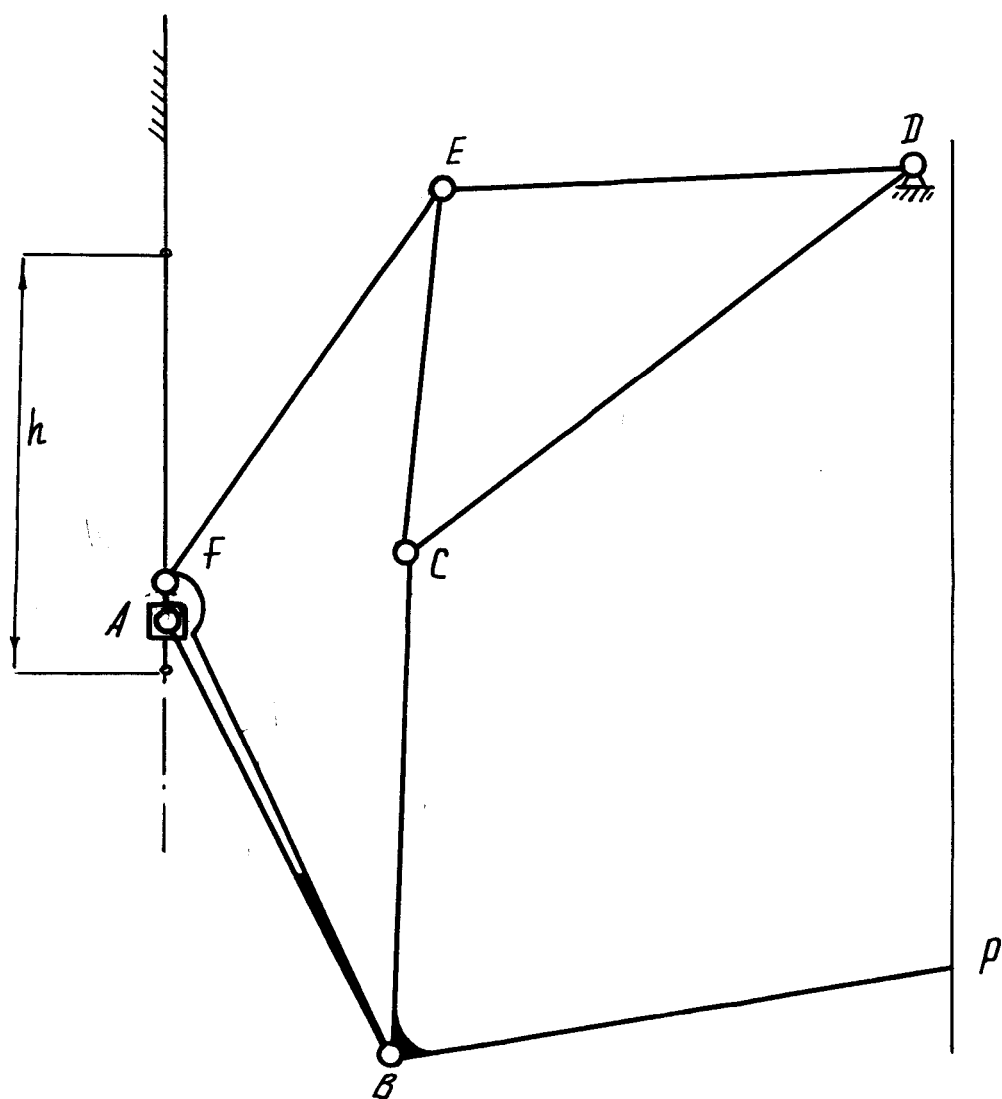


Рисунок 4.22

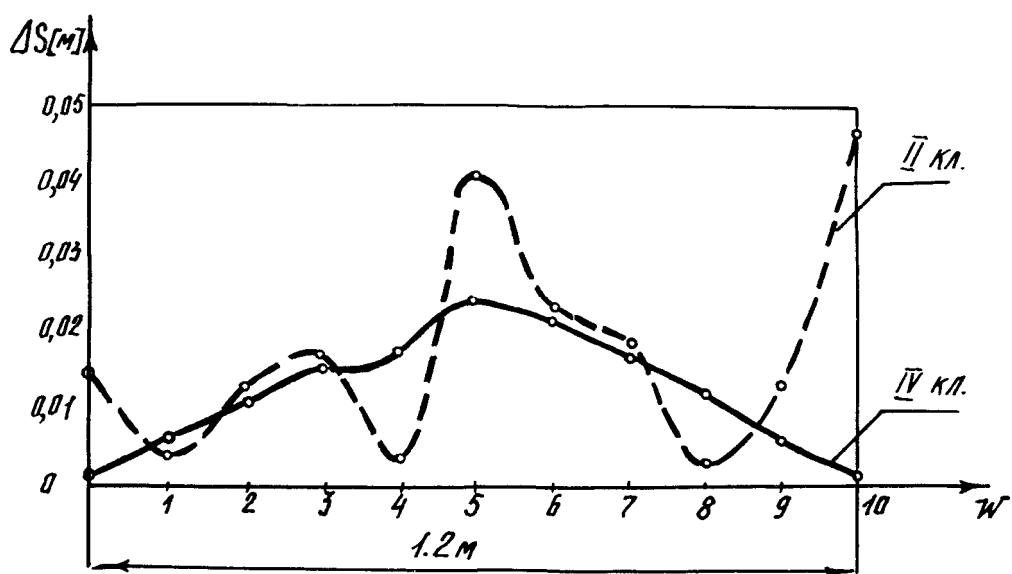


Рисунок 4.23

При проведении анализа на точность воспроизведения заданной траектории точки P шатуна получено, что максимальное

среднеквадратическое координатное отклонение для механизма II-класса $\Delta_{max_I} = 0,04461$ и для механизма IV класса $\Delta_{max_{II}} = 0,0286$.

Графики среднеквадратических отклонений положений точки от заданных изображены на рисунке 4.23. Из анализа графиков следует, что среди спроектированных механизмов, удовлетворяющих основному и дополнительным условиям синтеза наиболее точным является механизм IV класса. На рисунках 4.21 и 4.22 изображены схемы спроектированных механизмов II и IV класса.

4.4 Синтез перемещающих механизмов

Пусть заданы законы движения шатунной плоскости Q_2 в виде $X_{P_i} = X_P(t)$, $Y_{P_i} = Y_P(t_i)$, $\Psi_i = \Psi(t_i)$ и входного звена $\varphi_i = \varphi(t)$, $(t_0 \leq t \leq t_m)$. Исключая из этих уравнений параметр t , получим следующие зависимости:

$$X_{P_i} = X_P(\varphi_i),$$

$$Y_{P_i} = Y_P(\varphi_i),$$

$$\Psi_{P_i} = \Psi_P(\varphi_i).$$

где

$$\varphi_i = \varphi(t), \quad X_{P_i} = X_P(t_i), \quad Y_{P_i} = Y_P(t_i), \quad \Psi_i = \Psi(t_i)$$

$$t_i - \text{заданные значения } t \in [t_0, t_m].$$

Требуется спроектировать механизм с одной степенью подвижности, приближенно воспроизводящей заданное движение шатунной плоскости Q_2 при заданном законе движения входного звена.

Как известно, четырехзвенные механизмы не могут обеспечить координации заданных законов движения входного звена и шатунной плоскости, поэтому синтез перемещающих механизмов следует начинать с шестизвенных. Как и в предыдущем случае, для синтеза шестизвенного механизма следует в первую очередь использовать ИКЦ-(2,1)₁, отождествляя точку D с точкой P шатунной плоскости механизма (рисунок 4.24). При исключении лишних степеней свободы получим, как и ранее, 54 различных механизма.

Для определения параметров механизма составим целевые функции ИКЦ и выразим их через параметры механизма. Например, для механизма, представленного на рисунке 4.18 необходимо использовать ИКЦ - (2,1)₁, ИКЦ -(1,1)₁ и ИКЦ - (2,2)₁:

$$S_1 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta q_i(X_A, Y_A, x_b, y_b, R, x_c, y_c) \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta q_i(X_A, Y_A, a, \varphi_0, b, c, \varphi_0) \right]^2,$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta q_i(X_D, Y_D, R, X_E, Y_E) \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta q_i(d, \gamma_0, e, X_E, Y_E) \right]^2$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_F, y_F, R, x_G, y_G,)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(f, \omega, h, \alpha, g)]^2.$$

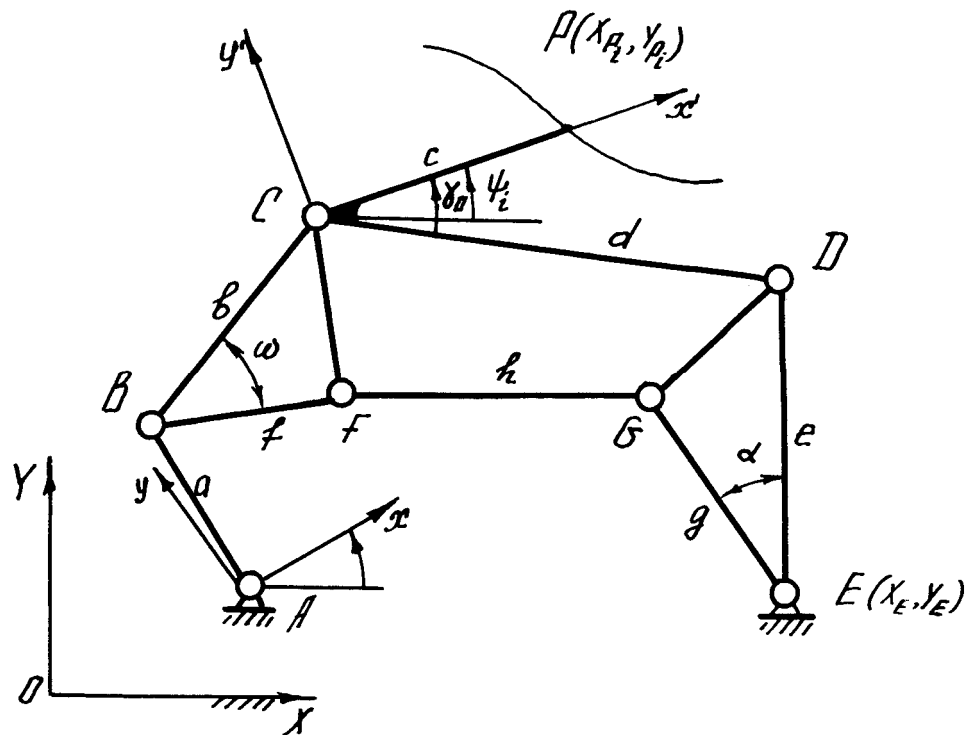


Рисунок 4.24

Определение параметров механизма можно провести как по частям, минимизируя в отдельности функции S_1, S_2, S_3 , так и одновременно, минимизируя суммарную функцию. Если параметры механизма, найденные в результате синтеза не удовлетворяют заданным условиям синтеза, то необходимо перейти от ИКЦ - $(2,1)_1$ к ИКЦ - $(2,1)_2$ и далее к ИКЦ - $(2,1)_3$. Например, механизм, изображенный на рисунке 4.25.

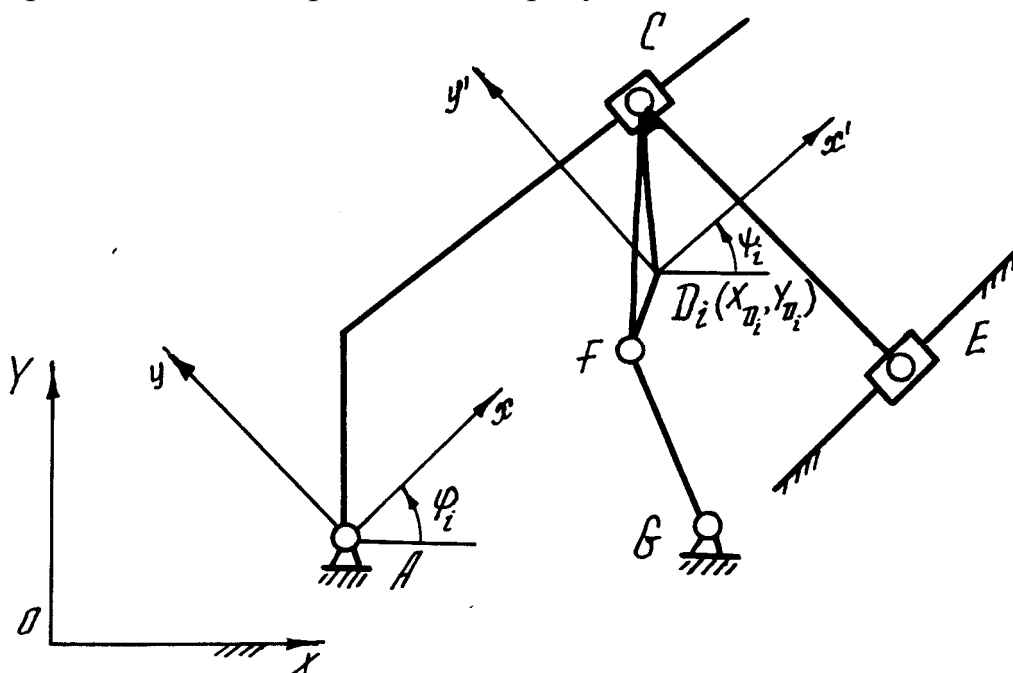


Рисунок 4.25

Если полученные механизмы не удовлетворяют заданным условиям синтеза, то следует перейти к синтезу восьмизвенных механизмов. Для этого используем в первую очередь ИКЦ - $(2,1)_1$, вводя диаду BEC вместо шатуна BC (рисунок 4.26). В итоге образуется пятизвенная кинематическая цепь с четырьмя степенями свободы. Для получения одноподвижного механизма необходимо исключить три степени свободы, налагая последовательно три геометрические связи. Теоретическое число вариантов наложения первой геометрической связи равно $C_5^2 = 10$. Исключим из этого числа варианты, приводящие к рассмотрению смежных звеньев, откуда число возможных вариантов наложения первой связи равно шести. Они соответствуют следующим попарным сочетаниям звеньев:

$$I=(0;2), II=(0;3), III=(0;4), IV=(1;3), V=(1;4), VI=(2;4).$$

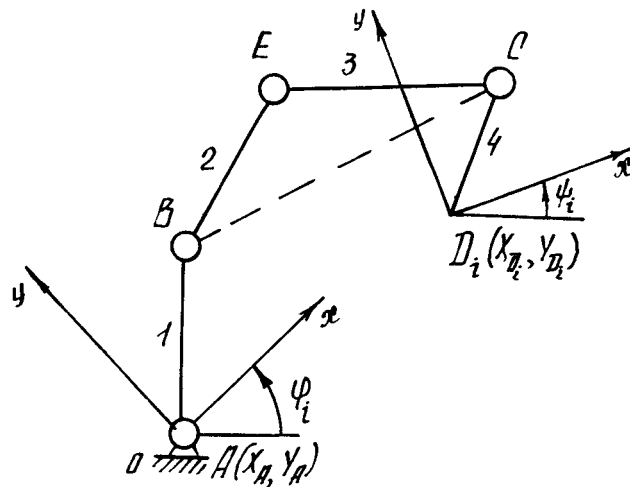


Рисунок 4.26

При наложении второй связи следует учитывать появление в кинематической цепи шестого звена, реализующего первую связь, поэтому рассмотрим каждый из вариантов в отдельности.

Вариант I - имеем кинематическую цепь $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \xrightarrow{3 \rightarrow 4} \xrightarrow{5 \rightarrow 0}$ (рисунок 4.27).

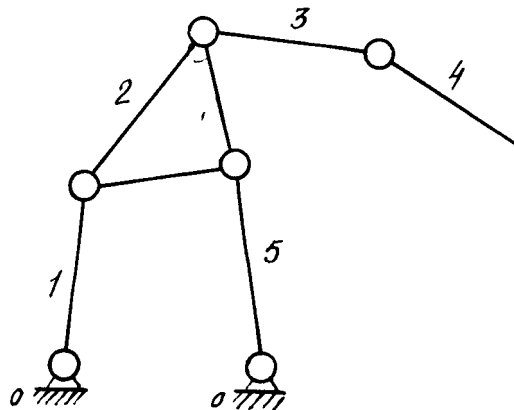


Рисунок 4.27

Здесь имеем шесть вариантов наложения второй связи, соответствующих следующим парам звеньев: $(0,3)$, $(0,4)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(5,3)$, $(5,4)$. Рассматривая

каждый из этих шести вариантов отдельно, получим 48 одноподвижных механизмов, из которых структурно различаются между собой 20 механизмов, среди которых, в свою очередь, 14 механизмов - II класса, 5 - III класса и 1 - IV класса.

Вариант II - имеем кинематическую цепь $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \xrightarrow{4} 5 \rightarrow 0$ (рисунок 4.28). Здесь имеем восемь вариантов наложения второй связи, соответствующих следующим парам звеньев: (0,2), (0,3), (0,4), (1,3), (1,4), (1,5), (2,4), (2,5). Рассматривая каждый из этих вариантов в отдельности, получим 56 одноподвижных механизмов, из которых структурно различаются между собой 40 механизмов, совпадают с механизмами из варианта I наложения первой связи 7 механизмов. Среди оставшихся 33 механизмов 6 - II класса, 14 - III класса, 11 - IV класса, 2 - V класса.

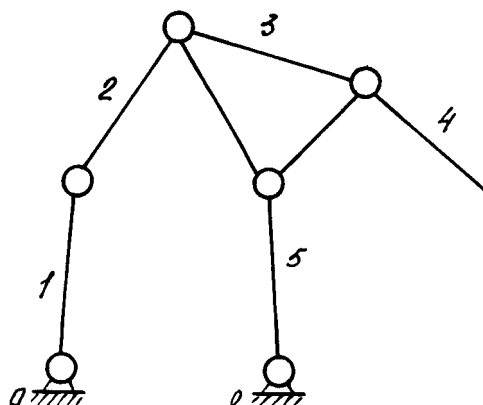


Рисунок 4.28

Вариант III - имеем кинематическую цепь $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ (рисунок 4.29).

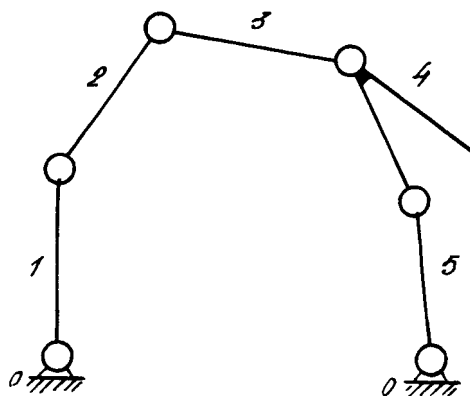


Рисунок 4.29

Здесь имеем девять вариантов наложения второй связи, соответствующих следующим парам звеньев: (0,2), (0,3), (0,4), (1,3), (1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,5). Рассматривая каждый из вариантов в отдельности, получим 102 одноподвижных механизма, из которых структурно различаются между собой 76 механизмов, совпадают с механизмами из вариантов I и II наложения первой связи соответственно 32 и 5 механизмов.

Среди оставшихся 39 механизмов 7 - II-класса, 7 - III класса, 13 - IV класса, 11 - V класса, 1 - двухконтурный механизм IX класса (рисунок 4.30).

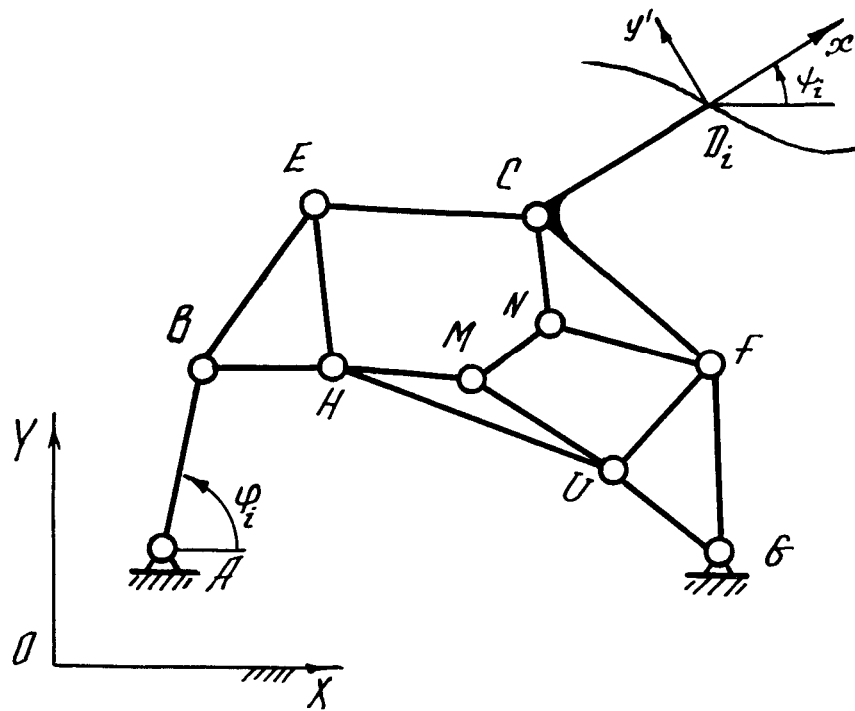


Рисунок 4.30

Аналогично можно получить все механизмы, соответствующие остальным трем вариантам наложения первой связи.

Подводя итоги рассмотрения первых трех вариантов, имеем следующее количественное соотношение между восьмизвенными механизмами различных классов: из 92 различных между собой механизмов 27-II класса, 26-III класса, 25-IV класса, 13-V класса, 1-IX класса. Поскольку каждая геометрическая связь может быть реализована тремя различными ИКЦ, то общее количество различных между собой механизмов в три раза больше, т.е. $92 \times 3 = 276$.

Для определения параметров механизма составим целевые функции ИКЦ. Для пятизвенной ИКЦ (рисунок 4.31) необходимо составить соответствующую ей целевую функцию, что можно сделать следующим образом.

По известным координатам точки D и углу поворота звена DP , заданным условиям синтеза, определим с точностью до неизвестных параметров d и ψ_0 координаты точки D :

$$\begin{aligned} x_d(d, \psi_0) &= x_P - d \cos(\psi_0 + \psi) \\ y_d(d, \psi_0) &= y_P - d \sin(\psi_0 + \psi) \end{aligned}$$

Тогда путем анализа ИКЦ $ABCD$ по формулам (2.9) нетрудно определить угловое положение Π_i звена CD , как функцию неизвестных параметров $X_A, Y_A, a, \varphi_0, d, R, \psi_0$:

$$\theta_i = \theta(X_A, Y_A, a, \varphi_0, b, c, \psi_0)$$

для любого i -го положения звеньев AB и DP ($i = \overline{1, N}$).

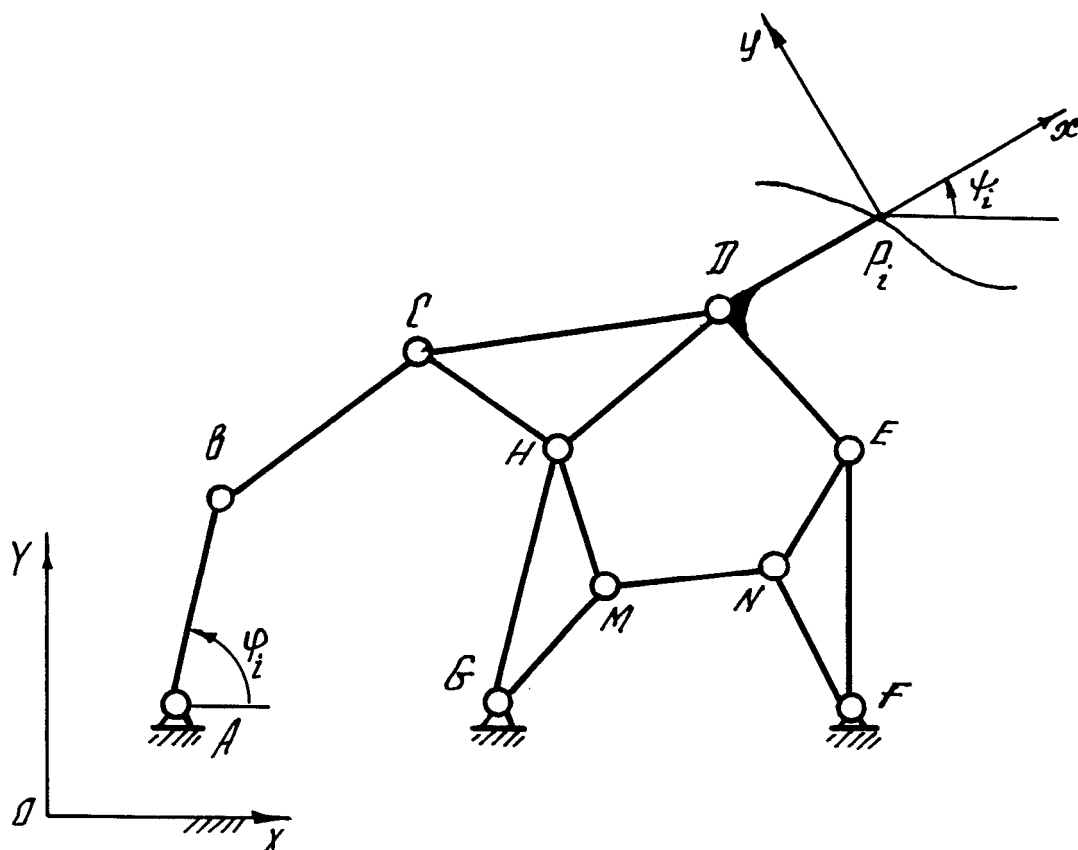


Рисунок 4.31

Таким образом, для любого заданного положения механизма известны положения звеньев AB и CD четырехзвенной цепи $ABCD$, что позволяет воспользоваться снова целевой функцией ИКЦ $(2,1)_2$:

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(X_A, Y_A, x_b, y_b, R, x_C, y_C)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(X_A, Y_A, a, \varphi_0, b, \theta_0, c, \psi_0)]^2.$$

Для модификаций ИКЦ, используемых для наложения трех геометрических связей с целью получения одноподвижного механизма, например, представленного на рис.1.31, целевые функции будут иметь известный вид:

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_E, y_E, R, X_F, Y_F)]^2$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_H, y_H, R, X_G, Y_G)]^2$$

$$S_4 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_N, y_N, R, x_M, y_M)]^2.$$

Таким образом, число неизвестных параметров восьмизвенных механизмов равно 24 и они могут быть найдены как по частям, минимизируя функции S_1, S_2, S_3, S_4 последовательно, так и одновременно, минимизируя суммарную функцию

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

с помощью метода ψ -преобразования.

4.5 Синтез механизма компенсации уточных нитей на многоцветном ткацком станке СТБ

Механизмы компенсации применяются на ткацких станках типа СТБ для регулирования натяжения уточной нити во время формирования ткани. На рисунке 4.32 изображена циклограмма движения рабочего звена механизма для угла боя 105° [80]. Участок ab - вытягивание уточной нити после ее отрезания на определенную позицию (вывод рабочего звена в верхнее положение), bc - выстой рабочего звена в верхнем положении, необходимый для стабильной работы системы смены цвета, cd - разгон уточной нити для уменьшения натяжения на этом участке, de - выстой рабочего звена в нижнем положении при прокладывании уточной нити в зев, ef - вытягивание излишка проброшенной уточной нити и создание определенного натяжения при отрезании, fa - выстой при отрезании уточной нити. Точка P на циклограмме соответствует началу свободного полета прокладчика утка.

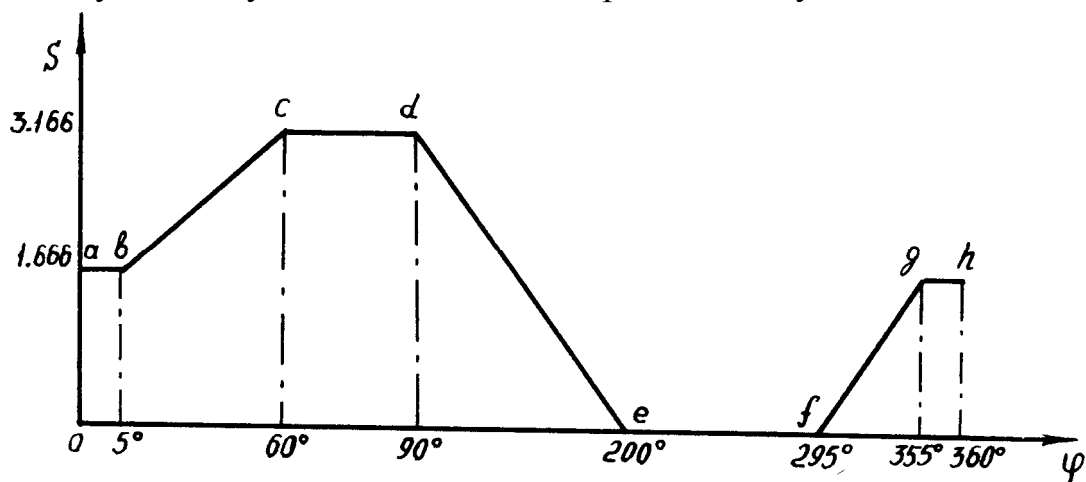


Рисунок 4.32

На основании анализа существующей системы компенсации было установлено, что положения рабочего органа группового компенсатора должны соответствовать в верхнем положении $S_b = 190\text{мм}$, при отрезании $S_{OT} = 100\text{мм}$, при бое $S_\delta = 95\text{мм}$. Циклограмма движения рабочего органа компенсатора очень сложная, имеющая три выстоя, и поэтому применялись комбинированные кулачково-рычажные механизмы.

При этом кулачок является ведущим звеном, связанным с главным валом станка, а рабочее звено движется в плоскости, перпендикулярной движению уточной нити в зеве. Основными недостатками комбинированного механизма являются быстрый износ элементов высшей пары кулачок-ролик и отрыв ролика от кулачка при увеличении скоростных характеристик станка. Для устранения этих недостатков синтезирован новый кривошипно-ползунный механизм III класса, обеспечивающий три выстоя за цикл работы.

Исходными данными при синтезе шестизвенного передаточного механизма III класса являлись:

а) согласно движению уточной нити направляющая ползуна должна совпадать с осью OY системы OXY ,

б) координаты оси вращения кривошипа должны находиться в следующих пределах: $1.8 \leq X_A \leq 2$, $-0.5 \leq Y_A \leq -0.8$.

Рассмотрим синтез передаточного механизма III класса по заданному закону движения ведомого звена – ползуна в функции перемещения входного звена – кривошипа $S = S_i(\varphi_i)$, $i = \overline{1, N}$ (рисунок 4.33).

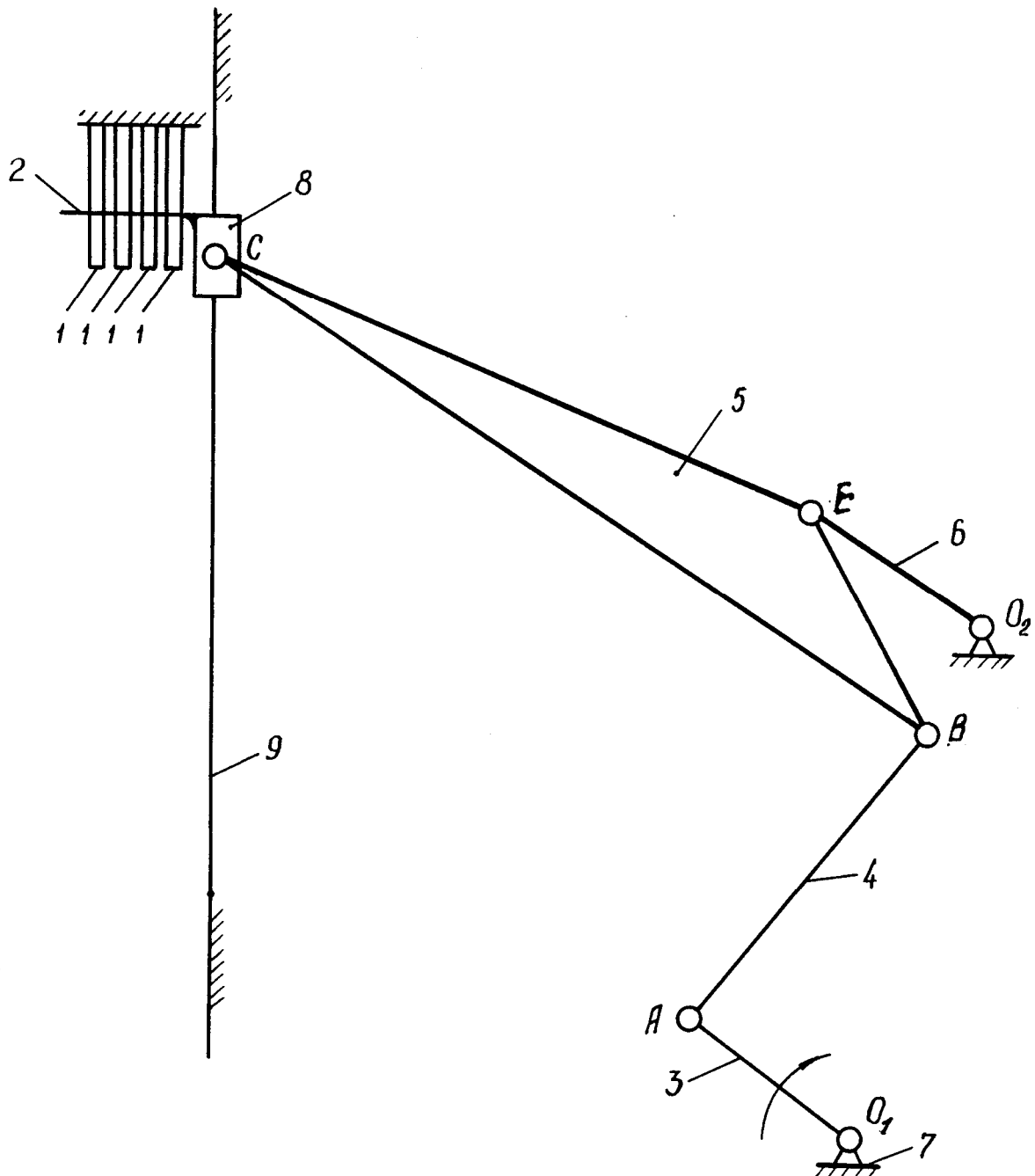


Рисунок 4.33

Если синтезировать механизм на основе ИКЦ - $(3,1)_1$, то получим кривошипно-ползунный четырехзвенник, в котором угол передачи γ_i в общем случае не удовлетворяет заданным ограничениям. Кроме того, как показали результаты численного эксперимента на ЭВМ, механизмы II класса не позволяют осуществить передачу движения с тремя выстоями. Решение

этой задачи возможно на основе ИКЦ - $(2,1)_1$, в которой движение ползуна и движение кривошипа принять за две обобщенные координаты. Задача решается в два этапа. На первом этапе определяются параметры ИКЦ- $(2,1)_1$, отождествляя точку D с точкой C ползуна механизма. С учетом наложения геометрической связи ползуном получим кинематическую цепь O_1ABC , имеющую две степени свободы и для получения одноподвижного механизма необходимо исключить у нее одну степень свободы.

Геометрическая связь для исключения этой степени свободы может быть наложена единственным образом, а именно, на движение звена AC относительно стойки. Поэтому, необходимо задаться параметрами движения звена BC , чтобы определить углы передачи γ_i на ползуне C . В этом случае угол γ_i может изменяться в определенных заданных пределах, а шарнир B звена BC должен двигаться по сложной траектории, представляющей на участках выстоя дуги окружностей с центром в точке C . Угол γ_i определяется с помощью выражения (2.9) для каждого фиксированного положения точки C . Для определения параметров механизма, составим целевые функции ИКЦ $-(2,1)_1$ и ИКЦ $-(1,1)_1$ и выразим их через параметры механизма:

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(X_{0_1}, Y_{0_1}, x_A, y_A, R, x_B, y_B)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(X_{0_1}, Y_{0_1}, \varphi_0, a, b, \gamma_0, c)]^2,$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_E, y_E, R, X_{0_2}, Y_{0_2})]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(\beta_0, h, r, X_{0_2}, Y_{0_2})]^2.$$

При этом были учтены следующие ограничения, которые обеспечивают работу механизма в заданной области:

а) на размеры звеньев

$$\begin{aligned} 0. \leq \varphi_0 \leq 2\pi & \quad 0.0 \leq \beta_0 \leq \pi \\ 0.4 \leq a \leq 0.7 & \quad 1.5 \leq h \leq 3 \\ 0.9 \leq b \leq 1.3 & \quad 0.4 \leq r \leq 1 \\ 1.5 \leq c \leq 2.8 & \quad 0. \leq X_{0_2} \leq 2.5 \\ 1.7 \leq X_{0_1} \leq 2 & \quad -0.5 \leq Y_{0_2} \leq 1.5 \\ 0. \leq Y_{0_1} \leq -0.9 & \end{aligned}$$

б) на углы передачи

$$270^0 \leq \mu_i \leq 320^0$$

в) на условие существования кривошипа

$$(b + r - a)^2 \leq [X_{0_1}^2 + (Y_{C_i} - Y_{0_1})^2]^2.$$

При решении задачи синтеза передаточного механизма III класса бралось 65 исходных положений входного и выходного звеньев, причем на участках выстоя значения координат принимались через один градус поворота кривошипа. Минимизация целевой функции $S = S_1 + S_2$ производилась с помощью алгоритма, приведенного в п.3.3.

При этом входными данными были следующие: число переменных $N=11$, число предварительных испытаний $M_0=10$, число основных испытаний $M=500$, число уровней $K=10$, точность приближения $L=2$.

Согласно алгоритму было определено значение глобального минимума $S=0,0078248$, а также значение координат глобального минимума:

$$\begin{array}{lll} \varphi_0 = 113^{\circ} 41' & a = 0,6012 & b = 1,108 \\ c = 2,54153 & X_{0_1} = 1,9 & Y_{0_1} = -0,7 \\ \beta = 12^{\circ} 9' & h = 1,925 & r = 0,795 \\ X_{0_2} = 2,275 & Y_{0_2} = 0,823. & \end{array}$$

Спроектированный механизм III класса изображен на рисунке 4.33, а на рисунке 4.34 показан принцип работы этого механизма.

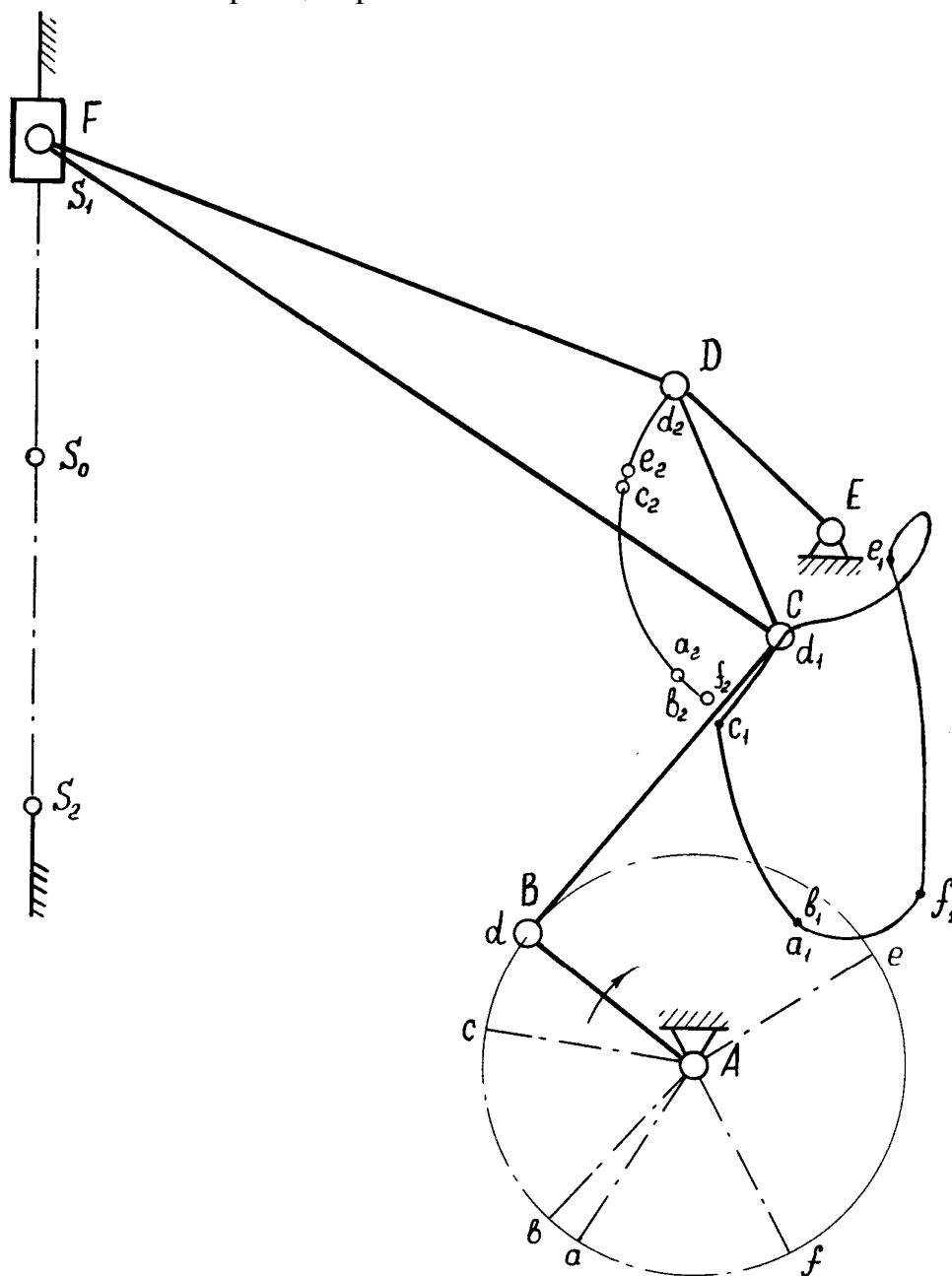


Рисунок 4.34

Три необходимых выстоя выходного звена за один оборот кривошипа AB получаются следующим образом. При движении точки B по дугам ab , cd , ef окружности происходит остановка выходного звена. Кривошип AB сообщает движение шатуну BC , а шатун – трехшарнирному жесткому контуру CFD , при этом шарнир C движется по сложной траектории, имеющей три дуги a_1b_1 , c_1d_1 и e_1f_1 окружности. Центрами этих дуг окружности является точка ползуна F в положениях S_0, S_1, S_2 , а радиусом – звена CF . Таким образом, спроектированный механизм, благодаря своей структуре и найденным соотношениям размеров звеньев, обеспечивает три необходимых выстоя.

На рисунке 4.35 изображен график отклонения ΔS функции от воспроизводимой функции механизма III класса.

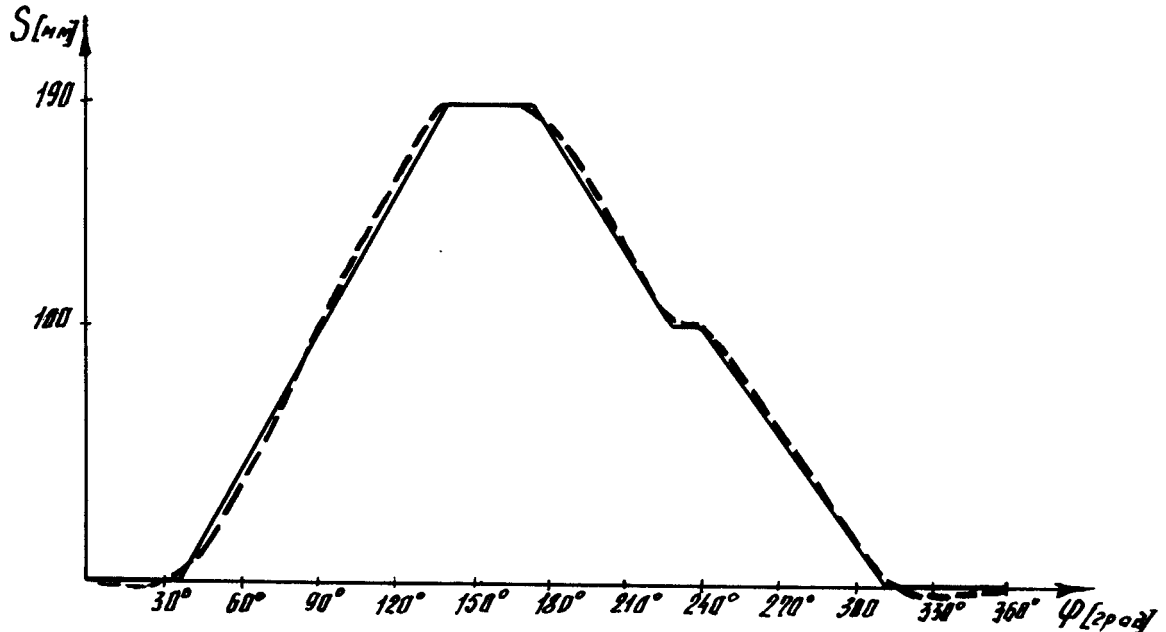


Рисунок 4.35

5.6 Синтез перемещающего механизма IV класса с двумя ведущими звеньями

Механизм предназначен для компенсации уточных нитей на многоцветном ткацком станке. На рисунке 4.36 показана циклограмма работы рабочего органа (компенсирующего элемента) механизма. В отличие от предыдущего примера, данная циклограмма работы компенсирующего элемента, во-первых, имеет четыре выстоя и, во-вторых, несколько иную зависимость перемещения компенсирующего элемента от угла вращения главного вала, так как механизм предназначен для многоцветных ткацких станков СТБ с пневматической подачей уточной нити прокладчику с помощью сопла. Известные кулачково-рычажные механизмы могут воспроизвести движение рабочего органа по заданной циклограмме. Однако, из-за сложного вида циклограммы и большого хода рабочего органа кулачок получается динамически предельно нагруженным. Для устранения этих

недостатков и замены кулачкового механизма спроектирован перемещающий механизм IV класса с двумя ведущими звеньями (рисунок 4.37). Спроектированный механизм позволяет:

а) осуществить большие перемещения в требуемых плоскопараллельном и поступательном движениях компенсирующего элемента с помощью группы Ассур IV класса II порядка с приводом от кривошипа (первое ведущее звено);

б) малые перемещения рабочего органа осуществить коромыслом (второе ведущее звено) с помощью кулачкового привода этого механизма и тем самым выполнить требуемый закон движения рабочего органа.

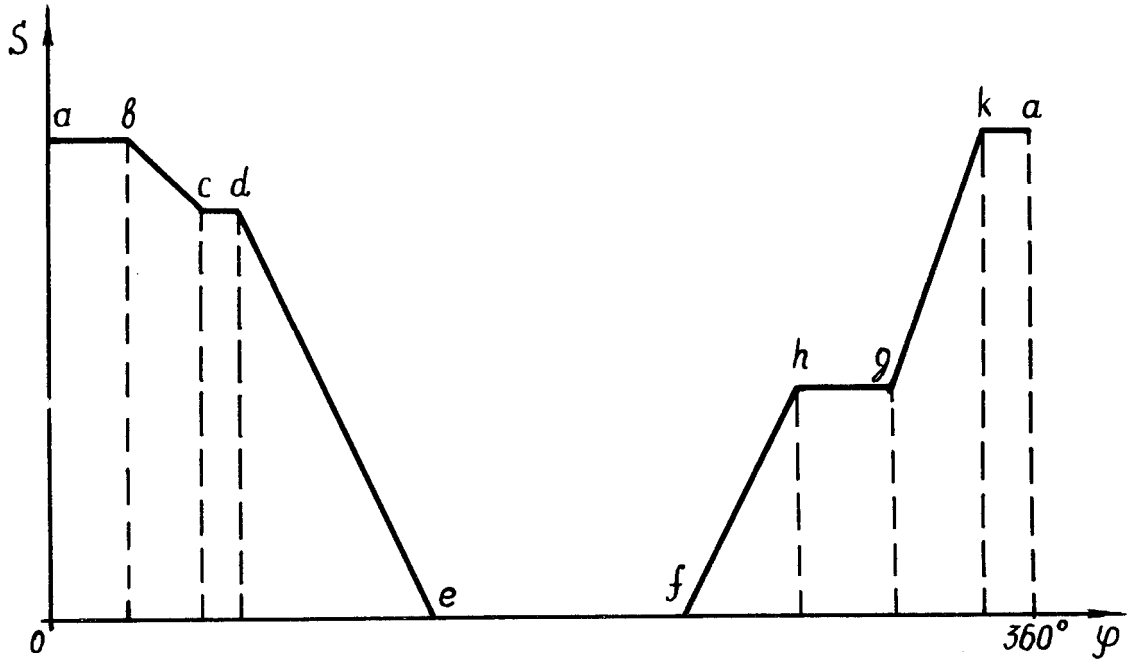


Рисунок 4.36

Рассмотрим синтез перемещающего механизма IV класса с двумя ведущими звеньями по заданному закону движения шатунной плоскости $X_{p_i} = X_p(t_i)$, $Y_{p_i} = Y_p(t_i)$, $\theta_i = \theta(t_i)$, и входного звена-кривошипа $\varphi_i = \varphi(t_i)$, $(t_0 \leq t_i \leq t_m)$.

Так как рабочее звено движется в плоскости, перпендикулярной движению уточной нити в зеве, у выходного звена исключается вращательное движение ($\theta_i = \theta(t_i) = const$) и все точки выходного звена движутся по идентичным законам.

Для определения параметров механизма составим целевые функции ИКЦ — $(1,1)_1$, $(2,1)_1$ и $(2,2)_1$. Первая целевая функция имеет вид:

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_E, y_E, R, X_{0_2}, Y_{0_2})]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(a, \theta_0, b, X_{0_2}, Y_{0_2})]^2.$$

Затем, путем анализа определяем положения точки

$$X_{E_i} = X_{0_2} + l_{0_2 C} \cdot \cos \varphi_{0_2 C}$$

$$Y_{E_i} = Y_{0_2} + l_{0_2 C} \cdot \sin \varphi_{0_2 C}$$

где

$$\varphi_{0_2C} = \arctg \frac{Y_{p_i} - Y_{0_2}}{X_{p_i} - X_{0_2}} + \arccos \frac{l_{O_2C}^2 - l_{CP}^2 + [(X_{p_i} - X_{0_2})^2 + (Y_{p_i} - Y_{0_2})^2]^{\frac{1}{2}}}{2l_{0_2C} \cdot [(X_{p_i} - X_{0_2})^2 + (Y_{p_i} - Y_{0_2})^2]^{\frac{1}{2}}}$$

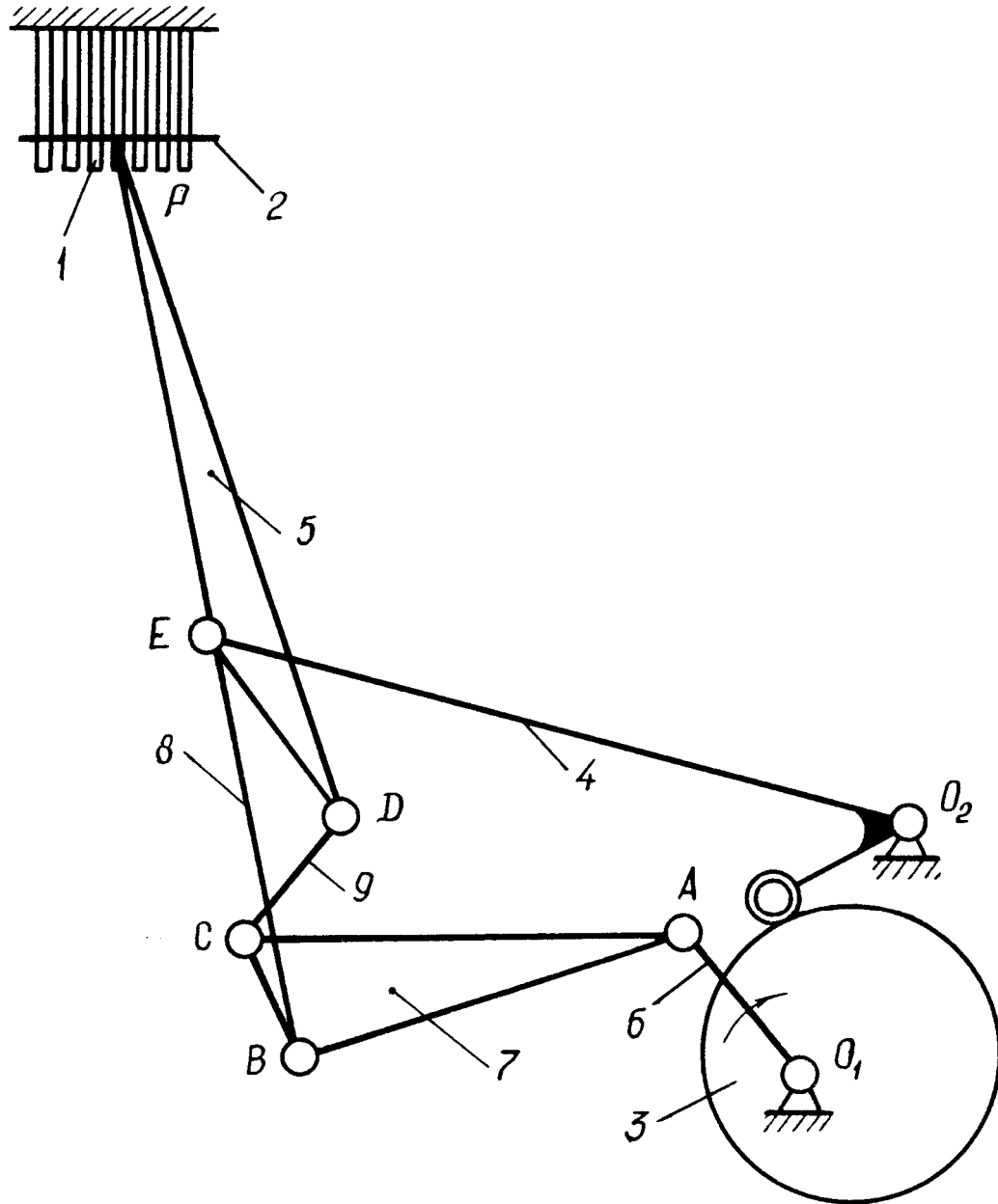


Рисунок 4.37

Для составления второй целевой функции примем движение точки E и движение кривошипа O_1A за две обобщенные координаты:

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_B, y_B, R, X_A, Y_A, X_{0_1}, Y_{0_1})]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(X_{0_1}, Y_{0_1}, a, \varphi_0, d, e, \psi_0)]^2,$$

и после этого составим третью целевую функцию

$$S_3 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_B, y_B, R, x_C, y_C)]^2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(f, \gamma_0, g, \omega_0, h)]^2$$

Определение неизвестных угловых положений ψ_i звена BE ($i=0,1,\dots,N$) производится на основе анализа четырехзвенника O_1ABE по формулам (2.9).

При решении задачи синтеза механизма бралось 75 исходных положений входного и выходного звеньев, причем на участках выстоя значения координат принимались через один градус поворота кривошипа. Минимизация целевой функции $S = S_1 + S_2 + S_3$ производилась с помощью алгоритма, приведенного в п.3.3. При этом входными данными были следующие:

число переменных $N=16$,

число предварительных испытаний $M_0=10$,

число основных испытаний $M=800$,

число уровней $K=10$,

точность приближения $L=2$.

Согласно алгоритму было определено значение глобального минимума $S=0,1389484$, а также значение координат глобального минимума:

$X_{0_2} = 0,3119,$	$\ell_{AC} = 1,2$	$X_{0_1} = 0,0$
$Y_{0_2} = 0,7022$	$\ell_{CD} = 0,45$	$Y_{0_1} = 0,01$
$\ell_{0_1A} = 0,5$	$\ell_{ED} = 0,614$	$\psi_0 = 166^040$
$\ell_{AB} = 1,104$	$\ell_{EP} = 1,4$	$\varphi_0 = 133^015$
$\ell_{BC} = 0,3467$	$\ell_{DP} = 1,986$	
$\ell_{BE} = 1,20$	$\ell_{0_2E} = 2,01$	

Спроектированный механизм IV класса с двумя ведущими звеньями изображен на рисунке 4.37.

Литература

- 1 Чебышев П.Л. Об одном механизме. ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. – С. 10-16.
- 2 Чебышев П.Л. О простейших параллелограммах, доставляющих прямолинейное движение с точностью до четвертой степени ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. – С. 143-158.
- 3 Чебышев П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функции. ПСС – М., Л.: Изд-во АН СССР, 1947. - Т. 2. – С. 151-235.
- 4 Блох З.Ш. Синтез плоских кинематических цепей с низшими парами. – В книге: Прикладная математика и механика. М., 1939. – Т. 2, вып. 3. – С. 389-406.
- 5 Блох З.Ш. Приближенный синтез механизмов. –М.: Машгиз, 1948. – 172 с.
- 6 Артоболевский И.И. Структура, кинематика и кинетостатика многосвязных плоских механизмов. – М.,Л.: Изд-во АН СССР, 1939. – 232 с.
- 7 Артоболевский И.И. К вопросу о структуре и классификации кинематических цепей с замкнутым контуром// Изв. АН СССР, ОНТ, 1939, вып. 4. – С. 27-34.
- 8 Левитский Н.И. Применение квадратического приближения функции к решению задач синтеза механизмов // Тр. Семинара по ТММ. – М.: 1948. – Т. 5, вып. 17. – С. 40-68.
- 9 Черкудинов С.А. Синтез некоторых механизмов приближенно–равномерного движения // Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1949. - Т. 6, вып. 21. – С. 5-27.
- 10 Семенов М.В. Аналитический метод синтеза стержневых механизмов, заданных двумя и тремя положениями // Вестник инж. и техн. – 1938. – №12.
- 11 Геронимус Я.Л. Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов. – М.: Физматгиз, 1962. – 399 с.
- 12 Новодворский Е.П. Об одном способе синтеза механизмов // Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1951. – Т. 11, вып. 42. – С. 5-51.
- 13 Зиновьев В.А. Пространственные механизмы с низшими парами. М.: Гостехиздат, 1952. – 432 с.
- 14 Степанов Б.И. Проектирование пространственных передаточных механизмов с низшими парами // Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1952. – Т. 12, вып. 45. – С. 46-58.
- 15 Асур Л.В. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. – М.: Издательство АН СССР, 1952. – 529 с.
- 16 Кожевников С.Н. Основание структурного синтеза механизмов. – Киев, 1979. – 231 с.

17 Доронин В.И. Алгебраический синтез рычажных механизмов по заданному движению ведомого объекта: диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – Хабаровск, 1969. – 242 с.

18 Саркисян Ю.Л. Аппроксимационный синтез механизмов. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

19 Диментберг Ф.М., Саркисян Ю.Л., Усков М.К. Пространственные механизмы (обзор современных исследований). – М.: Наука, 1983. – 95 с.

20 Лебедев П.А. Кинематика пространственных механизмов – М., Л.: Машиностроение, 1966. – 280 с.

21 Иванов К.С. Синтез пространственных механизмов с использованием обращения движения // Машиноведение. – 1978. – №1. – С. 48-54.

22 Джолдасбеков У.А. Графо-аналитические методы анализа и синтеза механизмов высоких классов. – Алма-Ата: Наука, 1983. – 256 с.

Косболов С.Б., Бекенов Е.Т.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Редакторы Талғат ОРАЗАЛИЕВ
Көркемдеуші редакторы Гауһар ҚҰРМАНБАЕВА
Техникалық редакторы Нұркен СҮЙЕУБЕКҰЛЫ

ИБ №491
Теруге 10.01.13 берілді.
Басуға 02.02.2013. қол қойылды.
Пішімі 84x108. Баспа табағы 10.2.
Таралымы 1000 дана.
Тапсырыс № 297

Қазақстан Республикасы, Алматы қаласы
Жангелдин-Мұхамеджанов көшесі, 30/26.
«ҚазАқпарат» баспа корпорациясы
Тел.: (8-727) 397-41-63, 397-41-62
Эл. пошта: kaz_akparat@mail.ru

«ҚазАқпарат» баспа корпорациясының баспаханасы