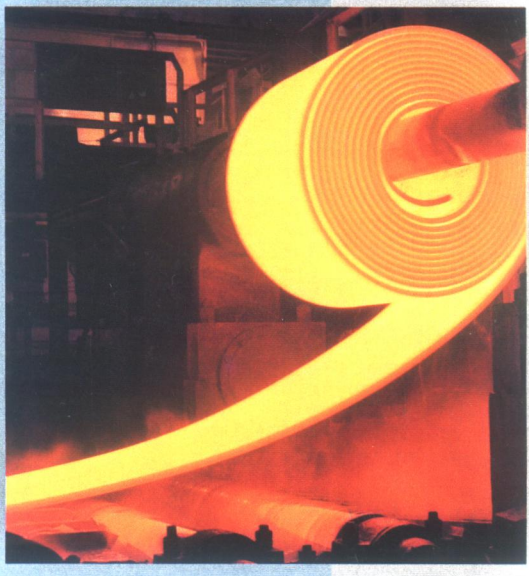
ҚАЗ ҰТУ

С.Ә. Мәшеков

МЕТАЛДАРДЫ ҚЫСЫММЕН ӨҢДЕУ ТЕОРИЯСЫ



ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И. СӘТБАЕВ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ
ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

С. Ә. Мәшеков

МЕТАЛДАРДЫ ҚЫСЫММЕН ӨҢДЕУ ТЕОРИЯСЫ

Университеттің ғылыми-әдістемелік кеңесі
оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2011

ЖОК 669.01. (075.8)
ББК 34.2 я 73
М 37

М 37 Мәшеков С.Ә. Металдарды қысыммен өңдеу теориясы. Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2011. – 455 б.
Сурет –134. Кесте – 8. Әдебиеттер тізімі – 23 атау.

ISBN 978–601–228–280 –1

Оқу құралында қазіргі заманғы ғылымдық деңгейде металдарды қысыммен өңдеу теориясының механика-математикалық негізі (кернеу мен деформация теориясы, реологиялық теңдеулер, тұтас орта механикасының негізгі теоремалары, илемділік ағысы теориясының есептерін қою және шығару әдістемелері) баяндалған.

«Металлургия» және «Машинажасау» мамандықтары бойынша оқитын жоғары оқу орындарының бакалаврларына арналған. Жоғары оқу орындарының магистранттарына, ғылыми-зерттеу институттарының ғылымдық және инженер-техникалық қызметкерлеріне, металлургиялық және машинажасау өндірісі кәсіпорындарының инженерлеріне пайдалы болуы мүмкін.

ЖОК 669.01. (075.8)
ББК 34.2 я 73

Пікір жазған: *Д. Ұ. Смағұлов* – техн. ғыл., док-ы, профессор, ҚазҰТУ.

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2011 жылғы жоспары бойынша басылды.

ISBN 978–601–228–280–1

© Мәшеков С.Ә., 2011.
© ҚазҰТУ, 2011.

КІРІСПЕ

Металдарды қысыммен өңдеу металдар мен қорытпаларды илемді деформациялау мүмкіншілігіне, яғни сыртқы күштің әсерімен дененің пішіні мен өлшемін бастапқы қалпына қайта келмейтіндей өзгерту жасауға негізделген. Ол металл өңдеудің ең көп таралған және тиімді тәсілдеріне жатады. Мысалы, илемдеу, баспақтау, сымдау, ұсталық соғу және қалыптау процестері жоғары өнімділігіне және үнемділігіне қарай айырылады. Айтылған процестерді жеңіл автоматтандыруға және механизациялауға болады. Илемді деформация кедір-бұдырлықты азайту, беттік қабаттарды беріктендіру, қалдық кернеуді қажетті түрде тарату сияқты металл бетінің сапасын жақсарту үшін де қолданылады.

Технологиялық процестерді жобалаудың ғылымдық негізі металдарды қысыммен өңдеудің теориясына сүйенеді. Бұл қолданбалы инженерлік пән белгілі бір көрсеткіштер бойынша ең жақсы технологиялық процестерді жасауды қамтамасыз етуі қажет.

Қазіргі уақытта ең жақсы технологиялық процестерге қол жеткізу проблемаларын шешу, өндірістік тәжірибелерді талдап қорыту негізінде жасалған әр түрлі жартылай эмпиризмдік тәсілмен шектелмейді. Осы себептен металдарды қысыммен өңдеу теориясының дамуы, көп факторларды ескере отырып, технологиялық процесті дәл сан түрде жазып шығару тәсілдерін жасау, яғни оларды математикалық тұрғыдан үлгілеу бағытында жүргізіледі.

Металдарды қысыммен өңдеу теориясы тұтас орта механикасына, металфизикаға, химия жетістіктеріне сүйене

отырып, мынадай негізгі үш бағытта: механика-математикалық, физикалық және физика-химиялық бағытта дамып келеді.

Қағида бойынша біріншісінде металдар мен қорытпаларды илемді деформациялаған кезде жүретін қандай да бір айқын үлгіні және микропроцестер механизмдерін қарамайды. Микроүлгілікке күш түсіру тәжірибесі негізінде тұтас ортаның нақтылы реологиялық қасиеті, яғни нақты металдың абстракты үлгісі анықталады. Ол тәсіл феноменологиялық тәсіл деп аталады. Нәтижесінде, өңделетін денені илемді деформациялау процесін зерттеуді математикалық физиканың кейбір шеттік есебімен шешіп талдауға, яғни кернеу мен деформацияның, температуралық өрістердің таралуын, қирау жағдайын зерттеуге алып келеді. Таралған параметрлері бар жүйелерді басқару теориясы әдістемелерін қолдану металдарды қысыммен өңдеу процестерін жақсарту есептерін шығаруға мүмкіндік береді (мысалы, өнімділік, геометриялық дәлдік, беттің сапасы, т.б. бойынша).

Физикалық бағыт моно- және поликристалдарды илемді деформациялау механизмін, шүбәсіз кристалдың тор құрылымын және нақты кристалдарға тән әр түрлі ақау түрлерін зерттейді. Пайда болуы және қозғалуы илемділік деформация және металдың қирауымен тығыз байланысты, кристалдық тордың сызықтық ақауларын, яғни дислокацияны зерттеуге ерекше назар аударылады.

Қорыта айытқанда, физика-химиялық бағыт заттың химиялық құрамы мен фазалық күйінің осы заттың илемділік қасиетімен қаншалықты байланысты екендігін зерттейді.

Шамасы металдарды қысыммен өңдеу теориясының белгілі бір даму деңгейінде жоғарыда айтылған бағыттар толық қосылуы мүмкін. Бұл илемділік деформациясын қоштайтын күрделі құбылыстар кешенін жазып шығуға бірыңғай бапты табуды қамтамасыз етеді. Осындай да материалдардың механикалық жүріс-тұрыс туралы микро- және макротүсініктерінде түйісу пайда болады, яғни қатты дененің микрокұрылымдар параметрі мен макроскопиялық, механикалық қасиеттері арасында сандық байланыс орнатылуы

мүмкін (мысалы, ағым шегі, уақытша кедергі, ақырғы өлшемі бар үлгінің илемділігі). Осындай түйісуді жүзеге асыруда негізгі рөлді, кристалдық тордың ақаулары мен илемділік деформациясы және қираудың механизмі туралы қазіргі заманғы физикалық түсініктерге негізделген қатты дененің илемділік және беріктік статистикалық теориясы орындайтын болады. Осы теория нақты металл құрылымының біркелкі еместігімен байланысты айтылған процестердің біркелкі емес дамуын ескеретін болады.

Қазіргі уақытта ең аяқталған түр, металдардың сырт пішінін илемді өзгерту теориясының механика-математикалық аймағындағы зерттеулерде бар. Зерттеулерді ретті баяндауға осы кітап арналған.

Ұсынылып отырған оқу құралы – «Металлургия» және «Машинажасау» мамандығы бойынша білім алатын студенттер үшін жазылып отыр. Металдарды қысыммен өңдеу теориясы пәні бойынша Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университетінде автор оқитын лекциялар – осы оқу құралының негізіне алынған.

Қазіргі уақытта отандық және шет елдік әдебиетте металдарды қысыммен өңдеу теориясы бойынша бірқатар таңдаулы оқу нұсқалары бар. Осы оқу нұсқалары біздің лекциялардың мазмұнын құруға үлкен әсер етті.

Кітаптың мазмұны «Металлургия» және «Машинажасау» мамандықтары үшін оқылатын Металдарды қысыммен өңдеу теориясы пәнінің бағдарламасына сәйкес келеді.

Оқу құралында едәуір көп есептер мен мысалдар толық шешілген. Сонымен бірге, тараудың соңында бақылау сұрақтары орналасқан.

Материалдарды баяндау жоғары оқу орындарындағы математика пәнінің деңгейінде жүргізіледі. Керекті жағдайда қосымша мәліметтер қысқаша берілген.

1. КЕРНЕУ. ДЕФОРМАЦИЯ. АҒЫС. ҚИРАУ

Қазіргі заманғы металдарды қысыммен өңдеу теориясы негізінде тұтас орта механикасының негізгі түсінігі мен әдістемелері жатыр.

Тұтас орта механикасы – механиканың бөлімі болып саналады.

Механика материалдар қозғалысының жай түрін (механикалық қозғалысты), яғни дененің немесе дене бөлімінің өзара орналасуының уақыт өткен сайын өзгеруін зерттейтін ғылым екендігі белгілі.

Осы қозғалыстың жалпы заңдылықтарын зерттей отырып, механика материалды нүкте, абсолюттік қатты нүкте, тұтас орта деген абстракты ұғымдарды қолданады.

Материалды нүкте деп елемейтін кішкентай өлшемді, бірақта ақырғы массасы бар денені түсінеді. Материалды нүктенің рөлін, материалды нүкте жүйелерінің массасы шоғырланған осы жүйенің инерция орталығы атқарады.

Абсолютті қатты дене – деп бір-бірінен өзгермейтін ара қашықтықта болатын материалды нүктелер жиынтығын айтады. Егер салынған күштің әсерінен қатты дененің деформациясын ескермейтін жағдай бар болса, онда абсолюттік қатты дене түсінігін қолдануға мүмкіндік пайда болады.

Егер элементарлы көлемнің өзара орналасуының өзгеруіне рұқсат етсек, онда тұтас орта түсінігіне келеміз.

Тұтас ортаға мыналар жатады: деформацияланатын қатты дене; сұйық дене; газ тәрізді дене. Осы денелерді өте оңды серпімді дене, илемді дене, өте оңды сұйық дене, тұтқыр сұйық дене, өте оңды газ тәрізді дене деп дерексіз үлгі түрінде абстракты елестетеді.

Материалды дене туралы көрсетілген дерексіз елестету қаралатын жағдайда маңызды болатын нақты дененің нағыз қасиетін бейнелейді.

Тұтас орта механикасында көлемнің элементі болып саналатын, өлшемі кішкентай болатын материалды бөлшек түсінігін қолданады. Материалды бөлшектің қозғалысы орын ауыстыру векторымен, жылдамдықпен, үдеумен жазылады.

Шексіз көп материалды бөлшектерден тұратын бүтіндей тұтас орта қозғалысын сәйкесті векторлы өрістермен, яғни орын ауыстыру векторының өрісімен, жылдамдық векторының өрісімен, үдеу векторының өрісімен жазады.

Негізгі ғылыми болжам ретінде – тұтастық туралы ғылыми болжам енгізілген. Осы кезде нақты дене кеңістікті үздіксіз толтырған материалды континуум болып танылады.

Осы континуумның қасиеті әр түрлі физикалық дене тұратын көптеген әрекеттесетін бөлшектер (атомдар, молекулалар, т.б.) жиынтығының статикалық заңдылықтарын бейнелейді.

Тұтастық туралы ғылыми болжамды енгізу классикалық талдау тәсілдерін қолдануға, соның ішінде көлемнің шексіз кішкентай элементтерін қарауға мүмкіндік береді.

Тұтастық туралы ғылыми болжамды қолдану тұтас орта толтырылған аймақ туралы түсінікке бізді алып келеді (1.1-сурет).

Анықтама бойынша D аймағы мынадай екі қасиетпен сипатталатын кеңістіктің жиынтық нүктесі болады: 1) егер кейбір M нүктесі D аймағының құрамында болса, онда M нүктесіне жеткілікті жақын орналасқан барлық басқа нүктелерде осы аймақтың құрамында болады; 2) аймақтың кез келген екі нүктесін аймақтың ішінде тұтас болып жататын сынық сызықпен қосуға болады.

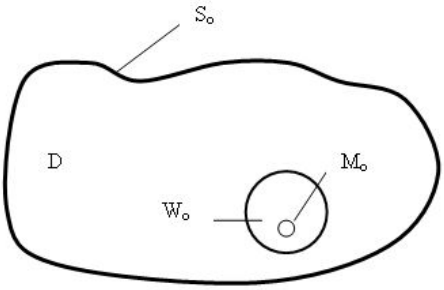
Аймақтың шекарасы S аймақтың құрамына кіретін және кірмейтін кез келген төңіректің жиынтық нүктесі болып саналады. Жазық аймақтың шекарасы тұйық сызық немесе бірнеше тұйық сызықтың жиынтығы болуы мүмкін. Кеңістік аймақтың шекарасы бір немесе бірнеше тұйық беттер болуы мүмкін. Аймаққа шек қоятын қисықтар немесе беттер не тегіс, не тілік-тегіс болатындығын жорамалдайтын боламыз.

Тұтас орта механикасында скалярлар, векторлар және тензорлар координат және уақыт функциясы болады. Осы функциялар көрсетілген айнымалылар бойынша жеткілікті рет үздіксіз дифференциялданатындығын тағы да болжайтын боламыз. Нәтижесінде осы функциялар өздерінің

туындыларымен бірге тұтас ортамен толтырылған кез келген түпкі аймақта шектелген болады.

Кейбір D аймағымен қатар тұтас D аймағының құрамында болатын ($W \subset D$ деп белгіленді) әр түрлі ішкі аймақтар W-ны қарауға болады. Тұтас орта механикасының ең маңызды теңдеулер қорытындысының негізінде жататын келесі лемма әділ: егер $\varphi(M)$ үздіксіз функциясы D аймағында анықталған болса, онда кез келген ішкі аймақ үшін ($W \subset D$) мынадай теңдік орындалады.

$$\iiint_{W} \varphi(M)dW = 0.$$



1.1-сурет. Лемманы дәлелдеу

Жоғарыда жазылған формула негізінде мынаны айтуға болады: егер жоғарыдағы теңдік орындалса, онда осыған ұқсас $\varphi(M)$ функциясы D аймағында нөлге тең.

Дәлел. D аймағының ішінде жататын кейбір M_0 нүктесінде ($W \in D$ деп белгіленеді) $\varphi(M_0) \neq 0$, мысалы $\varphi(M_0)>0$, болсын деп болжайық. φ функциясы үздіксіз болғандықтан, M_0 нүктесін қоршайтын (және $\varphi(M) > \varphi(M_0)$ теңсіздігі орындалатын) W_0 ішкі аймағын таңдап алуға болады. Осындай ішкі аймақта

$$\iiint_{W_0} \varphi(M)dW$$

интегралы нөлге тең емес. Бұл лемманың бастапқы шартына қайшы болып келеді.

Егер скалярлық $\varphi(M)$-ды векторлық функция $\vec{a}(M)$-мен айырбастайтын болсақ, онда осы нәтиже әділетті болып қалады.

Мұны дәлелдеу үшін осы функцияның координат осіне проекцияларына лемманы қолдану жеткілікті болып саналады.

1.1. Декарттық координаттағы тензорлар

Тұтас орта механикасында кернеу мен деформация теориясын бастан аяқ баяндап жазу, олардың арасындағы байланысты оқып білу, қағида бойынша тензорлық талдауды қолданумен жүргізіледі.

Көптеген физикалық құбылыстарды баяндаған кезде әдетте әр түрлі координат жүйелерін енгізеді. Осы, сәйкесті физикалық объектілерді сандар түрінде көрсетуге, ал физикалық заңдылықтарды осы сандардың немесе сандар жүйесінің байланыстары теңдіктеріне әкелуге мүмкіндік береді. Егер скалярлық мөлшерлерді (температура, тығыздық, масса сияқтылар) кез келген координат жүйесінде бір санмен ғана көрсететін болса, онда векторлық мөлшерлерді (жылдамдық, үдеу, күш сияқтылар) жаңа координаттарға өткен кезде белгілі бір заңдылықпен өзгеретін вектор координаталарымен, яғни үш санмен көрсетуге болады. Сонымен, біз оқитын векторлар көріністерге (ал ары қарай тұтас ортаның кернеулік және деформациялық күйін баяндайтын тым күрделі математикалық объектілерге, яғни тензорларға) жалпы айтқанда координат жүйесін кездейсоқ таңдау өз әсерін тигізеді.

Тензорлық есептеудің негізгі мақсаты – физикалық объектілерді түсінуге координаттарды таңдаудың әсерін зерттеу, жаңа координаттарға өткен кезде өзгермейтін мәнді сақтайтын инвариант деп аталатын мөлшерлерді атап көрсету болып саналады. Тұтас орта механикасында көптеген физикалық мөлшерлер (мысалы, көлемнің салыстырмалы өзгеруі, гидростатикалық қысым, жанама кернеудің үдемелі қарқындылығы, т.б.) инвариант болады.

Сонымен бірге, жаңа координаттарға өткен кезде вектор немесе тензор сыңарларын түрлендіру ережелерін жақсы пайдалана білу қажет. Сірә, физикалық заңдарда ковариантты түр бар болу керек, яғни теңдеулер координаттарды еркін

өзгерткен кезде өзінің түрін сақтауы керек. Тензорлық есептеулер тұтас орта механикасының негізгі тәуелділіктеріне аналитикалық тұжырым жасауға мүмкіндік береді.

Ортогональды емес қисық сызықты еркін координат жүйесін қолданып ең жалпы түрде тензорлық талдауды дәйекті жүргізу едәуір математикалық қиындыққа алып келеді және инженерлік есептеулерде әрқашан аяқталмайды. Сондықтан біз көбінесе тік бұрышты декарттық координаттарды қолданатын боламыз (ары қарай тек декартты координат деп аталады). Қисық сызықты координатқа жататын нәтижелер қорытындысыз ақырғы түрде келтірілетін болады.

1.2. Векторлар

Скалярлар және векторлар. Бұдан былай бізге скаляр, вектор және тензор деп аталатын үш типті мөлшерлермен жұмыс істеуге тура келеді.

Скаляр – деп таңдалған өлшем бірлігінде тек бір санмен сипатталатын мөлшерді айтады. Осындай мөлшерлерге тұтас ортаның кейбір кеңістік нүктесіндегі температура, тығыздық, меншікті салмақ жатады.

Өлшемдері бірдей екі скалярлар тең деп, егер бір өлшем бірлігімен өлшеген кезде олардың таңбасы және сандық мәні бірдей болса айтады.

Вектор – деп белгілі бір өлшем бірлігінде өлшегенде санымен және кеңістіктегі бағытымен сипатталатын мөлшерді айтады. Сұйық бөлшегінің жылдамдығы, оның кейбір уақыт аралығында кеңістікте қозғалуы вектордың мысалы болады.

$\vec{a}$ векторы, бағыты берілген физикалық мөлшермен дәл келетін, ал ұзындығы таңдалған масштабта түзу кесіндінің сандық мәнімен сипатталатын ($\vec{a}$ векторының модулі) түзу кесіндімен бейнеленді.

Өлшемділіктері бірдей болатын тек векторларды салыстыруға болады. Осындайда бірдей өлшемділікке ие болатын екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары, егер олардың модульдері

бірдей және бағыттары дәл келетін болса тең болады. Онда мынаны жазуға болады: $\vec{a} = \vec{в}$.

Өзіне скаляр және векторларды жеке жағдай сияқты қосып, кеңістіктегі бағытпен тағы байланысты болатын тым күрделі түсінік *тензор* болып саналады. Тензордың анықтамасы және оларға математикалық амал орындаудың ережелері кейінірек берілетін болады.

Векторлардың негізгі қасиетін еске түсірейік.

Векторлардың мынадай үш түрін айыру қажет: бос, сырғитын және байланған.

Бос векторларды өзіне параллельді қозғалтуға және кез келген нүктеге түсіруге болады (мысалы, абсолютті қатты дененің үдемелі қозғалыс жылдамдығы).

Сырғитын векторды – вектордың бағытын анықтайтын түзу бойымен қозғалтуға болады. Сырғитын вектордың мысалы болып абсолютті қатты денеге түсірілген күш саналады.

Соңында, физикалық мағынасы бойынша байланған вектор белгілі бір нүктеге қатысты болады. Материалды бөлшектің жылдамдығы немесе үдеуі осыған жатады.

Сырғитын және байланған векторларды оқу бос векторларды оқумен байланысты болады. Сондықтан бос векторларды қараумен шектелген жеткілікті.

Векторлармен орындалатын амалдар. Векторлармен мынадай амалдарды орындауға болады:

– векторларды қосу;

– векторларды санға көбейту;

– векторларды скалярлы көбейту;

– векторларды векторлы көбейту.

$\vec{a}$ және $\vec{в}$ екі векторларының қосындысы қосылатын векторлармен салынған параллелограмның диагоналымен бейнеленген үшінші $\vec{c}$ векторына тең болады.

$\vec{a}$ векторының λ скалярына көбейтіндісі деп $\vec{a}$ векторының модулінен $|\lambda|$ рет үлкен болатын, ал бағыты $|\lambda| > 0$ болған жағдайда

$\vec{a}$ -мен дәл келетін және $|\lambda| < 0$ болған жағдайда $\vec{a}$ -ға қарама-қарсы болатын $\vec{в}$ векторын айтады.

$\vec{a}$ және $\vec{в}$ векторларының $\vec{a}$ $\vec{в}$ скалярлы көбейтіндісі деп олардың модульдерінің векторлар арасындағы косинус бұрышқа көбейтіндісін айтады, яғни $\vec{a}\vec{в} = a в \cos(\vec{a},\vec{в})$.

Егер $\vec{a}$ және $\vec{в}$ векторлары ортогональды болса, онда олардың скалярлық көбейтіндісі нөлге тең болады.

Ортогональды базис. $\vec{a}$ және $\vec{в}$ векторларының $\vec{a}\times\vec{в}$ векторлық көбейтіндісі деп көбейтілетін векторлар жазықтығына перпендикулярлы бағытталған және сол бағытталған жақтан қарағанда бірінші көбейтіндіден екінші көбейтіндіге кішкентай бұрышпен бұрылу сағат тілінің жүрісіне қарама-қарсы болып көрінетін, ал тағы да модулі бойынша осы векторлармен салынған параллелограмманың ауданына тең $\vec{c}$ векторын айтады, яғни $\vec{n} = |\vec{a}\vec{a}| = a\hat{a}\sin(\vec{a}\hat{\vec{a}})$.

Декарттық компоненттегі векторлық көбейтінді де мынадай түр бар:

$$\vec{a}\times\vec{в} = (a_2в_3 - a_3в_2)\vec{e}_1 + (a_3в_1 - a_1в_3)\vec{e}_2 + (\vec{a}_1\vec{в}_2 - \vec{a}_2\vec{в}_1)\vec{e}_3 .$$

Соңғы формуланы жиі анықтауыш түрінде былай жазады:

$$\vec{a}\times\vec{в} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ в_1 & в_2 & в_3 \end{vmatrix}.$$

Скалярлық түрде $\vec{a}\times\vec{в}$ векторлық көбейтіндісін жазу үшін үшінші рангті $|\varepsilon_{ik}|$ тензорын енгізген қолайлы. Осы тензорды Леви-Чивити тензоры деп атайды.

Осындай тензор сыңарларының көмегімен $\vec{a}$ векторының $\vec{в}$ векторына векторлық көбейтіндісінің $\vec{c}$ сыңарлары келесі формуламен анықталады:

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k .$$

Үш өзара ортогональды бағыттарды таңдайық және оларда бірлік ұзындығы бар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ үш векторларды салайық. Осы үш векторлар үшін мынадай қатынастар орындалады: $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$; $\vec{e}_1\vec{e}_2 = \vec{e}_2\vec{e}_3 = \vec{e}_3\vec{e}_1 = 0$.

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлары орталар деп аталады. Олардың ұзындығы бірге тең және олар екі-екіден перпендикулярлы болады. Осы орталар қаралатын үш өлшемді кеңістікте ортогональды базис құрайды. Сонда, егер $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ байланысында орын бар болса, онда базис оң деп аталады, ал егер $\vec{e}_3 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ байланысында орын бар болса, онда базис сол деп аталады. Қағида бойынша кейінірек оң базис қолданылады.

Базиске сәйкес келетін x_1, x_2, x_3 координатты осьтер жүйесі (1.2-сурет) ортогональды түзу сызықты (декартты) координат жүйесі деп аталады.

Еркін ортогональды базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ алайық. Кез келген $\vec{a}$ векторы базисты орталар бойынша өзара бөлінуі мүмкін, яғни мынаны жазуға болады: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$.

a_1, a_2, a_3 мөлшерлері $\vec{a}$ векторының координатасы деп аталады. Олар вектордың x_1, x_2, x_3 осьтеріне проекциясы болып саналады.

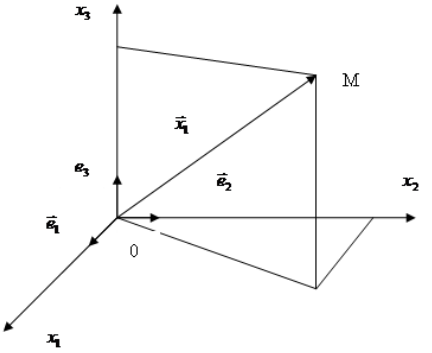
Вектор өзінің координатасымен толық анықталатын болғандықтан, вектордың тағы да бір мынадай белгілеуін қолдануға болады: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

А. Эйнштейннің қосу ережесі. Мұнан былай біз төменгі және жоғарғы индексі бар формуламен жиі кездесетін боламыз, мысалы a_i, $в_{ik}$, c_m^i, e_{12}^{ik} және т.б.

А.Эйнштейннің қосу ережесін қолданып осындай формулалардың қысқартылған түрін жазуды енгізген орынды. Сонда мыналарды жорамалдау қажет:

а) бір мүшеде бір рет кездесетін әрбір әріптік көрсеткіш 1, 2, 3 мәндерін қабылдауы мүмкін;

б) бір мүшеде екі рет қайталанатын әріптік көрсеткіш бойынша 1-ден 3-ке дейін қосу жүргізілінеді.



1.2-сурет. Ортогональды базис және координатты осьтер

Кейбір мысалдарды қарайық.

1. Бір әріпті көрсеткіші бар формула a_i мынадай үш мөлшердің жиынтығы болып саналады: a_1, a_2, a_3.

Екі әріпті көрсеткіші бар формула a_{ik} тоғыз мөлшердің жиынтығын білдіреді, яғни $3^2 = 9$. Осы мөлшерлерді мынадай матрица кестесі түрінде орналастыруға болады:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

2. Екі қайталанатын әріптік көрсеткіші бар формула a_{ii} мынадай қосындыны білдіреді:

$$a_{ii} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

3. Мынадай формула тағы да қосынды болып саналады:

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Қосудың көрсеткіші жиі «сақау» деп аталатындығын ескертейік. Өйткені, егер осы көрсеткішті басқа әріппен ауыстыратын болсақ, онда қосынды өзінің мәнін өзгертпейді. Мысалы, $a_i b_i = a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Енді қысқартып жазу ережесін қолданып $\vec{a} = (a_i)$ векторын белгілеудің қысылған түрін және өзінің координаталарымен келтірілген векторларға әсер ету ережесін келтірейік, яғни:

векторларды қосу $\vec{a} + \vec{b} = (a_i + b_i)$;

санды векторға көбейту $\lambda \vec{a} = (\lambda a_i)$;

векторлардың скалярлы көбейтіндісі

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$;

векторлардың векторлық көбейтіндісі

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Скалярлық және векторлық өрістер. Векторлық талдаудың негізгі байланыстары жаңа белгілеу жүйесінде қандай түрді қабылдайтындығын қарайық.

Еркін M нүктесінің жайы кейбір 0 нүктесіне (координаталардың басына) қатысты өзінің радиус-векторы $\vec{x}$-пен бейнеленеді (1.2-сурет).

$\vec{x}$ векторын мынадай координаттар бойынша жіктеуге болады:

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 . \qquad (1.1)$$

Егер D аймағының әрбір M нүктесінде кейбір $\vec{a}$ векторының мәні берілсе, онда осы аймақ векторлық өріс деп аталады. Сөйтіп мынаны жазуға болады: $\vec{a} = \vec{a}(\vec{x}, t) = \vec{a}(x_i, t)$.

Егер D аймағының әрбір M нүктесінде кейбір φ скалярының мәні берілсе, онда осы аймақ скалярлық өріс деп аталады. Сөйтіп мынаны жазуға болады: $\varphi = \varphi(\vec{x}, t) = \varphi(x_i, t)$.

Сөйтіп $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ болғандықтан, әрбіреу төрт заттық айнымалыдан тәуелді болатын мынадай үш функция берілген болады: $a_k = a_k(x_i, t)$.

1.1-кестеде жаңа белгілеуді қолданып өріс теориясының негізгі байланыстары келтірілген.

Қисық сызықты ортогональды координаттар. Жоғарыда біз айтқанымыздай, кеңістіктегі M нүктесінің жайы кейбір қозғалмайтын 0 нүктесіне қатысты $\vec{x}$ радиус векторының көмегімен немесе сол сияқты мынадай үш декартты координаттармен x_i берілуі мүмкін:

$$\vec{x} = x_i\vec{e}_i = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

1.1-кесте

Өріс теориясының негізгі байланыстары

Аты	Вектор-лық жазу	Декарттық координатта жазу	
		қысқартылған	жайылған
1	2	3	4
Координатты базистің ортасы[*1]	$\vec{e}_i$	-	-
Вектор	$\vec{a}$	$\vec{a} = a_i\vec{e}_i$	$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$
Векторларды қосу	$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$	$(c_i) = (a_i + b_i)$	$c_1 = a_1 + b_1;\ c_2 = a_2 + b_2;$ $c_3 = a_3 + b_3;$
Векторларды санға көбейту	$\vec{b} = \lambda a$	$(b_i) = (\lambda a_i)$	$b_1 = \lambda a_1; b_2 = \lambda a_2;$ $b_3 = \lambda a_3$
Скалярлық көбейту	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

1.1-кестенің жалғасы

1	2	3	4
Векторлық көбейту	$\vec{a}\times\vec{b}$	-	$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$
Радиус-вектор	$\vec{x}$	$\vec{x} = x_i\vec{e}_i$	$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + + x_3\vec{e}_3$
Скалярлық өріс	$\varphi(\vec{x}.t)$	$\varphi = \varphi(x_i, t)$	$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, t)$
Векторлық өріс	$\varphi(\vec{x}.t)$	$\vec{a}=\vec{a}(x_i,t)$	$a_1 = a_1(x_1, x_2, x_3, t);$ $a_2 = a_2(x_1, x_2, x_3, t);$ $a_3 = a_3(x_1, x_2, x_3, t);$
Гамильтонның «набла» операторы	∇	$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}e_i$	$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{e}_2 + + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{e}_3$
Скалярлы өрістің градиенті $\varphi(\vec{x},t)$	$\frac{grad\varphi}{\nabla\varphi}$	$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\vec{e}_i$	$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\vec{e}_2 + + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\vec{e}_3$
$\vec{n}^{*2}$ бағыты бойынша скалярлы өрісті $\varphi(\vec{x},t)$ туындысы	$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$	$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}n_i$	$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}n_2 + + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}n_3$
Векторлық өрісті $a(\vec{x},t)$ дивергенциясы	$div\vec{a}$	$div\vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$	$div\vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$

1.1-кестенің жалғасы

1	2	3	4
Векторлық өрістің $a(\vec{x},t)$ құйыны	$rot\vec{a} = \nabla \times$	-	$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$
Вектордың $\vec{a}$ [*3] бетке $\sum$ нормальды құрамы	$a_n = \vec{a}\vec{n}$	$a_n = a_i n_i$	$a_n = a_1 n_1 + a_2 n_2 + + a_3 n_3$
$\sum$ беті арқылы векторлық өрісті $\vec{a}(\vec{x},t)$ тасқыны	$\iint\limits_{\sum} a_n d\sum$	$\iint\limits_{\sum} a_i n_i d\sum$	$\iint\limits_{\sum} (a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3) d\Sigma$
Гаус-Остроградский формуласы [*4]	$\iint\limits_{\sum} a_n d\,\Sigma = \iiint\limits_{W} div\,\vec{a}\,dW$	$\iint\limits_{\sum} a_i n_i d\,\Sigma = \iiint\limits_{W} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dW$	$\iint\limits_{\sum} (a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3) d\,\Sigma = \iiint\limits_{W} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} = \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) dW$
Лаплас операторы	∇^2	$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$	$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$

[*1] $\vec{e}_i\ \vec{e}_k = \delta_{ik}$

[*2] $\vec{n} = n_i \vec{e}_i$ – бірлік вектор.

[*3] $\vec{n}$ – бетке нормальдың бірлік векторы

[*4] W – тұйық бетпен $\sum$ шектелген көлем

Көптеген есептерде *M* нүктесінің жайын басқа үш санмен анықтаған орынды. Мысалы, егер $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ қисық сызықты координаталармен нүктенің жайын анықтаса, онда есептерді шешу ыңғайлы болады. Мынадай түрлендіруді қарайық:

$$\beta_i = f_i(x_k) \qquad (1.2)$$

мұндағы f_i – еркін, жеткілікті тегіс β_k айнымалы шамасынан функция.

Егер функционалды анықтауыш (якобион) $\left|\partial\beta_k / \partial x_k\right|$ нөлден айырмашылықта болса, онда (1.2) түрлендіруі қайтымды болады, яғни (1.2) теңдеуін x_k қатысты былай шешуге болады:

$$x_k = q_k(\beta_i) \tag{1.3}$$

$\beta_i(\vec{x})$ функциялар деңгейінің беттері кейбір беттер тұқымдастарын құрады. Кеңістіктің әрбір *M* нүктесі арқылы әрбір тұқымдастардың бір беті өтеді (1.3-сурет). Осы беттерді *координатты беттер* деп атайды. Екі координатты беттердің қиылысу сызығын координатты сызық деп атайды.

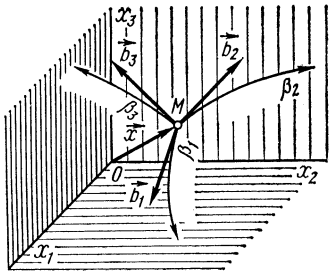
Сөйтіп $\beta_i(x_1, x_2, x_3) = const$ түріндегі шарт координатты бетті анықтайды. Екі координатты бет, мысалы $\beta_2(x_1, x_2, x_3) = const$ және $\beta_3(x_1, x_2, x_3) = const$, β_1 координатты сызығы бойынша қиылысады. Осы сызықтың бойымен β_1 координатасы өзгереді, ал β_2 және β_3 координаттары тұрақты мәндерін сақтайды.

Бұдан былай қосымша дайындық үшін ең маңызды болатын қисық сызықты ортогональды координаттар жағдайларын қараумен шектелейік. Осындай да әрбір нүктедегі координатты сызықтар перпендикулярлы болады.

M нүктесіндегі координатты сызықтар жанамасымен бағытталған бірлік векторларды $\vec{b}_i$ қарауымызға енгізейік. Осы бірлік векторлар β_i айнымалы шамалары өсетін жаққа бағытталған (1.3-сурет). $\vec{b}_i$ векторлар жүйесі жергілікті ортогональды базисты құрайды. *M* нүктесінде берілген еркін $\vec{a}$ векторы осы базис векторлары бойынша былай ажыратылуы мүмкін:

$$\vec{a} = \alpha_i \vec{b}_i . \tag{1.4}$$

α_i -ды вектор $\vec{a}$ -ның қисық сызықты құрастырушылары немесе $\vec{a}$ векторының қисық сызықты координат осіне проекциялары деп айтатын боламыз.



1.3-сурет. Қисық сызықты ортогональды координаттар

Жергілікті базис векторларының бағыты кеңістіктің басқа нүктесіне ауысқан кезде өзгеретіндігін, ал сол кезде декартты түзу сызықты координат жүйесінің $\vec{e}_i$ орталарының бағыты өзгермейтіндігіне ерекше көңіл бөлу қажет.

Кез келген β_i жиынтығына x_i -дің тек бір жиынтығы сәйкес келетіндігі және қарама-қарсы болатындығы (1.2) және (1.3) формулаларынан шығады. β_i айнымалы шамалары кеңістіктегі *M* нүктесі жайының жалғызын ғана анықтайды және сондықтан *M* нүктесінің қисық сызықты координатасы деп аталады.

M нүктесінің $\vec{x}$ радиус векторына қайта оралып мынаны жазайық:

$$\vec{x} = x_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3)\vec{e}_1 + x_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3)\vec{e}_2 + x_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3)\vec{e}_3.$$

Туындыны есептейік, яғни $\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_1} = \dfrac{\partial x_i}{\partial \beta_1}\vec{e}_i$.

Дифференциалданған кезде β_2 және β_3 тұрақты болып саналады, сондықтан $\partial\vec{x}/\partial\beta_1$ векторы координатты сызық β_1-дің жанамасы бойымен бағытталған, яғни $\partial\vec{x}/\partial\beta_1 = H_1\vec{b}_1$.

Сірә, $\partial\vec{x}/\partial\beta_1$ векторының ұзындығы H_1 болады және мынадай байланысты жазу орынды болады:

$$H_1^2 = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\beta_1}\frac{\partial\vec{x}}{\partial\beta_1} = \frac{\partial x_i}{\partial\beta_1}\frac{\partial x_i}{\partial\beta_1} = (\frac{\partial x_1}{\partial\beta_1})^2 + (\frac{\partial x_2}{\partial\beta_1})^2 + (\frac{\partial x_3}{\partial\beta_1})^2.$$

Жалпы жағдайда $\partial\vec{x}/\partial\beta_k = H_k\vec{b}_k$, сондықтан мынаны жазуға болады:

$$H_k^2 = (\frac{\partial x_1}{\partial\beta_k})^2 + (\frac{\partial x_2}{\partial\beta_k})^2 + (\frac{\partial x_3}{\partial\beta_k})^2. \qquad (1.5)$$

H_1, H_2, H_3 мөлшерлерін Лямэ коэффициенттері деп атайды.

$\vec{x}$ векторының дифференциалы үшін мынаны жазуға болады:

$$d\vec{x} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\beta_i}d\beta_i = H_1 d\beta_1\vec{b}_1 + H_2 d\beta_2\vec{b}_2 + H_3 d\beta_3\vec{b}_3. \qquad (1.6)$$

(1.6) теңдеуінің екі жағын да екі есе дәрежелейік. $d\vec{x}d\vec{x} = dS^2$ және $\vec{b}_i\vec{b}_k = \delta_{ik}$ теңдіктері бар болғандықтан $d\vec{x}$ элементі ұзындығының екінші дәрежесі үшін келесі формуланы аламыз:

$$dS^2 = H_1^2 d\beta_1^2 + H_2^2 d\beta_2^2 + H_3^2 d\beta_3^2. \qquad (1.7)$$

Мысал ретінде – цилиндрлік және сфералық координат жүйесін қарайық.

Цилиндрлік координат жүйесі $r, w, z, (\mathrm{r} \geq 0)$. Осы координат жүйесінде мынадай қатынастарды қолданады: $\beta_1 = r$, $\beta_2 = w$, $\beta_3 = z$, мұндағы r және w – M нүктесінің $x_1 0 x_2$ жазықтығына проекциясының поляр координатасы; z – M нүктесінің $x_1 0 x_2$ жазықтығына дейін ара қашықтығы (1.4-сурет).

Мынадай координатты беттер қолданылады: x_3 осіне $(z = const)$ перпендикулярлы жазықтықтар, x_3 осімен шектелген жартылай жазықтықтар $(w = const)$ және ось x_3 осі болатын цилиндрлік беттер $(r = const)$.

Осы беттердің қиылысатын сызықтары координатты сызықтар деп аталады.

Цилиндрлік координаттан декарттық координатқа және қарама-қарсы өтудің формуласы былай жазылады:

$$x_1 = r\cos w;\ x_2 = r\sin w;\ x_3 = z;$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ ;\ \mathrm{w} = \mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2} = \arcsin\frac{x_2}{r};\ \mathrm{z} = x_3.$$

Координаттардың дифференциалдары мынаған тең:

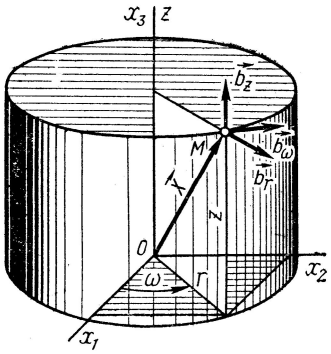
$$dx_1 = \cos w dr - r\sin w dw;\ dx_2 = \sin w dr + r\cos w dw;\ \mathrm{dx}_3 = dz.$$

$d\vec{x}$ элементі ұзындығының екінші дәрежесі мынаған тең:

$$dS^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dr^2 + r^2 dw^2 + dz^2.$$

Лямэ коэффициенттері мынаған тең:

$$H_1 = H_r = 1;\ H_2 = H_w = r;\ H_3 = H_z = 1. \qquad (1.8)$$



1.4-сурет. Цилиндрлік координаттар жүйесі

Сфералық координат жүйесі $r, w, \chi, (r \geq 0,\ 0 \leq \chi \leq \pi)$. Мұндағы $\beta_1 = r$ – радиус вектордың ұзындығы; $\beta_2 = w$ – бойлық; $\beta_3 = \chi$ – полярлық ара қашықтық (1.5-сурет). Санаудың оң бағыты суретте көрсетілген.

Мынадай координатты беттер қолданылады: координаттың басында центрі бар сфера $(r = const)$, x_3 осімен шектелген

жартылай жазықтықтар $(w = const)$, шыңы координаттың басында болатын айналма конустар $(\chi = const)$.

Осы беттердің қиылысатын сызықтары координатты сызықтар деп аталады.

Сфералық координаттан декарттық координатқа және қарама-қарсы өтудің формуласы былай жазылады:

$$x_1 = r\sin\chi\cos w;\ x_2 = r\sin\chi\sin w;\ x_3 = r\cos\chi;$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\ ;\ \mathrm{w} = \mathrm{arctg}\frac{x_2}{x_1};\ \chi = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x_1^2 + x_1^2}}{x_3}.$$

Координаттардың дифференциалдары мынаған тең:

$$dx_1 = \sin\chi\cos\omega dr - r\sin\chi\sin\omega d\omega + r\cos\chi\cos\omega d\chi;$$

$$dx_2 = \sin\chi\sin\omega dr + r\sin\chi\cos\omega d\omega + r\cos\chi\sin\omega d\chi;$$

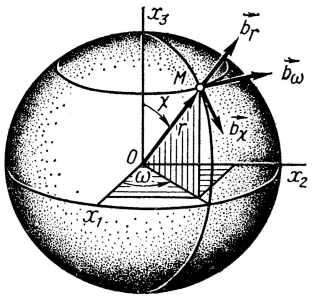
$$dx_3 = \cos\chi\, dr - r\sin\chi\, d\chi.$$

$d\vec{x}$ элементі ұзындығының екінші дәрежесі мынаған тең:

$$dS^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dr^2 + r^2\, sin^2\,\chi d\omega^2 + r^2 d\chi^2.$$

Лямэ коэффициенттері мынаған тең

$$H_1 = H_r = 1;\ \ H_2 = H_\omega = r\sin\chi,\ H_3 = H_\chi = r\,. \qquad (1.9)$$



1.5-сурет. Сфералық координаттар жүйесі

Бақылау сұрақтары.

1. Скаляр деп нені айтады?
2. Вектор деп нені айтады?
3. Векторлармен қандай амалдар жүргізіледі?

4. Орт дегеніміз не?
5. Орттар қалай орналасқан?
6. Координатты осьтер жүйесінен координатты базис немен айырмашылықта болады?
7. Қандай жағдай да бір мүшелілерді қосуды жүргізді?
8. Қосудың көрсеткіштерін не себептен «сақау» деп атайды?
9. Скалярлық өріс деп нені айтады?
10. Векторлық өріс деп нені айтады?
11. Коодинатты беттер қандай сызықпен қиылысады?
12. Жергілікті координатты базис декартты координатты базистен немен айырмашылықта болады?
13. Лямэ коэффициенті деп нені айтады?
14. Цилиндрлік координат жүйесінде координатты бет деп не саналады? Осы беттер қандай сызықпен қиылысады?
15. Сфералық координат жүйесінде координатты бет деп не саналады? Осы беттер қандай сызықпен қиылысады?

1.3. Матрицалар

Матрицаның анықтамасы. Матрица – деп тік бұрышты кестедегі сандарды айтады. Матрицаларды белгілеу үшін кішкене жақшаны қолданатын боламыз. Мысалы мынадай кішкене жақшалар:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ немесе } \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 6 \\ 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицаны құратын сандар оның элементтері деп аталады. Элементтердің көлбеу қатарларын жол деп, ал тік қатарларын бағана деп атайды.

Егер матрицаның жол сандары бағана сандарына тең болса, онда матрица квадратты дейді, ал жол санын матрицаның реті

дейді. Әдетте біз үшінші ретті квадратты матрицамен жұмыс істейміз. Сондықтан оны біз жай матрица деп атайтын боламыз.

Жалпы түрде жазған кезде матрица элементі әдетте екі көрсеткіші бар бір әріппен белгіленеді. Бірінші көрсеткіші жол нөмірін, ал екіншісі бағана нөмірін көрсетеді. Сөйтіп, үшінші ретті квадратты матрица жалпы түрде келесі түрде жазылады:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(a_{11} – a бір, бір; a_{12} – a бір, екі деп оқылады, ал он бір, он екі деп оқылмайды).

Сөйтіп матрицаның жалпы элементін a_{ik} деп белгілейді, ал матрица үшін мынадай белгілеуді қолдануға болады:

$$A = (a_{ik}); \quad B = (b_{ik}); \qquad C = (c_{ik}) \quad \text{және т.б.}$$

Квадратты матрицаның жоғарғы бұрышының сол жағын төменгі бұрышының оң жағымен қосатын кесіндіде жататын элементтердің қатарын басты диагональ деп айтады.

Әрбір матрицаға аықтауыш сәйкес келеді. Оны мынадай түзу жақшамен белгілейді:

$$|A| = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Матрицамен орындалатын амалдар. Матрица үшін мынадай үш негізгі операцияларды қолданады: қосу, матрицаны санға көбейту, матрицаны матрицаға көбейту.

A және *B* екі матрицасының қосындысы деп элементтері мынадай ереже бойынша табылатын С матрицаны айтады:

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}. \qquad (1.10)$$

Сөйтіп, матрицаны қосу екі матрицаның сәйкесті элементтерін қосуға алып келеді, мысалы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$A = (a_{ik})$ матрицасының c санына көбейтіндісі деп A матрицасының барлық элементтерін c санына көбейтумен алған $cA = (ca_{ik})$ матрицасын айтады, мысалы

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -6 & -3 & 12 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Белгілі бір ретпен берілген (бірінші және екінші) $A = (a_{ik})$ және $B = (b_{ik})$ екі матрицаның көбейтіндісі деп элементтері мынадай ереже бойынша анықталатын үшінші $C = (c_{ik})$ матрицасын айтады:

$$c_{ik} = a_{ip}\, b_{pk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k}. \qquad (1.11)$$

Сөйтіп i жолында және k бағанасында тұратын A және B матрица элементтерінің көбейтіндісі бірінші матрицаның i жолы элементінің екінші матрицаның сәйкесті k бағанасы элементтеріне көбейтінділерінің қосындысына тең, мысалы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

C = A·B;

$c_{11} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 1;$

$c_{12} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 2;$

$c_{13} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1;$

$c_{21} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 2$ және т.б.

Нәтижесінде мынаны аламыз:

$$C = \text{A}\cdot\text{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сірә, көрсетілген ереже бойынша бірдей реті бар квадратты матрицаны ғана көбейтіп қоймайды, ал тағы да әр түрлі өлшемі бар матрицаны көбейтеді. Тек бірінші матрицаның жол сандары екінші матрицаның бағана сандарына тең болуы талап етіледі. Осындай жағдайда ғана «сақау» көрсеткіш бойынша (1.1) формуласын қолданып қосуды жүргізуге болады.

Осымен байланысты үш бағанасы бар $(b_1\ b_2\ b_3)$ матрица жолын және үш жолы бар $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ матрица бағанасын қосымша қарайық.

Осылардың біріншісін үшінші ретті квадратты матрицаға солдан көбейтуге болады. Нәтижесі болып матрица жол саналады, мысалы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 23 \end{pmatrix}.$$

Сірә, матрица жол және матрица бағана элементтерін белгілеу үшін бір көрсеткіші бар әріпті қолданған дұрыс. Сонда қаралған мысалдағы амалды келесі формула түрінде жазуға болады:

$$c_i = b_k a_{ki}. \qquad (1.12)$$

Квадратты матрицаны матрица бағанаға оңнан көбейткен кезден нәтижесі болып, элементтері мынадай формуламен анықталатын матрица бағанаға есептеледі:

$$c_i = a_{ki} b_k . \tag{1.13}$$

Мысалы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 15 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Бірлік матрица E деп мынадай түрі бар матрицаны айтады:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Бірлік матрицаның элементтерін белгілеу үшін мынадай ережемен анықталған Кронекер символын δ_{ik} қолданған ыңғайлы:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{i = k болған кезде;} \\ 0 & \text{i} \neq \text{k болған кезде.} \end{cases} \tag{1.15}$$

Онда $E = \delta_{ik}$.

Осыған дейін біз элементтері нақты сан болатын матрицаны қарадық. λ матрицаның элементтері сандық коэффициенттері бар бір айнымалыдан тұратын көп мүше болсын.

Мысалы:

$$\begin{pmatrix} 3\lambda + 4\lambda^2 & 18\lambda + 10\lambda^2 & 1 \\ 5 & 4\lambda^2 & 2 \\ 8 + 6\lambda^3 & 3 + 2\lambda & 4 + 10\lambda^7 \end{pmatrix}.$$

Сипаттамалық көп мүше. Әрбір $A = (a_{ik})$ матрицасына мынадай оның сипаттамалық матрицасын сәйкеске қоюға болады:

$$A - \lambda E = (a_{ik} - \lambda \delta_{ik}). \tag{1.16}$$

Сипаттамалық матрицаны ашсақ мынадай түрді аламыз:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Сипаттамалық матрицаның анықтаушысын сипаттамалық көпмүше деп атайды, яғни

$$\left|A-\lambda E\right|=\left|a_{ik}-\lambda\delta_{ik}\right|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}. \qquad (1.17)$$

Сипаттамалық көпмүшенің түбірлерін A матрицаның меншікті мәні деп атайды, ал мынадай теңдеуді:

$$\left|A-\lambda E\right|=0, \qquad (1.18)$$

оның сипаттамалық теңдеуі деп атайды.

Осы теңдеудегі анықтауыштарды ашып және λ дәрежесі бойынша мүшелерді топтап келесі түрдегі үшінші реттік теңдеуді аламыз:

$$\lambda^3-a^I\lambda^2+a^{II}\lambda-a^{III}=0,$$

мұндағы $a^I=a_{11}+a_{22}+a_{33}$ – A матрицаның диагональдық элементтерінің қосындысын A матрицаның ізі деп атайды. Онан әрі мынаны жазуға болады:

$$a^{II}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix};$$

$$a^{III}=\left|a_{ik}\right|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Симметриялық және қисық симметриялық матрица. Сипаттамалық көп мүшенің нақты түбірлерінің бар болу сұрақтары симметриялы матрица түсінігімен тығыз баланысты.

Егер мынадай шарт орындалса: $a_{ik}=a_{ki}$, онда матрица симметриялы деп аталады.

Егер мынадай шарт орындалса: $a_{ik} = -a_{ki}$, онда матрица қисық симметриялы деп аталады.

Бірінші жағдайда басты диагональға қатысты симметриялы орналасқан элементтер екі-екіден тең болады.

Екінші жағдайда осы элементтер абсолюттік мөлшері бойынша тең болады, ал таңбалары бойынша әр түрлі болады. Қисық симметриялы матрицаның басты диагоналында тұратын элементтер нөлге тең болады.

Матрицаны транспонирлеу операциясымен танысайық (сызықшамен белгіленеді), яғни жолды сәйкесті бағанамен ауыстыру және қарама-қарсы, бағананы сәйкесті жолмен ауыстыру операцияларымен танысайық.

Егер *A* матрицасында мынадай түр бар болса:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix},$$

онда транспорнирленген A' матрицасын былай жазуға болады:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 11 & 17 \end{pmatrix}.$$

Транспорнирлеу матрицаны басты диагональға қатысты 180° бұруға алып келеді.

Осы операцияны қолданып әрбір матрицаны *A*-ны симметриялық *B* және қисық симметриялы *C* матрицаларының қосындысы түрінде көрсетуге болады.

Расында да, айқын $A = 0{,}5(A + A') + 0{,}5(A - A')$ теңдеуін жазып (мұндағы A' – транспонирленген матрица) $B = 0{,}5(A + A')$ матрицасы симметриялық екендігіне жеңіл көз жеткізуге болады. Осы матрицаның элементтеріне мынадай байланыстар орындалады: $b_{ik} = 0{,}5(a_{ik} + a_{ki})$ және $b_{ki} = 0{,}5(a_{ki} + a_{ik})$.

Осыған ұқсас $C = 0{,}5(A - A')$ қисық симметриялы матрица. Осы матрицаның элементтеріне мынадай теңдік орындалады: $c_{ik} = 0{,}5(a_{ik} - a_{ki})$ және $c_{ki} = -0{,}5(a_{ki} - a_{ik})$.

Мысал:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Келешекте әрбір симметриялық матрицада үш нақты меншікті мән бар екендігі көрсетілетін болады.

Бақылау сұрақтары.

1. Қандай матрицада жол саны бағана санына тең?
2. Не себептен матрица элементін екі көрсеткіші бар әріппен белгілейді?
3. Матрицаның басты диагоналы деп нені айтады?
4. Матрицамен қандай операция орындалатындығын білесіз?
5. Әр түрлі реті бар квадратты матрицаны көбейтуге бола ма?
6. Көбейтілетін матрицалар қандай шарттарды қанағаттандыруы қажет?
7. Неге сипаттамалық матрица, сипаттамалық көп мүше деп аталады?
8. Симметриялық және қисық симметриялық матрица элементтері өзара қалай байланысқан?

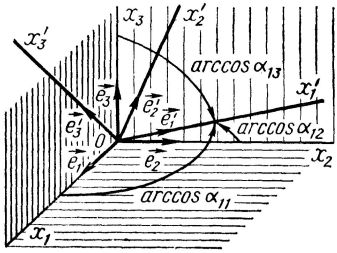
1.4. Тензорлар

Координаттарды түрлендіру. Үш өзара ортогональды бірлік векторлармен, яғни e_i ортасымен құрылған кейбір базисті қарайық (1.6-сурет). Координаттық басын (0 нүктесі) қозғалмайтын етіп қалдырып, базисті кеңістікте бұрайық. Жаңа жайды алған ортаны $\vec{e}_i'$ символымен белгілейік.

Нәтижесінде біз $\vec{e}_i$ ортасы бар «ескі» және $\vec{e}_i^{'}$ ортасы бар «жаңа» координат жүйелерін аламыз. Сонымен бірге мынаны жазуға болады:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{i} = \text{k}; \\ 0 & \text{i} \neq \text{k}; \end{cases}$$

$$\vec{e}'_i \times \vec{e}'_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{i} = \text{k}; \\ 0 & \text{i} \neq \text{k}. \end{cases}$$



1.6-сурет. Ортогональды базисті бұру

Жаңа координатты осьтермен ескі координатты осьтер құрған тоғыз бұрыштың косинустар кестесін енгізейік. Осыны бағыттаушы косинустар кестесі деп атайық.

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}'_1$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{e}'_2$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{e}'_3$	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Мұндағы α_{ik} - сызықшаланған *i* ортасымен сызықшаланбаған *k* ортасы арасындағы косинус бұрышы, яғни: $\alpha_{ik} = \cos\vec{e}_i'\hat{\vec{e}}_\text{k} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_k$.

Осы себептен $\vec{e}_i'$ жаңа ортасын $\vec{e}_k$ ескі ортасы бойынша жіктеуді келесі тәсілмен орындайды: $\vec{e}_i' = cos(\vec{e}_i', \hat{\vec{e}}_k)\vec{e}_k = \alpha_{ik}\vec{e}_k$

және кез келген жол элементтерінің екінші дәрежелі қосындылары бірге тең болады.

Одан ары, әр түрлі бағанада тұратын сәйкесті элементтердің екі-екіден көбейтіндісінің қосындысы нөлге тең. Расында да осы қосынды мынаған тең: $\alpha_{ik} \cdot \alpha_{mk} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_m' = 0$, өйткені $i \neq m$.

Сызықталмаған $\vec{e}_k$ ортасын сызықталған $\vec{e}_i'$ ортасы бойынша жіктесек келесі теңдеуді аламыз: $\vec{e}_k = cos(\vec{e}_k, \hat{\vec{e}}_i')\vec{e}_i' = \alpha_{ik}\vec{e}_i'$.

Матрица кестенің кез келген бағана элементтерінің екінші дәрежелі қосындылары бірге тең, ал екі әр түрлі бағананың сәйкесті элементтерінің екі-екіден көбейтіндісі қосындылары нөлге тең.

Тензордың анықтамасы. Бізге белгілі бір $\vec{a}$ векторы берілсін дейік. Демек осы вектордың ескі $\vec{e}_k$ базисте a_k координатасы белгілі.

Жаңа базиске өткен кезде $\vec{a}$ векторының сыңарлары қандай түрде өзгеретіндігін қарайық.

Осындай жағдайда бізде мынау бар болады:

$$\vec{a} = a_k\vec{e}_k = a_k(\alpha_{ik}\vec{e}_i') = (\alpha_{ik}a_k)\vec{e}_i'.$$

Осы түрлендіруде біз бастапқы кезде ескі $\vec{e}_k$ орталарын жаңа $\vec{e}_i'$ орталары арқылы көрсеттік, ал содан кейін көбейкіштерді қайтадан топтауды жүргіздік. Нәтижесінде жаңа координат жүйесінде $\vec{a} = \vec{a}_i'\vec{e}_i'$ болатындығын еске түсіріп $\vec{a}$ векторының жаңа (сызықшаланған) сыңарлары үшін мынадай формуланы аламыз: $a_i' = \alpha_{ik}a_k$.

Осы вектордың жаңа анықтамасын беруге мүмкіндік береді. Егер әрбір декарттық координат жүйесінде бізге базисті бұрған кезде мынадай заң бойынша түрленетін a_k үш мөлшерлер жиынтығы берілген болса:

$$a_i' = \alpha_{ik}a_k, \qquad (1.20)$$

онда бізге бір валентті тензор берілген болады. a_k сандары тензор сыңарлары деп аталады.

Осы түсінікті жинақтап қорытайық.

Егер әрбір декарттық координат жүйесінде бізге базисті бұрған кезде мынадай заң бойынша түрленетін $3^2 = 9$ сандар жиынтығы a_{pq} берілсе:

$$a'_{ik} = \alpha_{ip}\alpha_{kq}a_{pq}, \qquad (1.21)$$

онда бізге екі валентті тензор берілген болады. a_{pq} сандарын сыңарлар деп атайтын боламыз, ал тензорды келесі түрде белгілейміз: $T_A = \left[a_{pq}\right]$, $T_B = \left[b_{ik}\right]$ және т.б.

Бұдан былай бірінші валентті тензорды әдеттегідей вектор деп атайтын боламыз, ал екінші валентті тензорды жай тензор дейміз. Сірә, скаляр нөлдік валенттілігі бар тензор болады.

Қабылданған координат жүйесіндегі әрбір тензорға тензорлар сыңарларымен жасалған матрица сәйкес келеді. Сөйтіп $T_A = \left[a_{ik}\right]$ тензорына $A = \left(a_{ik}\right)$ матрицасы сәйкес келеді. Егер матрица, яғни сандар кестесі, координат жүйесімен байланыспайтын болса, онда тензор сыңарлары елеулі түрде базисті таңдаудан тәуелді болатындығын ұмытпау қажет. Сондықтан бір тензорға әр түрлі координат жүйесінде әр түрлі матрица сәйкес келеді.

1. 1 – есеп. Ортогональды базисті бұру.

$\vec{e}'_i$ ортогональды базисі $\vec{e}_i$ базисін $\vec{e}_3$ ортасының айналасында $\pi/6$ бұрышына бұрумен алынған. Бағыттаушы косинустар кестесін жазу керек.

Шешуі: $\vec{e}'_3$ және $\vec{e}_3$ орталары дәл сәйкес келетін болғандықтан мынаны жазуға болады: $\alpha_{33} = cos(\vec{e}'_3\hat{,}\,\vec{e}_3) = 1$. $\vec{e}'_1$ және $\vec{e}'_2$ орталары $\vec{e}_3$ ортасына перпендикулярлы, сондықтан $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$.

Осыған ұқсас $\vec{e}_1$ және $\vec{e}_2$ орталары $\vec{e}_3'$ ортасына перпендикулярлы. Демек: $\alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$.

Қалған бағыттаушы косинустарды табайық. Осы мақсатпен $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ және $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ орталарының өзара орналасуы берілген 1.7-суретті пайдаланып қалайық. Осы суретті пайдаланып мынаны табамыз:

$$\alpha_{11} = \cos(\vec{e}_1', \hat{\vec{e}}_1) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2;$$

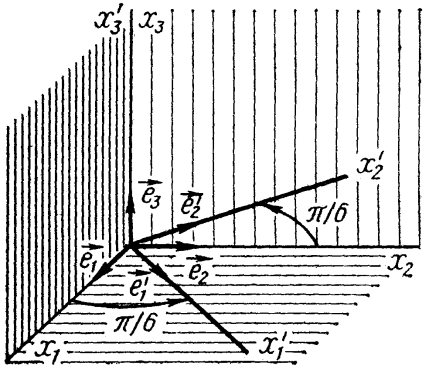
$$\alpha_{12} = \cos(\vec{e}_1', \hat{\vec{e}}_2) = \cos 60^\circ = 1/2;$$

$$\alpha_{22} = \cos(\vec{e}_2', \hat{\vec{e}}_2) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2;$$

$$\alpha_{21} = \cos(\vec{e}_2', \hat{\vec{e}}_1) = \cos 120^\circ = -1/2.$$

Сонымен бағыттаушы косинустар кестесінде келесі түр бар болады:

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1'$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	0
$\vec{e}_2'$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	0
$\vec{e}_3'$	0	0	1



1.7-сурет. $\vec{e}_3$ ортасының айналасында координатты бұру

1.2 – есеп. Тензор сыңарларын өзгерту.

$\vec{e}_i$ базисін $\vec{e}_3$ ортасының айналасында $\pi/6$ бұрышына бұрумен алынған жаңа координат жүйесіне өткен кезде пайда болатын тензор сыңарларын, ескі координат жүйесіндегі мынадай тензорды қолданып анықтаңыздар:

$$T_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Шешуі: 1.1– есебінде координаттарды өзгертіп алынған бағыттаушы косинустар кестесін пайдаланайық. Өйткені екі есепте де $\pi/6$ бұрылу бұрышы қолданылған. (1.21) формуласы бойынша мынаны анықтаймыз:

$$a'_{11} = \alpha_{11}\alpha_{11}a_{11} + \alpha_{11}\alpha_{12}a_{12} + \alpha_{11}\alpha_{13}a_{13} + \alpha_{12}\alpha_{11}a_{21} + \alpha_{12}\alpha_{12}a_{22} +$$
$$+ \alpha_{12}\alpha_{13}a_{23} + \alpha_{13}\alpha_{11}a_{31} + \alpha_{13}\alpha_{12}a_{32} + \alpha_{13}\alpha_{31}a_{33} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0 +$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0 +$$
$$+ 0\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Онан әрі мынаны аламыз:

$$a'_{12} = \alpha_{11}\alpha_{21}a_{11} + \alpha_{11}\alpha_{22}a_{12} + \alpha_{11}\alpha_{23}a_{13} + \alpha_{12}\alpha_{21}a_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22}a_{22} +$$
$$+ \alpha_{12}\alpha_{23}a_{23} + \alpha_{13}\alpha_{21}a_{31} + \alpha_{13}\alpha_{22}a_{32} + \alpha_{13}\alpha_{23}a_{33} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 0 +$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 0 +$$
$$+ 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 2 = -\frac{1}{4}.$$

Егер a_{ik} тензорының тек үшеуі нөлден айырмашылықта болатын жағдайды пайдалансақ, яғни $a_{13} = 1; a_{21} = 1; a_{33} = 2$, онда тензор сыңарларын түрлендіруді анықтайтын үлкен

формулаларды едәуір оңайлатуға мүмкіндік пайда болатындығын оңай көруге болады. Сонымен бірге бағыттаушы косинустар кестесінен мынаны табуға болады: $\alpha_{13} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$. Осыны ескеріп мынаны аламыз:

$$a'_{ik} = \alpha_{ip}\alpha_{kq}a_{pq} = \alpha_{i1}\alpha_{k3}a_{13} + \alpha_{i2}\alpha_{k1}a_{21} + \alpha_{13}\alpha_{k3}a_{33}.$$

Осы формула бойынша есептеу жаңа координат жүйесінде T_A тензорының сыңарларын береді, яғни

$$T_A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тензорлармен орындалатын амалдар. Тензорлармен амалдар орындау осы тензорлардың сыңарларынан құралған матрицалармен сәйкесті амалдарды орындауға алып келеді. Нәтижесінде алынған матрица жаңа тензордың матрицасы болады. Тензорлармен орындалатын амалдарға мыналар жатады:

тензорларды қосу $T_c = T_A + T_B$, мұндағы $C = A + B$ − матрица;

тензорларды санға көбейту $T_B = \lambda \times T_A$, мұндағы $B = \lambda \times A$ − матрица;

тензорды тензорға көбейту (скалярлы) $T_C = T_A \times T_B$, мұндағы $C = A \times B$ − матрица.

Жоғарыда анықталған операциялардың нәтижесі расында да тензор болатындығын көрсетейік. Басқаша айтқанда, басқа координат жүйесіне өткен кезде матрицамен орындалған операцияның нәтижесінде алынған сыңарлар (1.21) тензорлар заңы бойынша түрленетіндігін көрсетейік.

Қосу үшін бізде мыналар бар болсын: $a'_{ik} = \alpha_{ip}\alpha_{kq}a_{pq}$; $b'_{ik} = \alpha_{ip}\alpha_{kq}b_{pq}$. Осыдан мынаны аламыз: $c'_{ik} = a'_{ik} + b'_{ik} = = \alpha_{ip}\alpha_{kq}(a_{pq} + b_{pq}) = \alpha_{ip}\alpha_{kq}c_{pq}$.

$a'_{ik} = \alpha_{ip}\alpha_{kq}a_{pq}$ тензорын санға көбейткен кезде мынаны аламыз:

$$b'_{ik} = \lambda \cdot a'_{ik} = \lambda \cdot \alpha_{ip}\alpha_{kq}a_{pq} = \alpha_{ip}\alpha_{kq}(\lambda \cdot a_{pq}) = \alpha_{ip}\alpha_{kq}b_{pq}.$$

Соңында, (1.11) формуласы бойынша тензорды тензорға көбейткен кезде мынаны аламыз:

$$c'_{ik} = a'_{ip} \cdot b'_{pk}.$$

$a'_{ip} = \alpha_{im}\alpha_{pn}a_{mn}$ және $b'_{pk} = \alpha_{pl}\alpha_{kz}a_{lz}$ теңдіктерін жазайық. Осылардан мынаны табуға болады:

$$c'_{ik} = \alpha_{im}(\alpha_{pn}\alpha_{pl})\alpha_{kz}a_{mn}a_{lz}.$$

Дөңгелек жақшаға алынған көрініс үшін косинустар матрицасы (α_{ik}) қасиеттерінен мынау келіп шығады:

$$\alpha_{pn} = \alpha_{pl} = \delta_{nl} = \begin{cases} 1 & n = l; \\ 0 & n \neq l,. \end{cases}$$

Осыны бұрынғы (1.21) тәуелділігіне қойсақ мынаны аламыз: $c'_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kz}(a_{ms}a_{sz}) = \alpha_{im}\alpha_{kz}c_{mz}$, яғни c_{mz} сыңарлары расында да тензорлық заң бойынша түрленеді.

Матрицаларды көбейткен жағдай сияқты, тензорды тензорға көбейту операцияларын, оған әр түрлі валентті тензорларды көбейтуді қосып кеңейтуге болады.

Бізге кейбір координат жүйесінде $T_A = [a_{ik}]$ тензоры және b_i сыңарлары бар $\vec{b}$ векторы берілген болсын.

$\vec{b}$ векторының T_A тензорына сол көбейтіндісі деп $c = \vec{b}T_A$ векторын айтады. Осы вектордың сыңарларын, $\vec{b}$ векторының матрица жолын T_A тензорының A матрицасына көбейту ережесі бойынша былай анықтайды:

$$(c_1c_2c_3) = (b_1b_2b_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

және де $c_i = b_k \cdot a_{ki}$.

$\vec{b}$ векторының T_A тензорына оң көбейтіндісі деп сыңарлы А матрицаны $\vec{b}$ векторының матрица бағанасына көбейту ережесі бойынша анықталған $\vec{c}$ векторын айтады, яғни: $\vec{c} = \vec{b}T_A$ немесе жайылған түрде

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

мұндағы $c_i = a_{ik} \cdot b_k$.

1.3 – есеп. Вектордың тензорға көбейтіндісі.

Қабылданған координат жүйесінде $\vec{b}$ векторында мынадай сыңарлар бар болсын: (1 2 3), ал T_A тензорының матрицасында мынадай түрмен жазылсын:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\vec{b}$ векторының T_A тензорына сол және оң көбейтіндісін табайық.

Шешуі: $\vec{b}$ векторының T_A тензорына сол көбейтіндісі мынаған тең:

$$(1\ 2\ 3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (14\ 5\ 23).$$

$\vec{b}$ векторының T_A тензорына оң көбейту мынадай вектор сыңарларын береді:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Бұдан былай бізге келесі лемма керек болады.

1.1–лемма. Егер әрбір $\vec{c}$ векторына, осы $\vec{c}$ вектордың сыңарларын (a_{ik}) матрицасына көбейту ережесі бойынша анықталатын $\vec{b}$ векторын сәйкес қоюға болатын болса, онда (a_{ik}) мөлшерінің жинағы тензор болып саналады, яғни басқа координат жүйесіне ауысқан кезде осы мөлшерлер мынадай заң бойынша түрленеді: $a'_{ik} = \alpha_{ip}\alpha_{kq}a_{pq}$.

Дәлел. Жаңа координат жүйесінде $\vec{c}$ векторы координаттарының біреуін $(\vec{c}'_k)$ бірге тең етіп, ал қалғанын нөлге тең етіп $(c'_k = 1, c'_s = 0,\ (\mathrm{s} \neq \mathrm{k}))$ таңдайық.

Лемма шартына сәйкесті жаңа координат жүйесінде мынаны аламыз: $b'_i = a'_{im}c'_m = a'_{ik}$. Ескі координат жүйесіне ауысқан кезде мынаны аламыз: $b'_i = \alpha_{ip}b_p$.

$\vec{c}$ векторының сыңарлары ескі координат жүйесінде мынадай түрді алады: $c_q = \alpha_{mq}c'_m = \alpha_{kq}$. Осыдан табатынымыз: $a'_{ik} = b'_i = \alpha_{ip}b_p$, бірақта $b_p = a_{pq}c_q$.

Нәтижесінде A матрица сыңарларын түрлендіру заңын аламыз, яғни $a'_{ik} = \alpha_{ip}\alpha_{pq}c_q = \alpha_{ip}\alpha_{kq}a_{pq}$.

Осыны бізге дәлелдеу керек болған. Дәлелденді.

Симметриялық және қисық симметриялық тензорлар. Еркін $T_A = [a_{ik}]$ тензорын симметриялық T_B және қисық симметриялық T_C тензорлардың қосындысы түрінде былай көрсетуге болады (жалғыз түрде): $T_A = T_B + T_C$. Осындай бөліп ыдырату A матрицасын симметриялық және қисық симметриялық матрицаға бөліп ыдыратуға алып келеді.

Сыңарлары мынадай формула бойынша табылатын: $b_{ik} = 0{,}5(a_{ik} + a_{ki})$ симметриялық T_B тензоры үшін басты диагональға қатысты мынадай симметриялық шарт орындалады:

$$b_{ik} = b_{ki}\,.$$

Қисық симметриялы тензордың сыңарлары $c_{ik} = 0{,}5(a_{ik} - a_{ki})$ келесі қатыстарды қанағаттандырады: $c_{ik} = -c_{ki}$. Мысал:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Девиаторлық және шарлық тензорлар. Тағы да бір тензорды ажыратып бөлуді қарайық:

$$T_A = D_A + a_0 J\,, \tag{1.22}$$

мұндағы

$$a_0 = \frac{a_{ii}}{3} = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{3}\,; \tag{1.23}$$

$$J = [\delta_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{ бірлік тензор.} \tag{1.24}$$

Бірлік тензор мынадай қасиетке ие болады: $T_A J = J T_A = T_A$.

Диагональдық сыңарларының қосындысы нөлге тең мынадай тензорды:

$$D_A = |a_{ik} - a_0 \delta_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} - a_0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - a_0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - a_0 \end{vmatrix} \tag{1.25}$$

девиатор деп атайды.

(1.22) формуласы еркін T_A тензорын D_A девиаторы және шар тензоры $a_0 J$ қосындысына бөліп ажыратуға мүмкіндік береді.

Басты бағыт және өз мәні. $\vec{y}$ векторының T_A тензорына көбейтіндісінің нәтижесі қайтадан вектор болатындығын жоғарыда біз айттық. Егер алынған вектор бастапқыға коллинеарон болса, яғни егер көбейтудің нәтижесінде $\vec{y}$ векторының бағыты өзгермей тек мөлшері ғана өзгеретін болса, онда осы бағыт T_A тензорының басты бағыты деп аталады.

Анық болу үшін ары қарай оңнан көбейту туралы әңгіме болып жатыр деп есептеп мынаған ие боламыз:

$$T_A \cdot \vec{y} = \lambda \cdot \vec{y}\,. \tag{1.26}$$

Заттық сан λ тензор T_A-ның меншікті мәні деп аталады.

Тензордың меншікті мәнін және басты бағытын табайық. Осы мақсатпен (1.26) формуласын мынадай жайылған түрде көрсетейік:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 &= \lambda y_1,\\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 &= \lambda y_2,\\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 &= \lambda y_3. \end{aligned}$$

λy_i мүшелерін оңға өткізіп мынаны аламыз

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 &= 0,\\ a_{21} + (a_{22}-\lambda)y_2 + a_{23}y_3 &= 0,\\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + (a_{33}-\lambda)y_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

Алынған біртекті сызықтық теңдеулер жүйесінің y_i айнымалысына қатысты шешімі бар болу үшін жүйенің анықтаушысы нөлге тең болуы керек, яғни

$$\left|a_{ik} - \lambda\delta_{ik}\right| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Сонымен, T_A тензорының басты бағытын және меншікті мәнін анықтау проблемасы, оның А матрицасының сипаттамалық теңдеуін шешуге алып келеді.

Сипаттамалық теңдеудің нақты түбірін тауып (1.27) жүйесінен $y_1 : y_2 : y_3$ қатынасын, яғни осы түбірге сәйкес келетін T_A тензорының басты бағытын табуға болады.

Тензорлық эллипсоид. Өзіміздің үш өлшемді кеңістігімізде кейбір $\vec{e}_k$ базисін алайық және сыңарлары мынадай қатынасты $a_{ik} = a_{ki}$ қанағаттандыратын $T_A = [a_{ik}]$ симметриялық тензорын қарайық.

Екінші ретті мына теңдеуді жазайық:

$$a_{ik} x_i x_k = 1 \qquad (1.28)$$

немесе жайылған түрде

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 1.$$

Осы теңдеу центрлік беттің екінші реттік теңдеуі екендігі аналитикалық геометриядан белгілі. Координат жүйесін бұрумен оны мынадай каноникалық түрге келтіруге мүмкіндік пайда болады:

$$a_1(x_1^0)^2 + a_2(x_2^0)^2 + a_3(x_3^0)^2 = 1. \qquad (1.29)$$

Осы теңдеудің жеке жағдайларына мыналар жатады:

эллипсоид $\left(\frac{x_1^0}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2^0}{b_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3^0}{b_3}\right)^2 = 1;$

бір қуысты гиперболоид $\left(\frac{x_1^0}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2^0}{b_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3^0}{b_3}\right)^2 = 1;$

екі қуысты гиперболоид $\left(\frac{x_1^0}{b_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2^0}{b_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3^0}{b_3}\right)^2 = 1.$

Осы теңдеулерде $a_i = \pm 1/b_i^2$.

Жалпы жағдайда (1.28) теңдеуі тензорлық эллипсоидтың теңдеуі деп аталады.

Сірә, (1.28) бетінің пішіні T_A тензорымен анықталады және әр түрлі координатты базисті таңдаумен байланысты болмауы қажет. Осыны дәлелдеу үшін координатты осьті бұрған

кезде және сызықшаланған базиске e_i' өткен кезде (1.28) теңдеуінің түрленуін қарайық.

Бетте жататын кейбір М нүктесінің x_i ескі координатасын мынадай формула бойынша: $x_i = \alpha_{mi} x'_m$, $x_k = \alpha_{nk} x'_n$ жаңа координат арқылы білдірейік (мұндағы α_{mi}, α_{nk} – жаңа жүйенің бағыттаушы косинустары). Осыны (1.28) формуласына қойғаннан кейін мынаны аламыз: $a_{ik}\alpha_{mi}x'_m\alpha_{nk}x'_n = 1$ немесе қайта топтағаннан кейін мынаны анықтаймыз:

$$(a_{ik}\alpha_{mi}\alpha_{nk})x'_m x'_n = 1.$$

Бірақ та дөңгелек жақшадағы көрініс сызықшаланған базистегі T_A тензорының сыңарлары болып саналады, яғни $a'_{mn} = a_{ik}\alpha_{mi}\alpha_{nk}$.

Демек, жаңа координат жүйесіндегі тензорлық эллипсоидтың теңдеуінде бұрынғысынша мынадай түр бар болады $a'_{mn}x'_m x'_n = 1$, яғни инварианты болып қалады.

Бұрын біз айтқанымыздай, әрбір симметриялық тензор үшін координат жүйесін бұрумен тензорлық эллипсоидтың (1.28) теңдеуін (1.29) каноникалық пішінге келтіруге болады. Осындай да T_A тензорының бүйірлік сыңарлары $a_{12}^0 = a_{23}^0 = a_{31}^0 = 0$ нөлге айналады, ал диагональды сыңарлар мынадай болады: $a_{11}^0 = a_1$, $a_{22}^0 = a_1$, $a_{33}^0 = a_3$.

Нәтижесінде T_A тензоры диагональды түрді қабылдайды, яғни

$$T_A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}, \qquad (1.30)$$

мұндағы a_i сандары тензордың басты сыңарлары деп аталады.

Сонымен әрбір симметриялық тензорды координат жүйесін бұру жолымен диагональды түрге келтіруге болатындығын біз анықтадық.

Енді жаңа координаттың орталары $\vec{e}_1^0$ не болып саналатындығын қарайық.

T_A тензорын $\vec{e}_1^0$ ортасына көбейтейік. Матрицаларды көбейте отырып, мынаны аламыз:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

немесе векторлық түрде $T_A\vec{e}_1^0 = a_1\vec{e}_1^0$.

Осыған ұқсас мынаны алуға болады $T_A\vec{e}_2^0 = a_2\vec{e}_2^0$ және $T_A\vec{e}_3^0 = a_3\vec{e}_3^0$.

Демек, координаттың орталары $\vec{e}_i^0$ тензор T_A-ның басты бағытын анықтайды, ал a_i сандары оның меншікті мәні болады. Осыдан шығатыны, әрбір симметриялық тензорда үш өзара ортогональды басты бағыт бар. Осыларға сәйкес келетін меншікті мәндер (тензордың басты сыңарлары) нақты сандар болады.

Тензордың инварианттары. Сірә, тензордың меншікті мәні, оның басты бағыты сияқты координат жүйесін таңдаудан тәуелді болмауы қажет. Сондықтан мынадай сипаттамалық теңдеулердің коэффициенті

$$\lambda^3 - a^I\lambda^2 + a^{II}\lambda - a^{III} = 0, \qquad (1.31)$$

сондай-ақ координат жүйесін таңдаудан тәуелді емес болады. Осы себептен айтылған коэффициенттер T_A тензорының инварианттары деп аталды.

Әрбір $T_A = [a_{ik}]$ тензорларына мыналар сәйкес келеді:

сызықтық инвариант

$$a^I = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_1 + a_2 + a_3; \qquad (1.32)$$

квадратты инвариант

$$a^{II} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1; \qquad (1.33)$$

және кубтық инвариант

$$a^{III} = |a_{ik}| = a_1 a_2 a_3. \qquad (1.34)$$

T_A тензорының құрастырушысынан мынадай түрлері бар:

$$A_1 = a_{ii} = a_{ii} = a_1 + a_2 + a_{3,}$$
$$2A_2 = a_{ik} a_{ik} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$
$$3A_3 = a_{ik} a_{ik} a_{li} = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3,$$
$$4A_4 = a_{ik} a_{kl} a_{lm} a_{mi} = a_1^4 + a_2^4 + a_3^4$$

сансыз көп симметриялық инварианттарды құрастыруға болатындығын айтып ескерту қажет.

Осы инварианттар үш базалық инварианттар арқылы ұтымды көрсетілуі мүмкін. Базалық инварианттар ретінде бірінші үш A_1, A_2, A_3 инварианттарды таңдауға болады. Басқаша айтқанда мынадай формулада орын бар:

$$A_n = c_{ikl} A_1^i A_2^k A_3^l,$$

мұндағы c_{ikl} – кейбір ұтымды коэффициенттер (мынадай теңдіктер орындалады: $i + 2k + 3l = n$).

Мынадай байланыс әділетті болады:

$$A_1 = a^I, A_2 = a^{II} + \frac{1}{2}(a^I)^2, A_3 = a^{III} + a^I a^{II} + \frac{1}{3}(a^I)^2, \ldots$$

a^I, a^{II}, a^{III} инварианттары базалық инварианттардың жүйесін тағы да құрайтындығын көрсетуге болады.

1.4 – есеп. Тензорды диагональды түрге келтіру.

Төмендегі тензордың:

$$T_A = [a_{ik}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

басты бағытын және меншікті мәнін табу қажет.

Шешуі: Тензордың инварианттарын есептейік.

Сызықтық инвариант $a^I = 3+3+1 = 7$.

Квадратты инвариант

$$a^{II} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 8+3+3 = 14.$$

Кубтық инвариант $a^{III} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9+0+0-0-1-0 = 8.$

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$ сипаттамалық теңдеуін келесі түрде жазуға болады: $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0$. Осыдан оның түбірі (тензордың меншікті мәні) мынаған тең: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4$.

Ұзындығы бірге тең $\vec{y}^1 = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)})$ векторы $\lambda_1 = 1$ меншікті мәнге сәйкес келетін басты бағытты анықтайтын болсын. (1.27) жүйесін шешеміз:

$$2y_1^{(1)} - y_2^{(1)} = 0, \quad -y_1^{(1)} + 2y_2^{(1)} = 0.$$

Осыған $\vec{y}^{(1)}$ векторының мынадай мөлшерлеу шартын қосайық:

$$\left[y_1^{(1)}\right]^2 + \left[y_2^{(1)}\right]^2 + \left[y_3^{(1)}\right]^2 = 1.$$

Нәтижесінде мынаны аламыз:

$$y_1^{(1)} = y_2^{(1)} = 0, \; y_3^{(1)} = \pm 1$$

Осыған ұқсас $\lambda_2 = 2$ үшін мынадай теңдеулер бізде бар:

$$y_1^{(2)} - y_2^{(2)} = 0, \; y_1^{(2)} - y_2^{(2)} = 0, \; y_3^{(2)} = 0,$$
$$\left[y_1^{(2)}\right]^2 + \left[y_2^{(2)}\right]^2 + \left[y_3^{(2)}\right]^2 = 1.$$

Осыдан мынаны табамыз:

$$y_1^{(2)} = y_2^{(2)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ y_3^{(2)} = 0\,.$$

Соңында $\lambda_3 = 4$ үшін мынадай теңдеулер бізде бар:

$$y_1^{(3)} + y_2^{(3)} = 0,\ y_1^{(3)} + y_2^{(3)} = 0,\ y_3^{(3)} = 0,$$
$$\left[y_1^{(3)}\right]^2 + \left[y_2^{(3)}\right]^2 + \left[y_3^{(3)}\right]^2 = 1.$$

Нәтижесінде мынаны аламыз: $y_1^{(3)} = -y_2^{(3)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ y_3^{(3)} = 0\,.$

$\vec{y}^{(i)}$ орталар жүйесі оң болатын етіп таңбалар таңдалады.

Жаңа $\vec{e}_i^{\,0}$ орталар жүйесін тензордың басты бағыттарымен беттестіріп, осы жаңа орталар жүйесін енгізейік, яғни $\vec{e}_1^{\,0} = \vec{y}^{(1)}, \vec{e}_2^{\,0} = \vec{y}^{(2)}, \vec{e}_3^{\,0} = \vec{y}^{(3)}$.

Жаңа координатты жүйенің ескімен салыстырғанда бағыттануы α_{ik} бағыттаушы косинустар кестесімен беріледі. Осы кесте төменде келтірілген.

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1^{\,0}$	0	0	± 1
$\vec{e}_2^{\,0}$	$\pm\ 1/2$	$\pm\ 1/2$	0
$\vec{e}_3^{\,0}$	$\pm\ 1/2$	$\pm\ 1/2$	0

Жаңа координат жүйесінде T_A тензоры мынадай түрді қабылдайды:

$$T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Девиатордың инварианты. $T_A = [a_{ik}]$ тензорына $D_A = [b_{ik}] = [a_{ik} - a_0\delta_{ik}]$ девиаторы сәйкес келеді, мұндағы $a_0 = \frac{1}{3}(a_{11} + a_{22} + a_{33})$.

Девиатордың диагональдық элементтерінің қосындысы нөлге тең және оның сипаттамалық теңдеуінде мынадай түр бар болады:

$$\lambda^3 + b^{II}\lambda - b^{III} = 0, \tag{1.36}$$

мұндағы

$$b^{II} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{33} & b_{31} \\ b_{13} & b_{11} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} b_{ik} b_{ik} = \tag{1.37}$$

$$= -\frac{1}{6}\left[(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{22} - a_{33})^2 + (a_{33} - a_{11})^2 + 6(a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{31}^2)\right];$$

$$b^{III} = |b_{ik}|. \tag{1.38}$$

$T_A = D_A + a_0 J$ теңдеуінен тензордың және оның девиаторының басты осьтерінің тура келуі шығады.

Девиатордың екінші инварианты оң мәнді қабылдауы мүмкін емес. Мынадай белгілеуді енгізейік:

$$B = +\sqrt{|b^{II}|} = +\sqrt{\frac{1}{2} b_{ik} b_{ik}}. \tag{1.39}$$

Сонда сипаттамалық теңдеу мына түрді қабылдайды:

$$\lambda^3 - B^3\lambda = b^{III}. \tag{1.40}$$

Бұл теңдеуді мынадай тригонометриялық ауыстыру көмегімен шешетін болайық: $\lambda = c\cos\beta$.

Осы формуланы (1.40) теңдеуге қойып мынаны аламыз:

$$c^3\left[\cos^3\beta - \left(\frac{B}{c}\right)^2 \cos\beta\right] = b^{III}. \tag{1.41}$$

$\cos^3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta$ белгілі формуласын пайдаланып және (1.41) теңдеуін мынадай түрге өзгертейік:

$$c^3\left[4\cos^3\beta - 4\left(\frac{B}{c}\right)^2\cos\beta\right] = 4b^{III}.$$

Енді $4(B/c)^2 = 3$ теңдігі орындалатын етіп c-ны таңдайық. Ол үшін $c = 2B/\sqrt{3}$ теңдігін қабылдаған жеткілікті.

Нәтижесінде мына теңдеуді аламыз:

$$\cos 3\beta = 4b^{III}/c^3. \qquad (1.42)$$

(1.42) теңдеуі β-ның үш мүмкін болатын мәнін анықтайды. Осы мәндердің біреуі $3\beta < \pi$ шартымен анықталады, ал қалған екі мәндер мынаған тең: $\beta + 2\pi/3$ және $\beta + 4/3\pi$. Девиатордың басты сыңарлары [(1.36) сипаттамалық теңдеулерінің түбірлері] $b_1 \geq b_2 \geq b_3$ теңсіздігін қанағаттандыратын етіп осы мәндерді орналастырайық.

(1.41) теңдеуіне алынған мәндерді қойғаннан кейін мынаны аламыз:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}B\cos\beta; \\ b_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}}B\sin(\beta - \frac{\pi}{6}); \\ b_3 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}B\cos(\frac{\pi}{3} - \beta). \end{aligned}\right\} \qquad (1.43)$$

T_A тензорының басты сыңарлары мынаған тең:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a_0 + \frac{2}{\sqrt{3}}B\cos\beta; \\ a_2 &= a_0 + \frac{2}{\sqrt{3}}B\sin(\beta - \frac{\pi}{6}); \\ a_3 &= a_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}B\cos(\frac{\pi}{3} - \beta). \end{aligned}\right\} \qquad (1.44)$$

Мына параметрді енгізейік

$$\nu_a = \frac{2a_2 - a_1 - a_3}{a_1 - a_3} = \frac{2\sin(\beta - \pi/6) - \cos\beta + \cos(\pi/3 - \beta)}{\cos\beta + \cos(\pi/3 - \beta)} = \frac{tg(\beta - \pi/6)}{tg\pi/6}. \quad (1.45)$$

(1.45) теңдеуі β және ν_a параметрлерін бір қатарлы тәуелділікпен байланыстырады.

Гамильтон-Кэли теоремасы. Тензорды тензорға көбейту операциясы екінші валентті тензорлардың бүтін дәрежесін алуға мүмкіндік береді.

$T_A = [a_{ik}]$ тензоры мына диагональдық түрге келтірілген деп жорамалдайық:

$$T_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Екі T_A тензорларын көбейткен кезде мынаны алатындығымызды оңай көруге болады:

$$T_A^2 = T_A T_A = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}.$$

Жалпы жағдайда T_A тензорының *n*-ші дәрежесі мынаған тең:

$$T_A^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{bmatrix}.$$

Сонымен бірге T_A тензорында және оның бүтін дәрежелерінде тек бір ғана басты ось бар болады.

$\lambda^3 - a^I\lambda^2 + a^{II}\lambda - a^{III} = 0$ сипаттамалық теңдеуін жазайық және λ дәрежесін сәйкесті T_A тензорының дәрежесімен ауыстырайық. λ_i (1.31) теңдеуін қанағаттандыратын болғандықтан мына қатынас орындалатын болады:

$$T_A^3 - a^I T_A^2 + a^{II} T_A - a^{III} I = \theta.$$

Мұндағы $I = [\delta_{ik}]$ – бірлік тензор, ал θ – нөлдік тензор.

Демек, Гамильтон-Кэли теоремасы әділетті болады.

1.1 – теоремасы. Әрбір симметриялық тензор өзінің сипаттамалық теңдеуін қанағаттандыратын болады.

Вектордың векторлық аргумент бойынша туындысы. $\vec{a} = \vec{a}(\vec{x}, t)$ векторлық өрісін қарайық, мұндағы $\vec{x} = (x_i)$ – векторы есептелетін нүктенің радиус-векторы.

Осы байланыс кейбір аймақта үш нақты функция берілгендігін білдіреді. Осы функциялардың әрбіреуінде мынадай түр бар болады: $a_i = a_i(x_k, t)$.

Кейбір уақыт мезгілі t-ны бекітіп қояйық. $\vec{x}$ радиус векторы бар еркін М нүктесін алайық және $\vec{x} + d\vec{x}$ радиус-векторы бар көрші M' нүктесіне ауысайық. a_i мөлшері мына қосымша өсіруді алады: $da_i = \dfrac{\partial a_i}{\partial x_k} dx_k$.

Матрицаны көбейту ережесіне сәйкесті мынаны жазуға болады:

$$\begin{pmatrix} da_1 \\ da_2 \\ da_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial a_i \\ \overline{\partial x_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}.$$

Осы теңдік кез келген координат жүйесіне әділ болғандықтан $[da_i / dx_k]$ формуласы тензор болып саналады және біз мынаны жаза аламыз:

$$d\vec{a} = [\partial a_i / dx_k] d\vec{x}. \qquad (1.46)$$

Тензорды былай белгілейік:

$$d\vec{a} / d\vec{x} = [\partial a_i / dx_k] \qquad (1.47)$$

және оны $\vec{a}$ векторының $\vec{x}$ векторлық аргументі бойынша туындысы деп айтайық.

$\nabla\vec{a} = \left[\partial a_k / \partial x_i\right]$ транспонирленген тензоры $\vec{a}$ векторының градиенті деп аталады. $d\vec{a} / d\vec{x}$ тензорының бірінші инварианты және $\nabla\vec{a}$ вектор $\vec{a}$-ның дивергенциясы болады.

$d\vec{a} / d\vec{x}$ тензорын екі тензорлар қосындысы түрінде көрсетейік, яғни мына симметриялық және қисық симметриялық түрде:

$$\left[\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right] = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} + \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right)\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right)\right].$$

Жалпы жағдайда $c_{ik} = -c_{ki}$, $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0$ шартынан қисық симметриялық тензорды келесі түрге келтіру шығады:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

мұндағы

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right), \omega_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\right), \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right).$$

Векторлық өрістің құйынын есептеу үшін қолданылатын формуланы еске түсіріп ω_i сыңарлары бар $\vec{\omega}$ векторы векторлық өріс $\vec{a}$-мен мына тәуелділікпен байланысты екендігін табамыз:

$$\omega = 0{,}5 rot\vec{a}\,. \qquad (1.48)$$

1.5 – есеп. Векторлық өрістің градиенті.

$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_1x_2\vec{e}_2 - x_1x_3^2\vec{e}_3$ векторлық өрісі үшін М (1.1.1) нүктесінде $\vec{a}$ векторының векторлық аргумент $\vec{x}$ бойынша туындысын және $\vec{a}$ векторының градиентін есептеу қажет.

Шешуі:

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{x}}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & 0\\ x_2 & x_1 & 0\\ x_3^2 & 0 & 2x_1x_3\end{bmatrix},\quad \nabla\vec{a}=\begin{bmatrix}1 & x_2 & x_3^2\\ x_1 & x_1 & 0\\ 0 & 0 & 2x_1x_3\end{bmatrix}$$

М нүктесінде

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{x}}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad \nabla\vec{a}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

$d\vec{a}/d\vec{x}$ тензорын симметриялық және қисық симметриялық тензорлар қосындысы түрінде келтірейік

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{x}}=\begin{bmatrix}1 & 0{,}5(x_1+x_2) & 0{,}5x_3^2\\ 0{,}5(x_1+x_2) & x_1 & 0\\ 0{,}5x_3^2 & 0 & 2x_1x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0{,}5\,(x_1+x_2) & -0{,}5x_3^2\\ -0{,}5\,(x_1+x_2) & 0 & 0\\ 0{,}5\,x_3^2 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Тензорлық өріс. Егер D аймағының әрбір нүктесінде T_A тензоры берілсе, онда осы аймақ тензорлық өріс деп аталады. Сонда мынау жазылады: $T_A=T_A(\vec{x},t)$.

Сөйтіп бекітілген координат жүйесінде $a_{ik}=a_{ik}(x_{m_1}t)$ алты функциясы берілген. Осы функцияның әрбіреуі төрт нақтылы айнымалыдан тәуелді. Тензор сыңарлары тұрақты болған жағдайда $(a_{ik}=const)$ тензорлық өріс біркелкі деп аталады.

Егер T_A тензоры симметриялық болса, онда М нүктесінде үш басты бағытты және осы тензордың меншікті мәнін табуға болады. Координат жүйесін бұрып М нүктесіндегі тензорды диагональды түрге келтіруге болады. Біркелкі емес тензорлық өрістің жалпы жағдайында D аймағының әр түрлі нүктелерінде басты бағыт әр түрлі болады. Егер тензорлық өріс біркелкі болса, онда осы бағыттар барлық нүктеде бір-бірімен

салыстырғанда дәл келеді және T_A тензоры барлық аймақта диагональды түрге ие болады.

Тензорлық өрістің дивергенциясы. Бізге D аймағында T_A тензорының өрісі берілген болсын. Осы аймақта W көлемімен шектейтін $\sum$ тұйық бетін салайық (1.8-сурет).

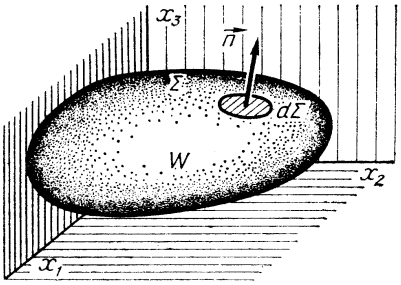
Бетке нормальдың бірлік векторы $\vec{n}$ болсын. Осы векторды T_A тензорына көбейтіп, интегралды былай есептейік:

$$\iint_{\Sigma} T_A \vec{n} d\Sigma. \qquad (1.50)$$

Осы интегралды $\sum$ беті арқылы T_A тензорының тасқыны деп атайды. Интегралдаудың нәтижесі болып кейбір вектор саналады. Осы вектордың сыңарларын табайық.

$\vec{n} = n_i \vec{e}_i$ түсінігін қолданып мынаны аламыз:

$$\iint_{\Sigma} T_A \vec{n}\, d\Sigma = \iint_{\Sigma} a_{ik} \vec{e}_i n_k d\Sigma = \vec{e}_i \iint_{\Sigma} a_{ik} n_k d\Sigma \ .$$



1.8-сурет. Тензорлық өріс дивергенциясын шығару формуласы

Сонымен ізделіп отырған вектордың сыңарлары мынаған тең: $c_i = \iint_{\Sigma} a_{ik} n_k d\Sigma$. Гаусс-Остроградский формуласын қолданып, мынаны аламыз: $c_i = \iint_{\Sigma} a_{ik} n_k d\Sigma = \iiint_{W} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} dw.$

$\partial a_{ik}/\partial x_k$ сыңарлары бар векторды T_A тензорының дивергенциясы деп атайды, яғни

$$divT_A = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}\vec{e}_i . \qquad (1.51)$$

Сөйтіп біз Гаусс-Остроградский формуласын талдап қорытатын мына формуланы алдық:

$$\iint_{T_A} T_A \vec{n} d\sum = \iiint_W divT_A dw. \qquad (1.52)$$

1.6 – есеп. Тензорлық өрістің дивергенциясы.

Шарлық тензордың өрісі былай берілген:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix},$$

мұндағы $\sigma_0 = \sigma_0(x_1, x_2, .., t)$. Тензордың дивергенциясын есептеу қажет.

Шешімі: Біздің жағдайымызда $\sigma_{ik} = \sigma_0 \delta_{ik}$ болғандықтан мынаны анықтаймыз:

$$divT_\sigma = \frac{\partial(\sigma_0 \delta_{ik})}{\partial x_k}\vec{e}_i = \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_k}\delta_{ik}\vec{e}_i = \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_i}\vec{e}_i = grad\sigma_0 . \qquad (1.53)$$

Қисық сызықты координаталар. Тензорлық өрістің дивергенциясы формуласын қисық сызықты ортогональды координат жүйесінде жазайық. $divT_A$ векторының бірінші сыңары мынаған тең:

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial \beta_1}(H_2 H_3 a_{11}) + \frac{\partial}{\partial \beta_2}(H_2 H_1 a_{12}) + \frac{\partial}{\partial \beta_3}(H_1 H_2 a_{13}) + H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2} a_{12} + \right. \qquad (1.54)$$
$$\left. + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \beta_3} a_{32} - H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1} a_{22} - H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1} a_{33}\right].$$

Басқа сыңарларды индекстерді циклдік орын ауыстыру ережесі бойынша 1-2-3-1.... сұлбасын қолданып табамыз.

Басқаша айтқанда кезекті формуланы жазғанда 1 индексті 2 индекспен, 2 индексті 3 индекспен, ал 3 индексті 1 индекспен айырбастау керек. Осы ереже x_1, x_2, x_3 координаталарының толық тең праволығынан шығады.

Нәтижесінде екі сыңар үшін келесі формуланы аламыз:

$$\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\beta_2}(H_3H_1a_{22})+\frac{\partial}{\partial\beta_3}(H_1H_2a_{23})+\frac{\partial}{\partial\beta_1}(H_2H_3a_{21})+H_1\frac{\partial H_2}{\partial\beta_3}a_{23}+\right. \quad (1.55)$$
$$\left.+H_3\frac{\partial H_2}{\partial\beta_1}a_{21}-H_1\frac{\partial H_3}{\partial\beta_2}a_{33}-H_3\frac{\partial H_1}{\partial\beta_2}a_{11}\right].$$

және үшінші сыңар үшін мынаны аламыз:

$$\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\beta_3}(H_1H_2a_{33})+\frac{\partial}{\partial\beta_1}(H_2H_3a_{31})+\frac{\partial}{\partial\beta_2}(H_3H_1a_{32})+H_2\frac{\partial H_3}{\partial\beta_1}a_{31}+\right. \quad (1.56)$$
$$\left.+H_1\frac{\partial H_3}{\partial\beta_2}a_{32}-H_2\frac{\partial H_1}{\partial\beta_3}a_{11}-H_1\frac{\partial H_2}{\partial\beta_3}a_{22}\right].$$

Метрикалық тензор. Жалпы жағдайда ортогональды емес болатын қисық сызықты координаталарға $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ қайта назар аударайық. $M(\vec{x})$ және $M'(\vec{x}+d\vec{x})$ екі жақын нүктелерді алайық. $\vec{x}$ радиус векторының дифференциалы мынаған тең:

$$d\vec{x}=\frac{\partial\vec{x}}{\partial\beta_1}d\beta_1+\frac{\partial\vec{x}}{\partial\beta_2}d\beta_2+\frac{\partial\vec{x}}{\partial\beta_3}d\beta_3,$$

мұндағы $d\beta_i$ – М нүктесінен M' нүктесіне ауысқан кезде β_i координатасының қосымша өсірілуі.

$\partial\vec{x}/\partial\beta_i$ векторлары β_i координатты сызықтарға жанама бойынша бағытталып М нүктесінде жергілікті координат жүйесін құрады.

M және M' нүктелерінің арасындағы ара қашықтық квадраты мына формуламен анықталады:

$$dS^2=d\vec{x}d\vec{x}=(\frac{\partial\vec{x}}{\partial\beta_i}d\beta_i)(\frac{\partial\vec{x}}{\partial\beta_k}d\beta_k)=\frac{\partial\vec{x}}{\partial\beta_i}\frac{\partial\vec{x}}{\partial\beta_k}d\beta_id\beta_k=g_{ik}d\beta_id\beta_k, \quad (1.57)$$

мұндағы

$$g_{ik} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_i}\frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \beta_i}\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \beta_k} + \frac{\partial \vec{x}_2}{\partial \beta_i}\frac{\partial \vec{x}_2}{\partial \beta_k} + \frac{\partial \vec{x}_3}{\partial \beta_i}\frac{\partial \vec{x}_3}{\partial \beta_k} \qquad (1.58)$$

$-\{g_{ik}\}$ метрикалық тензордың сыңарлары.

Егер $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ қисық сызықты координат жүйесі ортогональды болса, онда метрикалық тензордың сыңарлары Лямэ коэффициенттерімен келесі қатынаспен байланысты болады:

$$g_{11} = H_1^2, g_{22} = H_2^2, g_{33} = H_3^2, g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0. \qquad (1.59)$$

Екінші валентті екі симметриялық тензорлар арасындағы функционалды байланыстың пішіні туралы. Кернеуді деформациямен немесе кернеуді деформация жылдамдығымен байланыстыратын тұтас ортаның анықтаушы теңдеулері координаттарды еркін өзгерткен кезде өзінің пішінін сақтау керек. Осы себептен $T_y = [y_{ik}]$ және $T_z = [z_{ik}]$ екі симметриялық тензорлардың мүмкін болатын функционалды байланыс пішінін жалпы түрде қарау орынды.

Сызықты анизатропты байланыс. Талдауды сызықтық байланыстың ең қарапайым жағдайынан бастайық, яғни

$$z_{ik} = c_{ikpq} y_{pq}. \qquad (1.60)$$

Кез келген декарттық тік бұрышты координиант жүйесінде осы теңдік орындалуы үшін, c_{ikpq} кейбір төрт валентті тензордың сыңарлары болып саналуы керек, яғни жаңа координат жүйесіне (сызықшалаған) өткен кезде мына заң бойынша түрленуі керек

$$c'_{ikpq} = \alpha_{im}\alpha_{kn}\alpha_{pr}\alpha_{qs}c_{mnrs}.$$

T_y және T_z тензорлары симметриялы болғандықтан бірінші және екінші қос көрсеткіштер бойынша симметрия шарттары орындалуы керек, яғни $c_{ikpq} = c_{kipq}$, $c_{ikpq} = c_{ikqp}$.

Нәтижесінде $\lfloor c_{ikpq} \rfloor$ тензорының тәуелді емес сыңарлар саны $3^4 = 81$-ден 36-ға дейін қысқартылуы керек.

Жалпы жағдайда T_y және T_z тензорларының басты ось бағыттары бойынша дәл келмейді. (1.60) түріндегі байланыс теңдеуі әдетте анизатропты орта жүріс-тұрысын бейнелеу үшін қолданылады. Анизатропты ортаның механикалық қасиеті әр түрлі бағытта әр түрлі болады (мысалы, шыны-пластик, ағаш, кристалл).

Сызықты изотропты байланыс. Енді (1.60) байланысы изотропты деп болжайық, яғни $\lfloor c_{ikpq} \rfloor$ тензоры кез келген декартты тік бұрышты координат жүйесінде бірдей сыңарларға ие болады деп есептейік. Осы сияқты тензорлармен біз бұрын кездескенбіз. Мысалы, екінші валентті бірлік тензор $I = \lfloor \delta_{ik} \rfloor$ изотропты тензор болады.

Изотропты болып келесі төртінші валентті тензорлар саналады: $\lfloor \delta_{ik}\delta_{pq} \rfloor$ және $\lfloor \delta_{ip}\delta_{kq} + \delta_{iq}\delta_{kp} \rfloor$.

Жалпы жағдайда төртінші валентті изотропты тензорды сызықты қиыстырылған мына екі тензорлар түрінде келтіруге болады:

$$c_{ikpq} = \lambda\delta_{ik}\delta_{pq} + \mu(\delta_{ip}\delta_{kq} + \delta_{iq}\delta_{kp}), \qquad (1.61)$$

мұндағы λ және μ – кейбір константтар.

Сөйтіп изотропты тәуелділік жағдайында c_{ikpq} тензорының тәуелді емес сыңарлар саны екіге дейін қысқарды.

(1.60) теңдеуіне қойғаннан кейін мынаны аламыз:

$$z_{ik} = \lambda\delta_{ik}\delta_{pq}y_{pq} + \mu(\delta_{ip}\delta_{kq} + \delta_{iq}\delta_{kp})y_{pq} = \lambda\delta_{ik}y_{pp} + \mu(y_{ik} + y_{ki}).$$

T_y тензоры симметриялық болғандықтан мына шарт орындалады: $y_{ik} = y_{ki}$. Соңында осыдан мынаны аламыз:

$$z_{ik} = \lambda\delta_{ik}y_{pp} + 2\mu y_{ik}. \qquad (1.62)$$

T_y және T_z тензорларын девиатор және шарлық тензорға бөлуді қолданайық. Бізде мынау бар:

$$T_y = D_y + y_0 J; \quad T_z = D_z + z_0 J,$$

мұндағы

$$y_0 = \frac{1}{3} y_{pp} = \frac{1}{3}(y_{11} + y_{22} + y_{33});$$

$$z_0 = \frac{1}{3} z_{pp} = \frac{1}{3}(z_{11} + z_{22} + z_{33});$$

$J = [\delta_{ik}]$ – бірлік тензор.

(1.62) теңдеуіне қою мынаны береді:

$$T_J = 3\lambda y_0 J + 2\mu T_y \qquad (1.63)$$

немесе $D_z + z_0 J = 3\lambda y_0 J + 2\mu(D_y + y_0 J)$.

Күрделі емес түрлендіруден кейін мынаған ие боламыз:

$$D_z + z_0 J = (3\lambda + 2\mu) y_0 J + 2\mu D_y. \qquad (1.64)$$

Осы теңдеудің сол және оң жағын δ_{ik} көбейтіп және i мен k индекстері бойынша қысқартып мынаны аламыз: $z_0 = (3\lambda + 2\mu) y_0$. Осыған байланысты (1.64) теңдеуіне қойып мынаны аламыз: $D_z = 2\mu D_y$.

Осы формулалардың біріншісі шарлық тензорларды, ал екіншісі девиаторларды байланыстырады. $(3\lambda + 2\mu)/3 = k$ белгілеуін енгізіп, осы теңдеулерді келесі түрде жазамыз:

$$z_0 = 3k y_0; \qquad (1.65)$$

$$D_z = 2\mu D_y. \qquad (1.66)$$

Әдетте (1.62) және (1.63) теңдеулерін механикалық қасиеті барлық бағытта изотропты ортаның жүріс-тұрысын бейнелегенде қолданады (мысалы, сұйықтар, газдар, аморфты күйдегі қатты денелер, поликристалды денелер). Осындайда T_y және T_z тензорларының осьтері дәл сәйкес келеді.

Сызықты емес изотропты байланыс. Енді $f_{ik}(z_{ik} = f_{ik}(y_{pq}))$ функциясының көмегімен берілген мына сызықты емес тензорлық тәуелділікті қарайық: $T_z = f(T_y)$. Осылар бір симметриялық тензордың T_y сыңарларына басқа симметриялық тензордың T_z сыңарларын сәйкес етіп қояды.

Осы байланыс изотропты болатындығын болжайық, яғни санау жүйесін таңдаудан тәуелді емес. Сонда жаңа e_i' координат жүйесіне өтіп мынаған ие боламыз: $z'_{ik} = f_{ik}(y'_{pq})$.

Егер f_{ik} функция мына түрде қабылдайтын болса:

$$f_{ik} = f\delta_{ik} + Aa_{ik} + Bb_{ik} + Cc_{ik} + ..., \qquad (1.67)$$

онда изотроптылық шарты қабылданатын болады. Осында f, A, B,C – скалярлар; δ_{ik} – бірлік тензор; $[a_{ik}],[b_{ik}],[c_{ik}]$ – T_y тензорының басты осіне ие болатын тензорлар.

Осы тензорларды мына түрде: $a_{ik} = y_{ik}; b_{ik} = y_{ip}y_{pk}$; $c_{ik} = y_{ip}y_{pk}y_{qk}$ және т.б. T_y тензорының көмегімен құрылымдауға мүмкіндік бар, яғни T_y тензорының дәрежесі болып саналады.

(1.67) байланысы T_y тензорының дәрежесі бойынша қатар түрінде былай жазуға болады:

$$T_z = a_0 J + a_1 T_y + a_2 T_y^2 + a_3 T_y^3 + ... \qquad (1.68)$$

Осындайда $a_0, a_1, a_2, a_3....$ скалярлары T_y және T_z тензорларының инвариантынан кейбір функциялар (немесе тым жалпы жағдайда функционалдар) болады.

Әрбір тензор үшін инварианттар жүйесінен тек үшеуі ғана тәуелді емес болатындығын жоғарыда көрсеттік. Осыған ұқсас (1.68) теңдеуін үшінші мүшеде үзіп тастауға болатындығын жеңіл көрсетуге болады. Расында да Гамильтон-Кэли теоремасынан мынау шығады:

$$T_y^3 = y^I T_y^2 - y^{II} T_y + y^{III} J, \qquad (1.69)$$

мұндағы y^I, y^{II}, y^{III} – T_y тензорының сызықтық, квадраттық және кубтық инварианттары.

Сірә, кез келген T_y тензорының тым жоғары дәрежесін тензордың өзі арқылы және оның екінші дәрежесімен сызықтық түрде көрсетеді. Сонымен бірге осы байланыстың коэффициенті инварианттар болып саналады.

1.7–есеп. Гамильтон-Кэли теормасын қолдану.

T_y тензорының төртінші дәрежесін T_y^2, T_y және J тензорларының сызықтық қиыстырулары түрінде көрсетіңіздер.

Шешуі. (1.69) теңдеуінің екі жағында T_y тензорына көбейтейік. Осы мынаны береді:

$$T_y^4 = y^I T_y^3 - y^{II} T_y^2 + y^{III} T_y .$$

T_y^3 тензорын T_y^2, T_y және J арқылы білдіру үшін (1.69) теңдеуін пайдаланып қалайық. Нәтижесінде мынаны аламыз:

$$T_y^4 = y^I (y^I T_y^2 - y^{II} T_y + y^{III} J) - y^{II} T_y^2 + y^{III} T_y =$$

$$[-y^{II} + (y^I)^2] T_y^2 + (y^{III} - y^I y^{II}) T_y + y^I y^{III} J.$$

Сонымен екі симметриялық тензорлардың изотропты байланысының тым жалпы түрі мынадай болады:

$$T_z = a_0 J + a_1 T_y + a_2 T_y^2 ,$$

мұндағы a_0, a_1, a_2 – T_y және T_z тензорлар инварианттарының базалық жүйесінің кейбір функциясы (тым жалпы жағдайда функционалдары).

a_2 коэффициенті нөлге тең болатын мына квазисызықтық байланыстың жеке жағдайына тоқтайық:

$$T_z = a_0 J + a_1 T_y .$$

$a_0 = 3\lambda y_0$ және $a_1 = 2\mu$ белгілеулерін енгізіп (1.64) формуласынан мынадай теңдеуді аламыз:

$$z_0 = (3\lambda + 2\mu)y_0; D_z = 2\mu D_y .$$

$(3\lambda + 2\mu)/3 = k$ белгілеуін енгізіп осы теңдеулерді тым тығыз ғып былай жазуға болады:

$$z_0 = 3ky_0 ; \qquad (1.72)$$

$$D_z = 2\mu D_y . \qquad (1.73)$$

Осы теңдеулердің біріншісі шарлық тензорды, ал екіншісі девиаторды байланыстырады. (1.65) және (1.66) сызықтық байланыстарына қарағанда мұндағы λ және μ параметрлері T_y және T_z тензорларының немесе олардың D_y және D_z девиаторлары инвариаттарының кейбір функциясы болады.

μ параметрін анықтайық. D_y және D_z девиаторларының квадратты инварианттарын сәйкесті α^{II} және β^{II} деп белгілейік.

(1.73) теңдеуінен мынаған ие боламыз: $\beta^{II} = 4\mu^2\alpha^{II}$. Осыдан мынаны табуға болады:

$$2\mu = \sqrt{\frac{\beta^{II}}{\alpha^{II}}} . \qquad (1.74)$$

Нәтижесінде (1.73) теңдеуі мына түрді қабылдайды:

$$D_z = \sqrt{\frac{\beta^{II}}{\alpha^{II}}} D_y .$$

Тұтас ортада жүретін процестерді зерттеген кезде бір ғана материалды нүктеге қатысты және уақыт бойынша өзгеретін екі тензорлар арасындағы байланысты табуға тура келеді.

Басқа T_z тензорының өзгеру процесін бір қатарлы анықтайтын T_y симметриялық тензорының уақыт бойынша өзгеру процесі $T_y = T_y(\tau)$ $\mathrm{t} \le \tau \prec \mathrm{t}$ бізге берілсін. А. А. Ильюшин еңбектерін қолданып T_z тензорының t уақытысындағы мәнін $T_y(\tau)$ процесінің функционалы деп атаймыз және келесі түрде жазамыз: $T_z(t) = T_z[T_y(\tau)]_{t_0}^{t}$.

Тензорды векторлық көрсету. Материалды бөлшек M-ның кейбір айналасындағы физикалық күйді (мысалы, кернеу немесе деформацияны) сипаттайтын T_A тензорының уақыт бойынша өзгеру процесін қарайық. Айтылған өзгеру процесін қарағанда T_A тензорының барлық сыңарлары тоғыз уақыт функциясы $a_{ik} = a_{ik}(t)$ түрінде берілген деп жорамалдайық.

Тоғыз өлшемді эвклидовалық кеңістікте қозғалмайтын (t уақытысынан тәуелді емес) тоғыз өлшемді ортогональды базис $\vec{e}_m (m = 1,2,...9)$-ді салайық. Осы кеңістікте $\vec{y}$ және $\vec{z}$ екі векторы мына түрге келтірілген: $\vec{y} = y_m \vec{e}_m; \vec{z} = z_m \vec{e}_m$ (m = 1,2,...9) және әдеттегі түрде қосу және көбейтумен (скалярлық көбейтінді) былай анықталсын:

$$\vec{y} + \vec{z} = (y_m + z_m)\vec{e}_m; \vec{y}\vec{z} = \vec{z}\vec{y} = y_m z_m, \vec{e}_m \vec{e}_n = \delta_{mn}.$$

T_A тензорына сәйкесті $\vec{a}$ векторын сыңарларымен қойып, мынаны аламыз:

$$a_1 = a_{11}; a_2 = a_{22}; a_3 = a_{33}; a_4 = a_{12}; a_5 = a_{21}; ...; a_8 = a_{31}; a_9 = a_{13},$$

Сонда былай жазуға болады: $\vec{a} = a_m \vec{e}_m$.

$\vec{a}$ векторы модулінің квадраты T_A тензорының A_2 симметриялық инвариантымен мынадай байланыспен байланысқан:

$$a^2 = a_m a_m = a_{ik} a_{ik} = 2A_2 \quad \begin{pmatrix} m = 1,2,..,9 \\ i,k = 1,2,3 \end{pmatrix}.$$

Сірә, уақыт t бойынша $\vec{a}$ векторының сыңарларымен дифференциалдаудың немесе интегралдаудың кейбір сызықтық операцияларын орындай отырып, біз сол операцияларды $[a_{ik}]$ тензорының сыңарларымен орындайтын боламыз және керісінше тензор сыңарларымен орындалатын сызықтық операцияларға $\vec{a}$ векторының сыңарларымен орындалатын сол операциялар сәйкес келеді. Осы, T_A тензорының өзгеру процесіне көрнекі геометриялық түсіндіруді беруге мүкіндік

береді. Өйткені T_A тензорының өзгеруін вектордың уақыт бойынша былай өзгерумен көрсетуге болады:

$$\vec{a}(t) = a_m \vec{e}_m (m = 1,2,...,9).$$

$\vec{a}$ векторының аяқ жағы E_9 кеңістігінде кейбір тоғыз өлшемді қисық сызықты, яғни $\vec{a}(t)$ векторының траекториясын бейнелейді.

Вектордың көмегімен тензорды осылай көрсету көптеген жағынан көрнекті болғанымен шектелген жағы да бар болатындығын айтып ескерту керек. Алдыменен вектор инварианты емес. Өйткені үш өлшемді физикалық кеңістіктегі басқа координат осьтеріне T_A тензорын жатқызған кезде, оған басқа $\vec{a}'$ векторы сәйкес келеді. Бірақта $\vec{a}$ векторларының ұзындықтары бірдей болады, өйткені вектор ұзындығының квадраты T_A тензорының инварианты болып саналады. Тағы да айтатынымыз, ол вектор ұзындығы тензордың бір ғана инварианты болуы, ал осы кезде сол тензорда үш базалық инвариант бар болатындығы. Сөйтіп тензорды көп өлшемді вектор түрінде көрсетіп зерттесек, онда зерттеу мүмкіншілігі тарылады. Симметриялық тензордың уақыт бойынша өзгеруін зерттеген кезде, оны девиатор және шар тензоры қосындысы етіп бөлу едәуір ыңғайлы. Осындайда девиаторды бес өлшемді вектор түрінде көрсетеді. Көптеген процестерде тензордың үшінші инвариантының әсері елеулі болмайды. Сондықтан уақыт бойынша бірінші инварианттың және девиаторды көрсететін вектордың скалярлық функциясының өзгеруі процесті толық бейнелеуге мүмкіндік береді.

Девиаторды векторлық көрсету. T_A симметриялық тензорын девиатор және шарлық тензор қосындысы түрінде былай көрсетейік:

$$[a_{ik}(t)] = [b_{ik}(t)] + a_0[\delta_{ik}],$$

мұндағы $a_0 = \frac{1}{3}(a_{11} + a_{22} + a_{33})$; δ_{ik} – Кронекер символы.

Девиаторлар сыңарлары $b_{11}+b_{22}+b_{33}=0$ шартымен байланысты болғандықтан бес тәуелді емес $b_m(t)$ $(\mathrm{m}=1,2,...,5)$ функцияларын енгізген қолайлы. Енгізген кезде түрлендіру өзара бір мағыналы, сызықты және девиатордың b^{II} екінші инварианты төмендегідей b_m функциясының квадрат қосындысына тең болуы қажет:

$$b^{II}=\frac{1}{2}b_{ik}b_{ik}=b_m b_m \quad (\mathrm{m}=1,2,..,5). \tag{1.77}$$

Осы шарттарды келесі формулалар қанағаттандырады:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= b_{11}\cos(\beta+\frac{\pi}{6})-b_{22}\sin\beta);\\ b_2 &= b_{11}\sin(\beta+\frac{\pi}{6})-b_{22}\cos\beta);\\ b_3 &= b_{12}, b_4=b_{23}, b_5=b_{31}, \end{aligned}\right\} \tag{1.78}$$

мұндағы β – уақыттан тәуелді емес кез келген нақты сандар. Екі немесе бірнеше девиаторларды бір мезгілде қарағанда кезде осы девиаторлардың әрбіреуіне β бірдей екендігін жорамалдайтын боламыз.

Бес өлшемді E_5 евклидов кеңістігінің уақыттан тәуелді емес бес өлшемді $e_m(m=1,2,..,5)$ ортогональды базисін салып T_A тензорының өзгеру процесін $a_0(t)$ функциясымен бірге вектордың уақыт бойынша өзгеруімен былай көрсетейік:

$$\vec{b}=b(t)\vec{e}_m \quad (\mathrm{m}=1,2,..,5). \tag{1.79}$$

Сонымен $a_{ik}=a_{ik}(t)$ процесі E_5 кеңістігінде $\vec{b}(t)$ векторының траекториясын уақыт бойынша берілуі және траекторияның әрбір нүктесінде $a_0(t)$ бірінші инвариантының берілуімен анықталады.

Сыңарлары T_A тензорының сыңарларынан уақыт t бойынша туындылар болып саналатын мына тензорды қарайық:

$$\dot{T}_A = [\dot{a}_{ik}(t)] = \left[\frac{da_{ik}(t)}{dt}\right].$$

Әдеттегідей $\dot{T}_A$ тензорын девиатор және шарлық тензор қосындылары түрінде былай көрсетуге болады:

$$[a_{ik}(t)] = [b_{ik}(t)] + \dot{a}_0(t)[\delta_{ik}],$$

мұндағы $\dot{b}_{ik} = db_{ik}/dt; \dot{a}_0(t) = da_0(t)/dt.$

dt уақыты ішінде $\vec{b}(t)$ векторы – вектор траекториясының жанамасымен бағытталған мына қосымша өсірілуді алады:

$$d\vec{b} = db_m \vec{a}_m \quad (\mathrm{m} = 1,2,..,5).$$

Осы мөлшердің модулі $d\Lambda$ траекториясының доға ұзындығының дифференциалы деп аталады. Сірә, мыналар дұрыс болады:

$$\left|d\vec{b}\right| = d\Lambda = \sqrt{db_m db_m} \quad (\mathrm{m} = 1,2,...,5) \text{ және}$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \sqrt{\frac{db_m}{dt}\frac{db_m}{dt}} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{db_{ik}}{dt}\frac{db_{ik}}{dt}} = \sqrt{\frac{1}{2}\dot{b}_{ik}\dot{b}_{ik}} = \dot{B}. \qquad (1.80)$$

Осыларды интегралдап мынаны аламыз:

$$\Lambda = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{db_m}{dt}\frac{db_m}{dt}}\,dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{1}{2}\dot{b}_{ik}\dot{b}_{ik}}\,dt = \int_{t_0}^{t} \dot{B}dt\,. \qquad (1.81)$$

1.5. Тензорлық мөлшерлерді зерттеу тәсілдері

Жалпы жағдайда тензорлық өріс материалдық көлемде (кеңістікте) нүктеден нүктеге және тағы да уақыт бойынша былай өзгеруі мүмкін.

$$T_A = T_A(x_i, t)\,, \qquad (1.82)$$

мұндағы x_i – орта нүктесінің немесе кеңістік нүктесінің координатасы; t – уақыт.

Осындай тензорлық өріс стационарлы емес деп аталады. Стационарлы тензорлық өріс уақыттан тәуелді емес, яғни

$$T_A = T_A(x_i)\,. \tag{1.83}$$

Тензорлық мөлшерлердің координата бойынша үздіксіз өзгеруі Гамильтонның «набла» операторының көмегімен тензордың координата бойынша жеке туындылары түсінігін енгізуге мүмкіндік береді, яғни

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i\,. \tag{1.84}$$

Гамильтон операторын тензорға формалды көбейткен кезде оның рангісі бір ретке жоғарылайды. Мысалы «наблды» нөлдік рангісі бар тензорға формалды көбейткен кезде бірінші рангті тензорды немесе осы нүктедегі скалярлық өрістің градиентін аламыз, яғни

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\vec{e}_i = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\| = grad\varphi\,, \tag{1.85}$$

ал «наблды» бірінші рангті тензорға формалды көбейткен кезде екінші рангті тензор немесе вектор градиентін аламыз, яғни

$$\nabla\vec{a} = \frac{\partial a}{\partial x_i}\vec{e}_i = \left\|\frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right\| = grad\vec{a}\,. \tag{1.86}$$

Жалпы айтқанда «наблды» тензорға формалды көбейтуге берілген нүктедегі тензордың градиенті немесе тензорлық өрістің градиенті деп аталатын оператор сәйкес келеді.

Гамильтон операторын рангі нөлден жоғары тензорға скалярлы көбейтуге болады. Осы кезде тензордың рангі бір ретке азаяды. Мысалы, «наблды» бірінші рангті тензорға скалярлы көбейткен кезде нөлдік рангі бар тензорды немесе вектордың дивергенциясын былай аламыз:

$$\nabla\cdot\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i a_k\vec{e}_k = \frac{\partial a}{\partial x_i} = div\vec{a}\,. \tag{1.87}$$

«Наблды» екінші рангті тензорға скалярлы көбейткен кезде бірінші рангті тензорды немесе екінші рангті тензордың дивергенциясын аламыз, яғни

$$\nabla \cdot T_A = \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \right\| \cdot \left\| a_{ik} \right\| = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} \vec{e}_i = \left\| \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} \right\| = div T_A . \quad (1.88)$$

Жалпы айтқанда «наблдың» рангісі нөлден жоғары тензорға скалярлық көбейтіндісіне тензордың дифергенциясы деп аталатын оператор сәйкес келеді.

«Набл» операторы бірінші рангті тензор болып саналады. Сондықтан оны бірінші рангті тензорға тензорлық көбейтуге болады. Осындай да тензор өзгермейді, ал осындай көбейтуге сәйкес келетін оператор ротор немесе вектор құйыны «вихр» деп аталады, яғни

$$\nabla \times T_A = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \times a_k \vec{e}_k = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial & \partial & \partial \\ \partial x_1 & \partial x_2 & \partial x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \left\| \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right\| = rot\vec{a} \cdot \quad (1.89)$$

Гамильтон операторын жалпы қорытындысы болып “n”, “набл” операторларының формальды көбейтіндісімен алынатын “n” рангілі тензорлы оператор ∇^n саналады. Осы операторды тензорға формальды көбейту тензор рангісін “n” көбейтеді. Осындай көбейту «градиент» тензор операторына n реттік әсер етуге эквивалентті. “n” рангісі бар тензорлы операторды рангісі “n – 1” жоғары болатын тензорға скалярлы көбейтуге болады. Осындай операторды “n” рангілі тензорға тензорлық көбейту (бірінші рангті тензорлар үшін векторлық) тензор рангісін өзгертпейді. Мысалы, екінші рангті тензорлық операторларды скалярға формальды көбейту екінші рангті тензорға алып келеді, яғни

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \nabla \varphi = gradgrad\varphi = \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\|. \quad (1.90)$$

Осы операторды векторға формальды көбейту мына үшінші рангті тензорға алып келеді:

$$\nabla^2 \vec{a} = \nabla\nabla\vec{a} = grad\,gra\,d\,\vec{a} = \left\| \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_k \partial x_j} \right\|. \qquad (1.91)$$

Осындай операторларды екінші рангті тензорға скалярлық көбейту мына екінші рангті тензорға алып келеді:

$$\nabla^2 \cdot \mathrm{T_A} = \nabla \cdot \nabla \cdot \mathrm{T_A} = grad \cdot div\mathrm{T_A} = \left\| \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} \right\|. \qquad (1.92)$$

Екінші рангті тензорлық операторды осындай рангісі бар тензорға тензорлық көбейту тензор рангісін өзгертпейді, яғни

$$\nabla^2 \times \mathrm{T_A} = \left\| \varepsilon_{ijm}\varepsilon_{kpl} \frac{\partial^2 a_{ml}}{\partial x_j \partial x_p} \right\| = rot\mathrm{T_A}. \qquad (1.93)$$

∇^n тензорлық операторларды енгізу және оның тензорларға әр түрлі көбейту түрлерін қолдану әр түрлі көбейтудін араласқан үйлесімдерін қарауға мүмкіндік береді.

Сөйтіп, екі Гамильтон операторларын скалярлы көбейтіп мына Лаплас операторын аламыз:

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\vec{e}_k = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} = \nabla^2 = \Delta. \qquad (1.94)$$

Лаплас операторы формальды және скалярлы көбейтулерде қолданылуы мүмкін. Мысалы Лаплас операторын тензорға формальды көбейту оның рангісін өзгертпейді, яғни

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \cdot \partial x_i} = divgrad\varphi = \Delta\varphi; \qquad (1.95)$$

$$\nabla \cdot \nabla\vec{a} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_i \partial x_k}\vec{e}_k = divgrad\vec{a} = \Delta\vec{a}. \qquad (1.96)$$

Лаплас операторын біріншіден жоғары рангісі бар тензорға скалярлы көбейту оның рангісін екі ретке азайтады, яғни

$$\nabla \cdot \nabla \cdot \mathrm{T_A} = div \cdot div\mathrm{T_A} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} = \Delta \cdot \mathrm{T_A}. \qquad (1.97)$$

Екі скалярлық “набл” операторлары көбейтіндісін формальды көбейтіп, мына бигармониялық оператор деп аталатын қос Лаплас операторын аламыз:

$$\nabla \cdot \nabla\nabla \cdot \nabla = \Delta \cdot \Delta = \Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_i \partial x_k \partial x_k}. \qquad (1.98)$$

Мысалы, бигармониялық операторды бірінші рангті тензорға формальды көбейткен кезде мынаны аламыз:

$$\nabla \cdot \nabla\nabla \cdot \nabla\varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_i \partial x_i \partial x_k \partial x_k} = divgraddivgrad\varphi = \Delta\Delta\varphi = \Delta^2\varphi. \qquad (1.99)$$

Тензорлық функцияны Лаплас операторына формальды көбейткен кезде осы тензорлық функция нөлге айналатын болса, мысалы, мына шартты қанағаттандыратын φ және $\vec{a}$ функциялары: $\Delta\varphi = 0$; $\Delta\vec{a} = 0$, онда олар гармониялық функциялар деп аталады.

Тензорлық функцияны бигармониялы операторға формальды көбейткен кезде, осы тензорлық функциялар нөлге айналатын болса, мысалы $\Delta^2\varphi = 0$, онда олар бигармониялық функциялар деп аталады.

Тензорлық мөлшерлердің координата бойынша үздіксіз өзгеруі, осы мөлшерлерді интегралдауға мүмкіндік береді.

Тұйық кеңістіктің с сызығы бойынша $\vec{a}$ векторынан нүктеге жиналатын қисық сызық интегралын, осы сызық бойынша $\vec{a}$ векторының айналып жүруі деп атайды, яғни

$$\oint_c \vec{a} \cdot d\vec{x} = \oint_c a_i dx_i, \qquad (1.100)$$

мұндағы $d\vec{x}$ – қисық сызықтың М нүктесінде жанамамен сәйкес келетін элементарлы вектор. Осы вектордың координатты оське проекциясы dx_i тең.

Айналып жүру Стокс теоремасына сәйкесті тұйық кеңістік сызығы бойынша алынған қисық сызықты интегралды (1.100)

тұйық кеңістік сызығы с-ға жататын S беті бойынша интеграл түрінде былай көрсетуге болады:

$$\oint_c \vec{a} \cdot d\vec{x} = \iint_S \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{a}) dS = \iint_S \vec{n} rot\vec{a} dS \,, \qquad (1.101)$$

мұндағы $\vec{n}$ – S-тің оң жағындағы бірлік нормаль;

dS – бет элементі.

(1.101) формуласын скалярлық жазу мына түрді береді:

$$\oint_{\tilde{n}} a_i dx_i = \iint_S l_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} dS. \qquad (1.102)$$

Тұйық нұсқа бойынша $\vec{a}$ векторының айналып жүруінің жоқ болуы φ скалярлы функциясының керекті және жеткілікті мынадай шартының бар болуын білдіреді:

$$grad\varphi = \vec{a}. \qquad (1.103)$$

Егер төмендегі теңдікті тексерсе, онда осыған оңай көз жеткізуге болады:

$$\nabla x \nabla \varphi = 0 \,.$$

$rot\vec{a} = 0$ теңдігі үшін $\vec{a} = \vec{a}(x_i, t)$ векторлық өрісі потенциалды деп аталады, ал оның керекті және бар болатын $\varphi(x_i, t)$ скалярлық функциясы векторлық өрістің потенциалы деп аталады.

Өрістердің потенциалдығы түсінігін екінші рангті тензор үшін жинақтап қорытып (негізінде жинақтап қорытуды жалғастыруға болады) потенциалды тензорлық өріс $\mathrm{T_A}$ деп мынадай шарт орындалатын: $rot\mathrm{T_A} = \|0\|$ өрісті айтатындығын ескертеміз. Ал тағы да екінші рангті тензордың потенциалы деп аталатын $\vec{a} = \vec{a}(x_i, t)$ векторлық функциясы бар болатындығын ескертеміз, яғни

$$grad\vec{a} = \mathrm{T_A}. \qquad (1.104)$$

$rot\mathrm{T_A} = \|0\|$ теңдігінің сол жағы (1.93) формуласы бойынша есептеледі, ал (1.104) формуласының сол жағы (1.86) формуласы бойынша есептеледі.

$\vec{a}$ векторының скалярлық көбейтіндісінен және бетке $\vec{n}$ бірлік нормалынан S беті бойынша интегралды S беті арқылы $\vec{a}$ векторының тасқыны деп атайды, яғни

$$\iint_S \vec{n} \cdot \vec{a} dS = \iint_S l_i a_i dS \cdot \tag{1.105}$$

Нормалы $\vec{n}$ бар болатын тұйық бет арқылы вектордың тасқыны туралы Гаусс – Остроградский теоремасына сәйкесті тұйық бет бойынша интегралды, осы бетпен шектелген көлем бойынша интеграл түрінде былай көрсетуге болады:

$$\oint_S \vec{n} \cdot \vec{a} dS = \iiint_W \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dW = \iiint_W div \vec{a} dW . \tag{1.106}$$

Гаусс-Остроградский теоремасын жинақтап қорыту кез келген ранглі тензорлар өрісіне, соның ішінде екінші рангті тензор өрісіне әділ болады, яғни

$$\iint_S \vec{n} \mathrm{T_A} dS = \iiint_W \left\| \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} \right\| dW = \iiint_W div \mathrm{T_A} dW . \tag{1.107}$$

Егер S беті арқылы өтетін тензордың жиынтық тасқыны нөлге тең болса, онда тензорлық өріс S беті бар W көлемінде селеноидальды деп аталады. Еркін көлемі бойынша интегралдау тензорлар үшін селеноидальдылық шартын мына түрде жазуға мүмкіндік береді:

$$div \mathrm{T_A} = \|0\| . \tag{1.108}$$

$\mathrm{T_A} = \mathrm{T_A}(x_i, t)$ тензорлық өрістерінің координата және уақыт бойынша үздіксіз өзгеруі тензордың координата және уақыт бойынша толық туындысы туралы түсінікті енгізуге мүмкіндік береді. Уақыт t-ны төрт өлшемді базистің x_i төртінші координатасы ретінде қарап мынаны жазуға болады:

$$\frac{\partial \mathrm{T_A}}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathrm{T_A}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} (i, k = 1,2,3,4), \tag{1.109}$$

мұндағы $x_4 = t$.

Уақыт тәуелді емес координата болып саналатындықтан былай жазу дұрыс болады: $\frac{\partial x_4}{\partial x_k} = \frac{\partial t}{\partial x_k} = \delta_{ik}$. Қалған координаттар үш өлшемді базисті құрайды. Сондықтан олар бір-бірімен сызықты тәуелді емес болады, яғни $\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = 0 (i, k = 1,2,3)$. Бірақта олар уақыттан тәуелді болуы мүмкін, яғни $\frac{\partial x_i}{\partial x_4} = \frac{\partial x_i}{\partial t} \neq 0$.

Төрт өлшемді базистердің сызықты тәуелді емес жағдайларында мынаны жазуға болады:

$$\frac{\partial \mathrm{T_A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{T_A}}{\partial t}. \qquad (1.110)$$

Егер үш өлшемді базис төртінші координатадан ($x_4 = t$) сызықты тәуелді емес болса, онда (1.109) формуласынан мынаны аламыз:

$$\frac{\partial \mathrm{T_A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{T_A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{T_A}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}. \qquad (1.111)$$

Егер $\mathrm{T_A}$ тензоры S беті бар W көлемінде интегралды түрде берілсе, яғни

$$\mathrm{T_A} = \iiint\limits_W \mathrm{T}_c dW,$$

онда уақыттан тәуелді үш өлшемді базисте мынау дұрыс болады:

$$\frac{\partial \mathrm{T_A}}{\partial t} = \iiint\limits_W \frac{\partial \mathrm{T}_c}{\partial t} dW + \iint\limits_S \frac{\partial \mathrm{T}_c}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} dS, \qquad (1.112)$$

ал төрт өлшемді сызықты тәуелді емес базисте мынаны жазуға болады:

$$\frac{\partial \mathrm{T_A}}{\partial t} = \iiint\limits_W \frac{\partial \mathrm{T}_c}{\partial t} dW. \qquad (1.113)$$

Бақылау сұрақтары.

1. Қандай қасиеттерге бағыттаушы косинустар кестесі ие болады?
2. Скалярды нөлдік валентті тензор ретінде анықтауға бола ма?
3. Үшінші валентті тензордың анықтамасы қандай?
4. Немен екінші валентті тензор үшінші ретті квадратты матрицадан айырмашылықта болады?
5. Тензорлармен орындалатын қандай операцияларды сіздер білесіздер?
6. Девиатордың диагональдық элементтерінің қосындысы неге тең?
7. Тензордың басты бағыты деп қандай бағыт аталады?
8. Қандай сан тензордың меншікті мәні деп аталады?
9. Қандай тензорлар үшін ылғи да үш заттық меншікті мәндер бар болады?
10. a^I, a^{II}, a^{III} мәндері неліктен инварианттар деп аталады?
11. Девитордың сызықтық инварианты неге тең?
12. Тензорлық өріс деп нені айтады?
13. Шарлық тензордың дивергенциясы неге тең?

2. КЕРНЕУ ЖӘНЕ КЕРНЕУ КҮЙІ

2.1. Нүктедегі кернеу күйі

Металдарды қысыммен өңдеу процестері – дененің өлшемі мен пішінін өзгертуге, яғни сыртқы күштің әсерінен деформацияның пайда болуына негізделген. Сыртқы күштер беттік (баспақ күші, тоқпақ саққысы, т.б) және көлем элементіне түсірілген көлемдік (массалық) болуы мүмкін.

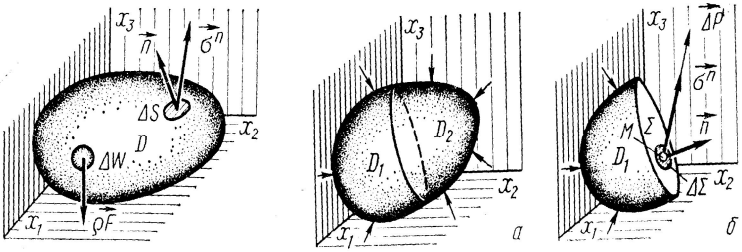
Осы күштердің негізгі ерекшеліктеріне олардың дене көлемінде немесе бетінде үздіксіз таралуын жатқызу қажет.

Тығыздық. S бетімен шектелген кейбір D денесі берілсін (2.1*а*-сурет). Берілген дененің ішінен өз еркімізбен бір M нүктесін алайық. Осы нүктенің айналасынан ΔW элементарлы көлемін бөлейік. Көлемнің массасы Δm болсын.

$\Delta m/\Delta W$ қатынасын құрастырайықта элементарлы көлемнің өлшемдерін нөлге қарай ұмтылдырайық. Мына мөлшерді:

$$\rho(M) = \lim_{\Delta W \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta W} \qquad (2.1)$$

M нүктесіндегі орта тығыздығы деп атайды.



2.1-сурет. Беттік, сыртқы массалық күштер және ішкі кернеулер
а – беттік, сыртқы массалық күштер; б – ішкі кернеулер

Массалық сыртқы күш. Бөлінген элементке әсер ететін сыртқы күштің бас векторы $\Delta\vec{\Phi}$ -ға тең болсын.

$\Delta\vec{\Phi}/\Delta m$ қатынасын құрастырайықта және мына шекті есептейік:

$$\vec{F} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta m} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta W \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta W}. \qquad (2.2)$$

Шектікке өтудің нәтижесінде алынған векторлық мөлшер сыртқы массалық күш деп аталады.

Беттік сыртқы күш. Сыртқы күштер белсенді күштер болып саналады. Өйткені денені өңдеу процесінде осы күштер денеге түсіріледі. Белсенді күштердің әсер етуі ылғи да реактивті күштердің пайда болуын шақырады. Реактивті күштерге, мысалы металдарды қысыммен өңдеу процестерінде маңызды рөлді атқаратын, үйкеліс күші жатады.

Сыртқы нормалы $\vec{n}$ болатын ΔS беттік элементті бөлейік. Осы элементке күштер әсер етеді. Осы күштердің басты векторы $\Delta\vec{P}$ -ға тең болады. Элемент өлшемдерін нөлге ұмтылдырайық. Коши кернеуі принципіне сәйкесті бет элементі M нүктесіне жиналған кезде $\Delta\vec{P}/\Delta S$ қатынасы $\vec{\sigma}^n$ шегіне ұмтылады, яғни

$$\vec{\sigma}^n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta S}. \qquad (2.3)$$

Осы мезгілде *M* нүктесіне қатысты басты момент $\Delta M/\Delta S$ нөлге ұмтылады. Нәтижелеуші $\vec{\sigma}^n$ векторын (аудан бірлігіне қатысты күш) $\vec{n}$ нормалы бар аудандағы *M* нүктесіне әсер етуші беттік кернеудің векторы деп атайды.

Ішкі кернеулер. Деформациялаған кезде атом арасындағы ара қашықтық өзгереді. Демек атомдар арасындағы тепе-теңдікті бұзуға алып келетін атомдардың әрекеттесу күші өзгереді. Нәтижесінде сыртқы күш қарсы әрекетке кездеседі. Осы ұқсастығына қарай ішкі күштер деп аталған. Егер дене тепе -теңдікте болатын болса, онда сыртқы және ішкі күштер теңестірілген болады.

Бастапқы кезде қаралған D денесіне қайта оралайық және оны $\sum$ бетімен ойымызда D_1 және D_2 екі бөлімдеріне кесіп өтейік (2.1 *а*-сурет).

Дененің D_2 бөлігін алып тастайық. Қалған D_1 бөлігі тепе-теңдікте болуы үшін бөлінген жердің бетіне Σ кейбір күш жүйесі әсер етуі қажет. Осы күш жүйесін жоғарыда ішкі күш деп атадық.

Бөлінген Σ бетінен M нүктесін алайық және осы нүктенің айналасынан элементарлы $\Delta\Sigma$ бетін бөлейік. Осы элементарлы беттің нормалы $\vec{n}$ болсын (2.1 *б*-сурет).

Сыртқы нормаль жақтан $\Delta\Sigma$ бетіне түсірілінетін күштің бас векторы $\Delta\vec{\mathrm{P}}$-ға тең болсын.

Жоғарыда айтылған пікірді қайталап шектікке өтумен ішкі кернеу векторын былай аламыз:

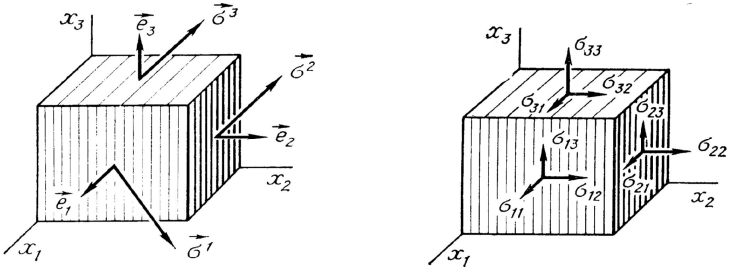
$$\vec{\sigma}^{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathrm{P}}}{\Delta\Sigma}. \qquad (2.4)$$

Осы кернеу $\vec{n}$ сыртқы нормалы бар бағытты алаңға әсер етеді. Мұндағы ерекше маңыздылық болып Σ бетінің, демек $\vec{n}$-нің еркін бағытталуы саналады.

Қаралатын нүкте арқылы көптеген беттерді жүргізіп, осы беттердің әрбіреуінде $\Delta\Sigma$ алаңшасын бөліп және осы бөлінген алаңдарға сәйкесті кернеулерді анықтауға болады.

Сонымен тұтас орта механикасында таралған күш қаралады, ал таралған күштің үдемелі қарқындылығы кернеу деп аталады.

Жоғарыда айтқанмен байланысты M нүктесі арқылы өтетін және $\vec{e}_i$ ортасына нормалды алаңдарды таңдайық. Осындай алаңдар ретінде элементарлы кубтың қабырғаларын қолданған ыңғайлы. Көрсетілген нүктенің айналасында салынған осы элементарлы кубтың қырлары x_i координатты осьтеріне параллельді болуы қажет (2.2-сурет).



2.2–сурет. Элементарлы кубтың қабырғасындағы кернеулер
а – кернеу векторының әсері; б – кернеудің нормальды және жанама сыңарлары

$\vec{e}_1$ ортасына перпендикулярлы алаңда $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ сыңарлары бар $\vec{\sigma}^1$ кернеу векторы әсер етеді, яғни $\vec{\sigma}^1 = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$. Осыған ұқсас басқа екі алаңда мынадай кернеу векторлары әсер етеді: $\vec{\sigma}^2 = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})$ және $\vec{\sigma}^3 = (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})$ (1, 2, 3 – σ мөлшерінің дәрежесі емес, олар осы мөлшердің көрсеткіші).

Матрицаны құрастырайық

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

және осы матрица сыңарларының физикалық мағынасын қарап талқылайық.

Матрицаның қиғаш сызықтағы элементтері $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ кернеудің нормальды сыңарлары деп аталады. Өйткені осы кернеулер кернеу векторының алаң нормальдарына проекциясы болып саналады (2.2-сурет).

Матрицаның бүйірдегі элементтері σ_{12}, σ_{13}, σ_{23}, σ_{21}, σ_{32}, σ_{31} кернеудің жанама сыңарлары деп аталады (2.2-сурет).

Кернеу сыңарларының таңбасы ережесін талқылайық. Егер нормальды кернеу денені созатын болса, онда оның таңбасы оң болады (осындай жағдайда кернеу қаралатын дененің бөлімінде жататын аланның сыртқы нормалы бойынша бағытталған). Егер нормальды кернеу денені қысатын болса, онда оның таңбасы теріс болады (соңғы жағдайда кернеу дененің берілген бөлімі үшін ішкі нормальмен бағытталған).

Егер алаңдағы сыртқы нормаль координатты осьтің бағытымен бағыттас болса, онда жанама кернеудің оң бағыты деп лайықты координаттық осьтің оң бағыты қабылданады. Егер алаңдағы сыртқы нормаль кооординатты осьтің бағытына қарама-қарсы болса, онда осы алаңдағы жанама кернеудің оң бағыты деп лайықты координатты осьтің теріс бағыты қабылданады.

Кернеуді белгілеу үшін қабылданғанмен қатар басқа белгілеу жүйесі қолданылуы мүмкін (2.1-кесте).

Сірә, I және II жолда келтірілген белгілеулер арасында елеулі айырмашылық жоқ. II жүйеге ауысу координаталарды дәстүрлі жазуға ($x \equiv x_1, y \equiv x_2, z \equiv x_3$) қайтуды талап етеді. Осы кезде сандық көрсеткіштер әріптік көрсеткішпен ауыстырылынады. Бірақта мұндай жағдайда қайталанатын әріптік көрсеткіштер бойынша қосу ережесінен бас тартуға тура келеді.

2.1-кесте

Кернеуді белгілеу жүйелері

I	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}	σ_{12}	σ_{23}	σ_{31}
II	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}	σ_{xy}	σ_{yz}	σ_{zx}
III	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}

Нормальды және жанама кернеулердің арасындағы айырмашылықты анық көрсететін III жүйе тұтас орта механикасының байланыстарын шығаруды едәуір

күрделендіреді. Осы себептерден негізгі ретінде бірінші белгілеу жүйесін қабылдаймыз.

Көлбеген алаңдағы кернеу. Координатты оське перпендикулярлы алаңға әсер ететін $\vec{\sigma}^{\,i}$ кернеу векторлары белгілі болса, онда кез келген алаңдағы кернеулер векторын табуға болатындығын көрсетейік.

Нүкте M арқылы $\vec{n}$ нормалы бар алаң жүргізейік және элементарлы тетраэдр салайық. Осы тетраэдр жүргізген алаңмен координатты оське перпендикулярлы жазықтықтардың қиылысуы арқылы салынған (2.3–сурет).

ABC қабырғасының ауданы $S_{ABC} = \Delta S$ тең болсын. Онда басқа қабырғалардың аудандары мынаған тең болады: $S_{OBC} = \Delta S \cdot n_1$; $S_{OAC} = \Delta S \cdot n_2$; $S_{OAB} = \Delta S \cdot n_3$, мұндағы n_1, n_2, n_3 – $\vec{n}$ нормалының координатты оське проекциясы.

Тетраэдрдің қабырғасына әсер ететін күштер мынаған тең: ABC қабырғасына – $\vec{\sigma}^{\,n}\Delta S$; OBC қабырғасына – $\vec{\sigma}^{\,1}\Delta S \cdot n_1$; OAC қабырғасына – $\vec{\sigma}^{\,2}\Delta S \cdot n_2$; OAB қабырғасына – $\vec{\sigma}^{\,3}\Delta S \cdot n_3$.

Тетраэдрдің қабырғаларындағы лайықты нормальдар e_i орталарына қарама-қарсы болғандықтан жоғарыдағы формулаларда теріс таңба пайда болады.

Тетраэдрге мынадай массалық сыртқы күш әсер етеді:

$$F\Delta m = F\rho\Delta W,$$

мұндағы Δm – тетраэдрдің массасы; ΔW – тетраэдрдің көлемі; ρ – M нүктесіндегі орта тығыздығы.

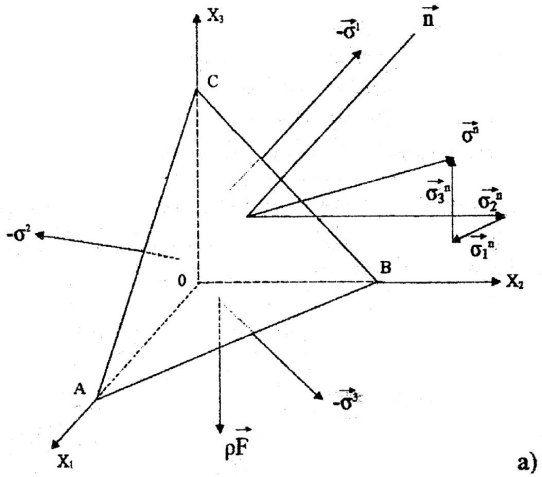
Қарауымызға мынадай инерциялық массалық күшті кіргізіп:

$$-\frac{d\upsilon}{dt}\Delta m = -\frac{d\upsilon}{dt}\cdot\rho\cdot\Delta W$$

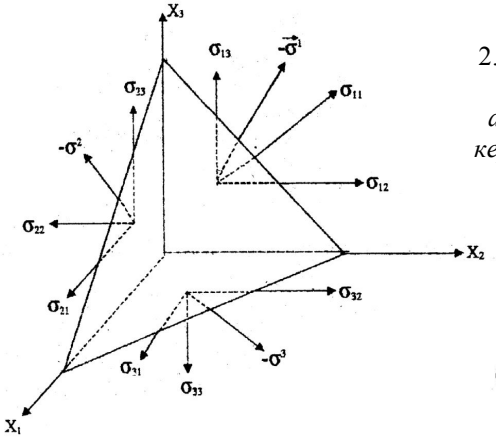
($\frac{d\upsilon}{dt}$ – M нүктесіндегі материалды бөлшектің үдеуі) және Даламбер негіздерін қолданып, абсолютті қатты дене сияқты

тетраэдерге түсірілген күштердің басты векторы нөлге тең болатын мына шартты жазайық:

$$\vec{\sigma}^{\,n}\Delta S-\left(\vec{\sigma}^{\,1}\Delta Sn_1+\vec{\sigma}^{\,2}\Delta Sn_2+\vec{\sigma}^{\,3}\Delta Sn_3\right)+F\cdot\rho\cdot\Delta W-\frac{d\upsilon}{dt}\rho\Delta W=0\,.$$



а)



б)

2.3-сурет. Элементарлы тетраэдр
а – көлбеген алаңдағы кернеу; б – тетраэдрдің кернеу күйі

Осы теңдіктің екі жағында ΔS -қа бөліп мынаны аламыз:

$$\vec{\sigma}^{\,n} = \vec{\sigma}^{\,i} n_i - \left(\vec{F} \cdot \rho - \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \rho \right) \frac{\Delta W}{\Delta S}.$$

Тетраэдр өлшемдерін нөлге қарай ұмтылдырайық. Осы кезде тетраэдр *M* нүктесіне жиыстырылады. $\Delta W / \Delta S$ қатынасы да нөлге ұмтылады, өйткені ΔW шамасы тетраэдрдің сызықтық мөлшерінің үшінші дәрежесіне, ал ΔS шамасы осы мөлшердің екінші дәрежесіне тең болады.

Нәтижесінде мына Кошидің векторлық формуласын аламыз:

$$\vec{\sigma}^{\,n} = \vec{\sigma}^{\,i} n_i . \qquad (2.6)$$

$\vec{\sigma}^{\,n}$ кернеуін және әрбір $\vec{\sigma}^{\,i}$ кернеулерін координатты осьтерге проекциялап (2.3 *б*-сурет) мынаны аламыз:

$$\vec{\sigma}^{\,n} = \vec{\sigma}_k^{\,n} e_k ; \qquad (2.7)$$

$$\vec{\sigma}^{\,i} = \sigma_{ik} \vec{e}_k . \qquad (2.8)$$

σ_{ik} проекциясының бірінші көрсеткіші σ^i кернеуі әсер ететін ΔS^i алаңының көрсеткішімен дәл келеді, ал екінші көрсеткіші $\vec{\sigma}_i$ кернеуі проекцияланатын x_k осінің көрсеткішімен дәл келеді.

(2.7) және (2.8) формуласын (2.6) теңдеуіне қойып, Кошидің скалярлық формуласы деп аталатын беттік кернеу сыңарларымен ішкі кернеулер сыңарлары арасындағы байланыс теңдеуін аламыз, яғни

$$\sigma_k^n = \sigma_{ik} n_i \qquad (2.9)$$

немесе

$$\begin{cases} \sigma_1^n = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 ; \\ \sigma_2^n = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 ; \\ \sigma_3^n = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 . \end{cases}$$

(2.9) үш скалярлы теңдеулерге Кошидің векторлық формуласы деп аталатын мына бір векторлық теңдеу сәйкес келеді.

$$\vec{\sigma}^{\,n} = \left((\sigma_{ik})\right)\vec{n}\,, \tag{2.10}$$

мұндағы

$$\vec{n} = n_i \vec{e}_i \tag{2.11}$$

(2.10) Коши формуласы бірлік вектор $\vec{n}$ -ге кернеу матрицасы $\left((\sigma_{ik})\right)$ көмегімен $\vec{\sigma}^{\,n}$ векторын сәйкес қояды. Осы матрица базисті бұрған кезде мына тензорлық заң бойынша түрленетін екінші ранглі тензорды құратындығын көрсетуге болады:

$$\sigma_{ik} = \alpha_{ip} \cdot \alpha_{kq} \cdot \sigma_{pq}\,. \tag{2.12}$$

Матрицаны көбейту ережесін еске түсіріп жоғарыдағы теңдеуді былай қайта жазуға болады:

$$(\sigma_{n1}\sigma_{n2}\sigma_{n3}) = (n_1 n_2 n_3)(\sigma_{ik})\,. \tag{2.13}$$

Сонымен (2.13) формуласы әрбір вектор $\vec{n}$ -ге кернеу векторлары $\vec{\sigma}^{\,n}$ -ді сәйкес қояды. Айтылған кернеулер $\vec{n}$ нормалына ортогональды алаңдарда әсер етеді. Формуланы пайдаланғанда векторды кернеу матрицасына көбейту ережесін қолдану керек.

1-тараудағы 1.1-леммасынан σ_{ik} матрицасы тензор екендігі шығады, яғни

$$\mathrm{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Осы тензор *кернеу тензоры* – деп аталады.

Сонда көлбеген алаңдағы кернеу векторы Коши формуласы бойынша былай анықталады:

$$\vec{\sigma}^{\,n} = \vec{n}\mathrm{T}_\sigma\,. \tag{2.15}$$

2.1 – есеп. Көлбеген алаңдағы кернеу.

M нүктесіндегі кернеу тензоры келесі түрде берілген:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Нормальдың мынадай бірлік векторы бар: $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3$.

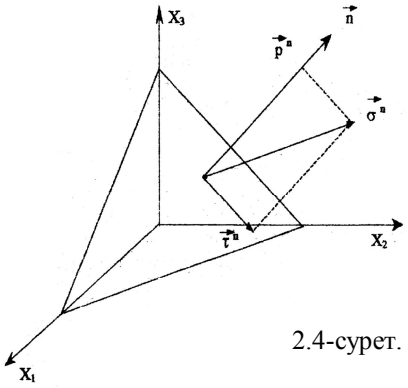
Алаңдағы *M* нүктесінде кернеу векторын анықтаңыздар.

Шешуі. $\vec{\sigma}^n = \vec{n}\mathrm{T}_\sigma$ формуласы бойынша сәйкесті матрицаларды көбейтіп, мынаны табамыз:

$$\vec{\sigma}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 1\frac{3}{2} - \sqrt{2} - 1\right).$$

σ_i^n координаталы проекциясы бар $\vec{\sigma}^n$ толық кернеуін (2.6) ΔS алаңына және алаңның нормалы $\vec{n}$-ге проекциялауға болады (2.4-сурет). Бірінші проекция жанама кернеу $\vec{\tau}^n$ деп аталады, ал екінші проекция нормальды кернеу $\vec{p}^n$ деп аталады. Нормальды кернеудің модулі вектор $\vec{\sigma}^n$ – мен (2.7) бірлік нормальдың (2.11) скалярлық көбейтіндісі ретінде табылады, яғни

$$p^n = \vec{\sigma}^n\vec{n} = \sigma_k^n n_k. \qquad (2.16)$$



2.4-сурет. Көлбеген алаңдағы кернеу

Кошидің скалярлық формуласы (2.9) нормальды кернеуді кернеу тензорының сыңарлары арқылы былай анықтауға мүмкіндік береді:

$$p^n = \sigma_{ik} \cdot n_i \cdot n_k . \qquad (2.17)$$

$\vec{n}$ нормалы бар алаңдағы $\vec{\tau}^n$ жанама кернеуі толық кернеуден нормальды кернеуді ($\vec{p}^n = p_n \cdot \vec{n}$) векторлық алумен былай анықталады:

$$\vec{\tau}^n = \vec{\sigma}^n - \vec{p}^n . \qquad (2.18)$$

(2.9) және (2.17) формулаларын қолданып жанама кернеудің модулін былай табамыз:

$$\vec{\tau}^n = \sqrt{\left(\sigma_{ik} n_i\right)\left(\sigma_{jk} n_j\right) - \left(\sigma_{ij} n_i n_j\right)^2} . \qquad (2.19)$$

Сөйтіп $\vec{n}$ нормалы бар кейбір ΔS бетінің маңында кернеу тензорының сыңарлары бойынша толық $\vec{\sigma}^n$ (2.9), нормальды $\vec{p}^n$ (2.17) және жанама $\vec{\tau}^n$ (2.19) кернеулерін анықтауға болады. Әрбір координатты алаңды $\left(\Delta S_i\right)$, берілген алаңға шексіз жақын кейбір жаңа x_i координат жүйесіндегі алаң ретінде қарап жүргізілген зерттеулерді жалғастыруға болады. Осы кезде тұтас орта ішіндегі еркін еңкіш алаңының Коши формуласын аламыз.

Металдарды қысыммен өңдеген кезде жанасқан бетке қысу

кернеуі әсер етеді. Таңбалар ережесі бойынша бұл жағдайда нормальды кернеудің таңбасы теріс болады. Бірақта ылғи да теріс таңбамен жұмыс істеу ыңғайсыз, сондықтан тұтас ортаның механикасында нормальдік қысым деген ұғым қолданылады. Осы нормальдік қысым элементарлы алаңға әсер етеді және металдарды қысқан кезде оң таңбалы болады.

Осы мөлшерді қолданып нормальдік кернеудің векторын мына түрде жазуға болады:

$$\vec{P} = -p\vec{n}, \qquad (2.20)$$

мұндағы $\vec{n}-$ алаң нормалының бірлік векторы; $p-$ алаңдағы нормальдік қысым.

Жанама кернеудің векторын мына түрде көрсетуге болады:

$$\vec{T} = \tau \cdot \vec{S}, \qquad (2.21)$$

мұндағы τ – алаңдағы жанама кернеу; $\vec{S}$ – алаң жазықтығында жататын бірлік вектор.

Сонымен, элементарлы алаңға әсер ететін нормальдік қысым және нормальдік кернеу абсолюттік мөлшері бойынша тең, ал таңбасы бойынша қарама-қарсы болады.

2.2. Кернеу тензоры

$\vec{n}$ нормалы бар алаң кернеу тензорының басты бағыттарының біреуімен сәйкес келді. Сол кезде толық кернеу $\vec{n}$ нормалымен сәйкес келеді. Онда (2.9) скалярлық көбейтіндісін мынадай түрге келтіруге болады:

$$\lambda \cdot n_i = \sigma_{ik} n_k \qquad (2.22)$$

және мұндай жағдайда $\vec{n}$ бағыты басты бағыт және $\left|\sigma_{ik}\right|$ тензорының басты осі деп аталады. (2.22) скалярлық көбейтіндісін мынадай басқа түрге де келтіруге болады:

$$\mathrm{T}_\sigma \cdot \vec{n} = \lambda \cdot \vec{n}\,. \qquad (2.23)$$

$n_i = \delta_{ik} \cdot n_k$ формуласының көмегімен (2.22) қатынасына мына түрді беруге болады:

$$(\sigma_{ik} - \lambda \cdot \delta_{ik}) n_k = 0. \qquad (2.24)$$

Бұл формула әрбір бағытқа сәйкес келетін n_i және λ төрт белгісізі бар үш теңдеу жүйесін құрады. Шешуге керекті осы жүйені ашып жазғанда, ол мынадай түрде болады:

$$\left.\begin{aligned} &(\sigma_{11} - \lambda) n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0; \\ &\sigma_{21} n_1 + (\sigma_{22} - \lambda) n_2 + \sigma_{23} n_3 = 0; \\ &\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + (\sigma_{33} - \lambda) n_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

Осыдан $n_i = 0$ шешімін шығарып тастап мынаны аламыз:

$$\left|\sigma_{ik} - \lambda \delta_{ik}\right| = 0 \qquad (2.26)$$

немесе

$$-\lambda^3 + \lambda^2 \sigma^I - \lambda^2 \sigma^{II} + \sigma^{III} = 0. \qquad (2.27)$$

(2.27) теңдеуінің λ_i түбірі $\left|\sigma_{ik}\right|$ тензорының меншікті (басты) мәні деп аталады. (2.27) теңдеуінің түбірі мен коэффициенттері арасындағы қатынас белгілі. Сондықтан σ^I, σ^{II} және σ^{III} мөлшерлері координатталарды өзгерткен кезде өзгермейді.

Бір координат жүйесінен екіншісіне ауысқан кезде өздерінің мәнін сақтайтын тензор сыңарларының функциясы тензорлардың инварианттары деп аталады. Екінші ранг тензорларында бір-біріне тәуелді емес мынадай үш инвариант бар: σ^I – бірінші сызықты инвариант; σ^{II} – екінші квадратты инвариант; σ^{III} – үшінші кубтық инвариант.

(2.27) теңдеуінің коэффициенттері келесі формулалар бойынша анықталады:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma^I = \sigma_{ik} \cdot \delta_{ik}; \\ &\sigma^{II} = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{kk} - \sigma_{ik}\sigma_{ik}); \\ &\sigma^{III} = \left|\sigma_{ik}\right| = \varepsilon_{ijk} \cdot \sigma_{1i} \cdot \sigma_{2j} \cdot \sigma_{3k}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.28)$$

$\sigma_i = \lambda_i$ теңдігін жорамалдап басты кернеулердің мәнін келесі ретпен бөліп орналастырған дұрыс:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \qquad (2.29)$$

(2.21) теңдеуіндегі λ орнына басты кернеулердің біреуін σ_i қойған кезде *i*-ші басты кернеудің бағытын сипаттайтын үш косинусқа $\left(\alpha_{ij} = n_i\right)$ үш теңдеу жүйесін аламыз, яғни

$$\left(\sigma_{jk} - \sigma_i \delta_{ik}\right)\alpha_{ik} = 0\,. \tag{2.30}$$

(2.26) теңдеуінде *i* көрсеткіші бойынша қосуды жүргізбейді.

Мына матрицаның:

$$\alpha_{ik} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

жол элементтері үшін төмендегі қатынас әділ:

$$\alpha_{ik} \cdot \alpha_{jk} = \delta_{ij}\,, \tag{2.32}$$

ал бағана элементтері үшін мына қатынас дұрыс:

$$\alpha_{ki} \cdot \alpha_{kj} = \delta_{ij}\,. \tag{2.33}$$

α_{ij} бірінші көрсеткіші *i*-ші басты кернеудің көрсеткішіне, ал екінші көрсеткіші осы базистің *j*-ші осіне сәйкес келеді.

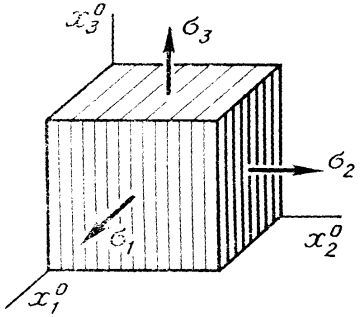
Егер басты базистің бағыттаушы косинустары белгілі болса, онда кернеу тензорының сыңарларын өзгертетін (2.12) формула бойынша басты кернеулерді анықтауға болады, мысалы

$$\sigma_1 = \alpha_{11}^2\sigma_{11} + \alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_{12} + \alpha_{11}\alpha_{13}\sigma_{13} + \alpha_{12}\alpha_{11}\sigma_{21} + \alpha_{12}^2\sigma_{22} + \alpha_{12}\alpha_{13}\sigma_{23} +$$
$$+ \alpha_{13}\alpha_{11}\sigma_{31} + \alpha_{13}\alpha_{12}\sigma_{32} + \alpha_{13}^2\sigma_{33}.$$

Басты оське жатқызылған $\left[\sigma_{ik}\right]$ кернеу тензоры мына түрде жазылады:

$$\mathrm{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Сөйтіп басты координатты осьтерге ортогональды элементарлы кубтың қабырғаларына тек нормальды кернеулер әсер ететін болады (2.5-сурет).



2.5-сурет. Басты кернеулер

2.2 – есеп. Кернеу тензорын диагональды түрге келтіру.

Кернеу тензоры келесі түрде берілген (таза ығысу):

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\tau > 0$ деп есептеп тензорды диагональды түрге келтіру қажет.

Шешуі. Мынадай сипаттамалық теңдеуді жазайық:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \tau & 0 \\ \tau & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Немесе мынадай жайылған түрде $-\lambda^3 + \tau^2\lambda = 0$, $\lambda\left(\lambda^2 - \tau^2\right) = 0$. Осы теңдеудің түбірлері мынаған тең: $\lambda_1 = \tau, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -\tau$.

Алынған мөлшерлерді қолданып, кернеу тензорының диагональды түрін былай жазуға болады:

$$\mathrm{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{bmatrix}.$$

Кернеу девиаторы. Кернеу тензорын девиатор D_σ және шар S_σ тензорларының қосындысы түрінде былай көрсетуге болады:

$$\mathrm{T}_\sigma = D_\sigma + S_\sigma = \lfloor \sigma_{ij} \rfloor = \lfloor \sigma_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij} \rfloor + \lfloor \sigma_0 \delta_{ij} \rfloor, \tag{2.35}$$

мұндағы $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ мөлшерін орташа кернеу деп атайды.

Сонымен девиатор сыңарларын былай анықтайды:

$$S_{ik} = \sigma_{ik} - \sigma_0 \delta_{ik}. \tag{2.36}$$

Кернеу девиаторының басты сыңарлары мынадай сипаттамалық теңдеуден анықталады:

$$\left| S_{ij} - \lambda \delta_{ij} \right| = 0. \tag{2.37}$$

Осы теңдеу толық емес кубтың теңдеуі болып саналады, яғни

$$-\lambda^3 - \lambda S'' + S''' = 0. \tag{2.38}$$

Өйткені S' бірінші инварианты нөлге тең. Кернеу девиаторының қалған инварианттары мынаған тең:

$$\left.\begin{aligned} S'' &= \frac{1}{2}\left(S_{ii} S_{jj} - S_{ij} S_{ij}\right); \\ S''' &= \left| S_{ij} \right| = \varepsilon_{ijk} S_{1i} S_{2j} S_{3k}. \end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

Кернеу девиаторының екінші инварианты жанама кернеудің қарқындылығы деп аталатын мынадай физикалық мөлшермен байланысты:

$$\mathrm{T} = \sqrt{|S''|} = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ik} S_{ik}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \times \tag{2.40}$$

$$\times \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}.$$

Мысалдар.

Мысал ретінде – кернеу күйлерінің кейбір түрлерін қарастырайық.

Жай созу $(\sigma_1 \succ 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0)$:

$$\mathrm{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{T} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}. \tag{2.41}$$

Жай қысу $(\sigma_1 = \sigma_3 = 0, \sigma_3 \prec 0)$:

$$\mathrm{T}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{T} = \frac{|\sigma_3|}{\sqrt{3}}. \tag{2.42}$$

Таза ығысу $(\tau \succ 0)$

$$\mathrm{T}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{T} = \tau. \tag{2.43}$$

Жазық кернеу күйі $(\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2); \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2); \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2),$ $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0)$:

$$\mathrm{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{T} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2}\,. \quad (2.44)$$

Көлемдік кернеу күйінің жалпы жағдайында кернеу девиаторының басты сыңарлары мынаған тең:

$$S_1 = \left(2/\sqrt{3}\right)\mathrm{T}\cos\beta_\sigma; \quad \mathrm{S}_2 = \left(2/\sqrt{3}\right)\mathrm{T}\sin\left(\beta_\sigma - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$\mathrm{S}_3 = -\left(2/\sqrt{3}\right)\mathrm{T}\cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta_\sigma\right).$$

Кернеу күйі түрінің бұрышы β_σ мына параметрмен:

$$\nu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (2.45)$$

төменде жазылған қатынасты қолданып анықталады:

$$\nu_\sigma = \frac{\left[tg\left(\beta_\sigma - \frac{\pi}{6}\right)\right]}{tg\frac{\pi}{6}}.$$

Жай созуға $\nu_\sigma = -1$ және $\beta_\sigma = 0$, таза ығысуға $\nu_\sigma = 0$ және $\beta_\sigma = \pi/6$, жай қысуға $\nu_\sigma = +1$ және $\beta_\sigma = \pi/3$ сәйкес келеді.

Октаэдрлік кернеу. Октаэдрлік алаң деп басты кернеу бағыттарымен тең бұрыштар құратын алаңды айтады (2.6-сурет). Октаэдрлік алаңдардың нормальдарында $n_i = \pm 1/\sqrt{3}$ бағыттаушы косинустар бар. Басты осьтердегі октаэдрлік алаңдардың нормальдары мынаған тең:

$$\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_i\,. \quad (2.46)$$

Осындай алаңдағы толық кернеу $\vec{\sigma}^{n}$-нің векторы мынаған тең:

$$\vec{\sigma}_{окт} = \vec{n}\left[\sigma_{ij}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_i \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i \vec{e}_i . \qquad (2.47)$$

Октаэдрлік алаңдағы толық кернеудің нормальды және жанамалы сыңарлары мынаған тең:

$$P_{окт} = \vec{n}\cdot\vec{\sigma}_{окт} = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) = \sigma_0 ; \qquad (2.48)$$

$$\tau_0 = \sqrt{\sigma_{окт}^2 - P_{окт}^2} = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}T. \qquad (2.49)$$

Егер басты жанама кернеулердің мәндерін ескеретін болсақ (төмен жаққа қараңыз), онда жанама сыңарды былай анықтайтын боламыз:

$$\tau_0 = \pm\frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2} . \qquad (2.50)$$

Сөйтіп октаэдрлік жанама кернеу түбір астындағы басты нормальды кернеулердің айырмасы квадраттары қосындыларының үштен біріне немесе түбір астындағы басты жанама кернеулер квадраттары қосындыларының үштен екісіне тең.

Басты нормальды кернеулермен бейнеленген кернеу тензорының бірінші инвариантының (2.28) квадратын былай алайық:

$$(\sigma^I)^2 = \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3\sigma_1 \qquad (2.51)$$

және тағы да басты кернеулермен бейнеленген (2.28) екінші инвариантты былай жазайық:

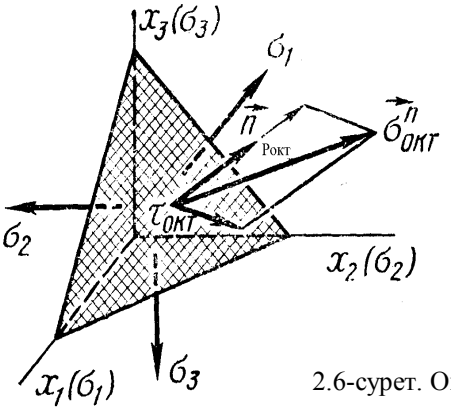
$$\sigma^{II} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 . \qquad (2.52)$$

Октаэдрлік жанама кернеуді мына теңдеумен де анықтауға болады:

$$\tau_0^2 = \sigma_{окт}^2 - P_{окт}^2 = \frac{1}{3}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{1}{9}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2$$

немесе жақшаларды ашып мынаны аламыз:

$$\tau_0^2 = \frac{2}{9}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1\right). \qquad (2.53)$$



2.6-сурет. Октаэдрлік алаңдағы кернеу

(2.51) және (2.52) теңдеулерін (2.53) теңдеуімен салыстырып, мынаны анықтауға болады:

$$\tau_0^2 = \frac{2}{9}\left[\left(\sigma^I\right)^2 - 3\sigma^{II}\right]. \qquad (2.54)$$

Осыдан, кернеу тензорының бірінші және екінші инварианттары үшін қолданылатын формулаларды (2.28) және кездейсоқ (басты емес) ортогональды алаң бойынша әсер ететін кернеулер сыңарларын пайдаланып, октаэдрлік жанама кернеуді анықтауға мүмкіндік аламыз, яғни

$$\tau_0^2 = \frac{2}{9}\left[\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right)^2 - 3\left(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{21}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2\right)\right]$$

Осы теңдеуді түрлендіргеннен кейін мынаны аламыз:

$$\tau_0 = \pm\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)} \quad (2.55)$$

(2.28) формуласын қолданып кернеу девиаторының (2.35) екінші инвариантын былай анықтайық:

$$S'' = (\sigma_{11}-\sigma_0)(\sigma_{22}-\sigma_0)+(\sigma_{22}-\sigma_0)(\sigma_{33}-\sigma_0)+(\sigma_{33}-\sigma_0)(\sigma_{11}-\sigma_0)-$$
$$-\sigma_{12}^2-\sigma_{23}^2-\sigma_{31}^2$$

немесе орташа кернеу σ_0 анықтайтын формуланы ескеріп мынаны табамыз:

$$S'' = -\frac{1}{6}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)\right] = \quad (2.56)$$
$$= -\frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

Осыдан, октаэдрлік жанама кернеудің екінші дәрежесі таңбасы бойынша кері етіп алынған кернеу девиаторының екінші инвариантының үштен екісіне тең екендігі анықталады, яғни

$$\tau_0^2 = -\frac{2}{3}S'' \quad (2.57)$$

немесе

$$\tau_0 = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}S''}. \quad (2.58)$$

Нүктедегі октаэдрлік жанама кернеу мөлшері бойынша сол нүктедегі ең үлкен жанама кернеуге жақын, яғни мынадай аралықта орналасады $0{,}941 \succ \frac{\tau_0}{\tau_{max}} \succ 0{,}816.$

Жанама кернеу қарқындылығы *T*-ның мөлшері кернеу күйінің түріне байланысты (кернеу тензорының сыңарлары арасындағы қатынасқа байланысты) мына шекте өзгереді:

$$T = (1 \div 1{,}155)\tau_{max},$$

мұндағы τ_{max} – абсолюттік мөлшері бойынша ең үлкен басты жанама кернеу.

Жанама кернеудің қарқындылығынан кернеу қарқындылығын немесе қорытындылған кернеу σ_i-ді ажырата білу керек. Кернеу қарқындылығы басты кернеулермен былай анықталады:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\,. \qquad (2.59)$$

Жанама кернеудің қарқындылығы T сияқты кернеу қарқындылығының мөлшері σ_i скалярлық мөлшер болып саналады.

Кернеу қарқындылығының σ_i мөлшері кернеу күйінің түріне байланысты мынадай шекте өзгереді:

$$\sigma_i = \left(1 \div \frac{1}{1.155}\right)(\sigma_{max}-\sigma_{min}),$$

мұндағы $\sigma_{\max}$ және $\sigma_{\min}$ – алгебралық ең үлкен және ең кіші басты нормальды кернеулер.

Үш басты кернеудің екеуі нөлге тең болатын сызықтық кернеу күйі үшін (сызықтық созу немесе қысу) кернеу қарқындылығы мөлшері бойынша басты нормальды кернеумен (созатын немесе қысатын) дәл келетіндігін оңай анықтауға болады.

Ең үлкен жанама кернеу. $\left(\sigma_1^n,\quad \sigma_2^n,\quad \sigma_3^n\right)$ сыңарлары бар векторды $\vec{n}$ нормалына проекциялап нормальды қысым үшін мына формуланы аламыз:

$$p = -\sigma_k^{\,n} n_k\,.$$

Енді (2.9) формуланы қолданып мынаны аламыз:

$$p = \sigma_{ik} n_i n_k \qquad (2.60)$$

немесе

$$p = -\left(\sigma_{11}n_1^2+\sigma_{22}n_2^2+\sigma_{33}n_3^2+2\sigma_{12}n_1n_2+2\sigma_{13}n_1n_3+2\sigma_{23}n_2n_3\right).$$

Жанама кернеу мынадай теңдеуден анықталады:

$$p^2 + \tau^2 = \left|\vec{\sigma}^n\right|^2. \qquad (2.61)$$

Кернеулер зерттелетін нүктенің айналасында, координатты осьтің x_i бағыты ретінде кернеу тензорының басты бағытын қабылдайық.

Көрсетілген нүкте арқылы өтетін кез келген көлбеген алаңдағы нормальдік қысым, толық пен жанама кернеулер мынадай формулалармен анықталады:

$$p = -\left(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2\right); \qquad (2.62)$$

$$\left|\vec{\sigma}^n\right|^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2; \qquad (2.63)$$

$$\tau^2 = \left|\vec{\sigma}^n\right|^2 - p^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \left(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2\right)^2 \qquad (2.64)$$

Енді (2.64) теңдеуінен $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ байланысын пайдаланып косинустардың біреуін, мысалы n_3 шығарып тастайық. Осыдан кейін жанама кернеу экстремумдық мәнді алатын n_1 және n_2 косинустарын анықтаймыз. Ол үшін $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ формуласын (2.64) теңдеуінен қойып мынаны аламыз:

$$\tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2\left(1 - n_1^2 - n_2^2\right) - \left[\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3\left(1 - n_1^2 - n_2^2\right)\right]^2.$$

Экстремумды табу үшін осы теңдіктің n_1 бойынша туындысын тауып, оны нөлге теңестіреміз, яғни

$$\frac{\partial\left(\tau^2\right)}{\partial n_1} = 2\sigma_1^2 n_1 - 2\sigma_3^2 n_1 - 2\left[\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3\left(1 - n_1^2 - n_2^2\right)\right] \times$$

$$\times\left(2\sigma_1 n_1 - 2\sigma_3 n_1\right) = 0.$$

Жақшаның сыртына n_1 шығарып және $2\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)$ мөлшеріне қысқартқан кезімізде мына теңдікті табамыз:

$$n_1\left(\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_1 n_1^2 - 2\sigma_2 n_2^2 - 2\sigma_3 + 2\sigma_3 n_1^2 + 2\sigma_3 n_2^2\right) = 0.$$

Таңбаларды ауыстырып, жақшалардың сыртына n_1^2 және n_2^2 шығарып жіберіп, содан соң екіге бөлген кезде мына теңдікті аламыз:

$$n_1\left[(\sigma_1-\sigma_3)n_1^2+(\sigma_2-\sigma_3)n_2^2-\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\right]=0. \quad (2.65)$$

Осындай жолмен теңдеудің n_2 бойынша туындысын тауып, оны нөлге теңестірсек мына формуланы аламыз:

$$n_2\left[(\sigma_1-\sigma_3)n_1^2+(\sigma_2-\sigma_3)n_2^2-\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)\right]=0. \quad (2.66)$$

Алдыменен (2.65) және (2.66) теңдеулерінің шешімі $n_1 = 0$ және $n_2 = 0$ болады. Жоғарыда жазылған $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$ байланысына табылған $n_1 = 0$ және $n_2 = 0$ қойып τ экстремум болатын мынадай бағыттаушы косинустардың бірінші тобын аламыз: $n_1 = 0;\ n_2 = 0;\ n_3 = \pm 1$.

Ары қарай n_1 нөлге теңеп (2.66) теңдеуінен мынаны аламыз: $n_2 = \pm\sqrt{1/2}$. Бағыттаушы косинустар n_1 және n_2 –нің осы мәндерін қолданып $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$ шартынан n_3-тың мынадай сәйкесті мәнін табамыз: $n_3 = \pm\sqrt{1/2}$. Демек τ экстремум болатын бағыттаушы косинустардың екінші тобының мөлшерін табамыз. Осы мөлшерлер мынаған тең: $n_1 = 0;\ n_2 = \pm\sqrt{1/2};\ n_3 = \pm\sqrt{1/2}$.

Осыдан кейін, n_2 = 0-ді (2.65) теңдеуіне қойып мынаны аламыз: $n_1 = \pm\sqrt{1/2}$. Бағыттаушы косинустардың осы мәндерін пайдаланып $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$ шартынан мынаны табамыз: $n_3 = \pm\sqrt{1/2}$. Нәтижесінде τ экстремум болатын бағыттаушы косинустардың үшінші тобының мәндерін табамыз. Табылған мөлшерлер мынадай: $n_1 = \pm\sqrt{1/2}$; $n_2 = 0;\ n_3 = \pm\sqrt{1/2}$.

Ары қарай $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ шартынан n_2 және n_1 табамыз, содан кейін олардың мәндерін (2.64) формуласына қойып, жоғарыдағы ұқсас математикалық есептеулерді жүргіземіз.

Нәтижесінде жанама кернеулер экстремалдық мәнді алатын алты бағыттаушы косинустар тобын табамыз (2.2-кесте).

Бағыттаушы косинустар мәндерінің бірінші үш тобы осы сұрақты талқылаған кезде басты етіп қабылданған және олар жанама кернеулер нөлге тең болатын координатты жазықтарды анықтайды. Демек, мәннің екінші үш тобы жанама кернеулер ең үлкен мәнге жететін жазықтықтарды анықтайды. Өйткені жанама кернеулердің экстремалды мәнін табу (2.64) формуласымен жүргізіледі.

2.2-кесте

Жанама кернеулер экстремалды мәнді алатын бағыттаушы косинустар

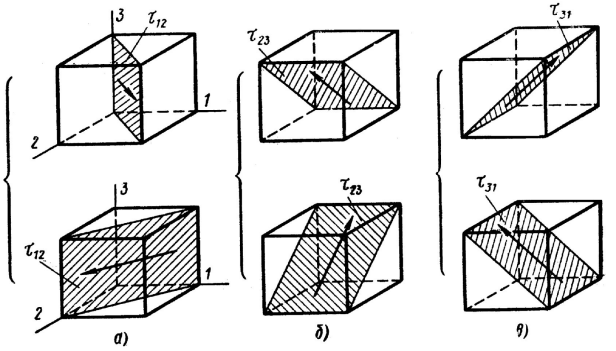
Бағыттаушы косинустар	Бағыттаушы косинустар мәндерінің тобы					
	1	2	3	4	5	6
n_1	0	0	±1	0	$\pm\sqrt{1/2}$	$\pm\sqrt{1/2}$
n_2	0	±1	0	$\pm\sqrt{1/2}$	0	$\pm\sqrt{1/2}$
n_3	±1	0	0	$\pm\sqrt{1/2}$	$\pm\sqrt{1/2}$	0

Осы топ мәндерінің әрбіреуі бір координатты жазықтыққа параллельді және екі координатты жазықтармен 45^0 бұрыш құратын жазықтықтарды бейнелейтіндігін оңай көруге болады. Басқаша айтқанда, бір координатты ось арқылы жүретін және басқа екі координаттар арасындағы бұрышты тең жартыға бөлетін жазықтарды бейнелейді. Сөйтіп оларда жанама кернеулер ең үлкен абсолюттік мәндерге жететін және өзара перпендикулярлы болатын үш жұп алаңдарды аламыз (2.7-сурет). Осы алты алаңнан және оларға параллельді алты алаңнан ромбалық додекаэдр фигурасын құруға болады (2.8-сурет).

Бағыттаушы косинустардың алынған мәндерін (2.64) теңдеуіне қойып, жанама кернеулердің мынадай ең үлкен мәндерін аламыз:

$$\left.\begin{aligned}
&\tau_{12} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\\
&\left(n_1 = \pm\sqrt{1/2}, n_2 = \pm\sqrt{1/2}, n_3 = 0\right);\\
&\tau_{23} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)\\
&\left(n_3 = \pm\sqrt{1/2}, n_2 = \pm\sqrt{1/2}, n_1 = 0\right);\\
&\tau_{13} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\\
&\left(n_1 = \pm\sqrt{1/2}, n_3 = \pm\sqrt{1/2}, n_2 = 0\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.67)$$

τ жанындағы көрсеткіштер берілген τ қандай басты кернеулердің жартылай айырмасына тең екендігін және қандай осьтерге τ әсер ететін алаң 45^0 бұрышпен еңкейгендігін білдіреді (2.7-сурет). Осы жанама кернеулерді тағы да басты жанама кернеулер деп атайды.



2.7-сурет. Жанама кернеулер ең үлкен мәнге жететін алаңдар

Сөйтіп, басты жанама кернеулер сәйкесті басты нормальды кернеулердің жартылай айырмасына, ал ең үлкен жанама кернеу

алгебралық ең үлкен және ең кіші басты нормальды кернеулердің жартылай айырмасына тең болады.

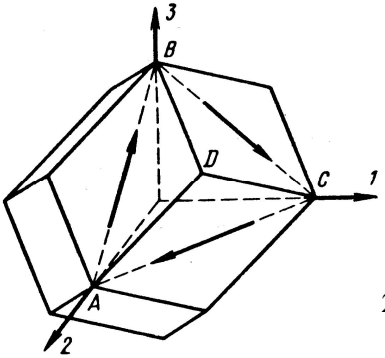
Егер барлық үш басты нормальды кернеу бір-біріне тең болса, онда олардың жартылай айырмасы, демек барлық жанама кернеу нөлге айналады, яғни жанама кернеу жоқ болады.

Басты жанама кернеу әсер ететін алаңдағы олардың бағыты, осы алаң нормальды болатын басты координатты алаңға параллельді болады (2.7-сурет). Сонымен бірге, басты жанама кернеудің бағыты (2.8-сурет нұсқамен көрсетілген) басты осьте ABC шыңы бар дұрыс октаэдрдің қырын құрады.

(2.67) теңдеулерінен көрініп тұрғандай, үш басты жанама кернеулердің қосындысы нөлге тең болады, яғни

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0. \qquad (2.68)$$

Осы шартты әрбір нақтылы есепте басты жанама кернеулер таңбасын белгілеген кезде сақтау керек.



2.8-сурет. Ромбалық додекаэдр

Басты жанама кернеулер әсер ететін алаңдағы нормальды кернеулердің мәнін анықтайық. Ол үшін бағыттаушы косинустар мәнін (2.62) теңдеуіне қойып мынаны аламыз:

$$\sigma_{12} = 1/2(\sigma_1 + \sigma_2); \quad \sigma_{23} = 1/2(\sigma_2 + \sigma_3);$$
$$\sigma_{13} = 1/2(\sigma_1 + \sigma_3). \qquad (2.69)$$

яғни басты жанама кернеулер әсер ететін алаңдағы нормальды кернеулер басты нормальды кернеулердің жартылай қосындысына тең болады.

Басты жанама кернеулердің (2.67) формуласынан, басты нормальды кернеулерді бірдей мөлшерге үлкейткенде немесе азайтқанда басты жанама кернеулердің мәні өзгермейтіндігі көрініп тұр, яғни кернеу күйіне біркелкі созуды немесе қысуды қосқан кезде жанама кернеулер мөлшері өзгермейді.

2.3. Мора кернеуінің диаграммасы

О. Мора бойынша кернеу диаграммасы (немесе Мор шеңберлері) нормальды қысым – p және жанама τ кернеулер векторлары жиынтығы туралы түсінікті графикалық түрде береді. Бұл кернеулер бас осьтер жүйесінде қаралатын әр түрлі көлбеген алаңдарда әсер етеді. Нормальды қысым – p мөлшерін абсцисса осі бойымен салып, ал оның әрбір мөлшеріне сәйкес келетін жанама кернеулерді τ ордината осі бойымен салып диаграмманы тұрғызады.

Көлбеген алаңдағы нормальды қысым мынадай формуламен анықталатындығы белгілі [(2.62) формуласы]: $-p = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$.

Осымен бірге (2.64) және (2.62) теңдеулерінен мынау келіп шығады:

$$(-p)^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2. \qquad (2.70)$$

Бұдан басқа, бағыттаушы косинустар үшін мына түрде болатын белгілі шартты жазайық:

$$1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2. \qquad (2.71)$$

(2.62) теңдеуінің екі жағында $(\sigma_2 + \sigma_3)$ көбейтейік. Содан кейін алынған нәтижені мүшелеп (2.70) теңдеуінен алып тастайық. Ары қарай (2.71) теңдеуінің екі жағында алдын ала $\sigma_2 \cdot \sigma_3$ көбейтіп жоғарыда алынған теңдеуге қоссақ мынадай формуланы аламыз:

$$p^2+\tau^2-(-p)(\sigma_2+\sigma_3)+\sigma_2\sigma_3=\sigma_1^2n_1^2+\sigma_2^2n_2^2+\sigma_3^2n_3^2- \\ -(\sigma_2+\sigma_3)(\sigma_1n_1^2+\sigma_2n_2^2+\sigma_3n_3^2)+\sigma_2\sigma_3(n_1^2+n_2^2+n_3^2). \quad (2.72)$$

(2.72) теңдеуінің екі жағына да $\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2$ қосып және қарапайым түрлендіруден кейін мынаны аламыз:

$$\left((-p)-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2+n_1^2(\sigma_1-\sigma_3)\times \quad (2.73)$$
$$\times(\sigma_1-\sigma_2).$$

Осы әдістемені қолданып жоғарыдағы ұқсас тағы да екі теңдеуді шығарамыз. Бұл мына теңдеулер:

$$\left((-p)-\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2+n_2^2(\sigma_2-\sigma_1)\times \quad (2.74)$$
$$\times(\sigma_2-\sigma_3).$$

$$\left((-p)-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2+n_3^2(\sigma_3-\sigma_2)\times \quad (2.75)$$
$$\times(\sigma_3-\sigma_1).$$

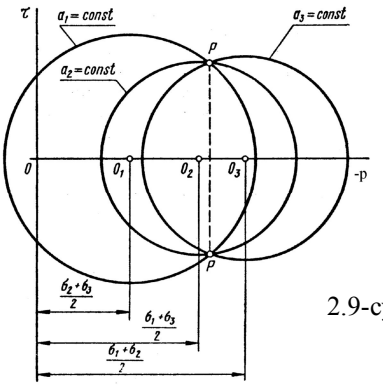
Алынған (2.73), (2.74) және (2.75) теңдеулерін аналитикалық геометриядан белгілі мынадай шеңбер теңдеуімен салыстырсақ: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, осы теңдеулерде шеңберді анықтайды деген қорытындыны шығара аламыз. Осы шеңберлердің центрі абсцисса осі бойымен орналасады (2.73), (2.74) және (2.75) теңдеулері үшін сәйкесті мынадай ара қашықтықта тұрады: $\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}$; $\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}$ және $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$.

Шеңбер радиусының R екі есе дәрежесі болып саналатын (2.73), (2.74) және (2.75) теңдеулерінің оң жақтарында өзгеретін параметр n_1, n_2 және n_3 бар. Сондықтан (2.73), (2.74) және (2.75) теңдеулерінің әрбіреуі тұқымдас шоғырланған шеңберлердің теңдеулері болып саналады.

(2.62), (2.70) және (2.71) теңдеулері берілген жағдай үшін $(-p)$ және τ кернеулерінің қатынастық мәндерін анықтайды. Осы теңдеулерді (2.73), (2.74) және (2.75) теңдеулер жүйесіне математикалық түрлендірген кезде физикалық мәндері өзгермейтін болады.

Сөйтіп (2.73) теңдеуі n_1 бағыттаушы косинусының әр түрлі берілген мәндері үшін $(-p)$ және τ нүктелерінің геометриялық орнын шеңбер түрінде анықтайды. Осы (2.74) және (2.75) теңдеулеріне де әділ.

Демек n_1, n_2 және n_3 бағыттаушы косинустардың берілген мүмкін болатын топ мәндеріне (яғни (2.71) шартын қанағаттандыратын) $(-p)$ және τ мөлшерлері үш шеңберлердің қиылысатын P нүктесімен анықталады (2.9-сурет).



2.9-сурет. Мор шеңберлері

Ары қарай қандай аймақта осы нүктелер орналасуы мүмкін екендігін анықтайық. Анықтау үшін $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ шартын қабылдайық, яғни 1 көрсеткішімен мөлшері бойынша ең үлкен басты нормальды кернеуді, 3 көрсеткішімен ең кіші басты нормальды кернеуді, ал 2 көрсеткішімен аралық басты нормальды кернеуді белгілейік. Осы шартты ылғи да сақтауға болады. Өйткені координат осьтері тең құқылы.

Бағыттаушы косинустардың мынадай сәйкесті мәндері үшін: $\cos\alpha_1 = n_1 = 0;$ $\cos\alpha_2 = n_2 = 0$ және $\cos\alpha_3 = n_3 = 0,$ яғни $\alpha = 90^0$ бұрышы үшін (2.73), (2.74) және (2.75) теңдеулерімен берілген шеңберлердің R_1, R_2 және R_3 радиустер мөлшерлерін анықтайық. Осы радиустер мынаған тең:

$$R_{1(n_1=0)} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \tag{2.76}$$

$$R_{2(n_2=0)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \tag{2.77}$$

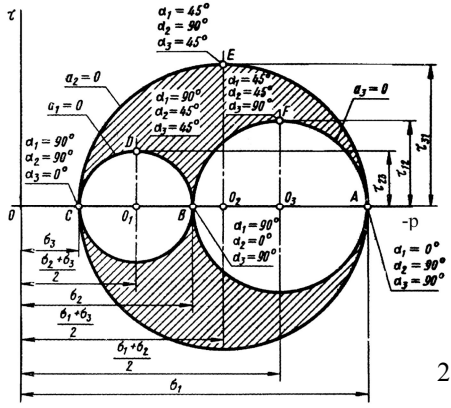
$$R_{3(n_3=0)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \tag{2.78}$$

(2.73) және (2.75) теңдеулерінен көрініп тұрғандай n_1 және n_3 мөлшерлерін үлкейткен кезде сәйкесті шеңберлердің радиустері үлкейеді. $(-p)$ және τ кернеулерінің мүмкін болатын жұп мәндері $R_{1(n_1=0)}$ және $R_{3(n_3=0)}$ радиусы бар шеңберлердің үстінде немесе оның сыртында, бірақ та ішінде орналасуы мүмкін еместігін осы білдіреді.

Егер n_2 мөлшері үлкейетін болса, онда R_2 радиусы кішірейеді. Өйткені жоғарыда қабылданған басты кернеулердің қатынастарына сәйкесті $\sigma_2 - \sigma_1$ айырымы теріс мәнді алады. Демек $(-p)$ және τ мөлшерлері $n_2 = 0$ болған кезде R_2 радиусы бар шеңбердің ішінде орналасады.

$R_{1(n_1=0)}$, $R_{2(n_2=0)}$ және $R_{3(n_3=0)}$ радиустары бар шеңберлерді жоғарыда көрсетілген центрлерден (2.76), (2.77) және (2.78) теңдеулерін қолданып, Мор диаграммасын аламыз (2.10-сурет). Бір-біріне сәйкес келетін $(-p)$ және τ кернеулерінің қос мөлшерлері сызықтап тастаған қисық сызықты үшбұрыштың ішінде жатады. 2.10-суретте тағы да диаграмманың ерекше нүктелері көрсетілген.

Шеңбер радиусы басты жанама кернеулердің мөлшерлеріне саны бойынша тең екендігі (2.76), (2.77) және (2.78) теңдеулерінен көрініп тұр.

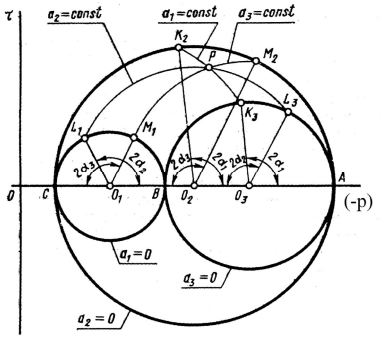


2.10-сурет. Мор диаграммасы

Берілген бұрыштар α_1, α_2 және α_3 бойынша 2.11-суретте көрсетілген тұрғызулардың көмегімен көлбеген алаңдағы $(-p)$ және τ мәндерін анықтауға және кері есептерді шешуге болады. Жалпы жағдайға Мора диаграммасы бойынша жанама кернеудің таңбасын анықтай аламыз.

σ_1, σ_2 және σ_3 кернеулерін бірдей мөлшерге үлкейткен де немесе кішірейткен де басты шеңберлердің радиустары және центрлері арасындағы ара қашықтық өзгермейтіндігін оңай көруге болады. Осындай жағдайда τ осінің жайы ғана өзгереді. Егер τ осін орташа нормальды кернеудің σ_{op} мөлшеріне фигура жаққа жылжытсақ (2.11-суретте көрсетілген жағдайда оңға қарай жылжыту), онда кернеу девиаторының бейнесін аламыз (2.12-сурет). Мұндай жағдайға τ осі ылғи да фигураны кесіп өтеді. Осы осьті 2.12-суретте көрсетілген тұрғызулардың көмегімен σ_{op} есептемей жүргізуге болады.

Кернеудің шарлық тензоры координаттың басынан σ_{op} ара қашықтығында орналасқан радиусы нөлге тең шеңбермен (o' нүктесімен) Мор диаграммасында бейнелейді.



2.11-сурет. Мор диаграммасы

Мысалдар.

2.3 – есеп. Кернеу күйі мына кернеу тензорымен берілген (МПа):

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} 900 & 200 & 100 \\ 200 & 600 & 150 \\ 100 & 150 & 400 \end{vmatrix}.$$

Нормалы x_1 және осьтерімен 70 және 50^0 бұрыш құратын көлбеген алаңдағы толық, нормальды және жанама кернеулердің мөлшерін анықтау қажет.

Шешімі. x_3 осі мен көлбеген алаңның нормалы арасындағы бұрышты анықтайық. Ол үшін $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ шартынан n_3 бағыттаушы косинусын былай анықтаймыз:

$$\cos\alpha_3 = \sqrt{1 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2} = \sqrt{1 - 0{,}342^2 - 0{,}643^2} = 0{,}685;$$

$$\alpha_3 = 47^0.$$

Толық кернеуді мынадай формуланы қолданып анықтайық (көлбеген алаңдағы толық кернеуді координат осьтеріне параллельді үш σ_1^n, σ_2^n және σ_3^n сыңарларға бөлуге болатындықтан):

$$\left(\sigma^n\right)^2 = \left(\sigma_1^n\right)^2 + \left(\sigma_2^n\right)^2 + \left(\sigma_3^n\right)^2 = \left(\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3\right)^2 +$$

$$+ \left(\sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3\right)^2 + \left(\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3\right)^2 =$$

$$= \left(900 \cdot 0{,}342 + 200 \cdot 0{,}643 + 100 \cdot 0{,}685\right)^2 +$$

$$+ \left(200 \cdot 0{,}342 + 600 \cdot 0{,}643 + 150 \cdot 0{,}685\right)^2 +$$

$$+ \left(100 \cdot 0{,}342 + 150 \cdot 0{,}643 + 400 \cdot 0{,}685\right)^2 = 722500 \ ;$$

$$\sigma^n = 850 \ МПа.$$

Нормальды кернеуді (2.60) формуласын қолданып былай анықтайық:

$$-\mathrm{p} = \sigma_{11}\mathrm{n}_1^2 + \sigma_{22}\mathrm{n}_2^2 + \sigma_{33}\mathrm{n}_3^2 + 2\sigma_{12}\mathrm{n}_1\mathrm{n}_2 + 2\sigma_{13}\mathrm{n}_1\mathrm{n}_3 + 2\sigma_{23}\mathrm{n}_2\mathrm{n}_3 =$$

$$= 900 \cdot 0{,}117 + 60 \cdot 0{,}413 + 400 \cdot 0{,}47 + 2 \cdot 200 \cdot 0{,}342 \cdot 0{,}643 +$$

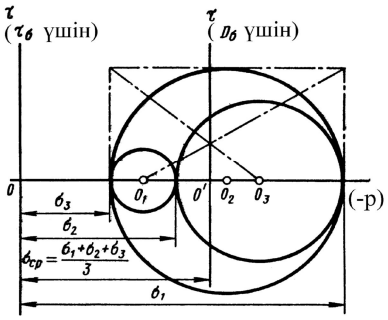
$$+ 2 \cdot 150 \cdot 0{,}643 \cdot 0{,}685 + 2 \cdot 100 \cdot 0{,}342 \cdot 0{,}685 = 808{,}0 \ \text{МПа}.$$

Жанама кернеуді былай анықтаймыз:

$$\tau = \sqrt{\left(\sigma^n\right)^2 - p^2} \approx 274{,}0 \ МПа.$$

Толық кернеу мен нормаль арасындағы бұрышты былай анықтайық:

$$\cos\alpha_{\sigma^n,n} = \frac{808{,}0}{850} = 0{,}95; \quad \alpha_{\sigma^n,n} \approx 18^0.$$



2.12-сурет. Мор диаграммасы

2.4–есеп. Кернеу күйі мынадай кернеу тензорымен берілген (МПа):

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 600 \\ 0 & 0 & 100 \end{vmatrix}.$$

Басты кернеудің мөлшерін және бағытын анықтау керек, яғни x_1, x_2, x_3 осьтері мен 1,2,3 басты осьтер арасындағы бұрышты.

Шешуі. Кернеу тензорының формуласынан $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{31} = \sigma_{13} = 0$ екендігі көрініп тұр, яғни көрсеткішінде 1 бар жанама кернеулер нөлге тең. Демек x_1 осі 1 осьпен дәл келеді, сондықтан $\sigma_1 = \sigma_{11} = 400$ *МПа.*

σ_2 және σ_3 басты кернеулерін (2.25) қатынасының екінші және үшінші жолын қолданып анықтаймыз, яғни

$$(\sigma_{22} - \lambda)n_2 + \sigma_{23}n_3 = 0;$$
$$(\sigma_{33} - \lambda)n_3 + \sigma_{32}n_2 = 0.$$

Бірінші теңдеуден мынаны анықтаймыз: $\frac{n_3}{n_2} = \frac{\sigma_{22} - \lambda}{\sigma_{23}}$.

Екінші теңдеуден мынаны анықтаймыз: $\frac{n_3}{n_2} = \frac{\sigma_{32}}{\sigma_{33} - \lambda}$.

Осы соңғы екі теңдеуден мынаны аламыз:

$$(\sigma_{22} - \lambda)(\sigma_{33} - \lambda) - \sigma_{32}^2 = 0;$$
$$\sigma_{22} \cdot \sigma_{33} - \lambda\sigma_{22} - \lambda\sigma_{33} + \lambda^2 - \sigma_{32}^2 = 0;$$
$$\lambda^2 - \lambda(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{32}^2 = 0;$$
$$\sigma_{2,3} = \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2}\right)^2 - \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{32}^2} = 200 \pm 110{,}7;$$

$$\sigma_2 = 317 \ МПа \ ; \ \sigma_3 = 83 \ МПа.$$

Осьтер арасындағы бұрышты анықтайық.

x_1 және 1 осьтері бір-біріне дәл келетіндіктен мыналар әділ болады: $\cos\left(\hat{x_1}1\right) = 1; \quad \cos\left(\hat{x_2}1\right) = 0; \quad cos\left(\hat{x_3}1\right) = 0; \quad \cos\left(\hat{x_1}3\right) = 0;$

$\cos\left(\hat{x_1}2\right) = 0.$

$x_2 o x_3$ және 203 жазықтары бір-біріне дәл келеді және бір мен x_1 осьтеріне перпендикулярлы. Демек мына шарт орындалады:

$$\left[\cos\left(\hat{x_2}2\right)\right]^2 + \left[\cos\left(\hat{x_3}2\right)\right]^2 = 1.$$

(2.25) шартынан мынаны аламыз:

$$(\sigma_{22} - \sigma_2)\cos\left(\hat{x_2}2\right) - \sigma_{23}\cos\left(\hat{x_3}2\right) = 0.$$

Осы формуланы екінші дәрежеге өсіріп және түрлендіргеннен кейін (таңбаларды ескермей) мынаны аламыз:

$$\cos\left(\hat{x_2}2\right) = \frac{\sigma_{23}}{\sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_2)^2 + \sigma_{23}^2}} = \frac{600}{\sqrt{(300 - 317)^2 + 600^2}} \approx 0{,}962;$$

$$\angle(x_2,2) \approx 16^0; \ \angle(x_3,2) \approx 74^0; \ \angle(x_2,3) \approx 16^0; \ \angle(x_3,3) \approx 106^0.$$

2.5 – есеп. Кернеу күйі мынадай тензормен берілген:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{vmatrix}.$$

Октаэдрлік кернеулердің және басты кернеулер алаңына әсер ететін басты жанама және нормальды кернеулердің мөлшерлерін анықтау қажет.

Шешуі. (2.25) теңдеулерін қолданып және басты нормальды кернеулер мәліметтерін ескере отырып, мынаны жазуға болады: $\sigma_1^n = \sigma_1 n_1;\ \sigma_2^n = \sigma_2 n_2;\ \sigma_3^n = \sigma_3 n.$

Октаэдрлік алаңдардың нормальдарында $n_i = \pm 1/\sqrt{3}$ бағыттаушы косинустар бар. Онда октаэдрлік алаңдағы толық кернеуді былай анықтауға болады:

$$\left(\sigma_{окт}^n\right)^2 = \left(\sigma_1^n\right)^2 + \left(\sigma_2^n\right)^2 + \left(\sigma_3^n\right)^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2;$$

$$\sigma_{окт}^n = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2} = \sqrt{\frac{300^2 + 120^2 + 90^2}{3}} = 193{,}5\ \ МПа.$$

Октаэдрлік алаңдағы нормальдік кернеу мынаған тең:

$$P_{окт} = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) = \frac{1}{3}\left(300 + 120 + 90\right) = 170\ \ МПа.$$

Октаэдрлік алаңдағы жанама кернеу мынаған тең:

$$\tau_0 = \sqrt{\left(\sigma_{окт}^n\right)^2 - P_{окт}^2} = \sqrt{193{,}5^2 - 170^2} = 92{,}5\ \ МПа.$$

Басты жанама кернеулер мынаған тең:

$$\tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{120 - 90}{2} = 15\ \ МПа\ ;$$

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{300 - 120}{2} = 90\ \ МПа;$$

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{300 - 90}{2} = 105\ \ МПа.$$

Басты жанама кернеулерге әсер ететін басты нормальды кернеулер мынаған тең:

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{300 + 120}{2} = 210\ \ МПа\ ;$$

$$\sigma_{23} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = \frac{120 + 90}{2} = 105\ \ МПа\ ;$$

$$\sigma_{13} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{300 + 90}{2} = 195\ \ МПа.$$

2.6 – есеп. Берілген кернеу тензорын:

$$\mathrm{T}_\sigma = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

шар және девиатор бөлімдеріне ажыратып, жанама кернеудің қарқындылығын анықтаңыз.

Шешуі. Орташа кернеуді былай табамыз:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + 4 + 7\right) = 4 \ \ МПа \ .$$

Кернеу тензорының шар бөлімін былай анықтаймыз:

$$S_\sigma = \sigma_0 \left[\delta_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Кернеу тензорының девиаторы мынаған тең:

$$D_\sigma = \mathrm{T}_\sigma - S_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Жанама кернеудің қарқындылығын мына формуланы қолданып табамыз:

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + \left(\sigma_{22} - \sigma_{33}\right)^2 + \left(\sigma_{33} - \sigma_{11}\right)^2 + 6\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\left(1-4\right)^2 + \left(4-7\right)^2 + \left(7-1\right)^2 + 6\left(2^2 + 3^2 + 5^2\right)} = \sqrt{47} = 6.86 \ \ МПа.$$

2.4. Көлемдік кернеу күйіне арналған тепе-теңдік шарттары

Күш түсірілген және тепе-теңдікте болатын денедегі кернеулердің мөлшері жалпы жағдайда нүктеден нүктеге үздіксіз өзгереді, яғни кернеулер координаттың үздіксіз функциялары болып табылады. Координатты жазықтықтарға параллельді қырлары бар элементарлы параллелепипедті кернеулі денеден бөліп алайық (2.13-сурет). Осы параллелепипедтің тепе-теңдігін қамтамасыз ететін қандай жағдайлар бар екендігін айқындайық.

x, *y*, *z* координатасы бар кеpенеуленген нүктелердің біреуі (мысалы, *a* нүктесі) *abcd*, *adb*′*c*′ және *ac*′*db*′ параллелепипедтің қабырғаларымен бейнеленетін болсын. Екінші *a*′ нүктесі *a* нүктесінен шексіз кішкентай ара қашықтықта тұрсын және осыған сәйкесті екінші нүктенің координатасы мынадай болсын: *x* + d*x*, *y* + d*y* және *z* + d*z*. Осы *a*′ нүктесі *a*′*b*′*c*′*d*′ , *a*′*d*′*bc* және *a*′*cdb*′ параллелепипед қабырғаларымен бейнеленсін. Параллелепипед қырларының өлшемдері d*x*, d*y* және d*z* тең екендігі түсінікті.

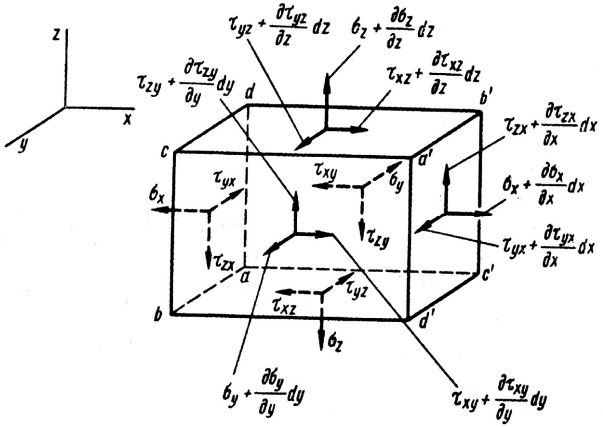
a нүктесінің кернеу күйі мынадай тензормен анықталатын болсын:

$$T_{\sigma a} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}.$$

a′ нүктесіндегі кернеулер *a* нүктесіндегі кернеулерден шексіз кішкентай мөлшерлермен айырмашылықта болады. Жоғарғы ретті шексіз кішкентай мүшелерді ескермей әрбір кернеудің өсімшесін берілген кернеудің әсер ету алаңшасы қозғалған координат бойынша жеке дифференциалмен білдіруге болатындығын қабылдайық, яғни кернеу адресі көрсеткішін

көрсететін координат бойынша. Онда a' нүктесі үшін кернеу тензоры мынадай болады:

$$T_{\sigma a'} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} + \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 & \sigma_{12} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 & \sigma_{13} + \dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 \\ \sigma_{21} + \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} dx_1 & \sigma_{22} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 & \sigma_{23} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} dx_3 \\ \sigma_{31} + \dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} dx_1 & \sigma_{32} + \dfrac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} dx_2 & \sigma_{33} + \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3 \end{vmatrix}.$$



2.13-сурет. Декарттық координаттарда әсер ететін кернеулер

Параллелепипедтің қабырғасына әсер етуші күштер кернеудің кернеу адресі көрсеткішін көрсететін сәйкесті қабырға ауданына көбейтумен табылатындығы белгілі.

Координат осьтеріне барлық күштердің проекциясы қосындысын алып және осы қосындыны нөлге теңеп, тепе-теңдік шартын құрастырамыз.

x (x_1) осіне барлық күштер проекциясының қосындысы мынаған тең:

$$\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3-\sigma_{11}dx_2dx_3+\left(\sigma_{12}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1dx_3-\sigma_{12}dx_1dx_3+$$

$$+\left(\sigma_{13}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2-\sigma_{13}dx_1dx_2=0.$$

Жақшаларды ашып және d*x*d*y*d*z* қысқартып мына теңдеуді аламыз:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}=0.$$

Жоғарыда жазылғанға ұқсастырып *y* (x_2) және *z* (x_3) осьтеріне проекциялар қосындысын жаза аламыз. Нәтижесінде мынаны аламыз:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}=0;\\&\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}=0;\\&\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(2.79)$$

Сөйтіп, біз көлемдік кернеу күйі үшін жеке туындылары бар дифференциалдық теңдеулер түрінде тепе-теңдік шартын алдық.

Осы шарттар деформацияланатын дененің барлық нүктелері үшін міндетті.

Кернеулер дененің көлемі бойынша өзгереді және олардың бетке шығатын элементтердегі мөлшері беттік қабырғаға әсер ететін сыртқы күштермен теңесуі керек, яғни беттік немесе қарамдағы шарттарды қанағаттандыру қажет.

Дененің бетіне шығатын шексіз кішкентай элементтердегі кернеулерді (2.9) теңдеуін қолданып сыртқы күшпен байланыстыруға болады. Расында да жалпы жағдайда дене бетінің элементарлы бөлімін элементарлы тетраэдрдің еңкіш қабырғасы сияқты қарауға болады.

Тепе-теңдіктің үш дифференциалдық теңдеуі (2.79) алты белгісізді (жанама кернеулер жұп болып бір-бірімен тең болатындығын ескерген кезде) құрамына кіргізеді. Демек, оларды шешу үшін қосымша теңдеулер талап етіледі. Сөйтіп көлемдік есеп жалпы жағдайда статикалдық шешілмейтін болып есептеледі.

2.5. Симметриялық осьті кернеу күйі

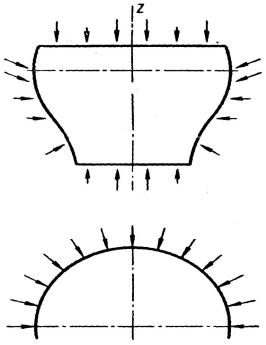
Металдарды қысыммен өңдеген кезде көлемдік кернеу күйінің өте жиі кездесетін жағдайларының бірі болып – симметриялық осі бар кернеу күйі есептеледі.

Кернеу күйінің осы түрі ретінде – бетіне немесе бетімінің бөліміне таралған күш түскен айналатын дененің кернеу күйі есептеледі. Айтылған таралған күш айналатын дененің осіне қатысты симметриялық орналасады және барлық меридиональды қимада бірдей болады (2.14-сурет). Мысал ретінде цилиндрлік дайындаманы шөктіру, осындай дайындаманы қобылау, баспақтау, сымдау, т.б. болуы мүмкін.

Симметриялық осі бар кернеу күйін қарағанда декарттық координаттың орнына цилиндрлік координатты қолданған өте қолайлы. Цилиндрлік координатта кез келген A нүктесінің жайын $\rho(x)$ осінен өлшенетін радиус вектор ρ-мен, полярлы бұрыш θ-мен және z аппликатасымен анықтайды (2.15-сурет). Суреттегі а нүктесі 0 арқылы өтетін және z осіне перпендикулярлы жазықтыққа A нүктесінің проекциясы. Цилиндрлік координаталы кернеулерді белгілеу және деформацияланатын денеден бөлінген элементтің пішіні 2.16-суретте көрсетілген. Цилиндрлік координаттағы кернеу тензорын мына түрде жазуға болады:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{\rho\rho} & \tau_{\rho\theta} & \tau_{\rho z} \\ \tau_{\theta\rho} & \sigma_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{z\rho} & \tau_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}.$$

$\sigma_{\rho\rho}$ кернеуін радиалды деп атайды, $\sigma_{\theta\theta}$ кернеуін тангенциалды деп атайды, ал σ_{zz} кернеуін осьтік кернеу деп айтады.



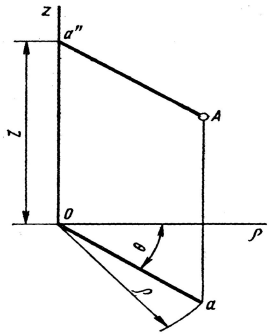
2.14-сурет. Симметриялы таралған күш түскен дене

Симметриялы осі бар кернеу күйінде кернеу сыңарлары θ координатасынан тәуелді емес. Сондықтан тепе-теңдіктің дифференциалдық теңдеуінде осы координат бойынша барлық туындылар нөлге тең болады. Осымен бірге меридиональды жазықтықтарда (z осі арқылы өтетін жазықтықтарда, яғни θ жазықтығында) дененің және сыртқы күштің симметриялығы салдарынан жанама кернеулер пайда болуы мүмкін емес. Сондықтан жанама кернеулердің жұптығын ескеріп, мынаны аламыз: $\tau_{\rho\theta} = \tau_{z\theta} = \tau_{\theta\rho} = \tau_{\theta z} = 0$. Демек, $\sigma_{\theta\theta}$ кернеуі ылғи да басты болады, яғни $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_2$, ал ρ осі z жазықтығында кез келген бағытты алуы мүмкін.

Сөйтіп симметриялы осі бар кернеу күйі үшін – кернеу тензорын былай жазуға болады:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{\rho\rho} & 0 & \tau_{\rho z} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \tau_{z\rho} & 0 & \sigma_{zz} \end{vmatrix}.$$

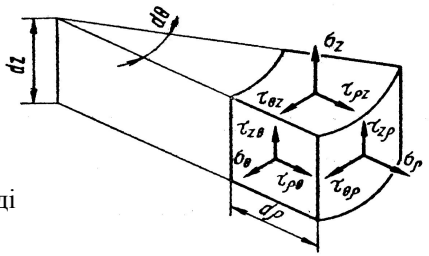
Бар болғаны үш нормальды және бір-біріне тең екі жанама кернеулер тензорда бар.



2.15-сурет. Цилиндрлі координаттар

Декарттық координаттарда көлемдік кернеу күйін қараған кезде қолданылған математикалық әдісті тағы да қолданып симметриялық осі бар кернеу күйі үшін цилиндрлік координатта дифференциалдық тепе-теңдік теңдеуін шығарайық.

Әсер етуші кернеулер 2.17-суретте көрсетілген. ρ осін z жазықтығындағы кез келген бағытта жүргізуге болатыны бұрын айтылды. Есептеуді жеңілдету үшін осы осьті 2.17- суретте ρz жазықтығы бөлінген элементарлы көлем үшін симметриялы жазықтық болатын етіп жүргізген.



2.16-сурет. Цилиндрлі координаттарда кернеулерді белгілеу

Элементарлы аудандардың аудандары мынадай болады:

$$F_\rho = \rho d\theta dz; \quad F_{\rho+d\rho} = (\rho + d\rho)d\theta dz; \quad F_\theta = d\rho dz; \; F_z = \rho d\theta d\rho.$$

Элементке әсер ететін барлық күштерді ρ және z осьтеріне проекциялап тепе-теңдік шартын былай жазайық ($\sin\frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$):

$$-\sigma_{\rho\rho}\rho\, d\theta\, dz+\left(\sigma_{\rho\rho}+\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho}d\rho\right)(\rho+d\rho)d\,\theta\, dz-\sigma_{\theta\theta}d\theta\, d\rho\, dz-$$

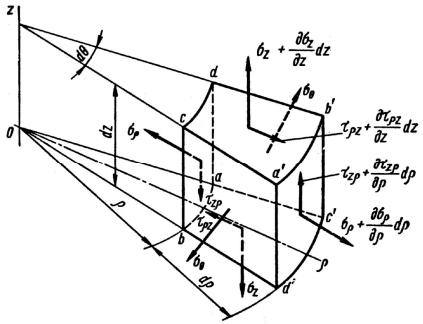
$$-\tau_{\rho z}\,\rho d\,\theta d\,\rho+\left(\tau_{\rho z}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}dz\right)\rho d\,\theta d\,\rho=0;$$

$$-\tau_{z\rho}\rho\, d\theta\, dz+\left(\tau_{z\rho}+\frac{\partial\tau_{z\rho}}{\partial\rho}d\rho\right)(\rho+d\rho)\,d\theta\, dz-\sigma_{zz}\rho d\theta\, d\rho+$$

$$+\left(\sigma_{zz}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}dz\right)\rho d\,\theta\, d\rho=0.$$

Жоғарғы ретті шексіз кішкентай мөлшерлерді ескермей алгебралық өзгерту және қысқартудан кейін мынаны аламыз:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_{\rho\rho}-\sigma_{\theta\theta}}{\rho}=0;\\&\frac{\partial\tau_{z\rho}}{\partial\rho}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{z\rho}}{\partial\rho}=0.\end{aligned}\right\}$$



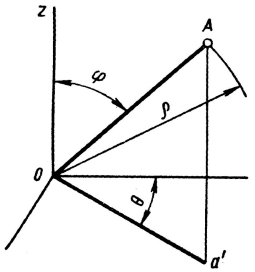
2.17-сурет. Цилиндрлі координаттарда әсер ететін кернеулер

Симметриялық осі бар кейбір есептерді шығарған кезде цилиндрлік координатпен бірге сфералық координатты қолдануға тура келеді. Осы жүйеде нүктенің орналасатын жерін радиус вектор ρ-мен және нүктенің жайын кеңістікте анықтайтын θ және φ бұрыштарымен табады (2.18-сурет).

Осы жағдай үшін кернеу тензорында келесі түр бар болады:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{\rho\rho} & 0 & \tau_{\rho\varphi} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \tau_{\varphi\rho} & 0 & \sigma_{\varphi\varphi} \end{vmatrix}.$$

Симметриялық осі бар кернеу күйі кезінде кернеу θ координатасынан тәуелді емес, ал көрсеткіштерінде осы координат бар жанама кернеулер нөлге тең болады, яғни $\sigma_{\rho\theta} = \sigma_{\theta\rho}$ және $\sigma_{\varphi\theta} = \sigma_{\theta\varphi}$.



2.18-сурет. Сфералық координаттар

Симметриялық осі бар кернеу күйі үшін сфералық координаттағы тепе-теңдіктің дифференциалды теңдігі мына теңдеумен жазылады (шығарусыз келтірілген):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho}\left[2\sigma_{\rho\rho} - \left(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}\right) + \tau_{\rho\varphi}\,ctg\,\varphi\right] = 0; \\ &\frac{\partial\tau_{\varphi\rho}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho}\left[3\sigma_{\rho\rho} + \left(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}\right)ctg\,\varphi\right] = 0. \end{aligned}\right\}$$

Бақылау сұрақтары.

1. Немен ішкі күштік факторлар сырттық күштік факторлардан айырмашылықта болады?
2. Кернеу тензорының диагональдық сыңарларында қандай мағына бар?
3. Кернеу тензорының бүйірлік сыңарларында қандай мағына бар?
4. Көлбеген алаңдағы кернеулер кернеу тензорының сыңарларымен қалай байланысты?

5. (2.5) матрицасы тензор екендігін қалай дәлелдеуге болады?
6. Кернеу тензорының басты осьтеріне қырлары параллельді элементарлы кубтың қабырғаларына қандай кернеулер әсер етеді?
7. Орташа кернеу деп нені айтады?
8. Жанама кернеудің қарқындылығы деп нені айтады?
9. Ең үлкен жанама кернеулердің алаңдары басты осьтерге қатысты қалай бағдарланған?
10. Октаэдрлік кернеулер, алаңдар деп нені айтады?
11. Октаэдрлік алаңда қандай кернеулер әсер етеді?
12. Мор диаграммасын не үшін қолданады?
13. Мор диаграммасының диаметрін қалай анықтайды?
14. Мор диаграммасының центрін қалай табады?
15. Ең үлкен жанама кернеулер әсер ететін алаңның бағыттаушы косинустары неге тең?
16. Октаэдрлік алаңның бағыттаушы косинусы неге тең?
17. Басты кернеулерді қалай анықтайды?
18. Еркін координат жүйесіндегі кернеу тензоры белгілі болса октаэдрлік алаңдағы жанама кернеуді қалай табады?
19. Кернеу тензорын қандай бөлімдерге бөлуге болады?
20. Кернеу девиаторының бірінші инварианты неге тең?
21. Симметриялық осі бар кернеу күйін қараған кезде қандай координатты қолданады?
22. Симметриялы осі бар кернеу күйі үшін кернеу тензорын қалай жазады?
23. Симметриялық осі бар кернеу күйі үшін цилиндрлік координаттағы тепе-теңдіктің дифференциалдық теңдеуі қандай формулалармен анықталады?
24. Симметриялық осі бар кернеу күйі үшін сфералық координаттағы тепе-теңдіктің дифференциалды теңдігі қандай формулалармен анықталады?
25. Көлемдік кернеу күйі үшін тепе-теңдік шарттарын қалай жазады?

3. ТҰТАС ОРТАНЫҢ ДЕФОРМАЦИЯСЫ

Тензор түсінігімен танысып, тұтас орта қозғалысын және осы қозғалыспен байланысты кішкентай және үлкен көлемдердің өлшемдері мен пішіндерінің өзгеруін зерттеуге болады. Осы сұрақтар кинематикада, яғни қозғалысқа шақыратын себептерді талдамай, осы қозғалыстың геометриялық қасиетін зерттеуге арналған механика бөлімінде қаралады.

Әдетте механикада кез келген заттың қозғалысын, әр түрлі уақыт мезгілінде заттың жайын анықтауға көмектесетін қандай болса да есеп беру жүйесіне қатысты зерттейді. Есеп беру жүйесі, басқа дененің жайын анықтау үшін база ретінде қолданылатын есеп беру денесін өзіне қосады. Осы денеге қатысты қозғалмайтын болып мыналар орналасады: қозғалысты қадағалайтын бақылаушы, ара қашықтық пен уақытты өлшеу үшін қолданалатын құрал – саймандар мен аспап. Қағида бойынша, есеп денесіне қатысты қозғалыста болатын дененің жайын анықтау үшін әр түрлі координат жүйесі қолданылады. Есеп беру денесіне қатысты қозғалмайтын декарттық координат жүйесін бақылаушының координат жүйесі деп, ал осыған сәйкесті үш өлшемді евклидтік кеңістікті қозғалмайтын бақылаушының кеңістігі деп атайтын боламыз.

3.1. Лагранж және эйлер айнымалы шамалары

Нүкте және бөлшектер. Тұтас ортада жүретін процестерді зерттегенде нүкте деген термин қолданылады. Бұл терминді екі мағынада қолдануға болады. Біріншісі – бақылаушының қозғалмайтын кеңістігінің белгіленген нүктесі ретінде қарау. Екіншісі осы кеңістіктегі тұтас ортаның қозғалатын материалды нүктесі ретінде қарау. Сондықтан ары қарай нүкте термині кеңістіктің белгіленген нүктесін білдіретін болады. Тұтас ортаның материалды нүктелерін бөлшек деп атайтын боламыз.

Сызық, бет немесе көлем сияқты геометриялық объектілерді қарағанда және бұл сөздерге кеңістіктік немесе материалдық деген сөздерді қосқанда (мысалы, кеңістіктік бет,

материалдық көлем, т. б.) осы фигуралар сәйкесті нүктелерден немесе бөлшектерден құралған деп есептейтін боламыз. Қарап отырған уақыт мезгілінде, байқаушының кеңістігіндегі кейбір D аймақты толтыратын шексіз көп материалды бөлшектер денені құрайды. Денені құрайтын бөлшектердің орналасуы, яғни оның құрама пішіні уақыт өткен сайын жалпы жағдайда өзгереді.

Лагранж айнымалы шамасы. Тұтас ортаның қозғалысын зерттеген кезде тағы да екі түрлі көзқарас пайда болды.

Бірінші көзқарас – Лагранж есімімен байланысты. Осы көзқарас бойынша зерттеу объектісі болып материалды бөлшектердің өздері саналады. Сонда тығыздық, температура, белгіленген материалды бөлшектің жылдамдығы сияқты кейбір скалярлық немесе векторлық мөлшерлердің уақытпен өзгеруі және тағы да осы мөлшерлердің бір бөлшектен екіншісіне өткен кезде өзгеруі қаралады.

Басқаша айтқанда, осы мөлшерлер уақыттан және алынған бөлшектің даралылығын сипаттайтын айнымалылардан функция ретінде қаралады.

Осындай айнымалылар ретінде, мысалы $t = 0$ болатын бастапқы уақыт мезгіліндегі еркін материалды бөлшектің декарттық координатасы X_i -ді қабылдауға болады (3.1-сурет). Онда оның ағымдағы координатасы x_i, байқаушының қозғалмайтын кеңістігіндегі сол базисте, уақыт t -ның және жоғарыда айтылған бөлшектің бастапқы координатасының мынадай функциясы болады:

$$x_1 = \varphi_1(X_1, X_2, X_3, t);$$
$$x_2 = \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t);$$
$$x_3 = \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t)$$

немесе қысқартылған түрде

$$x_i = \varphi_i(X_k, t). \qquad (3.1)$$

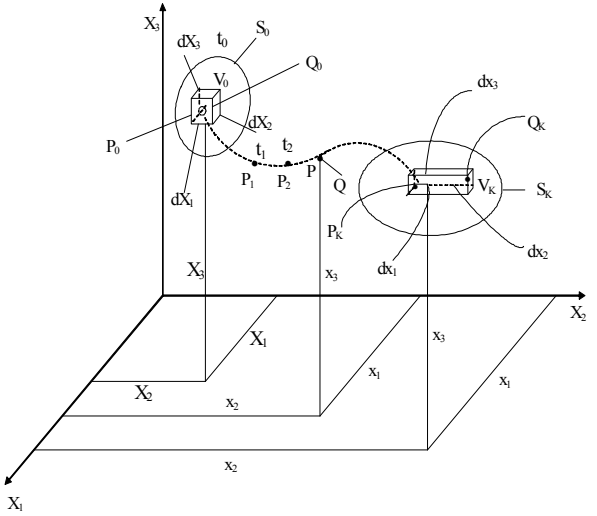
Сөйтіп бастапқы X_i координаталарын белгілеп және уақыт t -ны айнымалы деп есептеп біз бір белгіленген бөлшектің

қозғалу заңын аламыз. X_i -ді айнымалы деп санап және t-ны белгілеп (3.1) формуласы бойынша берілген уақыт мезгілінде кеңістікте материалды бөлшектің таралуын табуға болады.

Егер X_i және t-ны айнымалы деп санаса, онда (3.1) формулалары тұтас ортаның қозғалу заңы болып саналады. Әдеттегідей, соңында $\varphi_i\left(X_i,t\right)$ функциялары үздіксіз және барлық аргументтері бойынша үздіксіз жеке туындылары бар деп есептейтін боламыз, ал кез келген t уақыттарында (3.1) қатынасы өзара бір қатарлы болып келетіндігін ескеруіміз қажет.

X_1, X_2, X_3 айнымалары және t уақыты Лагранж айнымалылары деп аталады. Материалды бөлшек жылдамдығы мен үдеу проекцияларын келесі формулалармен анықтайды:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_i &= \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_i\left(X_k,t\right)}{\partial t}; \\ \omega_i &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi_i\left(X_k,t\right)}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

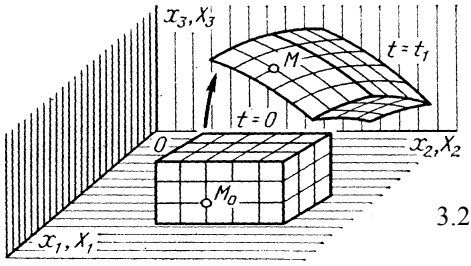


3.1-сурет. Материалды бөлшектің декарттық координат жүйесінде қозғалуы

Жалпы жағдайда қаралатын материалды көлемде бір бөлшекті екінші бөлшектен айыратын X_k декарттық координаттардың орнына, осы бөлшектің бастапқы уақыт мезгіліндегі ($t = 0$) қисық сызықты координатасын β_i-ді қолдануға болатындығын ескерте кету қажет.

Ілеспелі координаттар жүйесі. Осыған дейін тұтас ортаның қозғалысын біз байқаушының есеп беру жүйесіне қатысты қарадық, яғни қозғалмайтын тікбұрышты декарттық координат жүйесі x_1, x_2, x_3 қатысты қарадық. Бірақ та, (2.1) байланыстары бөлшектің кеңістіктегі жайын, оның X_1, X_2, X_3 лагранждық координатасымен толық анықтайтындығын оңай көруге болады. Осы ілеспелі жүйе деп аталатын қозғалмалы деформацияланатын координаттар жүйесін X_1, X_2, X_3, яғни тағы да бір есеп беру жүйесін еңгізуге мүмкіндік береді.

Бастапқы уақыт мезгілінде ілеспелі жүйенің материалды координатты сызықтары түзу болып келеді. Кез келген келесі уақыт мезгілінде, осы ілеспелі жүйенің материалды координатты сызықтары тұтас ортаның бөлшектерімен бірге, осы жүйенің координатты сызықтарына қайтадан ауысады, бірақ та жалпы жағдайда қисайып кетеді. Ілеспелі қисық сызықты координат жүйесі тұтас ортаға бекітілген және осы ортамен бірге деформацияланады деп айтуға болады (3.2-сурет).



3.2-сурет. Көлем элементінің деформациясы

Эйлер айнымалы шамасы. Эйлер есімімен байланысты екінші пікір бойынша, зерттеу объектісі болып қозғалмайтын бақылаушы кеңістігі қабылданады немесе қозғалатын ортамен толтырылған оның белгіленген бөлігі қабылданады. Қозғалысты сипаттайтын әр түрлі мөлшерлер нүкте және уақыт функциясы болып саналады, яғни Эйлер айнымалы шамасы деп аталатын үш аргумент x_i және уақыт t-ның функциясы болады.

Мысалы, $\vec{x}$ радиус-векторы бар кеңістіктің берілген нүктесіндегі жылдамдық үшін формула мына түрді алады:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(\vec{x}, t) = \vec{\upsilon}(x_i, t).$$

Сөйтіп, Эйлердің ойы бойынша, зерттеу объектісі болып әр түрлі өрістер (скалярлық, векторлық немесе тензорлық) есептеледі. Осы өрістер тұтас ортаның қозғалысын сипаттайды.

Эйлерлік айнымалы шамалардан Лагранждық айнымалы шамаларға ауысу. Сонымен Лагранждың көзқарасы бойынша біздің назарымызға жеке бөлшек жылдамдығының, қысымының, температурасының және басқа мөлшерлерінің өзгеру заңдары түседі. Ал Эйлердің көзқарасы бойынша біздің назарымызға кеңістіктің берілген нүктесінде осы шамалардың өзгеру заңдары түседі. Лагранж айнымалы шамасынан Эйлер айнымалы шамасына қалай өтуге болады? Осы сұраққа жауап беру үшін (3.1) байланысына сүйенейік. Айтылған байланысты X_1, X_2, X_3 қатысты шешіп мынаны аламыз:

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t), \qquad (3.3)$$

яғни Эйлер айнымалы шамасына ауысамыз. Егер координатасы x_1, x_2, x_3 болатын нүктені белгілесек, онда (3.3) формуласы қандай жеке бөлшектер t уақтысында белгіленген кеңістік нүктесіне келетіндігін көрсетеді. (3.3) теңдеуін x_k қатысты шеше отырып (3.1) теңдеуін аламыз, яғни Эйлер айнымалы шамаларынан Лагранж айнымалы шамаларына өтеміз.

Осындай ауысудың тағы да бір тәсілін қарайық. x_1, x_2, x_3 координатасы және уақыт t-дан функция ретінде жылдамдық

векторының сыңарлары $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$ бізге берілсін. Тұтас ортаның бөлшектерін дараландыратын X_1, X_2, X_3 параметрлері тұрақты болған кезде, сәйкесті координаттың уақыт бойынша туындысы етіп жылдамдық сыңарларын анықтайтын $\frac{dx_i}{dt} = \upsilon_i(x_k, t)$ дифференциалдық теңдеулер жүйесін жазайық. Осы жүйені шешіп және $t = 0$, $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$ шартынан интегралдау тұрақтысын анықтап іздеген (3.1) байланысын табамыз.

3.2. Түпкі деформацияның тензоры

Лагранждық және Эйлерлік түрде қозғалысты жазу. Бастапқы кезде ығысу кішкентай деген талапты қоймай тұтас ортаның қозғалысын қарайық, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисін таңдайық. Осы базисті байқаушымен салыстырғанда бекітілген деп есептейміз.

Материалды бөлшек бастапқы $t = 0$ уақтысында бастапқы координатасы (X_1, X_2, X_3) болатын кеңістік нүктесінде, ал ағымдағы t уақтысында ағымдағы координатасы (x_1, x_2, x_3) болатын кеңістік нүктесінде орналассын.

Сәйкесті радиус-векторларды мынадай түрде жазуға болады:

$$\vec{X} = X_i \vec{e}_i = X_1 \vec{e}_1 + X_2 \vec{e}_2 + X_3 \vec{e}_3 \qquad (3.4)$$

және

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 . \qquad (3.5)$$

Сонымен бірге мынадай теңдікті де жазу әділ болады:

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u} , \qquad (3.6)$$

мұндағы $\vec{u}$ – орын ауыстыру векторы.

Жоғарыда біз айтқанымыздай, тұтас ортаның қозғалысын бейнелейтін бастапқы және ағымды координаттардың арасындағы байланысты екі түрлі әдіспен көрсетуге болады.

Бірінші Лагранждық әдісте тәуелсіз айнымалы шамалар

болып бөлшектің бастапқы координатасы және уақыт t есептеледі, демек

$$x_i = x_i\left(X_1, X_2, X_3, t\right)$$

немесе векторлық түрде

$$\vec{x} = \vec{x}\left(\vec{X}, t\right). \tag{3.7}$$

Әдеттегідей осы сәйкестік өзара бір қатарлы деп жорамалдаймыз және де (3.1) функцияларында кез келген ретті үздіксіз жеке туындылар бар болады деп есептейміз.

Осымен бірге тұтас ортаның қозғалысын мынадай қатынас түрімен жазуға болады:

$$X_i = X_i\left(x_1, x_2, x_3, t\right)$$

немесе

$$\vec{X} = \vec{X}\left(\vec{x}, t\right). \tag{3.8}$$

Мұнда тәуелсіз айнымалы шамалар болып x_i координаталары және уақыт t саналады. Қозғалысты Эйлерлік әдіспен жазу ағымдағы уақыт мезгілінде (x_1, x_2, x_3) жайын алатын бөлшектің бастапқы координатасын табуға мүмкіндік береді.

Жоғарыдағы жағдай сияқты (3.3) қатынасын өзара бір қатарлы және үздіксіз, яғни барлық аргументтері бойынша үздіксіз жеке туындылары бар деп санайтын боламыз.

Сірә, (3.1) және (3.3) формулалары өзара кері функциялардың жалғыз жұбы түрінде ұсынылған және де тұтас ортаны толтырған аймақтың әрбір нүктесіндегі мынадай функционалды анықтауыш (якобион):

$$\Delta = \left|\frac{\partial x_i}{\partial X_k}\right| \tag{3.9}$$

нөлден айырмашылықта болады.

Бейнелеу. Көлемнің өзгеруі. Еркін бекітілген уақыт t-ның мәні үшін (3.1) және (3.2) функциялар жүйесі екі түрлі көзқараспен қаралуы мүмкін. Жоғарыда баяндалған біреуі бойынша олар байқаушының қозғалмайтын декарттық координат жүйесінде тұтас ортаның қозғалысын (деформациясын) бейнелейді.

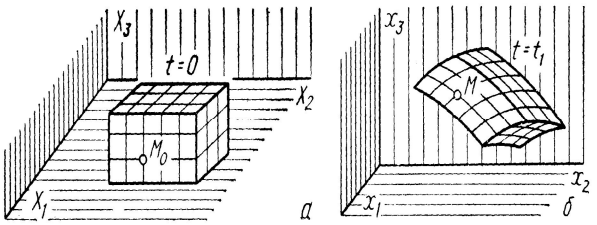
Екінші көзқарас бойынша айтылған жүйелердің бірінші (3.1) жүйесі $OX_1X_2X_3$ декарттық координат жүйесімен жабдықталған үш өлшемді евклидов кеңістігінің кейбір D аймағын (3.3-сурет) $Ox_1x_2x_3$ декарттық координат жүйесімен жабдықталған екінші үш өлшемді евклид кеңістігінің E аймағына тегіс бейнелеуді анықтайды. Уақыттың әр түрлі мезгілінде t дененің сырт пішінін анықтайтын бейнелеудің осындай тізбегі, тұтас ортаның қозғалысын және осы қозғалыспен байланысты деформацияны суреттейді. Бейнелеудің якобионы (3.9), осы бейнелеудің өте маңызды сипаттамасы болып саналады. Бейнелеу якобионының модулі қаралатын нүктедегі бейнелеудің бұрмалану коэффициенті болады. Осы коэффициент, шексіз кішкентай мөлшердің жоғарғы ретке дейінгі дәлдігімен, көрсетілген нүкте кіретін шексіз кішкентай аймақтың көлемі, оны бейнеленген кезде қанша рет өзгеретіндігін көрсетеді. (3.9) якобионы нөлге айналмайтындығы осыдан шығады. Тағы да айтатын нәрсе, ол бейнелеу уақытпен үздіксіз байланысты және бастапқы уақытта ($t = 0$) тепе-теңдікті бейнелеудің якобионы бірге тең болғандықтан, ол ылғи да оң болады.

Ағымдағы көлемі $d\omega$ және бастапқы көлемі dW болатын көлемдердің элементтері үшін мынадай қатынас орынды болады:

$$d\omega = \Delta dW . \qquad (3.10)$$

Қысылмау шартын мына түрде жазуға болады:

$$\Delta = 1 . \qquad (3.11)$$



3.3-сурет. Бейнелеу сияқты тұтас ортаның қозғалысы

Осыған ұқсас t бекітілген кезде (3.3) функциялар жүйесі E аймағын D аймағына бейнелеуді анықтайды. Сонда мынаны жазуға болады:

$$dW = \left|\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right| d\omega . \qquad (3.12)$$

Мысал. Қозғалыс келесі түрде лагранжша жазылсын:

$$x_1 = X_1,\ \ x_2 = X_2 + X_3\left(e^t - 1\right),\ \ x_3 = X_3 + X_2\left(e^{-t} - 1\right).$$

Осы қатынастар ($t = 0$) болған кезде бөлшектің бастапқы жайын анықтайды, яғни $x_1 = X_1, x_2 = X_2, x_3 = X_3$.

Қарама-қарсы функцияларға өтіп, қозғалысты эйлерше жазуды келесі түрде орындаймыз:

$$x_1 = X_1; X_2 = \frac{x_3\left(e^t - 1\right) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}}; X_3 = \frac{x_2\left(e^{-t} - 1\right) - x_3}{1 - e^t - e^{-t}} .$$

Аффиндік бейнелеу. Сызықтық бейнелеудің мынадай түрін:

$$x_i = b_i + a_{ik} X_k \qquad (3.13)$$

аффиндік деп атайды. Аффиндік бейнелеу бүкіл $OX_1X_2X_3$ кеңістігінде анықталған. Бейнелеудің якобионы, яғни $\left|a_{ik}\right|$ анықтаушысы, кеңістіктің әрбір нүктесінде тұрақты мәнді сақтайды.

Аффиндік бейнелеу кез келген сфераны эллипсоид етіп, ал жазықтық пен түзуді жазықтық және түзу етіп бейнелеумен жақсы.

Аффиндік бейнелеумен жазылатын деформацияланатын күй біркелкі деп аталады.

$\left|a_{ik}\right|$ тензорын диагональдық түрге келтірген кезде, бейнелеу жаңа координаттық осьтің бойымен біркелкі созуға (қысуға) келтірілетіндігі 1.1 леммадан келіп шығады. Сонда (3.13) теңдеуі мынадай қарапайым түрді қабылдайды:

$$x_1 = b_1 + a_1 X_1;\ \ x_2 = b_2 + a_2 X_2;\ \ x_3 = b_3 + a_3 X_3 . \qquad (3.14)$$

Әрбір дифференциалданатын бейнелеу жергілікті аффинді болып саналады. Сондықтан шексіз кішкентай аймақтағы

аффиндік бейнелеу, барлық кеңістіктегі аффиндік бейнелеу ие болатын қасиетті иемденеді.

Сонымен, қозғалыс әрқашанда кейбір есеп беру жүйесіне, яғни координат жүйесіне қатысты анықталады. X_1, X_2, X_3 координанттары тікбұрышты декарттық координаттар жүйесінің координаттары болсын. Материалдық бөлшек *P*-нің қозғалысын қарайық (3.1- сурет). Бастапқы кезде ($t = t_0$ уақтысында) осы бөлшек P_0 (X_1, X_2, X_3) орнын алады, S_0 бетімен шектелген бастапқы (деформацияға дейінгі) V_0 көлемде орналасады. Ең ақырғы (деформацияланған) күйде осы бөлшек $P_k(x_1, x_2, x_3)$ жайын алады және S_k бетімен шектелген V_k деформацияланған көлемінде орналасады. Материалды бөлшек *P* қозғалғанда, оның маңызды күйіне $P(x_1, x_2, x_3)$ бөлшегі сәйкес келеді және маңызды күй түсінігіне барлық деформациялау процесінің нәтижесі де (түпкі күйі де) кіреді. Сөйтіп P_0Q_0, PQ және P_kQ_k дегеніміз бастапқы, маңызды және түпкі (нәтижелі) күйлердегі шексіз кішкентай бір материалды талшық. Егер бөлшек таңдалған координат жүйесіне қатысты қозғалса, онда оның x_1, x_2, x_3 координаттары t уақытысы бойынша төмендегідей өзгереді: $x_i = x_i(t),\ i = 1,2,3.$

Қозғалатын материалды бөлшек уақыттың әр түрлі мезгілінде кеңістіктің әр түрлі нүктесіне келеді. Егер $x_i = x_i(t)$ функциясы белгілі болса, онда материалды бөлшектің қозғалыс заңы белгілі болады.

Егер барлық материалды бөлшектің қозғалысы жазылған болса, онда тұтас ортаның ағатын немесе деформацияланатын қозғалыс заңы берілген болар еді. Ол үшін әрбір материалды бөлшекті жекеленген деп есептеу керек, яғни әрбір материалды бөлшекті бастапқы уақыт мезгілінде t_0 нөмірлермен немесе бастапқы күй координаталары X_1, X_2, X_3–пен белгілеп қою

керек. Онда тұтас ортаның қозғалысы, төрт айнымалы шамалар кіретін (3.1) формуласымен жазылады.

Егер (3.1) формуласында X_1, X_2, X_3 координаттары бекітілген болса, онда тұтас ортаның барлық қозғалысынан жалғыз материалды бөлшектің қозғалысын ғана бөліп қарайтын боламыз. Егер X_1, X_2, X_3 координаттары әр түрлі болса, онда (3.1) функциясы бекітілген $t \succ t_0$ уақыт мезгілінде материалды бөлшектердің кеңістікте таралуын анықтауға мүмкіндік береді. Осындай жағдайда материалды бөлшектер арасындағы ара қашықтықтың өзгеруі тіркелген болар еді. Сөйтіп (3.1) функциясы белгілі болса, онда тұтас ортаның деформация заңы берілген болады. Жоғарыда айтылған жағдайда деформация термині бастапқы және маңызды, соның ішінде түпкі (немесе нәтижелі) күйлерді салыстыруға қолданылады. Бірақ та уақыт бойынша деформацияланудың тарихы қаралмайды. (3.1) теңдеуіндегі X_1, X_2, X_3 координаттары және уақыт t Лагранж айнымалылары деп аталатындығын жоғарыда айттық. Тұтас ортадағы материалды бөлшектердің орын ауысуын төмендегі формуламен анықтайды:

ағыс үшін

$$u_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(X_1, X_2, X_3, t) - X_i; \qquad (3.15)$$

деформация үшін

$$u_i(X_1, X_2, X_3) = x_i(X_1, X_2, X_3) - X_i. \qquad (3.16)$$

Деформацияланатын қатты дене механикасындағы нақтылы есептерді шығарған кезде, іздейтін мөлшерлер болатын және континуумның қозғалыс заңына кіретін функциялар (3.1) үздіксіз және өзінің барлық аргументтері бойынша үздіксіз жеке туындылары бар деп әдетте пайымдайды. Әрбір бекітілген уақыт мезгілінде (3.1) функциялары өзара бір қатарлы байланыста болуы керектігі физикалық түсініктен шығады. Себебі, олай болмайтын болса екі материалды бөлшек кеңістіктің бір нүктесіне бірдей баруы мүмкін. Сондықтан (3.1) теңдеулер жүйесінің жалғыз ғана шешімі бар болады. Осы

шешім бойынша X_1, X_2, X_3 координаттарын x_1, x_2, x_3 координаттары және уақыт t функциясы ретінде (3.3) формуласымен анықтайды.

Деформацияға дейінгі жазықтықтар мен түзулер деформациядан кейін де жазықтар мен түзулер болып қалатын өте кішкентай кесіндіні, ауданды, көлемді деформацияланатын ортадан таңдап алуға болады. Осылай деформацияланатын ортада сфера эллипске айналатындығы бұрын айтылды. Осындай басқа түрге айналу сызықтық немесе аффиндік деп аталады. Аффиндік басқа түрге айналумен жазылатын деформациялық күй біркелкі деп аталады, ал (3.1) байланыстылығы (3.13) формуласымен жазылатын түрді алады.

Түрлендірудің якобионы (сызықтық немесе аффиндік түрлендірудің), яғни $|c_{ik}|$ анықтаушысы нөлге тең болмайды және (3.13) теңдеулер жүйесіне сәйкесті, кеңістіктің әбден белгілі $x_i(i=1,2,3)$ нүктесіне ие болатын X_1, X_2, X_3 координатасы бар әрбір жеке материалды бөлшек үшін тұрақты мәнді сақтайды. Демек, бекітілген уақыт мезгілі t және x_i, b_i, c_{ik} белгілі мәндері үшін (3.13) теңдеулер жүйесін X_k белгісіздеріне қатысты шешіп мынадай функционалдық байланысты анықтауға болады:

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3). \tag{3.17}$$

Осыдан кейін ретті t-ның әр түрлі мәндері үшін ағу заңдарын (3.3) формуласы бойынша табуға болады.

(3.3) және (3.17) формуласындағы x_1, x_2, x_3 координаталары және уақыт t Эйлер айнымалысы деп аталатындығы жоғарыда айтылды. Тұтас ортаның материалдық бөлшектерінің орын ауысуы мына формула бойынша жазылады:

ағыс үшін

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = x_i - X_i(x_1, x_2, x_3, t); \tag{3.18}$$

деформация үшін

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = x_i - X_i(x_1, x_2, x_3). \tag{3.19}$$

Сонымен Лагранждық және Эйлерлік айнымалы шамалар бір ғана декарттық координаттар жүйесіне қатысты болады. Тұтас ортаның ағысын (3.15), (3.18) және деформациясын (3.16), (3.19) Лагранждық және Эйлерлік айнымалы шамалармен бейнелеудің арасындағы айырмашылық келесіден тұрады.

Тұтас ортаның ағысын және деформациясын (3.15) және (3.16) түрінде Лагранждық бейнелегенде, бастапқы уақыт t_0 мезгілінде координатасы X_1, X_2, X_3 болатын әрбір материалды бөлшектің қозғалысын бақылап отырады, яғни мұнда $X_i = const$. Әр түрлі уақыт t мезгілінде тұтас ортаның деформациясын бейнелеу, әрбір материалды бөлшектің орын ауыстыру векторының теңдеуімен беріледі және де $u_i(X_1, X_2, X_3, t_0) = 0$.

Тұтас ортаның қозғалысын (3.18) және (3.19) түрінде Эйлерлік бейнелегенде кеңістіктің әрбір белгіленген нүктесінде болатынды бақылайды, яғни мұнда $x_i = const$. Деформациялау процесінде кеңістіктің белгіленген нүктесі арқылы әр түрлі материалды бөлшектер өтеді, яғни $X_i = \text{var}$. Сондықтан орын ауыстырудың шамасы уақыт бойынша өзгереді, бірақ та $u_i(x_1, x_2, x_3, t) = 0$.

Уақыт $t = t_0 = 0$ мезгілінде $u_i(X_i) = 0$ және $u_i(x_i) = 0$ теңдіктерінің бар болуы бастапқы уақыт t_o мезгілінде тұтас ортаның деформацияланбағанын, бастапқы орын ауыстырудың және кернеудің жоқтығын дәлелдейді.

Сонымен, Лагранждың көзқарасы бойынша зерттеушіні тұтас ортадан берілген жеке материалды бөлшектің жылдамдығының, үдеуінің, температурасының, кернеуінің, деформациясының және басқа мөлшерлерінің уақыт бойынша өзгеру заңдылықтары зауықтандырады. Ал Эйлердің көзқарасы бойынша зерттеушіні кеңістіктің нүктесінде (немесе нүктелерінде) жылдамдықтың, үдеудің, температураның, кернеудің және басқа мөлшерлердің уақыт бойынша өзгеру заңдылықтары зауықтандырады.

Түпкі деформацияның тензоры. Тұтас ортаның деформациясын бейнелеу мақсатымен екі жақын материалды бөлшектің орын ауыстыруын қарайық. Бастапқы мезгілде олар M_0 және N_0 нүктелерінде орын алсын (3.4-сурет), ал соңғы уақыт мезгілінде M және N нүктелеріне орын ауыстырсын.

M және N нүктелердің арасындағы шексіз кішкентай ара қашықтықтың екі есе дәрежесі мынаған тең: $(dx)^2 = d\vec{x}d\vec{x} = dx_p dx_p$.

Қозғалысты Лагранжша жазуды негіз етіп алайық. (1.46) формуласы бойынша мынаны жазуға болады:

$$d\vec{x} = \left(\frac{d\vec{x}}{d\vec{X}}\right)d\vec{X}$$

немесе скалярлық түрде жазсақ мынаны аламыз:

$$dx_p = \left(\frac{\partial x_p}{dX_i}\right)dX_i.$$

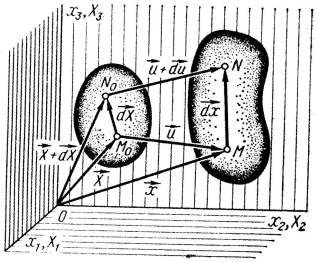
Нәтижесінде элемент ұзындығының екі есе дәрежесі мынаған тең болады:

$$(dx)^2 = \frac{\partial x_p}{\partial x_i}\frac{\partial x_p}{\partial X_k}dX_i dX_k. \qquad (3.20)$$

Бастапқы уақыт мезгіліндегі материалды бөлшектер арасындағы ара қашықтықтың екі есе дәрежесі мынаған тең болсын:

$$(dX)^2 = d\vec{X}d\vec{X} = dX_p dX_p = \delta_{ik}dX_i dX_k,$$

мұндағы δ_{ik} – кронекер символы.



3.4-сурет. Көлем элементінің түпкі деформациясы

Бөлшектердің айналасындағы деформацияның өлшемі ретінде мынадай айырымды алайық:

$$(dx)^2-(dX)^2=\left(\frac{\partial x_p}{\partial X_i}\frac{\partial x_p}{\partial X_k}-\delta_{ik}\right)dX_i dX_k=2\hat{\varepsilon}_{ik}dX_i dX_k. \qquad (3.21)$$

Егер дененің барлық нүктелерінде мынадай шарт орындалса: $(dx)^2-(dX)^2=0$, онда мұндай дененің қозғалысы мүлде қатты қозғалыс деп аталады. Егер дененің M нүктесіндегі инвариантқа мынадай шарт орындалса $(dx)^2-(dX)^2\neq 0$, онда бұл нүктеде дене деформацияланған күйде деп айтылады.

(3.21) теңдеуіндегі мынадай екінші рангілі тензорды:

$$L_{ik}=\frac{\partial x_p}{\partial X_i}\frac{\partial x_p}{\partial X_k} \qquad (3.22)$$

Лагранждық түсініктегі Коши деформациясының тензоры деп атайды. Осы тензордың алты сыңарларының кейбіреуінің жайылған түрі мынадай болады:

$$L_{11}=\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial X_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_3}{\partial X_1}\right)^2;$$

$$L_{12}=\frac{\partial x_1\partial x_1}{\partial X_1\partial X_2}+\frac{\partial x_2\partial x_2}{\partial X_1\partial X_2}+\frac{\partial x_3\partial x_3}{\partial X_1\partial X_2}.$$

Екінші валентті симметриялық тензор мынадай сыңарларымен:

$$\hat{\varepsilon}_{ik}=\frac{1}{2}\left(L_{ik}-\delta_{ik}\right) \qquad (3.23)$$

немесе

$$\hat{\varepsilon}_{ii}=\frac{1}{2}\left(L_{ii}-1\right);\quad \hat{\varepsilon}_{ik}=\frac{1}{2}L_{ik}$$

түпкі деформацияның лагранждық тензоры (*Грин тензоры*) деп аталады.

Осы тензорды орын ауыстыру шамалары кіретін сыңарлары бар тензор түрінде көрсету ыңғайлы.

Орын ауыстыру анықталатын мына формуланы жазайық: $u_p = x_p - X_p$.

Жоғарыда жазылған формуладан мынаны табамыз: $x_p = u_p + X_p$. Алынған теңдеуді дифференциалдағаннан кейін мынаны аламыз:

$$\frac{\partial x_p}{\partial X_i} = \frac{\partial u_p}{\partial X_i} + \delta_{pi} \quad \text{және} \quad \frac{\partial x_p}{\partial X_k} = \frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \delta_{pk}.$$

Екі соңғы формулаларды (3.20) теңдеуіне қойып деформацияланған талшықтың (MN) модулінің екі есе дәрежесі мен орын ауыстырудың мынадай байланысын табамыз:

$$(dx)^2 = \left[\frac{\partial u_p}{\partial X_i} + \delta_{pi}\right]\left[\frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \delta_{pk}\right] dX_i dX_k =$$

$$= \left[\frac{\partial u_p}{\partial X_k}\frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \frac{\partial u_p}{\partial X_i}\delta_{pk} + \frac{\partial u_p}{\partial X_k}\delta_{pi} + \delta_{pi}\delta_{pk}\right] dX_i dX_k.$$

Мына теңдіктер орындалатын болғандықтан:

$$\frac{\partial u_p}{\partial X_i}\delta_{pk} = \frac{\partial u_i}{\partial X_k}; \quad \frac{\partial u_p}{\partial X_k}\cdot\delta_{pi} = \frac{\partial u_k}{\partial X_i}; \quad \delta_{pi}\delta_{pk} = \delta_{ik}$$

төмендегі формуланы аламыз:

$$(dx)^2 = \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_p}{\partial X_i}\frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \delta_{ik}\right] dX_i dX_k. \qquad (3.24)$$

(3.21) және (3.24) формулаларын салыстыру мынаны жазуға мүмкіндік береді:

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_p}{\partial X_i}\frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \delta_{ik}\right] dX_i dX_k -$$

$$- \delta_{ik} dX_i dX_k = \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_p}{\partial X_i}\frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \delta_{ik} - \delta_{ik}\right] dX_i dX_k = \qquad (3.25)$$

$$= \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_p}{\partial X_i}\frac{\partial u_p}{\partial X_k}\right] dX_i dX_k.$$

Сонда, лагранждық түсініктегі Коши деформациясының

тензорын орын ауыстыру арқылы мына түрде жазуға болады:

$$L_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_p}{\partial X_i}\frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \delta_{ik}, \qquad (3.26)$$

ал Грин тензорының сыңарларын орын ауыстыру тензорының функциясы түрінде келесі қатынастар бойынша анықтайды:

$$\hat{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_p}{\partial X_i}\frac{\partial u_p}{\partial X_k}\right]. \qquad (3.27)$$

(3.27) формуласы түрінде жазылған Грин тензорының алты сыңарларының кейбіреуінің жайылған түрі мынадай болады:

$$\hat{\varepsilon}_{22} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3}\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right] =$$

$$= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)^2\right];$$

$$\hat{\varepsilon}_{23} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right].$$

Қозғалысты эйлерлік түрде бейнелеуді негіз етіп алып деформация тензорлары сыңарларын анықтайтын формулаларды шығаруды қайталайық.

(1.46) формула бойынша мынаны жазуға болады:

$$dX_p = \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_i}\right)dx_i.$$

Нәтижесінде элемент ұзындығының екі есе дәрежесі мынаған тең болады:

$$(dX)^2 = \frac{\partial X_p}{\partial x_i}\frac{\partial X_p}{\partial x_k}dx_i dx_k. \qquad (3.28)$$

Ақырғы уақыт мезгіліндегі материалды бөлшектер арасындағы ара қашықтықтың екі есе дәрежесі мынаған тең:

$$(dx)^2 = d\vec{x}d\vec{x} = dx_p \cdot dx_p = \delta_{ik}dx_i dx_k.$$

Бөлшектердің айналасындағы деформацияның өлшемі ретінде мына айырымды алайық:

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \delta_{ik} dx_i dx_k - \frac{\partial X_p}{\partial x_i} \frac{\partial X_p}{\partial x_k} \partial x_i \partial x_k = \\ = \left(\delta_{ik} - \frac{\partial X_p}{\partial x_i} \frac{\partial X_p}{\partial x_k} \right) dx_i dx_k = 2\tilde{\varepsilon}_{ik} dx_i dx_k . \tag{3.29}$$

Соңғы теңдеудегі мынадай екінші рангілі тензорды:

$$E_{ik} = \frac{\partial X_p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_p}{\partial x_k} \tag{3.30}$$

Эйлерлік түсініктегі Коши деформациясының тензоры деп атайды. Сірә, E_{ik}-нің алты сыңарлары $(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{23}, E_{13})$ жаңа симметриялық тензор құрайды және кейбіреуін мына формуламен анықтауға болады:

$$E_{33} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_3} \right)^2 ;$$

$$E_{13} = \frac{\partial X_1 \partial X_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial X_2 \partial X_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \frac{\partial X_3}{\partial x_3} .$$

Мынадай сыңарлары бар екінші валентті симметриялық тензорды:

$$\tilde{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ik} - \frac{\partial X_p}{\partial x_i} \frac{\partial X_p}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} (\delta_{ik} - E_{ik}) \tag{3.31}$$

немесе

$$\tilde{\varepsilon}_{ii} = \frac{1}{2} (1 - E_{ii}); \quad \tilde{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2} E_{ik} .$$

түпкі деформацияның эйлерлік тензоры (*Альмансы тензоры*) деп атайды.

Жоғарыда жазылған әдістемені қолданып, Альмансы тензорының сыңарларын орын ауыстыру арқылы анықтауға болады.

Орын ауыстыру анықталатын формуладан мынаны табамыз: $X_p = x_p - u_p$. Алынған теңдеуді дифференциалдағаннан кейін мынаны табамыз:

$$\frac{\partial X_p}{\partial x_i} = \frac{\partial x_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_p}{\partial x_i} = \delta_{pi} - \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \quad \text{және}$$

$$\frac{\partial X_p}{\partial x_k} = \frac{\partial x_p}{\partial x_k} - \frac{\partial u_p}{\partial x_k} = \delta_{pk} - \frac{\partial u_p}{\partial x_k}.$$

Екі соңғы формулаларды (3.28) теңдеуіне қойып деформацияланған талшықтың (MN) модулінің екі есе дәрежесі мен орын ауыстырудың мынадай байланысын табамыз:

$$(dX)^2 = \left[\delta_{pi} - \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right]\left[\delta_{pk} - \frac{\partial u_p}{\partial x_k}\right] dx_i dx_k =$$

$$= \left[\delta_{pi}\delta_{pk} - \frac{\partial u_p}{\partial xk}\delta_{pi} - \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\delta_{pk} + \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\right] dx_i dx_k.$$

Мына теңдіктер орындалатын болғандықтан:

$$\delta_{pi}\delta_{pk} = \delta_{ik}; \quad \frac{\partial u_p}{\partial x_k}\delta_{pi} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\delta_{pk} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

төмендегі формуланы аламыз:

$$(dX)^2 = \left[-\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_k} + \delta_{ik}\right] dx_i dx_k. \qquad (3.32)$$

(3.29) және (3.32) формулаларын салыстыру мынаны жазуға мүмкіндік береді:

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \delta_{ik} dx_i dx_k - \left[-\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_k} + \delta_{ik}\right] \times$$

$$\times dx_i dx_k = \left[\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_k} - \delta_{ik}\right] dx_i dx_k = \qquad (3.33)$$

$$= \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\right] dx_i dx_k.$$

Сонда Эйлерлік түсініктегі Коши деформациясының тензорын орын ауыстыру арқылы мына түрде жазуға болады:

$$E_{ik} = \delta_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}, \qquad (3.34)$$

ал Альманси тензорының сыңарларын орын ауыстыру тензорының функциясы ретінде келесі байланыстар бойынша анықтауға мүмкіндік береді:

$$\widetilde{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\right]. \qquad (3.35)$$

Логарифмдік деформация. Әрбір L_{ik} және E_{ik} симметриялық тензорлары үшін координат жүйесін бұрып, (3.20) және (3.28) тензорлық эллипсоид теңдеулерін диагональды емес сыңарлары нөлге айналатын каноникалық түрге келтіруге болады. E_{ik} және L_{ik} тензорының мынадай диагональды түрге келтірілген L_j және E_j сыңарлары:

$$L_j = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \text{ және } E_j = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}$$

төмендегі сипаттамалық теңдеулерден анықталады:

$$\lambda^3 - \lambda^2 L^I + \lambda L^{II} - L^{III} = 0; \qquad (3.36)$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 E^I + \lambda E^{II} - E^{III} = 0, \qquad (3.37)$$

мұндағы $\lambda - L_j$ және E_j-дің басты мәндері; $L^I, L^{II}, L^{III}; E^I, E^{II}, E^{III}$ – L_{ik} және E_{ik} тензорларының сәйкесті бірінші, екінші, үшінші инварианттары.

$$L^I = L_{ik} \cdot \delta_{ik}; \qquad E^I = E_{ik} \cdot \delta_{ik};$$

$$L^I = L_{11} + L_{22} + L_{33}; \qquad E^I = E_{11} + E_{22} + E_{33};$$

$$L^{II} = \frac{1}{2}\left(L_{ii}L_{kk} - L_{ik}L_{ik}\right); \qquad E^{II} = \frac{1}{2}\left(E_{ii}E_{kk} - E_{ik}E_{ik}\right);$$

$$E^{II} = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{31} & E_{33} \end{vmatrix};$$

$$L^{III} = \varepsilon_{ijk} L_{1i} \cdot L_{2j} \cdot L_{3k}; \quad E^{III} = \varepsilon_{ijk} E_{1i} \cdot E_{2j} \cdot E_{3k};$$

$$L^{III} = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}; \qquad E^{III} = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{vmatrix}.$$

Деформация процесінде элементарлы сфера эллипсоидқа айналады. Бұл бейнелеудің жергілікті аффиностілігінен келіп шығады. Осындай сфераның эллипсоидқа айналатындығын дәлелдеу мақсатымен деформацияланбаған ортадан радиусы dr болатын сфералық бетпен шектелген материалдық көлемді алайық. Бастапқы координаттағы осындай беттің теңдеуі мынадай болады: $(dX)^2 = \delta_{ik} dX_i dX_k = dr^2$.

Деформация жасалғаннан кейін сол материалды көлемнің беттік теңдеуі мына түрді қабылдайды:

$$(dX)^2 = \delta_{ik} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_p} \partial x_p \right) \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_q} dx_q \right) = dr^2$$

немесе

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_p} \frac{\partial X_i}{\partial x_q} dx_p dx_q = dr^2. \qquad (3.38)$$

Осы теңдеу деформацияның материалды эллипсоиды ретінде белгілі dr_1, dr_2, dr_3 жартылай осьтері бар эллипсоидты анықтайды.

Эллипсоидтың жартылай осьтері мынадай қатынаста болсын: $dr_1 \geq dr_2 \geq dr_3$. Онда (3.36) теңдеуінен анықталатын басты деформациялар мынаған тең болады:

$$L_1 = \left(\frac{dr}{dr_1} \right)^2; \; L_2 = \left(\frac{dr}{dr_2} \right)^2; \; L_3 = \left(\frac{dr}{dr_3} \right)^2. \qquad (3.39)$$

Сөйтіп $dr_1 \geq dr_2 \geq dr_3$ теңсіздігінен $L_1 \leq L_2 \leq L_3$ теңсіздігі шығады. Сондықтан ең үлкен деформацияға L_k-ның ең кішкентай мәні сәйкес келеді.

Сірә, қос нәтижелік сырт пішінді өзгерту тензорларының басты мәндері мына қарапайым қатынастарымен байланысты:

$$L_1 = \frac{1}{E_1}; \quad L_2 = \frac{1}{E_2}; \quad L_3 = \frac{1}{E_3}. \tag{3.40}$$

Логарифмдік деформацияны есептеп мынаны аламыз:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \ln \frac{dr_1}{dr}; \quad \bar{\varepsilon}_2 = \ln \frac{dr_2}{dr}; \quad \bar{\varepsilon}_3 = \ln \frac{dr_3}{dr} \tag{3.41}$$

және қарауымызға мына логарифмдік деформацияның тензорын енгіземіз:

$$T_{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}. \tag{3.42}$$

Осы тензордың басты осьтері материалды эллипсоидтың осьтерімен дәл келеді және $\bar{\varepsilon}_i$-дің басты сыңарлары *басты логарифмдік деформация* деп аталады.

Еркін координат жүйесіндегі тензор сыңарларын (3.27) және (3.35), содан кейін (3.23) және (3.31) формулаларын қолданып табуға болады.

Нәтижелік сырт пішінді өзгерту тензорларының L_1, L_2, L_3, E_1, E_2, E_3 сыңарлары логарифмдік деформациялар арқылы былай көрсетіледі:

$$\left.\begin{aligned} 2\bar{\varepsilon}_1 &= \ln E_1 = -\ln L_1; \\ 2\bar{\varepsilon}_2 &= \ln E_2 = -\ln L_2; \\ 2\bar{\varepsilon}_3 &= \ln E_3 = -\ln L_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.43}$$

Сөйтіп басты логарифмдік деформацияны анықтау үшін бір нәтижелік сырт пішінді өзгерту тензорының сыңарларын (Коши

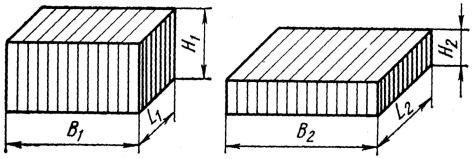
деформациясы тензорының сыңарларын) және осы тензордың басты мәнін табу қажет.

Қысылмаушылық шарты қалай жазылатындығын қарайық. Деформацияға дейінгі элементарлы сфераның көлемі мынаған тең: $dW = \frac{4}{3}\pi(dr)^3$, ал материалды эллипсоидтың көлемі былай табылады: $d\omega = \frac{4}{3}\pi dr_1 dr_2 dr_3$. Осы көлемдерді теңестіре отырып және алынған теңдіктің екі жағын да логарифмдеп мына формуланы аламыз:

$$\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3 = 0, \qquad (3.44)$$

яғни логарифмдік деформациялардың қосындысы нөлге тең болады.

Логарифмдік деформацияны толығырақ зерттеу үшін тікбұрышты параллелепипедтің біркелкі деформациясын қарайық. Параллелепипедтің бастапқы енін, ұзындығын және биіктігін B_1, L_1, H_1 әріптерімен, ал деформацияның ағымдағы уақытысындағы осы параллелепипедтің енін, ұзындығын және биіктігін B, L, H әріптермен белгілейік. Параллелепипедтің ақырғы өлшемдері болып B_2, L_2, H_2 саналатын болсын (3.5-сурет).



3.5-сурет. Тікбұрышты параллелепипедтің біркелкі деформациясы

Параллелепипед dH биіктігіне шөктірілді деп есептейік. Осы шөктіруге сәйкесті шексіз кішкентай салыстырмалы деформация мынаған тең болады: $d\bar{\varepsilon}_H = \frac{dH}{H}$.

H_1 биіктігінен H_2 биіктігіне дейін шөктірген кезде салыстырмалы деформацияның жиынтығы мынаған тең болады:

$$\bar{\varepsilon}_H = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dH}{H} = \ln \frac{H_2}{H_1}.$$

Осы деформацияға ұқсайтын ен мен ұзындық бағыттарындағы деформациялар былай анықталады:

$$\bar{\varepsilon}_B = \int_{B_1}^{B_2} \frac{dH}{H} = \ln \frac{B_2}{B_1}; \quad \bar{\varepsilon}_L = \int_{L_1}^{L_2} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L_2}{L_1}.$$

Сөйтіп біркелкі деформация кезінде логарифмдік деформацияны табу үшін өте шексіз кішкентай деформациялардың қосындысын табу керек. Сондықтан, логарифмдік деформацияны көп жағдайда дәл деформация деп атайды.

Дененің деформациядан кейінгі өлшемдерін осы өлшемдерге сай деформацияға дейінгі өлшемдерге қатынастырып мына коэффициенттерді табады:

$\eta = \frac{H_2}{H_1}$ – шөктіру коэффициенті (жаншу);

$\beta = \frac{B_2}{B_1}$ – кеңейту коэффициенті;

$\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ – ұзарту коэффициенті (ұзарту).

Дененің көлемі тұрақты болған кезде мынадай теңдік орынды болады:

$$H_1 \cdot B_1 \cdot L_1 = H_2 \cdot B_2 \cdot L_2.$$

Осы теңдіктің оң жағын сол жаққа бөлген кезде мынаны табуға болады:

$$\frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{B_2}{B_1} \cdot \frac{L_2}{L_1} = \eta \cdot \beta \cdot \lambda = 1.$$

Жоғарыдағы теңдіктің екі жағында логарифм десек материалдың қысылмаушылық шартын мына түрде табамыз: $\ln\eta + \ln\beta + \ln\lambda = \bar{\varepsilon}_H + \bar{\varepsilon}_B + \bar{\varepsilon}_L = 0.$

3.1 – есеп. Түпкі деформациялар.

Материалды бөлшектердің бастапқы координаттары $t = t_1$ болған кезде ағымдағы координаттармен мынадай қатынаспен байланысты (біркелкі деформация) (3.6-сурет):

$$x_1 = a_1 X_1; \quad x_2 = a_2 X_2; \quad x_3 = a_3 X_3.$$

Лагранждық және Эйлерлік түпкі деформация үшін, ал тағы да логарифмдік деформация тензор сыңарлары үшін формулаларды табыңыздар.

Шешуі.

$i \neq k$ болған кезде төмендегі теңдіктер орындалатындықтан:

$\frac{\partial x_1}{\partial X_1} = a_1;\ \frac{\partial x_2}{\partial X_2} = a_2;\ \frac{\partial x_3}{\partial X_3} = a_3;$ ал $\frac{\partial x_i}{\partial X_k} = 0$ мынаған ие боламыз:

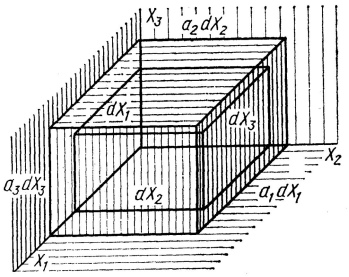
$$T_{\hat{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(a_1^2 - 1\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(a_2^2 - 1\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(a_3^2 - 1\right) \end{bmatrix}.$$

Жоғарыдағы ұқсас етіп мыналарды алуға болады:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\grave{a}_1};\ \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = \frac{1}{a_2};\ \frac{\partial X_3}{\partial x_3} = \frac{1}{a_3};\ \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = 0 \quad i \neq k \qquad (3.45)$$

болған кезде

$$T_{\tilde{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1^2} - 1\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_2^2} - 1\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_3^2} - 1\right) \end{bmatrix}.$$



3.6-сурет. 3.1–есебі үшін

Логарифмдік деформациялардың сыңарларын есептеуге ауысайық. Деформацияға дейінгі материалдық сфераның теңдеуінде мынадай түр бар: $dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 = dr^2$.

Материалды эллипсоидтың теңдеуін былай жазуға болады: $\frac{\partial X_i}{\partial x_p}\frac{\partial X_i}{\partial x_q}dx_p dx_q = dr^2$. Осы теңдеуге (3.45) байланыстарын қойған кезде, айтылған теңдеу мынадай түрді алады:

$$\frac{dx_1}{(a_1 dr)^2} + \frac{dx_2}{(a_2 dr)^2} + \frac{dx_3}{(a_3 dr)^2} = 1.$$

Эллипсоидтың басты жартылай осьтері мынаған тең: $dr_1 = adr;\quad dr_2 = a_2 dr;\quad dr_3 = a_3 dr$. Басты логарифмдік деформациялар мынаған тең болады: $\bar{\varepsilon}_1 = \ln a_1;\quad \bar{\varepsilon}_2 = \ln a_2;$ $\bar{\varepsilon}_2 = \ln a_3$. Сонда мына логарифмдік деформацияның тензорын аламыз:

$$T_{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \ln a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln a_3 \end{bmatrix}.$$

$T_{\hat{\varepsilon}}$, $T_{\tilde{\varepsilon}}$ және $T_{\bar{\varepsilon}}$ тензорларының басты осьтері координаттар осьтерімен дәл сәйкес келеді.

3.3. Кішкене деформацияның тензоры

Енді жалпы танысудан бас тартып орын ауыстырудың сыңарлары және олардың градиенттері кішкентай деп есептейміз.

Сонымен қатар $\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \prec\prec 1$ деп есептеп (3.27) формуласындағы осы мөлшерлердің көбейтіндісін алып тастауға

болады. Нәтижесінде мына сыңарлары бар лангранждық кіші деформация тензорын аламыз:

$$\hat{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right).$$

Осыған ұқсас $\partial u_i / \partial x_k$ бірімен салыстырғанда кіші деп есептеп (3.35) формуласында олардың көбейтіндісін алып тастап мына сыңарлары бар эйлерлік кіші деформация тензорын аламыз:

$$\tilde{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).$$

Ығысуды кішкентай деп болжау лангранждық және эйлерлік координаттар арасында айырмашылық жоқ, ал сәйкесті тензорлар бір-біріне дәл келеді деп есептеуге әкеледі, яғни $\hat{\varepsilon}_{ik} = \tilde{\varepsilon}_{ik}$.

Ары қарай, кішкене деформация теориясында тек лангранждық координат қолданылатын болады және уақыттың мынадай екі кезеңін қарайтын боламыз: бастапқы $(t = 0)$ және түпкі $(t = t_1)$.

Материалды бөлшектің соңғы жайын ($t = t_1$ болған кезде) $\vec{u}$ орын ауыстыру векторының көмегімен анықтайтын боламыз. Осы, материалды бөлшектің бастапқы (лангранждық) координаттарын x_i кіші әрпімен жаза отырып белгілеу жүйесін өзгертуге мүмкіндік береді. Сонда орын ауыстырудың векторлық өрісі мына түрде жазылады: $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$.

Тұтас орта элементінің тасымалдануы айналуы және деформациясы. Тұтас ортаның қозғалысы абсолютті қатты дененің қозғалысынан ауырмашылықта болады. Өйткені көрші бөлшектердің арасындағы ара қашықтық өзгереді, орта деформацияланады.

Деформацияланбайтын денеде бөлшек *M*-ді (радиус-векторы $\vec{x}$) және оған жақын бөлшек *N*-ді (радиус-векторы $\vec{x}+d\vec{x}$) бөлейік.

M бөлшегінің орын ауыстыруы $\vec{u}(\vec{x})$ тең болады, ал көрші *N* бөлшектің орын ауыстыруы мынаған тең:

$$\vec{u}(\vec{x}+d\vec{x})=\vec{u}(\vec{x})+d\vec{u}\,. \qquad (3.46)$$

(1.46) формуласына сәйкесті (3.46) теңдеуіндегі дифференциал былай анықталады:

$$d\vec{u}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{x}}d\vec{x}=\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right]d\vec{x}\,. \qquad (3.47)$$

$\left[\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\right]$ тензорын ($\vec{u}$ векторының $\vec{x}$ векторлық аргумент бойынша туындысы) симметриялық және қисық симметриялық тензорлардың қосындысына жіктеп мынаны аламыз:

$$\vec{u}(\vec{x}+d\vec{x})=\vec{u}(\vec{x})+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]d\vec{x}+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]d\vec{x}\,.$$

Екінші қосылғышты біраз түрлендірейік. Ол үшін қисық симметриялы тензорды мына түрде көрсетейік:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix},$$

мұндағы $\vec{\omega}=0{,}5\,rot\,\vec{u}$ [(1.48) формуласын қараңыз].

Жоғарыда жазылған түрлендіру мынаны алуға мүмкіндік береді:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]dx=\vec{\omega}\times d\vec{x}=\frac{1}{2}rot\vec{u}\times d\vec{x}\cdot$$

Осыдан мынау шығады:

$$\vec{u}\left(\vec{x}+d\vec{x}\right)=\vec{u}\left(\vec{x}\right)+\frac{1}{2}rot\vec{u}\times d\vec{x}+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]d\vec{x}\,. \qquad (3.48)$$

Орын ауыстыруды кішкентай деп болжап осы теңдіктің геометриялық мағынасын қарастырайық. Бірақ та, абсолютті қатты дене механикасының кейбір нәтижелерін еске түсірейік.

Осындай денеде еркін нүктені, полюс *P*-ні, таңдайық. Кез келген басқа P' нүктесінің $\vec{\upsilon}$ жылдамдығы *P* полюсінің үдемелі қозғалысының $\vec{\upsilon}_0$ жылдамдығы мен полюс арқылы өтетін шапшаң осьтің айналасында дене айналған кезде пайда болатын $\vec{\Omega}\times\vec{r}$ айналмалы қозғалыс жылдамдығының геометриялық қосындысына тең болады.

Мұндағы $\vec{\Omega}$ – айналмалы шапшаң ось бойымен салынған бұрыштық жылдамдықтың векторы; $\vec{r}$ – полюстен дененің қаралатын нүктесіне жүргізілген салыстармалы радиус-вектор.

Сөйтіп мынаны аламыз: $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0+\vec{\Omega}\times\vec{r}$.

Осы теңдеудің екі жағында dt көбейтіп элементарлы $\vec{u}$ орын ауыстыруын үдемелі және айналмалы қозғалыстың қосындысына жіктеп алатын боламыз, яғни $\vec{u}=\vec{u}_0+\left(\vec{\Omega}dt\right)\times\vec{r}$.

$\vec{\Omega}\cdot dt$ көбейтіндісі айналу осінің айналасындағы бұрылу бұрышы екендігін ескертеміз.

Тұтас ортаға қайтадан оралайық. Ол үшін өзіне *M* және *N* нүктелерін қосатын элементарлы материалды көлемді қарайық. Сірә, (3.48) формуласының бірінші екі қосылғыштары *M* нүктесінде полюсі бар абсолюттік қатты дене сияқты элементтің қозғалысымен шақырылған *N* бөлшегінің орын ауыстыруын бейнелейді. Сонда салыстырмалы *N* радиус-векторы $d\vec{x}$ тең болады, ал бұрышы $\frac{1}{2}rot\,\vec{u}$ құрастырады.

(3.48) формуласындағы соңғы қосылғыш абсолюттік қатты дене механикасында кездеспейтін сапалы жаңа құбылысты бейнелейді. Осы құбылысты тұтас ортаның деформациясы деп атайды.

3.2 – есеп. Элементарлы көлемнің деформациясы және айналуы.

$\vec{u} = \alpha\left[x_1^2\vec{e}_1 + (x_1 + x_2)\vec{e}_2 + x_1x_3\vec{e}_3\right]$ орын ауыстыруы өрісі үшін $M(1;\ 1;\ 0)$ нүктесіндегі кішкене деформация тензорын және бұрылу бұрышын анықтау керек. Мұндағы оң мөлшерлі α бірмен салыстырғанда кішкентай болады.

Шешуі. $\vec{u}$ векторының $\vec{x}$ векторлық аргумент бойынша туындысы мынаған тең:

$$\frac{d\vec{u}}{d\vec{x}} = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right] = \alpha\begin{bmatrix} 2x_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 \end{bmatrix}$$

және М нүктесінде мына түрді қабылдайды:

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right]_M = \alpha\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тензорды симметриялық және қисық симметриялық құрамға былай жіктейік:

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right] = \alpha\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Кішкене деформацияның тензоры мынаған тең:

$$T_\varepsilon = \left[\varepsilon_{ik}\right] = \alpha\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Бұрылу бұрышының векторы $\vec{\omega}$ мынаған тең:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\, \vec{u} = \frac{1}{2} \alpha \vec{e}_3 .$$

Деформация тензоры. Мынадай симметриялық тензор:

$$T_\varepsilon = [\varepsilon_{ik}] \qquad (3.49)$$

сызықтық кішкене деформация тензоры немесе жай кішкене деформация тензоры деп аталады. Мұндағы кішкене деформация тензорының сыңарлары мына формуламен анықталады:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \qquad (3.50)$$

Осы тензордың сыңарларында қандай геометриялық мағына бар екендігін қарастырайық.

Бұрын біз M және N бөлшектерін толық еркін орналастырдық. Енді $d\vec{x}$ векторы x_1 осіне параллельді болатын етіп N бөлшегін таңдайық, яғни $d\vec{x}\,(dx_1, 0, 0)$.

Деформациядан кейін $d\vec{x}$ векторы $d\vec{x} + d\vec{u}$ векторына түрленеді, әрі $d\vec{u}$ векторының сыңарлары (3.47) формуласы бойынша есептеледі.

M және N бөлшектері арасындағы деформацияға дейінгі ара қашықтық L әріпімен, ал деформациядан кейінгі ара қашықтық l әріпімен белгілейік. Сонда мынаны аламыз:

$$L = |dx_1|; \quad l = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2}\, |dx_1| .$$

Бұрынырақ біз талдауды кішкене деформация жағдайымен шектедік. Бұл, шексіз кішкене ретке дейінгі $\left(\partial u / \partial x_k\right)^2$ дәлдікпен мынаны жазуға мүмкіндік береді:

$$l = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2}\, |dx_1| = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) |dx_1| .$$

MN материалды кесіндінің салыстырмалы ұзаруы мынаған тең болады:

$$\frac{l-L}{L}=\frac{\left(1+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)dx_1-dx_1}{dx_1}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\varepsilon_{11}.$$

Сонымен ε_{11} сыңары деформацияға дейін x_1 осіне параллельді болатын элементарлы кесіндінің салыстырмалы ұзаруына тең.

Осыған ұқсас, ε_{22} және ε_{33} сыңарлары, сәйкесті x_2 және x_3 осьтеріне параллельді материалды кесінділердің салыстырмалы ұзаруына тең болады.

Деформацияланатын дененің қандай болса да *M* нүктесінде координат осьтеріне параллельді шексіз кішкентай dx_1, dx_2 және dx_3 қыры бар элементарлы параллелепипедті бөлейік. Осы параллелепипедтің бір ұшы *M* нүктесімен дәл сәйкес келуі керек.

$abcd$ осы элементарлы параллелепипедтің деформацияға дейінгі x_1x_2 жазықтығына, ал *a* нүктесі *M* нүктесінің проекциясы болсын (3.7-сурет).

Деформациядан кейін *a*, *b*, *c*, *d* нүктелері орындарын ауыстырады. *a* нүктесі a_1 нүктесіне, *b* нүктесі b_1 нүктесіне, *c* нүктесі c_1 нүктесіне, *d* нүктесі d_1 нүктесіне ауысады. b және *c* нүктелерінің орын ауыстыруларын *a* нүктесінің орын ауыстыруы арқылы білдірейік. a нүктесі u_1 және u_2 орын ауыстыруларын алды. Осы орын ауыстырулар, a нүктесі проекциясы болатын *M* нүктесі координатасының функциясы болады, яғни $u_1=f\left(x_1,x_2,x_3\right)$; $u_2=f\left(x_1,x_2,x_3\right)$. *c* нүктесі x_1 осінің бағытында a нүктесінен шексіз кішкентай dx_1 ара қашықтығында орналасқан. Сондықтан x_1 осінің бағытында *c*

нүктесінің u_{c1} орын ауыстыруы мынаған тең болады: $u_{c1} = f(x_1 + dx_1, x_2, x_3)$.

Бірақта, жоғары қатарлы мүшелерді ескермей, x_1 осінің бағытында c нүктесінің орын ауыстыруы, a нүктесінің орын ауыстыруынан x_1 координатасы бойынша dx_1 ұзындығында u_1 функциясының қосымша өсірілу мөлшеріне айырмашылықта болады деп есептеу керек. Онда мынаны аламыз: $u_{c1} = u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1$.

Осыдан, ұзындығы dx_1 болатын ac қырының салыстырмалы ұзындығы, яғни x_1 бағытындағы ε салыстырмалы деформациясы мынаған тең болады:

$$\varepsilon_{11} = \frac{u_{c1} - u_1}{dx_1} = \frac{u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 - u_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}.$$

Осыған ұқсас жолмен мынаны аламыз:

$$u_{b2} = u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2;$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{u_{b2} - u_2}{dx_2} = \frac{u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 - u_2}{dx_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}.$$

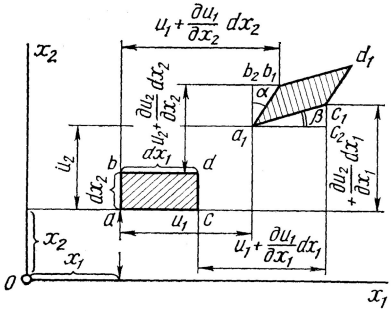
3.7-суретті қолданып тағы да мына орын ауыстыруларды анықтауға болады:

$$u_{c2} = u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1; \quad u_{b1} = u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2.$$

Енді бұрыштық деформацияларды анықтауға ауысайық.

Бұрыштардың өзгеруі шексіз кішкентай болғандықтан мынадай шарттарды қабылдаған дұрыс болады: $tg\alpha_{12} = \alpha_{12}$

және $tg\alpha_{21} = \alpha_{21}$. Сондықтан осы бұрыштарды мына формуланы қолданып анықтаймыз (3.7-сурет): $\alpha_{12} = \dfrac{u_{c2} - u_2}{u_{c1} + dx_1 - u_1}$.



3.7-сурет. Элементарлы параллелепипедтің координаталық осьтер проекциясындағы сызықтық және бұрыштық деформациясы

Осы формулаға u_{b1} және u_{b2}-нің алынған мәндерін қойып мынаны табамыз:

$$\alpha_{12} = \frac{u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 - u_2}{u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + dx_1 - u_1} = \frac{\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}}.$$

$\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}$ және осы мөлшер бірден едәуір кіші болғандықтан мынаны жазған әділ болады: $\alpha_{12} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}$. Осындай тәсілмен мынаны аламыз: $\alpha_{21} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}$.

Сонымен ab және ac кесінділердің арасындағы бастапқы кездегі тік бұрыш мына мөлшерге азаяды: $\gamma_{21} = \alpha_{12} + \alpha_{21} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} = 2\varepsilon_{12}$.

Тік бұрыштың осындай өзгеруі оның салыстырмалы ығысуы деп аталады.

Қаралып жатқан параллелепипедтің басқа координатты жазықтықтарға проекциялары үшін ой бағытын жалғастырып, деформация тензорының бүйірлік сыңарлары $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}$ және ε_{31} бұрыштардың бұрмалануын сипаттайтындығын оңай байқауға болады. Осы деформация тензорының сыңарларын ығысу деформациясының сыңарлары деп атайды.

Қаралып жатқан параллелепипедті x_2x_3 және x_3x_1 жазықтықтарына проекциялап деформация тензорының басқа сыңарларын анықтайтын формулаларды табамыз.

Нәтижесінде мыналарды аламыз:

1. Салыстырмалы ұзару $\varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}$; $\varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}$; $\varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}$;
2. Салыстырмалы ығысу

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right); \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right);$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right).$$

Деформация тензорының ε_{ik} сыңарларының таңбасын талдауға тоқталып өтейік.

Егер u_1 функциясы x_1 өскен сайын үлкейсе, яғни $\varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \succ 0$, онда біз, сірә dx_1 ұзындығының өсуіне куә боламыз (3.7-суретте *c* бөлшегінің оңға қарай орын ауысуы *a* бөлшегінің орын ауысуынан көп болады). Сонымен егер $\varepsilon_{11} \succ 0$ болса, онда ұзару бар болады, ал егер $\varepsilon_{11} \prec 0$ болса, онда деформация кезінде материалды талшық қысқаратын болады.

Ары қарай, егер u_2 функциясы x_1 өскен сайын көбейетін болса, онда $\alpha_{21} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} \succ 0$ болады. Сонда *ac* кесіндісі $+x_1$

осінен $+x_2$ осіне қарай бұрылатын болады (3.7-суретті қараңыз). Дәл осылай $\alpha_{12} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \succ 0$ болған кезде ab кесіндісі $+x_2$ осінен $+x_1$ осіне қарай бұрылатын болады.

Осыдан егер $+x_1$ және $+x_2$ осінің арасындағы тік бұрыш азаятын болса, онда ε_{12} ығысуы оң болатындығы шығады. Осы ереже басқа жазықтықтардағы ығысулар үшін әділ болып қалады.

Сонымен $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ оң сызықтық деформацияларға координат осьтері бойымен ұзару сәйкес келеді, ал сол сызықтық деформацияларға айтылған координат осьтері бойымен қысқару сәйкес келеді. Оң $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}$ ығысуы деформацияларына осьтердің оң бағыттары арасындағы бұрыштардың кішіреюі сәйкес келеді, ал сол ығысуы деформацияларына айтылған бұрыштардың көбеюі сәйкес келеді.

Деформация тензоры сыңарларын басқаша белгілеу. Тұтас орта механикасында қабылданған белгілеулер кернеу мен деформацияны талдауға, теоремаларды және негізгі теңдеулерді шығаруға ерекше ыңғайлы. Бірақ та осы белгілеулер материалдар кедергісінде, металдарды қысыммен өңдеу теориясында және басқа инженерлік пәндерде қолданылатын белгілеуден біраз айырмашылықта болады.

Төмендегі 3.1-кестесінде үш белгілеулер жүйесі салыстырылған.

3.1-кесте

Үш белгілеу жүйесі

I	ε_{11}	ε_{22}	ε_{33}	ε_{12}	ε_{23}	ε_{31}
II	ε_{xx}	ε_{yy}	ε_{zz}	ε_{xy}	ε_{yz}	ε_{zx}
III	ε_x	ε_y	ε_z	$(1/2)\gamma_{xy}$	$(1/2)\gamma_{yz}$	$(1/2)\gamma_{zx}$

Бірінші жол қабылданған жүйеге сәйкес келеді. Егер мынадай түрдегі әдеттегідей координаталарды жазуға өтетін болсақ: $x = x_1$; $y = x_2$; $z = x_3$ және көрсеткіштерді сәйкесті әріптермен ауыстыратын болсақ екінші жол белгілеуін жеңіл алатын боламыз.

Сызықтық және ығысу деформациялары үшін үшінші жол белгілеуінде әр түрлі әріптер қолданылады.

Әрбір белгілеу жүйесінде артықшылықтары және кемшіліктері бар. Біз негізгі ретінде бірінші жолда келтірілген жүйені қолданылатын боламыз. Қисық сызықты координаталарға өткен кезде әріптік көрсеткіштерді қолданған қолайлы. Бірақ мұндай да бірдей көрсеткіштер бойынша қосу ережесі өзінің күшін жоғалтады.

Деформациялардың басты сыңарлары. Координаттарды бұру арқылы T_ε деформация тензорын мына түрге келтіруге болады:

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}. \qquad (3.51)$$

Деформацияның басты сыңарлары мынадай теңсіздікке бағынады деп уәделесейік: $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$.

Жаңа координатты жүйеде тензордың бүйірдегі сыңарлары нөлге тең болады, яғни ығысу деформациясы жоқ болады, ал координаттар осьтері бағытындағы сызықтық деформацияларға тек орын бар болады. Қабырғалары координатты жазықтықтарға параллельді, биіктігі dl және көлемі $W = dl^3$ болатын элементарлы куб деформацияның нәтижесінде қабырғалары $dl(1+\varepsilon_1)$, $dl(1+\varepsilon_2)$, $dl(1+\varepsilon_3)$ тең болатын тікбұрышты параллелепипедке айналады.

Осы параллелепипедтің көлемі мынаған тең:

$$\omega = dl^3(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) = dl^3(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3).$$

Екінші реттік кіші мөлшерге дейінгі дәлдікпен көлемнің салыстырмалы өзгеруі мынаған тең болады:

$$\frac{\omega - W}{W} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 . \qquad (3.52)$$

Деформацияның басты сыңарлары ε_i мына сипаттамалық теңдеудің: $\left|\varepsilon_{ik} - \lambda\delta_{ik}\right| = 0$ нақты түбірі болады. Жоғарыдағы теңдеу жайылған түрде былай жазылады:

$$\lambda^3 - \varepsilon^I \lambda^2 + \varepsilon^{II}\lambda - \varepsilon^{III} = 0 . \qquad (3.53)$$

Деформация тензорының инварианты мынаған тең:

$$\varepsilon^I = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\varepsilon_0 ; \qquad (3.54)$$

$$\varepsilon^{II} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{33} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{11} \end{vmatrix} = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 ; \qquad (3.55)$$

$$\varepsilon^{III} = \left|\varepsilon_{ik}\right| = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 . \qquad (3.56)$$

Бірінші инварианттың физикалық мағынасы бар. Осы мағына бойынша, егер тұтас орта деформацияланса, онда бірінші инвариант ε^I көлемнің салыстырмалы өзгеруіне тең болады. Айтылған физикалық мағына тағы да мынадай теңдіктен шығады:

$$\varepsilon^I = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = div\vec{u}. \qquad (3.57)$$

3.3 – есеп. Деформацияның басты сыңарлары.

Деформация тензоры мына түрде берілген (таза ығысу):

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} 0 & 0{,}5\gamma & 0 \\ 0{,}5\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

Анықтық үшін $\gamma \succ 0$-ді жорамалдап тензорды диагональдық түрге келтіру қажет.

Шешуі. Сипаттамалық теңдеуде мынадай түр бар:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0{,}5\gamma & 0 \\ 0{,}5\gamma & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

немесе жайылған түрде былай жазуға болады: $-\lambda^3 + \gamma^2 \frac{\lambda}{4} = 0.$

Теңдеудің түбірі мынаған тең: $\lambda_1 = \frac{1}{2}\gamma;\ \ \lambda_2 = 0;\ \ \lambda_3 = -\frac{1}{2}\gamma$.

Басты осьтерге келтіргеннен кейін тензорды мына түрде жазуға болады:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0{,}5\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5\gamma \end{bmatrix}.$$

Сонымен бірінші ось бойымен созылу, үшінші ось бойымен қысылу деформациясы пайда болады.

3.4 – есеп. Деформация тензорының дивергенциясы.

Мынадай тәуелділікте орын бар болатындығын дәлелдеу қажет:

$$2divT_\varepsilon = \nabla^2\vec{u} + 3grad\varepsilon_0 ,$$

мұндағы $\nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial x_3^2}$ – Лаплас операторы.

Шешімі: (1.51) формуласы бойынша мынаны анықтаймыз:

$$2divT_\varepsilon = 2\frac{\partial\varepsilon_{ik}}{\partial x_k}\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\vec{e}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}\vec{e}_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\vec{e}_i .$$

Осы теңдеудің оң жағындағы бірінші қосылғыш мынаған тең:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}\vec{e}_i = \nabla^2\left(u_i\vec{e}_i\right) = \nabla^2\vec{u}\,.$$

Ары қарай мыналарды табамыз: $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = div\vec{u} = 3\varepsilon_0$ және

$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\vec{e}_i = 3grad\varepsilon_0$.

Сонымен мынаны жазуға болады: $2divT_\varepsilon = \nabla^2\vec{u} + 3grad\varepsilon_0$.

Бізге соңғы жазылған формуланы дәлелдеу керек болған.

Деформацияның девиаторы. Деформация тензорын девиатор D_ε және шарлық тензор $\varepsilon_0 I$ қосындысы түрінде көрсетуге болады, яғни

$$T_\varepsilon = D_\varepsilon + \varepsilon_0 I \qquad (3.58)$$

немесе $\left[\varepsilon_{ik}\right] = \left[\varepsilon_{ik} - \varepsilon_0\delta_{ik}\right] + \varepsilon_0\left[\delta_{ik}\right]$.

Анықтама бойынша D_ε девиаторының бірінші инварианты нөлге тең. Сондықтан девиатор көлемнің өзгеруімен байланысты емес деформацияны бейнелейді.

(3.58) формуласы шексіз кішкентай элементтің деформациясын екі деформацияның қосындысы түрінде көрсетеді. Бірінші деформация девиатормен сипатталады және көлемнің өзгеруінсіз элемент пішіннің өзгеруін бейнелейді, ал екінші деформация (шарлық тензор) осы элементтің барлық жақтан біркелкі созылуымен немесе қысылуымен бейнеленеді.

Девиатор сыңарларын e_{ik} әріпімен белгілейік, онда осы сыңарларды мына формуламен анықтауға болады:

$$e_{ik} = \varepsilon_{ik} - \varepsilon_0\delta_{ik}\,. \qquad (3.59)$$

$D_\varepsilon = \left[e_{ik}\right]$ девиаторы симметрия талабын орындайтын болғандықтан, оны диагональды түрге келтіруге болады. Сірә, деформация девиаторының басты бағыты деформация тензорының басты бағытымен дәл сәйкес келеді.

Сипаттамалық теңдеуде мынадай түр бар: $\left|e_{ik}-\lambda\delta_{ik}\right|=0$ немесе

$$\lambda^3+e^{II}\lambda-e^{III}=0. \qquad (3.60)$$

Девиатордың бірінші инварианты нөлге тең. Екінші және үшінші инварианттар мынаған тең:

$$e^{II}=\begin{vmatrix}e_{11} & e_{12}\\ e_{21} & e_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}e_{22} & e_{23}\\ e_{32} & e_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}e_{33} & e_{31}\\ e_{13} & e_{11}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}e_{ik}e_{ki}= \qquad (3.61)$$

$$=-\frac{1}{6}\left[\left(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}\right)^2+\left(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33}\right)^2+\left(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11}\right)^2+6\left(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{23}^2+\varepsilon_{31}^2\right)\right];$$

$$e^{III}=\left|e_{ik}\right|. \qquad (3.62)$$

Мына мөлшерді

$$\Gamma=+2\sqrt{\left|e^{II}\right|}=\sqrt{2e_{ik}e_{ik}}\,; \qquad (3.63)$$

ығысу деформациясының қарқындылығы деп атайды. Ары қарай осы мөлшер әр түрлі материалдың жүріс-тұрысын бейнелеген кезде кеңінен қолданылатын болады.

Бұрын көрсетілгендей илемділік деформация кезінде дененің көлемі өзгермейді және кіші деформацияның қосындысы мынаған тең болады: $\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}=0$, демек $\varepsilon_0=0$. Сондықтан илемділік деформация кезінде деформацияның шарлық тензоры нөлге тең және деформация тензоры девиатор болып саналады.

Осі симметриялы кернеу-деформация күйі үшін цилиндрлік координатта деформация формуласын шығарусыз былай жазайық:

$$\left.\varepsilon_p=\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho};\varepsilon_0=\frac{u_\rho}{\rho};\varepsilon_z=\frac{\partial u}{\partial z};\varepsilon_{\rho z}=\frac{\partial u_z}{\partial\rho}+\frac{\partial u_\rho}{\partial z}.\right\} \qquad (3.64)$$

Бір координатты жазықтыққа параллельді және әрбір басқа екі координатты жазықтықпен бірдей 45^0 бұрышын құратын аудандарда ең үлкен (басты) γ_{12}, γ_{23} және γ_{31} ығысу

деформациялары пайда болады. Осы ығысу деформациялары басты сызықты деформациялары арқылы былай анықталады:

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2;\ \gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \text{ және } \gamma_{31} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1. \qquad (3.65)$$

Басты ығысу деформациялары бір-бірімен мынадай формуламен байланысқан:

$$\gamma_{12} + \gamma_{23} + \gamma_{31} = 0. \qquad (3.66)$$

Координатты осьтерге бірдей көлбеген алаңдарда (октаэдрлік алаңдарда) октаэдрлік деформациялар пайда болады.

Сызықтық октаэдрлік деформация орташа деформация болады, яғни

$$\varepsilon_{ок} = \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}. \qquad (3.67)$$

Дененің көлемі тұрақты болып қалатын илемділік деформациясы кезінде мынадай шарт орындалады:

$$\varepsilon_{ок} = \varepsilon_0 = 0. \qquad (3.68)$$

Октаэдрлік ығысу деформациясы немесе октаэдрлік ығысу мына формуламен анықталады:

$$\gamma_0 = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \qquad (3.69)$$

Бұдан басқа, илемділік деформациясы теориясында *деформацияның қарқындылығы* деп аталатын оң скалярлық мөлшер кеңінен қолдануды тапты. Осы мөлшер мына формуламен анықталады:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \qquad (3.70)$$

γ_0, Г, ε_i мөлшерлері бір-бірінен тек тұрақты көбейткішпен айырмашылықта болады.

Басты сызықтық деформациялар бір-бірімен келесі қатынастармен байланысты:

жазық деформация күйі үшін $\varepsilon_3 = -\varepsilon_1$ және $\varepsilon_2 = 0$;

сызықтық қысу және созу үшін $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0{,}5\varepsilon_1$,

мұндағы ε_1 – абсолюттік мөлшері бойынша ең үлкен басты деформация.

Егер осы қатынастарды (3.63), (3.69) және (3.70) формулаларына қойса, онда октаэдрлік ығысу деформациясының мөлшері ең үлкен басты ығысудан 0,816÷0,941 шегінде ауытқитындығына көз жеткізуге болады.

Жазық деформация күйі үшін ығысу деформациясының қарқындылығы Γ ең үлкен басты ығысуға, ал ε_i деформация қарқындылығы $1{,}155\,\varepsilon_1$ тең болады. Сызықтық созу және қысу үшін ығысу деформациясының қарқындылығы ең үлкен басты ығысудан 1,155 есе үлкен болады, ал деформацияның қарқындылығы ε_i абсолюттік мөлшері бойынша ең үлкен басты сызықты деформацияға тең болады. Деформацияланған күйдің басқа түрлері үшін Γ және ε_i жоғарыда көрсетілген аралықтың арасындағы мәнді алады.

Жоғарыда айтылғанды ескеріп γ_0, Γ және ε_i-дің болуы мүмкін мәндері жөнінде келесі қатынастарды жазуға болады:

$$\gamma_0 = (0{,}816 \div 0{,}941)\left|\gamma\right|_{max}; \tag{3.71}$$

$$\Gamma = (1 \div 1.155)\left|\gamma\right|_{max}; \tag{3.72}$$

$$\varepsilon_i = (1 \div 1.155)\left|\varepsilon\right|_{max}, \tag{3.73}$$

мұндағы $\left|\gamma\right|_{\max}$ және $\left|\varepsilon\right|_{\max}$ – абсолюттік мөлшері бойынша ең үлкен басты ығысу және басты сызықтық деформация.

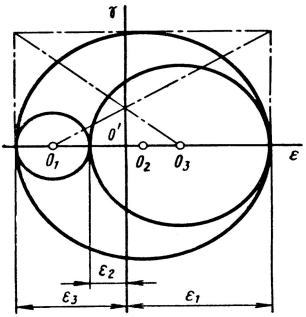
Бұрын қолданылған тәсілдерді қолданып, кернеуге салынған Мора диаграмма сияқты диаграмманы деформацияға да салуға болады. Бірақта ε және γ координатасында салу қажет.

Илемді деформация кезінде дененің көлемі тұрақты болып қалады және деформация тензоры девиатор болады. Сондықтан γ осі ылғи да диаграмманың фигурасын қиып өтеді. Оның жайын 3.8-суретінде көрсетілгендей жеңіл анықтауға болады.

Мысалдар. Мысал ретінде деформациядан күйдің ең маңызды жағдайларын қарайық.

Жай созу (орта қысылмайды, $\varepsilon_1 = \varepsilon,\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0{,}5\varepsilon,\ \varepsilon \succ 0$):

$$\mathrm{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \sqrt{3}\varepsilon\ . \tag{3.74}$$



3.8-сурет. Деформация үшін Мора диаграммасы

Жай қысу (орта қысылмайды, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}5\varepsilon,\ \varepsilon_3 = -\varepsilon,\ \varepsilon \succ 0$):

$$\mathrm{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0{,}5\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \sqrt{3}\varepsilon\ . \tag{3.75}$$

Таза ығысу

$$\mathrm{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5\gamma & 0 \\ 0{,}5\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = |\gamma|\ . \tag{3.76}$$

Жазық деформация $\left(u_1 = u_1(x_1, x_2),\ u_2 = u_2(x_1, x_2),\ u_3 = 0\right)$:

$$\mathrm{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Қысылмайтын орта үшін:

$$\Gamma = 2\sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2}\ . \qquad (3.77)$$

Қысылмайтын ортаның көлемдік деформациясы.

Осындай жағдай үшін мынадай шарт орындалады: $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$ және

$$\Gamma = 2\sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + \left(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2\right)}. \qquad (3.78)$$

Деформация девиаторының басты сыңарларын есептеу үшін (1.43) формуласын қолданып мынаны табамыз:

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Gamma \cdot \cos\beta_\varepsilon\ ,\quad e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Gamma \cdot \sin\left(\beta_\varepsilon - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$e_3 = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Gamma \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta_\varepsilon\right).$$

Деформация түрінің бұрышы төмендегі параметрмен

$$\nu_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \qquad (3.79)$$

мынадай қатынаспен байланысты:

$$\nu_\varepsilon = \left[\frac{tg\left(\beta_\varepsilon - \frac{\pi}{6}\right)}{tg\,\frac{\pi}{6}}\right]$$

және деформацияның түріне байланысты 0-ден $\pi/3$-ке дейінгі шекте өзгеруі мүмкін. Сонда жай созуға мынау сәйкес келеді:

$\nu_\varepsilon = 1$ және $\beta_\varepsilon = 0$; таза ығысуға мынау сәйкес келеді: $\nu_\varepsilon = 0$ және $\beta_\varepsilon = \pi/6$; жай қысуға мынау сәйкес келеді: $\nu_\varepsilon = -1$ және $\beta_\varepsilon = \pi/3$.

Деформацияның бірлестік теңдеулері. Тұтас орта қозғалған кезде кез келген материалды бөлшектің орын ауыстыруы үш функциямен ($\vec{u}$ орын ауыстыру векторының u_i сыңарларымен) сипатталады. Ал осы бөлшектің айналасының деформациясы мынадай алты мөлшермен сипатталады:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).$$

Егер тік есеп, яғни орын ауыстыру сыңарлары арқылы деформацияның сыңарларын есептеу, u_i функциясын координаталар бойынша дифференциалдауға алып келсе, онда қарама-қарсы есеп, яғни u_i функциясын ε_{ik} деформация сыңарлары бойынша табу, көп жағдайда шешімсіз болады.

Физикалық мұндай жағдай болуы мүмкін. Денені элементарлы параллелепипедтерге бөлейік және әрбір параллелепипедке деформацияның алты сыңарын белгілейік. Егер де деформацияның сыңарлары бір-бірімен белгілі теңдікпен байланысқан болмаса, онда жеке деформацияланған параллелепипедтен үздіксіз деформацияланған денені қайтадан жинау қиын болады. Параллелепипедтердің арасында шексіз кішкентай бос орындар пайда болады.

Жоғарыда көрсетілген қатынастарды шығарайық. Осы теңдіктердің жалпы саны алтау және олар екі топқа бөлінеді. Бірінші топқа бір жазықтықта деформациялар сыңарлары арасындағы байланысты анықтайтын теңдеулер, ал екінші топқа әр түрлі жазықтықта деформация сыңарлары арасындағы байланысты анықтайтын теңдеулер жатады.

Бірінші топ

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}.$$

Осы теңдеулерді келесі түрде дифференциалдайық:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial x_1^2}.$$

Мүшелеп осы теңдеулерді қосып мынаны табамыз:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Көрсеткіштерді шеңбер бойымен ауыстырып тағы да мына екі теңдікті аламыз:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}.$$

Екінші топ

Енді екінші топ теңдеулеріне ауысайық. Осы мақсатпен мынадай теңдеулерді:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right); \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right); \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right).$$

Келесі түрде дифференциалдайық:

$$\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_1}\right); \quad \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_2}\right);$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3}\right).$$

Бірінші екі жолды қосып, ал үшіншісін алып тастайық. Сонда мынаны аламыз:

$$\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Осы теңдеуді тағы да x_3 бойынша дифференциалдап және төмендегі жазылғанды байқап: $\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}$, мынаны аламыз $\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}$.

Осы екінші топтың іздеп отырған теңдеуінің біреуі. Көрсеткіштерді шеңбер бойымен ауыстыра отырып тағы да екі теңдікті табамыз. Алынған үш теңдеулерді бірінші топ теңдеулеріне қосып келесі теңдеулер жүйесін аламыз.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2};\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x_2\partial x_3};\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_3^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{31}}{\partial x_3\partial x_1};
\end{aligned}\right\} \tag{3.80}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x_2}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1\partial x_2};\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2\partial x_3};\\
&\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3\partial x_1}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.81}$$

Бірінші рет Сен–Венанмен алынған осы теңдеулер *деформацияның бірлестік теңдеулері* деп аталады.

Қисық сызықты координаттар. $\widetilde{u}_1,\widetilde{u}_2,\widetilde{u}_3$ жергілікті $\vec{b}_i$ ортогональды базисінде орын ауыстыру векторының қисық сызықты сыңарлары болсын, яғни әрбір M нүктесінде мынадай жіктеуге орын бар болсын: $\vec{u}=\widetilde{u}_i b_i$.

Қисық сызықты ортогональды координат жүйесінде деформация тензорының сыңарларын есептеу үшін қолданылатын формулаларда мынадай түр бар:

$$\left.\begin{aligned}
\widetilde{\varepsilon}_{11}&=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial\beta_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta_2}\widetilde{u}_2+\frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial\beta_3}\widetilde{u}_3;\\
\widetilde{\varepsilon}_{22}&=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial\beta_2}+\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial\beta_3}\widetilde{u}_3+\frac{1}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\beta_1}\widetilde{u}_1;\\
\widetilde{\varepsilon}_{33}&=\frac{1}{H_3}\frac{\partial\widetilde{u}_3}{\partial\beta_3}+\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial\beta_1}\widetilde{u}_1+\frac{1}{H_3H_2}\frac{\partial H_3}{\partial\beta_2}\widetilde{u}_2;
\end{aligned}\right\} \tag{3.82}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{\tilde{u}_2}{H_2}\right)+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\frac{\tilde{u}_1}{H_1}\right);\\ 2\tilde{\varepsilon}_{23} &= \frac{H_3}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\frac{\tilde{u}_3}{H_3}\right)+\frac{H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial\beta_3}\left(\frac{\tilde{u}_2}{H_2}\right);\\ 2\tilde{\varepsilon}_{31} &= \frac{H_1}{H_3}\frac{\partial}{\partial\beta_3}\left(\frac{\tilde{u}_1}{H_1}\right)+\frac{H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{\tilde{u}_3}{H_3}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (3.83)$$

мұндағы H_1, H_2, H_3 – Лямэ коэффициенттері.

3.5–есеп. Цилиндрлік координат жүйесіндегі деформациялар.

Цилиндрлік координат жүйесінде деформация сыңарларын табыңыздар.

Шешуі. Цилиндрлік координат жүйесінде мынау бізге белгілі:

$$\beta_1 = r, \beta_2 = \omega, \beta_3 = z, \tilde{u}_1 = u_r, \tilde{u}_2 = u_\omega, \tilde{u}_3 = u_z, H_1 = H_2 = 1,$$
$$H_2 = H_\omega = r, H_3 = H_z = 1.$$

(3.82) және (3.83) формулалары бойынша ε_{ik} есептеп мынаны табамыз:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \varepsilon_{\omega\omega} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\omega}{\partial\omega}+\frac{u_r}{r}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z};\\ &2\varepsilon_{r\omega} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_r}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\omega};\ 2\varepsilon_{\omega z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\omega}+\frac{\partial u_\omega}{\partial z};\\ &2\varepsilon_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.84)$$

3.6 – есеп. Сфералық координат жүйесіндегі деформациялар.

Сфералық координат жүйесінде деформация сыңарларын табыңыздар.

Шешуі. Сфералық координат жүйесінде мынау бізге белгілі:

$$\beta_1 = r, \beta_2 = \omega, \beta_3 = \chi, \tilde{u}_1 = u_r, \tilde{u}_2 = u_\omega, \tilde{u}_3 = u_\chi.$$

Лямэ коэффициенттері мынаған тең:

$$H_1 = H_r = 1, H_2 = H_\omega = r\cdot\sin\chi, H_3 = H_\chi = r.$$

Деформация сыңарлары келесі формулалар бойынша анықталады:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r};\\
\varepsilon_{\omega\omega} &= \frac{1}{r\cdot\sin\chi}\frac{\partial u_\omega}{\partial\omega}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_\chi}{r}ctg\,\chi;\\
\varepsilon_{\chi\chi} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_\chi}{\partial\chi}+\frac{u_r}{r};\\
2\varepsilon_{r\omega} &= \frac{1}{r\cdot\sin\chi}\frac{\partial u_r}{\partial\omega}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\omega}{r}\right);\\
2\varepsilon_{\omega\chi} &= \frac{\sin\chi}{r}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\frac{u_\omega}{\sin\chi}\right)+\frac{1}{r\cdot\sin\chi}\frac{\partial u_\chi}{\partial\omega};\\
2\varepsilon_{\chi r} &= r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\chi}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\chi}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.85)$$

Бақылау сұрақтары.

1. Материалды бөлшектің лагранждық координатасы уақытпен өзгере ме?
2. Ілеспелі координат жүйесі дегеніміз не?
3. Кеңістік нүктесінің эйлерлік координатасы уақыт бойынша өзгере ме?
4. Лагранждық тәсілден Эйлерлік тәсіл немен айырмашылықта болады?
5. (3.9) якобионның таңбасы өзгеруі мүмкін бе?
6. Аффиндік бейнелеу дегеніміз не?
7. Қандай қозғалыс абсолютті қатты деп аталады?
8. Тұтас орта қозғалған кезде элементарлы сфера қалай деформацияланады?
9. Грин тензоры қандай формуламен анықталады?
10. Альмансы тензоры қандай формуламен анықталады?
11. Логарифмдік деформацияның тензорын қандай ретпен анықтауға болады?

12. Орын ауыстыруды кішкентай деп жорамалдау қандай жеңілдетуге алып келеді?
13. Элементарлы кубтың қандай деформациясын кішкентай деформация тензорының диагональдық сыңарлары бейнелейді?
14. Элементарлы кубтың қандай деформациясын кішкентай деформация тензорының бүйірдегі сыңарлары бейнелейді?
15. Қандай жағдайда деформация сыңарлары оң болады?
16. Кіші деформация тензорының сызықтық инвариантында қандай физикалық мағына бар?
17. Деформация тензорының басты осьтеріне параллельді қабырғалары бар элементарлы куб қалай деформацияланады?
18. Ығысу деформациясының қарқындылығы деп нені айтады?

4. ТҰТАС ОРТАНЫҢ АҒУЫ

Материалды бөлшектің бастапқы және ағымдағы координаталарын байланыстыратын қатынастармен тұтас ортаның қозғалысы және деформациясы берілетіндігін біз анықтадық. Сызықтық емес тензорларды қолданып түпкі деформацияны (атап айтқанда осындай деформациялар металдарды қысыммен өңдеу процестеріне тән) бейнелеу үлкен математикалық қиындықтарға алып келеді. Сондықтан, ағымдағы t уақыт мезгіліне сәйкес келетін құрама пішіннен жақын $t+\Delta t$ уақыт мезгіліне сәйкес келетін құрама пішінге өту едәуір жеңіл. Осы кезде ағымдағы x_i координатасы бар материалды бөлшек $x_i+\Delta u_i$ координатасы бар кеңістік нүктесіне көшеді. Осындайда Δu -ды Δt -ға бөліп және Δt нөлге ұмтылдырып, шектікке өту арқылы жылдамдық векторының өрісін былай анықтаймыз:

$$\vec{\upsilon}(x,t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}.$$

Осы жылдамдық векторының өрісі барлық материалды бөлшектің лып етіп өтетін ағыс көрінісін бейнелейді. Жылдамдық өрісін біле отырып, еркін материалды бөлшектің бастапқы және ағымдағы координаттары арасындағы байланысты қалай анықтауға болатындығын біз жоғарыда көрсеттік. Нәтижесінде түпкі деформацияны тауып талдау, жылдамдық өрісін жүйелі уақыт аралығында зерттеп анықтауға мүмкіндік туғызады.

Жылдамдық өрісі векторлық өрістің жеке жағдайы болғандықтан, оны бейнелеу үшін векторлық өрістің жалпы теориясын қолдануға болады.

4.1. Жылдамдық өрісі

Ток сызығы. Жылдамдық өрісінің векторлық сызығы *ток сызығы* – деп аталады. Ток сызығының әрбір нүктесіндегі

жанамалар осы аймақтағы жылдамдық векторының бағытымен сәйкес келеді.

Барлық векторлық сызықтың жиынтығы, осы уақыт мезгіліндегі ағыс көрінісін құрайды. Жылдамдық өрісі стационарлы болуы мүмкін. Осы кездегі тұтас ортаның қозғалысы орныққан деп аталады және ағыстың көрінісі уақыт өткен сайын өзгермейді.

Өзгеретін ағыс стационарлы емес жылдамдық өрісімен сипатталады.

Траектория. Материалды бөлшек *M*-ның траекториясы деп бөлшек қозғалған кезде бейнелейтін қисық сызықты атайды (4.1-сурет).

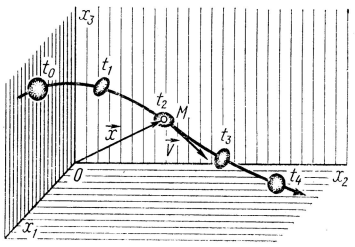
Материалды бөлшектің қозғалыс бағыты траекторияға жанама болып келеді. Сондықтан, траекторияны бейнелейтін бөлшектің тез өзгеретін жайы арқылы өтетін ток сызығына траектория жанасады.

Сірә, орныққан қозғалыста траекториялар мен ток сызықтары бір-біріне дәл сәйкес келеді.

Ток сызығы мен траекторияның дифференциалдық теңдеулерін құрастырайық. Ол үшін, осы *t* уақытысында кеңістікте жүргізілетін өте кішкентай кесінділерден материалды бөлшектің d*t* уақытындағы элементарлы орын ауыстыруын ажырату үшін мына белгілеуді еңгізейік:

$-d\vec{x} = (dx_i)$ − өте кішкентай кесінділер үшін;

$-d\vec{x}^* = (dx_i)^*$ − материалды бөлшектің элементарлы орын ауыстыруы үшін.



4.1-сурет. Материалды бөлшектің траекториясы

Ток сызығының жанама бағытымен осы нүктедегі жылдамдық векторының сәйкес келуі мынадай ток сызығының дифференциалды теңдік жүйесін береді:

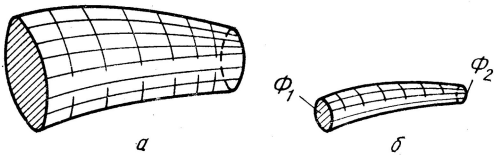
$$\frac{dx_1}{\upsilon_1(x_k,t)} = \frac{dx_2}{\upsilon_2(x_k,t)} = \frac{dx_3}{\upsilon_3(x_k,t)}. \qquad (4.1)$$

Осы сияқты, траектория жанамасының бағытымен материалды бөлшектің элементарлы орын ауыстыру векторының сәйкес келуі мынадай траекторияның дифференциалды теңдік жүйесін береді:

$$\frac{dx_1^*}{\upsilon_1(x_k,t)} = \frac{dx_2^*}{\upsilon_2(x_k,t)} = \frac{dx_3^*}{\upsilon_3(x_k,t)} = dt. \qquad (4.2)$$

Орныққан қозғалыста жоғарыда келтірілген теңдіктер бір-біріне сәйкес келеді.

Ток түтігі. Кеңістікте тұйық қисық сызықты алайық (4.2-сурет) және әрбір нүктесі арқылы ток сызығын жүргізейік. Нәтижесінде біз ток түтігін аламыз (4.2 *а*-сурет). Егер ток түтігінің көлденең қимасының өлшемі шексіз кішкентай болса, онда ол токтың түтікшесі деп аталады (4.2 б-сурет).



4.2-сурет. Ток түтігі және ток түтікшесі

Стационарлы емес жылдамдық өрісінің түтікшесі мен түтігінің пішін үйлесімі уақыт өтуімен өзгереді.

Тұтас ортаның орнықты қозғалысында ток түтігі өзін кәдімгі сұйықтың ағатын жіңішке құбыры сияқты көрсетеді. Расында да, жіңішке құбырдың қабырғалары тасқынмен жанасады, ал бұл қабырғалар кеңістікте бекітілген жәйде болады. Сондықтан, егер біз қабырғаны қатты бетпен ауыстыратын болсақ, қозғалыс өзгермейді.

Осы жағдайдағы ток түтікшесін қарастырайық. Ток түтікшесінің көлденең қимасы шегінде жылдамдық тұрақты деп

есептеуге болады. Ауданы Φ_1 және Φ_2 болатын көлденең қимадағы тасқын жылдамдығы υ_1 және υ_2 болсын (4.2-сурет).

Егер орта қысылмайтын болса, онда бір жағындағы қимаға ағып кіретін көлем екінші жақтағы қимадан ағып шығатын көлемге тең болады. Сөйтіп мынадай теңдікті жазуға болады:

$$\upsilon_1 \cdot \Phi_1 = \upsilon_2 \cdot \Phi_2. \qquad (4.3)$$

Осыдан мынадай тұжырым шығады. Токтың түтікшесі тұтас ортаның жылдамдығы азайған жерде үлкейеді, ал осы тұтас ортаның қозғалыс жылдамдығы көбейген жерде кішірейеді немесе керісінше.

Жылдамдықтың потенциалды өрістері. Жылдамдық өрісінде потенциал бар деп есептейік. Бұл кейбір скалярлық функцияның $\varphi(x_i)$ бар екендігін және оның көмегімен жылдамдық векторы сыңарлары мына формула бойынша көрсетілетіндігін білдіреді:

$$\upsilon_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \qquad (4.4)$$

Бір байланысты аймақта аққанда жылдамдықтың потенциалды өрісінің бар болуының керекті және жеткілікті шарты болып жылдамдық құйынының былай нөлге айналуы есептеледі:

$$rot\,\vec{\upsilon} = 0. \qquad (4.5)$$

Осы Стокс теоремасынан шығады. Жоғарыда жазылған себептерден жылдамдықтың потенциалды өрісін құйынсыз өрістер деп атайды.

Жылдамдық векторының тасқыны. Бізге белгіленген кеңістікте кейбір тілім-тегіс Σ беті берілсін (1.8-сурет). Нормальдың $\vec{n}$ бірлік векторы берілген осы беттің $d\Sigma$ элементіндегі жылдамдықтың нормальдік сыңары υ_n мына байланыспен анықталады:

$$\upsilon_n = \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} = \upsilon_i \cos(\vec{n}, \vec{e}_i). \qquad (4.6)$$

Вектор тасқынын анықтауды еске түсіре отырып, Σ беті арқылы уақыт бірлігінде ағып өтетін көлем, осы бет арқылы

өтетін жылдамдық векторының тасқынына тең екендігін табамыз, яғни

$$q = \iint_{\Sigma} \upsilon_n d\Sigma. \tag{4.7}$$

Келесі теореманы пайдаланайық.

4.1 – теоремасы (Гаусс – Остроградский теоремасы).

W аймағы түйіскен тілім-тегіс Σ бетімен шектелген. Осы беттің нормалының бірлік векторы $\vec{n}$ болсын және ол сыртқа қарай бағытталсын. Сонымен бірге W аймағында және Σ бетінде $\vec{a}$ векторлық өрісі үздіксіз және анықталған болсын және де a_i координаталарының x_i бойынша бірінші реттік жеке туындылары бар болсын. Онда мынадай формула дұрыс болады:

$$\iint_{\Sigma} \vec{a}\vec{n}d\Sigma = \iiint_{W} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) dW. \tag{4.8}$$

Сонымен, егер Σ беті тұйық болса, онда Гаусс-Остроградский формуласынан мынау шығады:

$$\iint_{\Sigma} \upsilon_n d\Sigma = \iiint_{W} div\, \vec{\upsilon} dW\,. \tag{4.9}$$

Орта қысылмайтын болсын. Онда W аймағына ағып кіретін көлем ағып шығатын көлемге тең болады, яғни

$$\iint_{\Sigma} \upsilon_n d\Sigma = 0$$

және негізгі леммадан мынау шығады:

$$div\, \vec{\upsilon} = 0. \tag{4.10}$$

Жоғарыда айтылғанға қарама-қарсы, егер $div\vec{\upsilon} = 0$ болса, онда кез келген тұйық бет арқылы өтетін жылдамдық векторының тасқыны нөлге тең болады және орта қысылмайды.

Дивергенциясы нөлге тең жылдамдық өрісі соленоидеальды немесе құбырлы өріс деп аталады.

Бір мезгілде соленоидеальды және потенциалды болатын жылдамдықтар өрісі үйлесімді векторлық өріс деп аталады.

Осындай өрістің потенциалы Лаплас теңдеуіне сәйкес келеді, яғни

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0. \qquad (4.11)$$

Расында да (4.10) қысылмау шарты (4.4) теңдеуімен бірігіп (4.11) байланысына алып келеді.

Тұтас ортадағы айнымалы өрістер. Ары қарай бізге уақытпен қозғалатын ортада жүретін процестерді зерттеуге тура келеді.

Осындай қозғалыс бар дегенге жол берейік және де жылдамдық өрісі мынадай функциямен анықталсын:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(x,t). \qquad (4.12)$$

Басқаша айтқанда $\vec{\upsilon}$ дегеніміз t уақыт мезгілінде $M(\vec{x})$ нүктесі арқылы өтетін материалды бөлшектің жылдамдық векторы.

Кейбір $\varphi(\vec{x},t)$ скалярлық функциясын қарап талқылайық. Мысалы, тасқынның әр түрлі бөлшектерінің температурасы. Осы функция координаттан және t уақытынан тәуелді болатындығын жорамалдайық.

$\varphi(\vec{x},t)$ функциясының уақыт өткен сайын өзгеруін зерттейтін боламыз. Осыны мынадай екі тәсілмен жасауға болады: біріншіден, берілген орында функцияның өзгеруін қарап талқылауға болады; екіншіден, берілген бөлшек үшін функцияның өзгеруін қарап талқылауға болады.

Берілген орында φ функциясының өзгеруі жеке немесе жергілікті φ-ның t бойынша туындысымен бейнеленеді, яғни

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(M, t + \Delta t) - \varphi(M, t)}{\Delta t}. \qquad (4.13)$$

Осы функцияны есептеген кезде M нүктесінің радиус-векторы тұрақты деп саналады.

Δt уақыт аралығында берілген бөлшекке φ-ның өзгеруін бейнелеу үшін, біз φ-ның қосымша өсірілуі ретінде $t + \Delta t$ берілген уақытысында бөлшек болатын M' жайдағы функцияның мәнімен, осы бөлшектің t уақытында болатын бастапқы M жайындағы функцияның мәні арасындағы

айырманы алуымыз қажет. $\Delta t \to 0$ болған кезде, осы қосымша өсірілудің Δt-ға шектік қатынасын φ-ның t бойынша толық туындысы деп атап және былай белгіленеді:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(M', t + \Delta t) - \varphi(M, t)}{\Delta t}. \qquad (4.14)$$

Жеке және толық туындылар арасындағы байланысты табайық.

$\varphi\ (x_i, t)$ функциясынан толық туындыны тапқан кезде біз x_i-ді t уақытының функциясы деп есептеуіміз қажет. Өйткені x_i координатасы бар бөлшек $\vec{\upsilon}$ жылдамдығымен қозғалады және де $\upsilon_i = \dfrac{dx_i}{dt}$ болады.

Сөйтіп $\varphi\ (x_i, t)$ функциясы уақыт t-дан күрделі функция болып саналады, ал оның туындысы күрделі функцияны дифференциалдау ережесі бойынша табылады, яғни

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\upsilon_i. \qquad (4.15)$$

Осы туындыны векторлық түрде былай жазуға болады:

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\upsilon} grad\varphi. \qquad (4.16)$$

Векторлық мөлшерлерге ауысып және сол ой жүгіртуді қайталап $\vec{a}$ векторының жеке туындысы үшін мынадай формуланы табамыз:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \frac{\partial a_i}{\partial t}\vec{e}_i \qquad (4.17)$$

немесе вектордың толық туындысын былай табамыз:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial a_i}{\partial t} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_i}\upsilon_i = \left(\frac{\partial a_k}{\partial t} + \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\upsilon_i\right)\vec{e}_k. \qquad (4.18)$$

Сонымен бірге, материалды бөлшектің үдеуі жылдамдықтың уақыт бойынша туындысы болады, яғни

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x_i}\upsilon_i. \qquad (4.19)$$

(4.16) формуласындағы $\vec{\upsilon}grad\varphi$ және (4.18) теңдеуіндегі $\frac{\partial\vec{a}}{\partial x_i}\upsilon_i$ мүшелері конвективті мүшелер деп аталады. Осы мүшелер тұтас орта қозғалған кезде бөлшектерді тасымалдаумен байланысты.

Егер өріс стационарлы болса, онда осы функциялардың уақыт бойынша жеке туындылары ғана нөлге айналады, ал конвективті мүшелердің бар болуымен байланысты жалпы жағдайда толық туынды нөлден айырмашылықта болады.

Енді материалды көлем W бойынша, яғни бірдей материалды бөлшектен тұратын көлем W бойынша интегралдың уақытпен өзгеруін қарайық, яғни

$$J=\iiint\limits_W \varphi dW\ ,$$

мұндағы φ − кейбір скалярлық функция.

dt уақтысы кезінде J интегралының өзгеруінде мынадай екі себеп бар: φ функциясының өзгеруі және W көлемнің өзгеруі (4.2-сурет).

Егер W көлемнің өзгеруі болмаса, онда dt уақытысы кезінде φ функциясы $\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt$, ал J интегралы $\iiint\limits_W \frac{\partial\varphi}{\partial t}dWdt$ қосымша өсірулерін алар еді.

φ функциясы тұрақты болып қалсын, ал W көлемі өзгеретін болсын. Осы, тек t уақыт мезгілінде W көлемін шектейтін Σ кеңістік беті арқылы кейбір материалды бөлшектер шығатын немесе кіретін болса пайда болуы мүмкін.

dt уақытысы кезінде, осы беттің $d\Sigma$ элементі арқылы тұтас ортаның $\upsilon_n dtd\Sigma$ көлемі шығады.

Осының есебінен J интегралы $\varphi\upsilon_n dtd\Sigma$ қосымша өсіруді алады, ал көлемнің өзгеруімен байланысты J интегралының барлық қосымша өсірілуі, сірә $\iint\limits_S \varphi\upsilon_n dtd\Sigma$ тең болады.

Осыдан J интегралының толық өзгеруі мынаны құрайды:

$$dJ = \iiint\limits_W \frac{\partial\varphi}{\partial t} dWdt + \iint\limits_\Sigma \varphi\upsilon_n d\Sigma dt,$$

ал уақыт бойынша туындысында мынадай түр бар болады:

$$\frac{dJ}{dt} = \iiint\limits_W \frac{\partial\varphi}{\partial t} dW + \iint\limits_\Sigma \varphi\upsilon_n d\Sigma. \qquad (4.20)$$

Гаусс-Остроградский формуласын қолданып және беттік интегралды көлемдік интегралға түрлендіріп мынаны аламыз:

$$\iint\limits_\Sigma \varphi\upsilon_n d\Sigma = \iint\limits_\Sigma \varphi\upsilon_i n_i d\Sigma = \iiint\limits_W \frac{\partial(\varphi\upsilon_i)}{\partial x_i} dW = \iiint\limits_W \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\upsilon_i dW + \iiint\limits_W \varphi\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_i} dW.$$

Алынған мәнді (4.20) формуласына қойғаннан кейін мынаны аламыз:

$$\frac{dJ}{dt} = \iiint\limits_W \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\upsilon_i\right) + \varphi\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_i}\right] dW = \iiint\limits_W \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \varphi\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_i}\right) dW. \qquad (4.21)$$

4.1–есеп. Толық туындыны есептеу.

Мынадай жылдамдық өрісі берілген: $\upsilon_1 = x_1 e^{-t}$; $\upsilon_2 = x_1 x_2 e^{-2t}$; $\upsilon_3 = x_3 e^{t}$. Үдеудің сыңарын табыңыз.

Шешуі. (4.19) формуланы пайдаланып мыналарды табамыз:

$$\frac{d\upsilon_1}{dt} = \frac{\partial\upsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_i}\upsilon_i = -x_1 e^{-t} + x_1 e^{-2t};$$

$$\frac{d\upsilon_2}{dt} = \frac{\partial\upsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_i}\upsilon_i = -2x_1 x_2 e^{-2t} + x_1 x_2 e^{-3t} + x_1^2 x_2 e^{-4t};$$

$$\frac{d\upsilon_3}{dt} = \frac{\partial\upsilon_3}{\partial t} + \frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_i}\upsilon_i = x_3 e^{t} + x_3 e^{2t}.$$

Жылдамдық өрісі және бейнелеу. Тұтас ортаның қозғалысы мына түрде берілсін: $X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t)$, мұндағы X_i –

қозғалмайтын байқаушы кеңістігіндегі материалды бөлшектің бастапқы декарттық координаты; x_i – қозғалмайтын байқаушы кеңістігіндегі материалды бөлшектің ағымдағы декарттық координаттары.

Сірә, еркін материалды бөлшек қозғалған кезде оның лангранждық координаттары өзгермейтін мәнді сақтайды, яғни $\frac{dX_i}{dt} = 0$.

(4.15) формуласын қолданып мынаны аламыз:

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} + \frac{\partial X_i}{\partial x_k}\upsilon_k = 0 \quad \text{немесе} \quad \frac{\partial X_i}{\partial x_k}\upsilon_k = -\frac{\partial X_i}{\partial t} \tag{4.22}$$

(4.22) жүйесі υ_k жылдамдық сыңарларына қатысты сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі деп аталады. Жүйенің анықтаушысы Δ, яғни бейнелеудің якобионы былай табылады: $\Delta = \left|\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right| \succ 0$. Қысылмайтын орта үшін Δ мәні мынаған тең: $\Delta = 1$.

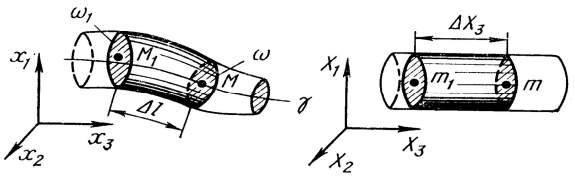
(4.22) жүйесінің шешуі мына түрде жазылады:

$$\upsilon_i = -\frac{\partial X_k}{\partial t}\frac{\Delta_{ki}}{\Delta}, \tag{4.23}$$

мұндағы $\Delta_{ki} - \Delta$ анықтаушысындағы $\frac{\partial X_k}{\partial x_i}$ элементінің алгебралық қосымшасы.

Орта қосылмайтындығын және жылдамдық өрісі стационарлы екендігін жорамалдап ағыс аймағының еркін M нүктесі үшін $\frac{\partial X_k}{\partial t}$ жергілікті туындысын есептейік. Осы мақсатпен қаралатын нүкте жататын γ ток сызығын өзіне қосатын ток түтікшесін бөлейік. Екі жақын ω және ω_1 көлденең қимасы бар және бетпен шектелген ток түтікшесінің бойымен дененің шексіз кішкентай материалды элементі қозғалатын болсын (4.3-сурет). Осы элементтің көлемі тұрақты болып қалады және S көлденең қимасы мен Δl элемент ұзындығының көбейтіндісіне тең болады.

Уақытты санаудың басын таңдайық және уақыттың бас кезінде $(t=0)$ қаралатын элемент тұтас ортаның қатты болып қозғалатын аймағында, x_3 осіне параллельді болатын етіп координат жүйесін орналастырайық. Осы уақытта қаралатын элемент υ_0 жылдамдығымен қозғалысын. Сонымен бірге m бөлшегінің лагранждық координаттары (ω көлденең қимасы) (X_1, X_2, X_3) болады, ал сол ток сызығымен қозғалатын m бөлшегіне жақын m_1 бөлшегінің лагранждық координаттары (ω_1 көлденең қимасы) $(X_1, X_2, X_3 - \Delta X_3)$ тең болады.



4.3-сурет. Ток түтікшесі бойымен материалды көлемнің қозғалуы

t мезгілінде m материалды бөлшегі M нүктесіне барады, ал m_1 бөлшегі сол ток сызығында жататын M_1 нүктесіне келеді.

Жергілікті туындының анықтамасы бойынша мынаны жазуға болады:

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X_k(M, t+\Delta t) - X_k(M, t)}{\Delta t}.$$

t мезгілінде M нүктесіне лагранждық координатасы (X_1, X_2, X_3) болатын m бөлшегі, ал $t+\Delta t$ мезгілінде лагранждық координатасы $(X_1, X_2, X_3 - \Delta X_3)$ болатын m_1 бөлшегі барады. Сондықтан мынаны жазуға болады:

$$\frac{\partial X_1}{\partial t} = \frac{\partial X_2}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial X_3}{\partial t} = -\frac{\Delta X_3}{\Delta t}.$$

Қысылмау шартын пайдаланайық. Уақыт нөлге тең болған кезде $(t=0)$ элемент көлемі $\Phi_0 \Delta X_3$, ал t уақыт мезгілінде осы

көлем $\Phi\Delta l$ тең болады, мұндағы $\Delta l = \upsilon \cdot \Delta t$; Φ_0 және Ф – бастапқы және ағымдағы көлденең қима аудандарының мөлшерлері; υ – жылдамдық.

Элемент көлемінің мынадай тұрақты шартынан: $\Phi\upsilon\Delta t = \Phi_0 \Delta X_3$ және (4.3) теңдеуінен мынау келіп шығады:

$$\frac{\Delta X_3}{\Delta t} = \Phi \cdot \frac{\upsilon}{\Phi_0} = \upsilon_0 .$$

Сонымен қысылмайтын ортаның стационарлы ағымы үшін 4.3-суретте көрсетілгендей координат жүйесін орналастырып мынаған ие боламыз:

$$\frac{\partial X_1}{\partial t} = \frac{\partial X_2}{\partial t} = 0; \ \frac{\partial X_3}{\partial t} = -\upsilon_0, \tag{4.24}$$

мұндағы υ_0 – қатты аймақтың үдемелі қозғалысының жылдамдығы.

Сөйтіп жылдамдықтың сыңарлары мынаған тең:

$$\upsilon_1 = -\upsilon_0 \Delta_{31}; \ \upsilon_2 = -\upsilon_0 \Delta_{32}; \ \upsilon_3 = -\upsilon_0 \Delta_{33}. \tag{4.25}$$

Аралас Эйлерлік-Лагранждық айнымалыларды қолданып жылдамдық өрісін салу. S бетімен шектелген ток түтігінде, қысылмайтын тұтас ортаның үш өлшемді стационарлық ағысын қарап талқылайық. Бастапқы уақыт мезгілінде $(t = 0)$ υ_0 жылдамдығымен x_3 осіне параллельді қозғалатын қатты аймақта $X_1 = const$ және $X_2 = const$ координатты жазықтарын белгілеп қояйық. Егер деформация ошағында ток түтігінің $x_3 = const$ көлденең қимасын жүргізетін болсақ, онда осы қималарда $X_1 = const$ және $X_2 = const$ сызықтары қисық сызықты торды құрады. Осы қисық сызықты торлар келесі аралас байланыстарды табуға мүмкіндік береді:

$$x_1 = f(x_3, X_1, X_2); \ \ x_2 = q(x_3, X_1, X_2). \tag{4.26}$$

Осымен, тұтас ортаның қатаң қозғалатын аймағында жүргізілген Ω_0 көлденең қимасында (X_3 = const) X_1 және X_2 материалды бөлшектердің координатасын біліп, (4.26)

қатынасын салуға болады (мысалы, тәжірибемен) және деформация ошағында жүргізілген Ω қимасында бөлшек болған кезде, оның координатасын табуға мүмкіндік пайда болады.

Ең соңында, Ω_1 (t = 0) қимасында қисық сызықты лагранждық координаттар жүйесі енгізілген мына жағдайды қарайық:

$$B_1 = B_1(X_1, X_2),\ B_2 = B_2(X_1, X_2). \qquad (4.27)$$

$dB_1/dt = dB_2/dt = dX_3/dt = 0$ шарттарын жазып біз (4.26) жүйесіне ұқсас теңдеулер жүйесін аламыз. Осы теңдеулер жүйесінің шешімі болып мынадай жылдамдықтар құраушылары саналады:

$$\upsilon_1 = -\upsilon_0 \Delta_{31}/\Delta_0,\quad \upsilon_2 = -\upsilon_0 \Delta_{32}/\Delta_0,\quad \upsilon_3 = -\upsilon_0 \Delta_{33}/\Delta_0, \qquad (4.28)$$

мұндағы $\Delta_0 = \dfrac{D(B_1, B_2)}{D(X_1, X_2)}$ – (4.27) бейнелеуінің якобионы.

Бақылау сұрақтары.

1. Ток сызығы дегеніміз не ?
2. Траектория дегеніміз не ?
3. Қандай жағдайда ток сызығы мен траектория бір-біріне сәйкес келеді?
4. Бет арқылы уақыт бірлігінде өтетін тұтас ортаның көлемі неге тең?
5. Ток түтігі мен ток түтікшесі немен айырмашылықта болады?
6. Қандай жылдамдықтар өрістері соленоидальды деп аталады?
7. Уақыт бойынша жеке туындымен толық туындының қандай айырмашылығы бар?

4.2. Деформация жылдамдығы тензоры. Ток функциялары

Деформация жылдамдықтары. Қараушы кеңістігінде бекітілген декарттық координаттар жүйесін x_i деп қолданайық.

Тұтас орта қозғалатын аймақта көлемі W болатын элементті бөліп алайық және осы көлемде орналасқын M және N нүктелеріне қарайық. Бөлінген M нүктесінің радиус-векторы $\vec{x}$ болсын, ал оған жақын орналасқан N нүктесінің радиус-векторы $\vec{x}+d\vec{x}$ болсын (4.4-сурет). M нүктесінің жылдамдығы $\vec{\upsilon}(\vec{x})$, ал көрші N нүктесінің жылдамдығы $\vec{\upsilon}(\vec{x}+d\vec{x})=\vec{\upsilon}(\vec{x})+d\vec{\upsilon}$ тең болсын. Мұнда, (1.46) теңдеуіне сәйкесті, дифференциал мынаған тең:

$$d\vec{\upsilon}=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial\vec{x}}d\vec{x}=\left[\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}\right]d\vec{x}\,.$$

Тензорды $[\partial\upsilon_i/\partial x_k]$ ($\vec{\upsilon}$ векторының векторлық аргумент бойынша $\vec{x}$ туындысы) симметриялық және қисық симметриялық тензорлардың қосындысына бөліп мынаны табамыз:

$$\left[\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}\right]=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}\right)\right]+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}-\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}\right)\right].$$

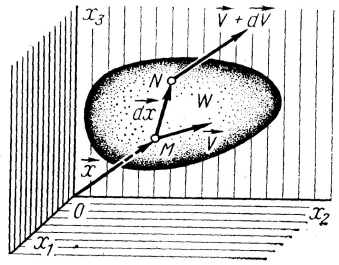
Осылай тензорды симметриялық және қисық симметриялық тензорлардың қосындысына бөле отырып N нүктесінің жылдамдығын былай табайық:

$$\vec{\upsilon}(\vec{x}+d\vec{x})=\vec{\upsilon}(\vec{x})+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}\right)\right]d\vec{x}+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}-\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}\right)\right]d\vec{x}. \quad (4.29)$$

Үшінші қосындыны өзгертейік. Бірінші тарауда келтірілген мәліметтерді пайдалана отырып, қисық симметриялы тензорды мынадай түрге келтіруге болады:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}-\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}\right)\right]=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix},$$

мұндағы $\omega_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_3}\right)$; $\omega_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_1}-\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_3}\right)$; $\omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}\right)$.



4.4-сурет. Тұтас ортаның ағысы

Жылдамдық құйынын есептеудің формуласын еске ала отырып, вектор $\vec{\omega}$ (сыңарлары ω_i) жылдамдық өрісімен $\vec{\upsilon}$ мынадай теңдікпен байланысты екендігін еске түсіреміз:

$$\vec{\omega} = 0{,}5 rot\vec{\upsilon}.$$

Осындай математикалық талдаудан кейін мынаны жазуға болады:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right)\right] d\vec{x} = \vec{\omega} \times d\vec{x} = \frac{1}{2} rot\vec{\upsilon} \times d\vec{x}.$$

Анықталған формулаларды (4.29) теңдеуіне қойып, (3.48) теңдеуіне ұқсас мынадай теңдеуді аламыз:

$$\vec{\upsilon}\left(\vec{x} + d\vec{x}\right) = \vec{\upsilon}\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{2} rot\vec{\upsilon} \times d\vec{x} + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right)\right] d\vec{x} \cdot \qquad (4.30)$$

Жоғарыда жазылған ең соңғы формула N нүктесіндегі жылдамдық үш қосылғыштың қосындысынан тұратынын көрсетеді. Бірінші қосылғыш, ол элемент W-ның үдемелі қозғалысының жылдамдығы $\left[\left(\vec{\upsilon}\left(\vec{x}\right)\right)\right]$, екінші қосылғыш, ол қатты дененің айналуымен байланысты жылдамдық $\frac{1}{2} rot\vec{\upsilon} \times d\vec{x}$, ал үшінші қосылғыш, ол элементтің илемділік деформациясымен байланысты жылдамдық $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right)\right] d\vec{x}$.

Деформация жылдамдығының тензоры. Мынадай симметриялық тензорды:

$$T_\xi = [\xi_{ik}], \tag{4.31}$$

мұндағы

$$\xi_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right), \tag{4.32}$$

деформация жылдамдығы тензоры деп атайды.

Осы тензордың сыңарларында қандай геометриялық мән бар екендігін қарайық.

t уақытысына мынадай өсімшені берейік: dt. Онда ортаның бөлшектері мынадай өте кішкентай мөлшерге орын ауыстырады: $d\vec{u} = \vec{\upsilon} dt$.

Орын ауыстыру өрісіне $d\vec{u} = (du_i)$ мына деформация тензоры сәйкес келеді:

$$d\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial (du_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial (du_k)}{\partial x_i}\right].$$

Деформация сыңарларын $d\varepsilon_{ik}$ уақыт өсімшесіне dt бөле отырып, осы dt-ны нөлге ұмтылдырайық. Сонда алынатын мынадай мөлшер:

$$\frac{d\varepsilon_{ik}}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\left(\frac{du_i}{dt}\right)}{\partial x_k} + \frac{\partial\left(\frac{du_k}{dt}\right)}{\partial x_i}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right) = \xi_{ik} \tag{4.33}$$

деформация жылдамдығы деп аталады.

Тензордың T_ξ қиғаш сызықтағы сыңарлары элементарлы кесіндінің салыстырмалы ұзаруының жылдамдығы болып саналады. Осы салыстырмалы ұзарудың жылдамдығы координатты оське параллельді болады.

Тензордың T_ξ бүйірдегі сыңарларын тік бұрышты кесінділердің бұрылу жылдамдығы немесе ығысу деформациясының жылдамдығы деп атайды.

Төмендегі кестеде деформация жылдамдықтары сыңарлары үшін үш әр түрлі белгілеу жүйесі келтірілген. Негізгі ретінде біз олардың біріншісін қолданатын боламыз. Қисық сызықты

координаттарға ауысқан кезде сандық көрсеткіштерді әріптік көрсеткіштерге ауыстыру дұрыс. Сірә, осындай да қайталайтын көрсеткіштер бойынша қосудан бас тарту қажет.

4.1-кесте

Үш белгілеу жүйесі

I	ξ_{11}	ξ_{22}	ξ_{33}	ξ_{12}	ξ_{23}	ξ_{31}
II	ξ_{xx}	ξ_{yy}	ξ_{zz}	ξ_{xy}	ξ_{yz}	ξ_{zx}
III	ξ_x	ξ_y	ξ_z	$0{,}5\eta_{xy}$	$0{,}5\eta_{yz}$	$0{,}5\eta_{zx}$

Басты деформация жылдамдығы. Симметриялы деформация жылдамдығы тензорын T_ξ координатты осьтерді бұру арқылы мына диагональды түрге келтіруге болады:

$$T_\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 \end{bmatrix}. \qquad (4.34)$$

Деформация жылдамдығының бас сыңарлары мынадай теңсіздікті қанағаттандырады: $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \xi_3$.

Жаңа координатты жүйеде тензордың бүйірдегі сыңарлары нөлге тең болады, яғни нөлден айырмашылықта тек координатты осьтер бағытындағы сызықты деформация жылдамдықтары болады. Басқаша тағы да айтқанда жаңа координатты осьте тензордың ығысу деформациясы жылдамдықтары нөлге тең болады. Осындайда, координатты жазықтықтарға параллельді қырлары (биіктігі dl) және $W = (dl)^3$ көлемі бар элементарлы куб dt уақытысында қырлары dl $(1 + \xi_i)$ dt және көлемі ω болатын тікбұрышты параллелепипедке айналады.

Осындайда, тым жоғары реттікті шексіз кішкентайға дейінгі дәлдікпен көлемнің салыстырмалы өзгеруі мынаған тең: $\frac{w-W}{W} = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)\ \ dt$.

Деформация жылдамдығының бас сыңарлары мынадай сипаттамалық теңдеудің нақты түбірлері болады: $\left|\xi_{ik}-\lambda\delta_{ik}\right|=0$ немесе жайылған түрде жазған кезде

$$\lambda^3-\xi^I\lambda^2+\xi^{II}\lambda-\xi^{III}=0. \qquad (4.35)$$

Деформация жылдамдығы тензорының инварианттары мынаған тең:

$$\xi^I=\xi_{11}+\xi_{22}+\xi_{33}=\xi_1+\xi_2+\xi_3=3\xi_0; \qquad (4.36)$$

$$\xi^{II}=\begin{vmatrix}\xi_{11} & \xi_{12}\\ \xi_{21} & \xi_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\xi_{22} & \xi_{23}\\ \xi_{32} & \xi_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\xi_{33} & \xi_{31}\\ \xi_{13} & \xi_{11}\end{vmatrix}= \qquad (4.37)$$

$$=\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1;$$

$$\xi^{III}=\left|\xi_{ik}\right|=\xi_1\xi_2\xi_3. \qquad (4.38)$$

Бірінші инварианттың физикалық мағынасы бар. Бұл мағына бойынша бірінші инвариант көлемнің салыстырмалы өзгеруінің жылдамдығына тең. Осы физикалық мағына мынадай теңдіктен де шығады:

$$\xi^I=\xi_{11}+\xi_{22}+\xi_{33}=\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_3}=div\vec{\upsilon}. \qquad (4.39)$$

4.2–есеп. Деформация жылдамдығы және көлем элементінің айналуы.

Мынадай жылдамдықтардың стационарлы өрісі берілсін: $\upsilon_1=0,\ \upsilon_2=4x_1,\ \upsilon_3=4x_1.$ Деформация жылдамдығы тензорын және материалды бөлшектің бұрыштық жылдамдық векторын табу қажет.

Шешуі. Тензор сыңарларын былай есептейік:

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{d\vec{x}}=\left[\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}\right]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Сонымен:

$$T_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{\upsilon} = -2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Деформация жылдамдығы тензорының басты сыңарларын мына теңдеуден табамыз:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

немесе $\lambda^3 - 8\lambda = 0$, осыдан мынаны анықтаймыз $\lambda_1 = 2\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -2\sqrt{2}$.

Деформация жылдамдығы тензорының диагональды түрі мынадай:

$$T_\xi = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

4.3–есеп. Деформация жылдамдығы тензорының дивергенциясы.

Қысылмайтын орта үшін мынадай тәуелділік: $2divT_\xi = \nabla^2\vec{\upsilon}$ әділ екендігін дәлелдеу қажет, мұндағы $\nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial x_2^2} + \frac{\partial(\ )}{\partial x_3^2}$ − Лаплас операторы.

Шешім. Егер 3.4–есебінде орын ауыстыруды жылдамдықпен ауыстырса, онда мына формуланы аламыз:

$$2divT_\xi = \nabla^2\vec{\upsilon} + 3grad\xi_0, \qquad (4.40)$$

мұндағы $\xi_o = \frac{1}{3}\left(\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33}\right)$.

Қысылмайтын орта үшін мынаны табамыз: $\xi_i = 0$ және $2div T_\xi = \nabla^2 \vec{\upsilon}$.

Деформация жылдамдығының девиаторы. Деформация жылдамдығы тензорын девиатор D_ξ мен шар тензорының $\xi_o I$ қосындысы түрінде былай көрсетуге болады:

$$T_\xi = D_\xi + \xi_o I, \tag{4.41}$$

мұндағы $\xi_o = \frac{1}{3}\xi_{ii} = \frac{1}{3}(\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33})$ немесе

$$[\xi_{ik}] = [\xi_{ik} - \xi_o \delta_{ik}] + \xi_0 [\delta_{ik}]. \tag{4.42}$$

Анықтама бойынша девиатордың бірінші инварианты нөлге тең. Сондықтан девиатор орта элементі көлемінің өзгеруімен байланысты емес, осы орта элементінің деформация жылдамдығын сипаттайды.

(4.41) формуласы ортаның шексіз кішкентай элементінің деформация жылдамдығын мынадай екі деформацияның қосындысы ретінде көрсетеді: олардың біріншісі девиатормен бейнеленеді және ол элемент көлемінің өзгеруінсіз, осы элемент пішіннің бұрмалану жылдамдығын сипаттайды, ал екінші құраушысы (шарлық тензор) осы элементті біркелкі барлық жақты созуды немесе қысуды сипаттайды.

Девиатор сыңарларын былай деп белгілейік: η_{ik}; $\eta_{ik} = \xi_{ik} - \xi_o \delta_{ik}$.

Деформация жылдамдығы девиаторының тензоры $D_\xi = [\eta_{ik}]$ симметриялы болғандықтан, оны диагональ түріне келтіруге болады.

Деформация жылдамдығы девиаторының басты бағытымен тензордың басты бағыты бір-біріне сәйкес келеді.

Сипаттамалық теңдеуде мынадай түр бар: $|\eta_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0$

немесе

$$\lambda^3 - \eta^{II}\lambda - \eta^{III} = 0, \tag{4.43}$$

өйткені оның бірінші инварианты нөлге тең. Деформация жылдамдығы девиаторының екінші және үшінші инварианттары мына формулалармен анықталады:

$$\eta^{II} = \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{32} & \eta_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_{33} & \eta_{31} \\ \eta_{13} & \eta_{11} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\eta_{ik}\eta_{ik} = \tag{4.44}$$

$$-\frac{1}{6}\left[(\xi_{11}-\xi_{22})^2 + (\xi_{22}-\xi_{33})^2 + (\xi_{33}-\xi_{11})^2 + 6\left(\xi_{12}^2 + \xi_{23}^2 + \xi_{31}^2\right)\right],$$

$$\eta^{III} = |\eta_{ik}|. \tag{4.45}$$

Қарауымызға ығысу деформациясы жылдамдығының қарқындылығы деген түсінікті киргізейік:

$$H = 2\sqrt{|\eta^{II}|} = \sqrt{2\eta_{ik}\eta_{ik}}. \tag{4.46}$$

Ығысу деформациясының дәрежесі. Жылдамдықтар өрісін біліп материалды бөлшектің басты және ағымдағы координаттар байланысын анықтауға және деформацияны есептеуге ауысуға болатындығын біз жоғарыда айттық.

Беріктену нәтижелерін сипаттағанда материалды бөлшектердің айналасында қосынды пішін өзгертуді анықтау маңызды рөлді атқарады. Қосынды пішін өзгертудің мөлшері болып мынадай ығысу деформациясының дәрежесі есептеледі:

$$\Lambda = \int_0^t H d\tau. \tag{4.47}$$

Интегралдауды материалды бөлшектің бүкіл траекториясы бойымен орындайды, яғни бастапқы жайдан ($\tau = 0$) ағымдағы жайға дейін ($\tau = t$).

Маңызды болып мына формула есептеледі: $H = \frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \frac{\partial\Lambda}{\partial x_i}\upsilon_i.$

Осы формула ығысу деформация жылдамдығының қарқындылығы мен ығысу деформациясының дәрежесін байланыстырады.

Кіші деформация девиаторын D_ε бес өлшемді евклидтік кеңістікте E_5 вектор етіп көрсетейік. Уақыт бойынша материалды бөлшектің айналасының деформациялау процесін,

осы кеңістіктегі кейбір траекториямен бейнелейтін болайық. Осы траекторияның доға ұзындығы деформацияның ығысу дәрежесі Λ болып саналады. Материалдың деформациялық беріктенуін сипаттайтын параметрлер, осы мөлшердің функциясы болып қаралуы мүмкін.

Мысалдар. Мысал ретінде – деформацияланған күйдің ең маңызды жағдайларын қарайық.

Жай созу (орта қысылмайды, $\xi_1 = \xi,\ \xi_2 = \xi_3 = -0{,}5\xi,\ \xi \succ 0$):

$$\mathrm{T}_{\xi} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5\xi & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5\xi \end{bmatrix}, \quad H = \sqrt{3}\xi\,. \tag{4.48}$$

Жай қысу (орта қысылмайды, $\xi_1 = \xi_2 = 0{,}5\xi,\ \xi_3 = -\xi,\ \xi \succ 0$):

$$\mathrm{T}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0{,}5\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5\xi & 0 \\ 0 & 0 & -\xi \end{bmatrix}, \quad H = \sqrt{3}\xi\,. \tag{4.49}$$

Таза ығысу

$$\mathrm{T}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5\eta & 0 \\ 0{,}5\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = |\eta|\,. \tag{4.50}$$

Жазық деформация $\left(\upsilon_1 = \upsilon_1(x_1, x_2),\ \upsilon_2 = \upsilon_2(x_1, x_2),\ \upsilon_3 = 0\right)$:

$$\mathrm{T}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & 0 \\ \xi_{21} & \xi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Қысылмайтын орта үшін:

$$H = 2\sqrt{\xi_{11}^2 + \xi_{12}^2}\ . \tag{4.51}$$

Қысылмайтын ортаның көлемдік деформациясы.

Осындай жағдай үшін мына шарт орындалады: $\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} = 0$ және

$$H = 2\sqrt{\xi_{11}^2 + \xi_{11}\xi_{22} + \xi_{22}^2 + \left(\xi_{12}^2 + \xi_{23}^2 + \xi_{31}^2\right)}. \tag{4.52}$$

Деформация жылдамдығы девиаторының басты сыңарлары келесі түрде көрсетілуі мүмкін:

$$\eta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) H \cdot cos\,\beta_{\xi},\ \ \eta_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) H \cdot sin\left(\beta_{\xi} - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\eta_3 = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) H \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta_{\xi}\right).$$

Осы кезде мынадай параметр:

$$\nu_{\xi} = \frac{2\xi_2 - \xi_1 - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} \tag{4.53}$$

β_{ξ} бұрышын мына қатынаспен анықтайды:

$$\nu_{\xi} = \left[\frac{tg\left(\beta_{\xi} - \dfrac{\pi}{6}\right)}{tg\,\dfrac{\pi}{6}}\right].$$

Жай созуға мынау сәйкес келеді: $\nu_{\xi} = -1$ және $\beta_{\xi} = 0$; таза ығысуға мынау сәйкес келеді: $\nu_{\xi} = 0$ және $\beta_{\xi} = \pi/6$; жай қысуға мынау сәйкес келеді: $\nu_{\xi} = +1$ және $\beta_{\xi} = \pi/3$.

4.4 – есеп. Ток функциясы.

Кез келген функцияны таңдаған кезде, қысылмау шартты бірдейлік қанағаттандырылынатын етіп, қысылмайтын ортаның жазық ағысы үшін жылдамдық сыңарларын кейбір функция $\psi(x_1, x_2)$ арқылы көрсету қажет.

Шешім: Қысылмау шартында мынадай түр бар:

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2} = 0. \qquad (4.54)$$

Жылдамдық мынаған тең болсын:

$$\upsilon_1 = \partial\psi / \partial x_2 \,, \upsilon_2 = -\partial\psi / \partial x_1 \,. \qquad (4.55)$$

Соңғы қатынастарды (4.54) теңдеуіне қойғаннан кейін мынаны аламыз:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \,,$$

яғни қысылмау шарты толық қанағаттандырылады.

$\psi(x_1, x_2)$ функциясында қандай физикалық мағына бар екендігін қарайық. Мынадай ток сызығының дифференциалдық теңдеуін жазайық: $dx_1 / \upsilon_1 = dx_2 / \upsilon_2$ және осы теңдеуге (4.55) формуласын қояйық. Сонда мынаны аламыз:

$$\frac{dx_1}{\partial\psi / \partial x_2} + \frac{dx_2}{-\partial\psi / \partial x_1} = 0 \cdot$$

Формуланы түрлендірейік, сонда мынананы аламыз:

$$\frac{d\psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{d\psi}{\partial x_2} dx_2 = 0 \text{ немесе } d\psi = 0, \psi = \text{const}.$$

Сонымен, ток сызығы бойымен $\psi(x_1, x_2)$ функциясы тұрақты мәнді сақтайды. Осы себептен ол ток функциясы деп аталады.

Деформация жылдамдығының бірлестік теңдеулері. Деформацияның бірлестік теңдеулерін еске түсіріп және қолданылатын байланыстардың ұқсастықтарын ескеріп, яғни

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right); \quad \xi_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right),$$

деформация жылдамдығы тензорының сыңарлары мынадай бірлестік теңдеулермен байланысты екендігін көрсетуге болады:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\xi_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\xi_{22}}{\partial x_1^2}=2\frac{\partial^2\xi_{12}}{\partial x_1\partial x_2};\\
&\frac{\partial^2\xi_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\xi_{33}}{\partial x_2^2}=2\frac{\partial^2\xi_{23}}{\partial x_2\partial x_3};\\
&\frac{\partial^2\xi_{33}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\xi_{11}}{\partial x_3^2}=2\frac{\partial^2\xi_{31}}{\partial x_3\partial x_1};
\end{aligned}\right\} \tag{4.56}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\xi_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial\xi_{31}}{\partial x_2}-\frac{\partial\xi_{12}}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2\xi_{33}}{\partial x_1\partial x_2};\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\xi_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial\xi_{23}}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial^2\xi_{11}}{\partial x_2\partial x_3};\\
&\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\xi_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial\xi_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial\xi_{31}}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial^2\xi_{22}}{\partial x_3\partial x_1}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.57}$$

Қисық сызықты координаттар. $\widetilde{\upsilon}_1,\widetilde{\upsilon}_2,\widetilde{\upsilon}_3$ жергілікті $\vec{b}_i$ ортогональды базисінде жылдамдық векторының қисық сызықты сыңарлары болсын.

Осындай жағдайда әрбір M нүктесінде мынадай жіктеуге орын бар болады: $\vec{\upsilon}=\widetilde{\upsilon}_i b_i$.

Деформация жылдамдығы тензорының сыңарлары M нүктесінде мына формулалармен есептеледі:

$$\left.\begin{aligned}
&\widetilde{\xi}_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\widetilde{\upsilon}_1}{\partial\beta_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta_2}\widetilde{\upsilon}_2+\frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial\beta_3}\widetilde{\upsilon}_3;\\
&\widetilde{\xi}_{22}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\widetilde{\upsilon}_2}{\partial\beta_2}+\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial\beta_3}\widetilde{\upsilon}_3+\frac{1}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\beta_1}\widetilde{\upsilon}_1;\\
&\widetilde{\xi}_{33}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial\widetilde{\upsilon}_3}{\partial\beta_3}+\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial\beta_1}\widetilde{\upsilon}_1+\frac{1}{H_3H_2}\frac{\partial H_3}{\partial\beta_2}\widetilde{\upsilon}_2;
\end{aligned}\right\} \tag{4.58}$$

$$\left.\begin{aligned}
&2\widetilde{\xi}_{12}=\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{\widetilde{\upsilon}_2}{H_2}\right)+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\frac{\widetilde{\upsilon}_1}{H_1}\right);\\
&2\widetilde{\xi}_{23}=\frac{H_3}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\frac{\widetilde{\upsilon}_3}{H_3}\right)+\frac{H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial\beta_3}\left(\frac{\widetilde{\upsilon}_2}{H_2}\right);\\
&2\widetilde{\xi}_{31}=\frac{H_1}{H_3}\frac{\partial}{\partial\beta_3}\left(\frac{\widetilde{\upsilon}_1}{H_1}\right)+\frac{H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{\widetilde{\upsilon}_3}{H_3}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{4.59}$$

мұндағы H_1, H_2, H_3 – Лямэ коэффициенттері.

Цилиндрлік координат жүйесінде деформация жылдамдығы сыңарлары үшін мына формулаларды келтірейік (r, ω, z):

$$\left.\begin{aligned} &\xi_{rr} = \frac{\partial \upsilon_r}{\partial r}; \xi_{\omega\omega} = \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_\omega}{\partial \omega} + \frac{\upsilon_r}{r}; \xi_{zz} = \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}; \\ &2\xi_{r\omega} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\upsilon_r}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_r}{\partial \omega}; \\ &2\xi_{\omega z} = \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_z}{\partial \omega} + \frac{\partial \upsilon_\omega}{\partial z}; 2\xi_{zr} = \frac{\partial \upsilon_r}{\partial z} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}. \end{aligned}\right\} \quad (4.60)$$

Сфералық координат жүйесінде деформация жылдамдығы сыңарлары былай анықталады (r, ω, χ):

$$\left.\begin{aligned} &\xi_{rr} = \frac{\partial \upsilon_r}{\partial r}; \\ &\xi_{\omega\omega} = \frac{1}{r \cdot \sin\chi}\frac{\partial \upsilon_\omega}{\partial \omega} + \frac{\upsilon_r}{r} + \frac{\upsilon_\chi}{r} ctg\chi; \\ &\xi_{\chi\chi} = \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_\chi}{\partial \chi} + \frac{\upsilon_r}{r}; \\ &2\xi_{r\omega} = \frac{1}{r \cdot \sin\chi}\frac{\partial \upsilon_r}{\partial \omega} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\upsilon_\omega}{r}\right); \\ &2\xi_{\omega\chi} = \frac{\sin\chi}{r}\frac{\partial}{\partial \chi}\left(\frac{\upsilon_\omega}{\sin\chi}\right) + \frac{1}{r \cdot \sin\chi}\frac{\partial \upsilon_\chi}{\partial \omega}; \\ &2\xi_{\chi r} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\upsilon_\chi}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_r}{\partial \chi}. \end{aligned}\right\} \quad (4.61)$$

4.5 – есеп. Қысылмау шартының жалпы түрі.

Қысылмау шартын қисық сызықты ортогональды координат жүйесінде жазу қажет.

Шешім. Қысылмау шартында мынадай түр бар: $\tilde{\xi}_{11} + \tilde{\xi}_{22} + \tilde{\xi}_{33} = 0$. (4.58) қатынасының оң және сол жағын Лямэ коэффициентінің көбейтіндісіне көбейтейік және қосайық. Күрделі емес түрлендіруден кейін мына іздеген теңдеуімізді аламыз:

$$\frac{\partial}{\partial\beta_1}(H_2H_3\upsilon_1)+\frac{\partial}{\partial\beta_2}(H_3H_1\upsilon_2)+\frac{\partial}{\partial\beta_3}(H_1H_2\upsilon_3)=0\cdot \qquad (4.62)$$

4.6 – есеп. Қисық сызықты координаттағы ток функциясы.

Қисық сызықты ортогональды координат жүйесінде жылдамдықтың бір құраушысы (мысалы, υ_3) нөлге тең болсын. Қысылмау шарты бірдейлік қанағаттандырылынатын етіп, жылдамдықтың басқа сыңарларын кейбір функция ψ арқылы көрсету қажет.

Шешім. (4.62) қысылмау шартын қаралатын ағыс үшін былай жазайық:

$$\frac{\partial}{\partial\beta_1}(H_2H_3\upsilon_1)+\frac{\partial}{\partial\beta_2}(H_3H_1\upsilon_2)=0\cdot \qquad (4.63)$$

Мына теңдеулер орынды деп санайық: $(H_2H_3\upsilon_1)=\frac{\partial\psi}{\partial\beta_2}$, $(H_3H_1\upsilon_2)=-\frac{\partial\psi}{\partial\beta_1}$, онда (4.63) теңдеуі былай қанағаттандырылынатын болады:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta_1\partial\beta_2}+\frac{\partial\psi}{\partial\beta_2\partial\beta_1}=0.$$

Сонымен, жылдамдық құраушылары үшін мынадай қатынас орындалады:

$$\upsilon_1=\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial\psi}{\partial\beta_2};\ \upsilon_2=-\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial\psi}{\partial\beta_1}. \qquad (4.64)$$

Жазық ағыс жағдайына ұқсас (4.4 есебін қараңыз) ψ функциясы қисық сызықты координаттадағы ток функциясы деп аталады.

Материалды бөлшектің қисық сызықты координатасымен жылдамдық сыңарлары мынадай қатынаспен байланысты болғандықтан:

$$\upsilon_1=H_1\frac{d\beta_1}{dt},\upsilon_2=H_2\frac{d\beta_2}{dt},\upsilon_3=H_3\frac{d\beta_3}{dt}, \qquad (4.65)$$

ток сызығы бойымен мына шарт орындалатын болады:

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\beta_1}d\beta_1+\frac{\partial\psi}{\partial\beta_2}d\beta_2=-H_3H_1\upsilon_2\frac{\upsilon_1}{H_1}dt+H_2H_3\upsilon_1\frac{\upsilon_2}{H_2}dt=0.$$

Жазық ағыстағы сияқты ток сызығы бойымен ток функциясы тұрақты мәнді сақтайды.

Егер цилиндрлік координат жүйесінде $\upsilon_\omega = 0$ болса, онда жылдамдықтар былай анықталғанда:

$$\upsilon_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \upsilon_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad (4.61)$$

қысылмау шарты қанағаттандырылынатын болады.

Егер сфералық координат жүйесінде $\upsilon_\omega = 0$ болса, онда жылдамдықтар былай анықталғанда:

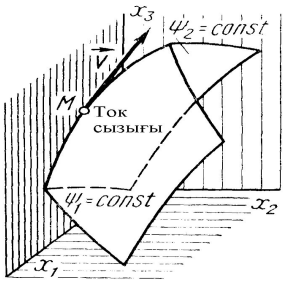
$$\upsilon_r = \frac{1}{r^2 \sin\chi}\frac{\partial \psi}{\partial \chi}, \upsilon_\chi = -\frac{1}{r\sin\chi}\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad (4.61)$$

қысылмау шарты қанағаттандырылынатын болады.

Стационарлық көлемдік ағыс үшін ток функциясы. Қысылмайтын тұтас ортаның стационарлы ағысын қарайық. Ток сызығы мына беттердің қиылысуымен анықталатын болсын: $\Psi_1(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ және $\Psi_2(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$. Осындай жағдайда тұрақты көбейткішке дейінгі дәлдікпен жылдамдық векторын келесі түрде жазуға болатындығын көрсетейік:

$$\vec{\upsilon} = \nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2 . \qquad (4.62)$$

Осындайда векторлық өріс үшін (4.62) қысылмайтын шарт $div\vec{\upsilon} = 0$ орындалатындығын, ал жылдамдық векторы көрсетілген беттердің қиылысу сызықтарының жанамасы бойымен бағытталатындығын дәлелдеу қажет (4.5-сурет).



4.5-сурет. Көлемдік ағыстың ток ағысы

Векторлық талдаудан мынау белгілі:

$$div\left(\nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2\right) = \nabla\left(\nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2\right) = \nabla\Psi_2\left(\nabla \times \nabla\Psi_1\right) - \nabla\Psi_1\left(\nabla \times \nabla\Psi_2\right) = 0.$$

Өйткені $\nabla \times \nabla\Psi = 0$ (потенциалды өрістің вихрі нөлге тең).

Сонымен қысылмау шарты орындалады. Енді жылдамдық векторы ток сызығына жанасатындығын көрсету ғана қалды. Осы, $\Psi_1(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ және $\Psi_2(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ беттерінің қиылысу сызығының әрбір нүктесіндегі осы сызыққа жанамалар $\vec{\upsilon} = \nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2$ векторына параллельді екендігінен шығады.

Нәтижесінде жылдамдық өрісін токтың екі функциясы Ψ_1 және Ψ_2 көмегімен келесі түрде келтіруге болады:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_1 &= \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_3}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2}, \\ \upsilon_2 &= \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_3}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_3}, \\ \upsilon_3 &= \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1} = \frac{D\left(\Psi_1, \Psi_2\right)}{D\left(x_1, x_2\right)}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.63)$$

(4.63) тәуелділігі - υ тұрақты көбейткішіне дейінгі дәлдікпен П.И. Полухин және В.К. Воронцов шығарған мына теңдеумен

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_1 &= -\upsilon_o\Delta_{31} = -\upsilon_0\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right), \\ \upsilon_2 &= -\upsilon_o\Delta_{32} = -\upsilon_o\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3}\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right), \\ \upsilon_3 &= -\upsilon_o\Delta_{33} = -\upsilon_o\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right) = -\frac{\upsilon_o}{\Delta_o}. \end{aligned}\right\}$$

сәйкес келетіндігін айтып, осыған көңіл бөлейік. Осы, тұтас ортаға бекітілген және онымен бірге деформацияланатын материалды координатты беттің теңдеулерін $X_1 = \text{const}$ және $X_2 = \text{const}$ стационарлы кеңістіктік ағудың ток функциясы ретінде қарауға болатындығын білдіреді.

$\Psi_1 = \Psi_1^+,\ \Psi_1 = \Psi_1^-,\ \Psi_2 = \Psi_2^+,\ \Psi_2 = \Psi_2^-$ беттерімен шектелген ток түтігіндегі тұтас ортаның тасқынын есептейік. Осы мақсатпен x_3 = const жазықтығын жүргізейік. Онда тасқын ток түтігі қимасы бойынша Ω анықталатын келесі интегралға тең:

$$B = \iint\limits_{\Omega} \upsilon_3 dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\Omega} \frac{D(\Psi_1, \Psi_2)}{D(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 = \Delta\Psi_1 \Delta\Psi_2, \tag{4.64}$$

мұндағы $\Delta\Psi_1 = \Psi_1^+ - \Psi_1^-,\ \Delta\Psi_2 = \Psi_2^+ - \Psi_2^-$.

Кейбір жеке жағдайларды қарайық:

1. $\Psi_1 = \psi(x_1, x_2)$ және $\Psi_2 = x_3$ болсын. Онда ток сызығы, $x_1 0 x_2$ координатты жазықтықтарға параллельді жазықтықтарда жатқан сызықтар $\psi(x_1, x_2) = const$, $x_3 = const$ болып саналады. (4.63) формуласы бойынша мынаны табамыз: $\upsilon_1 = \frac{\partial\psi}{\partial\delta_2}$, $\upsilon_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial\delta_1}$, яғни $\psi(x_1, x_2)$ шамасы 4.4 – есебінде қаралған жазық ағыстың функциясы болып саналады.

2. $\Psi_1 = \psi(x_1, x_2)$ ток функциясы $x_1 0 x_2$ жазықтығында жазық ағысты бейнелесін, ал $\Psi_2 = \psi(x_1, x_3)$ ток функциясы $x_1 0 x_3$ жазықтығында жазық ағысты бейнелейтін болсын. Онда ток сызықтары Ψ_1 = const және Ψ_2 = const жазықтықтарының қиылысуы болып келетін көлемдік ағыс мына формуламен анықталады:

$$\upsilon_1 = \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_3},\quad \upsilon_2 = \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_3},\ \upsilon_1 = -\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1}. \tag{4.65}$$

3. β_i ортогональды қисық сызықты координаттар болсын. Онда $\Psi_1(\beta_i)$ және $\Psi_2(\beta_i)$ ток функциялары β_i координаттар жүйесінде бейнеленетін тұтас ортаның ағысын келесі жолмен анықтайды:

$$\vec{\upsilon} = \begin{vmatrix} b_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ \frac{1}{H_1}\frac{\partial \Psi_1}{\partial \beta_1} & \frac{1}{H_2}\frac{\partial \Psi_1}{\partial \beta_2} & \frac{1}{H_3}\frac{\partial \Psi_1}{\partial \beta_3} \\ \frac{1}{H_1}\frac{\partial \Psi_2}{\partial \beta_1} & \frac{1}{H_1}\frac{\partial \Psi_2}{\partial \beta_2} & \frac{1}{H_1}\frac{\partial \Psi_2}{\partial \beta_3} \end{vmatrix}, \qquad (4.66)$$

мұндағы H_i – Лямэ коэффициенті; b_i – жергілікті координатты базистің орталары.

Сонымен қатар, егер $\Psi_1 = \psi(\beta_1, \beta_2)$ және $\Psi_2 = \beta_3$ болса, онда жылдамдық сыңарларын мына түрде аламыз: $\tilde{\upsilon}_1 = \frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial \psi}{\partial \beta_2}$, $\tilde{\upsilon}_2 = \frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial \psi}{\partial \beta_1}$ (4.5– есебін қараңыз).

Мысалдар.

1. $\Psi_1 = x_1$, $\Psi_2 = x_2$. Осы жазықтардың қиылысу сызықтары x_3 осіне параллельді түзулер. (4.63) формулалары бойынша $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$, $\upsilon_3 = 1$. Сонымен, қаралған функциялар x_3 осіне параллельді қозғалатын тұтас ортаның қатаң орын ауыстыруын бейнелейді.

2. $\Psi_1 = f(x_1)$, $\Psi_2 = g(x_2)$. Жоғарыдағы мысал сияқты осы жазықтардың қиылысу сызықтары x_3 осіне параллельді түзулер. Жылдамдық сыңарлары мынаған тең: $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$, $\upsilon_3 = f'(x_1)g'(x_2)$.

3. $\Psi_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, $\Psi_2 = arctg(x_2 / x_1)$. Ток сызығы $x_1^2 + x_2^2 = const$ шеңберлері мен $arctg(x_2 / x_1) = const$ сәулелері қиылысып алынған және x_3 осіне параллельді түзулер болып саналады. Жылдамдық сыңарлары мынаған тең: $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$, $\upsilon_3 = 1$.

Жылдамдықтар өрістерін жалпы көрсету. Металдарды қысыммен өңдеу есептерін шешкен кезде, ағу аймағының шекарасындағы кейбір шарттарды қанағаттандыратын (кинематикалық мүмкін болатын өрістер деп аталатын)

жылдамдықтар өрістерін тауып, оларды жалпы түрде көрсету қажет етіледі. Бір байланысты аймақпен шектелген кез келген жылдамдықтар өрісін келесі түрде жазуға болатындығын көрсетейік:

$$\vec{\upsilon} = \nabla\varphi + \nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2 + \nabla\Phi\,, \qquad (4.67)$$

мұндағы φ, Ψ_1, Ψ_2 және Φ – кейбір скалярлы функциялар, әрі

$$\nabla^2\varphi = 0\,. \qquad (4.68)$$

Дәлелдеу үшін векторлық талдаудан белгілі, біреуі потенциалды және екіншісі соленоидальды болатын екі өрістің қосындысына еркін векторлы өрістерді $\vec{\upsilon}$ жіктеуді пайдаланайық. Пайдаланған кезде мынаны аламыз: $\vec{\upsilon} = \nabla\chi + rot\vec{A}$, мұндағы χ функциясы скалярлы, ал $\vec{A}$ функциясы векторлы потенциал деп аталады.

Өз кезегінде, $\vec{A}$ векторын келесі түрде көрсетуге болады:

$$\vec{A} = \Psi_1\nabla\Psi_2 + \nabla\psi\,. \qquad (4.69)$$

Мынадай белгілі байланыстардан шығады: $rot(\Psi_1\nabla\Psi_2) = \nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2$. Осыдан $rot(A - \Psi_1\nabla\Psi_2) = 0$ және $A - \Psi_1\nabla\Psi_2 = \nabla\psi$.

Потенциалдан χ гармониялық құраманы бөліп шығарып, яғни оны мына түрде көрсетіп: $\chi = \varphi + \Phi$ және (4.69) формуласын пайдаланып (4.67) теңдеуін аламыз. Егер орта қысылмайтын болса, онда $\Phi \equiv 0$.

Бақылау сұрақтары.

1. Деформация жылдамдығы тензорының басты осьтеріне параллельді қырлары бар элементарлы куб қалай деформацияланады?
2. Көлем элементінің салыстырмалы өзгеруінің жылдамдығын қалай есептейді?
3. Ығысу деформациясы жылдамдығының қарқындылығы деп нені айтады?

4. Ығысу деформациясының дәрежесі деп нені айтады ?
5. Ток функциясы қандай шартты бірдейлік қанағаттандыруға мүмкіндік береді?
6. Қысылмайтын ортаның көлемдік ағысын бейнелеген кезде қанша ток функциясын қолдану қажет?
7. Жылдамдық өрісін жалпы түрде қалай көрсетуге болады?

5. ДЕФОРМАЦИЯЛАНАТЫН ОРТА КҮЙІНІҢ ТЕҢДЕУІ. ФИЗИКАЛЫҚ-МЕХАНИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ МОДЕЛЬДЕУ

Илемділік теориясының мақсатына ∑ бетімен шектелген W көлемі бар өңделетін дененің кез келген $M(x,y,z)$ нүктесінде кез келген уақытта кернеулі және деформациялы күйді анықтау кіреді. Кернеу күйі кернеу тензорымен бейнеленеді. Расында да симметриялық кернеу тензорының σ_{ij} сыңарларын білсек, онда оның барлық инварианттарын анықтап, кез келген көлбеген алаңдағы кернеулерді және т.б. санауға болады. Егер қозғалу заңы, яғни дене тұратын барлық материалды бөлшектердің [$t = 0$ уақытында өздерінің a_1, a_2, a_3 координаттарымен жекелендірілген $x_1 = x_1(a_1, a_2, a_3)$, $x_2 = x_2(a_1, a_2, a_3)$, $x_3 = x_3(a_1, a_2, a_3)$ материалды бөлшектер] қозғалу траекториясы белгілі болса, онда деформациялы күй толық анықталған болар еді. Траектория бойынша мыналарды анықтауға болады: жылдамдық өрісін ($V_1 = \frac{dx_1}{dt}$, $V_2 = \frac{dx_2}{dt}$, $V_3 = \frac{dx_3}{dt}$); деформация жылдамдығы тензорының сыңарларын ξ_{ij}, үдеулерді ω_l және т.б. Айнымалы жазықтығы бар дене үшін дене көлеміндегі тығыздықтың ρ (уақытпен байланысты) таралу өрісін анықтау қажет.

Сонымен илемділік теориясының мақсатына мынадай он функцияны анықтау кіреді:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t);\\
x_1 &= x_1(a_1, a_2, a_3, t);\\
x_2 &= x_2(a_1, a_2, a_3, t);\\
x_3 &= x_3(a_1, a_2, a_3, t);\\
\rho &= \rho(x_1, x_2, x_3, t),
\end{aligned} \qquad (5.1)$$

Осы функциялар деформацияланатын дененің көлемінде W, оның ∑ шекарасымен бірге кез келген уақыт t-да анықталуы қажет. Осы функциялар ізделінетін механикалық айнымалы шамалар деп аталынады. (5.1) функциясы кез келген болуы мүмкін емес. Олар бір-бірімен кейбір қатынастармен байланысқан.

Осы қатынастарға тепе-теңдіктің дифференциалдық теңдеуі және тығыз байланыстың дифференциалдық теңдеуі жатады, яғни

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \vec{F}_i = \rho \dfrac{d\vec{\upsilon}_i}{dt}; \\ \dfrac{d\ ln}{dt} \rho + div\, \vec{\upsilon} = 0. \end{array}\right\} \qquad (5.2)$$

(5.1) функциясын табу үшін (5.2) формуласына кіретін төрт дифференциалдық теңдеуді қолдану қажет. Бірақта оларды бір мағыналы шешу мүмкін емес. Өйткені (5.2) жүйесі толық емес және жалпы жағдайда шексіз көп шешімдері бар болуы мүмкін. Айтылған жүйені тұйықтаушы теңдеулерге кернеулік және деформациялық күйлерді байланыстыратын физикалық теңдеулер жатады (осы теңдеулерді кейбірде анықтаушы реологиялық теңдеулер деп те айтады). Сонымен кинематикалық байланыстар мен сақталу заңдары, бастапқы және шекаралық шарттармен бірге тұтас орта қозғалысын толық бейнелеуге мүмкіндік беретін толық теңдеулер жүйесін бермейді. Осы жүйені тұйық етіп жасап тұтас орта қозғалысын бейнелеу үшін қосымша байланыстар қажет. Айтылған байланыстарға зерттелетін ортаның нақтылы физикалық қасиетін сипаттайтын *анықтаушы* деп аталатын теңдеулер жатады.

Анықтаушы теңдеудің мысалы ретінде – жылулық ағын векторын $\vec{q}$ температура градиентімен $T_и$ байланыстыратын жылу өткізгіштік теориясының теңдеуін $q = -gradT_i$ (Фурье заңы) келтіруге болады. Анықтаушы теңдеудің басқа мысалы болып классикалық серпімділік теориясында кернеу мен деформацияны байланыстыратын Гук заңы саналады.

Әр түрлі орта үшін кернеу, деформация, деформация жылдамдығы, температура өрістері арасында байланыстың жалпы түрін орнататын феноменологиялық анықтаушы теңдеулердің жалпы теориясын жасау тұтас орта механикасының бір маңызды проблемалары болып саналады.

Байланыстың физикалық теңдеулерін тұжырымдап жасау деформацияланатын материалдардың, соның ішінде илемдеп өңделетін материалдардың механикалық қасиетін тәжірибелік зерттеу жолымен іске асырылады. Осындайда механиканың,

математиканың және физиканың ережелерін қолданады. Физикалық теңдеулерді жасауды (ортаның физикалық модельдерін) илемділік теориясының күрделі теңдеулерін шешудің қиын екендігін ескеріп жүргізеді.

Қағида бойынша анықтаушы теңдеулер тәжірибелік зерттеулер нәтижесі негізінде шығарылады. Осы эмпиризмдік байланыстар тәжірибе жүргізілген жағдайдан айырмашылықта болатын жағдайда материалдардың жүріс-тұрысын дұрыс бейнелей алу үшін, жоғарыда айтылған қатынастарды лайықты қанағаттандыратын кейбір ережелерді орнату қажет. Осы ережелер ішінде ең маңызды ретінде макроскопиялық анықтықтың, физикалық рұқсат етудің және есептеу жүйесінен тәуелсіздіктің принциптерін айтып кетуге болады.

Осы принциптердің біріншісі – тұтас ортада жүретін термеханикалық процесс түсінігімен байланысты. Белгіленген материалды бөлшек M $(\vec{X} = const)$ айналасын қарап, егер осы бөлшек үшін $[t_o, t]$ аралығындағы уақыт бойынша үздіксіз дифференциалданатын функция түрінде деформация тензоры берілетін болса, онда деформация процесі берілген деп айтатын боламыз, яғни $\vec{X} = const$: $T_\varepsilon = T_\varepsilon(\tau), \quad t_o \le \tau \le t$.

Осыған ұқсас, материалды бөлшек айналасында M $(\vec{X} = const)$, егер уақыт бойынша үздіксіз дифференциалданатын функция түрінде кернеу тензоры берілсе, онда жүктеу процесі берілген деп айтатын боламыз, яғни $\vec{X} = const$: $T_\sigma = T_\sigma(\tau), \quad t_o \le \tau \le t$.

А. А. Ильюшинмен тұжырымдалған *макроскопиялық анықтықтың постулаты* (*принципі*) мынаны мақұлдайды: берілген зат үшін термомеханикалық күй, яғни t уақытысында материалды бөлшек M $(\vec{X} = const)$ үшін кез келген термомеханикалық макроскопиялық мөлшер, бір мағыналы осы бөлшек үшін $T_\sigma(\tau), \quad \upsilon(\tau), \quad t_o \le \tau \le t$ процесімен және $T_\varepsilon(t_o), \quad \upsilon(t_o)$ бастапқы мәндермен анықталады.

Физикалық рұқсат етудің принципі анықтаушы теңдеулер сақталудың физикалық заңдарымен сәйкес болу керектігін талап етеді.

Есептеу жүйесінен тәуелсіздіктің принципінен күйлер теңдеуі байқаушының координат жүйесін түрлендіруіне қатысты ковариантты болу керектігі шығады.

Металл мен қорытпалардың механикалық қасиетін тәжірибелік зерттеу негізіне жататын макроскопиялық анықтық постулатының бір нәтижесіне тоқтайық.

Металдарды қысыммен өңдеу есептерін шығарғанда денеге жүк түскенде пайда болатын кернеулік және деформациялық күй жалпы жағдайда біркелкі емес болып келеді, яғни дененің әр түрлі нүктелерінде әр түрлі болады және уақытпен өзгеріп отыратын стационарлы емес болып табылады. Сонымен бірге, егер еркін орналасқан материалды бөлшек M-нің төңірегінде жеткілікті кішкентай аймақты бөліп алатын болсақ, онда үздіксіздіксіз принципіне сәйкесті кернеулі және деформациялы күй осы аймақта біркелкі болады деп санауға болады.

Дененің көлеміне қатынасты M материалды бөлшектің төңірегіндегі M – үлгілік деп белгілі бір пішіні және ақырғы өлшемі бар кез келген денені айтатын боламыз. Уақыттың бастапқы мезгілінде (t_o) осы дененің заты мен күйі ΔW көлемінің t_o мезгіліндегі заты және күйімен бірдей. Осындай да үлгіліктің кернеулі және деформациялы күйі, ал тағы да температуралық өрісі кез келген уақыт мерзімінде біркелкі болады және температураның $T_н$ (t), деформацияның ε_{ij} (t), кернеудің σ_{ij} (t) өзгеруінің кез келген процесі үлгілікте іске асуы мүмкін. M-үлгілікті сынаудың жиынтығын M-тәжірибе деп атайтын боламыз.

Макроскопиялық анықтық постулатының нәтижесі дененің ΔW көлеміндегі зат күйін M-тәжірибеде суреттеуге мүмкіндік бар екендігін пайымдайды. Басқа сөзбен айтқанда M материалды бөлшектің қаралып жатқан төңірегіне M-үлгілікті сәйкесті етіп қоюға болады. Әрі осы төңіректі жүктеудің (деформациялаудың) процесін M-үлгілікте суреттеуге болады.

5.1. Изотропты материалдар үшін жалпы физикалық теңдеулерді тұжырымдау

Кернеулер σ_{ij} және деформация жылдамдықтары ξ_{ij} (ал тағы да деформацияланған күйдің басқа сипаттамалары) тәжірибелерден анықталатын әзірше белгісіз кейбір функциялармен (физикалық теңдеулермен) бір-бірімен байланысқан, яғни

$$\sigma_{ij} = f_{ij}\left(\xi_{kl}\right). \tag{5.3}$$

Сірә, осы функциялар кез келген болуы мүмкін емес. Оларға тензорлық өлшемділік сақталатын шарт орындалу қажет. Екінші рангті симметриялық тензордың ξ_{kl} сыңарларымен f_{ij} фунцияларымен қарастырылған әрекет жасау нәтижесінде екінші рангті және симметриялы σ_{ij} тензорының сыңарлары алыну қажет.

Егер материалдың механикалық қасиеті барлық бағытта бірдей болатын болса, онда оны изотропты деп атайды, ал егер керісінше материалдың механикалық қасиеті бағыттан тәуелді болатын болса, онда оны анизотропты деп атайды. Материалдың кристалдық торы оның қасиетінің анизотропты екендігін алдын ала анықтайды. Кристалдың әр түрлі бағытындағы ұзындық бірлігінде атомдар саны әр түрлі. Сондықтан кристалдарда механикалық қасиеттің анизотропиясы байқалады. Пластикалық деформацияға түсетін металдан жасалған жеткілікті дәрежедегі ірі бұйым көптеген кіші түйіршіктен тұрады. Осы түйіршіктер әр түрлі бағытталған кристаллографиялық жазықтықтар мен бағыттарға иемденген. Жеке түйіршіктерінің анизотропиялық қасиетіне қарамастан, ұсақ түйіршікті бұйымдардың механикалық қасиеттері жуықты әр түрлі бағытта бірдей (статикалық орташаландырылған). Сондықтан осындай денелерді квазиизотропты деп атайды. Қаралып жатқан элементарлы көлемнің өлшемі кішірейгенмен, ода әр түрлі түрде бағытталған кристалдардың жеткілікті саны болғанша квазиизотроптылық қасиет сақталады.

Металды деформациялаудың технологиялық есебін қарайтын қолданбалы илемділік теориясында деформацияланатын материалдың изотроптылығы туралы мынадай гипотеза қабылданады: элементарлы көлемінің кез келген өлшемі деңгейінде материал изотропты механикалық қасиетке иемденеді. Кернеулі-деформациялы күйді есептеудің нәтижесі тек макроскопиялық деңгейде дұрыс болады, яғни есепті жеткілікті дәл деңгейде шешкен кезде механикалық айнымалылар деформацияланатын дененің әрбір нүктесінде табылмайды. Олар элементарлы көлемге орташаландырылып анықталатын болады. Осы көлемдер бір жағынан дифференциялдау операциясын қолдануға мүмкіндік бар болатын деңгейде кіші болуы қажет, ал екінші жағынан ең болғанда бірнеше әр түрлі түрде бағытталған кристалдарда бар болатын деңгейде үлкен болуы керек. Жеке түйіршіктер үшін механикалық айнымалыларды есептеудің нәтижесі қатаң жуықты түрде болады. Изотропия гипотезасы көптеген технологиялық есептерді шығарғанда кернеулі-деформациялы күйді есептеудің математикалық аппаратын едәуір жеңілдетеді.

Изотроптылықты рұқсат беруден кернеу σ_{ij} және деформация жылдамдығы тензорларының ξ_{kl} коаксиальдылығы туралы мынадай гипотеза шығады: басты нормальды кернеулердің және салыстырмалы ұзарудың басты жылдамдық бағыттары изотропты тұтас орта үшін сәйкес келеді.

Көптеген жағдайда жеткілікті дәлдік дәрежесімен кернеулер мен деформация жылдамдықтары девиаторлары сыңарларының пропорционалдылығына орын бар екендігін арнайы тәжірибелер көрсеткен. Осы ереже илемділік теориясында кернеу мен деформация жылдамдығы девиаторларының пропорционалдылық гипотезасы деген атты алған.

Сөйтіп пропорционалдылық гипотезасынан немесе кернеу мен деформация жылдамдығы девиаторларының ұқсау гипотезасынан мынау шығады:

$$\frac{S_{11}}{\eta_{11}} = \frac{S_{22}}{\eta_{22}} = \frac{S_{33}}{\eta_{33}} = \psi \; ; \; \begin{pmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} \eta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33} \end{pmatrix};$$

$$D_\sigma = \psi D_\xi ,$$

мұндағы ψ – скалярлы көбейткіш. Егер девиаторларды анықтауды ескерсек және ұқсастық шартын декарттық координаттар жүйесі базисінде (жеке векторлар базисінде емес) көрсетсек, онда D_σ және D_ξ пропорционалдылық шартын мына түрде жазуға болады:

$$\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ij} \cdot \delta_{ij} = \psi \left(\xi_{ij} - \xi_{ij} \frac{\delta_{ij}}{3} \right). \qquad (5.4)$$

Ψ мөлшерін белгілі инварианттар арқылы жазуға болады. Расында да (2.40) формуласынан мынаны аламыз:

$$\dot{O} = \sqrt{S_{ij} \frac{S_{ij}}{2}} = \sqrt{\psi^2 \eta_{ij} \frac{\eta_{ij}}{2}} = \psi \sqrt{2\eta_{ij} \frac{\eta_{ij}}{2}} = \psi \frac{\mathrm{H}}{2}.$$

Демек

$$\psi = \frac{2T}{H}. \qquad (5.5)$$

(5.4) формуласы іздейтін физикалық теңдеулер (олар алтау болуы қажет) бола ала ма? (5.4) жүйесінде тәуелсіз теңдеулер саны бес. Расында да девиаторда бес елеулі және тәуелсіз сыңарлар бар (девиатордың диагональды құрушыларының қосындысы міндетті түрде нөлге тең болуы керек). Айтылған теңдеуге тағы да бір белгісіз мөлшер кіргізілген. (5.4) жүйесін илемділік теориясындағы теңдеулер жүйесін тұйықтайтын физикалық теңдеулер ретінде қарау үшін, оны тағы да екі формуламен толықтыру қажет. Бірінші формула ретінде кернеу мен деформация жылдамдығы тензорларының бірінші инвариттары арасындағы байланысты пайдалануға болады, яғни

$$\sigma = \sigma(\xi, ...). \qquad (5.6)$$

(5.6) және төменде жазылған (5.7) формулаларындағы нүктелер, осы функциялар тәжірибелік мәліметтерді

аналитикалық түрде бейнелейтіндігін және осы формулаларға аргумент ретінде – кернеулі-деформациялы күйдің тағы да басқа инварианты сиппаттамалары кіруі мүмкін екендігін көрсетеді. Формулаларды қысқа жазу мақсатында ары қарай (5.6) және (5.7) формулаларындағы нүктелерді көрсетпейтін боламыз. Тәжірибеден анықталатын, жанама кернеулердің қарқындылығы мен деформация жылдамдығының қарқындылығы арасындағы байланыс түрінде жазылатын, екінші қатынас былай жазылады:

$$T = T\,(H, \ldots.). \qquad (5.7)$$

(5.6) және (5.7) функцияларын тәжірибелік анықтауға мынадай бірдей қисық сызық гипотезасы көмектеседі: тәжірибемен анықталатын және кернеулі-деформациялы күйдің инвариантты сипаттамаларын байланыстыратын $T = T\,(H)$ және $\sigma = \sigma\,(\xi,)$ функциялары деформация түрінен (созу, қысу, бұрау, т.б.) және кернеулі күй түрінен тәуелді болмайды. Осындай мөлшерлер қарапайым тәжірибені жасап табылады, ал алынған мәліметтер жалпы жағдайларға қолдануға болады. Бірдей қисық сызық гипотезасы көптеген тәжірибелік мәліметтермен расталған.

Сонымен, тұжырымдалған физикалық теңдеулер келесі түрде жазылады:

$$\left.\begin{array}{c} \sigma_{ij} - \dfrac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij} = \dfrac{2T}{H}\left(\xi_{ij} - \dfrac{1}{3}\xi_{ij}\delta_{ij}\right); \\ T = T(H);\ \sigma = \sigma(\xi). \end{array}\right\} \qquad (5.8)$$

Сызықты серпімділік теориясының физикалық теңдеуіне назарымызды салайық. Серпімді деформациялық күйді бейнелеу үшін кіші деформация теориясын қолданады. Осы теорияны тағы да серпімді илемді деформацияны бейнелеу үшін де қолданады. Денедегі орын ауыстырудың u_i өрісі деформацияны пайда болғызады. Осы деформацияның тензорын деформация тензоры деп атайды. Айтылған тензорда мынадай сыңарлар бар: $\varepsilon_{ij} = \dfrac{\left(u_{ij} + u_{ji}\right)}{2}$. Деформация тензорының бірінші инварианты $\varepsilon^{\mathrm{I}} = \varepsilon_{ij} \cdot \delta_{ij}$ көлемнің салыстырмалы өзгеруін білдіреді. Деформациялы күйдің маңызды сипаттамасы болып ығысу

деформациясының қарқындылығы есептеледі. Осы мөлшер деформация девиаторының сыңарларынан $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{ij} \cdot \delta_{ij}}{3}$ мынадай формуламен құрастырылады: $\Gamma = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}}$. Кіші деформация теориясы жылдамдықты қолданып жазылатын ағым теориясына сырт көрінісімен инвариантты. Олардың айырмашылығы белгілеуде және мөлшерлердің өлшем бірлігінде болады. Кіші деформация теориясы үшін физикалық теңдеулерді келесі түрде жазуға болады:

$$\left.\begin{array}{c} \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij} = \frac{2T}{\Gamma}\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\delta_{ij}\right); \\ T = T(\Gamma);\ \sigma = \sigma(\varepsilon). \end{array}\right\} \qquad (5.9)$$

5.2. Термодинамиканың бірінші заңы. Жылу өткізгіштіктің дифференциалдық теңдеуі

Физикалық теңдеулермен бірге біздің қарауымызға жаңа белгісіз мөлшер температура T_H енді. Температурадан материалдың механикалық қасиеті едәуір тәуелді болады. Деформация жылулық әсермен қошталады, яғни материал қызады. Жалпы жағдайда деформацияланатын дененің көлемінде W бізге белгісіз стационарлы емес температуралық өріске орын бар болады, яғни

$$T_H = T_H(x, y, z, t), \qquad (5.10)$$

Осы температуралық өріс көптеген жағдайда материалдың ағысын және оның кернеу күйін жеңеді. Илемділік теориясының теңдеулер жүйесін тағы да бір теңдеуді қосуға болады. Бұл механикалық айнымалылар қатарындағы температураны анықтау үшін керек. (5.1) функциясын және температураны $T_н = T_н(x_i, t)$ термемеханикалық айнымалылар деп атайтын боламыз.

Іздеп отырған теңдеуді термодинамиканың бірінші заңынан немесе энергияның сақталу заңынан алуға болады. Термодинамиканың бірінші заңы (басы) немесе энергияның сақталу заңы дене илемді деформациялаған жағдайда мынаны пайымдайды: денеге түсірілген беттік күштің және көлемде

таралған сыртқы күштің жұмысы, ал тағы да дене беті немесе массасы арқылы сырттан энергияның басқа түрінің құйылуы кинетикалық және ішкі энергияны қосымша өсіруге жұмсалады.

Илемді өңдеу процесінде едәуір рөлді механикалық энергиямен бірге, тек жылулық энергия атқарады деп есептейтін боламыз. Жоғарыда баяндалған тұтас орта динамикасының теңдеулері механикалық энергияның сақталу заңын (шартын) бірдей қанағаттандырады. Осыны көрсетейік. Қозғалудың дифференциалдық теңдеуін $\vec{\upsilon}dt$ -ға скалярлық көбейтейік, мұндағы $\vec{\upsilon}$ – деформацияланатын дененің материалды бөлшектерінің орын ауыстыру жылдамдығының векторы. Алынған нәтижені *W* бойынша интегралдап мынаны аламыз:

$$\iiint\limits_W \left(\sigma_{ij,j} + \rho q_i - \rho w_i\right)\upsilon_i dtdW = 0, \qquad (5.11)$$

мұндағы $\vec{q}$ – меншікті массалы күштің векторы.

Келесі түрлендіруді жүргізейік:

$$\iiint\limits_W \left(\sigma_{ij}\cdot\upsilon_i\right)_j dtdW + \iiint\limits_W \rho q_i\cdot\upsilon_i dtdW = \iiint\limits_W \rho w_i\cdot\upsilon_i dtdW + \iiint\limits_W \sigma_{ij}\cdot\upsilon_{i,j} dtdW. \qquad (5.12)$$

Бірінші интегралға Гаусс-Остроградский формуласын қолданайық, ал тағы да кернеу тензорының симметриясын

$$\sigma_{ij}\upsilon_{ij} = \sigma_{ij}\frac{\upsilon_{ij}}{2} + \sigma_{ij}\frac{\upsilon_{ij}}{2} = \sigma_{ij}\frac{\upsilon_{ij}}{2} + \sigma_{ji}\frac{\upsilon_{ji}}{2} = \sigma_{ij}\frac{\left(\upsilon_{ij}+\upsilon_{ji}\right)}{2} = \sigma_{ij}\xi_{ij} \qquad (5.13)$$

және үдеу анықтамасын $\omega_i = \dfrac{d\upsilon_i}{dt}$ пайдаланып, оң жақтағы бірінші және екінші интегралдарды түрлендірейік. Сонда мынаны аламыз:

$$\iint\limits_\Sigma \sigma_{ij} n_j \upsilon_i dtd\Sigma + \iiint\limits_W \rho q_i \upsilon_i dtdW = \iiint\limits_W \rho d\left(\upsilon_i\upsilon_i\right)\frac{dW}{2} + \iiint\limits_W \sigma_{ij}\xi_{ij} dtdW. \qquad (5.14)$$

Соңында, $f_i = \sigma_{ij}\, n_j$ және $\rho\, dW = const$ екендігін ескеріп, соңғы теңдеуді келесі түрмен жазуға болады:

$$\iint\limits_\Sigma f_i\upsilon_i dtd\Sigma + \iiint\limits_W \rho q_i\upsilon_i dtdW = \iiint\limits_W d\left(\rho dW\upsilon_i\frac{\upsilon_i}{2}\right) + \iiint\limits_W \sigma_{ij}\xi_{ij} dtdW. \qquad (5.15)$$

Осы нәтиже келесіні білдіреді: *денеге түсірілген беттік күштің (бірінші интеграл) және көлемде таралған массалық күштің (екінші интеграл) жұмысы дененің кинетикалық*

энергиясын өзгертуге (үшінші интеграл) және денені деформациялау жұмысына жұмсалады. Осы механикалық энергияның сақталу заңы формуласы.

Қосымша жылулық энергияның сақталу заңын тұжырымдау қажет. Жылулық энергия үшін осы заң мынаны пайымдайды: кейбір материалды бөлшекті деформациялаған кезде уақыт бірлігінде пайда болған жылу T_{H1} дененің көрші көлемдеріне жылу өткізгіштік есебінен жарым-жартылай апарылады T_{H2}, ал қалған бөлім T_{H3} осы бөлшектің температурасын жоғарылатуға жұмсалады, яғни мына теңдік орындалады:

$$T_{H1} = T_{H2} + T_{H3}. \qquad (5.16)$$

Көлемі $\Delta W = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ болатын элементарлы материалды параллелепипедте, оны деформациялаған кезде уақыт бірлігінде бөлінетін жылуды θ_1 есептейік.

Адиабатикалық тәсілмен іске асырылған серпімді деформация (айналадағы ортамен жылу алмасусыз) температураның өзгеруімен қошталатындығы арнайы тәжірибелерде анықталған. Қағида бойынша, серпімді қысқан кезде температура жоғарылайды, ал созған кезде төмендейді. Әрі температураның өзгеруі деформация мөлшеріне тура пропорционалды. Илемділік деформациясы басталмай тұрып бөлмелік температурада болған төменгі көміртегілі болатты бір ось бойымен тез созған немесе қысқан кезде үлгіліктің температурасы 6 ÷ 10 ^{o}C өзгереді. Сонымен бірге, күш түсірілмеген үлгілікті көрсетілген мөлшерге қыздыру немесе суыту, созу немесе қысу тәжірибесіндегі өлшемдердің өзгеруіне дәл сәйкес келетін мөлшерге үлгіліктің сызықтық өлшемдерін өзгертеді. Серпімді деформация кезінде температураның өзгеруі қайтымды болуы мүмкін.

Илемділік деформациясы ылғи да жылудың шығуымен қошталады, әрі жылудың шығуы қайтымсыз болады. Температураның жоғарылауы бірнеше он, тіпті жүз градусқа (деформацияның мөлшеріне және материалдың қасиетіне байланысты) жетуі мүмкін. Илемділік деформациясына жұмсалған барлық механикалық жұмыстың 80% жоғарысы жылуға айналатындығын калориметрикалық тәжірибелер көрсетті. Осы механикалық жұмыстың үлкен емес бөлімі (10 %

жоғары) кристалдық тордың бұрмалануы себеп болатын серпімді энергияға өзгереді. Металдарды қысыммен өңдеу процестерінде қолданылатын илемділік деформациясы, серпімді деформациямен салыстырғанда мөлшері бойынша өте үлкен. Сөйтіп, мысалы, болаттан жасалған үлгілікті бір осьтің бойымен созған немесе қысқан кезде, байқалатын қалдық деформация пайда болғанша салыстырмалы деформация проценттің бірнеше ондық үлесін құрады. Осындайда, металдарды қысыммен өңдеген кездегі илемділік деформациясы (бұйымның сызықтық өлшемдерінің салыстырмалы қалдықты өзгеруі) он, тіпті жүз проценттерді құрады. Сондықтан, ағым процесіндегі кернеулі-деформациялы күйді анықтаған кезде пайдаланатын қолданбалы илемділік теориясында деформацияның серпімді бөлімін және сәйкесті жылулық әсерді елемейді. Тағы да, илемді деформациясы кезінде деформацияның барлық механикалық жұмысы жылуға ауысатындығы қабылданған.

Сонымен элементарлы параллелепипедті илемді деформациялағанда пайда болатын жылулық әсердің қуатын былай анықтайды:

$$T_{H1} = \sigma_{ij}\, \xi_{ij}\, \Delta x \Delta y \Delta z. \qquad (5.17)$$

Илемді деформацияның себебінен көлем бірлігіндегі материалды бөлшекте уақыт бірлігінде бөлінетін жылуды, илемді деформациядан пайда болатын жылулық көздің қуат тығыздығы деп атап және мына формуламен бейнелейді: $Д = \sigma_{ij}\, \xi_{ij}$. Илемді деформациядан пайда болған жылулық көз қуатының тығыздығын диссипативті функция деп атайды [Энергияның диссипациясы деп макроскопиялық реттелген қозғалыстан былыққан атомды-молекулярлы (жылулық) қозғалысқа ауысуды айтады]. (5.16) теңдеуінің шығын (оң) бөліміне назар аударайық. Элементарлы материалды параллелепипедтің жылу өткізгіштік есебінен T_{H2} уақыт бірлігіндегі жылу жоғалтуын анықтайық. Фурье орнатқан заңға сәйкесті, i осіне перпендикулярлы алаң бірлігі арқылы, жылу өткізгіштік T_{H2} есебінен уақыт бірлігінде өтетін жылудың мөлшері мынаған тең болады:

$$Q_i = -\lambda T_{ni}, \qquad (5.18)$$

мұндағы λ − жылу өткізгіштіктің коэффициенті; T_{ni} − сәйкесті координатты бағыттағы температураның градиенті

$\left(\frac{\partial T_H}{\partial x_1}, \frac{\partial T_H}{\partial x_2}, \frac{\partial T_H}{\partial x_3}\right)$. Меншікті жылулық ағын Q_i температураның айырымына пропорционалды және дененің тым ыстық жағынан суық жағына қарай бағытталған.

Элементарлы параллелепипедтің өлшемдері (5.1-сурет) шексіз кішкентай. Жатық дифференциалды функция болып келетін меншікті жылулық ағынды Тейлор қатары ретінде көрсетуге болады. Егер, мысалы, параллелепипедтің артқы қабырғасы арқылы меншікті жылулық ағын мынаған тең болса: $Q_{x1} = -\lambda \frac{\partial T_H}{\partial x_1}$, онда қарама-қарсы алдыңғы қабырға арқылы меншікті жылулық ағын мынаған тең болады: $Q'_{x1} = \left(-\lambda \frac{\partial T_H}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial\left(-\lambda \frac{\partial T_H}{\partial x_1}\right)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1$, яғни Δx_1 салыстырғанда тым жоғары реттілікті шексіз кішкентайлары алынып тасталған қатардың кесіндісі сияқты 5.1-суретінде параллелепипедтің барлық қабырғалары арқылы жылулық ағындар көрсетілген. x_1 осінің бойымен жылулық шығындар (алдыңғы қабырғалы арқылы шығатын және артқы қабырға арқылы кіретін ағындар арасындағы айырмашылық) мынаған тең болады:

$$\theta_{2x} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\lambda \frac{\partial T_H}{\partial x_1}\right)\right] \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 . \qquad (5.19)$$

Егер осыған ұқсас жолмен басқа бағытта жылу шығындарын есептейтін болса, онда нәтижесінде мынаны аламыз:

$$\theta_2 = -\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda \frac{\partial T_H}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda \frac{\partial T_H}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\lambda \frac{\partial T_H}{\partial x_3}\right)\right] \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 . \qquad (5.20)$$

Энергетикалық баланстың (5.16) соңғы құраушысын θ_3, яғни материалды параллелепипедтің температурасын жоғарылатуға уақыт бірлігінде жұмсалатын жылуды есептейік.

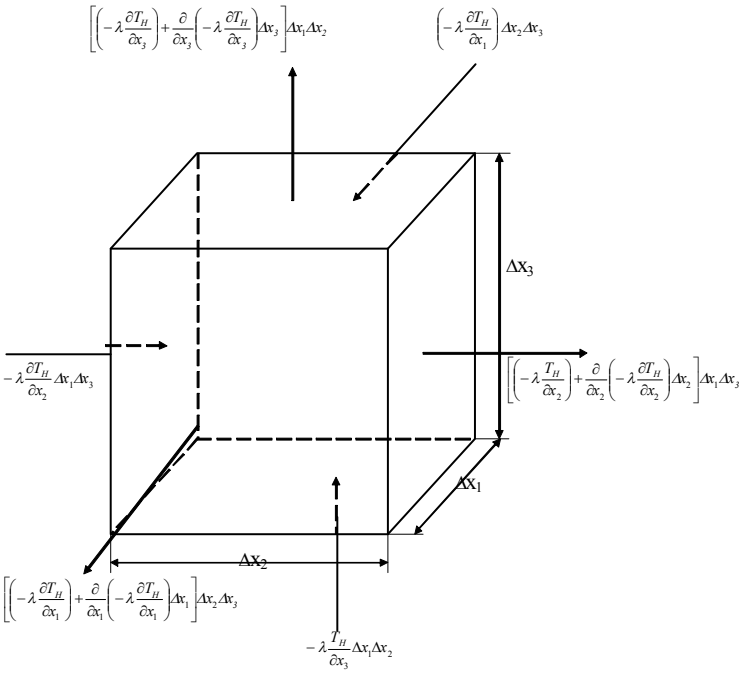
Меншікті массалық жылусыйымдылық c деп масса бірлігінің температурасын 1^oC жоғарылатуға, осы масса бірлігіне әкелуге қажетті жылу мөлшерін айтады. Металдың

масса бірлігін T_H температурасына дейін қыздыру үшін мынадай жылу мөлшерін жұмсау керек:

$$q = \int_0^{\vartheta} cdT_{\dot{I}} \ . \qquad (5.21)$$

Өйткені жалпы жағдайда меншікті массалық жылусыйымдылық температураның функциясы болады. Масса бірлігін қыздырудың жылдамдығы мынаған тең (күрделі функциядан туынды):

$$\frac{dq}{dt} = \left[\frac{d}{dT_H} \left(\int_0^{\vartheta} cdT_H \right) \right] \frac{dT_H}{dt} = c \frac{dT_H}{dt} \ . \qquad (5.22)$$



5.1-сурет. Параллелепипедтің қабырғасы арқылы меншікті жылулық ағындар

Элементарлы параллелепипедке қайта оралайық. Соңғы формуланы ескеріп, материалды параллелепипедтің температурасын жоғарылатуға уақыт бірлігінде жұмсалатын жылуды былай анықтайық:

$$\theta_3 = -\left(\frac{dT_H}{dt}\right)\rho\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3 . \qquad (5.23)$$

Баланс құраушысының (5.17), (5.20) және (5.23) мәндерін (5.16) теңдеуіне қояйық. Алынған нәтижені $\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$ қысқартып параллелепипедтің өлшемдерін нөлге ұмтылдырсақ, онда нәтижесінде жылу өткізгіштіктің дифференциалды теңдеуін аламыз. Осы дифференциалды теңдеу деформацияланатын дененің еркін нүктесінде және уақыт мезгілінде былай жазылады:

$$c\rho\frac{\partial T_H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\frac{\partial T_H}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda\frac{\partial T_H}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\lambda\frac{\partial T_H}{\partial x_3}\right) + \sigma_{ij}\xi_{ij} . \qquad (5.24)$$

Диссипативті функцияны $Д = \sigma_{ij}\,\xi_{ij}$ инварианттар арқылы көрсетуге болады. Расында да мынаны жазған дұрыс:

$$\sigma_{ij}\xi_{ij} = \left(s_{ij} + \sigma\delta_{ij}\right)\left(\eta_{ij} + \xi_0\frac{\delta_{ij}}{3}\right) = s_{ij}\eta_{ij} + \sigma_0\xi_0 = \psi\eta_{ij}\eta_{ij} + \sigma_0\xi_0 = \qquad (5.25)$$

$$= \left(\frac{2T}{\text{Н}}\right)\eta_{ij}\eta_{ij} + \sigma_0\xi_0 = T\text{Н} + \sigma_0\xi_0 .$$

Мұнда мыналар ескерілген: $s_{ij}\delta_{ij} = \eta_{ij}\delta_{ij} = 0$ (девиаторлардың диагональдық сыңарларының қосындысы ретінде), $\delta_{ij}\ \delta_{ij} = 3$. (5.24) теңдеуіндегі c мен λ температураның $T_\text{Н}$ және деформацияның басқа жағдайының кейбір белгілі функциялары екендігін айта кету қажет. Жиі технологиялық есептерді шығарған кезде, оларды тұрақты етіп алады. Сондықтан оларды жылусыйымдылықтың және жылуөткізгіштіктің коэффициенті деп атайды. Егер $\lambda = const$ болса, онда (5.24) теңдеуін келесі түрде келтіруге болады:

$$c\rho\frac{\partial T_H}{\partial t} = \lambda\nabla^2 T_H + \sigma_{ij}\xi_{ij} , \qquad (5.26)$$

мұндағы $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^{\,2}}$ – Лапластың дифференциалды операторы.

(5.26) теңдеуі материалды бөлшекке шығарылатындығы маңызды. Сондықтан уақыт бойынша туындысы мұнда толық немесе субстанционалды. Бөлшектің температурасы $T_H = T_H(x_1, x_2, x_3, t)$ – күрделі функция. Өйткені координаттар уақытпен ағымның кейбір заңы бойынша өзгереді, яғни $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$. Демек мына теңдеуді жазған дұрыс:

$$\frac{\partial T_H}{\partial t} = \frac{\partial T_H}{\partial t} + v_x \frac{\partial T_H}{\partial x_1} + v_y \frac{\partial T_H}{\partial x_2} + v_z \frac{\partial T_H}{\partial x_3}. \qquad (5.27)$$

5.3. Реологиялық модельдер

Реология туралы. Анықтайтын теңдіктердің жалпы теориясын жасау, тұтас орта механикасының маңызды бөлімі болып саналатын реологияның ең негізгі міндеттері болып есептеледі (рео – ағу грек сөзі, материалдардың ағысы туралы ғылым). Реология мынадай сұраққа жауап беруі қажет: белгілі деформациялау (күш түсіру) процестерінде t уақыт мезгілінде берілген материалды бөлшек айналасында қандай кернеулер (деформациялар) пайда болады. Дәлірек айтсақ реология мына функционалдар түрін анықтайды:

$$T_\sigma = T_\sigma\left[T_\varepsilon(\tau)\right]_{t_o}^{t} \quad \text{немесе} \quad T_\varepsilon = T_\varepsilon\left[T_\sigma(\tau)\right]_{t_o}^{t}.$$

Осы функционалдар әр түрлі тұтас ортаның термомеханикалық қасиеттерін бейнелейді. Осындай есептерді шығару, заттардың іс жүзіндегі термомеханикалық қасиеттерін бейнелеуге мүмкіндік беретін көптеген зерттеу тәжірибелерін және реологиялық модельдерді жасауды қажет етеді.

Зерттеу тәжірибелеріне көңіл бөлейік. Материалдардың маңызды және әдеттегі қасиеттерін цилиндрлік үлгіліктерді созу тәжірибесі бойынша табуға болады. Біркелкі кернеулер мен деформациялар күйін үлгіліктің ортаңғы бөлімінде алу

мақсатымен дөңгелек цилиндрлік үлгіліктің есептеу ұзындығын l_o оның диаметрінен d_o бес немесе он рет үлкен болатындай етіп жасайды.

Әдетте, сынау үшін алдыңғы созу диаграммасын автоматты түрде салуға мүмкіндік беретін үзілу машиналарын қолданады. Осы диаграммада ординат осі бойымен күш *P*-ны, ал абсцисса осі бойымен күшке сәйкес келетін ұзаруды (Δl) салады.

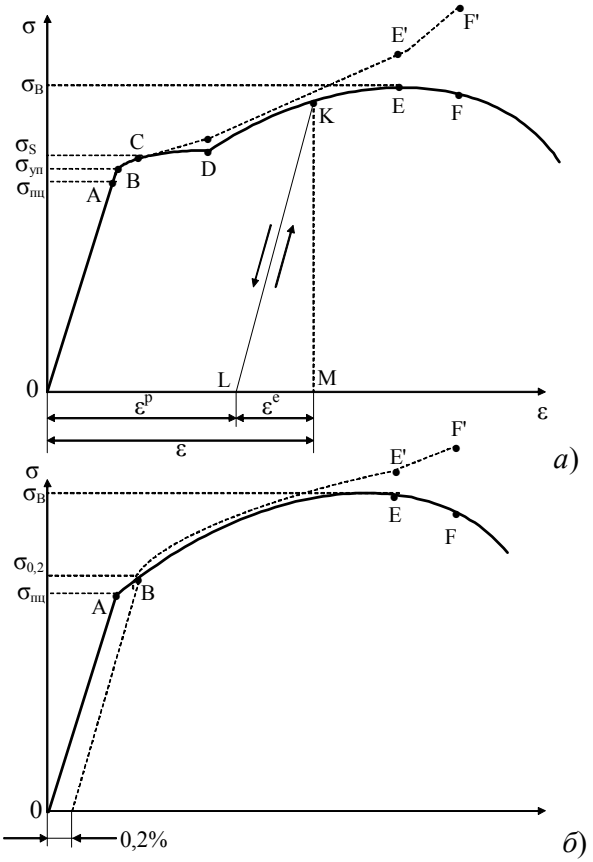
Шартты және дәл кернеулер диаграммасы (5.2-сурет). Координаталары $P - \Delta l$ болатын созу диаграммасының түрі материалдардың тек қасиетінен ғана емес, ал тағы да тәжірибе жасайтын үлгіліктің өлшемінен өте үлкен тәуелді болады. Материалдардың тек механикалық қасиетін сипаттайтын диаграмманы алу үшін алдыңғы созу диаграммасын координатасы $\sigma - \varepsilon$ болатын диаграммаға қайта есептейді. Осы диаграмманың ординатасын созатын күш *P*-ны сынайтын үлгіліктің бастапқы көлденең қимасы ауданына бөліп табады, яғни $\sigma = P/\Phi_o$.

Кернеу диаграммасының абсциссасын үлгіліктің есептеу бөлімінің абсолютті созылуын, осы үлгіліктің бастапқы ұзындығына бөліп анықтайды, яғни $\varepsilon = \Delta l / l_o$.

Осындай әдіспен табылған кернеу мен деформацияның арасындағы байланыс графигі үлгілікті созған кезде өзгеретін көлденең қиманың ауданын есепке алмайды. Сондықтан осы график *кернеудің шартты диаграммасы* деп аталады. Жоғарыда айтылған диаграммадан айырмашылығы бар болатын *дәл кернеу диаграммасын* салғанда, созған кезде өзгеретін үлгіліктің көлденең қимасының ауданын есепке алады. Дәл кернеу диаграммасын салған кезде күш *P*-ны созғанда өзгеретін көлденең қиманың сәйкесті ауданы *Ф*-ға бөледі.

5.2-суретінде төмен көміртегілі болаттар үшін шарты (тұтас сызық) және дәл (сызықша сызық) кернеулер диаграммасы келтірілген. Әрбір сызықта *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* сияқты бірқатар ерекше нүктелердің бар екендігін айтып кетуге болады. Бастапқы *OA* бөлімде диаграмма еңкейген түзу сызық түрінде көрсетіледі. Осы шекте кернеу (σ) деформацияға (ε)

пропорционалды өседі, яғни мынадай Гук заңы сақталады: $\sigma = E\varepsilon$, мұндағы E – үлгілікті созған кездегі серпімділік модулі.



5.2-сурет. Материалдың кернеулер диаграммасы
а – ағым алаңы бар; б – ағым алаңы жоқ

Гук заңы пропорционалдықтың шегіне ($\sigma_{пц}$) дейін дұрыс болады.

Диаграмма *А* нүктесінен жоғарғы жақта қисаяды, осы кезде Гук заңы бұзылады. Бірақта серпімділік шегіне ($\sigma_{уп}$) сәйкес

келетін *B* нүктесіне дейін үлгіліктің деформациясы серпімді болып қалады және күшті алған кезде толық жоғалып кетеді. Нүктелер *A* мен *B*-ның арасы өте жақын, сондықтан оларды көп жағдайда сәйкес келеді деп санайды. Егер *B* нүктесі арқылы тік сызықты сызса, онда бұл сызықтың сол жағында серпімді деформациясының аймағы, ал оң жағында серпімді-илемді деформацияның аймағы бар болады. Өйткені серпімділік деформациясымен бірге күшті алғаннан кейін үлгілікте қалатын илемді деформацияға орын бар болады.

Диаграммада *C* нүктесінен басталатын көлденең бөлім пайда болады. Бұл бөлім – *ағым шегі* (σ_s) деп аталады. Осы бөлімде күш ұлғаймай деформация үлкейіп отырады. Материал аққан сияқты болады. Сондықтан *CD* бөлімін жиі *ағым ауданы* деп атайды.

Көптеген материалдарда ағым ауданы жоқ болады, яғни көптеген жағдайларда материалдарды созуға сынаған кезде *CD* ауданы байқалмайды және созу диаграммасы суретте көрсетілген қисық сызық түріне ие болады. Бұл жағдайда ағым шегін σ_s шартты түрде табады.

5.2-суретке қайта оралайық. Материал *D* нүктесінен бастап деформацияға кедергісін үлкейтеді. Бірақта үлгілік созылған кезде күштің үлкею серпімділік бөлімімен салыстырғанда өте кішкентай болады. Диаграмма жатық қисық сызықпен өзгеріп *E* нүктесіне жетеді. Диаграмманың осы *E* нүктесінде шартты кернеу ($\sigma = P/\Phi_o$) ең үлкен мөлшерге жетеді. Осы мөлшер *уақытша кедергі* $\sigma_в$ деп аталады.

Диаграммада *E* нүктесіне жеткеннен кейін үлгілікте болашақта үзілетін орын белгіленеді және мойын, яғни үлгіліктің жергілікті тарылуы пайда болады. Үлгіліктің көлденең қимасы кішірейгендіктен диаграммада шартты кернеу азаяды. Бірақта, егер мойынның ең кішкентай қима ауданына қатысты етіп дәл кернеуді есептесе, онда үзілу уақытысына дейін (F' нүктесі) кернеудің өсуі байқалады. Мойынның пайда болуы, осы мойындағы қимадан қимаға және әрбір қимада

деформацияның біркелкі еместігімен қошталатындығын айта кету қажет.

Жүктен босату және қайтадан жүктеу. Шартты диаграмманың *К* нүктесіне жеткеннен кейін зерттейтін үлгілікке беретін күшті азайтайық. Күштен босатқан кезде σ – ε байланысы *KL* түзу сызығымен көрсетіледі. Айтылған *KL* сызығы *OA* сызығына параллельді болады. Серпімді-илемділік деформация аймағында күштен босатқан кезде деформация толық жоқ болып кетпейді. Осы деформация серпімді бөлімі мөлшеріне (*LM* кескіні) азаяды. Қалдық немесе илемділік деформациясын *OL* кескіні көрсетеді.

Үлгілікті қайта жүктегенде созу диаграммасы *LK* түзуінің түрін қайта алады, ал ары қарай *KEF* қисық сызығының үстімен жүреді. Сонымен металл бірінші деформацияның себебінен серпімділік қасиетін алады және серпімді шегі үлкейеді. Осымен бірге илемділік деформация қасиеті біраз төмендейді. Бұл құбылысты беріктену деп атайды. Цилиндрлік үлгілікті қысқанда немесе бұрағанда осы сияқты кернеу диаграммасын алуға болады.

Деформация жылдамдығының әсер етуі. Кернеу диаграммасына деформация жылдамдығының әсер етуі температурамен тығыз байланысты болады. Мұның себебі $\vartheta_р$ температурасында (балқудың абсолюттік температурасының 0,4 жуықты тең болатын) және одан жоғары температурада деформацияланған металда белгілі бір жылдамдықпен рекристаллизация процесі жүреді. Бұл процесте жаңа түйіршіктер пайда болады және поликристалдың бір кристалдық түйіршіктері басқа түйіршіктерді пайдаланып өседі. Рекристаллизация процесінде металдар термодинамикалық тұрақты күйге өтеді.

Осы процесті үш сатыға бөледі. Бірінші сатысында деформацияланған поликристалда жаңа кристалдық түйіршіктер пайда болады. Осы түйіршіктер деформацияланып бұрмаланған түйіршіктерді сіңіру арқылы өседі. Екінші сатысын *жинақтаушы рекристаллизация* деп атайды. Жинақтаушы саты жүрген уақытта бұрмаланған түйіршіктердің біреулері басқалары арқылы үлкейеді.

Осының себебінен түйіршіктердің орташа мөлшері үлкейеді. Үшінші сатыда мөлшерін үлкейтуді кейбір жеке түйіршіктер ғана көрсетеді. Осының әсерінен металдың құрылымында әр түрлі өлшемі бар түйіршіктер пайда болады.

Рекристаллизация металл құрылымының кемістігін жояды, металдың илемділік қасиетін үлкейтеді, деформацияға дейінгі қасиеттерін және текстураны қалпына келтіреді.

Сонымен, рекристаллизация температурасынан жоғарғы температурада қыздырылған дайындаманы илемді деформациялаған кезде (осындай деформацияны «ыстық» деп атайды) беріктенумен қатар беріксіздендіру процестері жүреді. σ – ε диаграммасы сызықтарының түрлері осы екі процестер жылдамдықтарының арақатысымен тығыз байланысты. Егер деформация жылдамдығы үлкен болса, онда беріксіздендіру процесінің ықпалы аз болады. Бұл кезде материал тұтқырлы қасиет көрсетеді. Серпімді-илемді деформация аймағында деформация жылдамдығы өскен сайын кернеу үлкейеді. Қарапайым жағдайларда мынадай сызықтық байланыс пайда болады:

$$\sigma = \sigma_s + \mu\xi,$$

мұндағы μ – тұтқырлық коэффициенті. Егер $\sigma_s = 0$ болса, онда сызықты-тұтқырлы материалға келеміз (Ньютон ортасы). Сонымен материалдың температурасымен байланыстыра отырып, илемділік деформациясы туралы мынаны айтуға болады: металдың «ыстық» деформациясы ($T_H > T_{Hр}$); металдың «суық» деформациясы ($T_H < T_{Hр}$); металдың жылы деформациясы ($T_H \approx T_{Hр}$).

Температураның және деформация жылдамдығының кернеу диаграммасына әсер етуін әдейілеп жасалған сынау машинасын (пластометр) қолданып зерттейді. Осы машинада дайындаманы қысқанда немесе созғанда деформация жылдамдығын тұрақты етіп зерттеу жүргізуге жағдай жасалынады.

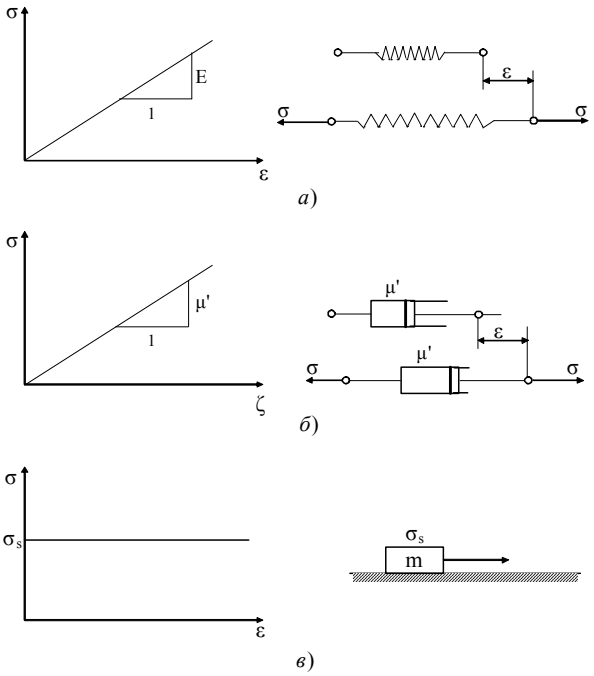
Қарапайым реологиялық модельдер. Цилиндрлік үлгіліктерді созу тәжірибелерінің нәтижелерін қарай отырып, біз материалдардың мына қасиеттерін айттық: серпімділік, тұтқырлық, илемділік. Сыртқы күш әсер еткенде тұтас ортаның көрсететін ерекше қасиеттерін жоғарыда айтылған үш іргетасты қасиеттерді қисындастыру арқылы көрсетуге болады.

Осыған байланысты кейбір дәріптелген ортаның жүріс-тұрысын механикалық элементтермен шартты түрде бейнелеп суреттейтін қарапайым реологиялық модельдерді енгізген дұрыс. Бұрынғыдай сызықтық кернеу күйін қарайтын боламыз (сырықты созу). Мынадай белгілеуді енгізейік: σ – тиісті кернеу; ε – салыстырмалы ұзару; $\xi = \mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$ – салыстырмалы ұзарудың жылдамдығы.

Сызықты-серпімді ортаның моделі Гук заңына былай бағынады:

$$\sigma = E\varepsilon. \qquad (5.28)$$

Осы модельді шартты серіппе түрінде бейнелейтін боламыз (5.3 *а* -сурет).



5.3-сурет. Ортаның реологиялық модельдері
а – сызықты-серпімді орта; б – сызықты-тұтқырлы орта; в - қатаң-өте жақсы-илемді орта

Сызықты-тұтқырлы ортаның моделін мына Ньютонның тұтқырлық заңымен көрсетуге болады:

$$\sigma = \mu' \frac{d\varepsilon}{dt}. \qquad (5.29)$$

Осы модельді цилиндрдің ішінде қозғалатын поршень түрінде бейнелеуге болады. Айтылатын нәрсе, ол цилиндрдің іші тұтқырлы сұйықпен толып тұрғаны және тұтқырлы сұйықтың поршень мен цилиндрдің қабырғасы арасындағы саңлаудан шығатыны (5.3 *б* -сурет).

Қатаң-илемді ортаның моделін бейнелегенде ағым шегінен төменгі кернеуде деформация жоқ деп есептейтін боламыз, яғни ағым шартын қанағаттандыратын кернеуде илемді ағыс бар деген шешімді қабылдаймыз, яғни

$$\sigma = \sigma_s. \qquad (5.30)$$

Осы модельді жазықтықта тыныш тұрған салмақ түрінде көрсетеміз (құрғақ үйкеліс элементі, 5.3 *в* - сурет).

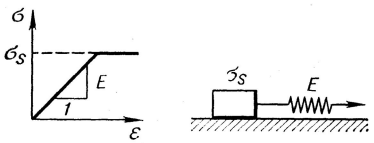
Енді қарапайым түрде қиыстырылған модельдерді қарауға көшейік. Серпімді және илемді элементтерді тізбекпен қосайық. Қорытындысында серпімді-илемді ортаның моделін аламыз. Осы ортаның σ – ε диаграммасы 5.4-суретінде көрсетілген.

Осы жағдай үшін жалпы деформация мына екі бөлімнен тұрады:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p. \qquad (5.31)$$

мұндағы ε^e – серпімділік деформациясы; ε^p – илемділік деформациясы.

Үлгіліктен күшті алған кезде серпімділік деформациясы жоқ болады, ал илемділік деформациясы қалады. 5.5-суретте сызықты беріктенетін қатаң-илемді ортаның, ал 5.6-суретте сызықты беріктенетін серпімді-илемді ортаның σ – ε диаграммалары келтірілген.



5.4-сурет. Серпімді-өте жақсы-илемді ортаның моделі

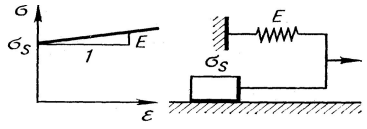
Серпімді және тұтқырлы элементтерді тізбекпен қосайық (5.7-сурет). Деформация жылдамдығы $\xi = d\varepsilon/dt$ төмендегідей

серпімділі құрамның $\xi^e = 1/E \cdot d\sigma/dt$ және тұтқырлы құрамның $\varepsilon^p = \sigma/\mu'$ қосындысынан тұрады:

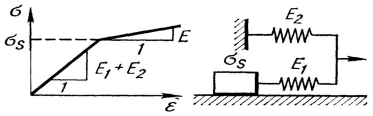
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu'}. \qquad (5.32)$$

Жоғарыда жазылған теңдеу Максвеллдің серпімді-тұтқырлы орта моделіне сәйкес келеді. Осы ортаның кейбір қасиеттерін қарайық. Кернеу тұрақты болсын (σ = const). Онда $d\sigma/dt = 0$ және материал тұтқыр сұйық сияқты ағады.

Енді үлгіліктің екі жағында бекітейік және $t = 0$ уақытында кернеуді осы үлгілікке түсіріп, деформацияны анықтайық. Бұл жағдайда $d\varepsilon/dt = 0$ болғандықтан жоғарыда жазылған теңдікті мына түрмен жазуға болады: $\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu'} = 0$.



5. 5-сурет. Сызықты беріктенетін қатаң-илемді ортаның моделі



5.6-сурет. Сызықты беріктенетін серпімді-илемді ортаның моделі

Соңғы теңдеуден мынаны алуға болады:

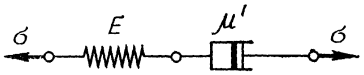
$$\sigma = \sigma(0)exp\left[-\frac{t}{t_0}\right], \qquad (5.33)$$

мұндағы $t_0 = \mu'/E$ мөлшерін релаксация уақыты деп атайды. Релаксация уақыты дегеніміз бастапқы кернеудің e = 2,718 рет азаюына кететін уақыт. Сонымен Максвелл ортасының моделі нақты дененің маңызды қасиеттерін бейнелеуге мүмкіндік береді. Бұл қасиет бойынша өзгермейтін деформацияда кернеу экспоненциалды заңмен азаяды.

Серпімділі және тұтқырлы элементтерден тұратын параллельді құраманы талдауға көшейік (5.8-сурет). Осы

модельді серпімді-тұтқырлы Фойгта ортасы деп атайды. Сірә, кернеу төмендегідей серпімділі $\sigma^e = E\varepsilon$ және тұтқырлы $\sigma^{\upsilon} = \mu' \cdot d\varepsilon/dt$ құрамның қосындысынан тұрады:

$$\sigma = E\varepsilon + \mu' \frac{d\varepsilon}{dt}. \qquad (5.34)$$



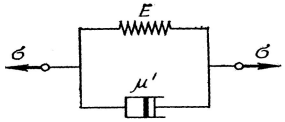
5.7-сурет. Максвеллдің серпімді-тұтқырлы ортасы

(5.32) теңдеуінен айырмашылықта болатын (5.34) теңдеуі релаксация процесін сипаттамайды. Оның себебі деформация тұрақты болғанда (ε = const) кернеуде тұрақты болады, ал орта серпімді сияқты болады. Егер кернеу тұрақты болса, онда деформация мынадай заңдылықпен бірқалыпты өседі:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left(1 - exp\left[-\frac{E}{\mu'}t\right]\right). \qquad (5.35)$$

Осылай өскен кезде деформация σ/E мәніне ұмтылады, яғни жылжыпсырғымалылық пайда болады.

5.8-сурет. Фойгта серпімді-тұтқырлы ортасы



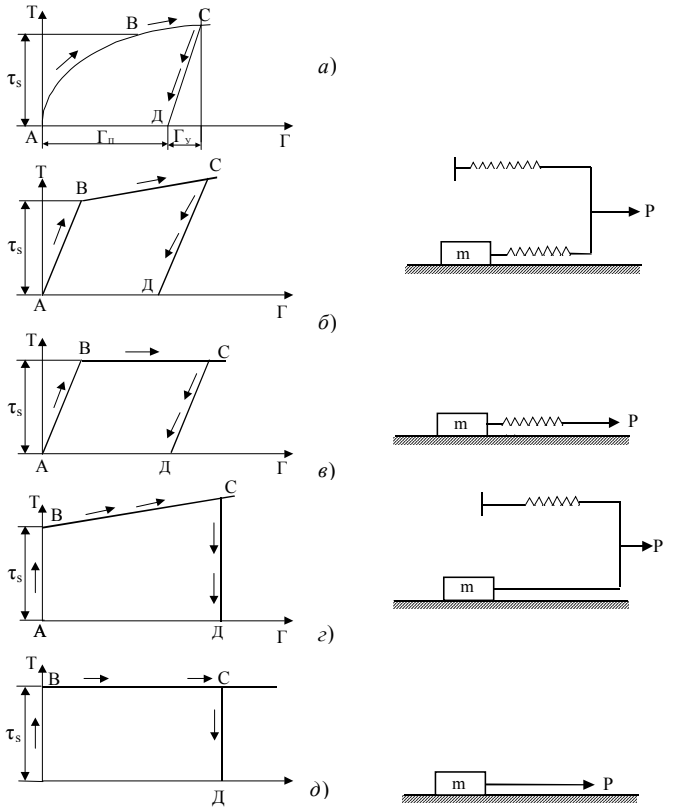
Тұтқырлы және илемді қасиеттерден тұратын модельді қарайық. Бірінен кейін бірі қосылған екі элемент (тұтқырлы және илемді) тұтқырлы-илемді орта моделіне алып келеді. Егер $\sigma < \sigma_s$ болса, онда осы модель сызықты-тұтқырлы ортаның қасиеттеріне ие болады, ал егер $\sigma = \sigma_s$ болса, онда ол өте жақсы илемді дене сияқты ағады.

Тұтқырлы және илемді элементтерді параллельді қосқанда да тұтқырлы-илемді ортаны алады (Шведов-Бингмен ортасы). Осы ортаның қасиеттерін мынадай теңдікпен жазуға болады:

$$\sigma = \sigma_s + \mu' \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\sigma \geq \sigma_s \text{ болған кезде}) \qquad (5.36)$$

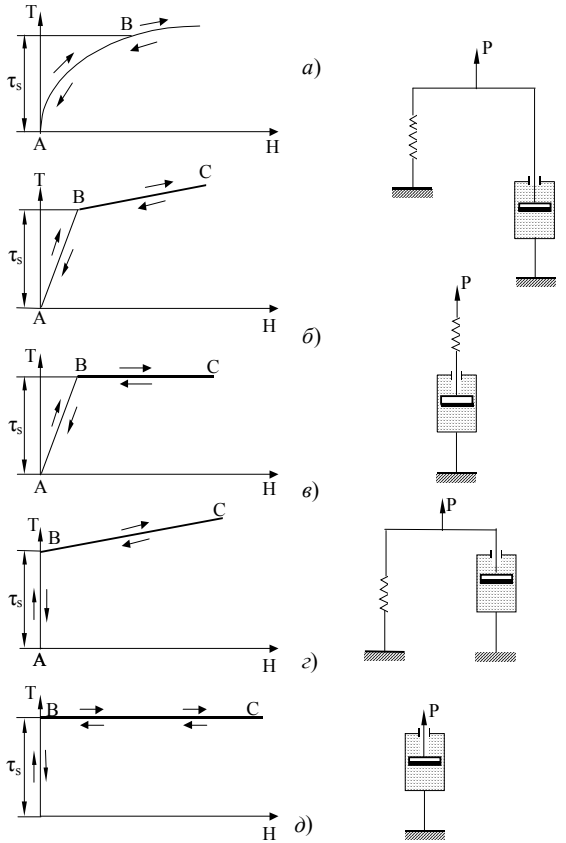
Егер $\sigma < \sigma_s$ болса, онда деформация жоқ деп есептейді.

Материалдарды әр түрлі температурада бір осьті жағдайда созып сынау жанама кернеулер қарқындылығы мен ығысу деформацияларының қарқындылығы арасында $T = T(\Gamma)$ және жанама кернеулер қарқындылығы мен деформация жылдамдықтарының қарқындылығы арасында $T = T(H)$ байланыстар диаграммаларын алуға мүмкіндік береді (5.9 және



5.9-сурет. Созу қисық сызықтары және серпімді-илемді материалдардың механикалық модельдері
а - $T = T(\Gamma)$ қисық сызығы; *б* – серпімді-илемді орта; *в* - серпімді-өте жақсы-илемді орта; *г* - сызықты беріктенетін қатаң-илемді орта; д - қатаң-өте жақсы-илемді орта

5.10-суреттерді қараңыз). Бір осьті жағдайда созған кезде қысылмайтын материал үшін сызықтық кернеу күйінің сұлбасын іске асырып мынаған ие боламыз: $T = \sigma/\sqrt{3}$, $\Gamma = \varepsilon\sqrt{3}$, $H = \xi\sqrt{3}$. Жазылған формулаларды қолданып σ – ε немесе σ – ξ қисық сызықтарын $T = T(\Gamma)$ немесе $T = T(H)$ қисық сызықтарына жеңіл ауыстыруға болады.



5.10-сурет. Созу қисық сызықтары және тұтқырлы-илемді материалдардың механикалық модельдері

а - T = T(H) қисық сызығы; б – тұтқырлы-илемді орта; в - тұтқырлы-өте жақсы-илемді орта; г - тұтқырлы қатаң-илемді орта; д – тұтқырлы қатаң-өте жақсы-илемді орта

5.4. Металдар мен қорытпалардың илемділігі

Металдың макроқираусыз қалдықпен деформациялау қасиетін – *илемділік* деп аталады. Илемділіктің сандық өлшеміне қирау уақытысындағы ығысу дәрежесі жатады. Суықтай деформациялау процесі үшін осы мөлшер былай анықталады: $\Lambda_p = \int_0^{t_p} Hd\tau$, мұндағы H – ығысу деформациясы жылдамдығының қарқындылығы. Осы мөлшер мына формуламен анықталады:

$$H = \frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{\left(\xi_{11} - \xi_{22}\right)^2 + \left(\xi_{22} - \xi_{33}\right)^2 + \left(\xi_{11} - \xi_{33}\right)^2 + 6\left(\xi_{12}^2 + \xi_{23}^2 + \xi_{13}^2\right)};$$

мұндағы $\xi_{ij} = 0{,}5\left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x_i}\right)$; $i, j = 1, 2, 3$; υ_i – жылдамдық векторының сыңарлары.

Ығысу деформациясы жылдамдығы қарқындылығының мөлшері материалды нүктенің қозғалу траекториясы бойымен анықталады.

Барлық болып өткен деформациялау тарихындағы жинаған деформацияны Λ_p илемділіктің шегі деп атайды.

Монотонды деформация үшін Λ_p мөлшері логарифмдік деформацияның қарқындылығы $\overline{\Gamma}_p$ мөлшерімен тең болып келеді. Логарифмдік деформацияның қарқындылығы мына формуламен анықталады:

$$\overline{\Gamma}_p = \frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{\left(\overline{\varepsilon}_{11} - \overline{\varepsilon}_{22}\right)^2 + \left(\overline{\varepsilon}_{22} - \overline{\varepsilon}_{33}\right)^2 + \left(\overline{\varepsilon}_{11} - \overline{\varepsilon}_{33}\right)^2},$$

мұндағы $\overline{\varepsilon}_k$ ($k = 1, 2, 3$) – қирау уақытындағы басты логарифмді деформация.

Илемділіктің шегі көп факторлардың күрделі функциясы болып есептеледі және мынадай факторлардан тәуелді болады: металдың химиялық құрамы мен құрылымы; деформациялаудың температура-жылдамдық жағдайы; кернеулік күй; қирауға дейінгі болып өткен кернеу мен

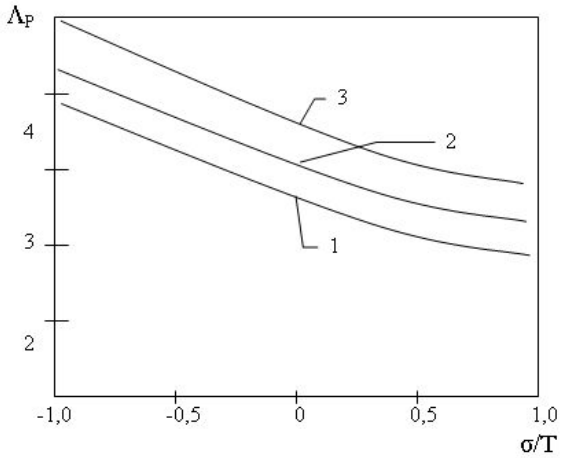
деформацияның уақыт бойынша даму тарихы; геометриялық факторлар және сыртқы орта.

Илемді деформация кезінде дислокацияларды жинау, демек микросынықтарды жинау жүреді. Осы микросынықтарды жинаумен бірге, олардың жазылу мүмкіндігі бар болады. Микросынықтардың жазылуы үш осьті созудан үш осьті қысуға өткен кезде, яғни қатаңдық коэффициенті азайған кезде көбейеді. Қатаңдық коэффициенті кернеу күйінің сұлбасын санды сипаттайды. Осы коэффициент мынадай формуламен анықталады:

$$k_\sigma = \sigma / T ,$$

мұндағы σ – орташа кернеу; T – жанама кернеудің қарқындылығы.

Суықтай деформациялаған кезде ығысу деформациясының шегі $\Lambda_р$ (материалды қирауға алып келетін ығысу деформациясының дәрежесі) және кернеу күйі сұлбасының көрсеткіші арасында $k_\sigma = \sigma / T$ бір мағыналы байланыс бар (5.11-сурет).



5.11-сурет. Аустениттік түйіршіктің өлшеміне байланысты 12Х18Н10Т болатының илемділік диаграммасы
1 – 25 мкм; 2 – 15 мкм; 3 – 5 мкм

Мынадай формуламен анықталатын интегралды:

$$\psi = \int_0^{\Lambda} \frac{d\Lambda}{\Lambda_p\left[k_\sigma\left(\sigma / T\right)\right]} = \int_0^{t} \frac{\mathrm{H}\left(\tau\right)d\tau}{\Lambda_p\left[k_\sigma\left(\sigma / T\right)\right]}$$

илемділіктің қорын қолданудың дәрежесі деп атайды. Осы формуланы суықтай деформациялаған кезде қолданады. Қирау уақытысында $\psi = 1$.

Шегіне жеткен қопсыту уақытында және межелік өлшемі бар сынықтың құрылу басында, материалды нүктенің айналасындағы элементарлы көлем ұшырайтын ығысу деформациясының дәрежесі $Л_р$ тең болады. Металл ақаулығының өсуі $d\psi_1$ деформацияның қосымша өсірілуі $dЛ = Hd\tau$ көп болған сайын және $Л_р$ мөлшері аз болған сайын үлкен болады. Сондықтан

$$d\psi = C_1\left(H\, d\tau \Big/ \Lambda_p\right),$$

мұндағы C_1 – илемді қопсытудың қарқындылығын немесе ақаулықтың өсуінің қарқындылығын сипаттайтын коэффициент.

Суықтай деформациялау кезінде ақаулардың жазылу мүмкіндігі бар (кеуек, борпылдақ, микросынық сияқты ақаулар жазылуы мүмкін). Осындай жазылу деформацияның дәрежесі үлкен болған сайын нәтижелі болады және металдың илемділік шегі жоғары болған сайын, яғни $Л_р$ үлкен болған сайын жазылу баяу жүреді. Сондықтан қосымша өсу түрінде ақауланудың азаюын мына түрде жазуға болады:

$$d\psi_2 = -C_2\frac{d\Lambda}{\Lambda_p} = -C_2\left(\frac{Hd\tau}{\Lambda_p}\right).$$

Қорытындылық нәтижені былай жазуға болады:

$$d\psi = d\psi_1 + d\psi_2 = \left(C_1 - C_2\right)\left(\frac{Hd\tau}{\Lambda_p}\right).$$

Бірақта $C_2 = C_2(k_\sigma)$, өйткені гидростатикалық қысым жоғары болған сайын жазылу нәтижелі болады.

$H = H\,(\tau)$, яғни ығысу деформациясы жылдамдылығының қарқындылығы уақыт бойынша өзгеретіндігін, ал $Л_р = Л_р(k_\sigma)$

және $k_\sigma = k_\sigma(\tau)$ екендігін ескеріп, жоғарыда жазылған формуланы былай жазуға болады:

$$d\psi = \left[C_1(\Lambda) - C_2(k_\sigma)\right]\left(\frac{H(\tau)d\tau}{\Lambda_p\left[k_\sigma(\tau)\right]}\right) = B(\tau)\frac{H(\tau)d\tau}{\Lambda_p\left[k_\sigma(\tau)\right]}.$$

Ыстықтай илемді деформациялаған кезде рекристаллизация және диффузиялық процестер есебінен ақаулардың жазылуы жүреді. Осымен байланысты t уақтысы τ-дан алыс тұрған сайын dψ мөлшері үдемелі азаяды. H = const және $T/T_б = \theta$ = const болған кезде, осы азаюды мұрагерлік функциямен $E(t - \tau)$ ескеруге болады. Осы функция толық суық деформация үшін 1-ден толық ыстық деформация болған кезде 0-ге дейін өзгереді. Мұрагерлік функциясын ескеріп жоғарыда жазылған формуланы былай қайта жазуға болады:

$$d\psi = E(t-\tau)B(\tau)\frac{H(\tau)d\tau}{\Lambda_p\left[k_\sigma(\tau)\right]}.$$

Осындай жазудың мақсаты – ыстықтай деформациялаған кезде илемділіктің шегіне анықтама беру болды. Ыстықтай деформациялаған кезде илемділік шегінің түрі мынадай:

$$\Lambda_p = \int_0^{t_p}\frac{H(\tau)d\tau}{E(t-\tau)},$$

мұндағы $E(t - \tau) = 0$ болған кезде $\Lambda_p = \infty$. Осы беріксіздену процестері толық жүрген кезде шексіз үлкен илемді деформацияға сәйкес келеді.

Жоғарыдағы теңдіктерді интегралдап, суықтай деформациялау үшін илемділіктің қорын қолданудың дәрежесі мөлшерін ψ және қираусыз деформациялау шартын аламыз. Ол мынадай шарт:

$$\psi = \int_0^t B(\tau)\frac{H(\tau)d\tau}{\Lambda_p\left[k_\sigma(\tau)\right]} \prec 1.$$

Ыстықтай деформациялау үшін илемділіктің қорын қолданудың дәрежесі мына формуламен анықталады:

$$\psi = \int_0^t E(t-\tau)B(\tau)\frac{H(\tau)d\tau}{\Lambda_p[k_\sigma(\tau)]} \prec 1.$$

Жоғарыдағы теңдеулерге кіретін Λ_p мөлшері термомеханикалық параметрлердің функциясы болып саналады. Белгілі бір құрылымы бар әрбір қорытпа үшін, осы функцияны арнайы сынау машиналарында үлгілікті ұяқалып арқылы сығымдау немесе бұрау, созу, шөктіру сияқты сынауларын жүргізумен тәжірибе бойынша табады. Осындай сынаулардың ерекше өзгешіліктері болып сынау бөлмешігінде орта қысымын 0,1-ден 1000 МП*а* дейін ұстап тұру мүмкіншілігі және температураны 20 °С-тан 1250 °С дейін тұрақты етіп ұстау есептеледі.

Цилиндрлік үлгілікті созған кезде ығысу деформациясының дәрежесін (қирауға дейінгі) соңғы пішін өзгеру бойынша мына формуламен санауға болады:

$$\Lambda_p = 2\sqrt{3}\ln\left(\frac{d_0}{d_p}\right),$$

мұндағы d_0 және d_p – деформацияға дейінгі және қирау уақытындағы үлгіліктің диаметрі.

Лоде көрсеткіші мынаған тең $\mu_\sigma = 2\dfrac{\sigma_{22}-\sigma_{33}}{\sigma_{11}-\sigma_{33}} - 1 = -1$,

өйткені $\xi_{rr} = \xi_{\varphi\varphi}$. $k_\sigma = \sigma/T$ көрсеткішінің мәні сынау бөлімшегіндегі гидростатикалық қысымнан тәуелді болады, сондықтан осы көрсеткіш мына формуламен анықталады:

$$\frac{\sigma}{T} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{d}{R}\right) - \frac{P}{0{,}58\sigma_S},$$

мұндағы d – үлгіліктің ең кіші қимасындағы диаметрдің мәні; R – созудың кейбір уақытындағы үлгіліктің мойнағы қарамының радиусі.

Сынау процесінде деформация кедергісі σ_s және үлгіліктің мойнағының параметрі d/R өзгеретін болғандықтан $k_\sigma = \sigma/T$

мөлшерін тұрақты етіп ұстау үшін сынау бөлімшегіндегі қысым *P*-ны мынадай белгілі бір заңмен реттейді:

$$P = \frac{1}{3}\left(\sigma_{02} + g\Lambda^{\beta}\right)\left[1 + 0{,}75(\Lambda - 0{,}2)0{,}81\right] - 0{,}58\left(\sigma_{02} + g\Lambda^{\beta}\right)\cdot\frac{\sigma}{T}\cdot$$

Енінің қалыңдыққа қатынасы 0,1 болатын жазық үлгілікті созған кезде, мойнақта деформация шоғырланғаннан кейін деформацияланған күй жазыққа жақын, ал деформация монотонды болады. Үлгіліктің түпкі пішін өзгертуі бойынша ығысу деформациясының дәрежесін (қирауға дейінгі) мына формуламен есептеуге болады:

$$\Lambda_p = 2\ln\left(\frac{h_0}{h_p}\right),$$

мұндағы h_0 және h_p – қирау уақытында және деформацияға дейінгі үлгіліктің қалыңдығы.

Жазық деформация күйі үшін $\xi_{22} = 0$, сондықтан Лоде көрсеткіші $\mu_\sigma = 0$. Кернеу күйінің көрсеткішін мына формуламен анықтайды:

$$\frac{\sigma}{T} = 1 + 2\ln\left[1 + \left(\frac{h}{2R}\right)\right] - \frac{P}{0{,}58\,\sigma_S}.$$

Егер $h/2R(\Lambda)$ және $\sigma_s(\Lambda)$ тәуелділіктері белгілі болса, $\frac{\sigma}{T} = \frac{\sigma}{T_*}$ тұрақты етіп ұстау үшін сынау бөлімшегіндегі қысымды *P* реттейтін заңды анықтау қиын емес. Реттейтін заң мынадай:

$$P = 1{,}16\sigma_S(\Lambda)\ln\left[1 + \frac{h}{2R(\Lambda)}\right] - 0{,}58\left(\frac{\sigma}{T}\right)_*\cdot\sigma_S(\Lambda) + 0{,}58\sigma_S(\Lambda)\cdot$$

Цилиндрлік үлгілікті бұраған кезде таза ығысу деформация күйі пайда болады. Лоде көрсеткіші $\mu_\sigma = 0$. Кернеу күйінің көрсеткіші мына формуламен анықталады: $\frac{\sigma}{T} = -\frac{P}{0{,}58\,\sigma_S}$.

Бұраған кезде үлгіліктің осінде ығысу деформациясының дәрежесі нөлге тең, ал осы үлгіліктің бетіндегі Λ-нің мөлшері ең

үлкен болады. Егер цилиндрлік үлгіліктің бетіне бойлық сызық ізді түсірсе, онда бұраған кезде осы сызықсыз құрастырушыға φ еңкіш бұрышы бар бұрандалы сызық жайын алады. Қираған жерде φ_p бұрышын өлшейді, содан кейін ығысу деформациясының дәрежесін мына формуламен есептейді: $\Lambda_{\partial} = tg\varphi_p$.

Басты кернеулер $\sigma_1 = \tau_s$, $\sigma_2 = 0$ және $\sigma_3 = -\tau_s$ болғандықтан орташа кернеу $\sigma_o = 0$ және $k_\sigma = \sigma/T = 0$. Жанама кернеудің қарқындылығы $T = \tau_s$. Егер бұрайтын үлгілікті P қысымымен толтырылған сұйығы бар ыдысқа орналастырса, онда $\sigma_1 = \tau_s - P$, $\sigma_2 = -P$ және $\sigma_3 = -\tau_s - P$ және $T = \tau_s$, ал $\sigma_o = -P$. Демек, $k_\sigma = \sigma/T = -P/\tau_s$. Сұйықтың қысымын реттей отырып, әр түрлі k_σ қолданып көп тәжірибені жүргізуге болатындығы жоғарғы мәліметтен көрініп тұр. Тәжірибе кезінде металл беріктенеді. Сондықтан қысымды бірқалыпты өзгертіп $k_\sigma = \sigma/T = -P/\tau_s$ тұрақты етіп ұстауға болады. Сол себептен сынау машинасын, материалдың беріктену заңына сәйкесті тәжірибенің жүрісі бойынша P қысымды бағдарлы жоғарылату үшін арнайы электронды аппаратпен жабдықтайды.

5.5. Илемділік диаграммасын анықтаудың тәжірибелік әдістемесі

Температураға, деформация жылдамдығына, болаттың және қорытпаның химиялық құрамына байланысты илемділік диаграммасы қисық сызығын $\Lambda_p - k_\xi$ тәжірибемен салу күрделі мәселе болып саналады. Осы кезде, кейбір белгілі тәсілдердің кемшілігі болып, күрделі үлгілікті жасау үшін жұмсалатын материал шығынының көп болуы және сынау үшін арнайы жабдықты қолдану керектігі саналады. Материалды шығынды азайту мақсатымен біз илемділік диаграммасын тәжірибемен анықтаудың жаңа тәсілін ұсындық.

Диаграмманы салу үшін құймакесектен немесе деформацияланған металдан керекті өлшемі бар дайындамаларды кесіп аламыз. Осы дайындамалардан конусты, цилиндрлі және бөшке тәрізді пішіні бар үлгіліктерді жасаймыз. Шөктірілінетін

үлгіліктің бос бетіндегі симметриялы көлденең жазықтыққа, ара қашықтығы T_J болатын белгіні түсіреміз. Шөктіру процесінде үлгіліктің биіктігін H_J, диаметрін D_J, ал тағы да белгінің арасындағы ара қашықтықты T_J тензобергішті, фотобөлмешікті, фотоаппаратты немесе құрал микроскопын қолданып өлшейміз. Үлгілікті бірінші сызат пайда болғанша шөктіреміз.

Алынған тәжірибелік мәліметті келесі математикалық жолмен өңдейміз. Деформациялық теория бойынша кернеу мен деформация байланысының физикалық теңдеуін немесе ағым теориясы бойынша кернеу мен деформация жылдамдығы байланысының физикалық теңдеуін қолданып, шөктірілетін дайындаманың бос бетіндегі көлденең симметриялы жазықтықта төменде келтірілген әдістеме бойынша (келесі тарауды қараңыз) кернеу-деформация күйін анықтауымыз қажет.

Илемділік шегінің қисық сызығын салу үшін қирау уақытындағы илемділік қорын қолдану дәрежесін (ИҚКД) анықтайтын формуланы пайдалануымыз керек, яғни

$$\psi = \int_0^{\tau_p} \frac{H(\tau)d\tau}{\Lambda_p\left[k_\xi(\tau)\right]} = 1. \qquad (5.37)$$

Осы формуламен бірге шөктірген кезде дайындаманың бос бетінде алынған кернеу-деформация күйін зерттеу бойынша тәжірибелік мәліметтерді қолданамыз.

Деформациялаудың тұрақты жылдамдығында ν = const уақыт τ және салыстырмалы жаншу мынадай қатынаспен байланысқан $\varepsilon = \Delta H/H_0 = \nu_0 \cdot \tau/H_0$; $d\varepsilon = \nu_0/H_0 d\tau$, мұндағы ΔH – абсолютті жаншу.

Сондықтан ИҚКД-ны есептеу үшін қолданылатын формуланы келесі түрде көрсетуге болады:

$$\psi = \frac{H_0}{V_0} \int_0^{\varepsilon_p} \frac{H(\tau)d\varepsilon}{\Lambda_p\left[k_\xi(\tau)\right]} = 1. \qquad (5.38)$$

(5.38) формуласында $\Lambda_p[k_\xi(\varepsilon)]$ мөлшері белгісіз функция болып саналады. Осы функцияны, жаншу үлкейген сайын $H(\varepsilon)$ және $k_\xi(\varepsilon)$ өзгеретін жағдайда механикалық сынау бойынша

анықтау тура келеді. Анықтаған кезде қирау нүктесі және уақыты белгілі.

Дәрежесі m болатын дәрежелік фукциямен (немесе қандай да бір басқа тәсілмен) аппроксимацияланған Λ_p-ға кері функцияны алайық, яғни $V_p = 1/\Lambda_p = a_m\ k_\xi^m$. Сонда мынаны анықтаймыз:

$$\left.\begin{aligned}
&\psi = \frac{H_0}{V_0}\int_0^{\varepsilon_p}\frac{H(\varepsilon)d\varepsilon}{\Lambda_p\left[k_\xi(\varepsilon)\right]} = \frac{H_0}{V_0}\int_0^{\varepsilon_p} V_p\left[k_\xi(\varepsilon)\right]\cdot H(\varepsilon)d\varepsilon = 1;\\
&\psi = \frac{H_0}{V_0}\int_0^{\varepsilon_p}\left[a_0 + a_1k_\xi + a_2k_\xi^2 + \ldots + a_mk_\xi^m\right]\cdot H(\varepsilon)d\varepsilon = 1;\\
&\psi = \frac{H_0}{V_0}\int_0^{\varepsilon_p} H(\varepsilon)d\varepsilon + a_1\frac{H_0}{V_0}\int_0^{\varepsilon_p} k_\xi H(\varepsilon)d\varepsilon + \ldots + a_m\frac{H_0}{V_0}\int_0^{\varepsilon_p} k_\xi^m H(\varepsilon)d\varepsilon = 1,
\end{aligned}\right\} \quad (5.39)$$

мұндағы m – сынау саны (шөктірілетін үлгіліктер түрінің саны).

(5.39) формуласындағы интеграл астындағы мәндер тәжірибелік мәліметтер бойынша сандық интегралдаумен анықталады. Нәтижесінде мынаны аламыз:

$$\begin{aligned}
&a_0A_0 + a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots\ a_mA_m = 1 \quad \text{(тәжірибе 1)}\\
&a_0B_0 + a_1B_1 + a_2B_2 + \ldots\ a_mB_m = 1 \quad \text{(тәжірибе 2)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0M_0 + a_1M_1 + a_2M_2 + \ldots\ a_mM_m = 1 \quad \text{(тәжірибе } m\text{)}
\end{aligned}$$

Сызықты теңдеулер жүйесін шешіп аппроксимациялайтын теңдеудің $V_p = a_m \times k_\xi^m$ коэффициенттерін a_0, a_1, a_2,.... a_m табамыз және осы теңдеу бойынша илемділіктің шегі диаграммасын $\Lambda_p = f(k_\xi) = 1/V_p \times k_\xi$ анықтаймыз.

Үлгіліктің бос бетінде бөшкенің пайда болуы шөктіру процесінде Лоде көрсеткішін μ_σ өзгеруіне алып келеді. Оқулықтарда шөктірген кезде Лоде көрсеткішін анықтау үшін мына формула ұсынылған:

$$\mu_\sigma = -\frac{3\left(\frac{\sigma}{T}\right)}{4-3\left(\frac{\sigma}{T}\right)^2}. \qquad (5.40)$$

Осы формуладан, үлгіліктерді шөктірген кезде Лоде көрсеткішінің мәні кең аралықта өзгеретіндігі көрініп тұр, яғни $k_\xi = \sigma/T = -0{,}58$ болған кезде μ_σ = 1-ден $k_\xi = 0{,}58$ болған кезде μ_σ = -1-ге дейін өзгереді. Сөйтіп, осы әдістемені $k_\xi = \sigma/T$ деформациялау процесінде өзгеретін процестер үшін қолдануға болады.

5.6. Илемділік шарты

Изотропты орта үшін илемділіктің басталуының шарты. Күрделі кернеу күйі жағдайы үшін өте жақсы серпімді-илемді ортаның моделін қорытындылайық. Бір осьті кернеу күйі жағдайында металдың илемділік күйге өтуі кернеудің σ ағым шегіне σ_s жеткен кезде, яғни мынадай шарт: $\sigma = \sigma_s$ орындалғанда жүретіндігін біз анықтадық.

Жалпы жағдайда илемділік шарты (жиі ағым шарты деп атайды) мынадай түрде жазылады:

$$f(\sigma_{ik}) = k, \quad k = \text{const}, \qquad (5.41)$$

мұндағы σ_{ik} – кернеу тензорының сыңарлары; k – ағым шегімен байланысты материалдың константасы.

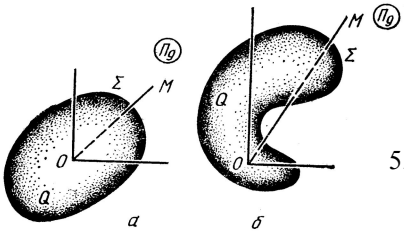
Сонымен, егер дене серпімділік күйде болатын болса, онда мынадай теңсіздік орындалады:

$$f(\sigma_{ik}) < k, \qquad (5.42)$$

ал илемділік күйге өтетін болса, онда (5.41) шарты орындалады.

Жақсы көрнекілік үшін тензордың $[\sigma_{ik}]$ кернеулерінің тоғыз өлшемді векторлық кеңістігін Π_9 қарауымызға енгізейік. Π_9 кеңістігінде әрбір тензорға T_σ кейбір нүкте, ал (5.41) илемділік шартына илемділіктің кейбір тұйық беті $\sum$ сәйкес келеді (5.12 *а*-сурет). Осы беттің ішінде жататын аймақ Q материалдың серпімді күй аймағы деп айтатын боламыз. Осы

аймақтың нүктелеріне сәйкес келетін кернеулік күйлер қалдық деформацияны болдырмайды.



5.12-сурет. Илемділіктің беттері
а – дөңес; б – дөңес емес

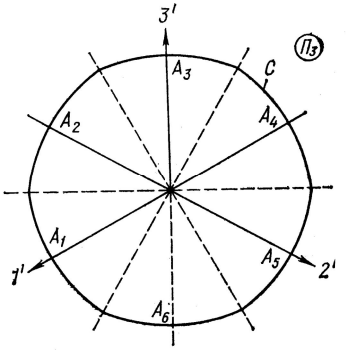
Илемділік беті координаттың басы арқылы өтпейді және дөңес болуы қажет, яғни координаттың басынан шығатын кез келген сәуле осы илемділік бетін бір рет қана қиып өтуі керек. Мынадай бірінші қасиет айқын екендігі түсінікті: илемділік күйін нөлден айырмашылықта болатын кернеулерде жетуге болады. Ары қарай, егер 5.12 *б*-суретінде көрсетілгендей түрді илемділік беті ие болатын болса, онда күшті пропорционалды азайтқан жағдайда (ОМ сәуле бойымен координат басына қозғалу) материалда кейбір мезгілден бастап илемділік деформациясына иемденетін серпімділік деформациясы бар болар еді.

Материал беріктенген кезде илемділік беті деформациялау процесінде өзгереді. Осы бет кеңеюді, қисаюды бастан кешіруі, қырлар мен конусты нүктелерге ие болуы және т. б. мүмкін.

Өте жақсы илемді орта үшін илемділік беті бекітілген. Осы бет деформациялау күйінің параметрінен тәуелді емес және илемділік деформациясының барлық процесі кезінде өзінің түрін сақтайды.

Илемділік қисық сызығы. Тоғыз өлшемді кернеулер кеңістігімен $П_9$ қатар қарауымызға басты кернеулердің σ_i (i = 1, 2, 3) үш өлшемді кеңістігін $П_3$ енгізейік. Осы кеңістікте нүктенің декарттық координаттары басты кернеулер сыңарларымен сәйкес келеді. Осы жағдайда мынадай шартты: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ уақытша қабылдамаймыз.

Егер илемділік шартты (5.41) орташа кернеуден σ_o тәуелді болмайтын болса, онда ол осьтері девиаторлы жазықтыққа перпендикулярлы түзулер $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ болатын цилиндрлік бетпен көрсетіледі. Илемділік шартының қасиетін анықтау үшін осы цилиндрдің девиаторлы жазықтыққа ізін, яғни илемділіктің қисық сызығы деп аталатын *C* қисық сызығын қараған жеткілікті (5.13-сурет).



5.13-сурет. Илемділіктің қисық сызығы

Ортаның изотроптылығынан σ_1, σ_2, σ_3 осьтерінің тең праволылығы және осы осьтерге қатынасты илемділік қисық сызығының симметриялығы шығады. Ары қарай, үлгілікті созған немесе қысқан кезде ағым шектері тең болатындықтан, илемділік қисық сызықтары $1'$, $2'$, $3'$ осьтеріндегі координаттың басынан бірдей қашықтықта болатын A_1, A_2,..., A_6 алты нүктелері арқылы өтуі қажет. Демек, изотропты дененің илемділік қисық сызығы бірдей 12 доғадан тұруы қажет және ағым шегін тәжірибемен зерттеген кезде материалдың жүріс-тұрысын осы доғалардың біреуінде бақылап отыру жеткілікті.

Ең үлкен жанама кернеулердің тұрақтылық шарты. Осы шарт (Треска-Сен-Венан шарты) келесі түрде жазылады:

$$\left.\begin{aligned} 2|\tau_1| &= |\sigma_1 - \sigma_2| \le \sigma_s, \\ 2|\tau_2| &= |\sigma_3 - \sigma_1| \le \sigma_s, \\ 2|\tau_3| &= |\sigma_1 - \sigma_2| \le \sigma_s. \end{aligned}\right\} \qquad (5.43)$$

Мұндағы τ_1, τ_2, τ_3 – басты аудандарға $\pi/4$ бұрышымен еңкейген алаңдарда әсер ететін ең үлкен жанама кернеулер.

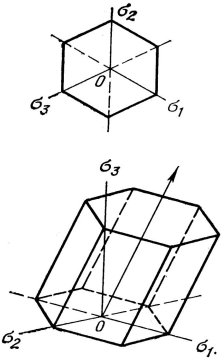
Жоғарыда біз айтқанымыздай $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ шартының орындалуы талап етілмейді.

Серпімділік күйде (5.43) барлық шарттар теңсіздік белгісімен орындалады. Илемділік күйде бір немесе екі шартта теңдік белгісі болуы қажет. Осы кезде, бар болатын ең үлкен жанама кернеулер тұрақты мәнді сақтайды.

$\sigma_1 = \tau_s$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau_s$ болған кезде пайда болатын таза ығысудағы ағым шегін τ_s деп белгілейік. (5.43) формуласынан созған кездегі ағым шегі (σ_s) τ_s-пен мынадай тәуелділікпен: $\sigma_s = 2\,\tau_s$ байланысты екендігі шығады.

Треска-Сен-Венан илемділік шартты басты кернеулер кеңістігінде координатты осьтерге бірдей еңкейтілген алты қырлы призмамен көрсетіледі (5.14-сурет). Девиаторлы жазықтықпен призманың қиылысуы болып келетін илемділік шартты дұрыс алты бұрыш болып саналады.

Ең үлкен жанама кернеу ең үлкен және ең кіші басты кернеулердің жартылай айырмасына тең болатындықтан аралық басты кернеу илемділік шартына әсер етпейді.



5.14-сурет. Треска-Сен-Венан илемділік беті

Жанама кернеу қарқындылығының тұрақтылық шарты. Алты қырлы призманы, оның айналасында сызылған дөңгелек цилиндрмен айырбастап мынадай Губер-Мизес илемділік шартына келеміз:

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=2\sigma_s^2. \qquad (5.44)$$

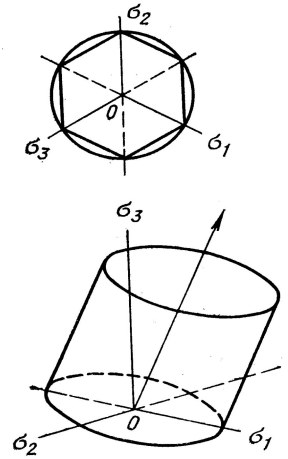
Девиаторлы жазықтықпен цилиндрдің қиылысуы болып келетін илемділік шартты дұрыс алты қырлының айналасында сызылған шеңбер болып саналады (5.15-сурет). Жанама кернеудің қарқындылығы мынаған тең болғандықтан:

$$T=\sqrt{\frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}, \qquad (5.45)$$

Губер-Мизес илемділік шартын мына түрде жазуға болады:

$$T=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}=const, \qquad (5.46)$$

яғни осы шарт жанама кернеу қарқындылығы тұрақты болып келетін шарт болып саналады.



5.15-сурет. Губер-Мизес илемділік беті

Үлгілікті созған кездегі ағым шегін таза ығысу кезіндегі ағым шегімен былай салыстырайық:

$$\tau_s=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}=0{,}577\sigma_s. \qquad (5.47)$$

Жазық кернеу күйі. Жоғарыда жазылған илемділік шартын жазық кернеу күйі жағдайы үшін қарайық ($\sigma_3 = 0$). Треск-Сен-Венан шарты мына түрде жазылады:

$\sigma_1\sigma_2 > 0$ және $|\sigma_1| \succ |\sigma_2|$ болған кезде $|\sigma_1| = \sigma_s$;

$\sigma_1\sigma_2 > 0$ және $|\sigma_2| \succ |\sigma_1|$ болған кезде $|\sigma_2| = \sigma_s$;

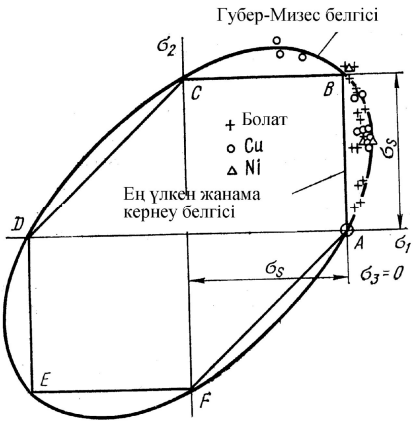
$\sigma_1\sigma_2 < 0$ болған кезде $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s$.

Осы формулалар $\sigma_1\sigma_2$ координат жүйесінде координатты осьті ағым шегіне σ_s тең кесіндімен қиып өтетін АВСДЕF алты бұрыштыны анықтайды (5.16-сурет).

Губер-Мизес шарты $\sigma_3 = 0$ болған кезде мына түрді қабылдайды:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_s^2 \qquad (5.48)$$

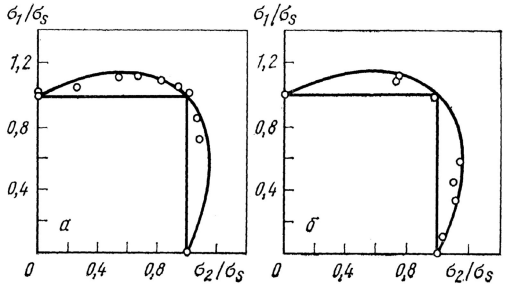
және алты бұрыштының айналасында сызылған эллипстің теңдеуі болып саналады.



5.16-сурет. Жазық кернеу күйі үшін илемділік шарты

Созатын күшпен, ішкі қысыммен және бұрау моментімен жұқа қалыңдықты цилиндрлі құбырларды сынап тәжірибелерді жүргізгенде (біркелкі жазық кернеу күйіне жақын жағдайда) Рош пен Эйхингер, А.М. Жуков және басқа зерттеушілер

тәжірибелік зерттеулердің нәтижесі Губер-Мизес илемділік шартымен жақсы сәйкес келетіндігін дәлелдеді (5.17-сурет). Сондықтан илемділік теориясын тұрғызған кезде Губер-Мизес илемділік шарты негізгі ретінде қабылданды.



5.17-сурет. Илемділік шартын тәжірибемен тексеру
а – ЭИ415 болаты (А.М. Жуков бойынша);
б – хромникельді болат (А.М. Жуков бойынша)

Бақылау сұрақтары.

1. Кіші серпімді-илемді деформация теориясының негізгі ережелерін қалай тұжырымдауға болады?
2. Тұтқыр-илемді ағыс теориясының негізгі ережелерін қалай тұжырымдауға болады?
3. Деформациялаудың адиабатикалық процесі үшін жылу өткізгіштіктің дифференциалды теңдеуін қалай жазады?
4. Жылу өткізгіштіктің дифференциалды теңдеуін қалай интегралдау қажет?
5. Жылулық көзі жоқ қозғалмайтын денеге жылу өткізгіштіктің дифференциалды теңдеуін жазыңыз ?
6. Процесс стационарлы болған жағдайда жылулық көзі жоқ қозғалмайтын денеге жылу өткізгіштіктің дифференциалды теңдеуін жазыңыз?
7. Жазық температуралық өріс және $\lambda = const$ болған жағдайда жылу өткізгіштіктің дифференциалды теңдеуін жазыңыз?
8. Реология дегеніміз не?

9. Осы реология ғылымы қандай сұрақтарды оқып зерттейді?
10. Қандай қарапайым реологиялық модельдерді Сіз білесіз?
11. Кернеудің релаксациясы дегеніміз не?
12. Кіші серпімді-илемді деформация теориясында «бірлік қисық сызығы» гипотезасы қалай айтылады ?
13. Тұтқыр-илемді ағыс теориясында «бірлік қисық сызығы» гипотезасы қалай айтылады?
14. Деформацияланатын денеге қандай күш түсіруді қарапайым деп атайды?
15. Қатаңдық коэффициенті дегеніміз не?
16. Илемділіктің қорын қолданудың дәрежесі дегеніміз не?
17. Суықтай деформациялау үшін илемділіктің қорын қолданудың дәрежесі қалай анықталады?
18. Ыстықтай деформациялау үшін илемділіктің қорын қолданудың дәрежесі қалай анықталады?
19. Илемділік диаграммасын қалай тұрғызады және қалай қолданады?

6. ИЛЕМДІ ДЕФОРМАЦИЯНЫҢ ФИЗИКАЛЫҚ НЕГІЗІ

6.1. Металдың кристалдық құрылымының ақаулары. Нүктелік ақаулар

Металлургиялық немесе басқа тәсілдердің көмегімен өндірістік жағдайда алынатын кез келген металл біртекті, таза, ақаусыз болмайды. Тіпті аса таза металдардың өзінде де химиялық және физикалық ақаулар кездеседі. Олар металдың энергиясын арттырып, ішкі кернеулерін көбейтеді. Сөйтіп, оның құрылысы мен қасиеттерін тұрақсыздандырады.

Химиялық ақауларға кез келген металда кездесетін әр түрлі қоспалардың атомдары (иондары) және олардың негізгі металмен өзара қосылыстары жатады. Сонымен бірге, қоспа атомдарының негізгі металл кристалдарының ішінде тегіс бөлініп орналаспауы немесе әр түрлі қосылыстардың, металл емес фаза кристалдарының металл микроқұрылысында тегіс емес, әр жерде шоғырланып орналасуы да химиялық ақауға жатады.

Химиялық ақаулар металдың физика-химиялық және химиялық қасиеттеріне көп әсер етеді. Олардың әсер ету механизмін металдың атомдық-кристалдық құрылысы деңгейінде жүретін өзгерістердің көмегімен түсіндіруге болады.

Қатты металда еритін қоспалардың атомдары немесе иондары, оның кристалдық торының түйіндерінде негізгі металдың атомдарын алмастырып, алмасу ерітіндісін немесе негізгі металдың кристалдық торының октаэдрлік, тетраэдрлік, т.б қуыстарына орналасып, ену ерітіндісін құрайды. Мұндай қатты ерітінділердің ішінде, кез келген алмасу немесе ену атомдарының төңірегінде металдың кристалдық торы серпімді деформацияланып, ішкі серпімді кернеулер пайда болады. Атомаралық қашықтықтармен байланыс энергиялары және кристалдық тордың симметриясы өзгереді. Сонымен бірге, валентті электрондардың концентрациясы да өзгеруі мүмкін.

Алмасу және ену атомдары немесе иондары металдың кристалдану кезінде қатты түйіршіктердің ішінде тегіс тарап орналаспай, дендриттік ликвация пайда болады. Әрбір жеке кристалдың ішінде металдың химиялық құрамы әр жерде әр түрлі, сондықтан оның қасиеттері де әр түрлі болады.

Қоспа атомдар мен иондардың басқа ақаулармен (дислокациялармен, шекаралармен) серпімді және кулондық әсерлесудің нәтижесінде қоспа атомдарының әр түрлі атмосфералары (топтары) пайда болады. Сондықтан, дислокациялар мен шекаралар бойында металдың химиялық және фазалық құрамы, қасиеттері басқаша болады.

Қоспа атомдар мен иондар өзара немесе негізгі металмен қосылып, әр түрлі артық фазалар құруы мүмкін. Көп жағдайда мұндай фазалардың атомдық-кристалдық құрылысы, химиялық құрамы, қасиеттері белгісіз. Олардың кристалдарының таралып орналасуы, пішіні мен өлшемдері, шамалары әр түрлі болып келеді. Сондықтан артық фазалардың кристалдары төңірегінде кристалдық тордың серпімді деформациясы тіпті жоғары болуы мүмкін. Әдетте, матрицамен жаңа фазалардың термиялық кеңею коэффициенттерінің айырмашылығы көп болады.

Сонымен, қоспа атомдары мен иондары кез келген техникалық металдың сапасын төмендететін негізгі ақаулар болып саналады. Олар жоғарыда көрсетілгендей, металдың кристалдық күйін, атомдық-кристалдық құрылысын және фазалық құрамын өзгертетіндіктен, металдың барлық қасиеттеріне едәуір әсер етеді. Алмасу және ену атомдары, олардың әр түрлі атмосфералары, химиялық қосылыстары ең алдымен металдың механикалық қасиеттеріне әсер етеді. Дислокациялардың сырғуына үлкен кедергі болып, металдың илемді деформациясын қиындатады, беріктігі мен қаттылығын арттырып, илемділік қасиеттерін төмендетеді. Қоспа атомдар мен иондар жоғарыда көрсетілген себептерге байланысты металдың физикалық (электр өткізгіштігі, жылу өткізгіштігі, электр кедергісі, магниттік қасиеттері, т.б), химиялық (жегідеге тұрақтылығы) және технологиялық (қысыммен өңдеу қабілеті, пісіру қабілеті, т.б) қасиеттеріне де әсер етеді.

Металдарды іс жүзінде қолданғанда олардың тазалық дәрежесін көрсетеді. Мысалы, техникалық темірдің тазалығы 99,9983% болса, онда оның құрамында 0,0017% қоспа атомдары бар. Жартылай өткізгіш германийдің тазалығы жеті «тоғыз» болса (99,99999 % Ge), онда оның құрамында 0,00001 % әр түрлі қалдық қоспа атомдары бар деген сөз. Кейде қандай қалдық қоспалар екенінде анық көрсетуге тура келеді. Жалпы қоспа атомдар металға оны алу үшін қолданылатын кендерден, қосымша қолданылатын материалдар мен отыннан, пеш атмосферасынан өтеді. Жеткілікті дәрежеде тазартылған металда қоспалардың концентрациясы әдетте 10^{-6}-10^{-8} % болады.

Металдың тазалығы артқан сайын, оның қасиеттерінің тазалық дәрежесіне байланыстылығы да арта түседі. Мысалы, көміртегінің концентрациясына байланысты техникалық темірдің жылу өткізгіштігінің азаю жылдамдығы тұрақты болмайды. Көміртегінің концентрациясы аз кезінде, оның жылу өткізгіштігі өте тез азаяды да, ал көміртегінің концентрациясы артқан сайын, оның өзгеру жылдамдығы азая түседі. Темірдің бұл ерекшелігі басқа техникалық таза металдарға да тән. Құрамындағы қоспалардың концентрациясы белгілі бір дәрежеден асқан соң, олардың қасиеттері аз өзгереді.

Бұл техникалық таза металдардың қасиеттерін өңдеушілер мен тұтынушылар үшін орындалуға міндетті құжаттарда (мемлекеттік стандартта, техникалық шарттарда, т.б. құжаттарда) белгілі бір шарттарға байланысты дәл белгілеуге мүмкіндік береді.

Физикалық ақаулар металдың кристалдық торында атомдардың (иондардың) кеңістікте дұрыс, үздіксіз, белгілі бір ретінің бұзылуына байланысты пайда болады. Олар тіпті абсолютті 0^0К температурада кванто-механикалық тербелісте болады. Температура жоғарылағанда атомдардың тербелмелі жылулық қозғалысы күшейе түседі. Электрондардың бағытталған қозғалысына кедергі күшейеді (электрондар мен иондар жиірек қақтығысады). Сол себепті металдың электр өткізгіштігі азаяды.

Нүктелік ақаулар. Нүктелік ақаулардың өлшемдері барлық үш бағытта бірнеше атомаралық қашықтыққа тең. Нүктелік ақауларға вакансиялар, түйінаралық өзіндік және қоспа атомдар жатады.

Вакансиялар (Шоттки ақауы) деп кристалдық тордың атомдар (иондар) орналаспаған, бос түйіндерін айтады (6.1-сурет). Олар ең көп кездесетін нүктелік ақауларға жатады. Кристалдың ішінде әр түрлі себептермен пайда болады. Мысалы, олар металл бетіне әр түрлі сәулелермен әсер еткенде, илемді деформациялау және термиялық өңдеу кезінде немесе металдың кристалдануы кезінде пайда болады. Вакансиялардың, пайда болуы үшін, кристалдық торда атомдардың термиялық активтенулері керек. Іс жүзінде кез келген температурада, кинетикалық энергиясы осы температураға сай орташа энергиядан артық атомдар кездеседі. Мысалы, металдың ішкі және беткі қабаттарында, оның химиялық құрамы мен температуралық өрісі бірдей емес. Кейбір атомдар көрші атомдармен әр түрлі әсерлесу нәтижесінде қосымша энергия алуы мүмкін. Егер кристалдың беткі қабатына жақын орналасқан осындай активтенген атомдардың бірі кристалдың бетіне шықса, онда оның орнында кристалдық тордың бос түйіні – вакансия пайда болады.

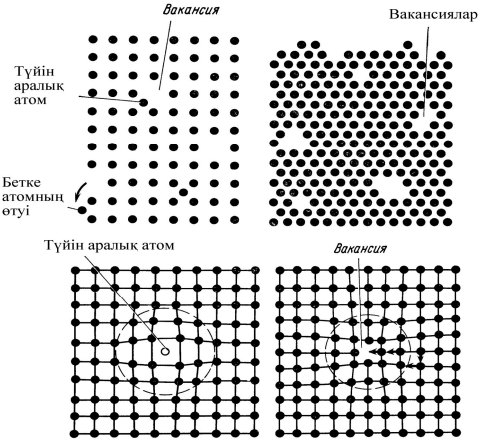
Вакансияның осылай пайда болуын, вакансия Шоттки механизімінің көмегімен пайда болды деп атайды. Келесі сәтте вакансияның орнына көршілес басқа атомдар (иондар) өтуі мүмкін. Осындай атомдар мен вакансиялардың үздіксіз орын алмастырып отыруы, кез келген температурада атомдардың диффузиялық жолмен қайта бөлініп орналасуын қамтамасыз етеді (диффузияның вакансиялық механизмі). Мысалы, тығыздығы жоғары кристалдарда өзіндік атомдардың диффузиясы тек вакансиялық механизмнің көмегімен жүреді. Өйткені, диффузияның басқа механизмдеріне қарағанда атомдардың активтенуі энергиясы аз, вакансиялармен орын алмасуы оңай жүзеге асады.

Жылулық қозғалыс нәтижесінде активтенген иондардың кейбіреулерінің кристалдық тор түйіндерінен түйінаралық бос

орындарға (октаэдрлік, тетраэдрлік қуыстарға) өтулері мүмкін. Пайда болған екі нүктелік ақаулардың, вакансия мен түйінаралық атомдардың жұптары Френкель ақаулары деп аталады (6.1-сурет). Френкель механизмінен пайда болған вакансия да, түйінаралық иондар да бір орында қалмайды. Олар бір түйінаралық қуыстан екіншісіне өте алады. Вакансиялардың тепе-теңдік концентрациясын (X_o) шамамен Больцман принципіне сай былай анықтауға болады:

$$X_o = e^{-Q_o/kT}, \qquad (6.1)$$

мұндағы Q_0 – вакансиялардың пайда болу энергиясы; k – Больцман тұрақтысы; T – абсолюттік температура.



6.1-сурет. Кристалдық тордағы нүктелік ақаулар

Бұл формуладан вакансиялардың концентрациясы температурмен тығыз байланысты екендігі көрініп тұр. Мысалы, вакансиялардың пайда болу энергиясы 1,1 эв болса, онда олардың концентрациясы температураға байланысты төмендегідей болады:

Т, ^{0}К	300	700	1100	1350
X_o, %	10^{-19}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-4}

Салыстыру үшін мыста пайда болатын вакансиялардың температураға байланысты концентрациясын келтірейік:

Т, ^{0}К	300	1000	1350
X_o, %	$27\cdot10^{-13}$	$64\cdot10^{-3}$	$216\cdot10^{-2}$

Демек, формула (6.1) металдардағы вакансиялардың температураға байланыстылығын жалпы дұрыс көрсетеді. Вакансиялардың концентрациясын дәл есептеу үшін, әр металда олардың пайда болу энергиясын білу керек. БЦК металдар үшін $Q_0 \approx (0{,}5 \div 0{,}65)\ E_д$, эв. Мұндағы $E_д$ - өзіндік диффузиялық активтену энергиясы. Төменде кейбір металдар үшін Q_0 және $E_д$ энергияларының тәжірибелік мәндері келтірілген (6.1-кесте).

6.1-кесте

Вакансиялардың пайда болу Q_0 және өзіндік диффузияның активтену $E_д$ энергиялардың тәжірибелік мәндері

Металл	Кристалдық тор	Q_0	$E_д$
Au	БЦК	0,95	1,76
Ag	БЦК	1,13	1,76
Cu	БЦК	1,28	2,07
Al	БЦК	0,67	1,28
Pt	БЦК	1,51	2,90
W	БЦК	-3,6	<5,7
M_0	КЦК	-3,2	-4,5

(6.1) формуланы қолданудан шығатын қорытындыларды толығымен түйінаралық атомдар үшін де қолдануға болады.

Жоғарыда көрсетілгендей, нүктелік ақауларға тағы да әр түрлі алмасу және ену ерітінділерін құрайтын қоспа атомдары да жатады. Қоспалар, қалдық атомдардан және металға, оның құрылысы мен қасиеттерін өзгерту үшін арнайы қосылған элементтердің атомдарынан тұрады.

Нүктелік ақаулардың пайда болуына орай, олардың төңірегіндегі микрокөлемдерде кристалдық тор серпімді диформацияланады. Тордың симметриясы бұзылып, атомдардың

орналасу реті мен тығыздығы, ара қашықтықтары, байланыс энергиялары өзгеретіндіктен, металдың макроқасиеттері де өзгереді.

Бақылау сұрақтары.

1. Алмасу ақауы деп қандай ақауды айтады ?
2. Ену ақауы деп қандай ақауды айтады ?
3. Вакансия деп қандай ақауды айтады ?
4. Түйінаралық атом ақауы деп қандай ақауды айтады ?
5. Вакансиялардың тепе-теңдік концентрациясын кандай формуламен табады?

6.2. Металдың кристалдық құрылымының ақаулары. Сызықтық, беттік және көлемдік ақаулар

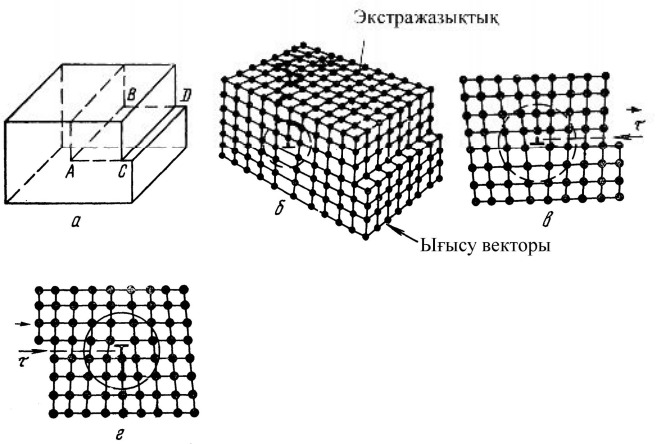
Сызықтық ақаулар. Сызықтық ақауларға дислокациялар мен түйінаралық атомдардың тізбектері жатады. Олардың өлшемдері бір бағытта микрокристалдың (түйіршіктің) өлшеміндей, ал қалған екі бағытта бірнеше атомаралық қашықтыққа тең. Сызықтық ақаулардың ерекше және маңызды түрі болып дислокациялар есептеледі.

Дислокациялар теориясы металдар мен қорытпаларда жүретін көптеген өзгерістерді талдауға кеңінен қолданыла бастады. Қазіргі кезде металдар мен қорытпалардың кристалдануы, оларда қатты күйде жүретін фазалық және құрылымдық өзгерістер, олардың беріктігі мен илемділік қасиеттеріне байланысты мәселелер дислокациялар теориясының көмегімен түсіндіріледі. Металтануда кристалдардың дислокациялық құрылысын зерттейтін көптеген тәжірибелік әдістер қолданылады.

Ғылымда қалыптасқан жалпы анықтама бойынша *дисклокация деп* кристалл ішіндегі сырғу аймағының шекарасын көрсететін сызықтық ақауды айтады. Мұндай шекара сырғу жазықтығының деформация жүріп өткен бөлігін, әлі деформация басталмаған бөлігінен бөліп тұрады.

Дислокациялар *шеттік*, *бұрандалы* және *аралас* дислокациялар болып үшке бөлінеді.

Шеттік дислокациялар. Тәжірибеде көрсетілгендей кез келген жеке микрокристалдың ішінде бірнеше толық емес (демек түйіршіктердің бір бетінен екінші бетіне жетпейтін) атомдық жазықтықтар кездеседі. Мұндай жартылай, толық емес атомдық жазықтықтарды-*экстражазықтықтар* деп атайды. Экстражазықтықтың кристалды деформациялау кезінде пайда болуын қарастырайық (6.2-сурет). Параллелепипед формалы кристалдың жоғарғы бөлігінің оң жақ шеті төменгі бөлігіне қарағанда бір атомдық ара қашықтыққа қысылған. Деформация сырғу жазығын түгел қамтымаған, кристалдың сол жақ бетіне жетпеген. *АВСД* сырғу жазықтығының деформация жүріп өткен бөлігі, ал *АВ* сызығы осы бөліктің шекарасы.



6.2-сурет. Шеттік дислокациялар
а – шеттік дислокацияны жасаған сырғу;
б – шеттік дислокацияның кеңістіктік сұлбасы;
в, г – дислокацияда атомдардың орналасу сұлбасы; τ – ығысу векторы

6.2-суретте жай куб торы бар параллелепипедтік кристалдың *АВ* сызығына перпендикуляр қимадағы атомдардың орналасу сұлбасы көрсетілген. Сұлбада кристалдың 9 тік атомдық жазықтықтарының іздері көрсетілген. Бірақ кристалдың жоғарғы бөлігін бір атомаралық қашықтыққа жылжытудың нәтижесінде, оның жоғарғы бөлігінде артық

жартылай атомдық жазықтық пайда болған. Жоғарғы бөлігіндегі 9 атомдық жазықтық төменгі бөліміндегі 8 атомдық жазықтыққа қарсы орналасқан. Кристалдың жоғарғы бөлігіндегі толық емес атомдық жазықтық *экстражазықтық* болып табылады.

Артық атомдық қабат (экстражазықтық) кристалды иіп, оған сына тәрізді әсер етеді. Экстражазықтықтың төменгі шетінде кристалдық тордың симметриясы бұзылады. Эктражазықтықтың шетінен, жоғарғы бөлігіндегі атомдардың орналасу тығыздығы үлкен, атомаралық қашықтық тепе-теңдік кезіндегі мәнінен аз ($d_1 < d_0$). Ал оның шетінен төмен орналасқан атомдардың тығыздығы аз да, атомаралық қашықтықтары үлкен ($d_2 < d_0$). Экстражазықтықтың шекарасында орналасқан атомдардың координациялық саны, кристалдық тордың деформацияланбаған бөлігіндегі координациялық саннан кіші. Дислокацияның гидростатикалық созылу аймағында (экстражазықтықтың астында) артық электрондар жиналады, ал гидростатикалық қысылу аумағында (экстражазықтықтың үстінгі шетінде) электрондар азаяды, яғни оң зарядтың тығыздығы жоғары болады. Сондықтан дислокация оң және теріс зарядтардан тұратын сызықтық әлсіз электр диполі болып табылады.

Сонымен, экстражазықтықтың төменгі шетінің бойымен атомдық-кристалдық құрылысы бұзылған сызықты ақау пайда болады. Оның ұзындығы кристалдың ұзындығына тең ($l_2 = AB$), ал оған перпендикуляр екі бағытта өлшемдері аз – екіден он атомаралық қашықтыққа дейін жетеді.

Осындай экстражазықтықтың шетінің бойымен пайда болған металдың кристалдық құрылысының сызықтық ақауын *шеттік дислокация* деп атайды. Дислокацияны осі *AB* сызығы болатын (6.2-сурет) экстражазықтықтың шетіндегі ақауды құбыр сияқты көзге елестетуге болады. Мұндай құбырдың ішінде (дислокацияның ядросында) атомдардың орналасуы шынында белгісіз, ондағы кристалдық тор қатты өзгерген. Ал оның сыртында кристалдың құрылысы өте оңды торға жақын. Шеттік дислокацияның ядросы $\perp$ (оң) немесе $\top$ (теріс) таңбалармен белгіленеді. Егер экстражазықтық кристалдың жоғарғы бөлігінде болатын болса, онда дислокацияны оң, ал

төменгі бөлігінде болатын болса, онда дислокацияны теріс деп атайды. Оң және теріс дислокациялардың арасындағы айырмашылық шартты болып есептеледі. Кристалды аударып біз теріс дислокацияны оң дислокацияға айналдырамыз. Дислокацияның белгісі олардың әсерлесуін талдағанда өте маңызды.

Мөлшері аз жанама кернеуді дислокацияға түсіргенде ол оңай қозғалады. Мұндай жағдайда кішкентай жылжу арқылы экстражазықтық кристалдың толық жазықтығына айналады, ал экстражазықтықтың қызметі көрші жазықтыққа беріледі. Белгілері әр түрлі диклокациялар бір-біріне тартылады, ал белгілері бірдей дислокациялар бір-бірін тебеді. Әр түрлі белгісі бар дислокациялардың жақындауы, олардың өзара жойылуына алып келеді.

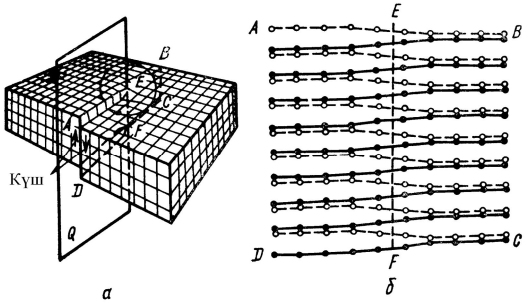
Шеттік дислокация сызығы жанама кернеуге (сыртқы күштің әсерінен пайда болған жанама кернеу бағытына) перпендикулярлы. Ол тағы да сырғу деформациясы жүріп өткен аймақтың шекарасын көрсетеді.

Бұрандалық дислокациялар. 6.3 *а*-суретінде көрсетілгендей, кристалды *AEFД* жазықтығы бойымен тіліп, оның алдыңғы оң жақ бөлігін төмен қарай бір атомдық ара қашықтыққа сырғытайық. Осының нәтижесінде кристалдың жоғарғы бетінде пайда болған баспалдақ, оның бүкіл ені бойымен өтпейді, *F* нүктесінде бітеді. Жай куб кристалдың торы 6.3 *а*-суретте көрсетілгендей болып өзгереді. Кристалдың алдыңғы бетінде (*A* нүктесінің төңірегінде) оң жақтағы атомдар тура бір атомаралық қашықтыққа жылжыған. Бірақ, кристалдың оң бөлігінің сол жаққа қарағанда төмен сырғуы, *A* нүктесінен *F* нүктесіне қарай бірте-бірте азая түседі. Сондықтан үстінгі атомдық жазықтық иіліп, деформацияланады. Сонымен қатар, қалған атомдық жазық қабаттар, *AEFД* жазықтығы бойымен кристалдың оң бөлігін жартылай бір атомаралық қашықтыққа жылжытудың нәтижесінде, бұрандалы баспалдақ тәрізді оралған тұтас бір атомдық жазықтыққа айналады (Геликоид тәрізді).

6.3 *б*-суретте деформация кезіндегі *AEFД* сырғу жағындағы тік жазықтықтардағы атомдардың орналасу сұлбасы көрсетілген. Кристалдың бүйір жағынан қарағандағы сұлбада,

қара дөңгелек нүктелер сырғу жазықтығының (*AEFД*) сол жағында, ал ақ дөңгелектер, оның оң жағында орналасқан атомдарды көрсетеді (6.3 *б*-сурет). Пайда болған баспалдақ штрихталған.

Сұлбада *EF* сызығының оң жағындағы 7, 10 атомдық қатарлар аралығында, сол жағындағы 1, 4 атомдық қатарлар аралығында ақ және қара дөңгелектермен белгіленген атомдар бір деңгейде орналасады. Ал 4, 7 атомдық қатардағы ақ және қара дөңгелектермен белгіленген атомдар *EF* сызығының төңірегінде оның бойымен бұрандалы атомдық баспалдақ құрады.



а *б*

6.3-сурет. *Q* жазықтығы бойынша толық емес ығысудың нәтижесінде *EF* бұрандалы дислокацияның пайда болуының кеңістіктік моделі (*а*) және бұрандалы дислокация аймағында атомдардың орналасуы (*б*)

Сонымен, жоғарыда қарастырылған сырғу деформациясы нәтижесінде *EF* сызығының төңірегінде металдың атомдық-кристалдық құрылысы бұзылып, сызықтық ақау пайда болады. Оның бір өлшемі *EF* сызығымен кристалдың биіктігіне тең, ал қалған екі бағыттағы өлшемдері аз, яғни бірнеше атомаралық қашықтыққа тең. Мұндай ақаудың ішінде орналасқан атомдардың координациялық сандары басқа, атомаралық қашықтықтары, байланыс энергиялары, қасиеттері өзгерген, кристалдық тордың симметриясы мен атомдардың орналасу реті бұзылған. Ал *EF* сызығы сырғу деформациясы жүріп өткен аймақтың шекарасын көрсетеді. Сондықтан *EF* сызығының бойында бұрандалы баспалдақ тәрізді атомдық жазықтықтан

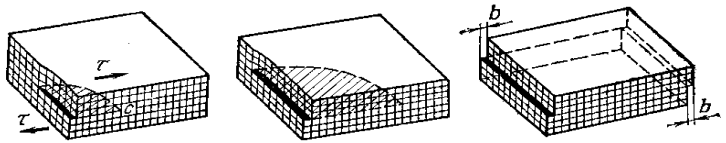
тұратын кристалдың ақауын *бұрандалы дислокация* деп атайды. Іс жүзінде техникада қолданылатын металдар мен қорытпаларда пайда болатын бұрандалы дислокацияның ядросындағы атомдардың орналасуы белгісіз. Бұрандалы дислокация оң немесе сол болуы мүмкін. Егер бұрандалы дислокация сағат тілі бойымен қозғалыста құрастырылса, онда оны оң деп атайды, ал сағат тіліне қарсы қозғалыста құрастырылса, онда оны сол деп айтады.

Шеттік дислокация сияқты, бұрандалы дислокация *AEFД* жазықтығы бойымен кристалдың толық емес ығысуымен пайда болады. Шеттік дислокация бұрандалы дислокацияның айырмашылығы, ол оның ығысу векторына параллельдігі.

Аралас дислокациялар. Кристалдық тордың ішіндегі сырғу деформациясының шекарасы әрқашанда тұйық сызық болып келеді. Оның бір бөлігі кристалдық сыртқы бетімен өтеді. Сондықтан дислокация сызығы кристалдың бетіне шығып, не оның ішінде тұйықталуы керек. Онда, осы дислокация сызығы шеттік және бұрандалық дислокациялардың бір-біріне жалғасқан бөліктерінен тұруы мүмкін.

Жалпы жағдайда сырғу жазығындағы дислокация қисық сызық болып табылады. Оның кейбір өте қысқа бөліктері таза шеттік немесе бұрандалық дислокацияларға жатады. Бірақ оның негізгі бөлігі сырғу векторына параллельді де, перпендикулярлы да емес, кездейсоқ бағытталады. Мұндай дислокацияларды *аралас дислокациялар* деп атайды. Олардың дислокациялық сызықтықтары жазық қисық болып табылады.

6.4-суретте сырғу жазығының шекарасы *AC* қисық сызық болатын аралас дислокация көрсетілген. Мұндай дислокацияның сырғу векторы әрқашан сырғу жазығында жатады.



6.4-сурет. Аралас дислокация ілмегінің сырғуы

Егер сырғу векторы дислокациялық сызықтық жазықтықта жатпаса, онда мұндай дислокацияларды *призмалық дислокациялар* деп айтады.

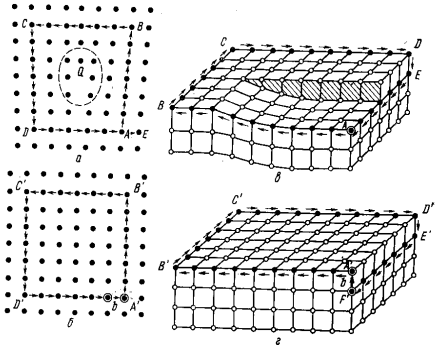
Металдық дислокациялық құрылымының сандық сипаттамасы Бюргерс векторы және дислокациялардың тығыздығы болып табылады.

Бюргерс векторы $\vec{b}$ дислокацияның пайда болуына байланысты кристалдық тордың бұзылу дәрежесін көрсетеді. Ол дислокацияның энергиясын, оған әсер етуші күштерді және дислокацияға байланысты сырғудың бағыты мен шамасын анықтайды. Дислокацияның қозғалу қабілетіне әсер етеді.

Дислокация қоздыратын тордың бүлінгендік дәрежесін бағалау үшін дислокациясы бар болатын жетілмеген кристалды жетілген кристалмен салыстыру керек. Ол үшін Бюргерс қарамын салады. Яғни, кристалдың жетілген аймағымен ақауды жүйелі жолмен атомнан атомға айналып өтетін, нақтылы кристалда, оны шартты етіп бөлетін, еркін түрі бар тұйық қарамды салады.

Шеттік дислокацияның Бюргерс векторын анықтау үшін *ABCDE* қарамын дислокацияның айналасында салайық (6.5*а* -сурет). Ол үшін *A* нүктесінен жоғары қарай, сағат тіліне қарсы қозғалыста пайда болатын, алты атомаралық қашықтықтары бар *AB*, *BC*, *CD* және *DE* кесінділерінен тұратын қарамды салады. Қарам *DEA* кесіндісінде тұйықталады. Бұл *DA* кесіндісі бес атомаралық қашықтықтан тұрады. Дислокациясы жоқ кристалда $D'A'$ кесіндісі басқа кесінділер сияқты алты атомаралық қашықтықтан тұрады.

Өте оңды тордың жазықтығында берілген атомның айналасында салынған периметрмен (6.5*а*-сурет), нақты тордың дислокациясы центрінің айналасында салынған периметрдің (6.5*б*-сурет) айырмасы (*A'B'C'D'*- *ABCD*) Бюргерс векторы деп аталады. Бюргерс векторы сырғанау процесінде сырғу бағытын және мөлшерін көрсетеді.



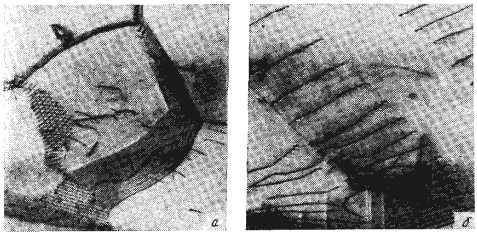
6.5-сурет. Шеттік (*а*, *б*) және бұрандалы (*в*, *г*) дислокациялар үшін Бюргерс векторын анықтау сұлбасы
а, *в* – *нақты кристалл жазықтығының сұлбасы*;
б, *г* – *шүбәсіз кристалл жазықтығының сұлбасы*

Бұрандалы дислокациясы бар кристалда Бюргерс векторын жоғарыда жазылған әдісті қолданып анықтайды (6.5 *в*, *г*-суреті). Шеттік дислокацияның сызығына Бюргерс векторы перпендикулярлы, ал бұрандалы дислокацияның сызығына параллельді болады. Егер Бюргерс қарамы бірнеше дислокацияны қамтитын болса, онда оның мөлшері жеке дислокациялардың Бюргерс векторының геометриялық қосындысына сәйкес келеді. Бюргерс векторының екінші дәрежесі дислокацияның энергиясын және олардың күштік әсерлесуін сипаттайды.

Дислокациялар металдардың кристалдану процесінде вакансиялар тобы «жабылған» кезде және илемді деформациялар мен фазалық айналымдар процестерінде пайда болады. Дислокациялық құрылымның маңызды сипаттамасы болып осы дислокациялардың тығыздығы есептеледі. Дислокациялардың тығыздығы ретінде 1 см^3 көлеміне келетін барлық дислокациялардың қосындысы ұзындығын алады:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln}{V}, \text{ см}^{-2}. \qquad (6.2)$$

Іс жүзінде дислокациялардың тығыздығын металлографиялық үлгіліктің бет ауданының бір бөлігіне (мысалы, 1см^2) келетін дислокациялардың санымен анықтайды. 6.6-суретте темір түйіршіктерінің шекарасында орналасқан дислокацияларды химиялық өңдегенде пайда болатын із көрсетілген.



6.6-сурет. Ниобийдегі (*а*), ×44000 және тоттанбайтын болаттағы (*б*), ×33000 дислокациялар

Дислокациялардың тығыздығы металдың тепе-теңдік күйіне, өңдеу әдісіне, режіміне байланысты. Төменде металдардың күйіне байланысты дислокациялардың тығыздығы (ρ) келтірілген:

қыздырылып өңделген жай монокристалл $10^4 \div 10^6 см^{-2}$;
қыздырылып өңделген поликристалл $10^7 \div 10^8 см^{-2}$;
құйма металл $10^9 \div 10^{11} см^{-2}$;
өте үлкен илемді деформациядан кейінгі металл $10^{11} \div 10^{12} см^{-2}$.

Әдейі өсірілген қысқа жіп тәрізді монокристалда дислокация болмайды, болса біреу ғана болуы мүмкін. Өндірістік жағдайда алынатын кремний мен германий сияқты жартылай өткізгіштердің монокристалындағы дислокациялардың тығыздығы металдарға қарағанда аз ($10^3 \div 10^4$ $см^{-2}$) болады.

Металл мен қорытпалардың барлық техникалық маңызды қасиеттері, дислокациялардың тығыздығына байланысты. Олар поликристалдық материалда жүретін өзгерістердің механизміне, жылдамдығына және бағытына әсер етеді.

Дислокациялардың пайда болуы. Дислокациялардың пайда болу механизмі әлі терең зерттелмеген мәселелердің бірі. Бұл жөнінде зерттеушілерде ортақ көзқарастар қалыптаспаған. Дегенмен, кейбір жұмыс гипотезалары тәжірибе жүзінде дәлелденіп отыр. Дислокациялардың энергиясы шамамен бірнеше электрон-вольт болады. Сондықтан олар термиялық активтену арқылы пайда бола алмайды (нүктелік ақаулар сияқты емес).

Әдетте кристалдану процесі аяқталысымен, металдық моно-және поликристалдарда өте көп дислокациялар кездеседі. Демек, дислокациялар кристалдану шекарасында немесе кристалдың суынуы кезінде пайда болады. Төменде

дислокациялардың пайда болу механизмдері қысқаша қарастырылған.

Өсіп келе жатқан кристалл мен сұйық фазаның шекарасында бұрандалық дислокациялар оңай пайда болады. Әдетте алғашқы кристалдар бұрандалы дислокациялары бар даяр туындының (сұйық металда ерімейтін металл емес фазалардың, т.б. зат түйіршіктерінің) бетінде пайда бола бастайды. Атомдар біртіндеп бұрандалы дислокациялардың баспалдақтарына оңай қосылып, кристалл тез өседі. Нәтижесінде бұрандалы дислокациялар даяр туындылардан өсіп келе жатқан кристалдарға өтеді.

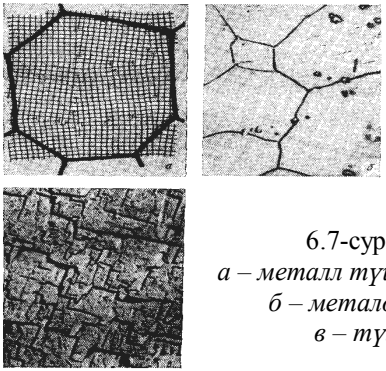
Кристалдар даяр туындылардың бетінде бұрандалық дислокациялар болмаса да өсе алады. Өйткені олардың бетінде басқа да әр түрлі тегіс емес жерлер, ойықтар бар. Осындай жерлерге металдың атомдары тұрақталып, металдың жұқа қабаты өсе бастайды (эпитаксиялық бағытталған өсу). Бірақ, туындының кристалдық торы мен металл торының параметрлері сәйкес емес. Сондықтан эпитаксиялық қабат серпімді деформацияланып, ішкі кернеулер пайда болады. Металдық пленканың (эпитаксиялық қабаттың) қалыңдығы кристалдық шамаға жеткенде, энергетикалық тұрғыдан дислокацияның пайда болуы тиімді бола бастайды. Эпитаксиялық немесе құрылымдық дислокацияның пайда болуына байланысты металдың энергиясы өскенімен, оның серпімді ішкі энергиясы көп азаяды. Екі тордың ұқсастығы аз болған сайын эпитаксиялық дислокациялардың тығыздығы жоғарылайды.

Кристалдану кезінде әр түрлі қоспалардың атомдары жеке кристалдардың ішінде тегіс бөлініп орналаспайды. Концентрациялары әр жерде әр түрлі, тіпті шоғырлана орналасулары да мүмкін. Сондықтан атомдық ара қашықтықтар да әр жерде әр түрлі (бір фаза болса да). Мұндай айырмашылық серпімді кернеуді тудырады. Атомаралық қашықтықтардың айырмасы белгілі бір дәрежеге жеткенде, ішкі кернеулердің азаюы үшін дислокациялар тиімді болады.

Кристалдану кезінде дислокациялар кейбір кездейсоқ себептер нәтижесінде де пайда болуы мүмкін. Мысалы, сұйық

металдың ішіндегі конвекциялық ағымдардың, температуралық градиенттің, т.б. факторлардың әсерімен, өсіп келе жатқан кристалл бірнеше субкристалдарға бөлінуі мүмкін. Субкристалдардың кристалдық торларының бағытталуы бір-біріне жақын, араларындағы бұрыштар бірнеше градустан аспайды. Мұндай шекаралар негізінен дислокациялар тізбегінен тұрады және кіші бұрышты шекаралар деп аталады (6.7- сурет). Әдетте металдың әр түрлі көлемдері біреуі екіншісіне байланысты белгілі бұрышпен бұрылып орналасады. Осы бұрылу бұрыштарының мөлшері бір градусқа дейін (кіші және орташа бұрышты шекаралар немесе субқұрылым) немесе бірнеше он градусқа дейін (үлкен бұрышты шекаралар немесе түйіршіктік құрылым) жетеді. Түйіршіктердің өлшемдерімен салыстырғанда субтүйіршіктердің өлшемдері бір – үш ретке дейін кіші (0,1÷1,0 мкм). Әрбір субтүйіршіктердің шегіндегі торларда бірдей кристаллографиялық бағыттар бар.

Субтүйіршіктерді зерттеуге үлкен мән береді (6.7-сурет). Өйткені субтүйіршіктердің өлшемі және әр түрлі бағытталуы металдың көптеген қасиеттеріне әсерін тигізеді.

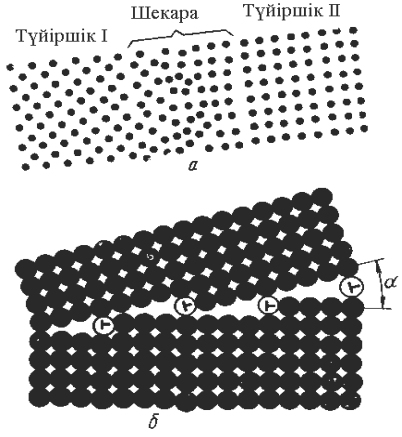


6.7-сурет. Металдың құрылымы
а – металл түйіршіктерінің құрылым сұлбасы;
б – металдың түйіршіктік құрылымы;
в – түйіршіктің субқұрылымы

Жеке кристалдар (түйіршіктер) арасындағы шекара әдетте ені 3÷4 атомаралық ара қашықтыққа жететін өтпелі аймақ болады. Осы шекарада белгілі бір кристаллографиялық бағыты бар кристалдық тор, басқа кристаллографиялық бағыты бар

екінші кристаллографиялық торға ауысады. Сондықтан түйіршіктердің көлеміндегі атомдардың орналасуымен салыстырғанда түйіршіктердің шекарасындағы ауыспалы аймақтарда атомдар басқаша орналасады. Сонымен бірге, техникалық металдарда түйіршіктердің шекарасы бойымен қоспалар шоғырланады. Осы, бұрынғыдан да көп етіп атомдардың дұрыс орналасу ретін ары қарай бұзады. Субтүйіршіктердің шекарасындағы атомдардың дұрыс емес орналасуы бірнеше есе кіші.

Субтүйіршіктер (кіші және орташа бұрышты шекаралар) дислокациялардың белгілі бір жүйемен орналасуынан пайда болады (6.8-сурет).



6.8-сурет. Шекара құрылымының сұлбасы
а – түйіршіктің үлкен бұрышты шекарасы; б – субтүйіршіктің кіші бұрышты шекарасы

Субтүйіршіктердің мөлшері азаюымен және олардың бағытталу бұрыштарының α үлкеюімен металда дислокацияның тығыздығы көбейеді. Түйіршіктердің шекарасында және кристалдың бетінде орналасқан атомдар, олардағы әсерлесу күштері теңелтілмегендігі себебінен, түйіршіктер көлемінде орналасқан атомдармен салыстырғанда тым жоғары потенциалды энергияға ие болады.

Қатты металдың температурасы төмендегенде, вакансиялардың концентрациясы өте тез азая бастайды. Тез суытқанда, металл вакансияларға шектен тыс қанығады. Артық

вакансиялар жиналып, жұқа дискі тәрізді топтар құрады. Әдетте олар тығыздығы жоғары атомдық жазықтарға параллель орналасады. Олардың қалыңдықтары 1-3 вакансиялық қабаттан тұрады. Вакансия дискісінің диаметрі белгілі бір шамадан асқанда, атомаралық тартылыс күштерінің әсерімен оның екі беті жақындап, дискі жабылады. Осының нәтижесінде тұрақты ақау пайда болады.

Металдарды суытқанда, олардың ішіндегі фазалардың, қоспалардың термиялық қысылу коэффициенттерінің әр түрлі болуынан да ішкі кернеулер пайда болады. Кернеу азаюы үшін жаңа дислокациялар пайда болуы керек.

Металдың ішінде тағы да көптеген дислокациялардың көбею, пайда болу көздері бар. Олардың кейбіреуі – металды деформациялау кезінде жұмыс істей бастайды.

Беттік ақаулар. Беттік ақауларға кристалдың сыртқы беті, микрокристалдар мен субкристалдың шекаралары, жазық дислокациялардағы (БЦК және ГТТ торларындағы) атомдардың орналасу ретінің бұзылуы жатады.

Кристалдың беткі қабатында орналасқан атомдардың ішкі атомдарға қарағанда координациялық саны аз және еркін энергиялары көп. Сондықтан тіпті аса таза монокристалдың өзінің беттік ақауы бар болады. Өте таза кристалды шексіз үлкен кристалл деп қарастыруға болады.

Поликристалдық металда микрокристалдар мен субкристалдардың (блоктардың) шекаралары, атомдарының орналасу реті белгісіз, кристалдық торы бұзылған беттік ақаулар болып табылады. Олар металдың еркін энергиясын арттырады. Микрокристалдың өлшемдері аз болған сайын, олардың шекарасының жалпы немесе меншікті (металдың 1 кг салмағына, 1 $см^3$ көлеміне немесе 1 атомына келетін) ауданы көбейе түседі. Шекаралық бетте 1 $мм^2$ ауданның пайда болу жұмысын *меншікті беттік энергия* (*G*) деп атайды (немесе *G* беттік тартылыс күші). Меншікті беттік энергия беттік шекараның еніне байланысты. Шекара неғұрлым кең болса, соғұрлым беттік энергия көп болады. Шекараның ені металл

тазалығы мен көршілес екі кристалл арасындағы сәйкессіздік бұрышына байланысты.

Шекараны кристаллографиялық тұрғыдан сипаттау үшін, олардың екі жағында орналасқан кристалл торларының кеңістіктегі бағытталуын көрсету керек. Металлографияда ол үшін көршілес екі кристалдық тордың индекстері бірдей бағыттары арасындағы бұрышты алады. Оны кристалдық торлардың кеңістіктегі бағытталуының сәйкессіздік бұрышы (α) деп атайды. Сәйкессіздік бұрыш үлкейген сайын, шекараның ені де үлкейеді.

Таза металдарға қарағанда техникалық металдарда (қоспалары көп) шекаралардың ені едәуір үлкен. Қоспа атомдар мен олардың қосылыстары көбінесе шекара бойында орналасып, оны кеңейте түседі.

Шекарада орналасқан атом энергиясы ішкі атомдардікіне қарағанда артық. Координациялық сандары және атомаралық байланыс күштері аз, ара қашықтары үлкен. Атомдардың орналасуы ретсіз. Сондықтан атомдар оңай орын ауыстыра алады. Кристалдардың шекараға жақын беткі қабаттарында вакансияның концентрациясы жоғары болғандықтан, шекаралық диффузияның активтену энергиясы көлемдік диффузиянікіне қарағанда 2-3 есе аз, ал диффузияның жылдамдығы шекара бойында мыңдаған есе үлкен. Атомдардың диффузиялық қозғалу қабілеттерінің мұндай айырмашылығы, сәйкессіздік бұрышы кішірейген сайын азая түседі.

Микрокристалдар (түйіршіктер) сұйық металда немесе қатты күйде фазалық өзгерістер кезінде әр түрлі орталықтан тәуелсіз өсіп, қалыптасады. Ал субкристалдар олардың құрамына кіреді. Сондықтан поликристалдық металдағы микрокристалл торларының сәйкессіздік бұрышы (α) кез келген мәнге ие бола алады. Егер сәйкессіздік бұрышы 10^0-тан аз болса, онда мұндай шекараларды кіші бұрышты, ал одан көп болса үлкен бұрышты шекаралар деп атайды. Кәдімгі металдардағы микрокристалдың шекаралары үлкен бұрышты, ал субкристалдардың (блоктардың) шекаралары кіші бұрышты

шекараларға жатады. Сәйкессіздік бұрышы көп жағдайда бірнеше секундтан немесе минуттан аспайды.

Көршілес екі субкристалл торларының бір-біріне қарағанда бұрылу осі кіші бұрышты шекараның жазығында жатса, онда оны еңкею шекарасы, ал егер бұрылу осі оған перпендикуляр болса бұралу шекарасы деп атайды.

Кіші бұрышты шекаралардың ($\alpha < 1 \div 3^0$) құрылысын бір таңбалы шеттік дислокациялардан тұратын сұлба түрінде көрсетуге болады (5.2-сурет).

Кейбір шекарадағы атомдар көршілес екі кристалл торларына да ортақ болып келеді. Мұндай шекараның екі жағындағы кристалл торлары бір-бірімен үздіксіз жалғасып жатады (сәйкессіздік бұрышы $\alpha \neq 0$). Оларды *когерентті* шекаралар деп атайды. Мысалы екі егіз кристалдың торлары бір-бірінің айнадағы бейнесі тәрізді орналасады. Олардың шекарасы айнадағы шағылысу жазықтығына сәйкес және ол когерентті шекараға жатады.

Шекаралардың сәйкессіздік бұрышы үлкейген сайын олардың төңірегіндегі кристалдық тордың деформациясы артып, ішкі кернеулері көбейеді. Сондықтан, шекараның және тұтас металдың еркін энергиясы артады.

Қазіргі кезде үлкен бұрышты кристалдардың пайда болуы мен олардың құрылысы туралы теория жоқ. Бірақ, шекаралардың атомдық құрылысын иондық проектордың және дифракциялық электрондық микроскоптың көмегімен тікелей тәжірибе жүзінде зерттеуге мүмкіндік туып отыр. Сондықтан, үлкен бұрышты шекаралардың атомдық құрылысының модельдерін (үлгілерін) жасау туралы әр түрлі идеялар ұсынылып отыр. Кез келген теорияда шекаралардың негізгі ерекшеліктері мен қасиеттері өздерінің толық сипаттамаларын табулары керек. Тікелей тәжірибе көрсеткендей, шекаралардың ені 1÷2 атом диаметріне тең. Ал оның энергиясы, шекара бойындағы диффузияның жылдамдығы, шекараның өзінің жылжу жылдамдығы және шекара бойымен деформация кезінде сырғу жылдамдығы сияқты қасиеттері кристалдардың сәйкессіздік бұрышымен байланысты болады. Сондықтан

шекаралар аморфты емес, олардың құрылысы көршілес кристалдардың өзара бағытталуына байланысты болуы керек.

Көлемдік ақаулар. Көлемдік ақаулар-атомдық масштабпен алғанда, микроскопиялық ақауларға жатады. Олардың өлшемдері барлық үш бағытта атомаралық қашықтықтармен салыстырғанда әлдеқайда үлкен.

Көлемдік ақауларға металдың ішіндегі қуыстар, жарықтар, металл емес фазалардың микрокристалдары, қатты металда ерімейтін әр түрлі қалдықтар жатады. Ішкі микроқуыстар негізінен, кристалдану кезінде металл көлемінің азаюынан дендритті кристалдардың ось аралығында және шекараларда бөлініп шыққан газ көбіршіктерінің қалып қоюына байланысты пайда болады. Көптеген газдардың (H, N, Co, т.б.) қатты металдағы еру шегі сұйық металдағыға қарағанда ондаған, тіпті жүздеген есе аз. Сондықтан кристалдану шекарасында бөлінген газдар жиналып, газ көпіршіктерін құрады. Бірақ олар құйма бетіне шығып үлгермей, қатайған металдың ішінде қалып қояды. Бұл қуыстар металдың тұтастығын бұзып, сапасын төмендетеді. Олардың ішкі беттерінде беттік ақауларға тән мына кемшіліктер орын алады: кристалдық тордың симметриясы бұзылып серпімді деформацияланады, үлкен серпімді кернеулер пайда болып, металдың еркін энергиясы артады.

Ішкі сызаттар мен жарықтар металды қатты күйде тез суытқанда пайда болады. Себебі, қатты күйде жүретін фазалық өзгерістер кезінде металл көлемінің өзгеруіне байланысты үлкен құрылымдық кернеулер пайда болады. Бұрыңғы және жаңа фазалардың кристалдық торлары деформацияланады. Сонымен бірге, қатты металл суығанда, оның беткі және ішкі қабаттары әр түрлі жылдамдықпен суиды. Металдың беткі қабаты тез суитындықтан, оның көлемі тез азаяды. Ал ішкі қабаттары өте тез суып үлгермейтіндіктен, көлемінің кішіреюі баяу жүреді. Сондықтан металл бұйымның беткі және ішкі беттерінде әр таңбалы термиялық кернеулер пайда болады. Егер құрылымдық және термиялық кернеулердің шамалары металдың микрокөлемінде оның беріктік шегінен асса, онда ішкі жарықтар пайда болады.

Металл емес фазалар мен қалдықтарға, металл құрамында кездесетін әр түрлі қоспалардың бір-бірімен, негізгі және қоспалаушы элементтермен қосылыстары (сульфидтер, тотықтар, фосфидтер, құрылысы мен химиялық құрамы белгісіз фазалар), сонымен бірге қатты металда қалып қалған қосымша материалдардың (отқа төзімді кірпіштің, тотық қабыршықтардың, т.б. заттардың) түйіршіктері жатады. Металл емес фазалар мен қалдықтардың атомдық-кристалдың құрылыстары көп жағдайда белгісіз, негізгі металл құрылысына ұқсамайды. Кристалдың торлары, олардың симметриясы, атомаралық байланыс түрі мен энергиясы басқа. Сондықтан мұндай ақаулар төңірегіндегі кристалдық тордың өзгерістері үлкен және фазааралық шекаралардың құрылысы да күрделі болып келеді.

Бақылау сұрақтары.

1. Шеттік дислокация деп қандай ақауды айтады ?
2. Бұрандалы дислокация деп қандай ақауды айтады ?
3. Аралас дислокация деп қандай ақауды айтады ?
4. Бюргерс векторы дегеніміз не ?
5. Бюргерс векторын қалай анықтайды ?
6. Дислокациялар қалай пайда болады ?
7. Беттік ақаулар деп қандай ақауларды айтады ?
8. Көлемдік ақаулар деп қандай ақауларды айтады ?
9. Меншікті беттік энергия деп нені айтады ?
10. Субтүйіршіктер дегеніміз не ?

6.3. Металдардың макро- және микроқұрылысы

Кез келген металл бір, екі немесе одан да көп кристаллиттерден (түйіршіктен) тұруы мүмкін. Осыған байланысты материалтануда монокристалл, бикристалл және поликристалдар деген ұғымдар қолданылады. Жоғарыда айтылғандай, техникада пайдаланылатын металл немесе қорытпадан жасалған бұйымдардың көпшілігі поликристалды заттарға жатады.

Құрылым – деп металл немесе қорытпаларда фазалардың сәйкестігі өзара орналасу өзгешелігін, олардың түрін және өлшемін айтады.

Қорытпаның *құрылымдық құрамы* – деп құрылымы бірдей бірақ өзіне тән ерекшелігімен байқалатын қорытпаның оңашаланған бөлімін айтады.

Металдың құрылымын *макроқұрылым* және *микроқұрылым* деп ажыратады. Макроқұрылым деп құралсыз көзбен немесе кішкене үлкейтумен көрінетін металл және қорытпа құрылысын айтады. Микроқұрылым деп микроскоптың көмегімен көп үлкейту арқылы қаралатын металл және қорытпа құрылысын айтады.

Макроқұрылымды макрошлифте зерттейді. Оларды алу үшін ірі дайындамадан (құймакесектен немесе соғылмадан, т.б.) немесе бұйымнан үлгіні кесіп алады. Осы үлгінің бетін тегістеп ажарлайды, ал содан кейін арнайы реактивпен өңдейді.

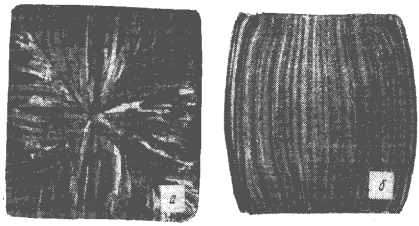
Макрошлифті зерттегенде мыналарды анықтауға болады:

– құйылған металда түйіршіктердің орналасуын және түрін (6.9 *а*-сурет);

– соғылмаларда талшықтың бағытын (деформацияланған кристаллиттер) (6.9 *б*-сурет);

– металл тұтастылығының бұзылуын (шөгістік, борпылдақтық, газдың көпіршіктер, қаяу, жарық, т.б.);

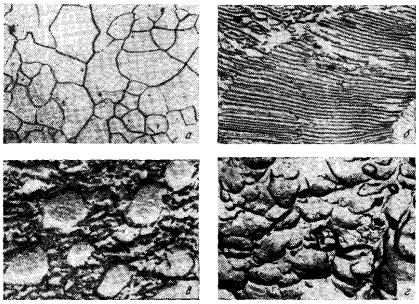
– термиялық, ал тағы да химия-термиялық өңдеумен (көміртектендіру, азоттандыру және басқа) жасалған немесе кристалданумен шақырылған қорытпаның химиялық біртекті еместілігін.



6.9-сурет. Құйылған мыстан және соғылған болаттан алынған макроқұрылым

Микроқұрылым фазалардың өзара орналасуын, олардың түрін және өлшемін көрсетеді (6.10-сурет). Микроқұрылымды микрошлифте зерттейді. Бұл үшін зерттелетін шалаөнімнің

немесе тетіктің белгілі бір бағытынан үлкен емес үлгіні кесіп алады. Кесілген үлгіні ажарлайды, әрлейді және арнайы реактивпен өңдейді.



6.10-сурет. Микроқұрылым
а – таза темірдікі, ×250;
б – 0,8% С бар болаттыкі, ×250; в - 0,6% С бар болаттыкі, ×10000; г – болат сынығының микрофрактографиясы ×10000

Металдың микроқұрылымын сәулелік немесе электронды микроскоппен қаралады. Электронды микроскопты қолданғанда микрошлифтің орнына фольга сияқты арнайы материалды қолданады.

Оптикалық микроскоптың дәл көрсету мүмкіншілігі, яғни оның көмегімен айырылып танылатын құрылым тетіктерінің ең кіші мөлшері 0,2 мкм (200 нм) шамасынан аспайды. Оптикалық микроскоптың пайдалы үлкейтуі шамамен 2000 ретке жетеді. Осыдан үлкен үлкейтуді қолдану пайдалы емес, өйткені құрылымының жаңа, тым кіші тетіктері көрінуге жеткілікті болмайды. Суреттің масштабы тек қана өзгереді, себебі сәуленің толқындық табиғатымен анықталатын көрсету қабілеттілігі өзгермейді.

Электронды микроскоптың көрсету қабілеттілігі оптикалықпен салыстырғанда едәуір жоғары. Өте кішкентай толқынның ұзындығына $\left[(0{,}04 \div 0{,}12)10^{-1} нм\right]$ ие болатын электронды сәулені қолдану өлшемі 0,2 – 0,5 нм дейін болатын зерттелетін құрылымның тетігін айыруға мүмкіндік береді.

Жарық өтетін электронды микроскоптар ең көп тараған. Оларды қолданғанда жұқа фольга түрінде болатын зерттелетін материалдар арқылы электрондардың тасқыны өтеді. Фольгалық

материалда электрондардың бірдей емес әлсізденуі нәтижесінде керекті сурет алынады.

Электронды микроскоп металдың жіңішке құрылымын (субқұрылымын) толық зерттеуге мүмкіншілік жасайды. Электронды микроскоптың ең маңызды жетістігі болып кристалдық құрылымының ақауларын тура қарау мүмкіншілігінің барлығы есептеледі.

Соңғы жылдары металдың металлургиялық сапасын бағалауға, қирау процесінің заңдылықтарын зерттеуге, қирауға құрылымдық, технологиялық және басқа факторлардың әсерін зерттеуге фрактография әдісі кеңінен қолданылады. Фрактография – деп омырық құрылымы туралы білімді айтады.

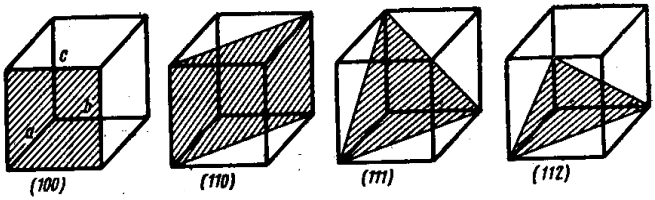
Металдың қирау нәтижесінде пайда болатын бетті омырық деп түсінеді. Омырықтың түрі тектеу жағдайымен, металдың (қорытпаның) кристаллографиялық құрылысы және микрокұрылымымен, оны балқыту технологиясымен, қысым және термиялық өңдеумен, құрылым жұмыс істейтін температура және ортамен анықталады.

Макро- және микродеңгейінде (50 мың еселі және оданда жоғары үлкейтуде) омырықты зерттейді. Омырықты көзбен шолу әдісімен, ал тағы да көп үлкейтусіз сәулелік микроскоппен зерттеуді *фрактография* – деп атайды. Электронды микроскоппен омырықтың жіңішке құрылым ерекшеліктерін зерттеуге микрофактография деген ат берген.

6.4. Атомдық жазықтық пен бағытты кристаллографиялық белгілеу

Кристаллографиялық жазықтық пен бағытты табу үшін кристаллографиялық осьтерді пайдаланады. Торұяның бір бұрышына координаттық осьтің бас жағын орналастырады, ал кристаллографиялық осьтер элементарлы тор қырының үстімен жүреді. Координатты ось $+x$ қараушыға қарай бағытталады, координатты ось $+y$ көлденең бағытпен оңға қарай бағытталады, ал координатты ось $+z$ жоғары қарай бағытталады.

Кристаллографиялық жазықтықтың кеңістікте орналасуын координатты осьте оны кесетін кесіндіні пайдалана отырып табады. Әрбір кристаллографиялық осьтің бойымен өлшем бірлігі ретінде осы осьтің бағытындағы тордың периодын қабылдайды немесе элементарлы тор қырының ұзындығын қабылдайды (*a*, *в*, *с*). Мысалы 6.11-суретте штрихталған жазықтықтар *x*, *y*, *z* осі бойымен мынадай кесінді мөлшермен кесіледі: $(1\ \infty\ \infty)$ (6.11 *а* -сурет); $(1\ 1\ \infty)$ (6.11- *б* сурет); (111) (6.11 *в*-сурет); (11½) (6.11 *г*-сурет).



а) *б*) *в*) *г*)

6.11-сурет. Кристаллографиялық жазықтықтар

Математикалық есептеулерде бөлшекті сандармен және шексіз сандармен жұмыс істемеу үшін кристаллографиялық осьте жазықтықпен қиятын кесіндіге кері мөлшерлерді қолданады. Сонда осы мөлшерлердің қатынасын үш ең кіші бүтін сандар қатынасына келтіреді. Дөңгелек жақшаның ішіне алынған және кристаллографиялық оське қатынасты берілген жазықтықтың бағытын сипаттайтын осындай үш сандар (*h k l*) жиынтығын жазықтық индексі деп атайды. 6.11-суреттегі штрихталған жазықтықтарда мынадай индекстер бар:

$$\left(\frac{1}{1}\ \frac{1}{\infty}\ \frac{1}{\infty}\right) = (100);\ \left(\frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{\infty}\right) = (110);\ \left(\frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\right) = (111);\ \left(\frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{2}{1}\right) = (112).$$

Егер жазықтық кристаллографиялық осьтің теріс мөлшерін қиып өтетін болса, онда индекстің үстіне алу белгісін қояды.

Белгілі индекстер жиынтығы, мысалы (110), кеңістікте жалғыз жазықтықтың бағытын сипаттамайды, ол координаттың басынан бір жақта орналасқан параллельді ұқсас

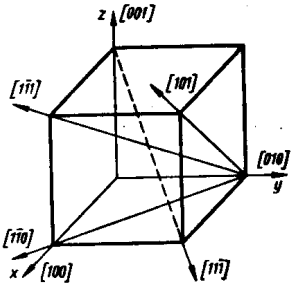
жазықтықтарды сипаттайды. Мысалы, штрихталған жазықтық (110)-ге параллельді x және y осінде екі немесе үш тор периодына тең кесіндіні қиятын жазықтықтарды көрсетсек, яғни жазықтықтар $(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{\infty})$ және $(\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{\infty})$, онда олардың екеуі де параллельді ұқсас жазықтықтар (110)-ге жатады.

Егер барлық индекстерді кері белгіге ауыстырсақ, мысалы (110)-дың орнына $(\bar{1}\bar{1}0)$, онда жаңа индекстер бұрынғыға ұқсас параллельді жазықтықтың бағытын сипаттайды. Бірақ жаңа жазықтықтар координатты осьтің басынан екінші жақта орналасады. Координаттардың басын еркін таңдайтын болғандықтан ($h\ k\ l$) және ($\bar{h}\bar{k}\bar{l}$) индекстері ұқсас, параллельді бірдей жазықтыққа жатады. Жазықтық, таңдалған координаттың басынан өтетін жағдайда оның индексін анықтау үшін координаттың басын торұяның басқа шынына ауыстыру немесе біріншіге параллельді көрші жазықтықты қарау керек.

Атомдық құрылыстары бірдей бірақ параллельді емес жазықтықтарды эквивалентті жазықтықтар деп атайды. Мысалы, параллельді емес кристаллографиялық эквивалентті жазықтықтар (100), (010) және (001) оларға параллельді жазықтықтармен $(\bar{1}00)$, $(0\bar{1}0)$ және $(00\bar{1})$ кубты құрайды. Кубтың жиынтық алты кристаллографиялық эквивалентті жазықтықтарын (қырларын) фигуралы жақшаға алынған кез келген бір жазықтықтың (қырдың) индексімен белгілейді. Мысалы, {100} немесе {001} және т. б. Октаэдрлік сегіз кристаллографиялық эквивалентті жазықтықтарда (111), $(\bar{1}11)$, $(1\bar{1}1)$, $(11\bar{1})$, $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$, $(\bar{1}\bar{1}1)$, $(\bar{1}1\bar{1})$, $(1\bar{1}\bar{1})$ мынадай бір индекспен {100} белгілейді. Ромбалық додаэкадрдің он екі кристаллографиялық эквивалентті жазықтықтарын (110), (101), (011), $(0\bar{1}1)$, $(01\bar{1})$, $(\bar{1}01)$, $(10\bar{1})$, $(\bar{1}10)$, $(1\bar{1}0)$, $(\bar{1}\bar{1}0)$, $(\bar{1}0\bar{1})$, $(0\bar{1}\bar{1})$ мынадай бір индекспен белгілеуге болады {110}.

Кеңістік торында тағы да кристаллографиялық бағыттарды анықтайды.

Қандай да бір ұқсас параллельді түзудің бағытын анықтау үшін түзу ретінде координаттың басы арқылы өтетін түзуді таңдайды. Бұл түзу сызықтың басында бір-біріне қарағанда белгілі ара қашықтықта болатын атомдар орналасқан. Жоғарыда айтылған бағыттың кеңістіктегі орнын кез келген атомның координатасымен табуға болады. Сондықтан бағыттардың индексі ретінде үш өзара жәй бүтін санды алады. Осы сандар қарайтын түзуге жататын кез келген атомның координатасына пропорционалды. Өлшем бірлігі ретінде тордың периодын қабылдайды. Нүкте координатасының алынған мәнін үш ең кіші бүтін сан қатынасына әкеледі. Квадратты жақшаға [*u v w*] алынған осы сандар барлық ұқсас параллельді бағыттың және берілген бағыттың индексі болады (6.12-сурет). Мысалы, мынадай индекстер [100], [010] және [001] кристаллографиялық осьтікі болады. Параллельді емес жиынтық эквивалентті кристаллографиялық бағыттарды сынық жақшаға алынған бағыттардың біреуінің индексімен белгілейді. Мысалы, куб қырларының жиынтық алты бағытын [100], [010], [001], $[\bar{1}00]$, $[0\bar{1}0]$, $[00\bar{1}]$ мына бір индекспен <100> белгілеуге болады. Куб қабырғасы диагоналының барлық бағыты жиынтығын <100> индекстерімен белгілеп, ал кубтың кеңістік диагональдарының барлық жиынтық бағытын <111> индексімен белгілеуге болады.



6.12-сурет. Кубтық торлардағы кристаллографиялық бағыттардың индексі

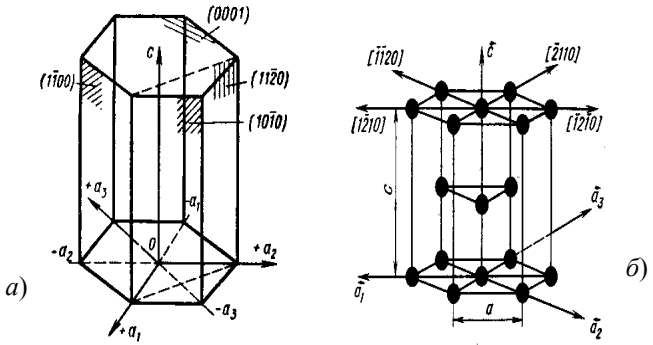
Гексагональды торда координаттардың басын торұя тобының центріне орналастырады. Кристаллографиялық остер *x* және *y* осы центрден торұяның алты бұрышты табанының шыңы

арқылы жүргізіледі. Олар біріне қарай бірі 120^0 бұрышпен орналасады, ал *z* осі гексональді призманың тік осі болады. *x* және *y* осі бойымен өлшеу бірлігі ретінде тордың периоды *a*-ны қабылдайды, ал *z* осі бойымен *c* периодын қабылдайды.

Кубтық тордағы сияқты, гексагональды торда жазықтық индексі болып үш кристаллографиялық осьте жазықтықпен кесілетін кесіндігі кері ең кіші бүтін сандарға келтірілген мөлшерлер есептеледі. Мысалы, $x(a_1)$ және y (a_2) осіне параллельді және z (c) осін тордың бір периодына тең кесіндімен қиятын элементарлы тордың жазықтық негізін мынадай индекспен белгілейді ($\frac{1}{\infty}\frac{1}{\infty}\frac{1}{1}$), яғни (001) (8.8 *а*-сурет). *x* осінде тордың бір периодына тең кесіндінің қиятын призманың алдыңғы тік қабырғасының индексі мынадай болады ($\frac{1}{1}\frac{1}{\infty}\frac{1}{\infty}$), яғни (100). *x* және *y* осінде тордың бір периодына тең кесіндіні қиятын және *z* осіне параллельді призманың штрихталған бүйір қабырғасында (6.13-сурет) мынадай индекс ($\frac{\bar{1}}{1}\frac{1}{1}\frac{1}{\infty}$) бар болады, яғни ($\bar{1}10$).

Призманың жоғарыда қаралған жазықтықтары (100) және ($\bar{1}10$) құрылымды эквиваленті. Бірақ оларда кубтық тордағы сияқты ұқсас индекстер жоқ. Бұл қолайсыз, өйткені үйлескен үш индекс бойынша параллельді емес жазықтықтарды құрылымымен эквиваленті екендігін айту қиын. Сондықтан гексагональды торда төрт индексті жүйені жиі қолданады.

x және *y* осьтеріне 120° бұрышпен орналасқан қосымша – $u(a_3)$ бағытын *x* және *y* бағыттарының арасында орналастырады. Басқа индекстермен қатар *i* индексі *u* осінде кесілетін кесіндіге кері мөлшерді анықтайды. Мысалы, алдыңғы тік қабырғаның мынадай индекстері бар ($\frac{1}{1}\frac{1}{\infty}\frac{\bar{1}}{1}\frac{1}{\infty}$), яғни $10\bar{1}0$, ал бүйірлік штрихталған қабырғада мынадай индекстер бар $\left(\frac{\bar{1}}{1}\frac{1}{1}\frac{1}{\infty}\frac{1}{\infty}\right)$, яғни $\left(\bar{1}100\right)$.



а) *б*)

6.13-сурет. ГТТ торындағы кристаллорафиялық жазықтықтар (*а*) мен бағыттар (*б*)

Бағыттардың индекісін анықтау үшін гексагональды торда тағы да төрт индексті жүйені жиі қолданады. Ол үшін бағытты координаттың басына өзіне праллельді етіп көшіреді және кез келген оның нүктесінен төрт кристаллографиялық оське перпендикуляр түсіреді (6.13 *б*- сурет).

Әр түрлі жазықтықтарда атомдардың орналасу тығыздығы бірдей еместігі оңай көруге болады. Мысалы, КЦК торындағы жазықтық (100) құрамына тек 1 атом кіреді ($1/4 \times 4$), ал ромбалық додекаэдр жазықтығы (110) құрамында 2 атом болады (тордың шыңында орналасқан атомдар 1 атом болып есептеледі ($1/4 \times 4$)) және бір атомды кубтың центрінде орналасқан атом қосады. БЦК торында, атомдары ең тығыз орналасқан жазықтық болып октаэдрлік жазықтық (111) есептеледі, ал КЦК торында ондай жазықтық болып (110) жазықтығы саналады.

Әр түрлі жазықтық және бағыттарда атомдардың тығыздығының бірдей еместігі себебінен, әр кристалдың көп қасиеттері (химиялық, физикалық, механикалық) тордың бағыттарына қатысты дайындаманы кесуге байланысты болады. Осындай әр түрлі кристаллографиялық бағыттарда монокристалдың қасиетінің бірдей еместілігін – *анизотропия* деп атайды.

Қасиеттері бағытпен байланысты емес аморфты денелерге (шыны, пластмассалар т.б.) қарағанда кристалдың өзгешілігі оның анизотропты дене екендігінде. Техникалық металдар поликристалды болады, яғни сандары көп анизотропты кристаллиттерден (түйіршіктен) тұрады. Көп жағдайларда кристаллиттер (түйіршектер) біреуі екіншісіне қатысты статикалық тәртіпті бағытталмайды. Сондықтан түйіршіктердің қасиеттері барлық бағытта азды-көпті бірдей болады, яғни поликристалды дене жалған изотропты дене деп есептеледі. Егер кейбір бағытта кристаллиттерде (түйіршіктерде) басымды бірдей бағыт бар болса, онда металдың қасиеттерінің жорымалды бірдейлігі кейбір бағытта сезілмейді. Осындай бағыттылық немесе текстура белгілі дәрежеде (толық емес) жасалынады (мысалы, едәуір суық деформацияның нәтижесінде). Мұндай жағдайда поликристалды металл анизотропиялық қасиетке ие болады.

6.5. Металдың серпімді және илемді деформациясы

Деформация мен кернеулердің түрлері. Денеге сыртқы күштерді түсіргенде деформация пайда болады, яғни дененің пішіні мен өлшемі өзгереді. Деформацияның ең қарапайым түрлері болып созылу мен қысылу, (6.14-сурет), ығысу (6.15-сурет), бұралу және иілу саналады. Деформация механикалық әсер берумен қатар жылулық, магниттік, электрлік және басқа әсерлермен шақырылуы мүмкін.

Абсолюттік деформация (үлгіліктің абсолюттік ұзаруы) мына формуламен анықталады (6.14-сурет): $\Delta l = l^* - l_o$, мұндағы l_o – үлгіліктің бастапқы ұзындығы; l^* - үлгіліктің соңғы ұзындығы. Шартты салыстырмалы деформацияны ε және дәл деформацияны *е* бір-бірінен айыра білу қажет. Салыстырмалы ұзару немесе деформация (ε) абсолютті ұзарудың үлгіліктің ұзындығына қатынасымен табылады. Деформация процесінде үлгіліктің ұзындығы өзгереді. Салыстырмалы деформацияны анықтаған кезде үлгіліктің ұзындығы ретінде, оның бастапқы

ұзындығын l_o қабылдаған ыңғайлы. Онда мұндай салыстырмалы деформация шартты деп аталып мына формуламен анықталады:

$$\varepsilon = \Delta l / l_o. \qquad (6.3)$$

Егер $l^* > l_o$ болса, онда ε оң мөлшер болып, деформация созылу деформациясы деп аталады. Егер $l^* < l_o$ болып ε теріс мөлшер болса, онда деформация қысылу деформациясы деп аталады.

Шартты деформация аддитивті мөлшер болып саналмайды, яғни

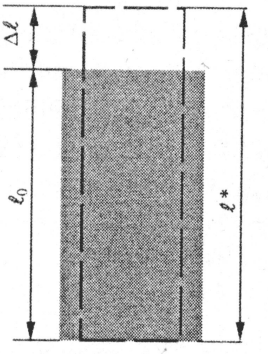
$$\varepsilon \neq \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \qquad (6.4)$$

Дәл деформация үлгілікті созған кезде ұзындықтың өзгермелі болуын ескереді, яғни

$$e = \int_{l_o}^{l^*} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l^*}{l_o} = \ln(1+\varepsilon) \qquad (6.5)$$

және аддитивті мөлшер болып саналады, яғни

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \qquad (6.6)$$



6.14-сурет. Созу (қысу) деформациясы

Созылу (қысылу) бағытындағы салыстырмалы деформациясымен ε қатар көлденең бағыттағы деформация ε' пайда болады. Егер деформация серпімді болса, онда көлденең деформацияның бойлық деформацияға қатынасы тұрақты болады, яғни

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon;\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z, \qquad (6.7)$$

мұндағы ν – Пуассон коэффициенті.

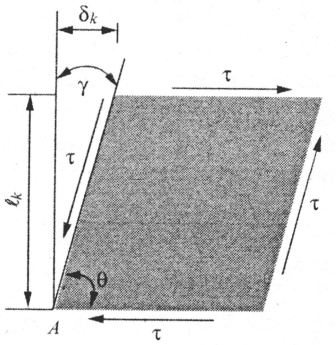
Жанасу кернеуі τ әсер етіп ығысу деформациясы пайда болған кезде (6.15-сурет) *A* нүктесіндегі тік бұрыш сүйір бұрыш *θ* болып өзгереді. Сонда *A* нүктесіндегі ығысу деформациясы γ былай анықталады:

$$\gamma = \pi/2 - \theta, \qquad (6.8)$$

мұндағы π/2 және *θ* – сәйкесті деформацияға дейінгі және деформациядан кейінгі *A* нүктесіндегі бұрыштар. Әдетте созылу (қысылу) деформация сияқты ығысу деформациясы мөлшері бойынша аз болатындықтан мынадай аппроксимацияны қолдануға $\mathrm{tg}\gamma \approx \gamma$. Мұндай жағдайда ығысу деформациясы γ мына формуламен анықталады:

$$\gamma = \mathrm{tg}(\pi/2 - \theta) = \delta_к/l_к, \qquad (6.9)$$

мұндағы $\delta_к$ және $l_к$ 6.15-суретте көрсетілген.



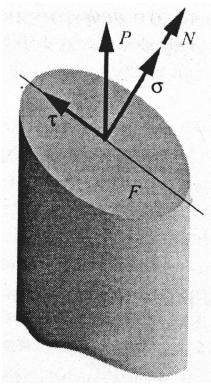
6.15-сурет. Ығысу деформациясы

Түсірілген сыртқы күштің *P* әсерінен денеде деформацияға кедергі көрсететін ішкі күш пайда болады. Осы ішкі күштің өлшемі болып кернеу саналады. Кернеу деп дененің берілген қимасының аудан бірлігіне келетін ішкі күшті айтады.

Кернеулер үлгілік қимасының жазықтығындағы нормаль бойынша бағытталған нормальды σ, яғни созу (таңбасы бойына оң) немесе қысу кернеулері (6.14-сурет) және нормальды кернеулерге перпендикулярлы бағытталған жанама кернеулер τ, яғни опыратын немесе ығыстыратын кернеулер (6.15-сурет) болып екіге бөлінеді. Жиі түсірілген күш *P* үлгіліктің таңдалған қимасының жазықтығына перпендикулярлы емес (6.16-сурет).

Дәл кернеуді шартты кернеуден айыра білу керек. Дәл кернеулерді (нормальдылар S және жанамалылар t) қима ауданының дәл мәніне қатысты есептеп анықтайды, ал шартты кернеулерді (сәйкесті σ және τ) қима ауданының бастапқы мәніне қатысты есептеп анықтайды.

Пайда болу себебіне байланысты кернеулерді, сыртқы күштің әсер етуі себеп болатын және осы күшті алғанда жоқ болатын ішкі кернеулер деп және сыртқы күштің әсерінсіз дене шегінде пайда болатын және теңестіретін ішкі қалдық кернеулер деп екіге бөледі. Қыздыру мен салқындату біркелкі етіп жүргізбеудің себебінен материалдың беткі және ішкі қабаттары біркелкі емес ұлғаятын және қысылатын болатындықтан қалдық кернеулер термиялық болуы мүмкін. Фазалық қалдық кернеулер, металда фазалық айналым пайда болған кезде деформацияның біркелкі жүрмеуі нәтижесінде пайда болады.



6.16-сурет. P күшін F ауданына түсірген кезде пайда болатын тік (нормальды) және жанама кернеулер

Гук заңы. Сыртқы күштің әсері тоқтатылғаннан кейін дененің пішініне деформацияның әсер етуі жойылатын болса, онда ондай деформацияны *серпімді деформация* деп атайды. Серпімді деформация металдың құрылымында және қасиетінде көрінетін қалдықты өзгерісті болдырмайды. Түсіретін күштің ықпалымен салыстырмалы шамалы ғана және қайтатын атомдардың жылжуы пайда болады. Монокристалды созғанда атомдардың арасындағы ара қашықтық үлкейеді, ал қысқанда

атомдар жақындайды. Сыртқы күштің әсері тоқтағанда, атомаралық кулондық байланыс күштері атомдарды өз орындарына, кристалдық тордың түйіндеріне қайтарады. Кристалдық тордың серпімді деформациясы жайылады.

Егер сыртқы әсер етуші күш P, үлгінің көлденең қимасының ауданы F_o, оның бастапқы ұзындығы l_0, ал өзгермелі ұзындығы l_1 болса, онда күштің әсерінен пайда болатын кернеу σ мынаған тең болады:

$$\sigma = P/F_o.$$

Металл серпімді деформацияланғанда үлгінің салыстырмалы ұзаруы немесе деформациясы $\varepsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100\%$ сыртқы күш кернеуіне тура пропорционал болады $\sigma = E\varepsilon$, мұндағы E (Н/мм^2) – Юнг (серпімділік) модулі, металдық серпімді деформацияға қарсыласу қабілетін сипаттайды. Ол металдың атомаралық байланыс күштерімен және оның атомдық кристалдық құрлысымен анықталатын тұрақты шама. Юнг модуліне металл құрылысының әсері аз.

Сонымен қатты денеге механикалық күшті түсірген кезде алдымен серпімді деформация жүреді. *Серпімді деформация* деп күшті алған кезде жоқ болып кететін және дененің өлшемі мен пішінін қайтымды өзгертетін деформацияны айтады. Осындайда қайтпайтын деформация мөлшері бойынша өте кішкентай болуы мүмкін. Бірақта қайтпайтын деформацияның бар болуы *серпімді гистерезис* деп аталатын құбылыспен байқалады. Изотропты дене үшін элементарлы Гук заңына сәйкесті, сыртқы күш түсетін бағыттағы серпімді деформация кернеумен былай сызықты байланысқан:

$$\sigma = E\varepsilon. \qquad (6.10)$$

Жанасу кернеуі әсер еткен кезде пайда болатын ығысу деформациясы үшін (6.15-сурет) элементарлы Гук заңын жоғарыда жазылған (6.10) теңдеуі сияқты қарапайым түрде былай бейнелеуге болады:

$$\tau = G\mathrm{tg}\gamma, \qquad (6.11)$$

мұндағы G – ығысу модулі; γ – ығысу деформациясы; әдетте $\mathrm{tg}\gamma = \gamma$.

Юнг модулі мен ығысу модулі арасындағы байланыс Пуассон коэффициенті арқылы былай анықталады:

$$G = E/2(1 + \nu) \qquad (6.12)$$

Атомдық деңгейдегі серпімді деформацияда денеге түсірілген күштің әсерінен көршілес атомдардың арасындағы ара қашықтық қайтымды өзгереді. Мысалы, күш түсетін ось бойымен атом арасындағы ара қашықтық үлкейеді, ал күшті алғаннан кейін атомаралық күштер атомдарды бастапқы жайға қайтып алып келеді. *Серпімділік модулі Е материалдың серпімді деформацияға кедергі жасауын сипаттайды: серпімділік модулі қаншалықты көп болса, соншалықты берілген күште деформация аз болады*.

(6.10) және (6.11) формулалары түріндегі Гук заңы жуықты түрде бір өлшемді күйге дұрыс. Үш өлшемді жағдайда (6.10) және (6.11) формулалары Гуктың қорытындыланған заңына өзгертіледі. Осы қорытындылаған Гук заңында кернеу мен деформацияның тензорларын қолданады. Қатты дененің берілген нүктесіндегі деформацияланған күйді екінші ранглі тензорды құратын тоғыз мөлшер, яғни мынадай деформация тензоры сипаттайды (екінші тарауды қараңыз):

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}. \qquad (6.13)$$

(6.13) тензоры симметриялы тензор $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ болып саналады, яғни тензор деформациясының тоғыз сыңарларынан тек алтауы бір-бірінен тәуелді емес болады. Тензордың басты диагоналындағы сыңарлар ұзару мен қысылуды, ал тензордың басқа сыңарлары ығысу деформациясын бейнелейтіндігін айта кеткен жөн.

Дененің әрбір нүктесіндегі кернеулі күй екінші ранглі тензордың сыңарлары болып саналатын тоғыз мөлшерлермен σ_{ij} (екінші тарауды қараңыз), яғни мынадай механикалық кернеудің тензорымен сипатталады (6.17-сурет):

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \qquad (6.14)$$

(6.14) тензоры симметриялы тензор $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ болып саналады. Сөйтіп, тензордың тоғыз сыңарларынан тек алтауы ғана тәуелді емес болады. Тензордың басты диагоналындағы сыңарлар нормальды кернеулер (ұзартатын және қысатын), ал басқа сыңарлар жанама кернеулер (опыратын немесе ығыстыратын) болып саналады.

Көлденең деформацияны (6.7) ескеріп, изотропты дене үшін қорытындылаған Гук заңын келесі түрмен жазуға болады:

– i – осі бойымен ұзару үшін

$$\varepsilon_{ii} = \left[\sigma_{ii} - \nu\left(\sigma_{jj} - \sigma_{kk}\right)\right] / E, \qquad (6.15)$$

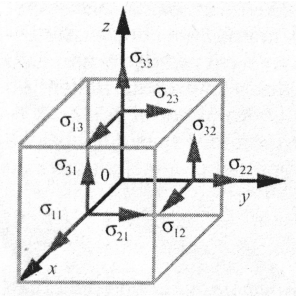
– ығысу үшін

$$\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} / G. \qquad (6.16)$$

Кристалдар (монокристалдар) жататын анизотропты қатты денелер үшін Гук заңы математикалық түрде былай жазылады:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \qquad (6.17)$$

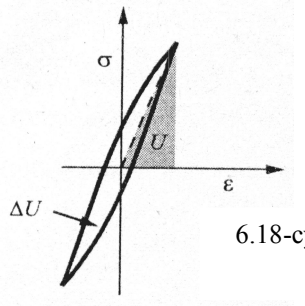
яғни егер деформация шексіз кішкентай және біркелкі болса, онда деформация тензорының әрбір сыңары кернеу тензорының барлық сыңарларымен сызықты байланысқан және керісінше. Пропорционалдық коэффициент болып, төртінші рангті тензорды құратын, серпімділік модулі тензорының сыңарлары саналады.



6.17-сурет. Элементарлы кубтың қабырғасына әсер ететін кернеулер

Серпімді гистерезис. Дене күйін сипаттайтын физикалық мөлшердің сыртқы жағдайды сипаттайтын физикалық мөлшерден бір қатарлы тәуелді болмайтын құбылысты *гистерезис* деп айтады. Дененің күйі сыртқы жағдаймен уақыттың тек қазіргі мерзімінде ғана анықталмай, ал тағы да болып өткен уақытымен анықталатын болса, онда гистерезиске орын бар болады. Мөлшерлердің бір қатарлы тәуелді болмауы кез келген процесте байқалады. Өйткені дененің күйі өзгеру үшін ылғи да белгілі бір уақыт қажет. Сондықтан дененің қарсы әсері, осы қарсы әсерді шақыратын себептерден қалып қойып пайда болады.

Күш түсіргенде серпімді дене деформациясының фаза бойынша кернеуден қалып қоюын *серпімді гистерезис* деп атайды. Сол себептен уақыттың әрбір мезгіліндегі дене деформациясының мөлшері күш түсіргендегі барлық уақыттың нәтижесі болып саналады. Денеге күшті түсіруді және жүктен босату циклды жүргізгенде деформацияның ε кернеуден σ тәуелділігін бейнелейтін диаграмма ылғи да серпімділіктің гистерезис тұзағын береді (6.18- сурет).



6.18-сурет. Серпімді гистерезистің қисық сызығы

Тұзақ ауданы ΔU жылуға өтетін серпімділіктің меншікті энергиясының үлесіне пропорционалды. Серпімділік гистерезис мөлшерін бағалау үшін мынадай қатынасты қолданады: $\Psi = \Delta U/U$, мұндағы U – серпімді деформацияның меншікті энергиясы. Серпімділік шегінде деформацияланған металдық материалдарда

$\Psi < 1$, резеңкеге ұқсайтын заттарда, пластмассада және үлкен илемді деформацияны алған металдарда $\Psi >> 1$ болуы мүмкін.

Серпімді гистерезистің себебі болып, қоршаған ортада қалдық кернеуді тудыратын, материалдың тым әлсіз жеке түйіршіктерінде жергілікті илемді деформацияның пайда болуы саналады. Денеге түсетін күш өзгерген кезде айтылған қалдық кернеулер материалда таңбасы кері жергілікті илемді деформацияны жүргізеді. Екі жағдайда да энергия кері айналмайтын процестерге жұмсалады.

Серпімді гистерезисті – гистерезистің статикалық және динамикалық тұзақтары деп екіге бөледі. Серпімділіктің динамикалық гистерезисі жоғары жиілікті және мөлшері бойынша үлкен емес деформацияда байқалады. Статикалық гистерезис статикалық және циклдық күштер түскенде серпімділік шегіне жақын кернеулер әсерінен пайда болады. Мұндай жағдайда тұзақ түсетін күштің жылдамдығынан немесе теңселудің жиілігінен тәуелді болмайды. Бірақта дүркінді күш түскенде өзгеруі мүмкін.

Серпімді гистерезис құбылысы серпімді жетілмегендік ретінде барлық денелерге тән және абсолютті нөлге жақын температураларда да байқалады. Серпімді денелердің өздерінің бос теңселуінің өшуі, дыбыстың серпімді денелерде өшуі, серпімді емес соққыда қалпына келтіру коэффициентінің азаюы сияқты құбылыстар, амалсыз теңселуді сүйемелдеу үшін сыртқы энергияны жұмсаудың қажеттілігіне себепші болады.

Илемді деформация. Сыртқы күш кернеуі металдың ағу шегінен артық болса ($\sigma > \sigma_a$), онда күш кернеуі мен деформация дәрежесінің арасында пропорционалдық бұзылады (Гук заңы орындалмайды). Металл илемді деформацияға ұшырайды. Сыртқы күштің әсерін тоқтатқанда металл түрінің, өлшемдерінің және құрылысы мен қасиеттерінің өзгерістері түгелімен жойылмайды. Металл деформацияға дейінгі күйіне қайтып оралмайды, яғни металда қалдық деформация қалады.

Жоғарыда жазылған илемді ағымға өту шарты бір осьтің бойымен созылатын немесе қысылатын материалдар үшін дұрыс болады. Күрделі кернеулі күймен күш түсіргенде илемді

ағымның басталуы бір кернеуден емес, барлық кернеудің мөлшерімен байланысты болады. Материалға күш түскенде илемді ағым басталу үшін орындалатын шарттар бесінші тарауда келтірілген.

Металдарда илемді деформация екі түрлі механизмнің көмегімен жүреді. Жоғарғы (балқу температурасына жақын) температурада және сыртқы әсер етуші күш аз болғанда илемді деформация диффузиялық механизмнің көмегімен жүреді. Мұндай жоғары температурада атомдардың өзіндік диффузиясы сыртқы әсер етуші күш кернеуінің бағытында жүреді. Сондықтан созушы күштің әсерінен металл үлгіліктің ұзындығы артады да, оның көлденең қимасының ауданы азаяды. Диффузиялық илемді деформация тұрақты, шамасы жағынан үлкен емес (аз уақытта әсер еткенде илемді деформация тудырмайтын) сыртқы күш кернеуінің әсер етуімен жүзеге асады. Диффузиялық илемді деформация өте баяу жүреді.

Илемді деформацияның екінші механизмі болып, сыртқы күштің әсерімен кристалдың жеке бөліктерінің басқаларына қарағанда тұтас, реттеле сырғуы есептеледі. Мұндай сырғу деформациясы сыртқы күш әсер ете бастағанда тез орын алады. Ол төменгі және жоғарғы температураларда бірдей жүреді.

Илемді деформация кезінде металдың құрылысы мен қасиеттерінің өзгеруі дислокациялық теорияның көмегімен түсіндіріледі. Дислокациялық теория, алғашқы уақытта металдардың деформациясы мен беріктігін зерттегенде межелік бөлуші кернеулердің теориялық және тәжірибелік мәндерінің бірдей болмауын және деформация кезінде металл беріктігінің арту себептерін түсіндіру үшін ұсынылған (сырғудың басталуына жеткілікті ең үлкен жанама күш кернеуін межелік бөлуші кернеу деп атайды) Мысалы, темірдің монокристалында сырғу жанама күш кернеуі $\sigma_м \approx 29$ МП*а* жеткенде басталады. Ал теориялық есептелген межелік бөлуші кернеу 2560 МП*а* тең болады, яғни тәжірибелік мәннен 100 еседей артық. Алюминий үшін межелік бөлуші кернеудің тәжірибелік мәні 1,2 ÷ 2,4 МП*а* тең болса, ал теориялық мәні 900 МП*а* (1500 еседей артық) жетеді. Мыстың межелік бөлуші кернеуінің теориялық мәні,

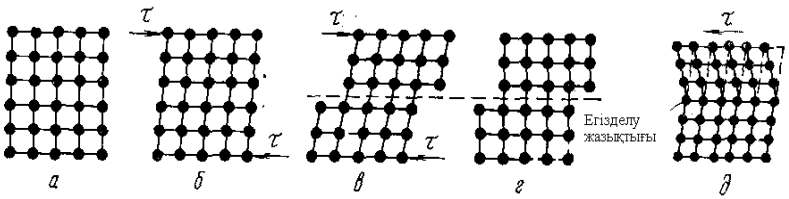
оның тәжірибелік мәнінен шамамен 1540 еседей артық. Теориялық межелік бөлуші кернеуді анықтағанда, сырғу жазықтығының екі жағында орналасқан барлық атомдардың арасындағы кулоуындық байланыс бірдей үзіліп, кристалдың екі бөлігі тұтас сырғиды деп есептейді. Тұтастай сырғу үшін анықталған теориялық бөлуші кернеудің мәні көптеген басқа материалдар үшін де, оның тәжірибелік мәнінен $10^2 \div 10^4$ еседей артық болады.

Дислокациялық теорияда, техникалық металдардағы межелік бөлуші күш кернеулердің және беріктіктердің тәжірибелік мәндерінің аса жоғары болмауын түсіндіру үшін мына төмендегідей болжам жасалған: кез келген кристалдық затта ерекше сызықтық ақаулар, яғни дислокациялар бар. Сыртқы күш әсер еткенде дислокациялар қозғала бастайды. Соның нәтижесінде деформация әр түрлі атомдық жазықтықтардың бойымен біртіндеп жүзеге аса бастайды. Дислокациялардың жылжуына аса үлкен күш кернеуінің керегі жоқ. Өйткені, деформация кезінде сырғу жазықтығының екі жағында орналасқан атомдар арасындағы кулоуындық байланыс бірден түгел үзілмейді. Тек сырғудың әрбір элементар актісінде дислокациялардың төңірегіндегі аз ғана атомдардың арасындағы байланыстар үзіліп, дислокациялар бір атомаралық қашықтыққа орын ауыстырып отырады. Дислокациялардың мұндай жылжуына қажетті жанама күш кернеуі, әрбір сырғу жазығына тән межелік бөлуші күш кернеуіне тең болуы қажет.

Илемді деформация сырғумен және егізделумен жүзеге асады.

Кубтық құрылымы бар металға жанама кернеуді түсіргенде пайда болатын серпімді және илемді деформацияның сұлбасы 6.19-суретте көрсетілген.

Кристалдық торда сырғу атомдарды ең тығыз байланған жазықтық пен бағыт бойынша жүреді. Өйткені, тығыз байланған көршілес атомдық жазықтардың арасындағы ара қашықтық ең үлкен, яғни олардың арасындағы байланыс ең кішкентай болғандықтан, осы жазықтықтардың өзінде ығысуға кедергінің мөлшері ең кішкентай болады.



6.19-сурет. Ығысу кернеуінің τ әсерінен пайда болатын металдың серпімді және илемді деформациясының сұлбасы

а – бастапқы кристалл; б – серпімді деформация; в – серпімділік шегінен үлкен күшті түсірген кезде серпімділік деформациясының үлкеюі және сырғумен іске асырылатын илемді деформацияның пайда болуы; г – ығысудың пайда болуын тудыратын кернеу (ығысудан кейін қалдық деформация сақталды); д – егізделудің пайда болуы

Айтылған жазықтықтар жататын сырғу жазықтығы мен сырғу бағыты – сырғу жүйесін құрады. Металдарда бір немесе бірнеше сырғу жүйесі бір мезгілде әсер етуі мүмкін.

Бетке центрленген куб торы бар металдарда (Fe_{γ}, Си, А1, т. б.) сырғу октаэдрлік жазықтықтар (111) және куб қабырғасының диагональ бағыты [110] бойынша жүреді, ал көлемге центрленген куб торы бар металдарда (Fe_{α}, Мо, V, т. б.) сырғу (110), (112) және (123) жазықтығы бойынша кубтың кеңістіктік диагоналы бағытымен [111] жеңіл іске асады. ГТТ торы бар металдарда (Zn, Be, Mg, т. б.) сырғу [0001] жазықтығымен жүреді.

Металда сырғу мүмкін болатын жазықтық пен бағыт көп болған сайын, ода илемді деформацияның пайда болу мүмкіншілігі жоғарылайды. Кубтық кристалдық торы бар металдар жоғары илемділік қасиетке ие болған, өйткені оларда сырғу көптеген бағыттармен жүреді. Кубтық торы бар металдармен салыстырғанда ГТТ құрылымы бар металдарда илемділік қасиет төмен, сондықтан қалыптауға, ұсталық соғуға және деформацияның басқа түрлеріне қиын беріледі.

Сырғу кристалда дислокацияның қозғалуы нәтижесінде іске асады (6.20-сурет). Сырғу жазықтығының бойындағы нұсқау көрсетілген бағытпен жанама кернеулер әсер еткенде, дислокация өзегі жанындағы атомдар атомаралық қашықтықтан

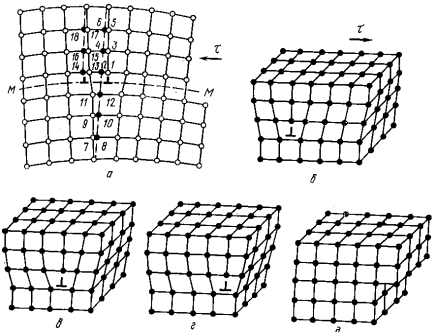
едәуір кішкентай ара қашықтыққа қозғалады (1 → 2; 3 → 4; 5 → 6; 7 → 8; 9 → 10; 11 → 12; 13 → 14; 15 → 16; 17 → 18).

Атомдар тек сызу жазықтығында ғана қозғалмайды, ал тағы да осы жазықтыққа параллельді барлық атомдық қабаттарда да қозғалыс жасайды. Дислокацияның қозғалуы *еңбектеу* жолымен де жүруі мүмкін. Еңбектеу деп түйінаралық атомдар немесе вакансияларды өзіне қосу себебінен дислокациялық сызықтардың немесе оның бөлімдерінің диффузиялық ығысуын айтады.

Дислокацияның осындай қозғалысына азғантай кернеу қажет. Осы кернеу мына теңдікпен анықталады:

$$\tau_p = G\, exp\, (-2\pi\omega/b),$$

мұндағы τ_p – ығысуға нақтылы кедергі; G – ығысу модулі; ω – дислокацияның ені; b - Бюргерс векторы; (ығысу модулі G – жанама кернеу τ мен салыстырмалы ығысу γ арасындағы пропорционалдық коэффициент ($\tau = G \cdot \gamma$). Серпімділік модулі материалдың қатаңдығын, яғни серпімді деформацияның шамасы бойынша кернеудің үлкею қарқындылығын анықтайды. G_{Fe} = 84000, G_{Cu} = 35000, G_{Al} = 28000, G_{Mo} = 112000 МП*а,* т.б.). Бірақта $\omega = a/b$, мұндағы a – сырғу жазықтығының арасы арасындағы ара қашықтық. Кернеу τ_p мөлшері мынаған тең болады: $(10^{-4} \div 10^{-5})\, G$. Осы кезде үйлесімді ығысу үшін ~0,15G кернеуі керек болар еді.



6.20-сурет. Кристалл бетінде бірлік ығысу баспалдағын пайда болғызуға алып келетін шеттік дислокацияның қозғалуы *а – дислокацияның орналасу сұлбасы; б – д – дислокацияның қозғалуы және оның бетке шығуының кезеңдері; τ – ығысу кернеуі; М – М – ығысу жазықтығы*

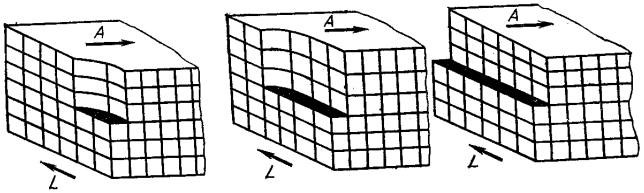
Бүкіл кристалл арқылы ығысу жазықтығы ММ-мен дислокацияның қозғалуы, кристалдың сәйкесті бөлімдерін бір

жазықтықтар арасы ара қашықтығына қозғалтуға алып келеді (6.20-сурет). Осы кезде кристалл бетінің оң жағында баспалдақ пайда болады. Кристалдану процесінде пайда болған дислокацияның қозғалуы шектелген екендігін ескеру қажет. Илемді деформация процесінде, осы дислокациялардың қозғалуы көп жаңа дислокацияларды пайда болғызуға немесе дислокацияларды көбейтуге алып келетіндіктен үлкен деформация мүмкін болатындығын ұмытпау қажет.

Бұрандалы дислокацияның қозғалысы кезінде атомдардың жылжуын 6.21-суреттегі сұлбаның көмегімен түсіндіруге болады. *A* нұсқасы бағытымен ығысу кернеуі әсер еткен кезде дислокация сызығы *L* нұсқамасы бағытымен қозғалады, яғни ығысу кернеуінің бағытына түсірілген нормаль бойымен дислокация сызығы қозғалып, кристалдың бөлімін ығыстырады. 6.21-суретінде сол бұрандалы дислокация көрсетілген. Оң бұрандалы дислокация да *A* нұсқамасына перпендикулярлы бағытта қозғалады, бірақта бағыты қарама-қарсы болады. Бұрандалы дислокацияның сырғу траекториясында бір атомаралық ара қашықтыққа тең саты құрылады.

Сырғу жазықтығы суреттің жазықтығымен сәйкес келсін (6.3-сурет). Ақ дөңгелектер сурет жазықтығында орналасқан атомдарды, ал қара нүктелер сурет жазықтығының астында орналасқан атомдарды көрсетсін. Бұрандалы дислокация (*EF*) оңнан солға қарай жылжып, атомдық жазықтықтар бір атомаралық қашықтыққа орын ауыстырсын. Сырғудың нәтижесімен дислокация сызығы *EF* жаңа орынға ауысқанда, дислокация сызығының қозғалу бағытының алдыңғы жағында орналасқан астыңғы және үстіңгі атомдар, одан кейін орналасқан 1 қатардағы атомдар сияқты орналасып, астыңғы және үстіңгі атомдар белгілі бір ара қашықтыққа ажырасады, ал 1 қатардағы атомдардың ажырасуы бұрыңғы 2-ші қатардағыдай болып үлкейеді, т.с.с. Дислокация сызығының соңында орналасқан 3 қатардағы атомдар тура бір атомаралық қашықтыққа жылжып, дөңгелектер мен нүктелер бір-бірінің үстіне дәл орналасады. 3 қатарда сырғу аяқталады. Дислокацияның солға қарай кристалдың бойымен жылжып өтуі,

оның жоғарғы бөлігін сызу астындағы бөлігімен салыстырғанда түгел сырғу векторына (сыртқы күштің бағытына) перпендикулярлы бағытта бір атомаралық қашықтыққа жылжытуға алып келеді. Таңбасы басқа бұрандалы дислокацияның қозғалуы да тура осындай нәтижелерге әкеледі.



6.21-сурет. Бұрандалы дислокацияның сырғуы

Бұрандалы дислокацияның шеттік дислокациядан айырмашылығы болып сырғуымен бір атомдық жазықтықтан екінші атомдық жазықтыққа өте алуы саналады (6.22-сурет). Егер бұрандалы дислокацияның *P* жазықтығындағы қозғалыс жолында әлдеқандай бөгеу кездессе, онда дислокация бастапқы *P* сырғу жазықтығымен салыстырғанда белгілі бір бұрышы бар басқа *R* атомдық жазықтықпен қозғалады (6.22-сурет). Осындай процесті *көлденең сырғу* деп атайды.

Көлденең сырғу жазықтығында біраз жол жүріп және бөгеуден алысырақ кетіп бұрандалы дислокация бастапқы *P* сырғанау жазықтығына параллельді орналасқан *S* атомдық жазықтығына ауысып, осы жазықтықпен сырғуы мүмкін. Мұндай процесті *қос көлденең сырғу* деп атайды.

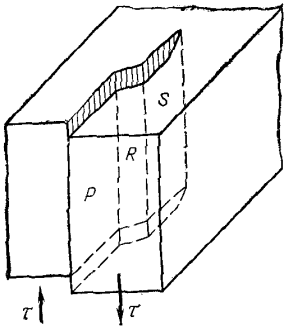
Аралас дислокацияға түсірілген жанама кернеудің әсерінен сырғу аймағы кеңейеді. Таза шеттік дислокациясы бар аралас дислокацияның нүктесіне жақын бөлімдер түсірілген күштің бағытында қозғалады, ал таза бұрандалы дислокациялары бар нүктеге жақын бөлімдер түсірілген күштің бағытына перпендикулярлы бағытта қозғалады (6.4-сурет).

Аралас дислокацияның барлық сызығы сыртқы қырға шыққанда, кристалдың жоғарғы жағы төменгі жақпен

салыстырғанда әсер ететін жанама кернеудің бағытында тордың бір периодына ығыстырылады.

Аралас дислокациялар кристалдың ішінде тұйық жазық тұзақты құруы мүмкін. Дислокациялық тұзақтардың жеке бөлімінде таза шеттік немесе таза бұрандалы бағыттар бар болғанымен, оның бөлімдерінің көбісі аралас бағыттар болып келеді.

Кез келген дислокация сияқты аралас дислокацияның жазық тұзағы ығысу аймағының шекарасы болады. Егер ығысу векторы тұзақтың жазықтығында әсер етсе, онда тұзақ кристалдың ішінде ығысу жүріп кеткен сырғу жазықтығының аймағын ығысумен қамтылмаған тұзақтың сыртында жататын аймақты бөледі. Сырғу тұзақтың кеңеюі кезінде дамиды. Ығысу жүріп өткен аймақ тұзақтың тарылуы кезінде дамитын қарама-қарсы жағдай да болуы мүмкін.



6.22-сурет. Бұрандалы дислокацияның көлденең сырғуы

Егіздену. К12 және Г12 тығыз байланған торы бар кейбір металдың илемді деформациясы сырғумен бірге егізделумен іске асады. *Егізделу* – егіздену жазықтығы деп аталатын жазықтыққа қатысты симметриялық жайға кристалдың бірінші бөлімі мен екінші бөлімін қайта бағытталуға алып келетін илемді деформацияны айтады (6.19 *д*-суретті қараңыз). Егізделу сырғу сияқты дислокацияның кристалл арқылы толық өтуімен қошталады. Сырғумен салыстыра отырып, егізделуге үлкен мәнді бермейді. Өйткені бетке центрленген куб және көлемге центрленген куб торы бар металдарда егізделу тек төменгі

температурадағы үлкен деформация дәрежесінде байқалады. Сонымен, металдың илемді деформациясы, оның кристалдарының бір бөлігінің екінші бөлігіне қарағанда салыстырмалы сырғуы арқылы ғана жүзеге аспайды. Төменгі температурада, әсіресе деформациялау жылдамдығы жоғары болғанда КЦК және ГТТ торлары бар металдарда кейде кристалдардың көршілес екі бөлігі сырғымай, белгілі бір атомдық жазықтың екі жағында бір-бірінің айнадағы қарама-қарсы бейнесіндей болып орналасады. Деформацияға дейінгі кристалдардың әрқайсысы сыртқы күштің әсерінен осындай бірнеше егіз бөліктерден тұратын болады. 6.19-суретте сырғу (*в*, *г*) және егізделу (*д*) кезінде кристалдардың көршілес екі бөлігіндегі атомдардың жылжуы көрсетілген. Сырғу кезінде кристалдың екі бөлігіндегі атомдар қарама-қарсы бағытта, бірдей қашықтыққа жылжиды. Атомдар толық бір атомаралық қашықтыққа жылжығанда, сырғу жазықтығының екі жақ бөлігіндегі кристалл жазықтары бір-бірінің үздіксіз жалғасы болып табылады. Әр бөлік ішінде кристалдық тордың симметриясы сақталады.

Ал егізделу кезінде шекаралық жазықтықтың немесе егізделу жазықтығының екі жағындағы атомдардың бәрі бір бағытта және әр түрлі қашықтықтарға жылжиды. Егізделу жазықтығынан алыстаған сайын, атомдардың жылжу қашықтығы арта түседі ($a_1<a_2<a_3$). Атомдардың осындай ерекше симметриялы орналасуының нәтижесінде, кристалдың екі бөлігі бір-бірінің айнадағы бейнесін қабылдайды. Егізделу жазықтығындағы атомдар деформация кезінде жылжымайды, өз орындарында қалады. Оның екі жағындағы кристалл бөліктерінің кеңістіктегі бағытталуы өзгереді. Кристалдардың егізделуі нәтижесінде металдың микроскопиялық деформациясы артады.

Жоғарыда шеттік дислокация өзінің жазықтығында сырғып орын ауыстыруы қаралды. Енді төменде дислокацияның сырғу жазықтығына перпендикулярлы орын ауыстыруы талқыланады. Сырғу жазықтығының нормалы бойымен шеттік дислокация орын ауыстырған кезде, ол бұрынғы орналасқан атомдық жазықтыққа параллельді жаңа атомдық жазықтыққа келеді. Сырғу механизмінен салыстырғанда еңбектеу деп аталатын

осындай орын ауыстырудың механизмінде үлкен айырмашылық бар. Еңбектеу үшін электржазықтықтың жиегіндегі атомдар тізбегі электржазықтықтан бөлініп кристалдың түкпіріне кетуі керек. Экстражазықтықтың жиегінің осындай еруі (оң еңбектеу) диффузиялық процеспен жүреді. Мұнда мынадай екі вариант болуы мүмкін: 1. Шеттік дислокацияға вакансиялар жақындағанда экстражазықтықтың жиегіндегі атомдар көрші бос орындарға орын ауыстырады; 2. Электржазықтықтың жиегіндегі атомдар дислокациядан түйінаралық бос орынға диффузиямен өтеді.

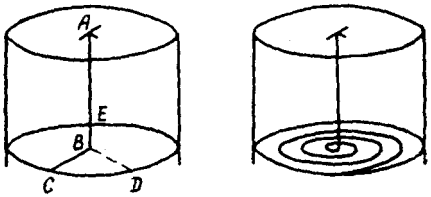
Дислокацияның көршілес төменгі сырғу жазықтығына орын ауысуы экстражазықтықтың жиегіне бір атомдық қатардың қосылуын білдіреді. Осындай экстражазықтықты салып бітіру (теріс еңбектеу) мынадай екі жолмен жүруі мүмкін: 1. Дислокацияға диффузияланатын түйінаралық атомдардың қосылуымен; 2. Тұрақты жайда болатын көрші атомдардың қосылуы және осы мезгілде вакансияның пайда болумен. Осы вакансия кейінірек кристалдың түкпірлеріне миграцияланады.

Деформацияға дейінгі дислокациялардың саны тәжірибеде кездесетін макроскопиялық сырғуды қамтамасыз ету үшін жеткіліксіз екендігін металда жүргізілген зерттеулер көрсетті. Сондықтан дислокациялық теорияға сәйкесті илемді деформация кезінде металдардағы дислокациялардың тығыздығы артуы қажет. Шынында зерттеулер көрсеткендей, деформация кезінде металдарда дислокациялардың тығыздығы 10^6-10^8 см $^{-2}$-ге дейін артады. Деформация кезінде металдың ішінде дилокациялардың пайда болуының әр түрлі «көздері» жұмыс істей бастайды. Оларға Франк-Рид «көздері», ішкі қуыстар мен жарықтардың беттері, әр түрлі шекаралар, т.с.с. жатады.

Илемді деформация процесі кезінде дислокациялардың пайда болу механизмін бастапқы дислокацияның қозғалуына жергілікті кедергінің бар болуымен түсіндіруге болады. Бұл гипотизаны ұсынған ғалымдар Ф.К.Франк және В.Т. Рид. Осы ғалымдар дислокацияның пайда болуының екі механизмін ұсынған.

Бірінші механизмді дислокацияны бір жақтан қысып ұстау жағдайына жатқызады (6.23-сурет). Шеттік дислокацияны *ABC*

сызығы, ал жалғыз ғана әрекеттегі сырғу жазықтарын *СДЕ* жазықтығына параллельді жазықтар бейнелесін делік. *ВС* кесіндісі *СДЕ* жазықтығында қозғалуы және *В* нүктесінің айналысында айналуы мүмкін. Айтылған *ВС* кесіндісі қозғалған кезде, оның жүріп өткен барлық аймақтарында бірлік ығысу іске асырылады. Мысалы; *ВС* кесіндісі *ВД* жайына өткен кезде *ВСД* секторының ауданында бір атомдық ара қашықтыққа ығысу пайда болады. *СДЕ* жазықтығының басқа бөлімінде сырғу жоқ болады. *ВС* кесіндісінің толық айналымы барлық жазықты бір атомаралық қашықтыққа ығыстырады.



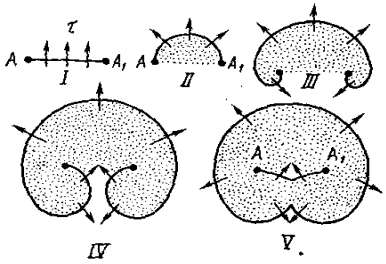
а) б)

6.23-сурет. Франк-Ридтің дислокациялық көзінің жұмыс істеу сұлбасы

ВС кесіндісінің қайталанатын айналымымен бірлік ығысудың шексіз санын алуға мүмкіндік пайда болады. Расында да, бірлік ығысуларды жүзеге асыру үшін айналатын сызық спираль бойымен бұралуы керек. Айналу процесінде сызық спиральдық түрді алғаннан кейін, барлық *СДЕ* ығысу жазықтығы бойынша спираль толық айналған кезде бірлік ығысу пайда болады. Сонымен, *В* нүктесінің айналасында кесіндінің бұралуы дислокация сызығының ұзындығын үлкейтуге алып келеді.

Жартылай тежелген дислокация қозғалған кезде дислокацияның көбеюінің екінші варианты, дислокация сызығы екі жағынан да бекітілген жағдайға жатады (6.24-сурет). Дислокацияның екі ұшының қозғалмауы, олардың басқа дислокациялармен немесе қоспалармен әсерлесуіне байланысты болуы мүмкін. Сұлбада сырғу жазықтығы сурет жазықтығына параллельді болып жатыр. Сыртқы жанама кернеудің әсерімен ұзындығы *L* болатын түзу сызықты дислокация (6.24-сурет)

алдымен керіліп, доға тәрізді аралас дилокацияға айналады (6.24-сурет). Сыртқы күштің бағыты тұрақты болғанымен, аралас дислокацияның әр элементіне әсер етуші жанама кернеулер әрқашан оларға перпендикулярлы болады (бағыт көрсетуші тілмен көрсетілген). Сондықтан сыртқы күштің әсері тоқтамаса, аралас дислокацияның доғасы одан әрі кеңейе түседі. Оның артындағы сырғу жазықтығының деформация жүріп өткен аумағы ұсақ нүктелермен көрсетілген. AA_1 дислокациясының қозғалуына (оның керіліп доғалануына) керекті жанама кернеудің шамасы дислокация сызығының қисаю радиусына (R) кері пропорционалды болады. Дислокация сызығы жарты шеңбердің түріне жеткенде ($2R = L$), оның қисаю радиусы өзінің ең аз мәніне ие болады. Дислокация сызығының осы түріне мынадай межелік бөлу кернеуі сәйкес келеді: $\tau_м = Gb/L$, мұндағы L – дислокация бекітілген A және A_1 нүктелері арасындағы ара қашықтық; G – ығысқан кездегі серпімділік модулі; b – Бюргерс векторы.



6. 24-сурет. Франк-Рид көзінің жүйелі қозғалуының I – V сатысы

Одан әрі дислокацияның әр элементі өзіне перпендикулярлы бағытта қозғала отырып A және A_1 нүктелерінің төңірегінде айналып, орала бастайды (6.24-сурет). Ал дислокация сызығының ортаңғы бөлігі түзуленіп, қисаю радиусы үлкейе бастайды. Демек, оның ары қарай қозғалуына жанама кернеудің аз мөлшері жеткілікті. 6.24-суретте дислокация сызығының жанама кернеудің әсерімен кеңейіп, жылжуының әр түрлі кезеңдері көрсетілген.

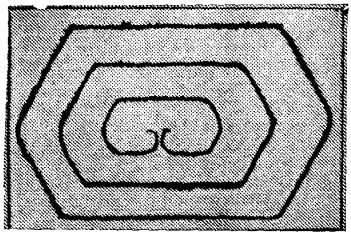
Егер бастапқыда AA_1 сызығы шеттік, оң таңбалы дислокация болса, онда оның доғаға айналып, A және A_1 нүктелерінің төңірегінде оралуы нәтижесінде шеттік аралас дислокацияның элементтерімен бірге бұрандалы дислокациялар пайда болады. 6.9-суретіндегі дислокациялық сызықтардың екі бүйірінде таңбалары әр түрлі бұрандалы, ал төменгі бөліктерінде теріс таңбалы шеттік дислокация пайда болады. Олардың арасында аралас дислокация сызықтары жатады. Қисық сызықты тұзаққа, шеңберге ұқсас дислокацияның әр түрлі бөліктерінің жанама кернеудің (τ) әсерімен жылжитын бағыттары бағыт тілмен көрсетілген. Сонымен, мәжелік болу кернеуінің әсерімен AA_1 дислокациясы тек доғаға айналып қана қоймай, үнемі кеңейіп отыратын дислокациялық тұзаққа айналады. Оның әр таңбалы астыңғы бөліктері қарама-қарсы бағытта қозғала отырып, бір-бірімен жанасқанда жойылады. Сөйтіп жеке дислокациялық шеңбер пайда болып (6.24-сурет), өз бетінше кеңейе түседі. Ал A және A_1 нүктелерінің арасында тағы да аралыс дислокация қалады. Жанама кернеудің әсерімен от түзуленіп, бастапқыға ұқсас оң таңбалы шеттік дислокацияға айналады (6.24-сурет). Сыртқы күштің әсері тоқтамаса, жоғарыда қарастырылған процесс қайталанып, бекітілген AA_1 дислокациясы жаңа дислокациялық тұзақтар тудырып отырады. Франк-Ридтің дислокациялық көздері сыртқы күштің әсері тоқтағанша, көптеген дислокациялық тұзақтар тудыра береді. Егер пайда болған дислокациялық тұзақтардың кеңейіп, тарауына кедергі болмаса, Франк-Ридтің көздері деформация тоқтағанша жұмыс істей береді. Олардың қозғалуына кедергі көп болса, онда ең бірінші дислокациялық тұзақ тоқтаған соң, қалғандары да бір-бірінен белгілі қашықтықтарда тоқтап, дислокациялық шоғыр пайда болады. Мұндай шоғырдың қосынды ішкі серпімді кернеуі сыртқы межелік жанама кернеуге тең болғанда, Франк-Рид көздерінің жұмысы тоқтайды.

6.25-суретте кремнийдегі Франк-Рид дислокациялық көзінің жұмысы көрсетілген. 6.24- суреттегі сұлба бұрандалы дислокациялар үшін де толығымен орын алады. Тек жанама

кернеудің (τ) векторының бағытын 90^0 бұрышқа бұрып көрсету керек.

Сонымен, Франк-Рид көзінің жұмыс істеуі басталу үшін дислокацияға мынадай кернеуді түсіру қажет: $\tau = Gb/L$. Егер кернеу τ әсер ете берсе, онда бір көзден жүздеген дислокация пайда болуы мүмкін және көздің әсер етуі, үлкейіп келе жатқан дислокациялық тұзақ жолында кедергі (дислокацияның жаңа жүйесі, артық фазаның бөлшектері, түйіршік шекаралары және т. б.) пайда болғанша тоқтамайды.

Бастапқы сатыда монокристалдың илемді деформациясы бір жазықтықтар жүйесі бойынша дислокацияның қозғалуымен іске асады (жеңіл сырғу сатысы). Осы сатыда дислокация салыстырмалы кедергісіз үлкен ара қашықтыққа қозғалады және қозғалған кезде әсер ететін кернеуді едәуір өсірмей дамушы деформацияны қамтамасыз етеді (деформациялық беріктенудің бірінші сатысы). Жеңіл сырғанау сатысынан кейін көптеген сырғу сатысы басталады, яғни екі және одан да көп жүйеде дислокацияның қозғалуы жүреді. Осы сатыда едәуір деформациядан кейін металдың дислокациялық құрылымы едәуір күрделенеді және бастапқы күймен салыстырғанда дислокация тығыздығы 4 ÷ 6 ретке дейін үлкейіп, осы тығыздық $10^{11} \div 10^{12}$ $см^{-2}$ жетеді.



6.25-сурет. Кремнийдегі Франк-Рид дислокациялық көзінің жұмысы

Дислокциялар арасында серпімді әсерлесудің пайда болу салдарынан, олардың қозғалуына кедергі тез жоғарылайды және олардың қозғалуы үшін қажетті сыртқы кернеу тез үлкейеді (беріктенудің екінші сатысы). Үлкейетін кернеудің әсерінен бұрандалы дислокациялардың көлденең сырғуы дамиды, яғни

бір қозғалыс жазықтығынан екінші жазықтыққа өтетін сырғу дамиды. Осы кернеудің жарым-жартылай релаксациясына, әр түрлі таңбалы жеке дислокациялардың аннигиляциясына және дислокациялардың көлемдік көзге топтануына алып келеді. Айтылған көлемдік көздің ішіндегі дислокацияның тығыздығы қабырғасымен салыстырғанда кіші болып келеді. Динамикалық қайтару жүретін деформацияның үшінші сатысы басталады. Үшінші сатыда деформациялық беріктену азаяды. Деформацияланып жатқан металда қозғалатын дислокациялар көптеген мөлшерде жер-жерде орналасқан атомдар мен вакансияларды тудырады.

Бақылау сұрақтары.

1. Серпімді деформация деп қандай деформацияны айтады?
2. Илемді деформация деп қандай деформацияны айтады?
3. Илемді деформация қандай механизмнің көмегімен жүреді?
4. Илемді деформация қалай жүзеге асады?
5. Сырғумен илемді деформацияны қалай жүзеге асырады?
6. Егізделумен илемді деформацияны қалай жүзеге асырады?

6.6. Илемді деформация кезінде поликристалды металл құрылымының өзгеруі

Поликристалды металдың илемді деформациясы монокристалды металдың деформациясына ұқсас сырғу немесе егізделу жолымен жүреді. Қысыммен өңдеген кезде металдың пішін өзгертуі әрбір түйіршіктің илемді деформациясы нәтижесінде іске асады. Осы кезде түйіршіктердің бірдей бағытталмағанын ескеру керек. Сондықтан илемді деформация әрбір түйіршікте бір мезгілде және поликристалдың барлық көлемінде бірдей жүрмейді.

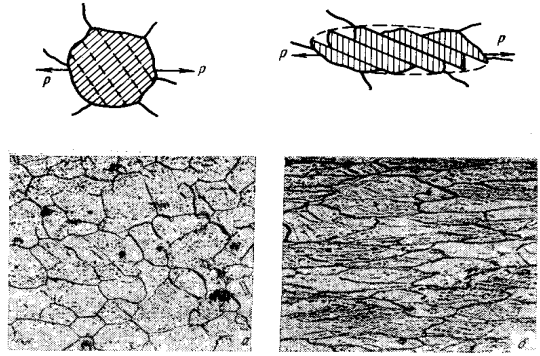
Бастапқы кезде микроскоп астында, алдын ала жылтыратылған және деформацияланған үлгілікте түзу сызық

түріндегі сырғу ізін байқауға болады. Осы сызықтар жеке түйіршіктер шегінде бірдей бағытталған.

Деформация үлкейген кезде сырғу процестері нәтижесінде түйіршіктер (кристаллиттер) өздерінің пішіндерін өзгертеді. Деформация алдында түйіршіктерде дөңгелек пішін бар болса (6.26 *а*-сурет), онда олар деформациядан кейін сырғу жазықтығы бойынша ығысып, осы ығысу нәтижесінде әсер ететін күш *Р*-ның бағытында созылып талшықтық және қабаттық құрылымды құрады (6.26 *б*-сурет). Түйіршіктердің пішіні өзгерумен бірге, оның ішінде субтүйіршіктер пайда болып, осы субтүйіршіктер арасындағы бағыттық бұрыштар үлкейеді.

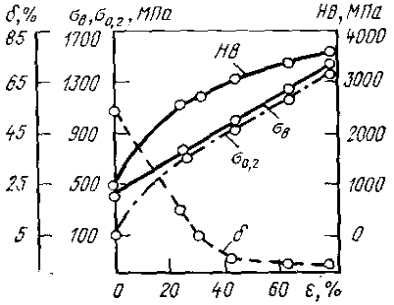
Деформация текстурасы. Деформация дәрежесі үлкен болған кезде, түйіршіктерде кристаллографиялық жазықтықтар мен бағыттардың айрықша бағыттануы пайда болады. Сыртқы деформацияланатын күшке қатысты кристаллиттердің заңды бағыттануы текстура (деформация текстурасы) деген атты алды.

Деформация дәрежесі үлкен болған сайын, кристаллиттік түйіршіктердің көптеген бөлімі айрықша бағытты (текстураны) алады. Текстураның түрі металдың табиғатынан және деформацияның түрінен (илемдеу, сымдау, қалыптау, баспақтау, т. б.) тәуелді болады. Егер бетке центрленген торы бар металдарды сымдаса, онда текстураның бағыты [111] және [100] болады, ал көлемге центрленген торды сымдаса, онда текстураның бағыты [110] болады. Илемдеген кезде бетке центрленген торы бар металдар үшін текстураның бағыты (112) жазықтығындағы [110] бағыты есептеледі, ал көлемге центрленген торы бар металдар үшін (110) жазықтығындағы [001] бағыты саналады. Кристаллографиялық текстураны талшықтық құрылыммен теңестіру қажет емес, өйткені кейбірде талшықтық құрылым текстурамен қосақталып жүрмейді. Текстураның құрылуы механикалық және физикалық қасиеттердің анизотропиясының пайда болуымен қошталады.



6.26-сурет. Сырғу нәтижесінде темір түйіршіктерінің пішін өзгеруі (сызықша сызықпен деформацияланған түйіршіктердің шекарасы көрсетілген)
а – деформацияға дейінгі металдың сұлбасы және микроқұрылымы (× 150); б – деформациядан кейінгі металдың сұлбасы және микроқұрылымы (× 150)

Поликристалдық металдың қақталмасы. Суықтай деформацияның (0,15 ÷ 0,2 $T_{пл}$) дәрежесін үлкейткен кезде деформацияның кедергісін сипаттайтын қасиеттер ($\sigma_в$, $\sigma_{0,2}$, *НВ* және т. б.) жоғарылайды, ал илемді деформацияға икемділікті яғни илемділікті сипаттайтын қасиеттер (ψ және δ) азаяды (6.27-сурет). Осы құбылыс қақталма деген атты алды.



6.27-сурет. Илемді деформация дәрежесінің ε төменгі көміртегілі болаттың механикалық қасиетіне әсері

Илемді деформация процесінде металдың беріктенуін (қақталуын) кристалдық құрылым ақауларының, яғни

дислокациялардың, вакансиялардың, түйінаралық атомдардың санының өсуімен түсіндіруге болады.

Кристалдық құрылымдағы ақаулардың орналасу тығыздығының үлкеюі жаңа жеке дислокациялардың қозғалуын қиындатады, демек деформацияға кедергіні үлкейтеді және илемділікті азайтады. Үлкен мәнді дислокацияның орналасу тығыздығының үлкеюі алады. Өйткені дислокациялардың арасында пайда болатын әсерлесу, олардың қозғалуын қиындатады. Ығысу кернеуі τ дислокация тығыздығының ρ квадратты түбіріне байланысты пропорционалды өседі, яғни

$$\tau = \tau_o + abG\sqrt{\rho},$$

мұндағы τ_o – деформацияға дейінгі ығысу кернеуі; b – Бюргерс векторы; a – тор типінен және қоспа құрамынан тәуелді болатын коэффициент.

Бетке центрленген торы бар металдар көлемге центрленген торы бар металдармен салыстырғанда көбірек беріктенеді. Суықтай деформациялаудың нәтижесінде тығыздық және жегідеге қарсылық азаяды, ал электркедергі жоғарылайды. Ферромагнитті металдарды (мысалы, темір) суықтай деформациялау коэрцитивті күшті жоғарылатып, магнитті өткізгіштікті азайтады.

Бақылау сұрақтары.

1. Сырғу ізі дегеніміз не?
2. Деформация текстурасы деп нені айтады?
3. Поликристалдық металдың қақталмасы деп нені айтады ?
4. Илемді деформацияның дәрежесі болаттың механикалық қасиетіне қалай әсер етеді?

6.7. Деформацияланған металдың құрылымы мен қасиетіне қыздырудың әсері. Қайтару және полигонизация. Бірінші, екінші және жинау рекристаллизациялары

Металды деформациясына жұмсалатын жұмыстың көптеген бөлімі (95 %) жылуға айналады (металл қызады), ал энергияның қалған бөлімі құрылымның жетілмегендігінің (вакансия, дислокация және т.б.) жоғарғы тығыздығы түрінде металда шоғырланады. Тағы да энергияның жиналуына

деформацияның нәтижесінде қалдық кернеудің өсуі айғақ болды. Осы себептен қақталған металдың күйі термодинамикалық тұрақсыз болады. Осындай металды қыздырған кезде, ода қайтару, полигонизация және рекристаллизация процестері жүреді. Осы процестер деформацияға дейінгі металдың барлық қасиеттерін орнына келтіреді.

Қайтару және полигонизация. Салыстырмалы төмен температураға дейін металды қыздырған кезде (әдетте 0,2÷0,3 $T_б$; мұндағы $T_б$ – температураның абсолютті шкаласы бойынша көрсетілген балқу температурасы), ода қайтару процесі басталады. *Қайтару процесі* деп металл құрылымы ақауларының тығыздығын азайту нәтижесінде қақталған металдың құрылымдық жетілгендігін жоғарылатуды айтады. Бірақта осы кезде деформацияланған күймен салыстырғанда жарықтық микроскоп астында көрінетін құрылымдық өзгеру әлі байқалмайды.

Қайтару процесінде екі сатыны айырады. Төменгі температурада (0,2 $T_б$ төмен температурада) қайтарудың бірінші сатысы жүреді. Осы сатыда нүктелік ақаулардың (вакансиялар) азаюы және жаңа субшекаралар пайда болмай дислокацияның көп емес қайта топтануы жүреді.

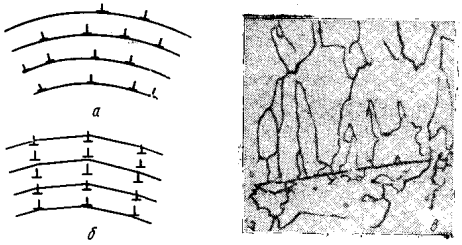
Қыздырғанда дислокациялардың қайта таралуы жүріп, артық вакансиялар мен түйіршік аралық атомдар, осы дислокациялармен сіңірілініп алынады. Осымен бірге түйіршіктер шекарасына вакансиялардың құйылуы жүреді. Осылардың бәрі нүктелік ақаулардың шоғырланып орналасуын азайтады. Ары қарай вакансиялар және түйіршік аралық атомдар кездескен кезде, олар энергияны азайтып әсерлеседі.

Қайтарудың келесі сатысы – *полигонизация* деп аталады. Жоғарырақ температураға дейін металды қыздырған кезде (жуықты 0,2÷0,3 $T_б$) кішкентай бұрышты шекарасы бар субтүйіршіктерге кристалдардың бөлінуін (фрагментациясын) *полигонизация* деп түсінеді.

Полигонизация процесін түсіндіру үшін келесі дислокациялық механизм ұсынылған. Кристалды деформациялаған кезде, мысалы иген кезде, сырғу жазықтығында тәртіпті таралмаған дислокациялар пайда болады (6.28 *а*-сурет). Өзіндік диффузия жүруге жеткілікті

температураға дейін металды қыздырған кезде, әр түрлі таңбасы бар дислокациялар жойылады (аннигиляцияланады), ал бір таңбалы артық дислокациялар дислокациялық қабырға болып сапқа тұрады. Осының бәрі, монокристалда немесе поликристалдың түйіршіктерінде дислокациялары жоқ субтүйіршіктерді шектейтін субшекараларды пайда болғызуға алып келеді (6.28 *б*-сурет). Осы классикалық типті полигонизация процесі 0,25÷0,3 $T_б$ температурасына дейін металды қыздырған кезде, мөлшері бойынша үлкен емес деформациядан кейін жүреді. 6.28 *в*-суретте төмен көміртегілі болаттың құрылымдағы субтүйіршіктер келтірілген.

Кейбір металдарда (мысалы, алюминийде; титанда, молибден мен вольфрамның монокристалдарында) қайтару және полигонизация процестері жүргенде беріктіктің айқын азаюы және илемділіктің едәуір жоғарылауы пайда болады. Бірақта олардың отқаберіктік қасиеттері жоғарылайды. Мыста, никельде және олардың қорытпаларында полигонизацияның белгілі бір сатысында қаттылық, аққыштық, серпімділік және төзімділік шегі, ал тағы да илемділік жоғарылайды. Осымен бірге серпімді емес қасиеттер төмендейді. Деформацияланған металда полигонизация процесі жүрген кезде пайда болатын дислокациялық қабырғаларда, қозғалатын дислокацияларды қоспа атомдарымен бекітетін болса, онда беріктену пайда болады.



6.28-сурет. Полигонизацияның сұлбасы
а – деформациядан кейінгі дислокацияның таралуы;
б – жиынтықтар шекарасының пайда болуы; в - төмен көміртегілі болаттың құрылымдағы субтүйіршіктер (фрагментер), × 500

Уақытты көбейткенде немесе температураны жоғарылатқанда субтүйіршіктердің үлкеюі және олардың көлемін дислокациядан тазалау беріктенуді азайтуға алып келеді. Осындай да субтүйіршіктер үлкен өлшемге дейін өсуі мүмкін (~ 10 мкм). Полигонизацияның осындай ақырғы сатысын *орнындағы рекристаллизация* деп атайды.

Алюминийде, молибденде және вольфрамда полигонизация үлкен жылдамдықпен жүреді және субтүйіршіктер едәуір үлкен өлшемге жетеді. Осы көп беріктенуге алып келеді. Кейбір физикалық қасиеттер (мысалы, электркедергі) қайтару процесінде толық қайта орнына келеді. Осы вакансия концентрациясының азаюы және дислокацияның қайта таралуымен байланысты.

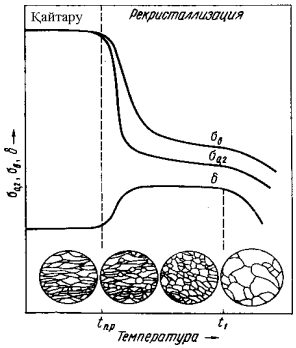
Рекристаллизация. Бірінші рекристаллизация. Температураны ары қарай жоғарылатқанда атомдардың қозғалу мүмкіндігі жоғарылайды және белгілі бір температураға жеткенде жаңа тең осьті түйіршіктер пайда болады.

6.29-суретінен көрініп тұрғандай $t_{\text{п.р}}$ температурасына дейін қыздырғанда деформацияланған түйіршіктер сақталады. $t_{\text{п.р}}$ температурасында деформацияланған металда бұрмаланбаған торы бар жаңа түйіршіктердің туындысы өседі (6.29-сурет). Осы туындылар ұяның басқа бөлімдерінен үлкен бағытталу бұрыштарымен (үлкен бұрышты шекарамен) бөлінген. Бәлкім жаңа түйіршіктер дислокациялар жоғары тығыздықпен орналасқан бөлімдерде пайда болады, яғни деформацияланған түйіршіктер шекарасында немесе түйіршіктер ішіндегі ығысу жазықтығында. Өйткені айтылған жерлерде тордың ең үлкен бұрмалануы шоғырланған. Жаңа түйіршіктер пайда болғаннан кейін, осы түйіршіктер оларға деформацияланған бөлімдерден атомдардың өтуінің нәтижесінде өседі.

Қақталған металды қыздырған кезде ескі түйіршіктер қайта қалпына келмейді, яғни бастапқы түйіршіктерден өлшемдері бойынша едәуір айырмашылықта болатын мүлде жаңа түйіршіктер пайда болады. Деформацияланған металдың бағытталған талшықтық құрылымның орнына тең осьті жаңа

түйіршіктердің пайда болуы, өңдеудің рекристаллизациясы немесе *бірінші рекристаллизация* деп аталады.

Жаңа түйіршіктердің пайда болуы және дислокация тығыздығының тез азаюы, металдың көлемінде суықтай илемді деформациялау процесінде жиналған энергияның негізгі үлесін босатуға алып келеді. Осы өңдеу рекристаллизациясының термодинамикалық себебі болып саналады. Рекристаллизацияның нәтижесінде қақталма толық алынып тасталынады және металдың қасиеттері өздерінің бастапқы мәндеріне жақындайды. 6.29-суретінен көрініп тұрғандай рекристаллизация кезінде үзіліске уақытша кедергі, әсіресе ағым шегі кенет азаяды, ал илемділік қасиеті δ жоғарылайды. Беріксіздену тордың бұрмалануын алып тастаумен және дислокация тығыздығының тез азаюымен түсіндірілінеді. Дислокацияның тығыздығы рекристаллизациядан кейін $10^{10} \div 10^{12}$ мөлшерінен $10^{6} \div 10^{8}$ см$^{-2}$ мөлшеріне дейін азаяды. Металда беріксіздену жүріп рекристаллизация өтетін немесе рекристаллизация басталатын ең кіші температураны (6.29-сурет) рекристаллизацияның табалдырығы деп атайды.



6.29-сурет. Суықтай деформациямен беріктенген металдың механикалық қасиеті мен құрылымына қыздырудың әсері ($t_{\text{п.р}}$ – рекристаллизацияның температуралық табалдырығы; t_1 – рекристаллизация кезінде аса қыздыру байқалатын температура)

Осы температура, мысалы балқу температурасы сияқты тұрақты мөлшер болып саналмайды. Берілген металл (қорытпа) үшін температуралық табалдырық қыздыру ұзақтылығынан, алдыңғы деформацияның дәрежесінен, деформацияға дейінгі түйіршік мөлшерінен және т. б. тәуелді болады. Рекристаллизацияның температуралық табалдырығы деформацияның дәрежесі

жоғары, қыздыру ұзақтылығы үлкен немесе деформацияға дейінгі түйіршік мөлшері кішкене болған сайын төмен болады.

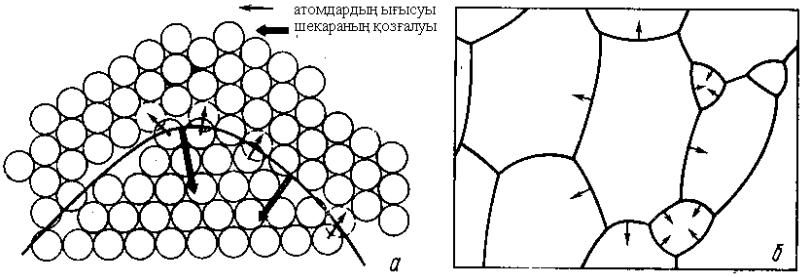
Едәуір деформацияны алған металдардың рекристаллизациясы басталатын температурасы $t_{\text{п.р}}$ техникалық таза металдар үшін жуықты $0{,}4T_{\text{б}}$ (Бочвар А.А. ережесі бойынша), таза металдар үшін $(0{,}1\div0{,}2)$ $T_{\text{б}}$ тең болады, ал қатты ерітінді қоспалары үшін $(0{,}5\div0{,}6)$ $T_{\text{б}}$ дейін үлкейеді.

Қақталманы толық алып тастаған кезде, рекристаллизацияның жоғарғы жылдамдығын және оның толық өтуін қамтамасыз ету үшін металды тым жоғары температураға дейін қыздырады. Осындай термиялық өңдеу *рекристаллизациялық босаңдату* деген атты алды.

Кейбір жағдайда беріктікті едәуір азайтпай илемділікті жоғарылатып, қалдық кернеуді азайтып және жегідеге шыдамдылықты жоғарылату үшін босаңдатуды рекристаллизация температурасынан төменгі температурада жүргізеді, яғни рекристаллизацияға дейінгі босаңдатуды қолданады. Осындай босаңдату полигонизацияланған құрылымды орнатуға алып келеді. Айтылған босаңдатуға кейбір алюминийлік және магнийлік қорытпаларды, ал тағы да серіппелік қасиеттерді жақсарту үшін мыс қорытпаларынан жасалған серіппелер мен қаңылтақтарды түсіреді.

Жинау рекристаллизациясы. Бірінші рекристаллизация аяқталғаннан кейін, келесі қыздыру процесінде үлкен бұрышты шекаралардың қозғалуы жолымен бір рекристаллизацияланған түйіршіктердің басқа рекристаллизацияланған түйіршіктер есебінен өсуі жүреді. Сонда ойық шекарасы бар түйіршіктер дөңес шекарасы бар түйіршіктерді «жейді» деп айтуға болады. Ойық бетіндегі атомдарда көп көрші атомдар бар, демек дөңес бетінде орналасқан атомдармен салыстырғанда олар аз энергияға ие болады (6.30 *а*-сурет). Нәтижесінде шекаралар қисықтық центрі бағытында ығысады (6.30 *а*-сурет). Өсудің механизмі 6.30 *б*-суретте көрсетілген. Жиі дөңес шекаралар кішкентай түйіршіктерде, ал ойық шекаралар үлкен түйіршіктерде бар болатындықтан, үлкен түйіршіктер өскен кезде кішкентай түйіршіктер жоқ болып кетеді. Жаңа рекристаллизацияланған түйіршіктердің өсу процесін *жинау*

рекристаллизациясы деп айтады. Жинау рекристаллизациясының негізгі себебі болып, түйіршіктер өскен кезде шекара ұзындығының кішірею арқасында түйіршіктің шекаралық (беттік) энергиясын кішірейтуге ұмтылу саналады. Екінші фазаның дисперсті бөлшектері түйіршіктердің өсуін тежейді. Кірменің көлемдік үлесі көп болған сайын және олардың дисперстілігі жоғары болған сайын түйіршіктер өлшемі кішкентай болады.



6.30-сурет. Жинау рекристаллизациясы кезінде түйіршіктердің өсуі
а – түйіршіктер шекарасы арқылы диффузия; б – түйіршіктердің өсу механизмі

t_1 температурасынан жоғары температурада металдың илемділігі азаяды. Осыны рекристаллизация кезіндегі аса қыздыру құбылысымен, яғни түйіршіктердің тез өсуімен түсіндіруге болады (6.29-суретін қараңыз).

Екінші рекристаллизация. Егер рекристаллизацияның сатысында кейбір жаңа түйіршіктерге өсу үшін жақсы жағдай жасалса, онда осындай сатыны *екінші рекристаллизация* деп атайды.

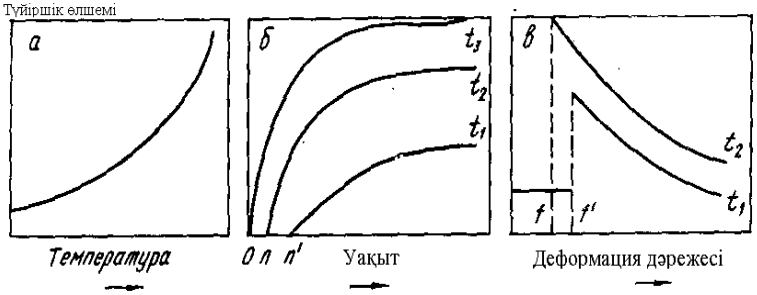
Үлкен жылдамдықпен өсетін түйіршіктерді шартты түрде туындылар орталығы ретінде қарауға болады. Сондықтан олардың өсу процесі екінші рекристаллизация деген атты алды. Екінші рекристаллизацияның нәтижесінде көптеген ұсақ түйіршіктер және саны бойынша кішкентай тым ірі түйіршіктер пайда болады. Бәлкім екінші рекристаллизация жеке түйіршіктердің өсу үшін қажетті жақсы кристаллографиялық бағыттармен, басқа түйіршіктермен салыстырғанда ақаулардың

концентрациясының аздығымен (көлемдік энергияның мөлшерімен) және кірмелердің бөлінуінің біркелкі емес болуы нәтижесінде шекараның тым жоғары жылжымалылығымен шақырылынады. Көптеген жағдайда екінші рекристаллизацияның себебі болып, бірінші рекристаллизация кезінде пайда болған көптеген түйіршіктердің өсуін кірмелердің дисперсті бөлшектерімен тежеу саналады. Ірі түйіршіктердің пайда болуына және әр түйіршіктікті құрылымға алып келетін екінші рекристаллизация, металдардың механикалық қасиетін кішірейтуге мүмкіндік туғызады.

Рекристаллизациядан кейінгі түйіршіктер өлшемі. Рекристаллизацияланған түйіршіктердің өлшемі металдың қасиетіне үлкен әсерді тигізеді. Кішкентай түйіршігі бар металдар мен қорытпалар жоғары беріктікке және тұтқырлыққа ие болады. Бірақта кейбір жағдайда металл ірі түйіршікті болу қажет. Сөйтіп трансформаторлы болат немесе техникалық темір ең жоғары магниттік қасиетке ірі түйіршіктікті болған кезде ие болады. Суықтай илемді деформациядан және рекристаллизациядан кейін түйіршіктер өлшемі бастапқы түйіршіктен үлкен немесе кіші болуы мүмкін. Түйіршіктер өлшемі рекристаллизациялық босаңдатудың температурасынан (6.31*а*-сурет), осы босаңдатудың ұзақтылығынан (6.31 *б*-сурет), алдыңғы деформацияның дәрежесінен (6.31 *в*-сурет), қорытпаның химиялық құрамынан, бастапқы түйіршіктердің өлшемінен, ерімейтін кірмелердің бар болуынан және т. б. тәуелді болады. Берілген деформация дәрежесінде температура жоғарылаған сайын және босаңдатудың ұзақтылы үлкейген сайын түйіршіктер өлшемі өседі. Рекристаллизацияланған түйіршіктердің өлшемі деформация дәрежесі үлкен болған сайын кіші болады (6.31*в*-суретті қараңыз). t_1 және t_2 температурасында ($t_{\text{п.р}}$ температурасынан жоғары) рекристаллизацияланған түйіршіктердің пайда болуы лезде жүрмейді. Осы түйіршіктердің пайда болуы кейбір уақыттан кейін (0n', 0n), яғни инкубациялық мерзімнен кейін жүреді.

Деформация дәрежесі өте кішкентай болған кезде (6.31 *в*-сурет) қыздыру рекристаллизацияға алып келмейді. Деформацияның дәрежесі 3 ÷ 15 % болған кезде түйіршіктер өлшемі босаңдатудан кейін тез үлкейеді және бастапқы түйіршіктердің өлшемінен сан рет артып кетеді. Осындай деформация дәрежесін (f, f') межелік деп

атайды. Межелік деформация дәрежесімен жаншығаннан кейін, жаңа түйіршіктердің пайда болуы және өсуі рекристаллизация механизмі бойынша жүрмейді. Межелік деформация дәрежесімен өңдеуге түскен металды қыздырса, бастапқы рекристаллизацияланбаған түйіршіктердің біреулері көршілерін сіңіру есебінен тез өседі. Екінші рекристаллизациямен ұқсас рекристаллизацияның осындай механизмі, кішкентай деформация дәрежесінде әр түрлі түйіршіктердің біркелкі емес деформациялануымен түсіндіруге болады. Сондықтан қыздырған кезде, кішкене деформацияланған түйіршіктердің өсу мүмкіндігі пайда болады, яғни бос энергияның төменгі мәніне ие болған түйіршіктер өседі. Осы өсу тым деформацияланған түйіршіктердің есебінен, яғни үлкен бос энергиясы бар түйіршіктердің есебінен жүреді. Межелік деформация дәрежесі босаңдату температурасы жоғары болған сайын кішкене болады (6.31*в*-сурет).



6.31-сурет. Температураның (*а*), қыздыру ұзақтылығының (*б*) және деформация дәрежесінің (*в*) рекристаллизацияланған түйіршіктің өлшеміне әсері; 0n, 0n' – рекристаллизацияның инкубациялық мерзімі; $t_1 < t_2 < t_3$ – рекристаллизациялық босаңдатудың температурасы; f, f – межелік деформацияның дәрежесі

Демек, межелік деп одан жоғары деформация дәрежесін қолданғанда қыздырудан кейін бірінші рекристаллизация мүмкін болатын ең кіші деформация дәрежесін айтады.

Осыны, деформацияның дамуымен дислокацияның жоғары тығыздығы бар бөлімдер саны көбейетіндігімен, демек

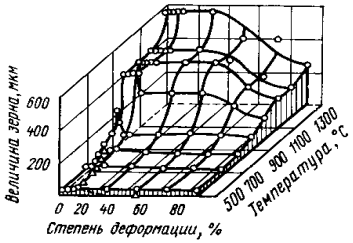
рекристаллизациялық көлемнің пайда болу мүмкіндігі үлкейетіндігімен түсіндіруге болады. Жоғары деформация дәрежесінде рекристаллизациялық көлемнің пайда болу жылдамдығы, олардың өсу жылдамдығынан артып кетеді. Демек осы ұсақ түйіршіктердің пайда болуын алдын ала анықтайды.

Түйіршіктер өлшемінің температурадан және деформация дәрежесінен тәуелділігін жиі рекристаллизация диаграммасы түрінде бейнелейді (6.32-сурет). Осы диаграммалар бастапқы жорамалмен рекристаллизациялық босаңдатудың режімін таңдауға мүмкіндік береді. Бірақта босаңдатудың нәтижесі басқа факторлардан да тәуелді болатындығын ескеру қажет. Рекристаллизация диаграммалары қоспалардың әсерін, қыздыру жылдамдығын және деформацияға дейінгі түйіршік өлшемін ескермейді. Қыздыру тез болған сайын түйіршік өлшемі ұсақ болады. Бастапқы түйіршіктің өлшемі кіші болған кезде, межелік деформация дәрежесі жоғарылайды және рекристаллизацияланған түйіршік берілген деформация дәрежесінде ұсақ болады екен.

Рекристаллизация текстурасы. Алдыңғы деформация дәрежесі жоғары болған кезде металда текстура пайда болады. Айтылған металды кейінірек қыздырған кезде жиі осы текстура рекристаллизация текстурасының пайда болуының негізгі себебі болады. Осы жағдайда жаңа рекристаллизацияланған түйіршіктерде басымырақ болатын кристаллографиялық бағыттар бар. Рекристаллизациялық текстураның түрі босаңдатуды жүргізудің жағдайымен, алдында қолданылған қысыммен өңдеудің түрімен (илемдеу, сымдау, баспақтау, қалыптау, т. б.), ал тағы да кірменің мөлшері және табиғатымен анықталады. Бетке центрленген торы бар металдарды төменгі температурада босаңдататын болса, онда деформация текстурасы сияқты текстура пайда болады, ал жоғары босаңдату температурасын қолданса, онда деформация текстурасынан айырмашылықта болатын текстура пайда болады немесе текстура жоқ болады. Рекристаллизация текстурасын мыста, алюминийде, темірде және басқа металдарда байқауға болады. Рекристаллизация текстурасы пайда болса, онда босаңдатылған

поликристалдық металл қасиеттердің анизотропиясымен сипатталады.

Сөйтіп, қаңылтырды терең қалыптаған кезде бүрме, жиектің толқындылығы және т. б. ақаулар пайда болмас үшін қаңылтыр барлық бағытта бірдей деформациялану қажет. Сондықтан анизотропия осы жағдай үшін керек емес. Трансформаторлы болаттың анизотропиясын [100] бойымен магнитті өткізгіштіктің ең үлкен мәнін магниттік ағынның бағытымен параллельді болатын етіп қолданады.



6.32-сурет. Титанның рекристаллизация диаграммасы

Суық және ыстық деформация. Деформация температурасы мен рекристаллизация температурасы арасындағы қатынасқа байланысты деформацияны суық және ыстық деформация деп екіге бөледі. Суық деформация деп рекристаллизация температурасынан төменгі температурада жүргізілетін деформацияны айтады. Сондықтан суық деформация металдың беріктенуімен (қақталмамен) қошталады.

Ыстық деформация деп толық рекристаллизацияланған құрылымды алу үшін рекристаллизация температурасынан жоғары температурада жүргізілетін деформацияны айтады.

Осы температураларда деформация тағы да металды беріктендіреді («ыстық қақталма»). Осы беріктену толық немесе жарым-жартылай өңдеу температурасында және одан кейінгі салқындатуда өтетін рекристаллизациямен алынып тасталынады. Полигонизация жүрген жағдайда беріктену жарым-жартылай металда сақталады. Бұрын қаралған полигонизация мен рекристаллизацияны *статикалық* деп атайды. Өйткені олар

деформациядан кейін жүреді. Ал егер деформация жүріп жатқан кезде полигонизация мен рекристаллизация жүретін болса, онда оны *динамикалық* деп атайды.

Ыстықтай қысыммен өңдеген кезде (илемдеу, баспақтау, ұсталық соғу, қалыптау, т. б.), деформация уақытында жүретін динамикалық полигонизация мен рекристаллизация кезінде тікелей деформация процесінде жүретін қақталманың нәтижесінде пайда болатын беріктену (дислокация тығыздығының жоғарылауы) үздіксіз беріксіздену процесімен (дислокация тығыздығының азаюы) алмасып отырады. Динамикалық полигонизация мен рекристаллизацияның статикалық полигонизация мен рекристаллизациядан негізгі айырмашылығы осыда.

Суықтай деформация мен ыстықтай деформацияның арасындағы шекара шартты екендігіне ерекше көңіл аудару қажет. Осы шекара өңдеудің сұлбасынан, жылдамдығынан және температурасынан, салқындату жағдайынан, ал тағы да металдың (қорытпаның) рекристаллизациясы жылдамдығынан тәуелді болады.

Ыстықтай деформацияны қорытпаның құрамына және деформация жылдамдығына байланысты әдетте (0,7 ÷ 0,75) $T_б$ температурасында жүргізеді.

Осы температураларда динамикалық полигонизация мен рекристаллизация процестері деформациялау процесінде жүріп үлгереді. Осы илемді деформацияға металдың кедергісін едәуір азайтып, илемділікті жоғарылатады.

Деформациядан кейін металда жарым-жартылай жүрген рекристаллизацияланған құрылым бар болса, онда осындай өңдеуді толық ыстық емес немесе жылы деформация деп айтқан дұрыс болады. Осындай жағдайда үлкен жаншумен металда деформациялау қиындатылады.

Егер рекристаллизация температурасынан жоғарғы температурада металл қақталма күйін сақтайтын болса немесе полигинизацияланған құрылымға ие болатын болса, онда осындай өңдеуді суықтай деформациялауға жатқызу қажет.

Бақылау сұрақтары.

1. Қайтару деп нені айтады ?
2. Полигонизация деп нені айтады ?
3. Бірінші рекристаллизация деп нені айтады ?
4. Техникалық таза металдар үшін рекристаллизация басталатын температураның мөлшері қандай ?
5. Қатты ерітінді қоспалары үшін рекристаллизация басталатын температураның мөлшері қандай ?
6. Екінші рекристаллизация деп нені айтады ?
7. Жинау рекристаллизациясы деп нені айтады ?
8. Суық және ыстық деформациялардың айырмашылығы қандай ?
9. Статикалық деп қандай рекристаллизацияны айтады ?
11. Динамикалық деп қандай рекристаллизацияны айтады ?

Илемді деформацияның механизмі. Сырғумен деформациялау

Металл және қорытпалардың илемді деформациясының негізгі механизмі болып – кристалдың бір бөлігінің екінші бөлігімен салыстырғанда түйіршіктің ішімен ығысып орын ауыстыру есептеледі. Осылай ығысып орын ауыстыру дислокацияның көптеген қозғалыс түрлерімен жүзеге асатыны жоғарыда айтылды. Жоғарыда айтылған жағдайларда ішкі түйіршікті илемді деформация туралы айтылып тұр.

Деформацияны $T \geq 0{,}5T_б$ температурасында жүргізгенде жалпы деформацияның 20% дейін түйіршіктер шекарасы бойымен сырғанақтаумен жүруі мүмкін. Ішкі түйіршіктік және түйіршік аралық илемді деформацияны елеулі жеңілдететін диффузиялық процестер болғандықтан, оларға маңызды мәнді береді. Вакансиямен жеңілдетілетін жеке кристалдың диффузиялық орын ауыстыруы да (сырғанақтау) іске асуы мүмкін. Осындай температура вакансияның жылжымалылығын және шоғырлануын елеулі өсіреді.

Металл және қорытпаларды илемді деформациялау процесінде жиі бір уақытта бірнеше механизмдер іске асады. Әр

түрлі маханизмдердің нақты үлесі мына факторлармен анықталады: кристалдық тордың типі; химиялық және фазалық құрам; металдың құрылымы, деформацияның температурасы, дәрежесі, жылдамдығы, т.б.

Ең кіші Бюргерс векторына және тым тығыз байланған жазықтықтарға ең аз Пайерлс кернеуі сәйкес келетіні дислокация теориясынан белгілі. Әдетте дислокацияның жылжымалылығын талдағанда Пайерлс шешімін қолданады. Пайерлс дислокация қозғалысының басталуына керекті энергияны $\Delta E = E - E_0$ және потенциалды кедергіні жеңіп дислокацияның қозғалуына керекті межелік жанама кернеуді анықтайтын мына формуланы ұсынды:

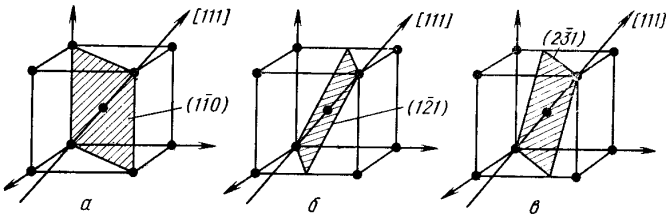
$$\tau_{п-н} = \frac{2G}{q} exp\left(-2\pi a / qb\right), \qquad (6.18)$$

мұндағы $q = 1$ бұрандалы дислокация үшін және $q = 1 - \nu$ шеттік дислокация үшін (ν – Пуассон коэффициенті). $\tau_{п-н}$ кернеуін *Пайерлс-Набарро кернеуі* немесе *дислокация қозғалысының басталуына қажетті кернеу* деп атайды. Сондықтан монокристалдар және поликристалдардың кристаллиттері тығыз байланған жазықтың атомдары тығыз орналасқан бағыттарда сырғумен деформацияланады. Осы жазықтықта жататын сырғу жазықтықтары және бағыттары сырғу жүйесін құрайды.

Сырғу жүйесі. БЦК торы бар металдар тығыз байланған октаэдрлік жазықтың (111) тығыз байланған бағыты <110> мен деформацияланады. Әрбір әр түрлі бағытталған төрт жазықтыққа {111} толық дислокацияның 0,5*a* [110] тең Бюргерс векторы бар үш бағыт <110> сәйкес келеді (*a* – кубтық тордың тұрақтысы). Сырғуға қатыса алатын сырғу жүйесінің барлық саны 4·3 = 12-ге тең. Октаэдрлік жазықтықтан өзгеше жазықтықта сырғу сирек кездеседі және жоғары температурада көбірек мүмкін болады. Мысалы, алюминий металында сырғу үш жазықтық {100} байқалады. Осы жазықтың әрбіреуінде екі бағыт <100> бар, яғни 3·2 = 6 сырғу жүйесі қосылады. Жоғарғы температурада алюминийдегі осы сырғу жүйесіне сырғу сызығының 40% шамасы жатады.

КЦК торы бар металда сырғу <111> бағыты бойымен ылғи да жүреді (6.33-сурет). Бұл бағыт толық дислокацияның ең аз 0,5*a*[111]

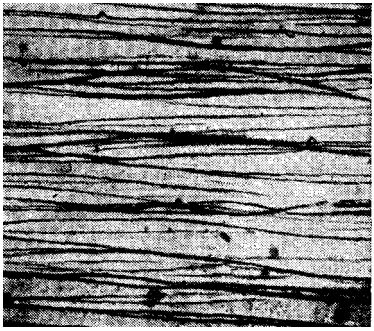
Бюргерс векторына сәйкес келеді. Мұндағы {110} жазықтығы әбден тығыз байланған жазықтық (6.33 *а*-сурет), ал {112} жазықтығы (6.33 *б*-сурет) байлану ақауының басты жазықтығы болады (тығыз байланған қабат кезектесуінің бұзылуын байлану ақауы деп атайды. Байлану ақауымен энергияның көбеюі байланысты. Байлану ақауының энергия өлшем бірлігі – эрг. $см^{-2}$). Байлану ақауының пайда болу энергиясына байланысты әр түрлі сырғу жүйесі байқалады (6.2-кестесі). Көлемге центрленген куб құрылымында бұдан да басқа сырғу жазықтықтары кездеседі. Мысалы, {123} көрсеткіші бар және басқа үлкен көрсеткіші бар жазықтар (6.33 *в*-сурет). Айтылған жазықтықтарда сырғу жоғарғы температурада немесе кіші деформация жылдамдығында (барлық температурада) жүреді. Әдетте осы сырғуды бұрандалы дислокацияның көлденең сырғуымен байланыстырады. Тәжірибеде дәлелденгендей, деформация температурасы жоғарыланған сайын ($T/T_б$) сырғу жүйесіне қатысушы жазықтықтар мынадай тәртіппен нәтижелі орналасатындығы байқалған: {110}, {112}, {123} және {*hkl*}. Басқа тәртіптің бар болуы сырғу жүйесінен шығарылмайды. Мысалы: {112}, {110}, {123}. Бұл Пайерлстің энергетикалық шарты және байланыс ақауы энергиясының мөлшері сырғу құбылысын толық түсіндіруге жеткілікті белгі еместігімен түсіндіріледі. Сонда, Пайерлс кернеуінің және байланыс ақауы энергиясының температурамен байланыстығына үлкен маңызды береді.



6.33-сурет. КЦК торы бар бар құрылым үшін типтік сырғу жүйелері

Егер сырғу {112}<111> жүйесімен жүретін болса, онда <111> бағыты төртеу болады (кубтық тордың төрт кеңістіктік

дигоналы). Әрбір бағыт <111> үш жазықтың {112} сызықтық қиылысуы болып табылады. Сондықтан, физикалық әр түрлі сырғу жүйесінің 12-сі бар болады. Кубтың кеңістіктік диагоналы {110} және {123} типті үш жазықтықтың сызықтық қиылысуы болып танылады (6.33-сурет). Сондықтан {110} және {123} жазықтықтарында <111> бағытымен сырғу пайда болған кезде, тағы да 12 әр түрлі физикалық сырғу жүйелері қосылады. Бірталай КЦК металдарында мүмкін болатын сырғу жүйелерінің саны көп (мысалы, темірде <111> типті бағыттың әрбіреуінің айналасында {110}{112} және {123} жиынтығына кіретін 12 жазықтықтар орналасқан. Осы жазықтықтар мен бағыттар 48 сырғу жүйесін құрайды). Кейбірде байқалатын сырғу сызықтары (6.34- сурет) жолақты үлкен толқынды түрге алып келеді. Сырғу жазықтығы призманың беті болып саналады. Осы призманың әрбір жағы қандай болса да сырғу жазықтығымен беттеседі, ал қыры (осы жазықтықтардың қиылысу сызықтары) сырғу бағытымен сәйкес келеді. Сырғу байлап тасталынған қарандаштың бойлық ығысуына ұқсас болып келеді. Сондықтан ол «қарандашты сырғу» деген атты алған.



6.34-сурет. Бөлме температурасында деформацияланған Fe + 3 % Si қорытпасындағы (111) жазықтығымен жүрген сырғу сызығы

ГТТ торы бар металда көптеген неше түрлі сырғу жүйелері байқалады. Айтылған сырғу жүйелері *c*/*a* қатынасымен байланысты (6.2-кестесі). Мөлшері ең кішкентай *a*/3 $<11\bar{2}0>$ Бюргерс векторы тығыз байланған жазықтық {0001} жатады. Осындай жағдайда бір жазықтық және үш бағыт үш сырғу

6.2-кесте

Кейбір металл және қорытпалар үшін сырғу жүйесі

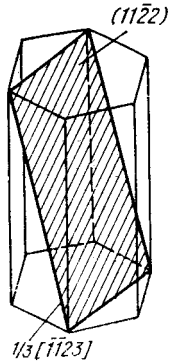
Металл немесе қорытпа	Басым сырға жүйесі (жазықтық және бағыт)		Бөлме температурасындағы $\tau_м$, МПа	$\tau_м$ анықталатын металдың тазалығы
	Бөлмелік температурада	Жоғарғы температурада, ал тағы да басқа жүйелер		
Бетке центрленген куб (БЦК)				
Cu	{111} <110>	{100}<110>	0,35	99,999
Au	{111} <110>	{100}<110>	0,50	99,999
Ag	{111} <110>	{100}<110>	0,40 – 0,70	99,999
Ni	{111} <110>	{100}<110>	3,30 – 7,50	99,98
Al	{111} <110> және {100} <110>	{100}<110>	0,55 – 1,00	99,994
Көлемге центрленген куб (КЦК)				
Fe	{110} <111>	{123} және	15,00	99,96
	{112} <111>	{*hkl*} <111>		
	{123} <111>			
	{110} <111>			
Fe + Si	{112} <111>	{123} және {*hkl*}<111>		
Nb	{110} <111>	-	34,0	Аймақтық тазаланған
Гексагональды тығыз байланған тор (ГТТ)				
Cd (c/a = 1,886)	<11$\bar{2}$0 >{0001} және {1101}	<1120>{1010} және {0001}	0,13	99,999
Zn (c/a = 1,856)	<11$\bar{2}$0 >{0001} және {1122}	<1120>{1010} <1123>{1122}	0,30	99,999
Mg (c/a = 1,624)	<11$\bar{2}$0 >{0001} және {1100}	<1120>{1011}{0001} <1120>{0001}	0,50	99,99
Co (c/a = 1,621)	<11$\bar{2}$0> {0001}		6,5	99,999
Ti (c/a = 1.59)	<11$\bar{2}$0> {1010}	<1120>{0001}	14,0	99,99
Zr (c/a = 1,59)	<11$\bar{2}$0> {1010}		7,0	99,0

жүйесін құрайды. Co, Zn, Cd, Mg металдарындағы (0001) жазықтығында созылған дислокацияның байқалуы, осы жазықтықта байлану ақауының энергиясының төмен болуын дәлелдейді. ГТТ торында c/a = 1,633 қатынасы тығыз байланған сфералық өте оңды құрылымға сәйкес келеді. Cd және Zn үшін c/a қатынасы 1,633 кіші (6.2-кестесі), сондықтан сырғу табан жазықтығында {0001} жүреді. Mg және Co-те c/a қатынасы 1,633 кіші болғанымен (1,62), байлану энергиясының төмен болуының арқасында сырғу (0001) жазықтығында әйтсе де жүреді. Ti және Zn торларының c/a қатынасы тағы да кішкентай, өйткені табан жазықтықтарының арасымен салыстырғанда

{1010} жазықтықтарының арасындағы ара қашықтық үлкен емес. Пайерлс формуласына сәйкесті, осы металдарда призматикалық деп аталатын {1010} жазықтықтары бойынша сырғу әйтсе де жүреді.

Мырыш және кадмий металдарының байлану ақауының энергиясы салыстырмалы төмен болады. Сондықтан табан жазықтығында бөлшектелген $a/3 <11\bar{2}0>$ дислокациясы үшін көлденең сырғу энергетикалық қолайлы. Өйткені бөлшектелген дилокациялар осындай да тұтастануы керек.

Табан жазықтығында сырғумен бірге ГТТ кристалдарында $\{11\bar{2}2\}$ жазықтығында және $a/3<\bar{1}\bar{1}23>$ бағытында сырғу тағы да байқалады (6.35-сурет). $\{10\bar{1}1\}$ және $\{11\bar{2}2\}$ пирамидалық жазықтықтарда дислокациялар бөлшектерге бөлшектену мүмкін.



6.35-сурет. Гексагональды тығыз байланған тордағы $<11\bar{2}3>$, $\{11\bar{2}2\}$ сырғу жүйесі

Бақылау сұрақтары.

1. Сырғу жүйесі деп нені айтады ?
2. Бетке центрленген куб торында бөлмелік температурада қандай сырғу жүйесімен деформация жүреді ?
3. Көлемге ценрленген куб торында бөлмелік температурада қандай сырғу жүйесімен деформация жүреді?
4. Гексагональды тығыз байланған торда бөлмелік температурада қандай сырғу жүйесімен деформация жүреді?

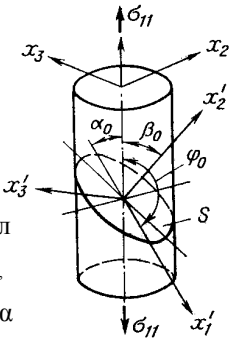
5. Бетке центрленген куб торында жоғарғы температурада қандай сырғу жүйесімен деформация жүреді?

6.9. Монокристалда сырғу жүрген кездегі келтірілген жанама кернеулер. Сырғу кезіндегі ығысу деформациясы. Кернеу – деформация қисық сызығы

Егер кез келген металдың кездейсоқ бағытталған кристалын созумен деформацияласа, онда елеулі әр түрлі $\sigma - \varepsilon$ (кернеу-деформация) қисық сызығы алынады. Мұны сырғу жазықтықтары мен бағыттарының сыртқы күшпен салыстырғанда әр түрлі бағытты болуымен түсіндіруге болады. Созғанда пайда болатын ағыс кернеуінің, уақытша кедергінің және салыстырмалы ұзарудың белгілі анизотропиясы кубтық кристалдарда байқалады. Осы кристалдарда кейбір физикалық қасиеттер (мысалы, электркедергі) барлық бағытта бірдей. Мырыштың гексагональды кристалын созған кезде жазықтықтардың бағыты өзгерсе, онда ағыс кернеуі асып кеткенде 6 рет өзгереді. Созу мен сынағы кезде салыстырмалы ұзарудың мөлшері жазықтықтардың бағыты өзгергенде бірнеше пайыздан бірнеше жүз пайызға дейін өзгеруі мүмкін.

Осындай жағдай мынадай түсінікті айтуға мүмкіндік береді. Ығысу жолымен іске асатын сырғу процесінде ағыс кернеуін тіркеу кернеуді өлшеудің дұрыс емес әдісі. Осы, созу бағытында салыстырмалы ұзаруды анықтауға да қатысты. Өйткені қабылданған деформация мен кернеуді анықтау әдісі анық көрсетілген кристаллографиялық жазықтықтар жүйесінде пайда болатын деформацияны бейнелеуге толық жарамайды. Сондықтан ығысуға сынау ең қолайлы сынау әдісі екендігін айтқан жөн. Бірақта сынауға созу әдісін қолдану ең қолайлы. Осы себептен созу кезінде алынған кернеу-деформация қисық сызықтарын әр түрлі бағыттағы кристалдарға қолдану үшін сырғу жазықтығындағы кернеу мен деформацияға қайта санау керек. Соңғы айтылған кернеу мен деформацияны анықтайық.

Монокристалл жай созу жағдайында болсын (6.36-сурет). Оған x_1 осі бағытында σ_{11} кернеуі әсер етсін. σ_{11} кернеуі x_1, x_2, x_3 координаттар жүйесіндегі σ_{ij} тензорының жалғыз сыңары.



6.36-сурет. Жай созу жағдайындағы монокристалл үшін сырғудың геометриясымен байланысты x_1', x_2', x_3' координаттар жүйесі (мұндағы $\varphi = 180^o - \alpha$ және $\cos\varphi_o = \cos\alpha_o$)

Енді жаңа координатар жүйесін таңдайық. Сырғу жазықтығындағы S нормаль жаңа координаттар жүйесінің x_2' осімен сәйкес келсін. Созу бағытындағы x_1 осі және x_2' осі арасындағы бұрыш β_0 тең болсын. Сонда мынаны қабылдауға болады: $\cos\beta_o = \lambda_{2'1}$, мұндағы $\lambda_{2'1}$ - x_2' және x_1 осьтерінің арасындағы бағыттаушы косинус. Жаңа x_1', x_2', x_3' координаттар жүйесіндегі сырғу бағыты x_1' осі бағытымен сәйкес келеді, ал x_1' және x_1 осьтерінің арасындағы бағыттаушы косинус мынаған тең: $\lambda_{1'1} = \cos\alpha_o$. x_1', x_2', x_3' координатты осьтерімен белгіленген осы сырғу жүйесіндегі кернеуді ескі координаттар жүйесіндегі кернеу тензорын σ_{ij} өзгерту арқылы мына формуламен табуға болады:

$$\sigma_{i'j'} = \lambda_{i'i}\lambda_{j'j}\sigma_{ij}. \qquad (6.19)$$

Жанама кернеу τ-дің әсерімен сырғу жүретін болғандықтан біздің назарымызға кернеу тензорының $\sigma_{i'j'}$ жалғыз сыңары $\tau = \sigma_{1'2'}$ түседі. Осы сыңар ($\tau = \sigma_{1'2'}$) x_1' жылжыту бағытында

бір жазықтықты екінші жазықтыққа қатысты жылжытады. Сондықтан

$$\tau = \sigma_{1'2'} \quad \lambda_{1'i} \cdot \lambda_{2'j} \cdot \sigma_{ij} \quad \lambda_{\overline{1}1} \cdot \lambda_{2'1} \cdot \sigma_{11} \quad \cos\alpha_o \cdot \cos\beta_o \cdot \sigma_{11}. \quad (6.20)$$

Осы теңдеуді бірінші болып Шмид алған. Сондықтан $m = \cos\alpha_o \cdot \cos\beta_o$ көбейткішін *Шмид факторы* деп атайды. Жоғарыда жазылған теңдеуден байқалатыны, егер созу осі сырғу жазықтығына параллельді болса ($\beta_o = 90^o$) немесе созу осі сырғу жазықтығына нормальды болса ($\beta_o = 0^o$; $\alpha_o = 90^o$), онда жанама кернеу τ нөлге тең болады. Жоғарыда көрсетілген шекті бағыттарда сырғумен деформация болмайды. Өйткені сырғу бағытында жанама кернеу нөлге тең. Ең үлкен жанама кернеу Шмид факторы m = 0,5 тең болғанда пайда болады. Мұндай жағдай α_o және β_o бұрыштары 45^0 тең болғанда ғана болады. Осыдан шығатыны $\tau_{max} = 0,5\sigma_{11}$.

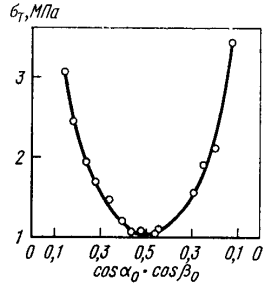
Егер кернеудің әсерінен монокристалда илемді ағыс пайда болса, онда ығысу кернеуінің τ мөлшері $\tau_м$ жанама кернеуіне жетеді. Жоғарыда көрсетілген мөлшер бір жазықтықпен салыстырғанда екінші жазықтықты кристаллографиялық сырғуға әкеледі. $\tau_м$ жанама кернеуінің мөлшері кристаллографиялық жазықтық пен бағыттың кеңістікте орналасуымен байланысты болмайды. Сондықтан бұл мөлшер осы металға және осы сырғу жүйесінің типіне тұрақты болады. Ығысу кернеудің шекті мөлшеріне $\tau_м$-ді қабылдап мынаны табамыз:

$$\sigma_a = \tau_м / cos\alpha_0 \cdot cos\beta_0 = \tau_м / m, \quad (6.21)$$

яғни монокристалдың ағым шегі σ_a Шмид факторымен m және өзінің кеңістікте орналасуымен анықталады. σ_a үшін алынған тәжірибелік нүктелер (6.21) формула бойынша саналған қисық сызық $\sigma_a(m)$-ге жақсы сәйкес келеді (6.37-сурет). Бұл Шмид заңының дәл сақталатындығын дәлелдейді. Тәжірибелік мұндай дәлдік кадмий, мырыш және магний үшін, яғни ГТТ торы бар кристалдар үшін дәлелденген.

$\tau_м$ мөлшеріне металдың тазалық дәрежесі, қоспаланған металдың шоғырлануы, деформацияның жылдамдығы едәуір әсер етеді. Тазалық дәрежесі жоғарғы металдар үшін анықталған $\tau_м$-нің кейбір мөлшерлері 6.2-кестеде көрсетілген. $\tau_м$ кернеуінің мөлшері техникалық таза металдарды және олардың негізіндегі

қорытпаларды ығысуға сынағанда ағым шегінен едәуір кіші екендігін тәжірибемен дәлелденген. Таза темір үшін (99,96%) $\tau_м$ = 15 МПА, ал Ст3 болаты үшін $\tau_м$ =105 МПа.

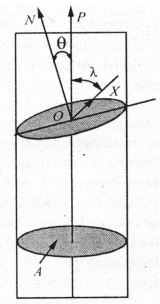


6.37-сурет. Мырыш кристалын (99,999 %) созған кезде ағым кернеуінің σ_a Шмид факторынан m тәуелділігі

Сонымен жалпы жағдайда, созу үшін түсірілген күш сырғу басымырақ жүретін жазықтық пен бағытқа еркін бұрышпен θ әсер етеді. 6.38-суретте созу осімен P және сырғу жазықтығының нормалы ON арасындағы еркін бұрыш θ, ал тағы да созу осімен P және сырғудың бағыты OX арасындағы бұрыш λ көрсетілген. Сырғу бағытына OX әсер ететін созу күшінің P құрастырушысы және сырғудың ауданы мынаған тең (сәйкесті жазылған):

$$P_x = P\cos\lambda; \quad A_x = A/\cos\theta,$$

мұндағы A – кристалдың созу осіне перпендикулярлы көлденең қимасының ауданы.



6.38-сурет. Шмид факторын есептеуге қажетті сұлба

Осыдан сырғудың бағыты мен жазықтығында әсер ететін келтірілген сырғу кернеуі былай табылады:

$$\tau = \frac{P_x}{A_x} = \frac{P\cos\lambda}{A/\cos\theta} = \sigma\cos\lambda\cdot\cos\theta, \qquad (6.22)$$

мұндағы $\sigma = P/A$ – созатын кернеу.

Берілген сыртқы күштен пайда болатын созатын кернеу әсер еткен кезде келтірілген ығысу кернеуінің τ мөлшері созатын күшке қатысты сырғу жүйесінің бағытталуынан тәуелді болады. Осы бағытталудың сипаттамасы болып Шмид факторы $\cos\theta\cdot\cos\lambda$ саналады. Демек, берілген кернеу σ әсер еткен кезде келтірілген ығысу кернеуі τ, созу осіне қатысты 45° бұрышпен орналасқан сырғу жазықтықтарында ең үлкен мөлшерге иемденеді. Нормальды кернеу кристалдардың илемді ағуына әсер етпейтіндігін айта кеткен жөн. Илемді деформация жанама кернеулердің әсерімен жүреді. Жазықтықтар бойынша жеңіл сырғу тек келтірілген кернеу (6.38-сурет) межелік ығысу кернеуінен үлкен болған жағдайда ғана мүмкін болады.

Ығысудың элементарлы актісі болып кристалдың бір жақ бөлімінің екінші жаққа қатысты бір атомаралық қашықтыққа жылжуы саналады. Кристалдың бір бөлігі екінші жаққа қатысты ығысқанда, бөлімдер бір тұтас түрде қозғалады деген шартты орындасақ, онда межелік ығысу кернеуін есептеуді мына формуламен орындауға болады:

$$\tau_{м} = G/2\pi, \qquad (6.23)$$

мұндағы G – ығысқандағы серпімділіктің модулі.

Межелік ығысу кернеуінің $\tau_м$ мөлшерін кристалдың теориялық беріктігі деп айтатындығын біз жоғарыда айттық. Нақты кристалдарда ығысу пайда болу үшін мөлшері бойынша 10^{-4}G жақын кернеу талап етіледі. Осы кернеу 1000 рет кернеудің теориялық мәнінен кіші. Теориялық және тәжірибелік межелік бөлетін кернеулердің мәндерінің осындай айырмашылығы дислокациялардың бар болумен байланысты.

Илемді деформация дислокациялық механизммен жүрген кезде межелік ығысу кернеуін жуықты мәнін мына Пайерлс-Набарро формуласымен есептеуге болады:

$$\tau = \frac{2G}{1-\nu}e^{\frac{2\pi}{1-\nu}\cdot\frac{a}{b}}, \qquad (6.24)$$

мұндағы ν – Пуассон коэффициенті; *a* – сырғу жүретін атомдық жазықтар арасындағы ара қашықтық; *b* – сырғу бағытындағы атомаралық ара қашықтық (дислокацияның Бюргерс векторы).

Таза металдардың межелік кернеулері температурадан аз тәуелді болады, ал қорытпалар үшін осы тәуелділік едәуір.

Сырғу кезіндегі ығысу деформациясы. *Кернеу деформация қисық сызығы*. Ығысу кернеуі сияқты ығысу деформациясы да үлгілікті созып алынатын салыстырмалы ұзарумен салыстырғанда деформацияның тым дәл өлшемін береді. Екі көрші сырғу жазықтықтарының *S* және S' салыстырмалы жылжуының мөлшері ығысу деформацияның мөлшері болуы мүмкін (6.39-сурет). Сырғу кезінде үлгіліктің геометриясы өзгереді. Әуелі де көлденең қимасы дөңгелек болатын үлгілікті созсақ, ол созу барысында көлденең қимасы сопақ болатын үлгілікке айналады. *S* жазықтығымен салыстырғанда S' жазықтығының ығысуы және оның x_1' бағытында (BB' бойымен) сырғумен орын ауыстыруының нәтижесінде S' жазықтығы жаңа S'' орнын алады. Деформацияның бастапқы кезеңіндегі үлгіліктің осімен жазықтық *S*(S')-тің нормалы арасындағы β_o бұрышы үлгілік ұзарған сайын β_1 бұрышына дейін үлкейеді, ал деформацияға дейінгі сырғу бағытымен үлгі осі арасындағы α_o бұрышы α_1 бұрышына дейін азаяды, яғни созылу осіне қарай сырғу бағыты (ось x_1' немесе BB') бұрылады (6.39-суретте эквивалентті, бірақ кері сұлба көрсетілген. Сырғу бағыты (x_1' осі немесе BB' бағыты) өзгермейтіндей бекітілген, ал үлгіліктің AB' осі сырғу осі x_1' қарай бұрылады). Созу процесінде жылжитын *S* және S' жазықтықтар бөліміндегі үлгіліктің ұзындығы, осы жазықтықтар арасындағы *AN* аралығына тең, яғни $l_o = AB$. Деформациядан кейін *S* және S' жазықтықтары арасындағы аралық AB' кесіндісіне тең болады. Осы себептен және созу процесінде осы аралық өлшенетін болғандықтан $l_1 = AB'$.

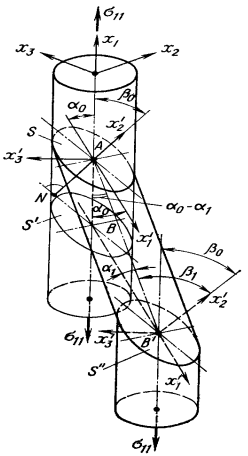
S және S' жазықтықтарының арасындағы *AN* аралығын *ABN* үшбұрышын қолдану арқылы былай анықтауға болады: $AN = l_o\cos\beta_o$. *N* нүктесін B' нүктесімен қосып *NB* және BB' кесінділері S' жазықтығында жататынын байқаймыз, яғни S' жазықтығында NB' кесіндісі де жатады, ал ANB' бұрышы тік

болады. ANB' бұрышынан мынаны табамыз: $AN = AB' \cdot \cos(\angle NAB')$. $\angle NAB' = \beta_1$, тең екендігін ескеріп, ABN және $AB'N$ үшбұрыштарынан мынаны анықтаймыз:

$$AN = l_o \cdot \cos\beta_o \quad l_1 \cdot \cos\beta_1. \tag{6.25}$$

ABB' үшбұрышына қарап BB' ығысу мөлшерін былай табамыз:

$$BB' = l_1 \cdot \cos\alpha_1 - l_o \cdot \cos\alpha_o. \tag{6.26}$$



6.39-сурет. S' жазықтығын S жазықтығымен салыстырғанда x_1' осі бағытында BB' жолымен сырғытқан кезде ығысу деформациясын анықтауға керекті сұлба

$\angle BAB' = \alpha_o - \alpha_1$; $\angle ABB' = 180^o - \alpha_1$; теңдіктерін ескеріп және $l_1/l_o = \sin\alpha_o/\sin\alpha_1$ немесе $l_1/\sin\alpha_o = l_1/\sin\alpha_1$ $BB' = \left[\sin(\alpha_o - \alpha_1)\right]$ қатынастарын қолданып мынаны жаза аламыз:

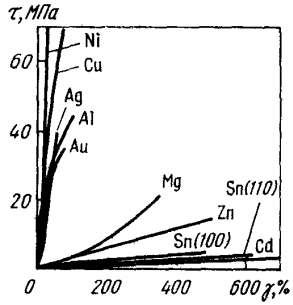
$$\gamma = l_1/l_o \quad \left[\sin(\alpha_o - \alpha_1)\right]/\cos\beta_o \cdot \sin\alpha_o. \tag{6.27}$$

Соңғы теңдеуден α_1-ді шығарып ығысу деформациясы үшін мына формуланы аламыз:

$$\gamma = \frac{1}{\cos\beta_o}\left(\sqrt{\left(l_1/l_o\right)^2 - \sin\alpha_o} - \cos\alpha_o\right). \tag{6.28}$$

Осы формуланың оң бөліміне тәжірибемен анықталатын үлгіліктің деформацияға дейінгі және кейінгі ұзындықтары, ал тағы да кристалдың бастапқы бағытталу бұрыштары α_o және β_o кіреді.

Кристалдың кернеу-деформация (σ-ε) қисық сызығын келтірілген ығысу кернеуі τ ((6.20) формула) – келтірілген ығысу деформациясы (γ) координаттарында салған орынды. Сыртқы күшке қатысты сырғу жазықтықтары мен бағыттарының бағдары әр түрлі болатын кристалдар үшін τ-γ координаталарында салынған диаграммасының қисық сызықтарының айырмашылығы толық жойылмайды, бірақ азаяды. Барлық металдар үшін келтірілген ығысу кернеуі деформация өскен сайын үлкейеді (6.40-сурет). Мұндай өсу деформациялық қақталумен немесе беріктену құбылыстарымен байланысты болады. Бірақта БЦК металдық кристалдарда кадмий, магний, мырыш сияқты ГТТ торы бар металдармен салыстырғанда беріктену дәрежесі едәуір көп болады. ГТТ торы бар металдар өте үлкен ығысу деформациясына шыдауға қабілетті, бірақ та кристалдар ыңғайлы қалыппен бағдарланса ғана.



6.40-сурет. Кейбір металдардың келтірілген ығысу кернеуі – келтірілген ығысу деформациясы (τ – γ) қисық сызықтары

Бақылау сұрақтары.

1. Шмид факторы деп нені айтады?
2. $\tau_м$ жанама кернеуінің мөлшері неден тәуелді болады?
3. $\tau_м$ жанама кернеуі деп қандай мөлшерді айтады?
4. Ең үлкен жанама кернеу Шмид факторы қаншаға тең болғанда пайда болады ?
5. Қандай жағдайда жанама кернеу нөлге тең болады?
6. Ығысу деформациясын қандай формуламен анықтайды?
7. Не себептен деформация мөлшері үлкейген сайын келтірілген ығысу кернеуі өсетіндігін түсіндіріңіз?
8. Не себептен БЦК торы бар кристалдарда беріктену дәрежесі көп болады?

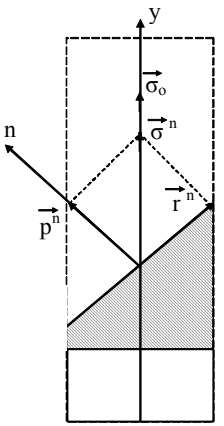
7. КЕРНЕУ-ДЕФОРМАЦИЯ КҮЙЛЕРІНІҢ ЖЕКЕ СҰЛБАЛАРЫ

Сызықтық кернеу күйі. Цилиндрлік үлгілікті созған кездегі ең жай сызықтық кернеу күйін қарайық. Цилиндрлік үлгілік *У* осі бойымен *Р* күшімен тартылсын. Үлгіліктің көлденең қимасында S_0 әсер етуші тік кернеу мынаған тең (7.1-сурет):

$$\vec{\sigma}_0 = \frac{P}{S_0} \ . \qquad (7.1)$$

Нормалы $\vec{n}$ болатын *У* осіне α бұрышымен орналасқан еңкіш алаңда тік кернеудің жалғыз ғана сыңары σ_y әсер етеді. Осы сыңар бір жағынан толық нормальды кернеу болып саналып мынадай теңдікпен табылады:

$$\vec{\sigma}^n = \vec{\sigma}_y = \vec{\sigma}_0 \cdot cos\alpha \ . \qquad (7.2)$$



7.1-сурет. Сызықтық кернеу күйі кезінде көлбеген алаңдағы кернеу

Толық кернеуді $\vec{\sigma}^n$ мынадай екі бөлімге бөлуге болады: қиғаш алаңның нормалы $\vec{n}$ бойымен бағытталған тік кернеу; алаңның жазықтығында әсер ететін жанама кернеу $\vec{\tau}^{\,n}$. Олардың мөлшері мына формулалармен есептеледі:

$$\vec{p}^n = \vec{\sigma}^n \cdot cos\alpha \quad \text{немесе} \qquad (7.3)$$

$$\vec{p}^{\,n} = \sigma_0 \cdot cos^2 \alpha \qquad (7.4)$$

және

$$\vec{\tau}^{\,n} = \vec{\sigma}^{\,n} \cdot \sin\alpha \quad \text{немесе} \qquad (7.5)$$

$$\vec{\tau}^{\,n} = \vec{\sigma}_0 \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha = \frac{1}{2}\sigma_0 \cdot sin2\ \alpha \qquad (7.6)$$

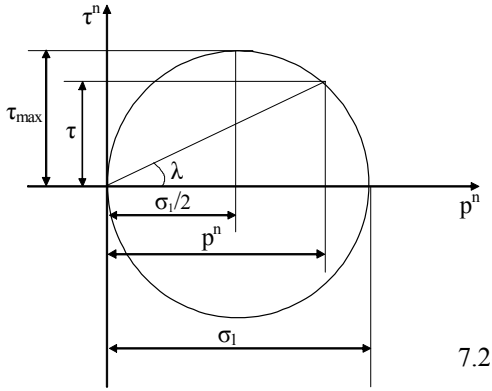
Кернеу σ_0 басты тік кернеу екендігіне көз жеткізу қиын емес. Өйткені α = 0 болған кезде жанама кернеу $\vec{\tau}^{\,n}$ жоқ болады ($\vec{\tau}^{\,n} = 0$), ал толық кернеудің алаң нормалына проекциясы $\vec{p}^{\,n}$ ең үлкен мөлшерді алып мынаған тең болады:

$$(\vec{p}^{\,n})_{\alpha=0} = \sigma_{max} = \sigma_1. \qquad (7.7)$$

Жанама кернеу $\vec{\tau}^{\,n}$ ең үлкен мөлшерді $\alpha = \pi/4\left(45^0\right)$ болған кезде алады және мынаған тең болады: $\vec{\tau}_{max} = \vec{\sigma}_1/2$.

Осы жағдайда нормальды кернеу $\vec{\sigma}_1/2$ тең болады, өйткені $\vec{\sigma}_2 = \vec{\sigma}_3 = 0$. *У* осіне параллельді алаңдарда нормальды және жанама кернеулер нөлге тең болады ($\vec{\tau}^{\,n} = \vec{p}^{\,n} = 0$).

Сызықты кернеу күйінің барлық көрінісі графикалық түрде Мор диаграммасында көрсетілген (7.2-сурет). Осы диаграммада $\vec{p}^{\,n}$ - $\vec{\tau}^{\,n}$ координатасында салынады.



7.2-сурет. Мор диаграммасы

Шеңбердің диаметрі σ_1 тең ($\sigma_{min} = 0$ болған кезде ең үлкен және ең кіші нормальды кернеулердің айырмасына тең). Шеңбердің центрі абсциссасы $\vec{\sigma}_1/2$ және ординатасы $\vec{\tau}^n = 0$ болатын нүктеде орналасады. Мора шеңбері басты бағытқа α бұрышымен орналасқан кез келген еңкіш алаңда әсер ететін жанама $\vec{\tau}^n$ және нормальды $\vec{p}^n$ кернеулер арасындағы қатынастарды анықтайды.

Сыртқы күштің әсерімен созылатын үлгілікте ε_x, ε_y, ε_z деформациялары пайда болады. Басты бағытта пайда болатын деформациялар ε_1, ε_2, ε_3 басты деформациялар болып саналады. Созу кернеуінің бағытындағы салыстырмалы деформация ε_1 таңбасы бойынша оң болады (салыстырмалы ұзару). Оны бойлық деп санау қабылданған, ал $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ деформацияларын көлбеулік деп есептейді.

Сызықтық кернеу күйінің кернеулер, деформациялар және деформациялар жылдамдығы тензорларын қарайық.

Жай созу (орта қысылмайды, $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0{,}5\,\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \xi_3 = -0{,}5\,\xi$, $\xi > 0$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$):

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5\varepsilon \end{bmatrix}; \quad T_\xi = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5\xi & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5\xi \end{bmatrix}$$

$$H = \sqrt{3}\xi; \quad T = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}; \quad \Gamma = \sqrt{3}\varepsilon$$

Жай қысу (орта қысылмайды, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}5\,\varepsilon$, $\varepsilon_3 = -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\xi_1 = \xi_2 = 0{,}5\xi$, $\xi_3 = -\xi$, $\xi > 0$, $\sigma_3 < 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$):

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0{,}5\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{bmatrix}; \quad T_\xi = \begin{bmatrix} 0{,}5\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5\xi & 0 \\ 0 & 0 & -\xi \end{bmatrix}$$

$$H = \sqrt{3}\xi; \quad T = \frac{|\sigma_3|}{\sqrt{3}}; \quad \Gamma = \sqrt{3}\varepsilon\,.$$

Жазық кернеу-деформация күйі. Нормальды кернеулердің сыңары $\sigma_{33} = 0$ деп жобалайық, демек 3 көрсеткішін қосатын

жанама кернеулер нөлге тең болады, яғни $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$. Осы себептен жазық кернеу күйі болған кезде тепе-теңдіктің дифференциалдық теңдеулер жүйесі екі теңдеуден тұратын болады, яғни

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{7.8}$$

Еңкіш *BC* ауданындағы кернеулерді анықтайық (7.3-сурет). Осы еңкіш алаңдағы нормаль *x* осімен α бұрышын құрсын. Кубтың *OB* және *OC* қабырғаларында σ_{11} және σ_{22} нормальды кернеулері және σ_{12} жанама кернеуі түсірілген. Бағыттаушы косинустар мынаған тең: $n_1 = \cos\alpha$; $n_2 = \sin\alpha$; $n_3 = 0$.

Бағыттаушы косинустардың мәнін мына теңдеуге қойып

$$p^n = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 + 2\sigma_{23}n_2n_3 + 2\sigma_{31}n_3n_1,$$

нормальды кернеудің мынадай мәнін аламыз:

$$p^n = \sigma_{11}\cos^2 + \sigma_{22}\sin^2 + 2\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha\,. \tag{7.9}$$

Мына тригонометриялық байланыстарды қолданып $\cos^2\alpha = \frac{(1+\cos 2\alpha)}{2}$; $\sin^2\alpha = \frac{(1-\cos 2\alpha)}{2}$ және $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$, келесі теңдеуді алуға болады:

$$p^n = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\cos 2\alpha + \sigma_{12}\sin 2\alpha\,, \tag{7.10}$$

немесе басты кернеумен

$$p^n = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\sin^2\alpha \tag{7.11}$$

Осы теңдеуді келесі түрге өзгертуге болады:

$$p^n = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha \tag{7.12}$$

Мына формулаларды қолданып:

$$\left(\tau^n\right)^2 = \left(\sigma^n\right)^2 - \left(p^n\right)^2;\quad \left(\sigma^n\right)^2 = \left(\sigma_1^n\right)^2 + \left(\sigma_2^n\right)^2 + \left(\sigma_3^n\right)^2$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1^n &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3;\\ \sigma_2^n &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3;\\ \sigma_3^n &= \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3. \end{aligned}\right\}$$

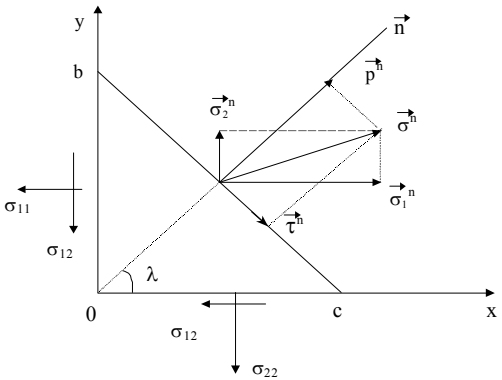
жанама кернеуді анықтайтын формуланы табуға болады:

$$\tau^n = \pm\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} sin2\alpha - \sigma_{12} cos2\alpha \qquad (7.13)$$

немесе басты кернеумен

$$\tau^n = \pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin2\alpha. \qquad (7.14)$$

$\alpha = 45^o$ болған кезде жанама кернеу ең үлкен болатындығы осы теңдеуден шығады, яғни $\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1-\sigma_2)}{2}$.



7.3-сурет. Жазық кернеу күйі болған кезде көлбеген алаңдағы кернеулер

Осы теңдеу бойынша ең үлкен жанама кернеу басты нормальды кернеулердің жартылай айырмасына тең.

Басты кернеулерді (σ_1 және σ_2) еркін координатты осьтердегі кернеулер σ_{11}, σ_{22} және σ_{12} арқылы анықтайтын теңдеулерді шығарайық.

x осінің бағытын $\vec{n}$ нормалы бағытымен сәйкестіріп және мына теңдеулерді ескеріп

$$p^n = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos2\alpha; \qquad (7.15)$$

$$\tau^n = \pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin2\alpha \qquad (7.16)$$

және тағы да сәйкестіргенде $p^n = \sigma_{11}$ және $\tau^n = \sigma_{12}$ екендігін ескеріп, мына теңдеулерді аламыз:

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha\,; \tag{7.17}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha\,; \tag{7.18}$$

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha\,; \sigma_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\alpha\,. \tag{7.19}$$

σ_1 мен σ_2 және α анықтау үшін жоғарыда жазылған теңдеулерді бір-біріне қосып және алып мынаны табамыз:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_1 + \sigma_2 \tag{7.20}$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = (\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\alpha \tag{7.21}$$

(7.21) және (7.19) теңдеулерін екі есеге дәрежелейік және олардың оң және сол жақтарын бір-біріне қосайық. Сонда мына теңдеуді аламыз:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \tag{7.22}$$

(7.20) және (7.22) теңдеулерінен мынадай теңдеулерді шығаруға болады:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}\,; \tag{7.23}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}\,. \tag{7.24}$$

(7.19) теңдеуді (7.21) теңдеуге бөліп мынаны аламыз:

$$tg\,2\alpha_{1,2} = \frac{2\sigma_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})}. \tag{7.25}$$

(7.23) және (7.24) теңдеулерді (7.19) теңдеуге қойып мынаны аламыз:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}\,. \tag{7.26}$$

Жазық кернеу күйі үшін басты кернеумен кернеу тензорын былай жазады:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (7.27)$$

Жазық кернеу күйі үшін кернеу девиаторын былай анықтайды:

$$D_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_{op} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_{op} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (7.28)$$

Қаралған жағдай үшін орташа кернеу мынаған тең:

$$\sigma_{op} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3}. \qquad (7.29)$$

Деформация процесінде тұтас ортаның материалды бөлшектері координатты жазықтықтардың біреуіне параллельді қозғалуы мүмкін, мысалы, x_1 және x_2. Осындай жағдайда жылжу векторының сыңарлары мынадай жазық қозғалу өрісін құрайды:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2);\ u_2 = u_2(x_1, x_2);\ u_3 = 0. \qquad (7.30)$$

Орын ауыстыру векторларының сыңарларын Грин, Альманси және кіші деформация тензорлары сыңарларын анықтайтын формулаға қою, жазық деформация күйіне сәйкес келетін мынадай деформация тензорларын алуға мүмкіндік береді:

$$T_L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ T_{l'} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (7.31)$$

Осы тензорлардың басты сыңарлары үшінші дәрежелі теңдіктерді шешу арқылы анықталады. Бірақта жазық деформация болған кезде басты деформацияның біреуі нөлге тең болғандықтан, үшінші дәрежелі теңдеулер екінші дәрежелі мына теңдеулермен ауыстырылады:

$$\left.\begin{aligned}\lambda^2-\lambda\left(E_{11}+E_{22}\right)+E_{11}E_{22}-E_{12}+E_{12}=0;\\ \lambda^2-\lambda\left(L_{11}+L_{22}\right)+L_{11}L_{22}-L_{12}+L_{12}=0;\\ \lambda^2-\lambda\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)+\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}+\varepsilon_{12}=0.\end{aligned}\right\} \tag{7.32}$$

Осы теңдеулерден, деформация тензорының симметриясын және мынадай қатынастарды $E_1 \geq E_2 \geq E_3$, $L_1 \geq L_2 \geq L_3$, $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ ескеріп, мынаны аламыз:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1=\frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2}+\sqrt{\frac{\left(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}\right)^2}{4}+\varepsilon_{12}^2};\\ \varepsilon_2=\frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2}-\sqrt{\frac{\left(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}\right)^2}{4}+\varepsilon_{12}^2};\\ \varepsilon_3=0.\end{aligned}\right\} \tag{7.33}$$

Жоғарыдағы формулалар бойынша E_1, E_2 немесе L_1, L_2 анықтауға болады. Ол үшін ε_{11}, ε_{22} және ε_{12} кіші деформация тензорлары сыңарларының орнына Грин немесе Альманси тензорларының сыңарларын қояды.

Сонымен басты сыңарлармен жазғанда жоғарыда жазылған тензорлар мынадай түрді алады:

$$T_L=\begin{bmatrix}L_1 & 0 & 0\\ 0 & L_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\quad T=\begin{bmatrix}E_1 & 0 & 0\\ 0 & E_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\quad T_\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Қысылмайтын орта үшін ығысу деформациясының қарқындылығы мына формуламен анықталады:

$$\Gamma=2\sqrt{\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{12}^2}\,. \tag{7.34}$$

Жазық деформация күйі үшін кернеу тензорын және деформация жылдамдығы тензорын қарайық.

Жазық ағыс үшін ($\upsilon_1=\upsilon_1(x_1,x_2)$, $\upsilon_2=\upsilon_2(x_1,x_2)$, $\upsilon_3=0$):

$$T_\xi=\begin{bmatrix}\xi_{11} & \xi_{12} & 0\\ \xi_{21} & \xi_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Қысылмайтын орта үшін $H = 2\sqrt{\xi_{11}^2 + \xi_{12}^2}$.

Жазық деформация күйі үшін

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}; \qquad \sigma_{33} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}.$$

Қысылмайтын орта үшін

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 + 6\sigma_{12}^2}$$

Жазық кернеу күйі үшін ($\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2)$, $\sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2)$, $\sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2)$, $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$):

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2}.$$

Симметриялы осьті кернеу күйі. Симметриялы осьті кернеу күйі екінші тарауда қаралған. Енді шөктіру операциясының кернеу-деформация күйін талдауға ауысайық. Өйткені, шөктіру операциясы металдарды қысыммен өңдеудің ең таралған операцияларының бірі болып саналады.

Шөктірілетін үлгіліктің цилиндрлік беті, жанасу үйкелісі бар болған кезде деформацияның біркелкі болмауы себебінен қисық сызықты дөңес бетке айналады. Сол кезде осы үлгілік бөшке тәрізді түрге ие болады. Меридианды жазықтық *z* қатысты симметриялы болып орналасатын *s* нүктесінде (7.4-сурет) басты кернеулер мен деформациялар әсер етеді. Осы кезде бетке нормальды болатын кернеулер мынаған тең болады: $\sigma_n = \sigma_\rho = 0$.

Деформация теориясының (*ДТ*) кернеулер мен деформациялардың физикалық байланыс теңдеуін қолданып немесе ағым теориясының (*АТ*) кернеулер мен деформация жылдамдықтарының физикалық байланыс теңдеуін қолданып мынаны аламыз:

$$\sigma_m - \sigma = \frac{2 \cdot T}{\bar{\partial}}\bar{\varepsilon}_m; \tag{7.35}$$

$$\sigma_m - \sigma = \frac{2 \cdot T}{\text{H}} \bar{\xi}_m, \tag{7.36}$$

мұндағы m = 1, 2, 3 немесе ρ, θ, z.

Егер логарифмдік деформацияның $\bar{\varepsilon}_m$ немесе деформация жылдамдығының сыңарлары $\bar{\xi}_{\dot{o}}$ белгілі болса, онда белгілі шекаралық жағдайда дайындаманың күштен бос бетінде кернеулерді және кернеу күйі сұлбасының қатаңдық коэффициентін мынадай формулалармен анықтауға болады:

$$\sigma_z = \frac{2T}{H}\left(\xi_z - \xi_\rho\right), \quad \sigma_\theta = \frac{2T}{H}\left(\xi_\theta - \xi_\rho\right); \ (AT \text{ бойынша}) \tag{7.37}$$

$$\sigma_z = \frac{2T}{\bar{\Gamma}}\left(\varepsilon_z - \varepsilon_\rho\right), \quad \sigma_\theta = \frac{2T}{\bar{\Gamma}}\left(\varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho\right); \ (\textit{ДТ} \text{ бойынша}) \tag{7.37a}$$

$$k_\varepsilon = \frac{\sigma}{T} = -\frac{2 \cdot \varepsilon_\rho}{\bar{\Gamma}}; \ (\textit{ДТ} \text{ бойынша}) \tag{7.38}$$

$$k_\xi = \frac{\sigma}{T} = -\frac{2 \cdot \xi_\rho}{H}. \ (AT \text{ бойынша}) \tag{7.38a}$$

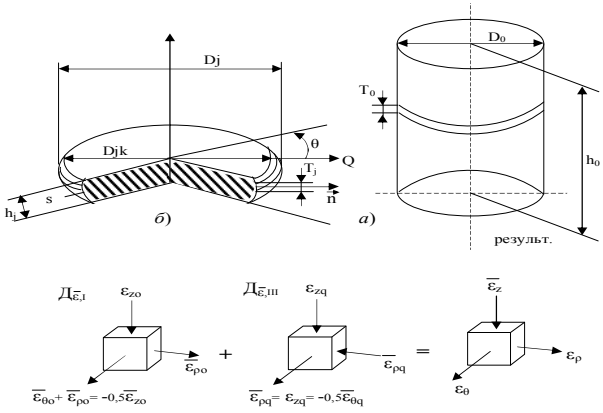
Биіктік ε_{zj} және тангенциальды $\varepsilon_{\theta j}$ деформациялардың жергілікті мәнін, үлгілікте белгіленген материалды талшықтың деформацияға дейінгі және кейінгі ұзындығын T_{o} және T_{j}, ал тағы да осы үлгіліктің деформацияға дейінгі және кейінгі диаметрін D_{o} және D_{j} өлшеп тәжірибемен анықтайды (7.4-сурет), яғни

$$\bar{\varepsilon}_{zj} = ln\frac{T_J}{T_0}; \quad \bar{\varepsilon}_{\theta j} = ln\frac{D_J}{D_0}; \bar{\varepsilon}_\rho = \left(\bar{\varepsilon}_z + \bar{\varepsilon}_\theta\right). \tag{7.39}$$

Биіктіктік $\bar{\xi}_z$ және тангенциальды $\bar{\xi}_\theta$ деформация жылдамдықтары сыңарларының жергілікті мәнін анықтау үшін мына формула бойынша дифференциалау операциясын қолданады:

$$\bar{\xi}_m = \frac{d\bar{\varepsilon}_m}{d\tau} = \frac{V_0}{H_0}\frac{d\bar{\varepsilon}_m}{d\varepsilon}, \tag{7.40}$$

мұндағы ν_0/H_0 - тәжірибенің тұрақтысы; τ – уақыт; $\varepsilon = \Delta H / H_o$ - бастапқы биіктігі H_0 болатын цилиндрді ν_0 жылдамдығымен шөктіргендегі салыстырмалы жаншу.



7.4-сурет. Шөктірілетін үлгіліктің шөктіруге дейінгі және кейінгі негізгі өлшемдері (*а*) және сақиналы көлемдегі *qsq* басты деформацияның сұлбасы ($\vec{n}$ - дайындаманың бос бетіндегі s нүктесіне нормаль)

Тәжірибелік мәліметтерді өлшеудің қателігін талдау мынаны көрсетеді: кезеңмен деформациялау тәсілі бойынша анықталған басты деформация жылдамдығын $\overline{\xi}_{\dot{o}}$ есептеудің қателігі 30÷40 % жетеді, ал кернеу күйі сұлбасының қатаңдық коэффициентін k_ε есептеудің қателігі 50÷70 % тең болады. $\overline{\xi}_{\dot{o}}$, k_ε мөлшерлерінің қателігін есептегенде, биіктіктік деформация ($\overline{\varepsilon}_{zj}$) материалды талшықтың деформацияға дейінгі және кейінгі ұзындығын ± 0,05 мм дәлдікпен, ал тангенциальды деформация ($\overline{\varepsilon}_{\theta j}$) шөктірілген үлгіліктің диаметрін (50÷100 мм) жоғарыда жазылған дәлдікпен өлшеуді қолданып анықталған деп бағаланды.

Осындай едәуір қателіктің пайда болуының негізгі себебі болып, басты деформация жылдамдығын аяққы-айырма тәсілін қолданып анықтау саналды, яғни

$$\overset{\circ}{\xi}_m = \overline{\varepsilon}'_m = \frac{d\overline{\varepsilon}_m}{\Delta\varepsilon} = \frac{\overline{\varepsilon}_{m,J+1} - \overline{\varepsilon}_{m,J}}{\varepsilon_{J+1} - \varepsilon_J}, \qquad (7.41)$$

мұндағы $\Delta\bar{\varepsilon}_{\partial}$ – екі деформациялау кезеңі арасындағы $\Delta\tau$ уақыт мезгілінде басты логарифмдік деформацияның өсімшесі.

Сондықтан деформациялау процесін уақытпен зерттеу қажет, ал тәжірибе алынған мөлшерлерді уақытпен тегістеу және дифференциалдау үшін $\bar{\varepsilon}_m(\tau)$ функциясын дәрежелік полиноммен немесе кубтық сплайнмен аппроксимациялау керек.

$\bar{\varepsilon}_m$ анықтаудың ең үлкен қателіктері деформацияның мөлшері кішкентай болғанда пайда болатындығын ескеру қажет. Осы себептен $\bar{\varepsilon}_m(\tau)$ функциясын аппроксимациялағанда, уақыттың бастапқы мезгілінде $\bar{\varepsilon}_m(\tau)$ функциясының өзіне және оның уақыт бойынша $\bar{\varepsilon}'_m$ және $\hat{\varepsilon}''_m$ туындыларына мына түрдегі бастапқы шартты қолданған орынды:

$$\varepsilon = 0;\ \overset{0}{\xi}_z = \bar{\varepsilon}'_z = -1;\ \overset{0}{\xi}'_z = \bar{\varepsilon}''_z = -1;\ \overset{0}{\xi}_\theta = \bar{\varepsilon}'_\theta = +0{,}5;$$
$$\overset{0}{\xi}'_\theta = \bar{\varepsilon}''_\theta = +0{,}5, \qquad (7.42)$$

мұндағы $\overset{0}{\xi}_m = \xi_m \dfrac{H_0}{V_0}$ $(m = z, \rho, \theta)$.

(7.42) шарттарында мыналар қабылданған: $\tau \to 0$ болған кезде үйкеліс күшінің әсері азғантай болады, сондықтан цилиндрдің деформациясы біркелкі деп саналады. Осы себептен $\bar{\varepsilon}_z = ln\dfrac{T_J}{T_0} = ln\dfrac{H_J}{H_0} = -2ln\dfrac{D_J}{D_0} = -2\bar{\varepsilon}_\theta = ln(1-\varepsilon)$ теңдеуінен жаншу нөлге тең болғанда ($\varepsilon = 0$) биіктіктік деформация мынаған тең болады: $\bar{\varepsilon}'_z = \bar{\varepsilon}''_z = -1$.

Тәжірибе алынған нәтижелерді өңдеуді ЭСМ жүргізу қажет. Бағдарламамен тәжірибелік мәліметтерді өңдегенде, (7.42) бастапқы шарттарын толық немесе жарым-жартылай қанағаттандыру қажет екендігін ескеру керек. Осындай жағдайда ығысу деформация жылдамдығының қарқындылығы және ығысу деформациясының дәрежесі келесі формулалармен анықталады:

$$H = 2\sqrt{\xi_\theta^2 + \xi_\theta \xi_z + \xi_z^2}; \quad \Lambda = \int \mathrm{H} d\tau \tag{7.43}$$

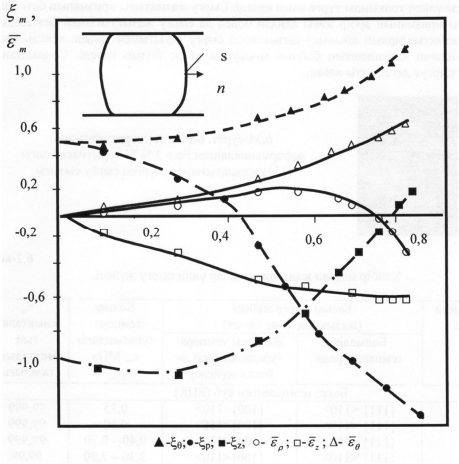
Аппроксимацияланған $\bar{\varepsilon}_z^a$ және $\bar{\varepsilon}_\theta^a$ мәндерін есептеудің сенімділігін бағалау үшін, осы мөлшерлердің тәжірибелік $\bar{\varepsilon}_z$ және $\bar{\varepsilon}_\theta$ орташа мөлшерлерден абсолютті ауытқуын $\Delta\bar{\varepsilon}_z$ және $\Delta\bar{\varepsilon}_\theta$, ал тағы да олардың тәжірибелік мәннен орташа квадратты ауытқуын S_z және S_θ анықтау талап етіледі.

Шөктіру процесінде дайындама металының көлемі радиалды бағытта ағып шығып, бөшкенің диаметрін үлкейтетіндігі белгілі. Осы бөшкедегі металл тангенциальды бағытта ықтиярсыз созылып қосымша созатын тангенциальды деформацияны $\bar{\varepsilon}_{\theta\hat{e}}$ және қысатын радиалды деформация $\bar{\varepsilon}_{\rho\hat{e}}$ тудырады. Осы кезде, қосымша деформациялар негізгі созатын деформациялармен $\bar{\varepsilon}_{\theta i}$ және $\bar{\varepsilon}_{\rho i}$ қосылып, $\bar{\varepsilon}_\theta$ деформациясын қарқынды үлкейтеді және $\bar{\varepsilon}_\rho$ деформациясын азайтады, яғни шөктіру процесінде биіктіктік қысатын $\bar{\varepsilon}_z$ және тангенциальды созатын $\bar{\varepsilon}_\theta$ деформациялар қарқынды үлкейеді, ал радиалды созатын деформация $\bar{\varepsilon}_\rho$ бастапқы кезеңде қарқынды үлкейіп максимумға жетеді де ары қарай азаяды (7.5-сурет). Радиалды деформация жалдамдығының ξ_ρ таңбасы қарама-қарсыға өзгереді.

Шөктіру процесінің кинематикалық және статикалық параметрлерін талдаса, онда 50 % дейінгі жаншуда *ДТ* және *АТ* бойынша есептеулердің нәтижесі сәйкес келетіндігін көруге болады. Жаншуды ары қарай үлкейткен кезде *ДТ* және *АТ* бойынша есептеулердің нәтижесі үлкен айырмашылық болатындығы табылған. Яғни, жаншу $\varepsilon > 40 \div 50$ % болғанда (7.38) формуласы бойынша анықталатын k_ξ мөлшері, *ДТ* формуласымен анықталатын k_ε мөлшерінен едәуір үлкен екендігі анықталған.

Көптеген металл мен қорытпалар 50 % үлкен жаншумен өңдегенде қирайтыны белгілі. Осы кезде кернеу күйін есептеу

үшін *ДТ* қолдану, дайындаманың тұтастығын бұзуға сәйкес келетін шекті деформацияны тым арттыруға себеп болуы мүмкін. *ДТ* және *ТТ* қолданып анықталған логарифмдік деформация қарқындылығының кернеу күйі сұлбасынан тәуелділігі, жаншуды 40÷50 % жоғары жүргізгенде процестің монотонды емес болатындығын көрсетеді. Бірақта *ДТ* өзінің қолдануын монотонды деформация шегімен шектейтін болғандықтан, ал *ТТ* осындай шектеумен өзін шектемейтіндіктен, шөктірген кезде тұтастық бұзылу қауіптілігін және ақаудың пайда болуын анықтағанда *ТТ* нәтижесі көбірек дұрыс деп есептеу қажет.



7.5-сурет. Салыстырмалы жаншуға байланысты ξ_θ; ξ_ρ; ξ_z; $\bar{\varepsilon}_\rho$; $\bar{\varepsilon}_z$; $\bar{\varepsilon}_\theta$ мөлшерлерінің өзгеруі

$\bar{\varepsilon}_z = f(\bar{\varepsilon}_\theta)$ эмпириялық байланысын шартты түрде мынадай екі аймаққа бөлуге болады (7.6-сурет): $-\bar{\varepsilon}_z \rangle \bar{\varepsilon}_\theta$; $-\bar{\varepsilon}_z \langle \bar{\varepsilon}_\theta$.

Екінші теңсіздік жазық соққышта цилиндрлік үлгілікті үлкен жаншумен және бөшке тәрізділікпен шөктірген кезде, осы соққышта бөшке тәрізді үлгілікті шөктірген кезде және төсемді сақинада цилиндрлік үлгілікті шөктіргенде әділетті.

Г.А. Смирновтың тәжірибелік мәліметтері бойынша екінші аймақ жоқ ($\bar{\varepsilon}_z / \bar{\varepsilon}_\theta = 1{,}067$). Сондықтан $d\bar{\varepsilon}_z / d\bar{\varepsilon}_\theta$ туындысының мәні кіші деформация кезінде екіге тең және жаншу үлкейген сайын

біртіндеп азаяды. Бірақта жаншудың кез келген аяққы мәнінде мынаған тең: $2\rangle\left|d\bar{\varepsilon}_z / d\bar{\varepsilon}_\theta\right|\rangle 0{,}5$ немесе $-2\langle d\bar{\varepsilon}_z / d\bar{\varepsilon}_\theta = d\bar{\xi}_z / d\bar{\xi}_\theta \langle -0{,}5$, мұндағы $\bar{\xi}_z$, $\bar{\xi}_\theta$ – басты деформация жылдамдығы. Осындай да басты деформациялар мынадай қатынасқа ие болады: $\bar{\varepsilon}_\theta \rangle \bar{\varepsilon}_\rho \rangle \bar{\varepsilon}_z$. Сондықтан басты деформация жылдамдықтарында мынадай қатынас бар: $\bar{\xi}_\theta > \bar{\xi}_\rho > \bar{\xi}_z$ және шөктіру процесі монотондыға жақындайды.

Біз жасаған жұмыстың нәтижесі, үлкен жаншумен және бөшке тәрізділікпен шөктірген кезде $\bar{\varepsilon}_\rho(\varepsilon)$, $\bar{\varepsilon}_z(\varepsilon)$ тәуелділігінде экстремум бар екендігін дәлелдеді. Экстремум пайда болғанда $\bar{\xi}_z / \bar{\xi}_\theta$ қатынасы тек - 0,5 тең болып қана қоймай, одан кіші болуы да мүмкін ($\bar{\xi}_z / \bar{\xi}_\theta >$ -0,5). $\bar{\xi}_z / \bar{\xi}_\theta >$ -0,5 болған кезде кернеу күйі сұлбасының қатаңдылық коэффициент мөлшері едәуір үлкейеді.

Осы кезде, деформациялаудың басында мынадай теңсіздік орындалса: $\bar{\xi}_\theta > \bar{\xi}_\rho > \bar{\xi}_z$, 40÷50 % жоғары жаншумен өңдеген кезде мынадай теңсіздік пайда болады: $\bar{\xi}_\theta > \bar{\xi}_z > \bar{\xi}_\rho$. Теңсіздіктің таңбасының өзгеруі деформациялаудың монотонды еместігіне едәуір әсерін тигізеді.

Тәжірибенің нәтижесімен мынау анықталған:

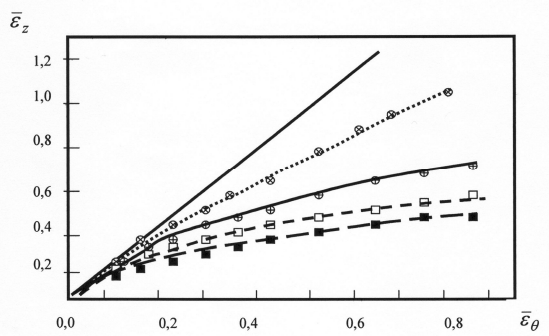
– жазық соққышта бөшке тәрізді үлгілікті шөктірген кезде, осы жазық соққышта цилиндрлік және конусты үлгілікті шөктірумен салыстырғанда k_ξ едәуір үлкейеді;

– кезеңмен деформациялап шөктірген кезде, жанасу бетінде үйкеліс күшінің азаюы себебінен үздіксіз деформациялаумен салыстырғанда k_ξ 1,05÷1,1 рет азаяды;

– деформациялау процесінің монотонды еместігі салыстырмалы жаншудың мөлшері 30÷60 % болғанда байқалады;

– қирауға сәйкес келетін кернеу-деформация күйінің сыңарларын санағанда ағым теориясын қолдану қажет;

– шөктіру процесінің кинематикалық және статикалық параметрлерін анықтау үшін кезеңді деформациялау тәсілін қолдану үлкен қателікке алып келуі мүмкін.



7.6-сурет. Дәрежелік полиноммен аппроксимацияланған $\bar{\varepsilon}_z = f(\bar{\varepsilon}_\theta)$ тәуелділігінің қисық сызығы

о – жазық соққышта конусты үлгілікті шөктіру; □ – төсемді сақинада цилиндрлік үлгілікті шөктіру; Δ – жазық соққышта цилиндрлік үлгілікті шөктіру; х – жазық соққышта бөшкетәрізді үлгілікті шөктіру

Тәжірибелік мәліметтерді математикалық өңдеу үшін өңдеу тәсілдерін таңдағанда және алгоритмді құрғанда үлкен қателіктерді болдырмас оймен тестілік есепті шешу қажет. Осы тестілік есепті шешкенде, белгілі бастапқы мәнді айтылған бағдарламаға еңгізген кезде, ол бұрыннан белгілі жауапты беретін етіп құрастыру керек болады.

Тестілік есептерді шешкенде, белгілі бір шекаралық шарт үшін өлшенетін мөлшерлердің жергілікті өлшемдері белгілі болуы қажет. (7.39) формуласын қолданып, осы өлшемдерді былай анықтайық:

$$T_J = T_0 \cdot e^{\bar{\varepsilon}_{zJ}};\ D_J = D_0 \cdot e^{\bar{\varepsilon}_{\theta J}};\ H_J = H_0 \cdot (1-\varepsilon), \qquad (7.44)$$

мұндағы ε – жаншу; $H_о$ – шөктіруге дейінгі дайындаманың биіктігі; H_j – шөктіруден кейінгі дайындаманың биіктігі.

(7.44) теңдеулерінде белгісіз мөлшер болып $\bar{\varepsilon}_{\theta J}$ және $\bar{\varepsilon}_{ZJ}$ жергілікті деформациялары саналады. Осы мөлшерлердің мәнін анықтау үшін $\bar{\varepsilon}_m(\varepsilon)$ функциясын дәрежелі полиноммен аппроксимациялауды қолдануға болады, яғни

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ZJ} &= b_m \cdot \varepsilon^n = b_0 + b_1 \cdot \varepsilon + b_2 \cdot \varepsilon^2 + b_3 \cdot \varepsilon^3 + b_4 \cdot \varepsilon^4; \\ \bar{\varepsilon}_{\theta J} &= a_m \cdot \varepsilon^n = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon + a_2 \cdot \varepsilon^2 + a_3 \cdot \varepsilon^3 + a_4 \cdot \varepsilon^4. \end{aligned} \qquad (7.45)$$

a_0, a_1, a_2 және b_0, b_1, b_2 коэффициенттері бастапқы шарттан былай анықтайды:

$\varepsilon = 0$, $\bar{\varepsilon}_\theta = \bar{\varepsilon}_z = 0$, және $a = b = 0$;

$\bar{\varepsilon}'_z = -1$, $\bar{\varepsilon}'_\theta = 0{,}5$ және $b_1 = -1$, $a_1 = 0{,}5$;

$\bar{\varepsilon}''_z = -1$; $\bar{\varepsilon}''_\theta = 0{,}5$ және $b_2 = -0{,}5$; $a_2 = 0{,}25$.

Шөктірген кезде деформацияның біркелкі емес болмауы салдарынан, салыстырмалы жаншу ε үлкейген сайын қосынды тангенциальды деформацияның $\bar{\varepsilon}_\theta$, радиалды деформациямен $\bar{\varepsilon}_\rho$ салыстырғанда тым қарқынды өсуі байқалады (7.5-сурет). Жаншуды ары қарай үлкейтсе радиалды $\bar{\varepsilon}_\rho$ және биіктікті $\bar{\varepsilon}_z$ деформациялардың қарқынды өсуі азаяды. Осы деформациялар ең үлкен мөлшерлерге жетіп, содан соң азаяды. Дәрежелі полиномның b_3, b_4 және a_3 , a_4 коэффициенттерін анықтаған кезде, осы экстремалды мәндерді пайдаланып және анықтауыш тәсілмен айтылған коэффициенттерді есептеу қажет ($a_3 = 2{,}407$; $a_4 = -3{,}935$; $b_3 = 3{,}851$; $b_4 = -2{,}814$).

Дәрежелі полиномның коэффициенттерін есептегеннен кейін (7.45) формуласымен $\bar{\varepsilon}_{\theta J}$, $\bar{\varepsilon}_{ZJ}$ деформацияларының жергілікті мәндерін анықтау қажет, содан соң алынған мәліметтерді (7.44) формуласына қойып T_J, D_J, H_J жергілікті өлшемдерін табуға болады.

Тестілік есепті шешіп тәжірибелік мәліметтерді әр түрлі математикалық тәсілмен өңдеген кезде, алынған мәннің дәлдігін бағалау үшін T_J, D_J, H_J есептелген мәндеріне мынадай формула бойынша қателіктер қондыру керек:

$$\left.\begin{aligned} T_J &= T_J + \sqrt{3}(A-2)S; \\ D_J &= D_J + \sqrt{3}(A-2)S; \\ H_J &= H_J + \sqrt{3}(A-2)S; \end{aligned}\right\} \qquad (7.46)$$

мұндағы S – берілген орташа квадратты қателік (ОКҚ); A - [0,1] аралығында біркелкі таралған байқаусыз сан; $\sqrt{3}$ (A - 2)S - [0,1] аралығында нормальды таралған байқаусыз сан.

Есептеу Фортран IV, Basic, Qbasic, Pascal алгоритмдік тілдерінде жасалған бағдарлама бойынша ЭЕМ жүргізіледі. Есептеудің нәтижесі бойынша ОКҚ-тің дұрыс мәліметтерімен T_J, D_J, H_J үшін бастапқы мәліметтің массивін құрады.

Тәжірибелік мәліметтер бойынша үлгіліктің бос бетіндегі кернеу-деформация күйін зерттегенде математикалық өңдеу әдістемесі дұрыс таңдалғанын және бағдарлама дұрыс жасалғанын тексеру үшін алынған бастапқы мәліметтердің массивін T_J, D_J, H_J негізгі бағдарламаға еңгізеді, содан кейін ОКҚ-тің алынған мәнін S-ның нақты мәнімен салыстырып, бағдарлама дұрыс есептейтіндігін тексереді.

Кернеу-деформация күйінің жергілікті мәнін анықтау үшін, негізгі бағдарламада $\bar{\varepsilon}_m$ (ε) функциясын дәрежелік полиноммен және кубтық сплайынмен аппроксимациялауды қолданғанымызды айта кетуіміз қажет.

Жүргізілген тексеру негізгі бағдарламамен алынған ОКҚ, тестілік есеп бойынша алынған T_J, D_J, H_J қондырылған ОКҚ-пен сәйкес келетіндігін көрсетті. ОКҚ-тердің сәйкес келуі математикалық өңдеу тәсілін дұрыс таңдалғанына және бағдарлама дұрыс құрастырылғанына куә болды. Осы кезде ең жақсы нәтижелер $\bar{\varepsilon}_m(\varepsilon)$ функциясын кубтық сплайынмен аппроксимациялағанда алынды. $\bar{\varepsilon}_m(\varepsilon)$ функциясын дәрежелік полиноммен аппроксимациялағанда, есептеу нәтижесінің дәлдігі полиномның дәрежесінен тәуелді болды. Бесінші және алтыншы дәрежелі полином ең дұрыс нәтижені беретіндігін жүргізілген зерттеу көрсетті.

Бақылау сұрақтары.

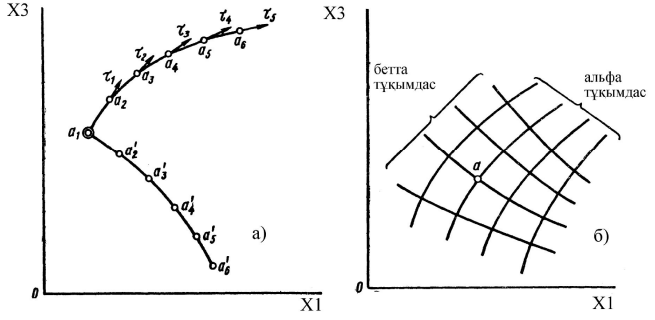
1. Көлемдік кернеу күйі үшін жеке туындылары бар дифференциалдық теңдеулер түрінде тепе-теңдік шартын қалай анықтайды?
2. Сызықтық кернеу күйі болған кезде көлбеген алаңдағы кернеулер қалай анықталады?
3. Жазық кернеу-деформация күйі үшін дифференциалдық теңдеулер түрінде тепе-теңдік шартын қалай анықтайды?
4. Жазық кернеу-деформация күйі үшін кернеу мен деформация тензорлары қандай тензорлармен жазылады?
5. Жазық кернеу күйі болған кезде көлбеген алаңдағы кернеулерді қалай табуға болады?
6. Жазық кернеу күйі үшін басты кернеулер қалай анықталады?
7. Жазық деформация күйі үшін басты кернеулер қалай анықталады?

8. СЫРҒУ СЫЗЫҒЫ ӘДІСІ

8.1. Сырғу туралы негізгі түсініктер

Сырғу сызығы әдістемесін жазық есептерді шығару үшін және кейбірде симметриялық осі бар есептерді шығарған кезде қолданады.

Осы әдістемені қолданғанда сырғу сызығы торын (өрісін) салады және осы тордың қасиеттерін қолданады. Жазық деформация күйінде болатын денедегі x_1x_3 жазықтығында қандай болмасын бір a_1 нүктесін алайық және одан басты жанама кернеудің τ_1 векторын салайық (8.1 *а*-сурет). a_1 нүктесінен өте жақын қашықтықта болатын және τ_1 векторының бағытындағы a_2 нүктесіне, осы нүктедегі басты жанама кернеудің τ_2 векторын салайық. Жалпы жағдайда τ_2 векторы τ_1 векторы бағытымен және мөлшерімен айырмашылықта болады. Осындай салуларды ары қарай жалғастырып нәтижесінде $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ сынған сызығын аламыз.



8.1-сурет. Сырғу сызықтары

Жанама кернеудің жұптық заңын пайдаланып, алынған a_1 нүктесінен бұрынғы салғанға перпендикулярлы екінші τ

векторын салуға болады. Осы себептен a_1 нүктесінен жоғарыдағыға ұқсас тәсілмен екінші $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ сынық сызығын салайық. a_1 нүктесінде сызықтар тік бұрышпен қиылысады. Осы сызықтарды a_1 нүктесінің екінші жағы бойынша жалғастыруымызға болатындығы түсінікті.

а және a' нүктелерінің санын шексіз көп үлкейткен кезде сынық сызықтар α және β жатық сызықтарына айналады (8.1 *б*-сурет). Осы сызықтар *басты жанама кернеулердің* немесе *сырғу сызықтарының траекториясы* болып саналады.

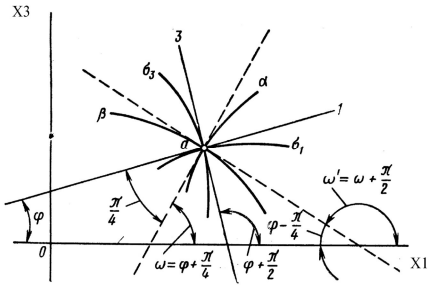
Осы сырғу сызығы жұптарының әрбір *а* және a' нүктелерінен (8.1 *а*-сурет) басқа сырғу сызықтарын салайық. Нәтижесінде сырғу сызығының ортогональды торын (өрісін) аламыз (8.1 *б*-сурет). Жалпы жағдайда сырғу сызығы торын салған кезде α және β екі тұқымдас сызықтардан тұратын қисық сызықтарды аламыз. Екі тұқымдас сырғу сызықтарының қиылысатын нүктелері торапты нүктелер деп аталады (8.1 *б*-суреттегі *а* нүктесі).

Сырғу сызығы өрісін салудың көрсетілген мүмкіншілігі негізінде мынадай қорытынды шығаруға болады: әр түрлі кернеулі күйге әр түрлі сырғу сызығының өрісі сәйкес келеді. Демек, әрбір белгілі кернеулі күйге белгілі сырғу сызығының өрісі сәйкес келеді.

Әрбір екі сырғу сызығының кез келген нүктесіндегі жанамалар, басты жанама кернеулердің бағытымен сәйкес келеді және x_1 осін белгілі бір ω және ω' бұрыштармен қиып өтеді (8.2-сурет). Осы бұрыштар бір нүктеден көрші екінші нүктеге ауысқанда жатық өзгереді.

Сырғу сызығының торы сияқты басты кернеулер траекториясының ортогональды торын салуға болады. Осы траектория сырғу сызығын $\pi/4$ бұрышымен қиып өтеді. *а* нүктесі арқылы өтетін σ_1 және σ_3 басты кернеулерінің траекториясы 8.2-суретте көрсетілген. Басты кернеулер траекториясына жанамалар 1 және 3 басты осьтер болып

саналады. Осы басты осьтер x_1 осін φ және $\varphi+\pi/2$ (сәйкесті жазылған) бұрыштарымен қиып өтеді.



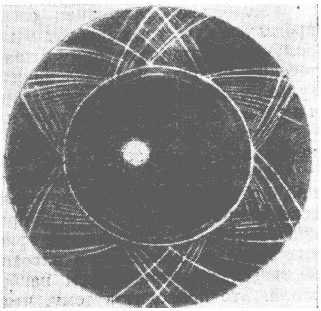
8.2-сурет. Сырғу сызықтарының бұрыштары

α және β тұқымдастарының сәйкесті сырғу сызықтары үшін мынаны жазуға болатындығы 8.2-суретінен көрініп түр:

$$\frac{dx_3}{dx_1}=tg\omega\,; \qquad \frac{dx_3}{dx_1}=-ctg\omega\,, \tag{8.1}$$

мұндағы $-\omega=\varphi+\pi/4$.

(8.1) теңдеуі сырғу сызығының дифференциалды теңдеуі болып саналады. Деформацияланатын денеде сырғу сызығы Людерс-Чернов сызығы түрінде нақты бейнеленеді (8.3-сурет).



8.3-сурет. Людерс-Чернов сызығы

Жазық деформациялы күй үшін кернеу сыңарларын φ бұрышы функциясы арқылы білдіретін формулаларды қолданып

енді жазайық (еркін x_1 осі және басты ось 1 арасындағы бұрыш φ арқылы), яғни мынадай формулалар:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{33}\end{matrix}\right\} = \sigma_{ср} \pm \tau_{31} cos\, 2\varphi;$$

$$\sigma_{13} = \tau_{31} \sin 2\varphi\,.$$

Жазық илемді деформация болған кезде $\sigma_1 - \sigma_3 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s = \pm\sigma_s = \pm 2k$ теңдеуінен $\tau_{31} = k$ екендігін ескеріп, осы формулалардағы φ бұрышын ω бұрышымен ауыстырайық.

Нәтижесінде мынаны аламыз:

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{33}\end{matrix}\right\} = \sigma_{ср} \pm k \sin 2\omega;\\ \sigma_{13} = -k\cos 2\omega.\end{matrix}\right\} \qquad (8.2)$$

(8.2) теңдеулерінде илемділік шартын сәйкесті қанағаттандыратын қасиет бар екендігі айқын байқалады, яғни (8.2) теңдеулері мынадай шартты қанағаттандырады:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{13}^2 = 4k^2\,.$$

Расында да жоғарыдағы теңдеуге (8.2) теңдеуіндегі кернеулер сыңарларын қойып, мынаны аламыз: $4k^2 = 4k^2$.

Демек, ары қарай (8.2) формуласын пайдаланған кезде илемділік шартына қарамауға болады, өйткені соңғысы ω бұрышының кез келген мәнінде қанағаттандырылатын болады. (8.2) теңдеуіндегі кернеулер мәнін мынадай тепе-теңдіктің дифференциалдық теңдеулеріне қойсақ:

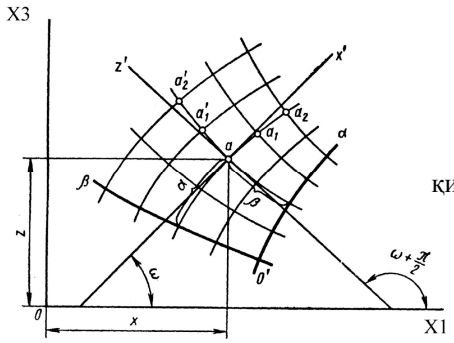
$$\frac{d\sigma_{11}}{dx_1} + \frac{d\sigma_{13}}{dx_3} = 0;\ \ \frac{d\sigma_{13}}{dx_1} + \frac{d\sigma_{33}}{dx_3} = 0\,,$$

мынаны аламыз:

$$\left.\begin{matrix}\frac{d\sigma_{ср}}{dx_1} + 2k\left(cos\,2\omega\frac{d\omega}{dx_1} + sin\,2\omega\frac{d\omega}{dx_3}\right) = 0;\\ \frac{d\sigma_{ср}}{dx_3} - 2k\left(cos\,2\omega\frac{d\omega}{dx_3} - sin\,2\omega\frac{d\omega}{dx_1}\right) = 0.\end{matrix}\right\} \qquad (8.3)$$

(8.3) теңдеулерінде α және β қисық сызық координаттар жүйесіне ауысайық, мұнда координатты тор ретінде сырғу сызығы торын қабылдаймыз.

Сырғу сызығы торы толық заңды салынған болғандықтан, мысалы $O'\alpha$ және $O'\beta$ сызықтарын (8.4-сурет) бастапқы немесе нөлдік деп қарауға болады (қисық сызықты ось). x_1 және x_3 координаталарының орнына, айтылған $O'\alpha$ және $O'\beta$ сызықтарына қатысты α және β координатасымен тордағы кез келген нүктелердің жайын анықтауға болады. Декартты координаттар x_1 және x_3 қисық сызықты координаттармен α және β функционалды байланыста болатындығы түсінікті.



8.4-сурет. Декартты және қисық сызықты координаттар

Кез келген координатты жүйе сияқты, қаралатын жағдайда *a* нүктесі кез келген бір координатты сызықтың бойымен қозғалған кезде, мысалы α сызығының бойымен (a_1, a_2 және одан кейінгі жайлармен), оның β координатасы тұрақты болады; ал нүкте β сызығының бойымен қозғалса (a_1', a_2' және одан кейінгі жайлармен) α координатасы тұрақты болып қалады.

Енді x_1x_3 жүйесінің координаталар басын О сырғудың екі сызығы қиылысатын еркін *a* нүктесіне қояйық және x_1 мен x_3 осьтерін, осы нүктеде қиылысатын жұп сырғу сызықтардың x_1' және x_3' жанамалары бойымен бағыттайық. Осындай кезде (8.2) демек (8.3) теңдеулері өздерінің күштерін сақтайды, өйткені

(8.2) теңдеуін шығарған кезде осьтер бағыты еркін етіп қабылдаған.

a нүктесінің шексіз кішкентай айналасында α және β жүйелерінің доғалар элементті, x_1' және x_3' жаңа осьтері бағытталған жанамамен сәйкес келеді деп санауға болады. Демек, мынаны қабылдауға болады:

$$dx = d\alpha;\ dz = d\beta; \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha};\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \beta}.$$

Енді осьтердің сырғу сызығы жанамасымен сәйкес келуінен ω бұрышын нөлге тең болады. Бірақта $\partial\omega/\partial\alpha$ және $\partial\omega/\partial\beta$ нөлге айналмайды. Өйткені ω бұрышы қисық сызықты координаттар бағыттарымен өзгереді. Айтылғанды ескеріп және (8.3) теңдеудегі x_1, x_3 бойынша туындыларды α, β бойынша туындылармен ауыстырып мынаны аламыз:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\sigma_{op} + 2k\omega\right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\sigma_{op} - 2k\omega\right) = 0. \tag{8.4}$$

(8.4) теңдеуді шығарғанда *a* нүктесі еркін алынған болғандықтан, осы теңдеулер кез келген нүктелерге жарамды болады.

Сөйтіп (8.3) теңдеудегі x_1, x_3 координаталарынан біз жаңа α, β координаталарына өттік. (8.4) теңдеуі тағы да илемділік шартын қанағаттандыратын тепе – теңдіктің дифференциалды теңдеуі болып саналады.

(8.4) теңдеулерінің біріншісін α бойынша, ал екіншісін β бойынша интегралдап мынаны аламыз:

$$\sigma_{op} + 2k\omega = C_1; \tag{8.5}$$

$$\sigma_{op} - 2k\omega = C_2. \tag{8.6}$$

Жоғарыда келтірілген кейбір шешулерге түзетулер енгізу керек, өйткені біз теңдеулерді интегралдауды жеке туындылармен жүргіздік. Бір айнымалы бойынша дифференциалдаған кезде екіншісінің функциясы тұрақты етіп қабылдануында және оның туындысы нөлге айналуында барлық мәселе болып отыр. Демек (8.5) теңдеуінде β-ден кейбір

функция бар болуы мүмкін. Осы функцияның туындысы (8.4) формуласының бірінші теңдеуінде нөлге айналды. (8.5) теңдеуіндегі C_1 тұрақтысын еркін β-дан функциямен ауыстырғанда, осы жағдайды ескеру керек. Бұл (8.6) теңдеуіне де қатысты. Мұндағы C_2 тұрақтысын еркін α-дан функциямен ауыстыру қажет.

β және α-дан еркін функция ретінде сәйкесті мынаны қабылдаймыз: $2k\eta(\beta)$ және $2k\xi(\alpha)$.

Онда (8.5) және (8.6) теңдеулерін мынадай ақырғы түрде жазуға болады:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{op} + 2k\omega = 2k\eta(\beta)\ (\alpha\ бойынша)\\ \sigma_{op} - 2k\omega = 2k\xi(\alpha)\ (\beta\ бойынша)\end{aligned}\right\} \qquad (8.7)$$

(8.7) теңдеулеріне Генки интегралдары деген ат берілген.

$2k\eta(\beta)$ және $2k\xi(\alpha)$ еркін функциялары сәйкесті α және β жүйелерінің тек біреуінің бойымен қозғалған кезде тұрақты мәнге ие болады және бір сырғу сызығынан екіншісіне ауысқан кезде өзгереді.

Егер α және β сырғу сызықтары бізге ылғи да белгілі болса, онда Генки интегралы беріктену жоқ болған кезде жазық деформация есептерін жалпы түрде шешу жолын бізге көрсетер еді.

Берілген сырғу сызығының қандай да бір M нүктесінде орташа кернеу мынаған тең болсын: $\sigma_{op} = \sigma_{opM}$ және $\omega = \omega_M$, ал сызықтың басқа N нүктесінде орташа кернеу мынадай болсын: $\sigma_{op} = \sigma_{opN}$ және $\omega = \omega_N$.

Осы мәліметтерді (8.7) теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуіне қойып мынаны аламыз:

$$\sigma_{opM} + 2k\omega_M = 2k\eta(\beta);\ \sigma_{opN} + 2k\omega_N = 2k\eta(\beta).$$

Бірақта нүкте тек бір сырғу сызығының бойымен қозғалған кезде еркін функция өзгермейтін болғандықтан мынаны алуға болады:

$$\sigma_{opM} + 2k\omega_M = \sigma_{opN} + 2k\omega_N.$$

Осыған ұқсас жолмен (8.7) теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуінен мынаны аламыз:

$$\sigma_{orM} - 2k\omega_M = \sigma_{orN} - 2k\omega_N .$$

Соңғы теңдеулерді біріктіріп және бірнеше өзгертіп мынаны жаза аламыз:

$$\sigma_{or} - \sigma_{or} = \pm 2k(\omega_M - \omega_N) . \qquad (8.\ 8)$$

Бұрыштар айырмасын ($\omega_M - \omega_N$) былай белгілеп: ω_{MN} (8. 8) формуласын мынадай етіп жазайық:

$$\sigma_{orM} - \sigma_{orN} = \pm 2k\omega_{MN} . \qquad (8.9)$$

мұндағы $\omega_{MN} - M$ нүктесіне N нүктесінен ауысқан кезде сырғу сызығының бұрылу бұрышы.

(8.9) теңдеуі орташа кернеудің σ_{or} өзгеруі сырғу сызығының бұрылу бұрышына пропорционалды екендігін көрсетеді. Осы теңдеуде пропорционалдық коэффициент болып $2k$ мөлшері саналады.

(8.7) – (8.9) теңдеулерінде едәуір үлкен мағына бар. Расында да, егер сырғу сызығы, ал тағы да оның бір нүктесінде σ_{or} кернеуі берілсе (мысалы, шекаралық шарттардан), онда (8.7) – (8.9) теңдеулері, осы сырғу сызығының кез келген нүктесінде орташа кернеуді анықтауға мүмкіндік береді. Егер сырғу сызығының өрісі және кернеулер кез келген бір торапты нүктеде берілсе, онда бір қиылысу нүктесінен екіншісіне ауысып барлық өріс бойынша орташа кернеудің таралуын оңай табуға болады. Орташа кернеулерді σ_{or} және ω бұрыштарын тапсақ, онда (8.2) теңдеулер жүйесін қолданып σ_{11}, σ_{33} және σ_{13} кернеу сыңарларын да оңай табуға болады.

Егер сырғу сызықтарының кейбір кесінділері түзу сызық болса, онда кернеулі күй осы кесінділер бойымен қозғалған кезде өзгермейтін болады. Егер кейбір аймақта екі тұқымдас сырғу сызықтары түзу сызықты болса, онда осы аймақта кернеулі күй біркелкі болады және керісінше, біркелкі кернеулі күй жағдайында сырғу сызықтары ортогональды түзулер торы болып саналады.

8.2. Сырғу сызықтарының қасиеттері

Сырғу сызығының өрісінде еркін түрде қисық сызықты төртбұрышты $MNQP$ бөліп алайық (8.5 *а*-сурет). Осы

төртбұрыш α жүйесінің екі MN және PQ сырғу сызықтарымен және β жүйесінің екі MP және NQ сырғу сызықтарымен шектелсін. Екі нүктелердің орташа кернеуінің айырмасы арадағы N және P нүктелерінің қайсының көмегімен есептелгендігінен тәуелді емес екендігін ескеріп, (8.7) теңдеуінің негізінде мынаны жазуға болады:

$$\sigma_{орQ} - \sigma_{орM} = \left(\sigma_{орQ} - \sigma_{орN}\right) + \left(\sigma_{орN} - \sigma_{орM}\right) = 2k(\omega_Q + \omega_M - 2\omega_N),$$

ал тағы да

$$\sigma_{орQ} - \sigma_{орM} = \left(\sigma_{орQ} - \sigma_{орP}\right) + \left(\sigma_{орP} - \sigma_{орM}\right) = 2k(2\omega_P - \omega_Q - \omega_N).$$

Соңғы екі теңдеуден мынаны аламыз:

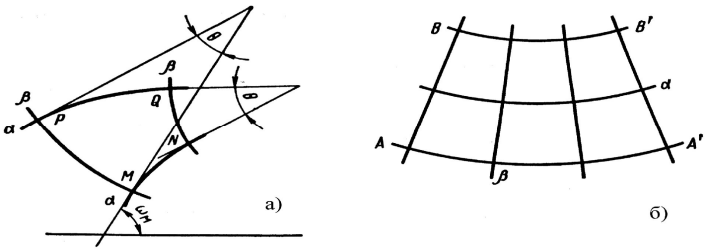
$$\omega_Q - \omega_N = \omega_P - \omega_M = \theta, \qquad (8.10)$$

мұндағы θ - α жүйесінің MN және PQ сырғу сызықтарының әрбіреуінің β жүйесінің тек бір сызығымен қиылысқан нүктесінде салынған екі жанама сызықтар арасындағы бұрыш (8.5 *а*-сурет). Осыған ұқсас әдістемемен басқа тұқымдастың кез келген жұп сызықтарына осындай нәтижені алуға болады.

Сөйтіп *бір тұқымдас екі сырғу сызықтарының басқа тұқымдас әрбір сырғу сызығымен қиылысқан нүктелерінде салынған жанамалардың арасындағы бұрыш тұрақты болып қалады* (8.5*а*-сурет). Осы ереже Генкидің бірінші ережесі болып саналады.

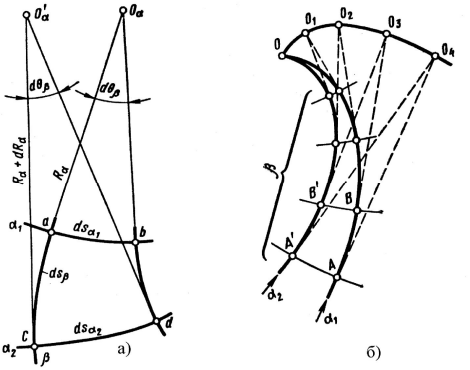
Осыдан мынадай нәтиже шығады: *егер берілген тұқымдас сырғу сызықтарының қандай да бір кесіндісі түзу болса, онда осы тұқымдас сырғу сызықтарының басқа тұқымдас сырғу сызықтарының тек біреумен кесіп өтетін барлық басқа кесінділері де түзу және ұзындықтары бірдей болады*, мысалы $AB = A'B'$ (8.5 *б*-сурет).

Генкидің екінші теоремасын келесі түрде тұжырымдайды: *Берілген бір тұқымдас сырғу сызығының бойымен нүкте қозғалған кезде, басқа тұқымдас сырғу сызығының қисықтық радиусы берілгенмен қиылысқан нүктеде нүктенің жүріп өткен ара қашықтығы мөлшеріне өзгереді*.



8.5-сурет. Сырғу сызықтары

Дәлелдеу үшін сырғу сызығы өрісінде шексіз кішкентай қисық сызықты төртбұрышты бөліп алайық. Осы төртбұрыш α жүйесінің *ab* және *cd* жұп сырғу сызықтарымен және осы сырғу сызықтарымен қиылысатын β жүйесінің *ac* және *bd* екі сырғу сызықтарымен құралған (8.6 *а*-сурет). Төртбұрышты шексіз кішкентай деп санайтын болғандықтан, оның қабырғасын шеңбер доғасы деп санаймыз.



8.6-сурет. Сырғу сызықтары

ab доғасының ұзындығын ($\overset{\frown}{ab} = ds_{\alpha_1}$) қисықтық радиусы $O_\alpha a = R_\alpha$ және бұрыш $aO_\alpha b = d\theta_\beta$ арқылы есептеуге болады, яғни $ds_{\alpha_1} = R_\alpha d\theta_\beta$.

cd доғасының ұзындығын ($\overset{\frown}{cd} = ds_{\alpha_2}$) кішіліктің жоғарғы реттік мөлшеріне дейін дәлдікпен былай бейнелеуге болады:

$$ds_{\alpha 2} = (R_\alpha + ds_\beta)d\theta_\beta .$$

Екінші жағынан, α жүйесі доғасының қисықтығы α_1 сызығынан α_2 сызығына ауысқан кезде азаятындықтан, *cd* доғасының қисықтық радиусы *ab* доғасының қисықтық радиусынан dR_α кішкентай мөлшеріне үлкен болады деп санауға болады, яғни

$$O'c = R_\alpha + dR_\alpha.$$

Осының негізінде ds_{α_2} доғасының ұзындығы үшін екінші формуланы былай жазуға болады: $ds_{\alpha 2} = (R_\alpha + dR_\alpha)d\theta_\beta$. Генкидің бірінші теоремасы негізінде мынаны жазуға болады: $\angle cO'_\alpha d = \angle aO_\alpha b = d\theta_\beta$.

ds_{α_2} үшін алынған формулалардың оң жақтарын теңестіріп мынаны аламыз: $dR_\alpha = ds_\beta$.

Жоғарыдағыға ұқсас әдістememен мынаны алуға болады: $dR_\beta = ds_\alpha$.

Сөйтіп Генкидің екінші теоремасы дәлелденді.

Генкидің екінші теоремасын басқа түрде де көрсетуге болады. Ол үшін β жүйесінің біраз сырғу сызықтарымен қиылысатын екі жақын α_1 және α_2 сырғу сызықтарын қарайық. α жүйесінің екі жақын сырғу сызығымен β жүйесі сырғу сызықтарының доға элементтері қиылысатын нүктелерінде, екі жақын α сырғу сызықтарына жүргізілген жанамалар айтылған элементтердің қисықтық центрінде қиылысады (8.6 *б*-сурет).

β сызығының *AA*' доғасының AO_4 радиусы, β сызығының *B* нүктесіндегі BO_3 қисықтық радиуспен *AB* доғасы ұзындығының қосындысына тең. Осыған ұқсас ой жүгіртулерді BO_3 және басқа радиустерге қатысты жүргізуге болады (8.6-суретте көрсетілген). Демек, *O*, O_1, O_2 және т.б. қисық сызық центрлерінің геометриялық орындары α_1 сырғу сызығының эвольвентасы болып саналады.

Сөйтіп, *бір тұқымдас сырғу сызықтары доғасының қисықтық центрлері, өздері қиып өтетін басқа тұқымдастың берілген сырғу сызығы үшін эвольвентаны құрайды*. Осы ереже Прандтл теоремасы деп аталады.

Сырғу сызықтарының қисықтық радиустері осы жүйенің бір сызығынан екінші сызығына ойыстық жаққа қарай қозғалған кезде азаятын болғандықтан, олар (қисықтық радиустер) нәтижесінде нөлге айналуы мүмкін.

Мысалы 8.6 *б*-суретте осындай нөлге айналу β жүйесінің сырғу сызықтары үшін O нүктесінде болуы мүмкін. Өйткені шексіз жақын α_1 және α_2 сырғу сызықтары осы O нүктесінде ұштасып $O,O_{1,2,3,4}$ эвольвентасымен қиылысады. Жоғарыда айтылғаннан мынадай қорытынды шығаруға болады: O нүктесі қисаятын α тұқымдастарына жатады және сонымен бірге β тұқымдастарының ұшталу нүктесі (қайту нүктесі) болады.

Сөйтіп, *бір тұқымдастың қисаятын (айналатын) сырғу сызықтары, басқа тұқымдастың сырғу сызықтарының қайту нүктесінің геометриялық орны болып саналады*.

β жүйесінің сырғу сызықтары O нүктесінде қайту нүктесін құратын болғандықтан α-ның қисаятын (айналатын) жүйесін кесіп өте алмайды. Осы қисаятын жүйе мүмкін болатын аналитикалық шешудің шекарасы болады және үзілу сызығы болып саналады.

Демек, *бір тұқымдастардың айналатын сырғу сызықтары, олар арқылы басқа тұқымдастың сырғу сызықтарын жалғастыруға болмайтын шекті сызық болып саналады*.

Сырғу сызықтары сайманнан бос немесе дайындама мен сайман жанасатын беттерге шығады. Бос бетте және сайман мен дайындаманың жанасатын бетінде үйкеліс жоқ болған кезде $\sigma_{13} = 0$. (8.2) жүйесінің үшінші теңдеуінен σ_{13} осы мәні үшін мынаны аламыз: $\cos 2\omega = 0$; $\omega = 45^o = \pm \pi/4$, яғни екі тұқымдастардың сырғу сызықтары бос бетті және үйкеліс болғанда сайманмен дайындама жанасатын бетті 45° бұрышпен қиып өтеді.

Егер үйкеліс дайындама мен сайман жанасатын бетте ең үлкен мөлшерге жететін болса, яғни $|\sigma_{13}| = k$ ($k = (1/\sqrt{3})\sigma_s$), онда $\cos 2\omega = 1$; $\omega = 0$; $\omega_1 = \omega \pm 90^o = 90^o$. Сөйтіп, үйкеліс ең үлкен болған кезде жанасатын бет бір тұқымдас сырғу сызықтары үшін айналатын, ал басқа тұқымдас сырғу сызықтары үшін қайтатын нүктелердің геометриялық орны болып саналады. Сайман мен дайындама жанасатын бетте жанама кернеулердің жоғарыда айтылғанмен салыстырғанда аралық мәндері пайда болса, онда ω бұрыштарының мөлшерлері де аралық болады, яғни $0 \le \tau \le k$; $\pi/4 \le \omega \le \pi/2$; $\pi/4 \ge \omega \ge 0$.

σ_{13} мөлшерлерін біле отырып, осы бұрыштарды (8.2) теңдеуі бойынша анықтауға болады.

Тұжырымдап сырғу сызықтарының негізгі қасиеттерін былай жазуға болады:

1. Сырғу сызықтары үздіксіз;
2. Сырғу сызықтары екі тұқымдастарды құрады;
3. Сырғу сызықтарының тұқымдастары бір-біріне ортогональды;
4. Сырғу сызықтары басты кернеулердің траекториясын 45^0 бұрышпен қиып өтеді;
5. Сырғу сызығының бойымен қозғалған кезде орташа нормальды кернеудің өзгеруі оның бұрылуына пропорционалды;
6. Бір тұқымдастың екі сырғу сызықтары мен басқа тұқымдастың сызықтары қиылысатын нүктедегі жанамалардың арасындағы бұрыштар тұрақты болады;
7. Сырғу сызықтарының қисықтық радиустері басқа тұқымдас сырғу сызығы бойымен жүргендегі ара қашықтық мөлшеріне өзгереді;
8. Қарамға шыққан кездегі сырғу сызықтарының еңкею бұрыштары контурдағы жанама кернеудің мөлшерінен тәуелді болады.

8.3. Сипаттамалар

Жоғарыда келтірілген (8.3) теңдеуіне кіретін мынадай екі белгісіз бар: орташа кернеу σ_{op} және ω бұрышы. Осы теңдеулерді негізінде шешуге болады. Бірақта, жеке

туындылардың осы теңдеулерге кіруі көптеген жағдайларда шешу үшін қиындық туғызады.

Жоғарыда осы теңдеулер сырғу сызығының қасиеттерін қолданумен шешілді. Есептеу сырғу сызығының торын білуді талап етті. Жалпы жағдайда (8.3) теңдеулерін сипаттаманы іздеу әдістемесімен шешеді.

(8.3) теңдеулерінен σ_{op} айнымалысын шығарып тастайық. Ол үшін бірінші теңдеуді x_3 бойынша, ал екінші теңдеуді x_1 бойынша дифференциалдайық және бірінші теңдеуден екіншісін алып тастайық. Сонда мынаны аламыз:

$$\frac{\partial^2\sigma_{op}}{\partial x_1\partial x_3}+2k\left[-2sin2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x_1}+cos2\omega\frac{\partial^2\omega}{\partial x_3\partial x_1}+2cos2\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2+sin2\omega\frac{\partial^2\omega}{\partial x_3^2}\right]-$$

$$-\frac{\partial^2\sigma_{op}}{\partial x_3\partial x_1}-2k\left[2cos2\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2+sin2\varphi\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2}+2sin2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x_3}-cos2\varphi\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1\partial x_3}\right]=0.$$

Осыдан күрделі емес өзгертуден кейін мынаны аламыз:

$$-\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^{\,2}}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x_3^2}+2ctg2\omega\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1\partial x_3}-4\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x_3}+2ctg2\omega\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2\right]=0\cdot \qquad (8.11)$$

Бұл екінші реттік жеке туындылы квазисызықтық дифференциалды теңдеу. Жалпы түрде (8.11) теңдеуі былай жазылады:

$$A\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^{\,2}}+2B\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1\partial x_3}+C\frac{\partial^2\omega}{\partial x_3^{\,2}}+F\left(x_1,x_3,\frac{\partial\omega}{\partial x_1},\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)=0 \qquad (8.12)$$

Әдеттегі туындысы бар мына теңдеуді:

$$Adx_3^{\,2}-2Bdx_1dx_3+Cdx_1^{\,2}=0 \qquad (8.13)$$

(8.12) теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі деп атайды, ал оның шешуін сипаттамалар дейді.

(8.11) формулада бар коэффициенттердің мәнімен сипаттамалық теңдеуді мынадай түрде келтіруге болады:

$$-dx_3^{\,2}-2ctg\,2\omega dx_1dx_3+dx_1^{\,2}=0 \qquad \text{немесе}$$

$$\left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)^2+2ctg2\omega\frac{dx_3}{dx_1}-1=0\cdot$$

Осы теңдеуді dx_3/dx_1 қатысты шешіп мынаны аламыз:

$$\frac{dx_3}{dx_1} = -ctg2\omega \pm \sqrt{ctg^2 2\omega + 1} = -\frac{\cos 2\omega}{\sin 2\omega} \pm \frac{1}{\sin 2\omega}.$$

Осы формуладан (8.11) негізгі теңдеудің екі сипаттамалық дифференциалдық теңдеуін табамыз. Олар мынадай теңдеулер:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_3}{dx_1} &= \frac{1-cos\,2\omega}{sin\,2\omega} = \frac{2\,sin^2\,\omega}{2\,sin\,\omega\cdot cos\,\omega} = tg\,\omega; \\ \frac{dx_3}{dx_1} &= -\frac{1+cos\,2\omega}{sin\,2\omega} = -\frac{2\,cos^2\,\omega}{2\,sin\,\omega\,cos\,\omega} = -ctg\,\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (8.14)$$

Сипаттаманың дифференциалды теңдеулерін (8.14) және жоғарыда алынған (8.1) теңдеулерді салыстыра отырып, сипаттамалар сырғу сызығымен дәл келетіндігін көруге болады. Сипаттама теңдеуін шешуді x_1 және x_3 айнымаларын жаңа айнымалыларымен ξ және η алмастыра отырып, оларды көбінесе каноникалық түрге келтірумен жүзеге асырады. Генки интегралы (8.7) негізінде мынаны қабылдайық: $\xi = \xi(\alpha)$; $\eta = \eta(\beta)$.

Онда, (8.7) теңдеуінен алдымен орташа кернеуді $\sigma_{ор}$, ал одан кейін ω шығарып тастап мынаны аламыз:

$$\omega = 0{,}5(\eta - \xi);\ \sigma_{ор} = k(\eta + \xi);\ \xi + \eta = \sigma_{ор}/k.$$

x_1 және x_3 координаттары α және β координаталарының функциялары болып саналады. Демек, олар ξ және η айнымалыларының функциясы болады. Сондықтан мынадай формулада мағына бар: $\frac{\partial x_1}{\partial \eta}$ және $\frac{\partial \xi}{\partial x_3}$.

Осы формулаларға (8.14) формуласының бірінші және екінші теңдеулерін сәйкесті түрде көбейте отырып, мынаны аламыз:

$$\frac{dx_3}{dx_1}\frac{\partial x_1}{\partial \eta} = \frac{\partial x_1}{\partial \eta} tg\,\omega;\quad \frac{dx_3}{dx_1}\frac{\partial \xi}{\partial x_3} = -\frac{\partial \xi}{\partial x_3} ctg\,\omega.$$

Соңғы теңдеулерден туындылардың белгісін ауыстырып, аяққы түрде мынадай жүйені аламыз:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial x_3}{\partial \eta} = \dfrac{\partial x_1}{\partial \eta} tg\omega; \quad \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi} = -\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi} ctg\omega; \\ \omega = 0{,}5(\eta - \xi); \quad \sigma_{op} = k(\eta + \xi). \end{array}\right\} \tag{8.15}$$

Осы теңдеулерден сырғу сызықтары параметрлік түрде $x_1 = f(\xi,\eta)$ және $x_3 = f(\xi,\eta)$ анықталады.

Сипаттамалар сырғу сызығының барлық қасиеттеріне ие болады.

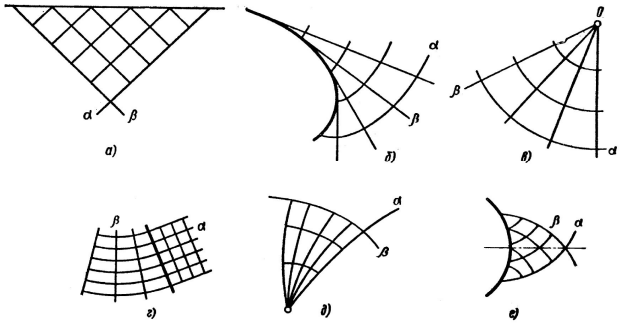
Егер сипаттамалар теңдеулерін шешсе, онда сырғу сызығы белгілі болады және кернеулерді есептеуге мүмкіндік пайда болады. Бірақта тұйық түрде шешімді табу тек жеке жағдайларда мүмкін болады. Сипаттамалар әдістемесімен жанасатын бетте үйкеліс жоқ болған кездегі бірнеше есептер шығарылған. Үйкеліс бар болған кезде есептеуді сандық интегралдау әдістемесімен жүргізеді.

8.4. Сырғу сызығы өрістерінің түрлері

Сырғу сызығының қарапайым өрісі болып – *екі ортогональды тұқымдас түзу сызықтар жүйесі* саналады. Әрбір тұқымдас сырғу сызықтарының бұрылу бұрыштары осы жағдайда нөлге тең болғандықтан, орташа кернеу σ_{op} (8.9) теңдеуге сәйкесті өрістің кез келген нүктесінде тұрақты болып қалады. Демек, осындай өріс біркелкі (біртектес) кернеу күйін білдіреді. Біркелкі кернеу күйінде η және ξ параметрлері де тұрақты болады. Осындай да орташа кернеу σ_{op} бір ғана белгісіз мөлшер болады. Осы орташа кернеуді шекаралық шарттан анықтау қажет. Түзу сызықты бос шекара немесе біркелкі нормальды күштің астындағы шекара үшін сырғу сызығының өрісі болып, ылғи да шекарамен 45^0 бұрыш құратын ортогональды түзулердің торы саналады (8.7 *а*-сурет).

Сырғу сызығы өрісі басқа тобына сырғу сызықтарының бір тұқымдасы түзу сызықтан тұратын, ал осы тұқымдасқа ортогональды екінші тұқымдас қисық сызықтардан тұратын

сырғу сызықтары жатады. Осындай өрістер қарапайым деп аталады. Осындай жағдайда, әрбір түзу сырғу сызығының бойымен қозғалған кезде орташа кернеу тұрақты болып қалады, бірақ та бір түзу сырғу сызығынан екіншісіне өткен кезде осы орташа кернеулер өзгеретін болады (8.7 *б*-сурет).



8.7-сурет. Сырғу сызықтары өрістерінің түрлері

Қаралып жатқан сырғу сызықтарының жеке жағдайы болып центрленген өріс саналады. Осы өрістер түзу шоғырымен және топталған дөңгелектермен құралады. Радиалды және дөңгелекті (тангенциальды) алаңдар бойынша нормальды кернеулер мынадай орташа қысымға тең: $\sigma_{op} = 2k(-\omega + \eta)$ және түзудің еңкею бұрышынан сызықты функция болады (8.7 *в*-сурет). Осындай өрістің центрі *О* ерекше нүкте деп аталады. Өйткені ерекше нүктеде сырғудың түзу сызықтары жиналады, ал осы сырғу сызықтарының әрбіреуінің бойындағы орташа кернеу σ_{op} мөлшері бойынша әр түрлі болады. Осы себептен ерекше нүктеде теориялық кернеу бір ғана мәнге ие болмайды. Бірақта осы нүктеде де тепе-теңдік пен илемділік шарты қанағаттандырылынады.

Сырғу сызықтары өрістерінің көрсетілген түрлері туралы жоғарыда жазылғанды ескеріп, мынаны айтуға болады: біркелкі кернеу күйі аймағына жанасатын аймақта сырғу сызығының

өрісі тек қарапайым болуы мүмкін, яғни осы өрісте тұқымдас тордың біреуі тек түзу сызықтан тұрады (8.7 *г*-сурет).

Ақырында, жалпы жағдайға екі ортогональды тұқымдастар пайда болғызған жатық қисық сызықты сырғу сызықтарының өрістері жатады. Осыларға, мысалы өзара ортогональды циклоидтер, логарифмді спиральдар және басқа тым күрделі қисықтар жатқызылады. Осындай өрістердің жеке жағдайларында бір тұқымдастың қисық сызықтары бір нүктеде қиылысуы мүмкін. Сондықтан осындай нүктелер ерекше нүкте деп аталады.

Бос бетте немесе біркелкі нормальды күштің астында болатын дөңгелек шекарада сырғу сызықтарының өрісі логарифмдік спиральдың ортогональды торы болып көрсетілетіндігін айта кету қажет (8.7 *е*-сурет).

Осы ережені және түзу сызықты шекараларға қатысты айтылған ережелерді ескеріп мынадай қорытындыны жасауға болады: күштен бос немесе біркелкі нормальды күштің астында болатын шакаралардағы сырғу сызықтарының өрісі, осы шекара өзінің пішінімен тек анықталады.

Сараптамалық есептерді шешкен кезде бүкіл деформацияланатын аймақ бойынша сырғу сызығының бір түрімен немесе жақын түрлерімен бүкіл сырғу сызықтарының өрісін салу сирек мүмкін болады. Әдетте, әр түрлі аймақ үшін әділ шешімдерді беретін сырғу сызықтары өрістерін қиыстыру қажет. Осылай сырғу сызықтары өрістерін салған кезде мынадай шарттарды сақтау керек: әр түрлі аймақтардың шекарасы көршілес өрістер үшін жалпы болатын сырғу сызықтарынан тұруы қажет; шекараға кесе-көлденең (нормаль бойынша) кернеу сыңарлары үздіксіз болуы керек.

8.5. Сырғу сызығының өрісін салу

Жалпы жағдайда сырғу сызықтарының өрістерін салу жеткілікті күрделі есеп болып саналады және тәжірибе мен интуицияны (сезуді) талап етеді.

Кез келген жағдайда шекаралық шарт (әдетте нормальды және жанамалы кернеулердің арасындағы қатынас түрінде) берілуі қажет.

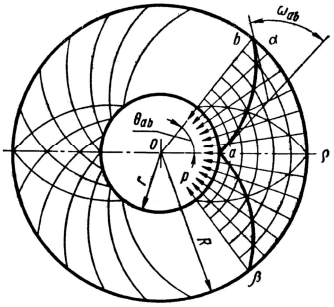
Қандай да бір есепті сырғу сызығы әдістемесімен шешкенде, алынған шешім жалғыз ғана болмауы мүмкін. Осындай да берілген шекаралық шартқа дұрыс болатын басқа шешім де бар болуы мүмкін. Сондықтан алынған шешімді кейінірек жалғыздыққа және дұрыстыққа тексеру қажет.

Сырғу сызықтары өрістерін салу үшін жазық деформация теңдеулерін аналитикалық интегралдайтын әдістемені қолдану мүмкін екендігі бұрын айтылды. Осындайда әр түрлі, әдетте жуықты әдістемелерді қолданады. Бірақта осындай жолмен сырғу сызықтары өрістерін салу едәуір математикалық қиындықтарға кездеседі және металдарды қысыммен өңдеу теориясында таралмаған.

Кейбірде берілген есептің шартын талдау және сырғу сызықтарының геометриялық қасиеттерін қолдану негізінде, теңдеулерді шешпей сырғу сызықтары өрістерін салуға мүмкіндік беріледі. Сонымен бірге, кейбір қарапайым жағдайда қарапайым жолмен тұйық аналитикалық шешімді алуға мүмкіндігі бар болады. Ақырында, сырғу сызықтарының теориясы графикалық әдістемемен сырғу сызықтары өрістерін салуға мүмкіндік береді. Кейбір жағдайда сырғу сызықтары өрістерін аналитикалық есептелген торапты нүктелердің координатасы бойынша салуға болады. Айтылғанның бәрі дерлік төменде бейнеленетін болады.

Жазық сақинаға сырғу сызығының өрісін салуды қарайық (8.8-сурет). Осы сақинаның ішкі қарамына біркелкі таралған тартатын күш p түсірілсін. z осі бойымен (яғни сақинаның қалыңдығымен) деформация жазық етіп қабылданады. Сақинаның барлығы илемді деформация күйінде болатын p күші мөлшерін анықтайық.

Сақинаның ішкі құрамында жанама кернеулер жоқ болғандықтан радиалды бағытталған σ_p нормальды кернеуі басты болып саналады. Демек, тангенциальды бағытталған σ_θ кернеуі де басты нормальды кернеу болады. Сондықтан басты кернеулердің траекториясы дөңгелектер және оларға ортогональды радиустер торы болып есептеледі (8.8-сурет, оң жағы).



8.8-сурет. Жазық сақинадағы сырғу сызықтары

Сырғу сызықтары басты кернеулердің траекториясына 45^0 бұрышпен еңкейген, яғни әрбір сырғу сызықтары өздері кесіп өтетін кез келген радиуспен 45^0 бұрышын құрайды. Осындай бұрышты сырғу сызықтары кез келген дөңгелекпен де құрайды, өйткені олар радиуспен ортогональды.

Бір нүктеден *O* шығатын барлық сәулелерді бір бұрышпен α қиып өтетін қисық сызық логарифмдік спираль екендігі қисық сызық теориясынан белгілі. Демек, қаралып жатқан есепте сырғу сызығы логарифмдік спираль болып есептеледі.

Логарифмдік спиральдің теңдеуі мынадай: $\rho = r\exp A\theta$, мұндағы $A = ctg\alpha$. Біздің жағдайымызда $A = ctg45^0 = 1$. Демек, осы жағдай үшін мынаны жазуға болады: $\rho = re^{\theta}$.

a нүктесінен бастап ρ осінен сағат бағытына қарсы θ және ρ-ны тұрғызып бір тұқымдастың α сызығын аламыз, ал сағат бағытымен тұрғызуды орындап басқа тұқымдастың β сызығын аламыз (8.8-сурет). Осыған ұқсас жолмен сырғу сызықтарының басқа жұптарының кез келген санын алуға

болады. Суреттің сол жағында сырғу сызығы өрістерінің бөлімі көрсетілген. Осы өріс ортогональдықтың және жанамалар арасындағы бұрыштың тұрақтылығы талабын қанағаттандыратындығын оңай дәлелдеуге болады.

Салынған сырғу сызықтары радиустерге тұрақты 45^0 бұрышпен еңкейгендіктен, олардың бұрылу бұрышы берілген сырғу сызығымен қиылысатын бір нүктеден екіншісіне дейін радиустың бұрылу бұрышына тең. Сондықтан $\theta_{ав} = \omega_{ав}$ (8.8-сурет).

Қисық сызықтың теңдеуінен мынау шығады: $\ln\frac{\rho}{r} = \theta$.

Демек, $\theta_{ав} = \omega_{ав} = ln\frac{R}{r}$.

(8.9) теңдеуінің негізінде мынаны жазуға болады:

$$\sigma_{ора} - \sigma_{орb} = 2k\ln\frac{R}{r}.$$

b нүктесі бос бетте жатыр, демек $\sigma_{pb} = 0$.

σ_p кернеуі созатын, ал σ_θ кернеуі қиысатын кернеулер екендігін ескеріп, илемділік шартынан мынаны аламыз: $\sigma_{pb} - \sigma_{\theta b} = 2k$.

Осыдан мынаны табуға болады: $\sigma_{\theta b} = -2k$ және $\sigma_{орb} = \frac{\sigma_{pb} + \sigma_{\theta b}}{2} = -k$.

Сонда $\sigma_{ора} = 2k\ln\frac{R}{r} - k$. Бірақта $\sigma_{ора} = \frac{p + \sigma_{\theta a}}{2}$.

Илемділік шарты бойынша $p - \sigma_{\theta a} = 2k$. Демек, $\sigma_{\theta a} = p - 2k$. Сондықтан

$$\sigma_{ора} = \frac{p + p - 2k}{2} = 2k\,ln\frac{R}{r} - k.$$

Соңғы теңдеуден мынаны табуға болады: $p = 2k\ln\frac{R}{r} = \sigma_S^*\ln\frac{R}{r}$.

Сөйтіп есеп қарапайым жолмен шешілді. Меншікті күшті анықтау үшін тұйық шешім алынды және сырғу сызықтары өрісі салынды.

Осы жағдай үшін қарапайым жолмен тепе-теңдік дифференциалды теңдеуін илемділік шартымен бірлестіре шешіп, меншікті күшті анықтауға болады. Мұнда кернеулі күй бір жағынан жазық, екінші жағынан симметриялы осьті болады.

Тепе-теңдіктің дифференциалды теңдеуі біреу, яғни

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0 .$$

Мұндағы σ_p және σ_θ кернеулері басты болады. Илемділіктің шартын осы жағдай үшін былай жазуға болады: $\sigma_\rho - \sigma_\theta = \sigma_s^* .$

Осы теңдеуді тепе-теңдік теңдеуіне қойып соңғысын шешейік. Интегралдаудың тұрақтысын ρ = *R* болғанда σ_p = 0 шартынан анықтайық. Нәтижесінде мынаны аламыз:

$$\sigma_\rho = \sigma_S^* \ln\frac{R}{r} .$$

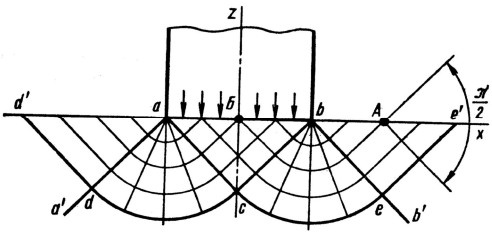
ρ = *r* болған кезде σ_p =0. Демек, мынаны аламыз: $p = \sigma_S^* \ln\frac{R}{r}$.

Сөйтіп біз сырғу сызығы әдістемесімен осы есепті шешкен кезде алған нәтижені қайтадан алдық.

Жанасатын бетте үйкеліс жоқ болған кезде илемді кеңістікке жазық сотанның енуінің бастапқы кезі үшін сырғу сызығының өрісін салуды қарайық.

Жанасатын бетте үйкеліс жоқ дегенді қабылдағандықтан сырғу сызықтары сотанның жұмысшы бетіне 45^0 бұрышпен келуі керек және осы бөлімге жанасатын сырғу сызығы өрісінің бөлімінде кернеу күйі біркелкі болуы қажет (екі түзу сызықты ортогональды тұқымдастардың торы). Осы бөлімді шектейтін *ас* және *вс* сырғу сызықтарын жүргіземіз (8.9-сурет). Сотанның сол және оң жағында бос бет таралады. Осы бос бетке сырғу сызықтары тағы да 45^0 бұрышпен шығады. 45^0 бұрышпен *а* және *в* нүктелерінен сырғу сызықтарының *аа*′ және *вв*′ бағыттарын

жүргіземіз. *а* және *в* нүктелері ерекше нүктелер болады. Осы ерекше нүктелерден *ас* және *вс* радиустері бар дөңгелектерді жүргізіп центрлендірілген өріс шекараларын аламыз. Осы центрленген өрістер біркелкі кернеу күйі бар аймақтарды қосады. Аяғында 45^0 бұрышпен бос бетке dd' және ee' түзулерін жүргізіп, осы жағдай үшін барлық сырғу сызығы өрістер шекарасын ($d'dcee'$) аламыз. Көрнекті болу үшін алынған аймақтардың ішінде осы аймақтарға сәйкесті сырғу сызықтарын жүргіземіз.



8.9-сурет. Илемді кеңістікке жазық сотан енгендегі сырғу сызығының өрісі

Енді меншікті күшті анықтайық. Сырғу сызықтары сотанның бүйір жазықтығына және бос бетке 45^0 бұрышпен еңкейген. Демек, бос беттің нүктелерінен сотанның бүйірінде орналасқан нүктелерге қозғалған кезде (мысалы, *А* нүктесінен *Б* нүктесіне дейін) сырғу сызығының бұрылу бұрышы 90^0 тең, яғни $\omega_{АБ} = \frac{\pi}{2}$.

Бос бетте $\sigma_{x3A} = 0$, ал σ_{x_1A} - қысатын және басты кернеу. Демек, басты кернеумен жазық деформация үшін илемділік шартынан мынаны табамыз

$$(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + \sigma_{13}^2 = 4k^2;\ \ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 4k^2;$$
$$(\sigma_{x_3A} - \sigma_{x_1A})^2 = 4k^2;\ 3\ \sigma_{x_3A} = 0;\ \ \sigma_{x_1A} = -2k.$$

Орташа кернеуді былай анықтаймыз:

$$\sigma_{орA} = \frac{\sigma_{x_3 A} + \sigma_{x_1 A}}{2} = \frac{-2k}{2} = -k \,.$$

Мына теңдеудің негізінде $\sigma_{орM} - \sigma_{орN} = \pm 2k\omega_{MN}$ және $\sigma_{орA} \succ \sigma_{орБ}$ екендігін ескеріп мынаны жазуға болады: $\sigma_{орA} - \sigma_{орБ} = 2k\omega_{AB}$.

Жоғарыда жазылған соңғы теңдеуге табылған $\sigma_{орA}$-ның мәнін қойғаннан кейін мынаны анықтаймыз:

$$\sigma_{орБ} = -\left(k + 2k\omega_{АБ}\right) \qquad (a)$$

Сонымен бірге *Б* нүктесі үшін мынаны жазуға болады:

$$\sigma_{x_1 Б} - \sigma_{x_3 Б} = 2k \,;\; \sigma_{орБ} = \frac{\sigma_{x_1 Б} + \sigma_{x_3 Б}}{2} \,;$$

Осы теңдеулерден $\sigma_{x_1 Б}$ мәнін төменде жазылған жолмен шығарып тастап мынаны аламыз:

$$\sigma_{x_1 Б} = 2k + \sigma_{x_3 Б} \,;$$

$$\sigma_{орБ} = \frac{2k + \sigma_{x_3 Б} + \sigma_{x_3 Б}}{2} = \frac{2k + 2\sigma_{x_3 Б}}{2} = k + \sigma_{x_3 Б} = \sigma_{x_3 Б} + k \,.$$

Алынған $\sigma_{орБ}$-ның мәнін (*a*) формуласына қояйық. Сонда мынаны аламыз:

$$\sigma_{x_3 Б} = -2k\left(1 + \omega_{АБ}\right).$$

Меншікті қысым мынаған тең: $p = -\sigma_{x_3 Б}$. Демек мынаны жазуға болады: $p = 2k\left(1 + \omega_{АБ}\right)$, немесе қаралып жатқан жағдай үшін мынау әділетті болады:

$$p = 2k\left(1 + \pi/2\right) \approx 2{,}6\sigma_s^* \,.$$

Илемді жартылай кеңістікке қатты сотан енгенде пайда болатын сырғу сызығы өрістерінің (8.10 *а*-суретте көрсетілген) түрлері бірнеше. Р. Хилл 8.10-суретте көрсетілген өзінің вариантын ұсынды. Р. Хилл өрісінің негізінде анықталған басып енгізудің меншікті күшінің мөлшері Л. Прандтл өрісін қолданып анықталғаннан айырмашылығы жоқ болады. Өйткені $\omega_{АБ}$ бұрышының мөлшері екі жағдай үшін бірдей.

Қаралған есептерді шешкен кезде қолданылған элементарлы тәсілдермен қиылған конусты шөктіргенде (8.10 *б*-сурет), жартылай кеңістікке дөңгелектелген сотанды басып еңгізгенде (8.11-сурет) және т.б. пайда болатын сырғу сызығы өрістерін салу есептерін шешуге болады.

Кейбір жағдайларда кернеулерді есептеуді жанасу бетінен бастау қажет. Есептеуді салынған сырғу сызықтары өрістеріне жүргізеді. Кез келген нүктедегі кернеулердің мөлшерлерін анықтау үшін жанасу алаңында әсер ететін кернеулерді анықтау керек. Жанасу бетінде нормальды кернеу σ_n және k тең жанама үйкеліс кернеуі әсер ететіндігі шекаралық шарттан шығады.

σ_n кернеуі минус таңбасымен алынған орташа жанама қысымға p тең болады. Өйткені әсер ететін кернеу қысатын кернеу. Айтылған жанама қысымды p 2% дейінгі дәлдікпен мынадай формуламен анықтауға болады:

$$p = 2k\left(1{,}25 ln\,\chi + \frac{1{,}25}{\chi} - 0{,}25\right),$$

мұндағы $\chi = h'/b$ (h' – деформация ошағының тереңдігі; b – жанасу ауданының ұзындығы).

Келтірілген формула $1 < \chi < 8{,}5$ аралығына әділетті. $\chi >$ болған кезде меншікті қысымды мынадай Прендтл формуласы бойынша анықтайды:

$$p = 2k\left(1 + \pi/2\right) = 5{,}14k\,.$$

Жанасу алаңында ең үлкен үйкеліс әсер еткен кезде $\tau = k$ бір тұқымдастың сырғу сызықтары оған $\pi/2$ бұрышымен келетіндігін жоғарыда айттық. σ_1 және σ_2 басты кернеулері сырғу сызықтарын $\pi/4$ бұрышымен қиып өтеді. Осының себебінен σ_n кернеуі үшін мына формуланы жазуға болады: $\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_3 n_3^2$, мұндағы $n_1 = n_3 = \sqrt{2}/2$ – басты кернеулердің бағыттаушы косинустері.

Мәндерді қойғаннан кейін мынаны аламыз:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cdot 0{,}5 + \sigma_3 \cdot 0{,}5 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2,$$

яғни жанасатын алаңдағы нормальды кернеу σ_n орташа нормальды кернеуге $\sigma_{ср}$ тең. Осыдан мынаны аламыз $\sigma_{жан} = - p$.

Басты кернеулердің мөлшерін мынадай теңдеулерді қолданып, табуға болады:

$(\sigma_1 + \sigma_3)/2 = p$ – жанасу алаңындағы нүктелердегі орташа кернеу;

$(\sigma_1 + \sigma_3) = 2k$ – илемділік шарты.

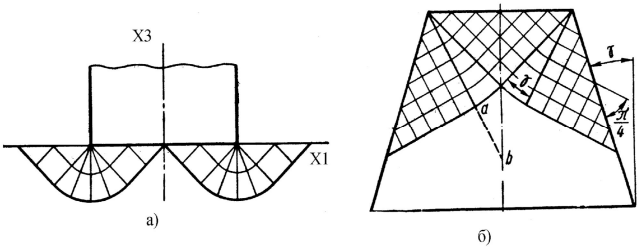
Жоғарыда жазылған жүйені шешіп мынаны аламыз:

$$\sigma_1 = - p + k; \quad \sigma_3 = - p + k.$$

Жанама кернеудің мөлшерін былай анықтаймыз:

$$\sigma_{13} = \pm (\sigma_1 + \sigma_3)/2.$$

Сырғу сызығы торын салып және жанасу алаңының нүктелеріндегі кернеулерді біліп, Генки теңдеуі бойынша дайындаманың көлденең қимасы жазықтығында кернеулі күйді есептейміз.

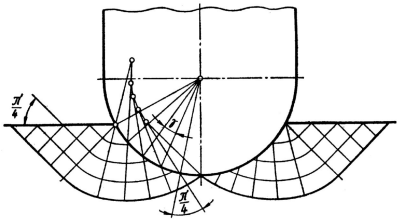


8.10-сурет. Басып енгізу (*а*) және қиылған конусты шөктіру (*б*) операцияларын орындаған кезде пайда болатын сырғу сызығы өрістері

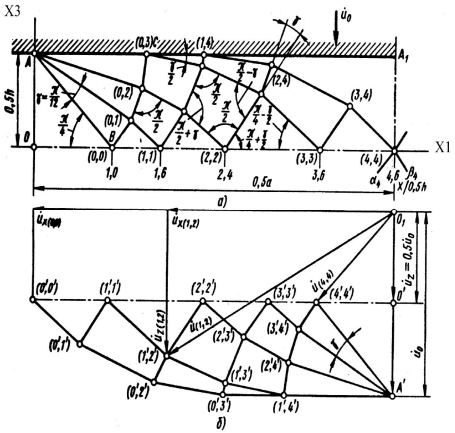
Металдарды қысыммен өңдеу теориясының күрделі есептерін шешу үшін сырғу сызығы өрісін графикалық тәсілмен салуды кеңінен қолданды. Мысал ретінде ені *a* және қалыңдығы *h* болатын жолақты кедір-бұдырлы тақтамен шөктірген кезде пайда болатын сырғу сызығы өрісін салайық (дайындама мен сайманның бетіндегі үйкеліс мөлшері ең үлкен). x_1 және x_3 осьтеріне қатысты айтылған шөктіру симметриялы болғандықтан жолақ қимасының бірден төрт бөлімін қарау жеткілікті (8.12 *а*-сурет).

Жолақтың бос беті *OA* жазық болғандықтан, ол біркелкі кернеулі күй өрісінің шекарасы болады (*OAB* үшбұрышы және оған шеңбер доғасы болып саналатын *BC* сырғу сызығымен

шектелген центрленген өріс *ABC*-ны қосу қажет). *A* нүктесі ерекше нүкте болады.



8.11-сурет. Жартылай кеңістікке дөңгелектелген сотанды басып еңгізгенде пайда болатын сырғу сызығы өрістері



8.12-сурет. Жолақты кедір-бұдырлы тақтамен шөктірген кезде пайда болатын сырғу сызығының өрісі

A нүктесінен *BC* шеңберлер доғасымен шектелген және араларында бірдей бұрыштары бар ($\gamma = \pi/12$) түзу шоғырын жүргізейік. Доғаны тең кесінділерден (хордадан) тұратын сынған сызықпен ауыстырайық. Осы кесінділердің аяққы жақтары (0,0), (0,1), (0,2) және (0,3) нүктелерімен белгіленген (нүктенің көрсеткішіндегі бірінші сан осы нүктені қиып өтетін α тұқымдасы сырғу сызығының реттік нөмірін, ал екіншісі β тұқымдасы сырғу сызығының нөмірін көрсетеді). Содан кейін (0,0) – (0,1) кесіндісіне перпендикулярлы (0,1) – (1,1) кесіндісін, (0,1) – (0,2) кесіндісіне перпендикулярлы (0,2) – (1,2) кесіндісін

және (0,0) – (0,1) кесіндісіне параллельді (1,1) – (1,2) кесіндісін жүргізіп осылардың қиылысатын жерінде (1,2) торапты нүктесін аламыз. Осыған ұқсас жолмен (1,3), (1,4) торапты нүктелерінің жайын алып α тұқымдасының 1 сырғу сызығын аламыз. Ары қарай салуды жалғастырып α тұқымдасының және онымен бірге β тұқымдасының сырғу сызықтарын аламыз. Нәтижесінде екі бұрыштары π/2, ал қалған екі бұрышы π/2 ± γ тең болатын төрт бұрышты көздерден тұратын сырғу сызығы өрісін аламыз.

Қабылданған шекаралық шарттарда ($\tau_к = \mu_s\sigma_s^* = 0{,}5\sigma_s^*$) α тұқымдасының сырғу сызықтарын дәл салған кезде, олар AA_1 жанасу сызығын π/2 бұрышымен киып өтеді, ал β тұқымдасының сырғу сызықтары үшін AA_1 жанасу сызығы айналатын болып саналады (8.12 *а*-сурет).

Әрбір тұқымдас сырғу сызығының бұрылу бұрышы бір торапты нүктеден екінші торапты нүктеге ауысқан кезде қабылданған γ бұрышына тең болады. Сондықтан кернеулердің ($\sigma_{ср}$, σ_{11}, σ_{33} және σ_{13}) мәнін және олардың арасындағы қатынасты сырғу өрісін дәл салған жағдай да сияқты дұрыс есептеуге болады. Қателіктер тораптық нүктенің координатасын тапқанда жіберілінуі мүмкін. γ бұрышы кішкентай болған сайын, сынған сызықтың өрісі басты қысық сызықтарға тым жақынырақ болады және торапты нүктенің координатасы дәлірек табылады. Бірақта осымен бірге сырғу сызығының өрісін салу да тым қиын болып кетеді. Сондықтан бұрышты $\gamma = 5 \div 15^o$ тең етіп қабылдау орынды.

β жүйесінің 3 сызығына дейін AA_i сызығы сырғу өрісін салуға әсерін тигізбегенін жеңіл байқауға болады. Егер жанасу сызығын алып тастаса, онда центрленген өрісті жалғастыру мүмкін болар еді және ұзартылған шекаралық сырғу сызығы *BC*-ны тірек қылып сырғу сызығын салуды жалғастыруға болар еді.

Шеңберлердің доғасы болып саналатын, екі қиылысатын сырғу сызығы негізінде салынған өрісті (*BC*-ға симметриялы төмен орналасқан сызықты ескеріп) Э. Томсен «сырғу сызығының екі центрлі желпуішті торы» деп, ал Е.М. Макушок «тең радиусты шеңберлердің екі доғасымен жасалған өріс» деп

айтады. Ары қарай соңғы анықтама қолданылатын болады. Айтылған өрісте өте үлкен мән бар, өйткені көптеген әр түрлі есептерді шығаруға мүмкіндік береді. Сол себептен осы өріс математикалық талдауға мұқият түсті. Қазіргі уақытта осы өрісті салу үшін торапты нүктенің есептелген мәні берілген кестені пайдалануға болады.

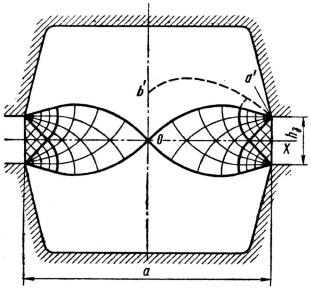
Осы кестелерде торапты нүктенің координатасы γ бұрышының белгілі бір мәні үшін берілген. Өлшем бірлігі ретінде өрісті құратын щеңберлер доғасының радиусы *AB* қабылданған. Келтірілген сандарды √2 көбейтіп *AO* – *OB* кесінділеріне еселі мөлшерлермен координаттың кестелік мәндерін білдіруге болады (8.12 *а*-сурет).

Тең радиусты доғамен жасалған өрісті келесі есепте кеңірек танысайық.

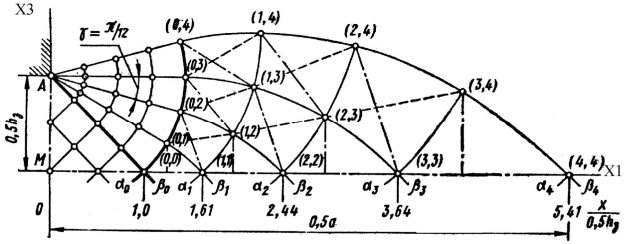
Қалыпты толтырған металл қалыптың төменгі және жоғарғы бөлімдері арасындағы саңлауға екі жаққа қарай ағуды бастасын. Қалыптың ұзындығы едәуір, ал қалыптың ұзындығы бойынша көлденең қима бірдей (8.13-сурет). Л.А. Шофманның болжауы бойынша сырғу сызығының өрісінде 8.13-суретінде көрсетілген түр бар. *z* және *x* осьтеріне қатысты деформация ошағы симметриялы болу себебінен бір квадратына орналасқан өрісті қараған жеткілікті (8.14-сурет). Осы квадратта мынадай үш аймақ бар: тік бұрышты үшбұрыш *AM* (0,0); айналмалы сектор A(0,0)(0,4) және қисық сызықты үшбұрыш (0,0)(0,4)(4,4).

AM(0,0) үшбұрышында *AM* сызығы, осы мысалда деформацияланып жатқан дененің бос беті болып саналады.

Демек, осы сызықта $\sigma_{11} = \sigma_{13} = 0$ және екі тұқымдастардың сырғу сызықтары π/4 бұрышымен айтылған *AM* сызыққа еңкейіп орналасқан. Екі тұқымдастардың сырғу сызықтары ортогональды түзу торды құрайды. Кернеу күйі біркелкі. Осындағы σ_{33} кернеуі басты қысатын кернеу және илемділік шарты бойынша осы кернеу мынаған тең: $|\sigma_{33}| = \sigma^*_s = 2k$ (илемділік шарты бойынша $\sigma_{11} - \sigma_{33} = \pm 2/\sqrt{3}\,\sigma_s = \pm\sigma_s^* = \pm 2k$).



8.13-сурет. Металды қалыптаған кездегі сырғу сызығының өрісі



8.14-сурет. Металды қалыптаған кездегі сырғу сызығының өрісі

Орташа кернеуді былай анықтаймыз: $\sigma_{op} = \dfrac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} = -k$.

x осінде жанама кернеу нөлге тең. ξ және η параметрлері де тұрақты мөлшерлер болады. Өйткені σ_{op} тұрақты мөлшер және $\omega = \pi/4$ тең болады. (8.15) формуласынан мынаны табуға болады: $\eta = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}$ және $\xi = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

A(0,0)(0,4) дөңгелек секторында өріс центрленген және шеңбер доғасынан (α тұқымдасы) және оларға ортогональды радиустерден (*β* тұқымдасы) тұрады. Әрбір радиустердің бойымен кернеулі күй тұрақты болып қалады, бірақта бір радиустен екіншісіне ауысқан кезде өзгереді, яғни α сызығы бойымен қозғалған кезде мөлшерін өзгертеді. Сондықтан *A*(0,0)(0,4) секторында кернеулі күйді анықтау үшін (0,1), (0,2),

(0,3) және (0,4) торапты нүктелерінде кернеулерді анықтау жеткілікті. (0,0) нүктесінде бұрыш мынаған тең: $\omega_{0,0} = \pi/4$.

Сырғу сызығында орналасқан басқа нүктелерде бұрылу бұрышы мынаған тең екендігін оңай көруге болады: $\omega = \omega_{0,0} + \gamma n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{12}$, мұндағы n – сырғу сызығының екінші тұқымдасының реттік нөмірі.

(8.7) формуласы бойынша мынаны жазуға болады: $\sigma_{op} = 2k(\eta - \omega)$.

Қаралып жатқан жағдай үшін мынау дұрыс:

$$\sigma_{op} = 2k\left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{12}\right)\right].$$

Осы формуладан мынаны табамыз:

$$\sigma_{op} = -2k\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi n}{12}\right).$$

n = 1, 2, 3 және 4 мәндерін жоғарыда жазылған соңғы теңдеуге қойып α_o сырғу сызығындағы торапты нүктелерде орташа кернеуді σ_{op} табамыз, ал содан кейін (8.2) теңдеуі бойынша σ_{11}, σ_{33} және σ_{13} кернеулер сыңарларын анықтаймыз.

(0,0), (0,4), (4,4) қисық сызықты үшбұрыш тең радиусты шеңберлердің екі доғасымен құрастырылған өріс болып саналады. 8.14-суретінде оны салған кезде Р. Хилл кестесі қолданылған. Өлшем бірлігі болып $h_з/2$ кесіндісі саналады. $AM(0,0)$ үшбұрышында сияқты, осы аймақта сырғу сызығы x осін $\pi/4$ бұрышымен қиып өтеді. Өйткені симметриялы ось болып саналатын x осі бойымен жанама кернеу жоқ болады.

8.14-суретіндегі (0,0) – (0,4) доғасындағы торапты нүктелер бір-бірінен $\gamma = \pi/12$ болатын бірдей бұрыштық ара қашықтықта орналасқан. Осындай бұрыштық ара қашықтықпен орналастыру сырғу сызығының тең бұрышты деп аталатын түрін салуды алдын ала болжайды. Осындай өрісте ω бұрышы сырғу сызығының бойымен бір нүктеден көршілес нүктеге ауысқан кезде γ тең болатын тек бір ғана мөлшерге өзгереді.

Сондықтан, мысалы β_4 сырғу сызығына қарай отырып (0,4) нүктесінен (4,4) нүктесіне дейін қозғалған кезде ω бұрышы 4γ мөлшеріне азаятындығын оңай анықтауға болады. Онда β_4 сырғу сызығы үшін мынаны жазуға болады: $\omega = \omega_{(0,4)} - \gamma m$.

α_o сырғу сызығында бұрылу бұрышы мынаған тең екендігі: $\omega = \omega_{(0,0)} + \gamma n$ бұрын анықталған. Сондықтан $\omega_{(0,4)} = \omega_{(0,0)} + \gamma n$. Демек, β_4 сырғу сызығында орналасқан торапты нүктелер үшін мынаны табамыз: $\omega = \omega_{(0,0)} + \gamma(n - m)$.

Айтылған пікірді β тұқымдастың кез келген сырғу сызығына қайталауға болады. Демек мынадай формула:

$$\omega_{(m,n)} = \omega_{(0,0)} + \gamma(n - m) \qquad (8.16)$$

γ-ның кез келген таңдалған мәндерінде, берілген өрістегі кез келген торапты нүктедегі $\omega_{(m,n)}$ бұрышын анықтайтын болады.

(0,4) нүктесі үшін, ал сонымен барлық β_4 сырғу сызығы үшін ξ_4 мәнін анықтайық.

(8.15) жүйесінің үшінші теңдеуі бойынша мынаны анықтайық: $\xi_4 = \eta_0 - 2\omega_{(0,4)}$.

Бұрын мынау анықталған: $\eta_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$.

Өз кезегінде мынаны табуға болады: $\omega_{(0,4)} = \frac{\pi}{4} + \frac{(4-0)\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$.

Демек ξ_4 мәнін былай анықтай аламыз:

$$\xi_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{2 \cdot 7\pi}{12} = -\frac{1}{2} - \frac{11}{12}\pi .$$

Ары қарай (8.15) жүйесінің екінші теңдеуін қолданып мынаны табамыз:

$$\sigma_{op} = 2k(\xi + \omega).$$

ξ_4 тұрақтысының және (8.16) формуласынан ω айнымалысының мәнін жоғарыда жазылған соңғы теңдеуге қойып және $n = 4$ екендігін ескеріп β_4 сырғу сызығы үшін мынаны аламыз:

$$\sigma_{op} = -2k\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{12}\right).$$

σ_{op} анықтағаннан кейін α_o сырғу сызығының торапты нүктелеріне сияқты (8.2) теңдеуі бойынша σ_{11}, σ_{33} және σ_{13} кернеулер сыңарларын анықтаймыз.

Орташа кернеудің мәнін анықтау үшін Генки интегралының (8.7) орнына (8.9) теңдеуін қолдануға болады. Мысалы, α_o сырғу сызығының торапты нүктелері үшін мынаны жазуға болады: $\sigma_{op} = \sigma_{(0,0)} - 2k\gamma n$ немесе осы теңдеуге (0,0) нүктесінің орташа кернеуін $\sigma_{(0,0)} = -k$ және $\gamma = \pi/12$ мәнін қойып мынаны аламыз:

$$\sigma_{op} = -2k\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi n}{12}\right),$$

яғни бұрын анықталған теңдеу қайтадан алынды.

Басқа торапты нүктелердегі кернеулерді есептеу ешқандай қиындықтар тудырмайтындығы жоғарыда жазылған есептеу ретінен көрініп тұр. Егер қаралып жатқан сырғу сызығы өрісін құрайтын қисық сызықты тікбұрыштылардың диагональдарының қосымша қасиетін ескерсе, онда осы есептеулер одан ары жеңілдетілетін еді.

Индекстерінің айырмасы ($n - m$) өзгермейтін барлық торапты нүктелер үшін ω бұрышы тұрақты болып қалатындығы (8.16) формуласынан көрініп тұр. Осындай нүктелер 8.14-суретте штрихтық сызықпен қосылған. Осы сызықтар тор ұяшығының диагоналы болып саналады. Бұл сызықтарда жанама кернеулер σ_{13} тұрақты болады. Осы (8.2) жүйесінің үшінші теңдеуінен шығады. Индекстерінің қосындысы ($n + m$) тұрақты болатын нүктелерді қосатын басқа диагональды сызықтар изобара болып саналады, яғни осы сызықтардың бойымен орташа кернеу $\sigma_{ср}$ өзгермейді. 8.14-суретте олар тағы да жуықты түрде түзу болатын штрихты сызықпен келтірілген. Мысал ретінде (1,2) нүктесін алайық. Осы нүктеден (1,3) және (2,2) нүктелеріне ауысқан кезде сәйкесті сырғу сызықтарына жанамалардың еңкіш бұрыштары бірдей γ мөлшеріне өзгереді. Демек (8.9) теңдеуіне сәйкесті, ($n + m$) = const = 4 болатын (1,3) және (2,2) нүктелерінде орташа кернеудің мөлшері бірдей болады. Бастапқы нүкте (1,2) еркін түрде алынғандықтан тұжырым жалпы болып саналады.

Есептелген кернеулердің және ω, ξ және η параметрлердің мөлшерлері барлық торапты нүктелер үшін 8.1-кестеде келтірілген. Кестедегі мәліметтер барлық торапты нүктелердегі орташа кернеулерді $\sigma_{(m,n)}$, олардың көрсеткіші арқылы мынадай формуламен жазуға болатындығын көрсетеді:

$$\sigma_{(m,n)} = -2k\left[\frac{1}{2} + (n+m)\gamma\right]. \qquad (8.17)$$

(8.17) теңдеуіндегі бірінші қосылғыш қаралатын жағдай үшін (0,0) нүктесіндегі $\sigma_{(0,0)}$ орташа кернеуінің – k мөлшерін көрсетеді. Сондықтан жалпы жағдай үшін соңғы жазылған формуланы былай қайтадан жазуға болады:

$$\sigma_{(m,n)} = \sigma_{(0,0)} - 2k(n+m)\gamma. \qquad (8.18)$$

$\sigma_{(m,n)}$ осы мәнін және $\omega_{(m,n)}$ үшін алынған бұрынғы мәнді (8.16) кернеулерді анықтайтын (8.2) теңдеуіне қойып мынаны аламыз:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{33}\end{matrix}\right\} = \sigma_{(0,0)} - 2k(n+m)\gamma \pm k\cos\cdot 2(n-m)\gamma\ ; \qquad (8.19)$$

$$\sigma_{13} = k\sin\cdot 2(n-m)\gamma\ .$$

Осы формулалар қаралатын сырғу сызығы өрістеріндегі торапты нүктелерде, олардың көрсеткіштері бойынша $\sigma_{(0,0)}$ кернеуі берілгенде кернеу сыңарларын өте оңай анықтауға мүмкіндік береді.

8.6. Қатаң илемді сұлба

8.8-суретінде берілген сырғу сызығы өрісінде, 8.9, 8.10 *б*, 8.11, 8.12 *а*, 8.13-суреттерінде көрсетілген өрістерден едәуір айырмашылық бар. Бірінші жағдайда сырғу сызығы күш түсірілген бір шекарадан күштен бос екінші бетке қарай таралады. Екінші жағдайда сырғу сызықтар өрістері металдың барлық көлемін қамтымайды. Көрсетілген кез келген сырғу сызықтары өрістерін ұзарту және ұлғайту әрекеттерін жасағанда пайдалануға болады. Бірақ та көрсетілген мысалдардан, оларды дұрыс салудың қандай да бір шарты бұзылатындығын оңай байқауға болады. Басқа кез келген сырғу сызықтарын қосымша

жүргізсек немесе жалғастырсақ, мысалы 8.13-суретіндегі *a'b'* және 8.10 *б*-суретіндегі *ab* сызықтарын, онда 45^0-тан айырмашылықта болатын бұрышпен симметриялы тік осьті олар қиып өтеді, яғни симметриялы осьте ығысу кернеуінің бар екендігін көрсетеді. Бірақ та, ығысу кернеуі симметриялық осьте ешқашан пайда болмайды.

Сөйтіп, сырғу сызықтары өрістерін салған кезде жалпы жағдайда металл көлемі мынадай екі аймаққа бөлінетіні байқалады: біріншісі – өрістер орналасатын илемді аймақ; екіншісі – қатаң болып саналатын аймақ. Осы кезде аймақтар шекарасындағы металдар секірмелі түрде илемділік күйге өтеді деп жорамалданады.

Әр түрлі есептерді шығарған кезде кеңінен қолданылатын осындай концепция *қатаң илемді сұлба* – деген атты алған.

Илемді және қатаң аймақтарды бөлетін шекаралар болып сырғу сызығы саналатындығы суреттерден көрініп тұр. Айналатын сырғу сызықтары да осы шекаралар болуы мүмкін (8.12- суретті қараңыз).

Қатаң илемді шекарасы бар сырғу сызықтары өрісінің дұрыс салынғандығын екі шартпен тексереді: сырғу сызықтары симметриялы осьті 45° бұрышпен қиып өтуі қажет; қатаң аймақпен түйісу бір нүктеде болуы қажет (8.13-суретіндегі *O* нүктесі). Жанасатын екі сырғу сызықтары өрістері бойынша анықталатын түйісу нүктесіндегі кернеу тензорының барлық сыңарлары бір-біріне тең болуы қажет.

Қағида бойынша қатаң илемді шекара күні бұрын белгісіз. Сондықтан оны анықтау сырғу сызығы әдістемесімен есепті шешудің негізгі мақсаттарының бірі.

Осымен бірге, есепті басқа тәсілмен шешкен кезде қатаң илемді сұлбаны қолдануға болады. Бірақта осындай жағдайда қатаң илемді шекараны тәжірибелік мәліметті қолданып табу керек немесе қабылданатын шешімнің негізіне жататын қандай да бір түсінікті пайдалану қажет.

8.1-кесте

Барлық торапты нүктелердегі кернеулер және ω, ξ және η параметрлерінің мөлшерлері

β		α				
		$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$n = 0$	ω	(1/4)π				
	ξ	-1/2 – (1/4)π				
	η	-1/2 + (1/4)π				
	σ_{cp}	- k	–	–	–	–
	σ_{11}	0				
	σ_{33}	- 2k				
	σ_{13}	0				
$n = 1$	ω	(1/3)π	(1/4)π			
	ξ	-1/2 – (5/12)π	-1/2 – (5/12)π			
	η	-1/2 + (1/4)π	-1/2 + (1/12)π			
	σ_{cp}	- 0,76·2k	- 1,02·2k	–	–	–
	σ_{11}	-1,33·2k	-0,52·2k			
	σ_{33}	- 1,19·2k	- 1,52·2k			
	σ_{13}	0,5k	0			
$n = 2$	ω	(5/12)π	(1/3)π	(1/4)π		
	ξ	-1/2 – (7/12)π	-1/2 – (7/12)π	-1/2 – (7/12)π		
	η	-1/2 + (1/4)π	-1/2 + (1/12)π	-1/2 + (1/12)π		
	σ_{cp}	- 1,02·2k	-1,29·2k	-1,55·2k	–	–
	σ_{11}	- 0,77·2k	- 0,85·2k	- 1,05·2k		
	σ_{33}	- 1,27·2k	- 1,72·2k	- 2,05·2k		
	σ_{13}	0,87k	0,5k	0		
$n = 3$	ω	(1/2)π	(5/12)π	(1/3)π	(1/4)π	
	ξ	-1/2 – (3/4)π	-1/12 – (3/4)π	-1/2 – (3/4)π	-1/2 – 3π /4	
	η	-1/2 + (1/4)π	-1/2 + (1/12)π	-1/2 - (1/12)π	-1/2 + 3π	
	σ_{cp}	- 1,29·2k	- 1,55·2k	- 1,81·2k	/12	–
	σ_{11}	- 1,29·2k	- 1,30·2k	- 1,38·2k	- 2,07·2k	
	σ_{33}	- 1,29·2k	- 1,80·2k	- 2,24·2k	- 1,57·2k	
	σ_{13}	k	0,87k	0,5k	- 2,57·2k	
					0	
$n = 4$	ω	(7/12)π	(1/2)π	(5/12)π	(1/3)π	(1/4)π
	ξ	-1/2 – (11/12)π	-1/2 – (11/12)π	-1/2 – (11/12)π	-1/2 – 11π	-1/2 – 11π
	η	-1/2 + (1/4)π	-1/2 + (1/12)π	-1/2 - (1/12)π	/12	/12
	σ_{cp}	- 1,55·2k	- 1,81·2k	- 2,07·2k	-1/2 + 3π	-1/2 - 5π /4
	σ_{11}	- 1,8·2k	- 1,81·2k	- 1,82·2k	/12	- 2,59·2k
	σ_{33}	- 1,3·2k	- 1,81·2k	- 2,32·2k	- 2,33·2k	- 2,09·2k
	σ_{13}	0,87k	k	0,87k	- 1,90·2k	- 3,09·2k
					- 2,77·2k	0
					0,5k	

Қатаң илемді сұлба математикалық тәртіптің концепциясы болып саналады. Дұрысын айтқанда физикалық қатаң

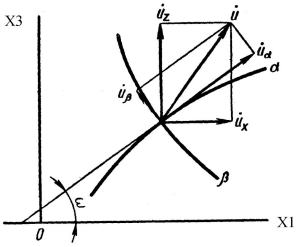
көрсетілетін қатаң илемді шекара жоқ, яғни белгілі бір шекараға шектес қабаттар да бар. Осы қабаттарда серпімді және илемді деформациялардың өсімшесін бір-бірімен әбден салыстыруға болады. Сондықтан қатаң илемді сұлба физикалық дәл шешімді есептеп бере алмайды деп айта аламыз. Қазіргі уақытта ауысатын аймақтардағы кернеулі-деформациялы күйді анықтаудың әдістемесі жасалынып жатыр.

Сырғу сызықтары өрістерінің жылдамдық өрістерімен байланысы

Сырғу сызықтары өрісін салу есебі шынын айтқанда жалғыз шешімге ие болмайды (жоғары жақты қараңыз). Дұрыс салынған сырғу сызығының өрісі тепе-теңдікті шартын, кернеулер мен деформациялардың бірлестік теңдеуін және берілген шекаралық шартты қанағаттандырып, кинематикалық шартқа сәйкес келмеуі мүмкін. Осындай да *статистикалық жағынан мүмкін болатын, бірақ та кинематикалық шартты қанағаттандырмайтын сырғу сызықтары өрістерімен деформациялаудың меншікті күшінің төменгі мөлшері анықталады* деп илемділік теориясы дәлелдейді.

Деформациялаудың нақты меншікті күші мөлшерін анықтау үшін сырғу сызығы өрісі кинематикалық шартты да қанағаттандыруы қажет. Сондықтан сәйкесті толық шешімді алу үшін жылдамдықтар өрісін немесе годографты салу керек. Сонымен бірге, жылдамдықтар өрісі орын ауыстырудың бағытын анықтауға және деформациялы күйдің түрін талдауға мүмкіндік береді.

Алдымен, сырғу сызығы бойымен орын ауыстыру жылдамдығы қанағаттандыратын теңдеулерді шығарайық. Ол үшін $\dot{u}_1$ және $\dot{u}_3$ орын ауыстыру жылдамдығы векторының сыңарларын, еркін түрде алынған қиылысатын жұп сырғу сызықтары α және β бағыттары бойынша, сол вектордың сыңарлары $\dot{u}_\alpha$ және $\dot{u}_\beta$ арқылы білдірейік (8.15-сурет).



8.15-сурет. Орын ауыстыру жылдамдығы векторының сыңарлары

Аналитикалық геометрияның элементарлы формулалары негізінде (координатты осьтің бағытын өзгерту) мынаны шығаруға болады:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \dot{u}_\alpha \cos\omega - \dot{u}_\beta \sin\omega; \\ \dot{u}_3 &= \dot{u}_\alpha \sin\omega + \dot{u}_\beta \cos\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

α және β жүйесі сырғу сызықтарының сәйкесті доғалар элементі бойынша соңғы теңдеулерді дифференциялаймыз, яғни біріншісін s_α, ал екіншісін s_β бойынша:

$$\frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial s_\alpha} = \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial s_\alpha} cos\,\omega - \dot{u}_1 sin\,\omega \frac{\partial \omega}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial s_\alpha} sin\,\omega + \dot{u}_3 cos\,\omega \frac{\partial \omega}{\partial s_\alpha} =$$

$$= \left(\dot{u}_3 cos\,\omega - \dot{u}_1 sin\,\omega\right)\frac{\partial \omega}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial s_\alpha} cos\,\omega + \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial s_\alpha} sin\,\omega.$$

Бірақта 8.15-суретіне сәйкесті мынаны жазуға болады:

$$\dot{u}_3 cos\,\omega - \dot{u}_1 sin\,\omega = \dot{u}_\beta; \quad \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial s_\alpha} cos\,\omega = \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial s_\alpha} \sin\omega = \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_3}.$$

Демек, (*a*) жүйесінің бірінші теңдеуі негізінде мынаны аламыз:

$$\frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial s_\alpha} = \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_3} + \dot{u}_\beta \frac{\partial \omega}{\partial s_\alpha}.$$

Осыған ұқсас жолмен (*a*) жүйесінің екінші теңдеуі негізінде мынаны аламыз:

$$\frac{\partial \dot{u}_\beta}{\partial s_\beta} = -\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_3} + \dot{u}_\alpha \frac{\partial \omega}{\partial s_\beta}.$$

Бірақта (3.50) теңдеуіне және көлемнің тұрақтылық заңына сәйкесті, ал тағы да жазық деформация қаралып жатқанын ескеріп ($\varepsilon_{22} = 0$) мынаны жазуға болады:

$$\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_3} = 0.$$

Сондықтан алдыңғы жазылған екі теңдеуден мынаны аламыз:

$$\frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial s_\alpha} = \dot{u}_\beta \frac{\partial \omega}{\partial s_\alpha}; \qquad \frac{\partial \dot{u}_\beta}{\partial s_\beta} = -\dot{u}_\alpha \frac{\partial \omega}{\partial s_\beta}.$$

Осы формулалардан іздеп отырған ақырғы теңдеуді, яғни сырғу сызықтары бойымен орын ауыстыру жылдамдықтары қанағаттандыру керек болатын теңдеуді аламыз:

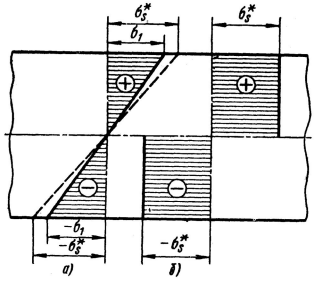
$$\left.\begin{aligned} du_\alpha - \dot{u}_\beta d\omega = 0 \ \ (\alpha \ \textit{бойымен}) \\ d\dot{u}_\beta - \dot{u}_\alpha d\omega = 0 \ \ (\beta \ \textit{бойымен}) \end{aligned}\right\} \qquad (8.20)$$

Осы теңдеулерді тапқан Г. Гейрингер. (8.20) теңдеулері тағы да үзілместік теңдеулері болып саналады және олар сырғу сызығы бойымен сызықты деформациялардың жылдамдықтары нөлге тең болатындықты бейнелейді. Г. Гейрингер теңдеуінен қарапайым сырғу сызықтары өрістерінде, әрбір түзу сырғу сызықтары бойымен жылдамдықтар сыңарлары тұрақты екендігі тікелей шығады. Центрленген өрісте осы жылдамдықтар тек ω бұрышының функциясы болады. Г. Гейрингер теңдеуі көмегімен белгілі сырғу сызықтары өрісі бойынша жылдамдықтар жоспарын салуға болады.

8.8. Кернеу мен жылдамдықтың үзілуі

Жазық деформация жағдайында тақтаны серпімді иген кезде, нормальды кернеулер σ_1 8.16 *а*-суретінде көрсетілгендей сызықты заңмен өзгеретіндігі материалдар кедергісінен белгілі. Осы нормальды кернеулер созудан қысуға бейтарапты нүктедегі нөл арқылы өтеді. Июші момент үлкейген сайын беттегі кернеу σ_1 үлкейетін болады және уақыттың бір мезгілінде созу

аймағында σ_s^* мөлшеріне, ал қысу аймағында $-\sigma_s^*$ мөлшеріне жететін болады (8.16 *а*-сурет сызықшаланған сызық). Таза илемді ию болған кезде серпімді аймақтар толық жоқ болады, ал кернеу эпюрі 8.16 *б*-суретте көрсетілген түрді алады. Бейтарапты бетте нормальды кернеу $\sigma_1 = \sigma_s^*$ секірмелі өзгеріп σ_s^* мөлшерінен $-\sigma_s^*$ мөлшеріне дейін жетеді, яғни нормальды кернеудің үзілуі байқалады.



8.16-сурет. Жазық деформация жағдайында тақтаны игендегі кернеулер

Үздіксіз кернеулермен шешімді табу ылғи да мүмкін болмайды. Сондықтан қазіргі заманғы илемділік теориясында үзілген деп аталатын шешімдер кең таралды.

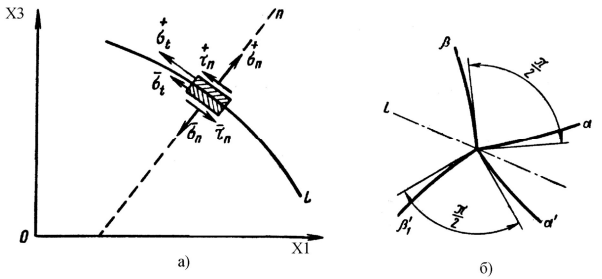
Кернеулердің үзілу сызығына шекті жағдай сияқты қарау қажет. Осы кезде жұқа серпімді мембрана илемді аймақты екіге бөледі деп есептейді. Илемділік теориясында кернеулердің үзілуіне тән ерекшеліктерді сипаттайтын біраз ережелер дәлелденген.

Үзілу сызығында, осы сызықтың бойымен бағытталған нормальды кернеулерде (тангенциальды) үзілу бар болады. Үзілу сызығына перпендикулярлы бағытталған нормальды кернеулер және бойымен бағытталған жанама кернеулер (ығыстыратын) үздіксіз өзгереді.

Егер үзілу сызығында *L* шексіз кішкентай тік төртбұрышты бөліп алса (8.17 *а*-сурет) және осы сызықтың әр жағында орналасқан кернеулерді + және – көрсеткіштерімен белгілесе, онда мынаны аламыз:

$$\sigma_i^+ \neq \sigma_i^-;\ \sigma_n^+ = \sigma_n^- = \sigma_n;\ \tau_n^+ = \tau_n^- = \tau_n.$$

Кернеулердің үзілу сызығы α және α′, β және β′ аттас сырғу сызықтарымен жасалған бұрыштың биссектрисасы L болып саналады (8.17 *б*-сурет), *ал үзілу сызығынан өткен кезде сырғу сызығының қисықтығы, демек ω бұрышы секірмелі өзгереді.*



8.17-сурет. Кернеулердің үзілу сызығы

Сырғу сызықтары өрісінің бір нүктесінде кернеу мен жылдамдықтың үзілуі бір мезгілде болуы мүмкін емес екендігін ұмытпау қажет. Жылдамдықтың үзілуі тек сырғу сызығы бойымен немесе айналатын сырғу сызығы бойымен жүруі мүмкін.

Мысалы, деформацияланып жатқан материал *P* нүктесінде α жүйесінің сырғу сызығын қиып өтетін болсын және осы нүктенің сол жағында орын ауыстыру жылдамдығының векторы $\dot{u}$ болсын, ал қиып өткеннен кейін, яғни оң жақта орын ауыстыру жылдамдығының векторы $\dot{u}'$ болсын (8.18-сурет).

Сырғу сызығын қиып өткен кезде жылдамдықтың нормальды сыңарлары, осы сызықтардың екі жағында бірдей мөлшерге ие болуы керектігін үзілмеушілік шарты талап етеді. Егер осы талап орындалмаса, онда тұтастықтың үзілуі пайда болар еді.

α жүйесінің сырғу сызығына қатысты жылдамдық векторының $\dot{u}$ нормальды сыңары болып $\dot{u}_\beta$ сыңары саналады, демек $\dot{u}_\beta = \dot{u}'_\beta$.

Г. Гейрингердің (8.20) теңдеуі негізінде мынаны жазамыз (8.18-сурет):

$$d\dot{u}_\alpha = \dot{u}_\beta d\omega \quad \text{және} \quad d\dot{u}'_\alpha = \dot{u}'_\beta d\omega .$$

Демек, қаралып жатқан α жүйесінің сырғу сызығы бойымен мынадай шарт орындалу қажет:

$$d\dot{u}_\alpha = d\dot{u}'_\alpha .$$

Осыдан мынаны табамыз:

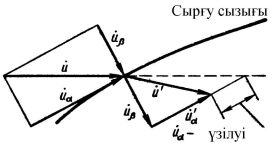
$$\dot{u}_\alpha - \dot{u}'_\alpha = const. \tag{8.21}$$

Осыған ұқсас β жүйесінің сырғу сызығында жылдамдықтың үзілуі жағдайы үшін мынаны аламыз:

$$\dot{u}_\beta - \dot{u}'_\beta = const. \tag{8.22}$$

Осы шешімді Х. Форд тапқан.

Сырғу сызығы бойымен жылдамдықтың үзілуі пайда болған жағдайда, оның мөлшері тұрақты болып қалатындығы (немесе үзілу жоқ болған кезде нөлге тең болатындығы) (8.21) және (8.22) теңдеулерінен шығады. Сырғу сызығы (немесе айналатын сырғу сызығы) қатаң илемді шекара болуы мүмкін болғандықтан, жылдамдықтың үзілуі осы шекараның бойымен жүруі мүмкін, ал нормальды жылдамдық міндетті түрде үздіксіз болып қалуы қажет.



8.18-сурет. Жылдамдықтың үзілуі

8.9. Жылдамдық годографын салу

Жалпы жағдайда жылдамдық годографын диаграмма (график) түрінде салады. Осы диаграммада (графикте) деформацияланып жатқан дене нүктесінің орын ауыстыру жылдамдықтары векторларын, мөлшерлері және бағыттары

бойынша, графикте таңдалған үйек деп аталатын еркін нүктеден шығатын түзу сызықты кесінділермен (сәулелермен) бейнелейді.

Сырғу сызықтары өрісіндегі әрбір нүктеге, осы әрбір нүктені годографта бейнелейтін нүктелер сәйкес келеді. Осы айтылған, әрбір сырғу сызығы өзінің бейнесін годографтағы сәйкесті сызықтармен алады дегенмен бірдей. Годографтағы сәйкесті сызықтар бейнеленетін сырғу сызықтары бойымен жылдамдықтар болып саналады.

Егер қандай да бір аймақта металл деформациясыз қатты дене сияқты орын ауыстыратын болса (яғни, барлық нүктенің орын ауыстыру жылдамдығы векторлары бірдей болса), онда осы аймақтың барлық нүктесі годографта бір нүктемен бейнелейді. Жылдамдық годографын графикалық салу, сырғу сызықтары кесінділерінің годографтағы бейнесінің ортогональдылық қасиетіне негізделген.

Мысал ретінде 8.12 *а*-суретінде көрсетілген сырғу сызықтары өрісінің бөлімі үшін жылдамдық годографын салуды қарайық. Годографтың торапты нүктелерін жоғарғы көрсеткішті қоса отырып сырғу сызықтары өрісінің сәйкесті нүктелері сияқты белгілейік. Осы сияқты белгілеуді, әр түрлі сырғу сызығын бейнелейтін годографтың сызығына қатысты қабылдайық.

β_4 сырғу сызығынан жоғары орналасқан металдың аймағы қатаң. Егер төменгі тақтаны қозғалмайды деп қабылдайтын болсақ, онда осы аймақтың барлық нүктелері жоғарғы тақтаның түсу жылдамдығына $\dot{u}_o$ тең болатын бірдей жылдамдықпен қозғалады.

β_4 сырғу сызығы қатаң илемді шекара болғандықтан, ол үзілу сызығы болып саналады. O_1 нүктесін үйек ретінде қабылдап (8.12 *б*-суретін қараңыз) масштабтағы жылдамдық векторы болып саналатын O_1A' кесіндісін тік төмен қарай бағыттап салайық. Қатаң аймақтың барлық нүктелері бірдей жылдамдықпен $\dot{u}_o$ қозғалатын болғандықтан A' нүктесі жоғарыда айтылған барлық нүктелердің бейнесі болады. Осы

жағдайда O_1A' кесіндісі сырғу сызықтары өрісіндегі масштабтық өлшемге, яғни h өлшеміне тең болғаны орынды.

Салуды қатаң аймақтардың түйісу нүктесінен (4,4) бастаймыз. β_4 сызығының (4,4) нүктесіндегі жылдамдықтың нормальды және жанамалы сыңарларын анықтаймыз. Осы үшін O_1 және A' нүктелерден 45° бұрышпен түзулер жүргіземіз. Өйткені β_4 сырғу сызығы симметриялық оське осы бұрышпен еңкейген. Түзулердің қиылысу нүктесінде, сырғу сызықтары өрісінің (4,4) нүктесін бейнелейтін (4',4') нүктесін аламыз. β_4 сызығына жылдамдықтың нормальды сыңары α_4 сызығы бойынша жанама сыңар болады, яғни бұл $\dot{u}_{\alpha(4,4)}$ жылдамдығы болады. Ал β_4 сызығына жылдамдықтың жанамалы сыңары, яғни $\dot{u}_{\beta(4,4)}$, керісінше α_4 сызығына нормальды болып келеді. Осындайда (4,4) нүктесіндегі жылдамдық үшін мынаны аламыз: $\dot{u}_{\alpha(4,4)} = \dot{u}_{\beta(4,4)} = \dot{u}_o / \sqrt{2}$. (4,4) нүктесіндегі жылдамдықтың тік сыңары $\dot{u}_{x_3(4,4)}$ вектор O_1O'-пен, ал көлденең сыңары $\dot{u}_{x1(4,4)}$ вектор $O'(4',4')$-пен анықталады, әрі $\dot{u}_{x_1(4,4)} = \dot{u}_{x_3(4,4)} = 0{,}5\dot{u}_o$.

Сырғу сызықтары өрісіндегі β_4 сызығы үзілу сызығы болғандықтан, оның бойындағы жылдамдық, яғни $\dot{u}_{\beta 4}$, модулі бойынша тұрақты болады және мына вектордың модуліне тең болады: $\dot{u}_{\beta(4,4)} = \dot{u}_o / \sqrt{2}$. Айтылған соңғы вектор орындалған салуларға сәйкесті A' – (4',4') сәулесімен бейнеленеді. Сондықтан β_4 сырғу сызығының барлық нүктесі үшін жылдамдық векторының $\dot{u}_{\beta 4}$ шет жағы, A' нүктесінде центрі орналасқан, ал радиусы A' – (4',4') болатын шеңбердің доғасы бойымен орналасатын болады. Осы доғаны, сырғу сызықтары өрістерін салу үшін қабылданған $\gamma = \pi/12$ қадамына сәйкесті, бөлімдерге бөліп β_4 сырғу сызығында орналасқан торапты нүктелердің мынадай бейнесін аламыз: (4',4'), (3',4'), (2',4'), (1',4'). Ары қарай годографтың жазықтығында сырғу сызығының сәйкесті (3,3) – (3,4) ... (1,3) – (1,4) кесінділеріне ортогональды болатын (3',4') – (3',3'), (2',4') – (2',3'), (1',4') – (1',3') сызықтарын және тағы да сырғу сызығының аттас кесінділеріне ортогональды болатын

(3',3') – (2',3'), (2',3') – (1',3') сызықтарын жүргіземіз. Жүргізілген сызықтың қиылысатын нүктелері годографтың торапты нүктелерін (3',3'), (2',3'), (1',3') анықтайды. Осыған ұқсас жолмен годографтың барлық басқа торапты нүктелерін табамыз.

Годографтың кез келген торапты нүктесіне, мысалы (1',2'), O_1 үйегінен жүргізілген сәуле, сырғу сызықтарының өрісінде (1,2) нүктесінің ығысу жылдамдығының векторы болады. Жоғарыда айтылған вектордың x_1 және x_3 осьтері бойынша сыңарларын 9.24 *б*- суретінде көрсетілгендей етіп анықтау қиын емес. Симметриялы орналасқан басқа квадраттағы фигураларды салып толық годографты аламыз.

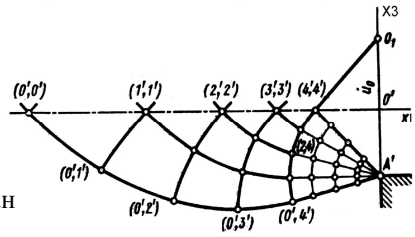
Алғаш көргенде жылдамдықтар векторы $\dot{u}$ ось x-ке қатысты симметриялы бағытталып орналасуы қажет сияқты көрінеді. Осындайдың болмауын былай түсіндіруге болады: O_1 нүктесі қозғалмайтын етіп қабылданған, демек сырғу сызықтары өрісінің симметриялы осінде жататын барлық нүктелер үйекке қатысты $\dot{u}_{x_3} = 0{,}5\dot{u}_o$ жылдамдығымен қозғалады. Симметриялы осьті қозғалмайтын етіп қабылдасақ, онда орын ауыстыру жылдамдықтары векторларын O' үйегінен біз жүргізе алар едік. Осы x осіне қатысты жылдамдықты симметриялы таратуға болатындығын көрсетер еді.

Қаралған мысалда сырғу сызықтарының өрісі мен жылдамдықтар өрісі (годограф) бірлескен түрді алған. Осы, тік бағытта ығыстырылатын металл көлденең бағытта ығыстырылатын металдың мөлшеріне тең екендігінен көрініп тұр. Өйткені мынадай теңдік орындалады:

$$\frac{a}{2}\frac{\dot{u}_o}{2} = \frac{h}{2}\dot{u}_{x_1(0,0)}.$$

Қаралған жағдайда годограф, 8.12-суретінде көрсетілген сырғу сызығы өрісінің фигурасы сияқты фигура пішінін алады. Тек годографтың фигурасы 180° бұрылған. Тура осындайды екі шеңбердің доғасы құрған сырғу сызығының өрісіне де қатысты айтуға болады (8.14-суретті қараңыз). Соңғы жағдай үшін годограф 8.19-суретте келтірілген. Жоғарыда көрсетілген әдістемемен, осы сырғу өрісі кинематикалық шартты қанағаттандыратындығын жеңіл дәлелдеп көрсетуге болады. Егер

жылдамдықтар үшін шекаралық шарттар қанағаттандырылмайтын болса, онда сырғу өрісінің түрін өзгерту қажет.



8.19-сурет. Металды қалыптаған кездегі годограф

Статистикалық және кинематикалық шарттарға бір мезгілде сай болатын шешімдер, яғни сырғу сызықтары өрістері мен жылдамдық өрістері (годограф) бірлескен болуына сәйкес келетін шешімдер деформациялау күшінің нақты мөлшерін береді. Осындай шешім айтылған күшті тек төмен бағалау болып саналмайтындығын және жоғары бағалаудан кішкентай жаққа қарай айырмашылықта болатындығын түсіну қажет. *Осы жоғары бағалау тұтастықтың шартын және орын ауыстыру үшін шекаралық шартты қанағаттандыратын кинематикалық мүмкін болатын сырғу сызықтарының өрісін салумен анықталады. Бірақта анықтаған кезде тепе-теңдік шарты қанағаттандырылмайды.*

Бірақта қатаң илемді сұлба негізінде сырғу сызығы әдістемесі бойынша орындалған барлық шешімдер, қағида бойынша жуықты болатындығын (басқа әдістемелермен алынатын ұқсас шешімдер сияқты) ұмытпау қажет.

8.10. Жоғары бағалау әдістемесі туралы түсінік

Жоғары бағалау әдісінің мәні деформация ошағының көлемін қатаң бірікпе түрінде көрсету болып саналады. Осы бірікпелер біріне қатысты бірі және қатаң аймақтың шекарасы бойымен ығысады. Осыменен сырғу сызығының нақты өрісін, үшбұрышты құрып түзу сызықты кесінділер жүйесінен тұратын өріспен ауыстырады. Бірікпелер шекарасы бойымен (үшбұрыштардың жақтарымен) орын ауыстыру жылдамдығының сыңарлары үзілуге ұшырайды. Әрбір

бірікпенің ішінде жылдамдық өрісі біркелкі, яғни осы бірікпенің барлық нүктелерінде жылдамдық векторы бірдей. Осының негізінде жылдамдық өрісін салады. Осы жылдамдық өрісін дұрыс салғанда, ол ылғи да кинематикалық мүмкін болады. Үшбұрышты бірікпелердің санын және өлшемін бастапқы кезде еркін етіп таңдайды.

Бірікпелер арасындағы шекаралар бойымен бірікпелердің өзі сырғыған кезде пайда болатын жанама кернеулер ең үлкен мәнге ылғи да ие болады, яғни $\tau_{\text{п}} = k$. Осы жанама кернеулердің мәнін бос беттерде әдеттегідей $\tau_{\text{п}} = 0$, ал жанасу беттерінде $\tau_{\text{п}} = \mu_s \sigma_s^*$ мәнінен $\tau_{\text{п}} = k$ шекті мәнге дейін қабылдайды.

Бірікпелер қатаң деп қабылданғандықтан жанасу үйкелісін қосатын ішкі күштің лезделік қуатын мына теңдеумен анықтауға болады:

$$\omega = \sum \tau_n \dot{u}_n l_n b_n \,, \tag{8.23}$$

мұндағы $\dot{u}_n$ – үшбұрышты бөлімдердің шекарасы бойымен сырғу жылдамдығы;

$l_{\text{п}}$ – деформация жазық болған кезде үшбұрыштар қабырғасының ұзындығы;

$b_{\text{п}}$ – жанасу ауданы проекциясының ұзындығы (x_2 осінің бағытында).

Деформациялайтын күш P дамытатын қуатты мынадай формуламен анықтайды:

$$\omega_A = P\dot{u}_0 \,, \tag{8.24}$$

мұндағы $\dot{u}_0$ – жұмысшы сайманның қозғалу жылдамдығы (деформациялау жылдамдығы).

(8.23) және (8.24) теңдеулерін теңестіріп және P-ға қатысты алынған теңдеуді шешіп мынаны аламыз:

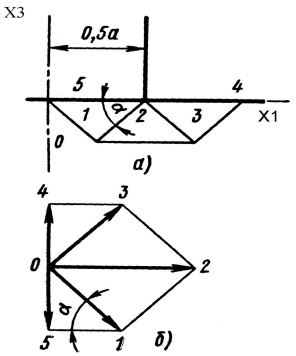
$$P = \frac{\sum \tau_n \dot{u}_n l_n b_n}{\dot{u}_0} \,. \tag{8.25}$$

x_1 осі бойымен жанасу ауданы проекциясының енін a арқылы белгілеп жазық деформация үшін меншікті күшті p мынадай формуламен анықтауға болады:

$$p = \frac{\sum \tau_n \dot{u}_n l_n}{a\dot{u}_0} \,. \tag{8.26}$$

Жазық сотанның жартылай кеңістікке ену есебін қайтадан қарайық (8.10 *а*-сурет). Сырғу сызығының үздіксіз өрісін қатаң үшбұрышты бірікпеден тұратын кинематикалық мүмкін болатын өріске өзгертейік. Ол үшін 8.10 *а*-суреттегі доғаларды түзу кесінділермен ауыстырайық. Сонда 8.20 *а*-суретте көрсетілген өрісті аламыз.

x_3 осіне қатысты өріс симметриялы болғандықтан, 8.20 *а*-суретте оның оң жартысы көрсетілген. Осы, ары қарайғы есептеуге және салуға жеткілікті. Суретте санмен мыналар белгіленген: 0 – қатты қозғалмайтын аймақ; 1, 2 және 3 – бірікпелер; 4 – бос кеңістік; 5 – сотан. Аймақ және бірікпе арасындағы шекара екі санмен анықталады. Мысалы, 12 – 1 және 2 бірікпелер арасындағы шекара; 34 – бос бет; 15 – жанасу беті. Сәйкесті шекараның ұзындығын (сызықтар) мынадай етіп белгілейік: l_{12}, l_{23} және т.б.



8.20-сурет. Сырғу сызықтарының өрісі *(а)* және годографы (*б*)

Қатаң илемді шекараға нормальды болатын бірікпелер жылдамдығының сыңарлары, яғни сәйкесті 10, 20, 30 сызықтарына нормальды болатын сыңарлар нөлге тең. Сондықтан бірікпелер көрсетілген шекаралар бойымен қозғалады. 12 және 23 бірікпелер шекарасы бойымен жылдамдықтың үзілуі пайда болады.

Годографты салу үшін (8.20 *б*-сурет) *О* центрінен тік бағыт бойынша сотан жылдамдығының $\dot{u}_{05}$ векторын 05 саламыз. Оның ұзындығын бірге тең етіп қабылдаймыз. Ары қарай вектордың шеткі

жағынан 15 сызығына параллельді сызықты, ал 0 нүктесінен 01 сызығын жүргіземіз. Осы сызықтардың қиылысуы 1 нүктесін анықтайды, яғни 1 бірікпенің жылдамдық векторының шеткі жағын анықтауға мүмкіндік береді. Тап осылай одан кейінгі салуларды жалғастырып 9.31 *б*-суретте көрсетілген годографты аламыз. Годографтың 12, 23 сызықтары 12, 23 үзілу сызықтарының бойымен бірікпелердің салыстырмалы жылдамдықтарын $\dot{u}_{12}$ және $\dot{u}_{23}$ көрсетеді.

Енді деформациялаушы күштің жоғарғы бағалауын анықтайық. Тең бүйірлі үшбұрыштың негізіндегі α бұрышын параметр ретінде қабылдап есепті жалпы түрде шешейік. (9.136) теңдеуіне сәйкесті меншікті күшті былай анықтаймыз:

$$p \cdot 0{,}5a\dot{u}_{05} = \left(l_{01}\dot{u}_{01} + l_{02}\dot{u}_{02} + l_{03}\dot{u}_{03} + l_{12}\dot{u}_{12} + l_{23}\dot{u}_{23}\right)\tau_n .$$

$\tau_{\text{п}} = \mu_s\sigma_s^* = k$ мөлшерін қабылдап, $\dot{u}$ жылдамдығын $\dot{u}_{05}$ және α бұрышы, ал l ұзындығын a және α бұрышы арқылы білдіріп қарапайым өзгертулерден кейін мынаны аламыз:

$$p = \frac{\sigma_s^*}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \cos\alpha\right). \qquad (8.27)$$

8.20 *а*-суретте көрсетілген өріс тікелей үздіксіз өрістен алынған және мұндағы α = 45° болады. Осы мәнді (8.27) теңдеуіне қойып мынаны аламыз: $p = 3\sigma_s^*$.

α бұрышын өзгерте отырып *p*-ның басқа да мәндерін алуға болады. Ең дұрысы *p*-ның ең кішкентай болатын мәні есептеледі.

Осы жағдайда (8.27) функциясының ең кішкентай мәні, яғни *p* мөлшерінің ең кіші мәні α = 55° болған кезде болады, яғни $p_{\alpha=55^o} = 2{,}83\sigma_s^*$.

Алынған мөлшерлер сырғу сызықтарының үздіксіз өрісі негізінде бұрын алынған мөлшерден 10 % үлкен жаққа қарай айырмашылықта болады.

Бастапқы теңдеудегі жақшадағы формулаға мынадай тағы да басқа мүшені еңгізіп: $\tau_n ab\dot{u}_1$, жанасу үйкелісін ескеруге болады. Егер үйкелісті ең үлкен деп қабылдасақ, яғни $\tau_{\text{п}} = \mu_s\sigma_s^* = k$, онда мынаны аламыз: $p = (2{,}83 + 0.61)\sigma_s^* \approx 3{,}4\sigma_s^*$.

Қаралған есеп үшін аналитикалық шешім алынды. Басқа күрделі жағдайда, үшбұрыштың қабырғалары және жылдамдықтарының мәнін сызбадан тікелей алып, таза графикалық шешімге тоқтауға болады. Осы кезде, ең кішіге жақын жоғарғы бағалаудың мөлшерін алу үшін үзілетін өрістің және олардың годографының бірнеше вариантын салу қажет.

Бақылау сұрақтары.

1. Илемділік есептерін шешудің реті қандай ?
2. Илемділік теориясының көлемдік есептерін шешу үшін қандай теңдеулерді қолданады?
3. Илемділік теориясында есептерді шешкенде қандай әдістемелерді қолданады?
4. Илемділік теориясында қандай есептер қарапайым түрде шешіледі ?
5. Илемділік есептерін шешкенде қолданылатын жеке әдістемелердің қандай артықшылықтары мен кемшіліктері бар?
6. Сырғу сызықтарында қандай қасиеттер бар ?
7. Сырғу сызықтарының мүмкін болатын өрістері қандай?
8. Сырғу сызықтардың қандай нүктесін ерекше деп атайды?
9. Ерекше нүктеде кернеулерді табуға бола ма ?
10. Графикалық әдіспен сырғу сызығының өрісін қалай салады ?
11. Жылдамдықтың годографын қалай салады ?
12. Сырғу сызықтарының өрістері жылдамдық өрістерімен қалай байланысқан?
13. Қатаң илемді сұлбаны қалай түсінесіз ?
14. Кернеу мен жылдамдықтың үзілуін қалай түсінесіз ?

9. МЕТАЛДАРДЫ ҚЫСЫММЕН ӨҢДЕУДІҢ ЕСЕПТЕРІН ШЫҒАРУДЫҢ ӘДІСТЕМЕЛЕРІ

9.1. Тепе-теңдік дифференциалдық теңдеуін илемділік теңдеуімен бірлестіре шешу

Бұрын өткен тарауларда кернеулердің координаттардан байланыстылығын көрсететін тепе-теңдік теңдеулерін және кернеулерді дененің физикалық қасиетімен, яғни деформацияның кедергісімен σ_S (σ_T) байланыстыратын илемділік теңдеуін өткенбіз. Жалпы жағдайда көлемділік кернеу күйі үшін – үш тепе-теңдік теңдеулері және бір илемділік теңдеуі бар. Осы теңдеулер былай жазылады:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z}=0;\\
&\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial z}=0;\\
&\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z}=0;
\end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

$$(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)=2\sigma_S^2. \tag{9.2}$$

Осы теңдеулерге алты белгісіз кіреді. Ол мынадай белгісіздер: үш нормальдік немесе тік кернеу және үш жанама кернеу. Белгісіздер саны теңдеулер санынан көп. Осы теңдеулерге кернеу мен деформациялар арасындағы байланыс теңдеулерін қосайық. Ол мынадай байланыс теңдеулері (саны алты)

$$\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}=2T\left(\varepsilon_{ij}-\frac{\varepsilon\delta_{ij}}{3}\right)/\Gamma; \tag{9.3}$$

$$T=T(\Gamma);\ \sigma=\sigma(\varepsilon). \tag{9.4}$$

Тағы да жоғарыдағы теңдеулерге мынадай деформацияның бірлестік теңдеулерін қосайық

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^{\,2}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^{\,2}} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2};\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^{\,2}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^{\,2}} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3};\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^{\,2}} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.5)$$

Қосылған кернеу мен деформация арасындағы байланыс және деформацияның бірлестік теңдеулерінде жеті белгісіз мөлшерлер бар. Ол мынадай белгісіз мөлшерлер: үш сызықтық деформациялар; үш ығысу деформациялары; илемділік модулінің екінші түрі. Нәтижесінде 13 белгісіз бар 13 теңдеуді алдық.

Шекаралық шарттар белгілі болған кезде, осы теңдеулер жүйесін шешу дененің әрбір нүктесіндегі кернеулерді (соның ішінде сайманның жанасатын бетіндегі) және деформациялаудың толық күшін анықтауға мүмкіндік беретін еді.

Бірақта, белгісіздер саны теңдеулердің санына тең болғанмен жеке туындылары бар теңдеулер саны көп болғандықтан, осы есеп сараптамалық шешілмейді.

Кернеу күйінің жеке жағдайлары үшін есеп жеңілдетіледі.

Симметриялық осі бар кернеу күйі үшін мынадай екі тепе-теңдік теңдеулері және бір илемділік теңдеуі бар:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} r + \tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} r = 0;\\
&\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} r + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} r + \left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) = 0;
\end{aligned}\right\} \qquad (9.6)$$

$$\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right)^2 + \left(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}\right)^2 + \left(\sigma_{zz} - \sigma_{rr}\right)^2 + 6r_{rz} = 2\sigma_S^2. \qquad (9.7)$$

Осы кернеу күйі үшін кернеу мен деформация арасындағы байланыс теңдеуі төртеу. Ол мынадай байланыс теңдеулері:

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2T\left(\varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon\delta_{ij}}{3}\right) / \Gamma; \qquad (9.8)$$

$$T = T(\Gamma);\ \sigma = \sigma(\varepsilon). \qquad (9.9)$$

мұндағы $i = r, \theta, z$; $j = r, \theta, z$; (симметриялық осі бар кернеу күйі үшін $\gamma_{r\theta} = \gamma_{z\theta} = 0$ екендігін ескеру керек).

Симметриялық осі бар кернеу күйі үшін мынадай деформацияның бірлестік теңдеуі бар:

$$\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} = \frac{\varepsilon_{кк} - \varepsilon_{\theta\theta}}{r}. \qquad (9.10)$$

Сонымен сегіз белгісізі бар барлық саны сегіз болатын теңдеулерді алдық.

Жазық кернеу және жазық деформациялау күйлері үшін мынадай екі тепе-теңдік теңдеулері және бір илемділік теңдеуі бар:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = 0 \end{aligned}\right\}; \qquad (9.11)$$

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{33} + 3\sigma_{13}^2 = \sigma_S^2; \quad \text{(жазық кернеу күйі үшін)} \quad (9.12)$$

$$(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{13}^2 = \frac{4}{3}\sigma_S^2 = (2k)^2; \quad \text{(жазық деформациялау күйі үшін)} \quad (9.13)$$

$$\left(k = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}\right). \qquad (9.14)$$

Сонымен үш белгісізі бар барлық саны үш болатын теңдеулерді алдық.

Симметриялық осі бар, жазық кернеу және деформациялау күйлері үшін есептеуді едәуір жеңілдеткенмен, осы жағдайлар үшін шамалы саны бар есептер шығарылған.

Тепе-теңдік теңдеуін илемділік теңдеуімен бірлестіре шешудің әдістемесін қолданудың мысалы ретінде құбырдың ішкі қысымын анықтайық. Қысым түскенде құбырдың барлық қимасы илемді деформацияланады. Құбырдың ішкі радиусын a әрпімен, ал сыртқы радиусын b әрпімен белгілейік. Құбырдың осі бойындағы деформацияны нөлге тең етіп қабылдайық, яғни деформация жазық болсын.

Құбырдың кернеулік күйі симметриялық осьті болады. Осы кернеулік күй үшін мынадай илемділік және тепе-теңдік теңдеулерін қолданайық ($\tau_{rz} = 0$ болатындығын ескеру керек):

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1.15\sigma_S = \beta\sigma_S;$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}r + \tau_{zr} + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial r}r = 0; \\ &\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}r + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}r + \left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Тепе-теңдік теңдеулерінің екінші теңдеуіне илемділік теңдеуін $\left(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \beta\sigma_S\right)$ қойып, мынаны аламыз $\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}r - \beta\sigma_s = 0$ немесе $\partial\sigma_{rr} = \beta\sigma_S\frac{\partial r}{r}$.

Осыдан құбырдың ішкі бетіндегі қысудың радиалды кернеуін былай анықтаймыз (абсолюттік мөлшері бойынша ең үлкен)

$$\sigma_{rr} = -\beta\sigma_S\int_a^b\frac{\partial r}{r} = -\beta\sigma_S\ln\frac{b}{a}. \qquad (9.15)$$

Абсолюттік мөлшері бойынша ішкі қысым p нормальды радиалды қысымға тең, яғни

$$p = \left|\sigma_{rr\max}\right| = \beta\sigma_S\ln\frac{b}{a}.$$

Тағы да b-дан r-дің кез келген мәніне дейінгі шекте тепе-теңдік теңдеуін интегралдап құбыр қимасының кез келген нүктесінде радиалды кернеуді анықтауға болады. Айтылған интегралдауды орындасақ мынаны аламыз:

$$\sigma_{rr} = -\beta\sigma_S\ln\frac{b}{r}.$$

Құбырдың ішкі бетіндегі тангенциальды кернеу (созатын) былай анықталады:

$$\sigma_{\theta\theta} = \beta\sigma_s + \sigma_{rr\max} = \beta\sigma_S\left(1 - \ln\frac{b}{a}\right),$$

ал ішкі беттегі тангенциальды кернеу мынаған тең: $\sigma_{\theta\theta} = \beta\sigma_S$.

9.1.1. Жуықты тепе-теңдік теңдеу және илемділік теңдеуін шешу әдістемесі

Қазіргі уақытта металдарды қысыммен өңдеген кезде пайда болатын күшті және энергияның шығынын есептеу үшін жуықты тепе-теңдік теңдеуін және илемділік теңдеуін біріктіріп шешу әдістемесі кеңінен қолданылады.

Әдістеме келесі ережені негізге алған:

1. Кернеу – деформация күйі немесе симметриялы осьті, немесе жазық (жазық деформация немесе жазық кернеу күйі) деп қаралады. Сондықтан илемділік теңдеуін көрсетілген күй түрлеріне сәйкесті етіп қабылдайды, яғни

$\sigma_1 - \sigma_3 = 1{,}15\sigma_s$ – жазық деформация күйі (басты кернеулер);

$(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{13}^2 = \frac{4}{3}\sigma_s^2 = (2k)^2$ – жазық деформация күйі (еркін координаттар жүйесі),

$$k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}};$$

$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 = \sigma_s^2$ – жазық кернеу күйі (басты кернеулер);

$\sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{33} + 3\sigma_{13}^2 = \sigma_s^2$ – жазық кернеу күйі (еркін координаттар жүйесі);

$\sigma_\theta - \sigma_r = 1{,}15\sigma_s = \beta\sigma_s$ – симметриялық осі бар кернеу күйі ($\sigma_z = \frac{\sigma_A + \sigma_\theta}{2}, \sigma_{rz} = 0$);

$(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 3\sigma_{rz}^2 = \sigma_s^2$ – симметриялы осі бар кернеу күйі ($\sigma_z = \sigma_\theta$).

Күрделі түрі бар денені деформацияланған кезде, оны кернеу – деформация күйі жуықты жазық немесе симметриялы осі бар болатын шартты көлемдерге бөледі.

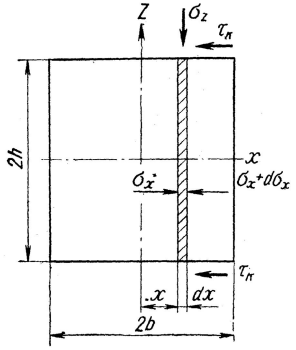
2. Жазық есеп үшін тепе-теңдіктің дифференциалдық теңдеуіне жорамал қабылдап жеңілдетеді. Осы жорамал бойынша нормальды кернеу бір координатты осьтен тек тәуелді болады.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}=0\\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}+\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1}=0\end{aligned}\right\}.$$

Осының арқасында бір дифференциалдық теңдеу қалады және ода жеке туындылардың орнына әдеттегіні қабылдауға болады.

Жуықты тепе-теңдік теңдеуін және илемділік теңдеуін біріктіріп шешу әдістемесін дененің сайманмен жанасатын бетіндегі кернеуді тек анықтауға қолданылады. Деформация кезіндегі қажетті күшті анықтау үшін осы жеткілікті, ал деформацияланатын дененің көлемі бойынша әрбір нүктедегі кернеулерді анықтау қажет емес.

Ені $2b$, биіктігі $2h$, ұзындығы шексіз жолақты кедір-бұдырлы жазық тақтаның арасында шөктіргенде келесі әдістемені қолданайық (9.1-сурет). Үлгіліктің ортасында координаттардың басын орналастырайық. Үлгіліктің ұзындығы шексіз үлкен болғандықтан (сызба жазықтығына перпендикулярлы өлшем) деформация жазық болады. Жолақтың симметриялығы салдарынан (z осіне қатысты) оң қима үшін кернеулерді анықтаймыз.



9.1-сурет. Шөктірудің күшін анықтау сұлбасы

Координат басынан x және $x+dx$ ара қашықтығында z осіне параллельді жазықтықтарда шексіз кішкентай көлемді денеде бөлейік Осы көлемнің ұзындығын бірге тең деп

қабылдайық. Бөленген көлемге нормальды кернеу $\sigma_z, \sigma_x, \sigma_x + d\sigma_x$ ($\sigma_{33}, \sigma_{11}, \sigma_{11} + d\sigma_{11}$) және жанама кернеу τ_{xz} (σ_{13}) әсер етеді.

Екінші болжамға сәйкесті σ_z және σ_x кернеулері z координатасынан тәуелді емес екендігін қабылдаймыз, яғни жолақтың биіктігі бойынша тұрақты және тек x координатасынан тәуелді. Онда тепе-теңдік теңдеуінің екінші дифференциалды теңдеуі нөлге айналады.

Жанама кернеу τ_{xz} жолақтың ені және биіктігі бойынша айнымалы. Сайман мен жолақтың жанасатын бетіндегі жанама кернеу τ_{xz}, дененің сайманға үйкелісімен пайда болған жанама кернеу τ_k-ға тең болады. τ_{xz} жанама кернеуінің мөлшері жанасу бетің алыстаған сайын азаяды және симметрия салдарынан жолақ биіктігінің ортасында нөлге тең болады. τ_{xz} жолақтың биіктігінен сызықты тәуелді болатынан қабылдайық, яғни $\tau_{xz} = \tau_k \cdot \frac{z}{h}$. Онда $\frac{d\tau_{xz}}{dz} = \frac{\tau_k}{h}$.

$\frac{d\tau_{xz}}{dz}$ мөлшерін тепе-теңдік теңдеуінің біріншісіне қойып мынаны аламыз:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{\tau_k}{h} = 0. \qquad (9.16)$$

Осы теңдеуді бөлінген элементтің тепе-теңдік шартынан тікелей алуға болады. Бөлінген элементке әсер етуші барлық күштің x осіне проекциясының қосындысы нөлге тең, яғни $\sigma_x 2h - (\sigma_x + d\sigma_x)\ 2h - 2\tau_k dx = 0$.

Осыдан

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{\tau_k}{h} = 0. \qquad (9.17)$$

Осы дифференциалды теңдеуді σ_x қатысты шешу үшін τ_k үйкеліс кернеуін σ_x арқылы немесе x арқылы білдіру керек,

немесе х-тен және σ_x - тен тәуелсіз етіп қабылдау керек. Осы жағдайларды қарастырайық:

1. Жанасу бетіндегі жанама кернеу металдың сайманға үйкелісімен байланысты болғандықтан, әрине оны мынадай Кулон – Амантон заңы негізінде анықтайды:

$$\tau_к = f\sigma_z . \tag{9.18}$$

Мұнда τ_k және σ_z кернеулерінде бірдей таңба бар болады.

Жазық деформация күйінің илемділік теңдеуін біздің жағдайымыз үшін мына түрде көрсетейік:

$$\sigma_x - \sigma_z = \pm 2k\sqrt{1-\left(\frac{\tau_{xz}}{k}\right)^2} . \tag{9.19}$$

Нормальды кернеулердің айырмасы жанама кернеуден тәуелді болады.

Егер жанасу кернеуі нормальды кернеуден тәуелді болмаса, онда нормальды кернеулердің айырмасы тұрақты мөлшер болады. τ_k және τ_{xz} нөлге тең болатын (үйкеліс жоқ) жеке жағдайларда σ_x және σ_z кернеулері басты кернеулер болады және жоғарыда жазылған формула мынадай теңдікке айналады:

$$\sigma_x - \sigma_z = 2k . \tag{9.20}$$

τ_k жанама кернеуі ең үлкен k мөлшеріне жеткен кезде жоғарыда жазылған (9.19) теңдеуі мынадай түрде қабылдайды:

$$\sigma_x - \sigma_z = 0 . \tag{9.21}$$

(9.20) және (9.21) теңдеулерін дифференциалдап дифференциалды түрдегі илемділік теңдеуін аламыз:

$$d\sigma_x = d\sigma_z . \tag{9.22}$$

Жоғарыда көрсетілген $\tau_к$ жанама кернеуінің σ_x және σ_z кернеулерінен тұрақты немесе тәуелсіз емес болу шарттарынан осы теңдеу дәл болады.

Егер $\tau_к$ біздің жағдайымыздағы сияқты нормальды кернеу σ_z тәуелді болса, онда $\tau_к$ - ның нөлден 0,7k дейін өзгеруіне

сәйкес келетін жуықты есептеулер үшін (9.20) түрдегі илемділік теңдеуін қолдануға болады, ал $0{,}7k \prec \tau_k \le k$ жағдайлары үшін (9.18) түріндегі илемділік теңдеуін қолданады. Онда (9.21) формуласы жуықты болады.

(9.18) және (9.22) формулаларын (9.17) теңдеуіне қойып мынаны аламыз:

$$\frac{d\sigma_z}{dx} = -\frac{f\sigma_z}{h}. \tag{9.23}$$

Өзгермелілерді бөліп және интегралдағаннан кейін мынаны табамыз:

$$ln\sigma_z = -f \cdot \frac{x}{h} + C \cdot$$

Осы теңдеуден мынау шығады: $\sigma_z = C_1 \cdot e^{-\frac{fx}{h}}$.

C_1 интегралдау тұрақтысын шекаралық шарттан анықтаймыз ($x = b$ болған кезде, $\sigma_z = -\beta\sigma_T = \sigma_T^*$): $C_1 = -\sigma_T^* e^{\frac{fb}{h}}$.

Демек

$$\sigma_z = -\sigma_T^* e^{\frac{f}{h}(b-x)}. \tag{9.24}$$

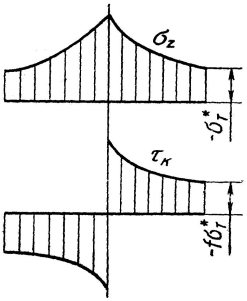
9.2-суретте (9.24) формула бойынша салынған σ_z эпюрасы көрсетілген. Алынған (9.24) формуланы (9.18) теңдеуге қойып мынаны аламыз:

$$\tau_k = f\sigma_z = -f\sigma_T^* e^{\frac{f}{h}(b-x)}. \tag{9.25}$$

(9.24) формуласы бойынша σ_z кернеуін жанасу бетіндегі кез келген нүктеде анықтауға болады.

Жанасу беті бойынша нормальды кернеулерді қосып жолақ ұзындығы бірлігіне толық қысымды табуға болады:

$$P = 2\int_0^b \sigma_z dx = 2\sigma_T^* \int_0^b e^{\frac{f}{h}(b-x)} dx = \sigma_T^* \frac{2h}{f}\left(e^{\frac{fb}{h}} - 1\right). \tag{9.26}$$



9.2-сурет. $\tau_k = f\sigma_z$ - болған кезде жанасу бетіндегі нормальды σ_z және жанама $\tau_к$ кернеулердің эпюрлері

Толық күшті P жанасу ауданына 2b бөліп меншікті күшті (қысымды) аламыз

$$p = \frac{P}{2b} = \sigma_T^* \frac{h}{fb}\left(e^{\frac{fb}{h}} - 1\right). \qquad (9.27)$$

(9.24) және (9.25) теңдеулерді және кернеу эпюрлерін талдаған кезде, жолақтың осінде үйкеліс кернеуі секірмелі оң мәннен теріс мәнге өтетіндігі және σ_z кернеуі үлгіліктің осінде айқын бейнеленген шыңды екендігі көрінеді. Бірақта, осы тәжірибемен қошталмайтындығы кейінірек көрсетіледі. Жанасу үйкеліс кернеуі (σ_z сияқты) үлкейетін қарқындылығы бар көрсеткішті қисықпен жолақтың шетінен осіне қарай өседі және жанама кернеудің мөлшері ештеңкемен шектелмеген. Бірақта, жанама кернеу $\sigma_T^*/2$ үлкен болуы мүмкін емес екендігі бұрын табылған.

(9.24), (9.25), (9.26) және (9.27) формулаларына сәйкесті нормальды кернеудің, толық және меншікті күштің мөлшерлері материалдың түрлерінен және оның физикалық күйінен (σ_T мөлшерімен анықталатын температурадан, деформация дәрежесі және жылдамдығынан), ал тағы да кернеу күйінің әсерін бейнелейтін $\frac{fb}{h}$ (үйкеліс коэффициентімен дене өлшемдерінің қатынасынан тәуелді) параметрінен тәуелді болады.

(9.27) формуласынан $\frac{fb}{h}$ параметрін үлкейту, жақшаның алдындағы коэффициенті азайтатындығы және жақшадағы бірінші қосылғышты үлкейтетіндігі көрініп тұр. Соңғы жағдайда, осы параметр дәреженің көрсеткіші ретінде кіретіндіктен $\frac{fb}{h}$ үлкейту меншікті қысымды жоғарылатады. Үйкеліс коэффициенті мен еннің қалындыққа қатынасы үлкен болған сайын меншікті және толық қысым үлкен болады. Осы сапалы түрде сараптамада қошталады. Бірақта, үйкеліс коэффициентінің мәнімен жолақтың ені қалыңдыққа қатынасы үлкен болған кезде, (9.26) және (9.27) формуламен есептеу нақтымен салыстырғанда бірнеше рет көтеріңкі нәтижені береді.

2. Жанасу жанама кернеуі тұрақты деген жорамалды қабылдаймыз. Зибельге сәйкесті ол σ_T^* пропорционалды, яғни

$$\tau_k = -f\sigma_T^* \ . \tag{9.28}$$

Осыны (9.17) теңдеуіне қойып және $d\sigma_x$ мәнін $d\sigma_z$ айырбастап мынаны аламыз:

$$\frac{d\sigma_z}{dx} = \frac{f\sigma_T^*}{h} \ . \tag{9.29}$$

Осы теңдеуден мынаны аламыз: $\sigma_z = f\sigma_T^* \frac{x}{h} + C$.

Интегралдың тұрақтысын $x = b$ және $\sigma_z = -\sigma_T^*$ болған кезде анықтаймыз:

$$C = -\sigma_T^* - f\sigma_T^* \frac{b}{h} .$$

Демек

$$\sigma_z = \frac{f\sigma_T^*}{h} x - \sigma_T^* - \frac{f\sigma_T^* b}{h} = -\sigma_T^* \left[1 + \frac{f}{h}(b - x) \right] . \tag{9.30}$$

Төмендегі 9.3-суретте (9.28) теңдеуі бойынша жанасу кернеуінің эпюрасы және (9.30) теңдеуі бойынша нормальды кернеудің эпюрасы көрсетілген.

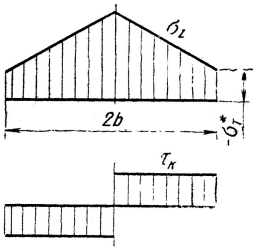
Жанасу беті бойынша нормальды кернеулерді қосып жолақ ұзындығы бірлігіне толық қысымды былай табамыз:

$$P = 2\int_0^b \sigma_z dx = 2\sigma_T^* \int_0^b \left[1 + \frac{f}{h}(b - x)dx = 2\sigma_T^* b\left(1 + \frac{fb}{2h}\right)\right]. \qquad (9.31)$$

және меншікті қысымды былай анықтаймыз:

$$p = \frac{P}{2b} = \sigma_T^*\left(1 + \frac{fb}{2h}\right). \qquad (9.32)$$

9.3-суретінен және (9.30) теңдеуінен жанасу жанама кернеуі тұрақты болған кезде нормальды кернеу жолақтың ортасынан шетіне қарай сызықты өзгеретіндігі және бұрынғы жағдаймен салыстырғанда аз қарқындылықпен өсетіндігі көрініп тұр. Мұнымен бірге τ-дің секірмелі өзгерісі және σ_z-тің жолақ осінде шыңы бар.



9.3-сурет. $\tau_k = -f\sigma_T^*$ болған кезде жанасу бетіндегі нормальды σ_z және жанама $\tau_к$ кернеулердің эпюрлері

(9.30), (9.31) және (9.32) теңдеулерін талдаған кезде, осы жағдайда күш σ_T және $\frac{fb}{h}$ параметрінен тәуелді болатындығын жеңіл байқауға болады. Бірақта, бірінші жағдаймен салыстырғанда осы параметрлердің әсері едәуір аз. Үйкеліс коэффициентінің мәні кішкентай, $\frac{b}{h}$ қатынасы (биік және тар жолақ) аз болған кезде (9.32) формуласы нақты меншікті қысыммен салыстырғанда төмендетілген меншікті қысымның мәнін береді.

3. Жанасу жанама кернеуі жолақтың ортасынан өткен кезде секірмелі өзгеруді алмайды деп болжайық және жанасу бетінде τ_k мынадай сызықтық заңмен өзгеретіндігін қабылдайық:

$$\tau_k = -\tau_k^b \frac{x}{b}, \tag{9.33}$$

мұндағы τ_k^b – жолақтың шетіндегі жанасу кернеуінің мәні.

(9.33) формуласынан $x = 0$ болған кезде $\tau_k = 0$, ал $x = b$ болған кезде (жолақтың шетінде) $\tau_k = -\tau_k^b$ мәндеріне тең болатындығы көрініп тұр.

(9.33) формуласы бойынша алынған τ_k мәнін (9.17) дифференциалды теңдеуіне қойып мынаны аламыз:

$$\frac{d\sigma_z}{dx} = \frac{\tau_k^b x}{bh}. \tag{9.34}$$

Интегралдағаннан кейін мынаны табамыз: $\sigma_z = \tau_k^b \frac{x^2}{2bh} + C$.

$x = b$ және $\sigma_z = -\sigma_T^*$ болған кезде интегралдаудың тұрақтысын былай анықтаймыз:

$$C = -\sigma_T^* - \tau_k^b \frac{b}{2h}.$$

Осыдан

$$\sigma_z = \frac{\tau_k^b x^2}{2bh} - \sigma_T^* - \frac{\tau_k^b b}{2h} = -\left[\sigma_T^* + \frac{\tau_k^b}{2bh}\left(b^2 - x^2\right)\right]. \tag{9.35}$$

Жолақтың ұзындық бірлігіне толық қысым мынаған тең:

$$P = 2\int_0^b \left[\sigma_T^* + \frac{\tau_k^b}{2bh}\left(b^2 - x^2\right)\right] dx = 2\sigma_T^* b\left(1 + \frac{\tau_k^b b}{3h\sigma_T^*}\right) \tag{9.36}$$

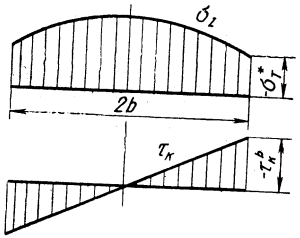
және меншікті қысымды былай анықтауға болады:

$$p = \frac{P}{2b} = \frac{2\sigma_T^* b\left(1 + \frac{\tau_k^b b}{3h\sigma_T^*}\right)}{2b} = \sigma_T^*\left(1 + \frac{\tau_k^b b}{3h\sigma_T^*}\right). \tag{9.37}$$

Егер $\tau_k^b = f\sigma_T^*$ деп қабылданса, онда мынаны аламыз:

$$P = \sigma_T \left(1 + \frac{fb}{3h}\right). \qquad (9.38)$$

Төмендегі 9.4-суретте $\tau_k = \tau_k^b \frac{x}{b}$ болған кездегі жолақтың ені бойынша жанасу бетіндегі жанама τ_k және нормальды σ_z кернеулерінің эпюрлері келтірілген.



9.4-сурет. $\tau_k = \tau_k^b \frac{x}{b}$ болған кездегі жолақтың ені бойынша жанасу бетіндегі жанама τ_k және нормальды σ_z кернеулерінің эпюрлері

Нормальды кернеу осы жағдайда парабола бойынша өзгереді және жоғарыда қаралған жағдайлармен салыстырғанда жолақтың шетінен ортасына қарай кішкентай қарқындылықпен өседі. z осінде шың жоқ.

(9.38) формуласынан, осы жағдайда меншікті қысым σ_T-дан, $\frac{fb}{h}$ параметрінен тәуелді болатындығы көрініп тұр.

Бірақта, бұрынғы екі жағдаймен салыстырғанда соңғысының әсері әлсіз.

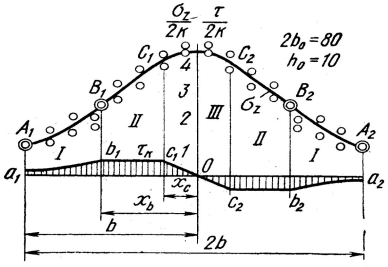
Металдарды өңдеудің әр түрлі процестерінде (ұсталық соғу, баспақтау) сайман мен деформацияланатын металдың жанасу беттерінде нормальды және жанама кернеулер эпюрлерінің нақтылы пішінін анықтау үшін алынған тәжірибелік мәліметтер бар.

Е.П. Унксов әр түрлі тәсілдермен, қаралып жатқан шөктіру процесіне сәйкесті кернеулер эпюрлерін анықтай отырып, үйкеліс коэффициенті мен жолақтың енінің қалындыққа қатынасы кең көлемде өзгергенде айқын көрсетілген шыңсыз күмбез тәрізді пішіні бар σ_z эпюрін тапқан. Жанама кернеу z осінде нөл арқылы жатық болып өтеді.

Жалпы жағдайда нормальды және жанама кернеулердің эпюрлері үш бөлімнен тұрады (9.5-сурет). I бөлімінде σ_z және τ_k кернеулері сәйкесті A_1, A_2 және a_1, a_2 нүктелерінен B_1, B_2 және $в_1$, $в_2$ нүктелеріне дейін көрсеткіштіге жақын қисық сызық бойынша жоғарылайтын қарқындылықпен өседі. II бөлімде τ_k тұрақты мөлшерді сақтайды, ал σ_z кернеуі *C* және *c* нүктелеріне дейін түзу бойынша өседі. III бөлімде τ_k нөл арқылы өтетін еңкіш түзу бойынша өзгереді, ал σ_z кернеуі жолақтың осінде ең үлкен мөлшерге ие болатын парабола бойынша өзгереді.

Осы айтылғанның негізінде мынадай қорытынды жасауға болады: шеткі аймақта металл сайман бойынша сырғиды; жанасу жанама кернеуі сырғу үйкеліс кернеуіне тең болады және Кулон – Амантон заңына бағынады (үйкеліс кернеуі үйкеліс коэффициенті мен тік кернеудің көбейтіндісіне тең). Осы, жеңілдетілген дифференциалды тепе-теңдік теңдеуін шешкен кезде жоғарыда қолданылған бірінші жорамалға жауап береді.

σ_z нормальды кернеуінің өзгеруі (9.24) теңдеуімен, ал жанама жанасу кернеуінің өзгеруі (9.25) теңдеумен жазылады.



9.5-сурет. Қорғасыннан жасалған үлгілікті жазық шөктірген кезде жанасу кернеуінің тәжірибелік эпюрлері

Бірақта жоғарыда көрсетілгендей, *x*-тың азаюмен τ_k жанама кернеуінің абсолюттік мөлшерінің үлкеюі $\tau_k = -\sigma_T^* / 2$ мәніне дейін болуы мүмкін. Осы формуланы (9.18) формуласымен теңестіріп мынаны аламыз $-\frac{\sigma_T^*}{2} = f\sigma_z$. Осыдан

$$\sigma_z = -\frac{\sigma_T^*}{2f} \ . \tag{9.39}$$

τ_k жанама кернеуі $-\sigma_T^*/2$ мөлшеріне, ал σ_z нормальды кернеуі $-\frac{\sigma_T^*}{2f}$ мөлшеріне жеткеннен кейін τ_k жанама кернеуінің өсуі тоқтайды және ол $\tau_k = -\sigma_T^*/2$ тұрақты мәнін қабылдайды. Осы кезде сырғу аумағы I тежелу аумағына II ауысады. II аумақта металдың сайман бойынша сырғуының және жанасу жазықтығына параллельді жазықтық бойынша металдың ішіндегі жылжуының мүмкіншілігі бірдей болады.

Сырғу және тежелу аймақтары шекараларының абсциссасын x_b, (9.24) және (9.39) формулаларының оң жағын теңестіріп анықтауға болады, яғни $e^{\frac{f}{h}(b-x_b)} = \frac{1}{2f}$. Осыдан $f(b-x_b)/h = -\ln 2f$ және $x_b = b + h(\ln 2f)/f$.

Үйкеліс коэффициенті $f \le 0{,}5$ болғандықтан $\ln 2f < 0$. Мынадай белгілеуді қолданып

$$|\ln 2f|/f = \psi \tag{9.40}$$

мынаны аламыз:

$$x_b = b - h\psi \ . \tag{9.41}$$

ψ мөлшері үйкеліс коэффициентінен былай тәуелді болады:

f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
ψ	46.0	16.1	8.04	4.6	2.78	1.7	1.02	0.56	0.24	0

x_b нүктесінен жолақтың шетіне дейін сырғу аймағының ұзындығы мына теңдікпен көрсетіледі:

$$b - x_b = \psi h \ . \tag{9.42}$$

Сырғу аймағындағы σ_z нормальды кернеуі жолақтың шетінен $-\sigma_T$-дан мынадай формуламен анықталатын:

$$-\sigma_T^* e^{\frac{f}{h}(b-x_b)} = -\sigma_T^* e^{f\psi} = -\frac{\sigma_T^*}{2f}$$

мөлшерге дейін өзгереді.

Тежелу аймағында жанасу жанама кернеуі тұрақты болатындықтан $\left(\tau_k = -\frac{\sigma_T^*}{2}\right)$ тепе-теңдіктің дифференциалдық теңдеуінде $\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{\tau_k}{h}$ мынадай түр бар болады:

$$\frac{d\sigma_z}{dx} = \frac{\sigma_T^*}{2h} \text{ және } \sigma_z = \frac{\sigma_T^* x}{2h} + C.$$

Интегралдаудың тұрақтысын (C) $x = x_b$ болған кезде, яғни сырғу және тежелу аймақтарының шекарасында, (9.39) формуласына сәйкесті былай анықтаймыз:

$$\sigma_z = -\frac{\sigma_T^*}{2f}; \quad C = -\frac{\sigma_T^*}{2f} - \left(\frac{\sigma_T^*}{2h}\right) x_b.$$

Осыдан

$$\sigma_z = -\frac{\sigma_T^*}{2f}\left[1 + \frac{f}{h}(x_b - x)\right] = -\frac{\sigma_T^*}{2f}\left[1 + \frac{f}{h}(b - \psi h - x)\right]. \qquad (9.43)$$

III бөлім жабысу аймағы болады. Осы аймақтың шекарасы ретінде үлгіліктің қалыңдығына тең абсциссаны жуықты қабылдауға болатындығы тәжірибемен анықталған, яғни

$$x_C = 2h. \qquad (9.44)$$

Демек тежелу аймағы $x_C = 2h$-тан $x_b = b - h\psi$ дейін таралады.

II бөлімдегі нормальды кернеу сырғу бөлімімен шекарадағы $-\frac{\sigma_T^*}{2f}$-ден жабысу бөлімімен шекарадағы мына мөлшерге дейін өзгереді:

$$-\frac{\sigma_T^*}{2f}\left[1 + \frac{f}{h}(x_b - 2h)\right].$$

Жабысу аймағында (III бөлім) (9.33) формулаға сәйкесті, жанама кернеудің τ абсциссадан сызықтық байланысын

қабылдаймыз. Сонымен бірге $x = x_C = 2h$ болған кезде тежелу аймағымен шекарадағы жанасу кернеуін $-\sigma_T^* / 2$ тең етіп қабылдаймыз. Сонда

$$\tau_k = -\sigma_T^* \cdot \frac{x}{4h}. \qquad (9.45)$$

(9.45) формуланы тепе-теңдіктің дифференциалдық теңдеуіне $\frac{d\sigma_z}{dx} = \frac{\tau_k}{h}$ қойып мынаны аламыз: $\frac{d\sigma_z}{dx} = \frac{\sigma_T^* x}{4h^2}$.

Интегралдағаннан кейін мынаны аламыз: $\sigma_z = \frac{\sigma_T^* x^2}{8h^2} + C$.

Интегралдаудың тұрақтысын $x = x_C = 2h$ болған кезде (тежелу және жабысу бөлімдерінің шекарасында) (9.43) формулаға сәйкесті былай табамыз:

$$\sigma_я = -\frac{\sigma_T}{2f}\left[1 + \frac{f}{h}\left(x_b - 2h\right)\right]$$

және

$$C = -\frac{\sigma_T^*}{2f}\left[1 + \frac{f}{h}\left(x_b - 2h\right)\right] - \frac{\sigma_T^*}{2}.$$

Сондықтан

$$\sigma_z = -\sigma_T^*\left(\frac{4h^2 - x^2}{8h^2} + \frac{1}{2f} + \frac{x_b - 2h}{2h}\right). \qquad (9.46)$$

Төмендегі 9.6-суретте келтірілген формулалар бойынша салынған үш аймақ үшін (сырғу, тежелу және жабысу) жанасу және нормальды кернеулердің эпюрлері келтірілген.

Теориялық талдау жолақты шөктірген кездегі жанасу жанама кернеуінің және нормальды кернеулердің тәжірибелік эпюрлерінің түрін түсіндіреді. Эпюрлер жанама және нормальды кернеулердің әр түрлі заңдылықпенен өзгеретін үш бөлімінен жалпы жағдайда тұрады. Бірінші бөлімде (сырғу аймағы) жанама кернеулер нормальды қысым мен үйкеліс коэффициентінің көбейтіндісіне тең; осы бөлімде жанама және нормальды кернеулер көрсеткішті қисық сызықпен өседі. Екінші бөлімде (тежелу аймағы) үйкеліс жанама кернеулері тұрақты,

мөлшері бойынша ең үлкен және $-\sigma_T^*/2$ тең болады; нормальды кернеулер түзу бойынша өседі. Үшінші бөлімде (жабысу аймағы) жолақтың тік осінде нөлге дейін сызықты азаяды; нормальды кернеулер парабола бойынша өзгереді.

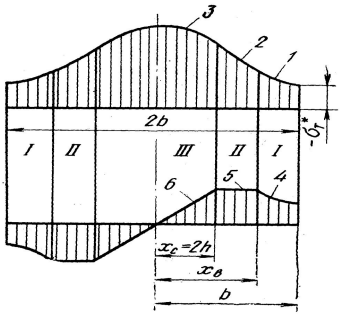
Бөлімдердің ұзындығы жолақтың ені мен қалыңдығы қатынасынан және үйкеліс коэффициентінің мөлшерінен тәуелді болады.

Жоғарыда $x = 2h$ болған кезде, жанасу жанама кернеуі үйкеліс коэффициентінің мөлшеріне тәуелсіз азаятындығы қабылданған. Демек, жолақтың ені

$$b \le 2h \qquad (9.47)$$

болған кезде I және II бөлім жоқ болады, барлық жанасу беті жабысу аймағы болады.

$\frac{b}{h} \succ 2$ болатын жолақты шөктірген кезде I және II бөлімдердің ұзындығы үйкеліс коэффициенттердің мөлшерінен және еннің қалындыққа қатынасынан тәуелді болады.



$$1 - \sigma_{z1} = -\sigma_T^* e^{\frac{f}{h}(b-x)};$$

$$2 - \sigma_{z2} = \frac{-\sigma_T^*}{2f}\left[1 + \frac{f}{h}(b - \psi h - x)\right];$$

$$3 - \sigma_{z3} = \sigma_T^*\left(\frac{4h^2 - x^2}{8h^2} + \frac{1}{2f} + \frac{x_b - 2h}{2h}\right);$$

$$4 - \tau_1 = f\sigma_z;\ 5 - \tau_2 = \frac{\sigma_T^*}{2};\ 6 - \tau_3 = \frac{\sigma_T^* x}{4h}.$$

9.6-сурет. Жалпы жағдайда жазық шөктірген кездегі жанасу бетіндегі жанама τ_k және нормальды σ_z кернеулерінің эпюрлері

Үйкеліс коэффициенті азайған кезде, (9.25) және (9.24) теңдеулеріне сәйкесті I бөлімде (сырғу аймағы) τ_k және σ_z кернеулерінің өсу қарқындылығы азаяды; (9.40) және (9.42)

теңдеулеріне сәйкесті сырғу аймағының ұзындығы ψh өседі. Осындайда жабысу аймағының ұзындығы, үйкеліс коэффициентінің мөлшерінен тәуелсіз жолақтың қалыңдығымен анықталатындықтан, сырғу аймағының өсуі тек тежелу аймағының ұзындығының азаюы есебінен мүмкін болады. Үйкеліс коэффициентінің біршама мөлшерінде тежелу аймағы жоғалып кетеді және жанасу бетінде тек екі бөлім бар болады: I және III бөлім (сырғу және жабысу аймақтары).

Тежелу аймағы, үйкеліс коэффициентінің және жолақ қалыңдығының берілген мәнінде жолақтың ені азайған сайын азаяды. Өйткені сырғу (ψh) және жабысу ($2h$) аймақтарының ұзындығы жолақтың енінен тәуелді емес және ол өзгергенде мәндерін сақтайды.

Тежелу аймағы тағы да, үйкеліс коэффициентінің және жолақ енінің берілген мәнінде жолақтың қалыңдығы үлкейген сайын азаяды. Осы жағдайда тежелу аймағының азаюы жабысу аймағының өсуі есебінен жүреді.

Сөйтіп, тежелу аймағының жоқ болуы жолақ өлшемдерінің қатынасымен (ен және қалыңдық) және үйкеліс коэффициентімен анықталады.

Тежелу аймағы жойылатын уақытта жабысу мен тежелу және сырғу мен тежелу аймақтарының арасындағы шекаралар қосылады. Онда $x_C = x_b$. Соңғы формулаға $x_b = b - h\psi$ формуласынан x_b мәнін қойып және $x_C = 2h$ формуласынан x_C мәнін қойып мынаны аламыз: $b - h\psi = 2h$. Осыдан

$$\frac{b}{h} = 2 + \psi \,. \tag{9.48}$$

$\frac{b}{h} \succ 2 + \psi$ болған кезде жанасу кернеуінің эпюрасы үш бөлімнен тұрады, ал $2 \le \frac{b}{h} \prec 2 + \psi$ болған кезде және (9.47) теңдеуді ескеріп салғанда жанасу кернеуінің эпюрі екі бөлімнен тұрады (жабысу және сырғу бөлімдері).

Үш немесе екі бөлімдер болған жағдайда үйкеліс коэффициентін мынадай етіп қабылдайды: $0 \prec f \prec 0{,}5$.

Үйкеліс коэффициентінің мәні $f \geq 0{,}5$ болған кезде сырғу жүрмейді, I аймақ жойылады және эпюр II және III аймақтан тұрады (жабысу және тежелу аймақтары). Осы мынадай теңдеулерге $\frac{|\ln 2f|}{f} = \psi$ және $x_b = b - h\psi$ үйкеліс коэффициентін $f = 0{,}5$ қойған кезде шығады. Өйткені $\ln 2f = 0$, $x_b = b$.

Сөйтіп, жолақ қимасы өлшемдерінің қатынасына және жолақты шөктірген кездегі үйкеліс коэффициентінің мөлшеріне байланысты эпюрдің төрт түрі мүмкін болады:

1) $\frac{b}{h} \succ 2 + \psi$ және $0{,}5 \succ f \succ 0$ болған кезде I – III аймақтары бар эпюр;

2) $\frac{b}{h} \leq 2$ және $0{,}5 \succ f \succ 0$ болған кезде бір ғана III аймақ бар эпюр;

3) $2 + \psi \succ \frac{b}{h} \succ 2$ және $0{,}5 \succ f \succ 0$ болған кезде I және III аймақтары бар эпюр;

4) $\frac{b}{h} \geq 2$ және $f \geq 0.5$ болған кезде II және III аймақтары бар эпюр.

Жанасу бетіндегі нормальды кернеулердің таралуын біліп, әрбір аймақтың шегіндегі σ_z үшін формулаларды интегралдап, осы интегралдарды қосып және жолақтың ұзындығына көбейтіп толық күшті анықтауға болады.

Эпюрлердің бөлімдері үшін жалпы жағдайда толық күш мынаған тең:

$$P = 2l\left[\int_{b-\psi h}^{b} \sigma_T^* e^{\frac{f}{h}(b-x)} dx + \int_{2h}^{b-\psi h} \frac{\sigma_T^*}{2f}\left[1 + \frac{f}{h}\left(b - \psi h - x\right)\right] dx + \right. \tag{9.49}$$

$$\left. + \int_{0}^{2h} \sigma_T^* \left(\frac{4h^2 - x^2}{8h^2} + \frac{1}{2f} + \frac{b - \psi h - 2h}{2h}\right) dx\right].$$

Толық күшті жанасу ауданына бөліп меншікті қысымды аламыз $p = \dfrac{P}{2bl}$.

(9.49) формуланы интегралдап, кейбір өзгертуден кейін және жанасу ауданына бөлгеннен кейін мынаны табамыз:

$$P = \frac{\sigma_T^*}{fb}\left\{\frac{1}{1f} - 1 - \frac{f}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{h} - \psi\right)\left[1 + \frac{f}{2}\left(\frac{b}{h} - \psi\right)\right]\right\}. \qquad (9.50)$$

Егер жабысу аймағындағы (III аймақ) жанама кернеудің азаюын елемесе (жолақтың ені үлкен және қалыңдығы кішкентай болған кезде, осы мүмкін болады) және кернеу эпюрі екі аймақтан (I және II аймақтардан) тұрады дегенде қабылдаса, онда (9.49) формуласындағы соңғы интеграл үшін интегралдың шегін нөлден $x_b = b - h\psi$ дейін алып мынаны табуға болады:

$$P = 2l\left\{\int_{b-\psi h}^{b} \sigma_T^* e^{\frac{f}{h}(b-x)}dx + \int_0^{b-\psi h}\frac{\sigma_T^*}{2f}\left[1 + \frac{f}{h}\left(b - \psi h - x\right)\right]dx\right\}. \qquad (9.51)$$

Интегралдап, содан кейін жанасу ауданына бөлсе мынадай меншікті қысымды аламыз:

$$P = \frac{\sigma_T^*}{fb}\left\{\left(\frac{1}{2f} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{h} - \psi\right)\cdot\left[1 + \frac{f}{2}\left(\frac{b}{h} - \psi\right)\right]\right\}. \qquad (9.52)$$

Жолақтың ені $b \le 2h$ болған кезде сырғу және тежелу аймақтары жоқ болады, барлық жанасу беті жабысу аймағы болады және σ_z (9.35) формуламен, ал меншікті қысым (9.38) формуласымен анықталады.

Егер жанама кернеу $-\sigma_T^*/2$ тең ең үлкен мөлшерге жетпесе (осы үйкеліс коэффициентінің аз мәнінде мүмкін болады), онда тежелу аймағы жоқ болады. Жанасу беті сырғу және жабысу аймағынан тұрады. Сырғу аймағындағы (I бөлім) тік кернеу (9.24) теңдеу бойынша анықталады.

Абсцисса $2h$ дейін азайған кезде (сырғу және жабысу аймақтарының шекарасы) нормальды кернеу мынадай мөлшерге жетеді:

$$\sigma_z = \sigma_C = -\sigma_T^* e^{\frac{f}{h}(b-2h)}. \qquad (9.53)$$

Осы нүктедегі жанама кернеу мынаған тең болады:

$$\tau_k = f \cdot \sigma_C = -f\sigma_T^* e^{\frac{f}{h}(b-2h)}. \qquad (9.54)$$

Абсцисса азайған кезде жабысу аймағындағы жанама кернеу C нүктесінен $\tau_k = f \cdot \sigma_C \dfrac{x}{2h}$ түзуі бойынша өзгереді.

Жанама кернеудің τ_k осы мөлшерін тепе-теңдіктің дифференциалды теңдеуіне қойып мынаны аламыз:

$$\frac{d\sigma_z}{dx} = -\frac{f\sigma_C x}{2h^2}.$$

Осыдан $\sigma_z = -\dfrac{f\sigma_C x^2}{4h^2} + C$. $x = 2h$ болған кезде және $\sigma_z = \sigma_C$ болса, онда $C = \sigma_C + f\sigma_C$.

Онда

$$\sigma_z = \sigma_C\left(1 + f \cdot \frac{4h^2 - x^2}{4h^2}\right) = -\sigma_T^* e^{\frac{f}{h}(b-2h)} \cdot \left(1 + f\,\frac{4h^2 - x^2}{4h^2}\right). \qquad (9.55)$$

Осы жағдайдағы толық күш мынаған тең:

$$P = 2l\left[\int_{2h}^{b} \sigma_T^* e^{\frac{b}{h}(b-x)} dx + \int_0^{2h} \sigma_T^* e^{\frac{f}{h}(b-2h)}\left(1 + f\,\frac{4h^2 - x^2}{4h^2}\right)dx\right].$$

Интегралдағаннан және жанасу ауданына бөлгеннен кейін мынадай меншікті қысымды аламыз:

$$P = \frac{\sigma_T^*}{fb}\left[e^{\frac{f}{h}(b-2h)}\left(1 + 2f + \frac{4}{3}f^2\right) - 1\right]. \qquad (9.56)$$

Жолақтың қалыңдығы кішкентай болған кезде жабысу аймағының ұзындығы аз болады, одағы кернеудің азаюын елемеуге және жанасу беті сырғу аймағы дегенді қабылдауға болады (үйкеліс коэффициенті кішкентай болған кезде). Онда меншікті қысымды (9.27) формуламен анықтауға болады.

Үйкеліс коэффициенті ең үлкен мөлшерге (0,5) жететін жағдайды қарайық. Сырғу аймағы жоқ болады. Жанасу беті жабысу және тежелу екі аймақтарынан тұрады. Осы жағдай үшін меншікті қысымды (9.50) формуламен анықтайды. Егер

осы формулаға $f = 0{,}5$ және $\psi = 0$ қойса, онда мынаны алуға болады:

$$P = \sigma_T^* \left(1 + \frac{b}{4h} - \frac{h}{3b} \right). \qquad (9.57)$$

Егер осы жағдайда жабысу аймағындағы кернеудің азаюын ескермесе, яғни жанасу беті тежелу аймағы болады дегенді қабылдаса, онда меншікті қысымды $f = 0{,}5$ және $\psi = 0$ болған кезде (9.51) формуласын қолданып анықтауға болады. Онда мынаны аламыз:

$$P = \sigma_T^* \left(1 + \frac{b}{4h} \right). \qquad (9.58)$$

Осы формуланы тағы да (9.32) формуласынан алуға болады, тек ода $f = 0{,}5$ дегенді қабылдау керек. (9.32) формуласы, үйкеліс коэффициентінің мөлшерінен тәуелсіз жанама жанасу кернеуі тұрақты болады деген жорамалмен шығарылған.

(9.58) формуласын, үйкеліс коэффициенті шекті мәнге жақын болғанда және жанасу жанама кернеуін $\sigma_T^* / 2$ тұрақты мөлшеріне тең етіп қабылдағанда, ыстықтай шөктіргендегі меншікті күшті сараптамалық есептеу үшін қолдануға болады.

Төмендегі 9.7-суретте (9.50) және (9.57) формулаларға әр түрлі үйкеліс коэффициенті қойылып салынған $\frac{P}{\sigma_T^*}$ мен жолақтың енінің қалыңдыққа қатынасы арасындағы байланыс қисық сызықтары келтірілген. $0 \prec f \prec 0{,}25$ мәндерін қойғанда меншікті қысымға үйкеліс коэффициенті күшті әсер етеді және 0,25-тен 0,5 дейінгі мәндерді қойғанда үйкеліс коэффициенті меншікті қысымға әлсіз әсер етеді. $\frac{P}{\sigma_T^*}$ қатынасының үйкеліс коэффициентінен және $\frac{b}{h}$ қатынасынан тәуелділігі, $\frac{b}{h}$ қатынасының мәні кішкентай болғанда қисық сызықты болып, $\frac{b}{h} \succ 8$ болған кезде түзу сызыққа айналады. Сондықтан $f \succ 0{,}2$

және $\frac{b}{h} \succ 8$ болған кезде мынадай формуланы пайдалануға болады:

$$\frac{P}{\sigma_T^*} = (0{,}8 \div 1{,}0) + \frac{b}{4h} \ . \qquad (9.59)$$

(9.59) және (9.28) формулалары арасында азғантай айырмашылық бар. Демек, $f \succ 0{,}2$ және $\frac{b}{h} \succ 8$ болған кезде жанасу бетінде тежелу аймағы деп есептеуге болады (сырғу жоқ болады).

Барлық қаралған жағдайларда жанасу бетіндегі нормальды қысымдар үшін күмбез тәрізді түрі бар эпюрлер алынды. Осы эпюрлерде нормальды қысым жолақтың шетінен ортасына қарай әр түрлі қарқындылықпен монотонды өседі. Бірақта тәжірибелік эпюрлер бойынша (төмендегі 9.8-суреттен көрініп тұр) жолақтың шеткі жағында мөлшері бойынша азғантай нормальды қысымның да максимумы бар екендігі анықталған. Осы суретте қорғасыннан жасалған жолақты оптикалық сезімтал соққышта шөктірген кезде поляризация – оптикалық тәсілмен алынған σ_z және τ_k эпюрлері келтірілген.

Цилиндрлік пішіні бар соғылманы шөктірген кезде симметриялық осьті кернеу күйі пайда болады. Сондықтан деформация күшін анықтау үшін инженерлік тәсілді қолдануға болады.

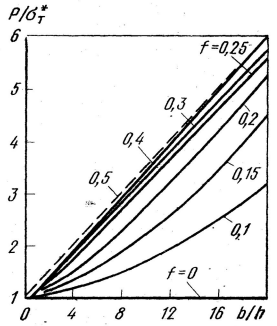
Осы жағдайда жанасу бетінде сырғу, тежелу және жабысу аймақтары бар екендігі тәжірибемен анықталған. Нормальды қысымның эпюрасында күмбез тәрізді пішін бар (9.9-сурет). Осы суретті бұрын алынған суреттермен салыстырса, онда осы айтылған жағдайларда нормальды қысымменен үйкеліс кернеуінің эпюрлері ұқсас екендігі көрініп тұр.

Деформация жазық болған кездегі формулаларды шығарған әдістемені осі симметриялық кернеу күйіне қолданып және осы жағдайда Лоде коэффициентін бірге, ал жолақтың енін $2b$ диаметр d-ға тең екендігін ескеріп, аймақ бойынша нормальды және үйкеліс кернеулері үшін келесі формулаларды аламыз:

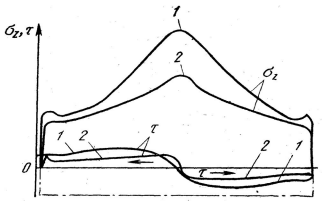
1) $r_b \le x \le r$ болған кезде $r_b = r + h(\ln 2f)/f$; $\sigma_{z1} = -\sigma_T e^{f(r-x)/h}$; $\tau_1 = f\sigma_z$;

2) $r_C \le x \le r_b$ болған кезде $r_C = 2h$; $\sigma_{z2} = -\sigma_T\left[1 + f\left(r_b - x\right)\right]/2f$; $\tau_2 = \dfrac{\sigma_T}{2}$;

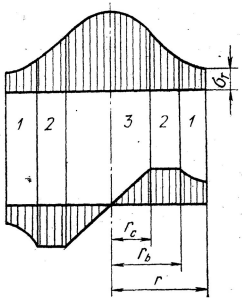
3) $0 \le x \le r_C$ болған кезде $\sigma_{z3} = -\sigma_T\left[\dfrac{4h^2 - x^2}{8h^2} + \dfrac{1}{2f} + \dfrac{r_b - 2h}{2h}\right]$; $\tau_3 = \dfrac{\sigma_T x}{4h}$;



9.7-сурет. Кеңейтусіз шөктірудің меншікті қысымының қисық сызықтары



9.8-сурет. $b/h = 7$ қатынасы бар қорғасынды үлгілікті жазық шөктірген кезде жанама кернеулердің қисық сызықтары



9.9-сурет. Жалпы жағдайда цилиндрлік үлгілікті шөктірген кездегі жанасу бетіндегі жанама τ_k және нормальды σ_z кернеулерінің эпюрлері

Толық күш

$$P = \int_{r_b}^{r} \sigma_{z1} 2\pi r dr + \int_{r_c}^{r_b} \sigma_{z2} 2\pi r dr + \int_{0}^{r_c} \sigma_{z3} 2\pi r dr \cdot \tag{9.60}$$

Меншікті қысым:

$$p = \frac{4P}{\pi d^2} \cdot \tag{9.61}$$

Жазық деформация жағдайы сияқты, симметриялы ось кернеу күйінде үйкеліс коэффициенті және $d/2h$ қатынасы өзгеруімен II, I аймақтары эпюрлерде жоқ болып кетуі мүмкін және тағы да III аймақтың әсерін ескермеуге болады.

Меншікті қысымдарда анықтау үшін қолданылатын (9.50), (9.56), (9.57) формулаларын сәйкесті өзгертіп, σ_z және τ мөлшерін, ал тағы да толық күш пен меншікті қысымды жазық деформацияға ұқсас етіп анықтауға болады.

Цилиндрді шөктірген кезде меншікті қысым деформация кедергісінен, $d/2h$ қатынасынан және үйкеліс коэффициентінен тәуелді болатындығы келтірілген формулалардан көрініп тұр, яғни

$$p = \varphi\left(\sigma_T, \frac{d}{2h}, f\right) \cdot$$

Үйкеліс коэффициенті $0 \prec f \prec 0{,}25$ шегінде өзгерген кезде, оның әсері өте зор екендігі және $0{,}25 \prec f \prec 0{,}5$ шегінде өзгергенде аз екендігі (9.61) формуласын талдағанда байқалады.

Үйкеліс коэффициенті 0,3-тен 0,5-ке дейін өзгерген кезде меншікті қысымды мына формула бойынша анықтауға болады:

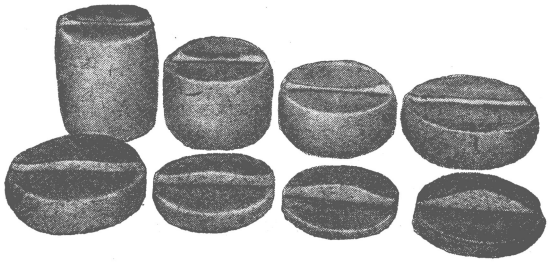
$$P = \left[(0.8 \div 1.0) + \frac{fd}{6h}\right]\sigma_T \cdot \tag{9.62}$$

Түпкі ұзындығы бар параллелепипедтерді шөктірген кезде, деформацияны жазық етіп қабылдау қиын болса, онда М.В. Сторожев шығарған формуланы қолданып, керекті күшті есептеуге болады.

Диаметрінің биіктікке қатынасы 2 ÷ 2,5-нан кіші болатын биік цилиндрлік үлгілікті шөктірген кезде нормальды қысымның эпюрасы ойық пішінді болатындығын зерттеушілер анықтаған.

Нормальды қысым эпюрасының пішіні туралы сапалы мәліметтерді, соққыштың тік саңылауына металл аққан кезде жанасу бетінде пайда болатын айдардың пішіні бойынша алуға болады. 9.10-суретінде диаметр мен биіктік қатынастары әр түрлі болатын қорғасыннан жасалған үлгіліктерді шөктіргеннен кейін алынған суреттер келтірілген (Я.М. Охрименко бойынша).

Берілген ені бар үлгіліктің биіктігі үлкен болған сайын меншікті қысымға пішіннің әсер етуі кіші болады. Жоғарыда айтылған тәжірибемен алынған эпюрлердің теориялық есептелгеннен айырмашылығы рұқсат етілген дәлдік шегінен ауытқымайды.



9.10-сурет. Диаметр мен биіктік қатынастары әр түрлі болатын қорғасыннан жасалған үлгіліктерді шөктіргеннен кейінгі олардың сыртқы пішіні

Бақылау сұрақтары.

1. Жуықты тепе-теңдік теңдеуін және илемділік теңдеуін біріктіріп шешу әдістемесі қандай жайды негізге алған ?
2. Жуықты тепе-теңдік теңдеуін және илемділік теңдеуін біріктіріп шешу әдістемесін қандай жердегі кернеуді анықтауға қолданылады ?
3. Жуықты тепе-теңдік теңдеуін және илемділік теңдеуін біріктіріп шешкенде жазық есеп үшін тепе-теңдіктің дифференциалдық теңдеуін қалай жеңілдетеді ?
4. $\tau_k = f\sigma_z$ болған кезде жанасу бетіндегі нормальды σ_z және жанама $\tau_к$ кернеулерді қалай анықтайды және осы кернеулердің эпюрлерінде қандай түр бар болады ?

5. $\tau_k = -f\sigma_T^*$ болған кезде жанасу бетіндегі нормальды σ_z және жанама $\tau_к$ кернеулерді қалай анықтайды және осы кернеулердің эпюрлерінде қандай түр бар болады ?
6. $\tau_k = -\tau_k^b \dfrac{x}{b}$ болған кезде жанасу бетіндегі нормальды σ_z және жанама $\tau_к$ кернеулерді қалай анықтайды және осы кернеулердің эпюрлерінде қандай түр бар болады ?
7. Жалпы жағдайда жазық шөктірген кездегі жанасу бетіндегі жанама τ_k және нормальды σ_z кернеулер неге тең болады және осы жағдайдың эпюрінде қандай түр бар ?
8. Жалпы жағдайда цилиндрлік үлгілікті шөктірген кездегі жанасу бетіндегі жанама τ_k және нормальды σ_z кернеулер неге тең болады және осы жағдайдың эпюрінде қандай түр бар ?
9. Жуықты тепе-теңдік теңдеуін және илемділік теңдеуін біріктіріп шешкенде толық күшпен меншікті қысым қандай формулалармен анықталады?

9.2. Жұмыс әдістемесі

Жұмыс әдісі илемді деформация кезінде сыртқы күштің жұмысы ішкі кедергілердің жұмыстарының қосындысына тең деген ой желіске негізделген. Илемді деформация кезінде, дененің беріктік қасиетімен анықталатын ішкі кедергілерді және сыртқы үйкеліс күшін жеңу үшін жұмысты жұмсау керек. Деформацияның жұмысы машинамен дамытылатын белсенді күштің жұмысы мен сыртқы үйкеліс күш айырмасына тең болады, яғни

$$A_a - A_{TP} = A_Д \text{ немесе}$$
$$A_a = A_Д + A_{TP} \qquad (9.63)$$

мұндағы A_a – белсенді күштің жұмысы; A_{TP} – үйкеліс күшінің жұмысы; $A_Д$ – ішкі кедергінің жұмысы, деформацияның жұмысы.

Кіші деформация кезіндегі ішкі күш жұмысының $A_Д$ өсуін анықтайық. Серпімді деформация кезінде жұмысты анықтау үшін кернеу құраушылары мен деформация құраушыларын көбейтеді, осы көбейтінділерді қосады, содан соң алынған мөлшердің жартысын табады, яғни

$$A_n^{\vee} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{23}\varepsilon_{23} + \sigma_{13}\varepsilon_{13}\right). \qquad (9.64)$$

Кернеу нөлден аяққы мәнге дейін сызықты өсетін болғандықтан 0,5 коэффициентті қабылданған.

Илемді деформация кезінде бастапқы кернеулер нөлден айырмашылықта болады және дененің пішіні шамалы өзгергенде, оларды тұрақты етіп қабылдауға болады.

Сондықтан илемді деформация кезінде жұмыстың өсуін жоғарыда жазылған формуламен анықтауға болады, бірақта 0,5 коэффициентінсіз, яғни:

$$dA_Д = \left(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{23}\varepsilon_{23} + \sigma_{13}\varepsilon_{13}\right)dV \quad (9.65)$$

Осы формулаға деформация тензорының сыңарларын қойып

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2G'}\left(\sigma_{11} - \sigma_{cp}\right);\ \ \varepsilon_{22} = \frac{1}{2G'}\left(\sigma_{22} - \sigma_{cp}\right);\ \ \varepsilon_{33} = \frac{1}{2G'}\left(\sigma_{33} - \sigma_{cp}\right);$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{G'}\sigma_{12};\quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{G'}\sigma_{23};\ \varepsilon_{zx} = \frac{1}{G'}\sigma_{13}.$$

мынадай теңдеуді аламыз:

$$dA_Д = \left[\frac{\sigma_{11}\left(\sigma_{11}-\sigma_{cp}\right)}{2G} + \frac{\sigma_{22}\left(\sigma_{22}-\sigma_{cp}\right)}{2G} + \frac{\sigma_{33}\left(\sigma_{33}-\sigma_{cp}\right)}{2G} + \frac{1}{G}\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2\right)\right]dV = \qquad (9.66)$$

$$= \frac{1}{6G}\left[\left(\sigma_{11}-\sigma_{22}\right)^2 + \left(\sigma_{22}-\sigma_{33}\right)^2 + \left(\sigma_{33}-\sigma_{11}\right)^2 + 6\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2\right)\right]dV.$$

Квадратты жақша ішіндегі формула мынадай формуламен анықталатын:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2\right)}$$

екі еселенген кернеу қарқындылығының екінші дәрежесіне σ_i^2 тең.

Мына теңдеуді қолданып $G' = E'/3$, илемділік модулінің екінші түрін G' илемділік модулінің бірінші түрімен E' ауыстырайық. Содан кейін мынадай теңдеуге сәйкесті $\varepsilon_i = \sigma_i / E'$ илемділік модулінің бірінші түрін E' кернеу мен деформация қарқындылығы арқылы бейнелейік. Сонда мынаны аламыз:

$$G' = E'/3 = \sigma_i / 3\varepsilon_i .$$

(9.66) формуласындағы квадратты жақшадағы формуланың орнына $2\sigma_i^2$ және G' мәнінің орнына $\sigma_i / 3\varepsilon_i$ қойсақ мынаны аламыз:

$$dA_Д = \sigma_i \varepsilon_i dV . \tag{9.67}$$

Соңғы формуладан мынау шығады:

$$A_Ä = \iiint_V \sigma_i \varepsilon_i dV \cdot \tag{9.68}$$

Жанама үйкеліс күшінің жұмысын қосып сыртқы (беткі) күш жұмысын былай бейнелеуге болады:

$$\iint_F \left(X_1 \cdot u_1 + X_2 \cdot u_2 + X_3 \cdot u_3\right) dF , \tag{9.69}$$

мұндағы X_1, X_2, X_3 – координат осьтеріне күштің проекциясы;

u_1, u_2, u_3 – координаттарға сәйкесті болатын орын ауыстыру.

Жалпы жағдайда жанама үйкеліс күшінің жұмысын былай көрсетуге болады:

$$A_{TP} = -\tau_k \iint_F \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}}\, dF , \tag{9.70}$$

мұндағы τ_k – үйкеліс кернеуі (интегралдан шығарылған, өйткені тұрақты және изотропты екендігі қабылданған).

(9.68) және (9.70) формулаларды (9.63) теңдеуге қойып және A_{TP} абсолюттік мөлшерін қолданып мынаны аламыз:

$$A_a = \iiint\limits_V \sigma_i \varepsilon_i dV + \tau_k \iint\limits_F \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\, dF \,. \qquad (9.71)$$

Көп жағдайларда белсенді күштің жұмысын, толық күшті сайманның қозғалысына (жаншуға) көбейту арқылы табуға болады, яғни $A_a = P\Delta h$.

Сонда толық күш мынаған тең:

$$P = \frac{1}{\Delta h}\left[\iiint\limits_V \sigma_i \varepsilon_i dV + \tau_k \iint\limits_F \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\, dF\right]. \qquad (9.72)$$

9.1-есеп. Жұмыс әдістемесін ені 2b, биіктігі 2h және ұзындығы l болатын жолақты шөктіргенде күшті анықтау үшін қолданайық. Деформация жазық деп санау үшін жолақтың ұзындығы, оның енінен едәуір үлкен болсын. Жуықты тепе-теңдік және илемділік теңдеулерін біріктіріп шешу әдістемесінде қаралған мысалдан деформациялаудың шартын алайық. Жанасу бетіндегі үйкеліс кернеуін ($\tau_к$) x_1 координатасынан тәуелді емес және тұрақты етіп қабылдаймыз. Жанасу бетіндегі үйкеліс деформацияны біркелкі емес таралуға алып келсе де, осы деформацияны біркелкі деп санаймыз. Кернеулер σ_{11} және σ_{33} осы жағдайда басты кернеулер болады. Илемділік шартына сәйкесті мынаны жазуға болады: $\sigma_i = \sigma_т(\sigma_s)$.

Кішкентай шөктіру кезінде x_3 осі бойымен салыстырмалы деформация теріс таңбамен алынған салыстырмалы жаншуға тең, яғни

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_3 = -\Delta h/2h \,; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = 0 \,; \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 = \Delta h/2h \,.$$

Осындайда (3.70) формуласына сәйкесті деформацияның қарқындылығы былай анықталады:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_1^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_1 = \frac{\Delta h}{\sqrt{3}h} \,.$$

Интегралдаған кезде жолақ қимасының бірден төрт шегінде l өлшемінің тұрақтылығын ескеріп, (9.63) формуласына сәйкесті ішкі күштің абсолюттік жұмысын мына теңдеумен анықтаймыз:

$$A_Д = 4\sigma_T \frac{\Delta h}{\sqrt{3}h} l \int_0^b \int_0^h dx_1 dx_3 = 2\sigma_T^* b\Delta h l \,.$$

Жазық деформация жағдайында жанасу бетімен сырғу тек x_1 осі және екі жанасу бетімен жүретін болғандықтан, (9.70) формуласына сәйкесті үйкеліс күші жұмысын былай анықтаймыз:

$$A_{TP} = -4\tau_к l \int_0^b u_1 dx_1 .$$

Орын ауыстыруды (3.50) формуласы негізінде былай табамыз:

$$u_1 = \varepsilon_1 + C.$$

Интегралдау тұрақтысы (ол x_3 осінен тәуелді емес) $x_1 = 0$ және $и_1 = 0$ болған кезде мынаған тең: $C = 0$.

Бұрынғы теңдеуге $и_1$-дің мәнін қойып мынаны аламыз:

$$A_{TP} = 4\tau_к l \int_0^b \frac{\Delta h x_1}{2h} dx_1 = \tau_к l \frac{\Delta h}{h} b^2 .$$

Алынған $A_Д$ және $A_{ТР}$ мәндерін (9.72) теңдеуіне қойып мынаны аламыз:

$$P = 2\sigma_T^* lb + \tau_к lb^2 / h .$$

Осы теңдеуді жанасу ауданына $2bl$ меншікті қысымды былай анықтаймыз:

$$p = \sigma_T^* \tau_к b / 2h .$$

(9.28) формуласына сәйкесті мынаны қабылдап: $\tau_k = -f\sigma_T^*$ жуықты тепе-теңдік және илемділік теңдеулерін біріктіріп шешу әдістемесімен шығарылған (9.32) формуласын аламыз.

Көптеген жағдайда жұмыс әдістемесімен толық және меншікті күшті едәуір оңай анықтауға болады. Жоғарыда келтірілген жазық деформация жағдайында жолақты шөктіру мысалы үшін, оны келесі жолмен іске асыруға болады.

Ішкі кедергі жұмысы және үйкеліс күшін ескермейтін деформацияның жұмысы, деформацияның кедергісін жанасу ауданына және абсолюттік жаншуға көбейтумен табады, яғни $A_Д = \sigma_T^* 2bl\Delta h$.

Үйкеліс күшінің жұмысын, үйкеліс күшін сайманның жанасу беті бойымен металдың орын ауыстыруына көбейтіп анықтайды.

Үйкеліс күшін Т үйкеліс кернеуі тұрақты және $f\sigma_T^*$ тең деген шартты орындай отырып табамыз, яғни $T = \tau_к 2bl = 2f\sigma_T^* bl$.

Сайман бойымен металдың орын ауыстыруы мынаған тең: $и_1 = \varepsilon_{11} x_1$.

Бірақта деформация жазық болған кезде мынадай шарт орындалады: $\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{33} = \Delta h/2h$.

Демек, орын ауыстыру мынаған тең: $u_1 = \Delta h x_1/2h$.

Жолақтың енінің ортасында нөлге және $x_1 = b$ болған кезде осы жолақтың шетінде ең үлкен мәнге жетіп орын ауыстыру ($и_1$) x_1-тен сызықты тәуелді болады, яғни $u_{1max} = \Delta hb/2h$.

Орын ауыстырудың орташа мәні мынаған тең: $u_{1ср} = \Delta hb/4h$.

Екі жанасу беті бойынша үйкеліс күшінің жұмысы мынаған тең: $A_T = 2Tu_{1ср} = f\sigma_T^* b^2 l\Delta h/h$.

Толық меншікті күшті сәйкесті былай анықтаймыз:

$$P = \left(A_Д + A_{ТР}\right)/\Delta h = 2\sigma_T^* lb + \tau f\sigma_T^* lb^2/h;$$

$$p = P/2bl = \sigma_T^*\left(1 + fb/2h\right)$$

яғни (9.32) теңдеуі алынды.

9.3. Вариация әдістемесі

Күшті және деформацияны анықтаудың вариациялық әдістемесі – жұмыс әдістемесі сияқты энергетикалық принципті негізге алған. Серпімділік теориясында және илемділіктің математикалық теориясында қолданылатын вариациялық теория, металдарды қысыммен өңдеу процестеріне сәйкесті И. Я. Тарновскийдің және оның оқушыларының еңбектерінде дамыды.

Жуықты тепе-теңдік және илемділік теңдеулерін бірлестіре шешудің әдістемесі және жұмыс әдістемесімен салыстырғанда вариациялық әдістеме тек толық және меншікті күшті анықтап

қоймайды, ал тағы да дененің көлемі бойынша кернеу мен деформацияны және деформацияның біркелкі еместігін ескере отырып, деформациядан кейінгі дененің пішінін анықтауға мүмкіндік берді.

Вариациялық әдіс мынадай ережені негізге алады: тепе-теңдік күйінің төңірегіндегі мүмкін болатын қозғалыстың барлық сыртқы және ішкі күштері жұмысының қосындысы нөлге тең.

Сыртқы күштің жұмысы $A_B = \iint\limits_F \left(X_1 u_1 + X_2 u_2 + X_3 u_3\right) dF$.

Ішкі күштің жұмысы $A_Д = \iiint\limits_V \sigma_i \varepsilon_i dV$.

Вариациялық әдістемеде нормальды кернеу қарқындылығының σ_i орнына жанама кернеудің қарқындылығы Т қабылданған. Жанама кернеудің қарқындылығы мына формуламен анықталатындығы белгілі:

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + \left(\sigma_{22} - \sigma_{33}\right)^2 + \left(\sigma_{33} - \sigma_{11}\right)^2 + 6\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2\right)}. \quad (9.73)$$

Деформация қарқындылығының ε_i орнына ығысу деформациясының қарқындылығы $Г$ қабылданған. Ығысу деформациясының қарқындылығы мына формуламен анықталады:

$$Г = \frac{2}{\sqrt{6}} \sqrt{\left(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}\right)^2 + \left(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}\right)^2 + \left(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}\right)^2 + 6\left(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2\right)}. \quad (9.74)$$

Нормальды кернеудің қарқындылығы σ_i мен деформация қарқындылығы ε_i арасындағы көбейтінді, жанама кернеудің қарқындылығы T мен ығысу деформациясының қарқындылығы Г арасындағы көбейтіндіге тең болады, яғни $\sigma_i \varepsilon_i = TГ$.

Сондықтан ішкі күш жұмысының теңдеуін келесі түрде жазуға болады:

$$A_Д = \iiint\limits_V TГ dV. \quad (9.75)$$

Илемділік шартын

$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2)} = \sigma_S$ негізге алып жанама кернеудің қарқындылығын T ағым шегі (деформация кедегісі) σ_S арқылы былай бейнелеуге болады: $T = \sigma_S / \sqrt{3}$; немесе мынадай теңдеуді ескеріп $\left(k = \frac{\sigma_S}{\sqrt{3}}\right)$ былай жазуға болады $T = k$. Жанама кернеудің қарқындылығы T мөлшері бойынша тұрақты болғандықтан, оны интегралдың белгісі сыртына шығарып тастауға болады. Сонда мынаны аламыз:

$$A_{\text{Ї}} = k\iiint_V \Gamma dV \tag{9.76}$$

Дененің мүмкін болатын қозғалысының бас жағын қарайық. Берілген күштің және қозғалудың әсерінен дене тепе-теңдікте болсын. Дененің нүктелеріне шекаралық шарттармен сәйкесті шексіз кішкентай ығысуларды δu_1, δu_2, δu_3 берейік (кинематикалық мүмкін болатын ығысу).

Δu_1, δu_2, δu_3 өсімшелері орын ауыстырудың вариациясы болып саналады. Орын ауыстыруы берілген және ешқандай өзгеруді (вариацияны) рұқсат етпейтін дененің беткі бөлімдерінде осы өсімшелер нөлге айналуы қажет. Мысалы, шөктірген кезде жанасу бетіндегі тік орын ауыстыру сайманның орын ауыстыруымен берілген, сондықтан бетте $\delta u_3 = 0$. Толық жабысқан кезде барлық орын ауыстырулар (δu_1, δu_2, δu_3) нөлге тең.

Мүмкін болатын орын ауыстыруда сыртқы күш жұмысының вариациясы ((9.69) теңдеуіне сәйкесті) мынадай теңдеумен анықталады:

$$A_B = \iint_F (x_1\delta u_1 + x_2\delta u_2 + x_3\delta u_3)dF = \delta\iint_F (x_1\delta u_1 + x_2\delta u_2 + x_3\delta u_3)dF. \tag{9.77}$$

Мүмкін болатын орын ауыстыруда ішкі күш жұмысының вариациясы ((9.76) теңдеуіне сәйкесті) мына теңдеумен анықталады:

$$\delta A_{\text{Д}} = k\iiint_V \delta\Gamma dV = k\delta\iiint_V \Gamma dV. \tag{9.78}$$

Сыртқы күштің жұмысының таңбасы теріс екендігін, ал ішкі күштің жұмысының таңбасы оң екендігін ескеріп, мүмкін болатын орын ауыстырудың басталуына сәйкесті мынаны жазуға болады:

$$k\iiint\limits_V \Gamma dV - \iint\limits_F \left(x_1\delta u_1 + x_2\delta u_2 + x_3\delta u_3\right) dF = \\ = \delta\left[k\iiint\limits_V \Gamma dV - \iint\limits_F \left(x_1\delta u_1 + x_2\delta u_2 + x_3\delta u_3\right) dF \right] = 0. \tag{9.79}$$

Квадратты жақшаның ішінде тұрған мөлшер толық энергия болып саналады. Демек, толық энергияның вариациясы нөлге тең. Осы ережені былай тұжырымдауға болады: тепе-теңдіктегі дененің нақты пішіні, мүмкін болатын барлық пішіннен толық энергияға ең кіші мәнді беруімен айырмашылықта болады.

(9.79) формуладағы толық энергия орын ауыстырудың функциясы болады. Расында да (9.77) теңдеуге сәйкесті сыртқы күштің жұмысы орын ауыстырудан тікелей тәуелді болады. Ішкі күштің жұмысы ығысу деформациясының қарқындылығынан Γ тәуелді болады. Бірақта Γ-ның өзі орын ауыстырудың координаттар бойынша жеке туындыларымен анықталатын деформация тензорларының сыңарларынан тәуелді болады.

Сөйтіп, әдістемеде мынадай мақсат қойылуы мүмкін: толық энергия ең кішкентай мәнді қабылдайтын орын ауыстырудың координатадан функционалды байланысын табу қажет. Яғни, қойылған мақсатқа сәйкесті осындай есептер вариациялық есептеуде қаралады. Бұл есептерді дифференциалды есептеулерде функцияның экстремалды мәнін іздеуге қатысты болатын есептермен салыстыруға болады. Соңғысында функция экстремалды (сонымен қатар ең кіші) мөлшерді алатын өзгермелі мөлшердің мәнін анықтайды. Вариациялық есептеуде басқа функцияға минимальды мәнді беретін функцияны анықтайды. Анықталатын функция басқа функциядан тәуелді болады және оны функционал деп атайды.

Вариациялық есептеу әдістемелерімен металдарды қысыммен өңдеудің сараптамалық есептерін шешу өте үлкен математикалық қиындықтарға алып келеді. «Түзу» деп аталатын

вариациялық есептеулердің жуықты әдістемелерін қолдану саны бойынша көп есептерді шығаруға мүмкіндік береді.

Түзу әдістемелерінің біреуінде (Ритц әдістемесі) іздейтін функцияны (осы функцияны металдарды қысыммен өңдеуге қолданғанда, ол орын ауыстыру болады) қатар түрінде көрсетеді, мысалы

$$u = a_1\varphi_1(x_1, x_2, x_3) + a_2\varphi_2(x_1, x_2, x_3) + ..., \qquad (9.80)$$

мұндағы a_1, a_2,..., – анықталмаған параметрлер; $\varphi_i(x_1, x_2, x_3)$ – шекаралық шарттарға сай болатын координаттардың функциясы.

$\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$ функциясын еркінше қабылдауға болады. Тек ол шекаралық шарттарға сай болуы қажет. Бірақта дәлдікті жоғарылату және есептеуді қысқарту үшін ыңғайлы функцияны қабылдау орынды, яғни түрі бойынша тәжірибелік мәліметтерге жауап беретін және процестің ерекшелігін бейнелейтін функцияны табу қажет. Егер ыңғайлы функция дұрыс таңдалса, онда күшті анықтаған кезде (9.80) теңдеуі қатарының 1 – 2 мүшесінде қанағаттанарлық нәтиже алынады.

x_1, x_2, x_3 мөлшерлерін және олардың туындыларын (9.79) формулаға қойғаннан кейін толық энергияны a_1, a_2 және т.б. еркін параметрлер функциясында білдіреміз. Сондықтан, функцияның түрін іздейтін вариациялық есептер, толық энергияға ең кіші мәнді беретін жоғарыда айтылған параметрлердің мөлшерін анықтауға әкеледі.

Параметрлері бойынша толық энергияны дифференциалдаумен есеп шешіледі және туындылары нөлге теңеледі, яғни

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a_1}\left[k\iiint\limits_V \Gamma dV - \iint\limits_F (x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3)\,dF \right]; \\ &\frac{\partial}{\partial a_1}\left[k\iiint\limits_V \Gamma dV - \iint\limits_F (x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3)\,dF \right]. \end{aligned}\right\} \qquad (9.81)$$

Интегралдау және дифференциалау нәтижесінде параметрлер саны бойынша алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз.

a_1, a_2,..., параметрлерінің мөлшерін анықтап (9.80) теңдеуі бойынша орын ауыстырудың мөлшерін табамыз, ал деформация

тензорларының сыңарларын анықтайтын формулалар бойынша, осы деформация сыңарларын анықтаймыз. Шекаралық шарттарды және деформацияланатын дененің қасиеттерін ескеріп күшті анықтауға болады.

9.2-есеп. Ені $2b$, қалыңдығы $2h$ және ұзындығы l болатын жолақты жазық деформация жағдайында кедір-бұдырлы тақталардың арасында шөктірудің есебін шешу үшін вариациялық әдістемені қолданайық. Осы есеп жоғарыда жуықты тепе-теңдік және илемділік теңдеулерін біріктіріп шешу әдістемесі және жұмыс әдістемесімен шешілген.

Шөктіруді симметриялық жағдайда жүргізетіндіктен жолақтың биіктігінің ортасына координаттың басын орналастырып, осы жолақтың ширек қимасын қарайық.

Сыртқы күштің жұмысы белсенді күштің жұмысына және кедергінің күші болып саналатын жанасу бетіндегі үйкелістің күшіне тең болады.

Белсенді күштің жұмысы $x_3 = h$ болған кезде толық күшпен тік орын ауыстырудың u_3 немесе абсолюттік жаншудың көбейтіндісіне тең, яғни

$$A_a = Pu_{3(x_3=h)} = P\Delta h\,.$$

Жанасу бетінің элементіндегі dF үйкеліс күшінің жұмысы жанасу бетінің бойымен іске асатын орын ауыстырумен үйкеліс кернеуінің көбейтіндісіне тең. Үйкеліс күші орын ауыстыруға қарама-қарсы бағытталғанын ескеріп үйкеліс күшінің жұмысын былай бейнелеуге болады:

$$A_{mp} = -\tau_к \iint\limits_F \sqrt{u^2_{1(x_3=h)} + u^2_{2(x_3=h)}}\,dF\,.$$

Жазық деформация болған кезде $и_2$ орын ауыстыруы x_2 осінің бойымен нөлге тең, сондықтан мынаны жазуға болады:

$$A_{mp} = -\tau_к \int\limits_0^b u_{1(x_3=h)}dx_1\,.$$

Үйкеліс кернеуін k-ның үлесімен былай бейнелейік: $\tau_к = \alpha k$.

Онда мынаны табамыз:

$$A_{mp} = -\alpha k \int\limits_0^b u_{1(x_3=h)}dx_1\,.$$

Үйкеліс күші жұмысын $A_{\text{тр}}$ оң таңбамен алып сыртқы күш жұмысын былай анықтайтын боламыз:

$$A_в = A_a - A_{тр} = Pu_{3(u_3=h)} - \alpha k \int_0^b u_{1(x_3=h)} dx_1 \cdot \tag{9.82}$$

Жазық деформация жағдайында ішкі күштің жұмысын былай бейнелеуге болады:

$$A_Д = k \int_0^b \int_0^h \Gamma dx_1 dx_3 \cdot \tag{9.83}$$

Белсенді күштің жұмысын былай табамыз:

$$A_a = P\Delta h = k \int_0^b \int_0^h \Gamma dx_1 dx_3 + \alpha k \int_0^b u_{1(x_3=h)} dx_1 \cdot \tag{9.84}$$

Мүмкін болатын орын ауыстырудағы сыртқы күштің жұмысы мүмкін болатын орын ауыстырудағы үйкеліс күшке тең, яғни

$$A_{тр} = \alpha k \delta \int_0^b u_{1(x_3=h)} dx_1 \cdot \tag{9.85}$$

Мүмкін болатын орын ауыстырудағы ішкі күштің жұмысы мынаған тең:

$$A_Д = k\delta \int_0^b \int_0^h \Gamma dx_1 dx_3 \tag{9.86}$$

және мүмкін болатын орын ауыстыруға сәйкесті мынаны жазуға болады:

$$k\delta \int_0^b \int_0^h \Gamma dx_1 dx_3 + \alpha k \delta \int_0^b u_{1(x_3=h)} dx_1 = 0 \cdot \tag{9.87}$$

Ритц бойынша u және Γ жарайтын функциялар арқылы бейнелейтін болса, онда k қысқартқаннан кейін (9.87) теңдеуі мынадай түрді қабылдайды:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a_1} \alpha \int_0^b u_{1(x_3=h)} dx_1 + \frac{\partial}{\partial a_1} \int_0^b \int_0^h \Gamma dx_1 dx_3 = 0; \\ &\frac{\partial}{\partial a_2} \alpha \int_0^b u_{1(x_3=h)} dx_1 + \frac{\partial}{\partial a_2} \int_0^b \int_0^h \Gamma dx_1 dx_3 = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{9.88}$$

u_1 және u_3 орын ауыстырулары үшін жарайтын функцияларды таңдап алайық. Жазық деформация болған кезде u_2 нөлге тең.

Үйкеліспен шөктірген кезде деформация біркелкі емес болады. Деформацияның нәтижесінде көлденең қималар, жанасатын бетте ең үлкен мәнге ие болатын, ал одан алыстаған сайын басылатын иілісті алады (9.11-сурет). Көлденең қимада параболалық пішін бар дегенді қабылдайық. Тік қима да парабола пішініне жақындап иіледі.

Онда x осінің бойымен u_1 орын ауыстыруын, мысалы мынадай түрде көрсетуге болады:

$$u = a_1 x_1 + a_2 x_1 \left(1 - 3\,x_3^{\,2}/h^2\right)\left(1 - x_1^{\,2}/3b^2\right). \tag{9.89}$$

Деформация тензорының сыңарларын (3.50) формуласына сәйкесті былай анықтайық:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = a_1 + a_2\left(1 - 3x_3^{\,2}/h^2\right)\left(1 - x_1^{\,2}/b^2\right);\\ &\varepsilon_{22} = 0;\\ &\varepsilon_{33} = -\varepsilon_{11} = -\left[a_1 + a_2\left(1 - 3x_3^{\,2}/h^2\right)\left(1 - x_1^{\,2}/b^2\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{9.90}$$

Тік орын ауыстыруды былай анықтайық:

$$u_3 = \int \varepsilon_{11} dx_3 = -\left[a_1 x_3 + a_2 x_3\left(1 - \frac{x_1^{\,2}}{b^2}\right)\left(1 - \frac{x_3^2}{h_2}\right)\right] + f(x)\cdot$$

Еркін функцияны $f(x)$ шекаралық шарттан былай анықтаймыз ($x_3 = 0$, $u_3 = 0$ болған кезде): $f(x) = 0$.

Демек тік орын ауыстыруды және ығысу деформациясын былай анықтайтын боламыз:

$$u_3 = -\left[a_1 x_3 + a_2 x_3\left(1 - \frac{x_1^{\,2}}{b^2}\right)\left(1 - \frac{x_3^2}{h_2}\right)\right]; \tag{9.91}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = \frac{1}{2}\left[-6a_2\frac{x_1 x_3}{h^2}\left(1 - \frac{x_1^2}{3b^2}\right) + 2a_2\frac{x_1 x_3}{b_2}\left(1 - \frac{x_3^2}{h^2}\right)\right] = \tag{9.92}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2a_2 x_1 x_3}{b_2 h_2}\left\langle\left(h^2 - x_3^2\right) - \left(3b^2 - x_1^2\right)\right\rangle\right];$$

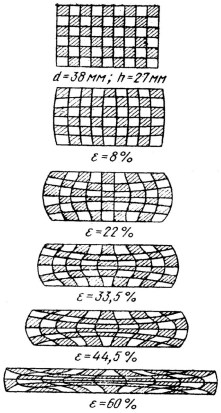
$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0.$$

(9.91) теңдеуінен a_1 параметрінің мәнін былай анықтауға болады: $x_3 = h$ болған кезде, яғни үлгілікпен сайманның жанасу бетінде орын ауыстыру мынаған тең: $u_3 = \Delta h/2$. Осыны пайдаланып мынаны жазуға болады: $\Delta h/2 = a_1 h$ және

$$a_1 = \Delta h/2h = \varepsilon, \qquad (9.93)$$

яғни a_1 салыстырмалы жаншуға тең.

a_2 параметрін анықтау үшін (9.88) жүйесінің екінші теңдеуін шешу қажет.



9.11-сурет. Әр түрлі түсті пластилиннен жасалған үлгілікті шөктірген кезде деформацияның біркелкі еместігі

k бөлінген жанасу үйкелісі жұмысының a_2 параметрі бойынша туындысы болып келетін, осы теңдеудің бірінші қосылғышын есептейік. Ол үшін алдымен (9.93) теңдеуін ескеріп (9.89) теңдеуінен $u_{3(x_3=h)}$ орын ауыстыруын былай анықтайық:

$$u_{3(x_3=h)} = \varepsilon x_1 - 2a_2 x_1 + a_2 \frac{2x_1^3}{3b^2}. \qquad (9.94)$$

Алынған (9.94) теңдеуін (9.88) жүйесінің екінші теңдеуіне қойып мынаны аламыз:

$$\frac{1}{k}\frac{\partial A_{TP}}{\partial a_2} = \alpha \frac{\partial}{\partial a_2}\int_0^b u_{1(x_3=h)}dx_1 = \alpha \int_0^b \frac{\partial u_{1(x_3=h)}}{\partial a_2}dx_1 = \qquad (9.95)$$

$$\alpha \int_0^b \left(-2x + \frac{2x_1^3}{3b^2}\right)dx_1 = -\alpha\, 0{,}833 b^2.$$

k бөлінген ішкі күш жұмысының a_2 параметрі бойынша туындысы болып келетін (9.88) теңдеуінің екінші қосылғышын есептейік

$$\frac{1}{k}\frac{\partial A_Д}{\partial a_2} = \frac{\partial}{\partial a_2}\int_0^b\int_0^h \Gamma dx_1 dx_3 \,. \qquad (9.96)$$

Ол үшін ығысу деформациясы қарқындылығының Γ мәнін есептейік. Деформация жазық болған кезде деформация тензорларының сыңарлары мынаған тең: $\varepsilon_{22} = 0$; $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{12} = 0$; $\varepsilon_{33} = -\varepsilon_{11}$. Онда (9.74) теңдеуден мынаны аламыз:

$$\Gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{11}^2 + 4\varepsilon_{11}^2 + 6\varepsilon_{13}^2} = 2\sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{13}^2}\,. \qquad (9.97)$$

Осы формулаға (9.90) және (9.92) теңдеулерінен ε_{11} және ε_{13} мәндерін қойып мынаны табамыз:

$$\Gamma = \sqrt{4\left[\varepsilon + a_2\left(1-\frac{3x_3^2}{h^2}\right)\left(1-\frac{x_1^2}{b^2}\right)\right]^2 + \left\{\frac{2a_2x_1x_3}{b^2h^2}\left[\left(h^2-x_3^2\right)-\left(3b^2-x_1^2\right)\right]\right\}^2}\,. \qquad (9.98)$$

(9.98) формуласынан көп мүшенің квадратты түбірі болатын Γ мәнін (9.96) теңдеуге қойғаннан кейін, оны интегралдау мүмкін емес екен. Сондықтан жуықты шешетін келесі әдісті қолданайық. Ығысу деформациясының қарқындылығын Γ былай белгілейік: $\Gamma\sqrt{\varphi\left(x_1/b,\, x_3/h,\, a_2\right)}$. Алынған белгілеуді былай дифференциалайық:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial a_2} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial a_2}\varphi\left(x_1/b,\, x_3/h,\, a_2\right)}{2\sqrt{\varphi\left(x_1/b,\, x_3/h,\, a_2\right)}} = \frac{\dfrac{\partial\Gamma^2}{\partial a_2}}{2\Gamma}\,. \qquad (9.99)$$

(9.99) теңдеуінің бөліміндегі 2Г мөлшерін ығысу деформациясы қарқындылығының орташа мөлшерімен $2\Gamma_c$ ауыстырайық және (9.96) формуласындағы интеграл белгісінің сыртына шығарайық. Ығысу деформациясы қарқындылығының орташа мөлшері, біркелкі деформация кезіндегі ығысу деформациясы қарқындылығы мөлшеріне мәні бойынша жақын екендігін көптеген есептеулер көрсетті. Біркелкі деформация кезінде x_1 және x_3 осьтері басты болады. Сондықтан ε_{13} нөлге тең. Осы себептен (9.97) формуласына ε_{11} мәнінің орнына ε_{33}

мәнін қойып мынаны аламыз: $\Gamma_c = \sqrt{4\varepsilon_{33}^2} = 2\varepsilon.$ Онда (9.96) теңдеуін келесі түрде келтіруге болады:

$$\frac{1}{k}\frac{\partial A_Д}{\partial a_2} = \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^b\int_0^h \frac{\partial \Gamma^2}{\partial a_2} dx_1 dx_3 \cdot \tag{9.100}$$

(9.98) формуласындағы Γ^2-ні a_2 бойынша дифференциалағаннан кейін, (9.100) формуласын интегралдау және оны кейбір түрлендіру мынаны табуға мүмкіндік береді:

$$\frac{1}{k}\frac{\partial A_Д}{\partial a_2} = \frac{2}{\varepsilon} a_2 bh\left(0{,}213 + 0{,}648\frac{b^2}{h^2} + 0{,}026\frac{h^2}{b^2}\right). \tag{9.101}$$

(9.88) теңдеуіне (9.95) және (9.101) формулаларындағы қосылғыштардың мәндерін қойып мынаны аламыз:

$$\frac{2}{\varepsilon} a_2 bh\left(0{,}213 + 0{,}648\frac{b^2}{h^2} + 0{,}026\frac{h^2}{b^2}\right) = \alpha 0{,}833 b^2 \cdot$$

Соңғы теңдеуден a_2 параметрін былай анықтаймыз:

$$a_2 = \frac{0{,}416\varepsilon\alpha\, b/h}{0{,}213 + 0{,}648 b^2/h^2 + 0{,}026 h^2/b^2}. \tag{9.102}$$

Үйкелістің әсерін сипаттайтын α коэффициентінің мәнін, тәжірибелік мәліметтің негізінде И.Я. Тарновский мынадай эмпиризмдік формуламен анықтауды ұсынады:

$$\alpha = f + \frac{b}{8h}(1 - f)\sqrt{f}\,, \tag{9.103}$$

мұндағы f – үйкеліс коэффициенті.

Сөйтіп жолақтың өлшемін ($2b$, $2h$), жаншуды ε және үйкеліс коэффициентін f біліп a_1 және a_2 параметрлерінің мәнін анықтауға болады. Алынған параметрлердің мәнін (9.89) – (9.91) теңдеулеріне қойып жолақ қимасының кез келген нүктесінде орын ауыстыру мен деформацияны анықтаймыз.

Дайындаманың бүйірлік бетінің пішінін (бөшке тәрізділікті) анықтау үшін деформациядан кейін мынаны анықтаймыз:

жанасу бетіндегі жолақ енінің жартысын (яғни $x_3 = h$ және $x_1 = b$ болған кездегі)

$$b_k = b + u_{1(x_3=h, x_1=b)} = b\left(1 + \varepsilon - \frac{2}{3}a^2\right);$$

жолақ биіктігінің ортасындағы енді (яғни $x_3 = 0$ және $x_1 = b$ болған кездегі)

$$b_c = b + u_{1(x_3=0, x_1=b)} = b\left(1 + \varepsilon + \frac{2}{3}a^2\right).$$

Тепе-теңдік теңдеуін, кернеу мен деформация арасындағы байланыс теңдеуін және шекаралық шарттарды қолданып дененің әрбір нүктесінде кернеулерді анықтауға болады.

Еннің жартысына және ұзындық бірлігіне сәйкес келетін шөктірудің толық күшін (9.84) теңдеуінен былай анықтаймыз:

$$P = \frac{2}{\Delta h}\left[k\int_0^b\int_0^h \Gamma dx_1 dx_3 + \alpha k\int_0^b u_{1(x_3=h)}dx_1\right]. \qquad (9.104)$$

(9.104) формуласындағы деформацияның жұмысын білдіретін бірінші интегралды (9.99) теңдеуді ескеріп мына түрде жазайық:

$$A_Д = \frac{k}{2\varepsilon}\int_0^b\int_0^h \Gamma^2 dx_1 dx_3 .$$

Жоғарғы формулаға (9.98) теңдеуінен Γ^2 мәнін қойып, одан кейін интегралдасақ мынаны аламыз:

$$A_Д = 2k\varepsilon bh\left[1 + \left(\frac{a_2}{\varepsilon}\right)^2\left(0{,}213 + 0{,}648\frac{b^2}{h^2} + 0{,}026\frac{h^2}{b^2}\right)\right]. \qquad (9.105)$$

(9.104) формуласындағы үйкеліс жұмысы күшін білдіретін екінші интегралға (9.94) теңдеуінен $u_{1(x_3=h)}$ мәнін қойып мынаны аламыз:

$$A_{TP} = \alpha k\int_0^b\left(\varepsilon x_1 - 2a_2 x_1 + a_2\frac{2x_1^3}{3b^2}\right)dx.$$

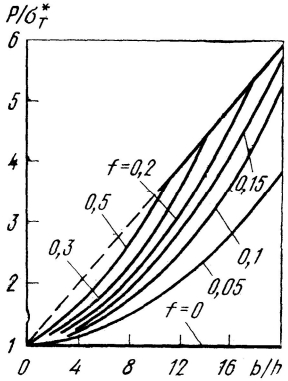
Интегралдағаннан кейін мынаны табамыз:

$$A_{TP} = \alpha k\varepsilon b^2\left(0{,}5 - 0{,}833\,a_2/\varepsilon\right). \qquad (9.106)$$

(9.104) теңдеуіне (9.105) формуласынан $A_Д$ мәнін және (9.106) формуласынан $A_{ТР}$ мәнін қойып, жолақтың бірлік ұзындығына толық күштің мәнін аламыз. Алынған толық күшті b енінің жартысына бөліп және k-ны $\sigma_s^*/2$ алмастырып меншікті қысымның мәнін былай табамыз:

$$p=\sigma_s^*\left[1+\left(\frac{a_2}{\varepsilon}\right)^2\left(0{,}213+0{,}648\frac{b^2}{h^2}+0{,}026\frac{h^2}{b^2}\right)+\left(\frac{\alpha b}{h}\right)\left(0{,}250-0{,}416\frac{a_2}{\varepsilon}\right)\right]. \qquad (9.107)$$

Әр түрлі үйкеліс коэффициенті болған кезде, меншікті қысым мен деформация кедергісі қатынасының қима пішінен (b/h қатынасынан) тәуелділігі 9.12-суретте көрсетілген. Жуықты тепе-теңдік теңдеуімен илемділік теңдеуін біріктіріп шешу әдістемесі бойынша есептеу және вариациялық әдістеме бойынша есептеу мәндері бойынша $f \geq 0{,}2$ және $b/h \leq 12$ болған кезде жақын екендігі, осы суретті 9.7-суретпен салыстырып көруге болады.



9.12-сурет. $\frac{p}{\sigma_T^*}\left(\frac{p}{\sigma_s^*}\right)=\varphi\left(\frac{b}{h},f\right)$ функциясының графигі (И.Я. Тарновский бойынша)

9.4. Илемділік деформацияға металдардың кедергі әдістемесі

Г. А. Смирнов-Аляев және оның оқушыларының еңбектерінде түпкі пішін өзгертуге есептерді шешу әдістемесі қолданылды.

Осы әдістеме монотонды немесе монотондыға жақын деформациялар болған кезде, үлкен (түпкі) илемді

деформациялар үшін күшті және пішін өзгертуді анықтауға мүмкіндік береді.

Монотонды деформация деп мынадай екі шарт сақталатын деформацияны айтады:

1. Осы сатыда ең тез созылуға (қысқартуға) ұшырайтын қаралатын бөлшектің материалды талшығы, бұрын болып өткен барлық сатыларды тез созылатын (қысқаратын) болуы қажет;

2. Кернеу тензорының бағыттаушысы $\nu_\sigma = \dfrac{\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_2)/2}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2}$ деформация тензорының бағыттаушысына $\nu_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2}$ тең болуы қажет. Осы кезде дәл (логарифмдік) деформацияны қолданады, өйткені түпкі деформация қаралады. Осы себептен мынадай теңдікті жазған дұрыс:

$$\frac{\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_2)/2}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2} = \frac{\bar{\varepsilon}_2 - (\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_3)/2}{(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3)/2}$$

немесе

$$\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_2}{(\sigma_1 - \sigma_3)} = \frac{2\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3}{(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3)}. \qquad (9.108)$$

Деформация монотонды болғанда кернеудің басты осьтері деформацияның басты осьтерімен беттеседі. Сондықтан кернеулермен дәл деформациялар арасындағы қатынасты, кішкентай деформациялар болған кезде қабылданған қатынасқа ұқсас етіп қабылдайды, яғни

$$\frac{\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\bar{\varepsilon}_3 - \bar{\varepsilon}_1}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1}{2G'} = \rho \cdot \qquad (9.109)$$

Соңғы жазылған теңдеудің негізінде мынаны жазуға болады:

$$\rho = 1/2\,G' = 3/2\,E' \cdot$$

Кішкентай деформацияларға мынадай қатынас дұрыс екені белгілі: $E' = \sigma_i / \Gamma$, ал монотондылықтың шарты орындалатын болса, онда үлкен деформациялар үшін мынаны жазуға болады: $E' = \sigma_i / \bar{\Gamma}$. Демек кернеулер мен дәл деформациялар арасындағы қатынас мынаған тең: $\rho = 3\bar{\Gamma} / 2\sigma_i$ немесе

$$\bar{\Gamma} = 2\rho\sigma_i / 3 \cdot \qquad (9.110)$$

Кернеу мен деформация қарқындылықтары арасындағы мынадай байланыс:

$$\sigma_i = f\left(\overline{\Gamma}\right) \qquad (9.111)$$

кернеулі күй түрінен (сұлбасынан) тәуелді емес. Сондықтан осы байланысты тәжірибемен, мысалы, созу тәжірибесімен анықтауға болады.

Тәжірибеден немесе геометриялық жайлардан $\overline{\varepsilon}_1$, $\overline{\varepsilon}_2$, $\overline{\varepsilon}_3$ дәл деформацияларын анықтайды, содан кейін деформация қарқындылығын $\overline{\Gamma}$ және кернеу қарқындылығын σ_i есептейді, осыдан соң (9.110) теңдеуі бойынша мынаны табады: $\rho = 1/2G'$.

Дәл деформациялар бойынша бағыттаушы тензорларды ν_σ және $\nu_{\overline{\varepsilon}}$ анықтайды, ал Лоде коэффициентін β мына формуламен есептейді: $2/\sqrt{3+\nu_\sigma^2} = \beta$.

Кернеулерді табу үшін бізде мынадай екі теңдеу бар:

кернеу тензорының мәні $\nu_\sigma = \dfrac{\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_2)/2}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2}$;

илемділік теңдеуі: $\sigma_1 - \sigma_3 = \beta\sigma_S$.

Кейбір жеке жағдайларда жоғарыдағы теңдеулерге қосымша теңдеулер қосады. Сөйтіп, жазық кернеу күйі жағдайында (мысалы, деформацияланып жатқан дененің күштен бос бетінде) кернеулердің біреуі нөлге тең болуын, ал жазық деформация күйі болған кезде мөлшері бойынша орташа кернеу шеткі кернеулердің жартылай қосындысына тең екендігін пайдаланады.

Жалпы жағдайда кернеулерді табу үшін жоғарыда көрсетілген екі формулаға тепе-теңдік шартын қосу қажет.

Бақылау сұрақтары.

1. Қандай функциялар экстремалды және қандай функциялар функционалды деп аталады ?
2. Функцияның вариациясында қандай физикалық негіз бар ?
3. Вариациялық есептерді шешу үшін қолданылатын Ритц әдістемесінде қандай мағына бар ?
4. Ең кішкентай жұмыс принципін қалай іске асырады?

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. *Гун Г.Я.* Теоретические основы обработки металлов давлением (Теория пластичности). Учебник для вузов. – М.: Металлургия, 1980. 456 с.

2. *Кучеряев Б.В., Федоров А.А.* Основные принципы теории пластичности. Учеб. пособие для вузов. – М.: Московский физико-технический институт, 1977. 80 с.

3. *Полухин П.И., Воронцов В.К., Кудрин А.Б., Чиченов Н.А.* Деформации и напряжения при обработке металлов давлением / – М.: Металлургия, 1974, 336 с.

4. *Воронцов В.К., Полухин П.И., Белеветин В.А., БринзаВ.В.* Экспериментальные методы механики деформируемых твердых тел (технологические задачи обработки давлением).– М.: Металлургия, 1990, 480 с.

5. *Колмогоров В.Л.* Механика обработки металлов давлением. Учебник для вузов. – М.: Металлургия, 1986, 688 с.

6. *Третьяков А.В., Зюзин В.И.* Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением. Справочник 2-е изд. пораб. и доп. – М.: Металлургия, 1973. - 224 с.

7. *Зюзин В.И., Бровман М.Я., Мельников А.Ф.* Сопротивление деформации сталей при горячей прокатке. – М.: Металлургия, 1964. 270 с.

8. *Клименко П.Л.* Расчет энергосиловых параметров прокатки с применением ЭВМ. Учеб. пособие. – Днепропетровск: ДМетИ, 1979. 79 с.

9. *Ханзель А., Шпитель Т.* Расчет энергосиловых параметров в процессе обработки давлением. Справочник. – М.: Металлургия, 1982, 360 с.

10. *Сторожев М.В., Попов Е.А.* Теория обработки металлов давлением. Учебник для вузов. Изд. 4-е перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1977, 423 с.

11. *Смирнов-Аляев Г.А.* Сопротивление материалов пластическим деформациям. – М.: Машгиз, 1961, 463 с.

12. *В.Л. Комогоров, А.А. Богатов, Б.А. Мигачев* и *др.* /Пластичность и разрушение – М.: Металлургия, 1977, 336 с.

13. *Машеков С.А.* Автореф. доктор. дис. Создание, исследование и внедрение новых технологий ковки поковок из титановых сплавов с повышенными механическими свойствами - Екатеринбург, 1998, 556 с.

14. *Аркулис Г.Э., Дорогобид В.Г.* Теория пластичности. Учеб. пособие для вузов. – М.: Металлургия, 1987, 352 с.

15. *Громов Н. П.* Теория обработки металлов давлением. Учебник для вузов. – М.: Металлургия, 1978, 360 с.

16. *Богатов А.А.* Особенности реологического поведения и разрушения металла при монотонной и знакопеременной деформации. Сб. Пластическая деформация сталей и сплавов. М.: МИСиС, 1996.

17. *Богатов А.А., Мижирицкий О.И., Смирнов С.В.* Ресурс пластичности металлов при обработке давлением. – М.: Металлургия, 1984, 144 с.

18. *Полухин П.И., Клименко В.М., Полухин В.П.* и *др.* /Прокатка толстых листов – М.: Металлургия, 1984, 288 с.

19. *Бровман М.Я.* Применение теории пластичности в прокатке. – М.: Металлургия, 1965, 247 с.

20. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972, 418 с.

21. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. – М.: Наука, 1972, 330 с.

22. *Шляков А.В.* Автореф. канд. дис. Исследование температурных полей и темрмоупрочняющих напряжений при нагреве и прокатке прямоугольных слитков. М.: МИСиС, 1973.

23. *Найзабеков А.Б., Машеков С.А., Дылюк А.Г.* Механика сплошных сред. – Алматы: Издание РИК по учебной и методической литературе, 1998, 260 с.

МАЗМҰНЫ

	КІРІСПЕ ……..	3
1.	КЕРНЕУ. ДЕФОРМАЦИЯ. АҒЫС. ҚИРАУ…….	6
1.1.	Декарттық координаттағы тензорлар……	9
1.2.	Векторлар…….....	10
1.3.	Матрицалар…….	24
1.4.	Тензорлар…….....	31
1.5.	Тензорлық мөлшерлерді зерттеу тәсілдері.....	67
2.	КЕРНЕУ ЖӘНЕ КЕРНЕУ КҮЙІ	76
2.1.	Нүктедегі кернеу күйі.....	76
2.2.	Кернеу тензоры	87
2.3.	Мора кернеуінің диаграммасы.....	103
2.4.	Көлемдік кернеу күйіне арналған тепе-теңдік шарттары.....	114
2.5.	Симметриялық осьті кернеу күйі.....	117
3.	ТҰТАС ОРТАНЫҢ ДЕФОРМАЦИЯСЫ.....	123
3.1.	Лагранж және эйлер айнымалы шамалары.....	123
3.2.	Түпкі деформацияның тензоры.....	128
3.3.	Кішкене деформацияның тензоры.....	148
4.	ТҰТАС ОРТАНЫҢ АҒУЫ.....	174
4.1.	Жылдамдық өрісі.....	174
4.2.	Деформация жылдамдығы тензоры. Ток функциялары.....	186
5.	ДЕФОРМАЦИЯЛАНАТЫН ОРТА КҮЙІНІҢ ТЕҢДЕУІ. ФИЗИКАЛЫҚ-МЕХАНИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ МОДЕЛЬДЕУ.....	207
5.1.	Изотропты материалдар үшін жалпы физикалық теңдеулерді тұжырымдау.....	211
5.2.	Термодинамиканың бірінші заңы. Жылу өткізгіштіктің дифференциалдық теңдеуі.....	215
5.3.	Реологиялық модельдер.....	222
5.4.	Металдар мен қорытпалардың илемділігі.....	234
5.5.	Илемділік диаграммасын анықтаудың тәжірибелік әдістемесі.....	240

5.6. Илемділік шарты 243
6. ИЛЕМДІ ДЕФОРМАЦИЯНЫҢ ФИЗИКАЛЫҚ НЕГІЗІ..... 251
6.1. Металдың кристалдық құрылымының ақаулары. Нүктелік ақаулар..... 251
6.2. Металдың кристалдық құрылымының ақаулары. Сызықтық, беттік және көлемдік ақаулар 257
6.3. Металдардың макро- және микроқұрылысы 273
6.4. Атомдық жазықтық пен бағытты кристаллографиялық белгілеу..... 276
6.5. Металдың серпімді және илемді деформациясы..... 282
6.6. Илемді деформация кезінде поликристалды металл құрылымының өзгеруі..... 304
6.7. Деформацияланған металдың құрылымы мен қасиетіне қыздырудың әсері. Қайтару және полигонизация. Бірінші, екінші және жинау рекристаллизациялары 307
6.8. Илемді деформацияның механизмі. Сырғумен деформациялау..... 319
6.9. Монокристалда сырғу жүрген кездегі келтірілген жанама кернеулер. Сырғу кезіндегі ығысу деформациясы. Кернеу – деформация қисық сызығы..... 325
7. КЕРНЕУ-ДЕФОРМАЦИЯ КҮЙЛЕРІНІҢ ЖЕКЕ СҰЛБАЛАРЫ..... 333
8. СЫРҒУ СЫЗЫҒЫ ӘДІСІ..... 352
8.1. Сырғу туралы негізгі түсініктер..... 352
8.2. Сырғу сызықтарының қасиеттері..... 359
8.3. Сипаттамалар..... 364
8.4. Сырғу сызығы өрістерінің түрлері 367
8.5. Сырғу сызығының өрісін салу..... 369
8.6. Қатаң илемді сұлба..... 385
8.7. Сырғу сызықтары өрістерінің жылдамдық өрістерімен байланысы..... 388
8.8. Кернеу мен жылдамдықтың үзілуі..... 390
8.9. Жылдамдық годографын салу..... 393

8.10. Жоғары бағалау әдістемесі туралы түсінік..... 397
9. МЕТАЛДАРДЫ ҚЫСЫММЕН ӨҢДЕУДІҢ ЕСЕПТЕРІН ШЫҒАРУДЫҢ ӘДІСТЕМЕЛЕРІ..... 402
9.1. Тепе-теңдік дифференциалдық теңдеуін илемділік теңдеуімен бірлестіре шешу..... 402
9.1.1. Жуықты тепе-теңдік теңдеу және илемділік теңдеуін шешу әдістемесі..... 406
9.2. Жұмыс әдістемесі..... 430
9.3. Вариация әдістемесі..... 435
9.4. Илемділік деформацияға металдардың кедергі әдістемесі..... 447
Әдебиеттер тізімі..... 450

Оқулық басылым

Серік Әкімұлы Мәшеков

МЕТАЛДАРДЫ ҚЫСЫММЕН ӨҢДЕУ ТЕОРИЯСЫ

РБ бастығы	*З.А. Ғұбайдулина*
Редакторы	*А.И. Бейсебаева*
Компьютерде беттеген	*А.Н. Оразалиева*

Басуға қойылды 23. 06. 2011 ж.

Таралымы 500 дана. Пішімі 60×84 1/ 16. № 1 баспаханалық қағаз.
Көлемі 28,4 есепті-баспа табақ. 26,4 шартты б.т.
Тапсырыс № . Бағасы келісімді.

Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университетінің басылымы,
Ғылыми-техникалық баспа орталығы.
Алматы, Ладыгин 32

ISBN 978-601-228-280-1

