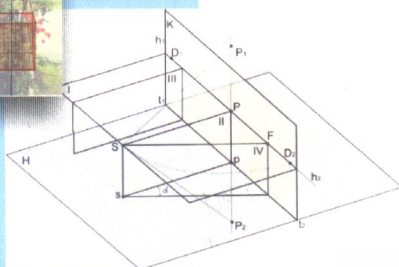
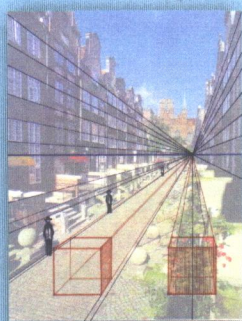




Ж.М. Есмұхан

СЫЗЫҚТЫҚ ПЕРСПЕКТИВАҒА КІРІСПЕ

ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНУЮ ПЕРСПЕКТИВУ



**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ**

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН**

**Қ.И. СӘТБАЕВ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ
ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ**

**КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени К.И. САТПАЕВА**

Ж.М. Есмұхан

СЫЗЫҚТЫҚ ПЕРСПЕКТИВАҒА КІРІСПЕ

ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНУЮ ПЕРСПЕКТИВУ

Университеттің Ғылыми-әдістемелік кеңесі
оқу құралы ретінде ұсынған

Рекомендовано Научно-методическим советом
Университета в качестве учебного пособия

Алматы 2011

ЖОК/УДК 514 (075.8)

ББК 22.143 я73

Е 83

Е83 Есмұхан Ж.М. Сызықтық перспективаға кіріспе: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2011. – 92 б. Сурет 69. Әдебиеттер тізімі – 5 атау.

Е83 Есмұхан Ж.М. Введение в линейную перспективу: Учеб. пособие. – Алматы: КазНТУ, 2011. – 98 с. Ил. 69. Библиогр.: 3 назв.
ISBN 978-601-228-272-6

Өзіндіксіз элементтер туралы түсінік беріліп, центрлік проекциялаудың инварианты болатын күрделі және гажайып қатынастар баяндалған. Толық төртбұрыш теоремасы дәлелденген. Полярлық сәйкестік пен жазықтықтың абсолюті анықталған. Сызықтық перспективада нүктелер, түзулер және жазықтықтар қалай кескінделетіні көрсетіліп, олардың перспективаларына талдаулар жасалған. Перспективада негізгі позициялық және метрикалық есептер иешілген. Өзара перпендикуляр түзу мен жазықтықтың перспективасы туралы теорема тұжырымдалып, дәлелденген.

Оқу құралы сызба геометрия оқытушылары мен магистранттарына, құрылыс және сәулет мамандықтарында оқитын студенттерге арналған.

Рассмотрены несобственные элементы, сложное отношение, которое является основным инвариантом центральной проекции, гармоническая четверка. Приведена теорема о полном четырехугольнике. Определено полярное соответствие и абсолют плоскости. Исследованы свойства перспектив точки, прямой и плоскости. Доказана теорема о перпендикулярности прямой и плоскости в перспективе. Решены основные позиционные и метрические задачи.

Учебное пособие предназначено для магистрантов и преподавателей начертательной геометрии, а также студентов строительной и архитектурной специальностей.

ЖОК/УДК 514 (075.8)

ББК 22.143 я73

Пікір жазғандар/Рецензенты:

*И.М. Азимов, зав. каф. «Архитектура и дизайн» КазНТУ
им. К.И. Сатпаева, д-р архитектуры, проф.*

*У.Т. Карымсаков, канд. техн. наук, каф. «Начертательная
геометрия и графика» КазНТУ им. К.И. Сатпаева
Ы. Наби, д-р педаг. наук, проф. КазНАУ*

ҚР Білім және ғылым министрлігінің 2011 жылғы басылым жоспары бойынша басылды.

Печатается по плану издания Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2011 г.

ISBN 978-601-228-272-6

© Ж.М. Есмұқан, 2011

© ҚазҰТУ, 2011

АЛҒЫ СӨЗ

Сызықтық перспектива – сызба геометрияның құрылыс, әсіресе сәулет мамандықтары үшін аса қажет бөлімі. Онда кескіндерді центрлік проекциялау әдісімен салады. Перспективаға арналған оқулықтар мен оқу құралдарында центрлік проекциялаудың негізгі қасиеттеріне көңіл бөлінбей келеді. Өзіндіксіз нүктелер мен түзулер қарастырылмайды. Сондықтан параллель түзулердің кескіндері неліктен қиылысатынын түсіну қиын. Параллель проекциялау кезінде үш нүктенің жай қатынасы сақталатыны туралы барлық әдістемелік оқу құралдарында жазылған, ал төрт нүктенің күрделі қатынасының центрлік проекциялау кезінде сақталатынын білетіндер аз. Күрделі қатынасты пайдаланбай центрлік проекцияда позициялық есептерді шешу қиын, ал қағаз бетінен тысқары орналасқан нүкте арқылы түзу жүргізу мүмкін болмай қалады. Күрделі қатынастың дербес түрі ғажайып төрттік – сурет, сәулет өнерлерінің маңызды тетігі екені белгілі. Әлемге танымал көркем суреттер мен тамаша ғимараттардың авторлары ғажайып төрттік, алтын қима сияқты пропорцияларды пайдаланғандары анықталды. Қазіргі техникалық эстетика мен дизайнның алгоритмдері геометрияның осындай құдіретті нәтижелері мен теоремаларына негізделген.

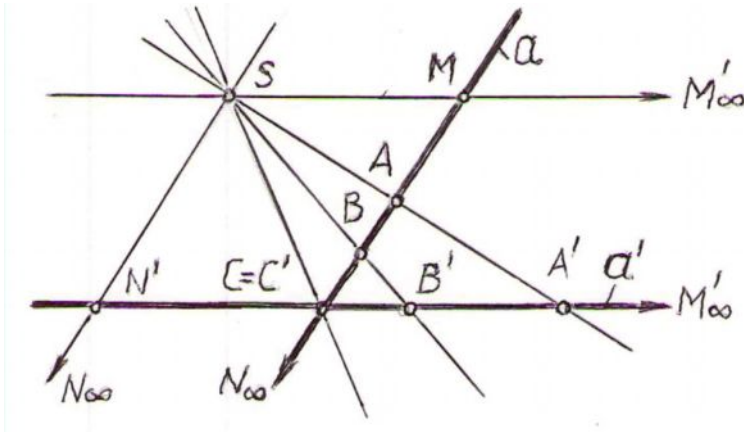
Метрикалық есептерді шешу үшін картина жазықтығының абсолюті белгілі болуы керек. Сызықтық перспективада жазықтыққа перпендикуляр түзудің центрлік проекциясын салу үшін полярлық сәйкестілік пайдаланылады. Кітапша осы жоғарыда аталған ақтандақтарға арналған.

Алдымен ақырсыз қашықтықта орналасқан нүктелер мен түзулер туралы мәлімет берілген. Параллель түзулер мен жазықтықтар өзіндіксіз нүктелер мен түзулер ұғымын туғызады.

Центрлік проекциялау кезінде күрделі қатынастың сақталатыны дәлелденген. Ғажайып төрттік, толық төртбұрыш қарастырылып, өзара перпендикуляр түзу мен жазықтықтың перспективасы туралы теорема дәлелденген. Сызықтық перспективада негізгі позициялық және метрикалық есептер шығарылған. Шеңбердің перспективасы болатын кониканы Паскаль теоремасын пайдаланып салу жолдары көрсетілген. Горизонталь, вертикаль және көлбеу жазықтықтарда жатқан фигуралардың перспективалары салынған. Төмендетілген табанның перспективасын пайдаланып үйшіктің перспективасы тұрғызылған.

1. ӨЗІНДІКСІЗ ЭЛЕМЕНТТЕР

Перспектива центрлік проекциялау әдісіне негізделген. Бір жазықтықта жатқан S нүктесін, a және a' түзулерін ($S \in a$; $S \in a'$) қарастыралық (1-сурет).



1-сурет

S нүктесін проекциялау центрі деп қарастырып, a түзуін a' түзуіне проекциялайық. $A(\in a)$ нүктесінің a' түзуіндегі проекциясы A' деп SA түзуінің a' түзуімен қиылысу нүктесін айтады: $(SA) \cap a' = A'$. B нүктесінің a' түзуіндегі проекциясын салу үшін оны проекциялау центрі болатын S нүктесімен қосатын түзу жүргізіледі. Осы түзу a' түзуімен B' нүктесінде қиылысады: $(SB) \cap a' = B'$. Берілген екі түзудің қиылысу нүктесі C өзіне-өзі проекцияланады, яғни $C' = C$ болады. Басқаша айтқанда, a түзуінің $A, B, C, \dots$ нүктелеріне a' түзуінің $A', B', C', \dots$ нүктелері, керісінше a' түзуінің $A', B', C', \dots$ нүктелеріне a түзуінің $A, B, C, \dots$ нүктелері сәйкес екен. $M(\in a)$ нүктесінің a' түзуінен қашықтығы S нүктесінен a' түзуіне дейінгі қашықтыққа тең, сондықтан SM түзуі a' түзуіне параллель: $(SM) \parallel a'$. Элементар геометрияда параллель түзулер қиылыспайды, яғни a түзуінің M

нүктесіне сәйкес, a' түзуіне тиісті нүкте (яғни M нүктесінің a' түзуіндегі проекциясы) анықталмайды. Сондай-ақ, $N' \in a'$ нүктесінің де a түзуінен қашықтығы S нүктесінен a түзуіне дейінгі арақашықтыққа тең. Олай болса, a түзуінің N' нүктесіне сәйкес нүктесі де (N' нүктесінің a түзуіндегі проекциясы) анықталмайды. Өйткені $(SN') \parallel a$. Осындай қайшылықтарды жою үшін жоғары геометрияда параллель түзулер ақырсыз қашықтықта жатқан нүктеде қиылысады деп қарастырылады. Ақырсыз қашықтағы нүктені белгілейтін әріптің төменгі жағына ақырсыздық белгісі " ∞ " қойылады. Сонда a түзуінің M нүктесі a' түзуінің M'_∞ нүктесіне проекцияланады: $(SM) \parallel a'$; $(SM) \cap a' = M'_\infty$. Ал a' түзуінің N' нүктесіне a түзуінің N_∞ нүктесі сәйкес болады: $(SN') \parallel a$; $(SN') \cap a = N_\infty$. Сонымен, S нүктесінен a және a' түзулерін біріне-бірін проекциялаудың нәтижесінде олардың арасында өзара бірмәнді сәйкестілік орнатылады, яғни a түзуінің нүктесіне a' түзуінің тек белгілі бір нүктесі және, керісінше a' түзуінің нүктесіне a түзуінің тек белгілі бір нүктесі сәйкес болады.

Жоғары геометрияда параллель жазықтықтарды да ақырсыз қашықтықтағы түзудің бойымен қиылысады деп қарастырады. Жазықтық өзіне параллель түзумен ақырсыз қашықтықта жатқан нүктеде қиылысады. Кеңістіктегі ақырсыз қашықтықтағы нүктелер мен түзулердің жиыны ақырсыз қашықтықтағы жазықтықты анықтайды.

Түзудің ақырсыз қашықтықтағы нүктесі – біреу (жалғыз), жазықтықтың ақырсыз қашықтықтағы түзуі – біреу, кеңістіктің ақырсыз қашықтықтағы жазықтығы да – біреу болады.

Ақырсыз қашықтықтағы элементтерді (нүктелерді, түзулерді, жазықтықты) өзіндіксіз элементтер деп атайды. Сонда ақырсыз қашықтықтағы нүкте деудің орнына өзіндіксіз нүкте, ақырсыз қашықтықтағы түзу деудің орнына өзіндіксіз түзу және ақырсыз қашықтықтағы жазықтық деудің орнына өзіндіксіз жазықтық дейтін боламыз.

Түзудің өзіндіксіз нүктесі біреу болғандықтан a түзуінің A нүктесінен бастап түзудің бойымен оңға қарай қозғалсақ та, немесе солға қарай қозғалсақ та N_∞ нүктесіне келер едік

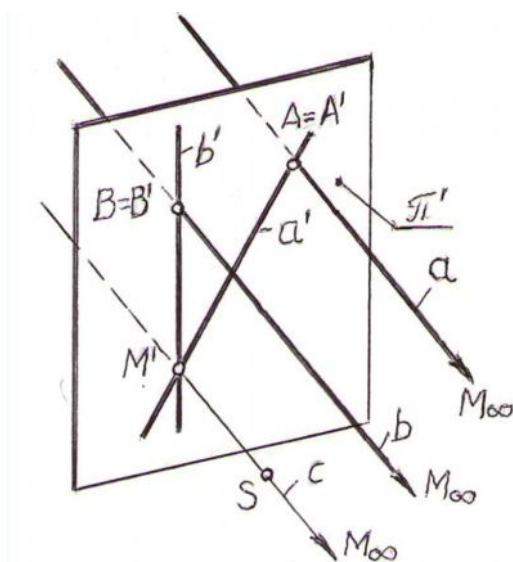
(1-сурет). Сондай-ақ, a' түзуінің A' нүктесінен бастап оның бойымен оңға қарай қозғалсақ та, немесе солға қарай қозғалсақ та M''_{∞} нүктесіне келеміз. Олай болса, түзудің өзін тұйық сызық деп қарастыруымыз керек екен.

Өзіндіксіз элементтерден өзге элементтерді өзіндік элементтер деп атасақ, онда бір жазықтықта жатқан екі түзу әрқашанда қиылысады екен. Ал олардың қиылысу нүктесі өзіндік немесе өзіндіксіз нүкте болуы мүмкін. Өзіндіксіз нүктеде қиылысатын екі түзу өзара параллель болады. Кеңістіктегі екі жазықтық әрқашанда қиылысады. Егер екі жазықтықтың қиылысу сызығы өзіндіксіз түзу болса, онда олар өзара параллель болады. Осы айтылғандардан параллель түзулерді (немесе параллель жазықтықтарды) қиылысатын түзулердің (немесе қиылысатын жазықтықтардың) дербес түрлері деп қарастыруға болатынын көреміз.

2. ЦЕНТРЛІК ПРОЕКЦИЯЛАУ ӘДІСІНІҢ НЕГІЗГІ ИНВАРИАНТЫ

Параллель проекциялау әдісінің инварианттарын*, атап айтқанда параллель түзулердің жазықтықтағы параллель проекциялары параллель болатыны және бір түзудің бойында орналасқан кесінділердің қатынасы сақталатыны белгілі. Центрлік проекциялауда бұл екі қасиет (инвариант) орындалмайды.

Жазықтықтағы қиылысатын екі түзуді кеңістіктегі параллель екі түзудің центрлік проекциялары деп қарастыруға болады. Оған көз жеткізу үшін параллель a және b түзулерін π' жазықтығына S центрінен проекциялайық (2-сурет).

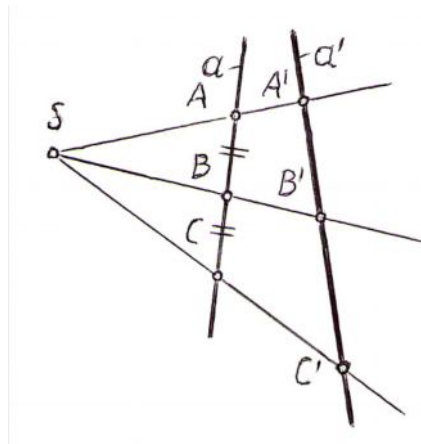


2-сурет

* Инвариант – француздың invariant (қазақша мағынасы – "өзгермейтін") деген сөзінен алынған халықаралық аталым.

Берілген a түзуі π' жазықтығымен A нүктесінде, ал b түзуі – B нүктесінде қиылысын. Бұл екі нүктенің қозғалмайтын нүктелер болатынын, яғни олар проекцияларымен бірігіп кескінделетінін аңғару қиын емес: $A' = A$; $B' = B$. Проекциялау центрі арқылы берілген a және b түзулеріне параллель c түзуін жүргізсек, онда бұл үш түзу өзіндіксіз нүктеде қиылысады. $a \parallel b$; $S \in c \parallel a$ немесе $S \in c \parallel b$; $a \cap b \cap c = M_{\infty}$. Өзіндіксіз M_{∞} нүктесі π' жазықтығына S проекциялау центрінен өзіндік M' нүктесіне проекцияланады: $c \cap \pi' = M'$. A' және M' нүктелерін бастыра жүргізілген a' түзуі a түзуінің, ал B' және M' нүктелерін бастыра жүргізілген b' түзуі b түзуінің центрлік проекциялары болады. $a' \cap b' = M'$. Сонда параллель екі түзу a мен b қиылысатын a' мен b' түзулеріне проекцияланатынын көреміз.

Енді центрлік проекциялау кезінде бір түзудің бойынан алынған кесінділердің қатынасы да сақталмайтынын көрсетелік. Ол үшін a түзуінің бойынан өзара тең AB және BC кесінділерін S нүктесінен $\alpha(S, a)$ жазықтығының a' түзуіне проекциялайық (3-сурет).



3-сурет

Сонда AB кесіндісінің проекциясы $A'B'$ кесіндісінің, BC кесіндісінің проекциясы $B'C'$ кесіндісіне тең болмайтындығы анықталады: $|A'B'| \neq |B'C'|$. Сондықтан:

$$\frac{|AB|}{|BC|} \neq \frac{|A'B'|}{|B'C'|}.$$

Егер A , B , және C нүктелері бір түзуге тиісті болса, онда AC кесіндісінің BC кесіндісіне қатынасын анықтауға болады. Ал оны жай қатынас деп атап, былай белгілейді: (ABC) . Сонда:

$$(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Әдетте A нүктесін кесіндінің басы, B нүктесін кесіндінің аяғы, ал C нүктесін бөлгіш нүкте дейді. Егер C нүктесі AB кесіндісіне тиісті болса, онда жай қатынас теріс таңбалы болады: $(ABC) < 0$. Ал C нүктесі AB кесіндісіне тиісті болмаса, онда жай қатынас оң таңбалы болады: $(ABC) > 0$. Центрлік проекциялауда жай қатынас сақталмайды.

Бір түзудің бойында орналасқан A , B , C және D нүктелерін қарастыралық. Бұл төрт нүкте екі жай қатынасты анықтайды:

$$(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|} \quad \text{және} \quad (ABD) = \frac{|AD|}{|BD|}.$$

Осы екі жай қатынастың қатынасын *күрделі қатынас* деп атап, былайша белгілейді: $(ABCD)$. Сонда:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{|AC|}{|BC|} : \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|BC| \cdot |AD|}.$$

Енді центрлік проекциялау кезінде күрделі қатынастың өзгермейтінін дәлелдейік. Ол үшін a түзуінің A , B , C және D нүктелерін S центрінен $\alpha(S, a)$ жазықтығында жатқан a' түзуіне проекциялайық (4-сурет).

(1) теңдігінің сол жағын (2) теңдігінің сол жағына, ал оң жағын оң жағына бөлсек:

$$\frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AS|}{|BC_1|} \cdot \frac{|AS|}{|BD_1|} = \frac{|AS| \cdot |BD_1|}{|BC_1| \cdot |AS|} = \frac{|BD_1|}{|BC_1|}. \quad (3)$$

$$\Delta SA'C' \sim \Delta C_2B'C' \Rightarrow \frac{|A'C'|}{|B'C'|} = \frac{|A'S|}{|B'C_2|}. \quad (4)$$

$$\Delta SA'D' \sim \Delta D_2B'D' \Rightarrow \frac{|A'D'|}{|B'D'|} = \frac{|A'S|}{|B'D_2|}. \quad (5)$$

(4) теңдігінің сол жағын (5) теңдігінің сол жағына, ал оң жағын оң жағына бөлсек:

$$\frac{|A'C'|}{|B'C'|} \cdot \frac{|A'D'|}{|B'D'|} = \frac{|A'S|}{|B'C_2|} \cdot \frac{|A'S|}{|B'D_2|} = \frac{|B'D_2|}{|B'C_2|}. \quad (6)$$

$$\Delta SBD_1 \sim \Delta SB'D_2 \Rightarrow \frac{|BD_1|}{|B'D_2|} = \frac{|BS|}{|B'S|}. \quad (7)$$

$$\Delta SBC_1 \sim \Delta SB'C_2 \Rightarrow \frac{|BC_1|}{|B'C_2|} = \frac{|BS|}{|B'S|}. \quad (8)$$

(7) және (8) теңдіктердің оң жақтары тең, сондықтан олардың сол жақтары да тең болады:

$$\frac{|BD_1|}{|B'D_2|} = \frac{|BC_1|}{|B'C_2|} \text{ немесе } \frac{|BD_1|}{|BC_1|} = \frac{|B'D_2|}{|B'C_2|}. \quad (9)$$

(3) және (6) теңдіктердің оң жақтары тең. Олай болса, онда олардың сол жақтары да тең болады:

$$\frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|A'C'|}{|B'C'|} \cdot \frac{|A'D'|}{|B'D'|} \text{ немесе } (ABCD) = (A'B'C'D').$$

Дәлелдеу керегіміз де осы еді.

Сонымен, центрлік проекциялау әдісінің негізгі инварианты – күрделі қатынас екен.

3. КҮРДЕЛІ ҚАТЫНАСТЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1. Төрт нүктенің екеуі біріккенде күрделі қатынастың неге тең болатынын есептеу қиын емес. Мысалға A нүктесі алдымен B нүктесімен біріккендегі, одан кейін C нүктесімен біріккендегі және соңында D нүктесімен біріккендегі күрделі қатынастың шамаларын есептеп көрелік:

$$A = B \Rightarrow (AACD) = \frac{(AAC)}{(AAD)} \cdot \frac{|AC|}{|AC|} \cdot \frac{|AD|}{|AD|} = 1;$$

$$A = C \Rightarrow (ABAD) = \frac{(ABA)}{(ABD)} \cdot \frac{|AA|}{|BA|} \cdot \frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|AA| \cdot |BD|}{|BA| \cdot |AD|} = 0;$$

$$A = D \Rightarrow (\cancel{ABCA}) = \frac{(ABC)}{(ABA)} \cdot \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AA|}{|BA|} \cdot \frac{|AC| \cdot |BA|}{|BC| \cdot |AA|} = \infty.$$

2. Күрделі қатынасты құрайтын төрт нүктені екі жұпқа бөледі: A және B нүктелері негізгі жұпты, ал C және D нүктелері бөлгіш жұпты анықтайды. Егер бөлгіш жұп нүктелерінің біреуі AB кесіндісіне тиісті болса, ал екіншісі тиісті болмаса, онда олар негізгі жұпты бөледі. Бөлгіш жұп нүктелерінің екеуі де AB кесіндісіне тиісті болса немесе екеуі де AB кесіндісінен тысқары орналасса, онда бөлгіш жұп негізгі жұпты бөлмейді. Бірінші жағдайда жай қатынастардың таңбалары әртүрлі, сондықтан күрделі қатынас теріс таңбалы болады: $(ABCD) < 0$. Екінші жағдайда жай қатынастардың таңбалары бірдей, сондықтан күрделі қатынас оң таңбалы болады: $(ABCD) > 0$.

3. Жұптардың орындарын ауыстырғаннан күрделі қатынас өзгермейді:

$$(CDAB) = \frac{(CDA)}{(CDB)} = \frac{|CA|}{|DA|} \cdot \frac{|CB|}{|DB|} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|} = (ABCD).$$

Басқаша айтқанда, негізгі жұп ретінде C және D нүктелерін, ал бөлгіш жұп ретінде A және B нүктелерін қабылдауға болады екен.

4. Бір уақытта екі жұп нүктелерінің орындарын ауыстырғаннан күрделі қатынас өзгермейді:

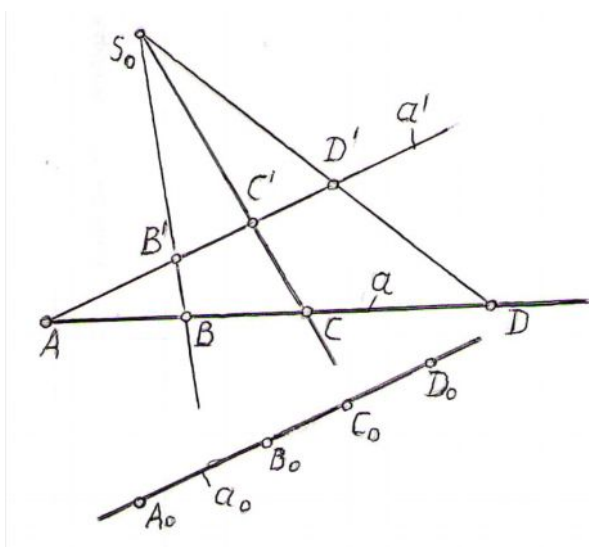
$$(BADC) = \frac{(BAD)}{(BAC)} \cdot \frac{|BD|}{|AD|} \cdot \frac{|BC|}{|AC|} \cdot \frac{|AC| \cdot |BD|}{|BC| \cdot |AD|} (\neq ABCD).$$

5. Тек бір жұп нүктелерінің орындарын ауыстырғанда күрделі қатынастың шамасы керіге өзгереді:

$$(BACD) = \frac{(BAC)}{(BAD)} \cdot \frac{|BC|}{|AC|} \cdot \frac{|BD|}{|AD|} \cdot \frac{|BC| \cdot |AD|}{|AC| \cdot |BD|} = 1 : \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|} = \frac{1}{(ABCD)};$$

$$\text{немесе } (ABDC) = \frac{(ABD)}{(ABC)} = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{1}{(ABCD)}.$$

6. Бір түзудің бойында жатқан A, B, C нүктелері және күрделі қатынасы $(A_0B_0C_0D_0)$ болатын a_0 түзуіне тиісті A_0, B_0, C_0, D_0 нүктелері берілген (5-сурет).



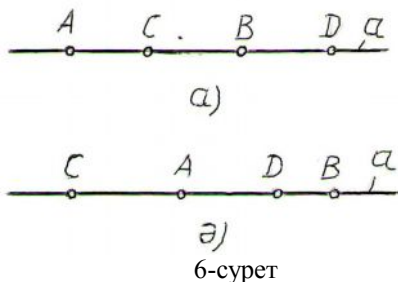
5-сурет

A, B, C нүктелері арқылы өтетін a түзуінің бойынан күрделі қатынасы $(A_0B_0C_0D_0)$ -ға тең болатын, D нүктесін қалай табуға болатынын көрсетелік. Ол үшін A нүктесі арқылы a түзуіне параллель a' түзуін жүргізіп, оған сәйкесінше A_0B_0, B_0C_0, C_0D_0 кесінділеріне тең $AB', B'C', C'D'$ кесінділерін саламыз: $(AB'C'D') = (A_0B_0C_0D_0)$. BB' және CC' түзулері S_0 нүктесінде, ал S_0D' түзуі a түзуімен D нүктесінде қиылысады. Сонда табылған D нүктесі ізделінді нүкте екенін дәлелдеу үшін a' түзуін S_0 центрінен a түзуіне проекциялауға болады. A нүктесі өзіне өзі проекцияланатын, қозғалмайтын нүкте, B нүктесі B' нүктесінің, C нүктесі C' нүктесінің, D нүктесі D' нүктесінің проекциялары. Центрлік проекциялау кезінде күрделі қатынас сақталады, яғни $(ABCD) = (AB'C'D') = (A_0B_0C_0D_0)$ теңдіктері анықталады.

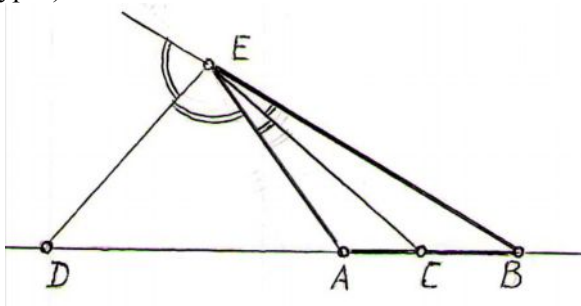
4. ҒАЖАЙЫП ТӨРТТІК

Анықтама. Бір түзудің бойында орналасқан, күрделі қатынасы минус бірге тең төрт нүктені *ғажайып төрттік* дейді.

Егер A, B, C, D нүктелері ғажайып төрттікті құрайтын болса, онда $(ABCD) = -1$. Бұл теңдіктен негізгі жұпты (A және B нүктелерін) бөлгіш жұп (C және D нүктелері) бөлетінін, яғни C нүктесі A және B нүктелерінің аралығында жатса, онда D нүктесі AB кесіндісінен тысқары орналасатынын (6а-сурет) немесе, керісінше D нүктесі A және B нүктелерінің аралығында жатса, онда C нүктесі AB кесіндісінен тысқары орналасатынын (6б-сурет) көреміз.



Ғажайып төрттікті үшбұрыштың биссектрисаларын қарастыру арқылы да шығарып алуға болады. Мысалы, ABE үшбұрышының E төбесіндегі ішкі биссектрисасы EC және сыртқы биссектрисасы ED өзара перпендикуляр болатыны белгілі (7-сурет).



7-сурет

Үшбұрыштың биссектрисасы – бұрышқа қарсы қабырғаны іргелес қабырғаларына пропорционал етіп екі бөлікке бөледі. Сондықтан:

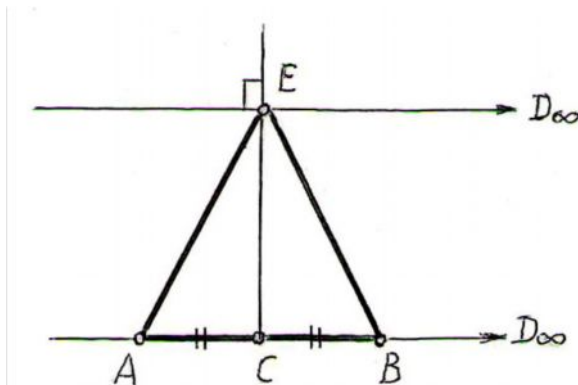
$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AE|}{|EB|}, \quad \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|EB|}.$$

Бұл екі теңдіктің оң жақтары тең. Олай болса, олардың сол жақтары да тең болады:

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|BD|} \Rightarrow -\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} \Rightarrow \frac{|AC| \cdot |BD|}{|BC| \cdot |AD|} = -1 \Rightarrow (ABCD) = -1.$$

Сонымен, үшбұрыштың екі төбесі – үшінші төбесінің ішкі және сыртқы биссектрисаларының осы екі төбені қосатын түзумен қиылысу нүктелері ғажайып төрттікті құрады.

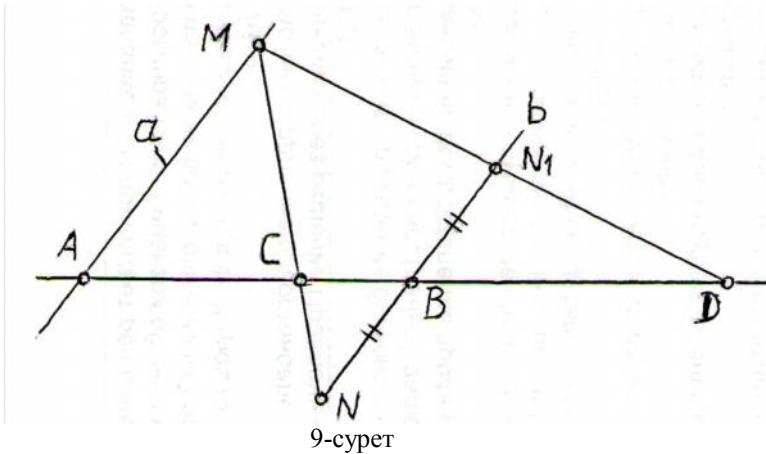
Егер ABE тең бүйірлі үшбұрыш болса ($|AE| = |EB|$), онда E төбесінің ішкі биссектрисасы оның биіктігімен бірігеді де, табанын қақ бөледі: $|AC| = |CB|$. Сыртқы бұрыштың биссектрисасы табанына параллель болады, яғни олар өзіндіксіз D_∞ нүктесінде қиылысады (8-сурет).



8-сурет

Сонда кесіндінің ұштары мен ортасы және осы нүктелер арқылы өтетін түзудің өзіндіксіз нүктесі ғажайып төрттік құрады екен: $(ABCD_{\infty}) = -1$.

Берілген үш нүктемен ғажайып төрттік құратын төртінші нүктені салуды қарастыралық. Бір түзудің бойында жатқан A, B, C нүктелері берілсе, онда осы түзуге тиісті және $(ABCD) = -1$ болатын D нүктесін салу керек. Ол үшін A және B нүктелері арқылы өзара параллель a және b түзулерін жүргіземіз (9-сурет).



C нүктесі арқылы a және b түзулерімен M және N нүктелерінде қиылысатын түзу жүргізіп, b түзуі бойынан B нүктесіне қатысты N нүктесіне симметриялы N_1 нүктесін белгілейміз ($|NB| = |BN_1|$). Сонда MN_1 түзуі AB түзуімен D нүктесінде қиылысады. Табылған D нүктесі A, B, C нүктелерімен бірге ғажайып төрттік құратынын дәлелделік. ACM және BCN үшбұрыштарының ұқсастығынан:

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AM|}{|NB|}. \quad (1)$$

ADM және BDN_1 үшбұрыштарының ұқсастығынан:

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AM|}{|BN_1|}. \quad (2)$$

(1) және (2) теңдіктерінің оң жақтары тең, өйткені $|NB| = |BN_1|$.
Сондықтан олардың сол жақтары да тең болады.

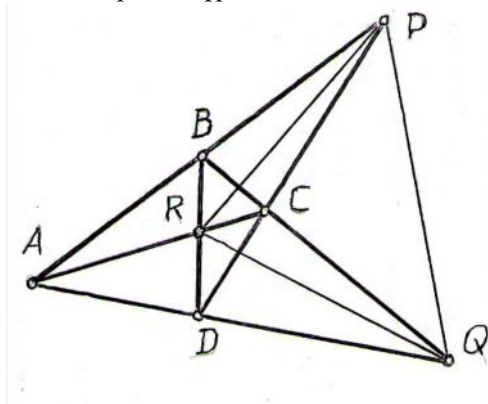
$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|BD|} \Rightarrow -\frac{|AC|}{|BC|} \quad \frac{|AD|}{|BD|} \Rightarrow -(\nexists ABC) \quad (ABD) \Rightarrow (\nexists ABCD) \quad -1$$

Дәлелдеу керегіміз де осы еді.

5. ТОЛЫҚ ТӨРТБҰРЫШ ТУРАЛЫ ТЕОРЕМА

Толық төртбұрыш деп 4 нүктеден және оларды екі-екіден қосатын 6 түзуден тұратын жазық фигураны атайды. 10-суретте көрсетілген толық төртбұрыштың төбелері: A, B, C, D – нүктелері; қабырғалары: $(AB), (AC), (AD), (BC), (BD), (CD)$ – түзулері. Қабырғаларының төбелерінен өзге қиылысу нүктелерін диагональдық нүктелер, ал оларды қосатын түзулерді – толық төртбұрыштың диагональдары деп атайды. Сонда толық төртбұрыштың үш диагональдық нүктесі (P, Q, R) және үш диагональы (PR, PQ, RQ) болады екен.

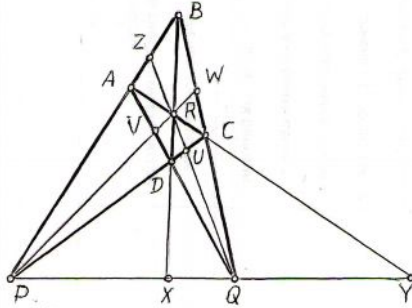
Теорема. Толық төртбұрыштың екі диагональдық нүктесі – оларды қосатын түзумен қалған екі қабырғасының қиылысу нүктелері ғажайып төрттік құрады.



10-сурет

Дәлелдеу. $ABCD$ толық төртбұрышын қарастыралық (11-сурет). Оның диагональдық нүктелері P, Q, R болсын: $P = (AB) \cap (DC)$; $Q = (BC) \cap (AD)$; $R = (AC) \cap (BD)$. Диагональдық P және Q нүктелерін қосатын түзу (BD) қабырғасымен X нүктесінде ал (AC) қабырғасымен Y нүктесінде қиылысады. Диагональдық P және R нүктелерін қосатын түзумен (AD) қабырғасы V нүктесінде, ал (BC) қабырғасы W нүктесінде қиылысады. Диагональдық Q және R нүктелерін қосатын

түзумен (AB) қабырғасы Z нүктесінде, ал (CD) қабырғасы U нүктесінде қиылысады.



11-сурет

Бір түзудің бойында орналасқан P, Q, X, Y нүктелерін A центрінен BD түзуіне проекциялайық. Сонда P нүктесі B нүктесіне, Q нүктесі D нүктесіне, X нүктесі X нүктесіне, Y нүктесі R нүктесіне проекцияланады. Центрілік проекциялауда күрделі қатынас сақталады: $(PQXY) = (BDXR)$. Енді B, D, X, R нүктелерін C центрінен PQ түзуіне проекцияласақ, онда $(BDXR) = (QPXY)$ теңдігін аламыз. Соңғы екі теңдіктен $(PQXY) = (QPXY)$ теңдігі шығады. Тек бір жұп нүктелерінің орындарын ауыстырғанда күрделі қатынастың шамасы керіге өзгереді (күрделі қатынастың 5-қасиеті).

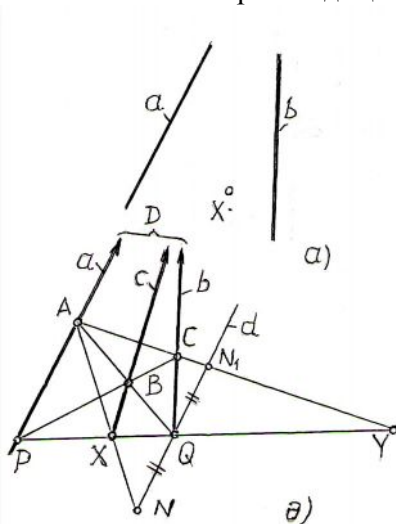
$$(PQXY) = (QPXY) \Rightarrow \mp(PQXY) \cdot \frac{1}{(PQXY)} \Rightarrow \mp(PQXY)^2 = 1 \Rightarrow \mp(PQXY) = \pm 1.$$

Күрделі қатынас $(+1)$ -ге тең болуы үшін P және Q нүктелері бірігулері керек (күрделі қатынастың 1-қасиетіндегі бірінші өрнек), ал P және Q әртүрлі нүктелер. Сондықтан $(PQXY) = -1$. Дәл осылай $(PRVW) = -1$ және $(QRUZ) = -1$ болатынына көз жеткіземіз. Дәлелдеу керегіміз де осы еді.

Мысал. Берілген X нүктесі арқылы қиылысу нүктесі қағаз бетінен тысқары орналасқан a және b түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін c түзуін жүргізу керек (12а-сурет).

Шешуі. Алдымен X нүктесі арқылы a түзуімен A нүктесінде, b түзуімен Q нүктесінде қиылысатын екі түзу жүргізіп аламыз (оларды қалауыңызша орналастыруға болады). Одан кейін Q нүктесі арқылы a түзуіне параллель d түзуін жүргізіп, оның AX түзуімен қиылысу нүктесін N анықтаймыз: $d \cap (AX) = N$. Осы d түзуіне QN кесіндісіне тең QN_1 кесіндісін саламыз. XQ түзуі a түзуімен P нүктесінде, AN_1 түзуімен Y нүктесінде қиылысады. Сонда P, Q, X, Y нүктелері ғажайып төрттік болатыны 9-суретте көрсетілген: $(PQXY) = -1$. AY түзуі b түзуімен C нүктесінде қиылысады. $(AQ) \cap (CP) = B$. Сонда B және X нүктелері арқылы өтетін түзу ізделінді c түзуі болады, өйткені ол түзу a және b түзулерімен D нүктесінде қиылысады (12а-сурет).

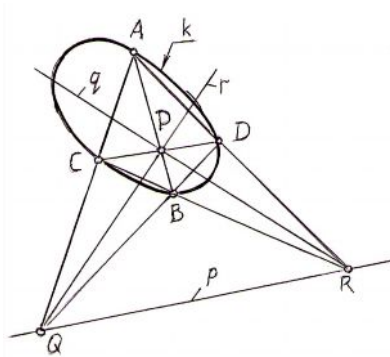
Шынында да, P және Q диагональдық нүктелері болатын $ABCD$ толық төртбұрыш, ал (AC) қабырғасы (PQ) диагоналымен Y нүктесінде қиылысады. Толық төртбұрыш туралы теоремаға сай $ABCD$ толық төртбұрышымыздың BD қабырғасын B және X нүктелері анықтайды. Үш түзу a, b және BX толық төртбұрыштың төбесі болатын D нүктесінде қиылысады.



12-сурет

6. ПОЛЮС ЖӘНЕ ПОЛЯРА. ПОЛЯРЛЫҚ СӘЙКЕСТІЛІК

1. Жазықтықта екінші ретті қисық k және P нүктесі берілсін (13-сурет). P нүктесі арқылы өтетін, k қисығымен A және B нүктелерінде қиылысатын бір қиюшы, одан кейін C және D нүктелерінде қиылысатын екінші қиюшы жүргізелік. Сонда екінші ретті k қисығына іштей сызылған, төбелері A, B, C, D нүктелері болатын толық төртбұрыш $ABCD$ шығады. Оның қарама-қарсы қабырғалары P, Q, R нүктелерінде қиылысады. Q және R нүктелері анықтайтын түзуді p деп белгілейік. Осы p түзуін P нүктесінің **полярасы**, ал P нүктесін p түзуінің **полюсі** дейді.



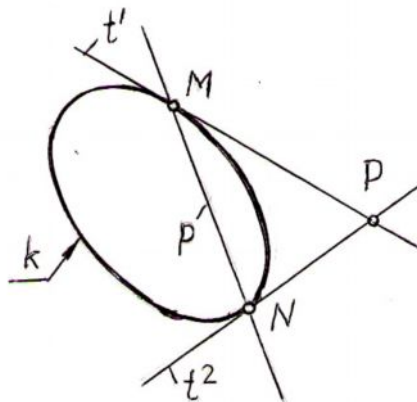
13-сурет

Анықтама. Екінші ретті қисыққа іштей сызылған толық төртбұрыштың диагональдық екі нүктесі арқылы өтетін, ал үшінші диагональдық нүкте полюсі болатын түзуді поляра деп атайды.

Q нүктесін полюс деп қарастырсақ, онда оның полярасы p және R нүктелері анықтайтын q түзуі болады. Сондай-ақ, R нүктесінің полярасы Q және P нүктелері анықтайтын r түзуі болады. Қандайда бір A нүктесінің полярасы a екінші бір B нүктесі арқылы өтетін болса, онда B нүктесінің полярасы болатын b түзуі A нүктесі арқылы өтеді.

Егер полюс k қисығына тиісті болса, онда оның полярасы осы нүкте арқылы өтетін k қисығының жанама болса, онда оның поляра екінші ретті қисыққа жанама болса, онда оның полюсі жанасу нүктесі болады.

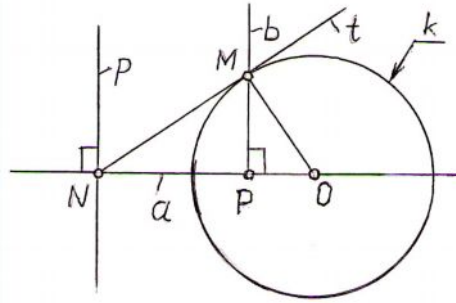
Берілген P нүктесінің k қисығына қатысты полярасын салу үшін осы P нүктесінен коникаға жанама жүргізеді. Ондай жанама екеу: t^1 және t^2 (14-сурет). Бірінші жанама t^1 коникамен M нүктесінде, екінші жанама t^2 – N нүктесінде жанасады. Осы жанасу нүктелерін қосатын p түзуі P нүктесінің полярасы болып табылады. $M \in (k)$ нүктесінің полярасы t^1 түзуі, ал $N \in (k)$ нүктесінің полярасы t^2 түзуі болатынын айта кетелік.



14-сурет

Егер екінші ретті қисық ретінде шеңбер алынған болса, онда поляра полюсті шеңбердің центрімен қосатын түзуге перпендикуляр болады. Сондықтан P нүктесі полюсі болатын түзуді салу үшін P және O (шеңбердің центрі) нүктелері арқылы a түзуін жүргіземіз. P нүктесі арқылы өтетін және a түзуіне перпендикуляр болатын b түзуі k шеңберін M нүктесінде қияды (15-сурет). Шеңбердің M нүктесіндегі жанама a түзуімен N нүктесінде қиылысады: $t \cap a = N$. Сонда P полюсінің полярасы

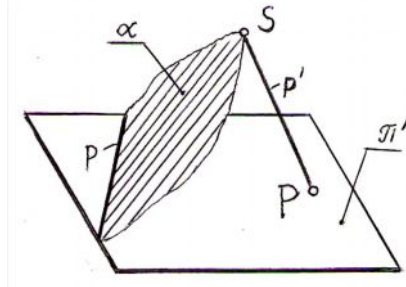
болатын p түзуі N нүктесі арқылы өтіп, a түзуімен тікбұрыш жасайды: $N \in p \perp a$.



15-сурет

2. Егер жазықтықта екінші ретті қисық берілсе, онда полюс деп аталатын әрбір нүктесіне сол жазықтықтың поляра деп аталатын жалғыз түзуі сәйкес болады. Керісінше, жазықтықтың поляра деп аталатын әрбір түзуіне сол жазықтықтың полюс деп аталатын жалғыз нүктесі сәйкес болады. Осындай өзара бірімәнді сәйкестілікті **полярлық сәйкестілік** деп атайды. Полярлық сәйкестілікте нүктеге түзу, ал түзуге нүкте сәйкес болады. Полярлық сәйкестілік инволюция болатынын байқау қиын емес.

Егер жазықтықтағы полярлық сәйкестіліктің нүктелері мен түзулерін S центрінен проекцияласақ, онда түзулер мен жазықтықтардың арасындағы полярлық сәйкестілікті шығарып алуға болады (16-сурет).



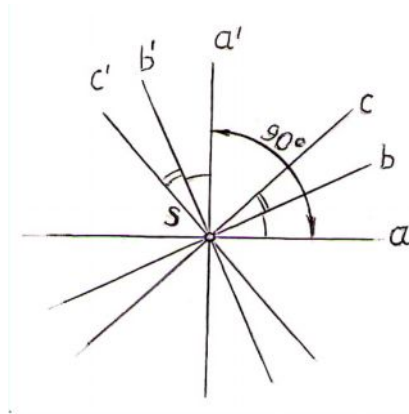
16-сурет

S нүктесі арқылы өтетін проекциялаушы түзулер мен проекциялаушы жазықтықтардың байламын қарастырамыз. Сонда π' жазықтығының нүктесіне осы нүктені S центрімен қосатын S түзулер байламының түзуі, ал түзуіне осы түзу мен S нүктесі анықтайтын S жазықтықтар байламының жазықтығы сәйкес болады. P және S нүктелерін қосатын түзуді p' деп, ал p түзуі мен S нүктесі анықтайтын жазықтықты α деп белгілеміз.

S байламының түзулері мен жазықтықтарының арасындағы полярлық сәйкестілікті былайша орнаталық: S түзулер байламының p' түзуіне S жазықтықтар байламының оған перпендикуляр α жазықтығы сәйкес болсын. Керісінше, S жазықтықтар байламының α жазықтығына S түзулер байламының оған перпендикуляр p' түзуі сәйкес болсын: $p' \perp \alpha$. Осындай байлам түзулері мен жазықтықтарының арасындағы өзара бірімәнді сәйкестілікті **тікбұрышты полярлық сәйкестілік** дейді. Керісінше, тікбұрышты полярлық сәйкестілікті жазықтықпен қиғанда қиюшы жазықтықта жоғарыда қарастырылған нүктелер мен түзулердің полярлық сәйкестілігін шығарып аламыз.

7. ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ АБСОЛЮТІ

Метрикалық есептерді шешуде өзара перпендикуляр түзулерді өзара перпендикуляр түзулерге түрлендіру маңызды орын алады. Сондықтан S түзулер шоғының $a, b, c, \dots$ түзулеріне, оларға перпендикуляр түзулер $a', b', c', \dots$ сәйкес болсын (17-сурет): $a \perp a'; b \perp b'; c \perp c'; \dots$ Осындай сәйкестіліктің қасиеттерін зерттелік.



17-сурет

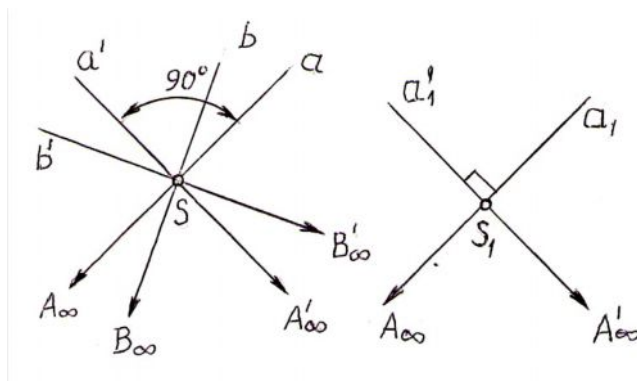
Түзулер шоғының $a, b, c, \dots$ түзулеріне, оларға перпендикуляр $a', b', c', \dots$ түзулері сәйкес болғандықтан түзулердің арасындағы бұрыштардың сақталатынын көреміз:

$$\angle a'b = \angle a'c; \angle b'a = \angle b'c; \dots$$

Егер a түзуіне оған перпендикуляр a' түзуі сәйкес болса, онда a' түзуіне оған перпендикуляр a түзуі сәйкес болады. Қарастырылып отырған сәйкестілік өзара бірімді, яғни инволюция болып табылады. Сондықтан осындай перпендикуляр түзулердің сәйкестілігін **тікбұрышты инволюция** деп атайды.

Енді тікбұрышты инволюцияның, яғни S шоғының өзіндіксіз түзумен қимасын қарастыралық. Сонда a түзуі

өзіндіксіз түзумен өзіндіксіз A_∞ нүктесінде, b түзуі – B_∞ нүктесінде ... қиылысады (18-сурет).



18-сурет

Өзіндіксіз түзде нүктелердің екі қатары пайда болады: $A_\infty, B_\infty, \dots$ нүктелерін бірінші қатар десек, онда $A'_\infty, B'_\infty, \dots$ нүктелері екінші қатарды анықтайды. Бірінші қатардың A_∞ нүктесіне екінші қатардың A'_∞ нүктесі, B_∞ нүктесіне – B'_∞ нүктесі және керісінше, екінші қатардың A'_∞ нүктесіне бірінші қатардың A_∞ нүктесі, B'_∞ нүктесіне B_∞ нүктесі, ... сәйкес болады. Осындай өзіндіксіз түзу нүктелерінің арасындағы сәйкестілікті **абсолюттік инволюция** дейді.

Абсолюттік инволюция S түзулер шоғының тікбұрышты инволюциясының қимасы болады, бірақ ол S нүктесінің орналасуына тәуелді емес. Абсолюттік инволюция тікбұрышты инволюция центрінің орналасуына тәуелді болмайтынына көз жеткізу үшін центрі S_1 нүктесі болатын түзулер шоғын қарастыралық (S_1 шоғы 18-суреттің оң жағында орналасқан). Сонда a_1 түзуі a түзуіне, a'_1 түзуі a' түзуіне параллель болатындықтан, $a_1 \cap a = A_\infty$ және $a'_1 \cap a' = A'_\infty$ теңдіктері шығады. Олай болса, центрі S_1 және S нүктелері болатын тікбұрышты

инволюциялар өзіндіксіз түзуде жалғыз абсолюттік инволюцияны анықтайды.

Анықтама. Өзіндіксіз нүктелері абсолюттік инволюцияда сәйкес нүктелер болатын екі түзу өзара перпендикуляр болады.

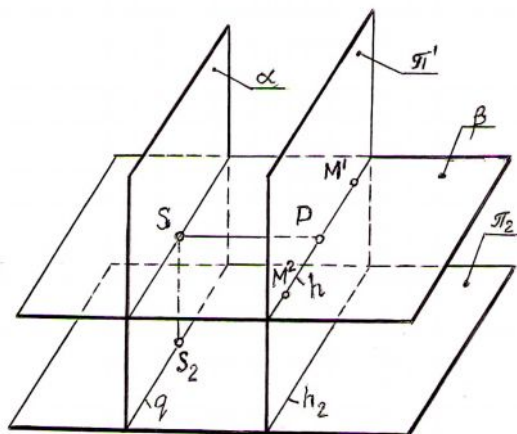
Қандайда бір a_1 түзуінің өзіндіксіз A_∞ нүктесі a'_1 түзуінің өзіндіксіз A'_∞ нүктесіне сәйкес екен делік. Олай болса, A_∞ және A'_∞ нүктелері арқылы тікбұрышты инволюцияның өзара перпендикуляр болатын екі түзуі өтеді. Оларды a және a' деп белгілесек, онда $a_1 \parallel a$ және $a'_1 \parallel a'$; $a \perp a'_1 \Rightarrow a_1 \perp a'$. Керісінше, қандай да болсын өзара перпендикуляр екі түзу ($a_1 \perp a'_1$) өзіндіксіз түзумен абсолюттік инволюцияда сәйкес нүктелер болатын нүктелерде (A_∞ және A'_∞) қиылысады.

Анықтама. Өзіндіксіз түзу мен абсолюттік инволюция жазықтықтың абсолюті деп аталады.

8. СЫЗЫҚТЫҚ ПЕРСПЕКТИВАНЫҢ АППАРАТЫ

Перспектива деп центрлік проекциялаудың нәтижесінде алынған кескінді айтады. Егер центрлік проекция цилиндрлік бетке салынса, онда оны **панорамалық перспектива**, ал сфералық бетке салынса – **күмбездік перспектива** дейді. Біз жазықтыққа салынатын перспективаны ғана қарастырамыз, ал оны **сызықтық перспектива** дейді.

Сызықтық перспективаның аппаратын қарастыралық (19-сурет).



19-сурет

Проекциялар салынатын жазықтықты вертикаль орналастырып, **картина жазықтығы** деп атайды. π' – картина жазықтығы. Проекциялары салынатын затты горизонталь орналасқан жазықтыққа қояды, ал оны **заттық жазықтық** деп атайды. π_2 – заттық жазықтық, ол картина жазықтығымен тікбұрыш жасап қиылысады: $\pi_2 \perp \pi'$. Проекциялау центрі болатын S нүктесін **қарау нүктесі**, ал оның π_2 жазықтығындағы тікбұрышты проекциясын **тұру нүктесі** дейді. $(SS_2) \perp \pi_2$; $(SS_2) \cap \pi_2 = S_0$ – тұру нүктесі. Қарау нүктесі арқылы өтетін және картина жазықтығына параллель

жазықтықты **бейтарап жазықтық** дейді. $S \in \alpha \parallel \pi'$; α – бейтарап жазықтық. Бейтарап жазықтықпен заттық жазықтықтың қиылысу сызығын бейтарап сызық дейді. $\alpha \cap \pi_2 = q$ – бейтарап сызық (түзу). Қарау нүктесі арқылы өтетін және заттық жазықтыққа параллель жазықтықты **көкжиек жазықтығы** деп атайды. $S \in \beta \parallel \pi_2$; β – көкжиек жазықтығы. Көкжиек жазықтығымен картина жазықтығының қиылысу сызығын **көкжиек сызығы** деп атайды. $\beta \cap \pi' = h$; $h \parallel \pi_2$; h – көкжиек сызығы. Басқаша айтқанда, көкжиек сызығы дегеніміз заттық жазықтықтың өзіндіксіз түзуінің S нүктесінен π' жазықтығына түсірілген проекциясы.

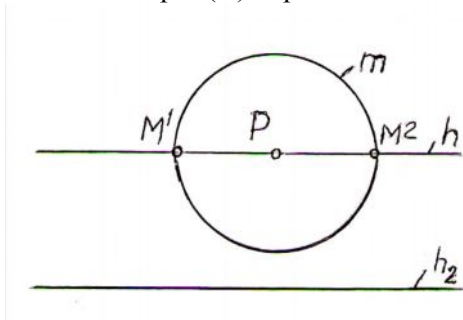
Картина жазықтығына қарау нүктесінен перпендикуляр түсірсек, онда оның табаны көкжиек сызығында жатады, ал оны **картинаның бас нүктесі** деп атайды. $S \in (SP) \perp \pi'$; $(SP) \cap \pi' = P$; $P \in h$; P – картинаның бас нүктесі. Көкжиек сызығына картинаның бас нүктесінен бастап, S нүктесінен π' жазықтығына дейінгі арақашықтықты өлшеп салсақ, масштабтық нүктелер анықталады: $M^1 \in h$; $M^2 \in h$; $|PM^1| = |SP| = |PM^2|$; M^1, M^2 – **масштабтық нүктелер**. Картинаның бас нүктесі картина жазықтығына перпендикуляр түзулердің өзіндіксіз нүктелерінің картина жазықтығындағы центрлік проекциясы, ал масштабтық нүктелер заттық жазықтыққа параллель және картина жазықтығына 45° -қа тең бұрыш жасайтын түзулердің өзіндіксіз нүктелерінің картина жазықтығындағы центрлік проекциясы. Картина және заттық жазықтықтардың қиылысу сызығын **картинаның табаны** деп атайды. $\pi' \cap \pi_2 = h_2$; $h_2 \parallel h$; h_2 – картинаның табаны.

Кеңістіктің π' жазықтығының оң жағындағы бөлігін заттық кеңістік деп атайды. Қарау нүктесі заттық кеңістіктен тысқары орналасқан.

Кеңістіктің α жазықтығының сол жағындағы бөлігін **жорамал кеңістік** деп, ал α және π' жазықтықтарының аралығын **бейтарап кеңістік** деп атайды. Сонымен α және π' жазықтықтары кеңістікті заттық, жорамал және бейтарап деп аталатын үш бөлікке бөледі екен. Әдетте кескінделетін

фигураны заттық кеңістікте орналастырады. Оны заттық жазықтыққа тік бұрыштап проекциялайды. Одан кейін берілген фигураның және оның заттық жазықтықтағы тікбұрышты проекциясының картина жазықтығындағы центрлік проекцияларын тұрғызады.

π' жазықтығын сызба салынатын қағазбен беттескен деп қарастырамыз (20-сурет). Сызбада көкжиек сызығы (h), картинаның табаны (h_2) және керек болған жағдайда картинаның бас нүктесін (P), масштабтық нүктелерді (M^1 , M^2) және масштабтық шеңберді (m) көрсетеді.

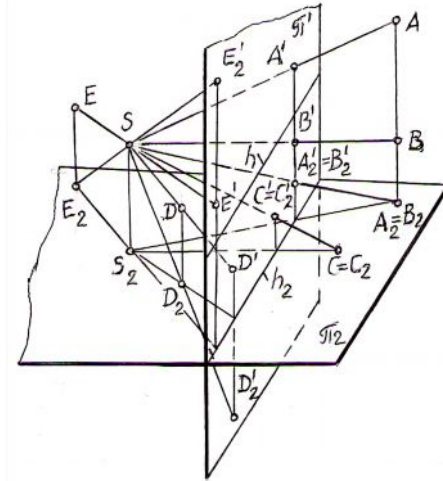


20-сурет

Центрі бас нүктеде орналасқан, масштабтық нүктелер арқылы өтетін және картина жазықтығына тиісті шеңберді **масштабтық шеңбер** деп атайды. Масштабтық шеңбер – картина жазықтығымен 45° -қа тең бұрыш жасап көлбейтіп түзулердің өзіндіксіз нүктелерінің центрлік проекцияларының жиыны болып табылады.

9. НҮКТЕНІҢ ПЕРСПЕКТИВАСЫ

Заттық кеңістікте орналасқан A нүктесінің картина жазықтығындағы кескінін салу үшін осы нүктеден заттық жазықтыққа перпендикуляр түсіреміз. Перпендикулярдың π_2 жазықтығымен қиылысу нүктесін A_2 деп белгілейді және оны A нүктесінің табаны дейді. AS түзуі π' жазықтығымен, A нүктесінің перспективасы деп аталатын A' нүктесінде қиылысады, ал A_2S түзуі – A нүктесі табанының перспективасы деп аталатын A'_2 нүктесінде қиылысады (21-сурет).



21-сурет

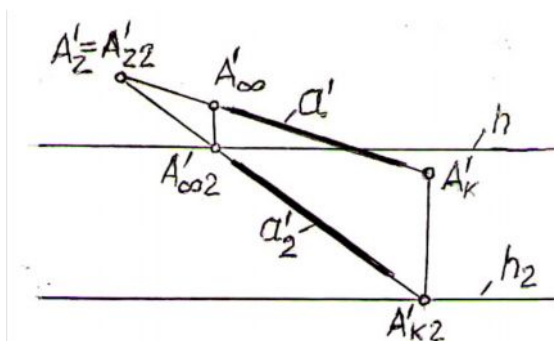
$(A'A'_2) \perp h$, яғни нүктенің перспективасы мен табанының перспективасы көкжиек сызығына перпендикуляр түзудің бойында орналасады екен. A нүктесінен π_2 жазықтығына түсірілген перпендикуляр түзудің бойында жатқан B нүктесінің центрлік проекциясы B' және оның табанының центрлік проекциясы B'_2 анықталған. Көкжиек жазықтығынан жоғары орналасқан нүктенің перспективасы көкжиек сызығынан жоғары, ал төмен орналасқан нүктенің перспективасы – төмен

көкжиек сызығына тиісті болады. $(SA_{\infty 2}) \parallel a_2$; $(SA_{\infty 2}) \cap \pi' = A'_{\infty 2}$. Ал $A'_{\infty 2} \in h$.

Картинада a түзуі өзінің центрлік проекциясы (перспективасы) мен табанының перспективасы a'_2 арқылы берілгенін былайша көрсетеді: $a(a', a'_2)$.

Перспективасы a' және табанының перспективасы a'_2 арқылы берілген a түзуінің іздерін және тоғысу нүктесін салу қиын емес. Түзудің картиналық ізін табу үшін табанының перспективасын картинаның табанымен қиылысқанша созады: $a'_2 \cap h_2 = A'_{k2}$. Табылған A'_{k2} нүктесі арқылы көкжиек сызығына перпендикуляр түзу жүргізіп, оның түзудің перспективасымен қиылысу нүктесін анықтайды: $(A'_{k2} A'_k) \perp h$; $(A'_{k2} A'_k) \cap a' = A'_k$ (24-сурет).

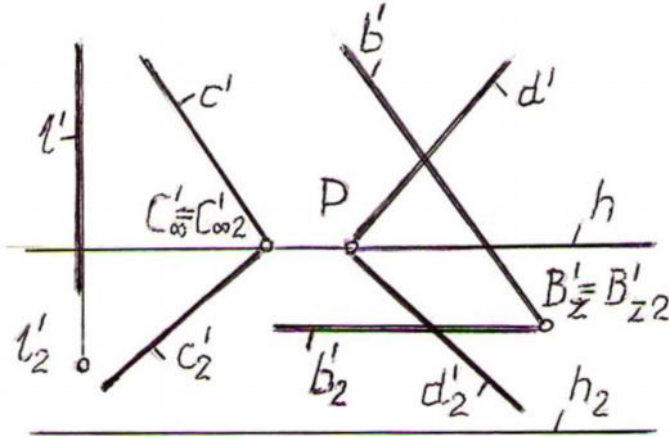
Түзудің заттық ізінің перспективасы оның перспективасы мен табанның перспективасының қиылысу нүктесі болады: $a' \cap a'_2 = A'_z = A'_{z2}$. Тоғысу нүктесі табанының перспективасы көкжиек сызығына тиісті болғандықтан, a'_2 және h түзулерінің қиылысу нүктесі түрінде анықталады: $(A'_{\infty 2} A'_{\infty}) \perp h$; $(A'_{\infty 2} A'_{\infty}) \cap a' = A'_{\infty}$. Сонда A'_{∞} – тоғысу нүктесі, ал $A'_{\infty 2}$ – табанының (тоғысу нүктесінің) перспективасы.



24-сурет

Түзуді оның екі ізі, немесе бір ізі мен тоғысу нүктесі толық анықтайды.

Жеке жағдайда орналасқан түзулердің картинадағы кескіндеріне көңіл аударалық (25-сурет).



25-сурет

Егер түзу картина жазықтығына параллель болса, онда оның картиналық ізі өзіндіксіз нүкте болады. Сондықтан, ондай түзу табанының перспективасы картинаның табанына параллель, ал картиналық ізі мен тоғысу нүктесі өзіндіксіз нүктелер болады. $b'_2 \parallel h_2$, олай болса b түзуі картина жазықтығына параллель орналасқан $b' \cap b'_2 = B'_z = B'_{z2}$. $B_z(B'_z = B'_{z2})$ – b түзуінің заттық ізі.

Заттық жазықтыққа параллель түзудің табаны оның өзіне параллель болады. Сондықтан осындай түзулердің тоғысу нүктесі көкжиек сызығында жатады. Берілген $c(c', c'_2)$ түзуінің тоғысу нүктесі $C'_\infty = C_\infty$ көкжиек сызығына тиісті. Олай болса, онда c түзуі π_2 жазықтығына параллель екен.

Картина жазықтығына перпендикуляр түзу заттық жазықтыққа параллель, сондықтан оның тоғысу нүктесі де көкжиек сызығына тиісті және ол картинаның бас нүктесі болады. Картинада $d' \cap d'_2 = P$ болғандықтан d түзуі π' жазықтығына перпендикуляр екенін көреміз.

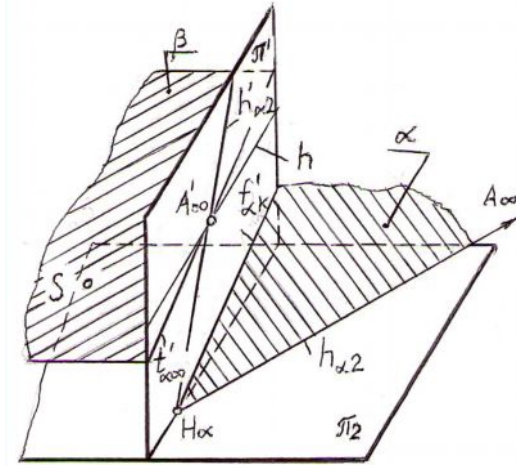
Заттық жазықтыққа перпендикуляр түзудің табаны – нүкте, ал нүктенің перспективасы да нүкте болатыны белгілі. π_2 жазықтығына перпендикуляр түзу мен S нүктесі анықтайтын

проекциялаушы жазықтықта заттық жазықтыққа перпендикуляр болады. π_2 жазықтығына перпендикуляр екі жазықтықтың қиылысу сызығы да заттық жазықтыққа перпендикуляр болады. Берілген $l(l', l'')$ түзуінің перспективасы көкжиек сызығына перпендикуляр, ал табанының перспективасы нүкте екенін көріп отырмыз. Олай болса, онда $l \perp \pi_2$ болады екен.

11. ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ПЕРСПЕКТИВАСЫ

Жазықтықтың картина жазықтығымен қиылысу сызығын **жазықтықтың картиналық ізі** деп атайды. $\alpha \cap \pi' = f_{\alpha k}$; $f_{\alpha k}$ – α жазықтығының картиналық ізі. Картиналық іздің перспективасы оның өзімен бірігеді: $f'_{\alpha k} = f_{\alpha k}$. Жазықтықтың заттық жазықтықпен қиылысу сызығын **жазықтықтың заттық ізі** деп атайды.

$\alpha \cap \pi_2 = h_{\alpha 2}$; $h_{\alpha 2}$ – α жазықтығының заттық ізі. Жазықтықтың картиналық және заттық іздері картинаның табанында қиылысады: $f_{\alpha k} \cap h_{\alpha 2} = H_{\alpha} \in h_2$. Заттық іздің өзіндіксіз нүктесін A_{∞} деп белгілесек, онда оның проекциясы көкжиек сызығында жатады: $A'_{\infty} \in h$ (26-сурет). Заттық іздің центрлік проекциясы $h'_{\alpha 2}$ оның картина табанымен қиылысу нүктесі H_{α} және A'_{∞} нүктелері арқылы өтеді.

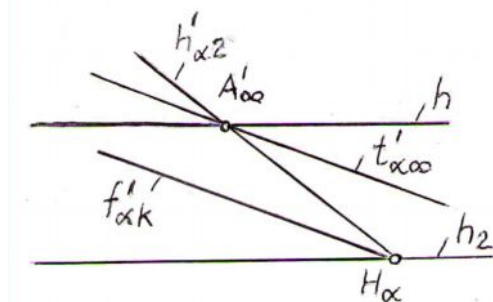


26-сурет

Жазықтықтың өзіндіксіз түзуінің перспективасын **тоғысу сызығы** дейді, өйткені бұл сызық параллель жазықтықтарға ортақ. Тоғысу сызығы A'_{∞} нүктесі арқылы өтеді және картиналық ізге параллель болады: $A'_{\infty} \in t'_{\alpha \infty} \parallel f'_{\alpha k}$. $t'_{\alpha \infty}$ – α жазықтығының және оған параллель жазықтықтардың тоғысу сызығы.

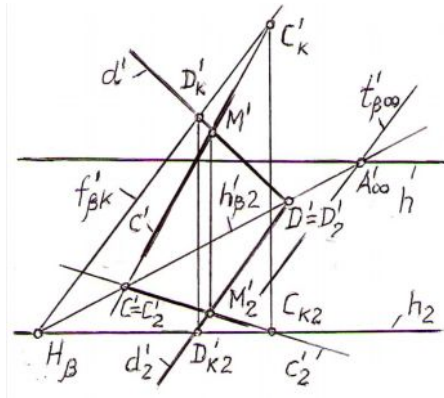
27-суретте α жазықтығының картиналық ізінің перспективасы $f'_{\alpha k}$, заттық ізінің перспективасы $h'_{\alpha 2}$ және тоғысу сызығы $t'_{\alpha \infty}$ сызықтық перспективада кескінделген. Жазықтықтың екі ізін немесе іздерінің біреуі мен тоғысу сызығын көрсету жеткілікті. Өйткені, жазықтықтың іздері берілсе, оның тоғысу сызығын салу оңай. Заттық іздің перспективасы көкжиек сызығымен A'_∞ нүктесінде қиылысады: $h'_{\alpha 2} \cap h = A'_\infty$. Тоғысу сызығы осы нүкте арқылы өтіп, картиналық ізге параллель болады: $A'_\infty \in t'_{\alpha \infty} \parallel f'_{\alpha k}$. Егер картиналық із және тоғысу сызығы берілсе, онда заттық із – картиналық іздің картина табанымен қиылысу нүктесін тоғысу сызығының көкжиек сызығымен қиылысу нүктесімен қосатын түзу болады: $h'_{\alpha 2}(A'_\infty, H_\alpha)$.

Жазықтықты анықтайтын геометриялық элементтердің перспективалары мен табандарының перспективалары берілсе, онда оның іздерін және тоғысу сызығын тұрғызу оңай. Мысалға M нүктесінде қиылысатын c және d түзулері анықтайтын β жазықтығының іздерін және тоғысу сызығын салуды қарастыралық (28-сурет).



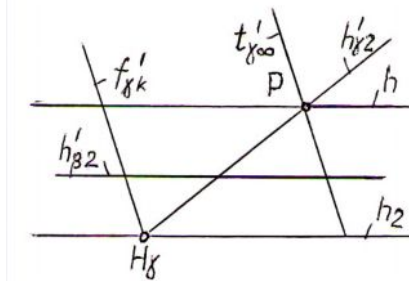
27-сурет

Бұл екі түзудің заттық іздері арқылы β жазықтығының заттық ізі $h'_{\beta 2}(C', D')$, ал картиналық іздері арқылы – картиналық ізі $f'_{\beta k}(C'_k, D'_k)$ жүргізіледі. Бұл екі түзу картинаның табанында жатқан H_β нүктесінде қиылысады. Заттық іздің көкжиек сызығымен қиылысу нүктесі A'_∞ жазықтықтың тоғысу сызығын салуға мүмкіндік береді. Тоғысу сызығы A'_∞ нүктесі арқылы картиналық ізге параллель жүргізіледі: $A'_\infty \in t'_{\beta \infty} \parallel f'_{\beta k}$.



28-сурет

Картина жазықтығына параллель жазықтықтың картиналық ізі және тоғысу сызығы картина (сызба) жазықтығының өзіндіксіз түзуі болады, ал заттық ізі картинаның табанына параллель орналасады. Мысалы, β жазықтығының заттық ізінің перспективасы картинаның табанына параллель: $h'_{\beta 2} \parallel h_2$ (29-сурет). Сондықтан $\beta \parallel \pi'$.



29-сурет

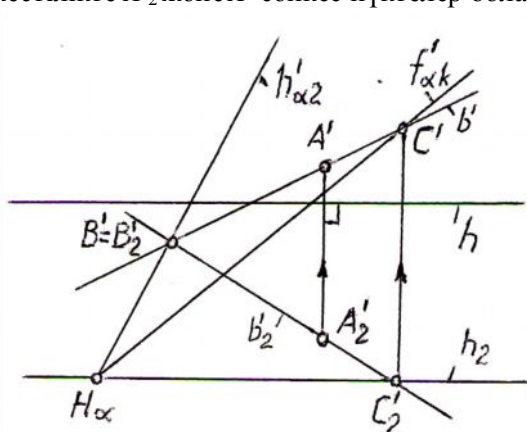
Картина жазықтығына перпендикуляр жазықтықтың тоғысу сызығы бас нүкте арқылы өтеді. Сызбадағы γ жазықтығының тоғысу сызығы $t'_{\gamma\infty}$ бас нүкте арқылы өтіп тұрғанын көреміз ($P \in t'_{\gamma\infty}$), олай болса: $\gamma \perp \pi'$.

Жалпы жағдай жазықтығы нүктелерінің перспективалары мен табандарының перспективалары аралығында тектес

сәйкестілік орнайды. Тектес сәйкестілік осінің міндетін заттық іздің перспективасы атқарады, ал тектес сәйкестіліктің бағыты көкжиек сызығына перпендикуляр болады.

Осындай тектестікте жазықтықтың картиналық ізіне картинаның табаны, ал тоғысу сызығына көкжиек сызығы сәйкес болады.

Егер α жазықтығының іздері $f'_{\alpha k}$ және $h'_{\alpha 2}$ берілсе, онда осы жазықтыққа тиісті A нүктесінің перспективасы A' пен табанының перспективасы A'_2 тектес сәйкестілікте сәйкес нүктелер болады. Берілген α жазықтығында жатқан A нүктесі табанының перспективасы бойынша оның перспективасын (A' нүктесін) салу керек (30-сурет). A'_2 нүктесі арқылы сәйкестілік бағытына параллель, яғни h түзуіне перпендикуляр түзу жүргіземіз, ал A' нүктесін осы түзудің бойынан іздейміз. A'_2 нүктесі арқылы қандайда бір b'_2 түзуін жүргіземіз. Бұл b'_2 түзуі сәйкестілік осімен $B' = B'_2$ нүктесінде, ал h_2 түзуімен C'_2 нүктесінде қиылысады. C'_2 нүктесіне сәйкес C' нүктесі картинаның табанына сәйкес $f'_{\alpha k}$ түзуі бойынан табылады. Сонда b'_2 түзуіне сәйкес b' түзуі B' және C' нүктелері арқылы жүргізіледі. $b' \cap (A'_2 A') = A'$. Берілген α жазықтығы анықтайтын тектес сәйкестілікте A'_2 және A' сәйкес нүктелер болады.

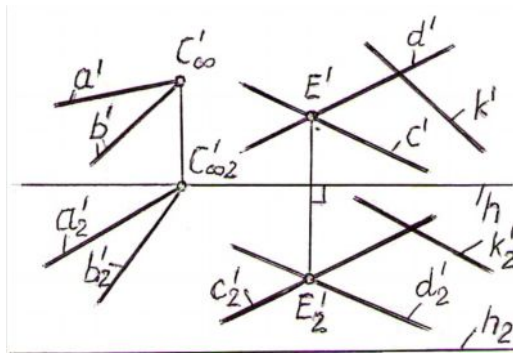


30-сурет

12. НЕГІЗГІ ПОЗИЦИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕР

12.1. Түзулердің өзара орналасуы

Картинадағы кескіндеріне қарап түзулердің өзара қалай орналасқанын анықтай аламыз. Берілген a және b түзулері (31-сурет) өзіндіксіз нүктеде қиылысады: $a \cap b = C_\infty$. Сондықтан олар параллель түзулер болады. Ал c және d түзулері E нүктесінде қиылысады, өйткені $c' \cap d' = E'$; $c'_2 \cap d'_2 = E'_2$; $(E'E'_2) \perp h$. Берілген d және k түзулерін қарастырсақ, олардың өзара параллель болмайтынын және өзіндік нүктеде қиылыспайтынын көреміз. Олай болса, олар айқас түзулер екен. Сондай-ақ, c және k түзулері де айқас түзулер болып табылады.



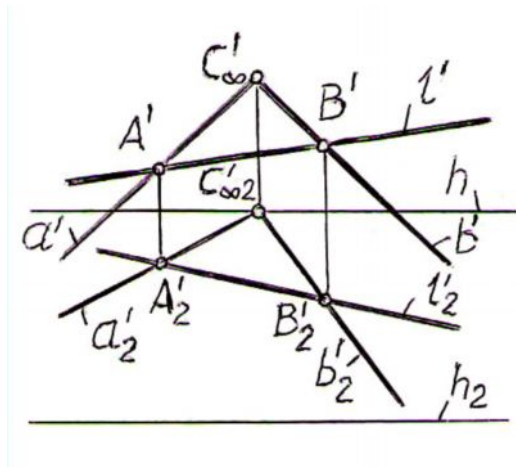
31-сурет

12. 2. Жазықтықта жатқан түзудің жетіспейтін проекциясын салу

Түзу жазықтықта жатуы үшін оның екі нүктесі жазықтыққа тиісті болуы керек. Егер түзудің екі нүктесі бір жазықтықта жатса, онда оның қалған нүктелері де сол жазықтықта жатады. Ал нүкте жазықтықта жатуы үшін, ол жазықтықта жатқан түзуге тиісті болуы керек. Егер жазықтық іздерімен берілсе, онда осы жазықтықта жатқан түзудің іздері жазықтықтың сәйкес іздеріне

тиісті болады. Жазықтықта жатқан түзудің тоғысу нүктесі сол жазықтықтың тоғысу сызығына тиісті болады.

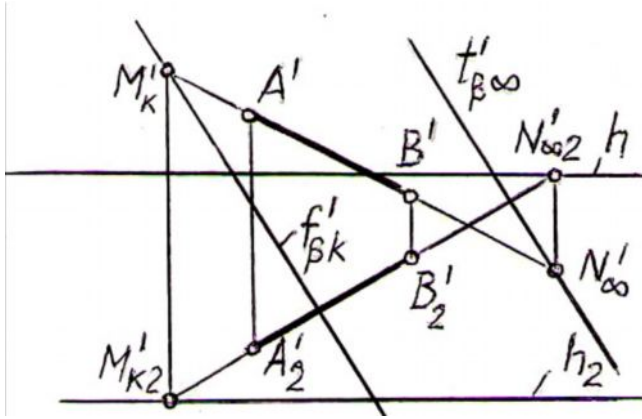
1-мысал. Параллель түзулер a мен b анықтайтын $\alpha(a||b)$ жазықтығында жатқан l түзуі табанының перспективасы l'_2 берілген (32-сурет). Осы түзуінің перспективасын салу керек.



32-сурет

Шешуі. Егер l түзуі $\alpha(a||b)$ жазықтығына тиісті болса, онда ол түзу α жазықтығында жатқан a және b түзулерімен қиылысады. $a'_2 \cap l'_2 = A'_2$; $b'_2 \cap l'_2 = B'_2$; $(A'_2A') \perp h$; $(B'_2B') \perp h$; $(A'_2A') \cap a' = A'$; $(B'_2B') \cap b' = B'$. Табылған A' және B' нүктелерін қосатын l' түзуі жүргізіледі және ол l түзуінің ізделінді проекциясы болады. A нүктесі α жазықтығына тиісті, өйткені ол α жазықтығында жатқан a түзуіне тиісті. B нүктесі де α жазықтығында жатыр, өйткені ол α жазықтығында жатқан b түзуіне тиісті. Сонда $l(l'_2, l')$ түзуінің екі нүктесі α жазықтығына тиісті екен. Олай болса, l түзуі α жазықтығында жатыр.

2-мысал. Картиналық ізінің перспективасы $f'_{\beta k}$ мен тоғысу сызығы $t'_{\beta \infty}$ арқылы берілген β жазықтығында жатқан $AB(A'_2B'_2)$ кесіндісінің перспективасын салу керек (33-сурет).

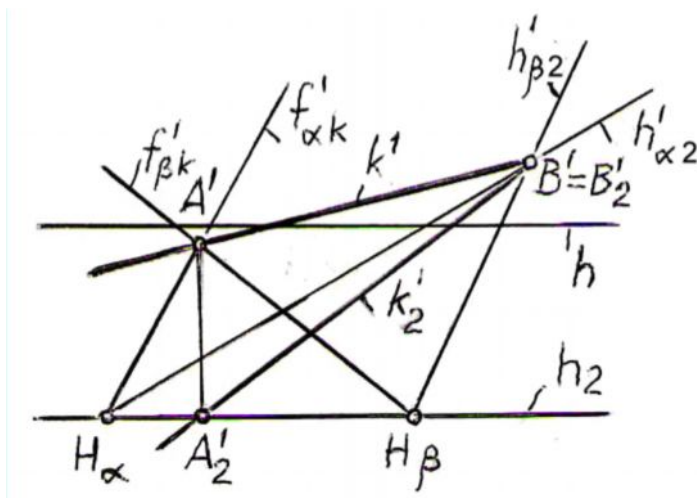


33-сурет

Шешуі. $A'_2B'_2$ түзуі картинаның табанымен M'_{k2} нүктесінде, ал көкжиек сызығымен $N'_{\infty 2}$ нүктесінде қиылысады: $(A'_2B'_2) \cap h_2 = M'_{k2}$; $(A'_2B'_2) \cap h = N'_{\infty 2}$. Олардың біріншісі AB түзуінің картиналық ізі табанының, ал екіншісі – тоғысу нүктесінің перспективалары болады. Картиналық іздің перспективасы $f'_{\beta k}$ түзуіне, тоғысу нүктесінің перспективасы $t'_{\beta \infty}$ түзуіне тиісті. $(M'_{k2}M'_k) \perp h$; $(M'_{k2}M'_k) \cap f'_{\beta k} = M'_k$; $(N'_{\infty 2}N'_{\infty}) \perp h$; $(N'_{\infty 2}N'_{\infty}) \cap t'_{\beta \infty} = N'_{\infty}$. Табылған нүктелерді қосатын түзудің бойынан A' және B' нүктелері табылады: $(A'_2A') \perp h$; $(A'_2A') \cap (M'_kN'_{\infty}) = A'$; $(B'_2B') \perp h$; $(B'_2B') \cap (M'_kN'_{\infty}) = B'$. Сонда $A'B'$ кесіндісі AB кесіндісінің ізделінді перспективасы болып табылады.

12.3. Жазықтықтардың қиылысу сызығын салу

Параллель жазықтықтардың тоғысу сызығы ортақ, ал картиналық іздері параллель болады. Іздерімен берілген жазықтықтардың қиылысу сызығын салу оңай. 34-суретте берілген $\alpha (f_{\alpha k} \cap h_{\alpha 2})$ және $\beta (f_{\beta k} \cap h_{\beta 2})$ жазықтықтарының қиылысу сызығын анықталық.



34-сурет

Жазықтықтардың картиналық іздерінің қиылысу нүктесі ізделінді қиылысу сызығына тиісті болады:

$$f'_{\alpha k} \cap f'_{\beta k} = A'; (A'A'_2) \perp h; (A'A'_2) \cap h_2 = A'_2; A(A'_2, A').$$

Заттық іздердің қиылысу нүктесі де қиылысу сызығында жатады:

$$h'_{\alpha 2} \cap h'_{\beta 2} = B'; B'_2 = B'; B(B'_2, B').$$

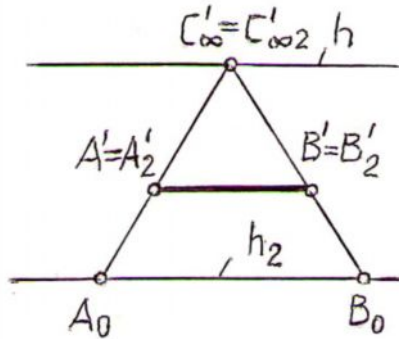
A' және B' нүктелері арқылы жүргізілген түзу k' қиылысу сызығының перспективасы, ал A'_2 және B'_2 нүктелері арқылы жүргізілген түзу k'_2 қиылысу сызығы табанының перспективасы.

$$\alpha(f'_{\alpha k} \cap h_{\alpha 2}) \cap \beta(f'_{\beta k} \cap h_{\beta 2}) = k(k', k'_2).$$

12.4. Жазықтық пен түзудің қиылысу нүктесін салу

Түзу мен жазықтықтың қалай орналасқанын анықтау үшін берілген түзу арқылы көмекші жазықтық жүргізеді. Көмекші жазықтықтың берілген жазықтықпен қиылысу сызығын анықтайды. Қиылысу сызығы мен берілген түзу үш жағдайда орналасулары мүмкін. Егер қиылысу сызығы мен берілген түзу

оның ұштарын көкжиек сызығы бойынан қалауымызша алынған нүктемен қосатын екі түзу жүргізіледі, ал бұл екі түзудің картинаның табанымен қиылысатын нүктелері берілген кесіндімен параллелограмм құрайды. Параллелограммның қарама-қарсы қабырғалары тең болатынын білеміз. 37-суретте заттық жазықтықтың картина жазықтығына параллель кесіндісі AB берілген. $A' = A'_2$; $B' = B'_2$; $C' \in h$; $(A'C') \cap h_2 = A_0$; $(B'C') \cap h_2 = B_0$. Төртбұрыш $A'B_0A_0$ – параллелограммның перспективасы, өйткені $(A_0A') \parallel (B_0B')$. Олай болса, онда AB кесіндісінің ұзындығы A_0B_0 кесіндісінің ұзындығына тең: $|AB| = |A_0B_0|$.



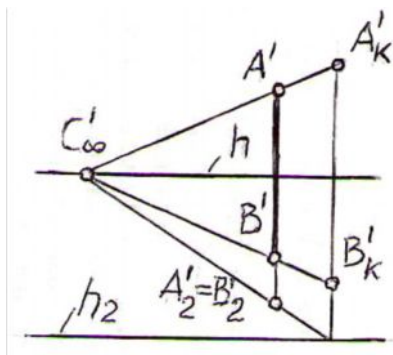
37-сурет

2-мысал. Заттық жазықтықтың картина жазықтығына перпендикуляр кесіндісінің ұзындығын табу үшін осы кесінді катеттерінің бірі болатын теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыш тұрғызады, ал оның екінші катетін картина жазықтығына параллель орналастырады. 38-суретте берілген CD кесіндісі картина жазықтығына перпендикуляр, өйткені оның перспективасы картинаның бас нүктесі арқылы өтеді. CD кесіндісінің бір ұшын, атап айтқанда C нүктесін масштабтық нүктемен қосатын түзу берілген CD түзумен 45° -қа тең бұрыш жасайды: $(CD)^\wedge, (CM^1) = 45^\circ$. Енді D нүктесі арқылы картина жазықтығына параллель түзу жүргізсек, онда ол түзу CM^1 түзуімен E нүктесінде қиылысады. Пайда болған CDE үшбұрышы – тікбұрышты үшбұрыш, ал оның төбелеріндегі ішкі

доғасы h түзуімен D'_∞ нүктесінде қиылысады. D'_∞ нүктесін A' нүктесімен қосатын түзу картинаның табанымен A_0 нүктесінде, ал B' нүктесімен қосатын түзу – B_0 нүктесінде қиылысады. Сонда пайда болған төртбұрыш $A'B'B_0A_0$ – теңбүйірлі трапецияның центрлік проекциясы. $A'A_0$ және $B'B_0$ кесінділері трапецияның табандары: $(A'A_0) \parallel (B'B_0)$. Теңбүйірлі трапецияның бүйір қабырғалары конгруэнтті болады: $|AB| = |A_0B_0|$.

13.1.2. Заттық жазықтыққа перпендикуляр кесіндінің ұзындығын анықтау

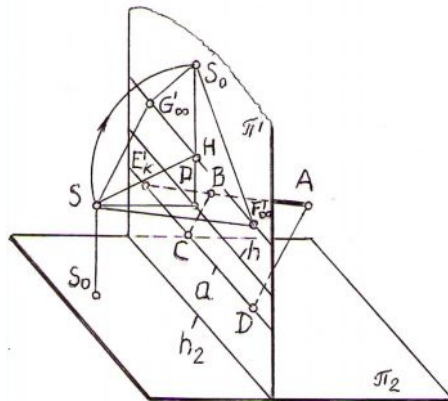
AB кесіндісі заттық жазықтыққа перпендикуляр, өйткені оның перспективасы көкжиек сызығына перпендикуляр және ол π_2 жазықтығына нүктеге кескінделген (41-сурет). Көкжиек сызығы бойынан қалауымызша C'_∞ нүктесін алып, оны A' , B' және $A'_2 = B'_2$ нүктелерімен қосатын түзулер жүргіземіз. $A'_2C'_\infty$ түзуі h_2 түзуімен $A'_{2k} = B'_{2k}$ нүктесінде қиылысады. Осы нүкте арқылы көкжиек сызығына перпендикуляр түзу жүргізіп, оның $A'C'_\infty$ түзумен қиылысу нүктесі A'_k және $B'C'_\infty$ түзуімен қиылысу нүктесі B'_k анықталады. Төртбұрыш $A'B'B'_kA'_k$ параллелограмм, ал оның $A'_kB'_k$ қабырғасы картина жазықтығында жатыр. Картина жазықтығында жатқан кесіндінің перспективасы оның өзіне тең болады. Сондықтан $|AB| = |A'_kB'_k|$, яғни AB кесіндісінің ұзындығы $A'_kB'_k$ кесіндісінің ұзындығына тең болады.



41-сурет

13.1.3. Жалпы жағдай кесіндісінің ұзындығын анықтау

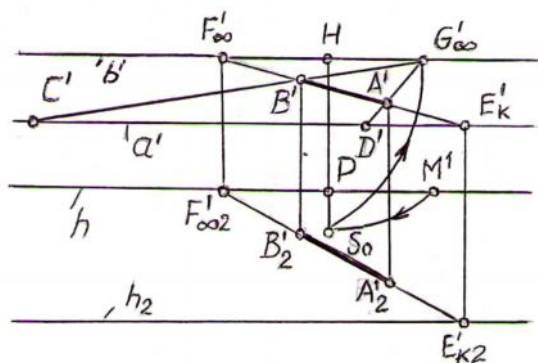
Тағы да берілген түзуге және картинаның табанына бірдей бұрыш жасап көлбейтін түзуді пайдаланалық (42-сурет). Берілген AB кесіндісі анықтайтын түзудің картиналық ізі E'_k арқылы картинаның табанына параллель a түзуін жүргізелік. Сонда қиылысатын екі түзу AB және a анықтайтын жазықтық картина жазықтығымен a түзуі бойымен қиылысады. Осы жазықтықта AB және a түзулерімен бірдей бұрыш жасайтын түзулер жүргізіп, C және D нүктелерін анықтаймыз. $(AD) \parallel (BC)$; $(AD)^\wedge, (AB) = (CD)^\wedge, (AD)$. S нүктесі арқылы AB түзуіне параллель түзу жүргізіп, оның тоғысу (π' жазықтығымен қиылысу) нүктесін E'_∞ , AD түзуіне параллель түзу жүргізіп, оның картина жазықтығымен қиылысу нүктесін G'_∞ табамыз. Бұл екі нүктені қосатын түзу көкжиек сызығына параллель болады: $(F'_\infty G'_\infty) \parallel h$. Бас нүкте P арқылы өтетін, көкжиек сызығына перпендикуляр болатын түзу $(F'_\infty G'_\infty)$ түзумен H нүктесінде қиылысады: $P \in (PH) \perp h$; $(PH) \cap (F'_\infty G'_\infty) = H$. $F'_\infty S G'_\infty$ үшбұрышын $F'_\infty G'_\infty$ қабырғасынан айналдырып, картина жазықтығымен беттестіреміз. Айналдыру кезінде S нүктесі



42-сурет

центрі H нүктесі болатын, $F'_\infty G'_\infty$ түзуіне перпендикуляр жазықтықта жататын шеңбер сызады. Шеңбердің радиусы (SH кесіндісі) бір катеті масштабтық қашықтыққа ($|SP|=|PM^1|$), екінші катеті ($|PH|$) бас нүктеден $F'_\infty G'_\infty$ түзуіне дейінгі арақашықтыққа тең тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы екенін көреміз. Шеңбер π' жазықтығында жатқан PH түзуімен S_0 нүктесінде қиылысады. Сонда π' жазықтығында жатқан теңбүйірлі $F'_\infty S_0 G'_\infty$ үшбұрышын шығарып аламыз.

Картинада AB кесіндісінің перспективасы $A'B'$, табанының перспективасы $A'_2 B'_2$ берілген (43-сурет). AB кесіндісінің ұзындығын табу керек. AB түзуінің картиналық ізін E_k және тоғысу нүктесін F_∞ саламыз. Картиналық із арқылы картинаның табанына параллель a түзуін, тоғысу нүктесі арқылы көкжиек сызығына параллель b түзуін жүргіземіз: $E'_k \in a' \parallel h_2$; $F'_\infty \in b' \parallel h$. Картинаның бас нүктесінен b түзуіне түсірілген перпендикулярдың табанын (H нүктесін) табамыз. Центрі H нүктесі болатын, M^1 нүктесі арқылы өтетін шеңбер PH түзуімен S_0 нүктесінде қиылысады. Центрі F'_∞ нүктесі болатын, S_0 нүктесі арқылы өтетін шеңбердің доғасы b' түзуімен G'_∞ нүктесінде кездеседі. Ал G'_∞ нүктесі – AB түзуі мен картинаның табанына бірдей бұрыштар жасайтын түзудің тоғысу нүктесі. $A'G'_\infty$ түзуі a' түзуімен D' нүктесінде, ал $B'G'_\infty$ түзуі – C' нүктесінде қиылысады.



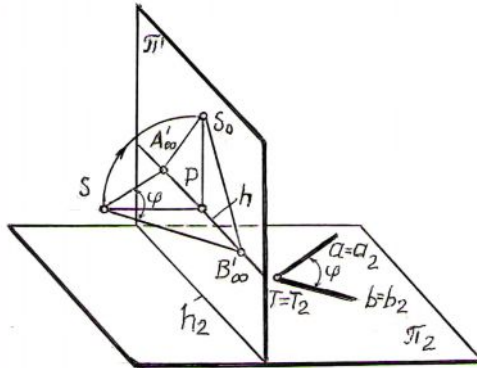
43-сурет

Төртбұрыш $A'B'C'D'$ – теңбүйірлі трапецияның перспективасы, ал оның бүйір қабырғалары AB мен CD тең болатыны белгілі. CD кесіндісі π' жазықтығында жатыр, сондықтан ол бұрмаланбай, ұзындығын сақтап проекцияланады. Олай болса, онда $|AB|=|C'D'|$.

13.2. Түзулердің арасындағы бұрышты анықтау

13.2.1. Заттық жазықтықта жатқан түзулер арасындағы бұрыштың натурал шамасын тұрғызу

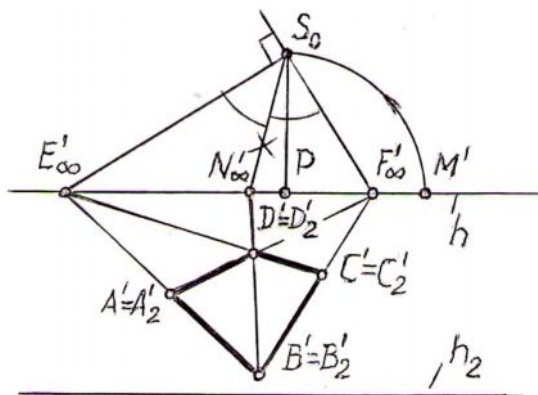
Заттық жазықтықта жатқан, T нүктесінде қиылысатын a және b түзулері арасындағы φ бұрышының натурал шамасын тұрғызуды қарастыралық (44-сурет). S нүктесі арқылы a түзуіне параллель түзу жүргізіп, оның көкжиек сызығымен қиылысу нүктесін A'_∞ табамыз, ал ол a түзуінің және оған параллель түзулердің тоғысу нүктесі. Сол сияқты b түзуінің тоғысу нүктесі B'_∞ анықталады. $\angle A'_\infty S B'_\infty = \varphi$. $A'_\infty S B'_\infty$ үшбұрышын h түзуінен айналдырып, картина жазықтығымен беттестіреміз. A'_∞ және B'_∞ нүктелері қозғалмайды, ал S нүктесі центрі бас нүктеде болатын және көкжиек сызығына перпендикуляр жазықтықта жататын шеңбер сызады. Осы шеңбер π' жазықтығымен S_0 нүктесінде қиылысады. $\Delta A'_\infty S B'_\infty = \Delta A'_\infty S_0 B'_\infty$.



44-сурет

Шешуі. Алдыңғы 45-сызбадағыдай c және d түзулері арасындағы бұрыштың натурал шамасын тұрғызып аламыз. Оның биссектрисасын жүргіземіз, ал ол h түзуімен N'_∞ нүктесінде қиылысады. Табылған N'_∞ нүктесін T нүктесімен қосатын түзу биссектрисаның ізделінді перспективасы болады. $c' \cap h = C'_\infty$; $d' \cap h = D'_\infty$; $(PS_0) \perp h$; $|PS_0| = |PM^1|$; $(S_0N'_\infty) - C'_\infty S_0 D'_\infty$ үшбұрышының биссектрисасы; $(TN'_\infty) -$ берілген c және d түзулері арасындағы бұрыштың биссектрисасының перспективасы.

2-мысал. Бір қабырғасы $AB(A'B'=A_2B_2)$ кесіндісі болатын шаршының перспективасын салу керек (47-сурет).



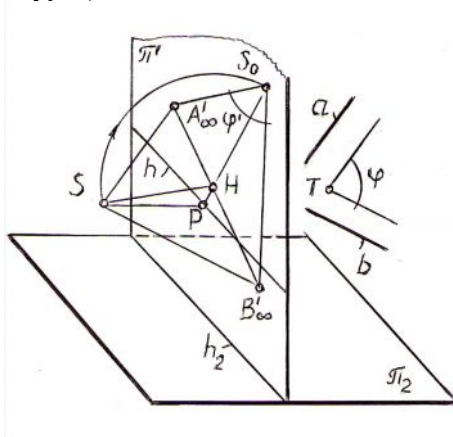
47-сүрөт

Шешуі. AB түзуінің тоғысу нүктесін E'_∞ анықтаймыз. Көкжиек сызығына оның бас нүктесінде тұрғызылған перпендикулярға PM^1 кесіндісіне тең кесінді салып S_0 нүктесін табамыз. $E'_\infty S_0$ түзуімен тікбұрыш жасайтын, S_0 нүктесі арқылы өтетін түзу h түзуімен F'_∞ нүктесінде қиылысады. F'_∞ нүктесі A' және B' нүктелерімен қосатын түзулер параллель болады және олар AB түзуіне тікбұрыш жасап орналасады. Шаршының диагональдары төбелеріндегі ішкі бұрыштардың биссектрисалары болатыны белгілі. Алдыңғы мысалды пайдаланып, B төбесінің биссектрисасының перспективасы $B'N'_\infty$ тұрғызылады. $\angle E'_\infty S_0 N'_\infty = \angle F'_\infty S_0 N'_\infty = 45^\circ$;

$(A'F'_{\infty}) \cap (B'N'_{\infty}) = D'$; $(E'D') \cap (B'F'_{\infty}) = C'$. Төртбұрыш $A'B'C'D'$ – AB кесіндісі бір қабырғасы болатын $ABCD$ шаршысының ізделінді перспективасы (47-сурет).

13.2.2. Кез келген екі түзу арасындағы бұрыштың натурал шамасын тұрғызу

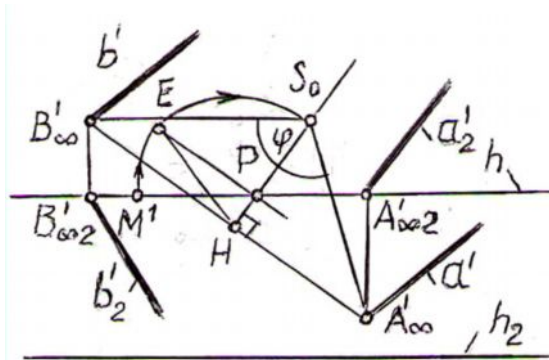
Айқас түзулер a және b берілген. Қалауыңызша T нүктесін алып, осы нүктеден басталатын a және b түзулеріне (сәйкесінше) параллель екі сәуле жүргізсек, олардың арасындағы бұрыш a және b түзулері арасындағы бұрышты φ анықтайды (48-сурет).



48-сурет

S нүктесі арқылы a түзуіне параллель түзу жүргізіп, оның π' жазықтығымен қиылысу нүктесі A'_{∞} , b түзуіне параллель түзу жүргізіп – B'_{∞} нүктесі анықталады. $\angle A'_{\infty}SB'_{\infty} = \varphi$. $A'_{\infty}SB'_{\infty}$ үшбұрышын $A'_{\infty}B'_{\infty}$ түзуінен айналдырып, картина жазықтығымен беттестіреміз. A'_{∞} және B'_{∞} нүктелері – қозғалмайтын нүктелер, ал S нүктесі центрі H нүктесі болатын және $A'_{\infty}B'_{\infty}$ түзуіне перпендикуляр жазықтықта шеңбер сызады. $P \in (PH) \perp (A'_{\infty}B'_{\infty})$; $(PH) \cap (A'_{\infty}B'_{\infty}) = H$; $|SH| = |HS_0|$. Осы шеңбер PH түзуімен S_0 нүктесінде қиылысады. S_0 нүктесін A'_{∞} және B'_{∞} нүктелерімен қосатын түзулер жүргізіледі. $\angle A'_{\infty}S_0B'_{\infty} = \varphi$.

49-суретте берілген айқас түзулер $a(a', a'_2)$ және $b(b', b'_2)$ аралығындағы бұрыштың натурал шамасы тұрғызылған. Алдымен берілген түзулердің тоғысу нүктелері анықталған. A'_∞ нүктесі a түзуінің, B'_∞ нүктесі b түзуінің тоғысу нүктелерінің перспективалары. Бас нүкте P арқылы $A'_\infty B'_\infty$ түзуіне перпендикуляр түзу жүргізіп, оның $A'_\infty B'_\infty$ түзуімен кездесу нүктесі H белгіленеді. Центрі P нүктесі болатын және масштабтық нүкте M^1 арқылы өтетін шеңбердің P нүктесі арқылы $A'_\infty B'_\infty$ түзуіне параллель түзумен қиылысу нүктесі E анықталады. Центрі H нүктесі, ал радиустарының бірі EH кесіндісі болатын шеңбер PH түзуімен S_0 нүктесінде қиылысады. Осы S_0 нүктесін A'_∞ және B'_∞ нүктелерімен қосатын түзулердің арасындағы бұрыш – ізделінді бұрыш болады: $\angle A'_\infty S_0 B'_\infty = \varphi = (a^\wedge, b)$.

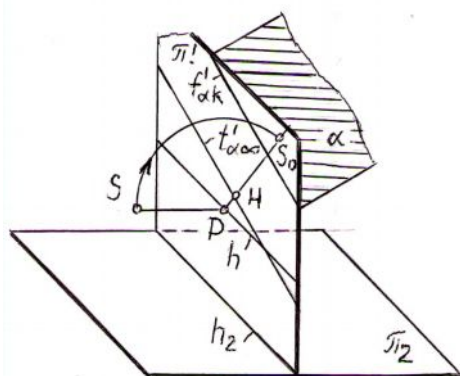


49-сурет

13.3. Жазық фигураның натурал шамасын анықтау

Сызықтық перспективада қарау нүктесі арқылы өтпейтін және π' жазықтығына параллель болмайтын жазықтықты картина жазықтығына S нүктесінен проекциялағанда бұл екі жазықтық нүктелерінің арасында өзара бірімәнді сәйкестілік орнатылады. Егер осындай жазықтықты картиналық ізінен айналдырып, картина жазықтығымен беттестіргенде оның нүктелері мен перспективалары арасында гомологиялық

сәйкестілік пайда болады (50-сурет). Жазықтықтың картиналық ізі гомологияның осі болып табылады, ал гомологияның центрі – S нүктесін айналдырып π' жазықтығымен беттестірудің нәтижесінде анықталады. Жазықтықты айналдырғанда оған параллель және проекциялау центрі арқылы өтетін жазықтық тоғысу сызығынан айналады, ал S нүктесі тоғысу сызығына перпендикуляр жазықтықта шеңбер сызады. Шеңбердің центрі бас нүктеден тоғысу сызығына түсірілген перпендикулярдың табаны болады. $f'_{\alpha k}$ – α жазықтығының картиналық ізі; $t'_{\alpha\infty}$ – тоғысу сызығы; h – көкжиек сызығы; P – бас нүкте; M^1 – масштабтық нүкте. $(PH) \perp f'_{\alpha k}$; $(PH) \cap t'_{\alpha\infty} = H$. Тоғысу сызығы қарау нүктесінен π' -қа түсірілген перпендикулярмен 90° -қа тең бұрыш жасайды: $(PS) \perp t'_{\alpha\infty}$.

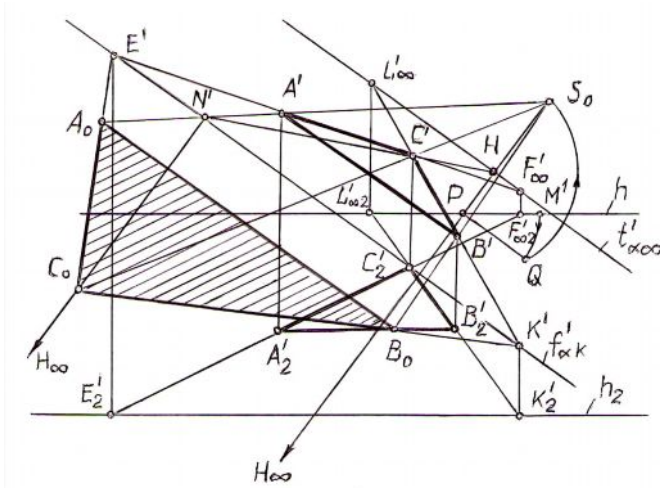


50-сурет

Сондай-ақ $t'_{\alpha\infty} \perp (PH)$. Олай болса, онда $t'_{\alpha\infty}$ түзуі S , P және H нүктелері анықтайтын жазықтыққа да перпендикуляр болады. Сондықтан $t'_{\alpha\infty}$ түзуінің S , P және H нүктелері анықтайтын жазықтықпен қиылысу нүктесі – S нүктесі сызатын шеңбердің центрі болады. Аталған шеңбердің радиусы SH – катеттері SP және HP кесінділері болатын тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы болады екен. Центрі H нүктесі болатын, S нүктесі арқылы өтетін шеңбер PH түзуімен гомологияның центрі болатын S_0 нүктесінде қиылысады. Сонымен гомологияның

центрі алдыңғы мысалдағыдай анықталады екен. Гомологияның центрі мен осі анықталды, ал бір жұп сәйкес нүктелер ретінде H нүктесі мен PH түзуінің өзіндіксіз нүктесін H_∞ қабылдауға болады.

Мысал. $ABC(A'B'C', A'_2B'_2C'_2)$ үшбұрышының натурал шамасын тұрғызу керек (51-сурет).



51-сурет

Шешуі. AC түзуінің картиналық ізін E және тоғысу нүктесін F тұрғызамыз. Сондай-ақ, BC түзуінің картиналық ізін K және тоғысу нүктесін L тұрғызамыз. Табылған картиналық іздерді қосатын $E'K'$ түзуі ABC үшбұрышы анықтайтын α жазықтығының картиналық ізі $f'_{\alpha k}$, ал тоғысу нүктелерін қосатын $F'_\infty L'_\infty$ түзуі – тоғысу сызығы $t'_{\alpha\infty}$ болады. Олар өзара параллель болулары керек: $f'_{\alpha k} \parallel t'_{\alpha\infty}$. Картиналық із $f'_{\alpha k}$ гомологияның осі болады. Гомологияның центрін табу үшін бас нүктеден тоғысу сызығына перпендикуляр түсіреміз: $P \in (PH) \perp t'_{\alpha\infty}$; $(PH) \cap t'_{\alpha\infty} = H$. Бас нүкте арқылы тоғысу сызығына параллель түзу жүргізіп, оған PM^1 кесіндісіне тең кесінді саламыз. Табылған Q нүктесін бастыра центрі H нүктесі болатын шеңбер жүргізсек, ол шеңбер PH

түзуімен S_0 нүктесінде қиылысады. Сонда гомология толық анықталады: f_{ak} – гомологияның осі; S_0 – гомологияның центрі; H және H_∞ – сәйкес нүктелер. Енді $A'B'C'$ үшбұрышымен гомологиялық сәйкестілікте болатын $A_0B_0C_0$ үшбұрышын салуға болады. Сәйкес нүктелер гомология центрімен бір түзудің бойында жатады, сәйкес түзулер гомологияның осінде қиылысады. S_0C' түзуін жүргізіп, оның бойынан C' нүктесіне сәйкес C_0 нүктесін іздейміз. $C'H$ түзуі гомологияның осімен N' нүктесінде қиылысады. $C'H$ түзуіне сәйкес түзу N' және H_∞ нүктелері арқылы өтеді. N' нүктесі арқылы PH түзуіне параллель түзу жүргізіп, оның $C'S_0$ түзуімен қиылысу нүктесін табамыз: $N' \in (N'H_\infty) \parallel (PH)$; $(N'H_\infty) \cap (C'S_0) = C_0$. $A'C'$ түзуі гомологияның осімен E' нүктесінде қиылысады, ал оған сәйкес түзу E' және C_0 нүктелері арқылы өтеді. $(E'C_0) \cap (A'S_0) = A_0$. Үшбұрыштың үшінші B' төбесіне сәйкес B_0 нүктесі – $C'K'$ түзуіне сәйкес C_0K' түзуінің $B'S_0$ түзуімен қиылысу нүктесі болады: $B_0 = (C_0K') \cap (B'S_0)$. $\Delta A_0B_0C_0 = \Delta ABC$.

13.4. Өзара перпендикуляр түзу мен жазықтықтың перспективасы туралы теорема

Алдымен бұрыннан белгілі қағидаларды еске түсіре кетелік:

- параллель түзулер өзіндіксіз нүктеде қиылысады, яғни олар бір нүктеде тоғысады (тоғысу нүктесі ортақ болады);

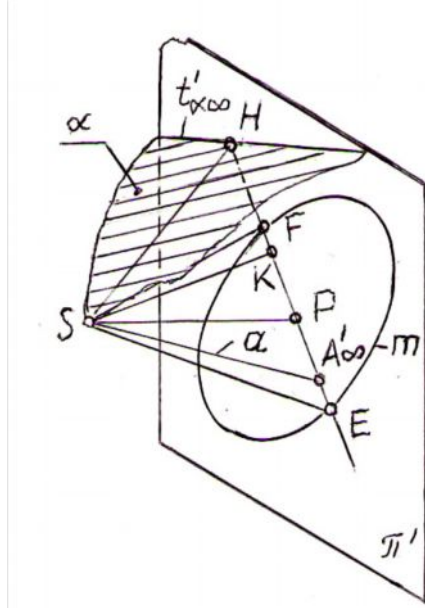
- параллель жазықтықтар өзіндіксіз түзудің бойымен қиылысады, яғни олар бір түзде тоғысады (тоғысу сызығы ортақ болады);

- егер a түзуі α жазықтығына перпендикуляр болса, онда a түзуіне параллель түзулердің бәрі де α жазықтығына және α жазықтығына параллель жазықтықтардың бәріне де перпендикуляр болады.

Картина жазықтығында жазықтықтардың тоғысу сызықтары мен оларға (жазықтықтарға) перпендикуляр түзулердің тоғысу нүктелері аралығында өзара бірмәнді сәйкестілік болады. Сәйкестілікті жазықтықтар байламы мен

түзулер байламы анықтайды. Осындай сәйкестілікті полярлық сәйкестілік деп атағанбыз (6-бөлім).

Картина жазықтығы π' , қарау нүктесі S берілсін (52-сурет).



52-сурет

S нүктесінен π' жазықтығына перпендикуляр түсіріп, картинаның бас нүктесі P анықталады. S нүктесі арқылы өтетін α жазықтығының π' жазықтығымен қиылысу t'_{∞} — α жазықтықтың және оған параллель жазықтықтардың тоғысу сызығы. S түзулер байламының α жазықтығына перпендикуляр a түзуінің және оған параллель түзулердің тоғысу нүктесі A'_{∞} : $S \in a \perp \alpha$; $a \cap \pi' = A'_{\infty}$. Бас нүктеден тоғысу сызығына перпендикуляр түзу жүргізсек, онда ол t'_{∞} түзуімен H нүктесінде қиылысады. Егер түзу жазықтыққа перпендикуляр болса, онда ол түзу сол жазықтықта жатқан түзулердің бәріне де перпендикуляр болады: $a \perp \alpha$; $t'_{\infty} \subset \alpha$; $a \perp t'_{\infty}$. Түзу жазықтықтың қиылысатын екі түзуіне перпендикуляр болса, онда ол түзу

жазықтықтың өзіне де перпендикуляр болады. Сондықтан t'_{∞} түзуі S , P және A'_{∞} нүктелері анықтайтын жазықтыққа перпендикуляр болады. Енді масштабтық шеңберді $m(P, |PM^1|)$ қарастыралық. Масштабтық шеңбер $A'_{\infty}P$ түзуімен E және F нүктелерінде қиылысады. HP түзуіне PA'_{∞} кесіндісіне тең KP кесіндісін салып, K нүктесін белгілейміз. E , F , H және K нүктелерін S нүктесімен қосатын кесінділер жүгізелік. $|SP|=|PE|=|PF|$ болғандықтан $\angle ESP=45^\circ$ және $\angle FSP=45^\circ$ болады, яғни $\angle ESF=\angle ESP+\angle FSP=90^\circ$. $a \perp \alpha \Rightarrow \angle A'_{\infty}SH=90^\circ$. Осыдан ESA'_{∞} , KSF және FSH бұрыштарының теңдігі шығады: $\angle ESA'_{\infty}=\angle KSF=\angle FSH$. Соңғы теңдіктерден SF кесіндісі HSK үшбұрышының S төбесіндегі ішкі биссектрисасы, ал SE кесіндісі – сыртқы биссектрисасы екені анықталады. Үшбұрыштың екі төбесі (H және K) – оларды қосатын қабырғаның үшінші төбесінің (S) ішкі және сыртқы биссектрисаларымен қиылысу нүктелері (E және F) ғажайып төрттік құрастыратыны жоғарыда (§4) дәлелденген еді. Сондықтан $(HKEF) = -1$ теңдігі шығады. Олай болса, K нүктесі t'_{∞} түзуінің масштабтық шеңберге қатысты полюсі, ал t'_{∞} түзуі K нүктесінің полярасы екен. Сонымен, жазықтыққа перпендикуляр түзудің тоғысу нүктесіне симметриялы нүкте мен сол жазықтықтың тоғысу сызығы полярлық сәйкестілікте болатыны анықталды.

Түзудің тоғысу нүктесін оған перпендикуляр жазықтықтың тоғысу сызығының *антиполюсі* дейді. Сонда біз мынадай теореманы дәлелдедік:

Сызықтық перспективада берілген түзу мен жазықтық өзара перпендикуляр болуы үшін түзудің тоғысу нүктесі жазықтықтың тоғысу сызығының масштабтық шеңберге қатысты антиполюсі болуы қажетті және жеткілікті.

Мысал. Берілген $a(a', a'')$ түзуі арқылы өтетін және $\alpha(f'_{\alpha k}||t'_{\infty})$ жазықтығына перпендикуляр жазықтық салу керек (53-сурет).

14. ШЕҢБЕРДІҢ ЦЕНТРЛІК ПРОЕКЦИЯСЫ

Егер шеңбер жазықтығы проекциялау центрі арқылы өтсе, онда шеңбер кесіндіге проекцияланар еді. Жалпы жағдайда шеңбердің жазықтықтағы проекциясын салу үшін оның нүктелерін проекциялау центрі S нүктесімен қосатын түзулердің проекциялар жазықтығымен қиылысу нүктелері табылады. Сонда табылған қиылысу нүктелерін бастыра жүргізілген сызық шеңбердің центрлік проекциясын анықтайды. Шеңбер нүктелерін проекциялаушы түзулердің жиыны екінші ретті конус болады. Екінші ретті конустың жазықтықпен қиылысу сызығы коника болатыны белгілі. Коника (конустық қима деген екі сөзді қысқартып алынған) деп екінші ретті қисықтарды атайды. Екінші ретті қисықтарға эллипс, парабола және гиперболола жатады. Өзіндіксіз нүктесі болмайтын екінші ретті қисықты эллипс, өзіндіксіз нүктесі жалғыз болатын екінші ретті қисықты парабола, ал екі өзіндіксіз нүктесі болатын екінші ретті қисықты гиперболола деп атайтынын еске сала кетелік. Екінші ретті конустың жасаушыларының барлығымен өзіндік нүктеде қиылысатын проекциялар жазықтығымен қиылысу сызығы эллипс болады. Бұл жағдайда шеңбер эллипске проекцияланады. Проекциялаушы конус жасаушыларының біреуіне параллель проекциялар жазықтығы осы жасаушымен өзіндіксіз нүктеде қиылысады, яғни қиылысу сызығының жалғыз өзіндіксіз нүктесі болады. Олай болса, шеңбердің проекциялаушы конус жасаушыларының біреуіне параллель жазықтықтағы проекциясы парабола болады. Проекциялаушы конус жасаушыларының екеуіне параллель проекциялар жазықтығы осы екі жасаушымен өзіндіксіз нүктеде қиылысады. Олай болса, шеңбердің проекциялаушы конус жасаушыларының екеуіне параллель проекциялар жазықтығындағы проекциясы гиперболола болады.

Кониканың тікбұрышты декарттық координаталар жүйесіндегі теңдеуі:

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3xy+a_4x+a_5y+a_6=0. \quad (1)$$

Теңдеудегі x , y – коникаға тиісті нүктелердің координаталары, ал $a_1, a_2, \dots, a_6$ – белгісіз коэффициенттер. Олардың ең болмағанда біреуі нөлге тең болмайды. Айталық $a_1 \neq 0$. Жоғарыдағы (1) теңдігін a_1 -ге бөліп, жаңа белгілеулер енгізсек, онда (2) теңдігі шағады.

$$x^2 + b_1 y^2 + b_2 xy + b_3 x + b_4 y + b_5 = 0. \quad (2)$$

Соңғы теңдеудегі $b_1, b_2, \dots, b_5$ белгісіз коэффициенттерді анықтау үшін бес шарт (параметр) керек. Басқаша айтқанда кониканы бес параметр анықтайды. Осындай кониканы анықтайтын бес параметр ретінде:

- коникаға тиісті бес нүкте, немесе
- коникаға тиісті төрт нүкте және бір жанама, немесе
- коникаға тиісті үш нүкте және екі жанама, немесе
- коникаға тиісті екі нүкте және үш жанама, немесе
- коникаға тиісті бір нүкте және төрт жанама, немесе
- кониканың бес жанамасы берілуі мүмкін.

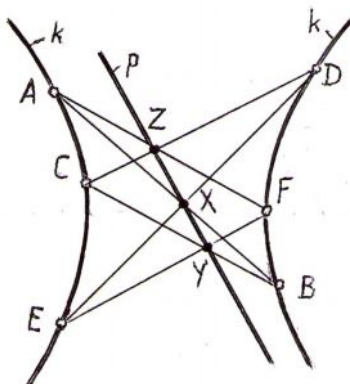
Әрине нүктелерді координаталарымен, жанамаларды теңдеулерімен анықтауға болады. Бірақ, біз нүктелерді сызбада көрсетілген, жанамаларды сызылған деп қарастырамыз.

15. КОНИКАНЫ САЛУ

Алдымен берілген бес нүкте анықтайтын кониканы салуды қарастыралық. Ол үшін Паскаль теоремасы пайдаланылады.

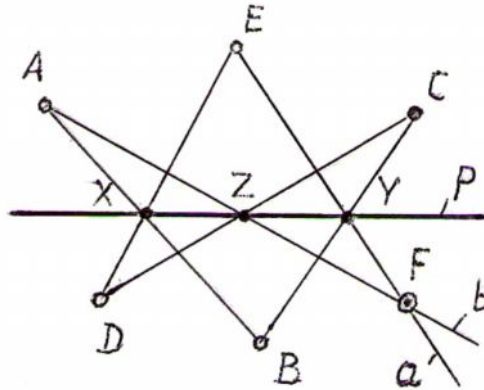
Паскаль теоремасы: *Коникаға іштей сызылған алтыбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары үш нүктеде қиылысады және олар бір түзудің бойында жатады.*

Бұл теореманың дәлелдеуі проективтік геометрияда қарастырылады, ал біз оған тоқталмаймыз. Бірақ коникаға іштей сызылған алтыбұрыш және оның қарама-қарсы қабырғалары туралы түсінік беру керек. Егер k коника (гипербола) және A, B, C, D, E, F осы коникаға тиісті нүктелер болса, онда $ABCDEF$ алтыбұрышын коникаға іштей сызылған дейді (54-сурет). Алтыбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының аралығында екі қабырға болады. Берілген қабырғаға қарама-қарсы қабырғаны табу үшін алтыбұрыштың бойымен бір бағытта жүріп өту керек. Сонда екі қабырғадан кейінгі үшінші қабырға берілген қабырғаға қарама-қарсы қабырға болады. 54-суреттегі алтыбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары: AB және DE ; BC және EF ; CD және FA . Аталған қарама-қарсы қабырғалар сәйкесінше X, Y, Z нүктелерінде қиылысады және олар Паскаль теоремасына сәйкес бір түзудің бойында жатады: $(AB) \cap (DE) = X$; $(BC) \cap (EF) = Y$; $(CD) \cap (FA) = Z$. Осы X, Y, Z нүктелері арқылы өтетін түзуді p әріпімен белгілеп, **Паскальдың түзуі** деп атайды.



54-сурет

Паскаль теоремасына сүйеніп берілген бес нүкте A, B, C, D, E анықтайтын коникаға тиісті F нүктесін салуды көрсетелік (55-сурет).

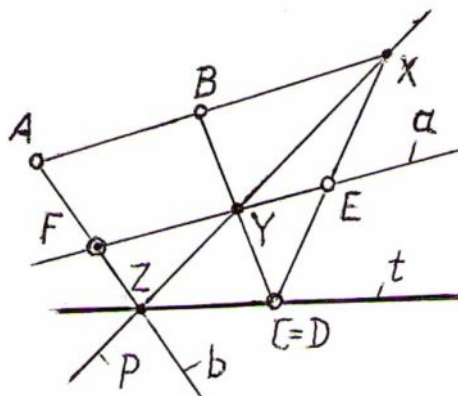


55-сурет

A нүктесін B нүктесімен, B нүктесін C нүктесімен, C нүктесін D нүктесімен, D нүктесін E нүктесімен қосатын кесінділер жүргіземіз. Енді A, B, C, D, E нүктелері анықтайтын коникаға іштей сызылған алтыбұрыштың алтыншы төбесі F нүктесін табуымыз керек. E нүктесі арқылы қалауымызша a түзуін жүргізіп, оның бойынан F нүктесін іздейміз. Алтыбұрыштың бесінші қабырғасы EF осы a түзуінің бойында жатады. AB қабырғасына қарама-қарсы қабырға DE . Олар X нүктесінде қиылысады. BC қабырғасына қарама-қарсы қабырға EF . Олар Y нүктесінде қиылысады. X және Y нүктелері p түзуін анықтайды. Паскаль түзуі CD қабырғасымен Z нүктесінде қиылысады. Сонда коникаға іштей сызылған алтыбұрыштың алтыншы қабырғасы AF берілген A нүктесін табылған Z нүктесімен қосатын b түзуінің бойында жататыны анықталады. Ізделінді F нүктесі a және b түзулерінің қиылысу нүктесі болады: $F = a \cap b$. Көмекші a түзуі E нүктесінен бір айналып шыққанда оған сәйкес F нүктесі кониканы сызып шығады. Осы тәсілді пайдаланып коникаға тиісті нүктелерді жеткілікті

мөлшерде анықтап, оларды бастыра ізделінді коника жүргізіледі.

Енді коника төрт нүкте A, B, C, E және C нүктесіндегі жанама t арқылы берілсін (56-сурет).



56-сурет

Берілген жанамаға тиісті нүктені қос нүкте деп қарастырамыз ($C \in t$). Сонда C және D нүктелері бір нүктеге бірігеді, ал коникаға іштей сызылған алтыбұрыштың CD қабырғасының міндетін жанама t атқарады. AB қабырғасына қарама-қарсы қабырға DE , BC қабырғасына қарама-қарсы қабырға EF (ол a түзуінде жатады). $(AB) \cap (DE) = X$; $(BC) \cap a = Y$. E нүктесі арқылы қалауымызша a түзуі жүргізілетіні туралы жоғарыда айтылды. X және Y нүктелері арқылы жүргізілген p түзуі Паскаль түзуі болады. CD қабырғасына, яғни жанамаға қарама-қарсы қабырғамен AF қиылысады және қиылысу нүктесі Z Паскаль түзуі p -ның бойында жатады: $t \cap p = Z$; $(AZ) \cap a = F$. Табылған F нүктесі ізделінді кониканың бойында жатады. Көмекші a түзуі E нүктесінен бір айналып шыққанда оған сәйкес F нүктесі кониканы сызып шығады.

Инженерлік есептеу мен жобалауда кониканың үш нүктесі және олардың екеуіндегі жанамалары белгілі болады. Коникаға тиісті A мен D нүктелері және осы нүктелердегі жанамалары t_1

нүктесінде қиылысады: $p \cap (BC) = Y$; $p \cap (CD) = Z$. Табылған нүктелерді сәйкесінше E және A нүктелерімен қосып, EF және AF қабырғалары анықталады. Бұл екі қабырға ізделінді F нүктесінде қиылысады: $a(E, F) \cap b(A, F) = F$. X нүктесінен p түзуін айналдыра отырып, коникаға тиісті нүктелерді жеткілікті мөлшерде тауып алуға болады. Сызбада табылған нүктелерді бастыра жүргізілген сызық ізделінді коника болады.

Енді C нүктесінің NX кесіндісі бойындағы орнына қарай инженерлік дискриминанттың мәні қалай өзгеретінін зерттелік. C нүктесі N нүктесімен біріксе, онда:

$$f = \frac{|NC|}{|NX|} = \frac{|NN|}{|NX|} = 0.$$

Ал C нүктесі X нүктесімен біріксе, онда:

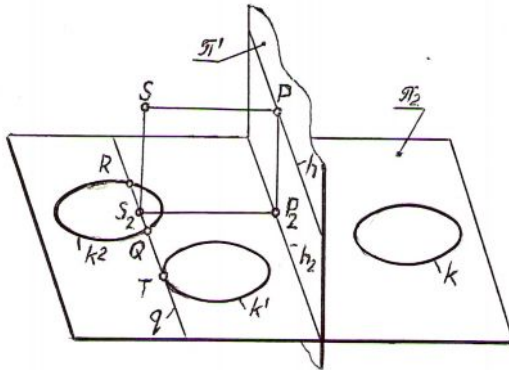
$$f = \frac{|NC|}{|NX|} = \frac{|NX|}{|NX|} = 1.$$

Сонымен $0 \leq f \leq 1$ теңсіздігі анықталады, яғни инженерлік дискриминанттың мәні нөлден бірге дейінгі аралықты қамтитын сегмент болды екен. Егер $f=0$ болса, коника қос түзуге, ал $f=1$ болса – қиылысатын екі түзуге ажырайды. Егер $f = 0,5$ болса, онда коника парабола болады. Эллипс үшін $f < 0,5$, ал гипербола үшін $f > 0,5$ болады.

Кониканы анықтайтын соңғы үш жағдай күнделікті тәжірибеде сирек кездеседі. Сондықтан оларға тоқталмаймыз.

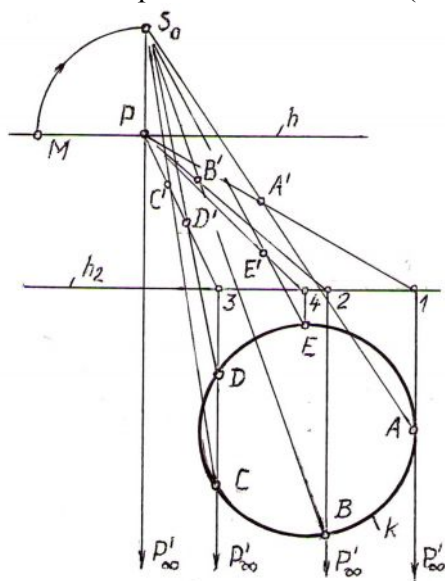
16. ШЕҢБЕРДІҢ ПЕРСПЕКТИВАСЫ

Заттық жазықтықта жатқан шеңберлердің перспективаларын қарастыралық (58-сурет). Бейтарап жазықтықтың заттық жазықтықпен қиылысу сызығы бейтарап түзу болады: $\alpha \cap \pi_2 = q$. π_2 – заттық жазықтық; α – бейтарап жазықтық (суретте көрсетілмеген); q – бейтарап түзу. Заттық жазықтықты S центрінен картина жазықтығына проекциялағанда оның бейтарап түзуі картина жазықтығының өзіндіксіз түзуіне проекцияланады. Егер шеңбер k^1 бейтарап түзумен T нүктесінде жанасса, онда T нүктесі π' жазықтығының өзіндіксіз нүктесіне проекцияланады. Олай болса k^1 шеңберінің проекциясы болатын кониканың жалғыз өзіндіксіз нүктесі болады екен. Сондықтан k^1 шеңберінің перспективасы парабола болады. Сол сияқты бейтарап түзумен R және Q нүктелерінде қиылысатын k^2 шеңберінің проекциясы болатын кониканың екі өзіндіксіз нүктесі болады. Сондықтан k^2 шеңберінің перспективасы гипербола болады. Бейтарап түзумен қиылыспайтын k шеңберінің перспективасы эллипс болады, өйткені оның өзіндіксіз нүктесі болмайды. Перспективасы салынатын дене заттық кеңістікте орналасса, оған тиісті шеңбердің перспективасы эллипс болады.



58-сурет

Шеңбердің перспективасы болатын эллипсті салуға көшелік. Заттық жазықтықты картинаның табанынан айналдырып картина жазықтығымен беттестірсек, шеңбер мен оның перспективасы болатын эллипс гомологияда сәйкес сызықтар болады. Гомологияның центрі көкжиек сызығына оның бас нүктесінде тұрғызылған перпендикулярға PM_1 кесіндісіне тең кесінді салудың нәтижесінде анықталады. Картинаның табаны гомология осін анықтайды, ал P нүктесіне S_0P түзуінің өзіндіксіз нүктесі сәйкес болады (59-сурет).



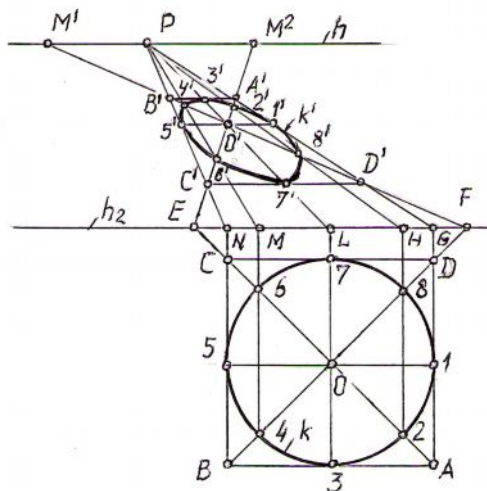
59-сурет

S_0 – гомологияның центрі; h_2 – гомологияның осі; P және P'_∞ – сәйкес нүктелер; k – берілген шеңбер. Шеңбер бойынан қалауымызша алынған A нүктесіне сәйкес A' нүктесін табу үшін гомологияның қасиеттерін пайдаланамыз. Гомологияда сәйкес нүктелер гомология центрімен бір түзудің бойында жатады. Сондықтан A' нүктесін AS_0 түзуі бойынан іздейміз. Гомологияда сәйкес түзулер гомология осінде қиылысады. Егер AP'_∞ түзуін

жүргізсек, ол түзу гомология осімен 1 нүктесінде қиылысады. $(A1) \parallel (S_0P)$. Сонда AP_∞ түзуіне сәйкес түзу P және 1 нүктелері арқылы өтеді. Өзара тиістілік сақталатындықтан A' нүктесін $P1$ түзуі бойынан іздейміз. AS_0 және $P1$ түзулеріне ортақ нүкте олардың қиылысу нүктесі болады: $(AS_0) \cap (P1) = A'$. Шеңбердің бойынан B, C, D, E нүктелерін алып, берілген гомологияда оларға сәйкес нүктелер B', C', D', E' анықталады. Ал бес нүкте A', B', C', D', E' арқылы өтетін кониканы (эллипсті) салу жолы 55-суретте көрсетілді.

Әдетте шеңбердің перспективасы болатын эллипсті 8 нүктесі арқылы жуықтап жүргізеді. Ол үшін шеңберге сырттай шаршы сызылады. Шаршының екі қабырғасы картинаның табанына параллель, ал қалған екі қабырғасы картина жазықтығына перпендикуляр болулары керек (60-сурет). $(AB) \parallel (CD) \parallel h_2$; $(AD) \perp \pi'$; $(BC) \perp \pi'$. Шаршының перспективасын салу оңай, өйткені оның картина жазықтығына перпендикуляр қабырғаларының перспективалары картинаның бас нүктесінде қиылысады, ал диагональдарының перспективалары масштабтық нүктелер арқылы өтеді. Оның себебі диагональдар картина жазықтығына 45° -қа тең бұрыш жасап көлбейді. AC диагоналы картинаның табанымен E нүктесінде, ал BD диагоналы F нүктесінде қиылысады. AD қабырғасы картина табанымен G нүктесінде, ал BC қабырғасы N нүктесінде қиылысады. Сонда AD түзуінің перспективасы GP түзуі, ал BC түзуінің перспективасы NP түзуі болады. AC диагоналының перспективасы EM^2 түзуі, ал BD диагоналының перспективасы FM^1 түзуі болады. A нүктесі AC және AD түзулеріне ортақ болғандықтан оның перспективасы EM^2 және GP түзулерінің қиылысу нүктесі болады: $A' = (EM^2) \cap (GP)$. B нүктесі BD және BC түзулеріне ортақ, сондықтан оның перспективасы FM^1 және NP түзулерінің қиылысу нүктесі болады: $B' = (FM^1) \cap (NP)$. Сол сияқты $C' = (EM^2) \cap (NP)$ және $D' = (FM^1) \cap (GP)$ болады.

$A'B'C'D'$ төртбұрышының екі қабырғасы $A'B'$ пен $C'D'$ көкжиек сызығына параллель болулары керек, өйткені олар картинаның табанына параллель түзулердің бойында жатыр. Шаршы $ABCD$ -ға іштей сызылған k шеңбердің перспективасы $A'B'C'D'$ төртбұрышына іштей сызылған эллипс болады.

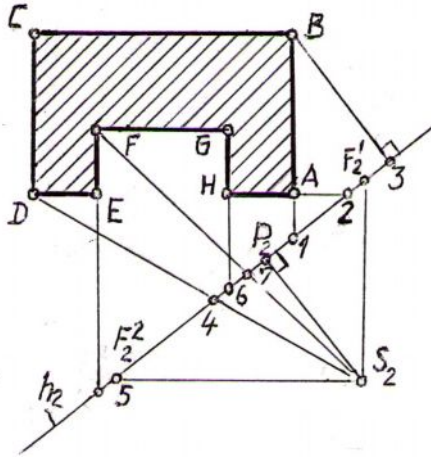


60-сурет

Шеңбердің оған сырттай сызылған шаршының қабырғаларымен жанасу нүктелері 1, 3, 5, 7 және диагональдармен қиылысу нүктелері 2, 4, 6, 8 белгіленген. 3 және 7 нүктелерінің перспективалары $3'$ және $7'$ шеңбер центрі арқылы өтетін және картина жазықтығына перпендикуляр болатын LP түзуінің көмегімен анықталған: $3' = (A'B') \cap (LP)$; $7' = (C'D') \cap (LP)$. Шеңбер центрінің перспективасы $0' = (EM^2) \cap (FM^1)$ эллипстің центрі бола алмайтынына көңіл аударыңыздар. Табылған $0'$ нүктесі арқылы көкжиек сызығына параллель етіп жүргізілген түзу $A'B'C'D'$ төртбұрышы қабырғаларымен $1'$ және $5'$ нүктелерінде қиылысады. 4 және 6 нүктелерінің перспективаларын салу үшін осы екі нүкте арқылы өтетін түзудің перспективасы (MP түзуі) пайдаланған: $4' = (MP) \cap (FM^1)$; $6' = (MP) \cap (EM^2)$. 2 және 8 нүктелерінің перспективаларын салу үшін осы екі нүкте арқылы өтетін түзудің перспективасы (HP түзуі) жүргізілген: $2' = (HP) \cap (EM^2)$; $8' = (HP) \cap (FM^1)$. Берілген k шеңбердің перспективасы $1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8'$ нүктелерін басып өтетін эллипс k' болады.

17. ЗАТТЫҚ ЖАЗЫҚТЫҚТА ЖАТҚАН ФИГУРАНЫҢ ПЕРСПЕКТИВАСЫ

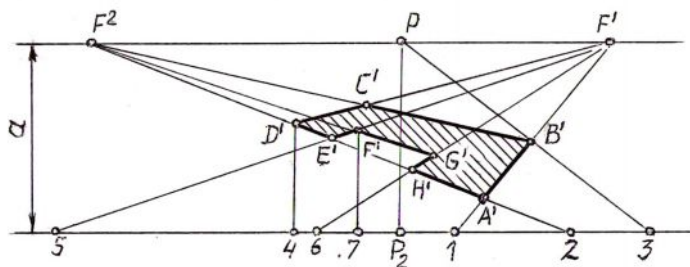
Заттық жазықтықта жатқан $ABCDEFGH$ көпбұрышының перспективасын салу керек (61-сурет).



61-сурет

Картина жазықтығының табаны h_2 түзуі, ал қарау нүктесінің π_2 жазықтығынан қашықтығы a берілген. Қалауымызша тұру нүктесін S_2 белгілейік. S_2 нүктесінен h_2 түзуіне түсірілген перпендикулярдың табаны P_2 – картинаның бас нүктесінің табанын анықтайды. Картинада арақашықтығы a -ға тең параллель екі түзу жүргізіп, олардың біреуін көкжиек сызығы h , екіншісін картинаның табаны деп қастырамыз (62-сурет).

Көкжиек сызығы бойынан картинаның бас нүктесі P белгіленеді. Картинада нүктенің перспективасы сол нүкте арқылы өтетін екі түзу перспективаларының қиылысу нүктесі болады. Берілген көпбұрышқа зер салып қарасақ, онда екі бағыттың бар екені анықталады. Бірінші бағытты өзара параллель түзулер AB , CD , EF , GH анықтаса, екінші бағытты өзара параллель



62-сурет

түзулер BC , FG , DE , AH анықтайды. Параллель түзулердің тоғысу нүктелері ортақ болатыны белгілі. Бірінші бағыттағы параллель түзулердің тоғысу нүктесін табу үшін тұру нүктесі арқылы AB түзуіне параллель түзу жүргіземіз. Соңғы түзу картинаның табанымен тоғысу нүктесінің табаны болатын F_2^1 нүктесінде қиылысады. S_2 нүктесі арқылы BC түзуіне параллель түзу жүргізіп, екінші бағыттың тоғысу нүктесі табанын – F_2^2 нүктесін табамыз. A нүктесі арқылы екі түзу (AB және AH) өтеді, ал олар картинаның табанымен 1 және 2 нүктелерінде қиылысады. Картинада P нүктесінен h_2 түзуіне түсірілген перпендикулярдың табанын (P_2 нүктесін) анықтаймыз, көкжиек сызығына $P_2F_2^1$ және $P_2F_2^2$ кесінділеріне тең PF^1 және PF^2 кесінділерін салып, тоғысу нүктелерін F^1 және F табамыз*. Картинаның табанына P_21 және P_22 кесінділерін салып, 1 және 2 нүктелерін белгілейміз (62-сурет). Сонда AB және AH түзулерінің біріншісінің перспективасы $1F^1$ түзуі, екіншісінің перспективасы $2F^2$ түзуі болады, ал A нүктесінің перспективасы осы екі түзудің қиылысу нүктесі болады: $A' = (1F^1) \cap (2F^2)$. B нүктесінен картина жазықтығына түсірілген перпендикулярдың табаны – 3 нүктесі анықталады. Осы нүктені картинада белгілеп, оны P нүктесімен қосамыз, өйткені картина жазықтығына

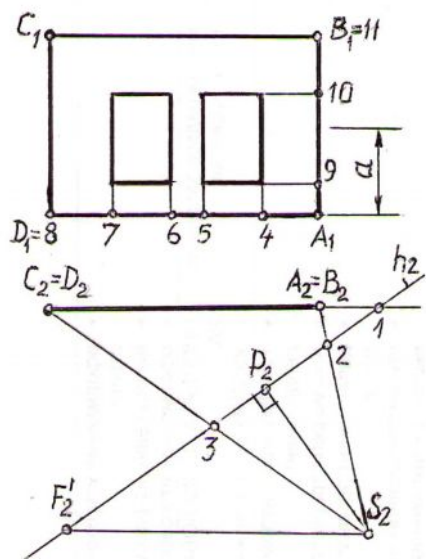
* Картинадағы тұрғызу сызықтары анық болуы үшін картина екі есе үлкейтіліп сызылады.

перпендикуляр болатын түзудің перспективасы картинаның бас нүктесі арқылы өтеді. B нүктесі арқылы өтетін AB және BZ түзулерінің перспективалары B' нүктесінде қиылысады: $B'=(1F^1)\cap(3P)$. D нүктесінің перспективасын салу үшін оны S_2 нүктесімен қосатын түзудің h_2 түзумен қиылысу нүктесі 4 пайдаланылған. Картинада 4 нүктесі арқылы байланыс сызығын жүргізіп, $2F^2$ түзуі бойынан D нүктесінің перспективасы D' нүктесі табылған. $D'F^1$ және $B'F^2$ түзулері C' нүктесінде қиылысады: $C'=(B'F^2)\cap(D'F^1)$. EF кесіндісінің созындысы картинаның табанымен 5 нүктесінде, GH кесіндісінің созындысы – 6 нүктесінде қиылысады, 5 нүктесін F^1 нүктесімен қосатын түзу $2F^2$ түзуімен E' нүктесінде, ал 6 нүктесін F^1 нүктесімен қосатын түзу – H' нүктесінде қиылысады. F нүктесінің перспективасы болатын F^1 нүктесін табу үшін проекциялаушы түзуді пайдалануға болады. S_2F түзуі картинаның табанымен 7 нүктесінде қиылысады. 7 нүктесін бастыра жүргізілген вертикаль түзу $5F^1$ түзуімен F' нүктесінде қиылысады. F' нүктесін F^2 тоғысу нүктесімен қосатын түзу $6F^1$ түзуімен қиылысып, G' нүктесін анықтайды. Табылған нүктелер төбелері болатын $A'B'C'D'E'F'G'H'$ көпбұрышы – берілген $ABCDEFGH$ көпбұрышының перспективасы.

Берілген дененің перспективасын салу үшін оны заттық жазықтыққа тік бұрыштап проекциялайды. Сондықтан заттық жазықтықта жатқан фигураны дененің горизонталь проекциясы деп қарастыруға болады, ал оны табан (план) деп атайды. Олай болса, біз табанның перспективасын салған екенбіз. Көкжиек сызығы мен картина табанының арақашықтығы аз болғандықтан табанның (планның) өлшемдері де аз болады. Бұл салу дәлдігін нашарлатады және көмекші сызықтар жүргізу мүмкін болмай қалады. Егер заттық жазықтықты өзіне параллель жылжытып төмендетсек, онда h және h_2 түзулерінің арақашықтығы да, табанның өлшемдері де ұлғаяды. Негізгі заттық жазықтық π_2 , ал төмендетілген заттық жазықтық π'_2 болса, онда: $\pi'_2 \parallel \pi_2$; $|\pi_2|=a$; $|\pi'_2|=b$ және $b>a$ болады. Төмендетілген табанның перспективасын салудың негізгі табанның перспективасын салудан еш айырмашылығы жоқ. Сондықтан керек болған жағдайда төмендетілген табанның перспективасын пайдаланады.

18. ВЕРТИКАЛЬ ЖАЗЫҚТЫҚТА ЖАТҚАН ФИГУРАНЫҢ ПЕРСПЕКТИВАСЫ

Фронталь және горизонталь проекцияларымен берілген $ABCD$ тіктөртбұрышының бірдей екі тіктөртбұрыш тәрізді тесігі бар (63-сурет).



63-сурет

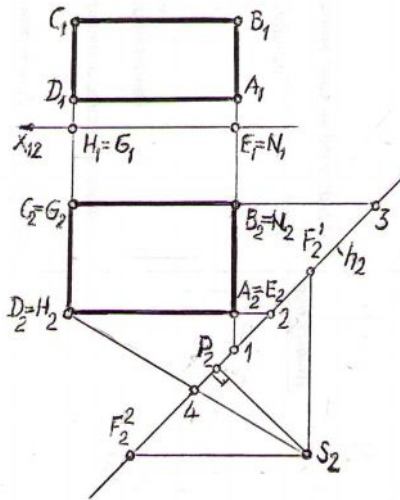
Картина жазықтығының табаны h_2 , тұру нүктесі S_2 және қарау нүктесінің биіктігі a берілген. Осы вертикаль орналасқан фигураның перспективасын салуды қарастыралық. Тұру нүктесінен картинаның табанына перпендикуляр түсіріп P_2 нүктесін анықтаймыз. Арақашықтығы a -ға тең екі түзу жүргізіп, олардың жоғарысын көкжиек сызығы h , төменгісін картинаның табаны h_2 деп қабылдаймыз (64-сурет).

Қалауымызша P нүктесін белгілеп ($P \in h$), P_2 нүктесін табамыз ($P_2 \in h_2$). Перспективаны салуды тағы да A нүктесінен

керек. Олар да тіктөртбұрыштыр болғандықтан $ABCD$ тікбұрышының перспективасын салудағы тәсілдерді пайдалануға болар еді, бірақ онда көмекші сызықтар көп болады. Сондықтан салудың тиімді жолын көрсетелік. Тесіктердің вертикаль орналасқан қабырғаларының созындылары A_1D_1 түзуімен 4, 5, 6, 7, 8 нүктелерінде қиылысады (63-сурет). A' нүктесі арқылы картинаның табанына параллель түзу жүргізіп, оған A' нүктесінен бастап 4, 45, 56, 67, 78 кесінділерін саламыз (64-сурет). Соңғы 8 нүктесін D' нүктесімен қосатын түзу көкжиек сызығымен F^2 нүктесінде кездеседі. Табылған F^2 нүктесін 4, 5, 6, 7 нүктелерімен қосатын түзулердің $A'D'$ түзуімен қиылысу нүктелері арқылы вертикаль түзулер жүргізіледі. Сонда тесіктердің вертикаль орналасқан қабырғалары осы түзулердің бойында жатады. A' нүктесі арқылы өтетін қалауымызша түзу жүргізіп, оған фронталь проекциядағы $A_19, 9.10, 10.11$ кесінділеріне тең кесінділер саламыз. Картинада 11 нүктесін B' нүктесімен жалғастыратын түзуге параллель 9 және 10 нүктелері арқылы өтетін түзулердің $A'B'$ түзуімен қиылысу нүктелерін F^1 нүктесімен қосатын екі түзу жүргізіледі. Тесіктердің горизонталь орналасқан қабырғалары осы екі түзудің бойында жатады. Сонымен тесіктердің перспективалары да салынды. Қарастырылған мысалдағы $ABCD$ тіктөртбұрышы үйдің бір қабырғасына (жарына), ал тесіктер терезелеріне ұқсайтынына көңіл аударма кетелік.

19. КӨЛБЕУ ЖАЗЫҚТЫҚТА ЖАТҚАН ФИГУРАНЫҢ ПЕРСПЕКТИВАСЫ

Көлбеу жазықтықта жатқан $ABCD$ тіктөртбұрыштың фронталь $A_1B_1C_1D_1$ және горизонталь $A_2B_2C_2D_2$ проекциялары берілген (65-сурет).



65-сурет

Картина жазықтығының заттық жазықтықтағы ізі h_2 , тұру нүктесі S_2 және қарау нүктесінің биіктігі a белгілі болсын. Осы көлбеу орналасқан $ABCD$ тіктөртбұрышының перспективасын салуды қарастыралық. Тұру нүктесінен h_2 түзуіне түсірілген перпендикулярдың табаны P_2 нүктесі анықталады. Ол картинаның бас нүктесінің табаны болады. Негізгі екі бағытқа параллель түзулердің тоғысу нүктелерінің табандары F_2^1 және F_2^2 тұру нүктесі арқылы горизонталь және вертикаль түзулер жүргізудің нәтижесінде табылады. Алдымен берілген фигураның табаны болатын, заттық жазықтықта жатқан $ENGH$ тіктөртбұрышының перспективасын салып алалық. $(E_2N_2) \cap h_2 = 1$;

F^2 нүктесімен қосатын түзудің бойынан G' нүктесі арқылы өтетін вертикаль түзудің көмегімен C' нүктесі табылады: $|2A^0|=|A_1E_1|$; $(A'E') \perp h_2$; $A'=(A^0F^2) \cap (A'E')$; $D'=(4H') \cap (A^0F^2)$; $B'=(B^0F^2) \cap (N'B')$; $C'=(B^0F^2) \cap (G'C')$. Төртбұрыш $A'B'C'D'$ берілген $ABCD$ тікбұрышының перспективасы.

Геометриялық салудың дәлдігін тексеру үшін AB түзуінің тоғысу нүктесін тұрғызалық. Ол үшін AB түзуінің табаны болатын EN түзуінің перспективасын көкжиек сызығымен қиылысқанша созалық: $(E'N') \cap h_2 = F^1$. Табылған F^1 нүктесінде h түзуіне перпендикуляр тұрғызалық, өйткені нүктенің перспективасы мен табанының перспективасы көкжиек сызығына перпендикуляр проекциялық байланыс сызығаның бойында жатады. Осы байланыс сызығы $A'B'$ түзуімен F_∞ нүктесінде қиылысады. F_∞ нүктесі AB түзуінің өзіндіксіз нүктесінің проекциясы. $(AB) \parallel (CD)$, ал параллель түзулердің ортақ тоғысу нүктесі болады. Егер C' , D' және F_∞ нүктелері бір түзудің бойында жатса (66-сурет), онда дәлдіктің жоғары болғаны. Егер аталған үш нүкте бір түзудің бойында жатпаса, сызбаны тексеріп түзету еңгізу керек.

Тоғысу нүктесі көкжиек сызығынан жоғары орналасса, түзуді **көтерілетін түзу** деп, ал төмен орналасса, түзуді **төмендейтін түзу** деп атайды. AB және CD көтерілетін түзулер, өйткені олардың тоғысу нүктесі көкжиек сызығынан жоғары орналасқан.

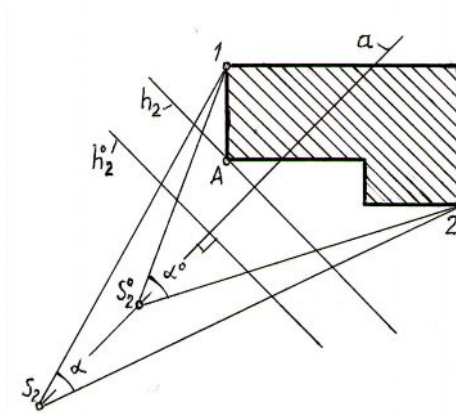
20. ҚАРАУ НҮКТЕСІН ЖӘНЕ КАРТИНА ЖАЗЫҚТЫҒЫН ТАҢДАУ

Заттық және көкжиек жазықтықтарының арақашықтығын қарау нүктесінің немесе **көкжиектің биіктігі** дейді. Қарау нүктесінің биіктігіне қарай, әдеттегі, биіктетілген және төмендетілген көкжиегі бар перспективалар болады. Биіктетілген көкжиегі бар перспективада фигураның нүктелері түгелдей немесе басым көпшілігі көкжиек жазықтығынан төмен орналасады, ал төмендетілген көкжиегі бар перспективада – жоғары орналасады. Биіктетілген көкжиегі бар перспектива қаланың шағын ауданын, бірнеше үйден тұратын ауылды, өндіріс орындарын территориясымен кескіндеуге қолайлы. Төмендетілген көкжиегі бар перспектива өте сирек кездеседі. Әдеткі көкжиегі бар перспективада қарау нүктесінің биіктігі адамдардың орташа бойына тең деп алынады. Біз әдеттегі көкжиегі бар перспективаны қарастырамыз.

Қарау нүктесі мен картина жазықтығы салынатын перспектива нәрсе (объект) туралы көбірек мағлұмат беретіндей етіп таңдалынуы тиіс. Перспективасы салынатын объект төбесіндегі бұрышы $30^{\circ} \dots 40^{\circ}$ болатын көру конусының ішінде орналасуы керек. Көру конусының осі картинаның бас нүктесін қарау нүктесімен қосатын түзуге жақын орналасқаны дұрыс. Жалпы бас нүкте перспектива енінің ортаңғы $\frac{1}{3}$ бөлігінен тысқары қалмауы керек. Биіктігі ұзындығына қарағанда үлкен болатын объект үшін ең үлкен көру бұрышы қарау нүктесі арқылы өтегін вертикаль жазықтықта орналасады. Ол биіктігі ұзындығынан үлкен болмайтын нәрселер үшін ең үлкен көру бұрышы көкжиек жазықтығында жатады деп қарастырылады.

Табаны 67-суреттегідей болатын объект үшін тұру нүктесін оның төрт жағы көрінетіндей етіп орналастыру керек. Осындай S°_2 нүктесін алып, одан табанның шеткі 1 және 2 нүктелері арқылы сәулелер жүргіземіз. Осы екі сәуленің арасындағы бұрышты α° деп белгілеп, оның биссектрисасы болатын a түзуін тұрғызамыз. S°_2 нүктесін биссектрисаның бойымен жылжытып нәрсеге жақындатсақ α бұрышы ұлғаяды да, қашықтатсақ –

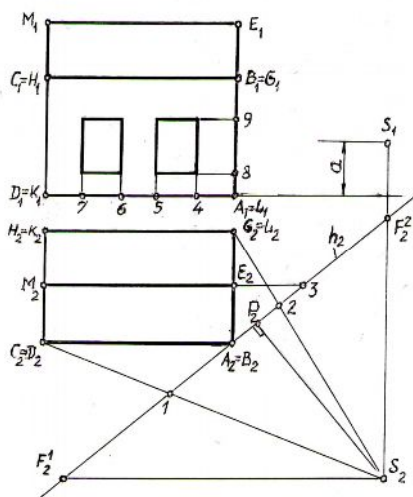
кемиді. Қарау бұрушы 30° -тай болатын S_2 тұру нүктесін таңдап алып, картинаның табанын h_2 биссектрисаға перпендикуляр етіп жүргіземіз. Картинаның табанын тұру нүктесіне жақындатсақ, онда перспективаның ені кішірейеді, ал алыстатсақ – үлкейеді. Картина жазықтығын нәрсенің бір қыры арқылы жүргізу қолайлы болады. Өйткені картинаның табаны A нүктесі арқылы өткенде осы қыр перспективада бұрмаланбай ұзындығын сақтап кескінделеді.



67-сурет

21. ФРОНТАЛЬ ЖӘНЕ ГОРИЗОНТАЛЬ ПРОЕКЦИЯЛАРЫМЕН БЕРЛГЕН ОБЪЕКТІНІҢ ПЕРСПЕКТИВАСЫН САЛУ

Фронталь проекцияны сызуда алдыңғы көрініс, ал құрылыс сызбаларында қасбет деп атайды. Горизонталь проекцияны сызуда үстіңгі көрініс, ал құрылыс сызбаларында табан (план) деп атайды. Қасбеті мен табаны 68-суретте көрсетілген үйшіктің перспективасын салалық. Үйшіктің жеті жағы бар. Олардың біреуі $ALKD$ горизонталь жазықтықта, төртеуі $ABCD$, $GHLK$, $ABEGL$, $DCMHK$ вертикаль жазықтықта, ал екеуі $BCME$, $EMHG$ көлбеу жазықтықта жатыр. Горизонталь, вертикаль және көлбеу жазықтықтарда жатқан фигуралардың перспективаларын салу алдыңғы баптарда қарастырылды.

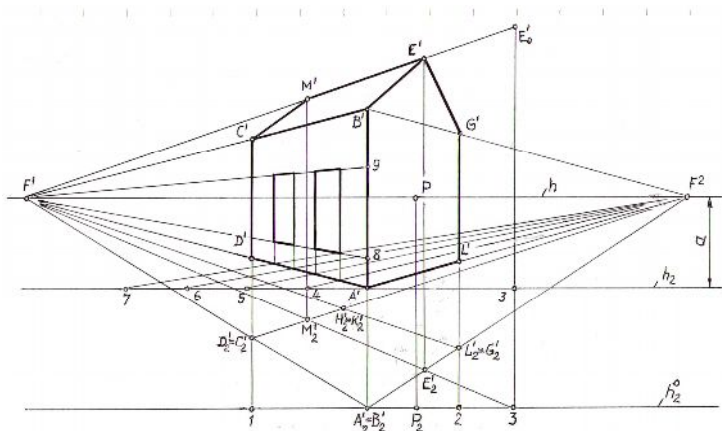


68-сурет

Картина жазықтығын AB қыры арқылы жүргізелік. Сонда AB кесіндісі перспективада бұрмаланбай ұзындығын сақтап кескінделеді. Тұру нүктесі S_2 оны табанның шеткі нүктелерімен

қосатын S_1 және S_2 сәулелері арасындағы бұрыш $28^\circ \dots 30^\circ$ болатындай, оның үстіне картина бас нүктесінің табаны 12 кесіндісінің ортаңғы $\frac{1}{3}$ бөлігінде орналасатындай етіп таңдап алынған. Қарау нүктесінің биіктігі a (ол 1,7...1,8 м шамасында болады) берілген. Сызбада басты екі бағыттың тоғысу нүктелерінің табандары F_1^1 , F_2^2 және EM түзуінің картиналық ізін анықтайтын 3 нүктелері белгіленген.

Перспективаны салуға көшелік. Горизонталь орналасқан арақашықтары a -ға тең екі түзу жүргізіп, олардың жоғарғысын көкжиек сызығы h және төменгісін картинаның табаны h_2 деп қарастырамыз (69-сурет). Картинаның бас нүктесін қалауымызша орналастырып, тоғысу нүктелерін F^1 және F^2 белгілейміз. Аталған нүктелердің арақашықтарын сызбадан аламыз. Төмендетілген табанның перспективасын пайдалану үшін h_2° түзуін көкжиек сызығына параллель орналастырып, одан қалауымызша алынған қашықтықта жүргіземіз. Жүргізілген h_2° түзуіне P нүктесінен перпендикуляр түсіріп P_2 нүктесін табамыз. Арақашықтықтарды сақтай отырып $A_2=B_2$, 1, 2, 3 нүктелерін сызбадан перспективаға көшіреміз. Сонда AB қырының төмендетілген табанының перспективасы $A'_2=B'_2$ анықталады. Оны F^1 және F^2 нүктелерімен қосатын түзулер жүргізіледі. Осы түзулердің бойынан 1 және 2 нүктелері арқылы жүргізілген вертикаль түзулердің көмегімен сәйкесінше $D'_2=C'_2$ және $G'_2=L'_2$ нүктелерін анықтаймыз. Табылған осы екі нүктенің біріншісін F^2 нүктесімен, екіншісін F^1 нүктесімен қосатын екі түзу $H'_2=K'_2$ нүктесінде қиылысады. Сонда заттық жазықтықта жатқан $ALKD$ төртбұрышының перспективасы болатын $A'_2L'_2K'_2D'_2$ төртбұрышы шығады. Осы төртбұрыштың қабырғаларымен $3F^1$ түзуі E'_2 және M'_2 нүктелерінде қиылысады. Сонымен төмендетілген табанның перспективасы тұрғызылды (69-сурет). $A'_2=B'_2$ нүктесі арқылы проекциялық байланыс сызығын жүргізіп, h_2 түзуі бойынан A' нүктесін табамыз. AB кесіндісі картина жазықтығында жататындықтан B' нүктесі $|A'B'|=|A_1B_1|$ теңдігін пайдаланып вертикаль түзудің бойынан анықталады.



69-сурет

A' және B' нүктелерін F^1 нүктесімен қосатын түзулердің бойынан 1 нүктесі арқылы проекциялық байланыс сызығын жүргізіп D' және C' нүктелерін, ал F^2 нүктесімен қосатын түзулердің бойынан 2 нүктесі арқылы жүргізілген вертикаль сызықтың көмегімен L' және G' нүктелері анықталады. E' және M' нүктелерін анықтау үшін 3 нүктесі арқылы вертикаль түзу жүргізіп, оның h_2 түзуімен қиылысу нүктесінен бастап сызбадағы A_1E_1 кесіндісіне тең кесінді салынады. Сонда табылған E'_0 нүктесін F^1 нүктесімен қосатын түзудің бойынан E'_2 және M'_2 нүктелерінен байланыс сызықтарын жүргізіп E' және M' нүктелері табылады. Осылайша табылған $A', B', C', D', L', G', E', M'$ нүктелерін түзу кесінділерімен сәйкесінше косудың нәтижесінде үйшіктің перспективасын шығарып аламыз. Енді терезелерді бейнелейтін екі тіктөртбұрыштың перспективасын салу қалды. Ол үшін 64-суреттегі тұрғызуларды пайдаланамыз. Сызбада терезелердің вертикаль қабырғаларының созындылары AD түзуімен 4, 5, 6, 7 нүктелерінде қиылысады. Картинада h_2 түзуіне A' нүктесінен солға қарай $A_{14}, A_{45}, A_{56}, A_{67}$ кесінділеріне тең кесінділер салып 4, 5, 6, 7 нүктелерін белгілейміз. Оларды F^2 нүктесімен қосатын түзулердің $A'D'$ түзуімен қиылысу нүктелері

арқылы вертикаль түзулер жүргізіледі. Тесіктердің бүйір қабырғалары осы вертикаль түзулерде жатады. $A'B'$ кесіндісінің бойынан 8 және 9 нүктелерін тауып, оларды F^1 нүктесімен қосатын екі түзу жүргізіледі. Терезелердің горизонталь орналасқан қабырғалары осы екі түзудің ($8F^1$ және $9F'$) бойында жатады.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. *Есмұханов Ж.М.* Сызба геометрия. Техникалық оқу орындарының студенттеріне арналған оқу құралы. – Алматы: Мектеп, 1987. – 168 б.
2. *Есмұханова Ж.Ж., Есмұхан Ж.М.* Сызба геометрия. – Алматы: ҚазҰТУ, 1998. – 264 б.
3. *Ысқақов М.* Проективтік геометрия. – 1 Б. – Алматы: Қазақ мемлекеттік оқу-педагогикалық баспасы, 1961.
4. *Ысқақов М.* Проективтік геометрия. – 2 Б. – Алматы: Мектеп, 1966.
5. *Климухин А. Г.* Начертательная геометрия. Учебник для ВУЗов. – М: Строиздат, 1973. – 368 с.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Линейная перспектива является важным разделом начертательной геометрии, предназначенным для архитектурных и строительных специальностей. В ней получают изображение объекта методом центрального проецирования.

Однако в учебниках и учебных пособиях по перспективе не уделяется достаточного внимания к несобственным элементам и не рассматривается основное свойство центрального проецирования. О том, что при параллельном проецировании сохраняется простое отношение, написано во всех учебниках и учебных пособиях, а о том, что при центральном проецировании сохраняется сложное отношение четырех элементов, мало кто знает. Без применения сложного отношения усложняется решение позиционных задач, становится не возможным проведение прямой через недоступную точку.

Гармоническая четверка, которая является важным частным случаем сложного отношения, служит теоретической основой изобразительного искусства, в частности архитектуры и живописи. Оказывается, что авторы признанных во всем мире художественных картин и знаменитых архитектурных сооружений умело использовали при разработке своих произведений гармоническую четверку и золотую пропорцию. Алгоритмы современной технической эстетики и дизайна разрабатываются на основе применения этих замечательных положений начертательной геометрии.

Для решения метрических задач надо задать абсолют плоскости, а для проведения центральной проекции перпендикуляра к плоскости надо применить полярное соответствие. В учебном пособии сделана попытка по устранению указанных пробелов.

В начале приводятся сведения о бесконечно удаленных элементах. Известно, что рассмотрение параллельных прямых и параллельных плоскостей в пространстве порождает понятие несобственных элементов. Доказывается основное свойство центрального проецирования; оказывается, что при центральном проецировании сохраняется сложное отношение. Рассмотрены гармоническая четверка и полный четырехугольник; доказана теорема о перспективе взаимно перпендикулярных прямой и плоскости. В линейной перспективе решены основные позиционные и метрические задачи. Для построения коники, представляющей центральную проекцию окружности, применена теорема Паскаля. Построены перспективы фигур, лежащих в горизонтальной, вертикальной и наклонной плоскостях. Имеется пример на построение перспективы домика с использованием опущенного плана.

1. НЕСОБСТВЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

В основе перспективы лежит метод центрального проецирования. Рассмотрим точку S , прямые a и a' ($S \notin a$; $S \notin a'$), лежащие в одной плоскости (рис. 1). Рассматривая точку S как центр проецирования, проецируем точки прямой a на прямую a' . Проекцией A' точки $A(\in a)$ на прямую a' называют точку пересечения прямых SA и a' : $(SA) \cap a' = A'$. Для построения проекции B' точки $B(\in a)$ проводят прямую, соединяющую ее с центром проецирования S и пересекающую прямую a' в точке B' : $(SB) \cap a' = B'$. Заданные прямые a и a' пересекаются в точке C , совпадающей со своей проекцией: $C = C'$. Таким образом точкам $A, B, C, \dots$ прямой a соответствуют точки $A', B', C', \dots$ прямой a' и, наоборот, точкам $A', B', C', \dots$ прямой a' соответствуют точки $A, B, C, \dots$ прямой a . Точка $M(\in a)$ находится на таком же расстоянии, что точка S от прямой a' : $|Ma'| = |Sa'|$. Поэтому прямая SM параллельна прямой a' . Согласно аксиоме элементарной геометрии, параллельные прямые не имеют общих точек, т. е. не пересекаются.

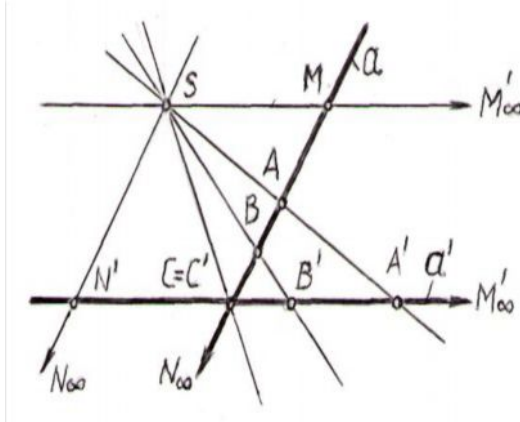


Рис. 1

Это означает, что точке $M(\in a)$ нет соответственной точки на прямой a' , т. е. проекция точки M на прямой a' не определена. Расстояние от точки $N'(\in a')$ до прямой a равно расстоянию от точки S до той же прямой a . Отсюда следует, что точка $N'(\in a')$ так же не имеет проекцию на прямой a , так как $(SN') \parallel a$. Для устранения этого дефекта центрального проецирования и установления взаимно однозначного соответствия между точками прямых a и a' принято считать, что параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке. Бесконечно удаленную точку обозначают латинской прописной буквой (как обычные точки), снабженной нижним индексом бесконечности. Тогда точка M прямой a проецируется в точку M'_∞ прямой a' : $(SM) \parallel a'$; $(SM) \cap a' = M'_\infty$. Аналогично, точка N' прямой a' проецируется в точку N_∞ прямой a ; $(SN') \cap a = N_\infty$. Таким образом центральным проецированием из точки S между точками прямых a и a' устанавливается взаимно однозначное соответствие, в котором каждой точке прямой a соответствует вполне определенная единственная точка прямой a' и, наоборот, каждой точке прямой a' соответствует вполне определенная единственная точка прямой a .

В высшей геометрии считают так же, что параллельные плоскости пересекаются по бесконечно удаленной прямой. Плоскость и параллельная ей прямая пересекаются в бесконечно удаленной точке. Множество бесконечно удаленных точек и бесконечно удаленных прямых пространства определяет бесконечно удаленную плоскость.

Каждая прямая имеет единственную бесконечно удаленную точку, а каждая плоскость – единственную бесконечно удаленную прямую. В пространстве существует единственная бесконечно удаленная плоскость.

Бесконечно удаленные элементы (точки, прямые и плоскость) называют несобственными элементами, в отличие от собственных точек, прямых и плоскостей.

Если точку A будем перемещать по прямой a в любом направлении, то все равно придем к точке N_{∞} (рис. 1). Аналогично, если точку A' будем перемещать по прямой a' в любом направлении, то все равно придем к точке M'_{∞} . Поэтому приходится рассматривать прямую как замкнутую линию.

Теперь после введения несобственных элементов две прямые, лежащие в одной плоскости, всегда пересекаются в собственной или несобственной точке. Две различные плоскости всегда пересекаются по прямой. Если линией пересечения плоскостей будет несобственная прямая, то это говорит о параллельности этих плоскостей. Аналогично, прямая и плоскость в пространстве всегда пересекаются. Точкой пересечения плоскости и параллельной ей прямой будет несобственная точка. Отсюда следует, что параллельность является особым частным случаем пересечения.

2. ОСНОВНОЙ ИНВАРИАНТ МЕТОДА ЦЕНТРАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Основные инварианты¹ параллельного проецирования: проекции параллельных прямых будут параллельными и отношение отрезков, расположенных на одной прямой, сохраняется. Указанные два свойства параллельного проецирования не распространяются на центральное проецирование. Действительно, центральные проекции двух параллельных прямых могут пересекаться в собственной точке. Чтобы убедиться в этом, проектируем параллельные прямые a и b из центра S на плоскость π' (рис. 2). Пусть прямая a пересекает плоскость π' в точке A , а прямая b – в точке B . Тогда указанные точки совпадают со своими проекциями: $A = A'$ и $B = B'$. Проведем через центр проецирования S прямую c , параллельную данным прямым: $S \in c \parallel a$ или $S \in c \parallel b$.

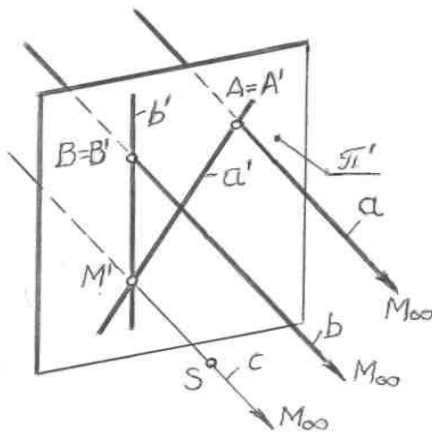


Рис. 2

¹ Инвариант – французское слово *invariant*, означающее «неизменяющийся»

Тогда три параллельные прямые пересекаются в одной точке M_∞ : $a \cap b \cap c = M_\infty$. Прямая c пересекает плоскость π' в точке M' : $c \cap \pi' = M'$. Собственная точка M' является центральной проекцией несобственной точки M_∞ , общей для двух данных прямых a и b . Прямая a' , проходящая через точки A и M' , является центральной проекцией прямой a , а прямая b' , проходящая через точки B и M' , — центральной проекцией прямой b . $a' \cap b' = M'$. Таким образом, параллельные прямые a и b проецировались на плоскость π' из центра S в пересекающиеся прямые a' и b' .

Теперь покажем, что отношение отрезков, расположенных на одной прямой, также не сохраняется. Для этого равные отрезки AB и BC , расположенные на прямой a , проецируем на прямую a' ($\in \alpha(S, a)$).

Тогда проекцией отрезка AB будет отрезок $A'B'$, а проекцией отрезка BC — отрезок $B'C'$ (рис. 3). Отрезки $A'B'$ и $B'C'$ не равны между собой, поэтому $\frac{|AB|}{|BC|} \neq \frac{|A'B'|}{|B'C'|}$.

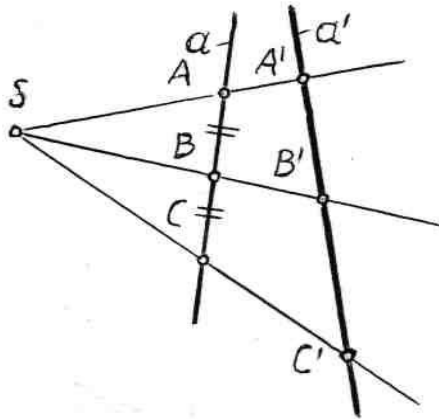


Рис. 3

Три точки А, В и С, расположенные на одной прямой, определяют два отрезка АС и ВС. Отношение этих отрезков называют простым отношением и обозначают так: (ABC) . *Простое отношение*

$$(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Принято считать, что точка А – начало и точка В – конец отрезка, а точку С называют делящей точкой. Если точка С принадлежит отрезку АВ, то простое отношение имеет отрицательное значение, т. е. $(ABC) < 0$. Когда точка С расположена вне отрезка АВ, тогда простое отношение имеет положительное значение: $(ABC) > 0$. При центральном проецировании простое отношение не сохраняется.

Рассмотрим четыре точки А, В, С, и D, расположенные на одной прямой, которые определяют два простых отношения:

$$(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|} \text{ и } (ABD) = \frac{|AD|}{|BD|}.$$

Отношение этих двух простых отношений называется *сложным отношением* и обозначают так: $(ABCD)$.

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|BC| \cdot |AD|}.$$

Теперь докажем, что значение сложного отношения не изменяется при центральном проецировании. Для этого четыре точки А, В, С и D, расположенные на одной прямой a , проецируем из центра S на другую прямую $a' (\in \alpha(S, a))$. Точка А проецируется в точку A' , точка В – в точку B' , точка С – в точку C' точка D – в точку D' (рис. 4).

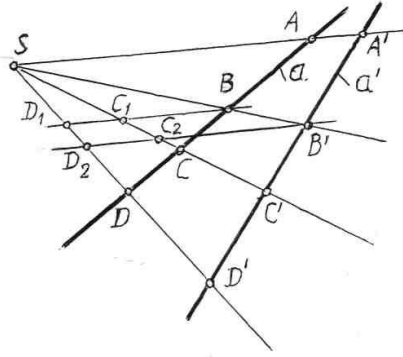


Рис. 4

Определим сложное отношение четырех точек A', B', C' и D'

$$(A'B'C'D') = \frac{(A'B'C')}{(A'B'D')} = \frac{|A'C'|}{|B'C'|} \cdot \frac{|A'D'|}{|B'D'|} = \frac{|A'C'| \cdot |B'D'|}{|B'C'| \cdot |A'D'|}.$$

Требуется доказать, что $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Прямая, проведенная через точку B параллельно прямой AS , пересекает прямую CS в точке C_1 и прямую DS – в точке D_1 . Прямая, проведенная через точку B' параллельно $A'S$, пересекает прямую $C'S$ в точке C_2 и прямую $D'S$ в точке D_2 . Образуются подобные треугольники.

$$\triangle SAC \sim \triangle C_1 BC \Rightarrow \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AS|}{|BC_1|}. \quad (1)$$

$$\triangle SAD \sim \triangle D_1 BD \Rightarrow \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AS|}{|BD_1|}. \quad (2)$$

Делим левую сторону равенства (1) на левую сторону равенства (2), а правую сторону – на правую.

Тогда

$$\frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AS|}{|BC_1|} \cdot \frac{|AS|}{|BD_1|} = \frac{|AS| \cdot |BD_1|}{|BC_1| \cdot |AS|} = \frac{|BD_1|}{|BC_1|}. \quad (3)$$

$$\Delta SA'C' \sim \Delta C_2B'C' \Rightarrow \frac{|A'C'|}{|B'C'|} = \frac{|A'S|}{|B'C_2|}. \quad (4)$$

$$\Delta SA'D' \sim \Delta D_2B'D' \Rightarrow \frac{|A'D'|}{|B'D'|} = \frac{|A'S|}{|B'D_2|}. \quad (5)$$

Делим левую часть равенства (4) на левую часть равенства (5), а правую часть – на правую.

Тогда

$$\frac{|A'C'|}{|B'C'|} \cdot \frac{|A'D'|}{|B'D'|} = \frac{|A'S|}{|B'C_2|} \cdot \frac{|A'S|}{|B'D_2|} = \frac{|B'D_2|}{|B'C_2|}. \quad (6)$$

$$\Delta SBD_1 \sim \Delta SB'D_2 \Rightarrow \frac{|BD_1|}{|B'D_2|} = \frac{|BS|}{|B'S|}. \quad (7)$$

$$\Delta SBC_1 \sim \Delta SB'C_2 \Rightarrow \frac{|BC_1|}{|B'C_2|} = \frac{|BS|}{|B'S|}. \quad (8)$$

Первая часть равенства (7) равна правой части равенства (8). Поэтому левые части этих равенств также равны между собой:

$$\frac{|BD_1|}{|B'D_2|} = \frac{|BC_1|}{|B'C_2|} \text{ или } \frac{|BD_1|}{|BC_1|} = \frac{|B'D_2|}{|B'C_2|}. \quad (9)$$

Оказывается, что правые части равенств (3) и (6) равны между собой. Поэтому левая часть равенства (3) равна левой части равенства (6):

$$\frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|A'C'|}{|B'C'|} \cdot \frac{|A'D'|}{|B'D'|} \text{ или } (ABCD) = (A'B'C'D').$$

Что и требовалось доказать.

Вывод: Основным инвариантом центрального проектирования является сложное отношение.

3. СВОЙСТВА СЛОЖНОГО ОТНОШЕНИЯ

1. Нетрудно вычислить сложное отношение четырех точек, когда двое из них совпадают. Для примера вычислим значение сложного отношения для случаев, когда точка А совпадает с точкой В, затем с точкой С и наконец с точкой D:

$$A = B \Rightarrow (AACD) = \frac{(AAC)}{(AAD)} \cdot \frac{|AC|}{|AC|} \cdot \frac{|AD|}{|AD|} = 1;$$

$$A = C \Rightarrow (ABAD) = \frac{(ABA)}{(ABD)} \cdot \frac{|AA|}{|BA|} \cdot \frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|AA| \cdot |BD|}{|BA| \cdot |AD|} = 0;$$

$$A = D \Rightarrow (\cancel{ABCA}) = \frac{(ABC)}{(ABA)} \cdot \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AA|}{|BA|} \cdot \frac{|AC| \cdot |BA|}{|BC| \cdot |AA|} = \infty.$$

2. Четыре точки, составляющие сложное отношение, делятся на две группы: точки А и В образуют основную (базовую) пару, а точки С и D – делящую. Если одна из точек делящей пары принадлежит отрезку АВ, а другая – не принадлежит, то они разделяют основную пару. Если обе точки делящей пары принадлежат отрезку АВ или обе точки – не принадлежат АВ, то делящая пара не разделяет основную пару. В первом случае знаки простых отношений будут разными, поэтому сложное отношение имеет отрицательный знак: $(ABCD) < 0$. Во втором случае простые отношения имеют одинаковые знаки, поэтому сложное отношение имеет положительный знак: $(ABCD) > 0$.

3. От перестановки местами основной и делящей пары значение сложного отношения не изменяется:

$$(CDAB) = \frac{(CDA)}{(CDB)} \cdot \frac{|CA|}{|DA|} \cdot \frac{|CB|}{|DB|} \cdot \frac{|CA| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|} = (\cancel{ABCD}).$$

Иначе говоря, можно считать, что точки С и D составляют основную пару, а точки А и В – делящую.

4. От одновременной перестановки местами точек внутри каждой пары значение сложного отношения не изменяется:

$$(BADC) = \frac{(BAD)}{(BAC)} \cdot \frac{|BD|}{|AD|} \cdot \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|BC| \cdot |AD|} \quad (\neq ABCD).$$

5. От перестановки местами точек внутри одной пары величина сложного отношения изменяется на обратную:

$$(BACD) = \frac{(BAC)}{(BAD)} \cdot \frac{|BC|}{|AC|} \cdot \frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BC| \cdot |AD|}{|AC| \cdot |BD|} = 1 : \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|} = \frac{1}{(ABCD)};$$

$$\text{или } (ABDC) = \frac{(ABD)}{(ABC)} = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{1}{(ABCD)}.$$

6. Даны три точки А, В и С, лежащие на прямой a , и сложное отношение $(A_0B_0C_0D_0)$ точек A_0, B_0, C_0 и D_0 , лежащих на прямой a_0 (рис. 5).

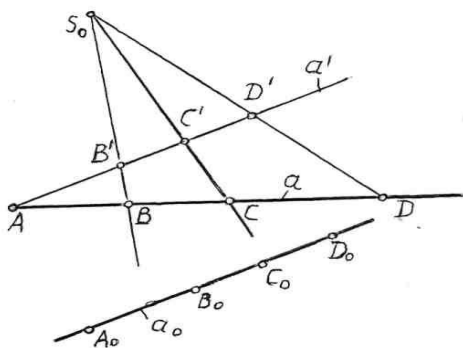


Рис. 5

Покажем построение точки $D(\in a)$, образующей с точками А, В и С сложное отношение, равное $(A_0B_0C_0D_0)$. Для этого через точку А проводим прямую a' , параллельную прямой a_0 . На прямую a' откладываем отрезки AB' , $B'C'$, $C'D'$, равные отрезкам A_0B_0 , B_0C_0 , C_0D_0 , соответственно. Тогда $(AB'C'D') = (A_0B_0C_0D_0)$. Прямые BB' и CC' пересекаются в точке S_0 , а прямые S_0D' и a – в точке D. Теперь прямую a' проецируем из центра S_0 на прямую a . Точка B' проецируется в точку В, точка C' – в точку С, точка D' – в точку D, а точка А – в точку А. При центральном проецировании сложное отношение сохраняется.

Поэтому $(ABCD) = (AB'C'D') = (A_0B_0C_0D_0)$.

4. ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЧЕТВЕРКА

Определение. Четыре точки одной прямой, сложное отношение которых равно минус единице, называются гармонической четверкой.

Если точки А, В, С и D образуют гармоническую четверку, то $(ABCD) = -1$.

Из этого равенства видно, что основная пара (точки А и В) разделяется делящей парой, т. е. когда точка С лежит между точками А и В, тогда точка D располагается вне отрезка АВ (рис. 6 а) или, наоборот, когда точка D лежит между точками А и В, тогда точка С располагается вне отрезка АВ (рис. 6 б).

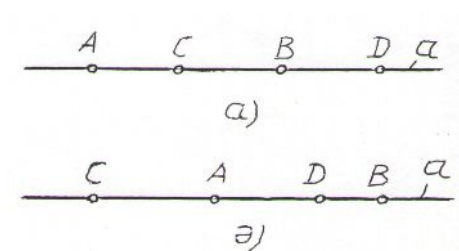


Рис. 6

Гармоническую четверку можно получить из рассмотрения биссектрис треугольника. Например, если ЕС биссектриса внутреннего, а ED – биссектриса внешнего угла Е треугольника АВЕ, то прямые ЕС и ED будут перпендикулярными между собой (рис. 7).

Известно, что биссектриса угла треугольника делит противоположную этому углу сторону на отрезки, пропорциональные смежным сторонам. Поэтому получаем два равенства:

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AE|}{|BE|} \quad \text{и} \quad \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|BE|}.$$

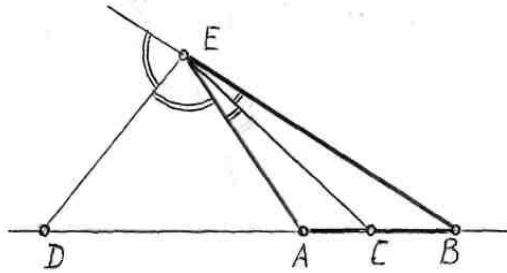


Рис. 7

Правые стороны этих равенств равны, поэтому будут равными левые их стороны.

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|BD|} \Rightarrow -\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} \Rightarrow \frac{|AC| \cdot |BD|}{|BC| \cdot |AD|} = -1 \Rightarrow (ABCD) = -1.$$

Вывод: две вершины треугольника и точки пересечения прямой, соединяющие эти вершины, внутренними и внешними биссектрисами третьей вершины образуют гармоническую четверку.

Пусть ABE равнобедренный треугольник (рис. 8).

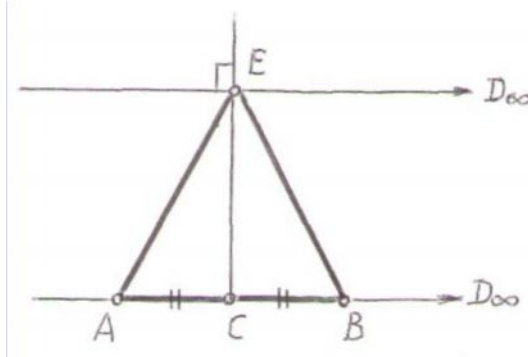


Рис. 8

Тогда $|AE| = |BE|$ и перпендикуляр, опущенный из вершины Е на основание АВ, делит его на равные части: $|AC| = |CB|$. Этот перпендикуляр совпадает внутренней биссектрисой угла Е. Внешняя биссектриса, перпендикулярная к внутренней, располагается параллельно основанию, т. е. они пересекаются в несобственной точке D_∞ . Отсюда следует вывод: концы отрезка, его середина и несобственная точка прямой, проходящей через эти три точки, образуют гармоническую четверку: $(ABCD_\infty) = -1$.

Теперь покажем построение четвертой точки, образующей с данными тремя точками гармоническую четверку. Точки А, В, С расположены на одной прямой (рис. 9), и требуется найти такую точку D на этой прямой, образующую гармоническую четверку: $(ABCD) = -1$. Для этого проводим через точки А и В прямые a и b , параллельные между собой.

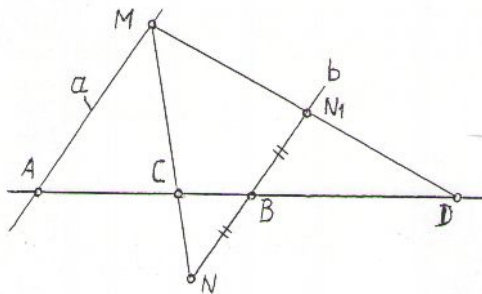


Рис. 9

Через точку С проводим прямую, пересекающую прямую a в точке М и прямую b – в точке N. Отметим точку N_1 , симметричную точке N относительно точки B ($|NB| = |BN_1|$). Прямая, проведенная через точки М и N_1 , пересекает прямую АВ в точ-

ке D. Докажем, что найденная точка D образует вместе с точками A, B и C гармоническую четверку.

$$\Delta ACM \sim \Delta BCN \Rightarrow \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AM|}{|NB|}. \quad (1)$$

$$\Delta ADM \sim \Delta BDN_1 \Rightarrow \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AM|}{|BN_1|}. \quad (2)$$

Правые стороны равенств (1) и (2) равны, так как $|NB| = |BN_1|$. Поэтому левые стороны равенств (1) и (2) будут равными:

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|BD|} \Rightarrow -\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} \Rightarrow -(\overline{ABC}) = (ABD) \Rightarrow \overline{ABCD} \quad -1$$

Что и требовалось доказать.

5. ТЕОРЕМА О ПОЛНОМ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКЕ

Определение. Полным четырехугольником называется плоская фигура, состоящая из 4-х точек, называемых вершинами, и 6 прямых, соединяющих вершины попарно и называемых сторонами.

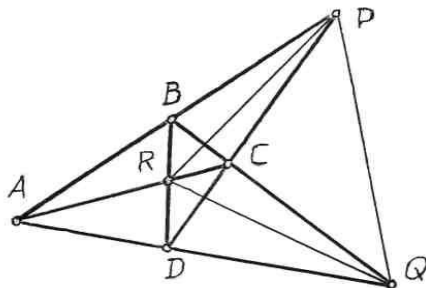


Рис. 10

На рис. 10 изображен полный четырехугольник ABCD: A, B, C, D – вершины; (AB), (AC), (AD), (BC), (BD), (CD) – стороны. Точки пересечения сторон, кроме вершин, именуются диагональными точками, а прямые, соединяющие диагональные точки – диагоналями полного четырехугольника. Диагональные точки: P, Q, R; диагонали (PR), (PQ), (RQ).

Теорема. Две диагональные точки и точки пересечения прямой, проходящей через них, двумя остальными сторонами полного четырехугольника образуют гармоническую четверку.

Доказательство. Рассмотрим полный четырехугольник ABCD (рис. 11).

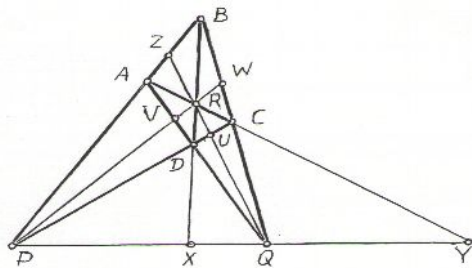


Рис. 11

Определим диагональные точки P, Q, R : $P = (AB) \cap (CD)$; $Q = (BC) \cap (AD)$; $R = (AC) \cap (BD)$. Прямая соединяющая диагональные точки P и Q , пересекается со стороной (BD) в точке X , а со стороной (AC) – в точке Y . Прямая, соединяющая диагональные точки P и R , пересекается со стороной (AD) в точке V , а со стороной (BC) – в точке W . Прямая, соединяющая диагональные точки Q и R , пересекается со стороной (AB) в точке Z , а со стороной (CD) – в точке U .

Точки P, Q, X, Y , расположенные на одной прямой, проецируем на прямую BD из центра A . Тогда точка P проецируется в точку B , точка Q – в точку D , точка X – в точку X , точка Y – в точку R . При центральном проецировании сложное отношение сохраняется: $(PQXY) = (BDXR)$. Теперь точки B, D, X, R проецируем на прямую PQ из центра C . Тогда точка B проецируется в точку Q , точка D – в точку P , точка X – в точку X , точка R – в точку Y . Поэтому $(BDXR) = (QPXY)$. Сравнивая последние два равенства, получаем, что $(PQXY) = (QPXY)$. Согласно пятому свойству, от перестановки букв внутри одной пары величина сложного отношения изменяется на обратную:

$$(PQXY) = (QPXY) \Rightarrow (PQXY) \cdot \frac{1}{(PQXY)} \Rightarrow (PQXY)^2 = 1 \Rightarrow (PQXY) = \pm 1.$$

Сложное отношение равно $+1$ тогда, когда точки P и Q совпадают. У нас P и Q – различные точки. Поэтому $(PQXY) = -1$. Аналогично рассуждая, получим $(PRVW) = -1$; $(QRUZ) = -1$.

Что и требовалось доказать.

Пример. Через данную точку X требуется провести прямую s , проходящую через недоступную точку D пересечения прямых a и b (рис. 12 а).

Решение. Сначала через точку X проводим две произвольные прямые, первая из которых пересекает прямую a в точке A , а вторая – прямая b в точке Q . Затем через точку Q проводим прямую d параллельно прямой a , которая пересекает прямую AX в точке N : $d \cap (AX) = N$. На эту прямую d отложим отрезок

6. ПОЛЮС И ПОЛЯРА. ПОЛЯРНОЕ СООТВЕТСТВИЕ

1. Пусть на плоскости задана кривая второго порядка k и произвольная точка P (рис. 13). Через точку проведем две секущие, первая из которых пересекает кривую k в точках A и B , а вторая – в точках C и D . Тогда получается полный четырехугольник $ABCD$, вписанный в кривую k . Противоположные стороны этого полного четырехугольника пересекаются в точках Q , R и P . Прямую, проходящую через точки Q и R , обозначим буквой p . Принято называть прямую p *полярной* точки P , а точку P – *полюсом* прямой p .

Определение. Полярной называется прямая, проходящая через две диагональные точки полного четырехугольника, вписанного в кривую второго порядка и имеющая полюс в третьей диагональной точке.

Если принимаем точку Q в качестве полюса, то его полярна q проходит через точки P и R . Аналогично, полярна r полюса R определяется точками P и Q . Таким образом, если полярна a точки A проходит через точку B , то полярна b точки B проходит через точку A .

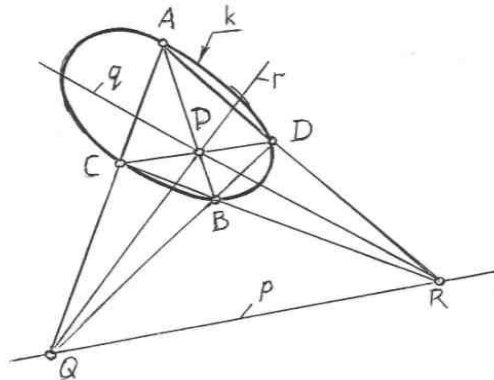


Рис. 13

Если полюс принадлежит кривой второго порядка k , то его полярой будет касательная к кривой k и проходящая через полюс. Наоборот, если полярой является касательная к кривой k , то ее полюсом будет точка касания.

Для построения полярной точки P , расположенной вне кривой второго порядка k , проводим касательные к кривой k из точки P (рис. 14).

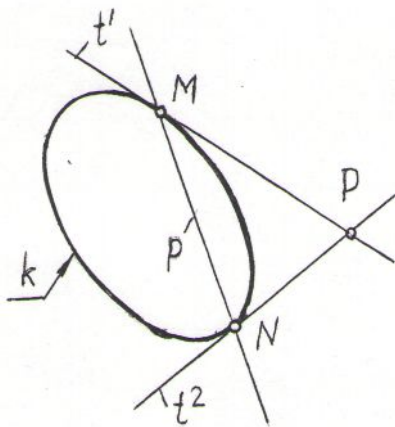


Рис. 14

Таких касательных будет две: t^1 и t^2 . Первая касательная прикасается к конике в точке M , а вторая – в точке N . Прямая p , проведенная через точки M и N , будет полярной точки P . Заметим, что полярной точки M ($\in k$) служит касательная t^1 , а полярной точки N ($\in k$) – касательная t^2 .

Если k будет окружностью, то полярна располагается перпендикулярно прямой, соединяющей полюс с центром окружности. Для построения полярной точки P проводим прямую a через точки P и O (центр окружности). Прямая b , проходящая через точку P и перпендикулярная прямой a , пересекает окружность k в точке M (рис. 15).

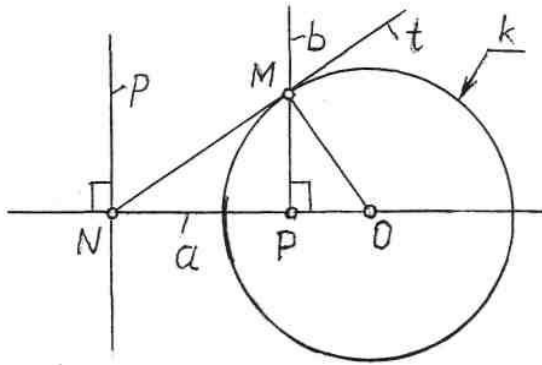


Рис. 15

Касательная к окружности, проведенная через точку касания M , пересекает прямую a в точке N : $t \cap a = N$. Тогда поляр p полюса P проводится через точку N перпендикулярно прямой a : $N \in p \perp a$.

2. Если на плоскости задана кривая второго порядка, то любой точке этой плоскости, называемой полюсом, соответствует единственная прямая той же плоскости, называемая полярной. Наоборот, любой прямой плоскости, называемой полярной, соответствует единственная точка той же плоскости, называемая полюсом. Такое взаимно однозначное соответствие называется *полярным*. Как видно, в полярном соответствии точке соответствует прямая, а прямой – точка. Нетрудно заметить, что полярное соответствие обладает свойством инволюционности.

Проецируя из произвольного центра S точки и прямые полярного соответствия на плоскости, можно получить пространственное полярное соответствие между прямыми и плоскостями (рис. 16).

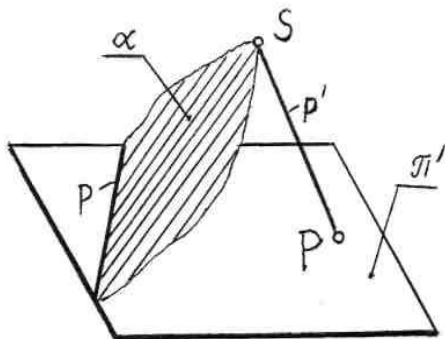


Рис. 16

Рассмотрим связку проецирующих прямых, инцидентных точке S , и связку проецирующих плоскостей так же инцидентных точке S . Тогда точке плоскости π' соответствует прямая, соединяющая эту точку с центром связки S , а прямой плоскости π' соответствует плоскость, определяемая этой прямой и точкой S . Прямую, соединяющую точки P и S , обозначим через p' , а плоскость, определяемую прямой и точкой S , — через α . Теперь между прямыми и плоскостями связки S установим соответствие следующим образом: пусть прямой p' связки прямых S соответствует плоскость α связки плоскостей S , которая перпендикулярна прямой p' , и, наоборот, плоскости α связки плоскостей S соответствует прямая p' , которая перпендикулярна плоскости α : $p' \perp \alpha$. Такое взаимно однозначное соответствие между прямыми и плоскостями связки называем *ортогонально-полярным*. Заметим, что пересекая ортогонально-полярное соответствие прямых и плоскостей плоскостью, можно получить, обратно полярное соответствие между точками и прямыми плоскости.

7. АБСОЛЮТ ПЛОСКОСТИ

В метрических задачах большое значение имеет такое преобразование, которое сохраняет перпендикулярность прямых. Поэтому прямым $a, b, c, \dots$ пучка S поставим в соответствие перпендикулярные им прямые $a', b', c', \dots$ этого же пучка (рис. 17). $a \perp a'; b \perp b'; c \perp c'; \dots$ Покажем основные свойства этого соответствия. Во-первых, сохраняются углы между прямыми: $\angle a, b = \angle a', b'$; $\angle b, c = \angle b', c'$; $\dots$ Это следует из того, что прямые a', b' соответственно перпендикулярны прямым a, b . Аналогично прямые b', c' соответственно перпендикулярны прямым b, c и т. д.

Во-вторых, это соответствие является взаимно однозначным, т. е. если прямой a соответствует перпендикулярная ей прямая a' , то прямой a' соответствует перпендикулярная ей прямая a . Другими словами, полученное соответствие является инволюцией.

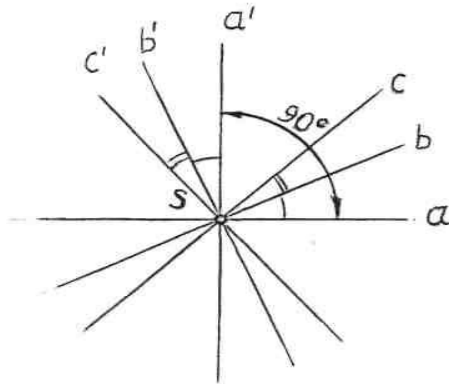


Рис. 17

Соответствие перпендикулярных прямых пучка называется *ортогональной инволюцией*. Ортогональная инволюция представляет собой эллиптическую инволюцию прямых пучка, т. к. не имеет двойных прямых.

Теперь рассмотрим сечение ортогональной инволюции, т. е. пучка S несобственной прямой. Тогда прямая a пересекает несобственную прямую в несобственной точке A_∞ , прямая b – в несобственной точке B_∞ , ..., прямая a' – в несобственной точке A'_∞ , прямая b' – в несобственной точке B'_∞ , ... На несобственной прямой получили два ряда точек (рис. 18): $A_\infty, B_\infty, \dots$ – первый ряд; $A'_\infty, B'_\infty, \dots$ – второй ряд.

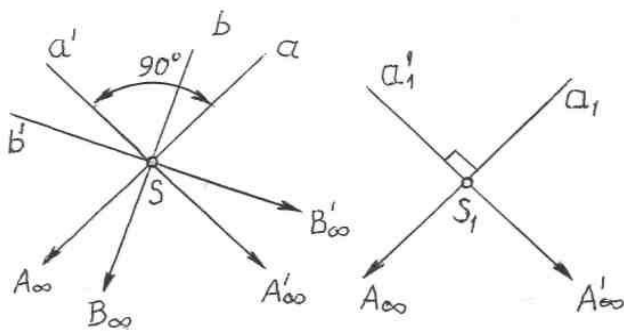


Рис. 18

Точке A_∞ первого ряда соответствует точка A'_∞ второго ряда, точке B_∞ первого ряда – точка B'_∞ второго ряда, ... и, наоборот, точке A'_∞ второго ряда соответствует точка A_∞ первого ряда, точке B'_∞ второго ряда – точка B_∞ первого ряда, ... Полученное соответствие между точками несобственной прямой называется *абсолютной инволюцией*.

Мы абсолютную инволюцию получили в результате сечения ортогональной инволюции пучка S несобственной прямой. Однако она не зависит от положения центра S пучка прямых. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пучок прямых с центром в

точке S_1 (пучок S_1 изображен на рис. 18). Прямая a_1 пучка S_1 параллельна прямой a пучка S , а прямая a'_1 — прямой a' : $a_1 \cap a = A_\infty$; $a'_1 \cap a' = A'_\infty$. Поэтому ортогональная инволюция прямых пучка S_1 определяет на несобственной прямой ту же самую инволюцию, что и ортогональная инволюция пучка S .

Определение. Две прямые, несобственные точки которых являются соответственными точками абсолютной инволюции, называются перпендикулярными.

Допустим, что несобственная точка A_∞ прямой a_1 соответствует несобственной точке A'_∞ прямой a'_1 . Тогда через точки A_∞ и A'_∞ проходят две взаимно перпендикулярные прямые ортогональной инволюции. Если обозначим их через a и a' , то $a_1 \parallel a$ и $a'_1 \parallel a'$; $a \perp a' \Rightarrow a_1 \perp a'_1$. Наоборот, две взаимно перпендикулярные прямые $(a_1 \perp a'_1)$ пересекают несобственную прямую в соответственных точках $(A_\infty$ и $A'_\infty)$ абсолютной инволюции.

Определение. Несобственная прямая и абсолютная инволюция на ней называются *абсолютom плоскости*.

нейтральная плоскости пересекаются по нейтральной линии (прямой). $\pi_2 \cap \alpha = q$ – нейтральная прямая. Плоскость, проходящая через точку зрения параллельно предметной плоскости, называется *плоскостью горизонта*. $S \in \beta \parallel \pi_2$; β – плоскость горизонта. Прямая, по которой пересекаются картинная плоскость и плоскость горизонта, называется *линией горизонта*. $\pi' \cap \beta = h$; $h \parallel \pi_2$; h – линия горизонта.

Линия горизонта представляет собой центральную проекцию несобственной прямой предметной плоскости на картинную плоскость из центра S . Если опустить перпендикуляр из точки зрения на картинную плоскость, то его основание принадлежит линии горизонта. $S \in (SP) \perp \pi'$; $(SP) \cap \pi' = P$; $P \in h$; P – *главная точка картины*. На линию горизонта откладывают отрезки, равные расстоянию от точки S до плоскости π' , начиная от главной точки картины. $|PM^1| = |PM^2| \neq |S\pi| \neq |SP|$; $M^1 \in h$; $M^2 \in h$. Полученные точки M^1 и M^2 называют *масштабными*. Главная точка картины является проекцией несобственной точки прямых, перпендикулярных картинной плоскости. Масштабная точка является центральной проекцией несобственной точки прямых, параллельных предметной плоскости и образующих угол в 45° с картинной плоскостью.

Картинная и предметная плоскости пересекаются по прямой, называемой основанием картины. $\pi' \cap \pi_2 = h_2$; $h_2 \parallel h$; h_2 – *основание картины*.

Часть пространства, расположенная правее плоскости π' , называется предметным пространством. Часть пространства, расположенная левее плоскости α , называется мнимым пространством. Часть пространства, расположенная между плоскостями π' и α , называется нейтральным пространством.

Обычно изображаемую фигуру располагают в предметном пространстве над предметной плоскостью и определяют ее прямоугольную проекцию на предметной плоскости. Затем фигуру и ее прямоугольную проекцию на предметной плоскости про-

ецируют на картинную плоскость из центра, расположенного в точке зрения. Считается, что плоскость π' на чертеже совмещена плоскостью чертежа (рис. 20).

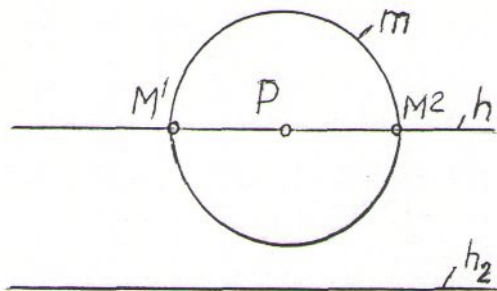


Рис. 20

На чертеже (картине) изображаются линия горизонта h , основание картины h_2 и при необходимости указывается главная точка картины P , масштабные точки M^1 и M^2 , а также масштабная окружность m . Масштабная окружность m принадлежит картинной плоскости, Центр ее находится в главной точке картины P и проходит через масштабные точки M^1 и M^2 . Масштабная окружность является геометрическим местом центральных проекцией несобственных точек прямых, образующих с картинной плоскостью угол в 45° .

9. ПЕРСПЕКТИВА ТОЧКИ

Для построения изображения точки A , расположенной в предметном пространстве, опускают из этой точки перпендикуляр предметной плоскости. Точку пересечения этого перпендикуляра и плоскости π_2 называют основанием точки: $(AA_2) \perp \pi_2$; $(AA_2) \cap \pi_2 = A_2$; A_2 – основание точки A . Затем точку A и ее основание A_2 надо проецировать на плоскость π' из центра S . Проецирующие прямые AS и A_2S пересекают картинную плоскость соответственно в точках A' и A'_2 : $(AS) \cap \pi' = A'$; $(A_2S) \cap \pi' = A'_2$ (рис. 21). A' является перспективой точки A , а A'_2 – перспективой основания точки A . $(A'A'_2) \perp h$, т. е. перспектива точки и перспектива ее основания располагаются на одной прямой, перпендикулярной к линии горизонта. На рис. 21 показано еще построение перспективы B' и перспективы основания B'_2 точки B , расположенной на одном перпендикуляре с точкой A : $(AB) \perp \pi_2$.

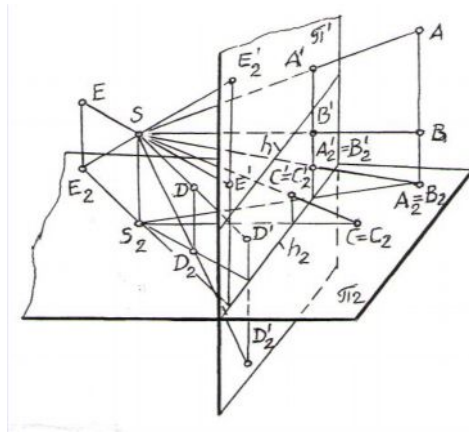


Рис. 21

Перспектива точки, расположенной выше плоскости горизонта, располагается выше линии горизонта, а перспектива точ-

ки, расположенной ниже плоскости горизонта, располагается ниже линии горизонта. Поэтому можно сказать, что точка А расположена выше, а точка В – ниже плоскости горизонта. Точка и основание этой точки, принадлежащей предметной плоскости, совпадают. Поэтому $C' = C'_2$, так как $C \in \pi_2$.

Перспектива основания D_2 точки D нейтрального пространства располагается ниже основания картины, а перспектива E'_2 основания точки E мнимого пространства – выше линии горизонта. Изображения перечисленных точек А, В, С, D и E на картине представлены на рис. 22.

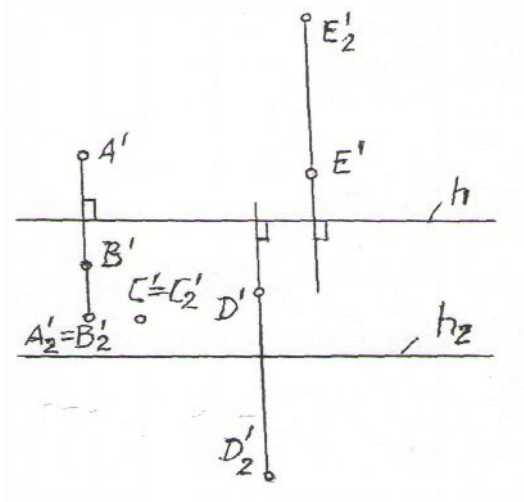


Рис. 22

Таким образом, каждой точке пространства на картине соответствуют две точки, расположенные на одной прямой, перпендикулярной к линии горизонта.

10. ПЕРСПЕКТИВА ПРЯМОЙ

В линейной перспективе прямая определяется своими двумя проекциями. Рассмотрим прямую a общего положения (рис. 23). a' – перспектива прямой a .

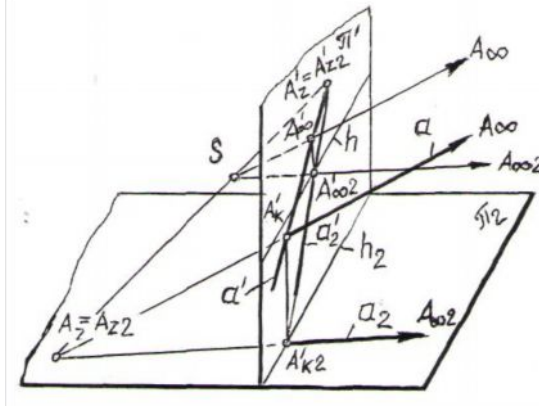


Рис. 23

Прямая a' определяется как линия пересечения плоскостей π' и $\gamma(S, a)$: $\pi' \cap \gamma = a'$. Прямоугольная проекция a_2 прямой a на предметную плоскость называется основанием этой прямой. $\delta(S, a_2) \cap \pi' = a'_2$; a'_2 – перспектива основания прямой a .

Точка пересечения прямой и картинной плоскости называется *картинным следом* прямой. $a \cap \pi' = A'_k$; A'_k – картинный след прямой a .

Точка пересечения прямой и предметной плоскости называется *предметным следом* прямой. $a \cap \pi_2 = A_z$; A_z – предметный след прямой a . $a \cap a_2 = A_z = A_{z2}$.

Перспектива несобственной точки прямой называется *точкой схода*. $(SA_\infty) \parallel a$; $(SA_\infty) \cap \pi' = A'_\infty$; A'_∞ – точка схода прямой a . Перспектива основания точки схода принадлежит линии гори-

зонта. $(SA_{\infty 2}) \parallel a_2$; $(SA_{\infty 2}) \cap \pi' = A'_{\infty 2}$; $A'_{\infty 2} \in h$. Запись $a(a', a'_2)$ означает, что прямая a задана на картине своей перспективой a' и перспективой основания a'_2 .

Нетрудно построить следы и точку схода прямой a , заданной перспективой a' и перспективой основания a'_2 . Для построения картинного следа прямой находим точку пересечения перспективы основания прямой и основания картины: $a'_2 \cap h_2 = A'_{k2}$. Точка пересечения прямой, проведенной через точку A'_{k2} перпендикулярно линии горизонта, и перспективы a' будет искомым картинным следом: $(A'_{k2}A'_k) \perp h$; $(A'_{k2}A'_k) \cap a' = A'_k$ (рис. 24).

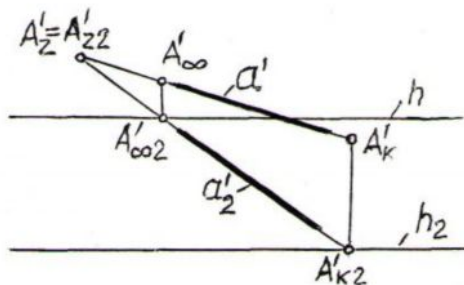


Рис. 24

Предметный след определяется как точка пересечения перспективы и перспективы основания: $a' \cap a'_2 = A'_z = A'_{z2}$. Для построения точки схода прямой достаточно провести прямую через точку пересечения перспективы ее основания и линии горизонта перпендикулярно последней, до пересечения перспективой заданной прямой: $a'_2 \cap h = A'_{\infty 2}$; $(A'_{\infty 2}A'_\infty) \perp h$; $(A'_{\infty 2}A'_\infty) \cap a' = A'_\infty$. A'_∞ – точка схода; $A'_{\infty 2}$ – перспектива основания точки схода. Отметим, что точка A'_∞ является точкой схода всех прямых, параллельных прямой a . Ясно, что прямая на кар-

тине может быть задана двумя следами или одним следом и точкой схода.

Теперь обратите внимание на изображения прямых частного положения на картине (рис. 25).

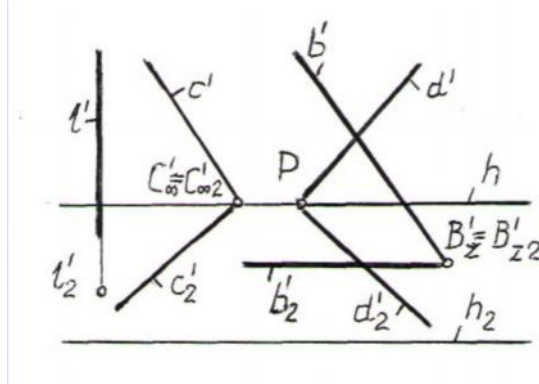


Рис. 25

Если прямая расположена параллельно картинной плоскости, то ее картинный след будет несобственной точкой. Поэтому перспектива ее основания располагается параллельно линии горизонта. Перспектива основания b'_2 прямой b параллельна основанию картины: $b'_2 \parallel h$. Поэтому прямая b расположена в пространстве параллельно картине. $b' \cap b'_2 = B'_z = B'_{z2}$ – предметный след прямой b . Ясно, что точка схода такой прямой будет несобственной точкой.

Прямая, параллельная предметной плоскости, параллельна своему основанию: $c \parallel \pi_2 \Rightarrow c \parallel c_2$. Поэтому точка ее схода лежит на линии горизонта: $c' \cap c'_2 = C'_\infty = C'_{\infty 2} \in h \Rightarrow c \parallel \pi_2$. Перспектива и перспектива основания таких прямых пересекаются на линии горизонта.

Прямая, перпендикулярная картинной плоскости, параллельна предметной плоскости. В отличие от горизонтальных прямых все такие прямые, перпендикулярные картинной плос-

кости, сходятся в главной точке картины. Например:
 $d' \cap d'_2 = P \Rightarrow d \perp \pi'$.

Основанием прямой, перпендикулярной плоскости π_2 , будет точка, а точка проецируется в точку. Проецирующая плоскость, определяемая заданной прямой и центром проецирования, пересекает картинную плоскость по прямой, перпендикулярной линии горизонта. На рис. 25 задана прямая $l(l', l'_2)$. Перспектива l' перпендикулярна h , а перспектива основания l'_2 – точка. Следовательно, прямая $l(l', l'_2)$ расположена в пространстве перпендикулярно предметной плоскости: $l \perp \pi_2$.

11. ПЕРСПЕКТИВА ПЛОСКОСТИ

Линию пересечения плоскости картинной плоскостью называют *картинным следом*, линию пересечения предметной плоскостью – *предметным следом плоскости*. $\alpha \cap \pi' = f_{\alpha k}$; $f_{\alpha k}$ – картинный след плоскости α . $\alpha \cap \pi_2 = h_{\alpha 2}$; $h_{\alpha 2}$ – предметный след плоскости α (рис. 26). $f_{\alpha k} \cap h_{\alpha 2} = H_{\alpha} \in h_2$.

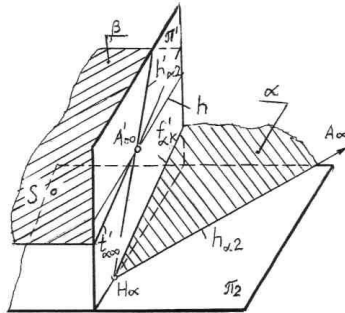


Рис. 26

Следы плоскости пересекаются в точке, лежащей на основании картины. Если A_{∞} – несобственная точка предметного следа, то перспектива A'_{∞} этой точки лежит на линии горизонта: $A'_{\infty} \in h$. Центральная проекция $h'_{\alpha 2}$ предметного следа $h_{\alpha 2}$ проходит через точки H_{α} и A'_{∞} .

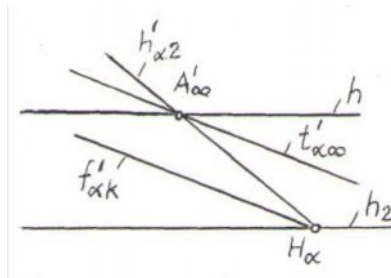


Рис. 27

Перспективу несобственной прямой плоскости называют *линией схода*, т. к. эта линия является общей для всех параллельных плоскостей. Линия схода проходит через точку A'_∞ и располагается параллельно картинному следу плоскости: $A'_\infty \in t'_{\alpha\infty} \parallel f'_{\alpha k}$. $t'_{\alpha\infty}$ – линия схода плоскости α . На рис. 27 представлена картина, где изображены перспективы картинного следа $f_{\alpha k}$ и предметного следа $h_{\alpha 2}$, а также линия схода $t'_{\alpha\infty}$ плоскости α . На картине достаточно показать перспективы обоих следов или перспективу одного из следов и линию схода плоскости. Если заданы перспективы следов, то можно построить линию схода. Перспектива предметного следа пересекает линию горизонта в точке A'_∞ . Линия схода проводится через точку A'_∞ параллельно перспективе картинного следа плоскости: $h'_{\alpha 2} \cap h = A'_\infty$; $A'_\infty \in t'_{\alpha\infty} \parallel f'_{\alpha k}$. Если заданы перспектива $f'_{\alpha k}$ картинного следа $f_{\alpha k}$ и линия схода $t'_{\alpha\infty}$, то перспектива предметного следа $h'_{\alpha 2}$ соединяет точки A'_∞ и H_α : $h'_{\alpha 2}(A'_\infty, H_\alpha)$. Здесь H_α – точка пересечения перспективы картинного следа плоскости α и основания картины.

Можно построить перспективу следов и линию схода плоскости заданной перспективой и перспективой оснований, определяющих эту плоскость геометрических элементов. В качестве примера рассмотрим построение следов и линии схода плоскости β , заданной пересекающимися в точке М прямыми с и d (рис. 28). Определяются предметные следы С и D прямых с и d, которые определяют предметный след $h_{\beta 2}$ плоскости β .

Определяются картинные следы C_k и D_k прямых с и d, которые определяют картинный след $f_{\beta k}$ плоскости β . Следы $h_{\beta 2}$ и $f_{\beta k}$ пересекаются в точке H_β , принадлежащей основанию картины: $h_{\beta 2} \cap f_{\beta k} = H_\beta \in h_2$. Перспектива $h'_{\beta 2}$ предметного следа

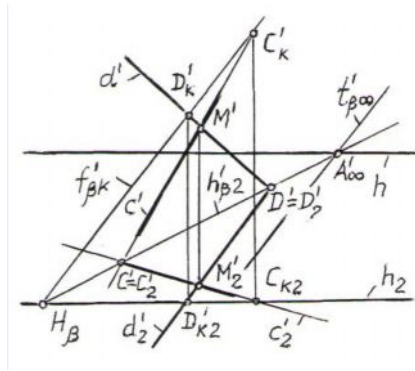


Рис. 28

$h_{\beta 2}$ пересекает линию горизонта в точке A'_∞ , представляющей перспективу несобственной точки прямой $h_{\beta 2}$. Линия схода $t'_{\beta\infty}$ плоскости β проводится через точку A'_∞ параллельно ее картинному следу: $A'_\infty \in t'_{\beta\infty} \parallel f'_{\beta k}$.

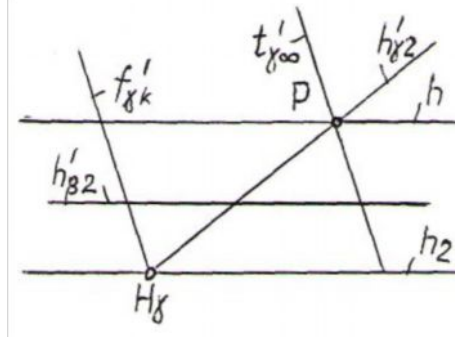


Рис. 29

Линия схода и картинный след плоскости, параллельной картине, совпадают, причем эта совпавшая линия будет несобственной прямой картинной плоскости. Предметный след такой плоскости располагается параллельно основанию картины. На

Точку A' будем искать на этой прямой. Через точку A'_2 проводим произвольную прямую b'_2 , которая пересекается основанием картины в точке C'_2 и осью родства в точке B'_2 : $A'_2 \in b'_2$; $b'_2 \cap h_2 = C'_2$; $b'_2 \cap h'_{\alpha_2} = B'_2$. Ось родства представляет собой геометрическое место двойных точек. Поэтому $B' = B'_2$. Основанию картины соответствует картинный след $f'_{\alpha k}$. Точка C' , соответствующая точке C'_2 принадлежит прямой $f'_{\alpha k}$. $(C'_2 C') \perp h$; $(C'_2 C') \cap f'_{\alpha k} = C'$. Тогда прямая b' , соответствующая прямой b'_2 , определяется точками B' и C' . На этой прямой b' находится искомая точка A' : $A'_2 \in (A'_2 A') \perp h$; $(A'_2 A') \cap b' = A'$.

12. ОСНОВНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

12.1. Взаимное расположение прямых. По изображениям на картине легко определить взаимное расположение данных прямых. Прямые a и b (рис. 31) пересекаются в несобственной точке C_∞ : $a \cap b = C_\infty$, поэтому они параллельны между собой. Прямые c и d пересекаются в точке E , т. к. $c' \cap d' = E'$; $c'_2 \cap d'_2 = E'_2$; $(E'E'_2) \perp h$.

Как видно из картины, прямые d и k не параллельны между собой и не пересекаются. Это означает, что прямые d и k скрещиваются. Прямые c и k тоже скрещиваются.

12. 2. Построение недостающей проекции прямой, принадлежащей плоскости. Как известно, если две точки прямой принадлежат плоскости, то все остальные точки этой прямой также принадлежат этой плоскости. Если точка M лежит на прямой a , принадлежащей плоскости α , то точка лежит на этой плоскости: $M \in a \subset \alpha \Rightarrow M \in \alpha$.

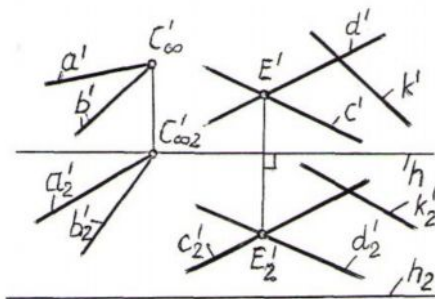


Рис. 31

Следы прямых, принадлежащих плоскости, лежат на соответствующих следах этой плоскости.

Пример 1. Требуется построить перспективу l' прямой l , принадлежащей плоскости α , заданной параллельными прямыми a и b , если известна перспектива l'_2 ее основания (рис. 32).

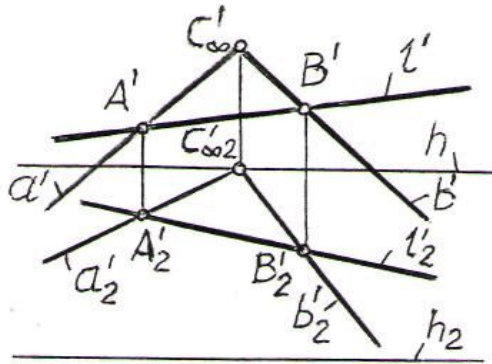


Рис. 32

Решение. Если прямая l лежит в плоскости $\alpha(a||b)$, то она пересекает прямую a в точке A и прямую b в точке B . $a'_2 \cap l'_2 = A'_2$; $b'_2 \cap l'_2 = B'_2$; $(A'_2A') \parallel (B'_2B') \perp h$; $(A'_2A') \cap a' = A'$; $(B'_2B') \cap b' = B'$. Прямая l' , соединяющая найденные точки A' и B' , является искомой перспективой l' прямой l , принадлежащей плоскости $\alpha(a||b)$. Действительно: $A \in a \subset \alpha \Rightarrow A \in \alpha$; $B \in b \subset \alpha \Rightarrow B \in \alpha$. Таким образом, прямая $l(l', l'_2)$ лежит в плоскости $\alpha(a||b)$, т. к. две ее точки A и B принадлежат этой плоскости.

Пример 2. Требуется построить перспективу отрезка AB ($A'_2B'_2$), лежащего в плоскости β , заданной перспективой $f'_{\beta k}$ картинного следа и линией схода $t'_{\beta\infty}$ (рис. 33).

Решение. Прямая $A'_2B'_2$ пересекает прямую h_2 в точке M'_{k_2} и линию горизонта в точке $N'_{\infty 2}$: $(A'_2B'_2) \cap h_2 = M'_{k_2}$ и $(A'_2B'_2) \cap h = N'_{\infty 2}$.

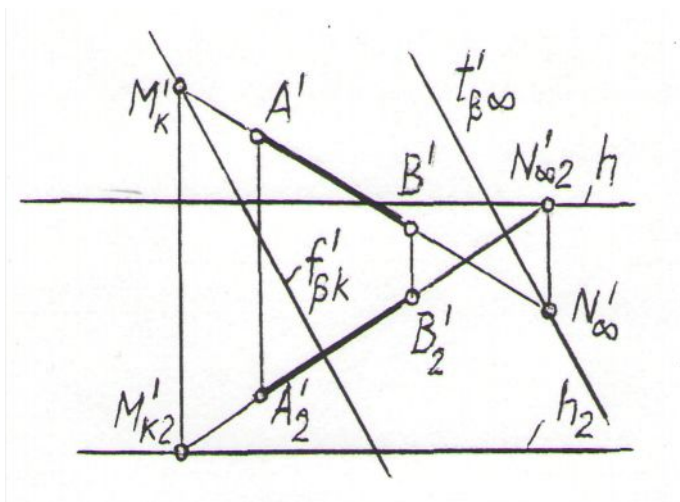


Рис. 33

M'_{k2} – перспектива основания картинного следа, $N'_{\infty 2}$ – основание точки схода прямой AB . Поэтому перспектива картинного следа M'_k принадлежит прямой $f'_{\beta k}$, а точка схода N'_{∞} – линии

схода $t'_{\beta\infty} : (M'_{k2}M'_k) \parallel (N'_{\infty 2}N'_{\infty}) \perp h$; $(M'_{k2}M'_k) \cap f'_{\beta k} = M'_k$; $(N'_{\infty 2}N'_{\infty}) \cap t'_{\beta\infty} = N'_{\infty}$. На прямой, соединяющей найденные точки

M'_k и N'_{∞} , определяются точки A' и B' : $(A'_2A') \parallel (B'_2B') \perp h$; $(A'_2A') \cap (M'_kN'_{\infty}) = A'$; $(B'_2B') \cap (M'_kN'_{\infty}) = B'$. Отрезок $A'B'$ является перспективой отрезка AB .

12.3. Построение линии пересечения плоскостей. Параллельные плоскости имеют общую линию схода, а их картинные следы располагаются параллельно. Построим линию пересечения плоскостей $\alpha(f_{\alpha k} \cap h_{\alpha 2})$ и $\beta(f_{\beta k} \cap h_{\beta 2})$, заданных следами (рис. 34).

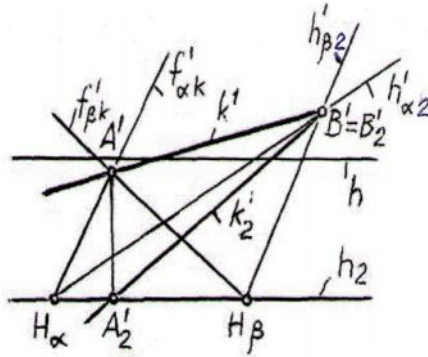


Рис. 34

Ясно, что точки пересечения A и B одноименных следов принадлежат линии пересечения плоскостей. Картинные следы пересекаются в точке $f'_{\alpha k} \cap f'_{\beta k} = A'$; $(A'A'_2) \perp h$; $(A'A'_2) \cap h_2 = A'_2$; $A(A', A'_2)$. Предметные следы пересекаются в точке B : $h'_{\alpha 2} \cap h'_{\beta 2} = B'$; $B'_2 = B'$; $B(B', B'_2)$. Прямая k' , проведенная через точки A' и B' , является перспективой, а прямая k'_2 , проведенная через точки A'_2 и B'_2 , — перспективой основания искомой линии пересечения плоскостей α и β : $\alpha(f_{\alpha k} \cap h_{\alpha 2}) \cap \beta(f_{\beta k} \cap h_{\beta 2}) = k(k', k'_2)$.

12.4. Построение точки пересечения прямой и плоскости. Для определения взаимного расположения прямой и плоскости через данную прямую проводят вспомогательную плоскость. Определяют линию пересечения данной и вспомогательной плоскостей. Линия пересечения и данная прямая могут располагаться в трех различных положениях:

- если они располагаются параллельно, то данная прямая параллельно данной плоскости;
- если они совпадают, то это означает, что данная прямая принадлежит данной плоскости;

– если пересекаются в собственной точке, то эта точка является точкой пересечения данных прямой и плоскости.

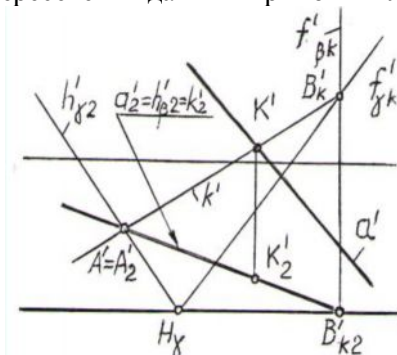


Рис. 35

На рис. 35 показано построение точки пересечения прямой $a(a', a'_2)$ и плоскости $\gamma(f_{\gamma k} \cap h_{\gamma 2})$. Для этого через прямую a проведена вспомогательная плоскость β , перпендикулярная плоскости π_2 . Перспектива предметного следа вспомогательной плоскости совпадает с перспективой основания прямой a : $h'_{\beta 2} = a'_2$, а картинный след $f'_{\beta k}$ располагается перпендикулярно линии горизонта: $f'_{\beta k} \perp h$. Построение линии пересечения двух плоскостей показано на рис. 34. $\gamma(f_{\gamma k} \cap h_{\gamma 2}) \cap \beta(f_{\beta k} \cap h_{\beta 2}) = k(k', k'_2)$. Линия пересечения k и данная прямая a пересекаются в искомой точке K пересечения данных прямой и плоскости: $a \cap \gamma = K(K', K'_2)$.

Для построения точки пересечения прямой и плоскости можно использовать родственное соответствие, порождаемое между перспективой и перспективой основания плоскости общего положения. Как было указано выше, осью такого соответствия является перспектива предметного следа плоскости, а направление родства перпендикулярно линии горизонта. Задача сводится к определению точки прямой, перспектива и перспектива основания которой будут соответственными точками в родстве, определяемом данной плоскостью.

13. ОСНОВНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

В позиционных задачах исследовалось взаимное расположение фигур: инцидентность, параллельность и пересечение. В метрических задачах определяются длины отрезков, натуральные величины углов и площадей. Решения метрических задач связаны с вопросами перпендикулярности прямых и плоскостей. Поэтому для решения метрических задач на картине необходимо наличие абсолюта плоскости. В линейной перспективе абсолют предметной плоскости определяется линией горизонта, главной точкой картины P и масштабными точками M^1 и M^2 (рис. 36).

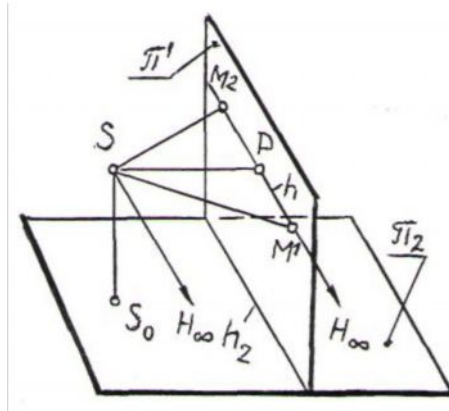


Рис. 36

Известно, что $|PM^1| = |PM^2| = |PS|$ и $(SM^1) \perp (SM^2)$; h – перспектива несобственной прямой предметной плоскости. Четвертой точкой, образующей с точками M^1, P, M^2 гармоническую четверку, является несобственная точка H_∞ линии горизонта: $(M^1PM^2H_\infty) = -1$.

13.1. Определение длины отрезка

13.1.1. Определение длины отрезка предметной плоскости

Пример 1. Для построения длины отрезка предметной плоскости, расположенного параллельно картинной плоскости, достаточно взять произвольную точку на линии горизонта; провести две прямые, соединяющие ее с концами данного отрезка. Для отрезка AB , изображенного на рис. 37, имеем: $A' = A'_2$; $B' = B'_2$; $(A'B') \parallel h_2$; $C'_\infty \in h$; $(A'C'_\infty) \cap h_2 = A_0$; $(B'C'_\infty) \cap h_2 = B_0$.

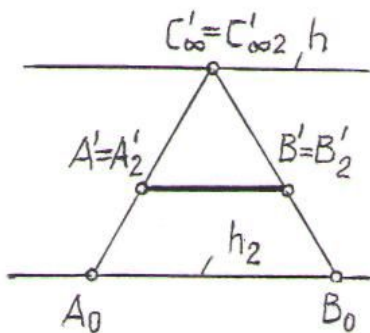


Рис. 37

Четырехугольник $A'B'B_0A_0$ является перспективой параллелограмма, т. к. $(A_0A') \parallel (B_0B')$. Противоположные стороны параллелограмма равны: $|AB| = |A_0B_0|$.

Пример 2. Для определения длины отрезка предметной плоскости, перпендикулярного картинной плоскости, можно воспользоваться прямоугольным треугольником, одним катетом которого является данный отрезок, и вторым катетом, расположенном параллельно картинной плоскости. Перпендикулярный плоскости π' отрезок CD принадлежит плоскости π_2 (рис. 38). $C' = C'_2$; $D' = D'_2$; $(C'D') \in P$.

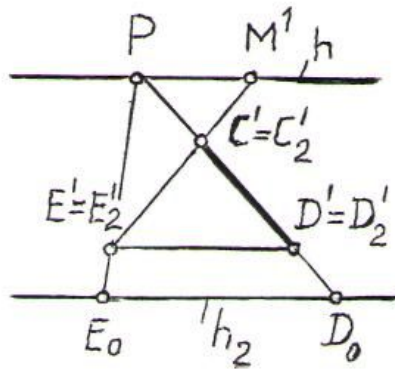


Рис. 38

Через точку C' проводим прямую, соединяющую ее масштабной точкой M^1 , а через точку D' , – параллельную основанию картины. Проведенные прямые пересекаются в точке E' . Известно, что прямая CE наклонена картинной плоскости под углом в 45° . Поэтому треугольник CDE является равнобедренным и прямоугольным треугольником, у которого $\angle D = 90^\circ$, $\angle C = \angle E = 45^\circ$. Поэтому $|CD| = |DE|$. Определим длину отрезка DE (предыдущий пример). Прямые $D'P$ и $E'P$ пересекают основание картины в точках D_0 и E_0 . Полученный четырехугольник $D'E'E_0D_0$ является перспективой параллелограмма. Поэтому $|CD| = |DE| = |D_0E_0|$.

Пример 3. Для определения длины произвольного отрезка предметной плоскости удобно использовать прямую равного наклона к данному отрезку и основанию картины (рис. 39). На плоскости π_2 через точку A проведем прямую, одинаково наклоненную прямым AB и h_2 . Эта прямая пересекается основанием картины в точке A'_0 .

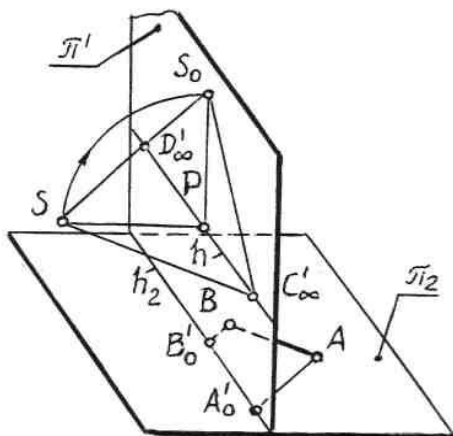


Рис. 39

Через точку В проводим прямую, параллельную прямой AA'_0 и пересекающую основание картины в точке B'_0 . $\angle AA'_0B'_0 = \angle BAA'_0$. Через центр проецирования проводим прямую, параллельную прямой АВ и пересекающую линию горизонта в точке C'_∞ , а через точку S проводим прямую, параллельную прямой AA'_0 пересекающую h в точке D'_∞ . C'_∞ – точка схода прямой АВ, а D'_∞ – точка схода прямой AA'_0 . Треугольник $C'_\infty SD'_\infty$ – равнобедренный, т.е. $|SC'_\infty| = |D'_\infty C'_\infty|$. Вращением вокруг линии горизонта совмещаем этот треугольник с плоскостью картины.

Теперь покажем построение длины произвольного отрезка АВ плоскости π_2 на картине (рис. 40). Определим точку схода C'_∞ прямой АВ: $(A'B') \cap h = C'_\infty$.

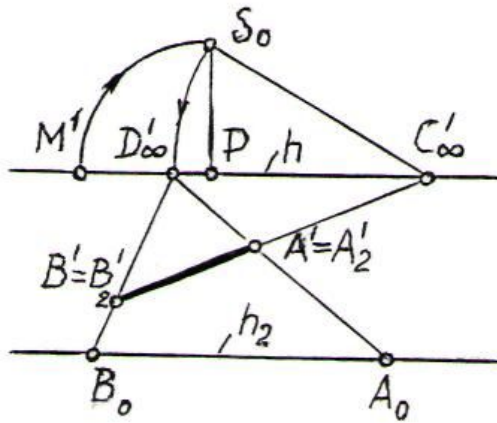


Рис. 40

Восстановим перпендикуляр к линии горизонта в главной точке и отложим на этот перпендикуляр отрезок, равный расстоянию от точки зрения до картинной плоскости. $(PS_0) \perp h$; $|PS_0| = |PM_1|$. Окружность, проведенная из центра C'_∞ и проходящая через точку S_0 , пересекает линию горизонта в точке D'_∞ . Прямая $A'D'_\infty$ пересекает прямую h_2 в точке A_0 , а прямая $B'D'_\infty$ – в точке B_0 . Полученный таким образом четырехугольник $A'B'B_0A_0$ является перспективой равнобедренной трапеции. Отрезки AA_0 и BB_0 – основания, а отрезки AB и A_0B_0 – боковые стороны этой трапеции. Поэтому $|AB| = |A_0B_0|$.

13.1.2. Определение длины отрезка, перпендикулярного предметной плоскости Изображенный на рис. 41 отрезок AB перпендикулярен предметной плоскости, т. е. его перспектива перпендикулярна к линии горизонта, а перспектива основания изображена в точку.

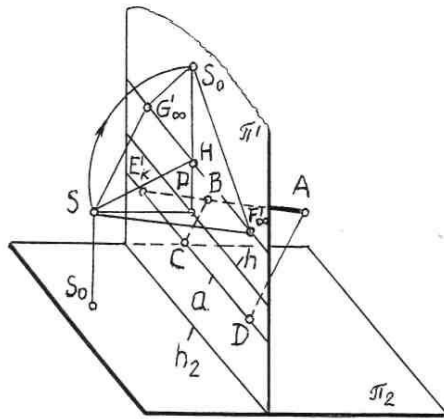


Рис. 42

D и C. $(AD) \parallel (BC)$; $(AD), ^\wedge(AB) = (CD), ^\wedge(AD)$. Определим точку схода прямой AB. Для этого через точку S проводим прямую, параллельную прямой AB и пересекающую картинную плоскость в точке F'_∞ . Аналогично определяется точка схода D'_∞ прямой AD. Отметим, что прямая $F'_\infty D'_\infty$ параллельна прямой h. Прямая, проходящая через главную точку картины и перпендикулярная линии горизонта, пересекает прямую $F'_\infty D'_\infty$ в точке H. Совместим вращением вокруг прямой $F'_\infty D'_\infty$ треугольник $F'_\infty S D'_\infty$ с картинной плоскостью. При вращении точка S опишет окружность из центра H в плоскости, перпендикулярной прямой $F'_\infty D'_\infty$. Радиус этой окружности (отрезок SH) определяется как гипотенуза прямоугольного треугольника, катеты которого равны соответственно масштабному расстоянию $|SP| = |PM^1|$ и расстоянию от главной точки картины до прямой $F'_\infty D'_\infty$. Эта окружность пересекает прямую PH в точке S_0 . Тогда получается равнобедренный треугольник $F'_\infty S_0 D'_\infty$, принадлежащий картинной плоскости.

13.2. Определение угла между прямыми

13.2.1. Определение натуральной величины угла между прямыми предметной плоскости

Рассмотрим построение натуральной величины угла φ между пересекающимися в точке T прямыми a и b предметной плоскости (рис. 44).

Через точку S проводим прямую, параллельную прямой a , и находим точку пересечения A'_∞ прямых SA'_∞ и h . Аналогично, через точку S проводим прямую, параллельную прямой b , и находим ее пересечения с линией горизонта: $(SB'_\infty) \cap h = B'_\infty$. $\angle A'_\infty SB'_\infty = \varphi$. Треугольник $A'_\infty SB'_\infty$ вращением вокруг прямой h совмещаем с картиной. Точки A'_∞ и B'_∞ , принадлежащие оси вращения, остаются неподвижными. Точка S опишет окружность с центром в точке P , плоскость которой располагается перпендикулярно линии горизонта. Эта окружность пересекает плоскость π' в точке S_0 . $\triangle A'_\infty SB'_\infty \rightarrow \triangle A'_\infty S_0 B'_\infty$.

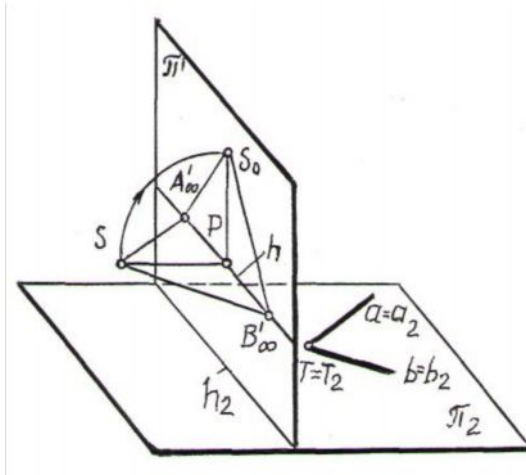


Рис. 44

На картине для определения натуральной величины угла между прямыми $a(a' = a'_2)$ и $b(b' = b'_2)$ достаточно провести прямые, соединяющие точку S_0 с точками схода прямых a и b (рис. 45).

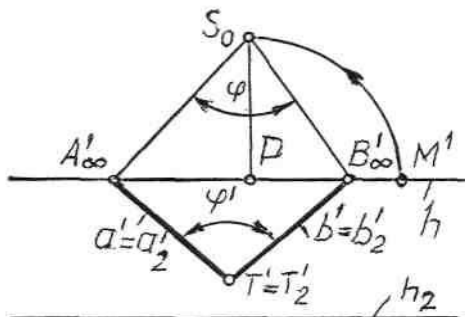


Рис. 45

Точка S_0 определяется как точка пересечения окружности, проведенной из центра P и проходящей через точку M^1 , и перпендикуляра, восстановленного к линии горизонта в точке P : $(PS_0) \perp h$; $|PS| = |PM^1|$. $\angle A'_\infty S_0 B'_\infty = (a \wedge b)$.

Пример 1. Требуется построить перспективу биссектрисы угла между пересекающимися в точке T прямыми s и d предметной плоскости (рис. 46).

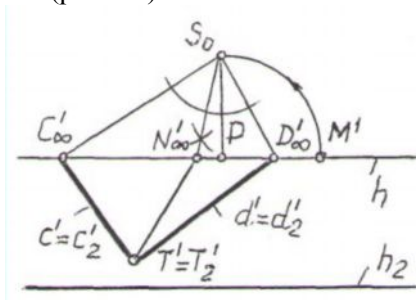


Рис. 46

$\angle A'_\infty S B'_\infty = \varphi$. Треугольник $A'_\infty S B'_\infty$ совмещаем с картинной плоскостью путем вращения вокруг стороны $A'_\infty B'_\infty$. При вращении точка S опишет из центра Н окружность, расположенную в плоскости, перпендикулярной прямой $A'_\infty B'_\infty$. Точки A'_∞ и B'_∞ неподвижны, как точки, принадлежащие оси вращения. $P \in (PH) \perp (A'_\infty B'_\infty)$; $(PH) \cap (A'_\infty B'_\infty) = H$; $|SH| = |HS_0|$. Точку S_0 соединяем отрезками прямыми точками A'_∞ и B'_∞ . $\triangle A'_\infty S B'_\infty \cong \triangle A'_\infty S_0 B'_\infty$. Поэтому $\angle A'_\infty S B'_\infty = \angle A'_\infty S_0 B'_\infty = \varphi$.

На рис. 49 показано построение натуральной величины угла между скрещивающимися прямыми $a(a', a'_2)$ и $b(b', b'_2)$.

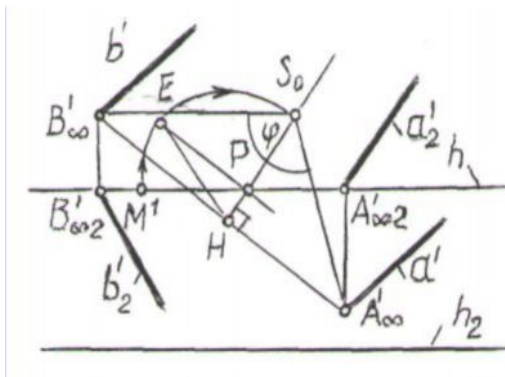


Рис. 49

Сначала определены точки схода A'_∞ и B'_∞ данных прямых a и b . На прямую $A'_\infty B'_\infty$ опущен перпендикуляр из главной точки картины. Точка Н – основание этого перпендикуляра. Определена натуральная величина ЕН радиуса вращения построением прямоугольного треугольника ЕРН. $(EP) \parallel (A'_\infty B'_\infty)$; $|EP| = |M^1 P|$. Окружность, проведенная из центра Н радиусом $|EH|$, пересекает прямую РН в точке S_0 . Проводим отрезки

$A'_\infty S_0$ и $B'_\infty S_0$, угол между которыми будет искомым:
 $\angle A'_\infty S_0 B'_\infty = \varphi \quad (a, ^\wedge b)$.

13.3. Построение натуральных величины плоской фигуры

Рассмотрим плоскость общего положения $\alpha (S \notin \alpha; \alpha \neq \pi')$. Если проецировать точки этой плоскости на картинную плоскость из точки зрения S , то между точками плоскостей α и π' устанавливается перспективное соответствие. Плоскость α вращением вокруг картинного ее следа совмещается с плоскостью π' . Тогда между совмещенными точками плоскости α и их перспективами определяется гомология. При этом плоскость, проходящая через центр проецирования и параллельная плоскости α , вращается вокруг линии схода, а точка зрения S опишет окружность, плоскость которой перпендикулярна оси вращения. Эта окружность пересекает картину в точке S_0 , которая служит центром гомологии. Осью гомологии будет картинный след плоскости (рис. 50). $f'_{\alpha k}$ – картинный след плоскости α ; t'_{α_∞} – линия схода плоскости α ; h – линия горизонта; P – главная точка картины; M^1 – масштабная точка; $(PH) \perp f'_{\alpha k}$; $(PH) \cap t'_{\alpha_\infty} = H$. Линия схода перпендикулярна прямой $PS: t'_{\alpha_\infty} \perp (PS)$. Кроме того, $t'_{\alpha_\infty} \perp (PH)$. Поэтому линия схода t'_{α_∞} перпендикулярна плоскости, определяемой тремя точками S , P и H . Точка S_0 определяется как точка пересечения прямой PH и окружности, проведенной из центра H и радиусом, равным гипотенузе прямоугольного треугольника SPH .

окружность, которая проходит через точку Q . Эта окружность пересекает прямую PH в точке S_0 – центре гомологии.

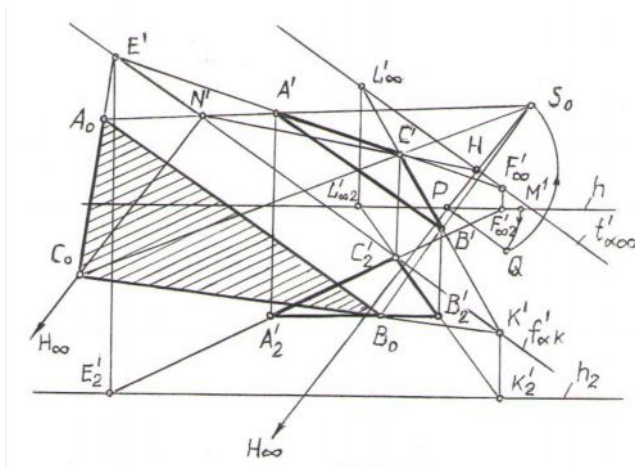


Рис. 51

Точке H соответствует несобственная точка H_∞ прямой HS_0 . Теперь гомология определена и остается построить треугольник $A_0B_0C_0$, гомологичный треугольнику $A'B'C'$. Для этого исходим из свойства гомологии:

- соответственные точки лежат на одной прямой с центром гомологии;
- соответственные прямые пересекаются на оси гомологии.

Согласно первому свойству гомологии точку C_0 ищем на прямой S_0C' , соединяющей точку C' с центром гомологии. Проведем прямую $C'H$ и построим гомологичную ей прямую C_0H_∞ . Для этого воспользуемся вторым свойством гомологии, т. е. они должны пересекаться на оси гомологии: $(C'H) \cap f'_{\alpha k} = N'$; $N' \in (N'H_\infty) \parallel (S_0H)$. Тогда $(N'H_\infty) \cap (S_0C') = C_0$. Точку A_0 ищем на прямой (S_0A') . Прямая $A'C'$ пересекается с осью гомологии в точке E' , а соответствующая ей прямая проходит

через точки C_0 и E' . $(A'C') \cap f'_{\alpha k} = E'$; $(E'C_0) \cap (S_0A') = A_0$. Аналогично определяется точка B_0 : $(B'C') \cap f'_{\alpha k} = K'$; $(K'C_0) \cap (S_0B') = B_0$. Остается соединить найденные точки A_0 , B_0 и C_0 отрезками прямых. $\Delta A_0B_0C_0 \sim \Delta ABC$. $\Delta A_0B_0C_0$ – натуральная величина треугольника ABC .

13.4. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.

В начале сформулируем еще раз приведенные выше результаты:

- параллельные прямые пересекаются в несобственной точке, т. е. имеют общую точку схода;
- параллельные плоскости пересекаются по несобственной прямой, т. е. имеют общую линию схода;
- если прямая a перпендикулярна плоскости α , то все прямые, параллельные прямой a , будут перпендикулярными плоскости α и всем плоскостям, параллельным плоскости α .

Поэтому на картинной плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками схода прямых и линиями схода перпендикулярных им плоскостей. Такое взаимно однозначное соответствие, названное выше полярным, определяется связкой плоскостей и прямых (раздел 6).

Пусть S – точка зрения и π' – картинная плоскость (рис. 52). Основание P перпендикуляра, опущенного из точки S на плоскость π' , будет главной точкой картины.

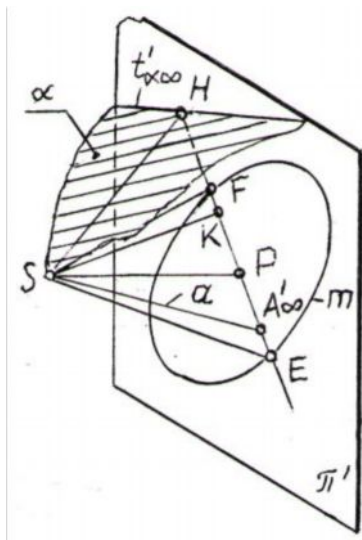


Рис. 52

Плоскость α , которая проходит через точку S , пересекает картинную плоскость по прямой $t'_{\alpha\infty}$: $S \in \alpha \cap \pi' = t'_{\alpha\infty}$. Прямая $t'_{\alpha\infty}$ является линией схода плоскости α и параллельных ей плоскостей. Выделим из связки прямых, инцидентных точке S , прямую a , которая перпендикулярна плоскости α . $S \in a \perp \alpha$; $a \cap \pi' = A'_{\infty}$; A'_{∞} – точка схода прямой a и всех прямых, параллельных прямой a . Через главную точку картины проведем прямую перпендикулярно линии схода, которая пересекает прямую $t'_{\alpha\infty}$ в точке H . Прямая, перпендикулярная плоскости, располагается под прямым углом ко всем прямым этой плоскости: $a \perp \alpha$; $t'_{\alpha\infty} \subset \alpha$; $a \perp t'_{\alpha\infty}$. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости. Поэтому прямая $t'_{\alpha\infty}$ перпендикулярна плоскости, определяемой точками S , P и A'_{∞} . Масштабная окружность

$m(P, |PM^1|)$ пересекает прямую $A'_\infty P$ в точках Е и F. Отложив на прямую HP отрезок KP, равный отрезку $A'_\infty P$, получим точку К. Проведем прямые, соединяющие найденные точки Е, F, Н и К с центром проецирования S. Из равенства $|SP| = |PE| = |PF|$ следует, что $\angle ESP = 45^\circ$ и $\angle FSP = 45^\circ$. Отсюда $\angle ESP + \angle FSP = \angle ESF = 90^\circ$. $a \perp \alpha \Rightarrow \angle A'_\infty SH = 90^\circ$. Поэтому $\angle ESA'_\infty = \angle KSF = \angle FSH$. Оказывается, что отрезок SF является биссектрисой внутреннего угла при вершине S треугольника HSK, а прямая SE – биссектрисой внешнего угла при вершине S этого же треугольника. В разделе 4 доказано, что две вершины треугольника и точки пересечения прямой, соединяющей эти вершины внутренним и внешним биссектрисами третьей вершины, образуют гармоническую четверку: $(HKEF) = -1$. Это означает, что точка К является полюсом прямой $t'_{\infty\infty}$ относительно масштабной окружности, а прямая $t'_{\infty\infty}$ – полярной точки К. Другими словами, между точкой, симметричной точке схода прямой и линией схода, перпендикулярной ей плоскости установлено полярное соответствие. Точку схода прямой называют *антиполюсом* линии схода перпендикулярной ей плоскости относительно масштабной окружности. Таким образом, доказана следующая теорема: *прямая тогда только тогда перпендикулярна плоскости, когда ее точка схода является антиполюсом линии схода этой плоскости относительно масштабной окружности.*

Пример. Через прямую $a(a', a'_2)$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $\alpha(f'_{ak} || t'_{\infty\infty})$ (рис. 53).

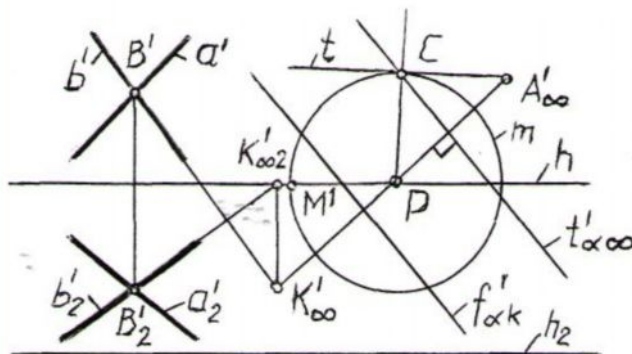


Рис. 53

Решение. Для решения задачи достаточно взять произвольную точку на прямой a и опустить перпендикуляр из этой точки на плоскость α . Тогда плоскость, определяемая этим перпендикуляром и данной прямой a , будет искомой.

Известны: линия горизонта h , главная точка P , масштабная окружность m , перспектива a' и перспектива основания a'_2 прямой a , картинный след f'_{ak} и линия схода t'_{∞} плоскости α . Определим полюс A'_∞ линии схода t'_{∞} относительно масштабной окружности m (рис. 53). Для этого проводим через точку P прямую, перпендикулярную линии схода t'_{∞} . Линия схода и масштабная окружность пересекаются в точке C . Прямая t , проходящая через точку C и перпендикулярная радиусу PC масштабной окружности m , пересекает предыдущую прямую в искомом полюсе A'_∞ : $t \cap (PA'_\infty) = A'_\infty$. Антиполюс K'_∞ прямых, перпендикулярных плоскости α , определяется как точка, симметричная полюсу A'_∞ относительно главной точки картины: $K'_\infty \in (PA'_\infty)$; $|K'_\infty P| = |PA'_\infty|$. Для определения перспективы основания K'_∞ точки K'_∞ надо опустить перпендикуляр из нее на

линию горизонта. Возьмем произвольную точку $B(B', B'_2)$ на прямой $a(a', a'_2)$ и проведем прямую $b(b', b'_2)$ через две точки В и K_∞ . Точка схода K'_∞ прямой b является антиполюсом линии схода $t'_{\alpha\infty}$ плоскости α . Поэтому $b \perp \alpha$.

Прямые a и b , которые пересекаются в точке В, определяют некоторую плоскость $\beta: \beta(a \cap b)$. Плоскость β проходит через прямую a и перпендикулярна плоскости α , т. к. содержит прямую b , перпендикулярную плоскости α . $\beta(a \cap b)$ – искомая плоскость.

14. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ОКРУЖНОСТИ

Если плоскость окружности проходит через центр проецирования, то она проецируется в отрезок прямой.

В общем случае для построения проекции окружности определяются точки пересечения проецирующих прямых, соединяющих ее точки с центром проецирования S , плоскостью проекций. Линия, проведенная через найденные точки пересечения, будет представлять собой центральную проекцию окружности. Множество прямых, соединяющих точки окружности с центром проецирования, образует коническую поверхность второго порядка. Конус второго порядка и плоскость пересекаются по конике. Коника (сокращенное слово, обозначающее коническое сечение) – кривая второго порядка. К кривым второго порядка относятся эллипс, парабола и гипербола. Известно, что эллипс не имеет несобственную точку, парабола имеет одну несобственную точку, а гипербола – две несобственные точки. Поэтому если плоскость проекций пересекается со всеми образующимися проецирующего конуса в собственных точках, то окружность проецируется на эту плоскость в эллипс. Проекция окружности на плоскость, которая параллельна одной из образующих проецирующего конуса, будет парабола. Проекция окружности на плоскость, которая параллельна двум образующим проецирующего конуса, будет гипербола.

Уравнение коники в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_6 = 0, \quad (1)$$

где x, y – текущие координаты точки, принадлежащей конике; $a_1, a_2, \dots, a_6$ – неизвестные коэффициенты. Хотя бы один из этих коэффициентов не равен нулю. Пусть $a_1 \neq 0$. Разделим уравнение (1) на a_1 и введем новые обозначения.

Тогда

$$x^2 + b_1y^2 + b_2xy + b_3x + b_4y + b_5 = 0. \quad (2)$$

Для определения коэффициентов $b_1, b_2, \dots, b_5$ надо иметь пять условий. Поэтому коника определяется пятью параметрами. Таким образом, коника может быть задана:

- пятью точками (общего положения); или
- четырьмя точками и одной касательной; или
- тремя точками и двумя касательными; или
- двумя точками и тремя касательными; или
- одной точкой и четырьмя касательными; или
- пятью касательными.

Точки можно задать координатами, а касательные – уравнениями. Однако будем считать, что точки фиксированы и касательные проведены на плоскости.

15. ПОСТРОЕНИЕ КОНИКИ

Вначале рассмотрим построение коники, заданной пятью точками. Для этого используем теорему Паскаля.

Теорема Паскаля. *Противоположные стороны шестиугольника, вписанного в конику, пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой.*

Доказательство этой теоремы имеется в учебнике проективной геометрии [3]. Не будем останавливаться на доказательстве этой теоремы, только поясним, какие стороны вписанного в конику шестиугольника являются противоположными.

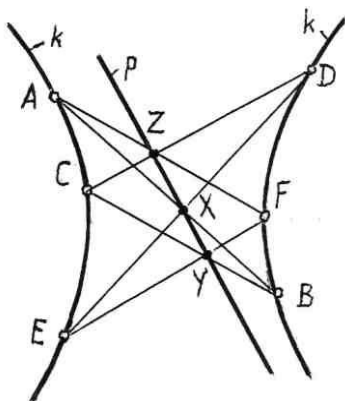


Рис. 54

Если кривая k является коникой, а точки A, B, C, D, E и F принадлежат этой конике (рис. 54), то шестиугольник $ABCDEF$ считается вписанной в эту конику (гиперболе). Противоположными называются такие две стороны, которые в замкнутой последовательности сторон шестиугольника отделены двумя сторонами при обходе в одном (прямом), так и в другом (обратном) порядке. Противоположные стороны шестиугольника, проведенного на рис. 54: AB и DE ; BC и EF ; CD и FA . Указанные противоположные стороны пересекаются соответственно в точ-

ках X, Y, Z , которые, согласно теореме Паскаля, лежат на одной прямой. Эту прямую обозначим буквой p и назовем прямой Паскаля. $(AB) \cap (DE) = X$; $(BC) \cap (EF) = Y$; $(CD) \cap (FA) = Z$. Точки X, Y, Z , лежат на одной прямой p (прямая Паскаля).

Теперь покажем построение произвольной точки F коники, заданной пятью точками: A, B, C, D, E (рис. 55.)

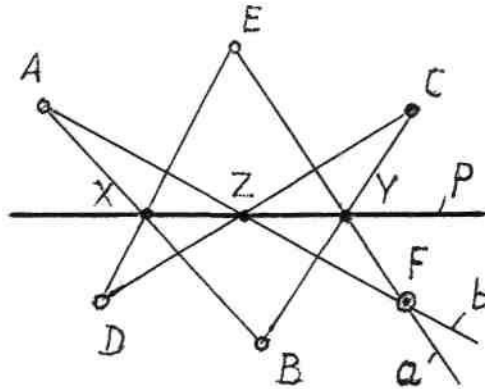


Рис. 55

Принимаем точки A, B, C, D, E в качестве вершин вписанного в конику шестиугольника. Надо определить шестую вершину F этого шестиугольника. Точку A соединим точкой B , точку B – точкой C , точку C – точкой D , точку D – точкой E . Тогда получаем четыре стороны AB, BC, CD, DE вписанного конику шестиугольника $ABCDEF$. Противоположные стороны AB и DE пересекаются в точке X . Через точку X проводим прямую Паскаля p (произвольно), которая пересекает сторону BC в точке Y и сторону CD – в точке Z . Тогда прямая a , определяемая точками E и Y , и прямая b , определяемая точками A и Z , пересекаются в точке F . Согласно теореме Паскаля, найденная точка F принадлежит конике, заданной пятью точками A, B, C, D, E . Меняя положение вспомогательной прямой a , можно повторить

построение несколько раз, в результате получаем нужное количество точек коники.

Пусть теперь коника задана четырьмя точками A, B, C, E и касательной t в точке C (рис. 56).

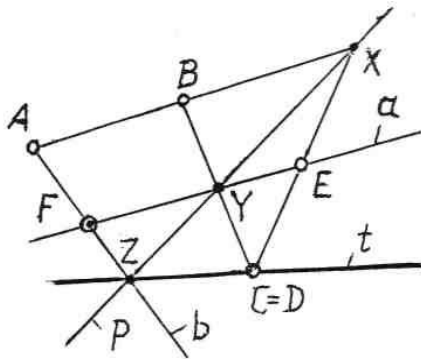


Рис. 56

Точку C , в которой проведена касательная t , считаем двойной точкой: $C=D$. Тогда касательную t можно считать одной из сторон вписанного в конику шестиугольника, а именно $t = CD$. Через точку E проводим произвольную прямую a , на которой лежит сторона EF . Рассмотрим вписанный в конику шестиугольник $ABCDEF$. Противоположные стороны AB и DE пересекаются в точке X , а противоположные стороны BC и $a(EF)$ – в точке Y . Точками X и Y определяется прямая Паскаля p . $(AB) \cap (DE) = X$; $(BC) \cap a = Y$; $p(XY)$ – прямая Паскаля. Прямая Паскаля и касательная пересекаются в точке Z : $p \cap t = Z$. Прямая b , определяемая точками A и Z , является стороной FA шестиугольника. Она расположена напротив касательной, поэтому прямые a и b пересекаются в точке F : $a \cap b = F$. Согласно обратной теореме Паскаля, найденная точка F принадлежит искомой конике. Меняя положение прямой a , можно найти сколько угодно точек коники, заданной четырьмя точками и касательной в одной из них.

В инженерных проектах и задачах конику чаще всего задают тремя точками и двумя касательными. Пусть заданы точки A и D коники и касательные t_1 и t_2 , проведенные конике в этих точках (рис. 57).

Третью точку С определяем с помощью инженерного дискриминанта f . Проведем отрезок AD и определим его середину N: $|AN| = |ND|$.

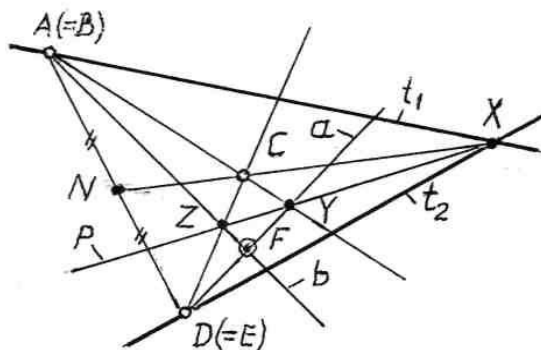


Рис. 57

Касательные t_1 и t_2 пересекаются в точке X . Отрезок NX является медианой треугольника ADX . Пусть точка C принадлежит этому отрезку NX : $C \in (NX)$. Инженерным дискриминан-

том f называют отношение отрезка NC к отрезку NX: $f = \frac{|NC|}{|NX|}$.

Для построения коники, определенной пятью параметрами (точка: A, C, D ; касательные t_1 и t_2), можно применить теорему Паскаля. Для этого следует считать точки A и D двойными: $A=B$ и $D=E$. Вершина B вписанного в конику шестиугольника совпадает с вершиной A , а вершина E с – вершиной D . Теперь необходимо определить шестую вершину F шестиугольника $ABCDEF$, вписанного в конику. Противоположные стороны шестиуголь-

ника: t_1 и t_2 ; BC и EF; CD и AF. Противоположные стороны t_1 и t_2 пересекаются в точке X, принадлежащей прямой Паскаля. Через точки X проводим прямую p (произвольно), которая пересекает сторону BC в точке Y и сторону CD – в точке Z: $p \cap (BC) = Y$; $p \cap (CD) = Z$. Соединив найденные точки соответственно вершинами E и A, определим стороны EF и AF, которые пересекаются в искомой точке F: $a(E, F) \cap b(A, F) = F$. Изменив положение прямой Паскаля p , можно находить сколько угодно точек, принадлежащих искомой конике.

Теперь исследуем зависимость между положением точки C на отрезке NX и значением инженерного дискриминанта f . Если точка C совпадает с точкой N, то инженерный дискриминант

будет равен нулю: $f = \frac{|NC|}{|NX|} = \frac{|NN|}{|NX|} = 0$. Когда точка C совпа-

дает с точкой X, значение инженерного дискриминанта будет

равно единице: $f = \frac{|NC|}{|NX|} = \frac{|NX|}{|NX|} = 1$. Таким образом, значения

инженерного дискриминанта образуют сегмент: $0 \leq f \leq 1$. Для параболы $f = 0,5$; для эллипса $f < 0$ и для гиперболы $f > 0,5$.

Последние три способа задания коники не имеют практического значения, поэтому не будем их рассматривать.

16. ПЕРСПЕКТИВА ОКРУЖНОСТИ

Не теряя общности, достаточно рассмотреть перспективу окружности, лежащей в предметной плоскости (рис. 58).

Выше были показаны: $\alpha \cap \pi_2 = q$ – нейтральная линия; α – нейтральная плоскость (на рис. 59 она не показана); π_2 – предметная плоскость. Нейтральная линия (предметной плоскости) проецируется на плоскость π' из центра S в несобственную прямую картинной плоскости.

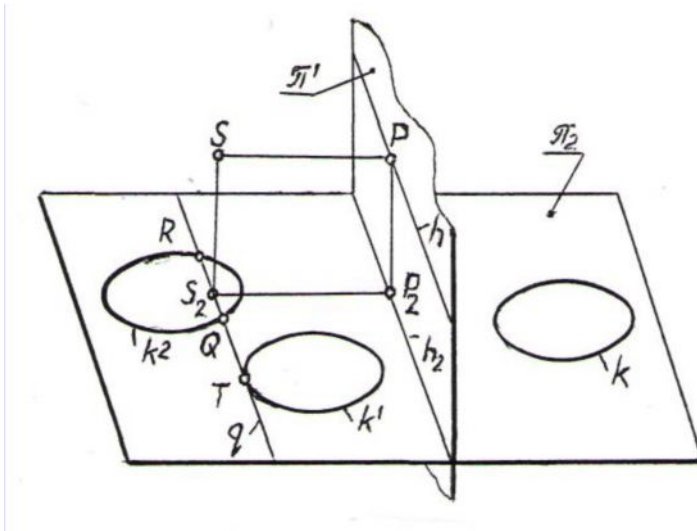


Рис. 58

Если нейтральная линия q является касательной к окружности k^1 , то точка касания T проецируется в несобственную точку. Поэтому коника, которая является перспективой окружности k^1 , имеет единственную несобственную точку, т. е. она будет параболой.

Окружность k^2 пересекается нейтральной линией в точках R и Q , которые проецируются на картинную плоскость в две несобственные точки. Следовательно, перспектива окружности k^2 имеет две несобственные точки, т. е. будет гиперболой. Окружность k не имеет общей точки с нейтральной линией, поэтому ее перспективой будет эллипс.

Теперь рассмотрим построение эллипса, представляющего собой перспективу окружности. Если вращением вокруг основания картины совместим предметную плоскость с картинной плоскостью, то окружность и ее перспектива (эллипс) будут гомологичными линиями. Центр гомологии S_0 находится на перпендикуляре, восстановленного к линии горизонта в главной точке P картины, и определяется отложением отрезка PS_0 , равного PM^1 . Ось гомологии совпадает с основанием картины, а главной точке P соответствует несобственная точка P'_∞ прямой PS_0 (рис. 59). S_0 – центр гомологии; h_2 – ось гомологии; P и P'_∞ – гомологичные точки; k – заданная окружность. Для построения перспективы A' произвольной точки A окружности k воспользуемся свойствами гомологии. Как известно, гомологичные точки лежат на одной прямой с центром гомологии. Поэтому точку A' ищем на прямой, соединяющей точку A с центром гомологии S_0 : $A' \in (AS_0)$. В гомологии соответственные прямые пересекаются на оси гомологии. Если провести прямую AP'_∞ , то она пересекает ось гомологии в точке 1 . $(A1) \parallel (S_0P)$. Тогда прямая, соответствующая прямой AP'_∞ , определяется точками P и 1 . Очевидно, что точка $A' \in (P1)$. Общая точка прямых AS_0 и $P1$ будет искомой точкой A' : $(AS_0) \cap (P1) = A'$. Возьмем точки B, C, D, E , принадлежащие окружности k , построим гомологичные им точки B', C', D', E' . Построение коники, определяемой точками A', B', C', D', E' , было показано на рис. 55.

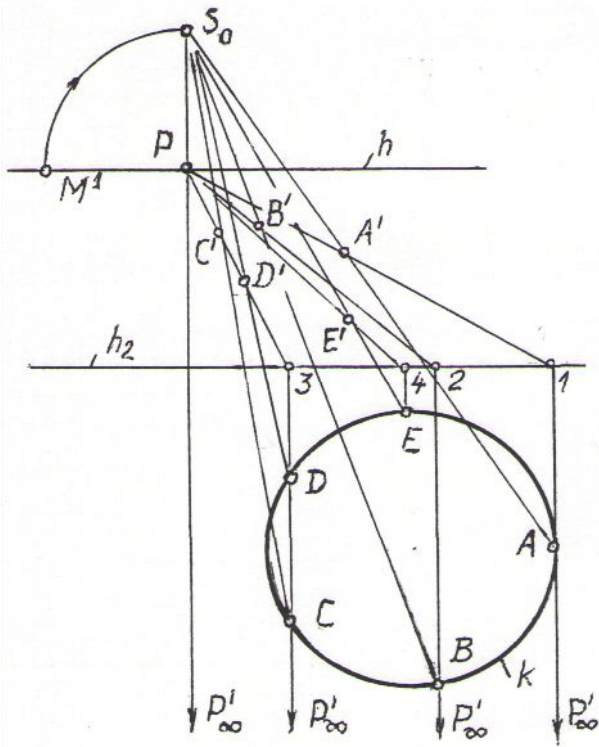


Рис. 59

Обычно применяют приближенный способ построения эллипса по 8-ми точкам. Для этого строят квадрат, описанный вокруг окружности. Две стороны этого квадрата должны быть параллельными основанию картины, а остальные две стороны – перпендикулярными плоскости картины (рис. 60). $(AB) \parallel (CD) \parallel h_2$; $(AD) \perp \pi'$; $(BC) \perp \pi'$. Легко построить перспективу такого квадрата, т. к. перспективы сторон, перпендикулярных картинной плоскости, проходят через главную точку P картины, а перспективы диагоналей этого квадрата проходят через масштабные точки M^1 и M^2 . Диагональ AC пересекает основание кар-

тины в точке E , а диагональ BD – в точке F . Сторона AD пересекает основание картины в точке G , а сторона BC – в точке N . Перспективой прямой AD будет прямая GP , перспективой прямой BC – прямая NP , а перспективой прямой AC – прямая EM^2 , перспективой прямой BD – прямая FM^1 . Точка A является общей точкой прямых AC и AD , поэтому ее перспектива A' определяется как точка пересечения прямых EM^2 и GP : $A' = (EM^2) \cap (GP)$. Точка B является общей точкой прямых BD и BC , поэтому ее перспектива B' определяется как точка пересечения прямых FM^1 и NP : $B' = (FM^1) \cap (NP)$. Аналогично имеем $C' = (EM^2) \cap (NP)$ и $D' = (FM^1) \cap (GP)$.

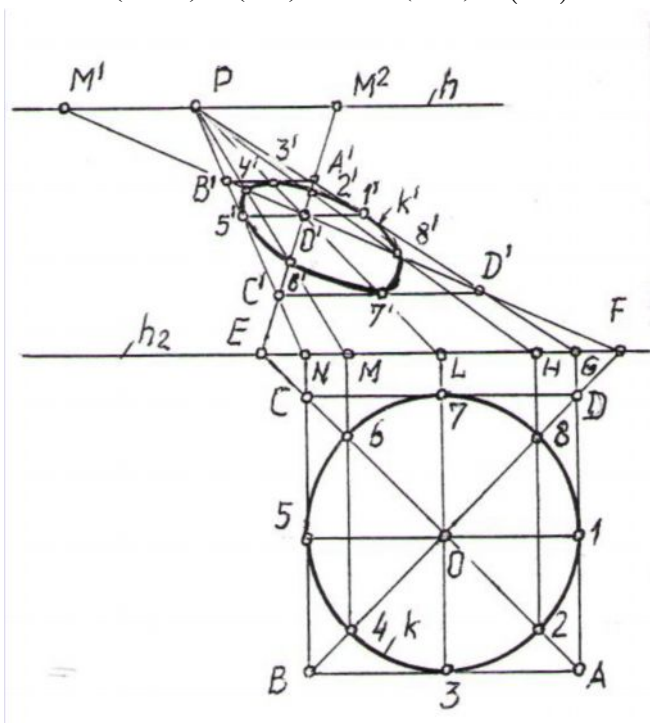


Рис. 60

Напомним, что стороны $A'B'$ и $C'D'$ четырехугольника $A'B'C'D'$ должны быть параллельными линии горизонта, т. к. их оригиналы параллельны основанию картины. Перспективой окружности k , вписанной в квадрат $ABCD$, будет эллипс, вписанный в четырехугольник (трапеция) $A'B'C'D'$. Отметим 8 точек окружности k , четыре (1, 3, 5, 7) из которых являются точками касания и остальные четыре точки 2, 4, 6, 8 – точками пересечения диагоналями AC и BD . Перспективы $3'$ и $7'$ точек 3 и 7 определяются при помощи прямой LP , проходящей через центр окружности перпендикулярно картинной плоскости: $3' = (A'B') \cap (LP)$ и $7' = (C'D') \cap (LP)$. Имейте в виду, что перспектива центра окружности $0' = (EM^2) \cap (FM^1)$ не является центром эллипса. Прямая, проведенная через точку $0'$ параллельно прямой $A'B'$, пересекает стороны четырехугольника $A'B'C'D'$ в точках $1'$ и $5'$. Для построения перспективы точек 4 и 6 использована перспектива (прямая MP) прямой, проходящей через них: $4' = (MP) \cap (FM^1)$; $6' = (MP) \cap (EM^2)$. Для построения перспективы точек 2 и 8 поступаем аналогичным образом, т. е. используем перспективу (HP) прямой, соединяющей их: $2' = (HP) \cap (EM^2)$; $8' = (HP) \cap (FM^1)$. Перспективой k' окружности k будет эллипс, проведенный через точки $1', 2', 3', \dots, 8'$.

17. ПЕРСПЕКТИВА ФИГУРЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ПРЕДМЕТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Построим перспективу многоугольника $ABCDEFGH$, расположенного в предметной плоскости (рис.61).

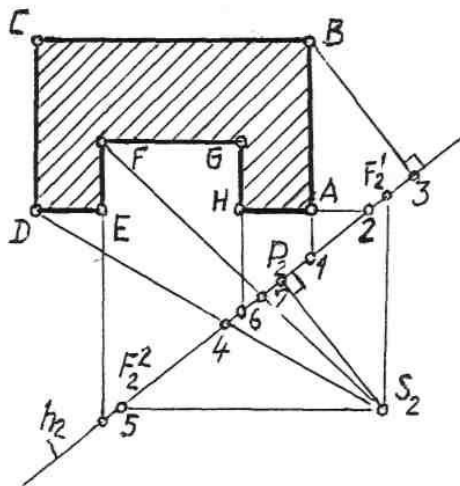


Рис. 61

Известны основания картины h_2 , расстояние a от точки зрения до предметной плоскости. Отмечена точка состояния S_2 . Основание P_2 перпендикуляра, опущенного из точки S_2 на прямую h_2 , будет основанием главной точки P картины.

На картине проводим две горизонтальные прямые, расстояние между которыми равно a (рис. 62).

Нижнюю из них принимаем за основание картины h_2 , а верхнюю – за линию горизонта h . На линии горизонта отмечена главная точка P картины. На картине перспектива точки определяется как точка пересечения перспектив двух прямых, проходящих через эту точку.

Стороны заданного многоугольника образуют два направления: первое вертикальное направление определяется параллельными сторонами AB , CD , EF , GH ; второе горизонтальное направление – сторонами BC , FG , DE , AH .

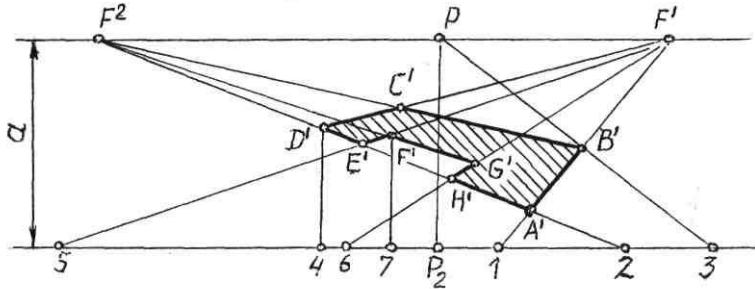


Рис. 62

Известно, что параллельные прямые имеют общую точку схода. Для определения точки схода прямых первого направления проводим через точку стояния вертикальную прямую. Она пересекает основание картины в точке F_2^1 (рис.61), служащей точкой схода прямых первого направления. Через точку S_2 проводим горизонтальную прямую, которая определяет точку схода F_2^2 прямых второго направления. Через точку A проходят две прямые AB и AN , которые пересекают основание картины в точках 1 и 2.

На картине из точки P опускаем перпендикуляр на прямую h_2 и определяем основание P_2 этого перпендикуляра. На линии горизонта, начиная от точки P , откладываем отрезки PF^1 и PF^2 , равные отрезкам $P_2F_2^1$ и $P_2F_2^2$. F^1 – точка схода первого, а F^2 – точка схода второго направления прямых². Отложив отрезки P_21 и P_22 на основание картины, определяем точки 1 и 2. Тогда прямая $1F^1$ будет перспективой прямой AB , а прямая $2F^2$ – перспективой прямой AN . Прямые $1F^1$ и $2F^2$ пересекаются в точке A' – перспектива точки A . $A' = (1F^1) \cap (2F^2)$. Основание (точка 3) перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую h_2 , переносится на перспективу. Полученную точку 3 соединяем точкой P , т. к. перспективы прямых, перпендикулярных картинной плоскости, проходят через главную точку картины. Перспективы прямых AB и $B3$, проходящих через точку B , пересекаются в

² Размеры в перспективе увеличены в два раза

точке B' – перспектива точки В: $B' = (1F^1) \cap (3P)$. Для определения перспективы точки D использована точка 4 – пересечение прямой, соединяющей ее с точкой S_2 , и основания картины: $(DS_2) \cap h_2 = 4$. Определим точку 4 на картине и проведем через нее линию связи (перпендикулярно h) до пересечения с прямой $2F^2$ в точке D' . Прямые $D'F^1$ и $B'F^2$ пересекаются в точке C' : $(D'F^1) \cap (B'F^2) = C'$. Продолжение отрезка EF пересекает прямую h_2 в точке 5, а продолжение отрезка GH – в точке 6. На картине прямые $5F^1$ и $6F^1$ пересекают прямую $2F^2$ в точках E' и H' . Проецирующая точку F прямая пересекает картинную плоскость в точке F' , основанием которой является точка 7: $(FS_2) \cap h_2 = 7$. В перспективе линия связи, проведенная через точку 7, пересекает прямую $5F^1$ в точке F' . Прямые $F'F^2$ и $6F^1$ пересекаются в точке G' . Многоугольник $A'B'C'D'E'F'G'H'$, вершинами которого являются найденные перспективы $A', B', C', D', E', F', G'$ и H' , будет перспективой данного многоугольника ABCDEFGH.

Для построения перспективы объекта сначала прямоугольно проецируем его на предметную плоскость. Поэтому фигуру, расположенную в предметной плоскости, можно принимать за горизонтальную проекцию, которую принято называть планом. Тогда вышеприведенное построение ничем не отличается от построения плана. При небольшом расстоянии между основанием картины и линией горизонта перспектива фигуры оказывается сильно сжатой в вертикальном направлении, что значительно снижает точность проводимых построений. Если предметную плоскость опустим ниже, то расстояние между прямыми h и h_2 увеличатся. Как известно, при этом величина горизонтальной проекции остается без изменения. Если π'_2 – опущенная предметная плоскость, то: $\pi'_2 \parallel \pi_2$; $|S\pi_2| = a$; $|S\pi'_2| = b$; $b > a$. Построение перспективы опущенного плана выполняется как и построение перспективы обычного плана. Поэтому для повышения точности построений используется опущенный план.

18. ПЕРСПЕКТИВА ФИГУРЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Прямоугольник ABCD, заданный фронтальной и горизонтальной проекциями, имеет два одинаковых отверстия прямоугольной формы (рис. 63). Известны: основание картины h_2 , точка стояния S_2 и a высота точки зрения. Рассмотрим построение перспективы этой вертикально расположенной фигуры.

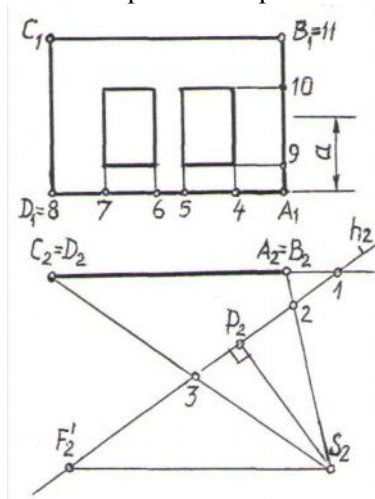


Рис. 63

Опустив перпендикуляр из точки S_2 на прямую h_2 , определим точку P_2 . Проводим две горизонтальные прямые, отстоящие друг от друга на расстоянии a (рис. 64).

Верхняя прямая h – линия горизонта, а нижняя прямая h_2 – основание картины. Отмечаем главную точку $P(\in h)$ картины и её основание $P_2(\in h_2)$. Построение перспективы начнем с нахождения перспективы точки A . На рис.63 показана точка 1, которая является точкой пересечения прямых A_2D_2 и h_2 , а также основание F^1 , точки схода $F^1:(A, D_2) \cap h_2 = 1$; $S_2 \in (S_2 F^1_2) \parallel (A_2 D_2)$;

пересекают прямую A_1D_1 в точках 4, 5, 6, 7, 8 (рис. 63). Через точку A' проводим прямую параллельно основанию картины (рис. 64) и откладываем на эту прямую отрезки, равные отрезкам A_14 , 45, 56, 67, 78. Прямая, соединяющая последнюю точку 8 деления с точкой D' , пересекает линию горизонта в точке F^2 . Через точки пересечения прямых, соединяющих точку F^2 с точками 4, 5, 6, 7 и прямой $A'D'$, проводим вертикальные прямые, на которых расположены перспективы вертикальных сторон отверстий. Через точку A' проведем произвольную прямую и на эту прямую отложим отрезки, равные отрезкам A_19 , 9.10, 10.11 и взятые из фронтальной проекции. Точку 11 соединим с точкой B' и проведем через точки 9 и 10 прямые параллельные прямой 11. B' . Последние две параллельные прямые пересекают отрезок $A'B'$. Если провести прямые, соединяющие полученные точки пересечения с точкой F^1 , то на этих прямых будут расположены перспективы горизонтальных сторон отверстий.

19. ПЕРСПЕКТИВА ФИГУРЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

$A_1B_1C_1D_1$ – фронтальная проекция и $A_2B_2C_2D_2$ горизонтальная проекция четырехугольника ABCD, расположенного в наклонной плоскости (рис. 65).

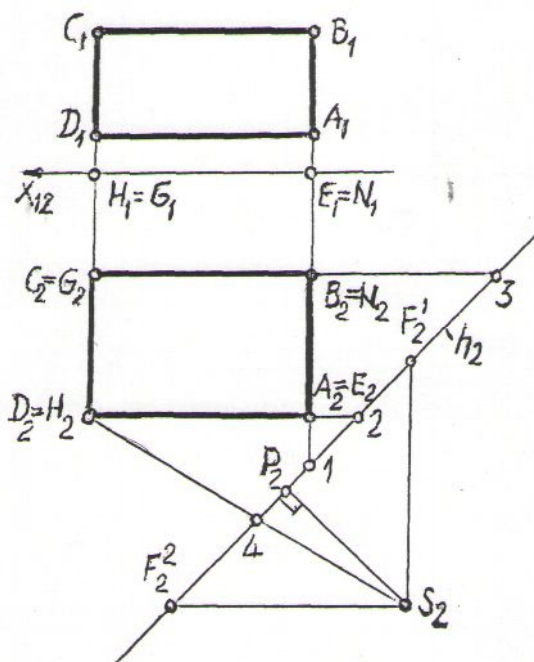


Рис. 65

Пусть известны: h_2 – горизонтальный след картинной плоскости, S_2 – точка стояния и a – высота точки зрения. Рассмотрим построение перспективы этой фигуры, расположенной в наклонной плоскости.

Определим основание P_2 перпендикуляра, опущенного из точки S_2 на прямую h_2 . P_2 – горизонтальная проекция главной

мощью вертикальной линии связи, проведенной через точку E' . $(E'A') \perp h_2$; $(E'A') \cap (A^0F^2) = A'$. $(4H') \cap (A^0F^2) = D'$. На вертикальную прямую, проходящую через точку 3, отложим отрезок $3B^0$, равный отрезку B_1N_1 . Линия проекционной связи, проведенная через точку N' , пересекает прямую, связывающую точки B^0 и F^2 , в точке B' . Аналогично находим точку C' как точку пересечения прямой B^0F^2 и линии связи, проведенной через точку G' . $B' = (B^0F^2) \cap (N'B')$; $C' = (B^0F^2) \cap (G'C')$. Четырехугольник $A'B'C'D'$ является перспективой наклонного прямоугольника ABCD.

Для проверки точности построений находим точку схода прямой AB. С этой целью продолжаем перспективу ее основания (прямая $E'N'$) до пересечения с линией горизонта в точке F^1 ; $(E'N') \cap h = F^1$. Перпендикуляр, восстановленный в точке F^1 прямой h , пересекает прямую $A'B'$ в точке F_∞ . Найденная точка F_∞ является точкой схода прямой AB. Прямые AB и CD расположены параллельно, поэтому должны иметь общую точку схода. Если точки C' , D' , F_∞ лежат на одной прямой (рис. 66), то построение выполнено с высокой точностью. В противном случае необходимо внести соответствующие корректировки.

Прямая, точка схода которой расположена выше линии горизонта, называется восходящей. Прямая, точка схода которой расположена ниже линии горизонта, называется нисходящей. Прямые AB и CD являются восходящими, т. к. точка их схода расположена выше горизонта.

20. ВЫБОР ТОЧКИ ЗРЕНИЯ И КАРТИННОЙ ПЛОСКОСТИ

Расстояние между предметной плоскостью и плоскостью горизонта носит название «высоты линии горизонта» или «высоты точки зрения». В зависимости от высоты точки зрения могут быть перспективы с высоким горизонтом, нормальным или низким горизонтом. В перспективе с высоким горизонтом все или большинство точек объекта расположены ниже, а в перспективе с низким горизонтом – выше плоскости горизонта. Перспективы с высоким горизонтом удобно применять для изображений городских микрорайонов, поселков, производственных и заводских территорий. Перспективы с низким горизонтом встречаются на практике редко. Мы ограничимся рассмотрением архитектурных перспектив с нормальным горизонтом.

Точка зрения и картинная плоскость должны быть выбраны так чтобы, перспектива изображаемого объекта давала бы полное представление о нем. Для этого изображаемый объект должен находиться внутри конуса наилучшего зрения телесным углом при вершине $30^{\circ} \dots 40^{\circ}$. Ось конуса зрения располагается ближе прямой, соединяющей главную точку картины с точкой зрения. На практике главную точку картины располагают так, чтобы она находилась внутри средней $1/3$ части ширины перспективы. Если высота объекта больше его длины, то наибольший угол зрения располагается в вертикальной плоскости, проходящей через точку S . Если высота объекта не больше его длины, то считают, что наибольший угол зрения находится в плоскости горизонта.

Для построения перспективы объекта, основание которого изображено на рис. 67, точку зрения надо выбрать так, чтобы были видны четыре его грани.

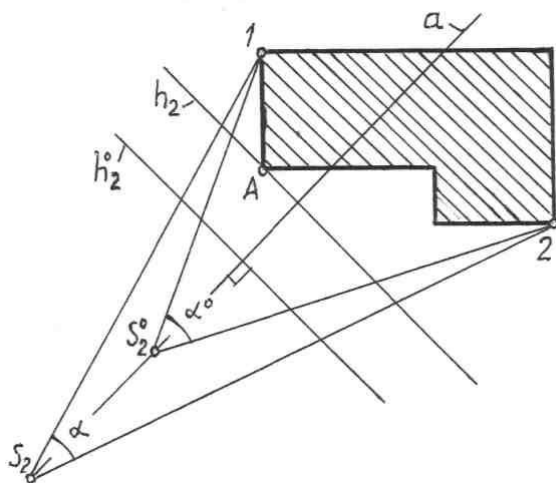


Рис. 67

Выбрав точку S_2^0 (точка стояния), удовлетворяющую указанному условию, проводим из нее лучи через крайние точки 1 и 2 основания. Обозначив угол между этими лучами через α^0 , проводим его биссектрису a . Если точку зрения, перемещая ее по биссектрисе, приблизим к основанию объекта, то угол зрения увеличивается, а если удаляем от объекта – уменьшается. Выбрав такую точку S_2 , что угол $\alpha \approx 30^\circ$, проводим основание картины h_2^0 перпендикулярно биссектрисе a . При приближении картинной плоскости к точке зрения ширина перспективы уменьшается, а при удалении – увеличивается. Если картинную плоскость проводить через ребро объекта, то это ребро в перспективе изображается без искажения. Поэтому основание картинной плоскости h_2 проведено через вершину A плана перпендикулярно биссектрисе a (рис. 67).

21. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРСПЕКТИВЫ ОБЪЕКТА, ЗАДАННОГО ФРОНТАЛЬНОЙ И ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИЯМИ

Фронтальную проекцию в курсе строительного черчения называют фасадом, а горизонтальную проекцию – планом. Рассмотрим построение перспективы «домика», изображенного на рис. 68 фасадом и планом.

Домик имеет семь граней: одна $ALKD$ из них расположена в предметной плоскости, четыре $ABCD$, $GHKL$, $ABEGL$, $DCMNHK$ – в вертикальных и две $BEMC$, $GHME$ – наклонных плоскостях. Построение перспективы фигур, расположенных в предметной, вертикальной и наклонной плоскостях, были показаны в предыдущих параграфах.

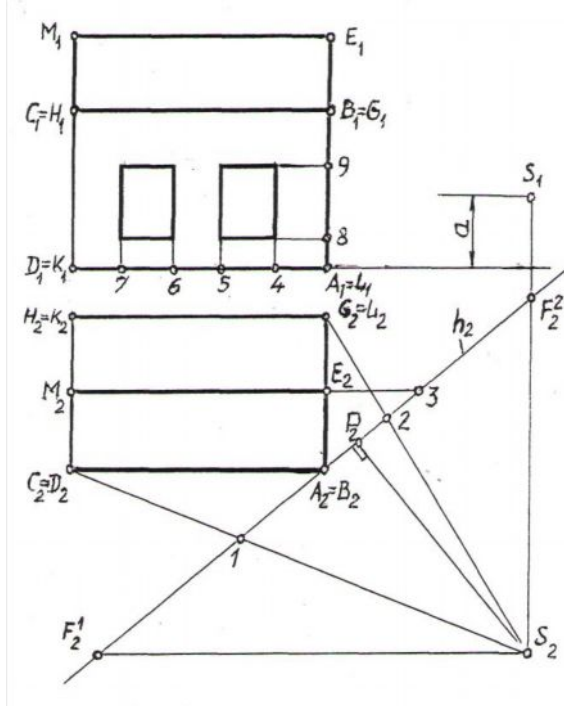


Рис. 68

Картинная плоскость проведена через ребро АВ. Поэтому ребро АВ в перспективе изображается без искажения, сохранив длину. Угол между лучами $S_2 1$ и $S_2 2$, исходящих из точки стояния и проходящих через крайние точки D_2 и L_2 плана, составляет около $20...30^\circ$.

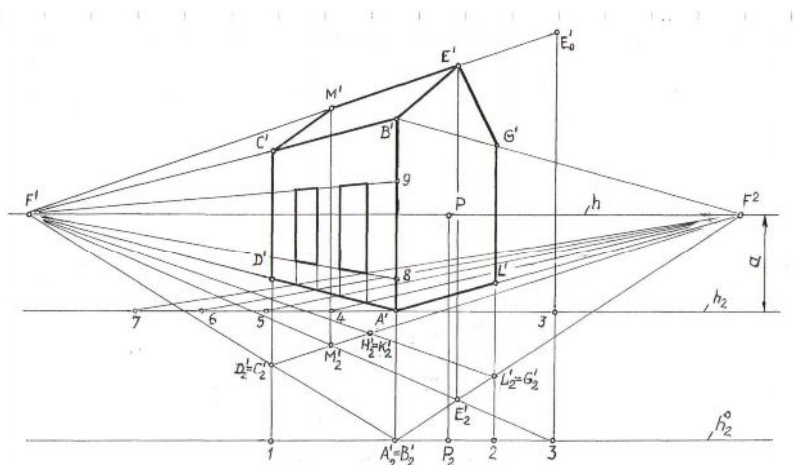


Рис. 69

$(S_2 D_2) \cap h_2 = 1$; $(S_2 L_2) \cap h_2 = 2$. Основание P_2 главной точки расположено в средней $1/3$ части ширины перспективы домика. Высота горизонта a равна $1,7...1,8$ м. На рис. 68 показаны также основания F_2^1 и F_2^2 точек схода двух основных направлений и точка 3, которая позволяет определить картинный след прямой ЕМ.

Для построения перспективы проводим две горизонтальные прямые h и h_2 на расстоянии a друг от друга. h – линия горизонта; h_2 – основание картины (рис. 69). Выбрав главную точку картины P , находим точку схода F^1 и F^2 . Расстояния между указанными точками берутся из рис. 68.

Проводим горизонтальную прямую h_2^0 – опущенное основание картины для построения опущенного плана. Расстояние между прямыми h_2 и h_2^0 выбирают произвольно. Опустив из точки Р перпендикуляр на прямую h_2^0 , определяют точку P_2 .

Соблюдая расстояния между точками переносим точки $A_2 = B_2, 1, 2, 3$ на картину. Тогда точка $A'_2 = B'_2$ будет опущенным основанием ребра АВ. Эта точка соединяется с точками F^1 и F^2 . С помощью вертикальных прямых, проведенных через точки 1 и 2, определяют точки $D'_2 = C'_2$ и $G'_2 = L'_2$ соответственно на прямых A'_2F^1 и A'_2F^2 . Первая из найденных точек соединяется с точкой F^2 , а вторая – с точкой F^1 : $(D'_2F^2) \cap (L'_2F^1) = H'_2, K'_2$. Четырехугольник $A'_2L'_2K'_2D'_2$ является перспективой четырехугольника ALKD, лежащего в предметной плоскости. Для получения перспективы опущенного плана достаточно определить точки E'_2 и M'_2 пересечения прямой $3F^1$ со сторонами четырехугольника (рис. 69). Линия связи, проведенная через точку A'_2 , пересекает прямую h_2 в точке A' . Отрезок АВ принадлежит плоскости картины, поэтому проводим вертикальный отрезок $A'B'$: $|A'B'| = |A_1B_1|$. На прямых, соединяющих точку F^1 с точками A' и B' , определяем точки D' и C' с помощью линии проекционной связи, проведенной через точку 1. Аналогично определяются L' и G' проведением линии проекционной связи через точку 2 на прямых $A'F^2$ и $B'F^2$ соответственно. Для определения точек E' и M' на вертикальную прямую, проведенную через точку 3, начиная от точки пересечения ее и прямой h_2 , отложим отрезок, равный отрезку A_1E_1 (рис. 68). Полученную точку E'_0 соединяют с точкой F^1 прямой линией. Линии проекционной связи, проведенные через точки E'_2 и M'_2 , пересекают прямую E'_0F^1 в точках E' и

M' . В результате соответствующего соединения найденных точек $A', B', C', D', L', G', E'$, M' отрезками прямых получают перспективу домика. Остается еще построить перспективы двух прямоугольников, представляющих оконные проемы. Для этого воспользуемся построением, проведенным на рис. 64. Продолжения вертикальных сторон оконных проемов пересекают прямую A_1D_1 в точках 4, 5, 6, 7, а горизонтальных сторон – прямую A_1B_1 – в точках 8, 9 (рис. 68). В перспективе на прямую h_2 отложим отрезки, равные отрезкам A_14 , 45, 56, 67. Полученные точки 4, 5, 6, 7 соединим с точкой F^2 отрезками прямых. Через полученные точки пересечения отрезка $A'D'$ и прямых $4F^2$, $5F^2$, $6F^2$, $7F^2$ проводим вертикальные прямые, на которых располагаются перспективы вертикальных сторон, а перспективы горизонтальных сторон – на прямых, соединяющих точки $8(\in A'B')$ и $9(\in A'B')$ с точкой схода F^1 (рис. 69).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Есмуханова Ж. Ж.* Курс начертательной геометрии: Учебник. – Алматы: КазНТУ, 2000. – 220 с.
2. *Климухин А.Г.* Начертательная геометрия: Учебник для вузов. – М.: Стройиздат, 1973. – 368 с.
3. *Четверухин Н.Ф.* Проективная геометрия: Учебник. – Изд. 8-е. – М.: Просвещение, 1969. – 368 с.

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз	3
1. Өзіндіксіз элементтер	5
2. Центрлік проекциялау әдісінің негізгі инварианты.....	8
3. Күрделі қатынастың қасиеттері.....	13
4. Ғажайып төрттік.....	16
5. Толық төртбұрыш туралы теорема.....	20
6. Полюс және поляра. Полярлық сәйкестілік.....	23
7. Жазықтықтың абсолюті.....	27
8. Сызықтық перспективаның аппараты.....	30
9. Нүктенің перспективасы.....	33
10. Түзудің перспективасы.....	35
11. Жазықтықтың перспективасы.....	39
12. Негізгі позициялық есептер.....	43
12.1. Түзулердің өзара орналасуы.....	43
12.2. Жазықтықта жатқан түзудің жетіспейтін проекциясын салу.....	43
12.3. Жазықтықтардың қиылысу сызығын салу.....	45
12.4. Жазықтық пен түзудің қиылысу нүктесін салу.....	46
13. Негізгі метрикалық есептер.....	48
13.1. Кесіндінің ұзындығын анықтау.....	48
13.2. Түзулердің арасындағы бұрышты анықтау.....	55
13.3. Жазық фигураның натурал шамасын анықтау.....	59
13.4. Өзара перпендикуляр жазықтық пен түзудің перспективасы туралы теорема	62
14. Шеңбердің центрлік проекциясы.....	66
15. Кониканы салу.....	68
16. Шеңбердің перспективасы.....	73
17. Заттық жазықтықта жатқан фигураның перспективасы	77
18. Вертикаль жазықтықта жатқан фигураның перспективасы.....	80
19. Көлбеу жазықтықта жатқан фигураның перспективасы	83
20. Қарау нүктесін және картина жазықтығын таңдау....	86
21. Фронталь және горизонталь проекцияларымен берілген объектінің перспективасын салу.....	88
Әдебиеттер тізімі	92

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	93
1. Несобственные элементы	95
2. Основной инвариант метода центрального проецирования	98
3. Свойства сложного отношения	103
4. Гармоническая четверка	106
5. Теорема о полном четырехугольнике	110
6. Полнос и полпяра. Полпярное соответствие	113
7. Абсолют плоскости	117
8. Аппарат линейной перспективы	120
9. Перспектива точки	123
10. Перспектива прямой	125
11. Перспектива плоскости	129
12. Основные позиционные задачи	134
12.1. Взаимное расположение прямых	134
12.2. Построение недостающей проекции прямой, принадлежащей плоскости	134
12.3. Построение линии пересечения плоскостей	136
12.4. Построение точки пересечения прямой и плоскости	137
13. Основные метрические задачи	139
13.1. Определение длины отрезка	140
13.2. Определение угла между прямыми	147
13.3. Построение натуральной величины плоской фигуры	152
13.4. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости	155
14. Центральная проекция окружности	160
15. Построение коники	162
16. Перспектива окружности	167
17. Перспектива фигуры, расположенной в предметной плоскости	172
18. Перспектива фигуры, расположенной в вертикальной плоскости	175
19. Перспектива фигуры, расположенной в наклонной плоскости	178

20. Выбор точки зрения и картинной плоскости	181
21. Построение перспективы объекта, заданного фронтальной и горизонтальной проекциями.....	183
Список литературы	187

Оқулық басылым

Есмұхан Жанұзақ Мұхитұлы

СЫЗЫҚТЫҚ ПЕРСПЕКТИВАҒА КІРІСПЕ

Оқу құралы

Учебное издание

ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНУЮ ПЕРСПЕКТИВУ

Учебное пособие

ҒТБО РБ Бастығы/ Нач. РО НТИЦ

З.А. Ғұбайдулина

Редакторы/Редактор

Т.С. Жақсыбаева

Компьютерде беттеген

Компьютерная верстка

А.Н. Оразалиева

Басуға

2011 ж. қол қойылды.

Пішімі 60x84 ¹/₁₆. №1 типографиялық қағаз. Шартты б.т. 11,0. Есепті-б.т. 11,9.
Таралымы 500 дана. Тапсырыс № . Бағасы келісімді.

Подписано в печать «__» _____ г.

Формат 60x84 1/16. Бумага типография №1

Усл.п.л. 11,0. Уч. - изд.л.11,9. Тираж 500 экз. Заказ № Цена договорная

Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университетінің басылымы

Ғылыми-техникалық баспа орталығы

Алматы, Ладыгин, 32

Издание Казахского национального технического университета им. К.И. Сатпаева

Научно-технический издательский центр

Алматы, ул. Ладыгина, 32

ISBN 978-601-228-272-6



9 786012 282726