Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И.

Математика II

Алматы 2010

О.С. Сатыбалдиев, З.И. Сулейменов. Математика II. Оқу құралы.- Алматы: 2010, 349 б.
ISBN 9965-21-742-4

Оқу құралы техникалық жоғары оқу орындарында оқылатын «Математика-II» курсының типтік оқу бағдарламаларына сәйкес жазылған. Оқу құралына жоғары математика курсының «Бір айнымалы функцияның интегралдық есептеулері», «Көп айнымалы функцияның дифференциалдық және интегралдық есептеулері», «Дифференциалдық теңдеулер» және «Қатарлар» бөлімдері енген. Бұл бөлімдер бойынша теориялық материалдар (дәрістер), студенттердің орындайтын үй және өзіндік жұмыс тапсырмалары, жаттығулар, оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары, әр бөлімнің соңында студенттердің орындайтын жеке тапсырмалар жүйесі (әркайсысы 25 нұсқадан тұрады) және оларды қалай орындау жөніндегі әдістемелік нұсқаулар берілген.

Оқу құралы оқытудың кредиттік технология жүйесінің талаптарына сай жазылған және ол техникалық жоғары оқу орындарының студенттері мен оқытушыларына арналған.

Пікір жазғандар: С.Т. Мұхаметжанов – Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университетінің «Математикалық анализ» кафедрасының меңгерушісі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор;

М.Қ.Дауылбаев - Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университетінің «Дифференциалдық теңдеулер» кафедрасының меңгерушісі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор;

С.Е.Комеков – Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ Ұлттық техникалық университетінің «Жалпы және теориялық физика» кафедрасының меңгерушісі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор.

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2010 жылғы жоспары бойынша басылды.

Алғы сөз

Қазіргі уақытта Республикамыз бен бүкіл әлемде болып жатқан саяси, экономикалық және т.б. өзгерістер білім беру жүйесінің жаңа моделін енгізуді талап етіп отыр. Ақпараттық технологияның қарқындап өсуі, оқытудың жаңа заман ағымына сай талаптары мен білім берудің ескі мазмұнының арасындағы қайшылықтар жоғары білім беруді жетілдіруге бағытталған көптеген практикалық тұрғыдағы комплекстік мәселелерді айқындап, оларды жүзеге асыруды міндеттейді. Осы мәселелердің негізінде білім беру процесін алынған білім мен дағдының практикалық мәнін, білім берудің жалпы мазмұнын ізгілендіруді күшейту арқылы жетілдіру және жаңғырту, халықаралық білім кеңістігіне енуін қамтамасыз ету, ұлттық білім деңгейін халықаралық стандарт деңгейіне жақындату міндеттері жүзеге асуы тиіс.

Бүгінгі таңда жоғары оқу орындарының оқытудың кредиттік жүйесіне өтуіне байланысты оқу процесстерінде өзгерістер жасалуда. Бұрынғы оқу жүйесінде оқу материалының бәрін оқытушының өзі дәрістік, практикалық сабақтарда түсіндіріп беретін болса, ал енді кредиттік технология бойынша негізінен студенттердің өздері оқып, талдап және есеп шығарып үйренеді, ал оқытушылар студенттердің өздерін оқып талдауына, игерген теориялық білімін есеп шығаруға қолдануға, тиісті материалдың бәрін өздері игеруіне көмектеседі. Студенттердің оқытушылармен бірге даярлығы шығармашылық ізденіске бағытталған. Дәрістерді өткізу алгоритмі де өзгеруде. Дәріскер тақырыпқа қатысты студенттердің түсінбеген сауалдарына жауап береді, сабақ басталған күннен бастап-ақ қажетті әдебиеттер тізімін ұсынады.

Кредиттік технология жүйесінде оқу процесін ұйымдастырудың негізгі міндеті студенттердің өзіндік жұмыстарының ролін күшейту және оның нәтижелілігін көтеру. Оларды іс жүзіне асыру үшін келесі мәселелер өз шешімін табуы тиіс:

- пәнді оқытудың оқу-әдістемелік кешенімен студенттерді қамтамасыз ету;
- студенттерді оқу әдебиеттермен өзіндік жұмыс істей білуге тәрбиелеу;
- студенттерді электрондық оқулықтармен және лекциялармен толық қамтамасыз ету;
- «студент - оқытушы» кері байланысын орнату және оны жүзеге асыру.
- студенттердің өзіндік жұмыстарына қажетті тапсырмаларды іріктеп, беріп алу;
- сол тапсырмалардың орындалуын уақтылы қадағалау;
- студенттердің тапсырмаларды орындауына консультациялар беру және көмек көрсету;
- студенттерге әрбір сабақтың мақсатын түсіндіру және әрбір өткізген тапсырмалары үшін алған бағаларының не үшін қойылғаны туралы мағлұмат беру;
- студенттердің орындаған өзіндік жұмыстарын уақтылы тексеру, орындалған жұмыстарға кеңес айту және нұсқау беру.

Осындай кредиттік технологияда оқытудың талаптарын жүзеге асыруда студенттерге арналып жазылған оқулықтар, оқу құралдары және оқу-

әдістемелік кешендердің атқаратын рөлі зор. Олардың көмегі арқылы студенттер өз бетінше білім алуға үйренеді және олардың бойында алған білімдерін практикаға қолдана білу іскерлігі мен, дағдылары қалыптасады. Осындай келелі мәселелердің шешімін табу мақсатында техникалық жоғары оқу орындарының студенттеріне арнап жоғары математика курсы бойынша жазылған оқу құралының үшінші бөлімін ұсынып отырмыз.

Оқу құралы мынадай құрылымда жазылды: теориялық материалдар, сол материалдарды студенттердің толық түсінгендігін айқындайтын өзін-өзі тексеру сұрақтары, оқытушының кеңесі бойынша студенттердің орындайтын жаттығулар жүйесі, студенттердің үйде орындайтын тапсырмалары, әр бөлімнің соңында жеке студентке арналған жиырма бес нұсқадан (варианттан) тұратын өзіндік жұмыс тапсырмалары және осы нұсқалардың алдындағы нөлінші нұсқада сол тапсырмаларды қалай орындау жөнінде әрі ынғайлы, әрі уақытты үнемдейтін үлгілер ұсынылды.

Мұндай құрылым кредиттік технология жүйесі бойынша техникалық жоғары оқу орындарының студенттеріне математикалық білім беруде әдістемелік тұрғыдан өте тиімді және кредиттік технологияда оқытудың барлық талаптарын қанағаттандырады.

Оқу құралы оқытудың кредиттік технология жүйесіне сәйкес мемлекеттік тілде тұңғыш рет жазылып отырғандықтан кемшіліктері жоқ деп айта алмаймыз. Сол кемшіліктерге сын-ескертпелер айтқан оқырмандар мен мамандарға алдын-ала алғысымызды білдіреміз.

Ұсынылып отырған оқу құралының қолжазбасына пікір жазып, ескертпелер айтқан Қ.И.Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ-дың «Жалпы және теориялық физика» кафедрасының меңгерушісі, ф.-м.ғ.д., профессор С.Е.Көмековке, Абай атындағы ҚазҰПУ-дың «Математикалық анализ» кафедрасының меңгерушісі, ф.-м.ғ.д., профессор С.Т.Мұхаметжановқа, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-дың «Дифференциялдық теңдеулер және математикалық физика» кафедрасының меңгерушісі, ф.-м.ғ.д., профессор М.Қ.Дауылбаевқа және оқу құралын жазу барысында құнды-құнды кеңес берген Қазақстан Республикасының еңбек сіңген қайраткері. Нью-Йорк академиясының толық мүшесі, Қазақстан Республикасы инженерлік академиясының академигі, ф.-м.ғ.д., профессор Е.Т.Божановқа, Қ.И.Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ-дың «Математика» кафедрасының ардагер-математик оқытушылары С.Қ.Тұматаев пен Ә.Т.Аязбаевқа зор алғысымызды білдіреміз.

Оқу құралының қолжазбасын компьютерге түсіргенде үлкен көмек көрсетіп, еңбек жасаған Қ.И.Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ-нің «Математика» кафедрасының жанындағы зертхана қызметкері Жұбанышбаева Райкүл Жаңабергенқызына алғысымызды айтамыз.

Авторлар

10 тарау Анықталмаған интегралдар
§10.1 Алғашқы функция және анықталмаған интеграл

Математикада және оның әртүрлі салада қолданылуларында мынадай есептер жиі кездеседі: берілген $y=f(x)$ функциясы үшін $F'(x)=f(x)$ теңдігі орындалатындай, яғни туындысы осы $f(x)$ функциясына тең $y=F(x)$ функциясын табу керек. Зер салып қарасаңыздар, мұндай есептерді шығару алдыңғы дифференциалдық есептеулер бөлімінде қарастырған мәселелерге кері. Берілген туындысы арқылы сол функцияның өзін іздеу әдістерін қарастыратын математиканың бөлімі интегралдық есептеулер деп аталады.

Интегралдық есептеулердің негізгі түсініктерінің бірі – алғашқы функция түсінігі.

1-анықтама. Егер де X аралығының барлық x нүктелері үшін $F'(x)=f(x)$ теңдігі орындалса, онда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы деп аталады.

Мысалы, $f(x)=x^2$ функциясының алғашқы функциясы $F(x)=\frac{x^3}{3}$ функциясы болады, себебі

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{\left(x^3\right)'}{3}=\frac{3x^2}{3}=x^2.$$

Осы мысалдан мынаны байқау қиын емес:

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+C,$$

мұндағы $C=const$, түріндегі функциялардың барлығы $f(x)=x^2$ функциясының алғашқы функциялары болады, себебі

$$\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=x^2.$$

Сонымен алғашқы функциялар туралы төмендегідей жалпы қорытынды жасауға болады.

Теорема. Егер $F(x)$ функциясы қандайда бір X аралығында $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда бұл $f(x)$ функциясының алғашқы функциялары $F(x)+C$, мұндағы $C=const$, түрінде өрнектеледі.

Осы тұжырымды дәлелдей кетейік. Шынында да, айталық

$$F'(x)=f(x)$$

болсын. Сонда

$$\left(F(x)+C\right)'=F'(x)+0=f(x).$$

Бұл дегеніміз $F(x)+C$ функциялары $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы екендігін көрсетеді.

Керісінше, $f(x)$ функциясының $F(x)$ – тен басқа тағы да бір $\varphi(x)$ алғашқы функциясы бар болсын делік.

$$\varphi(x) - F(x) = \Phi(x)$$

деп белгілейік. Бір жағынан

$$F'(x) = f(x) \text{ және } \varphi'(x) = f(x)$$

болса, екінші жағынан

$$\Phi'(x) = [\varphi(x) - F(x)]' = \varphi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Осыдан $\Phi(x) = C$ екендігі шығады, яғни

$$\varphi(x) = F(x) + C.$$

Сөйтіп, жоғарыдағы теореманы толық дәлелдедік.

Бұл дәлелденген теорема интегралдық есептеулердің тағы да бір негізгі түсінігін енгізуге мүмкіндік береді.

2-анықтама. Егер де $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда

$$F(x) + C,\ C = const,$$

өрнегі $f(x)$ функциясының анықталмаған интегралы деп аталады да, былай белгіленеді: $\int f(x)dx$ (былай оқылады: «интеграл эф икс дэ икс»).

Сонымен, анықтама бойынша

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

$\int$ таңбасы интеграл таңбасы, $f(x)$ функциясы интеграл астындағы функция, ал $f(x)dx$ көбейтіндісі интеграл астындағы өрнек деп аталады.

$f(x)$ функциясының алғашқы функциясын табуды оны интегралдау деп атайды.

§10.2 Анықталмаған интегралдың қасиеттері

1°. Анықталмаған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең, яғни

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2°. Анықталмаған интегралдың дифференциалы интеграл астындағы өрнекке тең, яғни

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

3°. $F(x)$ функциясының дифференциалының анықталмаған интегралы осы функция мен тұрақты санның қосындысына тең, яғни

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4°. Тұрақты санды интеграл таңбасының алдына шығаруға болады, яғни, егер $C = const$ болса, онда

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$$

5°. Қосындының анықталмаған интегралы қосылғыштардың анықталмаған интегралдарының қосындысына тең, яғни

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

6°. Егер $\int f(x)dx = F(x) + C$ болса, онда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

мұндағы a мен b тұрақтылар.

Бірінші қасиеттің дәлелдемесі жоғарыдағы бірінші анықтамадан, ал екінші және үшінші қасиеттер дифференциалдың анықтамасы мен бірінші қасиеттен, 4, 5, 6-қасиеттер екінші анықтамадан шығады.

§10.3 Интегралдау кестесі

Төмендегі интегралдар кестесі анықталмаған интегралдың анықтамасы мен туындылар кестесінен тікелей шығады.

1. $\int dx = x + C.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
7. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1.$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
9. $\int e^x dx = e^x + C.$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} + C.$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin x + C.$
14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$
16. $\int tgx\,dx = -\ln|\cos x| + C.$
17. $\int ctgx\,dx = \ln|\sin x| + C.$

Мысалы, 17-формуланың дұрыстығын дәлелдейік, ол үшін теңдіктің оң жағынан туынды аламыз. Сонда

$$\left(\ln|\sin x| + C\right)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + 0 = ctgx.$$

Сөйтіп, біз интеграл астындағы функцияны алдық. Бұл формуланың дұрыстығын көрсетеді. Қалған формулалардың барлығы осыған ұқсас дәлелденіледі.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. $y = f(x)$ функциясының алғашқы функциясы деп қандай функцияны айтады?

2. Бір ғана функцияның екі алғашқы функцияларының айырымы $\cos x$ функциясына тең бола ала ма?

3. Анықталмаған интеграл: сан ба, әлде функция ма немесе функциялар жиыны ма?

4. Анықталмаған интегралдың қасиеттерін тұжырымдаңыз?

5. $tg5x$ функциясын интеграл таңбасының алдына шығаруға бола ма?

6. Екі функцияның көбейтіндісінің интегралы олардың интегралдарының көбейтіндісіне тең бола ма?

7. Екі функцияның қатынасының интегралы олардың интегралдарының қатынасына тең бола ма?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1. Интегралдау кестесіндегі формулалар мен анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттеріне сүйеніп бірден интегралдау тікелей интегралдау деп аталады. Бірнеше мысалдар келтірейік.

1-мысал. $\int \frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx$ интегралын есептелік. Ол үшін бөлшектің алымын бөліміне мүшелеп бөлеміз. Одан соң интегралдың 4-ші мен 5-ші қасиеттерін және интегралдар кестесінің 2-ші мен 7-ші формулаларын қолданамыз. Сонда

$$\int \frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx = 2\int x^{-\frac{3}{2}}dx + 3\int x^{-\frac{5}{6}}dx + 5\int \frac{dx}{x} = 2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 3\frac{x^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}} + 5\ln|x| + C =$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{x}} + 18\sqrt[6]{x} + 5\ln|x| + C.$$

2-мысал. $\int 2^{3x-1}dx$ интегралын есептелік. $2^{3x-1} = 2^{3x}\cdot 2^{-1} = \frac{8^x}{2}$ болатындығын ескеріп, интегралдың 4-ші қасиеті мен интегралдар кестесінің 8-ші формуласын пайдаланамыз. Сонда

$$\int 2^{3x-1}dx = \frac{1}{2}\int 8^x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{8^x}{\ln 8} + C.$$

3-мысал. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$ интегралын есептелік. Алдымен интеграл астындағы функцияны түрлендірелік:

$$\frac{1}{x^4+x^2} = \frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}.$$

Осыдан соң интегралдың 5-қасиеті мен интегралдар кестесінің 7-ші және 11-ші формулаларын пайдаланамыз. Сонда

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2}=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{1+x^2}=\int x^{-2}dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}-arctgx+C.$$

4-мысал. $\int\left(x^7-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int x^7dx-\int x^{-2}dx=\frac{x^8}{8}+\frac{1}{x}+C.$

5-мысал. $\int 2\sqrt[3]{x^2}\,dx=2\int x^{2/3}dx=6\frac{x^{5/3}}{5}+C=\frac{6}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C.$

6-мысал. $\int 3^{2x-1}dx=\int 3^{2x}3^{-1}dx=\frac{1}{3}\int 9^x dx=\frac{1}{3}\frac{9^x}{\ln 9}+C.$

7-мысал. $\int\frac{dx}{1+4x^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\frac{1}{4}+x^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}arctg2x+C=\frac{1}{2}arctg2x+C.$

8-мысал. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C.$

2. Келтіру әдісімен интегралдау. Бұл әдіс дифференциалдың төмендегідей түрлендірулеріне негізделген:

1) $dx=d(x+b)$, мұндағы b - тұрақты шама,

2) $dx=\frac{1}{a}d(ax),\quad a\neq o,$

3) $dx=\frac{1}{a}d(ax+b),$

4) $xdx=\frac{1}{2}dx^2,$

5) $\sin xdx=-d(\cos x),$

6) $\cos xdx=d(\sin x),$

Жалпы жағдайда $\varphi'(x)dx=d\varphi(x).$

1-мысал. $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln(ax+b)+c.$

2-мысал.

$$\int\sqrt{3x-2}dx=\frac{1}{3}\int(3x-2)^{1/2}d(3x-2)=\frac{1}{3}\frac{(3x-2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{9}(3x-2)^{3/2}+c.$$

3-мысал. $\int\sin\frac{x}{3}dx=3\int\sin\frac{x}{3}d(\frac{x}{3})=-3\cos\frac{x}{3}+c.$

4-мысал. $\int\frac{xdx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c.$

5-мысал. $\int\frac{3dx}{\cos^2 3x}=\int\frac{d(3x)}{\cos^2 3x}=tg3x+c.$

6-мысал. $\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2=\frac{1}{2}e^{x^2}+c.$

7-мысал. $\int\frac{x^2dx}{1+x^6}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2}=\frac{1}{3}arctgx^3+c.$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі интегралдарды есептеңіздер:

1. $\int(x+\sqrt{x})dx.$
2. $\int(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4})dx.$
3. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x}}.$
4. $\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\right)dx.$
5. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$
6. $\int\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx.$
7. $\int\frac{dx}{5^x}.$
8. $\int 4^{3x-2}dx$
9. $\int\frac{dx}{4-9x}.$
10. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+25}}.$
11. $\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx.$
12. $\int\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx.$
13. $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx.$
14. $\int\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}dx.$
15. $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx.$
16. $\int\sin^4 x\cos x dx.$
17. $\int e^{-3}dx.$
18. $\int\frac{e^x dx}{e^x+5}.$
19. $\int\frac{6xdx}{1+3x^2}.$
20. $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}.$

§10.4 Негізгі интегралдау әдістері

§10.4.1 Айнымалыларды алмастыру әдісі

Көп жағдайларда интегралдау айнымалысын басқа бір айнымалымен алмастыру интеграл астындағы өрнекті ықшамды түрге келтіруге және ол интегралға алдыңғы тақырыптағы кестенің формулаларын қолдануға мүмкіндік береді. Мұндай әдісті айнымалыны алмастыру әдісі деп атайды. Бұл әдіс келесі теореманың негізінде жүзеге асады.

1-теорема. Айталық $x=\varphi(t)$ функциясы T аралығында анықталған және дифференциалданатын болсын. Сонымен қатар осы $x=\varphi(t)$ функциясының

мәндерінің жиыны X аралығында $y = f(x)$ функциясы анықталсын. Егер $F(x)$ функциясы X аралығында $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда $F[\varphi(t)]$ функциясы T аралығында $f[\varphi(t)]$ функциясының алғашқы функциясы болады, яғни T аралығында

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt \qquad (1)$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеу. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі бойынша бұл теңдіктің сол жағынан туынды алсақ:

$$F'[\varphi(t)] = F'_x[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

теңдігі шығады, ал ол (1) теңдіктің оң жағындағы интеграл астындағы функцияны берді.

(1) теңдікті анықталмаған интегралда айнымалыны алмастыру формуласы деп атайды.

§10.4.2 Бөліктеп интегралдау әдісі

Бұл әдіс екі функцияның көбейтіндісін дифференциалдау ережесіне негізделген және ол берілген интегралды одан қарапайым интегралға алып келеді.

2-теорема. Айталық $u(x)$ және $v(x)$ функциялары X аралығында дифференциалданатын болсын. Онда

$$\int u dv = uv - \int v du \qquad (2)$$

теңдігі орындалады.

Осы теңдікті бөліктеп интегралдау формуласы деп атайды.

Ескерту! Осы бөліктеп интегралдау әдісінің негізінде дәлелденетін және рекуррентік деп аталатын келесі формула есептер шығаруда жиі пайдаланылады.

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n},\ n \in N$$

болсын. Онда

$$J_n = J_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} \cdot J_{n-1}. \qquad (3)$$

Мысал. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ интегралын есептеу үшін (3) формуланы пайдаланамыз.

Сонда $J_2 = J_1 + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{J_1}{2} = \frac{1}{2}arctgx + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$.

Мысалдар.

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ интегралын есептелік. Ол үшін

$$\sqrt{x}=t$$

алмастыруын жасалық. Сонда

$$x=t^2, \text{ ал } dx=2tdt$$

болады. Осыларды берілген интегралға апарып қойсақ, яғни

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=\int \frac{t\cdot 2t}{1+t^2}dt=2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt=2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt=2\left(\int dt-\int \frac{dt}{1+t^2}\right)=2(t-arctgt)+C.$$

t – ның орнына кайтадан x айнымалысын қойсақ

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\cdot dx=2\left(\sqrt{x}-arctg\sqrt{x}\right)+C.$$

2. $\int \sqrt{4-x^2}dx$ интегралын есептелік. Бұл интегралды есептеу үшін

$$x=2sint, 0\le t\le \frac{\pi}{2},$$

тригонометриялық алмастыруы өте ыңғайлы. Шынында да бұл алмастыру арқылы интеграл астындағы өрнек

$$4-x^2=4-4sin^2t=4\left(1-sin^2t\right)=4cos^2t,$$

ал

$$dx=2costdt$$

түріне келеді. Олай болса

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\int\cos t\cdot 2\cos tdt=2\int 2\cos^2 tdt.$$

Соңғы интегралға

$$2cos^2t=1+cos2t$$

«дәрежені төмендету» формуласын қолданамыз:

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=2\int\left(1+cos2t\right)dt=2t+sin2t+C. \qquad (4)$$

Жоғарыдағы

$$x=2sint$$

алмастыруынан

$$sint=\frac{x}{2} \text{ және } t=arcsin\frac{x}{2}.$$

Олай болса

$$cost=\sqrt{1-sin^2t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2},$$

ал

$$sin2t=2sintcost.$$

Осыларды (4) теңдіктің оң жағына қойсақ

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=2arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}+C.$$

Ескерту! Жоғарыдағы бірінші теореманың практикада жиі қолданылатын дербес жағдайы келесі теорема болып табылады.

3-теорема. Егер

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

болса, онда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad (5)$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеу.

$$ax + b = t$$

алмастыруын жасасақ

$$dx = \frac{dt}{a}$$

болады. Олай болса

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + C.$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы t – ның орнына $ax+b$ – ны қойып (5) теңдікті аламыз.

3. $\int(2x+1)^4 dx$ интегралын есептелік. Бұл интеграл (5) теңдіктің негізінде қысқаша былай есептелінеді:

$$\int(2x+1)^4 dx = \frac{1}{2}\int(2x+1)^4 d(2x+1) = \frac{(2x+1)^5}{10} + C.$$

Ескерту! (1) формуланы оңнан солға қарай да қолдануға болады. Бұл жағдайда оны «дифференциалдың астына енгізу» әдісі деп атайды.

4. $\int x^2 \cdot e^{3+5x^3} dx$ интегралын есептелік. Айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу арқылы

$$x^2 dx = \frac{1}{15}d\left(3+5x^3\right)$$

теңдігін аламыз (шын мәнінде осы арада $t = 3+5x^3$ алмастыруы айқын түрде көрінбей тұр). Сонымен

$$\int x^2 \cdot e^{3+5x^3} dx = \int e^{3+5x^3} \cdot \frac{1}{15}d\left(3+5x^3\right) = \frac{1}{15}\int e^{3+5x^3} d\left(3+5x^3\right) = \frac{1}{15}e^{3+5x^3} + C.$$

5. $\int \ln x dx$ интегралын есептелік. Ол үшін (2) формуланың сол жағындағы $\ln x$ – ті u деп, ал dx – ті dv деп белгілейік. Сонда

$$du = \frac{1}{x}dx, \text{ ал } v = x$$

болады (бұл арада $c = 0$ деп аламыз). Бұдан былай ыңғайлы болу үшін бөліктеп интегралдау әдісін пайдаланамыз да төмендегі жазу түрін қолданамыз. Сөйтіп,

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

6. $\int arcsin x\, dx$ интегралын есептелік.

$$\int arcsin x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = arcsin x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \cdot arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (6)$$

Соңғы интегралды есептеу үшін

$$\sqrt{1-x^2} = t$$

алмастыруын жасалық. Сонда

$$t^2 = 1 - x^2$$

болады. Осы теңдіктің екі жағын да диффсренциалдап

$$2tdt = -2xdx$$

теңдігін аламыз. Осыдан

$$xdx = -tdt.$$

Олай болса

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{t\,dt}{t} = -\int dt = -t + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Осыны (6) теңдіктің оң жағындағы интегралға апарып қойсақ

$$\int arcsin x\, dx = x \cdot arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Ескерту! Кейбір интегралдарды есептегенімізде бөліктеп интегралдау формуласын бірнеше рет қолдануға тура келеді.

7. $\int x^2 e^x dx$ интегралын есептелік.

$$\int x^2 e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= x^2 e^x - 2\left| x e^x - \int e^x dx \right| = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

Ескертулер!

1) $\int x^n e^{ax} dx$, $\int x^n \sin mx dx$, $\int x^n \cos mx dx$ интегралдары $u = x^n$, ал қалған интеграл астындағы өрнектерді dv арқылы белгілей отырып, x айнымалысының дәрежесі n нөлге тең болғанша n рет бөліктеп интегралдаудың көмегімен есептелінеді;

2) $\int x^k arcsin x dx, \int x^k arccos x dx, \int x^k arctgx dx, \int x^k arctgx dx$ интегралдары $x^k dx = dv$, ал қалған интеграл астындағы өрнектерді u арқылы белгілеп, бөліктеп интегралдаудың көмегімен есептеледі.

3) $\int x^k \ln^n x dx$ түріндегі интегралдар $u = \ln^n x$, $dv = x^k dx$, ал $dv = x^k dx$ белгілеулері арқылы логарифмнің дәрежесі нөлге тең болғанша n рет бөліктеп интегралдаудың көмегімен есептелінеді.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Айнымалыны алмастыру әдісі дифференциалдың қандай қасиетіне негізделген?

2. $\int arctg^5 x dx$ интегралын $arctgx = t$ алмастыруы арқылы есептеуге бола ма?

3. Айнымалыны алмастыру формуласын жазыңыз?

4. $arcsin x = t$ алмастыруын қолдану үшін $\int \frac{arcsin^3 x}{\ldots\ldots\ldots} dx$ интегралының астындағы функцияның бөлімі неге тең болу керек?

5. Бөліктеп интегралдау формуласын алу үшін қандай дифференциалдау ережесі қолданылады?

6. Бөліктеп интегралдау әдісінің мәнісі неде?

7. $\int x^3 arctgx dx$, $\int x^4 \ln x dx$, $\int x^5 e^{2x} dx$ интегралдарында қай өрнекті u, қай өрнекті dv арқылы белгілеу керек? Мағынасын түсіндіріңіз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx$ интегралын есептелік:

Шешуі. $t = \cos x$ алмастыруын орындаймыз. Онда, $\sin x dx = -dt$

Берілген интегралға қойсақ:

$$\int \sqrt{\cos x} \sin x dx = -\int t^{1/2} dt = -\frac{2t^{3/2}}{3} + c = -\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + c$$

Бұл арада интегралды есептегеннен кейін t-ның орнына бастапқы $\cos x$-ті қойдық.

2-мысал. $\int (\ln x)^2 \frac{dx}{x}$ интегралын есептеңіз.

Шешуі. $\ln x = t$ деп алмастыру жасасақ $dt = \frac{dx}{x}$ болады.

$$\int (\ln x)^2 \frac{dx}{x} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c.$$

3-мысал. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ интегралын есептелік.

Шешуі. $x = at$, $dx = adt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - a^2 t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + c = \arcsin \frac{x}{a} + c.$$

4-мысал. $\int \frac{\sqrt{1 + ctgx}}{\sin^2 x} dx$ интегралын есептелік.

Шешуі.

$$\int\frac{\sqrt{1+ctgx}}{\sin^2 x}dx=\left|\begin{matrix}1+ctgx=t\\ -\frac{1}{\sin^2 x}dx=dt\end{matrix}\right|=-\int\sqrt{t}dt=-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c=-\frac{2}{3}\sqrt{(1+ctgx)^3}+c.$$

5-мысал. $\int\ln^2(3x-2)dx$ интегралын есептелік.

Шешуі. Бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз.

$$\int\ln^2(3x-2)dx=\left|\begin{matrix}3x-2=t\\ dx=\frac{dt}{3}\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\int\ln^2 tdt=\left|\begin{matrix}u=\ln^2 t & dv=dt\\ du=2\ln t\frac{dt}{t} & v=t\end{matrix}\right|==\frac{1}{3}\left(t\ln^2 t-2\int\ln tdt\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=\ln t & dv=dt\\ du=\frac{dt}{t} & v=t\end{matrix}\right|=\frac{t}{3}\ln^2 t-\frac{2}{3}\left(t\ln t-\int dt\right)=\frac{t}{3}\ln^2 t-\frac{2t}{3}\ln t+\frac{2}{3}t+c$$

$$=\frac{3x-2}{3}\ln^2(3x-2)-\frac{2}{3}(3x-2)\ln(3x-2)+\frac{2}{3}(3x-2)+c.$$

6-мысал. $\int e^{2x}\sin 3xdx$ интегралын есептелік.

Шешуі. Бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз.

$$\int e^{2x}\sin 3xdx=\left|\begin{matrix}u=e^{2x} & dv=\sin 3xdx\\ du=2e^{2x}dx & v=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right|=-\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3xdx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=e^{2x} & dv=\cos 3xdx\\ du=2e^{2x}dx & v=\frac{1}{3}\sin 3x\end{matrix}\right|=-\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x+\frac{2}{3}\left(\frac{e^{2x}}{3}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3xdx\right)=$$

$$=-\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x+\frac{2e^{2x}}{9}\sin 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3xdx.$$

Теңдіктің оң жағындағы интегралды сол жағына өткіземіз.

$$\left(1+\frac{4}{9}\right)\int e^{2x}\sin 3xdx=\frac{e^{2x}}{9}\cdot(2\sin 3x-3\cos 3x):$$

$$\int e^{2x}\sin 3xdx=\frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x-3\cos 3x)+C.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі интегралдарды есептеңіздер:

1. $\int\frac{\ln x}{x}dx.$
2. $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}.$
3. $\int\frac{dx}{5-7x}.$
4. $\int 3^x e^x dx.$
5. $\int e^{x^2+4x-3}(x+2)dx.$
6. $\int\arcsin xdx.$

7. $\int ctg(3x-5)dx$.

8. $\int \frac{dx}{ctg5x}$.

9. $\int (tge^x)e^x dx$.

10. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}$.

11. $\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx$.

12. $\int \frac{\cos 2xdx}{(2+3\sin 2x)^3}$.

13. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

14. $\int \ln(1-x)dx$.

15. $\int arctg\sqrt{x}dx$.

16. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$.

17. $\int x3^{-x}dx$.

18. $\int x\cos^2 xdx$.

19. $\int xarctgdx$.

20. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

§10.5 Рационал функцияларды интегралдау

Мына түрдегі бөлшек $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, (мұндағы $P(x)$ пен $Q(x)$ көпмүшеліктер), рационал функция деп аталынады. Егер $P(x)$–тің дәрежесі $Q(x)$–тің дәрежесінен кіші болса, онда ол дұрыс, ал үлкен әрі тең болса бұрыс бөлшек деп аталады. Кез келген бұрыс бөлшектің алымын бөліміне бөліп, оны көпмүшелік пен дұрыс бөлшектің қосындысы түрінде өрнектеуге болады. Мысалы, $\frac{x^3}{x+1}$ бөлшегі бұрыс бөлшек. Оның алымын бөліміне бөлейік

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x+1 \\ \hline \underline{x^3+x^2} & x^2-x+1 \\ -x^2 & \\ \underline{-x^2-x} & \\ x & \\ \underline{x+1} & \\ -1 & \end{array}$$

Олай болса, берілген бөлшек, яғни

$$\frac{x^3}{x+1}=x^2-x+1-\frac{1}{x+1}$$

түріне жіктеледі.

Анықтама. Мына түрдегі рационал бөлшектерді

I. $\frac{A}{x-a}$; III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$;

II. $\frac{A}{(x-a)^k}\ (k\geq 2)$; IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\left(k\geq 2,\frac{p^2}{4}-q<0\right)$

сәйкес I, II, III және IV түріндегі қарапайым рационал бөлшектер деп атайды. Бұл бөлшектердегі A, B, a, p, q – нақты сандар.

Осы арада алгебра курсында дәлелденетін төмендегі теоремаға тоқтала кетелік.

Теорема. Кез келген дұрыс бөлшек жоғарыдағы I-IV түріндегі қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктелінеді.

Бұл теоремаға түсініктеме бере кетелік. Теоремада айтылған жіктелінуі $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дұрыс бөлшегінің бөліміндегі $Q(x)$ көпмүшелігінің түбірлеріне байланысты.

Егер $Q(x)$ көпмүшелігінің түбірі нақты және қарапайым болса, онда $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлшегі I-түрдегі; ал егер $Q(x)$ – тің түбірі нақты және еселі болса, онда $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлшегі I-II түріндегі; ал $Q(x)$ – тің қарапайым комплекс түбірі болса, онда $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлшегі I-III түріндегі және $Q(x)$ – тің еселі комплекс түбірлері болса, онда $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлшегі I – IV түріндегі қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктелінеді.

Енді қарапайым рационал бөлшектерді интегралдау мәселелерін қарастыралық.

I. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$.

II. $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$.

III. $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx=\frac{A}{2}\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}+$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+$$

$$+C.$$

IV. $$\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx+$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы бірінші интеграл

$$x^2+px+q=t$$

алмастыруының көмегімен шешіледі, ал екінші интеграл

$$x+\frac{p}{2}=t$$

алмастыруы және $q-\frac{p^2}{4}=b^2$ белгілеуі арқылы жоғарыдағы рекурренттік формуланы қолданып шешуге болатын

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+b^2\right)^k}$$

түріндегі интегралға келеді.

Осы тақырыпта айтылған теориялық мәселелердің практикалық тұрғыдан қалай қолданылатындығына нақты мысал қарастыралық.

Мысал. $\int\frac{x^2+4}{x^3-4x}dx$ интегралын есептелік. Ол үшін бөлшектің бөлімін көбейткіштерге жіктелік, яғни

$$x^3-4x=x(x-2)(x+2).$$

Жоғарыда тұжырымдалған теорема бойынша

$$\frac{x^2+4}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$

жіктелуін аламыз, себебі бөлшектің бөлімінің түбірлері $x=0$, $x=2$ және $x=-2$ нақты сандар және олар еселі емес. A, B және C сандарын табу үшін «анықталмаған коэффициенттер әдісі» деп аталатын келесі тәсілді қолданамыз.

Соңғы бөлшектің екі жағын ортақ бөлімге келтіріп

$$x^2+4=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

теңдігін аламыз. Осы теңдіктен

$x=0$ деп алсақ, $4=(-2)\cdot 2A$ теңдігі шығады, яғни $A=-1$ болады;

$x=2$ деп алсақ, $8=2\cdot 4B$ теңдігі шығады, яғни $B=1$ болады;

$x=-2$ деп алсақ, $8=(-2)\cdot(-4)C$ теңдігі шығады, яғни $C=1$ болады.

Сөйтіп, A, B және C сандарын айқындаймыз. Олай болса берілген бөлшек

$$\frac{x^2+4}{x^3-4x}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$$

түріне жіктелді. Бұл бөлшектің интегралы үш интегралдың қосындысына тең, яғни

$$\int\frac{x^2+4}{x^3-4x}dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x+2}=-ln|x|+ln|x+2|+ln|x-2|+C.$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Рационал бөлшек қай жағдайда дұрыс, қай жағдайда бұрыс деп аталынады?
2. Дұрыс бөлшек қандай шарттарды қанағаттандырғанда қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктелінеді?
3. Анықталмаған коэффициенттер әдісінің мағынасын түсіндіріңіз?
4. Рационал функцияларды интегралдаудың алгоритмін тұжырымдаңыз.
5. $(2A-3B)+(6A+8B)i=8-10i$ (мұндағы i – жорымал бірлік, яғни $i^2=-1$) теңдігінен A мен B қалай табылады?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\int\frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx$ интегралын есептелік.

Шешуі.

$$\int\frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)+2}{x^2+2x+10}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+10}dx+2\int\frac{dx}{x^2+2x+10}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+10\right|+2\int\frac{dx}{(x+1)^2+9}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+10\right|+\frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3}+c.$$

2 –мысал. $\int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx$ интегралын есептелік.

Шешуі. $x+\frac{b}{2a}=t$, $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=k^2$, $dx=dt$.

деп айнымалыны алмастырсақ, онда:

$$\int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx=\frac{A}{2a}\frac{1}{(1-n)(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\frac{1}{a^n}\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^n}.$$

Соңғы интегралды J_n- мен белгілеп, оны интегралдауға кошелік.

$$J_n=\int\frac{dt}{\left(t^2+k^2\right)^n}=\frac{1}{k^2}\int\frac{t^2+k^2-t^2}{\left(t^2+k^2\right)^n}dt=\left(\int\frac{dt}{\left(t^2+k^2\right)^{n-1}}-\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+k^2\right)^n}\right)\frac{1}{k^2}=$$

$$=\frac{1}{k^2}\left[J_{n-1}-\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+k^2\right)^n}\right];$$

$$\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+k^2\right)^n}=\left|u=t,\ dv=\frac{tdt}{\left(t^2+k^2\right)^n};\ v=\frac{1}{2}\int\left(t^2+k^2\right)^{-n}d\left(t^2+k^2\right)=\frac{1}{2(1-n)\left(t^2+k^2\right)^{n-1}}\right|=$$

$$=\frac{t}{2(1-n)\left(t^2+k^2\right)^{n-1}}-\frac{1}{2(1-n)}\int\frac{dt}{\left(t^2+k^2\right)^{n-1}}=\frac{t}{2(1-n)\left(t^2+k^2\right)^{n-1}}-\frac{1}{2(1-n)}J_{n-1}.$$

Соңғы интегралдың мәнін J_n –нің орнегіне қойсақ:

$$J_n=\frac{1}{k^2}\left[\frac{3-2n}{2-2n}J_{n-1}+\frac{t}{2(n-1)\left(t^2+k^2\right)^{n-1}}\right] \qquad (1)$$

Рекуррентік формуласы шығады.

(1) рекуррентік формула арқылы J_2–ні J_1 арқылы, J_3-ті J_2 арқылы таба отырып, ең соңында J_n-ді J_1 арқылы табамыз.

3-мысал. $\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^3}$ интегралын есептелік.

Шешуі. Мұнда $k=1$, $n=3$. (1) формуланы қолданамыз:

$$J_3=\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^3}=\frac{3}{4}J_2+\frac{t}{4\left(t^2+1\right)^2}.$$

J_2-ні де (1) формуладан пайдаланып табамыз.

$$J_2=\frac{1}{2}J_1+\frac{t}{2\left(t^2+1\right)};\qquad J_1=\int\frac{dt}{t^2+1}=arctgt+c.$$

$$J_3=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}arctgt+\frac{1}{2\left(t^2+1\right)}\right]+\frac{t}{4\left(t^2+1\right)^2}+c=\frac{t}{4\left(t^2+1\right)^2}+\frac{3t}{8\left(t^2+1\right)}+\frac{3}{8}arctgt+c.$$

4-мысал. $\int\frac{x+2}{x^2+5x-6}dx=\left|\begin{array}{c}\frac{x+2}{x^2+5x-6}=\frac{x+2}{(x-1)(x+6)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+6}\\ x+2=A(x+6)+B(x-1)\\ \left.\begin{array}{l}A+B=1\\ 6A-B=2\end{array}\right\}\Rightarrow A=\frac{3}{7};B=\frac{4}{7}\end{array}\right|=$

$$=\frac{3}{7}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{4}{7}\int\frac{dx}{x+6}=\frac{3}{7}\ln|x-1|+\frac{4}{7}\ln|x+6|+c.$$

5-мысал. $\int\frac{7x^4-19x^3+8x^2+22x-15}{(x-1)(x-2)^2(x^2+x+1)}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l}\dfrac{7x^4-19x^3+8x^2+22x-15}{(x-1)(x-2)^2(x^2+x+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B_1}{x-2}+\dfrac{B_2}{(x-2)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}\\ 7x^4-19x^3+8x^2+22x-15=A(x-2)^2(x^2+x+1)+B_1(x-1)(x-2)(x^2+x+1)\cdot\\ \qquad+B_2(x-1)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)(x-2)^2\end{array}\right.$$

Жақшаларды ашып, бірдей дәрежелі x-тың алдындағы коэффициенттерді теңдеу арқылы алынған жүйені шешіп $A=1, B_1=2, B_2=3,\ C=4, D=5$ болатынын табамыз. Олай болса:

$$=\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{(x-2)^2}+\int\frac{4x+5}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\ln|x-1|+2\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}+2\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+3\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\ln|x-1|+2\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}+2\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+3\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\ln|x-1|+2\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}+2\ln|x^2+x+1|+2\sqrt{3}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

6-мысал. $\int\frac{2x^4+5x^3+4x^2+5x+3}{2x^2+3x+1}dx=\int\left(x^2+x+\frac{4x+3}{2x^2+3x+1}\right)dx=$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\int\frac{d(2x^2+3x+1)}{2x^2+3x+1}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\ln|2x^2+3x+1|+c.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі интегралдарды есептеңіздер:

1) $\int\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$;

2) $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;

3) $\int\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$.

4) $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

5) $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$;

6) $\int\frac{dx}{x(x+3)}$.

§10.6 Иррационал функцияларды интегралдау

1. $\int R\left[x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right]dx$ түріндегі интеграл, (мұндағы m_1, n_1, m_2, n_2,... бүтін сандар, ал a мен b тұрақтылар), $ax+b=t^k$, мұндағы k саны n_1, n_2,... сандарының ең кіші ортақ еселігі, алмастыруының көмегімен рационал функцияның интегралына келтіріледі.

Ескерту! Жоғарыдағы интегралда R белгілеуі интеграл астындағы өрнектің рационал функциясы дегенді білдіреді.

2. $\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right]dx$ интегралы $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі.

3. $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ интегралы, мұндағы m,n,p – рационал сандар, төмендегі үш жағдайда рационал функциялардың интегралына келтіріледі. Атап айтқанда:

1) p бүтін сан болғанда $x=t^k$ (мұндағы k, m мен n бөлшектерінің ең кіші ортақ еселігі) алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі;

2) егер $\frac{m+1}{n}$ бүтін сан болса, онда $a+bx^n=t^s$ (мұндағы s, p – ның бөлімі) алмастыруы қолданылады;

3) егер $\frac{m+1}{n}+p$ бүтін сан болса, онда $\frac{a+bx^n}{x^n}=t^s$ (мұндағы s, p – ның бөлімі) алмастыру арқылы берілген интегралды рационал функцияның интегралына келтіреміз.

4) $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, $a\neq 0$ түріндегі интеграл:

а) егер $a>0$ болса, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$;

ә) егер $c>0$ болса, $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$;

б) егер α квадрат үшмүшеліктің түбірі болса, $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$ Эйлер алмастырулары арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі.

Мысал. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$ интегралын есептейік. $a=1>0$ болғандықтан $\sqrt{x^2+4x-4}=x+t$ алмастыруын жасаймыз. Сонда $x^2+4x-4=x^2+2xt+t^2$ болады. Осыдан $x=\frac{t^2+4}{2(2-t)}$, $dx=\frac{4+4t-t^2}{2(2-t)^2}$ теңдіктерін аламызда оны берілген интегралға апарып қоямыз. Сонда

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} = 2\int \frac{dt}{t^2+4} = arctg\frac{t}{2} + C = arctg\frac{\sqrt{x^2+4x-4}-x}{2} + C.$$

§10.7 Тригонометриялық функцияларды интегралдау

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ түріндегі интегралдарды «универсал» деп аталатын «$tg\frac{x}{2} = t$» түріндегі алмастырудың көмегімен рационал функциялардың интегралдарына келтіріледі. Өйткені, интеграл астындағы $\sin x$, $\cos x$ және dx – тер t арқылы өрнектеледі. Шынында да

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ x = 2arctgt,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Мысал. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$, мұндағы m мен n бүтін сандар, түріндегі интегралдар:

а) m тақ болғанда $\cos x = t$;

ә) n тақ болғанда $\sin x = t$;

б) m мен n жұп болғанда $tgx = t$ алмастырулары арқылы есептелінеді.

Мысал. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ интегралын $\sin x = t$ алмастыруы арқылы шығарамыз, яғни

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int t^2(1-t^2)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

3. $\int \sin\alpha x \cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x dx$, $\int \cos\alpha x \cos\beta x dx$ интегралдары тригонометрия курсынан белгілі

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

формулаларының көмегімен тез есептелінеді.

Мысал. $\int \sin 3x \cos 5x dx$ интегралын есептеу керек.

$$\int sin3x\,cos\,5x dx = \frac{1}{2}\int sin8x dx - \frac{1}{2}\int sin\,2x dx = \frac{1}{16}\int sin8x d(8x) -$$

$$-\frac{1}{4}\int sin\,2x d(2x) = \frac{cos\,2x}{4} - \frac{cos8x}{16} + C.$$

4. $\int sin^m x\,cos^n x dx$ интегралындағы m мен n жүп сандар, бірақ біреуі теріс болса, онда бұл интегралды $tgx = t$ немесе $ctgx = t$ алмастыруының көмегімен есептейміз.

Мысал.

$$\int \frac{sin^2 x dx}{cos^6 x} = \int \frac{sin^2 x\left(sin^2 x + cos^2 x\right)^2}{cos^2 x\,cos^4 x} dx = \int tg^2 x\left(1 + tg^2 x\right)^2 dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} tgx = t.x = arctgt \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int t^2\left(1+t^2\right)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C.$$

Ескерту! Элементарлық функциялар арқылы «өрнектелмейтін» интегралдар туралы түсінік.

Элементарлық функциялардың туындылары да элементар функциялар болатындығы белгілі. Алғашқы функцияны (анықталмаған интегралды) табу операциясы мұндай қасиеттерге ие болмайды, яғни алғашқы фупкциялары элементарлық функция болмайтын функциялар кездеседі. Бұл жағдайда олардың интегралдары элементарлық функциялар арқылы «өрнектелмейді» деп атайды.

Оларға, мысалы $\int e^{-x^2} dx$, $\int sin x^2 dx$, $\int cos x^2 dx$, $\int \frac{sin x}{x} dx$, $\int \frac{cos x}{x} dx$, $\int \frac{dx}{ln x}$ және т.б. интегралдары жатады, яғни туындылары e^{-x^2}, $sin x^2$, $cos x^2$ т.с.с. функциялары болатын элементарлық функциялар табылмайды. Мұндай элементарлық функциялар арқылы «өрнектелмейтін» интегралдарды жоғарыдағы интегралдау әдістері арқылы есептеу ешқандай нәтиже бермейді. Алайда, бұдан ол интегралдарды есептеу мүмкін емес деген қорытынды жасауға болмайды.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Иррационал функцияларды интегралдаудың қандай әдісін білесіз?
2. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ түріндегі интегралды табу үшін қандай алмастыру орындалады?
3. $\int tg^n x dx$ – ды интегралдау үшін қандай алмастыру орындалады?
4. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ -ды интегралдау үшін қандай алмастыру орындалады?
5. $\int \sin mx \cos nx dx$ қалай интегралданады?
6. $\int R(\sin x)\cos x dx$ – ды интегралдау үшін қандай алмастыру кажет?
7. $\int R(\cos x)\sin x dx$ қалай интегралданады?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал.

$$\int\frac{dx}{2-3\sin x+2\cos x}=\left|\begin{matrix}tg\frac{x}{2}=t\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2-3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{2dt}{2+2t^2-6t+2-2t^2}=\int\frac{dt}{-3t+2}=-\frac{1}{3}\ln|2-3t|+c=\frac{1}{3}\ln\left|2-3tg\frac{x}{2}\right|+c.$$

Эйлер алмастыруын қолданып төмендегі интегралдарды есептелік.

2-мысал.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\left|\begin{matrix}\sqrt{x^2+\alpha}=t-x;\ x^2+\alpha=t^2-2tx+x^2\\ \alpha=t^2-2tx:\ 0=2tdt-2xdt-2tdx\\ \frac{dx}{t-x}=\frac{dt}{t};\ \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\frac{dt}{t}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|+c.$$

3- мысал. § 10.6 тақырыбының 4. а) алмастыруын қолданып мына интегралды есептелік:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}=\left|\begin{matrix}\sqrt{x^2-x+3}=x+t;\ x^2-x+3=x^2+2xt+t^2\\ x(1+2t)=3-t^2;\ x=\frac{3-t^2}{1+2t};\ dx=\frac{-2t(1+2t)-2(3-t^2)}{(1+2t)^2}dt=\\ =\frac{-2t^2-2t-6}{(1+2t)^2}dt;\ \sqrt{x^2-x+3}=\frac{3-t^2}{1+2t}+t=\frac{t^2+t+3}{1+2t}\end{matrix}\right|=$$

$$\int\frac{-2\left(t^2+t+3\right)}{\frac{(1+2t)^2}{3-t^2}\cdot\frac{t^2+t+3}{1+2t}}dt=2\int\frac{dt}{t^2-3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+c=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-x-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+3}-x+\sqrt{3}}\right|+c.$$

Енді, осы интегралды § 10.6 тақырыбы 4. ә) алмастыруын қолданып есепейміз:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}=\left|\begin{array}{c}\sqrt{x^2-x+3}=xt+\sqrt{3};\ x^2-x+3=x^2t^2+2\sqrt{3}xt+3;\\ x-1=xt^2+2\sqrt{3}t;\ x=\frac{1+2\sqrt{3}t}{1-t^2};\ dx=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{3}t^2+2t+4\sqrt{3}t^2}{\left(1-t^2\right)^2}dt=\\ =\frac{2\left(\sqrt{3}t^2+t+\sqrt{3}\right)}{\left(1-t^2\right)^2}dt;\ \sqrt{x^2-x+3}=\frac{\left(1+2\sqrt{3}t\right)t}{1-t^2}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}t^2+t+\sqrt{3}}{1-t^2};\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{2dt}{1+2\sqrt{3}t}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|1+2\sqrt{3}t\right|+c=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{x}\right)\right|+c=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+c\text{, сонда,}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-x-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+3}-x+\sqrt{3}}\right|+c_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+c_2$$ теңдік шығады.

4- мысал.

$$\int\sin^4x\cdot\cos^2x\,dx=\frac{1}{4}\int4\sin^2x\cdot\cos^2x\cdot\sin^2x\,dx=\frac{1}{4}\int\sin^22x\cdot\frac{1-\cos2x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(\sin^22x-\sin^22x\cos2x\right)dx=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos4x}{2}dx-\frac{1}{16}\int\sin^22x\,d\left(\sin2x\right)=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin4x-\frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^32x}{3}+c.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі интегралдарды есептеңіздер:

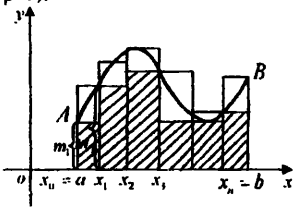
1. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.
2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.
3. $\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$.
4. $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}$.
5. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.
6. $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.
7. $\int\cos^4x\cdot\sin^3x\,dx$
8. $\int\sin^4x\cdot\cos^4x\,dx$.
9. $\int tg^3x\,dx$.
10. $\int\frac{\sin^3x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^4x}}$.

11. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx.$ 12. $\int \frac{dx}{4-5\sin x}.$

11-тақырып. Анықталған интеграл.

§11.1 Анықталған интеграл түсінігі, оның геометриялық мағынасы

$[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз, теріс емес $y=f(x)$ функциясы берілсін. Oxy жазықтығындағы $y=f(x)$ функциясының графигімен, Ox осімен және $x=a$, $x=b$ вертикаль түзулерімен шектелген $aABb$ фигурасын қисық сызықты трапеция деп атайды (1-сурет).



1-сурет

Осы қисық сызықты трапецияның ауданы S-ті қалай табуға болады? Осы сауалдың жауабын іздейік. Мектеп математика пәнінде дөңгелектің ауданын табу үшін оған іштей және сырттай сызылған дұрыс көпбұрыштардың қабырғаларының санын көбейтіп, олардың аудандарын табады да дөңгелектің ауданы ретінде сол көпбұрыштардың аудандарының шегін алатыны белгілі. Бұл әдіс сонау Архимед заманынан бері қолданылып келеді.

Осы айтылғандарды негізге ала отырып жоғарыдағы $y=f(x)$ қисығына жақын орналасқан сынық сызықты қарастыралық. Сол сынық сызықтар арқылы құрылған фигура трапециялардан (тіктөртбұрыштардан) тұрады. Олардың ауданы $\overline{S}$-ті планиметриядан белгілі формулаларды пайдаланып табамыз. Сынық сызықтарды $y=f(x)$ қисығына өте жақын етіп алғандықтан $S\approx\overline{S}$ жуық теңдігі орындалады.

Осыдан мынандай қорытынды жасауға болады: сынық сызықтардың $y=f(x)$ қисығына шексіз жақындағандағы $\overline{S}$ ауданының шегін іздеп отырған қисық сызықты трапецияның ауданы S ретінде алуға болады.

Осы пайымдаулар сапалық сипатқа ие. Оларды практикада қолдану үшін сынық сызықтарды таңдау және шекке көшу мәселелерін қатаң түрде анықтап алған жөн.

Осындай жолдарды пайдалану арқылы анықталған интеграл түсінігін аламыз.

Айталық $[a;b]$ кесіндісінде теріс емес $y=f(x)$ функциясы берілсін. Осы кесіндіні $x_0,x_1,\ldots,x_n$ нүктелері арқылы n ұсақ бөлікке бөлелік және

$$a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

болсын. Әрбір ұсақ $[x_{k-1}; x_k]$ бөліктен ξ_k нүктелерін таңдап алалық (мұндағы $k = 1,2,\ldots,n$). $[x_{k-1}; x_k]$ ұсақ бөлігінің ұзындығын Δx_k арқылы белгілейік. Сонда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (1)$$

түріндегі қосынды $y = f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісіндегі интегралдық қосындысы деп аталады. Бұл интегралдық қосынды $[a;b]$ кесіндісін бөлу әдісіне және ұсақ бөліктерден ξ_k нүктелерін таңдау әдісіне тәуелді. (1) интегралдық қосындының әрбір қосылғышы қабырғалары $f(\xi_k)$ және Δx_k болатын тіктөртбұрыштың ауданын береді.

$[x_{k-1}; x_k]$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ ұсақ бөліктердің ұзындықтарының ең үлкенін $\max\limits_k \Delta x_k$ арқылы белгілейік.

Анықтама. Егер де $\max\limits_k \Delta x_k$ нөлге ұмтылғанда (1) интегралдық қосындысының шегі бар болса және ол шек $[a;b]$ кесіндісін бөлу әдісі мен ξ_k нүктелерін таңдаудан тәуелсіз болса, онда ол шекті $y = f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісі бойынша алынған анықталған интегралы деп атайды да былай белгілейді

$$\int_a^b f(x)dx .$$

Бұл жағдайда $y = f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде интегралданатын функция деп аталады. Сонымен анықтама бойынша:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (2)$$

a саны интегралдың төменгі, ал b саны жоғарғы шегі деп аталады.

$y = f(x)$ – интеграл астындағы функция, $f(x)dx$ – интеграл астындағы өрнек деп аталады.

Ескерту! Анықталған интеграл интегралдау айнымалысына тәуелсіз, яғни

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy = \ldots$$

Белгілеулері мен атауларында ұқсастықтар бар болғанына қарамастан анықталған және анықталмаған интегралдарының бір-бірінен айырмашылығы жер мен көктей. Өйткені, $\int f(x)dx$ интегралы алғашқы функцияларының жиыны; ал $\int_a^b f(x)dx$ қандай да бір сан.

Анықталған интегралдың анықтамасында $a < b$ деп ұйғардық.

Егер $b = a$ болса, онда

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Жоғарыдағы айтылғандардан анықталған интегралдың геометриялық мағынасы шығады: анықталған интеграл қисық сызықты трапецияның ауданын береді.

Анықталған интегралдың анықтамасындағы $[a;b]$-интегралдау аралығы, ал x интегралдау айнымалысы деп аталады.

Анықтама. Егер $f(x)$ функциясы үшін (2) шек бар болса, онда ол функцияны $[a;b]$ кесіндісінде интегралданатын функция деп атайды.

Егер $[a;b]$ кесіндісінде $f(x) \geq 0$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx$ интегралы $x=a$, $x=b$ түзулерімен, $y=f(x)$ қисығымен және Ox өсімен қоршалған қисық сызықты трапецияның ауданын береді.

Осы арада «анықталған интегралдың бар болуы» деп аталатын төмендегі теореманы бере кеткенді жөн көрдік.

Теорема. Егер де $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда бұл функция осы кесіндіде интегралданады.

§11.2 Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері

1°. Тұрақты санды интеграл таңбасының алдына шығаруға болады, яғни, егер $c = const$ болса, онда

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

2°. Бірнеше функциялардың қосындыларының интегралы олардың интегралдарының қосындысына тең, яғни

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx.$$

Бұл екі қасиеттің дәлелдеуі шектер туралы теоремалардан шығады.

3°. Егер де $[a;b]$ кесіндісінде анықталған $f(x)$ пен $\varphi(x)$ функциялары $f(x) \leq \varphi(x)$ шартын қанағаттандырса, онда

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx \qquad (3)$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеу.

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [\varphi(x)-f(x)]dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} [\varphi(t_k)-f(t_k)]\Delta x_k \geq 0, \qquad (4)$$

себебі $[a;b]$ кесіндісінің кез келген нүктесі үшін $f(x) \leq \varphi(x)$. (4) теңсіздіктен (3) теңсіздік шығады.

4°. Егер де m мен M сандары $f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісіндегі сәйкес ең кіші және ең үлкен мәндері болса, онда

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (5)$$

теңсіздігі орындалады. Бұл қасиет

$$\int_a^b mdx = m(b-a),\ \int_a^b Mdx = M(b-a)$$

теңсіздіктері мен 3-қасиеттің негізінде дәлелденіледі.

5°. Егер де $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда осы кесіндінің c нүктесі табылады да

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad (6)$$

теңдігі орындалады.

Осы қасиетті «орта мән туралы теорема» деп те атайды. Оның дәлелдеуі 4^0-қасиеттен және кесіндіде үзіліссіз функциялардың қасиетінен (Анализге кіріспе бөлімін қараңыз) шығады.

6°. Кез келген a,b және c сандары үшін

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

теңдігі орындалады.

§11.3 Анықталған интегралдарды есептеу. Ньютон – Лейбниц формуласы

Егер $\int_a^b f(x)dx$ анықталған интегралының жоғарғы шегі b өзгеріп отыратын, ал төменгі шегі a өзгермейтін болсын деп жорысақ, онда анықталған интеграл әртүрлі мәндер қабылдай отырып, жоғарғы шектің функциясы болады, яғни

$$\int_a^x f(t)dt = \varphi(x).$$

Осы $\varphi(x)$ функциясы үшін төмендегі теорсманың дұрыстығын дәлелделік.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $\varphi'(x) = f(x)$ теңдігі орындалады, яғни жоғарғы шек бойынша алынған анықталған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең.

Дәлелдеу. Айталық Δx аргументтің өсімшесі болсын. Алдыңғы тақырыптағы 6°-қасиет бойынша

$$\varphi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Осыдан

$$\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt$$

теңдігін аламыз. Осы теңдіктің оң жағына 5°-қасиетті қолданып

$$\Delta\varphi = f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x$$

теңдігін аламыз. Соңғы теңдіктің екі жағын Δx – ке бөліп, оны нөлге ұмтылдырып шекке көшсек

$$\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x)$$

теңдігі шығады, себебі $x<\xi<x+\Delta x$.

Осы теореманың негізінде келесі тұжырымды дәлелдеу қиын емес.

Теорема. Егер де $F(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f(x)$ функциясының кандай да бір алғашқы функциясы болса, онда

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad (1)$$

теңдігі орындалады.

Осы (1) теңдік Ньютон-Лейбниц формуласы деп аталады.

Сонымен, Ньютон-Лейбниц формуласы анықталған интегралдарды есептеу үшін, интеграл астындағы функцияның алғашқы функциясын тауып, x айнымалысының орнына интеграл шектерін қойып, олардың айырмасын табуды көрсетеді. Мысалдар келтірелік:

1) $\int_{1}^{2} x^6 dx = \frac{x^7}{7}\Big|_1^2 = \frac{2^7}{7}-\frac{1^7}{7}=\frac{128}{7}-\frac{1}{7}=\frac{127}{7}$.

2) $\int_{0}^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi+\cos 0 = 1+1=2$.

§11.4 Анықталған интегралдарды есептеу әдістері

§11.4.1 Анықталған интегралдарда айнымалыны алмастыру

Теорема. Егер де $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз, ал $[\alpha;\beta]$ кесіндісінде анықталған $x=\varphi(t)$ функциясының осы кесіндіде үзіліссіз туындысы бар болса, онда

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

теңдігі орындалады. Мұндағы $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Дәлелдеу. Айталық $F(x)$, $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болсын, яғни

$$F'(x)=f(x)$$

немесе

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Теореманың шарты бойынша соңғы функция $[\alpha;\beta]$ кесіндісінде интегралданады. Ньютон – Лейбниц формуласы бойынша

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Мысал. $\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$ интегралын есептелік. Ол үшін $x = 2sint$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ алмастыруын жасасақ, интеграл астындағы функция $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4sin^2 t} = 2cost$, ал $dx = 2costdt$ түрінс келеді және интегралдау шектері 0 мен $\frac{\pi}{2}$ аралығында озгереді, себебі $x = 0$ болғанда $t = 0$ және $x = 2$ болғанда $t = \frac{\pi}{2}$ тең.

Сонымен,

$$\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \cdot 2\cos t dt = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = 2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

§11.4.2 Бөліктеп интегралдау

Анықталған интегралда бөліктеп интегралдау формуласы

$$\int_{a}^{b} udv = uv\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} vdu$$

теңдігі арқылы анықталады.

Бұл теңдікті алу үшін $u = u(x)$ және $v = v(x)$ функциялары мен олардың туындылары $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз деп ұйғарылады. Төменгі интегралдарды есептелік.

1-мысал.

$$\int_{0}^{1}\ln(1+x)dx = \left|\begin{matrix} u = \ln(1+x) \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix}\right| = x\ln(1+x)\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\frac{xdx}{1+x} = \ln 2 - 0 -$$

$$-\int_{0}^{1}\frac{x+1-1}{x+1}dx = \ln 2 - \int_{0}^{1}dx + \int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x} = \ln 2 - 1 + \ln(1+x)\Big|_{0}^{1} =$$

$$= ln2 - 1 + ln2 - 0 = 2ln2 - 1 = ln4 - lne = ln\frac{4}{e}.$$

2-мысал. $J_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$ интегралды есептеу үшін рекуррентік формула қорытып шығарайық (мұндағы n-оң бүтін сан).

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x d(\sin x)=\left|\begin{matrix}u=\cos^{n-1}x; & dv=d(\sin x);\\ du=-(n-1)\cos^{n-2}x\sin x dx; & v=\sin x\end{matrix}\right|=$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\sin^2 x dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\left(1-\cos^2 x\right)dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=(n-1)J_{n-2}-(n-1)J_n.$$

$$J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}.$$

Осындай жолмен $J_{n-2}=\frac{n-3}{n-2}J_{n-4}$, онда $J_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}J_{n-4}$

$n=2m$-жұп сан болса, онда

$$J_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot J_0$$

$n=2m+1$-тақ сан болса, онда

$$J_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot J_1$$

$$J_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^0 x dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2};\qquad J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

Сонымен,

$$J_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

$$J_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

3-мысал. $J_{mn}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x dx$ интегралды да 2-мысалдағыдай жолмен интегралдасақ:

$$J_{mn}=\frac{n-1}{m+n}J_{m,n-2}=\frac{m-1}{m+n}J_{m-2,n}.$$

n-тақ сан болса

$$J_{mn}=\frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\cdots(m+3)(m+1)}.$$

m-тақ сан болса

$$J_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)\cdots 4\cdot 2}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\cdots(n+3)(n+1)}.$$

m және n жұп сан болса

$$J_{m,n} = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 3\cdot 1(m-1)(m-3)(m-5)\cdots 3\cdot 1}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. $[a;b]$ кесіндісінде интегралданатын $y=f(x)$ функциясының анықталған интегралы деп нені айтамыз?

2. $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ егер } x \text{ рационал сан болса,} \\ 0, \text{ егер } x \text{ иррационал сан болса,} \end{cases}$ функциясының интегралданбайтындығын дәлелдеңіз?

3. Өзі интегралданбайтын, бірақ квадраты интегралданатын функцияға мысал келтіріңіз?

4. Өздері интегралданбайтын, бірақ қосындысы интегралданатын екі функцияны табыңыздар?

5. $[a;b]$ кесіндісінде теріс емес функцияның интегралы теріс болуы мүмкін бе?

6. Жоғары шегі айнымалы интегралдың туындысы неге тең?

7. Ньютон – Лейбниц формуласын жазыңыз.

8. Анықталған интегралда айнымалыны ауыстыру формуласын жазыңыз.

9. Бөлшектеп интегралдау формуласын жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Анықталған интегралдың анықтамасынан пайдаланып $\int_a^b x dx$ интегралды есептеңіз.

Шешуі: $[a,b]$ кесіндіні тең n бөлікке бөлеміз. Әрбір бөлігінің ұзындығы $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Әрбір кесіндінің сол шетін ξ_i деп қабылдаймыз. Онда: $\xi_1 = a$, $\xi_2 = a+\Delta x$, $\xi_3 = a+2\Delta x$, ... , $\xi_n = a+(n-1)\Delta x$. Интегралдық қосындыны құрамыз. $f(\xi_i)=\xi_i$ болғандықтан,

$$S_n = a\Delta x+(a+\Delta x)\Delta x+...+(a+(n-1)\Delta x)\Delta x=[a+a+\Delta x+...+a+(n-1)\Delta x]\Delta x=$$
$$=[na+(1+2+...+(n-1))\Delta x]\Delta x$$

Арифметикалық прогрессияның мүшелерінің қосындысының формуласы бойынша:

$$1+2+..+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Онда,

$$S_n = \left[na + \frac{n(n-1)}{2}\frac{b-a}{n}\right]\cdot\frac{b-a}{n} = \left(a + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{b-a}{2}\right)\cdot(b-a)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = ab - a^2 + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

Сонымен, $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Ескерту! Интеграл астындағы функция күрделі болған жағдайларда анықтаманы пайдаланып оны есептеу үлкен қиыншылықтарға соғады.

2-мысал. Анықталған интегралдың қасиеттерінен пайдаланып $\int_2^4 \frac{dx}{x}$ интегралын бағалайық.

Шешуі: $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясы $[2.4]$ кесіндіде кемімелі болғандықтан $M = f(2) = 0{,}5;\quad m = f(4) = 0{,}25$. Онда: $0{,}25\cdot(4-2) \le \int_2^4 \frac{dx}{x} \le 0{,}5\cdot(4-2)$ немесе $0{,}5 \le \int_2^4 \frac{dx}{x} \le 1$.

3-мысал. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$ - интегралын есептелік.

Шешуі. $tg\frac{x}{2} = t$ алмастыруын жасасақ, $x = 0$ болғанда $t = 0$ болады; $x = \pi/2$ болса $t = 1$ болады. $dx = \frac{2dt}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x} = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}} arctg\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{2}} arctg\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

4-мысал. $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$ интегралын есептелік.

$$\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = \left|\begin{matrix} x = t^6; x = 1. t = 1 \\ dx = 6t^5 dt; x = 64, t = 2 \end{matrix}\right| = \int_1^2 \frac{6t^5 dt}{t^3\left(1+t^2\right)} = 6\int_1^2 \frac{t^2}{1+t^2}dt = 6\int_1^2 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt =$$

$$= 6\left(t - arctgt\right)\Big|_1^2 = 6\left(2 - arctg2 - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = 6\left(1 + \frac{\pi}{4} - arctg2\right).$$

5-мысал. $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ интегралын есептелік.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \left|\begin{matrix} u=\ln x,\ dv=\frac{dx}{\sqrt{x}} \\ du=\frac{dx}{x},\ v=2\sqrt{x}\end{matrix}\right| = 2\sqrt{x}\cdot\ln x\Big|_1^e - 2\int_1^e \sqrt{x}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= 2\sqrt{e} - 2\int_1^e \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{e} - 4\sqrt{x}\Big|_1^e = -2\sqrt{e} + 4 = 2\left(2-\sqrt{e}\right).$$

6-мысал. $\int_0^1 arctgxdx$ интегралын есептелік.

$$\int_0^1 arctgxdx = \left|\begin{matrix} u=arctgx;\ dv=dx \\ du=\frac{dx}{1+x^2};\ v=x\end{matrix}\right| = xarctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $[a,b]$ кесіндіні $x_i = aq^i$ нүктелері арқылы n бөлікке бөліп $\int_a^b x^2dx$ анықталған интегралын анықтама бойынша есептеңіз. Мұндағы $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}},\ i = 0,1,2,\ldots,n$.

2. $[a,b]$ кесіндіні $x_i = aq^i$ нүктелері арқылы n бөлікке бөліп $\int_a^b \sqrt{x}dx$ анықталған интегралын анықтама бойынша есептеңіз. Мұндағы $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}},\ i = 0,1,2,\ldots,n$.

3. $\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin[a+(n-1)h] = \frac{\cos(a-h) - \cos(a+nh)}{2\sin h}$ тепе-теңдігінен пайдаланып $\int_a^b \sin xdx$ анықталған интегралын анықтама бойынша есептеңіз.

Төмендегі анықталған интегралдарды есептеңіздер:

4. $\int_0^{\pi/2} \sin xdx$.

5. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

6. $\int_0^{\pi/3} tgxdx$.

7. $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$.

8. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$.

9. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

10. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.

11. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

12. $\int_{\sqrt{3}/2}^1 \sqrt{8-x^2}dx$.

13. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

14. $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$.

15. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$.

16. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$.

17. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$.

18. $\int_0^{\pi} \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$.

19. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$.

20. $\int_0^1 \ln\left(1+\sqrt{x}\right) dx$.

21. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$.

22. $\int_0^1 x e^{x^2} dx$.

23. $\int_1^2 \frac{x^3 dx}{(x+1)^2}$.

24. $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ аныкталган интегралын багалаңыз.

25. $\int_0^1 x^3 dx$ аныкталган интегралын багалаңыз.

Аныкталган интегралдардың касиеттері мен Ньютон-Лейбниц формуласын пайдаланып төмендегі интегралдарды есептеңіздер:

26. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} dx$;

27. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

28. $\int_0^2 \frac{x dx}{1+x^4}$;

29. $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$;

30. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$;

31. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$;

32. $\int_0^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$;

33. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$;

34. $\int_0^2 \frac{dx}{9+x^2}$;

35. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$;

36. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$;

37. $\int_0^{2\pi} \cos 5x \cos x dx$

Айнымалыны алмастыру әдісін қолданып төмендегі интегралдарды есептеңіздер:

38. $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$;

39. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{3-\cos x} dx$;

40. $\int_1^2 \frac{5dx}{\sqrt{5x-1}}$;

41. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin x + 1} dx$;

42. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)dx$;

43. $\int_{\frac{3}{4}}^{3\sqrt{3}} \frac{4}{9+16x^2}dx$;

44. $\int_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$;

45. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx$;

46. $\int_{0}^{\sqrt{6}} \frac{dx}{1+2x^2}$.

Бөліктеп интегралдау әдісі арқылы төмендегі интегралдарды есептеңіздер:

47. $\int_{0}^{1} xe^{-x}dx$;

48. $\int_{1}^{e} \frac{\ln x dx}{x^2}$;

49. $\int_{-1}^{1} x\cdot 2^x dx$;

50. $\int_{0}^{1} x^3 arctgx dx$;

51. $\int_{1}^{2} \ln^2 x dx$;

52. $\int_{0}^{1} x\cos x dx$;

53. $\int_{0}^{1} \arcsin x dx$;

54. $\int_{0}^{\pi} e^x \sin x dx$;

55. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{x}{\sin^2 x}dx$.

§11.5 Меншіксіз интегралдар

§11.5.1 Бірінші текті меншіксіз интегралдар

Біз алдыңғы тақырыптарда анықталған интегралдың бар болуы үшін интегралдау аралығы шекті, ал интеграл астындағы функцияның шектелген болуының қажеттілігін кердік. Көптеген мәселелерде бұл екі шарттың бірсуі немесе екеуі де орындалмайтын жағдайлары жиі кездеседі.

Алдымен интегралдау аралығы $[a;+\infty]$ сәулесі болатын жағдайды қарастырайық. Айталық $y=f(x)$ функциясы осы сәуленің барлық x мәндерінде анықталған және үзіліссіз болсын. Бұл жағдайда $b>a$ шартын қанағаттандыратын кез келген b үшін

$$J(b)=\int_{a}^{b} f(x)dx$$

интегралы бар болады. b өзгерген сайын интегралдың мәні де өзгеріп отырады. b плюс шексіздікке ұмтылғанда $(b\to+\infty)$ $J(b)$ функциясының шегі болуы да, болмауы да мүмкін.

Анықтама. Егер $J(b)$ функциясының b шексіздікке ұмтылғанда тиянақты бір санға тең шегі бар болса, онда ол шекті $y=f(x)$ функциясының $[a;+\infty]$ аралығы бойынша алынған бірінші текті меншіксіз интегралы деп атайды да былай белгілейді.

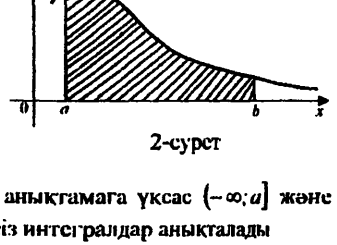
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (1)$$

Сойтіп, бұл анықтама бойынша

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx .$$

Егер $\lim\limits_{b\to+\infty} J(b)$ шегі бар болса (1) интегралды жинақты, ал шегі болмаса, онда (1) интегралды жинақсыз деп атайды.

Егер $[a;+\infty]$ аралығында $f(x)\geq 0$ болса, онда (1) интеграл геометриялық тұрғыдан $x=a$ түзуімен, Ox осімен және $y=f(x)$ қисығымен қоршалған «шексіз» фигураның ауданын береді (2-сурет).



2-сурет

Жоғарыда берілген анықтамаға үқсас $(-\infty;a]$ және $(-\infty;+\infty)$ аралықтары үшін төмендегі меншіксіз интегралдар анықталады

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx \qquad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx + \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)dx \qquad (3)$$

(3) теңдікті былай түсінеміз: егер бұл теңдіктің оң жағындағы әрбір меншіксіз интегралдар бар болса, онда анықтама бойынша, сол жағындағы меншіксіз интеграл да бар болады.

1-мысал. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ интегралын есептейік. $y=\frac{1}{1+x^2}$ функциясы $[1;+\infty)$ аралығында үзіліссіз болғандықтан, бұл функция осы аралықта жататын кез келген кесіндіде интегралданады. Олай болса

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} [arctgb - arctg1] -$$

$$= \lim_{b\to+\infty} arctgb - \lim_{b\to+\infty} arctg1 = arctg(+\infty) - arctg1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} .$$

Сонымен, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

2-мысал. Алдағы уақытта жиі пайдаланылатын $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ меншіксіз интегралын қарастыралық. Осы интеграл α –ның қандай мәндерінде жинақты, ал қандай мәндерінде жинақсыз болатындығын көрсетелік.

Егер $\alpha = 1$ болса, онда

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

Егер $\alpha \neq 1$ болса, онда

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^b = \frac{1}{-\alpha+1}\left(\lim_{b\to\infty} b^{-\alpha+1} - 1\right).$$

Сонымен, берілген интегралдың жинақтылығы мен жинақсыз болуы

$$\lim_{b\to+\infty} b^{-\alpha+1}$$

шегінің бар болуы мен болмауына байланысты. Егер $\alpha > 1$ болса, онда

$$\lim_{b\to+\infty} b^{-\alpha+1} = 0$$

ал егер $\alpha < 1$ болса, онда

$$\lim_{b\to+\infty} b^{-\alpha+1} = \infty.$$

Сейтіп, мынандай қорытындыға келдік:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

интегралы $\alpha > 1$ болғанда жинақты, ал $\alpha \leq 1$ болғанда жинақсыз.

Енді меншіксіз интегралдың жинақты немесе жинақсыз болу мәселелерін айқындауда көмектесетін өте тиімді теоремаларды дәлелдеусіз келтірелік және оның қолданылуын нақты мысалдар арқылы көрсетелік.

1-теорема. Егер x –тің $(x \geq a)$ барлық мәндерінде $\varphi(x)$ пен $f(x)$ функциялары $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ шарттарын қанағаттандырса, онда:

1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралының жинақтылығынан $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ интегралының жинақтылығы шығады және

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \leq \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

теңсіздігі орындалады.

2) $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ интегралы жинақсыз болса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы да жинақсыз болады.

3-мысал. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+e^x\right)}$ интегралы 1-теорема бойынша жинақты және оның мәні 1-ден кіші болады. ойткені $x \geq 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x – тер үшін

$\frac{1}{x^2\left(1+e^x\right)} < \frac{1}{x^2}$ теңсіздігі орындалады және $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ интегралы жинақты (2-мысалға қараңыз).

4-мысал.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$$

интегралы жинақсыз, себебі

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

теңсіздігі орындалады және

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = +\infty.$$

Жоғарыдағы теорема берілген аралықта теріс мәндер қабылдамайтын функциялардың меншіксіз интегралдары туралы мағлұмат береді, ал берілген аралықта таңбасы өзгеріп отыратын функцияның меншіксіз интегралы туралы мағлұматты төмендегі теорема береді.

2-теорема. Егер $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интегралы жинақты болса, онда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралы да жинақты болады.

Бұл жағдайда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралы абсолют жинақты деп аталады.

5-мысал. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ интегралы абсолют жинақты. Шынында да $x \geq 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x – тер үшін

$$\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right| = \frac{1}{x^3},$$

ал

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^b = \frac{1}{2}.$$

Олай болса $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$ интегралы 1-теорема бойынша жинақты, ал берілген интеграл 2-теорема бойынша абсолют жинақты болады.

§11.5.2 Екінші текті меншіксіз интегралдар

Айталық $y=f(x)$ функциясы $[a;b)$ жартылай интервалында анықталсын. Егер $y=f(x)$ функциясы $x=b$ нүктесінің кез келген аймағында шектелмеген, бірақ осы жартылай интервалдың ішінде жатқан кез келген кесіндіде шектелген болса, онда мұндай нүктені ерекше нүкте деп атаймыз.

Айталық $y=f(x)$ функциясы $[a;b)$ жартылай аралығында шектелмеген, бірақ $[a;b-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, түріндегі кез келген кесіндіде интегралданатын болсын.

Анықтама. Егер

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$$

шегі бар болса, онда ол шекті шектелмеген $y=f(x)$ функциясының екінші текті меншіксіз интегралы деп атайды да, былай жазады:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx. \qquad (4)$$

Осыған ұқсас, егер $x=a$ нүктесі ерекше нүктесі болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \qquad (5)$$

ал $x=c$ нүктесі $[a;b]$ кесіндісінің ерекше нүктесі болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \qquad (6)$$

екінші текті меншіксіз интегралдары анықталынады.

Ескерту! (6) теңдік оң жағындағы меншіксіз интегралдардың екеуі де бар болған жағдайда ғана орындалады.

Мысалы. $\int_0^1\frac{dx}{x}$ интегралын зерттелік. Интеграл астындағы $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясының $[0;1]$ кесіндісінде жалғыз $x=0$ ерекше нүктесі бар. Сондықтан

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln x\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln 1-\ln\varepsilon\right)=-\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\varepsilon=+\infty.$$

Сонымен $\int_0^1\frac{dx}{x}$ меншіксіз интегралы жинақсыз екен.

§11.6 Анықталған интегралды жуықтап есептеу

Анықталған интегралдарды интеграл астындағы функцияның алғашқы функциясы белгілі болған жағдайда Ньютон–Лейбниц формуласы арқылы есептеу өте ыңғайлы. Алайда, көп жағдайда интеграл астындағы функцияның алғашқы функциясы элементарлық функциялар арқылы өрнектеле бермейді немесе ол күрделі түрде беріледі. Осындай жағдайларда анықталған интегралды жуықтап есептеу формулалары пайдаланылады. Бұл формулаларды

пайдаланудың негізгі идеясы мынада: интеграл астындағы функция интегралы тікелей Ньютон–Лейбниц формуласы арқылы есептелінетін қарапайым функциялармен (мысалы, көпмүшелікпен) алмастырылады.

§11.6.1 Тіктөртбұрыштар формуласы

Айталық $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз $y=f(x)$ функциясы беріліп

$$\int f(x)dx$$

интегралын есептеу қажет болсын. Ол үшін $[a;b]$ кесіндісін $a=x_0,x_1,x_2,...,x_n=b$ нүктелері арқылы бірдей етіп n – бөлікке бөлелік. Олардың ұзындығы

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

болсын. $x_0,x_1,x_2,...,x_n$ нүктелеріндегі $y=f(x)$ функциясының мәндерін $y_0,y_1,y_2,...y_n$-дермен белгілейік те, мынандай қосындылар құралық:

$$y_0\Delta x+y_1\Delta x+...+y_{n-1}\Delta x,$$
$$y_1\Delta x+y_2\Delta x+...+y_n\Delta x.$$

Бұл қосындылар

$$\int_a^b f(x)dx$$

интегралының жуық мәнін береді, яғни

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+...+y_{n-1}),\qquad(1)$$

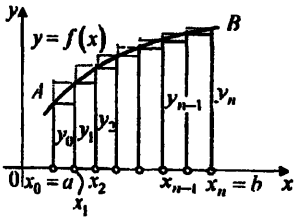
$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+...+y_n).\qquad(2)$$

(1) мен (2) жуық теңдіктері тіктөртбұрыштар формуласы деп аталады.

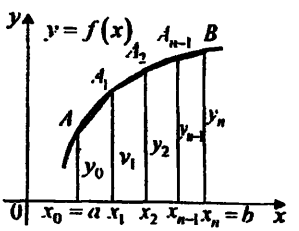
Егер $y=f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде оң және өспелі болса, онда (1) формула $aABb$ қисық сызықты трапецияның ішінде, ал (2) формула сол трапеция ішінде жататын баспалдақты фигуралардың аудандарын береді (3-сурет).

§11.6.2 Трапеция формуласы

Егер $y=f(x)$ қисығын баспалдақты сызықтармен емес ішкей сызылған сынық сызықтармен алмастырсақ, онда анықталған интегралдың мәні (1) мен (2) формулалары мен салыстырғанда дәлірек есептелетініне ешқандай күмән жоқ. Бұл жағдайда $aABb$ қисық сызықты трапециясының ауданын жоғары жағынан $AA_1,A_1A_2,...,A_{n-1}B$ хордаларымен шектелген трапециялардың аудандарымен ауыстыруға болады (4-сурет). Бірінші трапецияның ауданы



3-сурет



4-сурет

$$\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x,$$

екіншісінің ауданы

$$\frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x, \text{ т.с.с.}$$

Олай болса

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1} - y_n}{2}\Delta x$$

немесе

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \qquad (3)$$

(3) жуық теңдігін трапеция формуласы деп атайды.

§11.6.3 Парабола немесе Симпсон формуласы

Анықталған интегралдарды жуықтап есептеудің тағы бір әдісіне тоқталайық. Алдыңғы тақырыптағы сынық сызықтардың орнына параболаның бөліктерін аламыз. Негізгі жуықтау формуласын алу үшін, алдымен бірнеше тұжырымдарды дәлелдейік.

Бірінші лемма. Абциссалары әртүрлі кез келген $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ және $M_3(x_3, y_3)$ нүктелері арқылы

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (4)$$

түріндегі жалғыз ғана парабола өтеді.

Дәлелдеу. a, b, c белгісіз коэффициенттерін табу үшін берілген M_1, M_2, M_3 нүктелерінің координаталарын (4) теңдеудегі x пен y –тің орнына қойып

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2, \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3. \end{cases} \qquad (5)$$

жүйесін аламыз. Бұл жүйенің анықтауышы

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)$$

нолден озгеше, себебі шарт бойынша x_1, x_2, x_3 сандары әртүрлі. Олай болса (5) жүйенің жалғыз ғана шешімі бар. Бірінші лемма дәлелденді.

Екінші лемма. $M_1(-h, y_1)$, $M_2(0, y_2)$, $M_3(h, y_3)$ нүктелерінен өтетін

$$y = ax^2 + bx + c$$

параболасымен қоршалған қисық сызықты трапецияның ауданы

$$S = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)$$

формуласы арқылы есептелінеді.

Дәлелдеу. Бұл жағдайда (5) жүйе мына түрде жазылады

$$\begin{cases} ah^2 - bh + c = y_1, \\ c = y_2, \\ ah^2 + bh + c = y_3. \end{cases}$$

Осыдан

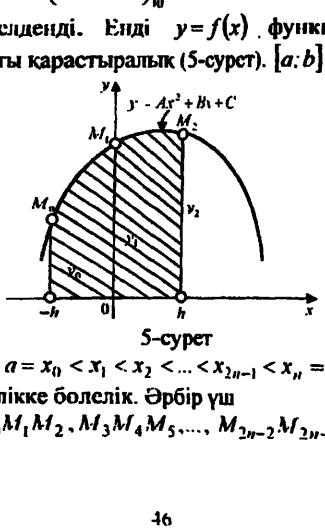
$$2ah^2 + 2c = y_1 + y_3.$$

Сондықтан

$$S = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)dx = \int_{-h}^{h} (ax^2 + c)dx + b\int_{-h}^{h} xdx =$$

$$= 2\int_0^h (ax^2 + c)dx = 2\left(\frac{ax^3}{3} + cx\right)\Bigg|_0^h = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3).$$

Екінші лемма дәлелденді. Енді $y = f(x)$ функциясының графигімен қоршалған қисық сызықты қарастыралық (5-сурет). $[a; b]$ кесіндісін бірдей етіп



5-сурет

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-1} < x_n = b$$

нүктелері арқылы $2n$ бөлікке бөлелік. Әрбір үш

$$M_0M_1M_2, M_3M_4M_5, \ldots, M_{2n-2}M_{2n-1}M_{2n}$$

нүктелері арқылы өтетін параболалар жүргізелік. Сөйтіп, жоғары жағынан осы параболалармен шектелген қисық сызықты трапециялар аламыз. Екінші лемма бойынша $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ бөліктегі қисық сызықты трапецияның ауданы

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_{2k} + 4y_{4k+1}y_{2k+2}),$$

мұндағы

$$y_k = f(x_k),\ 0 \le k \le 2n.$$

Осы жуық теңдіктерді бір – біріне қосып,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2})$$

жуық теңдігін аламыз. Немесе бұл жуық теңдікті ашып жазсақ,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + ...y_{2n-1})]. \quad (7)$$

Осы (7) жуық теңдігін парабола немесе Симпсон формуласы деп атайды.

Жоғарыдағы үш тақырыпта қарастырылған анықталған интегралдарды жуықтап есептеу формулаларын қолданып

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

интегралының жуық мәндерін табалық. $[1;2]$ кесіндісін бірдей етіп он бөлікке бөлелік. Сонда,

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$$

болады. Төмендегі кестені құралық:

x	$y = \frac{1}{x}$	x	$y = \frac{1}{x}$
$x_0 = 1{,}0$	$y_0 = 1{,}00000$	$x_6 = 1{,}6$	$y_6 = 0{,}62500$
$x_1 = 1{,}1$	$y_1 = 0{,}90909$	$x_7 = 1{,}7$	$y_7 = 0{,}58824$
$x_2 = 1{,}2$	$y_2 = 0{,}83333$	$x_8 = 1{,}8$	$y_8 = 0{,}55556$
$x_3 = 1{,}3$	$y_3 = 0{,}76923$	$x_9 = 1{,}9$	$y_9 = 0{,}52632$
$x_4 = 1{,}4$	$y_4 = 0{,}71429$	$x_{10} = 2{,}0$	$y_{10} = 0{,}50000$
$x_5 = 1{,}5$	$y_5 = 0{,}66667$		

(1) формула бойынша

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1 \cdot (y_0 + y_1 + ... + y_9) = 0{,}1 \cdot 7{,}18773 = 0{,}71877.$$

(2) формула бойынша

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1 \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_{10}) = 0{,}1 \cdot 6{,}68773 = 0{,}66877.$$

(3) формула бойынша

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1 \cdot \left(\frac{1+0{,}5}{5} + 7{,}18773 \right) = 0{,}69377 .$$

(7) формула бойынша

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0{,}1}{3}\left[y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)\right] =$$

$$= \frac{0{,}1}{3}(1 + 0{,}5 + 2 \cdot 2{,}72818 + 4 \cdot 3{,}45955) = 0{,}69315 .$$

Шын мәнінде бұл интегралдың жетінші таңбаға дейінгі дәлдікпен алынған мәні, яғни

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = ln\,2 = 0{,}6931472 .$$

санына тең.

Осы есептелінген мәндерді салыстыра отырып, мынандай қорытындыға келеміз: $[1;2]$ кесіндісін бірдей етіп он бөлікке бөлгенімізде

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

интегралының Симпсон формуласы бойынша бес таңбасы, трапеция формуласы бойынша үш, сол төртбұрыштар формуласы бойынша тек қана бір таңбасы сәйкес келеді екен.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Бірінші және екінші текті меншіксіз интегралдар дегеніміз не? Олардың бір- бірінен айырмашылықтары қандай?
2. $[a,\ \infty)$ аралығы бойынша алынған меншіксіз интегралдың анықтамасын беріңіз.
3. Меншіксіз интеграл қашан жинақсыз болады?
4. Меншіксіз интегралдың геометриялық мағынасын баяндаңыз.
5. $(-\infty,\ b]$, $(-\infty,\ \infty)$ аралықтары бойынша алынған меншіксіз интеграл қалай анықталады?
6. Үзілісті функциядан алынған меншіксіз интегралының анықтамасын беріңіз.
7. Анықталған интегралды жуық есептеудің тіктөртбұрыштықтар формуласын жазыңыз.
8. Анықталған интегралды жуық есептеудің трапеция формуласын жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1- мысал. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ интегралын есептелік.

Шешуі. $x = tgt$ алмастыруын жасасақ

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t},\ \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+tg^2 t)^2} = \cos^4 t.$$

$x = 0$ болса $t = 0$ болады, ал x шексіздікке ұмтылғанда $t, \frac{\pi}{2}$-ге ұмтылады. Олай болса

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2} Sin2t\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

2-мысал. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ меншіксіз интегралын жинақтылыққа зерттелік.

Шешуі. Интеграл астындағы функция $x = 0$ нүктесінде үзіліссіз. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ және $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ интегралдарды қарастырамыз.

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} 3 \cdot \sqrt[3]{x}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon} = 3 \lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt[3]{0-\varepsilon} + 3 = 3$$

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3 \lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt[3]{x}\Big|_{0+\varepsilon}^{1} = 3 - 3 \lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt[3]{0+\varepsilon} = 3$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3 + 3 = 6.$$

Сонымен, берілген меншіксіз интеграл жинақты болып, оның мәні 6-ға тең екен.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі меншіксіз интегралдарды жинақтылыққа зерттеңіздер:

1. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$.
2. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}$.
3. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$.
4. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
5. $\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.
6. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.
7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
8. $\int_0^1 \ln x dx$.
9. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.
10. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$.

Төмендегі меншіксіз интегралдарды есептеңіздер:

11) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$; 12) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 13) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

14) $\int_0^1 \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

16) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$;

18) $\int_1^\infty \frac{arctgx}{x^2}dx$;

15) $\int_0^\infty e^{-2x}dx$;

17) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$;

19) $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$

§12-тарау. Анықталған интегралдың қолданулары

§12.1 Анықталған интегралдың қолдануларының жалпы схемасы

Геометрияның, механиканың, физиканың, химияның, биологияның және жалпы жаратылыстану ғылымдарының көптеген есептері интегралдық қосынды әдісін қолдану арқылы шешіледі. Нақтырақ айтқанда, қандайда бір шаманың мәнін табу үшін интегралдық қосынды құрып оның шегін есептеу қажет болады. Ол төмендегідей басқыштар арқылы орындалады.

1. Ізделініп отырған шаманы Q-мен белгілесек, онда оны өзінің кішкене бөлшектерінің қосындысы арқылы өрнектейді, яғни

$$Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \ldots + \Delta Q_k + \ldots \Delta Q_n.$$

2. ΔQ_i-ның мәні ізделініп отырған шамамен байланысты $f(x)$ функциясының ξ_i нүктесіндегі мәні $f(\xi_i)$ мен Δx_i-ның көбейтіндісі ретінде табылады, яғни

$$\Delta Q_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i,$$

мұндағы $\xi_i \in \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ал x_i-үзіліссіз $f(x)$ функциясы анықталған $[a,b]$ аралықты n бөлікке бөлгенде шыққан нүктелері.

3. Ізделініп отырған шама Q-дің жуық мәні жазылады:

$$Q \approx Q_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_k)\Delta x_k + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

4. Q_n интегралдық қосындының $n \to \infty$ дағы, немесе әрбір Δx_k-ның ұзындығы нөлге ұмтылғандағы шегі есептеледі. Бұл шектің мәні $f(x)$ функциядан $[a,b]$ аралық бойынша алынған анықталған интегралды береді.

Сонымен,

$$Q = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Енді осы схема бойынша практикада жиі ұшырасатын геометриялық және механикалық шамаларды анықтауға көшелік.

§12.2 Жазық фигуралардың аудандарын есептеу

а) Декарттық координаталар жүйесінде фигуралардың аудандарын есептеу. Біз жоғарыда (11.1) тақырыбында

$$y = f(x) \geq 0,\ x \in [a;b]$$

болған жағдайда, $y = f(x)$ қисығымен, Ox өсімен және $x = a, x = b$ түзулері мен шектелген фигураның ауданы

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

интегралына тең болатындығын көрсеткенбіз.

Егер

$$f(x) \le 0,\ x \in [a;b]$$

болса, онда

$$S = -\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

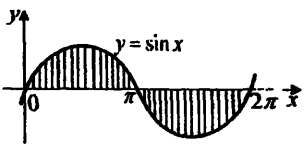
деп аламыз.

Егер $y = f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде өзінің таңбасын бірнеше рет өзгертетін болса (яғни функцияның графигі біресе Ox өсінің жоғары, біресе төменгі жақтарында жатса), онда ауданды

$$S = \int_a^b |f(x)|dx \qquad (3)$$

формуласы арқылы есептейміз.

1-мысал. $y = \sin x$, $0 \le x \le 2\pi$, синусоидасымен және Ox өсімен қоршалған жазық фигураның ауданын табалық (1-сурет).



1-сурет

$[0;\pi]$ кесіндісінде $f(x) \ge 0$, ал $[\pi,2\pi]$ кесіндісінде $f(x) \le 0$. Олай болса (3) формула бойынша

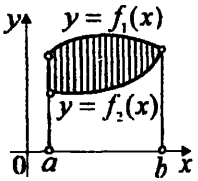
$$S = \int_0^{2\pi} |\sin x|dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4 \text{ (кв. б).}$$

Егер жазық фигура (2-сурет) жоғары жағынан теріс емес $y_2 = f_2(x)$ функциясының графигімен, ал төменгі жағынан теріс емес $y_1 = f_1(x)$ функциясының графигімен және бүйір жақтары $x = a, x = b$ түзулерімен қоршалған болса, онда оның ауданы

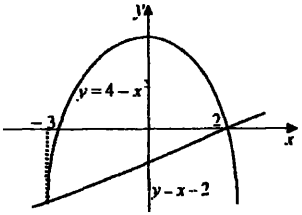
$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx \qquad (4)$$

формуласы арқылы табылады.



2-сурет

2-мысал. $y=4-x^2$ параболасымен және $y=x-2$ түзуімен шектелген жазық фигураның ауданын табалық (3-сурет).



3-сурет

Алдымен парабола мен түзудің қилысу нүктелерін табалық. Ол үшін $4-x^2=x-2$ теңдеуін шешеміз, яғни $x^2+x-6=0$. Осыдан $x_1=-3$, $x_2=2$. Сонымен

$$S=\int_{-3}^{2}\left[4-x^2-(x-2)\right]dx=\int_{-3}^{2}\left(6-x-x^2\right)dx=\left(6x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{2}=$$

$$=12-2-\frac{8}{3}-\left(-18-\frac{9}{2}+9\right)=7\frac{1}{3}+13\frac{1}{2}=20\frac{5}{6}$$ кв.бірлік.

ә) Теңдеуі параметрлік түрде берілген қисықтармен қоршалған фигуралардың аудандарын табу.

Айталық қисықтың теңдеуі

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \tag{5}$$

параметрлік түрде берілсін. Мұндағы

$$\alpha\le t\le\beta,$$

ал

$$\varphi(x)=\alpha,\ \varphi(\beta)=b.$$

(5) теңдеу $[a;b]$ кесіндісінде анықталған қандай да бір $y=f(x)$ функциясын береді. Олай болса, бұл функцияның графигімен шектелген қисық сызықты трапецияның ауданы

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx$$

интегралына тең. Осы интегралда

$$x = \varphi(t)$$

алмастыруын жасасақ, онда

$$dx = \varphi'(t)dt$$

болады.

Демек,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (6)$$

формуласын аламыз.

3-мысал. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ эллипсімен шектелген жазық фигураның ауданын табалық.

Ол үшін эллипстің жоғарғы бөлігімен шектелген фигураның ауданын тауып, оны екі еселесек болады. Бұл жағдайда x минус a – дан плюс a – ға дейін өзгеретін болғандықтан t, π – ден 0 – ге дейін өзгереді.

Демек, (6) формула бойынша

$$S = 2\int_{\pi}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = -2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t dt = 2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t dt =$$

$$= 2ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]\Bigg|_{0}^{\pi} = \pi ab \text{ (кв.б).}$$

б) Полярлық координаталар жүйесінде ауданды есептеу.

Егер қисық

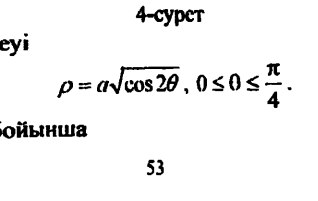
$$\rho = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta,$$

теңдеуі арқылы полярлық координаталар жүйесінде берілсе, онда осы қисықтың доғасымен және $0 = \alpha$, $\theta = \beta$ радиус-векторлармен шектелген сектордың ауданы

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)d\theta \qquad (7)$$

формуласы бойынша есептеледі.

4-мысал. Лемниската деп аталатын қисықпен шектелген жазық фигураның ауданын табалық (4-сурет).



4-сурет

Лемнискатаның теңдеуі

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta},\ 0 \le 0 \le \frac{\pi}{4}.$$

Демек, (7) формула бойынша

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta d\theta = \frac{4a^2}{2} \frac{\sin 2\theta}{2} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \text{ (кв.б).}$$

§12.3 Қисық доғасының ұзындығын есептеу

1) Егер қисықтың теңдеуі декарт координаталар жүйесінде берілсе, яғни

$$y = f(x),\ a \le x \le b,$$

болса, онда ол қисық доғасының ұзындығы

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \qquad (8)$$

формуласы арқылы табылады.

1-мысал. $x^2 + y^2 = R^2$ шеңберінің ұзындығын табалық. Ол үшін шеңбердің бірінші ширекте жатқан бөлігінің ұзындығын тауып, төрт еселесек жеткілікті.

Шеңбердің теңдеуінен

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Осыдан

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Демек,

$$l = 4\int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4\int_0^R \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4R \arcsin \frac{x}{R} \Bigg|_0^R = 2\pi R.$$

2) Егер қисықтың теңдеуі параметрлік түрде берілсе, онда ол қисықтың доғасының ұзындығы

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, dt. \qquad (9)$$

формуласы арқылы табылады.

2-мысал. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ астроидасының ұзындығын табалық. Бұл қисық координаталар өстеріне қарағанда симметриялы болғандықтан, оның бірінші ширекте жатқан бөлігінің ұзындығын тауып, оны төрт есселесек жеткілікті. Бұл бөлікте параметр t нөлден $\frac{\pi}{2}$-ге дейін өзгереді. Астроиданың теңдеуінен

$$x_t' = \varphi'(t) = -3a\cos^2 t \sin t,$$

$$y_t' = \varphi'(t) = 3a\sin^2 t \cos t$$

болатындығына көз жеткізу қиын емес. Демек, (9) формула бойынша

$$l_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 12a\int_{02}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\,dt = 12a\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

3) Егер қисықтың теңдеуі полярлық координаталар жүйесінде берілсе, онда ол қисықтың доғасының ұзындығы

$$l = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\rho'(\theta)\right]^2 + \left[\rho(\theta)\right]^2}\,d\theta \qquad (10)$$

формуласымен есептелінеді.

3-мысал. $\rho = a(1+\cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, кардиоидасының ұзындығын табалық.

$$l = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi \sqrt{a^2\sin^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2}\,d\theta =$$

$$= 2a\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi = 8a.$$

§12.4 Айналу денесінің көлемі

Айталық $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз $y = f(x)$ функциясы берілсін.

$$y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$$

сызықтарымен шектелген қисық сызықты трапецияны Ox осінің бойымен айналдырғанда пайда болған дененің көлемін табалық .

Ол үшін $[a;b]$ кесіндісін

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

нүктелері арқылы n бөлікке бөліп, әрбір $[x_{k-1}, x_k]$ кесіндісінен ξ_k нүктелерін $(k = 1,2,\ldots,n)$ таңдап

$$\sum_{k-1}^{n} \pi f^2(\xi_k)\Delta x_k \qquad (1)$$

қосындысын құралық. Бұл қосындының әрбір қосылғышы биіктігі $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, ал табанының радиусы $f(\xi_k)$ болатын цилиндрдің көлемін береді. Онда (1) қосынды қарастырылып отырған денеміздің жуық көлемін береді. $[a;b]$ кесіндісін неғұрлым ұсақ бөліктерге бөлген сайын (1) қосынды соғұрлым берілген дененің көлемін дәлірек сипаттайды. Осы айтылғандардан

$$V_x = \lim_{\max\Delta x_k \to 0} \sum_{k-1}^{n} \pi f^2(\xi_k)\Delta x_k \qquad (2)$$

болатынын аңғару қиын емес. Екінші жағынан (1) қосынды үзіліссіз

$$\varphi(x) = \pi f^2(x)$$

функциясы үшін интегралдық қосынды болады. Олай болса (2) теңдіктің оң жағындағы шек бар және ол

$$\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

интегралына тең. Демек,

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (3)$$

Мысал. $y=e^{-x}$, $y=0$, $x=0$ және $x=1$ сызықтарымен шектелген жазық фигураны Ox осінің бойымен айналдырғанда пайда болған дененің көлемін табалық .

(3) формула бойынша

$$V_x = \pi\int_0^1\left(e^{-x}\right)^2 dx = \pi\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)\approx 1{,}36 \text{ (куб.б)}.$$

§12.5 Доғаның статикалық қарымын және ауырлық орталығының мекендігін табу

Жазықтықтағы материалдық кисық $y=f(x)$ теңдеуімен берілсін. $f(x)$ және $f'(x)$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын делік. $[a,b]$ аралықты $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_k<\ldots<x_n=b$ нүктелері арқылы n бөлікке бөлейік. Бөлінген нүктелерде Ox өсіне перпендикулярлар тұргызамыз. Онда $f(x)$ кисықтың $AB=l$ доғасы n кіші доғашаларға бөлінеді. Олардың ұзындықтарын Δl_k-лар мен белгілейміз. Әрбір кіші доғаның массасын оның қандайда бір M_k нүктесінің массасымен ауыстырсақ, онда осы кіші доғалардың қарымдарының (моменттерінің) жуық өрнектерін анықтауға болады.

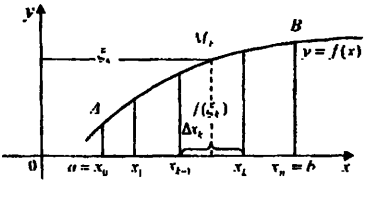
1-анықтама. Материалдық M_k нүктенің Ox өсіне қарағанда статикалық қарымы деп оның массасымен Ox осіне дейінгі қашықтығының көбейтіндісін айтады, ягни

$$\Delta M_k^x = \delta\Delta l_k f(\xi_k). \qquad (1)$$

Мұндағы δ- тұрақты тығыздық, $\delta\Delta l_k - M_k$ нүктенің массасы, $f(\xi_k) - M_k$ нүтеден Ox өсіне дейінгі қашықтық.

M_k нүктенің Oy өсіне қарағандағы статикалық қарымын да осы сияқты анықтауға болады (1-сурет).

$$\Delta M_k^y = \delta\Delta l_k\xi_k. \qquad (2)$$



1-сурет

Бүкіл AB доғасының Ox өсіне қарағандағы статикалық қарымының жуық мәні барлық кіші доғашалардың сәйкес қарымдарының қосындысы ретінде анықталады

$$M_x^* = \sum_{k=1}^{n} \delta \Delta l_k f(\xi_k).$$

Осы сияқты

$$M_y^* = \sum_{k=1}^{n} \delta \Delta l_k \xi_k.$$

Соңғы теңдіктерде шекке көшу арқылы AB доғасының Ox осіне қарағандағы статикалық қарымын

$$M_x = \delta \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx \qquad (3)$$

және Oy осіне қарағандағы статикалық қарымын

$$M_y = \delta \int_a^b x\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx \qquad (4)$$

аламыз.

2-анықтама. Материалдық AB доғасының қандайда бір $C(x,y)$ нүктесі-нің массасы доғаның бүкіл массасына тең болсын делік. Егер $C(x,y)$ нүктесі массасының кез келген өске қарағандағы статикалық қарымы AB доғасының сәйкес өске қарағандағы статикалық қарымына тең болса, онда $C(x,y)$ нүктесін AB доғасының ауырлық орталығы деп атайды.

2-анықтамадан ауырлық орталығының мекендігін табатын төмендегі формулалар шығады:

$$mx_c = M_y \Rightarrow x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad (5)$$

$$my_c = M_x \Rightarrow y_c = \frac{M_x}{m}. \qquad (6)$$

Соңғы теңдіктерде доғаның массасы m-нің орнына $m = \delta l$-ді, ал M_x пен M_y-тің орындарына (3), (4) формулалардағы мәндерін қойып, AB доғасының

ауырлық орталығы $C(x,y)$-тің мекендігін табатын төмендегі формулаларды аламыз:

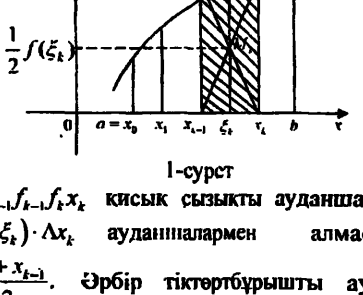
$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx}{l}; \tag{7}$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx}{l}. \tag{8}$$

Мұндағы $l = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$.

§ 12.6. Жазық фигураның статикалық қарымын және ауырлық орталығының мекендігін табу

Тұрақты δ тығыздыққа ие біртектес жазық фигура $y = f(x)$ функциясы, Ox өсі, $x = a$ және $x = b$ түзулерімен қоршалған болсын (1-сурет). $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын делік.



1-сурет

Бұл фигураны $x_{k-1}f_{k-1}f_k x_k$ қисық сызықты ауданшаларға бөліп, оларды тіктөртбұрышты $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ ауданшалармен алмастырамыз, мұндағы $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$. Әрбір тіктөртбұрышты ауданшаның массасы $\delta\cdot f(\xi_k)\Delta x_k$-ға тең. Тіктөртбұрыштардың массаларын олардың геометриялық орталығындағы M_k нүктелердің массаларымен алмастырамыз. Онда, k-ші тіктөртбұрыштың Ox өсіне қарағандағы статикалық қарымы M_k нүктенің массасын оның Ox өсімен ара қашықтығына көбейткенге тең, яғни

$$M_k^x = \delta f(\xi_k)\Delta x_k \cdot \frac{1}{2} f(\xi_k).$$

Берілген қисық сызықты фигураның статикалық қарымы барлық тіктөртбұрыштықтардың статикалық қарымдарының қосындысына жуық тең болады.

$$M_k^x = \delta \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\xi_k) \Delta x_k.$$

Осыған ұқсас, Oy осіне қарағандағы статикалық қарымының жуық мәні

$$M_k^y = \delta \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\xi_k) \Delta x_k$$

болады. Соңғы теңдіктерде шекке көшіп, жазық фигураның координата өстеріне қарағандағы статикалық қарымдары үшін төмендегі формулаларды аламыз:

$$M_x = \frac{\delta}{2} \int_a^b y^2 dx, \tag{1}$$

$$M_y = \frac{\delta}{2} \int_a^b xy dx. \tag{2}$$

Ауырлық орталығының мекендігін алдынғы тақырыптағыға ұқсас анықтаймыз.

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} \tag{3}$$

M_x, M_y-тердің орнына (1), (2)-формулалардағы мәндерін қоямыз. Онда:

$$x_c = \frac{\int_a^b xy dx}{S}, \tag{4}$$

$$y_c = \frac{\int_a^b y^2 dx}{S}. \tag{5}$$

Мұндағы $S = \int_a^b y dx.$

§12.7. Екпіндік қарымдары

1-анықтама. m массалы материалдық нүктенің қандайда бір өске қарағандағы екпіндік қарымы деп оның массасының өске дейінгі ара қашықтығының квадратына көбейтіндісін айтады, яғни

$$J = mr^2.$$

δ тығыздыққа ие метериалдық доғаның Ox өсіне қарағандағы екпіндік қарымы

$$J_x = \delta \int_a^b y^2 \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

ал Oy өсіне қарағандағы екпіндік қарымы

$$J_y = \delta \int_a^b x^2 \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

формулалары арқылы табылады.

Тығыздығы δ болатын жазық фигураның Ox өсіне қарағандағы екпіндік қарымы

$$J_x = \delta \int_c^d y^2 x\,dy,$$

ал Oy осіне қарағандағы екпіндік қарымы

$$J_y = \delta \int_a^b x^2 y\,dx$$

формулалары арқылы табылады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Анықталған интегралдың геометриялық мағынасын айтыңыз.
2. Жазық фигураның ауданын табу формуласын жазыңыз.
3. $[a,b]$ кесіндіде таңбалары әр түрлі функциядан алынған анықталған интегралмен сәйкес жазық фигуралар арасында қандай байланыс бар?
4. Теңдеулері параметрлі түрде берілген қисықтармен қоршалған жазық фигураның ауданын табу формуласын жазыңыз.
5. Жазық фигураның абсцисса өсін айналғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін табу формуласын жазыңыз.
6. Жазық фигураның ордината осін айналғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін табу формуласын жазыңыз.
7. Доғаның статикалық қарымы және ауырлық орталығының мекендігін анықтаңыз.
8. Жазық фигураның статикалық қарымын және ауырлық орталығын анықтаңыз.
9. Екпіндік қарымдарының формулаларын жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1–мысал. $y = 2x-1$ түзуімен және $y = 2-x^2$ параболамен қоршалған фигураның ауданын табалық.

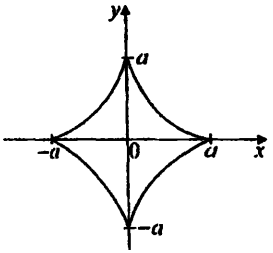
Шешуі. Алдымен берілген сызықтардың қиылысу нүктелерін тауып аламыз.

$$2-x^2 = 2x-1 \quad x^2+2x-3=0;\ x_1=-3;\ \ x_2=1$$

12.2 тақырыбының (4) формуласын пайдаланамыз:

$$S = \int_{-3}^{1}\left(2-x^2-(2x-1)\right)dx = \int_{-3}^{1}\left(3-2x-x^2\right)dx = \left(3x-x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= 3-1-\frac{1}{3}+9+9-9-\frac{32}{3}$$



2-сурет

2–мысал. Астроида $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ сызығымен қоршалған фигураның ауданын табыңыз.

Шешуі. Бұл фигура 2–суретте бейнелепген.

12.2 тақырыбының (1) формуласын пайдаланамыз.

Фигура симметриялы болғандықтан, 1-ширегінің ауданын есептеп 4-ке көбейтеміз.

x 0–ден a–ға дейін өзгергенде t, $\frac{\pi}{2}$-ден 0–ге дейін өзгереді. Олай болса

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \cdot a \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)dt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \cdot \frac{1-\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\cos 2t dt\right) - \frac{3a^2}{4}\left[\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t d\sin 2t\right] = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

3–мысал. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ циклоидаңың бір аркасы және Ox осімен қоршалған фигура Oy өсін айналады. Айналу денссінің көлемін есептеңіз.

Шешуі. 12.4 тақырыбындағы тұжырымдарды пайдаланамыз.

$$[g(y)]^2 = a^2(t - \sin t)^2;$$

$$dy = ad(1 - \cos t) = a\sin t dt;$$

$t = 0$-де $y = 0$; $t = \pi$– де $y = 2a$.

$$V_1 = \pi\int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a\sin t dt = \pi a^3 \int_0^{\pi} (t^2 - 2t\sin t + \sin^2 t)\sin t dt -$$

$$= \pi a^3\left(\int_0^{\pi} t^2 \sin t dt - 2\int_0^{\pi} t\cdot\sin^2 t dt + \int_0^{\pi} \sin^2 t\cdot\sin t dt\right) = \left|\begin{matrix} u = t^2; dv = \sin t dt \\ du - 2t dt; v = -\cos t \end{matrix}\right| =$$

$$= \pi a^3\left(-t^2\cdot\cos t\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} t\cos t dt - 2\int_0^{\pi} t\cdot\frac{1-\cos 2t}{2} dt - \int_0^{\pi} \sin^2 t d\cos t\right) = \left|\begin{matrix} u = t; dv = \cos t dt \\ du = dt; v = \sin t \end{matrix}\right| =$$

$$= \pi a^3\left(\pi^2 + 2\left(t\sin t\Big|_0^{\pi} + \cos t\Big|_0^{\pi}\right) - \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi} + \left(\frac{t}{2}\sin 2t + \frac{\cos 2t}{4}\right)_0^{\pi} - \cos t\Big|_0^{\pi} + \frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \pi a^3\left(\pi^2 - 4 - \frac{\pi^2}{2} + 2 - \frac{2}{3}\right) = \pi a^3\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{8}{3}\right).$$

$$V_2 = \pi\int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a\sin t dt = \pi a^3\left(\frac{13\pi^2}{2} - \frac{8}{3}\right).$$

$$V = V_2 - V_1 = 6\pi^3 a^3.$$

4-мысал. Ox өсінің жоғары жағында орналасқан $x^2 + y^2 = a^2$ жарты шеңбер доғасының статикалық қарымдарын және ауырлық орталығының мекендігін анықтаңыз ($\delta = 1$).

Шешуі. Шеңбер доғасы Oy өсіне қарағанда симметриялы болғандықтан оның ауырлық орталығы Oy өсінде орналасқан, онда $x_c = 0$. Олай болса, 12.5 тақырыбының (3) және (4) формулалары бойынша

$$M_y = 0.$$

12.5 тақырыбының (3) формуласын қолданып M_x-ті есептейміз.

$$M_x = \int_a^a y\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = ax\Big|_{-a}^{a} = 2a^2.$$

12.5-тің (8) формуласын қолданып ауырлық орталығының ординатасын табамыз.

$$y_c = \frac{M_x}{l} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}.$$

5-мысал. $y = \frac{x^2}{a}$, $y = 0$, $x = a$, $(a > 0)$ функцияларымен қоршалған біртекті жазық фигураның M_x, M_y статикалық қарымдарын және ауырлық орталығының мекендігін табыңыз ($\delta = 1$).

Шешуі. 12.6 тақырыбының (1), (2) формулаларын қолданамыз.

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{x^4}{a^2}\,dx = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^a = \frac{a^3}{10}.$$

$$M_y = \frac{1}{2}\int_a^b xy\,dx = \int_0^a x \cdot \frac{x^2}{a}\,dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^a = \frac{a^3}{4}.$$

Берілген фигураның ауданы

$$S = \int_0^a \frac{x^2}{a}\,dx = \frac{a^2}{3},$$

Онда, ауырлық орталығының мекендігі:

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{3}{4}a; \quad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{3}{10}a.$$

6-мысал. Радиусы a м және биіктігі h м цилиндр түріндегі ыдыс толы суды сыртқа шығару үшін жұмсалған жұмысты есептеңіз.

Шешуі. Цилиндрді табанына параллель жазықтықтар арқылы биіктігі Δx_k болатын кіші цилиндрлерге бөлеміз. k-шы цилиндрдің көлемі $\pi a^2 \cdot \Delta x_k$-га тең. Ал бұл көлемдегі судың салмағы P_k:

$$P_k = 1000\pi a^2 \cdot \Delta x_k \text{ кг/м}.$$

Салмағы P-га тең денені h биіктікке көтеруге жұмсалатын жұмыс Ph болғандықтан,

$$A_k = 1000\pi a^2 x \cdot \Delta x_k \text{ кг/м}.$$

салмағы P_1 суды x биіктікке көтеруге жұмсалған жұмысты береді. Онда ізделінген жұмыс

$$A = 1000\pi a^2 \int_0^b x dx = 500\pi a^2 b^2 \text{ кг/м.}$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $x^2 = 2y$ және $y = 3x - x^2$ параболаларымен қоршалған фигураның ауданын табыңыз.

2. $y = x^2 - 2x + 3$ параболасымен және $y = 3x - 1$ түзуімен қоршалған фигураның ауданын табыңыз.

3. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ циклоиданың бір аркасымен және абсцисса өсімен қоршалған фигураның ауданын табыңыз.

4. $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{4 - 3x}, y = 0$ сызықтармен қоршалған фигураның ауданын табыңыз.

5. $y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0$ сызықтармен қоршалған фигураның Ox өсін айналғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін табыңыз.

6. $y = x^3, y = 1, x = 0$ сызықтармен қоршалған фигураның Oy осін айналғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін табыңыз.

7. $y = -x^2$, $y = x - 2$, $y = 0$ сызықтармен қоршалған жазық фигураның ауданын есептеңіздер.

8. $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$ сызықтармен қоршалған жазық фигураның ауданын есептеңіздер.

9. $y = 0$, $y = \ln x$, $x = e$ сызықтармен қоршалған жазық фигураның ауданын есептеңіздер.

10. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$ сызықтармен қоршалған жазық фигураның ауданын есептеңіздер.

11. $y = -x^2$, $y = 0$, $x = 3$ сызықтармен қоршалған жазық фигураның ауданын есептеңіздер.

12. $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ сызықтармен қоршалған жазық фигураның ауданын есептеңіздер.

13. $y = x^2$, $y = 2x + 8$ сызықтармен қоршалған жазық фигураның ауданын есептеңіздер.

14. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$ сызықтармен қоршалған жазық фигураның ауданын есептеңіздер.

15. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (астроида) сызықтармен қоршалған жазық фигураның ауданын есептеңіздер.

16. $z = a(1 - \cos\varphi)$ (кардиоида); сызықтармен қоршалған жазық фигураның ауданын есептеңіздер.

17. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $y = 0$ (циклоиданың бір тармағы) сызықтармен қоршалған жазық фигураның ауданын есептеңіздер;

18. $y^2 = 8x$ параболасының OA доғасының ұзындығын табыңыздар, мұндағы $O(0;0)$ және $A(2;4)$.

19. $y = ln\left(1 - x^2\right)$ қисығының $x = -\frac{1}{3}$ және $x = \frac{1}{3}$ түзулерінің арасында жатқан доғасының ұзындығын табыңыздар.

20. $x = a(cost + t\,sint)$, $y = a(sint - t\,cost)$, $0 \le t \le 2\pi$ қисығының доғасының ұзындығын табыңыздар.

21. $x = e^{t}\cos t$, $y = e^{t}\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ қисығының доғасының ұзындығын табыңыздар.

22. $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ қисығының ұзындығын табыңыздар.

23. $\rho = 2a\cos\varphi$ шеңберінің ұзындығын табыңыздар.

Төмендегі қисықтармен шектелген фигураларды Ox немесе Oy өстерінен айналдырғанда пайда болатын денелердің көлемдерін табыңыздар:

24. $y^2 = 2px$ және $x = h$ (Ox осінің бойымен).

25. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ (Ox осінің бойымен).

26. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Oy осінің бойымен).

27. $y = \sin x$, $y = 0$ (Ox осінің бойымен).

28 $y^2 = 4 - x$, $x = 0$ (Oy осінің бойымен).

29 $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ (Oy осінің бойымен).

§12.8 Анықталған интегралдың экономикада қолданылуы

Есепті талдаудан бастайық. Сұраным функциясы мынадай анықталсын: егер тауардың бағасы 250 теңге болса, онда оны 10 алушы (тұтынушы) сатып алады; егер тауардың бағасы 150 теңге болса, онда оны 30 алушы сатып алады, ал 50 теңгеден болса онда 80 алушы сатып алады.

Егер тауардың бағасы 250 теңге болса, онда $250 \cdot 10 = 2500$ теңге жұмсап 10 тұтынушы сатып алады (1–суреттегі S_1 аудан). 150 теңге бағамен және 20 тұтынушы $150 \cdot 20 \cdot 3000$ теңге жұмсап сатып алады (1–суреттегі S_2 аудан) 50 теңге бағамен және 50 тұтынушы $50 \cdot 50 - 2500$ теңгеге сатып алады.

Тұтынушылардың жалпы шығыны $2500 + 3000 + 2500 - 8000$ теңгені құрайды. Егер тауардың бағасын басынан 50 теңге деп белгілегенде, онда тұтынушылар $50 \cdot 80 = 4000$ теңге жұмсаған болар еді. Демек, тұтынушылар $8000 - 4000 - 4000$ теңге үнемдеген болар еді. Осы үнемделген шаманы тұтынушылар артықшылығы деп атайды. Тұтынушылар артықшылығы 1–суретте ABCDEF көпбұрышының ауданы түрінде бейнеленген.

1–анықтама. Тұтынушының тауарды теңе–теңдік P_0 бағасымен сатып алғанда үнемдейтін теңгесін тұтынушының артықшылығы деп атайды.

Жалпы жағдайда, сұраным функциясы $P = f(Q)$ және тауардың тепе-теңдік бағасы $P = P_e$ болса, онда тұтынушылар артықшылығы

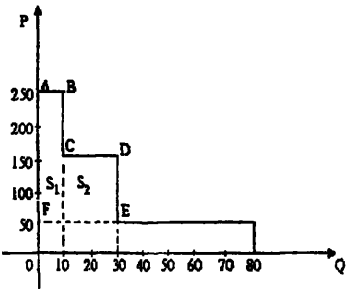
$$C \cdot S = \int_0^{Q_e} \left[f(Q) - P_e \right] dQ \qquad (1)$$

формуладан табылады (2–сурет).

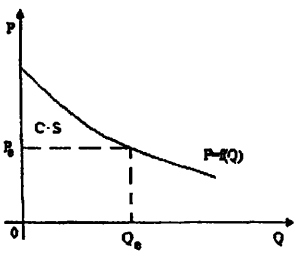
2–анықтама. Өндірушінің өз тауарын тепе-теңдік P_e бағасымен сатқанда үнемдейтін қосымша теңгесі өндірушінің артықшылығы деп аталады. Өндірушінің артықшылығы

$$P \cdot S = \int_0^{Q_e} \left[P_e - q(Q) \right] dQ \qquad (2)$$

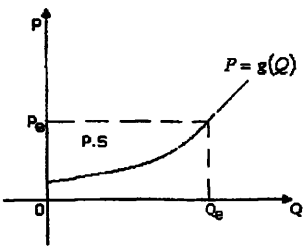
формуладан табылады. Мұндағы $q(Q)$ ұсыным функциясы. Өндірушінің артықшылығы 3–суретте бейнеленген.



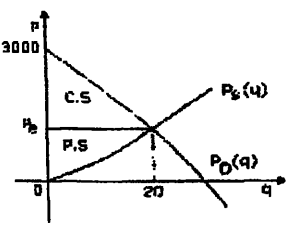
1- сурет



2–сурет



3-сурет



4-сурет

Мысал. Тауарға сұраным және ұсыным функциялары берілген: сұраным функциясы $P_D = -q^2 - 60q + 3000;\ 0 < q < 32$; ұсыным функциясы

$$P_S = q^2 + 50q;\ 0 < q < 32.$$

Мұндағы q-тауардың саны, P-тауар бірілігінің теңгедегі бағасы. Табу керек:

а) тауардың тепе-теңдік бағасы және тауарлар санын;

б) тұтынушылар артықшылығын;

в) өндірушінің артықшылығын.

Шешуі. а) Тепе-тендік баға және тауарлар санын табу үшін келесі жүйені шешеміз:

$$\begin{cases} P = -q^2 - 60q + 3000, \\ P = q^2 + 50q. \end{cases} \tag{3}$$

Бұл жүйенің шешімі $q_1 = -20$ және $q_2 = -75$.

$q_1 = 20$-ны (3) жүйеге қойып, $P_1 = 20^2 + 50 \cdot 20 = 1400$ теңге тепе-тендік бағаны табамыз. Сонымен, тауардың тепе-тендік бағасы 1400 теңге, ал тауарлар саны $q_1 = 20$.

б) Тұтынушылар артықшылығын (1) формуламен есептейміз.

$$C \cdot S = \int_0^{q_1} \left[P_D(q) - P_e \right] dq = \int_0^{20} (-q^2 - 60q + 3000 - 1400) dq =$$

$$= \int_0^{20} \left(-q^2 - 60q + 1600 \right) dq = \left(-\frac{q^3}{3} - 30q^2 + 1600q \right) \Big|_0^{20} = 1733.33 \text{ теңге.}$$

в) Өндірушінің артықшылығын (2) формуламен есептейміз.

$$P \cdot S = \int_0^{q_1} \left[P_e - P_S(Q) \right] dq = \int_0^{20} \left[1400 - q^2 - 50q \right] dq = \left(1400q - \frac{q^3}{3} - 25q^2 \right) \Big|_0^{20} =$$

$$= 15333.33.$$

Тұтынушымен өндірушінің артықшылықтары 4-суретте бейнеленген.

Егер шектік шығын $MC = f(q)$ формуламен берілген болса, онда шығын функциясы

$$C(q) = \int_1^q MC\, dq + C_0 \tag{4}$$

формула бойынша анықталады. Мұндағы C_0 есептің берілген шартынан пайдаланып табылады.

Мысалы, шектік шығын $MC = 3q^2 - 48q + 202,\ 1 \le q \le 2$ болсын. Тауардың алғашқы бірлігін өндіру үшін кеткен шығын 50 теңге болса, онда шығын функциясын табыңыз.

Шешуі. (4) формуланы қолданамыз. Есептің шарты бойынша $C_0 = C(1) = 50$, олай болса, шектік шығынның берілген өрнегін (4) формулаға қойып интегралдап шығын функциясының келесі өрнегін табамыз.

$$C(q)=q^3-24q^2+202q+50.$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Тұтынушылардың артықшылығының анықтамасын беріңіз.
2. Өндіруші артықшылығының анықтамасын беріңіз.
3. Тұтынушылар артықшылығы қандай формуламен есептеледі.
4. Өндірушінің артықшылығы қандай формуламен есептеледі.
5. Шектік шығын бойынша шығын функциясы қалай анықталады.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Тауардың белгілі бір түрін өндіруге дара құқығы бар өндірушінің сұраным функциясы $P=-q^2-25q+2000,$ шығын функциясы $TC=0,1q^2+572q+250$ болсын. Мұндағы P-тауардың бағасы, теңге; q-әр күні өндірілетін тауардың мөлшері, $0<q<33$;

а) Тауардың максимум пайда беретін мөлшерін және бағасын табыңыз.

ә) Максимум пайда беретін бағадағы тұтынушылар артықшылығын табыңыз.

Шешуі: а) Пайда функциясын құрып, оның экстремумын анықтаймыз. Түсім функциясы $TR=Pq$; мұндағы P-ның орнына оның берілген өрнегін қоямыз

$$TR=\left(-q^2-25q+2000\right)q=-q^3-25q^2+2000q.$$

Онда пайда функциясы:

$$\pi=TR-TC=-q^3-25.1q^2+1428q-250.$$

Пайда функциясының экстремумын анықтау үшін π-ден туынды аламыз:

$$\frac{d\pi}{dq}=-3q^2-50,2q+1428;$$

$$-3q^2-50,2q+1428=0;$$

$$q_1=-32,73;\ q_2=15.$$

$q=15$-те пайда функциясы төңіректік максимумға ие, себебі:

$$\frac{d^2\pi}{dq^2}=\left(-6q-50.2\right)\Big|_{q=15}<0.$$

$$P_e=P(15)=-15^2-25\cdot15+2000=1400.$$

Сонымен, әр күні 15 бірлік өнім өндіріледі және ол 1400 теңгеден сатылады екен.

ә) Тұтынушының артықшылығын (1)-формуладан пайдаланып анықтаймыз.

$$C\cdot S=\int_0^q\left[P(q)-P_e\right]dq=\int_0^{15}\left(-q^2-25q+2000-1400\right)dq=$$

$$= \int_0^{15} \left(-q^2 - 25q + 600\right) dq = \left(-\frac{q^3}{3} - \frac{25q^2}{2} + 600q \right) \Bigg|_0^{15} = 5062,5 \text{ теңге.}$$

2–мысал. Баға бойынша сұраным икемділігі $E_P(Q) = \frac{-2P^2}{500 - P^2}$ функциясы мен берілген, $0 < P < 220$. Егер $P = 10$ бағамен сатып алынатын тауардың мөлшері $Q = 800$ болса, онда сұраным функциясын табыңыз.

Шешуі: Баға бойынша сұраным икемділігі

$$E_P(Q) = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

формула бойынша анықталатыны белгілі.Сұраным икемділігінің берілген өрнегін соңғы теңдікті қоямыз.

$$\frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{-2P^2}{500 - P^2};$$

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{2PdP}{500 - P^2};$$

интегралдаймыз.

$$\ln C_0 + \ln Q = \ln\left|500 - P^2\right|;$$

$$500 - P^2 = QC_0;$$

есептеің шарты бойынша

$$500 - P^2 = QC_0;$$

$P = 10$ болғанда $Q = 800$.

$$400 = 800C_0;\ C_0 = \frac{1}{2}.$$

Сонымен, ізделінген сұраным функциясы $P = \sqrt{500 - 0,5Q}$ екен.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1-5-мысалдарда сұраным және ұсыным функциялары берілген.

а) P және Q-дің тепе-теңдік мәндерін табыңыз.

ә) тұтынушылар артықшылығын табыңыз.

б) өндірушінің артықшылығын табыңыз.

1. $P_S = 5 + 0.5Q$, , $P_D = 21 - 1,5Q$
2. $P_S = q^2 + 5q$, , $P_D = -q^2 - 5q + 1000$, $0 < q < 29$,
3. $P_S = q^2 + 4q + 6$, , $P_D = -q^2 - 5q + 249$, $0 < q < 13$,
4. $P_S = q^2 + 3q + 5$, , $P_D = -q^2 - 11q + 5705$,
5. $P_S = q^3 + q^2 + 100$, $P_D = q^3 - 900q + 9200$, $0 < q < 17$.

6. Баға бойынша сұраным икемділігі $E_P(Q) = \frac{-P^2}{170 - P^2}$, $0 < P < 13$ функциясымен берілген. $P = 7$ болғанда $Q = 550$ болса, онда сұраным функциясын табыңыз.

7. Баға бойынша сұраным икемділігі $E_P(Q)=\frac{-P^2}{258-P^2}$, $0<P<16$ функциясымен берілген. $P=14$ болғанда $Q=310$ болса , онда сұраным функциясын табыңыз.

Анықталмаған, анықталған интегралдар және оларды геометрия, механика есептерін шешуге қолдану тақырыптары бойынша әдістемелік нұсқау мен студенттерге берілетін өзіндік жұмыс тапсырмалары

0-нұсқа

1. Төмендегі интегралдарды есептеңіз:

а) $\int\frac{2\cdot 3^x-3\cdot 2^x}{3^x}dx$; ә) $\int\frac{\cos x dx}{\cos^2\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{2}}$.

2. Төмендегі интегралдарды айнымалыны алмастыру және бөлімінен толық квадратты бөліп алу әдістерімен есептеңіз:

а) $\int x^2\sqrt{2-3x^3}dx$; ә) $\int\frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$.

3. Бөлшектеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int x\left(arctgx\right)^2 dx$; ә) $\int\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^3}}dx$.

4. Төмендегі рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int\frac{(3x+5)dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$; ә) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}}$; б) $\int\frac{dx}{\sin^5 x\cdot\cos^3 x}$.

5. Төмендегі анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_0^3\sqrt{\frac{x}{6-x}}dx$; ә) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^7 x dx$.

6. $y=x(x-1)(x-2)$ және $y=0$ функцияларымен қоршалған дененің ауданын табыңыз.

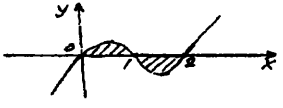
7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсін Oy өсі бойынша айналдырғанда пайда болған дененің көлемін табыңыз.

8. Реактивті самолет бірқалыпты үдемелі жылдамдықпен өзінің жылдамдығын 20 сек. ішінде 360 км/сағат -дан 720 км/сағат-қа арттырды. Ол қандай үдеумен ұшты және сол уақыт аралығында қандай қашықтықтан өтті?

9. $\int_1^x\frac{\sin x}{x^4}dx$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеңіз.

Ережелері, формулалары	Шешуі	Жауаптары
1. а) Алымын бөліміне бөліп интегралдар кестесіне келтіреміз ә) $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ деп жазамыз	$\int\frac{2\cdot 3^x - 3\cdot 2^x}{3^x}dx = \int 2dx - \int 3\left(\frac{2}{3}\right)^x dx = 2x - 3\left(\frac{2}{3}\right)^x (\ln 2 - \ln 3)^{-1} + c$ $\int\frac{\cos x dx}{\cos^2\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{2}} = \int\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{2}}dx = \int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}} - \int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = -2ctg\frac{x}{2} - 2tg\frac{x}{2} + c.$	$2x - 3\left(\frac{2}{3}\right)^x (\ln 2 - \ln 3)^{-1}$ $-2ctg\frac{x}{2} - 2tg\frac{x}{2} + c.$
2 а) Түбір астындағы өрнекті басқа айнымалымен белгілейміз	$\int x^2\sqrt{2-3x^3}dx \left\| \begin{array}{l} 2-3x^3 = t^2 \\ -9x^2dx = 2tdt \\ x^2dx = -\frac{2tdt}{9} \end{array} \right\| = -\int t\cdot\frac{2tdt}{9} = -\frac{2}{9}\int t^2 dt = -\frac{2}{9}\cdot\frac{t^3}{3} + c.$	$-\frac{2}{27}\sqrt{(2-3x^3)^3}.$
ә) Толық квадратты бөліп аламыз	$\int\frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{-9\left(x^2-\frac{12}{9}x+\frac{2}{9}\right)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{-9\left[\left(x^2-2\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{2}{9}\right]}} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}} =$ $= \frac{1}{3}\arcsin\left(x-\frac{2}{3}\right):\frac{\sqrt{2}}{3} + c$	$\frac{1}{3}\arcsin\left(x-\frac{2}{3}\right):\frac{\sqrt{2}}{3} + c$
3.а) $\int udv = uv - \int vdu$ формуласын пайдаланамыз	$\int x(arctgx)^2 dx = \left\| \begin{array}{ll} u = (arctgx)^2; & du = 2arctgx\cdot\frac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx; & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| = \frac{x^2}{2}(arctgx)^2 - \int\frac{x^2 arctgx}{1+x^2}dx =$ $= \frac{x^2}{2}(arctgx)^2 - \int\frac{(x^2-1)arctgx - arctgx}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}(arctgx)^2 - \int arctgxdx - \int arctgxd(arctgx):$	$\frac{x^2+1}{2}(arctgx)^2 - xarctgx +$ $+\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$

ə) Бөлшектен интегралдау формуласын 2 рет қолданамыз	$\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^3}}dx = \left\| \begin{matrix} u=\ln^2 x;\ du=2\ln x\cdot\frac{dx}{x} \\ \frac{dx}{\sqrt{x^3}}=dv;\ v=-\frac{2}{\sqrt{x}} \end{matrix} \right\| = -\frac{2}{\sqrt{x}}\ln^2 x+4\int\frac{\ln x dx}{\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}\ln^2 x+4\left(-\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}-2\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}}\right)=$ $=-\frac{2}{\sqrt{x}}\ln^2 x-\frac{8}{\sqrt{x}}\ln x-\frac{16}{\sqrt{x}}-c$	$c-\frac{2}{\sqrt{x}}\left(\ln^2 x+4\ln x+8\right.$
4. а) Бөлшектің алымынан x^2+2x+2 -ның туындысын бөліп аламыз.	$\int\frac{(3x+5)dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2} = \int\frac{2(2x+2)-3-5}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx = \frac{3}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}-2\int\frac{dx}{\left[(x+1)^2+1\right]^2} = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+}$ $-2\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2};\ \int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\int\frac{t^2-1-t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt=\int\frac{dt}{t^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{t\cdot 2tdt}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+\frac{1}{2}arctgt+c;$ соңғы интегралдың мәнін және $t=x+1$-ді орнына қоямыз	$\frac{2x-1}{2\left(x^2+2x+2\right)}+$ $+arctg(x+1)+c$
ə) Айнымалыны алмастырамыз	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}} = \left\| \begin{matrix} x=t^6;\ dx=6t^5dt \\ \sqrt{x}=t^3;\ \sqrt[3]{x}=t^2 \end{matrix} \right\| = \int\frac{6t^5dt}{t^4-2t^3}=6\int\frac{t^2dt}{t-2}=6\int\frac{t^2-4+4}{t-2}dt=6\int\left[(t-2)+\frac{4}{t-2}\right]d$ $=\left[\frac{(t+2)^2}{2}+4\ln\left\|t-2\right\|\right]+c$	$3\left(\sqrt[6]{x}+2\right)^2+$ $+24\ln\left(\sqrt[6]{x}+2\right)+c$
б) Интеграл астындағы өрнекті тепе-тең түрлендіреміз	$\int\frac{dx}{\sin^5 x\cdot\cos^3 x}=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^{\frac{5}{2}}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{\frac{3}{2}}d(tgx)=\int\left(\frac{1+tg^2x}{tg^2x}\right)^{\frac{5}{2}}\left(1+tg^2x\right)^{\frac{3}{2}}dtgx=$ $=\int\frac{\left(1+tg^2x\right)^3}{tg^5x}d(tgx)=\int\frac{1+3tg^2x+3tg^4x+tg^6x}{tg^5x}d(tgx);$	$-\frac{1}{4tg^4x}-\frac{3}{2tg^2x}+$ $+\ln\left\|tgx\right\|+\frac{1}{2}tg^2x+c.$
5. а) Айнымалыны	$\int_0^3\sqrt{\frac{x}{6-x}}dx = \left\| \begin{matrix} x=6\sin^2 t;\ dx=12\sin t\cos tdt \\ x=0a,\ t=0;\ x=3a,\ t=\frac{\pi}{4}; \end{matrix} \right\| = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{6\sin^2 t}{6-6\sin^2 t}}\cdot 12\sin t\cdot\cos tdt=12\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 tdt=$	$\frac{3}{2}(\pi-2).$

алмастырамыз. $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ формуласын пайдаланамыз	$= 6\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt = 6\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big\vert_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 6\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$;	
ә)рекуррент формуланы пайдаланамыз. (12.5. (7) формула)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cdot\cos^2 x dx\begin{vmatrix}n=7\\m=6\end{vmatrix} = \frac{(7-1)(7-3)(7-5)}{(6+7)(6+7-2)(6+7-4)(6+7-6)} = \frac{6\cdot 4\cdot 2}{13\cdot 11\cdot 9\cdot 7}$;	$\frac{16}{3003}$
6.	Штрихталған аудандар бір-біріне тең. $ds = ydx = x(x-1)(x-2)dx = (x^3-3x^2+2x)dx$ $S = 2\int_0^1(x^3-3x^2-2x)dx = 2\left(\frac{1}{4}x^4-3\cdot\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}\right)$, 	$\frac{1}{2}$.
7.Колем дифференциалын интегралдаймыз.	Колем дифференциалы $dV_y = \pi x^2 dy = \pi\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)dy$ $\frac{1}{2}V_y = \frac{\pi a^2}{b^2}\int_0^b(b^2-y^2)dy = \frac{\pi a^2}{b^2}\left(b^2y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big\vert_0^b = \frac{2\pi a^2 b}{3}$	$V_y = \frac{4\pi a^2 b}{3}$
8.	Біркалыпты үдемелі қозғалыс $V = V_0 + at$ теңдеу арқылы өрнектеледі. Есептің шарты бойынша $t=0$ де $V_0 = 360$ км/сағат=100м/сек; $t=20$ секундта $V = 720$ км/сағат=200м/сек. V_0, V және t-ның мәндерін жылдамдық формуласына қойып a үдеуін табамыз. $200 = 100 + a\cdot 20$; $a = 5$ м/сек. Демек, самолет жылдамдығы $V = (100+5t)$ м/сек. Сонғы өрнекті $[0,20]$ аралықта интегралдап. самолеттің 20 сек. уақытта ұшып өткен қашықтығын табамыз.	$a = 5м/сек^2$ $S = 3км$.

	$S=\int_0^{2t}(100+5t)\,dt=\left(100t+\frac{5}{2}t^2\right)\Big\|_0^{2t}=300$ м=3км.	
9. Меншіксіз интегралдың жинақтылық белгісін қолданамыз.	$\lvert\sin x\rvert\le 1$ болғандықтан, $\left\lvert\frac{\sin x}{x^4}\right\rvert<\frac{1}{x^\alpha}$. бірақ $\int_1^\infty\frac{dx}{x^4}$ интеграл жинақты, себебі. 13.1-дің 2-мысалындағы $\alpha=4>1$. Олай болса, жинақтылық белгісі бойынша берілген интегралда жинақты.	жинақты

1-нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int\sqrt{2-3x}\cdot dx$; ә) $\int\frac{dx}{3-5x}$;

2. Айнымалыны алмастыру және бөлімінде толық квадратты ажырату әдістерімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int\frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}dx$; ә) $\int\frac{4x-3}{x^2-2x+6}dx$

3. Бөлшектеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int\ln(x^2+1)\cdot dx$; ә) $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$.

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int\frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}\cdot dx$; ә) $\int\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^8}+\sqrt[4]{x^{15}}}\cdot dx$ б) $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\cdot dx$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_{-12}^{-1}\sqrt{4-5x}dx$. Жауабы: $\frac{194}{3}$. ә) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx$. Жауабы: $\frac{2}{3}$.

6. $y=x^2+1$, $y=0$, $x=-1$ және $x=-2$ сызықтармен қоршалған дененің ауданын табыңыз: Жауабы: $\frac{10}{3}$ кв. бірлік

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоидтың көлемін есептеңіз:

Жауабы: $\frac{4}{3}\pi abc$

8. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипстің жоғары бөлігіндегі доғасының M_x статикалық қарымын анықтаңыз. Жауабы: $M_x=\frac{ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon+b^2$, ε-эллипстің эксцентриситеті.

9. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеңіз. Жауабы: $p\le 1$ болғанда жинақсыз; $p>1$-да жинақты.

2-нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int(\ln x)^4\cdot\frac{dx}{x}$; ә) $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіздер:

а) $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^4 x+4}}\cdot dx$; ә) $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int x\ln(x^2+1)dx$; ə) $\int \arcsin\frac{x}{2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{2-x}}$.

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int\frac{2x^2-11x-25}{x^3-7x-6}\cdot dx$; ə) $\int\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[6]{x}}\cdot dx$ б) $\int\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\cdot dx$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$; Жауабы: 1. ə) $\int_0^4 x\sqrt{16-x^2}dx$, Жауабы: $\frac{64}{3}$.

6. $y=x^2$, $y=0$ және $x=3$ функциялармен қоршалған дененің ауданын табыңыз. Жауабы: 9 кв.бірлік.

7. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ эллипстік параболоидтың $z=H$ жазықтықпен қиылған бөлігінің көлемін табыңыз $(H>0)$. Жауабы: $H^2\sqrt{pq}$

8. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ астроиданың бірінші ширекте орналасқан доғасының M_x, M_y статикалық қарымдарын анықтаңыз. Жауабы: $M_x=M_y=\frac{3}{5}a^2$.

9. $\int_0^{\infty}e^{-x}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеңіз: Жауабы:1, жинақты.

3-нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int\left(x^3+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$; ə) $\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}\cdot dx$;

2. Айнымалыны алмастыру және бөлімінен толық квадратты бөліп алу әдістерімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$; ə) $\int\frac{(x-2)dx}{3x^2-12x+7}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int xarctg\sqrt{x^2-1}\cdot dx$; ə) $\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\cdot dx$.

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int\frac{3x-1}{x^3-x^2-2x}\cdot dx$; ə) $\int\frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\cdot\sqrt{x}}$; ə) $\int\cos^6 x\cdot dx$

5.Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_0^{\pi}\sin 2x dx$; Жауабы: $\frac{1}{2}$. ə) $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ Жауабы: $\sqrt{2}-1$

6. $y=3x^2$, $y=0$, $x=-3$ және $x=2$ сызықтармен қоршалған дененің ауданын табыңыз. Жауабы: 35 кв.бірлік.

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{e^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ екі қуысты гиперболоидтың $z=H$ жазықтығынан қиылған бөлігінің көлемін есептеңіз ($H>c$). Жауабы: $\frac{\pi ab}{3c^2}\left(H^3-2c^2-3Hc^2\right)$

8. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{e^2}=1$ эллипс ауданының бірінші октантдағы бөлігінің ауырлық орталығының мекендігін анықтаңыз. Жауабы: $\left(\frac{4a}{3\pi};\frac{4b}{3\pi}\right)$.

9. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеңіз. Жауабы: $\frac{\pi}{2}$, жинақты.

4-пұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int e^{-x^2}xdx$; ә) $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\cdot dx$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдар есептеңіз:

а) $\int\frac{\ln^3 x+3}{x\ln x}\,dx$; ә) $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\cdot dx$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int x\cos 2x\cdot dx$; ә) $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot dx$

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\cdot dx$ ә) $\int\frac{\sqrt{x+3}}{(x+3)\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)}\cdot dx$ б) $\int\sin^4 x\cdot\cos^4 x\,dx$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_{-1}^{1}e^{-x}dx$; Жауабы: $\frac{1}{e}\left(\frac{1}{e^2}-1\right)$. ә) $\int_{1}^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$ Жауабы: $\frac{\pi}{6}$.

6. $y=\frac{1}{2}x^2+2;\ y=0,\ x=1$ және $x=3$ сызықтармен қоршалған дененің ауданын табыңыз: Жауабы: $\frac{25}{3}$ кв.бірлік.

7. $x^2+y^2-z^2=0$ конустың $z=H$ жазықтығынан қиылған бөлігінің көлемін есептеңіз ($H>0$). Жауабы: $\frac{\pi H^3}{3}$

8. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ парабола және координата остерімен қоршалған дененің M_x, M_y статикалық қарымдарын анықтаңыз. Жауабы: $M_x=M_y=\frac{a^4}{30}$.

9. $\int_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x^2+4x+9}$ меншіксіз интегралды жинақтылықта зерттеңіз: Жауабы: жинақты.

5-нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{xdx}{2+x^4}$; ә) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} \cdot dx$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{e^{\arcsin x} + x + 1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$; ә) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} \cdot dx$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx$; ә) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx$.

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

ә) $\int \frac{3x^3 + 4x}{(x-2)^2(x^2+4)} \cdot dx$; ә) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})}$ б) $\int ctg^3 x dx$

5 .Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_1^9 \sqrt[3]{x^2} dx$. Жауабы: $\frac{93}{5}$. ә) $\int_4^5 (4-x)^3 dx$ Жауабы: $-\frac{1}{4}$.

6. $y = x^2 - 4$ және $y = 0$ сызықтармен қоршалған дененің ауданын есептеңіз. Жауабы: $\frac{32}{3}$ кв.бірлік.

7. $y = x^2 + 1$ параболасымен және $y - 3x - 1$ түзуімен қоршалған фигураның Ox өсін айналуынан пайда болған дененің көлемін табыңыз.

8. $y = \sin x$ синусоиданың бір аркасы және Ox осімен қоршалған дененің ауырлық орталығының мекендігін анықтаңыз. Жауабы: $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

9. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеңіз. Жауабы: жинақты.

6-нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$; ә) $\int \frac{xdx}{\sin^2(x^2+1)}$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx$; ә) $\int x\sqrt{3-5x} \cdot dx$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \sqrt{x} \cdot \ln 3x dx$; б) $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \cdot dx$.

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int\frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}\cdot dx$; ә). $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}}\cdot dx$ б) $tg^4x\cdot\sec^4 xdx$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_0^3\sqrt[3]{3x-1}dx$ Жауабы: $\frac{15}{4}$ ә) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin xdx}{3-\cos x}$; Жауабы: $\ln\frac{5}{4}$.

6. $y=x^2$, $x-y^2$ қисықтармен қоршалған фигураның ауданын табыңыз. Жауабы: $\frac{1}{3}$.

7. $y^2=\frac{x}{2}$ параболасымен, $x=0$ және $y=1$ түзулерімен қоршалған фигураның Ox өсін айналуынан пайда болған дененің көлемін табыңыз.

8. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоиданың бір аркасының ауырлық орталығының мекендігін анықтаңыз. Жауабы: $\left(a\pi;\frac{4}{3}a\right)$.

9. $\int_0^4 xe^{-x^2}dx$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеңіз. Жауабы: $\frac{1}{2}$, жинақты.

7-нұска

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_x\frac{dx}{\ln x}$; ә) $\int(2^x+3^x)^2dx$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int\frac{2^x3^xdx}{9^x-4^x}$; ә) $\int\frac{xdx}{(1+x^2)^2}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int x\cdot shx\cdot dx$; ә) $\int\frac{\ln x}{x^3}\cdot dx$;

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\cdot dx$; ә) $\int\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{2}}\cdot dx$ б) $\int\sin^4 xdx$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_1^3\sqrt{(2x-1)^3}dx$. Жауабы: $\frac{242}{5}$. ә) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{2+\sin x}$ Жауабы: $\ln 1,5$.

6. $y=x^2$; $y=16-3x^2$ қисықтармен қоршалған фигураның ауданын табыңыз.

7. $x^2-y^2=a^2$ гиперболасымен, $y=a$ және $y=0$ түзулермен қоршалған фигураның Oy өсін айналуынан пайда болған дененің көлемін есептеңіз.

8. $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1,\ x=0,\ y=0$ түзулермен қоршалған үшбұрыштың ауданының M_x M_y статикалық моменттерін анықтаңыз. Жауабы: $M_x=\frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2};\ M_y=\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

9. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеңіз. Жауабы: 2. жинақты.

8-нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int(2x-9)^{11}dx$; ə) $\int\frac{(\ln x)^2}{x}\cdot dx$;

2. Айнымалыны алмастыру және бөлімінен толық квадратты бөліп алу әдістерімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int x\sqrt{2-5x}\cdot dx$; ə) $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int x^3 ch3x\cdot dx$; б) $\int x\cdot 2^{x}\cdot dx$;

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int\frac{2x-2}{x^2-2x+2}\cdot dx$; ə) $\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$ б) $\int\sin x\cdot\sin 3x\cdot dx$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_0^3\sqrt{3x+1}dx$ Жауабы: 14. ə) $\int_0^1 e^x xdx$ Жауабы: $\frac{1}{2}(e-1)$.

6. $y=x^2;\ y=8-x^2$ кисықтармен қоршалған фигураның ауданын табыңыз. Жауабы: $\frac{64}{3}$.

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$ эллипсімен және Oy осімен қоршалған фигураның Oy осін айналуынан пайда болған дененің көлемін табыңыз. Жауабы: $\frac{4}{3}\pi a^2 b$

8. $x^2+y^2=a^2$ дөңгелектің диаметріне қарағандағы инерция моментін анықтаңыз. Жауабы: $J_x=J_y=\frac{\pi a^3}{2}$

9. $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеңіз. Жауабы: жинақты.

9-нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$; ә) $\int x^2 e^{x^3-1} \cdot dx$;

2. Айнымалыны алмастыру және бөлімінен толық квадратты бөліп алу әдістерімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} \cdot dx$; ә) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int (3x+7)\cos 5x \cdot dx$; б) $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} \cdot dx$.

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} \cdot dx$; ә) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ б) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}} \cdot dx$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_{-2}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$ Жауабы: 1. ә) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$ Жауабы: $2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

6. $x^2 = 2y$ және $y = 3x - x^2$ қисықтармен қоршалған фигураның ауданын табыңыз. Жауабы: 2 кв.бірлік.

7. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ астроиданың Oy осін айналуынан пайда болған дененің көлемін табыңыз. Жауабы: $\frac{32\pi^2}{105}$

8. Биіктігі h, табаны a-ға тең болған тең қабырғалы үшбұрыштың ауданының табанына қарағандағы екпіндік қарымын анықтаңыз. Жауабы: $\frac{ah^3}{12}$.

9. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеңіз. Жауабы: жинақсыз.

10-нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{\ln x+3}{x} \cdot dx$; ә) $\int x^2 (5-2x^3)^4 dx$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{3^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$; ә) $\int \frac{\ln tgx}{\sin 2x} \cdot dx$;

3. Бөліектеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int e^{-x} \cos 3x \cdot dx$; ә) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; ə) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{2+\sqrt[3]{x-1}}}$ б) $\int \cos 2x \cdot \sin 4x \cdot dx$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$ Жауабы: $\sqrt{3}-1$. ə) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$ Жауабы: $\frac{1}{3}$.

6. $y=x^2$ параболасымен және $2x+y-3=0$ түзуімен қоршалған фигураның ауданын табыңыз. Жауабы: $\frac{32}{3}$

7. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоиданың бір аркасының Ox осінен айналуынан пайда болған дененің көлемін табыңыз. Жауабы: $5\pi^3 a^3$

8. $x^2+y^2=a^2$ шеңбердің доғасының Ox осіне қарағандағы екпіндік қарымын анықтаңыз. Жауабы: $\frac{\pi a^3}{2}$.

9. $\int_1^n \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеңіз. Жауабы: жинақсыз.

II- нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int 2^{3x-1} dx$; ə) $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$;

2. Айнымалыны алмастыру және бөлімінен толық квадратты бөліп алу әдістерімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int (tge^x) \cdot e^x dx$; ə) $\int \frac{4x-3}{x^2-2x+6}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int x^2 \cos x \cdot dx$; ə) $\int arctg\sqrt{x} \cdot dx$.

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25} \cdot dx$; ə) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx$ б) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x} \cdot dx$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$ ə) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}$. Жауабы: $\sqrt{3}-1$.

6. $y=x^2-1$ параболасымен, $x=2$ түзуі және абсцисса осімен қоршалған фигураның ауданын табыңыз. Жауабы: $\frac{4}{3}$

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{e^2}=1$ эллипстің Ox өсінен айналуынан пайда болған дененің көлемін табыңыз.

8. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоида бір аркасының $(0\le t\le 2\pi)$ Oy өсі айналасында айналуынан пайда болған дене бетінің ауданын есептеңіз. Жауабы: $16\pi^2a^4$.

9. $\int_2^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеңіз. Жауабы: жинақсыз.

12- нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int\sqrt[3]{(2x-1)^2}\cdot dx$; ə) $\int 3^{\cos x}\sin x\cdot dx$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\cdot dx$; б) $\int\frac{(2x+5)dx}{4x^2-4x-2}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int(2x+1)\cdot\sin 3x dx$; б) $\int arcctg\sqrt{x}\cdot dx$.

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int\frac{x^4+1}{(x-1)(x^4-1)}\cdot dx$ ə) $\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ б) $\int\frac{tgx\cdot\cos^6 x}{\sin^4 x}\cdot dx$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз.

а) $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$ Жауабы: $\frac{\pi a^2}{4}$ ə) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{3}}$ Жауабы: $2\sqrt{3}$

6. $\rho=a\theta$ Архимед спиралының $\theta=0$ және $\theta=2\pi$ аралықтағы доғасының ұзындығын есептеңіз. Жауабы: $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$.

7. Координата бас нүктесі $O(0,0)$ мен (a,b) нүкте арасындағы кесіндінің Oy өсінен айналуынан пайда болған дененің көлемін табыңыз.

8. $x^2+y^2=4$ шеңбердің $y_1=-1$, $y_2=1$ аралықтағы доғасы $(x>0)$ Oy өсі айналасында айналуынан пайда болған дене бетінің ауданын есептеңіз. Жауабы: 8π кв.бірлік.

9. $\int_a^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеңіз. Жауабы: жинақты.

13- нұска

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int\sqrt{(2x+5)^5}\cdot dx$; ә) $\int 2^{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$;

2. Айнымалыны алмастыру және бөлімінен толық квадратты бөліп алу әдістерімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int\frac{\sqrt{\operatorname{tg}x+1}}{\cos^2 x}\cdot dx$; ә) $\int\frac{(x-2)dx}{3x^2-12x+7}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int\frac{\ln x dx}{x^2}$; ә) $\int x^2 e^x dx$.

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int\frac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)(x^3-2x^2+x-2)}\cdot dx$ ә) $\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}$ б) $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin x}\cdot dx$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}}\cos 3x dx$ Жауабы: $\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$. ә) $\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ Жауабы: $2(2-\ln 3)$.

6. $\rho=e^{a\varphi}$ спиралдың полюс пен (ρ,φ) аралығындағы доғасының ұзындығын есептеңіз. Жауабы: $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\varphi}-\frac{\rho}{a}\sqrt{1+a^2}$.

7. $y^2=2px$ параболасымен және $x=a$ түзумен қоршалған фигураның Ox осінен айналуынан пайда болған дененің көлемін табыңыз.

8. $x^2+y^2=9$ шеңбердің $y_1=-2$, $y_2=2$ арақашығы доғасы $(x>0)$ Oy осі айналасында айналуынан пайда болған дене бетінің ауданын есептеңіз. Жауабы: 12π кв.бірлік.

9. $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ меншіксіз интегралды есептеңіз. Жауабы: 2.

14- нұска

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int\sqrt{(2x+5)^5}\cdot dx$; ә) $\int 2^{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int\frac{e^{2x}dx}{e^x-e^{-x}}$; ә) $\int\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}x+3}}{\sin^2 x}\cdot dx$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int e^{-x}\sin x\ dx$; ә) $\int\sqrt{x}\cdot\ln x dx$

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+5x^2+4}$ ә) $\int \sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{x^3}}\cdot dx$ б) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot\cos^5 x\cdot dx$

5. Анықталған интегралды есептеңіз:

а) $\int_{2\pi}^{3\pi} \cos\frac{x}{4}dx$ Жауабы: $2\left(\sqrt{3}-1\right)$. ә) $\int_1^3 \ln x dx$ Жауабы: $3\ln 3-2$.

6. $\rho = a(1+\cos\gamma)$ кардиоиданың ұзындығын есептеңіз. Жауабы: $8a$.

7. $y=\sin x$ синусоиданың бір аркасы және Ox өсімен қоршалған фигураның Ox өсі айналасында айналуынан пайда болған дененің көлемін табыңыз. Жауабы: $\frac{\pi^2}{6}$.

8. $x=t^2$, $y=\frac{t}{3}\left(t^2-3\right)$ қисықтың Ox өсі айналасында айналуынан пайда болған дене бетінің ауданын есептеңіз. Жауабы: 3π.

9. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ меншіксіз интегралды есептеңіз.

15- нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$; ә) $\int \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x}\cdot dx$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \sqrt{\left(x^4-1\right)^3}\cdot x^3 dx$; ә) $\int \frac{x^2 dx}{1+x^6}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int x^2 e^{-3x} dx$; ә) $\int e^{-2x}\cos x dx$

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{2x^4+9x^3+3x^2+27}{x^3+6x^2+9x}\cdot dx$ ә) $\int \sqrt{3-4x+4x^2}\cdot dx$ б) $\int \frac{tgx}{1-ctg^2 x}\cdot dx$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}\sin x dx$ Жауабы: $-\frac{2}{3}$. ә) $\int_0^1 xe^x dx$ Жауабы: 1.

6. $\rho = ae^{m\varphi}$ логарифмдік спиральдің $(a>0, m>0)$ $\rho=a$ доңгелек ішіндегі доғасының ұзындығын есептеңіз.

7. $y^2=4x$ парабола және $x=4$ түзумен қоршалған фигураның Ox өсінен айналуынан пайда болған дененің көлемін табыңыз. Жауабы: 128π.

8. $x=\frac{t^2}{3}$, $y=4-\frac{t^2}{2}$ қисықтың координата остерімен қиылысқан нүктелері арасындағы доғасының Ox өсі айналасында айналуынан пайда болған дене бетінің ауданын табыңыз. Жауабы: $29{,}6\pi$.

9. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ меншіксіз интегралды есептеңіз.

16- нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$; ә) $\int \frac{(x+5)\cdot dx}{3+2x+2x^2}$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{(\sin 2x+\sin x)\cdot dx}{\sqrt{7-\cos^2 x}}$; ә) $\int \frac{(3x+1)\cdot dx}{\sqrt{9x^2+6x-8}}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int (x^2-3x+2)\cos 5x dx$; ә) $\int (4-3x)e^{-2x}dx$

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{x^4+4x^2-2x+1}{x^4+x}\cdot dx$ ә) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$ б) $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}\cdot dx$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(5-3x)^3}$; Жауабы: $\frac{7}{200}$ ә) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\frac{\pi}{4}-x)dx$ Жауабы: $\frac{\pi-2}{8}$.

6. $y=x^2-1$ параболамен, $x=2$ түзуімен және абсцисса осімен қоршалған фигураның ауданын табыңыз. Жауабы: $\frac{4}{3}$.

7. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ астроида доғаларының ұзындығын табыңыз: Жауабы: $6a$.

8. $y^2=2x$ параболаның $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ аралықтағы доғасының Ox өсінен айналуынан пайда болған дене бетінің ауданын табыңыз: Жауабы: $\frac{14}{3}\pi$.

9. $\int_{0}^{2} \frac{x^2dx}{x^3+1}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеңіз. Жауабы: жинақсыз.

17- нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x^2}}$; ә) $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{x^2dx}{x^3-2}$; ә) $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\cdot dx$; ә) $\int \sin x\cdot\ln(tgx)dx$

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x-4}\cdot dx$ ә) $\int \sqrt{x^2-2x+2}\cdot dx$ б) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot\cos 3x dx$; Жауабы: 0. ә) $\int_0^5 \frac{x dx}{1+3x}$, Жауабы: 4.

6. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ астроидамен қоршалған фигураның ауданын табыңыз. Жауабы: $\frac{3\pi a^2}{8}$.

7. $y=2\left(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}}\right)$ қисығының $x=4$ түзулері арасындағы доғасының ұзындығын есептеңіз. Жауабы: $8\sinh 1\approx 9{,}4$.

8. $x^2+y^2=r^2$ шеңбердің $x_1=-r$-ден $x_2=r$-ге дейінгі доғасының Ox осі айналасында айналуынан пайда болған дене бетінің ауданын есептеңіз. Жауабы: $4\pi r^2$.

9. $\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{4+x^2}dx$ меншіксіз интегралды есептеңіз. Жауабы: $\frac{3\pi^2}{64}$

18- нұска

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{x^2}{2x^3+3}\cdot dx$; ә) $\int (2^{-x}+3^x)^2 dx$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; ә) $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\ln^2 x\cdot dx$; ә) $\int x\cos^2 x\cdot dx$

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^3+x}\cdot dx$ ә) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\cdot dx$ б) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x}$ $\left(t=tg\frac{x}{2}\right)$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cdot\sin 7x dx$; Жауабы: $\frac{4}{45}$. ә) $\int_3^8 \frac{dx}{5-\sqrt{x+1}}$ Жауабы: $10\ln\frac{3}{2}-2$.

6. $y^2=4x$ параболасымен, $x=1$ және $x=9$ түзулермен қоршалған фигураның ауданын табыңыз.

7. $ay^2 = x^3$ қисығының $x = 0$ нүктесінен $x = 5a$ нүктесіне дейінгі доғасының ұзындығын табыңыз. Жауабы: $\frac{335a}{27}$.

8. $y = e^x + e^{-x}$ қисықтың $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ аралықтағы доғасының Ox осі айналасында айналуынан пайда болған дене бетінің ауданын табыңыз. Жауабы: $\frac{\pi}{4}\left(e^2 - e^{-2} + 4\right)$.

9. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ меншіксіз интегралды есептеңіз. Жауабы: $\frac{3}{2}$

19- нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{x^3}{\sqrt{8x^4 - 1}} \cdot dx$; ә) $\int \cos(5x - 3)dx$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{dx}{sh^2 x \cdot ch^2 x}$; ә) $\int \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1} \cdot dx$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \sqrt{x} \cdot \ln 2x \cdot dx$; ә) $\int \arcsin 2x \cdot dx$

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} \cdot dx$ ә) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2 + x - x^2}}$ б) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos x dx$: Жауабы: 0. ә) $\int_1^1 \frac{dx}{x^2 - 2x + 10}$. Жауабы: $\frac{\pi}{12}$.

6. $y = \ln\left(1 - x^2\right)$ қисығының $x = 0$ нүктесінен $x = 0{,}5$ нүктесіне дейінгі доғасының ұзындығын табыңыз: Жауабы: $\ln 3 - \frac{1}{2}$.

7. $y = \sin x$ синусоиданың $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ аралықтағы доғасының Ox осі айналасында айналуынан пайда болған дене бетінің ауданын табыңыз: Жауабы: $2\pi\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$.

8. $y = x^3 - 4x$ параболасымен, $y = 0$, $x = -2$ және $x = 2$ түзулермен қоршалған фигураның ауданын табыңыз.

9. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ меншіксіз интегралды есептеңіз. Жауабы: $\frac{\pi}{2}$.

20- нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x^2}}$; ә) $\int tg^2 x \cdot dx$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5 \sqrt{1-x^2}}$; ә) $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2} \cdot dx$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int (4x^3 6x-7) \ln x \cdot dx$; ә) $\int (x^3+1) \cos x \cdot dx$

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} \cdot dx$ ә) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$ б) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 t dt$; Жауабы: $\frac{1}{12}(8-5\sqrt{2})$. ә) $\int_4^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$. Жауабы: $\frac{\pi}{6}$.

6. $y=\sin x$ синусоидасымен, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{2}$ және $x=\pi$ түзулерімен қоршалған фигураның ауданын табыңыз.

7. $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ қисығының $[0,1]$ аралықтағы доғасының ұзындығын есептеңіз. Жауабы: $sh1 \approx 1,175$.

8. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоиданың бір аркасының Ox өсі айналасында айналуынан пайда болған дене бетінің ауданын есептеңіз. Жауабы: $\frac{64}{3}\pi a^2$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tgx dx$ меншіксіз интегралын жинақтылыққа зерттеңіз. Жауабы: жинақсыз.

21- нұска

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \sqrt{\cos x} \cdot \sin x dx$; ә) $\int \frac{arctgx}{1+x^2} \cdot dx$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$; ә) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-4x^2}}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int x \sin \frac{x}{2} dx$; ә) $\int x^2 e^{-x} dx$;

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{x^2-7x-20}{(x+1)(x-2)(x+3)} dx$; ә) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$; б) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$;

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$ Жауабы:14. ə) $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$ Жауабы: $\sin 1$.

6. $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$ қисығының ұзындығын есептеңіз. Жауабы: $6a$.

7. $x_1 = 0$, $x_2 = 3a$ аралықтағы $y^2 = 4ax$ параболасы доғасының Ox өсінен айналуынан пайда болған дене бетінің ауданын есептеңіз. Жауабы: $\frac{56\pi a^2}{3}$.

8. Диаметрі 20м-ге тең жарты сфера түріндегі ыдыстан суды шығару үшін жұмсалған жұмысты анықтаңыз. Жауабы: $2{,}5\cdot 10^6\pi$ кг/м.

9. $\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-5}}$ меншіксіз интегралды есептеңіз. Жауабы: $\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-1)$

22- нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \sqrt[3]{x^3-4}\cdot x^2 dx$; ə) $\int \sqrt[3]{x^3-16}\cdot x^3 dx$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}$; ə) $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}\cdot dx$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{dx}{e^{3x}}$; ə) $\int \frac{x\sin x dx}{\cos^3 x}$;

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{x^3-4x+4}{x^3(x+2)^2}dx$; ə) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$; ə) $\int \sin^5 x\cdot\cos^3 x dx$;

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$; Жауабы: $arctg\frac{1}{7}$. ə) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 t dt$ Жауабы: $\frac{5\sqrt{2}}{12}$.

6. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ қисығының $[0,8]$ аралықтағы доғасының ұзындығын табыңыз.

7. $y = 2x$ түзуінің $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ аралықтағы кесіндісінің Ox өсінен айналуынан пайда болған конус бетінің ауданын табыңыз. Жауабы: $8\pi\sqrt{5}$.

8. Радиусы $R = 0{,}3м.$, биіктігі $H = 2м.$ конус түріндегі шұқырдан суды шығаруға жұмсалған жұмысты анықтаңыз.

9. $\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеңіз. Жауабы: жинақсыз.

23- нұсқа

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \cos^2\frac{x}{2}\cdot dx$; ə) $\int ctg\frac{x}{3}\cdot dx$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$; ә) $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}dx$; ә) $\int (x-1)3^x dx$;

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$; ә) $\int \frac{(37-6x)dx}{(2x+1)(6x^2-11x+3)}$; б) $\int \cos^4 \frac{x}{2}dx$;

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,dx$; Жауабы: $\frac{4}{3}$. ә) $\int_{-1}^{1} \frac{x^3 dx}{x+2}$ Жауабы: $8\frac{2}{3}-8\ln 3$.

6. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ қисығының $[1,e]$ аралықтағы доғасының ұзындығын есептеңіз.

7. $y=3x$ түзуінің $x_1=0$, $x_2=1$ аралықтағы кесіндісінің Oy өсінен айналуынан пайда болған конус бетінің ауданын табыңыз. Жауабы:

8. Радиусы R метрге тең жарты шардағы суды шығаруға жұмсалған жұмысты анықтаңыз. Жауабы: $2{,}5\cdot 10^3 \pi R^4$ Дж.

9. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$ меншіксіз интегралды есептеңіз. Жауабы: $\frac{\sqrt{7}}{2}$

24- нұска

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\cdot dx$; ә) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\cdot dx$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$; ә) $\int \frac{(3x+1)\cdot dx}{\sqrt{9x^2+6x-8}}$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}$; ә) $\int e^{2x}\cos 3x dx$;

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{(x^3-3x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$; ә) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$; б) $\int \sin^4 2x dx$;

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$; Жауабы: $\frac{4}{3}$. ә) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(11+5x)^2}}$ Жауабы: $\frac{7}{72}$

6. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $(0\le t\le 2\pi)$ циклоидасының бір аркасының ұзындығын есептеңіз. Жауабы: $8a$.

7. $y=\frac{x^2}{2}$ параболаның $y=1,5$ түзумен қиылған доғасының Oy өсінен айналуынан пайда болған дене бетінің ауданын есептеңіз. Жауабы: $\frac{14\pi}{3}$.

8. Трапеция түріндегі плотинаның жоғары және төменгі табандары 10 м. және 20 м., ал биіктігі 6 м. плотинаға түсетін судың қысымын анықтаңыз.

9. $\int_3^5 \frac{dx}{x^2-6x+8}$ меншіксіз интегралды есептеңіз. Жауабы: жинаксыз.

25- нұска

1. Келтіру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \cos x^3 x^2 dx$; ә) $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}\cdot dx$;

2. Айнымалыны алмастыру әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$; ә) $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}\cdot dx$;

3. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдарды есептеңіз:

а) $\int \frac{x\sin x dx}{\cos^2 x}$; ә) $\int \ln(x^2-4)dx$;

4. Рационал, иррационал және тригонометриялық функциялардың интегралдарын есептеңіз:

а) $\int \frac{x^2-10x+12}{x^4+13x^2+36}dx$; ә) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot dx$; б) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$;

5. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int_1^8 (4x-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})dx$; Жауабы: 125. ә) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos ec^2 x dx$ Жауабы: 1.

6. $y=1-\ln\cos x$ кисығының $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ аралықтағы доғасының ұзындығын есептеңіз. Жауабы: $\ln tg\frac{3\pi}{8}$.

7. $x^2=4+y$ параболасының $y=2$ түзумен қиылған доғасының Oy осінен айналасында айналуынан пайда болған дене бетінің ауданын есептеңіз. Жауабы: $\frac{34\sqrt{17}-2}{9}\pi$.

8. Терендігі 12м, ені 10м. болған шлюзге түсетін судың қысымын анықтаңыз.(шлюздің жоғары жағы су бетімен беттеседі).

9. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ меншіксіз интегралды есептеңіз. Жауабы: π.

13-тарау. Көп айнымалының функциялары

§13.1 Екі айнымалының функциясы, оның анықталу облысы және графигі

Жаратылыстану ғылымдарының, экономиканың және т.б. салалардың көптеген мәселелері көп айнымалы шамалардың функцияларына мысал болады. Бірақ мұндай тәуелділіктерді зерттегенде, үйренуге жеңіл болу мақсатында, айнымалы шамалардың бір бөлігін тұрақты деп қабылдап, бір, екі және т.с.с. айнымалы шамалардың функциясына келтірсді.Бір айнымалының функциясы ұғымын, оның дифференциалдық және интегралдық есептерін бұрынғы дәрістерде қарастырдық. Енді екі айнымалы шаманың функциясы ұғымын, оның дифференциалдық есептерін қарастыралық.

Негізгі ұғымдар

x, y айнымалыларының қосағы, яғни (x, y) мәндерінен тұратын жиынды D арқылы, ал айнымалы z-тің нақты мәндерінен тұратын жиынды Z арқылы белгілейік.

1-анықтама. Егер x, y екі тәуелсіз айнымалының әрбір қосағына, яғни $(x, y) \in D$ мәніне айнымалы z-тің бір тек қана бір мәні сәйкес келсе, онда z шамасы x, y тәуелсіз шамаларының функциясы деп аталады және $z = f(x, y)$ арқылы белгіленеді.

Мұндағы D жиыны функцияның анықталу облысы деп, ал Z функцияның өзгеру облысы немесе мәндерінің жиыны деп аталады.

Екі айнымалы функциясының анықталу облысы бүкіл жазықтық немесе оның қандайда бір бөлігі болуы мүмкін. Берілген облысты жазықтықтан бөліп тұратын сызық оның шекарасы деп аталады.

Облыстың ішінде орналаскан, оның шекарасында жатпайтын нүктелерді облыстың ішкі нүктелері деп атайды. Тек қана ішкі нүктелерден құралған облыс ашық облыс деп аталады.

Егер облыска оның шекарасының нүктелері де жатса, онда ол тұйық облыс деп аталады.

Егер облыстың кез келген М нүктесі үшін $|OM| < C$ теңсіздігі орындалса, онда ол шектелген облыс деп аталады (мұндағы О-координаталар бас нүктесі, C-тұрақты сан.

Бір айнымалының функциясына ұқсас, екі айнымалының функциясы да аналитикалық (формуламен) әдісте, кесте әдісінде, тағы басқа әдістерде берілуі мүмкін. Біз көбінесе аналитикалық әдістермен берілген функцияларды қарастырамыз.

Аналитикалық әдіспен берілген функцияларды зерттеу оның анықталу облысын табудан басталады.

1-мысал. $z = 3x - 2y$ функциясының анықталу облысын табалық.

Шешуі. $3x - 2y$ өрнек x пен y–тің кез келген мәнінде нақты мәнге ие, яғни берілген функцияның анықталу облысы Oxy жазықтығы болады.

2-мысал. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ функциясының анықталу облысын табалық.

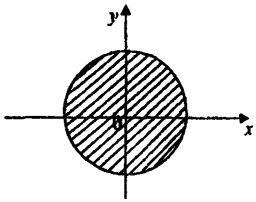
Шешуі. z нақты мәнге ие болуы үшін түбір астындағы өрнек теріс сан болмауы қажет, яғни

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0$$

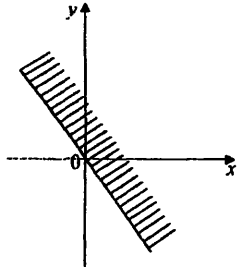
теңсіздігі орындалуы тиіс.Осыдан

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Бұл теңсіздікті қанағаттандыратын $M(x, y)$ нүктелер жиыны центрі координаталар жүйесінің бас нүктесінде жататын, ал радиусы бірге тең дөңгелектің іші мен оның шекарасы (1-сурет).



1-сурет



2-сурет

3-мысал. $z = \ln(x + y)$ функциясының анықталу облысын табалық.

Шешуі. Логарифм ұғымы тек қана оң сандар үшін анықталғандықтан $x + y > 0$ болуы қажет. Бұл теңсіздікті қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орны жарты жазықтықты құрайды (2-сурет). Бұл арада $y = x$ түзуінің нүктелер жиыны функцияның анықталу облысына енбейді.

Біз, бұрын бір айнымалының функциясының графигі жалпы жағдайда жазықтықтағы қандай да бір қисық болатындығымен танысқан едік. Ал, $z = f(x, y)$ екі айнымалының функциясының графигі жалпы жағдайда кеңістіктегі қандай да бір бет болады. Аналитикалық геометрия бөлімінде кейбір екі айнымалы функциялардың графиктері және оларды салудың қима әдісі баяндалған болатын. $z = f(x, y)$ функциясының графигін салу дегеніміз кеңістіктегі денені жазықтықта кескіндеу болғандықтан бір айнымалы функцияның графигіне қарағанда анағұрлым күрделілеу болып келеді.Сондықтан екі айнымалы функцияны зерттегенде және графигін құрғанда деңгей сызығы ұғымы пайдаланылады .

2-анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының мәндері тұрақты C шамасына тең болатын Oxy жазықтығындағы барлық нүктелердің жиыны $z = f(x, y)$ функциясының деңгей сызығы деп аталады.

$f(x, y) = C$ теңдеуі деңгей сызығының теңдеуі, ал C деңгей деп аталады.

4-мысал. $z = x^2 + y^2 - 1$ функциясының графигін сызыңыз.

Шешуі. Z айнымалысы бірден кіші мәндерді қабылдамайды, яғни функция мәндерінің жиыны $[-1;+\infty[$ жартылай интервалы. $z=C, Oxy$ жазықтығына параллель жазықтықтардың теңдеуі. Берілген функцияның $z=C\geq -1$ жазықтықтарымен қимасында пайда болатын сызықтарды анықталық.

$z=-1$ болса, онда $x^2+y^2=0$, яғни $O(0;0)$ нүктесін анықтайды.

$z=0$ болса, онда $x^2+y^2=1$, яғни центрі координаталар бас нүктесінде жататын, радиусы бірге тең шеңбер.

$z=3$ болса, онда $x^2+y^2=4$, яғни центрі координаталар бас нүктесінде жататын, радиусы екіге тең шеңбер.

$z=8$ болса, онда $x^2+y^2=9$, яғни центрі координаталар бас нүктесінде жататын, радиусы үшке тең шеңбер.

Осы табылған теңдеулер берілген функция өрнектейтін бетпен сәйкес жазықтықтардың қимасының теңдеулері болады және олар деңгей сызықтарын анықтайды (3-сурет).



3-сурет



4-сурет

Егер деңгей сызықтарын сәйкес жазықтықтарда орналастырсақ, онда $z=x^2+y^2-1$ функциясы параболоид деп аталатын бетті береді (4-сурет).

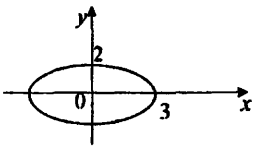
Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Екі айнымалы функциясының анықтамасын беріңіз.
2. Екі айнымалының функциясы қандай әдістермен беріледі?
3. Ашық және тұйық облыстар деп қандай облыстарды атайды?
4. Екі айнымалы функциясының геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.
5. Деңгей сызығының анықтамасын беріңіз.
6. Екі айнымалы шама функциясының графигі қалай сызылады?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1$ теңсіздікпен берілген x, y айнымалылардың өзгеру облысы D-ны табыңыз.

Шешуі. D облысы $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ эллипс сызығымен қоршалған жазықтық бөлігінің барлық нүктелерінен тұрады (5-сурет).



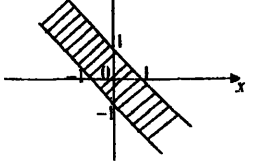
5-сурет

2-мысал. $f(x,y)=\arcsin(x+y)$ функциясының анықталу облысын табыңыз.

Шешуі. $f(x,y)$-тің анықталу облысы деп оған нақты мән беретін x және y-тің мәндерінің жиынын айтатыны белгілі , онда берілген функцияның анықталу облысы оған кері $\sin(x+y)$ функциясының мәндерінің жиыны болады , яғни

$$-1\le x+y\le 1.$$

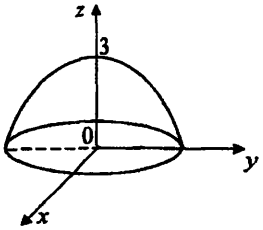
Бұл теңсіздіктерді қанағаттандыратын x және y-тің мәндері $x+y+1=0$ және $x+y-1=0$ түзулері арасында орналасқан (6-сурет).



6-сурет

3-мысал. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ функциясының графигін сызыңыз.

Шешуі. Берілген функцияны $x^2+y^2+z^2=9$ түрге келтіреміз. $O(0,0,0)$ мен $M(x,y,z)$ нүктелері арасындағы қашықтықты R-мен белгілесек , онда $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, немесе $R^2=x^2+y^2+z^2$ болатындығы алдыңғы дәрістерден белгілі.Соңғы теңдеу центрі координата бас нүктесінде, радиусы R болатын шардың теңдеуі.Онда $x^2+y^2+z^2=9$ центрі координаталар бас нүктесінде. ал радиусы 3-ке тең шардың теңдеуі болып , берілген функция сол шардың жоғарғы жартысын өрнектейді (7-сурет).



7-сурет

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $x^2+2y^2<4$ теңсіздікті қанағаттандыратын x,y айнымалылардың өзгеру облысы D-ны табыңыз.

2. $1\le x-y\le 3$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын x,y айнымалылардың өзгеру облысы D-ны табыңыз.

3. $f(x,y)=a^2-x^2-2y^2$ функциясының анықталу облысын табыңыз.

4. $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2}$ функциясының анықталу облысын табыңыз.

5. $f(x,y)=\sqrt{2x}-\dfrac{3}{\sqrt{y}}$ функциясының анықталу облысын табыңыз.

6. $f(x,y)=\arccos\left(x^2+y^2\right)$ функциясының анықталу облысын табыңыз.

7. $z=\dfrac{x^2(1+y)}{1-y}$ функциясының деңгей сызығын табыңыз.

Жауабы: $y=\dfrac{c-x^2}{c+x^2}$.

8. z-ке $-2;-1;1;2$ мәндерін беріп отырып $z=xy$ функциясының деңгей сызығын құрыңыз.

9. $z=\dfrac{4}{x^2+y^2}$ функциясының графигін сызыңыз.

Ескерту! Берілген функциямен өрнектелетін бет $z=\dfrac{4}{x^2},y=0$ қисығының Oz осін айналуынан шыққан айналу денесі болады.

§13.2 Екі айнымалы функцияның шегі және үзіліссіздігі

1–анықтама. Радиусы r-ге тең центрі $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде жататын дөңгелектің ішінде орналасқан барлық $M(x,y)$ нүктелердің жиынын $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің r-радиусты аймағы деп атайды.

2-анықтама. Егер мейлінше аз, оң ε саны үшін $r>0$ саны табылып, $|MM_0|<r$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $M(x,y)$ нүктелер үшін

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x,y)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесі $M_0(x_0,y_0)$ нүктесіне ұмтылғандағы шегі деп аталады және ол былай жазылады:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

Мұндағы $|MM_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$.

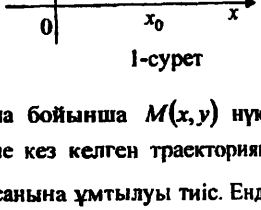
Мысалы, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ шегін есептелік.

Шешуі. $M(x,y)$ нүктенің $M_0(0,0)$нүктеге ұмтылғандағы, немесе $r\to 0$ дағы шекті есептейміз. Мұндағы $r=MM_0$ немесе $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Сонымен,

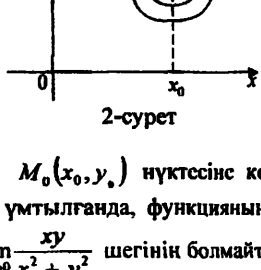
$$\lim_{M\to M_0}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\left(\sqrt{r^2+1}+1\right)}{r^2+1-1}=2.$$

Екі айнымалы функциясы шегінің анықтамасы бір айнымалы функцияның нүктедегі шегінің анықтамасына ұқсас болғандықтан, олар үшін орындалатын барлық теоремалар екі айнымалы функциясының шегі үшін де орындалады. Дегенмен кейбір айырмашылықтарын да айта кетелік.

Егер $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b$ және керісінше де орынды болатындығы белгілі. Ал $f(x,y)$ функциясының шегін қарастырғанымызда $M(x,y)$ нүкте $M_0(x_0,y_0)$ нүктеге шексіз көп бағыт бойынша (1-сурет) және күрделі траекториялармен де (2-сурет) ұмтылуы мүмкін.



1-сурет



2-сурет

Анықтама бойынша $M(x,y)$ нүктесі $M_0(x_0,y_0)$ нүктесіне кез келген бағытта және кез келген траекториямен ұмтылғанда, функцияның бір, тек қана бір A санына ұмтылуы тиіс. Енді $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ шегінің болмайтындығын дәлелдейік. $M(x,y)$ нүктесі $O(0,0)$нүктесіне $y=kx$ түзуінің бойымен ұмтылсын. Егер $y=kx$ болса, онда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

Сонымен, шектің мәні түзудің бұрыштық коэффициентіне тәуелді екен. Мысалы $k=1$ болса, шек $\frac{1}{2}$-ге тең; $k=2$ тең болса, шек $\frac{2}{5}$-ге тең; т.с.с.

Яғни $M(x,y)$ нүктесі $O(0,0)$ нүктесіне $y=kx$ түзуінің бойымен ұмтылса, шек те әртүрлі мәндерді қабылдайды екен, онда берілген функцияның $O(0,0)$ нүктедегі шегі жоқ.

Енді функцияның нүктеде үзіліссіздігі ұғымын берелік.

Айталық $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі $f(x,y)$ функциясының анықталу облысында жатсын.

3-анықтама. Егер:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \qquad (1)$$

теңдігі орындалса, онда $f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0,y_0)$ нүктеде үзіліссіз деп аталады. Мұндағы $M(x,y)$ нүктесі $M_0(x_0,y_0)$ нүктесіне $f(x,y)$ функциясының анықталу облысынан шықпайтын кез келген жолмен ұмтылады.

4-анықтама. Егер қандайда бір $N_0(x_0,y_0)$ нүктеде (1) теңдік орындалмаса, онда $N_0(x_0,y_0)$ нүктесі $f(x,y)$ функциясының үзіліс нүктесі деп аталады. (1) теңдік мынадай жағдайларда орындалмауы мүмкін:

1) $f(x,y)$ функциясы $N_0(x_0,y_0)$ нүктенің қандай да бір аймағының барлық нүктелерінде анықталғанымен $N_0(x_0,y_0)$ нүктенің өзінде анықталмаған болса;

2) $f(x,y)$ функциясы $N_0(x_0,y_0)$нүктенің қандай да бір аймағының барлық нүктелерінде анықталғанымен

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \qquad (2)$$

шегі жоқ болса;

3) $f(x,y)$ функциясы $N_0(x_0,y_0)$ нүктенің қандай да бір маңайының барлық нүктелерінде анықталған және (2) шек бар, бірақ

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\neq f(x_0,y_0).$$

§13.3 Екі айнымалы функцияның дербес және толық өсімшесі

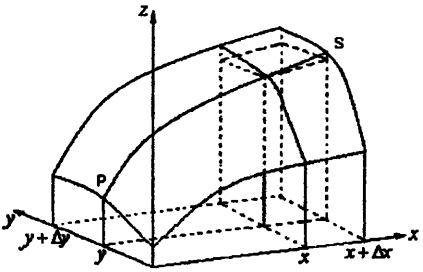
$z=f(x,y)$ беттің $y=const$ жазықтығымен қимасы PS қисығын қарастырайық (3-сурет).

PS қисығының бойында $z=f(x,y)$ функциясы тек қана x–тің функциясы болады, себебі y тұрақты мән қабылдайды.

Айнымалы x–ке Δx өсімше берелік. Онда z-те өсімше алады, оны z-тің x бойынша дербес өсімшесі деп атайды да $\Delta_x z$ пен белгілейді. Сонда:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y).$$

Осыған ұқсас, $z = f(x,y)$ беттің $x = const$ жазықтығымен қимасын қарастырып, y-ке өсімше берсек, z -те у-ке тәуелді өсімше алады, оны z-тің y бойынша дербес өсімшесі деп атайды да $\Delta_y z$ пен белгілейді.



3-сурет

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Егер x-ке Δx өсімше, y-ке Δy өсімше берсек, онда функция Δz толық өсімшесін алады, яғни

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Ескерту! Жалпы жағдайда $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Жазықтықтағы нүкте аймағының анықтамасын беріңіз.
2. Екі айнымалы функциясының шегінің анықтамасын беріңіз.
3. Екі айнымалы функциясының шегінің бір айнымалы функциясының шегінен қандай айырмашылығы бар?
4. Екі айнымалы функциясының үзіліссіздігінің анықтамасын беріңіз.
5. Қандай жағдайларда $f(x,y)$функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктеде үзіліске ие?
6. Екі айнымалы функциясының дербес өсімшелерінің формуласын және олардың геометриялық мағынасын көрсетіңіз.
7. Толық өсімшенің формуласын жазыңыз, суретте көрсетіңіз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{tg(xy)}{y}$ шекті есептейміз.

Шешуі. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{tg(xy)}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x \cdot \dfrac{tg(xy)}{xy} = \lim\limits_{x\to 2} x \cdot \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{tg(xy)}{xy} = 2.$

2-мысал. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x+y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{1+\dfrac{y}{x}}$ шегі жоқ, себебі, $\dfrac{y}{x}$ қатынастың $M(x,y)$ нүктесі $M_0(0;0)$ нүктесіне ұмтылғандағы шегі болмайды. Шынында да, $M(x,y)$ нүктесі $M_0(0;0)$ нүктесіне $y=kx$ түзуінің бойымен ұмтылса, онда $\dfrac{y}{x}=k$, яғни шек түзудің бұрыштық коэффициентіне тәуелді болып, ол түрлі мәндерге ие.

3-мысал. $z=\begin{cases} 5-x-y, \text{егер} & x\neq 1,\ y\neq 2 \\ 1, & \text{егер}\quad x=1,\ y=2 \end{cases}$

функциясының $M_0(1;2)$ нүктесінде үзілісті екендігін дәлелдейік.

Берілген функция $M_0(1;2)$ нүктесінде және оның маңайындағы барлық нүктелерде анықталған. Бірақ, функцияның $M(x,y)$ нүктесі $M_0(1;2)$ нүктесіне ұмтылғандағы шегі оның M_0 нүктесіндегі мәніне тең емес, яғни $\lim\limits_{M\to M_0} Z=2;\ Z(M_0)=1$.

Сонымен z функциясы, $M_0(1;2)$ нүктесінде үзілісті.

$f(x,y)$ функциясы шексіз көп нүктелерде де үзілісті болуы мүмкін. Егер олар түтас бір сызықты құраса, онда ол функцияның үзіліс сызығы деп аталады. Мысалы, $z=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$ функциясы $x^2+y^2=1$ шеңберінің әрбір нүктесінде үзілісті, сондықтан бұл шеңбер функцияның үзіліс сызығы болады.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі шектерді табыңыздар.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{a-\sqrt{a^2-xy}}{xy}$; 2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sin(xy)}$;

3. $z=\dfrac{10x}{(x-1)^2+(y-1)^2}$ функциясының үзіліс нүктесін табыңыз.

4. $z=\dfrac{3y}{2x-y}$ функциясының үзіліс нүктесін табыңыз.

5. $z=\dfrac{x^2}{x^2-2y^2-4}$ функциясының үзіліс нүктесін табыңыз.

§13.4 Екі айнымалы функцияның дербес туындылары

1-анықтама. $Z=f(x,y)$ функциясының x бойынша дербес туындысы деп оның x бойынша дербес өсімшесі $\Delta_x Z$ - тің Δx өсімшеге қатынасының Δx нөлге ұмтылғандағы шегін айтады және ол былай белгіленеді:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ f'_x(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z'_x.$$

Сонымен, анықтама бойынша,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Осы сияқты z функциясының y бойынша дербес туындысы төмендегідей табылады:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Дербес туындының анықтамасынан, оны есептеудің жай туындыны есептеуден ешқандай айырмашылығы жоқ екені көрініп тұр. Басқаша айтқанда, $\frac{\partial z}{\partial x}$ туындыны тауып болғанша y айнымалысын тұрақты деп есептесек, $z=f(x,y)$ функциясы тек қана x-тің функциясы, ал x айнымалысын тұрақты деп қарасақ, онда $z=f(x,y)$ функциясы тек қана у-тің функциясы болады. Олай болса дербес туындыларды табу үшін бір айнымалының функциясын дифференциялдау ережелері пайдаланылады. Төмендегі функциялардың дербес туындыларын табайық:

1-мысал. $z=x^2-3xy+4xy^2$ функциясының дербес туындыларын табыңыз.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x-3y+4y^2;\ \frac{\partial z}{\partial y}=-3x+8yx.$

2-мысал. $z=\sqrt{x+3y}$. .

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x+3y}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2\sqrt{x+3y}}.$

3-мысал. $z=arctg\frac{y}{x}.$

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x=-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{x}{x^2+y^2}.$

§13.5 Екі айнымалы функцияның толық дифференциалы

Бір айнымалының функциясының дифференциалы функция өсімшесінің бас бөлігі ретінде немесе Δx-ке сызықты тәуелді қосылғыш ретінде анықталғаны белгілі. Сол сияқты екі айнымалының функциясының дифференциалы да анықталады.

$z = f(x,y)$ функциясының толық өсімшесі анықтама бойынша

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y). \qquad (1)$$

$f(x,y)$ функциясы қарастырылып отырған (x,y) нүктеде үзіліссіз дербес туындыларға ие болсын деп ұйғарайық. (1) теңдікті төмендегіше түрлендіреміз.

$$\Delta z = \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\right] + \left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\right] \qquad (2)$$

Квадрат жақшалардағы өрнектерге Лагранж теоремасын қолданалық.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}\cdot \Delta x, \qquad (3)$$

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}\cdot \Delta y. \qquad (4)$$

Мұндағы $x < \bar{x} < x+\Delta x, \qquad y < \bar{y} < y+\Delta y$.

(3), (4) теңдіктерді (2) теңдікке қойсақ

$$\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}\cdot \Delta y. \qquad (5)$$

Дербес туындылар үзіліссіз болғандықтан

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Соңғы теңдіктерді төмендегіше жазуға болады:

$$\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \varepsilon_1, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \varepsilon_2. \qquad (7)$$

(6), (7) теңдіктерді есепке алып (5) теңдікті төмендегіше жазамыз.

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y. \qquad (8)$$

Мұндағы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$-лер Δx және Δy-тер нолге ұмтылғанда нолге ұмтылатын шексіз аз шамалар. (8) теңдіктегі соңғы екі қосылғыш $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ шамасына қарағанда жоғары ретті шексіз аз шамалар. Шынында да, егер $\rho \to 0$, онда $\frac{\varepsilon_1\Delta x}{\rho} \to 0$, $\frac{\varepsilon_2\Delta y}{\rho} \to 0$, себебі $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \le 1$, $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \le 1$, ал $\varepsilon_1, \varepsilon_2$-лер шексіз аз шамалар.

1-анықтама. Егер $z = f(x,y)$ функциясының кандайда бір $M(x,y)$ нүктесіндегі өсімшесі (8) формула түрінде өрнектелетін болса, онда $f(x,y)$ функциясы осы нүктеде дифференциалданатын функция деп аталады.

2-анықтама. Функцияның дербес туындыларының сәйкес тәуелсіз айнымалыларының өсімшелеріне көбейтінділерінің қосындысы, яғни

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y, \qquad (9)$$

$z = f(x,y)$ функциясының толық дифференциалы деп аталады.

Функцияның туындысы сияқты оның дифференциалының мәндері де әр бір нүктеде әртүрлі.

Мысалы. $z = \frac{x}{y}$ функциясының толық дифференциалының: а)$(0;2)$ ә)$(1;1)$ нүктелердегі мәндерін табайық:

Шешуі:

а) $dz\Big|_{\substack{x=0\\y=2}} = \left(\frac{1}{y}\cdot\Delta x - \frac{x}{y^2}\Delta y\right)_{\substack{x=0\\y=2}} = \frac{1}{2}\Delta x;$

ә) $dz\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = \left(\frac{1}{y}\cdot\Delta x - \frac{x}{y^2}\Delta y\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = \Delta x - \Delta y.$

Тәуелсіз айнымалылардың $\Delta x, \Delta y$ өсімшелерін олардың дифференциалдары деп атап,сәйкесінше dx, dy -тар мен белгілесек, онда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (10)$$

Сонымен, егер $z = f(x,y)$ функциясы үзіліссіз дербес туындыларға ие болса, онда ол $M(x,y)$ нүктесінде дифференциалданады және оның толық дифференциалы (10) формуламен өрнектеледі.

Функцияның толық дифференциалы жуық есептеулерде мынадай алгоритмде қолданылады:

1) берілген өрнекті $f(x,y)$ функциясының $P(a,b)$ нүктесіндегі жуық мәні ретінде өрнектеледі;

2) $P(a,b)$ нүктесіне жақын және $f(x_0,y_0)$-ді есептеу жеңіл болатын $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі таңдалынады;

3) $f(x_0,y_0)$ мәні есептелінеді;

4) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)$ дербес туындылары табылады;

5) табылған мәндер

$$f(a,b) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(a-x_0) + f'_y(x_0y_0)(b-y_0) \qquad (11)$$

жуық теңдігі арқылы есептелінеді.

Мысалы. $arctg\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right)$ мәнін жуықтап есептелік.

Шешуі. 1) $f(x,y) = arctg\left(\frac{x}{y}-1\right)$ функциясын қарастырамыз, $a = 1,97;$ $b = 1,02.$

2) $x_0 = 2, y_0 = 1$ нүктесін таңдаймыз;

3) $f(x_0, y_0) = f(2,1) = arctg1 = \frac{\pi}{4}$;

4) $f'_x(x,y) = \frac{y}{y^2 + (x-y)^2}$; $f'_y(x,y) = -\frac{x}{y^2 + (x-y)^2}$;

$f'_x\left(x_0, y_0\right) = \frac{1}{2}$; $f'_z\left(x_0, y_0\right) = -1$;

$a - x_0 = -0.03$; $b - y_0 = 0.02$. Онда (11)-формула бойынша :

5) $arctg\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right) \approx arctg1 - \frac{1}{2} \cdot 0.03 - 0,02 = \frac{\pi}{4} - 0,015 - 0,02 \approx 0.75.$

Функцияның толық дифференциалы қателіктерді бағалауда да қолданылады.

Айталық u айнымалысы x, y айнымалыларының функциясы болсын.

$$u = f(x,y)$$

x, y шамаларды анықтағанда $\Delta x, \Delta y$ қателіктер болған болсын. Онда аргументтердің жуық мәндерімен есептелген u-дың мәні

$$\Delta u = f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right)$$

қателікпен анықталады. Енді сол қателікті бағалайық. $\Delta x, \Delta y$-тердің кіші мәндерінде толық өсімшені толық дифференциалмен жуық алмастыруға болады:

$$\Delta u \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Мұндағы дербес туындылардың мәндерімен $\Delta x, \Delta y$-тердің мәндерінің қателіктері оң немесе теріс сандар болуы мүмкін. Онда $|\Delta u|$-дың бағасы үшін келесі теңсіздікті жазамыз.

$$|\Delta u| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot |\Delta y|.$$

Егер $|\Delta_u u|, |\Lambda_u x|, |\Delta_u y|$-тер мен абсолюттік қателіктердің максимумдарын яғни шектік мәндерін белгілесек, онда былай жазуға болады

$$|\Lambda_u u| \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta_u x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta_u y|. \qquad (12)$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. $f(x,y)$ функциясының x бойынша дербес туындысының анықтамасын беріңіз.
2. $f(x,y)$ функциясының y бойынша дербес туындысының анықтамасын беріңіз.
3. $f(x,y)$ функциясының дербес туындылары қандай ережелер арқылы табылады?

4. $f(x,y)$ функциясының толық дифференциалының анықтамасын беріңіз.

5. $f(x,y)$ функциясының толық дифференциалын жуық есептеулерде қолданылуы алгоритмін баяндаңыз.

6. Есептеулердегі қателіктер қалай бағаланады?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСОЖ)

1-мысал. $z = x^{y^2}$ функциясының дербес туындыларын табыңыз.

Шешуі. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cdot x^{y^2-1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^{y^2} \cdot \ln x \cdot 2y$.

2-мысал. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ берілген. $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot y + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot x = 0$ теңдігін дәлелдеңіз.

Шешуі. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Орындарына қоямыз:

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$$

3-мысал. $z = \ln(xy)$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

Шешуі. Дербес туындыларын табамыз.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{y}.$$

Дербес туындыларын сәйкес аргументтерінің дифференциалдарына көбейтіп толық дифференциалын табамыз.

$$dz = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}.$$

4-мысал. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері $a = 7{,}5$ см , b=18 см. 0,1 дәлдікпен табылған: Гипотенузасын есептегенде шығатын абсолюттік қателікті анықтаңыз.

Шешуі. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; (12) формуланы пайдаланамыз. $\Delta_m x = \Delta_m y = 0{,}1$ (есептің шарты бойынша).

$$C'_a = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; C'_b = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$|\Delta_m C| = \left(\frac{7{,}5}{\sqrt{7{,}5^2 + 18^2}} + \frac{18}{\sqrt{7{,}5^2 + 18^2}} \right) \cdot 0{,}1 = \frac{0{,}75}{19{,}5} + \frac{1{,}8}{19{,}5} = 0{,}13.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі мысалдардағы функциялардың дербес туындыларын табыңыз.

1. $z = (5x^3y^2 + 1)^3$. 2. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. 3. $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$.

4. $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 5. $z=\sqrt{\frac{x}{y}}$, 6. $z=\left(1+x^2\right)^y$,

7. $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$ функциясының $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y=0$ теңдеуді қанағаттандыратындығын көрсетіңіз.

8. $z=y\ln 2x$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

9. $z=\sin^2 x\cdot\cos^2 y$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

10. $1.94^2\cdot e^{0.12}$ өрнегінің жуық мәнін есептеңіз ($x_0=2, y_0=0, f(x,y)=x^2e^y$ деп алыңыз).

§13.6 Күрделі және айқындалмаған функцияларды дифференциалдау

Екі айнымалының $z=f(x,y)$ функциясы берілсін. Бұл функцияның аргументтері x пен y тәуелсіз айнымалы t-ның функциялары болсын, яғни $x=x(t)$, $y=y(t)$. Онда z бір тәуелсіз айнымалы t-ның күрделі функциясы болады.

Осы z-тің t бойынша туындысы, яғни $\frac{dz}{dt}$-ны табу есебін қарастырайық. Бұл есепті шешу үшін $x(t)$, $y(t)$ функцияларының t нүктесінде туындылары бар болсын, ал $z=f(x,y)$ функциясы сәйкес $M(x,y)$ нүктесінде дифференциалданатын болсын деп ұйғарамыз.

t-ға Δt өсімше береміз. Онда x және y айнымалылары да сәйкес Δx және Δy өсімшелерін алады, ал $z=f(x,y)$ функциясы Δz өсімшесін алады. z функциясы дифференциалданатын болғандықтан оның толық өсімшесі Δz-ті төмендегіше жазуға болады:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y), \qquad (1)$$

мұнда $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\varepsilon}{\rho}=0$, $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

(1) формуланың екі жағын Δt-ға бөліп, Δt-ны нолге ұмтылдырып шекке көшеміз.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon}{\Delta t}. \qquad (2)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta t}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho}{\Delta t}.$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

x және y функциялары Δt бойынша дифференциалданатын болғандықтан, олар үзіліссіз болады, онда $\Delta t \to 0$ да $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Олай болса, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon}{\rho} = 0$.

Сонымен,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta t} = 0 \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 0.$$

Соңғы теңдікті ескеке алсақ (2) формула төмендегіше жазылады.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \qquad (3)$$

(3) формуланы t-ның күрделі функциясы z-тен t бойынша алынған туындының формуласы деп атайды.

Енді $z = f(x, y)$ функциясында $y = y(x)$ болған жағдайын қарастырайық. Бұл жағдайда айнымалы z тек қана бір x-тің функциясы болады $z = f(x, y(x))$. Сондықтан (3) формула бұл жағдайда былай жазылады

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

$\frac{dx}{dx} = 1$ болғандықтан,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \qquad (4)$$

(4) формуланың сол жағында да, оң жағында да z-тен x бойынша алынған туындылар тұр. Мұндағы $\frac{\partial z}{\partial x}$-екі айнымалының функциясы $z = f(x, y)$-тен x бойынша алынған дербес туынды, яғни y-ті уақытша тұрақты деп қабылдап x бойынша алынған туынды, ал сол жағындағы $\frac{dz}{dx}$-бір айнымалының күрделі функциясы $z = f(x, y(x))$-тен алынған туындының мәнін береді. Сондықтан (4) формуламен анықталатын туындыны толық туынды деп атайды.

Енді $z = F(u, \vartheta)$ функциясындағы u және ϑ-лар тәуелсіз айнымалы x және y-тердің функциясы болсын:

$$u = \varphi(x, y), \quad \vartheta = \psi(x, y).$$

Бұл жағдайда z тәуелсіз айнымалы x және y-тердің күрделі функциясы болады (u мен ϑ - аралық аргументтер).(3) формуланы қолданып $\frac{\partial z}{\partial x}$ және

$\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларды табамыз. Ол үшін (3) формуладағы $\frac{dz}{dt}, \frac{dx}{dt}$ және $\frac{dy}{dt}$-лардың орнына $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}$ және $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ дербес туындыларды аламыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \tag{5}$$

Осыған үқсас $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туынды да табылады:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y}. \tag{6}$$

Енді айқындалмаған функцияны дифференциалдау ережесін қарастырайық.

Кез келген

$$F(x,y) = 0 \tag{7}$$

теңдеуі айқындалмаған функцияны анықтай бермейтіндігі жөнінде «Анализге кіріспе» бөлімінде нақты мысалдармен талдаған едік. $F(x,y)$ функциясы қандай шарттарды қанағаттандырғанда (7) теңдеуі жалғыз айқындалмаған функцияны анықтайды деген заңды сұраққа келесі теорема жауап береді.

Теорема. Егер $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$ және $F'_y(x,y)$ функциялары қандай да бір $M_0(x_0,y_0)$ нүктенің аймағында анықталған және үзіліссіз, ал осы нүктеде $F(x_0,y_0)=0$, $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$ болса, онда (7) теңдеу x_0-дің аймағында үзіліссіз, дифференциалданатын жалғыз $y=y(x)$ айқындалмаған функцияны анықтайды және y-тен x бойынша алынған туынды төмендегі формула арқылы табылады

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{8}$$

Дәлелдеуі. $F(x,y)$ функциясында $y=y(x)$ болғандықтан (4) формуланы қолданамыз

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

(7) бойынша $F(x,y)$ функциясы нөлге тепе-тең болғандықтан оның толық туындысы да нөлге тең болады, яғни

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Осыдан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

(8) теңдік дәлелденді.

Енді $F(x,y,z)=0$ теңдеуін қарастырайық. Егер $\frac{\partial z}{\partial x}$ дербес туындысын табуымыз керек болса, онда y-ті тұрақты деп есептейміз. Бұл жағдайда (8) формуланы қолдануға болады, яғни

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \qquad (9)$$

Осы сияқты

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \qquad (10)$$

(9) және (10) теңдіктерде $F'_z(x,y,z)\neq 0$ деп ұйғарылады.

§13.7 Жоғары ретті туындылар

$z=f(x,y)$ екі айнымалының функциясы берілсін. $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$ дербес туындылар жалпы жағдайда x және y айнымалыларының функциялары болуы мүмкін. Сондықтан, олардың да дербес туындылары болуы мүмкін. Бұл жағдайда $z=f(x,y)$ функциясының екінші ретті дербес туындылары төртеу болады, яғни

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Бұл арада мынандай заңды сұрақ туады. Дифференциалдау нәтижесі дифференциалдау ретіне тәуелді ме? Басқаша айтқанда $f''_{xy}(x,y)$ және $f''_{yx}(x,y)$ туындылары озара тең бе, жоқ па?

Бұл сұраққа төмендегі теорема жауап береді.

Теорема. Егер $z=f(x,y)$ функциясы және оның $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ дербес туындылары $M(x,y)$ нүктесінде және оның қандай да бір аймағында анықталған және үзіліссіз болса, онда бұл нүктеде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

Дәлелдеуін тізімде келтірілген әдебиеттерден оқып алуды студенттердің өздеріне ұсынамыз.

Екінші ретті дербес туындыларды дифференциалдау арқылы үшінші ретті дербес туындыларды аламыз, олардың саны 8-ге тең, яғни

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Осылайша $(n-1)$ -ретті дербес туындыларды дифференциалдау арқылы n-ретті туындыларды алуға болады.

§13.8 Екі айнымалының функциясы үшін Тейлор формуласы

$z = f(x,y)$ функциясы және оның $(n+1)$-ретке дейінгі дербес туындылары қандайда бір $M(a,b)$ нүктенің аймағында үзіліссіз болсын. Онда бір айнымалының функциясы үшін Тейлор формуласына ұқсас екі айнымалының функциясын $(x-a)$ мен $(y-b)$ айырмаларының дәрежелері және қандайда бір қалдық мүшенің қосындысынан тұратын n-ретті көпмүшелік түрінде өрнектеуге болады. Осы айтылғандарды $n=2$ болған жағдайы үшін көрсетейік. Бұл жағдайда

$$f(x,y) = A_0 + D(x-a) + E(y-b) + \frac{1}{2!}\left[A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2\right] + R_2\Big], \quad (1)$$

болады, мұндағы A_0, D, E, A, B, C-лар x және y-тен тәуелсіз коэффициенттер, ал R_2-қалдық мүше.

$f(x,y)$ функциясында x-ті тұрақты десек, онда бір ғана y-тің функциясы үшін Тейлор формуласы төмендегідей болады

$$f(x,y) = f(x,b) + \frac{y-b}{1}\cdot f'_y(x,b) + \frac{(y-b)^2}{1\cdot 2} f''_{yy}(x,b) + \frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''_{yyy}(x,\eta_1), \quad (2)$$

мұндағы $\eta_1 = b + \theta_1(y-b)$, $0<\theta_1<1$. $f(x,b), f'_y(x,b), f''_{yy}(x,b)$ функцияларды $(x-a)$-ның дәрежелері бойынша Тейлор формуласына жіктейміз.

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{x-a}{1}\cdot f'_x(a,b) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''_{xx}(a,b) + \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1,b), \quad (3)$$

мұндағы $\xi_1 = x + \theta_2(x-a)$, $0<\theta_2<1$;

$$f'_y(x,b) = f'_y(a,b) + \frac{x-a}{1}\cdot f''_{yx}(a,b) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2,b), \quad (4)$$

мұндағы $\xi_2 = x + \theta_3(x-a)$, $0<\theta_3<1$;

$$f''_{yy}(x,b) = f''_{yy}(a,b) + \frac{x-a}{1} f'''_{yyx}(\xi_3,b), \quad (5)$$

мұндағы $\xi_3 = x + \theta_4(x-a)$, $0<\theta_4<1$;

(3),(4),(5) өрнектерді (2) формулаға қоямыз.

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{x-a}{1}\cdot f'_x(a,b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''_{xx}(a,b)+\frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{xxx}(\xi_1,b)+$$

$$+\frac{y-b}{1}\cdot\left[f'(x,b)+\frac{x-a}{1}\cdot f''_{yx}(a,b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f'''_{yxx}(\xi_2,b)\right]+$$

$$+\frac{(y-b)^2}{1\cdot 2}\cdot\left[f''_{yy}(a,b)\frac{x-a}{1}\cdot f'''_{yyx}(\xi_3,b)\right]+\frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{yyy}(x,\eta_1).$$

Соңғы теңдіктің қосылғыштар (1) формулаға ұқсас орналастырамыз:

$$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)f'_x(a,b)+(y-b)f'_y(a,b)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-a)^2 f''_{xx}+2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a,b)+(y-b)^2 f''_{yy}(a,b)\right]+R_2 \qquad (6)$$

(6) формула $n=2$ жағдайы үшін Тейлор формуласы деп аталады.

Мұндағы

$$R_2=\left[\frac{1}{3!}(x-a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1,b)+3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxy}(\xi_2,b)+3(x-a)(y-b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3,b)+\right.$$

$$\left.+(y-b)^3 f'''_{yyy}(a,\eta_1)\right]$$ қалдық мүше деп аталады. n-нің кез келген мәні үшін Тейлор формуласын осылайша анықтауға болады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Күрделі функцияның толық туындысын табу формуласын жазыңыз.
2. Күрделі функцияның дербес туындыларының формулаларын жазыңыз.
3. Қандай шарттар орындалғанда жалғыз айқындалмаған функция анықталады?
4. Айқындалмаған функцияның туындысын табу формуласын жазыңыз.
5. Екінші және үшінші ретті дербес туындылар қалай табылады?
6. Екі айнымалының функциясы үшін Тейлор формуласын жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $z=y^x,\ x=t^2;\ y=\cos t$ функциясы берілген. z-тен t бойынша алынған толық туындыны табыңыз.

Шешуі. (3) формуланы қолданамыз.

$$\frac{dz}{dt}=\left(y^x\right)'_x\cdot\frac{dx}{dt}+\left(y^x\right)'_y\cdot\frac{dy}{dt}=y^x\cdot\ln y\cdot\left(t^2\right)'+xy^{x-1}\cdot(\cos t)'=$$

$$=y^x\ln y\cdot 2t-xy^{x-1}\sin t=y^x\left(2t\ln|\cos t|-t^2 tgt\right)=\cos^{t^2}t\cdot\left(2\ln|\cos t|-ttgt\right)\cdot t.$$

2-мысал. $z=arctg\frac{u}{v},\ u=x+y,\ v=x-y$ берілген.

$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-y}{x^2+y^2}$ теңдіктің дұрыстығын тексеріңіз.

Шешуі. (5), (6) формулаларды қолданамыз.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1;\ \frac{\partial u}{\partial y}=1;\ \frac{\partial v}{\partial x}=1;\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot\frac{1}{v}=\frac{v}{u^2+v^2};\ \frac{\partial z}{\partial g}=\frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)=-\frac{u}{u^2+v^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{g}{u^2+v^2}-\frac{u}{u^2+v^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{v}{u^2+v^2}+\frac{u}{u^2+v^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2v}{u^2+v^2}=\frac{2(x-y)}{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}=\frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

Сонымен теңдік дұрыс екен.

3-мысал. $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ айқындалмаған функцияның $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ теңдікті қанағаттандыратынын тексеріңіз.

Шешуі. Мұнда $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z.$ Дербес туындысын табамыз.

$$F'_x(x,y,z)=2\cos(x+2y-3z)-1$$
$$F'_y(x,y,z)=2\cos(x+2y-3z)\cdot 2-2$$
$$F'_z(x,y,z)=2\cos(x+2y-3z)\cdot(-3)+3$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{-3(2\cos(x+2y-3z)-1)}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{2(2\cos(x+2y-3z)-1)}{-3(2\cos(x+2y-3z)-1)}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1.$$

Демек, берілген теңдікті қанағаттандырады екен.

4-мысал. $z=\cos\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$ функциясының $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z=-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 z$ теңдікті қанағаттандыратынын тексеріңіз.

Шешуі. Бірінші және екінші ретті туындыларын табамыз.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\cdot\frac{1}{a};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\sin\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\cdot\frac{1}{b};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\cos\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\cdot\frac{1}{a^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\cdot\frac{1}{ab};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\cos\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\cdot\frac{1}{b^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\cos\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)=-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 z.$$

Демек, берілген функция берілген теңдікті қанағаттандырады екен.

5-мысал. $f(x,y)=e^x\sin y$ функциясын $(0;0)$ нүктенің аймағында Тейлор формуласы бойынша жіктеніз ($n=3$ болсын).

Шешуі. $n=3$ болған жағдай үшін $O(0,0)$ нүктенің аймағында Тейлор формуласы төмендегіше болады:

$$f(x,y)=f(0,0)+xf'_x(0,0)+yf'_y(0,0)+\frac{1}{2!}\left(x^2f''_{xx}(0,0)+2xyf''_{xy}(0,0)+y^2f''_{yy}(0,0)\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(x^3f'''_{xxx}(0,0)+3x^2yf'''_{xxy}(0,0)+3xy^2f'''_{xyy}+y^3f'''_{yyy}(0,0)\right).$$

Берілген функциядан 1,2,3-ретті дербес туындыларды алып, олардағы x және y-тердің орнына $(0,0)$-ді қойсақ төмендегілер шығады:

$$f(0,0)=0, f'_x(0,0)=f''_{xx}(0,0)=f''_{yy}(0,0)=f'''_{xxx}(0,0)=f'''_{xxy}(0,0)=0;$$

$$f'_y(0,0)=f'''_{xxy}(0,0)=f'''_{xyy}(0,0)=1;\quad f'''_{yyy}(0,0)=-1;$$

Осы мәндерді Тейлор формуласына қойып, берілген функцияның төмендегі жіктелуін аламыз:

$$e^x\sin y=y+xy+\frac{1}{3!}\left(3x^2y-y^3\right).$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $z=\ln\left(1-y^4\right)$, $y=\sqrt{\sin x}$ функциясы берілген. $\frac{dz}{dx}$ -ті табыңыз.

Жауабы: $\frac{dz}{dx}=-2tgx$.

2. $z=\frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}$, $u=tg^2x$, $v=ctg^2x$ функциясы берілген. $\frac{dz}{dx}$ - ті табыңыз.

Жауабы: $\frac{dz}{dx}=\frac{4}{\sin 2x}$.

3. $z=\arcsin(u+v)$, $u=\cos\alpha\cdot\sin x$, $v=\sin\alpha\cdot\cos x$ берілген. $\frac{dz}{dx}$-ті табыңыз.

Жауабы: $\frac{dz}{dx}=\pm 1$.

4. $z=\frac{x^2}{y}$, $x=u-2v$, $y=v+2u$ функциясы берілген. $\frac{dz}{dx}$ және $\frac{dz}{dv}$ - ларды табыңыз.

Жауабы: $\frac{dz}{du}=\frac{2x}{y}\left(1-\frac{x}{y}\right)$; $\frac{dz}{dv}=-\frac{x}{y}\left(x+\frac{x}{y}\right)$.

5. $y^x=x^y$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

Жауабы: $\frac{dy}{dx}=\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{xy^{x-1}-x^y\ln x}$.

6. $u - vtgv = 0$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

Жауабы: $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\cos^2 av}{av}$; $\frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{\sin 2av}{2av}$.

7. $z = arctg(2x - y)$ функциясының $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

8. $z = 2\cos^2\left(x - \frac{t}{2}\right)$ функциясының $2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = 0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

9. $z = e^{xy}$ функциясының $y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

10. $f(x,y) = e^{x-y}$ функциясын (1,-1) нүктенің аймағында Тейлор формуласы бойынша жіктеңіз ($n = 3$ деп алыңыз).

Жауабы: $1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!}$.

§13.9 Бағыт бойынша алынған туынды. Градиент

$z = f(x,y)$ функциясының анықталу обылысында жататын $M_0(x,y)$ нүктесін және бағыттаушы косинустары $\cos\alpha, \cos\beta = \sin\alpha$ болған l түзуін қарастырайық. l бағыты бойынша $M_0(x,y)$ нүктесі $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ нүктесіне жылжыса, онда $z = f(x,y)$ функциясы $\Delta_l Z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ өсімшесін алады. Бұл өсімше $f(x,y)$ функциясының l бағыт бойынша өсімшесі деп аталады.

$$\Delta x = \Delta l \cos\alpha, \ \Delta y = \Delta l \cos\beta \qquad (1)$$

болғандықтан

$$\Delta_l z = f(x + \Delta l\cos\alpha, y + \Delta l\cos\beta) - f(x,y) \qquad (2)$$

1-анықтама. $z = f(x,y)$ функциясының l бағыт бойынша өсімшесі $\Delta_l z$ - тің Δl шамасына қатынасының Δl нолге ұмтылғандағы шегі (егер ол бар болса), яғни $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta_l z}{\Delta l}$ $z = f(x,y)$ функциясының l бағыты бойынша алынған туындысы деп аталады және ол $\frac{\partial z}{\partial l}$ немесе z'_l арқылы белгіленеді.

$z'_l = \frac{\partial z}{\partial l}$ туындысы функцияның l бағыты бойыншы өзгеру жылдамдығын сипаттайды. Бұрын карастырылған $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындылары $z = f(x,y)$ функциясының Ox және Oy өстеріне параллель бағыттары бойынша туындылары болады.

$\Delta_l z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ жуық теңдігін және (1) теңдіктерді ескерсек

$$\Delta_l z \approx \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta\right)\Delta l.$$

Осыдан $\Delta x \to 0$ және $\Delta y \to 0$ шекке көшсек

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta \qquad (3)$$

теңдігі шығады, (3) формула $z = f(x,y)$ функциясының l бағыты бойынша алынған туындысы деп аталады.

1-мысал. $z = x^2 + y^2$ функциясының $\bar{l} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$ бағыты бойынша алынған туындысының M(1;1) нүктедегі мәнін табыңыз.

Шешуі. $\bar{l}$ -дің бағыттаушы косинустарын табамыз.

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4}{5};\ \cos\beta = \frac{3}{5}.$$

(3) формула бойынша

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{4}{5} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{3}{5} = 2x\cdot\frac{4}{5} + 2y\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{5}(4x+3y).$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{2}{5}(4\cdot 1 + 3\cdot 1) = \frac{14}{5}.$$

2-анықтама. Координаталары $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ болатын ∇z вектор $z = f(x,y)$ функциясының градиенті деп аталады да, былай жазылады

$$grad z = \nabla z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}.$$

Теорема. $z = f(x,y)$ функциясынан $\bar{l}$ бағыты бойынша алынған туынды онын градиентінің l бағытындағы проекциясына тең.

Дәлелдеу. $\bar{l} = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta$, ∇z векторымен $\bar{l}$ векторының скаляр көбейтіндісін табамыз.

$$\nabla z \cdot l = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\beta, \text{ немесе } \nabla z \cdot l = \frac{\partial z}{\partial l}.$$

∇z пен $\bar{l}$ арасындағы бұрышты φ мен белгілесек:

$$|\nabla z| \cdot |\vec{l}| \cos\varphi = |\nabla z| \cos\varphi = \frac{\partial z}{\partial l};$$

немесе

$$Пр_l \nabla z = \frac{\partial z}{\partial l}.$$

Егер векторлар бірдей бағытталса, онда скалярлық көбейтінді ең үлкен мән қабылдайтыны белгілі. Сондықтан функцияның берілген нүктедегі градиентінің бағыты оның осы нүктедегі өзгеру жылдамдығының ең үлкен мәніне тең.

$z = f(x, y)$ функциясының градиентіне перпендикуляр бағыт бойынша алынған туынды нөлге тең.

Егер дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясының $M(x, y)$ нүктесіндегі градиентінің модулі нөлге тең болмаса, онда ол осы нүкте арқылы өтетін деңгей сызығына перпендикуляр болады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. $f(x, y)$ функциясының l бағыты бойынша алынған туындысының анықтамасын беріңіз.
2. $f(x, y)$ функциясының l бағыты бойынша алынған туындысының формуласын жазыңыз.
3. $f(x, y)$ функциясы градиентінің анықтамасын беріңіз.
4. $f(x, y)$ функциясы градиентімен оның l бағыты бойынша алынған туындысының арасындағы байланысты анықтайтын теореманы тұжырымдаңыз және оны дәлелдеңіз.
5. Градиенттің қасиеттерін баяндаңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $z = x^2 - 2xy + y^2$ функциясының $\vec{MN}$ бағыты бойынша алынған туындысы және ол туындының M нүктесіндегі мәнін табыңыз. Мұндағы $M(1,2)$, ал $N(2,4)$

Шешуі. Алдымен $\overrightarrow{MN}$ векторын анықталық, яғни

$$\overrightarrow{MN} = (2-1)\vec{i} + (4-2)\vec{j} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$\overrightarrow{MN}$ векторының бағыттаушы косинустарын табалық

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(3) формула бойынша:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = (2x - 2y) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + (2y - 2x) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - 2y + 4y - 4x)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}(y - x);$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

2-мысал. $z = x^2 + 2y^2 + 3$ функциясының $M(2;-1)$ нүктесіндегі градиентін табыңыз.

Шешуі.

$$grad z = z'_x \bar{i} + z'_y \bar{j} = 2x\bar{i} + 4y\bar{j}.$$

$$grad z\Big|_{\substack{x=2\\y=-1}} = 2\cdot 2\bar{i} + 4\cdot(-1)\bar{j} = 4(\bar{i} - \bar{j}).$$

3-мысал. $z = x^2 y - 3y^3$ функциясының $M(2;1)$ нүктесіндегі өсу жылдамдығының ең үлкен мәнін табыңыз.

Шешуі.Функцияның өсуінің ең үлкен жылдамдығы оның градиентінің модулінге тең. Олай болса

$$grad z = 2xy\bar{i} + \left(x^2 - 9y^2\right)\bar{j}.\ grad z\Big|_{\substack{x=2\\y=1}} = 4\bar{i} - 5\bar{j},$$

$$|grad z|_{\substack{x=2\\y=1}} = \sqrt{4^2 + (-5^2)} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}.$$

4-мысал. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ функциясының градиентінің бағыты бойынша алынған туындысының $M(3,4)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешуі. Мұнда l бағыты функция градиентінің $M(3,4)$ нүктесіндегі бағытымен беттеседі. $grad z = \left[\frac{2x}{x^2+y^2}\bar{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\bar{j}\right]_M = \frac{6}{25}\bar{i} + \frac{8}{25}\bar{j}.$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |grad z| = \sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^2} = \frac{2}{5}.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $z = x^2 - xy - 2y^2$ функциясының Ox өсінің оң бағытымен 60° бұрыш жасайтын бағыт бойынша туындысының $M(1,2)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Жауабы: $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

2. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ функциясының бірінші координаттық бұрыш биссектрисасы бағыты бойынша туындысының $M(1,1)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Жауабы: 1.

3. $z = \sqrt{x^2 - y^3 - 3xy}$ функциясы градиентінің $M(5.3)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{7}}\left(\frac{\bar{i}}{2} + 4\bar{j}\right)$.

4. $z=\sqrt{x^2-y^2}$ функциясы градиентінің $M(5,3)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Жауабы: $\frac{5}{4}\bar{i}-\frac{3}{4}\bar{j}$.

5. $z=\ln\frac{y}{x}$ функциясының $M(0,5;0,25)$ және $N(1;1)$ нүктелердегі градиенттері арасындағы бұрышты анықтаңыз.

Жауабы: $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

6. $U=xyz$ функциясы градиентінің $M(2;1;1)$ нүктесіндегі бағытын және мәнін табыңыз.

Жауабы: $|gradU|_M=3;\ \cos\alpha=\frac{1}{3},\ \cos\beta=\cos\gamma=\frac{2}{3}$.

§13.10 Екі айнымалы функцияның экстремумы

$z=f(x,y)$ функциясы берілсін.

1-анықтама. Егер $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің қандай да бір аймағынан алынған барлық (x,y) нүктелері үшін $f(x_0,y_0)>f(x,y)\ [f(x_0,y_0)<f(x,y)]$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде төңіректік максимумға (минимумға) ие деп аталады.

$z=f(x,y)$ функциясының төңіректік максимумын және минимумын оның төңіректік экстремумы деп атайды.

1-теорема. Егер дифференциалданатын $z=f(x,y)$ функциясының $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде төңіректік экстремумы болса, онда осы нүктеде функцияның дербес туындылары нөлге тең болуы $\left(f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0\right)$ немесе дербес туындылары болмауы қажет.

Дәлелдеуі. $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде функцияның төңіректік максимумы болсын делік. $z=f(x,y)$ функциясында $y=y_0$ деп, оны x-кс тәуелді бір айнымалының функциясы ретінде қарастырамыз. Теореманың шарты бойынша $f(x,y_0)$ функциясының $x=x_0$ нүктесінде максимумы болғандықтан

$$\left.\frac{\partial f(x,y_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0.$$

Осы сияқты $f'_y(x_0,y_0)=0$ теңдігі де дәлелденеді.

Функцияның төңіректік экстремумының қажеттілік шарты орындалатын нүктелер оның кризистік нүктелері деп аталады.

Екі айнымалының функциясын оның кризистік нүктелерінде зерттеу үшін экстремумның жеткілікті шарты деп аталатын төмендегі теореманы тұжырымдалық.

2-теорема. $z = f(x,y)$ функциясы үшін мынадай шарттар орындалсын: а) $f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің қандайда бір аймағында анықталған; ә) $f(x,y)$ функциясы үшін $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі кризистік нүкте болсын; б) $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің аймағында функцияның үзіліссіз екінші ретті дербес туындылары бар болсын.

Егер $\Delta = f_{xx}''(x_0,y_0)\cdot f_{yy}''(x_0,y_0) - \left(f_{xy}''(x_0,y_0)\right)^2 > 0$ және $f_{xx}''(x_0,y_0) < 0$ болса, онда $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде $f(x,y)$ функциясының тоңіректік максимумы, ал $\Delta > 0$ және $f_{xx}''(x_0,y_0) > 0$ болса, онда $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде $f(x,y)$ функциясының тоңіректік минимумы болады. Ал егер $\Delta < 0$ болса, онда $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде тоңіректік экстремум болмайды.

Бұл теореманың дәлелдеуін тізімде келтірілген оқулықтардан оқып алуды студенттердің өздеріне ұсынамыз.

Сонымен, $z = f(x,y)$ функцияны тоңіректік экстремумға зерттеу мынадай алгоритм бойынша жүргізіледі:

1. $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындылары табылады;
2. $\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 0\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 0\end{aligned}\right\}$ жүйені шешіп функцияның кризистік нүктелері анықталады.
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ екінші ретті дербес туындылары табылады;
4. Екінші ретті дербес туындылардың кризистік нүктелердегі мәндері есептеледі.
5. Δ-ның және z_{xx}''-тың таңбалары бойынша 2-теоремаға негізделіп тұжырым жасалады.

Мысалы: $z = x^3 + y^3 - 3xy$ функциясын зерттейік.

1. $z_x' = 3x^2 - 3y$, $z_y' = 3y^2 - 3x$;
2. $\begin{cases}3x^2 - 3y = 0,\\ 3y^2 - 3x = 0\end{cases}$ жүйені шешіп $M_0(0;0), M_1(1;1)$ нүктелерді табамыз. $(0;0)$-дің орнына $M_0(0;0)$, ал $(1;1)$-дің орнына $M_1(1;1)$.
3. $z_{xx}'' = 6x$, $z_{yy}'' = 6y$, $z_{xy}'' = -3$;
4. $z_{xx}''(0,0) = 0$, $z_{xx}''(0.0) = 0$, $z_{xy}''(0,0) = -3$. $z_{xx}''(1.1) = 6$, $z_{xy}''(1,1) = 6$, $z_{xy}''(1,1) = -3$.
5. $\Delta_1 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ болғандықтан (0.0) нүктеде функцияның тоңіректік экстремумы жоқ.

$\Delta_2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$; $z_{xx}''(1,1) = 6 > 0$ болғандықтан $(1,1)$ нүктеде функцияның тоңіректік минимумы болады.

$z = f(x,y)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін оның анықталу облысының ішіндегі кризистік нүктелері табылады. Одан кейін функцияның облысты қоршап тұрған сызықтардағы (облыстың шекарасы) ең үлкен және ең кіші мәндерін тауып оларды кризистік нүктелердегі функцияның мәндерімен салыстыру арқылы функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері анықталады.

§13.11 Шартты экстремум

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табуға келтірілетін көптеген практикалық есептерді қарастырғанда оның аргументтері толық тәуелсіз болмай, басқа бір қосымша шарттармен байланыста болуы (мысалы, қандай да бір теңдеуді қанағаттандыруы) мүмкін болған жағдай жиі ұшырасады.

$z = f(x,y)$ функциясының аргументтері $\varphi(x,y) = c$ теңдеуді қанағаттанды-ратын төңіректік экстремумдарын табуды қарастырайық. $\varphi(x,y) = c$ байланыс теңдеуі деп аталады.

Байланыс теңдеуінен y-ті x арқылы өрнектеп, одан кейін y-тің мәнін $z = f(x,y)$-тегі y-тің орнына қойсақ, онда берілген функциядан шартты экстремумды табу бір аргументті функцияның төңіректік экстремумын табуға келтіріледі. Жалпы жағдайда байланыс теңдеуіндегі y-ті x арқылы айқын өрнектей алмауымыз да мүмкін. Онда келесі әдіс қолданылады.

Лагранж функциясы деп аталатын мынадай функция құрылады:

$$L(x,y,\lambda) = \lambda[\varphi(x,y) - c] + f(x,y)$$

Мұндағы, λ Лагранж көбейткіші деп аталады..

$z = f(x,y)$функциясының $\varphi(x,y) = c$ шартты қанағаттандыратын төңіректік экстремумын табу үшін

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0, \\ L'_y = f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0, \\ L'_\lambda = \varphi(x,y) - c = 0. \end{cases}$$

жүйені шешіп (x,y) кризистік нүктені және λ-ны табамыз. Мұндағы λ– аралық байланыстырушы (көмекші) шама болып, ол кейінгі есептеулерде қатыспайды.

Соңғы жүйе екі айнымалының функциясының шартты экстремумын табу үшін қажеттілік шарт болады. Нақты есептің мағынасына сәйкес, табылған кризистік нүктеде функция сипаты тұжырымдалады.

§13.12 Ең кіші квадрат әдісі

x пен y айнымалы шамалар арасындағы тәуелділікті анықтау үшін жүргізілген тәжірибенің нәтижелері мына кесте түрінде берілсін:

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Осы нәтижелерді аналитикалық түрде көрсететін формулаларды анықтайық. Айталық, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$,..., $M_n(x_n, y_n)$ нүктелері қандай да бір түзудің манайында орналасқан болсын делік. Бұл x пен y арасындағы тәуелділік $Y = ax + b$ түзуіне жақын деген сөз. Онда a мен b коэффициенттерді ұтымды табу арқылы берілген нүктелерге жақын өтетін түзуді анықтау қажет болады. Ол үшін берілген нүктелердің түзуден ауытқуы деп аталатын $Y_i - y_i$ шамаларды табамыз.

2-анықтама. $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2$ шамага ең кіші мән беретін a және b шамаларын табу жолы ең кіші квадрат әдісі деп аталады.

x_i, y_i–лер тұрақты болғандығы себепті 2–анықтамадағы қосынды a мен b-ның функциясы болады, яғни

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 = F(a,b).$$

a мен b-ны табу үшін екі айнымалының функциясының төңіректік экстремумын табудың қажеттілік шартын пайдаланамыз:

$$\begin{cases} F'_a = 0, \\ F'_b = 0. \end{cases}$$

Сонда a мен b-ларды табу үшін мынадай жүйе шығады:

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i + bn - \sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases} \quad (1)$$

Жүйеден табылған a мен b-ның мәндерінде $F(a,b)$ функциясының минимумы болатындығын екінші теоремаға негізделіп дәлелдеу қиын емес.

Егер тәжірибенің нәтижелеріне сәйкес нүктелер қандай да бір қисықтың маңайына орналасқан болса, онда жуық формуланы $y = ax^2 + bx + c$ түрінде іздейміз. a, b және c–ларды табу үшін

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 = F(a,b,c)$$ функциясын құрамыз.

Функцияның кризистік нүктелері $\begin{cases} F'_a = 0, \\ F'_b = 0, \\ F'_c = 0 \end{cases}$ жүйеден анықталады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Төңіректік максимумның (минимумның) анықтамасын беріңіз.
2. Төңіректік экстремумға ие болудың қажеттілік шартын жазыңыз.
3. Функцияның кризистік нүктелері деп қандай нүктелерді айтады?

4. Экстремумы бар болудың жеткілікті шартын жазыңыз.

5. $z = f(x,y)$ функциясын төңіректік экстремумға зерттеудің алгоритмін жазыңыз.

6. $z = f(x,y)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндері қалай табылады?

7. Шартты экстремум деген не?

8. Шартты экстремумды табу үшін құрылған Лагранж функциясын жазыңыз.

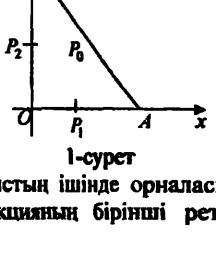
9. Шартты экстремум қалай табылады?

10. Ең кіші квадраттар әдісінің анықтамасын беріңіз.

11. Ең кіші квадраттар әдісі қандай есептерді шешуде қолданылады?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $x + y - 4 = 0$ түзуімен және координата өстерімен қоршалған тұйық үшбұрыштағы $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз (1-сурет).



1-сурет

Шешуі. 1) берілген облыстың ішінде орналасқан кризистік нүктелерді анықтаймыз. Ол үшін функцияның бірінші ретті дербес туындыларын табамыз, яғни,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 8;$$

Оларды нөлге теңестіріп жүйені шешеміз.

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 4y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1, \\ y = 2. \end{array}$$

$P_0(1,2)$ нүктесі берілген облыста жатады. Функцияның P_0 нүктесіндегі мәнін есептейміз

$$f(1,2) = 1 + 2 \cdot 4 - 2 - 16 + 5 = -4.$$

2) функцияның облыстың шекараларындағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табамыз. OA кесіндісінде y=0, ал $0 \le x \le 4$; $y = 0$ болса, онда $z(x) = x^2 - 2x + 5$. $z(x)$-тің $[0,4]$-дегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табамыз

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2;\ 2x - 2 = 0;\ x = 1;\ P_1(1;0)$$

$$z(1,0) = 1 - 2 + 5 = 4.$$

$[0,4]$ аралықтың шеткі нүктелерінде $z(x,0)$ функциясының мәндерін есептейміз.

$$z(0;0)=5;\ z(4;0)=13.$$

OB кесіндісінде $x=0$, ал $0\le y\le 4$. Егер $x=0$ болса, онда $z(0,y)=2y^2-8y+5$; $z(0,y)$ –тің $[0,4]$дегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табамыз

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4y-8:\ 4y-8=0:\ y=2;\ P_2(0;2)$$

$$z(0;2)=-3.$$

Функцияның B нүктедегі мәнін есептейік

$$z(0;4)=5.$$

Енді AB кесіндісін карастыралық. AB–ның теңдеуі $y=4-x$, оны берілген функциядағы у-тің орнына коямыз

$$z=x^2+2(4-x)^2-2x-8(4-x)+5=3x^2-10x+5.$$

Бұл функцияның $[0,4]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табамыз

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x-10;\ 6x-10=0;\ x=\frac{5}{3};$$

$x+y-4=0$ теңдеуінен у-ті анықтаймыз, яғни $y=\frac{7}{3}$. Сонымен

$$P_3\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right),\ z\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)=-\frac{10}{3}.$$

3) Облыстың ішінде және шекараларында орналасқан кризистік нүктелердегі функцияның табылған мәндерін салыстырып оның ең үлкен мәні $z(4,0)=13$, ал ең кіші мәні $z(1,2)=-4$ болатынын анықтаймыз.

2–мысал. $f(x,y)=xy$ функциясының $x^2+y^2=2$ шартты қанағаттандыратын шартты экстремумын табыңыз.

Шешуі. Лагранж функциясын құрамыз.

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda[\varphi(x,y)-c]=xy+\lambda(x^2+y^2-2)$$

Шартты экстремумының қажеттілік шарттары мынадай:

$$\begin{cases}L'_x=y+2\lambda x=0,\\ L'_y=x+2\lambda y=0,\\ L'_\lambda=x^2+y^2-2=0.\end{cases}$$

Мұнан $y=-2\lambda x$ және $x(1-4\lambda^2)=0$–ларды табамыз. Соңғы екі теңдіктен шығатын $x=0$ және $y=0$ берілген есептің шешімі бола алмайды. Сондықтан тек қана $\lambda^2=\frac{1}{4}$ қалады. $\lambda_1=-\frac{1}{2}$; $\lambda_2=\frac{1}{2}$; $y=\pm x$.

Бұл мәндерді Лагранж функциясына коямыз. $\lambda=-\frac{1}{2}$:

$$L(x,y,\lambda)=xy-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2)=-\frac{1}{2}(x-y)^2+1.$$

Соңғы теңдіктің алдындағы минус максимумды қамтамасыз етеді. Ал, $\lambda=\frac{1}{2}$ десек:

$$L(x,y,\lambda)=xy+\frac{1}{2}(x^2+y^2-2)=\frac{1}{2}(x+y)^2-1.$$

Бұл жағдай минимумды қамтамасыз етеді.

3-мысал. Аргумент x-тің әр түрлі мәндерінде функцияның тәжірибеден алынған мәндері 1-кестеде берілген.

1-кесте

x	0	1	1,5	2,1	3
y	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2

Берілген нүктелер Oxy координаталар жүйесінде құрылса, онда x пен y арасындағы тәуелділік $y=ax+b$ сызықтық функциясына жуық екендігін байқауға болады.

Ең кіші квадраттар әдісін қолданып $y=ax+b$ түзудің a және b параметрлерін анықтаңыз.

Шешуі: Төмендегі кестені құрамыз.

2-кесте

	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	y_ϕ	Δy
1	0	2,9	0,00	0,00	2,86	0,04
2	1,0	6,3	1,00	6,30	6,28	0,02
3	1,5	7,9	2,25	11,85	7,99	0,09
4	2,1	10,0	4,41	21,00	10,04	0,04
5	3,0	13,2	9,00	39,60	13,12	0,08
$\sum$	7,6	40,3	16,66	78,75		

2-кестенің соңғы жолын қолданып (1) түрдегі жүйені құрамыз:

$$\begin{cases}16,66a+7,6b=78,75,\\7,6a+5b=40,3.\end{cases}$$

Осыдан $a=3,42$; $b=2,86$ болатынын табамыз. Сонымен,

$$y=3,42x+2,86. \qquad (2)$$

2-кестенің 6-бағанында (2) формула бойынша есептелген y–тің мәндері, ал 7–бағанда ауытқудың абсолют мәндері берілген.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $z=x^2-xy+2y^2+3x+2y+5$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

Жауабы: $z_{min}=1$.

2. $z=x^2-2xy+y^2+3x+2y+5$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

Жауабы: экстремумы жоқ.

3. $z=x^2-4xy+2y^2+3x+2y+5$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

Жауабы: экстремумы жок.

4. $z = x^2 + y^2 - 8x - 4y + 21$ функциясының $x = 1, y = 0, \quad x + y = 5$ сызықтармен қоршалған түйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәнін табыңыз.

5. $f(x, y) = x + y$ функциясының $9x^2 + 4y^2 = 36$ шартын қанағаттандыратын ең үлкен мәнін табыңыз.

6. (1;-0.9), (2;1,1), (3; 3,1), (4; 4,8), (5; 6.0) нүктелері берілген. Ең кіші квадраттар әдісінен пайдаланып берілген нүктелерге жақын түзуді табыңыз.

7. $(1;-0,9)$, $(2;1,1)$, $(3;3,1)$, $(4;4,8)$, $(5;6,0)$ нүктелері берілген.

Осы нүктелердің маңайынан өтетін $y = ax + b$ түзудің a және b коэффициенттерін табыңыз.

§13.13. Екі айнымалы функцияның экономикалық зерттеулерде қолданылуы

Экономикада жиі кездесетін екі айнымалы функциялардың кейбіреулерін мысалға келтірейік:

1. Тұтынушылардың сатып алатын тауарларының мөлшері Q оның бағасынан, тұтынушылардың табысынан, жаңа құрамынан тағы басқа факторлардан тәуелді. Мысалы, егер тауардың бағасын P-мен, тұтынушылардың табысын D-мен белгілесе, онда тұтынушылардың сатып алатын тауарларының мөлшері, немесе сұраным функциясы $Q = f(D, P)$ үшін мынадай қарапайым тәелділікті қарастыруға болады:

$$Q = \frac{D}{P}$$

2. Тұтынушылар теориясының іргелі ұғымдарының бірі-пайдалылық функциясы деп аталады да, ол $u(x, y)$ символымен белгіленеді. Мұндағы $x - X$ тауарының саны, ал $y - Y$ тауардың саны. $u(x, y)$ функциясы (x, y) жиынының пайдалылық өлшемін өрнектейді. Мысалы. $u(x, y) = a\ln(xy)$. немесе

$$u(x, y) = a(\ln x + \ln y).$$

3. Өндіріс функциясы деп қоғамдық өнімнің шамасын еңбек шығыны және қоғамдық қорлардың көлемімен байланыстыратын тәуелділікті айтады. Өндіріс функциясы өндіріс заңдылықтарын өрнектеудің негізі болып есептеледі. Өндіріс функциясының түрлері көп, біз кобірек кездесетіндерін келтірейік.

$$1)\ z = ax^{\alpha_1} \cdot y^{\alpha_2}$$

Бұл Кобба-Дуглас функциясы деп аталады. Мұндағы z-қоғамдық өнімнің шамасы, x-еңбек шығыны, y-өндіріс қорларының көлемі; a, a_1, a_2-оң мәнге ие параметрлер. $\alpha_1 < 1, \quad \alpha_2 < 1$ деп ұйғарылады.

2) $z = a\left(\beta_1 x^{-\rho} + \beta_2 y^{-\rho}\right)^{\frac{h}{\rho}}$.

Бұл қоғамдық қорларды тұрақты икемділікпен орналастыру функциясы деп аталатын өндірістік функция. Мұндағы $\alpha, \beta, h, \beta_1, \beta_2$-лер оң мәнді қабылдайтын параметрлер.

Изокванттар. Экономиканың көптеген есептері екі айнымалы функцияның деңгей сызықтары арқылы сипатталады. Мысалы, мынадай екі айнымалы өндіріс функциясын қарастырайық:

$$z = x^{a} y^{1-a}, \quad 0 < a < 1 \tag{1}$$

Мұндағы z-қоғамдық өндіріс өнімінің шамасы, x-еңбек шығыны, y-өндіріс қорларының көлемі (1) теңдеудегі z-ке тұрақты c мән береміз:

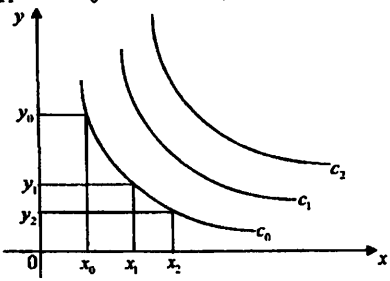
$$x^{a} y^{1-a} = c. \tag{2}$$

(2)-ні өндіріс функиясының деңгей сызығының теңдеуі деп атайды. Экономикалық зерттеулерде, (2)-нің графигі, яғни деңгей сызықтарын изокванттар немесе өндірістің талғаусыздық қисықтары деп атайды (1-сурет). Изокванттар келесі қасиеттерге ие.

1) Изокванттар бір-бірімен қиылыспайды;

2) өндіріс өнімі асқан сайын оған сәйкес изокванттар координаталар бас нүктесінен қашықтай береді.

Өндіріс өнімі тұрақты c_0-ге тең болса, онда



1-сурет

$x_0^{a} y_0^{1-a} = c_0$, $x_1^{a} y_1^{1-a} = c_0$, $x_2^{a} y_2^{1-a} = c_0$, т.с.с. теңдіктерді жазуға болады.

Басқаша айтқанда, өнім мөлшерін азайтпай отырып (мысал c_0 деңгейде), бір фактордың санын азайту арқылы екінші фактордың санын көбейтуге болады; немесе изокванттардың көмегімен өндіріс қорлары көлемінің кемшілігін еңбек шығыпымен толтыру арқылы (еңбек шығынының кемшілігін өндіріс қорлары көлемін арттыру арқылы) өндіріс өнімінің тұрақты мөлшерін сақтауға болады. (1-сурет).

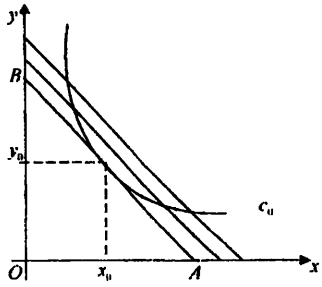
Өндіріс функциясы мен шығын функцияларының изокванттарын бірге зерттеу арқылы x және y факторларының тиімді мәнін таңдап алуға болады.

Мысалы, шығын функиясы сызықты тәуелділікпен берілсін

$$g(x, y) = p_1 x + p_2 y. \tag{3}$$

Мұндағы p_1, p_2-x және y факторларының бағасы.

(3)-функциясының деңгей сызығының теңдеуі келесі түрде болады:



2-сурет

$$p_1x + p_2y = d.$$

$x/A + y/B = 1$ теңдеуі (2)-суреттегі түзулерді анықтайды және олар шығын функциясының изокванттары деп аталады.

Мұнда. $A = d/p_1$, $B = d/p_2$.

(x_0, y_0)- (1)-өндіріс функциясымен (3) шығын функциясы изокванттарының жанасу нүктесі. Онда $x = x_0$, $y - y_0$-дер x және y факторлардың оптималдық мәндері болады. Ал A- сатып алынуға тиісті x фактордың максималдық мәні, B- сатып алынуға тиісті y факторлың максималдық мәні (2-сурет).

Енді пайдалылық функциясын қарастыралық:

$$u(x, y) = a \ln(xy)$$

Мұның изокванттары немесе талғаусыздық қисықтары келесі теңдеумен өрнектелінеді:

$$a \ln(xy) = c;$$

$$\ln(xy) = c/a;$$

$$xy = e^{c/a};$$

Соңғы теңдеумен анықталатын функцияның графигі де, яғни талғаусыздық қисықтары, 1,2 – суреттердегі қисықтарға ұқсас I-квадраттағы гипербола сызықтары болады.

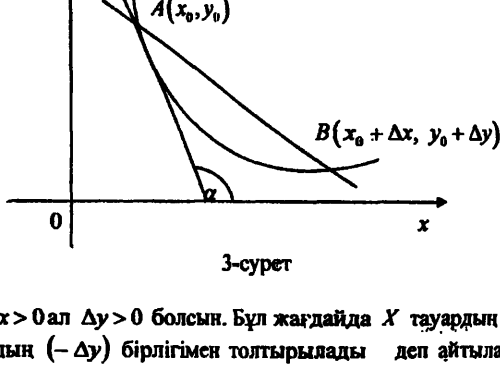
Өндіріс факторларының шектік өнімі ұғымдары

Дербес туынды ұғымы да экономикалық зерттеулерде кеңінен қолданылады. Бір айнымалының функциясы үшін қарастырылған барлық шектік ұғымдар екі айнымалының функциясы жағдайында дербес туындылардың көмегімен анықталады.

Пайдалылық функциясы $U(x, y)$- тің (x, y) жұбының пайдалылық өлшемін өрнектейтіні белгілі (мұндағы x- X тауардың мөлшері, y- Y тауардың мөлшері).

1-анықтама. y тұрақты болып, x- тің кішігірім өзгерісіндегі (x,y) жиынының сезімталдығы X тауардың шектік пайдалылығы деп аталады да ол u'_x дербес туынды ретінде анықталады.

Y тауардың шектік пайдалылығы да осылайша u'_y дербес туынды ретінде анықталады. Көбінесе пайдалылық функциясының деңгей сызықтары немесе талғаусыздық қисықтары кемімелі функция болып келеді. Сондықтан, бір деңгей сызығында орналасқан $A(x_0,y_0)$, $B(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ нүктелерінің Δx және Δy өсімшелерінің таңбалары әр түрлі болады. (3-сурет).



3-сурет

Мейлі, $\Delta x>0$ ал $\Delta y>0$ болсын. Бұл жағдайда X тауардың x бірлігінің орны Y тауардың $(-\Delta y)$ бірлігімен толтырылады деп айтылады, яғни B нүктеден A нүктеге көшу.

2-анықтама. X тауардың орнын Y тауармен толтырудың шектік нормасының $A(x_0,y_0)$ нүктедегі мәні деп $-\Delta y/\Delta x$ қатынастың B нүктесі A нүктесіне деңгей сызығының бойымен ұмтылғандағы шегін айтады.

Орнын толтырудың шектік нормасы MRS_{xy}- пен немесе $MRS_{xy}(A)$- мен белгіленеді.

Мейлі, l- $u(x,y)$ функциясының деңгей сызығының A нүктесіндегі жанамасы болсын. Егер B нүктесі қисық бойлап A нүктесіне ұмтылса, онда AB хордасы l жанамамен беттесетіндігі белгілі (3-сурет).

Сондықтан,

$$MRS_{xy}(A) = -tg\alpha. \tag{4}$$

Мұндағы α - l жанаманың ауытқу бұрышы. Талғаусыздық қисығының теңдеуі:

$$u(x,y) = c. \tag{5}$$

Қисықтың (x_0,y_0) нүктесіне жүргізілген жанамасының теңдеуі

$$y = y_0 + y'(x_0)(x-x_0) \tag{6}$$

екені белгілі. Онда (5) теңдеудегі айқындалмаған функцияның туындысын тауып (6) ға қойсақ l жанаманың келесі теңдеуіне ие боламыз:

$$y = y_0 - \frac{u'_x(A)}{u'_y(A)} \cdot (x - x_0). \qquad (7)$$

(7) – теңдеуден жанаманың бұрыштық коэффициенті $tg\alpha$ - ны анықтаймыз.

$$tg\alpha = -\frac{u'_x(A)}{u'_y(A)}.$$

(4) – теңдеу бойынша:

$$MRS_{xy}(A) = \frac{u'_x(A)}{u'_y(A)}. \qquad (8)$$

Сонымен мынадай теорема дәлелденеді.

Теорема. Бір тауардың орнын басқасымен толтырудың шектік нормасы олардың шектік пайдалылықтарының қатынасына тең.

Икемділік коэффициенттері.

Бір айнымалы функцияның икемділігі ұғымы енгізілген болатын. Сол сияқты екі айнымалы функцияның да икемділігі ұғымы енгізіледі.

3-анықтама. $z = f(x,y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі x бойынша икемділігі деп

$$E_{zx}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{x}$$

шекті айтады.

$z = f(x,y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі y бойынша икемділігі деп

$$E_{zy}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{z} : \frac{\Delta y}{y}$$

шекті айтады.

E_{zx} - z- тің x бойынша икемділік коэффициенті деп, ал E_{zy} - z- тің y бойынша икемділік коэффициенті деп те аталады.

Икемділіктің анықтамасынан мынадай формула шығады:

$$E_{zx}(x,y) = \frac{x}{z} \cdot z'_x = x(\ln z)'_x. \qquad (9)$$

$$E_{zy}(x,y) = \frac{y}{z} \cdot z'_y = y(\ln z)'_y. \qquad (10)$$

Мысалы, $z = ax^{a_1} y^{a_2}$ Кобба-Дуглас функциясы үшін $E_{zx}(x,y) = a_1$, $E_{zy}(x,y) = a_2$, яғни a_1 мен a_2 көрсеткіштері тек еңбек шығыны x немесе тек өндіріс қоры y шамалары 1% - ға өзгергенде өндіріс өнімі шамамен қанша пайызға өзгеретінін көрсетеді.

Енді $Q = f(D,P)$ сұраным функциясын қарастырайық.

Егер $\partial Q / \partial P < 0$ болса, онда бұл тауардың бағасы өскенде оған сұраным кемиді дегені. Бірақ, барлық уақыт ондай бола бермейді. Гиффен тауарлары деп аталатын тауарлар бар болып, олар үшін $\partial Q / \partial P > 0$ теңсіздігі де кейбір жағдайларда орындалады. Бұл, табысы кем тұтынушылардың тауар бағасы өсуімен оларды сатып алу мүмкіндігі жойылған жағдайларда, тауардың бағасы өссе де оған сұраным осуі мүмкін дегені. Табыс өссе кейбір тауарға сұраным өсіп, ал басқасына кемуі мүмкін.

$$\frac{\partial Q}{\partial P} < 0$$

теңсіздікті қанағаттандыратын тауарлар кем бағалы тауарлар деп аталады.

$$\frac{\partial Q}{\partial P} > 0$$

теңсіздікті қанағаттандыратын тауарлар бағалы тауарлар деп аталады.

Сұранымның табыс бойынша икемділігі:

$$E_{QD} = \frac{D}{Q}\frac{\partial Q}{\partial D},$$

бұл, табыс 1% өскенде тауарға сұранымның қанша пайызға өсетінін көрсетеді.

Сұранымның табыс бойынша икемділігіне байланысты бағалы тауарлар 3 топқа бөлінеді:

Бірінші топқа икемділігі кіші тауарлар – бұларға икемділігі 0 мен 1 - ден аралығында болған тауарлар жатады. Икемділігі 1-ге жақын тауарлар екінші топқа жатады. Ал үшінші топқа икемділігі 1 - ден жоғары тауарлар жатады.

Сұранымның баға бойынша икемділігі:

$$E_{QP} = \frac{P}{Q}\frac{\partial Q}{\partial P}.$$

Тауарға сұранымның икемділіктері табыс пен бағаға тәуелді болғандықтан, олар сұраным функциясының локальдық сипаттамалары болады.

Мейлі, z - өндіріс өнімінің мөлшері, x, y - өндіріс қорларының шығындары болып, $z = Q(x, y)$ дифференциалданатын функция болсын. x, y, z шамаларға сәйкес бірліктерінің тұрақты бағалары сәйкесінше P_x, P_y, P_z-термен берілсін делік. Онда түсім $R(x, y) = P_z Q(x, y)$ болып, ал пайда функциясы келесі түрде болады:

$$\pi(x, y) = R(x, y) - P_x x - P_y y$$

Мейлі, z_0 - өнімнің пайда бойынша оптималдық мәні болып, x_0, y_0 - сәйкес шығындарының мәндері болсын. Егер $M_0(x_0, y_0) - \pi(x, y)$ функциясының анықталу облысының ішкі нүктесі болса, онда $M_0 - \pi(x, y)$ функциясының локальдық максимум нүктесі болады. Локальдық экстремумның қажеттілік шарты бойынша:

$$\pi'_x(M_0) = R'_x(M_0) - P_x = 0,$$
$$\pi'_y(M_0) = R'_y(M_0) - P_y = 0,$$

немесе

$$R'_x(M_0) = P_x,$$
$$R'_y(M_0) = P_y.$$

Сонымен, пайданың локальдық максимум нүктесінде қордың әр түрі бойынша шектік түсім оның бағасымен дәл түседі екен.

Енді, өз өнімдерін екі тәуелсіз базарда сататын кәсіпорынды карастырайық. Мейлі, P_i, q_i-кәсіпорынның i - базарда $(i = 1,2)$ сатқан өнімінің сәйкесінше бағасы және мөлшері болсын. Базарлар бір – біріне тәуелсіз болғандықтан, $P_1 = P_1(q_1)$, $P_2 = P_2(q_2)$.

$C(q)$ - дифференциалданатын шығын функциясы болсын. Онда пайда функциясы былайша өрнектеледі:

$$\pi = P_1q_1 + P_2q_2 - C(q_1 + q_2).$$

Локальдық максимум нүктесінде:

$$\pi'_{q_1} = P'_1q_1 + P_1 - C' = P_1\left(E_{P_1q_1} + 1\right) - C' = 0,$$

$$\pi'_{q_2} = P'_2q_2 + P_2 - C' = P_2\left(E_{P_2q_2} + 1\right) - C' = 0.$$

Мұндағы $E_{P_1q_1}, E_{P_2q_2}$ - икемділік коэффициенттері.

Соңғы жүйеден $P_1\left(E_{P_1q_1} + 1\right) = P_2\left(E_{P_2q_2} + 1\right)$.

Ал мұнан бағалардың қатынасы үшін мынадай теңдік шығады:

$$P_2 / P_1 = \frac{1 + E_{P_1q_1}}{1 + E_{P_2q_2}}.$$

Мейлі, $e_{ij} - j$ - базардың бағасы бойынша i - базардың сұраныс икемділігі болсын $(i, j = 1,2)$. Базарлар бір – бірінен тәуелсіз болса, онда

$$E_{ij} = \left(E_{ji}\right)^{-1} = e_{ii}^{-1}.$$

Олай болса $\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + e_{11}^{-1}}{1 + e_{22}^{-1}}$.

Өзін - өзі тексеру сұрақтары

1. Сұраным, пайдалылық, өндіріс функцияларына мысалдар келтіріңіз.
2. Изокванттардың анықтамасын беріңіз, мысалдар келтіріңіз.
3. Тауарлардың шектік пайдалылықтарының анықтамасын беріңіз.
4. Орынын толтырудың шектік нормасының анықтамасын беріңіз.
5. Орынын толтырудың шектік нормасының шектік пайдалылықтар қатынасына теңдігін дәлелдеңіз.
6. $f(x, y)$ функциясының x және y бойынша икемділіктерінің анықтамаларын беріңіз.

7. Дебес туындылардың көмегімен сұраным функциясын зерттеңіз.

8. Пайда функциясының экструмдарын табыңыз.

Жаттығулар және оқытушыларының қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Егер x және y факторлары сызықты тәуелді болып, олардың бағалары сәйкесінше $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ болса, онда $z = b_0 xy^{3/2}$ өндіріс функциясы үшін, өндіріс қорларының оптималды үлестірулерін анықтаңыз.

Шешуі. x және y қорлардың оптималды үлестірулері орындалатын x_0, y_0 нүктесіде $z = x + 2y$ шығын функциясының изоквантасы $x + 2y = d$ түзуі өндіріс функциясының изоквантасы $b_0 xy^{3/2} = C$ қисығымен жанасуы тиіс. $x + 2y = d$ түзуінің бұрыштық коэффициенті $k = -1/2$, онда $z = \left(\frac{C}{b_0 x}\right)^{2/3}$ қисықтың жанамасының $x = x_0$-дегі мәні де $-1/2$-ге тең болуы қажет, яғни

$$\left[\left(\frac{C}{b_0 x}\right)^{2/3}\right]' = -1/2,$$

мұнан $x_0 = 4^{3/5} C^{2/5} / 3^{3/5} b_0^{2/5}$, $y_0 = 3^{2/5} C^{2/5} / 4^{2/5} b_0^{2/5}$.

Сонымен, x және y факторлары 4:3 қатынасындай үлестірілуі қажет екен.

2-мысал. $u(x, y) = \ln x + \ln y$ пайдалылық функциясының x-тің орнын y-пен толтыру шектік нормасының (3; 12) нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешуі. (8) – формуладан пайдаланамыз.

$$MRS_{xy} = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} = \frac{y}{x};$$

Онда $MRS_{xy}(3; 12) = 4$.

3-мысал. $z = x^y$ функциясының x және y бойынша икемділік коэффициентінің (2, 3) нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешуі. (9), (10)- формулалардан пайдаланамыз.

$$E_{zx}(x, y) = x(\ln z)'_x = x(y \ln x)'_x = y,$$

$$E_{zy}(x, y) = y(\ln z)'_y = y(y \ln x)'_y = y \ln x.$$

x, y-тердің мәндерін қойсақ: $E_{zx}(2,3) = 3$; $E_{zy} = (2, 3) = 3 \ln 2$.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $u(x, y) = a_1 \ln(x - x_0) + a_2 \ln(y - y_0)$ пайдалылық функциясы берілген. Мұндағы a_1, a_2-лер таңбалары оң коэффициенттер; $x > x_0$, $y > y_0$; x_0, y_0 - тұтынудың минималдық деңгейлері (таңбалары оң).

а) Шектік пайдалылықтарын табыңыз.

ә) x-тің орнын y-пен толтырудың шектік нормасын табыңыз.

2. $z = y^x$ функциясының (3, 2) нүктесіндегі x және y бойынша икемділік коэффициенттерін табыңыз.

3. Кобба - Дуглас функциясының икемділік коэффициенттерін табыңыз.

4. Егер бірінші базардың сұраныс икемділігі (-2), ал екіші базардікі (-1,5) болса, онда екінші базардағы баға біріншідегіден қанша пайызға жоғары?

«Көп айнымалының функциялары» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар

Негізгі теориялық сұрақтар

1. Көп айнымалылар функциясының анықтамасы, анықталу облысы.
2. Көп айнымалылар функциясының дербес және толық өсімшелері.
3. Дербес туындылар мен толық дифференциал.
4. Дифференциалды жуықтап есептеуге қолдану.
5. Күрделі, айқындалмаған функциялардың туындылары.
6. Бағыт бойынша туынды, градиент және оның қасиеттері.
7. Жоғарғы ретті дербес туындылар және дифференциалдар.
8. Көп айнымалылар функциясының экстремумдері және ең үлкен,ең кіші мәндері.

Ұсынылған тапсырмалардан бір нұсқасының шешу үлгісін келтірелік.

1-мысал. $z = \sqrt{x-2y-2} + \sqrt{x+y}$ функциясының анықталу облысын тауып, оны сызып көрсетіңіз.

Шешуі: түбір астындағы өрнек теріс болмауы керек, сондықтан берілген функцияның анықталу облысы мына теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын $(x; y)$ нүктелердің жиыны болуы тиіс;

$$\begin{cases} x-2y-2 \geq 0, \\ x+y \geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

$x-2y-2=0$ түзуден төменде орналасқан нүктелердің координаталары $x-2y-2>0$ теңсіздікті қанағаттандырады. $x+y=0$ түзуден жоғарыда орналасқан нүктелердің координаталары $x+y>0$ теңсіздікті қанағаттандырады. Жазықтықтың екі рет штрихталған бөлігіндегі нүктелердің координаталары (1) теңсіздіктер жүйесінің шешімі болады (1-суретке қараңыз). Онда ол берілген функцияның анықталу облысы болады, түзулердің нүктелері де анықталу облысына кіреді.

2-мысал. $z = xy^2$ функциясының $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0,1$, $\Delta y=-0,2$-дегі толық өсімшесі Δz және толық дифференциалы dz-ті табыңыз.

Шешуі: $z = f(x, y)$ функциясының толық өсімшесі $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ формуласымен анықталады. Біздің

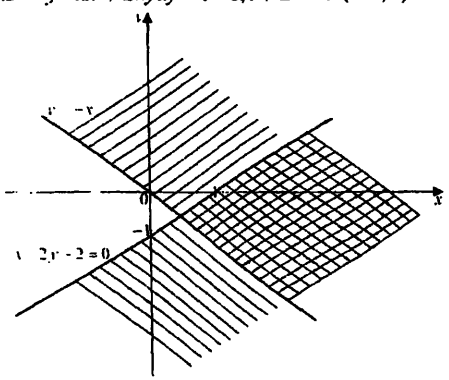
мысалымызда

$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y)^2 - xy^2 = (2+0{,}1)(1-0{,}2)^2 - 2\cdot 1 = \ldots = 0{,}6567$$

Толық дифференциал: $dZ = \frac{\partial Z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy$; мұндағы $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Дербес туындыларын тауып орындарына қоямыз

$$dz = y^2 dx + 2xy dy = 1^2 \cdot 0{,}1 + 2\cdot 2\cdot 1\cdot(-0{,}2) = -0{,}7$$



1-сурет

3-мысал. $ln(\sqrt[3]{8{,}2} + \sqrt[4]{0{,}98} - 2)$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

Шешуі: $z = f(x, y)$ функциясының толық өсімшесі мен толық дифференциалы арасында мынадай жуық теңдік бар:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + dz.$$

$Z = f(x,y) = ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 2\right)$ функциясын қарастырамыз.

$$ln\left(\sqrt[3]{x+\Delta x} + \sqrt[4]{y+\Delta y} - 2\right) \approx ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 2) + \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx + \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}dy}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 2}$$

$x = 8$, $dx = 8{,}2 - 8 = 0{,}2$, $y = 1$, $dy = 0{,}98 - 1 = -0{,}2$ мәндерді орындарына қойсақ:

$$ln\left(\sqrt[3]{8{,}2} + \sqrt[4]{0{,}98} - 2\right) \approx \ln 1 + \frac{\frac{1}{12}\cdot 0{,}2 - \frac{1}{4}\cdot 0{,}02}{2+1-2} = 0{,}011.$$

4-мысал. $z^3 xy + zx - xy - 1 = 0$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларының $M(2;1;0)$ нүктесіндегі мәндерін табыңыз.

Шешуі: $F(x,y,z) = 0$ айқындалмаған функцияның дербес туындылары мынандай формулалармен анықталады:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)};$$

Бізлің мысалымызда $F(x,y,z) = z^3xy + zx - xy - 1$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{Z^3y + Z - y}{4Z^3xy + x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Z^3x - x}{4Z^3xy + x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M = -\frac{0\cdot 1 + 0 - 1}{4\cdot 0\cdot 1\cdot 2 + 2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M = -\frac{0\cdot 2 - 2}{4\cdot 0\cdot 2\cdot 1 + 2} = 1;$$

5-мысал. $Z = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - \frac{17}{4}x - 2y$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

Шешуі: Кризистік нүктелерін табамыз, ол үшін дербес туындыларын нөлге теңеп, төмендегі жүйені шешеміз.

$$\begin{cases} Z'_x = x^2 + y^2 - \frac{17}{4}; \\ Z'_y = 2xy - 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{17}{4} = 0, \\ 2xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Екі теңдеуді қоссақ: $x^2 + 2xy + y^2 = \frac{25}{4}; (x+y)^2 = \frac{25}{4}; \; x + y = \pm\frac{5}{2};$

1) $x = \frac{5}{2} - y; \; 5y - 2y^2 - 2 = 0; \; 2y^2 - 5y + 2 = 0;$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}; \; y = 2; \; y = \frac{1}{2}; \; M_1\left(\frac{1}{2}; 2\right), M_2\left(2; \frac{1}{2}\right)$$

2) $x = -\frac{5}{2} - y; \; -5y - 2y^2 - 2 = 0;$

$2y^2 + 5y + 2 = 0; \; M_3(-2; -\frac{1}{2}), \; M_4(-\frac{1}{2}, -2).$

Орбір нүктеде $D = Z''_{xx} \cdot Z''_{yy} - (Z''_{xy})^2$-тың таңбасын анықтаймыз.

Бізлің мысалда: $Z''_{xx} = 2x; \; Z''_{yy} = 2x, \; Z''_{xy} = 2y. \; D = 4x^2 - 4y^2 = 4(x^2 - y^2).$

M_1 нүктеде $D < 0$, онда экстремум жоқ.

M_2 нүктеде $D > 0, Z''_{xx} > 0$, сондықтан M_2 - де максимум болады.

M_3 нүктеде $D > 0, Z''_{xx} < 0$, сондықтан M_3 - де минимум болады.

M_4 нүктеде $D < 0$, онда экстремум жоқ.

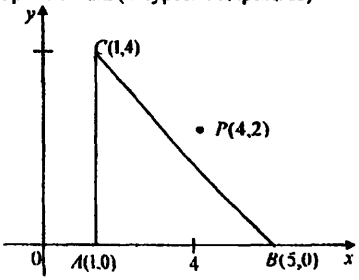
6-мысал. $z = x^2 + y^2 - 8x - 4y + 21$ функциясының $x = 1, y = 0, x + y = 5$ түзулерімен қоршалған тұйық ($Д$) облысындағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

Шешуі. Есепті шешу үшін функцияның $Д$ облысының ішкі және оны қоршаған түзулерідегі кризистік нүктелерін тауып, оның сол нүктелердегі мәндерін экстремумдарын есептейміз және оларды салыстырып ең үлкен, ең кіші мәндерін анықтаймыз.

Облысты мына түзулер қоршайды.

$AB: y = 0,\ 1 \le x \le 5;\ BC: y = 5 - x;\ 1 \le x \le 5;\ AC: x = 1,\ 0 \le y \le 4$

Берілген функцияның бір ғана $P(4,2)$ кризистік нүктесі бар, бірақ ол $Д$ облысының сыртында орналасқан (2-суретке қараңыз).



2-сурет

AB кесіндісінде $y = 0$, сондықтан $z = x^2 - 8x + 21$, мұндағы $1 \le x \le 5$, $z'_x = 2x - 8$; $2x - 8 = 0$; $x = 4$. AB да бір кризистік нүкте E, абсциссасы $x = 4$. $z_E = z(4) = 5$, $z_A = z(1) = 14$; $z_B = z(5) = 6$.

BC кесіндісінде $y = 5 - x$, сондықтан $z = x^2 + (5 - x)^2 - 8x - 4(5 - x) + 21$ немесе $z = 2x^2 - 14x + 26$, мұндағы $1 \le x \le 5$; $z'_x = 4x - 14$; $x = 3,5$. BC да бір критик нүкте $F(3,5;1,5)$;

$z_F = z(3,5) = -10,75$, $z_C = z(1) = 14$.

Табылған мәндерді салыстырсақ, берілген z функциясының ең үлкен мәні $M = z_A = z_C = 14$, ал ең кіші мәні $m = z_F = -10,75$, болады.

Енді тиісті тақырыптарды әдебиеттерден оқып үйреніп және есептерді шешудің келтірілген үлгісінен пайдаланып оздігінше жаттығу үшін тапсырмалардың төмендегідей нұсқаларын ұсынамыз.

1-нұска

1. $Z = \sqrt{1 - x - y} + \sqrt{x}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x = 1, y = 2$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.2$ мәндерінде $z = x^2 y$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $\Delta z = 0,662$; $dz = 0,6$)

3. $1,02^3 \cdot 0,97^5$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 0,91)

4. $e^{xy} + xy = 0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$)

5. $z = x^2 + 2xy - 10$ функцияның $y = 0$ түзу және $y = x^2 - 4$ параболамен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $U = \frac{y}{x}$ функциясының $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

2 - нұска

1. $Z = \sqrt{(x-2)y} + \sqrt{1-x}$ функцияның анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x = 2$, $y = 1$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = -0.3$ мәндерінде $z = x^2 + xy$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: Δz=-0,12; dz=-0,1)

3. $Ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 0,005)

4. $\sin xy + Lnxy - 2 = 0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$)

5. $z = x^2 + xy - 2$ функциясының $y = 0$ түзу және $y = 4x^2 - 4$ параболамен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $z = \sin(ax - by)$ функциясының $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

3 – нұсқа

1. $Z=\sqrt{x+2y-4}+\sqrt{x-y}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x=1,\ y=4$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x=0.1,\ \Delta y=0.2$ мәндерінде $z=y^2x+yx^2$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: Δz=4,486; dz=4,2)

3. $1{,}04^{2{,}02}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы:1,08)

4. $\cos x^2y^2+xy=2$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$)

5. $z=xy-2x-y$ функциясының $x=0,\ y=0,\ x=3,\ y=0$ түзулермен қоршалған түйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $Z=\frac{x^2}{y^2}$ функциясы үшін $Z_{xy}''=Z_{yx}''$ теңдіктің орындалатынын тексеріңіз.

4 – нұсқа

1. $Z=\sqrt{2x-y-4}+\sqrt{y^2-4}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x=1,\ y=4$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x=0.2,\ \Delta y=-0.1$ мәндерінде $z=2x^2y^2$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: Δz=11,8048; dz=11,2)

3. $Ln\left(\sqrt[5]{1.02}+\sqrt[3]{0.97}-1\right)$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы:-0,0035)

4. $\cos^2 xy-xy+4=0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$)

5. $z=x^3+y^3-3xy$ функциясының $x=0,\ y=0,\ x=2,\ y=3$ түзулермен қоршалған түйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $Z=\ln(x-2y)$ функциясы үшін $Z_{xy}''=Z_{yx}''$ теңдіктің дұрыстығын тексеріңіз.

5 - нұсқа

1. $Z = \sqrt{(x-2)y} + \sqrt{Ln(y-1)}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x = 1, y = 2$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x = 0.2,\ \Delta y = -0.1$ мәндерінде $z = x^2y^2 + x + y$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: Δz=1,2984; dz=1,3)

3. $2.03^3 \cdot 0{,}98^4$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 0,005)

4. $tgx^3y^3 + xy + 1 = 0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$)

5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ функциясының $y = 0,\ x = 3,\ y = x + 1$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $z = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ функциясының $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

6 –нұсқа

1. $Z = \sqrt{x + y - 2} + \sqrt{Ln(x-2)}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x = 1, y = 2$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x = 0.3,\ \Delta y = -0.1$ мәндерінде $z = 2x^3y^2$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: Δz=7,86234; dz=6,4)

3. $Ln\left(\sqrt[3]{0{,}97} + \sqrt[3]{1{,}02} - 1\right)$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: -0,00333)

4. $x^3y^3 - xy + 1 = 0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$)

5. $z = 5x^2 - 3xy + y^4 + 4$ функциясының $y = 0,\ x = 0,\ x + y = 2$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. Егер $Z = \sin\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$ болса, онда $(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})^2 z = -(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^2 z$ болатынын дәлелдеңіз.

7- нұсқа

1. $Z=\sqrt{x+y-4}+\sqrt{x-y}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x=2, y=3$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x=-0{,}3,\ \Delta y=0{,}1$ мәндерінде $z=yx^2-3xy^2$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $\Delta z=-1{,}948$; $dz=-1{,}3$)

3. $2{,}04^{2{,}01}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 4,244)

4. $Ln^2xy+x^2y^2=0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$)

5. $z=x^2-2y^2+4$ функциясының $x^2+y^2=1$ шеңбермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. Егер $u=arctg(2x-t)$ функциясы үшін $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=0$ болатынын дәлелдеңіз.

8 –нұсқа

1. $Z=\sqrt{2x+3y-6}+Ln(x-3)$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x=1, y=2$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=-0{,}3$ мәндерінде $z=xy-x^{-2}y^2$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $\Delta z=1{,}19$; $dz=1{,}3$)

3. $Ln\left(\sqrt[3]{7{,}98}+\sqrt[3]{1{,}03}\right)$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: -0,0117)

4. $\sqrt{xy}-e^{2y}-3=0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$)

5. $z=5x^2-3xy+y^2$ функциясының $x=-1$, $x=1$, $y=-1$, $y=1$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $u=\ln(x^2-y^2)$ функциясының $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

9 - нұсқа

1. $Z = \sqrt{3x - y - 3} + \sqrt{1 - x}$ функциясының анықталу облысын табыңыз. оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x = 2, y = -1$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x = 0{,}2,\ \Delta y = -0{,}3$ мәндерінде $z = x^3 y^2 + x - y$ функцияның толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: Δz=10,495; dz=7.7)

3. $2{,}04^{2{,}02}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы:4,216)

4. $\sin xy - tgxy + 2 = 0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$)

5. $z = x^2 + xy - 3x - y$ функциясының $x = 0.\ x = 2,\ y = 0,\ y = 3$ түзулермен қоршалған түйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $u = (x^2 - y^2)\ln y$ функциясының $u_{xx}'' - u_{yy}'' - \frac{1}{4}(u_y')^2 = -3$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

10 – нұсқа

1. $Z = Ln(x - 2y - 2) + \sqrt{y + 1}$ функциясының анықталу облысын табыңыз. оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x = 1, y = 4$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x = -0{,}1,\ \Delta y = 0{,}3$ мәндерінде $z = 1 + x^2 + 2xy^2$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: Δz=1,092; dz −1,4)

3. $Ln\left(\sqrt[3]{8{,}03} - \sqrt[3]{1{,}04}\right)$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: -0,0108)

4. $e^{xy} - Lnxy + 4 = 0$ айқындалмаған функцияның туындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$)

5. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ функциясының $y = \frac{1}{3}x^2$ парабола және $y = 3$ түзумен қоршалған түйық облыстағы $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

6. $z = \sqrt{x + \sin y}$ функциясының $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

11- нұсқа

1. $Z=\sqrt{y-2\sqrt{x}}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. Аргументтерінің $x=1, y=0$ және олардың өсімшелерінің $\Delta x=0,5,\ \Delta y=0,25$ мәндерінде $z=\sqrt{x^2+y^2}$ функциясының толық өсімшесін және толық дифференциалын табыңыз.

3. $3,01^{1,97}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы:8.763)

4. $z^3x-zy+xy-3=0$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+z^3}{y-3xz^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-z}{y-3xz^2}$)

5. $z=x^3+6xy-y^2-1$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{max}(-6;-18)=107$,$z(0;0)$-экстремум жоқ)

6. $z=tg(x+\ln y)$ функциясының $z_x'\cdot z_{xy}''=z_y'\cdot z_{xx}''$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

12 – нұсқа

1. $Z=ln(y-x^2+5x-6)$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u=\ln(x^2+y^2+xyz)$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $du=\frac{(2x+yz)dx+(2y+xz)dy+xydz}{x^2+y^2+xyz}$)

3. $\sqrt[3]{(2,95)^3+(2,03)^2+1}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы:1,986)

4. $\sin(z-y)=x^2+z^2-5$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{\cos(z-y)-2z};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\cos(z-y)}{\cos(z-y)-2z}$)

5. $z=8y^3-6xy+x^3+1;$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{min}(1;\frac{1}{2})=0$,$z(0;0)$ -экстремум жоқ)

6. $z=(x+e^y)^2$ функциясының $z_x'\cdot z_{xy}''=z_y'\cdot z_{xx}''$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

13 – нұсқа

1. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u=\ln(e^x+e^y+e^z)$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $du=\dfrac{e^x dx+e^y dy+e^z dz}{e^x+e^y+e^z}$)

3. $3{,}01^{1{,}98}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз. (Жауабы: 1,986)

4. $xy^2-z^3y-x^2z+11=0$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

(Жауабы: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y^2-2xz}{x^2+3yz^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2xy-z^3}{x^2+3yz^2}$)

5. $z=-3x^2+y^3+2xy$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{max}(-\dfrac{2}{27};-\dfrac{2}{9})=\dfrac{4}{729}$, $z(0;0)$-экстремум жоқ)

6. Егер $z=\dfrac{xy}{x-y}$ болса, онда $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2}{x-y}$ теңдіктің дұрыстығын дәлелдеңіз.

14 – нұсқа

1. $z=\sqrt{y-\sqrt{x-2}}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u=\ln(x+y^2+z^3)$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $du=\dfrac{dx+2ydy+3z^2dz}{x+y^2+z^3}$)

3. $\sqrt[3]{(2{,}01)^2+(1{,}97)^2}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы: 1,9933)

4. $e^{xyz}=x^2+y^2+z^2+1$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

(Жауабы: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yze^{xyz}-2x}{xye^{xyz}-2z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xze^{xyz}-2y}{xye^{xyz}-2z}$)

5. $z=\dfrac{1}{3}x^3-2xy-y^2+1$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{max}(-2;2)=\dfrac{7}{3}$, $z(0;0)$ -экстремум жоқ)

6. $u = tg(xy) + \sqrt{xy} \cdot \frac{x}{y}$ функциясының $x^2 u_{xx}'' - y^2 u_{yy}'' = 0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

15 – нұсқа

1. $z = \sqrt{x + \sqrt{y+2}}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u = \cos\frac{xy}{z^2}$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $du = -\sin\frac{xy}{z^2}(\frac{y}{z^2}dx + \frac{x}{z^2}dy - \frac{2xy}{z^2}dz)$)

3. $2{,}02^{3{,}03}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы:8,408)

4. $Ln(z-y) = x^2 + z^2 + 10$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x(z-y)}{1-2z^2+2zy}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1-2z^2+2zy}$)

5. $z = x^2 - y^3 + 6xy$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{max}(18;-6) = -148$, $z(0;0)$-экстремум жоқ)

6. $u = xe^{-\frac{1}{x}}$ функциясының $u_{xx}'' + 2(u_x' + u_y') = yu_{yy}''$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

16 – нұсқа

1. $z = \sqrt{y} - \sqrt{x-1}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $du = -2e^{-(x^2+y^2+z^2)}(xdx + ydy + zdz)$)

3. $\sqrt[3]{(3{,}95)^2 + (3{,}03)^2 + 2}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы:2.992)

4. $x + y - z^2 + x\sqrt{z} = 0$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(\sqrt{z}+z)}{4z\sqrt{z}-x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2\sqrt{z}}{4z\sqrt{z}-x}$)

5. $z = x^3 + y^3 - 6xy + 1$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{min}(-2;2) = -7$, $z(0;0)$- экстремум жоқ)

6. $u = \frac{xy}{x-y}$ функциясының $u_{xx}'' + 2u_{xy}'' + u_{yy}'' = \frac{2}{x-y}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

17 – нұска

1. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u = x^2 y^2 e^{xz}$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $du = xye^{xz}[(2y + xyz)dx + 2xdy + x^2 ydz]$)

3. $2{,}01^5 \cdot 1{,}97^3$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы:250.88)

4. $tgz = z + x - y$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x} = ctg^2 z;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -ctg^2 z$)

5. $z = 2x^3 - y^2 + 4xy$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{max}(-\frac{4}{3};-\frac{8}{3}) = \frac{64}{27}$, $z(0;0)$-экстремум жоқ)

6. $u = 2\cos^2(x - \frac{y}{2})$ функциясының $2u_{xy}'' + u_{yy}'' = 0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

18 – нұска

1. $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(9 - x^2 - y^2)}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $du = 2z^{-3}[xzdx + yzdy - (x^2 + y^2)dz]$)

3. $\sqrt[4]{(2.03)^3 + (1.94)^3}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы:1.989)

4. $\sin(x + z) = Ln(y - z)$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(z - y)(\cos(x + z)}{(y - z)\cos(x + z) + 1};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{(y - z)\cos(x + z) + 1}$)

5. $z = 2x^2 + 3y^2 + 6xy$ функциясын экстремумга зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{min}(-\frac{3}{2};1) = -\frac{3}{2}$, $z(0;0)$-экстремум жоқ)

6. $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$ функциясының $u_{xx}'' + u_{yy}'' = 0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

19 – нұсқа

1. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{y - x}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u = e^{\frac{x+z}{y}}$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $du = e^{\frac{x+z}{y}}(\frac{1}{y}dx - \frac{x+z}{y^2}dy + \frac{1}{y}dz)$)

3. $1{,}97^{2{,}03}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы:3,964)

4. $e^{x+yz} + z - 2 = 0$ айқындалмаған функциясының дербес туындыларын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y + e^{-x-yz}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z}{y + e^{-x-yz}}$)

5. $z = 2x^3 + 16y^3 + 6xy$ функциясының экстремумга зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{max}(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$, $z(0;0)$-экстремум жоқ)

6. $u = \sin(x + \sqrt{y})$ функциясының $z_x' z_{xx}'' = z_y' z_{yy}''$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

20 – нұсқа

1. $z = \sqrt{1 - xy}$ функциясының анықталу облысын табыңыз, оны сызып көрсетіңіз.

2. $u = arctg\frac{xy}{z^2}$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

(Жауабы: $du = \frac{yz^2dx + xz^2dy - 2xyzdz}{x^4 + x^2y^2}$)

3. $\sqrt[3]{(1{,}98)^3 + (2{,}02)^3}$ шамасының жуық мәнін есептеңіз.

(Жауабы:8.408)

4. $e^{2z-y}+x^2-2z^2=0$ айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2x}{2e^{2z-y}-4z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{2z-y}}{2e^{2z-y}-4z}$)

5. $z=x^3+y^3-36xy$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{max}(12;12)=-144$, $z(0;0)$-экстремум жоқ)

6. $u=\ln(x+\ln y)$ функциясының $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

21- нұсқа

1. $u=\frac{2y}{x}$. $x=e^t$, $y=\ln t$ функциясы берілген. $\frac{du}{dt}$-ны табыңыз.

(Жауабы: $\frac{du}{dt}=-\frac{2y}{x^2}e^t+\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{t}$)

2. $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$ функциясының $2f_x'(2;1)+f_y'(2;1)=0$ теңдікті қанағаттандыратынын тексеріңіз.

3. Тік бұрышты параллелепипедтің қабырғалары a,b және c. Егер a-ның мәні 4 см-ден 4,1 см-ге көбейсе, b-ның мәні 8 см-ден 7,8 см-ге кемісе, ал c-ның мәні 8 см-ден 8,3 см-ге көбейсе, онда параллелепипедтің көлемі қаншаға өзгереді?

(Жауабы: 9.6 см^3-ге көбейеді)

4. $z=x^2+y^2-4x-2y+4$ функциясының $x=3$, $y=3$, $y=3x-9$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

5. $u=xy+zx$, $M(3;-2;1)$, $N(1;0;0)$ берілген. u функциясынан $\overline{MN}=\bar{l}$ вектор бағыты бойынша алынған туындыны табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial u}{\partial \ell}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z$)

6. $u=e^{xy}$ функциясының $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

22 – нұсқа

1. $f(x,y)=\frac{x^2+3y^2}{2x+y}$ функциясының $3f_x'(3;2)+f_y'(3;2)=\frac{21}{8}$ теңдікті қанағаттандыратынын тексеріңіз.

2. $u = \ln tg(xy)$, $x = (t+1)^2$, $y = e^t$ берілген. $\frac{du}{dt}$-ны табыңыз.

(Жауабы: $\frac{du}{dt} = -\frac{2}{\sin 2xy}[2y(t+1) + xe^t]$)

3. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері a және b. Егер а-ның мәні 6 см-ден 5,8 см-ге кемісе, ал b-ның мәні 8 см-ден 8,3 см-ге көбейсе, онда үшбұрыштың гипотенузасының мәні қаншаға өзгереді?

(Жауабы: 0,12 см-ге көбейеді)

4. $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4$ функциясының $x = 0$, $y = 0$, $x - 3y - 3 = 0$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

5. $u = xz + zy$, $M(0;1;5)$, $N(2;3;3)$ берілген. u функциясынан $\overline{MN} = \bar{l}$ вектор бағыты бойынша алынған туындысы табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial u}{\partial \ell} = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z$)

6. $u = e^{-\cos(x+at)}$ функциясының $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

23 – нұсқа

1. $f(x,y) = \frac{x^2 + 3y^2}{xy}$ функциясының $f_x'(1;2) + 2f_y'(1;2) = 0$ теңдікті қанағаттандыратынын тексеріңіз.

2. $u = \cos\frac{x}{y}$, $x = \ln t$, $y = t^2 + 1$ берілген. $\frac{du}{dt}$-ны табыңыз.

(Жауабы: $\frac{du}{dt} = -\sin\frac{z}{y}(\frac{1}{yt} - \frac{2xt}{y^2})$)

3. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері a және b. Егер a-ның мәнін 6 см-ден 5,8 см-ге кемісе, ал b-ның мәні 8 см-ден 8,3 см-ге көбейсе, онда үшбұрыштың ауданы қаншаға өзгереді?

(Жауабы: 0,1 $см^2$-ге көбейеді)

4. $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4$ функциясының $x = 1$, $y = 3$, $3x + y - 3 = 0$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

5. $u = 2xy + xz$, $M(1;0;3)$, $N(-1;1;1)$ берілген. u функциясынан $\bar{MN} - l$ вектор бағыты бойынша алынған туындысы табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial u}{\partial \ell} = -\frac{4}{3}y - \frac{2}{3}z$)

6. $u = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$ функциясының $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

24 – нұска

1. $f(x,y) = \frac{3x-5y}{2x-y}$ функциясының $f_x'(1;-1) - f_y'(1;-1) = 0$ теңдікті қанағаттандыратынын тексеріңіз.

2. $u = e^{2x+y}$, $x = \cos 2t$, $y = \sin^2 t$ берілген. $\frac{du}{dt}$-ны табыңыз.

(Жауабы: $\frac{du}{dt} = -3e^{2x-y}\sin 2t$)

3. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері a=6см, b–8см еді. Кейін a=5,8 см, b=8,3 см болды, сонда үшбұрыштың периметрі қаншаға өзгереді?

(Жауабы: 0,22 см-ге көбейеді)

4. $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4$ функциясының $x = 3$, $y = 3$, $x + 3y - 12 = 0$ түзулермен қоршалған тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

5. $u = xz + 2yz$, $M(0;1;1)$, $N(2;3;2)$ берілген. u функциясынан $\overline{MN} = \bar{l}$ вектор бағыты бойынша алынған туындыны табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + 2z$)

6. $u = arctg\frac{y}{x}$ функциясының $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

25 – нұска

1. $f(x,y) = \frac{3x+y}{2x-y}$ функциясының $3f_x'(3;-1) - f_y'(3;-1) = 0$ теңдікті қанағаттандыратынын тексеріңіз.

2. $u = e^{x+3y}$, $x = t^2$, $y = \cos t$ берілген. $\frac{du}{dt}$-ны табыңыз.

(Жауабы: $\frac{du}{dt} = e^{x+3y}(2t - 3\sin t)$)

3.Тікбұрышты параллелепипедтің жақтары a = 4 см, b = 8 см, c = 8 см еді. Кейін a = 4,1 см, b = 7,8 см, c = 8,3 см болды, сонда параллелепипедтің диагоналы қаншаға өзгереді?

(Жауабы: 0,1 см-ге көбейеді)

4. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$ функциясын экстремумге зерттеңіз.

(Жауабы: $z_{max}(-4;4) = 18$)

5. $u = 3xy - 2xz$ $M(3;-1;0), N(1;1;1)$ берілген. u функциясынан $\overline{MN} = \bar{l}$ вектор бағыты бойынша алынған туындыны табыңыз.

(Жауабы: $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{4}{3}x - 2y - \frac{4}{3}z$)

6. $u = arctg\frac{y}{x}$ функциясының $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ теңдеуді қанағаттандыратынын тексеріңіз.

14-тарау. Дифференциалдық теңдеулер
§14.1 Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Негізгі ұғымдар

1-анықтама. Тәуелсіз айнымалы x, ізделінің отырған функция $y = f(x)$ және оның $y', y'', ..., y^{(n)}$ туындыларын байланыстыратын теңдеу дифференциалдық теңдеу деп аталады және ол келесі түрде жазылады:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Егер ізделінің отырған функция $y = f(x)$ бір аргументтің функциясы болса, онда теңдеу қарапайым дифференциалдық теңдеу деп аталады.

2-анықтама. Теңдеуге енген туындының ең жоғары ретін дифференциалдық теңдеудің реті деп атайды.

3-анықтама. $F(x, y, y') = 0$ түріндегі теңдеулер бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу, ал

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

түріндегі теңдеу y'-ке қарағанда шешілген теңдеу деп аталады.

4-анықтама. (1) теңдеуді тепе-теңдікке айналдыратын y функциясы оның шешімі деп аталады. Дифференциалдық теңдеудің шешімін табуды оны интегралдау, ал шешімінің графигі интегралдық қисығы деп аталады.

(1) дифференциалдық теңдеудің геометриялық мағынасын анықтайық. $f(x, y)$ функциясының анықталу облысы D–ның әрбір $M(x, y)$ нүктесіне бұрыштық коэффициенті $f(x, y)$-ке тең болған кесіндіні (бағытты) сәйкес қоямыз, яғни $tg\alpha = f(x, y)$. Сонда (1) дифференциалдық теңдеуге D облысындағы бағыттар өрісі сәйкес келеді. Олай болса, (1) дифференциалдық теңдеуді шешу дегеніміз әрбір нүктесіндегі жанамасының бағыты бағыттар өрісіндегі кесіндінің бағытымен беттесетін интегралдық қисықтарын табу деген сөз. Мұндай қисықтар шексіз көп, демек (1) теңдеуінің шешімі де шексіз көп.

Көптеген практикалық есептерде (1) дифференциалдық теңдеудің берілген (x_0, y_0) нүктесінен өтетін нақты бір интегралдық қисығын табу қажет болады. Белгісіз y функциясының x_0-дегі мәнін беру-бастапқы шарттың берілуі деп аталады және ол былай жазылады:

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0 \text{ немесе } y(x_0) = y_0. \qquad (2)$$

Дифференциалдық теңдеулер теориясының төмендегі негізгі теоремасы (1) теңдеудің шешімінің бар болуының шарттарын береді.

Теорема. Егер $y' = f(x, y)$ теңдеуінің оң жағындағы $f(x, y)$ функциясы және оның $f'_y(x, y)$ дербес туындысы D облысының барлық (x, y) нүктелерінде анықталған және үзіліссіз болса, онда бұл дифференциалдық теңдеудің $y(x_0) = y_0$ шартын қанағаттандыратын жалғыз шешімі бар болады.

Мұндағы (x_0, y_0), D облысының кез келген ішкі нүктесі. D. $f(x, y)$

функциясының анықталу облысы. Бұл теорема (1) дифференциалдық теңдеудің жалғыз шешімі бар болуының Коши теоремасы деп аталады. Оның дәлелдеуін тізімде келтірілген оқулықтардан оқып алуды студенттердің өздеріне ұсынамыз.

$y'=f(x,y)$ теңдеудің $y(x_0)=y_0$ шартты қанағаттандыратын шешімін табу есебін Коши есебі деп атайды.

Коши теоремасының геометриялық мағынасы мынадай: D облысының кез келген (x_0,y_0) нүктесі арқылы (1) теңдеудің бір ғана интегралдық қисығы өтеді.

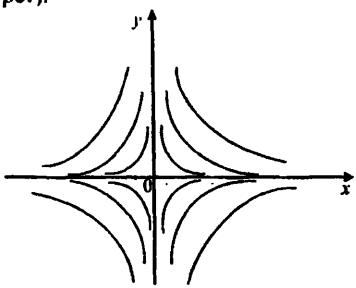
5-анықтама. Төмендегі екі шартты қанағаттандыратын $y=\varphi(x,c)$ функциясы (1) теңдеудің жалпы шешімі деп аталады:

1) тұрақты с-ның кез келген мәнінде $y=\varphi(x,c)$ функциясы (1) теңдеуінің шешімі болады;

2) D облысының ішкі (x_0,y_0) нүктесі үшін c-ның жалғыз $c=c_0$ мәні бар, яғни $y=\varphi(x,c_0)$ және бұл функция $y(x_0)=y_0$ бастапқы шартын қанағаттандырады.

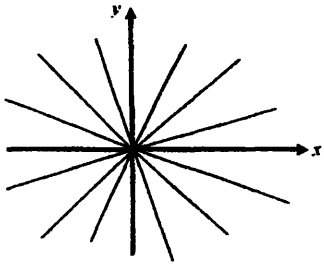
6-анықтама. c-ның нақты c_0 мәнінде (1)-нің жалпы шешімі $y=\varphi(x,c)$ функциясынан шығатын $y=\varphi(x,c_0)$ функциясы (1) теңдеудің дербес шешімі деп аталады.

1-мысал. $y'=-\frac{y}{x}$ теңдеудің жалпы шешімі $y=\frac{c}{x}$. Бұл гиперболалар өрісін анықтайды (1-сурет).



1-сурет

2-мысал. $y'=\frac{y}{x}$ теңдеудің жалпы шешімі $y=cx$, бұл $O(0.0)$ нүктесінен өтетін барлық түзулерді анықтайды (2-сурет). $O(0,0)$ нүктесінде Коши теоремасының шарты бұзылады, берілген теңдеудің оң жағы $O(0,0)$ нүктесінде анықталмаған.



2-сурет

Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер

7-анықтама. $f_1(x)f_2(y)dx - \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$ (3)

немесе

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \tag{4}$$

түріндегі теңдеулер айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер деп аталады.

(3) теңдеуді шешу үшін онда элементар түрлендірулер жүргіземіз, яғни (3) теңдеудің екі жағын $f_2(y)\cdot\varphi_1(x)$-ке бөлеміз. Сонда

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx = \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy.$$

Бұл теңдіктің екі жағын интегралдасақ

$$\int\frac{\varphi_2(y)}{f_1(y)}dy = \int\frac{f_1(x)}{\varphi_2(x)}dx + c. \tag{5}$$

(5) өрнек (3) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі болады.

Ескерту! (4) теңдеуінің екі жағын $f_2(y)$–ке бөлгенде оның кейбір шешімі жоғалуы мүмкін.

3-мысал. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$ теңдеуді шешіңіз.

Шешуі. Элементар түрлендірулер нәтижесінде берілген теңдеуді $\frac{dx}{1-x} = \frac{dy}{1+y}$ түрге келтіреміз. Теңдеудің екі жағын интегралдаймыз.

$$\ln|1+y| = -\ln|1-x| + \ln C,$$
$$\ln(1+y)(1-x) = \ln C,$$
$$(1+y)(1-x) = C.$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді жазыңыз.

2. Дифференциалдық теңдеудің шешімінің анықтамасын беріңіз.

3. $y' = f(x, y)$ дифференциалдық теңдеудің геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.

4. Коши теоремасын баяндаңыз.

5. Коши есебі деген не?

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің анықтамасын беріңіз.

7. Дербес шешім деген не?

8. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу тек қана екі шешімге ие болуы мүмкін бе?

9. Дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің геометриялық мағынасы не?

10. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеудің анықтамасын беріңіз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $(y-1)dy + (x+2)dx = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін және $y(0) = -1$ бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

Шешуі. Берілген теңдеу айнымалылары ажыралған дифференциалдық теңдеу, сондықтан оны интегралдап жалпы шешімін табамыз:

$$\int (y-1)dy + \int (x+2)dx = C,$$

немесе

$$\frac{y^2}{2} - y + \frac{x^2}{2} + 2x = C,$$

Сонымен

$$y^2 - 2y + x^2 + 4x = 2C,$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2C$$

жалпы шешімі.

Бастапқы шарттан пайдаланып C-ның мәнін табамыз.

$$(0+2)^2 + (-1-1)^2 = 2C;\ 4+4 = 2C;\ C = 4;$$

Сонымен

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

дербес шешімі. Бұл центрі $(-2;1)$ нүктесінде, радиусы $2\sqrt{2}$ -ге тең шеңбер.

2-мысал. $ctgxdy + ydx = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін және $y(0) = -1$ бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

Шешуі. Екі жағын $y \cdot ctgx$ -ке бөліп

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{ctgx} = 0,\ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{ctgx}.$$

Интегралдаймыз:

$$\ln y = -\int tgx dx + C. \quad \ln y = \ln|\cos x| + \ln C_1.$$

Сонымен $y = C_1 \cdot \cos x$ жалпы шешімі.

Бастапқы шарттан пайдаланып C_1-ді табамыз.

$$-1 = C_1 \cdot \cos 0; \; C_1 = -1.$$

$y = -\cos x$ дербес шешімі.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі дифференциалдық теңдеулердің жалпы, ал бастапқы шарттары берілгендерінің дербес шешімдерін табыңыз.

1. $(x-1)dy - 2(y-2)dx = 0; y(0) = -1$ Жауабы: $y = 2 - 3(x-1)^2$.

2. $dy - 3(x-1)^2 dx = 0; y(0) = -1$ Жауабы: $y = (x-1)^3$.

3. $y - y' = y^2 + xy^2; y(0) = -1$ Жауабы: $y = -\frac{1+x}{1-x}$.

4. $x(1+2y)dx + (1+x^2)dy = 0; y(0) = -1$ Жауабы: $y = -\frac{2+x^2}{2(1+x^2)}$.

5. $y' \cdot x^2 + 1 = y - y' \cdot x;$ Жауабы: $y = 1 + c - \frac{c}{x+1}$.

6. $dy - a^{x+1} \cdot dx = 0;$ Жауабы: $y = a^x + a^{-1} = c$.

7. $y' = 10^{x+y};$ Жауабы: $y = 10^x + 10^{-y} = c$.

8. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy.$ Жауабы: $y = \sqrt{y^2+1} = \ln c$.

§14.2 Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеулер

1-анықтама. Егер $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ теңдігі орындалса, онда $f(x,y)$ функциясы n өлшеулі біртекті функция деп аталады.

1-мысал. $f(x,y) = x^3 + y^3$ үш өлшеулі біртекті функция, себебі,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 y^3 + \lambda^3 y^3 = \lambda^3 (x^3 + y^3) = \lambda^3 f(x,y)$$

2-мысал. $f(x,y) = xy - y^2$ екі өлшеулі біртекті функция, себебі,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 xy + \lambda^2 (xy - y^2) = \lambda^2 f(x,y).$$

3-мысал. $f(x,y) = \frac{x+y}{x}$ - нөл өлшеулі біртекті функция, себебі,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x} = \frac{x+y}{x} = f(x,y),$$

яғни

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x,y).$$

2-анықтама. Егер $y' = f(x,y)$ дифференциалдық теңдеудің оң жағы $f(x,y)$ нөл өлшеулі біртекті функция болса, онда берілген теңдеу біртекті дифференциялдық теңдеу деп аталады.

Біртекті дифференциалдық теңдеу мынадай әдіспен шешіледі. Шарт бойынша $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ болғандықтан, мұнда $\lambda = \frac{1}{x}$ десек, $f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ болады. Басқаша айтқанда, нөл өлшеулі біртекті функция тек қана аргументтердің қатынасына тәуелді. Бұл жағдайда $y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ теңдеуін шешу үшін $y = ux$ алмастыруын жасаймыз. Соңғы теңдіктен туынды алып берілген теңдеуге қоямыз. Сонда

$$y' = u'x + u;\ u'x + u = f(u);\ u'x = f(u) - u.$$

Айнымалыларды ажыратсақ $\frac{dy}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$ теңдігі шығады.

Соңғы теңдікті интегралдап u-ды табамыз. Оның мәнін $y = ux$-ке қойсақ, іздеген функция табылады.

4-мысал. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$ теңдеуінің шешімін табалық.

Шешуі. $y = ux;\ \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u;$

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{x + xu}{x};\ \frac{du}{dx} \cdot x = 1 + u - u;\ \frac{du}{dx} \cdot x = 1;\ du = \frac{dx}{x};\ u = \ln|x| + C;$$

Сонымен $y = x(\ln|x| + C)$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

§14.3 Біртекті теңдеулерге келтірілетін дифференциалдық теңдеулер

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + C}{a_1x + b_1y + C_1} \tag{1}$$

түріндегі теңдеулер біртекті теңдеуге келтірілетін дифференциалдық теңдеулер деп аталады. Егер (1) теңдеуде $C_1 = C = 0$ болса, онда ол біртекті теңдеу болады. Егер

$$x = x_1 + h,\quad y = y_1 + k$$

алмастыруын жасасақ, онда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$. Осыларды (1) теңдеуге қоялық. Сонда

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + C}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + C_1}. \tag{2}$$

болады. Мұндағы h және k тұрақтыларын

$$\begin{cases} ah + bk + C = 0, \\ a_1h + b_1k + C_1 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

жүйені қанағаттандыратындай стіп таңдаймыз, Онда (2) теңдеу

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}$$

түрге келеді. Бұл біртекті дифференциалдық теңдеу, оны шешіп табылған x_1, y_1-лердің орнына $x_1 = x - h$, $y_1 = y - k$ мәндерін қоямыз да (1) дифференциалдық теңдеудің шешімін аламыз.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

анықтауышы нөлге тең болған жағдайда (3) жүйенің жалғыз шешімі болмайтыны белгілі. Бұл жағдайда $ab_1 - a_1b = 0$, яғни $a_1 = a\lambda$, $b_1 = b\lambda$. a_1 мен b_1-дің мәндерін (1) теңдеуге қойсақ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + C}{\lambda(ax + by) + C_1}. \tag{4}$$

шығады. (4) теңдеуде $z = ax + by$ алмастыруын жасасақ.

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}, \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}. \tag{6}$$

шығады. (4) теңдеуді, (6) және $z = ax + by$ алмастыруы арқылы келесі түрде жазамыз.

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z + C}{\lambda z + C_1}.$$

Бұл алдын қарастырылған айнымалылары ажыратылатын теңдеу.

(1)теңдеуді интегралдауға қолданылған әдісті кез келген

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + C}{a_1x + b_1y + C_1}\right)$$

түріндегі дифференциалдық теңдеуді интегралдауға да қолдануға болады.

Мысал. $(x + y + 2)dx + (3x + 3y - 1)dy = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

болғандықтан, $z = x + y$ алмастыруын орындаймыз

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}.$$

Берілген теңдеуді $\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y + 2}{3(x + y) - 1}$

түрінде жазып, мұндағы $\frac{dy}{dx}$-тің орнына $\left(\frac{dz}{dx}-1\right)$-ді, ал $(x+y)$-тің орнына z-ті жазамыз:

$$\frac{dz}{dx}-1=-\frac{z+2}{3z-1};$$

$$\frac{dz}{dx}=1-\frac{z+2}{3z-1}=\frac{2z-3}{3z-1};\quad \frac{3z-1}{2z-3}dz=dx;$$

Осыдан

$$\int\frac{3z-1}{2z-3}dz=\int dx+c;\quad \frac{3}{2}\int\frac{2z-3}{2z-3}dz+\frac{7}{2}\int\frac{dz}{2z-3}=x+C;$$

$$\frac{3}{2}z+\frac{7}{4}\ln|2z-3|=x+c;\ 7\ln|2x+2y-3|=c_1-2x-6y.$$

§14.4 Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

1-анықтама. $y'+p(x)y=q(x)$ түріндегі теңдеулер бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер деп аталады. Мұндағы $p(x)$, $q(x)$ x-ке тәуелді берілген функциялар. Сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешудің Бернулли әдісін баяндаймыз.

$$y'+p(x)y=q(x) \qquad (1)$$

теңдеудің шешімін $y=u(x)\cdot\vartheta(x)$ түрінде іздейміз, мұндағы $u(x)$, $\vartheta(x)$ функцияларының бірсуі (1) теңдеудің шешімі, ал екіншісі кез келген функция. Осы y функциясының туындысын алып (1) теңдеуге қойсақ

$$u'\vartheta+uv'+p(x)\cdot u\vartheta=q(x),\quad u'\vartheta+u(\vartheta'+p(x)\vartheta)=q(x). \qquad (2)$$

Соңғы теңдіктен $\vartheta'+p(x)\vartheta=0$ теңдеуін қанағаттандыратындай етіп ϑ функциясын таңдаймыз, яғни оны шешеміз.

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta}=-p(x)dx,\ \ln\vartheta=-\int p(x)dx;\ \vartheta=e^{-\int p(x)dx}$$

Табылған ϑ функциясын (2) теңдікке қоямыз да

$$u'\cdot e^{-\int p dx}=q(x),\quad du=q(x)e^{\int p(x)dx}dx;$$

$$u=\int qe^{\int p dx}dx+C;$$

функциясын табамыз. Олай болса $y=\left(\int qe^{\int p dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Мысал. $y'-ytgx=2x\sec x$ теңдеуінің шешімін іздейік.

Шешуі. $y=u\vartheta$ түрінде іздейміз. Туындысын алып берілген теңдеуге қоямыз:

$$u'\vartheta+uv'-u\vartheta tgx=2x\sec x,\quad u'\vartheta+u(\vartheta'-\vartheta tgx)=2x\sec x.$$

ϑ-ны кез-келген функция десек, оны $\vartheta'-\vartheta tgx=0$ теңдеуден табуға болады.

$$\vartheta' = \vartheta tgx,\ \frac{d\vartheta}{\vartheta} = tgxdx,\ \ln\vartheta = -\ln|\cos x|;\ \vartheta = \frac{1}{\cos x};$$

$$u'\cdot\frac{1}{\cos x} = 2x\cdot\frac{1}{\cos x};\ u' = 2x,\ du = 2xdx;\ u = x^2 + C.$$

Сонымен $y = \frac{1}{\cos x}(x^2 + C)$ функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі.

2-анықтама. $y' + p(x)y = q(x)\cdot y^n$ түріндегі теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады.

Бернулли теңдеуі сызықты емес, бірақ ол қарапайым түрлендіру арқылы сызықты теңдеуге келтіріледі.

Теңдеудің екі жағын y^n-ге бөлсек

$$y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = q(x)$$

теңдеуін аламыз $y^{-n+1} = z$ деп белгілесек, онда $(-n+1)y^{-n}\cdot y' = z'$. Осыларды соңғы теңдеуге қойсақ:

$$\frac{1}{1-n}z' + p(x)z = q(x),\quad z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

түріндегі сызықтық дифференциалдық теңдеуді аламыз. Ол теңдеу жоғарыда баяндалған әдіспен шешіледі.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Біртекті функцияның анықтамасын беріңіз, мысалдар келтіріңіз.
2. Біртекті дифференциалдық теңдеудің анықтамасын беріңіз.
3. Біртекті дифференциалдық теңдеуді шешу әдісін баяндаңыз.
4. Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулерді шешу әдісін баяндаңыз.
5. Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің анықтамасын беріңіз.
6. Сызықты дифференциалдық теңдеулерді шешудің Бернулли әдісін баяндаңыз.
7. Сызықты диффференциалдық теңдеудің шешімі қандай түрде ізделінеді?
8. Бернулли теңдеуінің анықтамасын беріңіз және шешу әдісін баяндаңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСОЖ)

1-мысал. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$ теңдеуінің шешімін ізделік.

Шешуі. Берілген теңдеуді $y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$ түріне келтіреміз. Бұл біртекті диффференциалдық теңдеу, себебі

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x}{\lambda x} + tg\frac{\lambda y}{\lambda x} = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x} = f(x, y).$$

яғни теңдеудің оң жағы нол өлшеулі біртекті функция. Онда, $y=ux$ алмастыруын жасаймыз.Бұл функцияның туындысын тауып, берілген теңдеуге қойсақ.

$$u'x+u=\frac{ux}{x}+tg\frac{ux}{x};\qquad u'x+u=u+tgu;\qquad \frac{du}{dx}\cdot x=tgu;\qquad \frac{du}{tgu}=\frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{du}{tgu}=\int\frac{dx}{x}+C;\quad \int ctgudu=\ln|x|+C;\quad \ln|\sin u|=\ln|x|+\ln C;\quad \sin u=xC;$$

функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі.

2-мысал. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y-2}{x+y+4}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $\begin{cases}x-y-2=0\\x+y+4=0\end{cases}$ жүйесінің шешімі $x=-1,\ y=-3$ болады.

$x=x_1-1,\ y=y_1-3$ алмастыруын жасасақ

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1-y_1}{x_1+y_1}$$

біртекті дифференциалдық теңдеуі шығады.

$y_1=ux_1$ десек, онда $\frac{dy_1}{dx_1}=u+x_1\frac{du}{dx_1}$. $u+x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1-u}{1+u};\quad x_1\frac{du}{dx_1}=-\frac{u^2+2u-1}{1+u}$.

Соңғы теңдеудің айнымалыларын ажыратсақ.

$$\frac{1+u}{u^2+2u-1}du=-\frac{dx_1}{x_1};$$

теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеуді интегралдасақ

$$\frac{1}{2}\ln|u^2+2u-1|=-\ln|x_1|+\ln C;$$

теңдеуі шығады. Осыдан

$$\sqrt{u^2+2u-1}\cdot x_1=C;$$

u-дың орнына $\frac{y_1}{x_1}$-ді қойсақ :

$\sqrt{y_1^2+2x_1y_1-x_1^2}=c$ немесе $y^2-x^2+2xy+8y+4x+14=C$.

3-мысал. $xy'+(x+1)y=3x^2\cdot e^{-x}$ теңдеудің $y(-1)=e$ бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

Шешуі. Бұл сызықты дифференциалдық теңдеу, $y=u\vartheta$ алмастыруын жасаймыз. Туындысын тауып, берілген теңдеуге қойсақ

$$xu'\vartheta+xu\vartheta'+(x+1)u\vartheta=3x^2e^{-x},\ xu'\vartheta+u(x\vartheta'+(x+1)\vartheta)=3x^2e^{-x},$$

ϑ-ны $x\vartheta'+(x+1)\vartheta=0$ теңдеуден табамыз.

$$x\frac{d\vartheta}{dx}=-(x+1)\vartheta.\ \frac{d\vartheta}{\vartheta}=-\frac{x+1}{x}dx,\ \int\frac{d\vartheta}{\vartheta}=-\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx,\ \ln\vartheta=-x-\ln|x|;$$

$\ln\vartheta = \ln\frac{1}{xe^x}$; $\vartheta = \frac{1}{xe^x}$; $x\cdot u'\cdot\frac{1}{xe^x} = 3x^2e^{-x}$; $u'e^{-x} = 3x^2e^{-x}$; $\frac{du}{dx} = 3x^2$; $u = x^3 + C$;

$y = (x^3 + C)\cdot\frac{1}{xe^x}$ берілген теңдеудің жалпы шешімі. Енді бастапқы шартты пайдаланамыз. Сонда

$$y = \left((-1)^3 + C\right)\cdot\frac{1}{(-1)e^{-1}};$$

$c - 1 = -1$; $c = 0$, яғни $y = x^3e^{-x}$ дербес шешімі.

4-мысал. $xy' + y - y^2\ln x = 0$ теңдеуінің шешімін табалық.

Шешуі. Берілген теңдеу Бернулли теңдеуі. Оны сызықты дифференциалдық теңдеуге келтіреміз, ол үшін екі жағын y^2-қа бөлеміз

$$xy^{-2}\cdot y' + y^{-1} = \ln x;$$

$y^{-1} = z$ деп белгілеп, екі жағынан туынды аламыз.

Сонда

$$-y^{-2}y' = z',$$
$$-xz' + z = \ln x;$$

Бұл сызықтық теңдеу.

$z = u\vartheta$ алмастыруын жасаймыз.

$-xu'\vartheta - xu\vartheta' + u\vartheta = \ln x$; $-xu'\vartheta - u(x\vartheta' - \vartheta) = \ln x$; $x\vartheta' - \vartheta = 0$; $x\vartheta' = \vartheta$;

$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{dx}{x}$; $\ln\vartheta = \ln x$; $\vartheta = x$; $-xu'\cdot x = \ln x$; $du = -\frac{1}{x^2}\ln x\,dx$

$$u = -\int\frac{1}{x^2}\ln x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = \ln x,\ du = \frac{dx}{x} \\ d\vartheta = -\frac{1}{x^2}dx,\ \vartheta = \frac{1}{x}\end{array}\right| = \frac{1}{x}\ln x - \int -\frac{1}{x^2}dx + C = \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + C;$$

u, ϑ-лардың мәндерін орнына қойып $y = Cx + \ln x + 1$ жалпы шешімін табамыз.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі дифференциалдық теңдеулердің жалпы және дербес шешімдерін табыңыздар.

1. $(x + y)y' + x - y = 0$; $y(1) = 0$ — Жауабы: $\ln(x^2 + y^2) + 2arctg\frac{y}{x} = 0$.
2. $xy' = 3y(\ln y - \ln x)$; — Жауабы: $y = xe^{\ln x^3}$.
3. $(x^2 - y^2)y' = 2xy$, $y(1) = 1$ — Жауабы: $x^2 + y^2 = Cy$; $C = 2$.
4. $x^2y' = y^2 - xy$; $y(2) = -1$ — Жауабы: $y = -\frac{2x}{1 + cx^2}$; $C = -\frac{5}{4}$.
5. $y' + y\cos x = \sin 2x$; $y(0) = 0$ — Жауабы: $y = 2(\sin x - 1) + C\cdot e^{-\sin x}$, $C = 2$.
6. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$; $y(0) = e$ — Жауабы: $y = (x^2 + C)e^{x^2}$, $C = 1$.

7. $xy'-y=x\ln x;\ y(1)=-1$ Жауабы: $y=Cx+\frac{1}{2}x\ln^2 x;\ C=1.$

8. $(x+e^y)dy-dx=0;$ Жауабы: $(y+C)e^y=x.$

9. $(2e^y-x)dy-dx=0;$ Жауабы: $x=Ce^{-y}+e^y.$

10. $xy^3\cdot y'+x^2-y^3=0;$ Жауабы: $y=\sqrt[3]{Cx^3-3x^2}.$

11. $3xy^2\cdot y'-2y^3-x^3=0.$ Жауабы: $y^3=Cx^2+x^3.$

12. $(1+2x-y)dy-2dx=0$ Жауабы: $x=\frac{1}{2}y+Ce^y.$

13. $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0$ Жауабы: $x^2+xy-y^2-x+3y=C.$

14. $(x-y+4)dy+(x+y-2)dx=0$ $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C.$

15. $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0,$ $y(0)=2;$ Жауабы: $3x+2y-4+2\ln|x+y-1|=0.$

§14.5 Толық дифференциалдық теңдеулер

Үзіліссіз және дифференциалданатын $M(x,y)$, $N(x,y)$ функциялары берілсін.

Анықтама. Егер $M(x,y)$, $N(x,y)$ функциялары үшін

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{1}$$

теңдігі орындалатын болса, онда

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{2}$$

теңдеуі толық дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Айталық (2) теңдеудің сол жағы қандайда бір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болсын, яғни

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Олай болса

$$M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x},\ N(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3}$$

(3) теңдіктердің біріншісін y бойынша, ал екіншісін x бойынша дифференциалдайық, яғни

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

Екінші ретті туындыларды үзіліссіз десек, онда

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

теңдігін аламыз, яғни (1) теңдік (2) теңдеудің сол жағы қандай да бір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болуы үшін қажетті шарт болады

екен. Енді (1) шарттың жеткілікті де шарт екенін көрсетелік, яғни егер (1) теңдік орындалса, онда (2) теңдеудің сол жағы қандай да бір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болады.

$M(x,y)$ қандай да бір $u(x,y)$ функциясынан x бойынша алынған дербес туындыға тең болсын делік, яғни

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$$

Осы соңғы теңдеуді интегралдап:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y)$$

теңдігін аламыз, мұндағы x_0, берілген теңдеудің шешімінің анықталу облысынан алынған кез келген нүктенің абсциссасы. x бойынша интегралдағанымызда y-ті тұрақты деп есептегендіктен интегралданатын тұрақты C-ны жалпы жағдайда y-ке тәуелді деп қабылдау мүмкін. $\varphi(y)$ функциясын (3) формулалардың екінші теңдігі орындалатындай етіп таңдаймыз. Ол үшін соңғы теңдіктің екі жағын y бойынша дифференциалдап нәтижесін $N(x,y)$-ке теңестіреміз

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

болғандықтан

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}dx + \varphi'(y) = N(x,y) \quad \text{немесе}$$

$$N(x,y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x,y);$$

$$N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y);$$

$$\varphi'(y) = N(x_0;y).$$

Соңғы теңдікті интегралдасақ:

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C_1$$

$\varphi(y)$-тің мәнін орнына қоямыз:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C_1.$$

Мұндағы $P(x_0,y_0)$- маңайында (2) теңдеудің шешімі бар болатын нүкте.

Сонымен, егер (1) теңдік орындалса, онда (2)-нің сол жағы $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болады, яғни

$$du(x,y) = 0.$$

Соңғы теңдеуді интегралдасақ $u(x,y)=c$ шығады. Сондықтан (2) теңдеудің жалпы шешімі

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C \qquad (4)$$

түрінде болады.

§14.5.1 Толық дифференциалдық теңдеулер үшін интегралдаушы көбейткіш

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

теңдеудің сол жағын қандайда бір функцияның толық дифференциалы болмасын делік. Мынандай жағдай болуы мүмкін: (1) теңдеудің екі жағын қандай да бір $\mu(x,y)$ функциясына көбейткеннен кейін оның сол жағы белгілі бір функцияның толық дифференциалы болып, ал жаңа теңдеудің жалпы шешімі берілген теңдеудің де жалпы шешімі болады. Осындай $\mu(x,y)$ функциясы (1) теңдеудің интегралдық көбейткіші деп аталады.

$\mu(x,y)$ интегралдық көбейткішті табу үшін (1) теңдеудің екі жағын $\mu(x,y)$-ке көбейтелік:

$$\mu M dx + \mu N dy = 0.$$

Соңғы теңдеу толық дифференциалдық теңдеу болуы үшін

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

теңдіктің орынды болуы қажетті және жеткілікті. Олай болса

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

немесе

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Соңғы теңдеудің екі жағын $\mu(x,y)$-ке бөліп төмендегі теңдеуді аламыз

$$M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \qquad (2)$$

(2) теңдеуді қанағаттандыратын кез келген $\mu(x,y)$ функциясы (1) теңдеудің интегралдық көбейткіші болады.

Жалпы жағдайда (2) теңдеуден $\mu(x,y)$-ті табу есебі (1) теңдеуді шешу есебіне қарағанда әлдеқайда күрделірек. Тек қана кейбір жағдайларда ғана (2) теңдіктен $\mu(x,y)$ функциясын таба аламыз. (1) теңдеудің тек қана y-ке тәуелді интегралдық көбейткіші бар болсын делік. Онда

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0.$$

Бұл жағдайда (2) теңдеуден

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

тендеуін аламыз. Егер $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ өрнек x-ке тәуелді болмаса, онда соңғы теңдеуді интегралдап тек қана y-тен тәуелді $\mu(y)$-гі анықтап аламыз.

Осыған ұқсас, егер $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ өрнек y-ке тәуелді болмаса, онда тек қана x-ке тәуелді $\mu(x)$ төмендегі формуламен анықталады:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Қандай теңдеу толық дифференциалдық теңдеу деп аталады?
2. Толық дифференциалдық теңдеу болу үшін қажетті және жсткілікті шартты жазыңыз.
3. Толық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін берстін формуланы жазыңыз.
4. Қандай жағдайда интегралдық көбсйткішті жеңіл жолмен анықтауға болады?
5. Интегралдаушы көбейткіштің табатын формулаларды жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $M(x,y) = 2xy, N(x,y) = x^2 + y^2$. $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x; \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$. Демек, берілген теңдеу толық дифференциалдық екен. $x_0 = y_0 = 0$ делік.

$$\int_0^x M(x,y)dx + \int_0^y N(x_0,y)dy = C$$

формуласын қолданамыз.

$$\int_0^x 2xydx + \int_0^y (0 + y^2)dy = C, \quad x^2y + \frac{y^3}{3} = C, \quad y(3x^2 + y^2) = C$$

берілген теңдеудің жалпы шешімі.

2-мысал. $(2x + y)dx + (x - 4y)dy = 0$ теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $\frac{\partial M}{\partial y}=1;\ \frac{\partial N}{\partial x}=1$. Демек, берілген теңдеу толық дифференциалдық екен. $x_0=y_0=0$ деп қабылдаймыз. 1-мысалдағы формуланы қолданамыз.

$$\int_0^x(2x+y)dx+\int_0^y(0-4y)dy=C,$$

$$x^2+xy-2y^2=c \text{ жалпы шешім.}$$

3-мысал. $(x\sin y+y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy=0$ теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі.

$$M(x,y)=x\sin y+y\cos y,\ N(x,y)=x\cos y-y\sin y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x\cos y+\cos y-y\sin y;\ \frac{\partial N}{\partial x}=\cos y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{x\cos y-y\sin y}{x\cos y-y\sin y}=1.$$

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=1;\quad \ln\mu=x;\quad \mu=e^x.$$

Берілген теңдеудің екі жағын интегралдаушы көбейткіш $\mu=e^x$-ке көбейтеміз.

$$e^x(x\cos y-y\sin y)dy+e^x(x\sin y+y\cos y)dx=0,$$

$$M_1(x,y)=e^x(x\sin y+y\cos y);\quad N_1(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y).$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}=\frac{\partial N_1(x,y)}{\partial x}$$

болғандықтан, соңғы дифференциал теңдеу толық дифференциалдық теңдеу болады. Онда $x_0=y_0=0$ деп қабылдап, 1-мысалдағы формуланы қолданамыз:

$$\int_0^x e^x(x\sin y+y\cos y)dx+\int_0^y e^y(0-y\sin y)dy=C;$$

$$(xe^x-e^x+1)\sin y+y\cos y(e^y-1)+y\cos-\sin y=C.$$

$$e^x(x\sin y+y\cos y-\sin y)=C \text{ жалпы шешім.}$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін табыңыздар.

1. $e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0$. Жауабы: $e^x+xy+x\sin y+e^y=C$.

2. $(x+y-1)dx+(e^y+x)dy=0$. Жауабы: $e^y+\frac{1}{2}x^2+xy-x=C$.

3. $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0.$ Жауабы: $\frac{1}{2}x^2 + x\sin y - \cos y = C.$

4. $(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0.$ Жауабы: $xy + e^x \sin y = C.$

Төмендегі теңдеулердің жалпы шешімін және интегралдық көбейткіштерін табыңыздар.

5. $ydx - xdy + \ln x dx = 0.$ Жауабы: $\mu = \frac{1}{x^2}; y = Cx - \ln x - 1.$

6. $ydx - (x + y^2)dy = 0.$ Жауабы: $\mu = \frac{1}{y^2}; x = y(C + y).$

§14.6 Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер

n-ші ретті дифференциалдық теңдеу жалпы жағдайда

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

түрінде жазылатыны жоғарыда айтылған еді. Айталық (1) теңдеу

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \quad (2)$$

түрінде болсын. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуге ұқсас (2) теңдеудің де жалғыз шешімінің бар болу теоремасының тұжырымын берелік.

Теорема. Егер (2) теңдеудің оң жағындағы $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ функциясы және оның $y, y', ..., y^{(n-1)}$ аргументтер бойынша дербес туындылары $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ нүктелері ішінде жататын облыста үзіліссіз болса, онда (2) теңдеудің

$$\begin{cases} y\Big|_{x=x_0} = y_0, \\ y'\Big|_{x=x_0} = y'_0, \\ \dots\dots \\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (3)$$

шарттарын қанағаттандыратын жалғыз $y = y(x)$ шешімі бар болады.(3) шарттар бастапқы шарттар деп аталады. Бұл теореманың дәлелдеуін «Дифференциалдық теңдеулер» пәні бойынша толығырақ жазылған оқулықтардан оқып алуға болады.

1-ескертпе. (2) теңдеудің жалпы шешімі деп төмендегі шарттарды қанағаттандыратын $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ функциясын айтады:

а) $C_1, C_2, ..., C_n$ тұрақтылардың кез келген мәнінде φ функциясы (2) теңдеуді қанағаттандырады;

ә) $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ теңдіктен (3) шарттарды қанағаттандыратындай $C_1, C_2, ..., C_n$ тұрақтыларын табуға болады.

2-анықтама. $C_1, C_2, ..., C_n$ тұрақтылардың нақты мәндерінде $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ жалпы шешімінен шығатын функцияны (2) теңдеудің дербес шешімі деп атайды.

Дербес шешімнің графигі дифференциалдық теңдеудің интеграл қисығы деп аталады.

§14.7 Реті төмендетілетін екінші ретті дифференциалдық теңдеулер

Жалпы жағдайда екінші ретті дифференциалдық теңдеудің шекті түрдегі шешімі табылмайды.Сондықтан, тікелей интегралданатын немесе реті төмендетілетін жағдайларды қарастырамыз.

1. $y'' = f(x)$ теңдеуі берілсін. Екі жағын интегралдап

$$y' = \int f(x)dx + C_1$$

теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеуді тағы да интегралдап

$$y = \int\left[\int f(x)dx\right]dx + C_1 x + C_2$$

теңдеуін аламыз, мұндағы, C_1, C_2 - тұрақты шамалар.

2. $y'' = f(y)$ теңдеуі берілсін. $y' = p$ деп белгілейміз. p-ны y-тің функциясы десек, онда:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Берілген теңдеуге осы мәндерді қойып:

$$p\frac{dp}{dy} = f(y);\ pdp = f(y)dy;$$

теңдеуін аламыз. Ол теңдеуді интегралдап

$$\int pdp = \int f(y)dy + C_1;\ \frac{p^2}{2} = \int f(y)dy + C_1;\ p^2 = 2\int f(y)dy + 2C_1;$$

$$p = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + 2C_1};$$

$p = \frac{dy}{dx}$ болғандықтан

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + 2C_1}.$$

Соңғы теңдеу айнымалылары ажыратылатын теңдеу болғандықтан

$$\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + 2C_1}} = \pm(x + C_2).$$

3. $y'' = f(y')$ теңдеуі берілсін. $y' = p$ деп белгілейміз. $y'' = \frac{dp}{dx}$; берілген теңдеуге қоямыз:

$$\frac{dp}{dx} = f(p),$$

Осы теңдеудің айнымалыларын ажыратсақ

$$\frac{dp}{f(p)} = dx; \quad \int \frac{dp}{f(p)} = x + C_1.$$

4. $y'' = f(x, y')$ теңдеуі берілсін. $y' = p$; $y'' = \frac{dp}{dx}$; $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$.

Соңғы теңдеу бірінші ретті дифференциалдық теңдеу.

5. $y'' = f(y, y')$ теңдеуі берілсін.

$$y' = p; \; y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}; \; p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Бұл да бірінші ретті дифференциалдық теңдеу.

1-мысал. $y'' = \cos x$ теңдеудің жалпы шешімін табалық.

Шешуі. Екі рет интегралдап, шешімін табамыз, яғни

$$y' = \sin x + C_1, \; y = \int (\sin x + C_1)dx = -\cos x + C_1 x + C_2$$

2-мысал. $y'' = y^{-3}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $y' = p$ деп белгілейміз.

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}; \; p\frac{dp}{dy} = y^{-3}.$$

Соңғы теңдеудің айнымалыларын ажыратып интегралдау арқылы

$$pdp = y^{-3}dy; \quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^{-2}}{-2} + \frac{C_1}{2}; \quad p = \pm\sqrt{C_1 - y^{-2}};$$

теңдеуін аламыз. Енді p-ның орнына y'-ті қоямыз.

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 - y^{-2}}; \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{y}$$

Айнымалыларын ажыратып интегралдасақ.

$$\frac{ydy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm dx; \; \int \frac{ydy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm(x + C_2)$$

Бұл интегралды табу үшін $C_1 y^2 - 1 = t^2$ алмастыруын жасаймыз.

$$2C_1 ydy = 2tdt \quad ydy = \frac{tdt}{C_1}$$

$$\int \frac{tdt}{C_1 \cdot t} = \frac{t}{C_1} = \frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{C_1}; \quad \frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{C_1} = \pm(x + C_2).$$

Сонымен, $y^2 - \frac{1}{C_1^2} = (x + C_2)^2$ функциясы берілген теңдеудің жалпы

шешімі.

3-мысал. $y'' = \frac{y'}{x}$ теңдеуінің шешімін табалық.

Шешуі. $y' = p$; $y'' = \frac{dp}{dx}$ деп белгілеп орындарына қоямыз.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}; \quad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x};$$

Соңғы теңдеуді интегралдап, яғни

$$\ln p = \ln x + \ln C_1; \quad p = C_1 x;$$

$\frac{dy}{dx} = C_1 x$; $dy = C_1 x dx$; $y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$ - жалпы шешімін табамыз.

4-мысал. $y'' = \frac{(y')^2}{y}$ теңдеуінің жалпы шешімін табалық.

Шешуі. $y' = p$; $y'' = p\frac{dp}{dy}$; $p\frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{y}$; $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$ $\ln p = \ln y + \ln C_1$; $p = C_1 y$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y; \quad \frac{dy}{y} = C_1 dx; \quad \ln y = C_1 x + \ln C_2;$$

$y = C_2 e^{C_1 x}$ функциясы ізделініп отырған теңдеудің жалпы шешімі.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

Төменгі теңдеулердің шешімі қалай табылады:

1) $y'' = f(x)$; 2) $y'' = f(x')$; 3) $y'' = f(y')$; 4) $y'' = f(x, y')$;

5) $y'' = f(y, y')$; 6) $F(x, y', y'') = 0$; 7) $F(y, y', y'') = 0$.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $xy'' = 2x - y'$ теңдеуінің $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = 1$ бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табалық.

Шешуі.

$$y' = p; \; y'' = \frac{dp}{dx}; \; x\frac{dp}{dx} = 2x - p; \; \frac{dp}{dx} = 2 - \frac{p}{x};$$

Біртекті дифференциалдық теңдеу пайда болды, оны шешу үшін $\frac{p}{x} = u$ деп алмастыру орындаймыз.

$p = ux$; $\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$; $\frac{du}{dx} \cdot x + u = 2 - u$; $\frac{du}{dx} \cdot x = 2(1 - u)$; $\frac{du}{1-u} = \frac{2dx}{x}$;

$$-\ln|1-u| = 2\ln x + \ln C_1; \; (1-u)\cdot x^2 C_1 = 1; \; \left(1 - \frac{p}{x}\right)x^2 C_1 = 1;$$

$$x^2 C_1 - 1 = pxC_1; \quad p = x - \frac{1}{xC_1}; \; p = x - \frac{C}{x}; \; C = \frac{1}{C_1};$$

$\frac{du}{dx} = x - \frac{C}{x}$; C тұрақтыны табу үшін $y'(1) = 1$ бастапқы шарттан пайдаланамыз

$$1 = 1 - C; \quad C = 0.$$

Осы мәнді $\frac{dy}{dx} = x - \frac{C}{x}$ теңдеуіне қойсақ

$$\frac{dy}{dx} = x; \; dy = x dx \; y = \frac{x^2}{2} + C_2$$

$y(1) = \frac{1}{2}$ бастапқы шартты пайдаланып C_2 – ны табамыз.

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - C_2; \; C_2 = 0; \; y = \frac{x^2}{2}$ функциясы ізделінген дербес шешімі.

2-мысал. $yy'' = (y')^2 - (y)^3$ теңдеуінің $y(0) = 1, y'(0) = 2$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табалық.

Шешуі.

$$y' = p; \; y'' = p\frac{dp}{dy}; \quad y \cdot p\frac{dp}{dy} = p^2 - p^3; \quad \int \frac{dp}{p - p^2} = \int \frac{dy}{y} + \ln C_1;$$

$$\ln p - \ln(1 - p) = \ln y + \ln C_1; \; \frac{p}{1 - p} = yC_1; \quad p = yC_1 - pyC_1; \; p(1 + yC_1) = yC_1;$$

$$p = \frac{yC_1}{1 + yC_1}; \; \frac{dy}{dx} = \frac{yC_1}{1 + yC_1};$$

$$y'(0) = 2, \; y(0) = 1$$

C_1-ді табу үшін бастапқы шарттардан пайдаланамыз. Сонда

$$2 = \frac{C_1}{1 + C_1}; \quad 2 + 2C_1 = C_1; \quad C_1 = -2; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{1 - 2y}; \; \frac{1 - 2y}{2y} dy = -dx.$$

$\left(\frac{1}{2y} - 1\right) dy = -dx$ теңдеуін интегралдасақ,

$$\frac{1}{2}\ln y - y = -x + C_2.$$

C_2-ні табу үшін $y(0) = 1$ бастапқы шарттан пайдаланамыз. Сонда

$$\frac{1}{2}\ln 1 - 1 = C_2; \quad C_2 = -1;$$

Олай болса $\frac{1}{2}\ln y - y = -x - 1$ функциясы берілген теңдеудің дербес шешімі.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі дифференциалдық теңдеулердің жалпы және дербес шешімдерін табыңыздар.

1. $y'' = x + \sin x$; Жауабы: $y = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + c_1 x + c_2$.

2. $y''=xe^x, y(0)=1, y'(0)=0;$ Жауабы: $y=(x-2)e^x+x+3.$

3. $1+(y')^2=yy'';$ Жауабы: $y=\frac{1}{2c_1}\left(e^{c_1(x+c_2)}+e^{-c_1(x+c_2)}\right).$

4. $xy''=y'\ln\frac{y'}{x};$ Жауабы: $y=\frac{1}{c_1}xe^{1+c_1x}-\frac{1}{c_1^2}e^{1+c_1x}+c_2.$

5. $(y')^2+yy''=yy';$ Жауабы: $y=\frac{y^2}{2}=c_1e^x+c_2.$

6. $y''=2y^3; y(0)=1; y'(0)=1;$ Жауабы: $y=\frac{1}{1-x}.$

7. $(y'')^2=4(y'-1); y(0)=0; y'(0)=2;$ Жауабы: $y=x+\frac{1}{3}(x\pm1)^3\mp\frac{1}{3}.$

8. $2(y')^2=(y-1)y'';$ Жауабы: $-\frac{1}{c_1^2}=(x+c_2)(y-1).$

9. $y''(x^2+1)=2xy'; y(0)=1; y'(0)=3;$ Жауабы: $y=x^3+3x+1.$

10. $x^2y''+x^2y'=1;$ Жауабы: $y=\frac{1}{x}+c_1\ln|x|+c_2.$

§14.8 Сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер

1-анықтама. Ізделіпіп отырған y функциясына және оның $y', y'', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}$ туындыларына қарағанда бірінші дәрежелі теңдеу n-ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу деп аталады және ол төмендегі түрде жазылады

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \qquad (1)$$

мұндағы $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, f(x)$-тар x-тің берілген функциялары, немесе тұрақты сандар, $a_0\neq0$, оларды x-тің барлық мәндерінде үзіліссіз болсын деп ұйғарамыз. $f(x)$ функциясы (1) теңдеудің оң жағы деп аталады.

Егер $f(x)\neq0$ болса, онда (1) теңдеу біртекті емес, ал $f(x)\equiv0$ болса, онда ол біртекті теңдеу деп аталады. Сонымен n-ретті сызықты біртекті теңдеу

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (2)$$

түрінде болады екен.

Біз алдағы уақытта n-ретті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеудің негізгі қасиеттерін екінші ретті біртекті сызықтық теңдеу үшін тұжырымдаймыз.

1-теорема. Егер y_1 және y_2 функциялары екінші ретті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеудің, яғни

$$y''+a_1y'+a_2y=0 \qquad (3)$$

дербес шешімдері болса, онда $(y_1 + y_2)$ функциясы да оның шешімі болады.

Дәлелдеуі. y_1, y_2-лердің туындыларын алып (3) теңдеуге коямыз

$$\begin{cases} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

$(y_1 + y_2)$ функциясының туындыларын алып (3) теңдеуге қойып, (4) теңдіктерді ескерсек

$$(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0 + 0 = 0,$$

яғни $y_1 + y_2$ функциясы (3) теңдеудің шешімі екен.

2-теорема. Егер y_1 (3) теңдеудің шешімі болса, онда Cy_1 функциясы да (3) теңдеудің шешімі болады (мұндағы c -тұрақты).

Дәлелдеуі. Cy_1-ді (3) теңдеуге қоямыз

$$(Cy_1)'' + a_1(Cy_1)' + a_2(Cy_1) = C(y_1'' + ay_1' + a_2 y_1) = C \cdot 0 = 0;$$

яғни Cy_1-де (3) теңдеудің шешімі екен.

2-анықтама. Егер (3) теңдеудің y_1, y_2 шешімдерінің қатынасы $[a,b]$ аралығында тұрақты санға тең болмаса, яғни $\frac{y_1}{y_2} \neq const$, онда y_1 мен y_2 $[a,b]$ аралықта сызықты тәуелсіз деп аталады. Ал, егер $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$, $\lambda = const$ болса, онда y_1 мен y_2 $[a,b]$ аралықта сызықты тәуелді деп аталады.

3-анықтыма. Егер y_1 мен y_2, x айнымалысының функциялары болса, онда

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

анықтауышы сол функциялардың Вронский анықтауышы деп аталады.

3-теорема. Егер y_1 және y_2 функциялары $[a,b]$ аралықта сызықты тәуелді болса, онда олардың Вронский анықтауышы сол аралықта нөлге тең.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша: $y_2 = \lambda y_1$, $\lambda = const$. онда $y_2' = \lambda y_1'$.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

4-теорема. Егер (3) теңдеудің y_1 және y_2 екі шешімінің $W(y_1, y_2)$ Вронский анықтауышы $[a,b]$ аралықтың қандайда бір $x = x_0$ нүктесінде нөлге тең болмаса, онда ол сол аралықтың кез келген x нүктесінде де нөлге тең болмайды.

Дәлелдеуі. y_1 және y_2 -лер (3) теңдеудің шешімі болғандықтан:

$$y_1'' + ay_1' + a_2 y_1 = 0,$$
$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0.$$

Бірінші теңдеуді y_2-ге, екіншісін y_1-ге көбейтіп скіншіден бірінші теңдеуді айырамыз:

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' + a_1(y_1y_2' - y_2y_1') = 0 \qquad (5)$$

(5) теңдеудегі жақшаның іші Вронский анықтауышына тең, ал алдынғы екі қосылғыш Вронский анықтауышының туындысына тең, яғни

$$W' = (y_1y_2' - y_2y_1')' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1''.$$

Олай болса (5) теңдеу төмендегіше жазылады

$$W' + a_1W = 0. \qquad (6)$$

(6) теңдеудің $W\Big|_{x=x_0} = W_0$ бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табалық. (6) теңдеудің айнымалыларын ажыраталық. Сонда

$$\frac{dW}{W} = -a_1dx,$$

$$\ln W = -\int_{x_0}^{x} a_1dx + \ln C,$$

$$W = C \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1dx} \qquad (7)$$

(7) формула Лиувилл формуласы деп аталады.

Енді бастапқы шартты пайдаланып C-ның мәнін анықтайық. (7) нің сол және оң жағындағы x-тің орнына x_0-ді қоямыз.

$$W\Big|_{x=x_0} = C \cdot e^0 \text{ немесе } C = W_0,$$

яғни

$$W = W_0e^{-\int_{x_0}^{x} a_1dx} \qquad (7')$$

Соңғы функция (6) теңдеудің дербес шешімі болады. Шарт бойынша $W_0 \neq 0$ болғандықтан W анықтауышы x-тің кез келген мәнінде нөлге тең болмайтындығы ($7'$) теңдеуден көрініп тұр.

Сонымен теорема дәлелденді.

Ескерту! Егер $[a,b]$ аралығының қандай да бір x_0 нүктесінде Вронский анықтауышы нөлге тең болса, онда ол сол аралықтың кез келген x нүктесінде де нөлге тең болады. Бұл тұжырым (7) формуладан тікелей шығады, яғни, егер $x = x_0$ болғанда $W = 0$ болса, онда $W\Big|_{x=x_0} = c = 0$, демек кез келген x-те $W = 0$.

5-теорема. Егер y_1 және y_2-лер (3) теңдеудің $[a,b]$ аралықтағы сызықты тәуелсіз шешімдері болса, онда олардың Вронский анықтауышы сол аралықтың ешбір нүктесінде де нөлге тең болмайды.

Дәлелдеу. Теорема тұжырымының керісін жориық, яғни $[a,b]$ аралықтың қандайда бір x_0 нүктесінде $W(y_1,y_2)=0$ болсын делік. Онда.

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)=0, \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)=0; \end{cases} \tag{8}$$

жүйені қанағаттандыратын, екеуі бірден нолге тең болмайтын C_1 және C_2 сандары табылады . Олай болса,

$$\varphi(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

функциясын қарастырамыз. $\varphi(x)$ функциясы 1 мен 2-теоремалар бойынша (3) теңдеудің шешімі болады, сонымен қатар $\varphi\equiv 0$. Кері жағдайда $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\equiv 0$ болып, y_1 мен y_2 функциялары сызықты тәуелді болады. Бұл теореманың шартына қайшы келер еді. (8) жүйеден $\varphi(x_0)=0$ $\varphi'(x_0)=0$ теңдіктері шығады. Бұл бастапқы шарттарды (3) теңдеудің $y(x)\equiv 0$ шешімі де қанағаттандырады. Демек, (3) теңдеудің берілген бастапқы шарттарды қанағаттандыратын екі ($y(x)\equiv 0$ және $\varphi(x)$) шешімі бар екен. Бұл Коши есебінің тұжырымына қайшы келеді, олай болса, $W(y_1,y_2)\neq 0$. Теорема дәлелденді.

Сонымен, (3) теңдеудің кез келген екі $y_1(x)$ және $y_2(x)$ шешімдері үшін төмендегі екі тұжырым орындалады:

1) егер $y_1(x)$ мен $y_2(x)$ сызықты тәуелді болса, онда кез келген x үшін $W(y_1,y_2)=0$.

2) егер $y_1(x)$ мен $y_2(x)$ сызықты тәуелсіз болса, онда кез келген x үшін $W(y_1,y_2)\neq 0$.

6-теорема. Егер $y_1(x)$ мен $y_2(x)$ функциялары (3) теңдеудің сызықты тәуелсіз шешімдері болса, онда

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \tag{9}$$

оның жалпы шешімі болады, мұндағы C_1,C_2 - кез келген тұрақтылар.

Дәлелдеу. 1 және 2- теоремалар бойынша C_1 және C_2-нің кез келген мәнінде (9) функция (3) теңдеуді қанағаттандырады, демек жалпы шешім анықтамасының 1-шарты орындалып тұр. Енді (9) дан кез келген $y|_{x=x_0}=y_0$, $y'|_{x=x_0}=y_0'$ бастапқы шартты қанағаттандыратын жалғыз дербес шешім бөліп алу мүмкіндігі болатынын көрсетсек болғаны.

Бастапқы шарттарды (9) теңдікке қоямыз:

$$\begin{cases} y_0=C_1y_{10}+C_2y_{20}, \\ y_0'=C_1y_{10}'+C_2y_{20}' \end{cases} \tag{10}$$

мұндағы $y_{10}=y_1|_{x=x_0}$, $y_{20}=y_2|_{x=x_0}$, $y_{10}'=y_1'|_{x=x_0}$, $y_{20}'=y_2'|_{x=x_0}$.

(10) жүйенің анықтауышы Вронский анықтауышының $x=x_0$-дегі мәні болғандықтан, ол нөлге тең емес, яғни

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = y_{10}y'_{20} - y_{20}y'_{10} \neq 0.$$

Олай болса, (10) жүйенің жалғыз шешімі (C_1, C_2) табылады. Бұл (9) дан берілген бастапқы шарттарды қанағаттандыратын жалғыз дербес шешім бөліп алу мүмкін деген сөз. Сонымен, (9) функция (3) теңдеудің жалпы шешімі екен, теорема дәлелденді.

Енді біртекті емес сызықты екінші ретті дифференциалдық теңдеуді қарастырайық, яғни

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x). \qquad (11)$$

(11) теңдеудің жалпы шешімінің құрылымын төмендегі теорема анықтайды.

7-теорема. Біртекті емес (11) теңдеудің жалпы шешімі оған сәйкес $y''+a_1y'+a_2y=0$ біртекті теңдеудің жалпы шешімімен (11) теңдеудің қандайда бір дербес шешімінің қосындысына тең.

Дәлелдеуі. Біртекті теңдеудің жалпы шешімін $\bar{y}$ -пен, ал (11) теңдеудің қандай да бір дербес шешімін $\tilde{y}$ арқылы белгілейік.

$$y = \bar{y} + \tilde{y} \qquad (12)$$

қосындысының (11) теңдеудің жалпы шешімі екендігін дәлелдейік. Ол үшін (12) мен оның туындыларын (11) теңдеуге қоямыз.

$$\left(\bar{y} + \tilde{y}\right)'' + a_1\left(\bar{y} + \tilde{y}\right)' + a_2\left(\bar{y} + \tilde{y}\right) = f(x),$$

немесе

$$\left(\bar{y}'' + a_1\bar{y}' + a_2\bar{y}\right) + \left(\tilde{y}'' + a_1\tilde{y}' + a_2\tilde{y}\right) = f(x)$$

$\bar{y}$ біртекті теңдеудің шешімі болғандықтан, бірінші жақшаның ішіндегі өрнек нөлге тең, ал $\tilde{y}$ (11) теңдеудің шешімі болғандықтан екінші жақшаның ішіндегі өрнек $f(x)$-ке тең. Олай болса (12) өрнек (11) теңдеудің шешімі екен. Енді оның жалпы шешім екендігін дәлелдейік. Оның үшін $y|_{x\ x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$ бастапқы шарттарды (12) теңдікке қоямыз. Мұндағы $\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ біртекті теңдеудің жалпы шешімі, ал y_1 пен y_2 сызықты тәуелсіз.

$$\begin{cases} y_0 = C_1y_{10} + C_2y_{20} + y_0, \\ y'_0 = C_1y'_{10} + C_2y'_{20} + y_0 \end{cases}$$

немесе

$$\begin{cases} C_1y_{10} + C_2y_{20} = y_0 - y_0, \\ C_1y'_{10} + C_2y'_{20} = y'_0 - y_0 \end{cases}$$

Соңғы жүйенің анықтауышы y_1 және y_2 функцияларының $x = x_0$ нүктесіндегі Вронский анықтауышы. y_1 мен y_2 сызықты тәуелсіз болғандықтан $W(y_1, y_2) \neq 0$. Олай болса соңғы жүйеден жалғыз нақты C_1, C_2

табылады. Сонымен (12) орнек берілген бастапқы шарттарды қанағаттандыратын (11) теңдеудің жалғыз шешімі. Теорема толығымен дәлелденді.

Сонымен егер біртекті теңдеудің жалпы шешімі $\bar{y}$ белгілі болса, онда біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін табу мәселесі оның қандайда бір дербес шешімін табуға байланысты екен.

Енді біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табудың жалпы әдісін баяндалық.

Тұрақтыны вариациялау әдісі.

Біртекті (3) теңдеудің жалпы шешімін қарастыралық, яғни

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \qquad (13)$$

(13) теңдеудегі C_1 мен C_2 x-тің қандайда бір функциялары болсын деп ұйғаралық.

(13) теңдікті x бойынша дифференциалдаймыз, яғни

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_1 + C_2' y_2$$

C_1 мен C_2-ні

$$C_1' y_1 + C_2' y_1 = 0 \qquad (14)$$

шарты орындалатындай етіп таңдаймыз. Осы айтылғанды ескерсек

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'.$$

Соңғы теңдікті тағы да x бойынша дифференциалдаймыз

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2'$$

Осы табылған y, y', y'' мәндерін (11) теңдеуге коямыз.

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + a_1\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) + a_2\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = f(x)$$

немесе

$$C_1\left(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1\right) + C_2\left(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2\right) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

y_1 мен y_2 біртекті теңдеудің шешімдері болғандықтан жақшалардың іші нөлге тең болады. Онда

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Сонымен, егер C_1 мен C_2 (14) пен (15) теңдеулер жүйесін, яғни

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

жүйесін қанағаттандырса, онда (13) функция (11) біртекті емес теңдеудің шешімі болады.

Соңғы жүйенің анықтауышы сызықты тәуелсіз y_1 мен y_2 функцияларының Вронский анықтауышы болғандықтан, ол нолге тең емес, онда оның нақты жалғыз C_1 және C_2 шешімі табылады. C_1 мен C_2-нің табылған мәндерін (13) теңдеуге қойып (11) біртекті емес теңдеуінің жалпы шешімін табамыз.

§14.9 Коэффициенттері тұрақты екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

1-анықтама.

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

түріндегі теңдеу коэффициенттері тұрақты екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеу деп аталады. Мұндағы p мен q тұрақты шамалар.

Егер (1) теңдеуде $f(x) = 0$ болса, онда

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

теңдеуі біртекті сызықты теңдеу деп аталады. Егер $f(x) \neq 0$ болса, онда (1) теңдеу сызықты біртекті емес деп аталады.

1-теорема. Егер (1) теңдеуде $f(x)$ функциясы үзіліссіз болса, онда оның $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ бастапқы шарттарды қанағаттандырытын жалғыз шешімі бар болады. Бұл теореманы дәлелсіз қабылдаймыз.

Енді (2) теңдеудің жалпы шешімін табу мәселесіне көшелік. (2) теңдеудің шешімін

$$y = e^{kx} \tag{3}$$

түрінде іздейміз. Мұндағы k – нақты сан. (3) функциясының бірінші және екінші ретті туындыларын алып (2) теңдеуге қойып: $(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0$ теңдеуін аламыз. Бұл теңдеуде $e^{kx} \neq 0$ болғандықтан

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{4}$$

болады.(4) теңдеу (2) теңдеудің сипаттаушы теңдеуі деп аталады.

(2) теңдеу шешімдерінің түрлерін (4) теңдеу шешімдері арқылы анықтайтын мына теореманы дәлелдеңдік.

3-теорема. 1) Егер k_1, k_2-лер (4) теңдеудің өзара тең емес $(k_1 \neq k_2)$ нақты түбірлері болса, онда (2) теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \tag{5}$$

түрінде анықталады. Мұндағы C_1 мен C_2 кез-келген тұрақты шамалар;

2) Егер $k_1 = k_2 = k$ болса, онда (2) теңдеудің жалпы шешімі

$$y = (C_1 + C_2)e^{kx} \tag{6}$$

түрінде анықталады;

3) Егер $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ комплекс сандары болса, онда (2) теңдеудің жалпы шешімі

$$y = (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)e^{\alpha x} \tag{7}$$

түрінде анықталады.

Дәлелдеу. 1) $y_1 = e^{k_1 x}$ және $y_2 = e^{k_2 x}$ функциялары (2)теңдеудің сызықты тәуелсіз шешімдері болады, себебі $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const$, $(k_1 \neq k_2)$. Онда 6–теорема бойынша (5) функциясы (2)теңдеудің жалпы шешімі болады.

2) $k_1 = k_2 = k$ болса, онда $y_1 = e^{kx}$ функциясы (2) теңдеудің бір шешімі. Енді $y_2 = xe^{kx}$ функциясы (2) теңдеудің шешімі болатындығын және y_1 мен y_2 сызықты тәуелсіз екендігін көрсетелік. Шынында да,

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 2ke^{kx} + k^2xe^{kx} + p\left(e^{kx} + xke^{kx}\right) +$$
$$+ qxe^{kx} = e^{kx}\left[x\left(k^2 + pk + q\right) + \left(p + 2k\right)\right] = 0,$$

себебі, $k^2 + pk + q = 0$ теореманың шарты бойынша және $p = -2k = -\left(k_1 + k_2\right)$ (Виета теоремасы). Онда, y_2 функциясы (2) теңдеудің шешімі, ал $\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x}$ болғандықтан. y_1 мен y_2 сызықты тәуелсіз. Олай болса (6) функция (2) теңдеудің жалпы шешімі болады.

3) $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ комплекс сандар (4) теңдеудің шешімі болсын. Онда

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} \tag{8}$$

функциялары (2) теңдеудің дербес шешімдері болады.

Алдымен, нақты аргументтің кандай да бір

$$y = u(x) + i\vartheta(x) \tag{9}$$

функциясы (2) теңдеудің шешімі болса, онда $u(x)$, $\vartheta(x)$ функциялары да (2) теңдеудің шешімі болатындығын көрсетелік. Оның үшін (9) функциясын (2) теңдеуге қоямыз.

$$\left[u(x) + i\vartheta(x)\right]'' + p\left[u(x) + i\vartheta(x)\right]' + q\left[u(x) + i\vartheta(x)\right] = 0$$

немесе
$$\left(u'' + pu' + qu\right) + i\left(\vartheta'' + p\vartheta' + q\vartheta\right) = 0.$$

Комплекс функция оның нақты бөлігі де, жорымал бөлігі де нөл болғанда ғана нолге тең болатындықтан

$$u'' + pu' + qu = 0,$$
$$\vartheta'' + p\vartheta' + q\vartheta = 0$$

теңдіктерін жаза аламыз. Бұл $u(x), \vartheta(x)$ функциялары (2) теңдеуді қанағаттандырады деген сөз.

(8) теңдіктерді Эйлер формуласы бойынша жазсақ:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Жоғарыда дәлелдегеніміз бойынша, y_1 функциясы (2) теңдеудің шешімі болғандықтан

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

функциялары да (2) теңдеудің шешімдері болады. $\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = ctg\beta x \neq const$, онда $\tilde{y}_1$ және $\tilde{y}_2$ функциялары сызықты тәуелсіз.

Сонымен, $y = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$ функциясы (2) теңдеудің жалпы шешімі болады екен.

1–мысал. $y'' - 11y' + 18 = 0$ теңдеуді шешіңіз.

Шешуі. Сипаттаушы теңдеуі $k^2 - 11k + 18 = 0$. Мұның түбірлері $k_1 = 2, k_2 = 9$. Сондықтан, (5) формула бойынша, берілген теңдеудің жалпы шешімі $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{9x}$ функциясы болады.

2–мысал. $y'' - 4y' + 4y = 0$ теңдеуді шешіңіз.

Шешуі. Сипаттаушы теңдеуі $k^2 - 4k + 4 = 0$. Мұның түбірлері $k_1 = k_2 = 2$. Онда (6) формула бойынша

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$$

функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі болады.

3–мысал. $y'' - 6y' + 13y = 0$ теңдеуінің шешімін табалық.

Шешуі. Сипаттаушы теңдеуі $k^2 - 6k + 13 = 0$. Мұның түбірлері $k_{1,2} = 3 \pm 2i$ комплекс сандары; $\alpha = 3$; $\beta = 2$. Онда (7) формула бойынша

$$y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{3x}$$

функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі болады.

Енді (1) теңдеудің жалпы шешімін табуға көшейік.(1) теңдеудің жалпы шешімі (2) теңдеудің жалпы шешімі $\bar{y}$ пен (1) теңдеудің дербес шешімі $\tilde{y}$-тің қосындысына тең екені белгілі.

Көптеген жағдайларда (1) теңдеудің дербес шешімін сұрыптау тәсілі деп аталатын әдіспен тапқан қолайырақ. Солардан кейбіреулерін қарастырайық.

1. (1) теңдеудің оң жағы

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$

түрінде болсын. Мұндағы $P_n(x)$ n-ші дәрежелі көпмүшелік.

Төмендегі жағдайлар болуы мүмкін:

а) e-нің дәреже көрсеткішіндегі α

$$k^2 + pk + q = 0$$

сипаттаушы теңдеуінің түбірлеріне тең емес.Бұл жағдайда (1) нің дербес шешімін

$$\tilde{y} = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n)e^{\alpha x} = Q_n(x)e^{\alpha x} \qquad (10)$$

түрінде іздейміз.Мұндағы $A_0, A_1, \ldots, A_n$ белгісіз коэффициенттерді (10) функция (1) теңдеуді қанағаттандыратындай етіп табамыз. (10) функцияны екі рет дифференциалдап (1) теңдеуге қойсақ:

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x) \qquad (11)$$

болады. Мұндағы $Q_n(x)$ – n-ші дәрежелі көпмүшелік, онда $Q_n'(x)$ – $n-1$-ші дәрежелі, ал $Q_n''(x)$, $(n-2)$-ші дәрежелі көпмүшелік болады. Сонымен, (11) теңдіктің сол жағында да оң жағында да n-ші дәрежелі көпмүшеліктер. Бірдей дәрежелі мүшелердің алдындағы коэффициенттерді теңестіріп $A_0, A_1, \ldots, A_n$ белгісіз коэффициенттерді анықтайтын $n+1$ теңсіз аламыз. Оларды шешіп, тиісті мәндерін (10) теңдікке қойсақ дербес шешімі табылады.

ə) α саны сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің біреуіне тең болсын. Бұл жағдайда дербес шешімді (10) теңдеу түрінде іздей алмаймыз. Себебі (11) теңдеудің сол жағы, $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ болғандықтан, $n-1$-дәрежелі көпмүшелік болып, ал оң жағы n-дәрежелі көпмүшелік болады. Демек, $A_0, A_1, ..., A_n$-коэффициенттерінің ешбір мәнінде (11) теңдік тепе-теңдікке айналмайды. Сондықтан бұл жағдайда дербес шешімді

$$\tilde{y} = xQ_n(x)e^{\alpha x} \qquad (12)$$

түрінде іздейміз.

б) сипаттаушы теңдеудің екі түбірі бір-біріне тең болып ол α санына тең болсын. Бұл жағдайда (11) теңдеудің сол жағындағы екі жақшаның іші де нөлге тең болады. Шынында Виета теоремасы бойынша $\alpha + \alpha = -p$ және $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, α-сипаттаушы теңдеудің түбірі. Олай болса, (11) теңдіктің сол жағы $n-2$-дәрежелі көпмүшелік, сондықтан дербес шешім

$$\tilde{y} = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x} \qquad (13)$$

түрінде ізделінуі тиіс.

II. (1) теңдеудің оң жағы

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (14)$$

түрінде болсын. Мұндағы $P(x)$ пен $Q(x)$ -көпмүшеліктер.

а) $\alpha + i\beta$ комплекс саны сипаттаушы теңдеудің түбіріне тең болмасын. Бұл жағдайда (1) теңдеуінің дербес шешімі

$$\tilde{y} = u(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + v(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (15)$$

түрінде ізделінеді. Мұндағы $u(x)$ пен $v(x)$ -дәрежелері $P(x)$ пен $Q(x)$-тердің ең үлкен дәрежесіне тең көпмүшеліктер.

ə) $\alpha + i\beta$ комплекс саны сипаттаушы теңдеудің түбіріне тең болсын.Бұл жағдайда (1) теңдеудің дербес шешімі

$$\tilde{y} = x\left[u(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + v(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right] \qquad (16)$$

түрінде ізделінеді.

Ескерту! (1) нің дербес шешімінің (15) және (16) түрлері (14) теңдіктегі $P(x)$ пен $Q(x)$ көпмүшеліктерінің біреуі нөлге тең болған жағдайда да сақталуы тиіс.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Қандай теңдеулер екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер деп аталады?
2. Сызықты тәуелсіз шешімдердің анықтамасын беріңіз.
3. Сызықты тәуелді шешімдердің анықтамасын беріңіз.
4. Екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің формуласын жазыңыз.
5. Вронский анықтауышы деп қандай анықтауышты айтады?
6. Сипаттаушы теңдеу деп қандай теңдеуге айтылады?
7. Сипаттаушы теңдеудің әр түрлі нақты түбірлеріне сәйкес жалпы шешім қандай болады?

8. Сипаттаушы теңдеудің түбірлері еселі болғанда дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі қандай болады?

9. Сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі қандай болады?

10. Дербес шешімді құрыптау тәсілін баяндаңыз.

Жаттығулар жәнс оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $y'' + y' = (5x + 3)e^{-x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табалық.

Шешуі. Алдымен сипаттаушы теңдеуді құралық, яғни $k^2 + k = 0$.

Бұл теңдеудің шешімдері $k_1 = 0; k_2 = -1$. Сондықтан $\bar{y} = c_1 + c_2 e^{-x}$ - берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі;

а) біртекті смес теңдеудің жалпы шешімін

$$y = c_1(x) + c_2(x)e^{-x}$$

түрінде іздейміз. $C_1(x), C_2(x)$ - тарды анықтау үшін тұрақтыны вариациялау әдісін қолданамыз.

$$\begin{cases} C_1' + C_2' e^{-x} = 0, \\ C_2' e^{-x} \cdot (5x+3)e^{-x}. \end{cases} \quad C_2' = -(5x+3).$$

$$C_2(x) = -\int (5x+3)dx + c_2 = -\frac{5x^2}{2} - 3x + c_2. \quad C_1'(x) = (5x+3)e^{-x}$$

$$C_1(x) = \int (5x+3)e^{-x}dx + c_1 = \left| \begin{matrix} u = 5x+3 & dv = e^{-x}dx \\ du = 5dx & v = -e^{-x} \end{matrix} \right| =$$

$$= -(5x+3)e^{-x} + 5\int e^{-x}dx + c_1 = -(5x+3)e^{-x} - 5e^{-x} + c_1 = -e^{-x}(5x+8) + c_1$$

$C_1(x), C_2(x)$ - тердің мәндерін орнына қойсақ:

$$y = c_1 - e^{-x}(5x+8) + e^{-x}\left(-\frac{5x^2}{2} - 3x + c_2\right) = c_1 + e^{-x}\left(c_2 - \frac{5x^2}{2} - 8x\right)$$

жалпы шешімі шығады.

ә) Енді берілген теңдеудің дербес шешімін сұрыптау әдісімен табалық.

Берілген теңдеудің оң жағындағы $\alpha = -1$ мәні сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің біреуіне тең болып тұр. Олай болса дербес шешімді (12) теңдеу түрінде іздейміз, яғни

$\bar{y} = x(A_0x + A_1)e^{-x}$. Бұл функцияның туындыларын тауып.

$$\bar{y}' = (2A_0x + A_1)e^{-x} - (A_0x^2 + A_1x)e^{-x} = \left[(2A_0 - A_1)x - A_0x^2 + A_1\right]e^{-x}.$$

$$\bar{y}'' = (2A_0 - A_1 - 2A_0x)e^{-x} - e^{-x}\left[(2A_0 - A_1)x - A_0x^2 + A_1\right];$$

берілген теңдеуге қоялық:

$$e^{x}\left(2A_0 - A_1 - 2A_0x - 2A_0x + A_1x + A_0x^2 - A_1 + 2A_0x - A_1x - A_0x^2 + A_1\right) =$$

$$= (5x+3)e^{x}.$$

Екі жағын e^{x}-ке қысқартып, A_0 мен A_1-ді табамыз.

$$2A_0 - A_1 - 2A_0x = 5x+3;\ -2A_0 = 5;\ A_0 = -\frac{5}{2};\ 2A_0 - A_1 = 3;\ A_1 = -8.$$

Олай болса берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$\bar{y} = \bar{y} - \tilde{y} = c_1 + c_2e^{x} - x\left(\frac{5x}{2}+8\right)e^{x} = c_1 + e^{x}\left(c_2 - \frac{5x^2}{2} - 8x\right).$$

болады.

2-мысал. $y'' - 2y' + y = \frac{e^{x}}{1+x^2}$ теңдеуінің жалпы шешімін табалық.

Шешуі. Тұрақтыны вариациялау әдісін қолданамыз. Берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$\bar{y} = c_1e^{x} + c_2xe^{x}.\quad y_1 = e^{x},\ y_2 = xe^{x}.$$

Жалпы шешімді $y = c_1(x)e^{x} + c_2(x)\cdot xe^{x}$ түрінде іздейміз. $c_1(x), c_2(x)$-терді табу үшін

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{x} + c_2'(x)xe^{x} = 0 \\ c_1'(x)e^{x} + c_2'(x)(1+x)e^{x} = \frac{e^{x}}{1+x^2} \end{cases}$$

жүйесін шешеміз. Сонда

$$c_2(x) = arctgx + \bar{c}_2,$$

$$c_1(x) = -\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + \bar{c}_1.$$

$c_1(x), c_2(x)$-тердің мәндерін орындарына қойып ізделенген жалпы шешімді табамыз:

$$y = \left(-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c_1\right)e^{x} + (arctgx + c_2)e^{x}x.$$

3-мысал. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табалық.

Шешуі. Дербес шешімді сұрыптау әдісін қолданамыз. Біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$\bar{y} = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}.$$

Берілген теңдеудің оң жағы $f_1(x) = 6x$ және $f_2(x) = e^{-x}$ функцияларының қосындысы. $f_1(x)$ функциясындағы $\alpha = 0$ сипаттаушы теңдеудің екі еселі түбіріне тең, ал $f_2(x)$ функциясындағы $\alpha = -1$ сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің бірсыпырасына тең, онда дербес шешімді

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = (A_0x + A_1)x^2 + A_2xe^{-x}$$

түрінде іздейміз. Соңғы функцияның бірінші, екінші, және үшінші ретті туындыларын алып берілген теңдеуге қойып:

$$6A_0 + A_1 e^{-x} - A_1 x e^{-x} + 6A_0 x + 2A_1 + A_2 x e^{-x} - 6x + e^{-x}.$$

Мұннан $A_0 = 1$, $A_1 = -3$, $A_2 = 1$ тұрақтыларын табамыз.

Сонымен, $y = \bar{y} + \tilde{y} = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + (x-3)x^2 + xe^{-x}$ ізделіпген жалпы шешім болады.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі коэффициенттері тұрақты, екінші ретті дифференциалдық теңдеулерді шешіңіздер.

1. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(0) = 4$; $y'(0) = 2$. Жауабы: $y = e^x(4 - 2x)$.

2. $y'' - y' - 2x = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 3$.

Жауабы: $x(t) = e^{2t} - e^{-t}$.

3. $y'' - 4y' + 29y = 0$.

Жауабы: $y = e^{2x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)$.

4. $y'' + 2y' + 5y = 0$; $y(0)$; $y'(0) = 1$.

Жауабы: $y = \frac{1}{2} e^{-x} \cdot \sin 2x$.

5. $y'' - 2y' = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$.

Жауабы: $y = e^{2x} - 1$.

6. $y'' + 3y' = x + 1$;

Жауабы: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 + x\left(\frac{1}{6}x + \frac{2}{9}\right)$.

7. $y'' - y = e^x$;

Жауабы: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x$.

8. $y'' - 2y' + y = e^x$

Жауабы: $y = c_1 e^x + c_2 e^x x + \frac{1}{2} e^x x^2$.

9. $y'' + y' = \frac{1}{\cos x}$;

Жауабы: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$.

10. $y'' + 4y = ctg2x$.

Жауабы: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \ln|tgx|$.

11. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Жауабы: $y = e^x + \sin x$.

12. $y'' - y' = \frac{1}{1 + e^x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

Жауабы: $y = x + e^x(3 - \ln 2 - x) + (1 + e^x)\ln(1 + e^x) - 2 - \ln 2$.

§14.10 Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

бірінші-ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық. Мұндағы $y_1, y_2, \ldots, y_n$-дер x-тің ізделініп отырған функциялары.

(1) жүйе нормаль жүйе деп аталады.

$$y_1\Big|_{x=x_0} = y_{10}, \quad y_2 = \Big|_{x=x_0} = y_{20}, \ldots, y_n\Big|_{x=x_0} = y_{n_0} \qquad (2)$$

бастапқы шарттарды және (1) жүйені қанағаттандыратын $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функцияларын табу жүйені шешу деп аталады.

(1) жүйе белгісіздерді шығарып тастау әдісі деп аталатын төмендегі әдіспен шешілсді:

(1) жүйенің бірінші теңдеуін x бойынша дифференциалдаймыз:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot\frac{dy_n}{dx}.$$

Мұндағы $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$-тардың орнына (1) жүйедегі мәндерін қоямыз.

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Соңғы теңдікті және x бойынша дифференциалдап, алдыңғыға ұқсас $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$-тардың орнына және (1) жүйедегі мәндерін қоямыз.

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Осылайша жалғастыра отырып, соңында

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

теңдікті аламыз. Сонымен, төмендегілей жүйе пайда болады.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{3}$$

(3) жүйенің алдыңғы $n-1$ теңдеуінен $y_2, y_3, \ldots, y_n$-дерді $x, y_1, \dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$-лардың функциялары ретінде анықтаймыз. Яғни

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2\left(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \\ y_3 = \varphi_3\left(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n\left(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y^{(n-1)}\right). \end{cases} \tag{4}$$

(4) дегі $y_2, y_3, \ldots, y_n$-дердің мәндерін (3) жүйенің соңғы теңдеуіне қоямыз.

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \varphi\left(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}\right). \tag{5}$$

(5) теңдеуді шешіп y_1-ді анықтаймыз:

$$y_1 = \psi_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n). \tag{6}$$

(6) теңдеуді n рет дифференциалдап $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n)}$-ларды табамыз да, оларды (4) жүйеге қоямыз. Сонында

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ y_3 = \psi_3(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \psi_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \end{cases} \tag{7}$$

табылады. Алынған (6), (7) шешімінен бастапқы шарттарды қанағаттандыратын $c_1, c_2, \ldots, c_n$-дердің мәндері табылады.

1-ескерту! Егер (1) жүйе сызықты болса, онда (5) теңдеу де сызықты болады.

2-ескерту! Кейбір жағдайда $y_2, y_3, \ldots, y_n$ белгісіздерді (3) жүйенің алдыңғы $n-1$ теңдеуінен емес, ал одан аз теңдеуінен де шығарып тастауы мүмкін. Мұндай жағдайда n-ші ретті (5) теңдеу орнына реті n-нен аз теңдеу алынады.

Сонымен, баяндалған әдіс арқылы теңдеу жүйесінен жоғары ретті бір теңдеуге оту мүмкін екен. Енді, керісінше, жоғары ретті бір теңдеуден бірінші ретті жүйеге өту есебін қарастыралық. Бізге үшінші ретті теңдеу берілсін, яғни

$$y''' = f(x, y, y', y'').$$

$y = y_1$, $y' = y_2$, $y'' = y_3$ деп алмастыру жасап

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = f(x, y_1, y_2, y_3) \end{cases}$$

жүйесін аламыз.Соңғы жүйе үшінші ретті теңдеуге төмендегідей мағынада пара-пар: егер $y(x)$-үшінші ретті теңдеудің шешімі болса, онда $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$ және $y_3(x) = y''(x)$-лар жүйенің шешімі болады. Ал, егер y_1, y_2, y_3-тер жүйенің шешімі болса, онда $y(x) = y_1(x)$ үшінші ретті теңдеудің шешімі болады.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

түріндегі жүйе автономдық жүйе деп аталады. Соңғы жүйенің ерекшеліктерінің бірі-теңдеулердің оң жағындағы функциялар t-ға тікелей тәуелді емес. Бұл жүйе де жоғарыда баяндалған әдіспен интегралданады.

§14.11 Коэффициенттері тұрақты сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесі

Айталық, сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесі берілсін.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (1)$$

Мұндағы a_{ij} - тұрақты коффициенттер, t аргумент, ал $x_1(t)$, $x_2(t)$,...$x_n(t)$ -ізделініп отырған функциялар. (1) жүйе коэффициенттері тұрақты сызықты біртекті дифференциялдық теңдеулер жүйесі деп аталады.

(1) жүйені де n - ретті бір сызықты дифференциялдық теңдеуге келтіріп шешуге болады, бірақ біз бұл арада басқа әдісті баяндаймыз.

(1) жүйенің дербес шешімін

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt},\ x_2 = \alpha_2 e^{kt},\ ...,\ x_n = \alpha_n e^{kt} \qquad (2)$$

түрінде іздейміз. (2) функциялар (1) жүйенің шешімі болатындай етіп $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ және k -ларды анықтаймыз. Ол үшін (2) - ні (1) жүйеге қоямыз.

$$\begin{cases} k\alpha_1 e^{kt} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)e^{kt}, \\ k\alpha_2 e^{kt} = (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)e^{kt}, \\ - - - - - - - - \\ k\alpha_n e^{kt} = (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n)e^{kt}. \end{cases}$$

Соңғы жүйедегі теңдеулердің екі жағын да e^{kt} -ға қысқартып түрлендіреміз.

Нәтижеде $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ -лерге қарағанда n белгісізді n біртекті теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ - - - - - - - - \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

(3) жүйенің нөлден өзгеше шешімі оның анықтауышы нөлге тең болғанда ғана болады. Олай болса k -ның

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & ... & a_{2n} \\ - - - & - - - & - - - & - - - \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

теңдеуін қанағаттандыратын мәндерін табуды қарастырамыз. (4) теңдеу (1) жүйенің сипаттаушы теңдеуі деп аталады.

1. Сипаттаушы теңдеудің түбірлері нақты және әртүрлі болсын, оларды $k_1, k_2, ..., k_n$ арқылы белгілейік. Әрбір k_i түбірі үшін (3) жүйенің

$$\alpha_1^{(i)},\ \alpha_2^{(i)},\ ...,\ \alpha_n^{(i)}$$

шешімдерін анықтаймыз. Сонда (1) жүйенің шешімі

k_1 түбірі үшін $x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t},\ x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t},\ ...,\ x_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t}$;

k_2 түбірі үшін $x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t},\ x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t},\ ...,\ x_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t}$;

- - - - - - - - - - - - - - -

k_n түбірі үшін $x_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}$, $x_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}$, ..., $x_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}$ функциялары болады. Демек,

$$\begin{cases} x_1 = c_1\alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + c_2\alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + c_n\alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \\ x_2 = c_1\alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + c_2\alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + c_n\alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_1\alpha_n^{(1)} e^{k_1 t} + c_2\alpha_n^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + c_n\alpha_n^{(n)} e^{k_n t} \end{cases} \qquad (5)$$

функциялар жүйесі (1) жүйенің жалпы шешімі болады. (5) функциялар жүйесін тиісті туындыларын алғаннан кейін (1) дифференциялдық теңдеулер жүйесіне тікелей апарып қойып, оны қанағаттандыратынына көз жеткізуге болады. Сонымен қатар, бастапқы шарттарды қанағаттандыратын $c_1, c_2, \ldots, c_n$ тұрақтыларын да (5) жүйеден табуға болады.

2. Сипаттаушы теңдеудің түбірлері әртүрлі, бірақ арасында комплекс түбірлері болсын. Мысалы, екі түйіндес комплекс түбірлері болсын делік:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta.$$

Бұл түбірлерге төмендегі шешімдер сәйкес келеді

$$x_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{(\alpha+i\beta)t} \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \qquad (6)$$

$$x_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} e^{(\alpha-i\beta)t} \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \qquad (7)$$

Мұндағы $\alpha_j^{(1)}$, $\alpha_j^{(2)}$ коэффициенттері (3) жүйе арқылы анықталады.

Егер (6), мен (7) -лер жүйенің шешімі болса, онда олардың нақты және жорымал бөліктері де жүйенің шешімі болатындығын көрсету қиын емес, олай болса:

$$x_j^{(1)} = e^{\alpha t}\left(\lambda_j^{(1)} \cos\beta t + \lambda_j^{(2)} \sin\beta t\right), \qquad (8)$$

$$x_j^{(2)} = e^{\alpha t}\left(\lambda_j^{(1)} \sin\beta t + \lambda_j^{(2)} \cos\beta t\right), \qquad (9)$$

(1) жүйенің дербес шешімдері болады. Мұндағы $\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)}, \bar{\lambda}_j^{(1)}, \bar{\lambda}_j^{(2)}$-лер $\alpha_j^{(1)}$ және $\alpha_j^{(2)}$ -лер арқылы анықталатын нақты сандар.

(8), (9) функциялардың сәйкес комбинациялары берілген жүйенің жалпы шешімінің құрамына енеді.

Біртекті (1) жүйені шешудің баяндалған әдісін Эйлер әдісі деп атайды.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Қандай жүйе дифференциалдық теңдеулердің нормаль жүйесі деп аталады?
2. Белгісіздерді шығарып тастау әдісін баяндаңыз.
3. Қандай жүйелер бір жоғары ретті сызықты дифференциалдық теңдеуге келеді?

4. Жоғары ретті бір теңдеуден бірінші ретті жүйеге қалай өтіледі?

5. Коэффициенттері тұрақты сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешудің Эйлер әдісін баяндаңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4x - 2y - 4z, \\ \dfrac{dz}{dx} = x^2 \cdot y + z \end{cases} \qquad (1)$$

жүйесін шешелік.

Шешуі. (1) жүйенің бірінші теңдеуін x бойынша дифференциалдасақ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4 \cdot 2\frac{dy}{dx} - 4\frac{dz}{dx}$$

болады.

Мұндағы $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$ -тердің орнына (1) дегі мәндерін қоялық. Сонда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4 - 8x + 4y + 8z = 4x^2 + 4y - 4z,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot 4 - 8x - 4x^2 + 8y + 4z.$$

(1) жүйенің бірінші теңдеуінен z-ті табамыз және оның мәнін соңғы теңдеуге қойып түрлендіреміз.

$$z = x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\frac{dy}{dx},$$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4 - 8x - 4x^2 + 8y + 4x - 2y - \dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 4 - 4x \cdot 4x^2$.

Соңғы теңдеудің жалпы шешімі

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{2x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x - \frac{8}{27}. \qquad (3)$$

(3) ні және оның туындысын (2) теңдеуге қоямыз:

$$z = -c_2e^{2x} + \frac{c_1}{4}e^{3x} \quad \frac{x^2}{3} + \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}. \qquad (4)$$

Сонымен (3), (4) функциялар берілген (1) жүйенің жалпы шешімі болады.

2-мысал. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$ жүйені шешелік.

Шешуі. Бірінші теңдеуін t бойынша дифференциалдаймыз.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}-\frac{dz}{dt}=(x+z)-(x+y),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=z-y.$$

Жүйенің бірінші теңдеуінен $z-y=-\frac{dx}{dt}$-ны алып орнына коямыз.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{dx}{dt} \text{ немесе } \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=0$$

Соңғы теңдеудің жалпы шешімі:

$$x(t)=c_1+c_2e^{-t}.$$

Жүйенің бірінші теңдеуінен:

$$y=\frac{dx}{dt}+z=-c_2e^{-t}+z$$

x пен y-тің табылған мәндерін жүйенің үшінші теңдеуіне коямыз:

$$\frac{dz}{dt}=c_1+c_2e^{-t}-c_2e^{-t}+z=c_1+z.$$

Соңғы теңдеуді интегралдап $z=c_3e^t-c_1$-ді табамыз. Онда $y=c_3e^t-c_2e^{-t}-c_1$ болады.

Сонымен $x(t)=c_1+c_2e^{-t}$, $y(t)=c_3e^t-c_2e^{-t}-c_1$, $z=c_3e^t-c_1$ функциялары берілген дифференциялдық теңдеулер жүйесінің жалпы шешімі екен.

3-мысал. $\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=2x_1+x_2,\\ \frac{dx_2}{dt}=3x_1+4x_2\end{cases}$ теңдеулер жүйесінің жалпы шешімін табалық.

Шешуі. Сипаттаушы теңдеуін құрамыз.

$$\begin{vmatrix}2-k & 1\\ 3 & 4-k\end{vmatrix}=0 \text{ немесе } k^2-6k+5=0,\ k_1=1,\ k_2=5.$$

Берілген жүйенің шешімін

$x_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^t$, $x_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^t$ және $x_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{5t}$, $x_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{5t}$ түрінде іздейік.

$k_1=1$ түбір үшін (3) жүйені құрып $\alpha_1^{(1)}$ және $\alpha_2^{(1)}$-лерді анықтаймыз

$$\begin{cases}(2-1)\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(1)}=0,\\ 3\alpha_1^{(1)}+(4-1)\alpha_2^{(1)}=0\end{cases} \text{ немесе } \begin{cases}\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(1)}=0,\\ 3\alpha_1^{(1)}+3\alpha_1^{(1)}=0.\end{cases}$$

Мұнан $\alpha_2^{(1)}=-\alpha_1^{(1)}$; $\alpha_1^{(1)}$ 1десек, $\alpha_2^{(1)}=1$ болады. Онда

$$x_1^{(1)}=-e^t,\quad x_1^{(1)}=e^t.$$

$k_2=5$ түбір үшін де осыған ұқсас жолмен $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(2)}$-лерді анықтаймыз.

$$\begin{cases} 3\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} = 0, \\ 3\alpha_1^{(2)} - 3\alpha_2^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Мұнан $\alpha_2^{(2)} = 3\alpha_1^{(1)}$; $\alpha_1^{(2)} = 1$ десек, $\alpha_2^{(2)} = 3$ болады. Онда

$$x_1^{(2)} = e^{5t}, \quad x_2^{(2)} = 3e^{5t}.$$

Берілген жүйенің жалпы шешімі

$$x_1 = c_1 e^t + c_2 e^{5t},$$

$$x_2 = c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}.$$

функциялары болады.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1-3-жүйелерді белгісіздерді шығарып тастау әдісімен шешіңіз.

1. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -y \end{cases}$ жүйенің жалпы шешімін табыңыз.

Жауабы: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $z = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$ жүйенің $x(0) = 1$, $y(0) = 3$ бастапқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

Жауабы: $x = 2e^{3t} - e^t$; $y = 2e^{3t} + e^t$.

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = 0 \end{cases}$ жүйенің $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ бастапқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз. Жауабы: $x(t) = 2e^{-2t}(1 - 2t)$, $y = 2e^{-2t}(1 + 2t)$.

4-5 жүйелерді Эйлер әдісімен шешіңіз.

4. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 8x_2 - x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2. \end{cases}$

Жауабы: $x_1 = 2c_1 e^{3t} - 4c_2 e^{-3t}$; $x_2 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}$.

5. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 12x_2 - 5x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 12x_2. \end{cases}$

Жауабы: $x_1 = e^{12t}(c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t)$.
$x_2 = e^{12t}(-c_1 \sin 5t + c_2 \cos 5t)$.

§14.12 Дифференциалдық теңдеудің экономикада қолданылуы

Макроэкономикалық динамиканың кейбір қарапайым моделдерін қарастыралық.

1-есеп. Қандай да бір саланың t уақыт сәтінде өндірген өнімі $y(t)$ болсын. Саланың өндірген барлық өнімі қандай да бір тұрақты P бағада сатылады деп ұйғаралық. Онда t уақыт сәтіндегі табыс

$$Q(t) = P\,y(t) \tag{1}$$

болады. Өндірісті кеңейтуге бағытталған инвестицияның шамасын $I(t)$-мен белгілейік. Егер инвестицияның шамасы табысқа пропорционал деп ұйғарсақ, онда

$$I(t) = mQ(t) = mPy(t). \tag{2}$$

Мұндағы m-пропорционалдық коэффициент болып, ол инвестиция нормасы деп аталады және оның мәні $0 < m < 1$ аралығындағы тұрақты.

Табиғи өсу моделінде y өнімін өндіру жылдамдығы (акселерация) инвестицияның шамасына пропорционал деп ұйғарылады, онда

$$y'(t) = \alpha\, I(t) \tag{3}$$

(2)-дегі $I(t)$-ның мәнін (3)-ке қойып

$$y'(t) = k\, y(t) \tag{4}$$

дифференциалдық теңдеуін аламыз, мұндағы $k = mP\alpha$. (4) дифференциалдық теңдеуі айнымалылары ажыратылатын теңдеу тобына жатады, оны шешіп

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}$$

ізделінген функцияны аламыз, мұндағы $y_0 = y(t_0)$.

Бәсекелі базар жағдайында өнімнің бағасы оның көлеміне тәуелді болады (базарда өндірілген өнімнің мөлшері немесе көлемі арта барса, онда оның бағасы кеми түседі), онда (4) теңдеу келесі түрде жазылады:

$$y'(t) = m\alpha P(y)\cdot y \tag{5}$$

(5) теңдеу де айнымалылары ажыратылатын диффенциалдық теңдеуі болып, ол қарапайым интегралдау жолымен шешіледі.

1-мысал. Егер сұраным функциясы $P(y)$

$$P(y) = 3 - 4y$$

теңдеуімен берілсе, онда өндірілген өнім мөлшерінің (көлемінің) өрнегін табыңыз. Акселерация нормасы $\alpha = 1{,}5$, ал инвестиция нормасы $m = 0{,}6$ және $y(0) = 1$ деп алынсын.

Шешуі. Берілгендерді (5) теңдеуге қоямыз

$$y'(t) = 0{,}6 \cdot 1{,}5(3 - 4y)\cdot y.$$

Соңғы теңдеудің айнымалыларын ажыратып интегралдаймыз.

$$\frac{dy}{(3-4y)y}=0{,}9dt,$$

$$\int\frac{dy}{(3-4y)y}=\int 0{,}9dt+C;$$

$$-\int\frac{dy}{4y^2-3y}=0{,}9t+C;$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{dy}{y^2-\frac{3}{4}y+\frac{9}{64}-\frac{9}{64}}=0{,}9t+C;$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{dy}{\left(y-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{64}}=0{,}9t+C;$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{3}{8}}\ln\left|\frac{y-\frac{3}{8}-\frac{3}{8}}{y-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}}\right|=-0{,}9+C;$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{4y-3}{4y}\right|=-0{,}9t+C.$$

$y(0)=1$ шартын пайдаланып $C=-\frac{1}{3}\ln 4$-ны табамыз.

Сонымен, $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{4y-3}{y}\right|=-0{,}9t$; $\frac{4y-3}{y}=e^{-2{,}7t}$; $y=\frac{3}{4-e^{-2{,}7t}}$.

2-есеп. Қандай да бір саланың t уақыт сәтіндегі табысы $Q(t)$, тұтынушы шамасы $C(t)$-мен $I(t)$ инвестицияның қосындысы түрінде берілсін

$$Q(t)=I(t)+C(t) \tag{6}$$

Табыстың осу жылдамдығы да инвестицияға пропорционал деп ұйғаралық, яғни

$$\beta\cdot Q'(t)=I(t) \tag{7}$$

мұндағы β-табыс өнімінің капитал сыйымдылық коэффициенті. Тұтыну функциясы $C(t)$-ны алынатын табыстың қандай да бір бөлігі деп аламыз, яғни

$$C(t)=(1-m)Q(t). \tag{8}$$

Мұндағы m-инвестиция нормасы. (6), (7), (8) теңдіктерден келесі теңдеуді аламыз.

$$Q'(t)=\frac{m}{\beta}Q(t). \tag{9}$$

2-мысал. Егер тұтыну шамасы $C(t=5t)$ функциясымен, табыс өнімінің капитал сыйымдылық коэффициенті $\beta=\frac{2}{3}$ және бастапқы шарт $Q(0)=$

берілген болса, онда табыс функциясы $Q(t)$-ны табыңыз. $t=3$ уақыт сәтіндегі табыс мөлшерін анықтаңыз.

Шешуі. (6), (7), (8) теңдіктерді қолданып келесі теңдеуді аламыз.

$$2Q'(t)-3Q(t)=-15t. \qquad (10)$$

(10) сызықты дифференциалдық теңдеуді $Q=u\vartheta$ алмастыруын қолданып шешеміз.

$$u'\vartheta+u\vartheta'-\frac{3}{2}u\vartheta=-\frac{15}{2}t,$$

$$u'\vartheta+u\left(\vartheta'-\frac{3}{2}\vartheta\right)=-\frac{15}{2}t,$$

$$\vartheta'-\frac{3}{2}\vartheta=0;\ \frac{d\vartheta}{\vartheta}=\frac{3}{2}dt;\ \ln\vartheta=\frac{3}{2}t;\ \vartheta=e^{\frac{3t}{2}};$$

$$u'\cdot e^{\frac{3t}{2}}=-\frac{15}{2}t;\ du=-\frac{15}{2}te^{-\frac{3t}{2}}dt;$$

$$u=-\frac{15}{2}\int te^{-\frac{3t}{2}}dt=5te^{-\frac{3t}{2}}+\frac{10}{3}e^{-\frac{3t}{2}}+C.$$

Сонымен, $Q(t)=5t+\frac{10}{3}-3e^{\frac{3t}{2}}$. $t=3$ болғанда $Q(3)=\frac{55}{3}-3e^{4,5}$.

«Дифференциалдық теңдеулер» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар

Негізгі теориялық сұрақтар

1. Дифференциалдық теңдеулер, жалпы ұғымдар.
2. Айнымалылары ажыратылған және ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер.
3. Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеулер.
4. Бірінші ретті сызықты теңдеулер. Бернулли теңдеуі.
5. Толық дифференциалдық теңдеулер.
6. Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер, жалпы ұғымдар.
7. Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер.
8. Сызықтық жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер, жалпы шешімдерінің құрылымы.
9. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімі.
10. Оң жағы арнайы түрде берілген коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықты теңдеулердің дербес шешімін табу.

Үсынылатын тапсырмалардан бір нұсқасының шешу үлгісін келтіреміз.

1-мысал. $y''x+y=0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. Берілген теңдеу айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу тобына жатады, сондықтан оны айнымалыларын ажыратып мынадай түрде жазуға болады

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{tgx}.$$

Теңдіктің екі жағын да интегралдасақ:

$$\ln|y| = -\ln|\sin x| + c.$$

Алынған шешімді ықшамырақ өрнектеу үшін $c = \ln C_1 x$ десек $(c_1 > 0)$, онда, $\ln|y| = -\ln|\sin x| + \ln c_1$. Осыдан $|y| = \frac{C_1}{|\sin x|}$, немесе $y = \pm\frac{C_1}{\sin x}$ шығады.

$\pm C_1$ ді және C мен белгілесек, $y = \frac{C}{\sin x}$ функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі болады.

2-мысал. $\frac{dy}{y} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ теңдеуін шешелік.

Шешуі. Берілген теңдеудің оң жағындағы $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ функциясы нөл өлшемді біртекті функция. Шынында да,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{\lambda x \cdot \lambda y} = \frac{\lambda^2(x^2 - y^2)}{\lambda^2 xy} = \frac{x^2 - y^2}{xy} = \lambda^0 f(x,y),$$

яғни берілген диффференциалдық теңдеу біртекті. $y = ux$ деп белгілеп жаңа функция енгіземіз. Оны дифференциалдап, яғни

$$\frac{du}{dx} = x\frac{du}{dx} + u,$$

берілген теңдеуге қойсақ:

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{x^2 - u^2x^2}{ux^2}; \quad x\frac{du}{dx} + u = \frac{1 - u^2}{u}; \quad x\frac{du}{dx} = \frac{1 - 2u^2}{u};$$

айнымалыларын ажыратамыз. $\frac{udu}{1 - 2u^2} = -\frac{dx}{x}$, мұны интегралдаймыз

$$-\frac{1}{4}ln\left|1 - 2u^2\right| = ln|x| - \frac{1}{4}lnc_1. \quad \text{Осыдан} \quad \left|1 - 2u^2\right| = \frac{c_1}{x^4}; \quad 1 - 2u^2 = \pm\frac{c_1}{x^4};$$

$1 - 2u^2 = \frac{c}{x^4}$; мұндағы $c = \pm c_1$, $u = \frac{y}{x}$ болғандықтан $1 - 2\frac{y^2}{x^2} = \frac{c}{x^4}$ немесе $x^4 - 2x^2y^2 = c$ жалпы шешімі.

3-мысал. $y' - y = -xe^x$ теңдеудің $y(0) = 1$ шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

Шешуі. Берілген теңдеу сызықты, сондықтан $y = uv$ алмастыру жасап, оның туындысын табалық, яғни $y' = u'v + uv'$; орнына қойсақ:

$$u'v + uv' - uv = -xe^x.$$

$u'v + u(v' - v) = -xe^x$; $v' - v = 0$; $\frac{dv}{dx} - v = 0$; $\frac{dv}{dx} = v$; $\frac{dv}{v} = dx$;

$\ln v = x$; $v = e^x$; v-ның мәнін орнына қоямыз.

$u' \cdot e^x = -xe^x$; $u' = -x$; $\frac{du}{dx} = -x$; $du = -xdx$; $u = -\frac{x^2}{2} + c$.

$y = \left(-\frac{x^2}{2} + c\right)e^x$ функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі.

Енді берілген шарттан пайдаланып дербес шешімін табамыз.

$$1 = (-0 + c)e^0; \quad c = 1$$

Демек,

$$y = \left(-\frac{x^2}{2} + 1\right)e^x \text{ функциясы дербес шешімі.}$$

4-мысал. $(1+x)y'' - y' = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі: $y' = p(x)$ деп алмастыру енгіземіз. $y'' = p'(x)$. Теңдеуге қойсақ

$(1+x)p' - p = 0$; $(1+x)\frac{dp}{dx} = p$, айнымалыларын ажыратамыз:

$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{1+x}$, интегралдасақ: $\ln|p| = \ln|1+x| + \ln c$; $p = (1+x)c_1$;

$p = y'$ болғандықтан, $y' = (1+x)c_1$; мұны және интегралдаймыз

$y = c_1\frac{(1+x)^2}{2} + c_2$ функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі

5-мысал. $y'' + 6y' + 9y = 0$ теңдеуінің $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

Шешуі: $k^2 + 6k + 9 = 0$ сипаттаушы теңдеуін шешеміз.

$k_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3$ $k_1 = k_2 = k = -3$; онда $y_1 = e^{-3x}$; $y_2 = xe^{-3x}$;

$y = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$ - жалпы шешімі. Енді берілген шарттардан пайдаланып дербес шешімін табамыз. Ол үшін жалпы шешімдегі x орнына 0, ал y-тің орнына 1-ді қоямыз., онда $c_1 = 1$. жалпы шешімінің туындысын алып

$$y' = -3c_1e^{-3x} + c_2e^{-3x} - 3xe^{-3x}c_2;$$

x-тің орнына 0, ал y'-тің орнына 2-ні, c_1-дің орнына 1-ді қоямыз.

$2 = -3 + c_2$; $c_2 = 5$; сонымен, $y = e^{-3x} + 5xe^{-3x}$-дербес шешімі.

6-мысал. $4y'' - 4y' + y = -3e^{\frac{x}{2}}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі: $4k^2 - 4k + 1 = 0$ сипаттаушы теңдеуінің шешімдері: $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$.

Берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің шешімі $\bar{y}$ мынадай:

$$\bar{y} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x}$$

$f(x)$-ке, яғни берілген теңдеудің оң жағындағы функцияда $\alpha = \frac{1}{2} = k_1 = k_2$ болғандықтан, дербес шешім $\tilde{y}$-ді мына түрде іздейміз.

$\tilde{y} = Ax^2 e^{2x}$. A-ны табу үшін $\tilde{y}$-ның 1,2-ретті туындыларын алып берілген теңдеуге коямыз.

Сонда $\tilde{y}' = 2Axe^{2x} + \frac{A}{2}x^2 e^{2x}$; $\tilde{y}'' = 2Axe^{2x} + Axe^{2x} + Axe^{2x} + \frac{A}{4}x^2 e^{2x}$;

$4 \cdot 2Ae^{2x} + 4 \cdot 2Axe^{2x} + 4\frac{A}{4}x^2 e^{2x} - 4 \cdot 2Axe^{2x} - 4\frac{A}{2}x^2 e^{2x} + Ax^2 e^{2x} = 3e^{2x}$;

$8Ae^{2x} = -3e^{2x}$; $8A = -3$; $A = -\frac{3}{8}$; $\tilde{y} = -\frac{3}{8}x^2 e^{2x}$;

Демек, $y = \bar{y} + \tilde{y} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} - \frac{3}{8}x^2 e^{2x}$ функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі.

Енді, тиісті тақырыптарды әдебиеттерден оқып үйреніп және есептерді шешудің келтірілген үлгісінен пайдаланып өздігінше жаттығу үшін тапсырмалардың келесі нұсқаларын ұсынамыз.

I- нұсқа

1. $xy' + y = y^2$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = \frac{1}{1 - cx}$).

2. $(x - y)y' - y = 0$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және $y(1) = 1$ шартты канағаттандыратын дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y \ln y + x + cy = 0$; $c = -1$).

3. $(x + e^y)dy - dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз. (Жауабы: $(y + c)e^y = x$).

4. $xy'' + 7y' + x = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$ ретін төмендету мүмкін болған дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = -\frac{x^2}{16} - \frac{1}{48x^2} + \frac{1}{12}$).

5. $y'' - 8y' + 9y = 0$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және $y(0) = y'(0) = 1$ шарттарын канағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

6. $y'' - 5y' + 6y \quad x^2 \quad x+1$ коэффициенттері тұрақты біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{11}{54}$).

2 – нұсқа

1. $\left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)dy + ydx = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз. (Жауабы: $2\sqrt{y} + 2\sqrt{x} - \ln y = c$).

2. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$ біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\sin\frac{y}{x} = cx$).

3. $y'\cos x + y\sin x = 1, y(0) = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y = \sin x + c\cos x; c = 0$).

4. $xy'' + y' - 0, y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$ ретін төмендегу мүмкін болған дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = \ln x$).

5. $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

6. $y'' + 3y' + 2y = x^2$ коэффициенттері тұрақты біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$).

3 - нұсқа

1. $y - y' = xy'$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = c(x+1)$).

2. $(2y - 3x)y' + 4x - 3y = 0, y(0) = 1$ біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $2x^4 - 3xy + y^2 = c; c = 1$).

3. $(1 + x - y)dy - dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз. (Жауабы: $x = y + ce^y$).

4. $\left(1+x^2\right)y''-2xy'=2x,\ y(0)=y'(0)=1$ ретін төмендету мүмкін болған дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y-2x+\frac{2x^3}{3}=x-1$).

5. $6y''-y'=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

6. $y''+3y'=x+1$ коэффициенттері тұрақты біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=c_1e^{-3x}+c_2+x\left(\frac{1}{6}x+\frac{2}{9}\right)$).

4 - нұсқа

1. $x\left(1-y^2\right)dx+\left(y+x^2y\right)dy=0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз. (Жауабы: $1-y^2=c\left(1+x^2\right)$).

2. $y^2dx+x^2dy=xydy$ біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз. (Жауабы: $y=ce^{\frac{y}{x}}$).

3. $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x},\ y(-1)=0$ сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y=\left(x^2+\frac{c}{x}\right)e^{-x};c=0$).

4. $xy''+2y'=x^2,\ y(1)=y'(1)=1$ ретін төмендету мүмкін болған дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=\frac{x^3}{12}-\frac{3}{4x}+\frac{5}{3}$).

5. $2y''-5y'=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=-\frac{5}{2}$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

6. $y''+y'=5x+3$ коэффициенттері тұрақты біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциал теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=c_1+c_2e^{-x}+\left(\frac{5}{2}x-2\right)\cdot x$).

5 – нұска

1. $2xy' + y^2 = 1$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{1+y}{1-y} = cx$).

2. $(x+y)y' + x - y = 0$, $y(1) = 0$ біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $\ln\left(x^2+y^2\right) - c - 2arktg\frac{y}{x}; c > 0$).

3. $(x+2-2y)dy - dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $x = 2y + ce^y$).

4. $xy'' \ln x = y'$, $y(2) = 3$, $y'(2) = 0$ ретін төмендету мүмкін болған дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = c_1 x \ln x - c_1 x + c_2; c_1 = 0; c_2 = 3$).

5. $y'' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \sqrt{2}$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

6. $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ коэффициенттері тұрақты біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{12}e^{5x}$).

6 – нұска

1. $x(1+2y)dx + \left(1+x^2\right)dy = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз. (Жауабы: $y = \frac{c - \left(1+x^2\right)}{2\left(1+x^2\right)}$).

2. $xyy' = x^2 + y^2$ біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз. (Жауабы: $y^2 = x^2 \ln cx^2$).

3. $y' - yctgx = \sin 2x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y = 2\sin^2 x + c\sin x, c = 0$).

4. $xy'' = 2y' + x^3$, $y(1) = y'(1) = 1$ ретін төмендету мүмкін болған дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = \frac{x^4}{4} + c_1 x^3 + c_2; c_1 = 0; c_2 = -\frac{3}{4}$).

5. $y'' - 9y = 0$, $y(0) = y'(0) = 6$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциал теңдеуінің жалпы және дербес шешімін табыңыз.

6. $y'' + y = e^x$ тұрақты коэффициентті, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x$).

7 – нұсқа

1. $y^2 + 2xyy' = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $4 - y^2 = cx$).

2. $yy' + x + 2y = 0$, $y(0) = 1$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y + x = ce^{-(x+1)}$).

3. $(2e^x - x)dy - dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $x = ce^y + e^x$).

4. Ретін төмендету арқылы $x^3 y'' + x^2 y' = 1$, $y(1) = y'(1) = 1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = \frac{1}{x} + c_1 \ln x + c_2; c_1 = 2; c_2 = 0$).

5. $3y'' - 4y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{4}{3}$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімін табыңыз.

6. $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$ коэффициенттері тұрақты біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{2}{3} xe^{-x}$).

8 – нұсқа

1. $(1 - y^2)dx + xydy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз. (Жауабы: $cx^2 = y^2 - 1$).

2. $xy' = y + x^2 e^x$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = x(e^x + c)$)

3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 1$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right); c = 1$)

4. Ретін төмендету арқылы $x^2y'' - (y')^2 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \frac{1}{2}$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = x - \ln(x+1) + \ln 2$, $y = const$).

5. $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімін табыңыз.

6. $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ коэффициенттері тұрақты біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{12}e^{5x}$).

9 – нұсқа

1. $y'x^2 + 1 = y - y'x$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = 1 + c - \frac{c}{x+1}$).

2. $(x - y)y' = x + y$, $y(1) = 0$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $arctg\frac{y}{x} = \ln c \cdot \sqrt{x^2 + y^2}; c = 1$).

3. $(x + e^{3y})dy + dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $x = \left(c - \frac{1}{4}e^{4y}\right)e^{-y}$).

4.Ретін төмендету арқылы $xy'' - 4x\sqrt{x} + y' = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \frac{3}{5}$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = \frac{16}{25}x^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{5}\ln x + \frac{9}{25}$).

5. $y'' - 7y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімін табыңыз.

6. $y''-2y'+y=e^x$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=c_1e^x+c_2xe^x+\frac{1}{2}x^2e^x$).

10– нұска

1. $dy=a^{x+y}dx$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $a^{-x}+a^{-y}=C$).

2. $xy'=3y(\ln y-\ln x)$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=x\cdot e^{1+cx^3}$).

3. $x^2y'=2xy+3,\ y(1)=-1$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y=x^2\left(C-\frac{1}{x^3}\right);C=0$).

4. Ретін төмендету арқылы $xy''-y'-x^2=0,\ y(1)=-\frac{1}{6},\ y'(1)=0$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$).

5. $y''-3y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

6. $y''+4y=3\sin x-\cos x$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{3}\cos x+\sin x$).

11– нұска

1. $(y-1)dy+(x+2)dx=0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $(x+2)^2+(y-1)^2=C^2$).

2. $2xyy'+x^2=y^2,\ y(1)=1$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $x^2+y^2=Cx;C=2$).

3. $(x+e^y)dy-dx=0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $(y+c)e^y=x$).

4. Ретін төмендету арқылы $2(y')^2 = y''(y-1)$, $y(1)=2$, $y'(1)=1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = 1 - \frac{1}{x-2}$).

5. $y'' - 2y' + y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^x(C_1 + C_2 x)$).

6. $y'' + y' = \cos 2x$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{1}{6}\sin 2x$).

12– нұска

1. $(x-1)dy - 2(y-2)dx = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = 2 + C(x-1)^2$).

2. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{4y}$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\ln xC = \frac{2y^2}{x^2}$).

3. $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^x(\ln x + C), C = 0$).

4. Ретін төмендету арқылы $(1+y)y'' = (y')^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\ln(1+y) = x$).

5. $y'' - 8y' + 16y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$).

6. $y'' + 9y = 2\sin 3x - \cos 3x$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{6}x(2\cos 3x + \sin 3x)$).

13– нұска

1. $dy - 3(x-1)^2 dx = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз. (Жауабы: $y = (x-1)^3 + C$).

2. $x^2y' = y^2 - xy,\ y(2) = -1$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y = \frac{2x}{1 + Cx^2}; C = \frac{5}{4}$).

3. $(e^{2x} + x)dy - dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $x = e^x\left(e^x + C\right)$).

4. Ретін төмендету арқылы $yy'' + (y')^2 = (y')^3,\ y(0) = y'(0) = 1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = x + 1$).

5. $9y'' - 6y' + y = 0$ коэффициенттері тұрақты біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{\frac{1}{3}x}(C_1 + C_2x)$).

6. $y'' - 2y' + y = 3e^x + x + 1$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{3}{2}e^x x^2 + x + 3$).

14 – нұсқа

1. $ctgxdy + ydx = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C \cdot \cos x$).

2. $y^2 = 2xy - x^2y'$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = x(x - y)C$).

3. $xy' - 2y = x^4e^{-x^2},\ y(1) = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y = x^2\left(C - \frac{1}{2}e^{-x^2}\right), C = \frac{1}{2e}$).

4. Ретін төмендету мүмкін болған $3y'\left[1 + (y')^2\right] = y'',\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\ln\left|\sin(C_1 + 3y)\right| = x + C_2; C_1 = \frac{\pi}{4}; C_2 = \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$).

5. $4y'' - 20y' + 25y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{\frac{5}{2}x}(C_1 + C_2x)$).

6. $y'' - 2y' + y = xe^x + x^2$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{1}{6}e^x x + x^3 + 4x + 6$).

15– нұсқа

1. $y - y' = y^2 + xy'$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = \frac{C(x+1)}{1 + C^2(x+1)}$).

2. $8xyy' - x^2 - 4y^2 = 0$, $y(1) = \frac{1}{2}$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y^2 = \frac{1}{4}x^2 - Cx$; $C = 0$).

3. $2(4e^{-y} + x)dy + dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $x = e^{-2y}(C - 8e^y)$).

4. Ретін төмендету арқылы $yy'' + 3(y')^2 = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y^4 = 4(x + \frac{1}{4})$).

5. $4y'' - 12y' + 9y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{\frac{3}{2}x}(C_1 + C_2x)$).

6. $y'' + y' - 2y = x^2e^{3x}$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \frac{1}{8}e^{3x}(x^2 - x + \frac{7}{18})$).

16– нұсқа

1. $(y+3)dx - (x-2)dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C(x-2) - 3$).

2. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = xe^{Cx}$).

3. $y' + y\operatorname{ctg}x - \cos x = 0,\ y(\frac{\pi}{4}) = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y = \frac{1}{\sin x}(C - \frac{1}{4}\cos 2x),\ C = 0$).

4. Ретін төмендету арқылы $y'' = -2y(y')^3,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{1}{3}y^3 + y = x$).

5. $4y'' + 12y' + 9y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{-\frac{3x}{2}}(C_1 + C_2 x)$).

6. $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}$).

17 – нұсқа

1. $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз. (Жауабы: $arctgy - \frac{1}{2}e^{2x} + \ln\sqrt{1+y^2} + e^x = C$).

2. $xy^2y' = x^3 + y^3,\quad y(1) = 1$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $\ln xC = \frac{y^3}{3x^3};\ C = e^{\frac{1}{3}}$).

3. $(1 + 2x - y)dy - 2dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз. (Жауабы: $x = \frac{1}{2}y + Ce^y$).

4. Ретін төмендету арқылы $y^3y'' = -2,\ y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $2x^2 + y^2 = 1$).

5. $4y'' + 4y' + y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{-\frac{1}{2}}(C_1 + C_2 x)$).

6. $y'' + 4y = ctg2x$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\ln|tgx|$).

18 – нұска

1. $\sec^2 x tgy dx + \sec^2 y tgx dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $tgx \cdot tgy = C$).

2. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = -x \ln \ln Cx$).

3. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$, $y(0) = e$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y = (x^2 + C)e^{x^2}$, $C = 1$).

4. Ретін төмендету арқылы $yy'' = y^2 y' + (y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\ln \frac{y}{1+y} = y + \ln 2$).

5. $y'' - 10y' + 25y = 0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{5x}(C_1 + C_2 x)$).

6. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$).

19-нұска

1. $y'x^2 + 1 = y - y'x$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y - 1 = \frac{Cx}{x+1}$).

2. $x^2 y' - xy = 2y^2$, $y(1) = 1$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $-\frac{x}{y} = 2\ln x + C$; $C = -1$).

3. $(3 - 2y - x)dy - dx = 0$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $x = 5 - 2y + Ce^{-y}$).

4. Ретін төмендету мүмкін болған $yy'' + (y')^2 = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y^2 - x^2 = 1$).

5. $y''-6y'+9y=0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=e^{3x}(C_1+C_2x)$).

6. $y''+y=\frac{1}{x}$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\int\frac{\sin x}{x}dx+\sin x\int\frac{\cos x}{x}\cdot dx$).

20-нұсқа

1. $3(y+1)dx-(1+x)dy=0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=C(1+x^3)-1$).

2. $xy'=y(\ln y-\ln x)$ біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=xe^{1+Cx}$).

3. $xy'-y=x\ln x$, $y(1)=-1$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы және дербес шешімдерін табыңыз.

(Жауабы: $y=Cx+\frac{1}{2}x\ln^2 x$; $C=1$).

4. Ретін төмендету арқылы $y''=y$, $y(1)=0$, $y'(1)=1$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\ln(y+\sqrt{y^2+1})=x-1$).

5. $9y''+12y'+4y=0$ коэффициенттері тұрақты, біртекті 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=e^{-\frac{2x}{3}}(C_1+C_2x)$).

6. $y''-4y'+3y=3x^2+x$ коэффициенттері тұрақты, біртекті емес 2-ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің $y(0)=0$; $y'(0)=3$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=-5e^x+\frac{3}{5}e^{3x}+x^2+3x+\frac{10}{3}$).

21-нұсқа

1. $(x+4)dy-(y-2)dx=0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін және $M(0;-1)$ нүктесінен өтетін дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=C(x+4)+2$; $y=-\frac{3}{4}x-1$).

2. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\sin\frac{y}{x} = Cx$).

3. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$ сызықты дифференциалдық теңдеуінің $y(-1) = e$ шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = x^2e^{-x}$).

4. $xy' + y - y^2 \ln x = 0$ Бернулли теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y(1 + \ln x + Cx) = 1$).

5. $(y')^2 + yy'' = yy'$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{y^2}{2} = C_1e^x + C_2$).

6. $y'' - 4y' = 8x + 4$ теңдеудің $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = \frac{13}{8} + \frac{3}{8}e^{4x} - x^2 - \frac{3}{2}x$).

22 – нұсқа

1. $(y-1)dy + (x+2)dx = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін және $y(0) = -1$ шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $(y-1)^2 + (x+2)^2 = 2C$, $(y-1)^2 + (x+2)^2 = 8$).

2. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $x^2 + y^2 = Cy$).

3. $y' + y\cos x = \sin 2x$ теңдеудің $y(0) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = 2(\sin x - 1) + 2e^{-\sin x}$).

4. $y''' = \cos x + x^2$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = -\sin x + \frac{1}{60}x^5 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$).

5. $16y'' - 24y' + 9y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{\frac{3}{4}x}(C_1 + C_2x)$).

6. $y'' + 2y' + 2y = x^2 + 1$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$).

23 – пұска

1. $(x-1)dy-2(y-2)dx=0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін және $y(0)=-1$ шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=C(x-1)^2+2$. $y=-3(x-1)^2+2$).

2. $2xy=y'\left(x^2+y^2\right)$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y^2-x^2=Cy$).

3. $y'+2y=y^2e^x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=\frac{1}{Ce^{2x}+e^x}$).

4. $y''=xe^x$ теңдеудің $y(0)=1$ $y'(0)=0$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=(x-2)e^x+x+3$).

5. $\ddot{x}-\dot{x}-2x=0$ теңдеудің $x(0)=0$ $\dot{x}(0)=3$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $x(t)=e^{2t}-e^t$).

6. $y''+2y'+2y=2x^3-1$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+x^3-3x-\frac{1}{2}$).

24-пұска

1. $3(y+1)dx-(1-x)dy=0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін және $M(0;1)$ нүктесінен өтетін дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=C(x+1)^3-1$, $y=-1$).

2. $y^2+x^2y'=xyy'$ теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $e^{\frac{y}{x}}=Cy$).

3. $xy'+y-xe^{-x^2}=0$ теңдеуінің $y(1)=\frac{1}{2e}$ шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=\frac{1}{2x}e^{-x^2}$).

4. $2(y')^2=(y-1)y''$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y=-\frac{1}{C_1^2}(x+C_2)(y-1)$).

5. $\ddot{x}-2\dot{x}=0$ теңдеуінің $x(0)=0$ $\dot{x}(0)=2$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $x(t)=e^{2t}-1$).

6. $y'' - 4y' = 4x^3 - 8x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x$).

25-нұсқа

1. $(y+3)dx - (x-2)dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін және $y(0) = -1$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C(x-2) - 3$,
$y = -x - 1$).

2. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $\arcsin\frac{y}{x} = \ln Cx$).

3. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = \frac{1}{\sqrt{2(e^x + C)}}$).

4. $y'' = 2y^3$ теңдеуінің $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = \frac{1}{1-x}$).

5. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0$ теңдеуінің $s(0) = 1$, $s'(0) = 1$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

(Жауабы: $s(t) = e^{-t}(\cos t + 2\sin t)$).

6. $y'' - 4y' = 12x^2$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

(Жауабы: $y = C_1 + C_2 e^{4x} - x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}x$).

Сан қатары туралы түсінік. $a_1,a_2,...,a_n,...$ сан тізбегін қарастыралық.

Анықтама.

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

түріндегі өрнек сан қатары немесе қысқаша қатар деп аталады.

$a_1,a_2,...,a_n$ сандары қатардың мүшелері, ал a_n саны қатардың жалпы мүшесі деп аталады.

Мына түрдегі $S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; S_3 = a_1 + a_2 + a_3,...,S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ қосындылары, яғни қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындылары (1) қатардың дербес қосындылары деп аталады.

Енді

$$S_1,S_2,...,S_n,... \qquad (2)$$

сан тізбегін қарастыралық.

Анықтама. Егер де (2) тізбектің шегі S бар болса, онда (1) қатар жинақты, S саны (1) қатардың қосындысы деп аталады.

Егер (2) тізбектің шегі болмаса, онда (1) қатар жинақсыз деп аталады.

(1) қатар жинақты болған жағдайда, оны келесі түрде жазуға болады

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n + \quad \text{немесе} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (3)$$

Біз, шын мәнінде, қатарлармен көптен бері танысып, өйткені, осы уақытқа дейін e мен π сандарын білеміз, яғни $e = 2,718...$ ал $\pi = 3,14...$ екендігі белгілі. Осы сандарды (3) теңдік бойынша былай жазуға болады

$$e = 2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{2}{10^4} + ...$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + ...$$

Егер $\{a_n\}$ тізбегі ретінде, өзімізге мектеп математика пәнінен таныс бірінші мүшесі $b \neq 0$, ал еселігі q болатын геометриялық прогрессияны қарастырсақ, онда

$$b + bq + bq^2 + ... + bq^{n-1} + ... \qquad (4)$$

қатарын аламыз. $q \neq 1$ болғанда бұл қатардың дербес қосындысы

$$S_n = b + bq + ... + bq^{n-1} = \frac{b(1-q^n)}{1-q} = \frac{b}{1-q} - \frac{bq^n}{1-q}$$

түрінде болады. Осыдан:

1) егер $|q| < 1$ болса, онда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{1-q} - \frac{bq^n}{1-q}\right) = \frac{b}{1-q},$$

яғни (4) қатар жинақты және оның қосындысы

$$S = \frac{b}{1-q}$$

болады;

2) егер $|q|>1$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, яғни (4) қатар жинақсыз;

3) егер $q=1$ болса, онда $S_n = nb$ болады және $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, яғни (4) қатар жинақсыз;

4) егер $q=-1$ болса, онда (4) қатар былай жазылады

$$b - b + b - b + \ldots$$

Мұндай қатардың дербес қосындылары

$$S_1 = b,\ S_2 = 0,\ S_3 = b,\ S_4 = 0, \ldots$$

болады. Ал мұндай тізбектің шегі болмайтындығы белгілі (Анализге кіріспе бөлімін қараңыз).

Сонымен мынандай қорытындыға келдік:

(4) геомстриялық қатар $|q|<1$ болғанда жинақты, ал $|q|\geq 1$ болғанда жинақсыз.

Енді

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \tag{5}$$

қатарын қарастырайық. Бұл қатардың жалпы мүшесін, яғни $\frac{1}{n(n+1)}$ -ді мына түрде жазуға болады

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \tag{6}$$

(6) теңдікті пайдаланып (5) қатардың дербес қосындысы S_n -ді былай жазуға болады

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Жақшаларды ашсақ бірінші мен соңғы қосылғыштардан басқалары өзара жойылып кетеді. Демек,

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

болады. Олай болса

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

яғни (5) қатар жинақты екен.

Жинақты қатардың қасиеттері.

1^0. Егер де (1) қатар жинақты болса, онда осы қатардан саны шекті мүшелерін алып тастағаннан кейінгі қатар да жинақты болады.

2^0. Егер (1) қатар жинақты және оның қосындысы S-ке тең болса, онда қандайда бір c саны үшін

$$ca_1 + ca_2 + ... + ca_n + ...$$

қатары да жинақты болады және оның қосындысы $c \cdot S$-ке тең.

Мынандай қатарларды қарастыралық

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

$$b_1 + b_2 + ... + b_n + ... \qquad (7)$$

$$(a_1 + b_1) + (a_1 + b_2) + ...(a_n + b_n) + ... \qquad (8)$$

3^0. Егер (1) мен (7) қатарлары жинақты және олардың қосындылары сәйкес S_1 мен S_2-ге тең болса, онда (8) қатар да жинақты болады және оның қосындысы $(S_1 + S_2)$-ге тең болады.

Қатарды зерттегенімізде біздің алдымызда негізінен екі мәселе тұрады. Олардың біріншісі берілген қатарды жинақтылыққа зерттеу; екіншісі жинақты қатардың қосындысын табу.

Алдымен қатардың жинақты болуының қажетті шартын қарастыралық.

Теорема. Егер қатар жинақты болса, онда оның жалпы мүшесінің шегі нөлге тең болады, яғни

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Дәлелдеу. Айталық (1) қатар жинақты және оның қосындысы S-ке тең болсын. Кез келген натурал n саны үшін $S_n = S_{n-1} + a_n$ теңдігі орындалады. Олай болса осы теңдіктен

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

теңдігін алып, шекке көшсек

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Ескерту! Осы теоремаға пара-пар мынандай тұжырымдама жасауға болады:

Егер қатардың жалпы мүшесінің шегі нөлге ұмтылмаса, онда ол қатар жинақсыз болады.

Мысал келтірелік.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + ... + \frac{n}{n+1} + ...$$

қатары үшін

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0,$$

яғни бұл қатар жинақсыз.

Анықтама.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... \qquad (9)$$

қатары гармониялық қатар деп аталады.

Ескерту! (9) гармониялық қатар жинақсыз. Бұл ескертуден мынандай қорытынды жасаймыз: жоғарыда дәлелденілген теорема қатардың жинақты болуының тек қажетті ғана шарты бола алады, себебі, мысалы (9) гармониялық қатар үшін

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

бірақ ол қатар жинақсыз.

§15.2 Оң қатарлар

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

қатарын қарастырамыз.

Енді осындай қатарлардың жинақтылық мәселесіне тоқталалық.

Теорема. Оң қатар жинақты болу үшін оның дербес қосындыларының шектеулі болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. Жеткіліктілігі. Қатар оң болғандықтан кез келген n үшін $S_n = S_{n-1} + a_n$ теңдігі орындалады, олай болса қатардың дербес қосындыларының тізбегі өспелі болады.

Олай болса, өзімізге Анализге кіріспе бөлімінен белгілі тұжырым бойынша $\{S_n\}$ тізбегінің шегі бар болады.

Қажеттілігі. Айталық (1) қатар жинақты болсын. Онда жинақтылықтың анықтамасы бойынша оның дербес қосындыларының шегі бар болады. Олай болса тізбектің шектерінің қасиеті бойынша қатардың дербес қосындыларының тізбегі шектелген болады.

Ескерту! Бұл критерийдің практикалық қолдануына қарағанда теориялық маңызы зор. Алайда, ол төмендегі қатар жинақтылығының жеткілікті шарттарының негізі болады.

Қатар жинақтылығының жеткілікті шарттары.

1-теорема (салыстыру белгісі).

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (2)$$

оң қатарлары үшін $a_n \le b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ теңсіздіктері орындалса, онда (2) қатардың жинақтылығынан (1) қатардың жинақтылығы шығады; ал (1) қатар жинақсыз болса, онда (2) қатар да жинақсыз болады.

Дәлелдеу. (1) мен (2) қатардың дербес қосындыларын сәйкес S_n және σ_n арқылы белгілесек, онда кез келген n үшін

$$S_n \le \sigma_n \qquad (3)$$

теңсіздігі орындалады. (2) қатар жинақты болғандықтан $\{\sigma_n\}$ тізбегі шектелген болады, яғни барлық n-дер үшін кандайда бір C саны табылады да $\sigma_n \le C$ теңсіздігі орындалады. Олай болса (3) теңсіздік бойынша $\{S_n\}$ тізбегі де шектелген болады. Сондықтан (1) қатар жинақты болады.

1-мысал.

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots \qquad (4)$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \qquad (5)$$

қатарларын қарастырайық. Кез келген n үшін

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$$

теңсіздігі орындалады және (5) қатар жинақты (жоғарыдағы 1.1 тақырыбын қараңыз). Олай болса 1-теорема бойынша (4) қатарда жинақты болады.

2-мысал.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \qquad (6)$$

қатары мен 1.2 тақырыбындағы гармониялық қатарды қарастырайық. Кез келген $n \geq 2$ үшін

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

теңсіздігі орындалады және гармониялық қатар жинақсыз болғандықтан (6) қатар да жинақсыз болады.

2-теорема (салыстыру белгісі). Егерде (1) және (2) қатарлар үшін

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = d \neq 0 \qquad (7)$$

шегі бар болса, онда бұл екі қатар бір мезгілде не жинақты, не жинақсыз болады.

3-мысал. Жалпы мүшесі

$$a_n = \frac{n+3}{n^3 + 3n^2 + 5n + 1} \qquad (8)$$

болатын қатар мен жалпы мүшесі

$$b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

болатын (4) қатарды қарастырайық. Бұл қатарлар үшін

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2 (n+3)}{n^3 + 3n^2 + 5n + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + 5n^2 + 7n + 3}{n^3 + 3n^2 + 5n + 1} = 1.$$

Олай болса жалпы мүшесі (8) теңдігі болатын

$$\frac{4}{10} + \frac{5}{31} + \ldots + \frac{n+3}{n^3 + 3n^2 + 5n + 1} + \ldots$$

қатары да жинақты, себебі (4) қатар жинақты.

3-теорема. (Даламбер белгісі). Егерде (1) қатар үшін

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

болса, онда:

1) $d < 1$ болғанда (1) қатар жинақты;

2) $d > 1$ болғанда (1) қатар жинақсыз болады.

4-мысал. $\frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \ldots + \frac{3^n}{n!} + \ldots \qquad (9)$

катарын қарастырайық. Бұл қатарда

$$a_n = \frac{3^n}{n!},\ a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n!}{3^n(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0 < 1,$$

яғни (9) қатар жинақты.

5-мысал.

$$1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \ldots + \frac{n^n}{n!} + \ldots \qquad (10)$$

қатары үшін

$$a_n = \frac{n^n}{n!},\ a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n n!}{n^n n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

яғни (10) қатар жинақсыз.

4-теорема (Коши белгісі). Егер (1) қатар үшін

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = d$$

болса, онда:

1) $d < 1$ болғанда (1) қатар жинақты;

2) $d > 1$ болғанда (1) қатар жинақсыз болады.

6-мысал. $\frac{1}{5} + \left(\frac{2}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{11}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n + \ldots$ қатар жинақты, себебі

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3} < 1.$$

7-мысал. $\frac{6}{4} + \left(\frac{10}{7}\right)^2 + \left(\frac{14}{10}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{4n+2}{3n+1}\right)^n + \ldots$ қатары жинақсыз, себебі

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4n+2}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n+2}{3n+1} = \frac{4}{3} > 1.$$

5-теорема (интегралдық белгі). Айталық $[1;+\infty)$ аралығында анықталған $y = f(x)$ функциясы монотонды кемімелі болсын және кез келген натурал n үшін $a_n = f(n)$ шарттарын қанағаттандырсын. Онда (1) қатардың жинақты болуы үшін

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

меншіксіз интегралдың жинақты болуы қажетті және жеткілікті.

8-мысал.

$$1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots \qquad (11)$$

қатары α-ның қандай мәндерінде жинақты немесе жинақсыз болатынын көрсетелік. Мұндағы α кез келген оң сан.

Ол үшін $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha+1}}$ $(x\geq 1)$ функциясын қарастыралық. Бұл функция $[1;+\infty)$ аралығында кемиді, себебі оның туындысы осы аралықта теріс. Шынында да

$$f'(x)=-\frac{\alpha}{x^{\alpha}}<0.$$

Сондықтан (11) қатардың жинақты немесе жинақсыз болуы

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} \qquad (12)$$

меншіксіз интегралына байланысты. (12) меншіксіз интеграл $\alpha>1$ болғанда жинақты, ал $\alpha\leq 1$ болғанда жинақсыз. Шынында да

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{N\to+\infty}\int_{1}^{N}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\Bigg|_{1}^{N}=\lim_{N\to+\infty}\left[\frac{N^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}+\frac{1}{\alpha-1}\right].$$

Соңғы шек α-ға байланысты. Егер $\alpha>1$ болса, ол $\frac{1}{\alpha-1}$-ге тең. Егер $\alpha\leq 1$ болса, ол шексіздікке тең. Олай болса (11) қатар $\alpha>1$ болғанда жинақты, ал $\alpha\leq 1$ болғанда жинақсыз болады.

9-мысал.

$$1+\frac{1}{\sqrt{2^{3}}}+\frac{1}{\sqrt{3^{3}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^{3}}}+\ldots$$

қатары жинақты, себебі $\alpha=\frac{3}{2}>1$.

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$$

қатары жинақсыз, себебі $\alpha=\frac{2}{3}<1$.

§15.3 Таңбалары айнымалы қатарлар

Алдыңғы тақырыпта мүшелері оң қатарлар жөніндегі мәселелерді қарастырдық. Енді мүшелерінің таңбалары әртүрлі болып келетін қатарлар жөнінде әңгіме қозғалық.

Таңбалары айнымалы қатарлардың ішінде мүшелерінің таңбалары ауысып отыратын, яки таңбалары ауыспалы қатарлар жиі кездеседі. Егер де бірінші мүшесінің таңбасы оң деп ұйғарсақ, онда таңбалары ауыспалы қатар мына түрде жазылады:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ..., \qquad (1)$$

мұндағы $a_n (n = 1,2,...)$ оң сандар.

Лейбниц теоремасы. Егер (1) таңбалары ауыспалы қатар төмендегі шарттарды қанағаттандырса:

1) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n ...$, яғни мүшелері кемімелі болса;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ болса, онда бұл қатар жинақты болады және $n \to \infty$ оның қосындысы қатардың бірінші мүшесі a_1-ден аспайды.

Дәлелдеу. Кез келген n үшін $a_n > a_{n+1}$ болғандықтан n шексіздікке ұмтылғанда a_n нөлге ұмтылады. (1) қатардың жұп мүшелерінен тұратын

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

дербес қосындысын қарастырайық. Теореманың бірінші шарты бойынша жақшалардың ішіндегі айырмалардың барлығы оң болады. Сондықтан $\{S_{2n}\}$ тізбегі өспелі тізбек.

Енді S_{2n}-ді мына түрде жазалық

$$S_{2n} = a_1 - \left[(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + ... + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}\right].$$

Квадрат жақшаның ішіндегі өрнек оң. Олай болса кез келген n үшін $S_{2n} < a_1$ болады, яғни $\{S_{2n}\}$ тізбегі шектелген тізбек. Сонымен $\{S_{2n}\}$ тізбегі өспелі, шектелген тізбек екен. Олай болса $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ болады.

Екінші жағынан $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ және шарт бойынша

$$\lim_{n \to \infty} a_{2n+1} = 0.$$

Олай болса

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = S.$$

Сонымен

$$0 < S < a_1.$$

1-мысал. $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + ...$ қатары жинақты, себебі жоғарыдағы Лейбниц теоремасының екі шарты да орындалады. Шынында да

1) $1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > ... > \frac{1}{n^2} > ...,$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$

Абсолют және шартты жинақты қатарлар

Айталық

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ... \qquad (1)$$

таңбалары ауыспалы қатар берілсін. Осы қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған

$$|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ... \qquad (2)$$

оң қатарын қарастырайық.

1-анықтама. Егер (2) қатар жинақты болса, онда (1) қатар абсолют жинақты қатар деп аталады.

Теорема. Кез келген абсолют жинақты қатар жинақты болады.

1-мысал

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n} \tag{3}$$

қатарының абсолют жинақты екендігін дәлелдеңік. Ол үшін оның мүшелерінің абсолют шамаларынан тұратын.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n} \tag{4}$$

қатарын құралық.

Біріншіден $\sin\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n}$ теңсіздігі орындалатындықтан, екіншіден, (4) қатардың мүшелері жинақты

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^2}$$

қатарының сәйкес мүшелерінен аспайтындықтан (4) қатар жинақты болады. Олай болса (3) қатар абсолют жинақты.

2-анықтама. Егер (1) қатар жинақты, ал (2) қатар жинақсыз болса, онда (1) қатар шартты **жинақты қатар** деп аталады.

Мысалы,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots$$

қатары шартты жинақты қатар. Себебі, бұл қатар Лейбниц теоремасы бойынша жинақты. Екіншіден, бұл қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған он қатар гармониялық қатар. Ал ол қатардың жинақсыз екені белгілі.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Сан қатарының анықтамасын беріңіз.
2. Дербес қосындылар деген не?
3. Жинақты қатар деп қандай қатарды айтады?
4. Жинақсыз қатар деп қандай қатарды айтады?
5. Жинақты қатарлардың қасиеттерін атаңыз.
6. Қатардың жинақтылығының қажеттілік шартын жазыңыз.
7. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ болса, қатар жинақты болама?
8. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болса, кез келген қатар жинақты болама?
9. Қандай қатар гармоникалық қатар деп аталады?
10. Гармоникалық қатар жинақтыма немесе жинақсыз ба?
11. Мүшелері он қатарларды салыстыру белгісін жазыңыз.

12. Жинақтылықтың Даламбер, Коши белгілерін жазыңыз.

13. Жинақтылықтың интегралдық белгісін жазыңыз.

14. Таңбалары ауыспалы қатар деп қандай қатарға айтылады?

15. Лейбниц теоремасын жазыңыз және дәлелдеңіз.

16. Абсолютті және шартты жинақтылықтың анықтамасын беріңіз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1–мысал: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

Шешуі: Берілген қатардың жалпы мүшесі:

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}.$$

a_n-ді төмендегіше түрлендіріп жазуға болады:

$$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

қатардың n мүшесінің дербес қосындысын анықтаймыз:

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2},\ \text{яғни}\ S=\frac{1}{2}.$$

Ескерту!. Орқашан да қатардың қосындысы осылайша жеңіл табыла бермейді. Сондықтан да оларды жинақтылыққа зерттейді.

2-мысал: $1+\frac{2}{5}+\frac{3}{9}+\frac{4}{13}+\ldots+\frac{n}{4n-3}+\ldots$ қатардың жинақтылығын зерттеңіз:

Шешуі:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n-3}=\frac{1}{4}\neq 0.$$

Жинақтылықтың қажеттілік шарты орындалмайды, сондықтан қатар жинақсыз.

3-мысал: $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{17}+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз:

Шешуі: Мүшелерінің бөлімдерінің айырмасы екінің өсіп бара жатқан дәрежелерінен тұратындығын байқауға болады, сондықтан берілген қатарды былайша жазамыз:

$$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{2^4+1}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}+\ldots$$

Бұл қатарды мынадай жинақты геометриялық қатармен салыстырамыз.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Кез келген n үшін

$$\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$$

теңсіздігі орындалатындықтан, салыстыру белгісі бойынша берілген қатар жинақты.

4-мысал. $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Даламбер белгісі бойынша

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}:\frac{1}{n2^n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}<1,$$

онда қатар жинақты.

5-мысал. $\frac{1}{10}+\frac{1\cdot2}{10^2}+\frac{1\cdot2\cdot3}{10^3}+\ldots+\frac{1\cdot2\cdot3\ldots n}{10^n}+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Даламбер белгісі бойынша

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\ldots n(n+1)}{10^{n+1}}:\frac{1\cdot2\cdot3\ldots n}{10^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty,$$

демек, қатар жинақсыз.

6-мысал. $\frac{1}{2\ln^3 2}+\frac{1}{3\ln^3 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln^3 n}+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. $f(x)=\frac{1}{x\ln^3 x}$ функциясын қарастырамыз. $f(x)$ функциясы $x>1$ облысында оң және кемімелі функция.Сондықтан берілген қатардың жинақтылығы $\int_2^\infty\frac{1}{x\ln^3 x}dx$ меншіксіз интегралдың жинақтылығына эквивалентті болады.

$$\int_2^\infty\frac{1}{x\ln^3 x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^b(\ln x)^{-3}d(\ln x)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)_2^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2\ln^2 2}-\frac{1}{2\ln^2 b}\right)=\frac{1}{2\ln^2 2}$$

Сонымен, меншіксіз интеграл жинақты, онда берілген қатарда жинақты.

7-мысал. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі.

$$\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{4x+1}}dx=\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\int_0^b(4x+1)^{-\frac{1}{2}}d(4x+1)=\frac{2}{4}\lim_{b\to\infty}\sqrt{4x+1}\Big|_0^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\sqrt{4b+1}=\infty.$$

Меншіксіз интеграл жинақсыз, онда берілген қатарда жинақсыз.

8-мысал. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ қатардың қосындысын 0,01-ге дейінгі дәлдікпен табу үшін оның неше мүшесін қосу керек?

Шешуі. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ деп аламыз.

$$\int_{k+1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}\le R_k\le\int_{k}^{\infty}\frac{dx}{x^2}\ \text{ немесе }\ \frac{1}{k+1}\le R_k\le\frac{1}{k}.$$

Мұнан, $k\ge 100$ болғанда қатардың қалдығы 0,01 -ден аспайтындығы шығады. Олай болса, қатардың қосындысын 0,01-ге дейінгі дәлдікпен табу үшін оның 100 мүшесін қосу керек екен.

9-мысал. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots$ қатардың жинақтылығын зерттеңіз, егер жинақты болса оның қосындысын 0,01-ге дейінгі анықтықпен табу үшін неше мүшесін қосу керек?

Шешуі. Берілген қатар Лейбниц теоремасының шарттарын қанағаттандырады сондықтан ол жинақты. Қатардың қалдығын есептеу үшін $|R_k|<a_{k+1}$ теңсіздіктен пайдаланамыз. Онда:

$$R_k<\frac{1}{(k+1)^2}.$$

$$\frac{1}{(k+1)^2}\le\frac{1}{100},\ \text{немесе}\ k\ge 9.$$

Сонымен, қатардың қосындысын 0,01–ге дейінгі дәлдікпен табу үшін оның тоғыз мүшесін ғана қосу жеткілікті екен. Бұл 8–мысалға қарағанда 10 еседен де артық жеңіл есептеледі екен.

Өзіндік жұмыстар үшін тапсырмалар

1. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.
2. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+6}{100n-1}$ қатарды қажеттілік шарт бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$ қатарды қажеттілік шарт бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

5-8–қатарларды салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

5. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$
6. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots$

7. $1+\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{9\sqrt{3}}+\ldots$

8. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\ldots$

Мына қатарларды Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$; 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^n}$; 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}$;

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+7}$; 13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$; 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$;

Мына қатарларды интеграл белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

15. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$; 16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$;

Мына қатарларды Лейбниц теоремасы бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(4n+1)^n}$;

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ қатардың қосындысын 0,01–ге дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

§15.4 Дәрежелі қатарлар

1-анықтама.

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

түріндегі қатар функциялы қатар деп аталады. Мұндағы $u_1(x),u_2(x),\ldots$ x-тің қандай да бір функциялары. Олардағы x-ке әртүрлі мәндер бере отырып, біз әртүрлі сан қатарын аламыз. Ол қатарлар жинақты болуы да, болмауы да мүмкін.

2-анықтама. (1) функциялы қатар жинақты болатын x-тің мәндерінің жиыны оның **жинақтылық обылысы деп аталады.**

3-анықтама. $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ (1′) түріндегі қатар дәрежелі қатар деп аталады. Мұндағы $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ тұрақты сандар. Олар дәрежелі қатардың коэффициенттері деп аталады.

Дәрежелі қатарлар функциялы қатардың дербес жағдайы болады.

Кез келген дәрежелі қатардың жинақтылық обылысы бос жиын болмайды, себебі (1′) қатар $x=0$ болғанда жинақты.

Дәрежелі қатарлар үшін келесі тұжырымның маңызы өте зор.

Абель теоремасы. Егер де (1′) қатар нөлден өзгеше $x=x_0$ мәнінде жинақты болса, онда ол $|x|<|x_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын x-тің барлық мәндерінде абсолют жинақты болады. Егер де (1′) катар $x=x_1$ мәнінде

жинақсыз болса, онда $|x|>|x_1|$ теңсіздігін қанағаттандыратын x-тің барлық мәндерінде де жинақсыз болады.

Дәлелдеу. Шарт бойынша

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n + \ldots \qquad (1')$$

қатары жинақты болғандықтан n шексіздікке ұмтылғанда оның жалпы мүшесі $a_nx_0^n$ нөлге ұмтылады. Демек $\{a_nx_0^n\}$ тізбегі шектелген тізбек. Олай болса, қандайда бір M оң саны табылады да барлық n - дер үшін $|a_nx_0^n| < M$ теңсіздігі орындалады.

(1′) қатардың мүшелерінің абсолют шамасынан құрылған

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \ldots + |a_nx^n| + \ldots \qquad (2)$$

қатарын қарастыралық.

Айталық $|x|<|x_0|$ болсын, онда $|a_nx_0^n| = |a_nx_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$; $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$

болғандықтан (2) қатардың мүшелері

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots. \qquad (3)$$

жинақты қатарының сәйкес мүшелерінен аспайды. (3) қатар сөлшігі $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ болатын геометриялық қатар болғандықтан ол жинақты болады.

Сондықтан (2) қатар жинақты, олай болса (1′) қатар абсолют жинақты болады.

Енді теореманың екінші бөлімін дәлелдейік. Кері жорық, яғни (1′) қатар $x = x_1$ мәнінде жинақсыз, бірақ $|x|>|x_1|$ шартын қанағаттандыратын x-тер үшін (1′) қатар жинақты болсын дейік. Онда теореманың бірінші бөлімі бойынша (1′) қатар $x = x_1$ мәнінде жинақты болады. Сойтіп қарама-қайшылыққа келдік. Теорема толық дәлелденді.

Абель теоремасы геометриялық тұрғыдан келесі мәселелерді білдірді: егер (1′) қатар x_0 нүктесінде жинақты болса, онда ол қатар $(-|x_0|; |x_0|)$ аралығының барлық ішкі нүктелерінде абсолют жинақты болады, ал бұл аралықтың сыртқы нүктелерінде жинақсыз болады.

1-теорема. Дәрежелі қатар үшін тек төмендегі үш жағдай ғана болады:

1) жалғыз ғана $x = 0$ нүктесінде жинақты болады;

2) x-тің барлық мәндерінде жинақты болады;

3) R оң саны табылады да $(-R; R)$ аралығының ішкі нүктелерінде жинақты, ал сыртқы нүктелерінде жинақсыз болады. $(-R; R)$ аралығының шеткі $x = -R$ және $x = R$ нүктелерінде жинақты да, жинақсыз да болуы мүмкін.

Бұл теоремадан мынадай қорытынды шығады: дәрежелі қатардың жинақтылық облысы не жалғыз ғана нүкте болады, не бүкіл сан өсі болады, не $(-R;R)$ түріндегі аралықтар болады.

4-анықтама. $(-R;R)$ аралығы дәрежелі қатардың жинақтылық аралығы, ал R саны жинақтылық радиусы деп аталады.

Ескерту! Жоғарыдағы теореманың бірінші жағдайында $R=0$, ал екінші жағдайында $R=\infty$ деп аламыз.

Енді дәрежелі қатардың жинақтылық радиусын табу мәселесін қарастыралық.

2-теорема. Егер де

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \tag{3}$$

шегі бар және ол нөлден өзгеше болса, онда дәрежелі қатардың жинақтылық радиусы

$$R=\frac{1}{D}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{4}$$

шамасына тең болады.

1-мысал.

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{5}$$

қатарының жинақтылық радиусын табалық. Бұл қатар үшін $a_n=\frac{1}{n!}$. Олай болса $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$. Сондықтан (4) теңдіктің негізінде

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,$$

яғни (2) қатар бүкіл сан өсінде жинақты болады.

2- мысал.

$$x+(2x)^2+(3x)^3+\ldots+(nx)^n+\ldots \tag{6}$$

дәрежелі қатарының жинақтылық радиусын табалық.

Қатардың жалпы мүшесі $(nx)^n$-ке тең. Сондықтан $n>\frac{1}{|x|}$ шартын қанағаттандыратын x-тің нөлден өзгеше мәндері үшін $(n|x|)^n>1$ болады. Бұл теңсіздік (6) қатардың барлық $x\neq 0$ үшін жинақсыз болатындығын көрсетеді. Олай болса (6) қатардың жинақтылық облысы тек $x=0$ нүктесінен ғана тұрады, яғни жинақтылық радиусы нолге тең.

Дәрежелі қатарлардың қасиеттері

Айталық жинақтылық интервалы $(-R,R)$ болатын дәрежелі қатардың қосындысы $f(x)$ функциясына тең, яғни

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \qquad (7)$$

болсын. Бұл жағдайда $f(x)$ функциясы $(-R,R)$ аралығында дәрежелі қатарға жіктеліпеді деп айтады.

Дәрежелі қатарды мүшелеп дифференциалдау туралы теорема. Айталық $f(x)$ функциясы $(-R,R)$ аралығында дәрежелі қатарға жіктелінсін, яғни (7) теңдік орындалсын. (1) дәрежелі қатарды мүшелеп дифференциалдау арқылы алынған

$$a_1+2a_2x+...+na_nx^{n-1}+... \qquad (8)$$

қатарын қарастыралық. Сонда:

1) (8) қатардың да жинақтылық радиусы R-ге тең болады;

2) $(-R,R)$ аралығында $f(x)$ функциясының туындысы $f'(x)$ бар болады және

$$f'(x)=a_1+2a_2x+...+na_nx^{n-1}+... \qquad (9)$$

теңдігі орындалады.

Дәрежелі қатарды мүшелеп интегралдау туралы теорема.

Егер де $f(x)$ функциясы $(-R,R)$ аралығында дәрежелі қатарға жіктелінсе, онда бұл функция осы аралықта интегралданады және қосындының интегралы қатардың мүшелерінің интегралдарының қосындыларына тең болады

Басқаша айтқанда, егер $[\alpha;\beta]\subset(-R,R)$ болса, онда

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta a_0dx+\int_\alpha^\beta a_1xdx+\int_\alpha^\beta a_2x^2dx+...+\int_\alpha^\beta a_nx^ndx+...$$

теңдігі орындалады.

5-анықтама. Егер кез-келген мейлінше кіші $\varepsilon>0$ саны үшін сондай бір оң N саны табылып, $n>N$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n –дер үшін $|R_n(x)|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда (1) қатар бірқалыпты жинақталады деп аталады. Мұндағы $R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...$, $x-(1)$ қатардың бірқалыпты жинақталу облысының нүктесі.

Вейерштрасс белгісі. Егер $u_1(x),u_2(x),...,u_n(x),...$ функциялары $|u_1(x)|\le M_1,|u_2(x)|\le M_2,...,|u_n(x)|\le M_n,...$ теңсіздіктерді қанағаттандырса және

$$M_1+M_2+...+M_n+...$$

сан қатары жинақты болса, онда $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$ функциялы қатар бірқалыпты және абсолют жинақты болады.

3-теорема. Үзіліссіз функциялардан құралған бірқалыпты жинақты қатарды мүшелеп интегралдауға болады.

4-теорема. Егер берілген қатардың туындысынан шыққан қатар бірқалыпты жинақты болса, онда берілген қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады.

§15.5 Функциялардың дәрежелі қатарларға жіктелінуі. Маклорен қатары

Практикада берілген функцияны дәрежелі қатарға қалай жіктеу мәселесін білудің маңызы өте зор. Ол үшін төмендегі екі мәселені білуге тиіспіз:

1) берілген аралықта функцияны дәрежелі қатардың қосындысы түрінде өрнектеуге бола ма?

2) егер болса, ол қатар қалай табылады?

Біз екінші сауалдың жауабын іздеуден басталық.

Қандайда бір $[-2,2]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясы дәрежелі қатардың қосындысына жіктеледі деп ұйғаралық, яғни

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^4+\ldots \qquad (1)$$

болсын. Осы қатардың $a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$ коэффициенттерін табалық.

Алдыңғы тақырыпта жинақтылық облысында жататын кез келген $[-R;R]$ кесіндісінде (1) дәрежелі қатарды қалауымызша мүшелеп дифференциалдауға болатыны жөнінде айтқанбыз. Сондықтан $(\alpha;\beta)$ аралығында жатқан кез келген x үшін

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots$$

$$f''(x)=2\cdot1\cdot a_2+3\cdot2a_3x+4\cdot3a_4x^2+\ldots$$

$$f'''(x)=3\cdot2\cdot1\cdot a_3+4\cdot3\cdot2\cdot a_4x+\ldots$$

$$----------$$

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)\ldots3\cdot2\cdot1\cdot a_n+\ldots$$

Осы алынған теңдіктер мен (1) теңдіктен $x=0$ деп ұйғара отырып

$$f(0)=a_0,$$

$$f'(0)=a_1,$$

$$f''(0)=2\cdot1\cdot a_2,$$

$$----------$$

$$f^{(n)}(0)=n!a_n$$

теңдіктердің немесе кез келген n үшін $(n=0,1,2,\ldots)$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

формуласын аламыз.

Анықтама. Айталық $f(x)$ функциясы $x=0$ нүктесінің аймағында анықталсын және осы нүктеде оның барлық туындылары бар болсын. Сонда

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+... \qquad (2)$$

қатары $f(x)$ функциясының Маклорен қатары деп аталады.

Енді жоғарыдағы екінші сауалдың жауабын келесі тұжырым түрінде беруге болады.

Теорема. Егер де $f(x)$ функциясы $x=0$ нүктесінің аймағында дәрежелі қатарға жіктелсе, ол міндетті түрде Маклорен қатары болады.

Функцияның Маклорен қатарына жіктелуінің жеткілікті шарты.

Айталық $f(x)$ шексіз дифференциалданатын функция болсын. Оған (2) Маклорен қатарын құруға болады. Қандай шарттар орындалғанда осы Маклорен қатарының қосындысы $f(x)$ функциясымен сәйкес келстіндігін көрсетелік. Біз «Бір айнымалы функциясының дифференциалдық есептеулер» бөлімінде

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

түріндегі Маклерон формуласы жөнінде айтқанбыз. Мұндағы

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<c<x \qquad (3)$$

қалдық мүше болатын.

Егер $S_n(x)$ арқылы Маклорен қатарының дербес қосындысын белгілесек, Маклорен формуласы былай жазылады

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x). \qquad (4)$$

(4) теңдіктен Маклорен қатарының $f(x)$ функциясына жинақталу мәселесінің қалдық n шексіздікке ұмтылғанда $R_n(x)$-тің шегін зерттеу мәселесіне байланысты екендігіне көз жеткізу қиын емес.

Теорема. Айталық $f(x)$ функциясы $(-R,R)$ аралығында анықталған және шексіз дифференциалданатын болсын. Егер де осы аралықтың барлық нүктелері үшін қандай да бір M саны табылып

$$\left|f^{(n)}(x)\right|<M\ \ (n=0,1,2,...) \qquad (5)$$

теңсіздігі орындалса, онда осы интервалда Маклорен қатары $f(x)$ функциясына жинақты болады.

Дәлелдеу. (4) формуласы бойынша $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ болатынын дәлелдесек жеткілікті. Теореманың шарттарынан және (3) теңдіктен

$$|R_n(x)|<\frac{Md^{n+1}}{(n+1)!}$$

теңсіздігі шығады.

Бұл теңсіздіктің оң жағы жинақты

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n}{n!}$$

қатарының мүшелерінен тұрақты M санымен ғана өзгешеленеді. Қатар жинақтылығының қажетті белгісі бойынша $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d^n}{n!} = 0$. Осыдан қатардың қалдық мүшесінің шегі нөлге тең болатындығы шығады.

e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $arctgx$ және $(1+x)^k$ функциясының Маклорен қатарына жіктелінулері

1) $f(x) = e^x$. $(-d, d)$ аралығының кез келген x нүктесі үшін

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^d.$$

Олай болса алдынғы тақырыптағы теорема бойынша $(-R, R)$ аралығындағы x үшін e^x функциясы өзінің Маклорен қатарының қосындысына тең. Екінші жағынан кез келген n үшін $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ болғандықтан

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (6)$$

Дәл осылай етіп төмендегі жіктеулерге көз жеткізу қиын емес.

2) $f(x) = \sin x$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (7)$$

3) $f(x) = \cos x$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (8)$$

4) $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ қатары геометриялық қатар болғандықтан $|x| < 1$ болғанда жинақты және оның қосындысы $\frac{1}{1-x}$ функциясына тең, яғни

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (8а)$$

(8а) теңдіктен $x = -t$ алмастыруын жасап

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots \qquad (9)$$

теңдігін аламыз. Осы соңғы теңдікті 0-ден x-ке дейін мүшелеп интегралдасақ, яғни

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots\right) dt$$

немесе

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \qquad (10)$$

формуласын аламыз.

Дәл осы жолмен (8а) теңдіктен $x = -t^2$ алмастыруын жасап

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (11)$$

формуласын аламыз.

5) $f(x) = (1+x)^\alpha$, мұндағы α кез келген сан.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (12)$$

Ескерту! Егер (12) формулада $\alpha = n \in N$ болса, онда бұл формула өзімізге мектеп математика пәнінен белгілі Ньютон биномымен сәйкес келеді.

Өзін-өзі тексеру сұрақтар

1. Дәрежелі қатардың жинақтылық облысының анықтамасын беріңіз.
2. Абель теоремасын жазыңыз, дәлелдеңіз.
3. Қатардың жинақтылық радиусы, жинақтылық интервалы деген не?
4. Қатардың жинақтылық радиусы қалай табылады?
5. Дәрежелі қатардың қасиеттерін атаңыз.
6. Қандай қатарды Маклорен қатары деп атайды?
7. Маклорен қатарының $f(x)$ функциясына жинақты болуының қажетті және жеткілікті шартын беріңіз.
8. e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $arctgx$ және $(1+x)^\alpha$ функцияларының Маклорен қатарына жіктелімін жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1–мысал. $1 + \frac{2x}{3} + \frac{3x^2}{9} + \frac{4x^3}{27} + \ldots$ қатардың жинақтылық радиусын табыңыз.

Шешуі. Жалпы мүшесі

$$a_n = \frac{nx^{n-1}}{3^{n-1}}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)x^n}{3^n};$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{3^{n-1}} : \frac{n+1}{3^n}\right| = 3\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 3.$$

Берілген қатардың жинақтылық интервалы (-3; 3).

Интервалдың шеткі нүктелерінде, яғни $x = \pm 3$-те жинақтылығын анықтайық. $x = -3$-те

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 \ldots + (-1)^{n-1} n \ldots -$$

Бұл қатарда жинақтылықтың қажеттілік шарты, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ орындалмайды, сондықтан ол жинақсыз. Сол сияқты $x = 3$-те шығатын қатар да жинақсыз.

Сонымен, қатардың жинақтылық интервалы (-3; 3) екен.

2-мысал. $f(x) = \arcsin x$ функциясын Маклорен қатарына жіктеңіз.

Шешуі. (12)–қатарда $\alpha = -\frac{1}{2}$ деп x-ті $-x^2$-пен алмастырсақ, онда:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \dots$$

Бұл теңдікті $|x| < 1$ теңсіздікті қанағаттандыратын $(0, x)$ интервалда интегралдасақ:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots$$

Бұл қатардың жинақтылық интервалы (-1; 1).

Өзіндік жұмыстар үшін тапсырмалар

1–6–қатарлардың жинақтылық радиустарын табыңыз:

1. $1 + \frac{x}{2\cdot 5} + \frac{x^2}{3\cdot 5^2} + \frac{x^3}{4\cdot 5^3} + \frac{x^3}{4\cdot 5^3} + \dots$ Жауабы: $R = 5$.
2. $1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots$ Жауабы: $R = 1$.
3. $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots$ Жауабы: $R = 1$.
4. $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$ Жауабы: $R = \infty$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-2)^n \cdot x^{2n}$;
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}$;
7. $f(x) = arctgx$ функциясын Маклорен қатарына жіктеңіз.
8. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ функциясын Маклорен қатарына жіктеңіз.

§15.6 Дәрежелі қатардың жуық есептеулерге қолданылуы

1. Логарифмдік функцияның мәндерін есептейік. 15.5-тақырыбының (10) формуласында x-ті $-x$-ке алмастырсақ:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

(10) формуладан соңғы теңдікті айырамыз:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right). \qquad (1)$$

Мұнда $|x|<1$;

$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$ деп алмастыру орындаймыз; онда

$$x=\frac{1}{2n+1}.$$

Кез келген $n>0$-де $0<x<1$, сондықтан

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\frac{n+1}{n}=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\dots\right),$$

мұнан

$$\ln(n+1)-\ln n=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\dots\right) \qquad (2)$$

(2) қатарда $n=1$ десек:

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\dots\right). \qquad (3)$$

*ln*2-ні берілген дәлдікпен есептеу үшін (3) қатардың n мүшесінің қалдығын бағалайық.

$$R_n=2\left(\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}+\frac{1}{(2n+5)\cdot 3^{2n+5}}+\dots\right)<$$

$$<2\left(\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+1)3^{2n+3}}+\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+5}}+\right)=$$

$$=\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{3^{2n+3}}+\frac{1}{3^{2n+5}}+\dots\right)=\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}\cdot 4}.$$

Егер *ln*2-ні 10^{-6} дәлдікпен есептеу қажет болса, онда n-нің мәнін $R_n<10^{-6}$ болатындай етіп алынады. (3) формуладан 6 мүшенің қосындысын алсақ *ln*2 10^{-6} дәлдікпен есептелген болады.

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\frac{1}{11\cdot 3^{11}}\right)$$

(2)-формулада n=2 десек:

$$\ln 3\approx\ln 2+2\left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\frac{1}{7\cdot 5^7}+\dots\right).$$

Осылайша кез-келген бүтін санның логарифмін берілген дәлдікпен есептей аламыз.

2. Анықталған интегралды жуық есептеу.

а) $\int_a^a e^{x^2} dx$ - ды жуық есептейік.

e^{x^2}-ның алғашқы функциясы элементар функциямен өрнектелмейді. Сондықтан e^x-тің жіктелімінде x-ті $-x^2$-қа алмастырсақ:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

Соңғы теңдікті (0, а) аралықта мүшелеп интегралдасақ:

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = a - \frac{a^3}{1!3} + \frac{a^5}{2!5} - \frac{a^7}{3!7} + \frac{a^9}{4!9} - \dots$$

Бұл формуладан пайдаланып берілген интегралды кез-келген а үшін кез-келген дәлдікпен жуық есептеуге болады.

б) $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$ интегралды есептейік.

$Sinx$ -тің жіктелімінен пайдаланып

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

жіктелімді аламыз, оны мүшелеп интегралдасақ:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = a - \frac{a^3}{3!3} + \frac{a^5}{5!5} - \frac{a^7}{7!7} + \dots$$

Бұл интеграл да кез-келген а үшін кез-келген дәлдікпен жуық есептеледі.

3. Дифференциалдық теңдеулерді дәрежелік қатардың көмегімен интегралдау.

$$y'' = F(x, y, y') \tag{4}$$

теңдеудің $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$ бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу есебін қарастыралық.

Бұл есепті шешу үшін $y = f(x)$-ті Маклорен қатары түрінде іздейміз:

$$y = f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \tag{5}$$

Мұндағы $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \dots$-ды (4) теңдеудің және бастапқы шарттың көмегімен анықтаймыз. Бастапқы шарттардан:

$$f(0) = y_0; \quad f'(0) = y_0'.$$

(4) теңдеуден

$$f''(0) = y''\big|_{x=0} = F(0, y_0, y_0').$$

(4)-теңдеудің екі жағын x бойынша дифференциалдаймыз:

$$y''' = F_x'(x, y, y') + F_y'(x, y, y') \cdot y' + F_{y'}'(x, y, y') \cdot y'' \tag{6}$$

$$f'''(0) = y'''\big|_{x=0} = F_x'(0, y_0, y_0') + F_y'(0, y_0, y_0') \cdot y_0' + F_{y'}'(0, y_0, y_0').$$

(6) теңдеудің екі жағын дифференциалдап $f''(0)$-ді, т.с.с. анықталады. Табылғандарды (5) формулаға қойып берілген есептің қатар түріндегі шешімін аламыз (қатардың жинақтылық ықылысында).

Мысалы, $y'' = e^y + x$ теңдеудің $y(0)=1, y'(0)=0$ бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімін табайық.

Шешуі:

$$f(0)=1; f'(0)=0;$$

$$f''(0) = y''|_{x=0} = e;$$

$$y''' = e^y \cdot y' + 1.$$

$$f'''(0) = y'''|_{x=0} = e \cdot 0 + 1 = 1.$$

$$y^{IV} = e^y \cdot (y')^2 + e^y \cdot y''$$

$$f^{IV}(0) = y^{IV}|_{x=0} = e \cdot 0 + e \cdot e = e^2$$

(5) формулаға қойсақ:

$$f(x) = 1 + \frac{e}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{e^2}{24}x^4 + \ldots$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Дәрежелі қатардың қалдығын бағалау не үшін қажет?
2. Логарифмдік функцияның мәндері қалай жуық есептеледі?
3. Анықталған интегралды дәрежелі қатардың көмегімен жуық есептеу әдісін баяндаңыз
4. Дифференциалдық теңдеулер дәрежелі қатардың көмегімен қалай интегралданады?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1–мысал. $\sqrt{e}$ -ні 10^{-5} - ке дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

Шешуі. e^x-тің Маклорен қатарына жіктеліуін қолданамыз.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (1)$$

$0 \le x < 1$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын x–тің мәндерінде бұл қатар жылдам жинақталады және оның қалдығы былай бағаланады:

$$0 \le R_n(x) < \frac{x^{n+1}}{n!n}.$$

Бұл теңсіздіктерге негізделе отырып (1) қатардағы x-тің орнына $\frac{1}{2}$-ді қойып, оның 7 мүшесінің қосындысын алсақ сұралған дәлдік қамтамасыз етіледі.

$$e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot 2!} + \frac{1}{8 \cdot 3!} + \frac{1}{16 \cdot 4!} + \frac{1}{32 \cdot 5!} + \frac{1}{64 \cdot 6!}$$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 0,5; \quad a_3 = 0,125; \quad a_4 = 0,0208333; \quad a_5 = 0,0026042;$$
$$a_6 = 0,0002604; \quad a_7 = 0,0000217;$$

Қосып шықсақ:

$$\sqrt{e} \approx 1,64872.$$

2–мысал. $\sin 20°$-ты 10^{-4}-ке дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

Шешуі. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$ жіктелінуді қолданамыз; $x = 20° = \frac{\pi}{9}$;

$$\sin\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{\pi^3}{9^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{\pi^5}{9^5} - \ldots = 0,34907 - 0,00709 + 0,00004 - \ldots$$

Соңғы қатардың екі мүшесінің қосындысы сұралған дәлдік қамтамасыз етіледі.

$$|R_n| \le 0,00004 < 0,0001$$

Сонымен, $\sin 20° \approx 0,34907 - 0,00709 = 0,3420$.

3–мысал. $\sqrt[3]{9}$ –ды жуық есептеңіз.

Шешуі. $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$.

15.5 тақырыбының (12) формуласында $x = \frac{1}{8}$; $\alpha = \frac{1}{3}$ десек:

$$\sqrt[3]{9} = 2\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{8^2} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{8^3} + \ldots\right] =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{576} + \frac{5}{41472} - \ldots\right) \approx 2,0802.$$

4-мысал. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1-x^5}$ интегралды 10^{-4}-ке дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

Шешуі. Интеграл ішіндегі функцияны дәрежелі қатарға жіктейміз:

$$\frac{1}{1-x^5} = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots$$

Бұл қатар $(-1,1)$ интервалда жинақты. Интегралдау аралығы жинақтылық интервалында орналасқан, сондықтан оны мүшелеп интегралдауға болады.

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1-x^5} = \left(x + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{16}}{16} + \ldots\right)_0^{0,5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6\cdot 2^6} + \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \frac{1}{16\cdot 2^{16}} + \ldots$$

Бұл қатардың екі мүшесінің қалдығын бағалайық:

$$R_2 = \frac{1}{11\cdot 2^{11}}\cdot\frac{1}{16\cdot 2^{16}}+\ldots<\frac{1}{11\cdot 2^{11}}+\frac{1}{11\cdot 2^{16}}+\ldots=\frac{1}{11\cdot 2^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^5}}=\frac{1}{11\cdot 2^6\cdot 31}<0{,}5\cdot 10^{-}$$

Сонымен, екі мүшесінің қосындысы сұралған дәлдікті қамтамасыз етеді.

$$\int_0^{0,5}\frac{dx}{1-x^5}\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{6\cdot 2^6}=0{,}5026.$$

Өзіндік жұмыстар үшін тапсырмалар

1-6-мысалдарды 0,0001-ге дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

1. $\frac{1}{\sqrt[60]{e^7}}$ 2. $\ln 1{,}1$ 3. $\sin 0{,}4$

4. $\sqrt[3]{130}$ 5. $\ln 3$ 6. $\int_0^1\cos\sqrt{x}dx$

7. $\int_0^{0,5}e^{\sqrt{x}}dx$ ды 0,01-ге дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

8. $y'=\sin y-\sin x$ дифференциалдық теңдеудің $y(0)=0$ бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімінің дәрежелі қатарға жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табыңыз.

§15.7 Фурье қатары

Табиғаттың, техниканың тағы басқа салалардың көптеген құбылыстары белгілі бір уақыт аралығынан кейін қайталанып отырады. Мұндай құбылыстарды периодты деп атайды. Электромагниттік тербелістердің таралуымен байланысты құбылыстар, шатун және поршеньнің мотор ішіндегі қозғалысы тағы басқалар периодты құбылыстарға мысал болады. Периодты құбылыстарды математикалық тұрғыдан үйрену үшін оларды периодты функциялар арқылы өрнектейді. Периодты функциялардың анықтамасы «Математика – 1» бөлімінде берілген еді.

$\sin x$ және $\cos x$ функциялары ең қарапайым периодты функциялар болып, олардың периоды 2π-ге тең.

$$\sin(x\pm 2\pi)=\sin x,\ \cos(x\pm 2\pi)=\cos x.$$

$\sin\omega x$ және $\cos\omega x$ функциялары да периодты, бірақ олардың периоды $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Шынында да,

$$\sin\left[\omega\left(x\pm\frac{2\pi}{\omega}\right)\right]=\sin(\omega x\pm 2\pi)=\sin\omega x.$$

2π саны да $\sin\omega x$ және $\cos\omega x$ функцияларының периоды болады, бірақ ең кіші периоды емес, сондықтан оларды да 2π периодты функциялар деп атаса болады.

Егер $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ қатынасы рационал сан болса, онда $a\sin\omega_1 x + b\cos\omega_2 x$ қосындының да периодты функция болатындығын дәлелдеуге болады.

Гармоникалық құбылыстар ең қарапайым периодты құбылыстар болып, олар $\sin\omega x$ және $\cos\omega x$ периодты функцияларымен өрнектеледі. Күрделірек периодты құбылыстар $\sin\omega x$ және $\cos\omega x$ функцияларының шектеулі немесе шексіз сандағы қосындылары түрінде өрнектеледі.

Кейінірек керек болатын келесі формулаларды келтіреміз:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos px\cdot\cos kx\,dx=\begin{cases}0, & егер \quad p\neq k;\\ \pi, & егер \quad p=k.\end{cases} \tag{1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin px\cdot\sin kx\,dx=\begin{cases}0, & егер \quad p\neq k;\\ \pi, & егер \quad p=k.\end{cases} \tag{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin px\cdot\cos kx\,dx=0, \tag{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=0 \tag{4}$$

(1) – (4) формулалардың дұрыстығын тексеруді студенттердің өздеріне ұсынамыз.

1 – анықтама.

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots$$

түріндегі қатар тригонометриялық қатар деп аталады.

Мұндағы $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ сандары тригонометриялық қатардың коэффициенттері деп аталады.

Тригонометриялық қатар көбінесе келесі түрде жазылады:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{5}$$

Егер (5) қатар жинақты болса, онда оның мүшелері 2π периодты болғандықтан, қосындысында 2π периодты функция болады.

2 – анықтама. Егер (5) қатардың қосындысы $f(x)$ - ке тең болса, яғни

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{6}$$

онда $f(x)$ функциясы тригонометриялық қатарға жіктеледі деп айтылады.

Енді (6) қатарды $[-\pi,\pi]$ сегментінде $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақталатын болсын деп ұйғарылықта, оны мүшелеп интегралдайық.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right).$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$ болғандықтан

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} x\Big|_{-\pi}^{\pi} = a_0 \pi .$$

Соңғы теңдіктен

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{7}$$

$2p$ коэффициентті анықтау үшін (6) теңдіктің екі жағын $\cos kx$-ке көбейтіп, кейін мүшелеп $[-\pi,\pi]$ сегментінде интегралдаймыз, мұндағы k - натурал сан.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \cos kx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx \right) \tag{8}$$

(1)-(4) формулаларға негізделіп (8) теңдікті келесі түрде жазамыз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = a_k \pi ,$$

мұнан

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx. \tag{9}$$

Осыған ұқсас, (6) – шы екі жағын $\sin kx$ - ке көбейтіп $[-\pi,\pi]$ сегментінде мүшелеп интегралдау нәтижесінде

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx . \tag{10}$$

Сонымен, егер 2π периодты $f(x)$ функциясы $[-\pi,\pi]$ сегментінде бірқалыпты жинақты (6) қатардың қосындысы болса, онда оның коэффициенттері (7), (9) және (10) формулалары арқылы анықталады екен.

3-анықтама. (7), (9) және (10) формулалар арқылы анықталатын коэффициенттерді Эйлер–Фурье коэффициенттері (немесе Фурье коэффициенттері) деп атайды.

4 – анықтама. Коэффициенттері Эйлер – Фурье формулалары, яғни (7), (9) (10)-лар арқылы анықталатын

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

тригонометриялық қатар $f(x)$ функциясының Фурье қатары деп аталады.

Сонымен, егер периодты $f(x)$ функциясы бірқалыпты жинақталатын тригонометриялық қатардың қосындысы болса, онда ол қатар Фурье қатары болады екен.

(7), (9), (10) формулаларды келтіріп шығарардан алдын (6) қатар $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақталатын болсын деп үйғарған едік. Енді келесі сұрақ туындайды:

$f(x)$ функциясы қандай шарттарды қанағаттандырғанда оның Фурье қатары жинақты болады және қатардың қосындысы $f(x)$-ке тең болады?

Бұл сұраққа келесі теорема жауап береді.

Дирихле теоремасы. Егер 2π периодты $f(x)$ функциясы $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде үзік – монотонды және шектелген болса, онда бұл функцияның Фурье қатары сан өсінің барлық нүктелерінде жинақты болады. $f(x)$ функциясының үзіліссіз нүктелеріндегі мәні қатардың қосындысы $S(x)$-ке тең. Ал әрбір x_0 үзіліс нүктесінде қатардың қосындысы келесі формуламен анықталады.

$$S(x_0)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0-0} f(x)+\lim_{x\to x_0+0} f(x)\right].$$

Бұл теоремадан Фурье қатарымен өрнектелетін функциялар тобының кең екендігі көрінеді. Сондықтан Фурье қатары жаратылыстану ғылымдарында әсіресе математикада кеңінен қолданылады.

§15.7.1 Жұп және тақ функциялар үшін Фурье қатары

1. Егер $f(x)$ - жұп функция болса, онда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

Шынында да,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(-x)dx +$$

$$+\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

2. Егер $f(x)$ - тақ функция болса, онда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(-x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int_{0}^{\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

Фурье қатарына жұп $f(x)$ функциясын жіктеуден басталық. Бұл жағдайда $f(x)\cdot\sin kx$ - тақ, $f(x)\cdot\cos x$ - жұп функция болады. Онда:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0,$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Егер $f(x)$ функциясы тақ болса, онда $f(x)\cdot\sin kx$ - жұп, ал $f(x)\cdot\cos kx$ - тақ функция болады. Сондықтан

$$a_0 = a_k = 0,$$

$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin kx dx = 0$, онда тақ функцияның Фурье қатары $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ түрінде болады.

Сонымен, жұп функция тек қана косинустар бойынша, ал тақ функция тек қана синустар бойынша жіктеледі екен.

§15.7.2 $2l$ периодты функцияны Фурье қатарына жіктеу

$f(x) - 2l$ периодты функция болсын.

$$x = \frac{lt}{\pi}$$

алмастыруын орындаймыз. Онда $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ функциясы t- ның 2π периодты функциясы болады. Соңғы функцияның Фурье қатарына жіктелуі келесі түрде болады:

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt),$$

мұндағы $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)dt$, $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos kt dt$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\sin kt dt$.

Соңғы теңдіктерде x айнымалысына көшеміз.

$$x=\frac{lt}{\pi};\quad t=\frac{\pi}{l}x;\quad dt=\frac{\pi}{l}dx;$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx,\quad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx.$$

Сонымен, $2l$ периодты $f(x)$ функциясы үшін Фурье қатары келесі түрде болады.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{l}+b_k\sin\frac{\pi kx}{l}\right).$$

$2l$ периодты жұп $f(x)$ функциясы үшін

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx,\quad a_k=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx,\quad b_k=0,$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x.$$

$2l$ периодты тақ $f(x)$ функциясы үшін

$$a_0=a_k=0,\quad b_k=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx,$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Енді $[0,l]$ сегментінде берілген $f(x)$ функциясын қарастыралық. Егер бұл функцияны $[-l,0]$ сегментінде үзік – монотонды түрде қалауымызша жалғастырсақ (қосымша анықтасақ), онда оны Фурье қатарына жіктеуге болады. Дербес жағдайда, берілген функцияны $[-l,0]$ сегментінде $f(-x)=f(x)$ болатындай етіп қосымша анықтасақ, онда жұп функция шығады. Мұндай жағдайды «$f(x)$ функциясы жүп жалғастырылды» деп атайды.

Жүп жалғастырылған $f(x)$ функциясы тек қана косинустар бойынша Фурье қатарына жіктеледі.

Егер $[0,l]$ сегментінде берілген $f(x)$ функциясын $[-l,0]$ сегментінде $f(-x)=-f(x)$ болатындай етіп, қосымша анықтасақ, онда тақ функция шығады. Бұл жағдайда «$f(x)$ функциясы тақ жалғастырылды» деп атайды.

Тақ жалғастырылған $f(x)$ функциясы тек қана синустар бойынша Фурье қатарына жіктеледі.

Сонымен, $[0,l]$ сегментінде берілген үзік – монотонды функцияны косинустар бойынша да синустар бойынша да Фурье қатарына жіктеуге болады екен.

Өзін - өзі тексеру сұрақтары

1. Қандай қатар тригонометриялық қатар деп аталады?
2. Фурье коэффициенттері қандай формулалар арқылы өрнектеледі?
3. Қандай қатар Фурье қатары деп аталады?
4. Дирихле теоремасын баяндаңыз.
5. Жұп және тақ функциялар үшін Фурье қатарын жазыңыз.
6. $2l$ периодты функцияны Фурье қатарына жіктеңіз.
7. $[0,l]$ сегментінде берілген функцияны Фурье қатарына жіктеу әдісін баяндаңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $[-\pi,\pi]$ сегментінде анықталған 2π периодты $f(x)=|x|$ функциясын Фурье қатарына жіктелік.

Шешуі: Берілген функция $[-\pi,\pi]$ сегментінде Дирихле теоремасының шарттарын қанағаттандырады.

Фурье коэффициенттерін анықтаймыз.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{\pi}xdx\right]=\pi.$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos kxdx+\int_{0}^{\pi}x\cos kxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin kxdx+\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\sin kxdx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi k}\left(\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi-1)=\begin{cases}0, & \text{егер } k \text{ жұп болса,}\\ -\dfrac{4}{\pi k^2}, & \text{егер } k \text{ тақ болса.}\end{cases}$$

$b_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin kxdx+\int_{0}^{\pi}x\sin kxdx\right]=0$. Сонымен,

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots+\ldots\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}+\ldots\right].$$

Бұл қатар x - тің кез келген мәнінде жинақты және оның қосындысы берілген функцияға тең.

2-мысал. $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{4}, & \text{егер } -\pi<x<0,\\ \frac{\pi}{4}, & \text{егер } 0<x<\pi,\\ 0, & \text{егер } x=n\pi,\ n-\text{бүтін сан.}\end{cases}$

2π периодты функцияны Фурье қатарына жіктелік.

Шешуі. Берілген функция Дирихле теоремасының шарттарын қанағаттандырады және тақ. Онда:

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin kx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx=-\frac{\cos kx}{2k}\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{\cos 0-\cos k\pi}{2k}=\frac{1-(-1)^k}{2k}=\begin{cases}\frac{1}{k}, & \text{егер } k \text{ тақ болса,}\\ 0, & \text{егер } k \text{ жұп болса}\end{cases}$$

$b_1=1,\ b_2=0,\ b_3=\frac{1}{3},\ b_4=0,\ldots$ болғандықтан,

$$f(x)=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots$$

3-мысал. Периоды $2l=2$ ге тең, $-1<x\le 1$ интервалында $f(x)=x-1$ формуласымен берілген функцияны Фурье қатарына жіктелік.

Шешуі. $a_0=\int_{-1}^{1}(x-1)dx=\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=-2.$

$$a_k=\int_{-1}^{1}(x-1)\cos k\pi x\,dx=\int_{-1}^{1}x\cos k\pi x\,dx-\int_{-1}^{1}\cos k\pi x\,dx=$$

$$-\frac{x\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{\sin k\pi x}{k\pi}dx-\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x\Big|_{-1}^{1}=0.$$

$$b_k=\int_{-1}^{1}(x-1)\sin k\pi x\,dx=\int_{-1}^{1}x\sin k\pi x\,dx-\int_{-1}^{1}\sin k\pi x\,dx=$$

$$=-\frac{x\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{\cos k\pi x}{k\pi}dx+\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{k\pi}\left[\cos k\pi+\cos(-k\pi)\right]+\frac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2}\Big|_{-1}^{1}+\frac{1}{k\pi}\left[\cos k\pi-\cos(-k\pi)\right]=-\frac{2(-1)^k}{k\pi}$$

Сонымен, $f(x)$ функциясының Фурье қатары келесі түрде болады.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right].$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $f(x)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}$ функциясын $(-\pi,\pi)$ интервалында Фурье қатарына жіктеңіз. Жауабы: $f(x)=\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\cos 4x}{4^2}+\ldots$

2. $f(x)=\begin{cases}-x, \text{егер } -\pi<x\le 0,\\ 0, \text{егер } 0<x\le\pi\end{cases}$ функциясын $(-\pi,\pi)$ интервалында Фурье қатарына жіктеңіз.

Жауабы: $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sin nx}{n}$.

3. $f(x)=\begin{cases}-x, \text{егер } -\pi<x\le 0,\\ 0, \text{егер } 0<x\le\pi\end{cases}$ функциясын $(-\pi,\pi)$ интервалында Фурье қатарына жіктеңіз.

Жауабы: $f(x)=-\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)}$.

4. $(0,\pi)$ интервалында берілген $f(x)=x^2$ функциясын синустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

Жауабы: $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}[(-1)^n-1]\right\}\sin nx$.

Ұсынылатын тапсырмалардан бір нұсқасын шешу үлгісі

1-мысал. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

Шешуі: Берілген қатардың жалпы мүшесі $U_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ - ді мынадай қарапайым бөлшектер қосындысы түрінде жазамыз.

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}.$$

Ортақ бөлімге келтірсек, төмендегі тепе – теңдік шығады.

$$1=A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1).$$

$n=0$ десек, $2A=1$; $A=\frac{1}{2}$.

$n=-1$ десек, $-B=1$; $B=-1$.

$n=-2$ десек, $2C=1$; $C=\frac{1}{2}$.

Сонымен, $U_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$. Мұннан

$$U_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right),\quad U_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right),$$

$$U_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right),\quad U_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right),\ldots$$

$$S_n=U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n=\frac{1}{2}(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

$$+\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}).$$

Сонымен, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$, онда берілген қатар жинақты болып, қосындысы $\frac{1}{4}$ ке тең екен.

2- мысал. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі: $U_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Коши белгісін пайдаланамыз.

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$$ сонымен қатар жинақты.

3-мысал. $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+\ldots+\frac{2^n}{n^{10}}+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі: Даламбер белгісін пайдаланамыз.

$$U_n=\frac{2^n}{n^{10}},\quad U_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}},\quad \frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}},$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}}=2>1,$$

$L=2>1$, болғандықтан қатар жинақсыз.

4-мысал. $\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\ldots$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі: Лейбниц белгісін қолданамыз.

$L=\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$. Лейбниц теоремасының басқа шарттарында қанағаттандырады, сондықтан берілген қатар жинақты, және оның қосындысы $\frac{1}{2}$ -ден көп емес.

5- мысал. $1+\frac{x^1}{125}+\frac{x^2}{125^2}+\frac{x^3}{125^3}+\ldots$ дәрежелі қатардың жинақтылық аралығын анықтаңыз.

Шешуі: Берілген қатардың жалпы мүшесі.

$$U_n=\frac{x^{1n}}{125^n}.$$

Даламбер белгісін пайдаланамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{1(n+1)}}{125^{n+1}}\right|:\left|\frac{x^{1n}}{125^n}\right|=\frac{|x^1|}{125}<1.$$

Мұннан $|x^1|<125$ немесе $|x|<5$ шығады. Сонымен, қатардың жинақтылық аралығы $(-5;5)$ анықталады. Енді аралықтың шеткі нүктелерінде жинақтылыққа зерттейміз. $x=-5$ -те берілген қатардан

$$1-1+1-1+1-\ldots$$

катар шығады, мұннан $\lim_{n\to\infty}U_n\neq 0$, сондықтан ол жинақсыз.

$x=5$ -те

$$1+1+1+1+\ldots$$

катар шығады, мұнда $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$, яғни соңғы қатар жинаксыз. Сонымен, берілген қатардың жинақтылық аралығы (–5;5) екен.

6 – мысал. $f(x)=3^x$ функциясын $x-$тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

Шешуі: Берілген функцияның және оның туындыларының $x=0$-дегі мәндерін табамыз.

$$f(x)=3^x, \qquad f(0)=3^0=1$$

$$f'(x)=3^x\ln 3 \qquad f'(0)=\ln 3,$$

$$f''(x)=3^x\ln^2 3. \qquad f''(0)=\ln^2 3.$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=3^x\ln^n \qquad f^{(n)}(0)=\ln^n$$

x - тің кез-келген нақты мәнінде

$$\left|f^{(n)}(x)\right|<3^x\ln^n 4$$

теңсіздік кез-келген n үшін орындалады, онда

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0$$

болып, берілген функция Маклорен қатарына жіктелді:

$$3^x = 1 + x\ln 3 + \frac{x^2 \ln^2 3}{2!} + \frac{x^3 \cdot \ln^3 3}{3!} + \dots$$

7 - мысал: $\int_0^{0.5} x^2 \cdot e^{-x^2} dx$ интеграл 0,001 дәлдікпен жуық есептелсін.

Шешуі: e^x - тің дәрежелі қатарға жіктелуінде

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

x-ті $-x^2$ пен алмастырамыз.

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{1}{1!}\left(-x^2\right) + \frac{1}{2!}\left(-x^2\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left(-x^2\right)^n + \dots$$

Теңдіктің екі жағын x^2 қа көбейтеміз.

$$x^2 \cdot e^{-x^2} = x^2 - \frac{1}{1!}x^4 + \frac{1}{2!}x^6 - \frac{4}{3!}x^8 + \dots$$

Интегралға, орынына қоямыз.

$$\int_0^{0.5} x^2 \cdot e^{-x^2} dx = \int_0^{0.5} \left[x^2 - x^4 + \frac{1}{2!}x^6 - \frac{1}{3!}x^8 + \dots\right] dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2!}\frac{x^7}{7} - \frac{1}{3!}\frac{x^9}{9} + \dots\right)_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{24} - \frac{1}{160} + \frac{1}{1792} - \dots$$

Шыққан ауыспалы таңбалы қатар Лейбниц теоремасының шарттарын қанағаттандырады. Үшінші мүшесінің абсолют мәні 0.001 ден кіші, сондықтан екі мүшесінің қосындысы жеткілікті.

$$\int_0^{0.5} x^2 \cdot e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{24} - \frac{1}{160} = 0{,}048.$$

8-мысал. $[0,2]$ сегментте берілген $f(x) = 2 - 2x$ функциясын $[-2,0]$ сегментте тақ түрде жалғастырып Фурье қатарына жіктеңіз.

Шешуі:

$$b_m = \int_0^2 (2-2x)\sin\frac{m\pi x}{2} dx = \left|\begin{matrix} u = 2-2x;\ dv = \sin\frac{m\pi x}{2} dx \\ du = -2dx;\ v = -\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2} \end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{2}{m\pi}(2-2x)\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{4}{m\pi}\int_0^2 \cos\frac{m\pi x}{2} dx =$$

$$= \frac{4}{m\pi}\cos m\pi + \frac{4}{m\pi} - \frac{8}{(m\pi)^2}\cdot\sin\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{4}{m\pi}\left((-1)^m + 1\right);\quad a_m = 0.$$

Сонымен,

$$f(x) = 2 - 2x = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m + 1}{m}\sin\frac{m\pi x}{2} = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin\pi x + \frac{1}{4}\sin 2\pi x + \frac{1}{6}\sin 3\pi x + \dots\right).$$

«Сан қатары» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар

1- нұсқа

1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: 1).

2. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+\ldots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $[-2;2)$).

5. $y=\frac{e^x-1}{x}$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$).

6. $\int_0^{0.25}\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$ анықталған интегралды 0.001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0.0412).

7. $[-\pi,\pi]$ сегментте берілген $f(x)=x^3$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $x^3=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$).

2 –нұсқа

1. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{1}{3}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n^2+n+1}$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: шартты жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $[-1;1)$).

5. $y=x\ln(1+x^2)$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{n}$).

6. $\int_0^{0.5}x^4e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0062).

7. $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi+x}{2}, & егер\ -\pi\le x<0,\\ \frac{\pi-x}{2}, & егер\ 0\le x\le\pi\end{cases}$ функциясын $(-\pi,\pi)$ интервалда Фурье қатарына жіктеңіз. (Жауабы: $\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\dots$).

3 –нұска

1. $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{5\cdot7\cdot9}+\dots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{1}{12}$).

2. $\frac{2+1}{5+1}+\frac{2^2+1}{5^2+1}+\frac{2^3+1}{5^3+1}+\dots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $\frac{1}{10}+\frac{7}{10^2}-\frac{13}{10^3}+\frac{19}{10^4}+\frac{25}{10^5}-\frac{31}{10^6}+\dots$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз. (Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $\left(\frac{1}{e};e\right)$).

5. $y=\cos^2 x$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!}$).

6. $\int_0^{\frac{1}{9}}\sqrt{x}\,e^{-\sqrt{x}}dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0185).

7. $f(x)=\begin{cases}-x, & егер\ -\pi<x\le 0,\\ 0, & егер\ 0<x\le\pi\end{cases}$ функциясын $(-\pi,\pi)$ интервалда Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$).

4- нұска

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: 1).

2. $\frac{1}{2\cdot1-1}+\frac{\sqrt{2}}{2\cdot2-1}+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot3-1}+\frac{\sqrt{4}}{2\cdot4-1}+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: шартты жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $0\le x<4$).

5. $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\ln(1-x)$. функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\cdot\frac{x^{n-2}}{n}$).

6. $\int_0^{0,5}\frac{\sin(x^2)}{x}dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,124).

$f(x)=\begin{cases}1, & егер\ -\pi<x\le 0,\\ -2, & егер\ 0<x\le\pi.\end{cases}$ функцияны $(-\pi,\pi)$ интервалда Фурье

қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $-\frac{1}{2}\cdots\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$).

5 –нұсқа

$1+\frac{m-1}{m}+\left(\frac{m-1}{m}\right)^2+\left(\frac{m-1}{m}\right)^3+\ldots,\ (m>1)$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: m).

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n^2+2n+1)}{(5n^2+2n+1)}\right]^n$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}x^n$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-\frac{3}{e}<x<\frac{3}{e}$).

5. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$).

6. $\int_0^1 x\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0694).

7. $f(x)=\begin{cases}-h, & \text{егер } -\pi\le x\le 0,\\ h, & \text{егер } 0<x\le\pi\end{cases}$ функциясын $(-\pi,\pi)$ интервалда Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{4h}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}$).

6 – нұсқа

1. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S=\frac{3}{4}$).

2. $\frac{10}{11}+\left(\frac{10}{11}\right)^2\cdot 2^5+\left(\frac{10}{11}\right)^3\cdot 3^5+\left(\frac{10}{11}\right)^4\cdot 4^5+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз. (Жауабы: жинақты).

3. $\frac{2}{2^3+1}-\frac{3}{3^3+2}+\frac{4}{4^3+3}-\frac{5}{5^3+4}+\ldots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-2\le x<4$)

5. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз. (Жауабы: $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots$).

6. $\int_0^{\frac{1}{4}}x^2e^{\sqrt{x}}\,dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0051).

7. $f(x)=\begin{cases}-2x, & егер\ -\pi\le x<0,\\ 3x, & егер\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$ функциясын $(-\pi,\pi)$ интервалда Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{5\pi}{4}-\frac{10}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\ldots\right)$).

7 –нұсқа

1. $\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 13}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S=\frac{1}{10}$).

2. $\frac{11}{10}+\left(\frac{11}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{2^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^3\cdot\frac{1}{3^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^4\cdot\frac{1}{4^5}+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $1-2+3-4+5-6+\ldots$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-1\le x<1$).

5. $y=\ln(1-x)$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots$).

6. $\int_0^{0.25}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,3332).

7. $[0,\pi]$ сегментте берілген $f(x)=x^2$ функциясын $[-\pi,0]$ сегментте тақ түрде жалғастырып Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}\left[(-1)^n-1\right]\right\}\sin nx$).

8 –нұсқа

1. $\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{8\cdot9}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S=\frac{1}{6}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, егер $p>1$ болса, қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}-\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\ldots$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-1\le x<1$).

5. $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\ldots$).

6. $\int_0^{0,25} \sqrt{x}\cos 2x\,dx$ аныкталган интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0789).

7. $[0,\pi]$ сегментте берілген $f(x)=\pi-2x$ функциясын $[-\pi,0]$ сегментте жүп түрде жалғастырып Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$).

9 – нұска

1. $\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S=\frac{1}{7}$).

2. $\frac{1}{9\ln 9}+\frac{1}{19\ln 19}+\frac{1}{29\ln 29}+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+\ldots$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-7\le x<-3$).

5. $y=\cos(x+a)$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\cos a-x\sin a-\frac{x^2}{2!}\cos a+\frac{x^3}{3!}\sin a+\frac{x^4}{4!}\cos a-\ldots$).

6. $\int_0^{\frac{1}{4}} x^3 e^{-x^2}\,dx$ аныкталган интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0004).

7. $[0,\pi]$ сегментте берілген $f(x)=\pi-2x$ функциясын $[-\pi.0]$ сегментте тақ түрде жалғастырып Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2mx}{m}$).

10 – нұска

1. $\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 13}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S=\frac{1}{10}$).

2. $\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-2\le x<8$).

5. $y=\cos(x-a)$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\sin a\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)+\cos a\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)$).

6. $\int_0^{0,25}\frac{\sin 2x}{\sqrt[4]{x}}\,dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,1428).

7. $f(x)=\cos 2x$ функциясын $[0,\pi]$ интервалда синустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{2^2-1}+\frac{3\sin 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\sin 5x}{2^2-5^2}+\ldots\right]$).

11 – нұска

1. $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S=\frac{1}{2}$).

2. $\frac{1}{8}+\frac{1}{18}+\frac{1}{28}+\frac{1}{38}+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: шартты жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-2 \le x < 0$).

5. $y = \sin^2 x$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{2 \cdot x^2}{2!} - \frac{2^3 \cdot x^4}{4!} + \frac{2^5 \cdot x^6}{6!} - \ldots$).

6. $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\sin(x^2)}{x} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0078).

7. $f(x) = \sin x$ функциясын $[0, \pi]$ интервалда косинустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{1-2^2} + \frac{\cos 4x}{1-4^2} + \ldots\right]$).

12 - нұсқа

1. $\frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{1}{6}$).

2. $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \ldots$( ) қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $1{,}1 - 1{,}01 + 1{,}001 - 1{,}0001 + \ldots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-3)^n}{n+1}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $2 < x < 4$).

5. $y = xe^x$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \ldots$).

6. $\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} \sin\frac{x}{3} dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,005).

7. $f(x)=x$ функциясын $(0,l)$ интервалда синустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}$).

13 – нұсқа

1. $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S=\frac{1}{6}$).

2. $\frac{11}{5}+\frac{21}{5^2}+\frac{31}{5^3}+\frac{41}{5^4}+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{\sqrt{2n-1}}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $y=x$, $y=0$ $(y\geq0,\ x>0)$).

5. $y=\sin\left(mx+\frac{\pi}{3}\right)$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{m^2x^2}{2!}+\frac{m^4x^4}{4!}-\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{mx}{1}-\frac{m^3x^3}{3!}+\frac{m^5x^5}{5!}-\ldots\right)$).

6. $\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{x}\,e^{-x^2}dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0812).

7. $f(x)=2x$ функциясын $(0;1)$ интервалда синустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\pi nx}{n^2}$).

14 – нұска

1. $\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S=\frac{1}{12}$).

2. $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $1-\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{3a^4}-\frac{1}{4a^6}+\ldots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: $a>1$ – да абсолют жинақты, $a<1$ – да жинақсыз, $a=1$ – де шартты жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $\left[-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right]$).

5. $y=\sin kx$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $kx-\frac{(kx)^3}{3!}+\frac{(kx)^5}{5!}-\frac{(kx)^7}{7!}+\ldots$).

6. $\int_0^{\frac{1}{8}}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,124).

7. $f(x)=\begin{cases}x, & \text{егер } 0<x\le 1,\\ 2-x, & \text{егер } 1<x<2.\end{cases}$ функциясын (0.2) интервалда синустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}$).

15 – нұска

1. $\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 14}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S=\frac{1}{15}$).

2. $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\ldots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: шартты жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{2n-1}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $\left[-\frac{1}{2};\frac{2}{1}\right]$).

5. $y=\frac{1}{1+x^2}$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $1-x^2+x^4-x^6+\ldots$).

6. $\int_0^{0.25} x^2\ln(1+x)dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0.0009).

7. $f(x)=\begin{cases}x, & \text{егер } 0<x\le 1,\\ 2-x, & \text{егер } 1<x<2\end{cases}$ функциясын (0.2) интервалда косинустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$).

16 – нұска

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{12^n}$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S=\frac{5}{6}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^n}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $1,1-1,02+1,003-1,0004+\ldots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз)

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы. $(-5;5)$).

5. $y=\frac{1}{(1+x^2)^2}$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $1-2x+3x^2-4x^3+...$).

6. $\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,02).

7. $[-\pi,\pi]$ сегментте берілген $f(x)=x$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$).

17 – нұска

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{10^n}$ қатардың қосындысын табыңыз. (Жауабы: $S=\frac{5}{4}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $3\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}-3\frac{1}{8}-3\frac{1}{16}+3\frac{1}{32}+3\frac{1}{64}-3\frac{1}{128}-3\frac{1}{256}+...$ таңбалары айнымалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $[-1;1]$).

5. $y=\frac{1}{(1+x)^3}$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз. (Жауабы: $1-3x+6x^2-10x^3+...$).

6. $\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\cos\sqrt{x}\,dx$ анықталған интегралды 0,01 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0408).

7. $(0,1)$ интервалда берілген $f(x)=1$ функциясын синустар бойынша Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+...+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}+...\right]$).

18 – нұсқа

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{3}{4}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \ldots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $[3;5]$).

5. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \ldots$).

6. $\int_0^{0.25} xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ анықталған интегралды 0.001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0.0307).

7. $(-1,1)$ интервалда берілген $f(x) = x - 1$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $-1 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right]$).

19 – нұсқа

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{1}{6}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: 0;4).

5. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots$).

6. $\int_0^{0,25}\sqrt{x}e^{-x^2}dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз.

(Жауабы: 0,0832).

7. $[-\pi,\pi]$ сегментте берілген $f(x)=e^x$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{2}{\pi}sh\pi\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx-n\sin nx)\right]$).

20 – нұсқа

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-5^n}{15^n}$ қатардың қосындысын табыңыз. (Жауабы: $S=\frac{3}{4}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2-n+1}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы. жинақты).

3. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз. (Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $0<x<2$).

5. $y=(1+x)e^{-x}$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n-1}{n!}x^n$).

6. $\int_0^{0,5} x\ln\left(1+x^2\right)dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдікпен жуық есептеңіз

(Жауабы: 0,015).

7. $f(x)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}$ функциясын $(-\pi,\pi)$ интервалда Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\cos 4x}{4^2}+\ldots$).

21 – нұсқа

1. $\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S=\frac{1}{5}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{2n}}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n^2}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-9\le x\le -7$).

5. $y=\cos 3x$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}$).

6. $y'=x^2y+y^3$ дифференциалдық теңдеудің $y(0)=1$ шартты қанағаттандыратын шешімінің нөлге тең болмаған төрт мүшесін табыңыз.

(Жауабы: $y=1+\frac{x}{1!}+\frac{3x^2}{2!}+\frac{17x^3}{3!}+\ldots$).

7. $(0,\pi)$ интервалда берілген $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ функциясын $(-\pi,0)$ интервалда жұп түрде жалғастырып Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right]$).

22 – нұсқа

1. $\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S=\frac{1}{3}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: шартты жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(2+x)^n$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-3<x<-1$).

5. $y=\sin x^2$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{4n-2}}{(2n-1)!}$).

6. $y'=x+2y^2$ дифференциалдық теңдеудің $y(0)=0$ шарты канағаттандыратын шешімінің нөлге тең болмаған екі мүшесін табыңыз.

(Жауабы: $y=\frac{x^2}{2!}+\frac{12x^5}{5!}+\ldots$).

7. $[0,1]$ сегментте берілген $f(x)=1-x$ функциясын $[-1,0]$ сегментте жұп түрде жалғастырып Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos\pi x}{1^2}+\frac{\cos3\pi x}{3^2}+\frac{\cos3\pi x}{5^2}+\ldots\right]$).

23 – нұсқа

1. $\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S=\frac{1}{2}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз. (Жауабы: жинақты).

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-1 < x < 1$).

5. $y = e^{3x}$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - x^n}{n!}$).

6. $y'' - xy^2 = 0$ дифференциалдық теңдеудің $y(0)=1$, $y'(0)=1$ шарттарды қанағаттандыратын шешімінің нөльге тең болмаған төрт мүшесін табыңыз.

(Жауабы: $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{4x^4}{4!} + \ldots$).

7. $(-5,5)$ интервалда берілген $f(x) = 5x - 1$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $-1 + \frac{50}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin \frac{n\pi x}{5} \right]$).

24 – нұсқа

1. $\frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \ldots$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S = \frac{1}{14}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 5}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақты).

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: шартты жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-5 < x < 5$).

5. $y = \frac{1}{1+x}$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$).

6. $\left(1+x^2\right)y''+2xy'=0$ дифференциалдық теңдеудің $y(0)=0, y'(0)=1$ шарттарды қанағаттандыратын шешімін қатардың көмегімен табыңыз.

(Жауабы: $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$).

7. $(-3,3)$ интервалда берілген $f(x)=2x-3$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

(Жауабы: $-3+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\right]$).

25 – нұска

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-3^n}{15^n}$ қатардың қосындысын табыңыз.

(Жауабы: $S=\frac{1}{4}$).

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+4}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: жинақсыз).

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n+5}{3^n}$ таңбалары ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

(Жауабы: абсолют жинақты).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$ қатардың жинақтылық аралығын табыңыз.

(Жауабы: $-1\le x\le 1$).

5. $Y=\frac{\sin 5x}{x}$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша дәрежелі қатарға жіктеңіз.

(Жауабы: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 5^{2n-1}}{(2n-1)!}\cdot x^{2n-2}$).

6. $Y''=xyy'$ дифференциалдық теңдеудің $y(0)=1$, $Y'(0)=1$ шарттарды қанағаттандыратын шешімін қатардың көмегімен табыңыз.

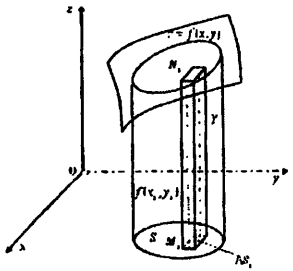
(Жауабы: $1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{3x^5}{5!}+\ldots$).

7. $(-1,1)$ интервалда берілген $f(x)=2x$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

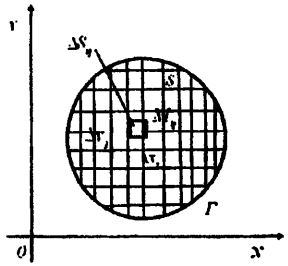
(Жауабы: $1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}$).

16-тарау. Еселі интегралдар.
§16.1 Екі еселі интеграл және оның негізгі қасиеттері

Айғалық, түйық S облысында анықталған, оң $z = f(x,y)$ функциясы берілсін. Жоғары жағынан $z = f(x,y)$ бетімен, төменгі жағынан S облысымен, ал бүйір жағынан жасаушылары OZ өсіне паралель, бағыттаушысы S облысының шекарасы болатын цилиндрлік бетімен шектелген цилиндрлік дененің көлемін табу есебін қарастырайық (1-сурет).



1-сурет



2-сурет

Аталған дененің V көлемін табу үшін, оның табаны S-ті аудандары $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ болатын n ұсақ бөліктерге бөлің, әрқайсысынан кез келген бір $M_i(x_i, y_i)$ нүктелерін таңдалық. Сонда

$$f(x_i, y_i)\Delta S_i \tag{1}$$

көбейтіндісі табанының ауданы ΔS_i, биіктігі $f(x_i, y_i)$ болатын ұсақ цилиндрдің көлемін береді. Онда осы (1) өрнектердің қосындысы, көлемі жағынан берілген қисық бетті дененің көлеміне жуық болатын, ұсақ цилиндрлердің көлемдерінің қосындысын береді, яғни

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i. \tag{2}$$

Егер берілген дененің табаны S-ті қалауымызша көп ұсақ бөліктерге бөлсек, онда (2) формула ол дененің көлемін қалаған дәлдікпен табу мүмкіндігін береді.

Ұсақ бөліктердің аудандарының ең үлкенін $\max_i \Delta S_i$ арқылы белгілейік.

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ қосындысы $f(x,y)$ функциясының S облысындағы екі өлшемді интегралдық қосындысы деп аталады.

Анықтама. Егер де $\max_i \Delta S_i$ шамасы нөлге ұмтылғанда (2) интегралдық қосындының шегі бар болса және ол шек S облысын ұсақ бөліктерге бөлу әдісі мен әрбір бөліктен M_i нүктелерді таңдау әдісіне тәуелсіз болса, онда ол

шекті $z = f(x,y)$ функциясынан S облысы бойынша алынған екі еселі интегралы деп атайды да, былай белгілейді

$$\iint\limits_S f(x,y)dS.$$

Мұндағы S-ті интегралдау облысы, ал dS-ті аудан элементі деп атайды. Сонымен анықтама бойынша:

$$\iint f(x,y)dS = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i. \qquad (3)$$

Енді «Екі еселі интегралдың бар болуы» деп аталатын төмендегі теореманы тұжырымдалық.

Теорема. Егер тұйық S облысында $z = f(x,y)$ функциясы үзіліссіз болса, онда (3) екі еселі интегралы бар болады және ол S облысын ұсақ бөліктерге бөлумен, әрбір бөліктен M_i нүктелерін таңдау әдісінен тәуелсіз болады.

Алдағы уақытта қарастырылатын екі еселі интегралдардағы $f(x,y)$ функциясы берілген облыста үзіліссіз деп ұйғарамыз.

Жоғарыда айтылғандардан екі еселі интегралдың геометриялық мағынасы шығады: егер $f(x,y) \geq 0$ болса, онда (3) екі еселі интеграл табаны S облыс болатын жоғары жағынан $z = f(x,y)$ бетімен шектелген цилиндрлік дененің көлемін береді.

Теорема бойынша екі еселі интегралдың мәні ұсақ ΔS_i-лердің түрінен тәуелсіз болғандықтан кейінгі қарастырылатын есептерде S облысын бөліктерге бөлудің ыңғайлы әрі ұтымды әдістерін таңдаймыз. Солардың бірі S облысын ox және oy координаталар остеріне параллель түзулер арқылы бөліктерге бөліп, ΔS_i ұсақ бөлікті қабырғалары Δx_i, Δy_i болатын тіктөртбұрыштықтар ретінде қарастыруға болады. Бұл жағдайда облыстың шекарасымен іргелес бөліктер ғана тіктөртбұрыш болмайды (2-сурет). Олай болса (3) формуладағы аудан элементі dS төмендегіше жазылады

$$dS = dxdy.$$

Сонымен (3) формула

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_i \to 0}} \sum_i \sum_i f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i \qquad (4)$$

түрінде жазылады. Облыстың шекарасымен іргелес тіктөртбұрыш болмайтын ұсақ бөліктер (4) шектің мәніне әсер етпейтінін көрсетуге болады.

Енді екі еселі интегралдың негізгі қасиеттеріне тоқталық.

1. Тұрақты санды екі еселі интеграл таңбасының алдына шығаруға болады, яғни егер $c = const$ болса, онда

$$\iint\limits_S cf(x,y)dxdy = c\iint\limits_S f(x,y)dxdy.$$

2. Бірнеше функциялардың қосындыларының екі еселі интегралы олардың екі еселі интегралдарының қосындысына тең, яғни

$$\iint_S [f_1(x,y)+f_2(x,y)+\ldots+f_n(x,y)]dxdy = \iint_S f_1(x,y)dxdy+\iint_S f_2(x,y)dxdy+\ldots+$$

$$+\iint_S f_n(x,y)dxdy.$$

3. Егер $S = S_1 + S_2$ болса, онда

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_{S_1} f(x,y)dxdy + \iint_{S_2} f(x,y)dxdy.$$

4. Егер S облысында $f(x,y)\geq 0$ болса, онда

$$\iint_S f(x,y)dxdy \geq 0.$$

5. Егер S облысында $f(x,y)\leq \varphi(x,y)$ болса, онда

$$\iint_S f(x,y)dxdy \leq \iint_S \varphi(x,y)dxdy.$$

Бұл қасиеттердің дәлелдеуі екі еселі интегралдың анықтамасымен шектер туралы теоремалардан шығады.

§16.2 Екі еселі интегралды есептеу

Oxy жазықтығында орналасқан S облысын қарастыралық.

Анықтама. Егер S облысының ішкі нүктесі арқылы Oy осіне параллель болып өтетін түзу оның шекарасын тек қана екі нүктеде қиып өтсе, онда мұндай облыс Oy өсінің бағыты бойынша дұрыс облыс деп аталады (3-сурет).

Ox өсінің бағыты бойынша дұрыс облыста осы сияқты анықталады.

Егер облыс Oy осінің бағыты бойынша да, Ox өсінің бағыты бойынша да дұрыс болса, онда ол дұрыс облыс деп аталады.

Интегралдау облысы S төмендегі сызықтармен қоршалған Oy өсінің бағыты бойынша дұрыс облыс болсын (3-сурет), яғни

$$x = a,\ x = b,\ y = y_1(x), y = y_2(x), \qquad (1)$$

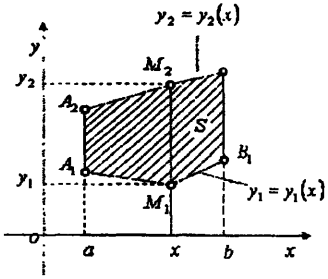
мұндағы $a < b$, $y_1(x)\leq y_2(x)$. $f(x,y)$ функциясы s облысында үзіліссіз болсын делік.

$$J_s = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \qquad (2)$$

өрнегін қарастыралық.

(2) өрнектің оң жағы $f(x,y)$ функциясынан S облысы бойынша алынған қайталамалы интеграл деп аталады. Оның мәнін табу үшін алдымен жақшаның іші y бойынша интегралданады, ал x тұрақты ретінде қарастырылады. Сонда жақшаның ішіндегі интеграл x-тің кандайда бір функциясын береді, яғни

$$\delta(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$



3-сурет

Содан соң $\delta(x)$ функциясын $[a,b]$ аралығында x бойынша интегралдаймыз:

$$J_y = \int_a^b \delta(x)dx.$$

Бірнеше жағдайларды қарастырайық:

1) $f(x,y) \geq 0$ болсын делік.

Бұл жағдайда, табаны S облысы болатын жоғарыдан $z = f(x,y)$ бетімен, бүйір жағынан жасаушылары Oz өсіне параллель, бағыттаушысы S облысының шекарасы болатын цилиндрлік бетімен шектелген дененің көлемі V

$$V = \iint_S f(x,y)dxdy \qquad (3)$$

екі еселі интегралымен анықталатынын 3.1 тақырыбында айтқан едік. Енді осы дененің көлемін Oz осіне параллель жазықтықтармен қимасының ауданы бойынша есептелік.

Аталған денемен $x = const$, $a < x < h$, жазықтығының қимасы 4-суретте штрихталған $\sigma(x)$ ауданын береді. $\sigma(x)$ ауданы төменнен $y_1 \leq y \leq y_2$ кесіндімен, жоғарыдан $z = f(x,y)$, $x = const$ қисығымен қоршалған қисық сызықты трапецияның ауданына тең, яғни

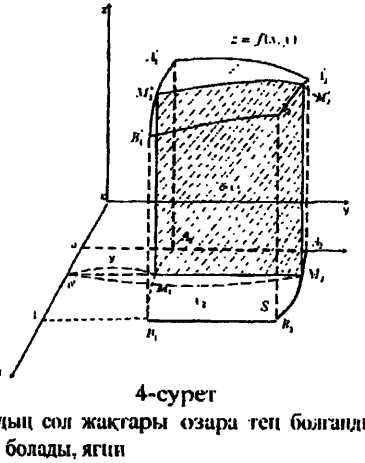
$$\sigma(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Онда 4-суреттегі дененің көлемі

$$V = \int_a^b \sigma(x)dx.$$

$\sigma(x)$-тің орнына оның мәнін қоямыз.

$$V = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx. \qquad (4)$$



4-сурет

(3), (4) формулалардың сол жақтары озара тең болғандықтан, олардың оң жақтары да озара тең болады, яғни

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx. \qquad (5)$$

Сонымен, екі еселі интегралды есептеу (5) қайталанбалы интегралды есептеуге, яғни екі анықталған интегралды есептеуге келтіріледі.

(5) формуланың оң жағы төмендегіше түрде де жазылады:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dydx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Соңғы теңдіктерде ішкі интегралдар y бойынша, ал сыртқы интеграл x бойынша алынады.

2) $S = S_1 \cup S_2$ болып, S_1 облысында $f(x,y) \geq 0$, ал S_2 облысында $f(x,y) < 0$ болсын делік. Онда екі еселі интегралдың үшінші қасиеті бойынша

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \iint\limits_{S_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{S_2} f(x,y)dxdy = V_1 - V_2 \qquad (6)$$

болады. Бұл жағдайда да V_1 мен V_2 үшін (5) формула орынды болады.

Практикалық есептерде жиі кездесетін бір дербес жағдайды да айта кетелік

S облысы $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ тіктөрбұрыш, ал $f(x,y) = X(x)Y(y)$ болсын. Мұндағы $X(x)$ функциясы $[a,b]$ аралықта, ал $Y(y)$ функциясы $[c,d]$ аралықта үзіліссіз болсын делік. Онда (5) формула бойынша

$$\iint\limits_S X(x)Y(y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d X(x)Y(y)dy \right) dx = \int\limits_a^b X(x)dx \int\limits_c^d Y(y)dy. \qquad (7)$$

(7) формуланың оң жағындағы ішкі интегралдың мәні тұрақты сан болғандықтан оны интеграл белгісінің сыртына шығаруға болады, яғни

$$\iint_S X(x)Y(y)dxdy = \int_a^b X(x)dx \cdot \int_c^d Y(y)dy. \quad (8)$$

демек, (8) екі еселі интегралдың мәні екі анықталған интегралдың көбейтіндісіне тең екен.

3) S облысы Ox өсінің бағыты бойынша дұрыс облыс болсын, яғни

$$c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)$$

функцияларымен коршалған болсын. Онда (5) формулаға ұқсас

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy \quad (9)$$

формуласын аламыз. Дербес жағдайда S облысы $a \le x \le b,\ c \le y \le d$ тіктөрбұрыш болса, онда

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Соңғы теңдіктің оң жақтарын теңестірсек

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

формуласы шығады.

4) Егер S облысы Ox өсінің бағыты бойынша да Oy өсінің бағыты бойынша да дұрыс болмаса, онда S облысын Ox немесе Oy өстерінің бағыттары бойынша дұрыс облыстарға бөлеміз де, ол облыстар бойынша берілген функциядан алынған қайталанбалы интегралды есептеп, нәтижелерін қосамыз.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Екі еселі интегралдың анықтамасын беріңіз.
2. Екі еселі интегралдың бар болуы туралы теореманы баяндаңыз.
3. Екі еселі интегралдың геометриялық мағынасын ашыңыз.
4. Екі еселі интегралдың негізгі қасиеттерін жазыңыз.
5. Қайталанбалы интеграл деп қандай интегралды айтады?
6. Дұрыс облыстың анықтамасын беріңіз.
7. Екі еселі интегралды қайталанбалы интегралға келтіру жолдарын баяндаңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары(ОСӨЖ)

1-мысал. $\iint_S xydxdy$ екі еселі интегралды есептелік. Мұндағы S $x=1, x=2, y=x, y=x\sqrt{3}$ түзулерімен коршалған облыс.

Шешуі. (5) формуланы қолданамыз. Мұнда

$$y_1(x) = x,\ y_2(x) = x\sqrt{3},\ a=1,\ b=2.$$

$$\iint\limits_S xy\,dx\,dy = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_x^{x\sqrt{3}} xy\,dy \right) dx = \int\limits_1^2 x \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_x^{x\sqrt{3}} dx = \int\limits_1^2 x \cdot \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int\limits_1^2 x^3 dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

2-мысал. $\iint\limits_S \sin x \cdot \sin y\,dx\,dy$ екі еселі интегралын есептелік. Мұндағы S $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi$ квадратымен қоршалған облыс.

Шешуі. (8) формуланы қолданамыз.

$$\iint\limits_S \sin x \sin y\,dx\,dy = \int\limits_0^\pi \sin x\,dx \cdot \int\limits_0^\pi \sin y\,dy = \left(\int\limits_0^\pi \sin x\,dx \right)^2 = 2^2 = 4.$$

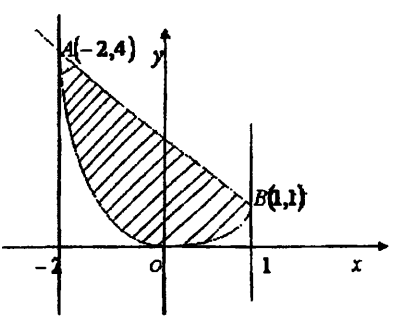
3-мысал. $\iint\limits_S \frac{x}{y}\,dx\,dy$ екі еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы S облысы $x = y^2,\ x = \sqrt{y}$ параболалармен және $y = 0,\ y = 1$ түзулерімен қоршалған облыс.

Шешуі. (9) формуланы қолданамыз.

$$\iint\limits_S \frac{x}{y}\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} \frac{x}{y}\,dx \right) dy = \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2y}\Bigg|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{y}{2y} - \frac{y^4}{2y} \right) dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{y^3}{2} \right) dy =$$

$$= \left(\frac{y}{2} - \frac{y^4}{8} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{8}.$$

4-мысал. $\int\limits_{-2}^{1} \left(\int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy \right) dx$ қайталанбалы интегралының интегралдау ретін өзгертелік.



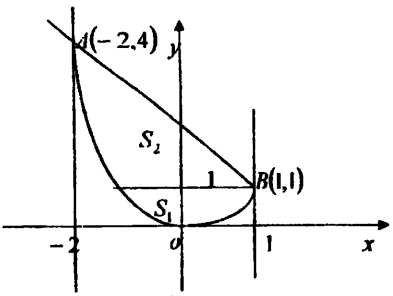
5-сурет

Шешуі. Интегралдау облысын анықтап алалық. Сыртқы интегралының x бойынша интегралдау шегі минус екі мен бір, демек интегралдау облысы $x = -2$ және $x = 1$ түзулерінің аралығында орналасқан (5-сурет). Ішкі интегралдың төменгі шегі $y_1 = x^2$ параболасының $x = -2,\ x = 1$ түзулерімен

қиылысу нүктелері $A(-2,4)$ және $B(1,1)$. Ішкі интегралдың жоғары шегі $y=2-x$ түзуі A және B нүктелері арқылы өтеді. Осы айтылғандарды Oxy жазықтығына салсақ интегралдау облысы S анықталады (5-сурет).

Интегралдау ретін өзгерткенде ішкі интеграл x бойынша, ал сыртқы интеграл y бойынша алынады. Облыстың оң жағындағы шекарасы параболаның OB бөлігінен және BA кесіндісінен құрылған (әртүрлі сызықтар) болғандықтан S облысын $y=1$ түзуі арқылы S_1 және S_2 екі облыска жіктейміз (6-сурет). Сонда

$$\iint\limits_S f(x,y)dydx=\iint\limits_{S_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{S_2} f(x,y)dxdy.$$



6-сурет

S_1 облысы жоғарыдан $y=1$, төменінен $y=0$ түзулерімен, ал оң жағынан $x=\sqrt{y}$, сол жағынан $x=-\sqrt{y}$ параболалармен қоршалған. Демек,

$$\iint\limits_{S_1} f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx\right)dy.$$

S_2 облысы жоғарыдан $y=4$, төменнен $y=1$ түзуімен, оң жағынан $x=2-y$ түзуімен және сол жағынан $x=-\sqrt{y}$ параболасымен қоршалған.Демек,

$$\iint\limits_{S_2} f(x,y)dxdy=\int\limits_1^4\left(\int\limits_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx\right)dy$$

Олай болса

$$\int\limits_{-2}^{1}\left(\int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx\right)dy+\int\limits_1^4\left(\int\limits_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx\right)dy.$$

5-мысал. $\int\limits_0^2\left(\int\limits_{\frac{y}{2}}^{1}\sin(x^2+1)dx\right)dy$ қайталанбалы интегралын есептеңіз.

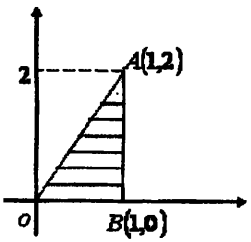
Шешуі. Ішкі интеграл элементар функциялар арқылы өрнектелмейтін интегралдар тобына жатады. Сондықтан интегралдау ретін өзгертіп көреміз.

Интегралдау облысы $x=\frac{y}{2}$, $x=1$, $y=0$, $y=2$ түзулерімен қоршалған үшбұрыш (7-сурет).

$$\int_0^2\left(\int_{\frac{y}{2}}^1 \sin\left(x^2+1\right)dx\right)dy=\int_0^1\left(\int_0^{2x} \sin\left(x^2+1\right)dy\right)dx=\int_0^1\left[\sin\left(x^2+1\right)\cdot y\Big|_0^{2x}\right]dx=$$

$$=\int_0^1 2x\cdot\sin\left(x^2+1\right)dx=\int_0^1 \sin\left(x^2+1\right)d\left(x^2+1\right)=-\cos\left(x^2+1\right)\Big|_0^1=$$

$$=-\left(\cos 2-\cos 1\right)=2\sin\frac{3}{2}\cdot\sin\frac{1}{2}.$$



7-сурет

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $\iint_s y\ln x\,dxdy$ екі еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы S, $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$ функцияларымен қоршалған облыс.

Жауабы: $\frac{5}{8}\left(2\ln 2-1\right)$.

2. $\iint_s\left(\cos 2x+\sin y\right)dxdy$ екі еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы S, $x=0, y=0$, $4x+4y-\pi=0$ түзулерімен қоршалған облыс.

Жауабы: $\frac{1}{4}\left(\pi+1-2\sqrt{2}\right)$.

3. $\iint_s \sin\left(x+y\right)dxdy$ екі еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы S, $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$, $y=x$ түзулерімен қоршалған облыс.

Жауабы: 1.

4. $\int_0^1\left(\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right)dy$ кайталанбалы интегралдың интегралдау ретін өзгертіңіз.

Жауабы: $\int_1^2\left(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy\right)dx.$

5. $\int_0^1\left(\int_0^y f(x,y)dy\right)dx$ қайталанбалы интегралдың интегралдау ретін өзгертіңіз.

Жауабы: $\int_0^1\left(\int_y^1 f(x,y)dx\right)dy.$

6. $\int_0^1\left(\int_y^1 e^{x^2}dx\right)dy$ қайталанбалы интегралды есептеңіз.

Жауабы: $\frac{1}{2}(e-1).$

7. $\int_0^{1/2}\left(\int_{2y}^1 \cos(x^2+1)dx\right)dy$ қайталанбалы интегралды есептеңіз.

Жауабы: $\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\cos\frac{3}{2}.$

8. $\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3-1)dx\right)dy$ қайталанбалы интегралды есептеңіз.

Жауабы: $-\frac{2}{3}\sin^2\frac{1}{2}.$

9. $\int_0^1\left(\int_{\frac{y-1}{2}}^0 tg(x^2+x)dx\right)dy$ қайталанбалы интегралды есептеңіз.

Жауабы: $\ln\cos\frac{1}{4}.$

10. $\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{y+1}} e^{x^3-3x}dx\right)dy$ қайталанбалы интегралды есептеңіз.

Жауабы: $\frac{e^2-1}{3e^2}.$

§16.3 Екі еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру

Екі еселі интегралды есептеуді жеңілдететін әдістердің бірі онда айнымалыларды ауыстыру.

Oxy жазықтығында L сызығымен қоршалған S облысы берілсін. S-тің нүктелерінің x және y координаталары u және ϑ жаңа айнымалының функциялары болсын делік, яғни

$$x=\varphi(u,\vartheta),\quad y=\psi(u,\vartheta). \tag{1}$$

Мұндағы φ және ψ функциялары қандай да бір S' облысында анықталған, бірмәнді, үзіліссіз және олардың үзіліссіз туындылары бар болсын деп ұйғарайық. Онда (1) формулалар бойынша u және ϑ-ның әрбір қос мәніне x және y-тің бір қос мәні сәйкес келеді.

x-пен y-тің берілген мәдеріне сәйкес u және ϑ -ның мәндерін (1) формуладан табу мүмкін болсын деп ұйғарайық.

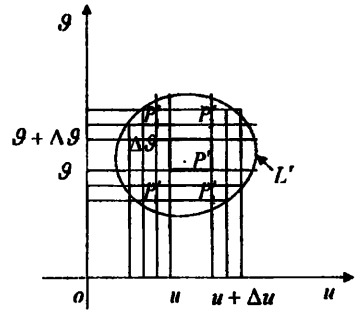
Тікбұрышты $ou\vartheta$ координаталар жүйесін қарастырамыз (8-сурет). Жоғарыда айтылғандарды негізге алсақ, S облысының әрбір $P(x,y)$ нүктесіне (9-сурет) u,ϑ жазықтығынан бір $P'(u,\vartheta)$ нүктесі (1) формула бойынша сәйкес келеді (8-сурет). u және ϑ-лар P нүктесінің қисық сызықты координаталары деп аталады.

Егер жылжымалы $M(x,y)$ нүктесі S облысын қоршаған L сызығы бойлап жылжыса, онда оған сәйкес $N(u,\vartheta)$ жылжымалы нүктесі $ou\vartheta$ жазықтығында түйық l' сызығын сызады. l' сызығымен қоршалған облысты S'-пен белгілейміз.

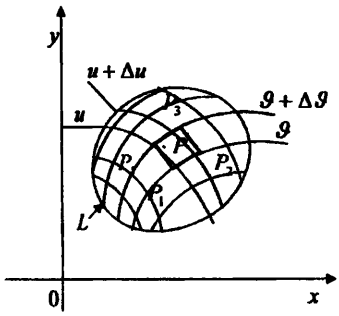
Сонымен, (1) формулалар S және S' облыстарының нүктелері арасында өзара бірмәнді сәйкестікті орнатады, басқаша айтқанда, S облысын S' облысына озара бірмәнді бейнелейді.

S' облысындағы $u=const$ түзуін қарастырайық. (1) формула бойынша бұл түзуге Oxy жазықтығында жалпы жағдайда қандай да бір қисық сәйкес келеді. Осыған ұқсас $Ou\vartheta$ жазықтығындағы $\vartheta=const$ түзуіне Oxy жазықтығында қандай да бір қисық сәйкес келеді (9-сурет). S' облысын $u=const$ және $\vartheta=const$ түзулері арқылы тіктөртбұрыштарға бөлелік (8-сурет). $Ou\vartheta$ жазықтығында $u=const$, $u+\Delta u=const$, $\vartheta=const$, $\vartheta+\Delta\vartheta=const$ түзулерімен қоршалған тіктортбұрыштықтың ауданын $\Delta S'$-пен белгілелік, ал $\Delta S'$-ке сәйкес қисықсызықты тіктөрбұрыштықтың ауданын ΔS пен белгілейік. Сонда

$$\Delta S'=\Delta u\cdot\Delta\vartheta.$$



8-сурет



9-сурет

Жалпы жағдайда ΔS және $\Delta S'$ аудандары әртүрлі болуы мүмкін.

S облысында үзіліссіз $f(x,y)$ функциясы берілсін. $z=f(x,y)$ функциясының S облысындағы әрбір мәніне $z=F(u,\vartheta)$ функциясының S' облысындағы сондай мәні сәйкес келеді. Мұндағы

$$F(u,\vartheta)=f[\varphi(u,\vartheta),\psi(u,\vartheta)].$$

z функциясының S облысы бойынша төмендегі интегралдық қосындысын

$$\sum f(x,y)\Delta S=\sum F(u,\vartheta)\Delta S' \qquad (2)$$

қарастырайық.

Oxy жазықтығындағы $P_1P_2P_3P_4$ қисық сызықты төртбұрыштықтың ауданы ΔS-ті есептелік. ΔS-тің төбелерінің координаталары

$$\begin{aligned}
&P_1(x,y);\quad x_1=\varphi(u,\vartheta),\qquad y_1=\psi(u,\vartheta),\\
&P_2(x_2,y_2);\quad x_2=\varphi(u+\Delta u,\vartheta),\qquad y_2=\psi(u+\Delta u,\vartheta),\\
&P_3(x_3,y_3);\quad x_3=\varphi(u+\Delta u,\vartheta+\Delta\vartheta),\ y_3=\psi(u+\Delta u,\vartheta+\Delta\vartheta),\\
&P_4(x_4,y_4);\quad x_4=\varphi(u,\vartheta+\Delta\vartheta),\qquad y_4=\psi(u,\vartheta+\Delta\vartheta).
\end{aligned} \qquad (3)$$

болады.

Қисық сызықты төртбұрыштықтың ауданын есептегенде олардың қабырғаларын қос-қостан параллель түзулер деп қабылдап, функциялардың өсімшелерін олардың сәйкес дифференциалдарымен алмастырамыз. Онда

$$x_1 = \varphi(u,\vartheta), \qquad y_1 = \psi(u,\vartheta),$$

$$x_2 = \varphi(u,\vartheta) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u, \qquad y_2 = \psi(u,\vartheta) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u,$$

$$x_3 = \varphi(u,\vartheta) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta, \quad y_3 = \psi(u,\vartheta) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta,$$

$$x_4 = \varphi(u,\vartheta) + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta, \qquad y_4 = \psi(u,\vartheta) + \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta.$$

Бұл жағдайда P_1, P_2, P_3, P_4 қисық сызықты төртбұрышты параллелограмм деп қарастыруға болады. Ал оның ΔS ауданы P_1, P_2, P_3 үшбұрыштың ауданының екі еселегенше тең. Онда аналитикалық геометрия бөліміндегі өзімізге белгілі формулалар бойынша

$$\Delta S \approx \left|(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)\right| =$$

$$\left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta\right)\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta - \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta\right)\right| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|\Delta u\cdot\Delta\vartheta;$$

Мұндағы $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \end{vmatrix}$ анықтауышы $\varphi(u,\vartheta)$ және $\psi(u,\vartheta)$ функциялары-

ның Якоби анықтауышы немесе Якобиан деп аталады.

Сонымен,

$$\Delta S \approx |J|\Delta S'. \tag{4}$$

(4) жуық теңдіктің мәнін (2) ге қоямыз

$$\sum f(x,y)\Delta S \approx \sum F(u,\vartheta)\cdot|J|\Delta S'.$$

Соңғы жуық теңдіктен $\Delta S'$ ауданның диаметрін нөлге ұмтылдырып шекке көшеміз.

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \iint\limits_{S'} F(u,\vartheta)|J|dud\vartheta. \tag{5}$$

Соңғы формула екі еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру формуласы деп аталады. Бұл (5) формула $f(x,y)$ функциясынан S облысы бойынша алынған екі еселі интегралды есептеу мәселесін S' облысы бойынша алынған екі еселі интегралды есептеуге алып келеді.

§16.4 Екі еселі интегралда полярлық координаталар жүйесіне көшу

Алдыңғы тақырыпта қарастырылған екі еселі интегралда айнымалыны ауыстырудың дербес жағдайы тік бұрышты Декарттық координаталар жүйесінен полярлық координата жүйесіне көшу болады. Бұл жағдайда $u = \theta$, $\vartheta = \rho$, яғни

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta. \tag{1}$$

Oxy жазықтығындағы AB кисығы $(\rho=\rho_1)$ (10-сурет) $O\theta\rho$ жазықтығындағы $A'B'$ түзуіне (11-сурет), ал Oxy жазықтығындағы DC кисығы $(\rho=\rho_2)$ $O\theta\rho$ жазықтығындағы $D'C''$ түзуіне көшеді.

Oxy жазықтығындағы AD және BC түзулері $O\theta\rho$ жазықтығындағы $A'D'$ және $B'C''$ түзулеріне, ал L_1 және L_2 қисықтары L_1' мен L_2' қисықтарына көшеді. Якобианды есептелік:

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial x}{\partial\rho}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\rho}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\rho\sin\theta & \cos\theta\\ \rho\cos\theta & \sin\theta\end{vmatrix}=-\rho. \qquad (2)$$

$|J|=\rho$ болғандықтан

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\int\limits_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}F(\theta,\rho)\rho d\rho\right)d\theta. \qquad (3)$$

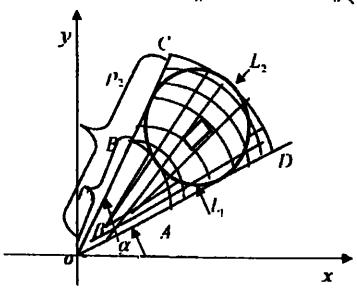
Соңғы формула екі еселі интегралда полярлық координата жүйесіне көшу формуласы деп аталады.

Мысал. $\iint\limits_S e^{x^2+y^2}dxdy$ екі еселі интегралын есептелік.

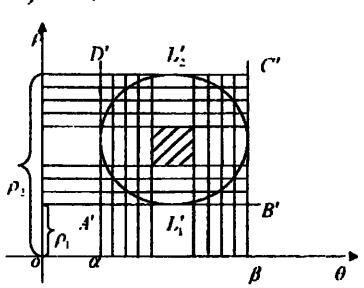
Мұндағы $S-x^2+y^2=4$ дөңгелектің бірінші квадранттағы бөлігі.

Шешуі. $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ деп полярлық координата жүйесіне көшеміз. x және y декарт координаталарын θ және ρ полярлық координаталарына ауыстыру Якобианы $|J|=\rho$. (3) формуланы қолдансақ

$$\iint\limits_S e^{x^2+y^2}dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^2 e^{\rho^2}\rho d\rho\right)d\theta=\frac{\pi}{4}\left(e^4-1\right).$$



10-сурет



11-сурет

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Нүктенің қисық сызықты координаталары деген не?
2. S облысын S' облысына өзара бірмәнді бейнелеу формулаларын жазыңыз.

3. Якобиан айнымалыларды алмастыру функциялары арқылы қалай орнектеледі?

4. Екі еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру формуласын жазыңыз.

5. Екі еселі интегралда полярлық координата жүйесіне көшу формуласын жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\iint_S \left(\frac{1}{2}x+y\right)^2 (x-y)dxdy$ екі еселі интегралын есептелік.

Мұндағы S $y=-\frac{1}{2}x+1$, $y=-\frac{1}{2}x+3$, $y=x+1$, $y=x-2$ түзулерімен қоршалған облыс (12-сурет).

Шешуі. Берілген екі еселі интегралды тіктөлей интегралдасақ күрделі есептеулерге алып келеді, сондықтан

$$\frac{1}{2}x+y=u,\ x-y=\vartheta \qquad (4)$$

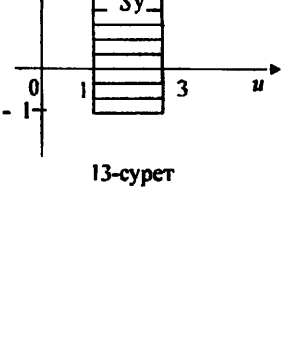
алмастыруларын жасасақ, $y=x+1$, $y=x-2$ түзулері $\vartheta=-1$, $\vartheta=2$ түзулеріне, ал $y=-\frac{1}{2}x+1$, $y=-\frac{1}{2}x+3$ түзулері $u=1$, $u=3$ түзулеріне көшеді. Сонымен, берілген S облысы S' тіктөртбұрыштық облыска көшеді (13-сурет). Енді (4) жүйеден x және y-терді анықтап Якобианды есептейміз.

$$x=\frac{2}{3}u+\frac{2}{3}\vartheta;\ y=\frac{2}{3}u-\frac{1}{3}\vartheta.$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{vmatrix}=-\frac{2}{9}-\frac{4}{9}=-\frac{2}{3}.$$



12-сурет



13-сурет

Якобианның абсолют мәні $|J|=\frac{2}{3}$.

Алдымен 16.3-тің (5), одан кейін 16.2 тақырыбының (8) формулаларын қолданамыз.

$$\iint\limits_S \left(\frac{1}{2}x+y\right)^2 (x-y)\,dxdy = \iint\limits_{S'} u\vartheta^2 \cdot \frac{2}{3}\,du d\vartheta = \int\limits_1^2 \vartheta d\vartheta \cdot \int\limits_1^3 \frac{2}{3}u^2 du = \frac{26}{3}.$$

2-мысал. $\iint\limits_S \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$ екі еселі интегралын полярлық координаталар жүйесіне көшіп есептеңіз. Мұндағы S $x^2+y^2 \le 2x$ жарты дөңгелектің жоғарғы бөлігі.

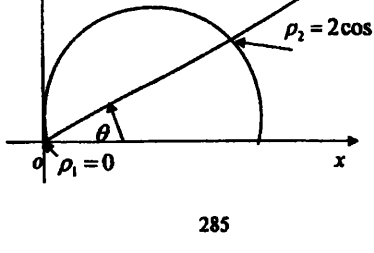
Шешуі. 16.4 тақырыбының (3) формуласын қолданамыз. Ол үшін $x^2+y^2=2x$ шеңберінің теңдеуін $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ формулаларын қолданып $\rho=2\cos\theta$ полярлық координаталар түрінде жазып алалық. Соңғы теңдеу интегралдау облысының полярлық координаталардағы теңдеуі болады. Полярлық өсті Ox өсінің оң бағытымен беттесетіндей етіп аламыз. Сонда, S облысында ρ айнымаласы 0-ден $2\cos\theta$-ға дейін өзгереді (14-сурет). Ішкі интегралды ρ бойынша, ал сыртқы интегралды θ бойынша интегралдаймыз. θ айнымалысы 0-ден $\frac{\pi}{2}$-ге дейін өзгереді. Берілген екі еселі интегралды қайталанбалы интеграл арқылы жазып есептейміз.

$$\iint\limits_S \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy = \iint\limits_S \sqrt{4-\rho^2}\,\rho d\rho d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-\rho^2}\,\rho d\rho \right) d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{2\cos\theta} \left(4-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(4-\rho^2\right) \right) d\theta = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\left(4-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta =$$

$$= -\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(4-4\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right] d\theta = -\frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3\theta - 1\right) d\theta =$$

$$= -\frac{8}{3}\left[-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2\theta\right) d\cos\theta - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right] = -\frac{8}{3}\left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} - \theta \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$



14-сурет

Өзіндік ж[illegible] тапсырмалары

1. $x=u(1-[illegible])$, $u\vartheta$ алмастыруларын жасап $\int_0^1\left(\int_0^{2x} dy\right)$ қайталанбалы интегралды есеп[illegible].

Жауабы: $\frac{1}{2}$.

2. $x=\sqrt{\frac{u}{\vartheta}}$, $y=\sqrt{u\vartheta}$ алмастыруларын орындап $\iint_S dxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы S, $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=3x$ функцияларымен қоршалған облыс.

Жауабы: $\frac{1}{2}\ln 3$.

Төмендегі 3-8 екі еселі интегралдарын полярлық координаталар жүйесіне көшіп есептеңіз.

3. $\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$. Мұндағы $S: x^2+y^2\le 1$.

Жауабы: $\frac{(2\sqrt{2}-1)2\pi}{3}$.

4. $\iint_S \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$. Мұндағы $S: x^2+y^2\le 1$.

Жауабы: $\frac{(2\sqrt{2}-1)2\pi}{3}$.

5. $\iint_S \frac{x^2+y^2}{4}dxdy$. Мұндағы $S: x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

Жауабы: $\frac{\pi}{2}$.

6. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$.

Жауабы: $\frac{\pi}{6}a^3$.

7. $\iint_S (h-2x-3y)dxdy$. Мұндағы $S: x^2+y^2\le R^2$.

Жауабы: $\pi R^2 h$.

8. $\iint_S \left(4-\sqrt{x^2-y^2}\right)dxdy$. Мұндағы $S: x^2+y^2\le 1$.

Жауабы: $\frac{10\pi}{3}$.

§16.5. Екі еселі интегралдардың геометрияда және физикада қолданулары

Көптеген практикалық есептерді шешкенде интегралдық қосынды әдісіне негізделетін жалпы принцип анықталған интегралдың қолданулары бөлімінде баяндалған еді. 16.1 тақырыбында екі еселі интегралдың анықтамасын бергенде де осы жалпы принцип қолданылды.

Әртүрлі мағыналы есептер қарастырылғанда ізделінін отырған Q шамасы Oxy жазықтығының қандай да бір S облысы және S-те анықталған $f(x,y)$ функциясы мен байланысқандығын байқаймыз. Q-ді табу төмендегі ретпен орындалады:

а) S облысы кез келген әдіспен n ұсақ бөліктерге бөлінеді, яғни

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i. \tag{1}$$

мұндағы ΔS_i, i-ші ұсақ бөліктің ауданы.

ә) Әрбір ΔS_i-ге ізделінін отырған Q шамаың ұсақ бөлігі ΔQ_i сәйкес келеді. ΔQ_i-дің мәні $f(x,y)$ функциясының ΔS_i-дең кез келген әдіспен алынған M_i нүктесіндегі мәнімен ΔS_i-дің көбейтіндісінің жуық мәні ретінде анықталады, яғни

$$\Delta Q_i \approx f(M_i)\Delta S_i. \tag{2}$$

б) Ізделінін отырған шама Q-дің жуық мәні табылады:

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i. \tag{3}$$

(3) теңдіктің оң жағы $f(x,y)$ функциясының интегралдық қосындысы деп аталады. ΔS_i бөліктердің аудандары кішірейген сайын (3) жуық теңдік нөгүрлым дәл теңдікке жақындай түседі.

(3) теңдіктің n шексіздікке ұмтылғандағы немесе ΔS_i - дің ең үлкенінің ауданы нөлге ұмтылғандағы шегі есептеледі, яғни

$$Q=\lim_{\max\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i=\iint_S f(x,y)ds \tag{4}$$

Мұндағы $f(x,y)dS$ өрнегі ізделінген шама элементі деп аталады және dQ -мен белгіленді, онда

$$dQ=f(x,y)ds.$$

Сонымен.

$$Q=\iint_S dQ. \tag{5}$$

1. **Көлемді есептеу.** Төменнен Oxy жазықтығындағы S облысымен, жоғарыдан $z=f(x,y)$ бетімен, бүйір жақтарынан жасаушылары OZ өсіне параллель, бағыттаушысы S облысының шекарасы болатын цилиндрлік бетімен қоршалған цилиндрлік дененің көлем элементі $dV=f(x,y)dS$ болғандықтан, аталған дененің көлемі (5) формула бойынша

$$V = \iint_S dV = \iint_S f(x,y)dxdy. \qquad (6)$$

Егер дене жоғарыдан $f(x,y) \geq 0$, төменнен $\varphi(x,y) \geq 0$ беттерімен шектелген цилиндрлік дене болып, $f(x,y), \varphi(x,y)$ беттерінің OXY жазықтығына проекциясы S облысы болса, онда ол дененің көлемі

$$V = \iint_S f(x,y)dxdy - \iint_S \varphi(x,y)dxdy \qquad (7)$$

формуласымен есептеледі.

2. **Ауданды есептеу.** Аудан элементі $dS = dx \cdot dy$ болғандықтан, (5) формула бойынша S облысының ауданы

$$S = \iint_S ds = \iint_S dxdy \qquad (8)$$

формуламен есептеледі.

Мысал. $y^2 = 2x$ параболасымен және $y = x$ түзуімен қоршалған фигураның ауданын есептеңіз.

Шешуі. Парабола мен түзудің теңдеулерін жүйе түрінде шешіп олардың қиылысқан нүктелерін табамыз. Яғни $x^2 = 2x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; $y_1 = 0$; $y_2 = 2$. Сонымен, қиылысу нүктелері: $A(0;0)$ және $B(2;2)$ болады.

Олай болса

$$S = \int_0^2 \left(\int_x^{\sqrt{2x}} dy \right) dx = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - x \right) dx = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2} - 2 = \frac{2}{3}.$$

3. **Беттің ауданын есептеу.**

$z = f(x,y)$ болатын беттің ауданын есептейік. $f(x,y)$ функциясының дербес туындылары үзіліссіз болсын деп ұйғаралық. $f(x,y)$ бетінің Oxy жазықтығына проекциясы S тұйық облысы болсын. S облысын аудандары $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ болатын ұсақ бөліктерге бөлейік те, әр бөліктен $P_i(\xi_i, \eta_i)$ нүктелерін алалық. S облысындағы P_i нүктесіне $f(x,y)$ бетінің

$$M_i[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)]$$

нүктесі сәйкес келеді. $f(x,y)$ беттің M_i нүктесіне жанама жазықтық жүргіземіз. Жанама жазықтықтың теңдеуі

$$z - z_i = f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i), \qquad (9)$$

ал нормальдың теңдеуі

$$\frac{x - \xi_i}{-f'_x(\xi_i, \eta_i)} = \frac{y - \eta_i}{-f'_y(\xi_i, \eta_i)} = \frac{z - z_i}{1} \qquad (10)$$

болатыны «Математика-1» бөлімінен белгілі. Жанама жазықтықтан Oxy жазықтығына проекциясы ΔS_i болатын ұсақ ауданды $\Delta\delta_i$ мен белгілейік. Егер жанама жазықтық пен Oxy жазықтығы арасындағы бұрышты γ_i арқылы белгілесек, онда

$$\Delta S_i = \Delta\delta_i \cos\gamma_i$$

немесе

$$\Delta\delta_i = \frac{\Delta S_i}{\cos\gamma_i}$$

теңдіктің орындылығы аналитикалық геометриядан белгілі.Жанама жазықтықтың нормалымен Oz өсі арасындағы бұрышта γ_i -ге тең болғандықтан және (10) теңдеуге негізделіп

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[f'_x(\xi_i,\eta_i)\right]^2 + \left[f'_y(\xi_i,\eta_i)\right]^2}}$$

теңдікті жаза аламыз. Онда

$$\Delta\delta_i = \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i,\eta_i) + f'^2_y(\xi_i,\eta_i)} \cdot \Delta S_i .$$

$\Delta\delta_i$ ұсақ аудандардың қосындысы $f(x,y)$ теңдеуімен анықталатын беттің ауданы δ-ның жуық мәнін береді, яғни

$$\delta \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta\delta_i$$

Соңғы жуық теңдіктің $\max \Delta S_i \to 0$ ұмтылғандағы шегін есептеп $f(x,y)$ беттің ізделген ауданын табамыз.

$$\delta = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i,\eta_i) + f'^2_y(\xi_i,\eta_i)} \cdot \Delta S_i .$$

Соңғы теңдіктің оң жағы интегралдық қосынды. Шарт бойынша берілген функцияның дербес туындылары үзіліссіз болғандықтан ол интегралдық қосындының шегі бар болады және ол екі еселі интегралға тең, яғни

$$\delta = \iint_S \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy \qquad (11)$$

Сонымен $z = f(x,y)$ беттің ауданы (11) формуламен есептеледі екен.

Интеграл астындағы өрнек бет ауданының элементі болады, яғни

$$d\delta = \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i,\eta_i) + f'^2_y(\xi_i,\eta_i)}\, dxdy .$$

§16.6 Екі еселі интегралдардың физикада қолданылулары

а) Материалдық жазық фигураның массасы. Ауданы S-ке тең жазық фигураның $M(x,y)$ нүктесіндегі беттік тығыздығы $\delta(x,y)$ болсын. Жазық фигураның $M(x,y)$ нүктесі жататын шексіз аз аудан элементі dS-ті қарастыралық. dS аудан элементінде $\delta(x,y)=\delta$ тұрақты деп қабылдасақ, онда dS элементінің массасы, яғни элементарлық масса dm төмендегі теңдікпен анықталады

$$dm = \delta dS . \qquad (1)$$

(1) теңдікті S бойынша интегралдасақ, онда ауданы S-ке тең материалдық жазық фигураның массасын аламыз, яғни

$$m = \iint_S dm = \iint_S \delta ds. \qquad (2)$$

а) Материалдық жазық фигураның статикалық моменттері.

Егер dm элементарлық массаны Ox және Oy остеріпен y және x қашықтықтағы материалдық нүкте деп қарастырсақ, онда жазық фигураның элементарлық статикалық моменті үшін

$$dS_x = ydm = y\delta(x,y)dS \qquad \text{және } dS_y = xdm = x\delta(x,y)dS$$

формулаларын аламыз. Соңғы теңдіктерді S облысы бойынша интегралдасақ, онда ауданы S-ке тең жазық фигураның координата остеріне қарағандағы статикалық моменттерін есептейтін төмендегі формулалары шығады.

$$S_x = \iint_S y\delta(x,y)dS, \qquad (3)$$

$$S_y = \iint_S x\delta(x,y)dS. \qquad (4)$$

б) Ауырлық центрінің координаталарын табу.

Жазық фигураның қандай да бір өске қарағандағы статикалық моменті, массасы осы жазық фигураның массасына тең, ал өзі оның ауырлық центрінде орналасқан материалдық нүктенің сол өске қарағандағы статикалық моментіне тең болатындығы механикада Вариньон теоремасы деп аталатын теоремада дәлелденген. Ауданы S-ке тең жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын (x_c, y_c)-мен белгілесек:

$$S_y = mx_c, S_x = my_c,$$

Осылардан

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{\iint_S x\delta(x,y)dS}{\iint_S \delta(x,y)dS}. \qquad (5)$$

$$y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{\iint_S y\delta(x,y)dS}{\iint_S \delta(x,y)dS}. \qquad (6)$$

в) Жоғарыдағыларға ұқсас, S ауданды жазық фигураның элементарлық инерция моменттері үшін

$$dJ_x = y^2 dm = y^2\delta(x,y)dS,$$
$$dJ_y = x^2 dm = x^2\delta(x,y)dS$$

формулаларды жаза аламыз. Соңғы теңдіктерді S облысы бойынша интегралдасақ

$$J_x = \iint_S dJ_x = \iint_S y^2\delta(x,y)dS, \qquad (7)$$

$$J_y = \iint_S dJ_y = \iint_S x^2\delta(x,y)dS. \qquad (8)$$

Координаталар бас нүктесіне қарағандағы инерция моменті

$$J_0 = \iint_S (x^2 + y^2)\delta(x,y)dS. \quad (9)$$

(7), (8), (9) теңдіктерден

$$J_0 = J_x + J_y \quad (10)$$

болатындығы шығады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Геометриялық және физикалық шамаларды екі еселі интегралдың көмегімен есептеудің жалпы принципін баяндаңыз.
2. Кеңістіктегі дененің көлемін есептейтін формуланы жазыңыз.
3. Екі еселі интегралдың көмегімен жазық фигуралардың ауданы қалай есептеледі.
4. Беттің ауданын табу формуласын келтіріп шығарыңыз.
5. Материалдық жазық фигураның массасын табу формуласын жазыңыз.
6. Жазық фигураның статикалық моменттерін табатын формулаларды жазыңыз.
7. Ауырлық центрінің координаталарын табу формулаларын жазыңыз.
8. Материалдық жазық фигураның инерция моменттерінің формулаларын жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

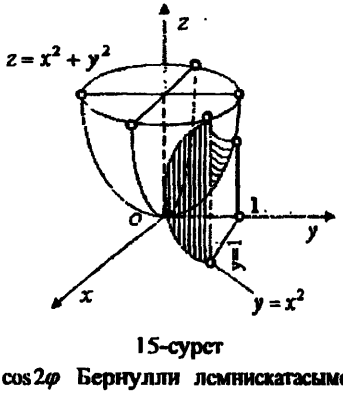
1-мысал. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табалық.

Шешуі. Берілген беттермен қоршалған дененің жартысы 15–суретте кескінделген.

$\frac{1}{2}V = \iint_S z\,dxdy$, мұндағы S, Oxy жазықтығында $y = x^2$ параболасымен және $y = 1$ түзуімен қоршалған облыстың жартысы.

$$V = 2\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 (x^2 + y^2)dy \right) dx = 2\int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Big|_{x^2}^1 dx = 2\int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right)\Big|_0^1 = \frac{88}{105}.$$



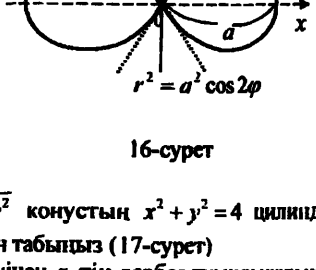
15-сурет

2-мысал. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ Бернулли лемнискатасымен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз (16-сурет).

Шешуі. Берілген фигура симметриялы болғандықтан, оның ауданы төмендегіше өрнектеледі:

$$S = 4\iint_S r dr d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr \right) d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi d\varphi =$$

$$= a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$



16-сурет

3-мысал. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ конустың $x^2 + y^2 = 4$ цилиндір ішіне орналаскан бөлігінің бетінің ауданын табыңыз (17-сурет)

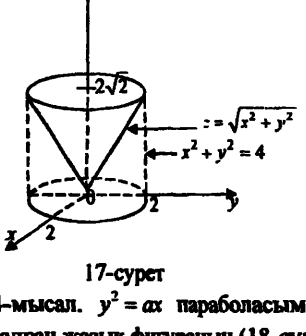
Шешуі. Конустың теңдеуінен z-тің дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

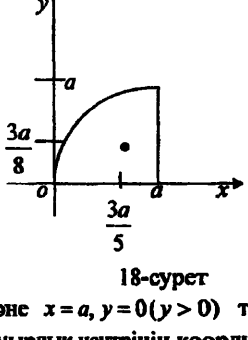
Облыс S радиусы 2-ге тең, центрі координаталар бас нүктесінде жататын дөңгелек.Олай болса

$$S=\iint_S\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}\iint_S dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 rdr\right)d\varphi=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Big|_0^2 d\varphi=4\sqrt{2}\pi.$$



17-сурет



18-сурет

4-мысал. $y^2=ax$ параболасымен және $x=a,\ y=0\ (y>0)$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның (18-сурет) ауырлық центрінің координаталарын табалық (тығыздығы $\delta(x,y)=1$).

Шешуі. (2) формуланы қолданып берілген фигураның массасын табамыз.

$$m=\iint_S\delta dS=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{ax}}dy\right)dy=\int_0^a\sqrt{ax}dx=\frac{2}{3}a^2.$$

(3), (4) формулаларды қолданып статикалық моменттерін табамыз

$$S_x=\iint_S y\delta(x,y)dS=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{ax}}ydy\right)dx=\int_0^a\frac{ax}{2}dx=\frac{a^3}{4}.$$

$$S_y=\iint_S x\delta(x,y)dS=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{ax}}xdy\right)dx=\int_0^a x\sqrt{ax}dx=\frac{2a^3}{5}.$$

(5), (6) формулаларды қолданып ауырлық центрінің координаталарын табамыз

$$x_c=\frac{S_y}{m}=\frac{2a^3}{5}:\frac{2}{3}a^2=\frac{3a}{5},$$

$$y_c=\frac{S_x}{m}=\frac{a^3}{4}:\frac{2}{3}a^2=\frac{3a}{8}.$$

5-мысал. $x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b$ түзулерімен қоршалған тіктөртбұрыштық ауданының J_x, J_y және J_0 инерция моменттерін табыңыз $(\delta(x,y)=1)$.

Шешуі. $J_x=\iint_S y^2\delta(x,y)dS=\int_0^a\left(\int_0^b y^2dy\right)dx=\int_0^a\frac{b^3}{3}dx=\frac{b^3a}{3}.$

$$J_y = \iint_S x^2\delta(x,y)dS = \int_0^a\left(\int_0^b x^2 dy\right)dx = \frac{a^3b}{3};\ J_0 = J_x + J_y = \frac{ab^3}{3} + \frac{a^3b}{3} = \frac{ab\left(a^2+b^2\right)}{3}.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $z = 0,\ x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 3$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

Жауабы: 3π.

2. $x = 2y^2,\ x + 2y + z = 4,\ y = 0,\ z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

Жауабы: $\frac{17}{5}$.

3. $z = 4 - x^2, 2x + y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ беттерімен қоршалған денсның көлемін табыңыз.

Жауабы: $\frac{40}{3}$.

4. $y^2 = 2x$ параболасымен және $y = x$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз. Жауабы: $\frac{2}{3}$.

5. $\rho = a\sin 2\theta$ төрт жапырақты гүлдің ауданын табыңыз.

Жауабы: $\frac{\pi a^2}{8}$.

6. $2z = x^2$ цилиндрінің $y = \frac{x}{2},\ y = 2x$ және $x = 2\sqrt{2}$ жазықтықтарымен киылған бөлігі бетінің ауданын табыңыз.

Жауабы: 13.

7. $x^2 + y^2 = 2az$ параболоидтың $x^2 + y^2 = 3a^2$ цилиндр ішіндегі бөлігі бетінің ауданын табыңыз.

Жауабы: $\frac{14}{3}\pi a^2$.

8. $y = x^2$ парабола, $x = y$ және $y = 0$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

Жауабы: $x_c = 3;\ y_c = 4{,}8$.

9. $\rho = a\left(1 + \cos\theta\right)$ координаталарымен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз. Жауабы: $x_c = \frac{5a}{6},\ y_c = 0$.

10. $y = \sqrt{4x}$ параболасымен және $x + y = 3,\ y = 0$ түзулерімен қоршалаған жазық фигураның Ox өсіне қарағандағы инерция моментін есептеңіз.

Жауабы: 2,4.

§16.7 Үш еселі интеграл

Кеңістікте тұйық V облысы және онда анықталған, үзіліссіз $u=f(x,y,z)$ функциясы берілсін. V денесін көлемдері $\Delta V_1,\Delta V_2,...,\Delta V_n$ болатын n ұсақ бөліктерге бөлейік те, олардың әрқайсысынан кез келген бір $M_i(x_i,y_i,z_i)$ нүктелерін алалық. $f(x,y,z)$ функциясының M_i нүктесіндегі мәнін $f(M_i)$мен белгілеп, төмендегі қосындыны құралық.

$$J_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i\ . \qquad (1)$$

Бұл қосынды үш өлшемді интегралдық қосынды деп аталады. ΔV_i-лердің ең үлкенінің диаметрін d арқылы белгілеп, V облысын шексіз көп бөліктерге бөлсек, d нөлге ұмтылады.

Анықтама. Егер (1) қосындының $d\to 0$дағы шегі бар болса және ол шек V-ны ұсақ бөліктерге бөлу әдісіне және әрбір ΔV_i-ден M_i нүктелерін таңдау әдісіне тәуелді болмаса, онда оны $f(x,y,z)$ функциядан V облысы бойынша алынған үш еселі интеграл деп атайды да төмендегіше белгілейді:

$$J=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i=\iiint_V f(x,y,z)dV. \qquad (2)$$

Теорема. Егер тұйық V облысында $u=f(x,y,z)$ функциясы үзіліссіз болса, онда (2) үш еселі интегралы бар болады және ол V облысын ұсақ бөліктерге бөлу әдісімен, әрбір бөліктен M_i нүктелерді таңдау әдісіне тәуелсіз болады.

Егер $f(x,y,z)$ функциясы V көлемде үзіліссіз таралған қандайда бір заттың көлемдік тығыздығы болса, онда $f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$ көбейтінді ΔV_i көлемінің массасының жуық мәнін береді, мұндағы $M_i(x_i,y_i,z_i)\in\Delta V_i$. Олай болса (1) интегралдық қосынды V көлемді дененің массасының жуық мәніне тең болады. Ал (1) нің $d\to 0$дағы шегі, яғни (2) теңдік V көлемді дененің массасына тең болады.

Сонымен, үш еселі интегралдың физикалық мағынасы төмендегіше болады

Егер $Oxyz$ кеңістіктің V көлемінде қандайда бір заттың массасының таратылу тығыздығы $f(x,y,z)$ функциясымен берілсе, онда

$$m=\iiint_V f(x,y,z)dV \qquad (3)$$

көлемі V болатын дененің массасын береді. Дербес жағдайда, егер $f(x,y,z)\equiv 1$ болса, онда V облыстың массасы оның көлеміне тең болады. Сондықтан V облыстың көлемі

$$V=\iiint_V dV \qquad (4)$$

формуламен есептеледі.

Енді үш еселі интегралды есептеуді карастыралық. V облысы төмендегі қасиеттерге ие болсын.

1. Координаталар өстеріне параллель және V-ның ішкі нүктелерінен өтетін түзулер V облысының шекарасын тек қана екі нүктеде қиып өтетін болсын.

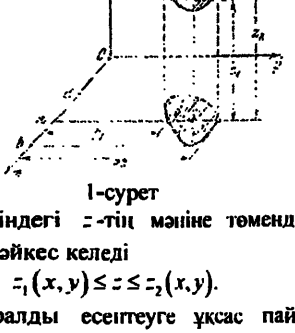
2. V облысының координата жазықтықтарына проекциялары дұрыс облыстар болсын.

3. V облысының координата жазықтықтарына параллель жазықтықтармен қиған бөліктері де 1) және 2) қасиеттерге ие болсын.

Аталған қасиеттерге ие болған V облысы үш өлшемді дұрыс облыс деп аталады.

Үш өлшемді дұрыс облысқа эллипсоид, шар, тікбұрышты параллелипипед, тетраэдр т.с.с. мысал бола алады. Біз бұл оқу құралында дұрыс облыстарды ғана қарастырамыз.

V облысы төменнен $z_1 = z_1(x,y)$, ал жоғарыдан $z_2 = z_2(x,y)$ беттерімен қоршалсын. Сонымен бірге V облысының Oxy координаттар жазықтығындағы проекциясы S дұрыс облыс болсын, яғни $y = y_1(x), y = y_2(x), x = a, x = b$ функцияларымен қоршалған болсын (1-сурет).



1-сурет

Әрбір $(x,y) \in S$ нүктесіндегі z-тің мәніне төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандыра-тын мәндер сәйкес келеді

$$z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y).$$

Онда екі еселі интегралды есептеуге ұқсас пайымдау жүргізсек

$$J_V = \iiint_V f(x,y,z)dV = \iint_S \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx. \quad (5)$$

Сонымен, үш еселі интегралды есептеу (5) қайталанбалы үш интегралды есептеуге келтіріледі екен.

Енді үш еселі интегралдың негізгі қасиеттеріне көшелік:

1. Тұрақты коэффициентті үш еселі интеграл таңбасының алдына шығаруға болады, яғни

$$\iiint_V cf(x,y,z)dV = c\iiint_V f(x,y,z)dV.$$

2. Бірнеше функциялардың қосындысының үш еселі интегралы олардың үш еселі интегралдарының қосындысына тең, яғни

$$\iiint_V [f(x,y,z)+\varphi(x,y,z)]dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint_V \varphi(x,y,z)dxdydz.$$

3. Егер интегралдау облысында $f(x,y,z)\geq 0$ болса, онда

$$\iiint_V f(x,y,z)dV \geq 0.$$

4. Егер интегралдау облысында $\varphi(x,y,z)\leq f(x,y,z)$ болса, онда

$$\iiint_V \varphi(x,y,z)dV \leq \iiint_V f(x,y,z)dV.$$

5. Егер V облысы k бөлікке бөлінген болса, яғни $V = V_1 + V_2 + ... + V_k$, онда

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dV + ... + \iiint_{V_k} f(x,y,z)dV.$$

6. Егер $f(x,y,z)$ функциясының V облысындағы ең кіші және ең үлкен мәндері сәйкес m және M болса, онда V облысында

$$mV \leq \iiint_V f(x,y,z)dV \leq MV$$

теңсіздіктер орындалады. Мұндағы V -интегралдау облысының көлемі.

7. Егер $f(x,y,z)$ функциясы тұйық V облысында үзіліссіз болса, онда V -дан қандайда бір P нүктесі табылып, сол нүктеде

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = f(P)V$$

теңдік орындалады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Үш еселі интегралдың анықтамасын беріңіз.
2. Үш еселі интегралдың бар болуы теоремасын баяндаңыз.
3. Үш еселі интегралдың физикалық мағынасын ашыңыз.
4. Қандай облысты үш өлшемді дұрыс облыс деп атайды?
5. Үш еселі интегралды қайталанба интегралға келтіру жолынбаяндаңыз.
6. Үш еселі интегралдың қасиеттерін жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$ үш еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы V координаталар жазықтықтарымен және $x+y+z=1$ жазықтығымен қоршалған облыс.

Шешуі.

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3} = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} \right) dy \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{1}{(x+y+z+1)^2} \Big|_0^{1-x-y} dy \right) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(x+y+1)^2} \right) dy \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{8} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} dy \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{dy}{(x+y+1)^2} \right) dx = -\frac{1}{8} \int_0^1 (1-x)dx - \frac{1}{4} \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}.$$

2-мысал. $\int_0^a \left(\int_0^x \left(\int_0^y xyzdz \right) dy \right) dx$ қайталанбалы интегралын есептеңіз.

Шешуі.

$$\int_0^a \left(\int_0^x \left(\int_0^y xyzdz \right) dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^x xy \frac{z^2}{2} \Big|_0^y dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^x \frac{xy^3}{2} dy \right) dx = \int_0^a \frac{xy^4}{8} \Big|_0^x dx = \int_0^a \frac{x^5}{8} dx =$$

$$= \frac{x^6}{48} \Big|_0^a = \frac{a^6}{48}.$$

3-мысал. Егер $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ жазықтықтарымен қоршалған пирамиданың әрбір нүктесінің тығыздығы сол нүктенің аппликатасына тең болса, яғни $f(x,y,z)=z$, онда пирамиданың массасын анықтаңыз.

Шешуі. (3), (5) формулаларды қолданамыз.

$$m = \iiint_V z dV = \int_0^a \left(\int_0^{a-x} \left(\int_0^{a-x-y} zdz \right) dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{a-x} \frac{z^2}{2} \Big|_0^{a-x-y} dy \right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^a \left(\int_0^{a-x} (a-x-y)^2 dy \right) dx = -\frac{1}{2} \int_0^a \frac{(a-x-y)^3}{3} \Big|_0^{a-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(a-x)^3}{3} dx =$$

$$-\frac{1}{24}(a-x)^4 \Big|_0^a = \frac{a^4}{24}.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $\iiint_V (x+y+z) dV$ үш еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы V облысы $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ жазықтықтарымен қоршалған.

Жауабы: $\frac{3}{8}$

2. $\iiint_V (3x+2y+z)dV$ үш еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы $V: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3$.

Жауабы: $-\frac{20}{9}$.

3. $\iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^4}$ үш еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы $V: 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1$.

Жауабы: $\frac{1}{14}$.

4. $\iiint_V xyzdxdydz$ үш еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы V: $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 5$, $z = 0$ функцияларымен қоршалған облыс.

Жауабы: $\frac{25}{16}$.

5. $\iiint_V x^2y^2z^2dxdydz$ үш еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы V облысы $x = 1, x = 3, y = 0, y = 2, z = 0, z = 5$ жазықтықтарымен қоршалған.

Жауабы: $\frac{2600}{9}$.

§16.8 Үш еселі интегралда айнымалыларды алмастыру

$Oxyz$ тік бұрышты координаталар кеңістігінде түйық V облысы мен $O\mu\vartheta\omega$ тік бұрышты координаталар кеңістігінде түйық V' облысы берілсін.

$$\begin{cases} x = x(u,\vartheta,\omega), \\ y = y(u,\vartheta,\omega), \\ z = z(u,\vartheta,\omega). \end{cases} \quad (1)$$

(1) теңдіктері V облысын V' облысына өзара бірмәнді бейнелесін. Жүйенің оң жағындағы функциялар мен олардың 1-ретті дербес туындылары да үзіліссіз болсын деп үйғарайық. Онда екі еселі интегралда айнымалыларды алмастыру тақырыбындағыдай ұқсас пайымдаулар жасап

$$\lim_{\Delta V' \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta V'} = |J|$$

теңдігін аламыз. Мұндағы ΔV мен $\Delta V'$ қарастырылып отырған облыстардың көлем элементтері, ал

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \omega} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

анықтауышы $x(u,\vartheta,\omega)$, $y(u,\vartheta,\omega)$, $z(u,\vartheta,\omega)$ функцияларының Якоби анықтауышы.

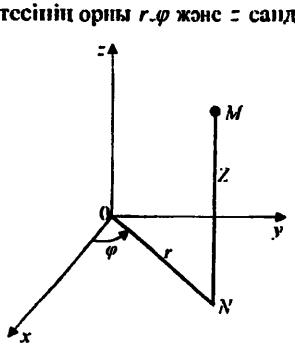
Егер $f(x,y,z)$ функциясы V облысында үзіліссіз және $\Delta V, \Delta V'$ облыстары арасында жоғарыда айтылғандай өзара бірмәнді сәйкестік орнатылған болса, онда

$$\iiint_V f(x,y,z)dV=\iiint_{V'} f[x(u,\vartheta,\omega),y(u,\vartheta,\omega),z(u,\vartheta,\omega)]|J|dV'. \qquad (3)$$

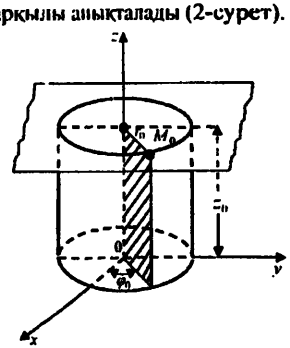
формуласы шығады. Бұл формула үш еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру формуласы деп аталады.

Дербес жағдайларды қарастыралық.

1. Үш еселі интегралдарда цилиндрлік координаталарлар жүйесіне көшу. Көптеген практикалық есептерді қарастырғанда цилиндрлік координаталар жиі қолданылады. $Oxyz$ кеңістігінде кез келген M нүктесін қарастыралық. M нүктесінің Oxy жазықтығындағы проекциясын N деп белгілелік. N нүктесін r және φ полярлық координаталар арқылы анықтап, оларға M нүктесінің аппликатасы z-ті біріктірсек, онда $Oxyz$ кеңістігіндегі M нүктесінің орны r,φ және z сандары арқылы анықталады (2-сурет).



2-сурет



3-сурет

r,φ және z сандары M нүктесінің цилиндрлік координаталары деп аталады. Кеңістіктегі кез келген нүктенің цилиндрлік координаталары мен оның декарттық координаталары арасында төмендегідей байланыс бар:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z. \qquad (4)$$

Декарттық координаталар жүйесінде $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ жазықтықтарының қиылысу нүктесі болады. Ал цилиндрлік координаталар жүйесінде $M_0(r_0, \varphi_0, z_0)$ нүктесі $r = r_0, \varphi = \varphi_0, z = z_0$ беттерінің қиылысу нүктесі болады (3-сурет). Мұндағы $r = r_0$ теңдеуі жасаушысы Oz өсіне параллель болатын радиусы r_0-ге тең дөңгелек цилиндрді өрнектейді. $\varphi = \varphi_0$ теңдеуі Oz осінен өтіп, Oxz жазықтығымен φ_0 бұрыш жасайтын жарты жазықтықты, ал $z = z_0$ теңдеуі аппликатасы z_0-ге тең, Oxy жазықтығына параллель жазықтықты береді.

$z = f(x, y)$ теңдеуіне кеңістікте қандай да бір бет сәйкес келеді. Егер x, y, z айнымалыларының орнына олардың (4) формулалардағы өрнектерін қойсақ, онда беттің цилиндрлік координаталардағы теңдеуі $z = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ болады.

Енді $\iiint\limits_V f(x, y, z)dV$ үш еселі интегралын цилиндрлік координаталарға көшіп есептеу мәселесін қарастыралық.

(2) формулаға сәйкес (4) теңдіктердің Якобианын есептейміз.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r.$$

(3) формула бойынша

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iiint\limits_{V_1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrdzd\varphi. \qquad (5)$$

Егер V облысы жоғарыдан $h(x, y)$ төменнен $g(x, y)$ беттерімен қоршалған болса, онда 3.6 тақырыбының нәтижелерін қолданып (5) формуланы төмендегіше жазуға болады

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iint\limits_S \left(\int\limits_{g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{h(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz \right) rdrd\varphi =$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \left(\int\limits_{g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{h(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz \right) rdr \right) d\varphi. \qquad (6)$$

мұндағы S облысы V облысының Oxy жазықтығына проекциясы, ал $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta, r_1 = r_1(\varphi), r_2 = r_2(\varphi)$. S облысын қоршаған беттер.

(6) формула үш еселі интегралды цилиндрлік координаталарға көшіп есептеу формуласы деп аталады.

2. Үш еселі интегралдарды сфералық координаталар жүйесіне көшіп есептеу. $Oxyz$ тік бұрышты координаталар кеңістігінде кез келген M нүктесін алып, одан координаталар бас нүктесіне дейінгі ара қашықтықты r-

мен белгілелік және OM кесіндісін Oxy жазықтығына проекциялаймыз (4-сурет). Ox өсімен ON кесіндісі арасындағы бұрышты φ-мен, ал $r = OM$ -мен Oz осі арасындағы бұрышты θ-мен белгілейік. r,φ,θ сандары кеңістіктегі M нүктесінің сфералық координаталары төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандырды

$$0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta < \pi.$$

4-суреттегі тікбұрышты үшбұрыш ONK-дан $x = ON\cos\varphi$, $y = ON\sin\varphi$, ал тікбұрышты OMN үшбұрышынан $MN = r\cos\theta$ теңдіктерді жазамыз. Онда декарт координаталарының сфералық координаталардағы орнегі төмендегіше болады

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \qquad (7)$$

(2) формулаға сәйкес бұл функциялардың Якобианын есептейміз.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} =$$

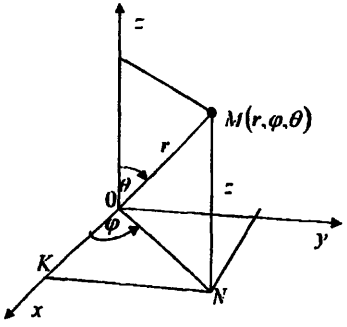
$$= r^2\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\sin\theta\left(\cos^2\theta\begin{vmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} - \sin^2\theta\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}\right) = -r^2\sin\theta.$$

(3) формула бойынша

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta. \qquad (8)$$

(8) формула үш еселі интегралдарды сфералық координаталарға көшу арқылы есептеу формуласы деп аталады.



4-сурет

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. V облысын V' облысына өзара бірмәнді бейнелейтін формулаларды жазыңыз.

2. Үш еселі интегралдарда айнымалыларды ауыстыру формуласын жазыңыз.

3. Кез келген нүктенің декарттық координаталарын цилиндрлік координаталармен өрнектейтін формулаларды жазыңыз.

4. Үш еселі интегралды цилиндрлік координаталарға көшу арқылы есептеу формуласын жазыңыз.

5. Кез келген нүктенің декарттық координаталарын сфералық координаталармен өрнектейтін формулаларын жазыңыз.

6. Үш еселі интегралды сфералық координаталарға көшіп есептеу формуласын жазыңыз.

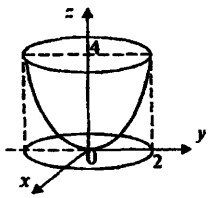
Жаттығулар және оқытушының қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ).

1-мысал. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$ үш еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы V облысы $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ және $z=2$ беттермен қоршалаған (5-сурет).

Шешуі. Есептің шарты бойынша V облысы төменнен $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ айналма параболоидпен, ал жоғарыдан $z=2$ жазықтығымен қоршалған дене. Бұл дененің Oxy жазықтығына проекциясын табу үшін

$$\begin{cases} z=\frac{1}{2}(x^2+y^2), \\ z=2 \end{cases}$$

жүйені шешіп $x^2+y^2=4$ теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеу V облысының Oxy жазықтығына проекциясы болатын S дөңгелек. (6) формула бойынша



5-сурет

$$\iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iint_S \left(\int_{\frac{1}{2}r^2}^{2} r^2\,dz \right) r\,dr\,d\varphi = -\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^3 \left(2-\frac{1}{2}r^2\right) dr \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2r^4}{4} - \frac{r^6}{12} \right) \Bigg|_0^2 d\varphi = \frac{16\pi}{3}.$$

2-мысал. $\iiint_V x^2 z\,dx\,dy\,dz$ үш еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы V, $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z=0 (z\ge 0)$ беттермен қоршалған жарты шар.

Шешуі. (8) формула бойынша

$$\iiint_V x^2 z\,dx\,dy\,dz = \iiint_V r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi \cdot r\cos\theta \cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cdot\cos\theta\,d\theta \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$\int_0^R r^5\,dr = \frac{R^6}{6\cdot 2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,d\sin\theta \left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi R^6}{6}\cdot\frac{\sin^4\theta}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^6}{24}.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төмендегі үш еселі интегралдарды цилиндрлік немесе сфералық координаталарға көшіп есептеңіз.

1. $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ мұндағы V, $x^2+y^2=1$ цилиндрлік бетімен және $y=0$, $y=1$ жазықтықтарымен қоршалған облыс.

Жауабы: $\frac{3\pi}{2}$.

2. $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ мұндағы V, $z=x^2+y^2$ айналма параболоидпен және $z=1$ жазықтығымен қоршалған облыс.

Жауабы: -2π.

3. $\iiint_V dx\,dy\,dz$ мұндағы V, $x^2+y^2=1$ цилиндрлік бетімен және $z=0$, $z=3$ жазықтықтарымен қоршалған облыс.

Жауабы: 0.

4. $\iiint_V \sqrt{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\,dxdydz$, мұндағы V, $x^2+y^2+z^2 \le 1$ шар.

Жауабы: $\frac{8\pi}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

5. $\iiint_V dxdydz$ мұндағы V, $x^2+y^2+z^2 \le r^2$ шар.

Жауабы: $\frac{4}{3}\pi r^3$.

6. $\iiint_V \sqrt{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)}\,dxdydz$ V, $x^2+y^2+z^2 \le r^2$ мұндағы

§16.9 Үш еселі интегралдардың қолданылулары

Үш еселі интегралдың физикалық есептерді шешуге қолдану принциптері екі еселі интегралдың қолданылуына ұқсас. Кейбір физикалық есептерді қарастыралық.

1. **Статикалық моменттерді анықтау.** Массасы m-ге тең материалдық нүктенің Oxy жазықтығына қарағандағы статикалық моменті деп нүктенің массасы мен аппликатасының көбейтіндісін айтатындығы белгілі, яғни $S_{xy} = mz$. Осы сияқты Oyz және Oxz жазықтықтарына қарағандағы статикалық моменттері де анықталады, яғни $S_{yz} = mx, S_{xz} = my$. Егер материалдық нүктелердің жүйесі берілсе, онда оның статикалық моменті материалдық нүктелердің сәйкес статикалық моменттерінің қосындысы ретінде анықталады.

Кеңістіктегі әрбір нүктенің тығыздығы $\delta = \delta(x,y,z)$ болатын V денесі берілсін. Осы дененің S_{xy} статикалық моментін табалық.

V денесін көлемдері $\Delta V_i (i = 1,2,...,n)$ болатын ұсақ n денелерге бөлелік. Әрбір ΔV_i ұсақ дененен кез келген $P_i(x_i, y_i, z_i)$ нүктесін таңдалық. ΔV_i-дің әрбір нүктесінің тығыздығы P_i нүктесінің тығыздығына жуық тең деп ұйғарсақ, онда ΔV_i-дің массасы Δm_i үшін төмендегі жуық теңдікті жаза аламыз:

$$\Delta m_i \approx \delta(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Әрбір ұсақ ΔV_i денені Δm_i массасы $P_i(x_i, y_i, z_i)$ материалдық нүкте деп қарасақ, онда осы нүктенің Oxy жазықтығына қарағандағы статикалық моменті $\Delta S'_{xy}$ үшін келесі жуық теңдікті жаза аламыз

$$\Delta S'_{xy} \approx z_i \Delta m_i \approx z_i \delta(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Онда V дененің Oxy жазықтығына қарағандағы статикалық моменті

$$S_{xy} \approx \sum_{i=1}^{n} z_i \delta(x_i, y_i, z_i) V_i. \qquad (1)$$

(1) теңдікте $n \to \infty$ шекке көшсек, статикалық моменттің дәл мәні үшін келесі формуланы аламыз

$$S_{xy} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} z_i \delta(x_i, y_i, z_i) V_i = \iiint_V z\delta(x, y, z)dV . \qquad (2)$$

Осы сияқты Oyz және Oxz жазықтықтарына қарағандағы статикалық моменттерін табамыз

$$S_{yz} = \iiint_V x\delta(x, y, z)dV,\ S_{xz} = \iiint_V z\delta(x, y, z)dV . \qquad (3)$$

2. **Ауырлық центрінің координаталарын табу.** V денесінің ауырлық центрінің координаталары келесі формулар арқылы табылады

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m},\ y_c = \frac{S_{xz}}{m},\ z_c = \frac{S_{xy}}{m} . \qquad (4)$$

Егер S_{yz}, S_{xz}, S_{xy}-тердің (2), (3) формулаларындағы мәндерін және m-нің мәнін (4) теңдікке қойсақ

$$x_c = \frac{\iiint_V x\delta(x, y, z)dV}{\iiint_V \delta(x, y, z)dV},\ y_c = \frac{\iiint_V y\delta(x, y, z)dV}{\iiint_V \delta(x, y, z)dV},\ z_c = \frac{\iiint_V z\delta(x, y, z)dV}{\iiint_V \delta(x, y, z)dV} \qquad (5)$$

Егер V денесі біртекті болса, яғни $\delta(x, y, z) = const$, онда (5) теңдіктер төмендегіше болады

$$x_c = \frac{\iiint_V x dv}{V},\ y_c = \frac{\iiint_V y dv}{V},\ z_c = \frac{\iiint_V z dv}{V}, \qquad (6)$$

Бұл арада $\iiint_V dV = V$ теңдігі ескеріледі.

3. **Инерция моментін анықтау.** Массасы m-ге тең материалдық нүктенің Ox өсіне қарағандағы инерция моменті деп нүктенің массасы мен оның ox өсіне дейінгі арақашықтық квадратының көбейтіндісін айтады, яғни $J_x = (y^2 + z^2)m$.

Oy және Oz өстеріне қарағандағы инерция моменттері де осы сияқты анықталады, яғни

$$J_y = (x^2 + z^2)m,\ J_z = (x^2 + y^2)m.$$

Әрбір нүктесінің тығыздығы $\delta = \delta(x, y, z)$ болатын V денесін ұсақ бөліктерге бөліп, әрбір ұсақ бөлікті бір материалдық нүкте деп қарастыру және статикалық моменттерді анықтағандағыға ұқсас пайымдаулар жүргізу нәтижесінде V дененің инерция моменттерінің келесі формуларын аламыз:

$$J_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\delta(x, y, z)dV,$$

$$J_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\delta(x, y, z)dV,$$

$$J_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\delta(x, y, z)dV.$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Материалдық нүктенің координаталар жазықтықтарына қарағандағы статикалық моменттері дегеніміз не?

2. Тығыздығы $\delta(x,y,z)$ болатын дененің координаталар жазықтықтарына қарағандағы статикалық моменттерін анықтайтын формулаларды жазыңыз.

3. Тығыздығы $\delta(x,y,z)$ болатын дененің ауырлық центрінің координаталарын табатын формулаларды жазыңыз.

4. Біртекті дененің ауырлық центрінің координаталарын табатын формулаларды жазыңыз.

5. Материалдық нүктенің координата өстеріне қарағандағы инерция моменттері деген не?

6. Тығыздығы $\delta(x,y,z)$ болатын дененің координата өстеріне қарағандағы инерция моменттерін табатын формулаларды жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ сферасымен және $x^2+y^2=z^2$ конусымен қоршалған дененің көлемін табалық.

Шешуі. Көлемі ізделіп отырған дене жоғарыдан сфераның теңдеуіндегі z-тің үлкен мәні z_c-ке, ал төменнен конустың теңдеуіндегі z-тің оң мәні z_k-ға сәйкес беттермен қоршалған. Сфераның теңдеуінен z_c-ны, ал конустың теңдеуінен z_k-ны табамыз:

$$x^2+y^2+z^2-2zR=0,$$

$$z_c=R+\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

$$z_k=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Берілген V дененің Oxy жазықтығына проекциясы S-ті қоршаған қисықтың теңдеуін табу үшін сфераның теңдеуімен конустың теңдеуін жүйе ретінде қарастырып z-ті жоямыз. Сонда, S-ті қоршаған қисық $x^2+y^2=R^2$ шеңбер екендігі шығады. (6) формуланы қолданамыз.

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_S\left(\int\limits_{z_k}^{z_c}dz\right)dxdy=\iint\limits_S(z_c-z_k)dxdy=\iint\limits_S\left(R+\sqrt{R^2-r^2}-r\right)rdrd\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R\left(Rr+r\sqrt{R^2-r^2}-r^2\right)dr\right)d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{R\cdot r^2}{2}-\frac{r^3}{3}-\frac{\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_0^R d\varphi=$$

$$=\frac{R^3}{2}\cdot 2\pi=\pi R^3$$

2-мысал. $y=x^2$ цилиндрлік бетпен және $z=0;\ 2y+z=2$ жазықтықтарымен қоршалаған дененің массасын табалық. Дененің әрбір нүктесінің көлемдік тығыздығы нүктенің ординатасына тең деп ұйғаралық.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $\delta(x,y,z)=y$. Онда

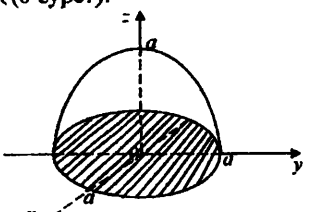
$$m=\iiint_V \delta(x,y,z)dxdydz=\iiint_V ydxdydz.$$

Мұндағы V, берілген денелерден тұратын облыс.

$$m=\iint_S\left(\int_0^{2(1-y)}dz\right)ydydx=\iint_S 2(1-y)ydydx=2\int_0^1\left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}}dx\right)\left(y-y^2\right)$$

$$4\int_0^1\left(y^{\frac{3}{2}}-y^2\right)dy=4\left(\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7}\right)\Bigg|_0^1=\frac{16}{35}.$$

3-мысал. $az=a^2-x^2-y^2$ айналма параболоидпен және $z=0$ жазықтығымен қоршалаған біртекті дененің ауырлық центрінің координаталарын табалық (6-сурет).



6-сурет

Шешуі. Біртекті дене Oxz және Oyz жазықтықтарына қарағанда симметриялы болғандықтан, оның ауырлық центрі Oz осінде орналасқан. Онда $x_c=y_c=0$. (6) формуланы қолданып z_c-ті табамыз.

$$z_c=\frac{S_{xy}}{m}=\frac{\iiint_V zdV}{V}.$$

Мұндағы S_{xy} және V-ны цилиндрлік координаталарға көшіп есептейміз. Берілген дененің Oxy жазықтығына проекциясы, яғни S облысы - радиусы $r=a$ центрі координаталар бас нүктесінде болатын дөңгелек. Ал z үшін $z=\frac{1}{2}\left(a^2-x^2-y^2\right)=\frac{1}{a}\left(a^2-r^2\right)$-ған деп өзгертеді. Онда:

$$S_{xy}=\iiint_V zdV=\iint_S\left(\int_0^{\frac{1}{a}\left(a^2-r^2\right)}zdz\right)dS=\iint_S\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{a}\left(a^2-r^2\right)}dS=\frac{1}{2a^2}\iint_S\left(a^2-r^2\right)^2dS=$$

$$=\frac{1}{2a^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\left(a^2-r^2\right)^2rdr\right)d\varphi=\frac{1}{2a^2}\int_0^{2\pi}\left(a^4\cdot\frac{r^2}{2}-2a^2\cdot\frac{r^4}{4}+\frac{r^6}{6}\right)d\varphi=\frac{a^4\pi}{6}.$$

$$V=\iiint_V dV=\iint_S\left(\int_0^{\frac{1}{a}\left(a^2-r^2\right)}dz\right)dS=\iint_S\frac{1}{a}\left(a^2-r^2\right)dS=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\left(a^2-r^2\right)^2 r\,dr\right)d\varphi=$$

$$\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\left(a^{12}\cdot\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)_0^a d\varphi=\frac{a^3}{4}\cdot 2\pi=\frac{a^3\pi}{2}.$$

$$z_c=\frac{a^4\pi}{6}:\frac{a^3\pi}{2}=\frac{a}{3}.$$

Сонымен, берілген дененің ауырлық центрінің координаталары:

$$x_c=0,\ y_c=0,\ z_c=\frac{a}{3}.$$

4-мысал. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ конусымен және $z=4$ жазықтығымен қоршалған біртекті дененің координаталар бас нүктесіне қарағандағы инерция моментін табалық.

Шешуі: Берілген дене төменнен конуспен, ал жоғарыдан $z=4$ жазықтықпен шектелген. Бұл дененің Oxy жазықтығына проекциясы дөңгелек болып, оның радиусы 4-ке тең, яғни S облысы $x^2+y^2=16$ шеңберімен қоршалған. Цилиндрлік координаталар жүйесіне көшіп есептейміз. Берілген конустың цилиндрлік координаталар жүйесіндегі теңдеуі: $z=r$.

$$J_0=\iiint_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dv=\iint_S\left(\int_r^4\left(r^2+z^2\right)dz\right)dS=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^4\left(r^2z+\frac{z^3}{3}\right)_r^4 r\,dr\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^4\left(4r^2+\frac{64}{3}-r^3-\frac{r^3}{3}\right)r\,dr\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(r^4+\frac{32}{3}r^2-\frac{4r^5}{15}\right)_0^4 d\varphi=\frac{1536\pi}{5}.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $x^2+y^2=4,\ y+z=2,\ z=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

Жауабы: 8π.

2. $x^2+y^2=9,\ z=5-x-y,\ z=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. Жауабы: 45π

3. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. Жауабы: $\frac{88}{105}$.

4. $x^2+y^2-z^2=0$ конусымен және $z=h$ жазықтығымен қоршалған дененің массасын табыңыз. Дененің әрбір нүктесіндегі тығыздығы сол нүктенің аппликатасына тең, яғни $\delta(x,y,z)=z$.

Жауабы: $\frac{\pi h^4}{4}$.

5. $x^2+y^2+z^2=a^2, z=0$ біртекті жарты шардың ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

Жауабы: $\left(0;0;\frac{3a}{8}\right)$.

6. $z=\frac{1}{2}y^2$ цилиндрлік бетімен және $2x+3y=12, x=0, y=0, z=0$ жазықтықтарымен қоршалған біртекті дененің ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

Жауабы: $\left(\frac{6}{5};\frac{12}{5};\frac{8}{5}\right)$.

7. $0\le x\le 0, 0\le y\le a, 0\le z\le a$ кубтың қабырғаларына қарағандағы инерция моментін табыңыз.

Жауабы: $\frac{2}{3}a^5$.

8. $z^2=2ax, z=0, x^2+y^2=ax$ беттерімен қоршалған біртекті дененің Oz өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

Жауабы: $\frac{32\sqrt{2a^5}}{135}$.

§16.10 Қисық сызықты интегралдар

§16.10.1 Бірінші текті қисық сызықты интегралдар

l қисығының теңдеуі $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ параметрлік түрде берілсін.

1-анықтама. Егер φ,ψ функциялары және олардың туындылары үзіліссіз болса, онда l қисығы тегіс немесе жатық деп аталады.

Тегіс l қисығы және осы қисықта анықталған, үзіліссіз $f(x,y)$ функциясы берілсін.

2-анықтама. $f(x,y)$ функциясынан l қисығы бойынша алынған бірінші текті қисық сызықты интеграл деп келесі

$$\int_l f(x,y)dl=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \qquad (1)$$

интегралын айтады.

Мұндағы dl доға дифференциалы немесе доға элементі, ол

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

теңдігі бойынша табылады.

Егер l қисығы $y=y(x)$ $(a\le x\le b)$ теңдеуі арқылы берілсе, онда x-ті параметр ретінде қарастырып (1) теңдікті келесі түрде жазамыз.

$$\int_l f(x,y)dl=\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}dx.$$

Енді l қисығы материалдық қисық болсын делік. Егер $f(x,y)$ функциясын доғаның кез келген $M(x,y)$ нүктесінің сызықты тығыздығы деп қарастырсақ, яғни $f(x,y)=\delta(x,y)$, онда доға элементінің элементарлық массасы

$$dm=\delta dl. \tag{2}$$

(2) теңдікті l қисығы бойынша интегралдасақ, онда l материалдық қисықтың массасы үшін келесі формуланы аламыз

$$m=\int_l \delta dl. \tag{3}$$

Соңғы теңдік бірінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасын береді.

Бірінші текті қисық сызықты интегралдың келесі қасиеттерін атап өтелік.

1) интегралдау бағыты өзгергенде бірінші текті қисық сызықты интегралдың мәні өзгермейді, яғни

$$\int_{l^+} f(x,y)dl=\int_{l^-} f(x,y)dl.$$

Мұндағы l^+, l^-, l-қисығы бойынша озара қарама-қарсы бағытта интегралдауды білдіреді.

2) егер $l=l_1\cup l_2$ болса, онда

$$\int_l f(x,y)dl=\int_{l_1} f(x,y)dl+\int_{l_2} f(x,y)dl.$$

Кеңістікте $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\eta(t)\quad (\alpha\le t\le\beta)$ теңдеулерімен берілген тегіс l қисығында анықталған, үзіліссіз $f(x,y,z)$ функциясынан l бойынша алынған бірінші текті қисық сызықты интеграл (1) теңдікке үқсас келесі түрде анықталады:

$$\int_l f(x,y,z)dl=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\eta(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\eta'^2(t)}dt,$$

мұндағы

$dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\eta'^2(t)}dt$ доға дифференциалы немесе доға элементі.

§16.10.2 Екінші текті қисық сызықты интегралдар

Тегіс l қисығы $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (\alpha\le t\le\beta)$ теңдеулерімен берілсін делік. l қисығында $P(x,y),\ Q(x,y)$ функциялары үзіліссіз болсын.

3-анықтама. $P(x,y),\ Q(x,y)$ қос функциядан l қисығы бойынша алынған екінші текті қисық сызықты интеграл деп келесі

$$\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt \tag{4}$$

интегралын айтады.

Мұндағы $dx=\varphi'(t)dt,\ dy=\psi'(t)dt$.

(4) теңдіктің сол жағында жақша қойылмаса да, екі қосылғышта интегралға тиісті деп қабылданады.

Егер l қисығы $y=y(x)$ $(a\le x\le b)$ теңдеуімен берілсе, онда (4) формула келесі түрде болады

$$\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b[P(x,y(x))+Q(x,y(x))\cdot y'(x)]dx. \qquad (5)$$

Егер l қисығы $x=x(y)$ $(c\le x\le d)$ теңдеуімен берілсе, онда

$$\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_c^d[P(x(y),y)x'(y)+Q(x(y),y)]dy. \qquad (6)$$

Екінші текті қисық сызықты интегралдардың келесі қасиеттерін атап өтелік.

1) интегралдау бағыты өзгергенде екінші текті қисық сызықты интегралдың таңбасы қарама-қарсысына өзгереді, яғни

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int_{L'} P(x,y)dx+Q(x,y)dy;$$

2) егер $l=l_1\cup l_2$ болса, онда

$$\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{l_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int_{l_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Кеңістіктегі $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\eta(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ тегіс l қисығы бойынша онда анықталған, үзіліссіз $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ үш функциялардан алынған екінші текті қисық сызықты интеграл келесі теңдік арқылы анықталады:

$$\int_l P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int_\alpha^\beta[P(\varphi(t),\psi(t),\eta(t))\varphi'(t)+$$
$$+Q(\varphi(t),\psi(t),\eta(t))\psi'(t)+R(\varphi(t),\psi(t),\eta(t))\eta'(t)]dt. \qquad (7)$$

§16.10.3 Екінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасы

Қандай да бір материалдық нүкте, үзіліссіз өзгеретін айнымалы $F\{P(x,y)Q(x,y)\}$ күшінің әсерінен, теңдеуі $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ болатын l қисығы бойлап оның кез келген $M(x,y)$ нүктесінен оған шексіз жақын $M_1(x+dx,y+dy)$ нүктесіне жылжысын делік. Ығысу векторын $\overline{dl}=\overline{MM_1}$ десек, онда $\overline{dl}$ векторының компоненталары dx,dy, яғни $\overline{dl}\{dx,dy\}$ болады. Шексіз аз $|dl|$ аралықта $\overline{F}$ күшін тұрақты деп қабылдасақ, онда ол күштің осы аралықта орындаған элементарлық жұмысы $\overline{F}$ векторымен $\overline{dl}$ векторының скалярлық көбейтіндісінс тең екені аналитикалық геометрия бөлімінен белгілі, яғни

$$dA=\overline{F}\cdot\overline{dl}=P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \qquad (8)$$

(8) өрнекті l қисығы бойынша интегралдап орындалған жұмыстың келесі өрнегіне ие боламыз:

$$A = \int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (9)$$

Сонымен, екінші текті қисық сызықты интеграл физикалық мағынасы жағынан айнымалы $\overline{F}$ күшінің l қисығы бойынша орындаған жұмысын береді екен. Мұндағы $P(x,y), Q(x,y)$ функциялары $\overline{F}$ күшінің Ox және Oy остеріне проекциялары.

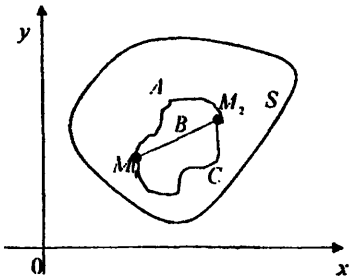
Егер қисық және әсер етуші күш кеңістікте берілсе, яғни $\overline{F}\{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ күшінің $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\eta(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ қисығы (l) бойлап орындаған жұмысы

$$A = \int_l P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \qquad (10)$$

формула арқылы анықталады.

§16.10.4 Екінші текті қисық сызықты интегралдардың интегралдау қисығының түрінен тәуелсіздік шарты

Түйық S облысы және онда үзіліссіз $P(x,y), Q(x,y)$ функциялары берілсін. S облысының кез келген екі $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2)$ нүктесін таңдап, оларды облыстан шықпай біріктіретін бірқанша қисықтарды, яғни $M_1AM_2, M_1BM_2, M_1CM_2, \ldots$-лерді қарастыралық (7-сурет).



7-сурет

4-анықтама. Егер

$$\int_{M_1AM_2} Pdx + Qdy = \int_{M_1BM_2} Pdx + Qdy = \int_{M_1CM_2} Pdx + Qdy = \ldots \qquad (11)$$

теңдіктері орындалса, онда

$$\int_{M_1M_2} Pdx + Qdy \qquad (12)$$

екінші текті қисық сызықты интеграл интегралдау қисығының түрінен тәуелсіз деп аталады.

Теорема. Егер $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ өрнегі S облысында қандай да бір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болса, яғни $du = Pdx + Qdy$,

онда (12) екінші текті қисық сызықты интеграл интегралдау қисығының түрінен тәуелсіз болады.

Дәлелдеу. S облысының кез келген $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2)$ нүктелерін біріктіретін кез келген тегіс l қисығы $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$ теңдеулерімен берілсін. Мұндағы

$$\varphi(\alpha)=x_1,\ \varphi(\beta)=x_2, \psi(\alpha)=y_1, \psi(\beta)=y_2. \qquad (13)$$

Теореманың шарты бойынша

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du[\varphi(t),\psi(t)]. \qquad (14)$$

Онда (4), (13) теңдіктерді қолданып, келесі теңдіктерді аламыз

$$\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta du\big[\varphi(t),\psi(t)\big]=u\big[\varphi(t),\psi(t)\big]\Big|_\alpha^\beta= \qquad (15)$$
$$=u\big[\varphi(\beta),\psi(\beta)\big]-u\big[\varphi(\alpha),\psi(\alpha)\big]=u(M_2)-u(M_1).$$

Сонымен, екінші текті қисық сызықты интегралдың мәні l қисығының түрінен тәуелді болмай, оның тек қана бастапқы және соңғы нүктелерінің координаталарынан тәуелді екен.

1-салдар. Егер (14) теңдік орындалса, онда (15) теңдіктерді қолданып келесі формуланы жазамыз

$$\int_l Pdx+Qdy=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1). \qquad (16)$$

Соңғы формуланы жалпылаған Ньютон-Лейбниц формуласы деп атайды.

2-салдар. Егер $P(x,y)+Q(x,y)$ өрнегі қандай да бір функцияның толық дифференциалы болса және l қисығы тұйық болса, онда

$$\oint_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

Мұндағы $\oint_l$ белгісі –тұйық l қисығы бойынша интегралданады дегенді білдіреді.

§16.10.5 Потенциалдық күштің жұмысы

Енді соңғы теореманың физикалық мағынасын берелік. S облысында $\overline{F}\{P(x,y),Q(x,y)\}$ күштерінің өрісі анықталған болсын делік, яғни S облысының әрбір нүктесіне сәйкес $\overline{F}$ күші анықталған болсын. Мысалы, жер бетінің айналасындағы кез келген m массалы материалдық нүктеге сан мәні mg болатын ауырлық күш әсер етеді, бұл жер бетінің айналасында ауырлық күштер өрісі бар деген сөз. Мұндағы g -ауырлық күштің үдеуі.

Электр тоғымен зарядталған дененің маңайында байқалатын кернеулердің векторлық өрісі де күштер өрісіне мысал болады.

5-анықтама. Егер $P(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ теңдіктері орындалатын $u=u(x,y)$ функциясы бар болса, онда $\vec{F}\{P(x,y),\ Q(x,y)\}$–потенциялдық күш, $\vec{F}$ күштерінің өрісі потенциалдық өріс, ал u функциясы потенциал деп аталады.

Соңғы анықтамаға сүйеніп

$$Pdx+Qdy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}du=du$$

теңдіктерді жазамыз. Онда потенциалдық $\vec{F}$ күшінің $M_1(x_1,y_1)$ және $M_2(x_2,y_2)$ нүктелерді біріктіретін жол бойлап орындаған жұмысы келесі формуламен анықталады:

$$A=\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}Pdx+Qdy=\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}du=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1).$$

Сонымен, потенциалдық күштің жұмысы жолдың (интегралдау қисығының) түрінен тәуелсіз болады екен. Дербес жағдайда, егер жол (қисық) тұйық болса, онда орындалған жұмыс нөлге тең, яғни $A=0$.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың анықтамасын беріңіз.
2. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасын түсіндіріңіз.
3. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың қасиеттерін жазыңыз.
4. Екінші текті қисық сызықты интегралдың анықтамасын бсріңіз.
5. Екінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасын түсіндіріңіз.
6. Екінші текті қисық сызықты интегралдың интегралдау қисығының түрінен тәуелсіздік шартын баяндаңыз.
7. Потенциалдық өрістің анықтамасын беріңіз.
8. Потенциалдық күштің жұмысының формуласын жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушының қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСОЖ)

1-мысал. $\int\limits_l(x+y)dl$ бірінші текті қисық сызықты интегралын есептелік. Мұндағы l қисығы $y=2x-1$ түзуінің $[-1;2]$ кесіндісі.

Шешуі

$$\int\limits_l f(x,y)dl=\int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2}dx=\int\limits_{-1}^{2}(x+2x-1)\sqrt{1+2^2}dx=\sqrt{5}\left(\frac{3x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

2-мысал. $\int\limits_l(x-y)^2dx+(x+y)^2dy$ екінші текті қисық сызықты интегралын есептелік. Мұндағы l қисығы $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(4,2)$ нүктелерін қосатын OAB сынық сызық.

Шешуі. OA түзуінде $y=0,\ dy=0$; ал AB түзуінде $y=x-2,\ dy=dx$. Осы мәндерді қойып, келесі интегралды есептелік.

$$\int_{OAB}(x-y)^2dx+(x+y)^2dy=\int_{OA}(x-0)^2dx+\int_{AB}(x-x+2)^2dx+(x+x-2)^2dx=$$

$$=\frac{x^3}{2}\Big|_0^2+\int_2^4\left(4+4x^2-8x+4\right)dx=\frac{8}{2}+\left(8x-4x^2+\frac{4x^3}{3}\right)_2^4=\frac{136}{3}.$$

3-мысал. Дұрыс S облысының ауданын қисық сызықты интеграл арқылы өрнектеу есебін қарастыралық.

Дұрыс S облысы $x=a,\ x=b,\ y=y_1(x),\ y=y_2(x)\ \ (y_1(x)\le y_2(x))$ сызықтарымен қоршалған болсын. Онда S облысының ауданы:

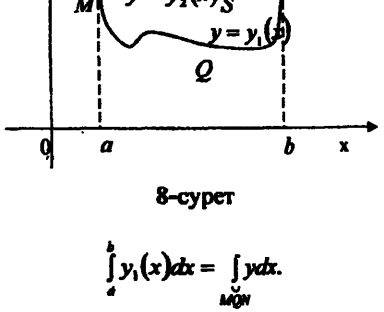
$$S=\int_a^b y_2(x)dx-\int_a^b y_1(x)dx.$$

болатыны белгілі.

Мұндағы бірінші қосылғыш $\breve{MPN}$ доғасы бойынша алынған қисық сызықты интегралды береді (8-сурет), онда

$$\int_a^b y_2(x)dx=\int_{\breve{MPN}}ydx,$$

Осы сияқты



8-сурет

$$\int_a^b y_1(x)dx=\int_{\breve{MQN}}ydx.$$

Екінші текті қисық сызықты интегралдың 1-қасиеті бойынша

$$\int_{\breve{MPN}}ydx=-\int_{\breve{NPM}}ydx,$$

Онда $S=-\int_{\breve{NPM}}ydx-\int_{\breve{MQN}}ydx=-\int_l ydx.$

Мұндағы l қисығы S облысын толық қоршаған қисық.

Жоғарыдағыларға ұқсас пайымдаулар нәтижесінде келесі теңдікті де алуға болады

$$S = \int_l x dy.$$

Соңғы екі теңдікті қосып екіге бөлу арқылы S ауданды есептеудің және бір формуласын аламыз

$$S = \frac{1}{2}\int_l x dy - y dx.$$

4-мысал. $J = \int\limits_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{y dx - x dy}{y^2}$ екінші текті қисық сызықты интегралды есептелік.

Шешуі. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$, яғни $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, онда берілген интеграл интегралдау қисығының түрінен тәуелді емес. Интегралдау қисығының орнына координата остеріне параллель кесінділерден құралған сынық сызық таңдаймыз. Оның бірінші бөлігінде $y = 2$, $dy = 0, 1 \le x \le 2$, ал екінші бөлігінде $x = 2$, $dx = 0$.

$$J = \int_1^2 \frac{1}{2} dx + \int_2^1 \left(-\frac{2}{y^2}\right) dy = \frac{1}{2} x\Big|_1^2 + \frac{2}{y}\Big|_2^1 = \frac{1}{2} + 1 = 1{,}5.$$

5-мысал. $du = \left[e^{x+y} + \cos(x-y)\right]dx + \left[e^{x+y} - \cos(x-y) + 2\right]dy$ берілген. Алғашқы функциясы u-ды табыңыз.

Шешуі. $P(x,y) = e^{x+y} + \cos(x-y)$, $Q(x,y) = e^{x+y} - \cos(x-y) + 2$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} + \sin(x-y) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

l қисығын бастапқы нүктесі $O(0,0)$, соңғы нүктесі $N(x,y)$ болатын OMN сынық сызығы түрінде таңдаймыз. Мұндағы $M(x,0)$. Онда

$$u(x,y) = \int_0^x \left(e^x + \cos x\right)dx + \int_0^y \left(e^{x+y} - \cos(x-y) + 2\right)dy =$$

$$= e^x + \sin x - 1 + e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y - e^x - \sin x =$$

$$= e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y - 1.$$

Сонымен, $u(x,y) = e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y + C$.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $\int_l x dl$ бірінші текті қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы l қисығы $y = \frac{x^2}{2}$ параболасының $0 \le x \le 1$ аралықтағы доғасы.

2. $\int_l x^2 y^2 dl$ интегралын есептеңіз. Мұндағы l қисығы теңдеуі $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ болатын шеңбер.

3. $\int_l y^2dx - x^2dy$ екінші текті қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы l қисығы $y = 1 - x^2$ параболасының $M(-1,0)$ және $N(1,0)$ нүктелері арасындағы доғасы.

4. $\int_l 2xdy - 3ydx$ интегралын есептеңіз. Мұндағы l қисығы төбелері $A(1;2)$, $B(3;1)$, $C(2;5)$ болатын үшбұрыштың қабырғаларының бойымен сағат тілінің бағытына қарсы бағыт бойынша интегралдау қисығы.

Жауабы: 17,5.

5. $\int_l \frac{x}{x^2+y^2}dx - \frac{y}{x^2+y^2}dy$ интегралын есептеңіз. Мұндағы l қисығы центрі координаталар бас нүктесінде болатын шеңбер.

Жауабы: 0.

6. $x = \cos t$, $y = \sin t$ шеңберінің $0 \le t \le \pi$ доғасының массасын табыңыз $(\delta(x,y) = y)$.

Жауабы: 2.

7. $y = ch x$ біртекті қисықтың $0 \le x \le \ln 2$ доғасының ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

Жауабы: $x_c = \frac{1}{3}(3\ln 2 - 1)$, $y_c = \frac{1}{24}(16\ln 2 + 15)$.

8. $du = (1 - e^{x-y} + \cos x)dx + (e^{x-y} + \cos y)dy$ берілген. $u(x,y)$ функциясын табыңыз.

Жауабы: $u = x - e^{x-y} + \sin x + \sin y + C$.

Негізгі теориялық сұрақтар

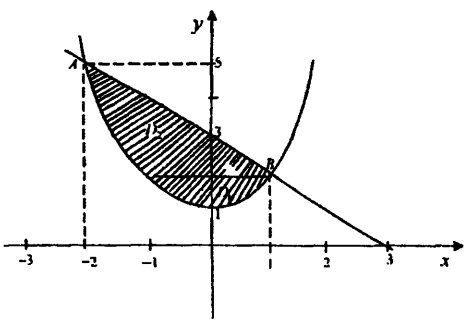
1. Екі еселі интегралдың анықтамасы және оның негізгі қасиеттері.
2. Екі еселі интегралды қайталамалы интегралға келтіріп есептеу.
3. Екі еселі интегралда айнымалыларды.
4. Екі еселі интегралда полярлық координаталар жүйесіне көшу.
5. Екі еселі интегралдың геометрия және физика есептерін шешуге қолданылуы.
6. Үш еселі интегралдың анықтамасы, қасиеттері және оны есептеу
7. Үш еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру.
8. Үш еселі интегралдың қолданылулары
9. Бірінші текті қисық сызықты интеграл және оның негізгі қасиеттері.
10. Екінші текті қисық сызықты интеграл (вектордың қисық бойынша интегралы).
11. Екінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасы.
12. Екінші текті қисық сызықты интегралдың интегралдау қисығының түрінен тәуелсіздік шарты.
13. Потенциалдық күштің жұмысы.

Ұсынылған нұсқаларда берілген есептерді шешу үлгісі

1 - мысал. Oxy жазықтығында интегралдау облысын сызыңыз және интегралдау ретін өзгертіңіз.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2+1}^{3-x} f(x,y)dy.$$

Шешуі. Интегралдау облысы тікелей берілмеген. Сондықтан оны қайталамалы интегралдың интегралдау шегіне қарап анықтауымыз қажет. Ішкі интеграл y бойынша болғандықтан, D облысы жоғарыдан $y=3-x$ түзуімен төменнен $y=x^2+1$ параболасымен қоршалған. Теңдеулерді жүйе түрінде шешіп, түзу мен параболаның қиылысу нүктелері A және B нүктелерінің координаталарын табамыз, яғни $A(-2;5), B(1;2)$. Сыртқы интегралдың шектері $x=-2$ және $x=1$, бұлар интегралдау облысында x-тың өзгеру аралығын көрсетеді. Бірақ, бұл түзулер D облысының контурына кірмейді. Сонымен, D облысының контуры $y=x^2+1$ параболасымен түзудің бөліктерінен тұрады (1-сурет).



1-сурет

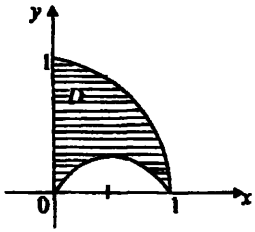
Енді интегралдау ретін өзгертуді қарастырамыз. Яғни, ішкі интегралды x бойынша, ал сыртқы интегралды y бойынша аламыз. D облысына енетін, Ox осіне параллель түзулердің нүктелері $y=x^2+1$ параболасының доғасында жатыр, ал осы түзулердің D облысынан шығу нүктелері парабола доғасымен $y=3-x$ түзуінде жатыр. Сондықтан, D_1 және D_2 облыстарына бөлеміз. Сызықтардың теңдеулерін x бойынша шешелік, яғни $x=\pm\sqrt{y-1}$ және $x=3-y$. D_1 облысы үшін интегралдау шектері 1 және 2, ал D_2 облысы үшін 2 және 5 болады. Олай болса

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x,y)dx + \int\limits_2^5 dy \int\limits_{-\sqrt{y-1}}^{3-y} f(x,y)dx.$$

2 – мысал. $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D, $y=x-x^2$, $y=1-x^2$ параболаларымен және Oy осімен қоршалған облыс.

Шешуі: D облысын сызайық. Теңдеулерді шешіп, қиылысу нүктесінің координаталарын, яғни $M(1;0)$-ді табамыз. D облысы төменнен $y=x-x^2$ параболасымен, ал жоғарыдан $y=1-x^2$ параболасымен, сол жақтан Oy өсімен қоршалған (2-сурет). Олай болса

$$\iint_D (x+2y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x-x^2}^{1-x^2} (x+2y)\,dy = \int_0^1 \left(xy+y^2\right)\Big|_{x-x^2}^{1-x^2} dx = \int_0^1 \left(2x^3-4x^2+x+1\right)dx =$$

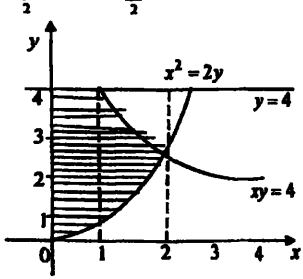


2-сурет

3-мысал. $xy=4$ гиперболасымен $x^2=2y$ параболасымен және $y=4$, $x=0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауданын табалық.

Шешуі. $xy=4$, $x^2=2y$ және $y=4$ теңдеулерін бірге шешіп қиылысу нүктелері $A(2,2)$ және $B(1,4)$-ларды табамыз. Алынған фигураны 3-суретте көрсетілгендей екіге бөлеміз. Онда:

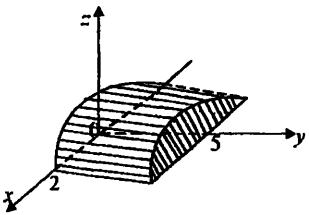
$$S = S_1 + S_2 = \iint_D dxdy = \int_0^1 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^4 dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{4}{x}} dy = \frac{8}{3} + 4\ln 2 \text{ квадрат бірлікке тең.}$$



3-сурет

4 – мысал. $z=4-x^2$, $y=5$, $y=0$, $z=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табалық.

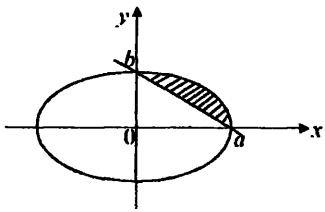
Шешуі: Көлемі ізделініп отырған дене жоғарыдан жасаушысы Oy өсіне параллель $z = 4 - x^2$ параболалық цилиндрмен қоршалған және Oyz жазықтығына қарағанда симметриялы орналасқан (4-сурет).



4-сурет

Интегралдау облысы Oxy жазықтығындағы $-2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 5$ тіктөртбұрыш. Сондықтан,

$$V = 2\int_0^5 dy \int_0^2 \left(y - x^2\right) dx = 53\frac{1}{3}$$ куб. бірлік.



5-сурет

5 – мысал. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсімен және $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\ \ (a > 0,\ b < 0)$ түзуі мен қоршалған біртекті дененің ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

Шешуі: Ауырлық центрінің координаталарын $x_c = \frac{M_y}{S}$, $y_c = \frac{M_x}{S}$ формулаларынан пайдаланып табамыз, мұндағы S, 5-суретте штрихталған біртекті дененің ауданы, ал M_y, M_x-тер Oy пен Ox өстеріне қарағандағы статистикалық моменттер.

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^a dx \int_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{1}{4}ab(\pi - 2),\quad M_x = \iint_D ydxdy = \int_0^a dx \int_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{ab^2}{6}.$$

$$M_y = \iint_D xdxdy = \int_0^a xdx \int_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{a^2b}{6}.$$

Демек,

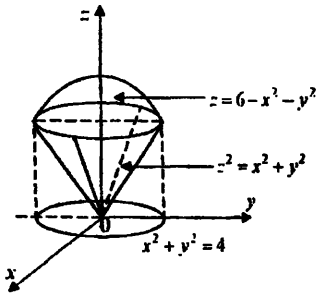
$$X_c = \frac{a^2b}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}ab(\pi-2)} = \frac{2a}{3(\pi-2)},\quad Y_c = \frac{ab^2}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}ab(\pi-2)} = \frac{2b}{3(\pi-2)}.$$

6 – мысал. $z = 6 - x^2 - y^2$ және $z^2 = x^2 + y^2\ \ (z \ge 0)$ беттермен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

Шешуі: Жоғарыдан $z = 6 - x^2 - y^2$ параболоидпен, төменнен $z^2 = x^2 + y^2$ конуспен қоршалған дененің көлемін есептеу керек (6-сурет).

Берілген беттердің қиылысу сызығы олардың теңдеулерін жүйе ретінде қарастыру арқылы анықталады. Ол жүйеден z-ті жоғалтып $x^2 + y^2 = 4$-вертикаль цилиндрлік беттің теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеу дененің Oxy жазықтығындағы проекциясының шекарасының да теңдеуі болады. Бұл дене Oxz және Oyz жазықтықтарына қарағанда симметриялы болғандықтан, оның бірінші октантдағы көлемін тауып, кейін оны төртке көбейтсек болады. Цилиндрлік координаталар жүйесіне көшу арқылы шеңбердің, конустың және параболаның теңдеулерін $\rho = 2$, $z = \rho$, $z = 6 - \rho^2$ түрінде жазуға болады.

Интегралдау облысы $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le 2$, $\rho \le z \le 6 - \rho^2$ көлем элементі $\rho d\rho d\varphi dz$.



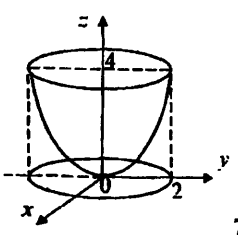
6-сурет

Олай болса

$$V = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_\rho^{6-\rho^2} dz = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 \rho z \Big|_\rho^{6-\rho^2} d\rho = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 (6\rho - \rho^3 - \rho^2) d\rho$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \left(3\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^2 d\varphi = \frac{64}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{32\pi}{3} \text{ куб бірлік.}$$

7 – мысал. $z = x^2 + y^2$ параболоидпен және $z = 4$ жазықтығы мен қоршалған біртекті дененің координаталар бас нүктесіне қарағанда инерция моментін табалық.



7-сурет

Шешуі. Дене төменнен параболоидпен, жоғарыдан $z=4$ жазықтықпен қоршалған. Бұл дененің Oxy жазықтығындағы проекциясы дөңгелек, ол $x^2+y^2=4$ шеңбермен қоршалған (7-сурет). Цилиндрлік координаталар жүйесінде параболоидтың теңдеуі $z=\rho^2$.

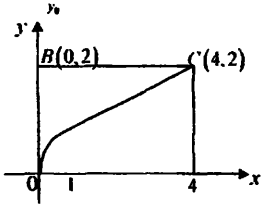
Олай болса

$$I_0=\iiint_T\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a}\rho d\rho\int_{\rho^2}^{4}\left(\rho^2+z^2\right)dz=\frac{224}{3}\pi.$$

8–мысал. $\int_L\left(x+xy\right)dx+\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)dy$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы: L: а) $x=y^2$ қисығының $O(0;0)$ нүктесі мен $C(4;2)$ нүктесіне дейінгі OC доғасы; ә) OBC сынық сызығы (8-сурет).

Шешуі. а) егер L қисығының теңдеуі $x=\varphi(y)$ түрде берілген болса, онда қисық сызықты интегралды есептеу, интеграл ішінде y-ке өтіп мынадай анықталған интегралды есептеуге келтіріледі:

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{y_0}^{y_1}\left\{P\left[\varphi(y)\right]\varphi'(y)+Q\left[\varphi(y),y\right]\right\}dy. \qquad (1)$$



8-сурет

Мұндағы y_0 мен y_1 мәндері 0 және C нүктелерінің координаталары. Берілген мысалда OC доғасының теңдеуі: $x=y^2$. Осыдан $dx=2ydy$. 0 нүктесі C нүктесіне жылжығанда y шамасы 0-ден 2-ге дейін өзгереді. Олай болса (1) формула бойынша

$$\text{а)}\ \int_{OC}\left(x+xy\right)dx+\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)dy=\int_0^2\left(y^2+y^2\cdot y\right)2ydy+\left(\frac{1}{2}y^4-1\right)dy=$$

$$=\int_0^2\left(2y^3+2y^4+\frac{1}{2}y^4-1\right)dy=\left[2\frac{y^4}{4}+\frac{5}{2}\cdot\frac{y^5}{5}-y\right]_0^2=8+16-2=22.$$

ә) Енді интегралды OBC сынық сызығы бойынша есептелік. Қисық сызықты интегралдың қасиеті бойынша

$$\int_{OBC}\left(x+xy\right)dx+\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)dy=\int_{OB}\left(x+xy\right)dx+\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)dy=\int_{BC}\left(x+xy\right)dx+$$

$$+\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)dy=-\int_0^2dy+\int_0^4\left(x+2x\right)dx=-y\Big|_0^2+3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=-2+24=22.$$

Бұл арада, OB кесіндісінің бойында $x=0$ болғандықтан, $dx=0$; ал BC кесіндісінің бойында $y=2$ болғандықтан $dy=0$ болатындығын ескердік.

9-мысал. $\int_L xydx+(x-y)dy$ қисық сызықты интегралын L тұйық контуры бойынша есептелік. Мұндағы l, $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t.\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ шеңберінің доғасы.

Шешуі. L контуры параметрлік теңдеумен берілген. Мұндай жағдайда қисық сызықты интеграл t параметр бойынша анықталған интегралды есептеуге келтіріледі.

$$x=a\cos t,\ dx=-a\sin t dt,\ y=a\sin t,\ dy=a\cos t dt,\ 0\le t\le 2\pi.$$

Берілген интегралға қойсақ

$$\int_L xydx+(x-y)dy=\int_0^{2\pi}\left[a^2\sin t\cos t(-a\sin t)+(a\cos t-a\sin t)a\cos t\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-a^3\cos t\sin^2 t+a^2\cos^2 t-a^2\sin t\cos t\right]dt=$$

$$=-a^3\int_0^{2\pi}\sin^2 td\sin t+a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt-a^2\int_0^{2\pi}\sin td\sin t=$$

$$=-a^3\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi}+a^2\frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi}+\frac{a^2}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}-a^2\cdot\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi}=\pi a^2.$$

«Еселі және қисық сызықты интегралдар» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар

1 – нұска

1. $\int_0^3\int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{25-y^2}} zdydx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығында интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D\int(2+x)dxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D – $y=4-x^2$ параболасымен және $y=x+2$ түзумен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{27}{4}$).

3. $z=\frac{1}{2}y^2$, $2x+3y-12=0$, $z=x=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. (Жауабы: 16).

4. Полярлық координаталар жүйесіне көшіп $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2z$ беттерімен қоршалған дененің көлемін есептеңіз

(Жауабы: $\frac{\pi(6\sqrt{3}-5)}{3}$).

5. $y = \sqrt{2x}$ параболасымен және $x = 2$, $y = 0$ түзулермен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз $(\delta = y)$.

(Жауабы: $\frac{10}{3}$).

6. $2y = x^2$ параболасымен және $x = 2, y = 0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta = y)$.

(Жауабы: $\frac{5}{3}; \frac{5}{3}$).

7. $\int_l (2-y)dx - (1-y)dy$ қисық сызықты интегралды есептеңіз. Мұндағы l контуры $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ циклоидасының доғасы $(0 \le t \le 2\pi)$.

(Жауабы: π).

2 – нұска

1. $\int_1^2 \int_{x^2-4}^{3x} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығында интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\iint \sin(x+y)dxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D, $x + y = \frac{\pi}{2}$ және $y = x, y = 0$ түзулермен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{1}{2}$).

3. $z = 2 - 2y$, $y = x^2$, $z = 0$ беттермен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{16}{15}$).

4. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 2y$, $z = 0$ беттермен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: $\frac{3\pi}{2}$).

5. $y = 2 - x^2$ параболасымен және $x = y, x = 0$ түзулермен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз, $(\delta = x + y), (x \ge 0)$.

(Жауабы: $\frac{101}{60}$).

6. $y = 2x$, $y = 4 - 2x$, $y = 0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық

центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta = x)$.

(Жауабы: $\frac{7}{6}; \frac{2}{3}$).

7. $\int_l (x+y)dx + (x-y)dy$ қисық сызықты интегралды есептеңіз. Мұндағы l., $x = R\cos t, y = R\sin t$ шеңберінің доғасы, $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$

(Жауабы: $-R^2$).

3 – нұска

1. $\int_1^2 \int_1^{2x} zdydx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int \frac{x^2}{y^2} dxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D. $x = 2, y = x$ түзулерімен және $xy = 1$ гиперболасымен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{9}{4}$).

3. $z = x^2 + y^2, x + 2y = 4, y = \frac{x}{2}, z = x = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{11}{3}$).

4. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 2y, z = 0$ беттермен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: 3π).

5. $x^2 + y^2 = 2$ эллипсімен және $y = x, y = 0 (y \ge 0, x > 0)$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз, $(\delta = xy)$.

(Жауабы: $\frac{1}{4}$).

6. $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$ параболасымен және $y = 2, x = 0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta = 1)$.

(Жауабы: $\frac{3}{8}; \frac{6}{5}$).

7. $\int_l xydx + 5y^2 dx$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы

l., $x = 3\cos t, y = 2\sin t$ эллипстің доғасы, $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$.

(Жауабы: $\frac{22}{3}$).

4 – нұсқа

1. $\int_0^2 \int_{\frac{x^2}{4}}^{x^2} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығында интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\iint_D (x+y)dydx$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D, $y = x^2$ параболасымен және $x + y = 2$ түзуімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{99}{20}$).

3. $z = x^2 + y^2$, $x + y = 2$, $y = x$, $z = x = 0$ беттермен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{7}{3}$).

4. $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 5$ беттермен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: 9π).

5. $y = x^2$ кубтық парабола және $x + y = 2$, $y = 0$ түзулермен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз, $(\delta = 2xy)$.

(Жауабы: $\frac{13}{24}$).

6. $y = x, x + y = 4, x = 0$ түзулермен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta = 1)$.

(Жауабы: $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$).

7. $\int_l ydx - xdy$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы *l.*, $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ эллипсінің доғасы, $(0 \le t \le 2\pi)$

(Жауабы: $-2\pi ab$).

5 - нұсқа

1. $\int_{-2}^{1} \int_{y^2}^{4} z dx dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығында интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\iint_D (x+2y)dxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D, $y=x^2$ параболасымен және $x+y=2, y=0$ түзулерімен қоршалған облыс $(x>0)$.

(Жауабы: $\frac{29}{20}$).

3. $z=3-x^2-2y^2, y=2-2x, x=0, y=0, z=0$ беттермен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{13}{2}$).

4. $x^2+y^2+z^2=4$, шар және $x^2+y^2=1$ цилиндр тысымен қоршалған дененің көлемін полярлық координата жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: $4\pi\sqrt{3}$).

5. $y=2x^2$ параболасымен және $x+y=3, y=0$ түзулермен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз, $(\delta=x)$.

(Жауабы: $\frac{23}{6}$).

6. $y=2x, x=3, y=3, y=0$ түзулермен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta=x)$.

(Жауабы: $\frac{63}{32}; \frac{15}{8}$).

7. $\int_l \frac{x^{\frac{1}{3}}dy-y^{\frac{1}{3}}dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}$ қисық сызықты интегралды есептеңіз. Мұндағы $L, x=a\cos^3 t, y=b\sin^3 t$ астроиданың доғасы, $\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$.

(Жауабы: $\frac{3\pi}{16}a^{4/3}$).

6 – нұсқа

1. $\int_1^2 \int_1^y z dxdx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\iint_D (x+2x)dxdy$ екі еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы D, $y=2x$, $y=x$, $x=2$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{34}{3}$).

3. $z = x^2 + y^2, y = 1, y = x^2, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{88}{105}$).

4. $x^2 + y^2 = 8y, z = y, z = 4y$ беттерімен қоршалған денесінің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: 192π).

5. $x + y = 6, y = 2x, x = 0$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз. $(\delta = x)$.

(Жауабы: 4).

6. $y = \frac{3}{4}x, y = 3, x = 0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta = y)$.

(Жауабы: $\frac{3}{2}; \frac{9}{4}$).

7. $\int_l \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2 + y^2}$ кисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы $l., x = a\cos t, y = b\sin t$, шеңберінің доғасы, $(0 \le t \le \pi)$.

(Жауабы: $-\frac{4a}{3}$).

7 – нұсқа

1. $\int_{-2}^{1} \int_{x}^{2-x^2} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығында интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int \frac{y}{x} dx dy$ екі еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы D, $y = 2x$, $y = x$, $x = 2, x = 4$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: 9).

3. $z = 6 - x^2 - y^2, x = y^2, x = 1, z = 0$ $(x \le 1)$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{752}{105}$).

4. $x^2 + y^2 - z^2 = -1, z = 3$ беттерімен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: $\frac{20\pi}{3}$).

5. $y^2 = 4x$ параболасымен және $x + y = 3$, $x = 0$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз. $(\delta = x + y)$.

(Жауабы: $\frac{38}{15}$).

6. $y = 3\sqrt{x}$ параболасымен және $y = 3x$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta = y)$.

(Жауабы: $\frac{1}{2}; \frac{9}{5}$).

7. $\int_l y^2 dx + 2xy dy$ кисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы l, $x = a\cos t, y = b\sin t$ шеңберінің доғасы, $(0 \le t \le 2\pi)$.

(Жауабы: 0).

8 – нұска

1. $\int_{-2}^{1} \int_{y^2}^{4} z dx dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және xoy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int (x + 2y) dx dy$ екі еселі интегралды есептеңіз. Мұндағы D, $x = \sqrt{2 - y^2}$ шеңберімен, $x = \sqrt{y}$ параболасымен және $y = 0$ түзуімен қоршалған облыс. (Жауабы: $\frac{7}{6}$).

3. $x + 4y + z = 4, x + 2y = 2, z = y = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{2}{3}$).

4. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ және $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ конустың ішімен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: $\frac{8\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)}{3}$).

5. $y = x^2 + 1$ параболасымен және $x = 2, x = 0, y = 0$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз $(\delta = 2x + 3y)$.

(Жауабы: $\frac{163}{5}$).

6. $y = x^2$ параболасымен және $x + y = 2, y = 0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta = 3y), (x > 0)$.

(Жауабы: $\frac{67}{55}; \frac{7}{22}$).

7. $\int_l xdy - ydx$ қисық сызықты интегралды есептеңіз. Мұндағы L, $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ циклоидасының бір аркасын Ox өсімен байланыстырған түйық сызық.

(Жауабы: 24π).

9 – нұсқа

1. $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \int_{\frac{1-x}{2}}^{1-x^2} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int (x^2 + xy) dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D, $y = x$, $y = -2x$, $y = 2$ түзулермен қоршалған облыс.

(Жауабы: 3).

3. $z = 16 - x^2 - y^2, y = 2, x = 2,, z = x = y = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{160}{3}$).

4. $3z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 - 6y = 0, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: 32).

5. $y = \sqrt{x}, x = 4, y = 1$ сызықтарымен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз. $(\delta = x + y^2)$.

(Жауабы: $\frac{241}{30}$).

6. $y = x^2$ параболасымен және $y = 2, x = 0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta = x)$.

(Жауабы: $\frac{10}{21}; \frac{5}{3}$).

7. $\int_l x^2 y dx + x dy$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы L, $x = \cos t, y = \sin t$ шеңбердің доғасы, $\left(\frac{\pi}{2} \le t \le \pi\right)$.

(Жауабы: $\frac{3\pi}{16}$).

10 – нұсқа

1. $\int_0^4 \int_{\sqrt{4-y}}^{\sqrt{16-y^2}} z\,dydx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int xydxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D, $x=\sqrt{2-y}$ параболасымен және $y=x$, $y=0$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{5}{24}$).

3. $2x+y+z=3, y=x, z=y=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. (Жауабы: $\frac{3}{4}$).

4. $z=\sqrt{25-x^2-y^2}, z=3$ беттерімен қоршалған дененің көлемін полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептеңіз.

(Жауабы: $\frac{52\pi}{3}$).

5. $y=2\sqrt{x}$ параболасымен және $y=2, x=0$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның массасын табыңыз. $(\delta = xy)$.

(Жауабы: $\frac{1}{3}$).

6. $y^3=x^2$, $y=1$ сызықтарымен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta = 1)$.

(Жауабы: $0; \frac{5}{7}$).

7. $\int_l (x+y)dx - 2xydy$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы l, $x=2\cos t, y=2\sin t$ шеңбердің доғасы, $(0 \le t \le 2\pi)$.

(Жауабы: -4π).

11 – нұсқа

1. $\int_0^4 \int_0^{\frac{x}{2}} z\,dydx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int xydxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D, $y=1$ $y=2$, $y=x-3$, $y=5-x$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $-\frac{17}{3}$).

3. $z=4-4x^2-y^2, y=2-2x, z=x=y=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{8}{3}$).

4. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2}dxdy$ екі еселі интегралмен көлемі өрнектелетін денені сызып көрсетіңіз.

5. $y=\frac{x}{2}, x=2, y=0$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның координата өстеріне қарата инерция моментін есептеңіз $(\delta = x)$.

(Жауабы: $\frac{4}{15}; \frac{16}{5}$).

6. $=x^2+y^2-4, x^2+y^2=1, y\geq 0$ шеңберлермен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta = 1)$.

(Жауабы: 0; $\frac{28}{9\pi}$).

7. $\int_l y^2dx+xdy$ қисық сызықты интегралды есептеңіз. Мұндағы $l., x^2=1-y$ парабола және $y=0$ түзумен қоршалған тұйық сызық.

(Жауабы: $\frac{4}{15}$).

12 – нұсқа

1. $\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} zdydx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int xydxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D, $x=0$ $x=1, y=x, y=3x$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: 1).

3. $z=x^2, x+y=3, y=1, z=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{4}{3}$).

4. $\int_0^3 \int_{\frac{2}{3}y}^{0} (5-x-y)dxdy$ екі еселі интегралмен көлемі өрнектелетін денені сызып көрсетіңіз.

5. $y=2x^2, x=1, y=0$ сызықтарымен қоршалған жазық фигураның

координатар өстеріне қарағандағы инерция моментін есептеңіз $(\delta = y)$.

(Жауабы: $\frac{4}{9}; \frac{2}{7}$).

6. $y = \cos x$ косинусоида және $y = 0, x = 0$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \delta = 1\right)$.

(Жауабы: $\frac{\pi - 2}{2}; \frac{\pi}{8}$).

7. $\int_L y^2 dx + (x+y)^2 dy$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы L, $y = x$, $y = 2$, $x = 0$ түзулермен қоршалған түйық сызық.

(Жауабы: $\frac{8}{3}$).

13 – нұсқа

1. $\int_{-1}^{0} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} z\,dy\,dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int xy\,dx\,dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D, $xy = 4$ гипербола және $x + y = 5$ түзумен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{165}{8} - 5\ln 2$).

3. $z^2 + x^2 = 4$, $y = x$, $z = 0$, $y = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{8}{3}$).

4. $\int_0^2 \int_0^3 (5 - x - y)\,dy\,dx$ екі еселі интегралымен көлемі өрнектелетін денені сызып көрсетіңіз.

5. $y = x^2$ параболасымен және $y = 1$ түзуімен қоршалған жазық фигураның $(x \ge 0)$ координаталар өстеріне қарағандағы инерция моментін есептеңіз $(\delta = y)$. (Жауабы: $\frac{2}{9}; \frac{2}{21}$).

6. $y = \sqrt{4 - x}$ параболасымен және $x = 0, y = 0$ түзулерімен қоршалған фигураның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta = 1)$.

(Жауабы: $\frac{8}{5}; \frac{3}{4}$).

7. $\int_L (x+y)dx + xdy^2$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы L, $x = \sqrt{y}$ параболасымен және $y = 1, x = 0$ түзулерімен қоршалған тұйық сызық.

(Жауабы: $\frac{7}{6}$).

14 – нұска

1. $\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-y^2}} z dy dx$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \int x^2 y dx dy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D, $x^2 + y^2 = 4$ шеңберімен және $x + y = 2$ түзуімен қоршалған облыс $x \geq 0$.

(Жауабы: $\frac{8}{5}$).

3. $z = 2 - x^2 - y^2, y = x^2, x = 1, z = y = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{44}{105}$).

4. $\int_0^2 \int_{2-y}^{2} (4 - x - y) dx dy$ екі еселі интегралымен көлемі өрнектелетін денені сызып көрсетіңіз.

5. $y = 1, x = 2, x = y = 0$ түзулермен қоршалған жазық фигураның координата өстеріне қарата инерция моментін есептеңіз $(\delta = x^2 + y^2)$.

(Жауабы: $\frac{58}{45}$; $\frac{328}{45}$).

6. $x^2 + 4y^2 = 4$ эллипсімен және $x = 0, y = 0$ түзулермен қоршалған жазық фигураның (1-ширек) ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta = 1)$.

(Жауабы: $\frac{8}{3\pi}; \frac{4}{3\pi}$).

7. $\int_l xy^2 dx + ydy$ қисық сызықты интегралды есептеңіз. Мұндағы l, $x + y = 2$ $y = x$, $y = 0$ түзулермен қоршалған тұйық сызық.

(Жауабы: $-\frac{2}{3}$).

15 – нұска

1. $\int_{-2}^{0}\int_{-\frac{y}{2}}^{\sqrt{5-y^2}} z\,dxdy$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D\int \frac{y^3}{x^2}dxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D, $y=\sqrt{x}$ параболасымен және $y=\frac{1}{3}x, x=1$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{121}{486}$).

3. $z+x+y=2, x+y=1, x=1, , z=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{1}{3}$).

4. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} y^2dxdy$ екі еселі интегралымен көлемі өрнектелетін денені сызып көрсетіңіз.

5. $x=2y, x=2$ түзулермен қоршалған жазық фигураның $(y\geq 0)$ координаттар өстеріне қарағандағы инерция моментін есептеңіз $(\delta = xy)$.

(Жауабы: $\frac{1}{4};\frac{8}{5}$).

6. $x^2+y^2=4$ шеңберімен қоршалған дөңгелектің ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta=1)$.

(Жауабы: $\left(0;\frac{8}{3\pi}\right)$).

7. $\int_L 2ydx+(x+y)dy$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы L, $y=x^2$ параболасымен және $x=1, y=0$ түзулерімен қоршалған түйық сызық.

(Жауабы: $-\frac{1}{3}$).

16 – нұска

1. $\int_{0}^{2}\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{4-y^2}} z\,dxdy$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз және оның Oxy

жазықтығындағы интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D\int(x^3+y^3)dxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D, y=\frac{1}{3}x$ $y=x,\ x=4$ түзулермен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{75676}{405}$).

3. $x+y+z=6,\ x^2=8y, y=\frac{x}{2}, z=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{64}{15}$).

4. $\int_0^2\int_{2-y}^{2}(4-x-y)dxdy$ екі еселі интегралымен көлемі өрнектелетін денені сызып көрсетіңіз.

5. $y=2x, x+y=3$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның $(x\geq 0)$ координаттар өстеріне қарағандағы инерция моментін есептеңіз $(\delta=1)$.

(Жауабы: $\frac{141}{28}; \frac{7}{20}$).

6. $y=2-x$ парабола және $y=x$ түзуімен қоршалған фигураның $(x\geq 0)$ ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз $(\delta=1)$.

(Жауабы: $\frac{5}{14}; \frac{38}{35}$).

7. $\int_l xdx+y^2dy$ қисық сызықты интегралын есептеңіз. Мұндағы $L, x+y=3, x=0, y=0$ түзулерімен қоршалған тұйық сызық.

(Жауабы: 0).

17 – нұсқа

1. $\int_{-6}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)dy$ интегралының қайталама интегралдың интегралдау ретін өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D\int xy^2dxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D, y^2=x$ параболасымен және $x=1$ түзуімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{4}{21}$).

3. $y=2-x$ түзуімен және $y^2=4x+4$ параболасымен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{64}{3}$).

4. $z = 3 - x^2 - y^2, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: 9π).

5. $y = x^2, y^2 = x$ параболалармен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{9}{20}; \frac{9}{20}$).

6. $x^2 + y^2 = 2pz, z = h$ беттерімен қоршалған дененің Oz өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

7. $\int_L (2-y)dx + (1-y)dy$ қисық сызықты интегралын $L: \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ қисығы бойынша есептеңіз.

(Жауабы: π).

18 – нұсқа

1. $\int_0^1 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$ қайталамалы интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\iint_D (x + y^2)dxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D, $y^2 = x + 2$ параболасымен және $y = x$ түзуімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $-\frac{37}{20}$).

3. $x = y^2 - 2y$ параболасымен және $x + y = 0$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{1}{6}$).

4. $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $\frac{88}{105}$).

5. $y = x^2, x + y = 2, x \ge 0$ сызықтарымен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз $\delta = 1$.

(Жауабы: $\left(\frac{5}{14}; \frac{32}{35}\right)$).

6. $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ беттерімен қоршалған дененің Ox өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

7. $\int_L (x+y)dx - (x-y)dy$ қисық сызықты интегралды $L: \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$

$\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$ кисығы бойынша есептеңіз.

(Жауабы: $-R\frac{2\pi}{2}$).

19 – нұска

1. $\int_0^{\cdot} dx \int_{\frac{\cdot^2}{4}-1}^{\ln \cdot} f(x,y)dy$ қайталамалы интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\iint_D xydxdy$ екі есепі интегралын есептеңіз. Мұндағы D параболасымен және төбелері $A(2,4)$, $B(5,4)$, $C(5,2)$ нүктелерінде жататын үшбұрыш.

3. $y = 4x - x^2$, $y = 2x^2 - 5x$ параболаларымен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{27}{2}$).

4. $z = x^2 + y^2$, $x + y = 4x$, $x = 0$, $z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз.

(Жауабы: $42\frac{2}{3}$).

5. $ay = x^2$ параболасымен және $y = a(a > 0)$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

(Жауабы: $0; \frac{3a}{5}$).

6. $2x + 3y + 3z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ беттерімен қоршалған дененің Ox өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

7. $\int_l xydx - 5y^2dy$ қисық сызықты интегралын $L: \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases} \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$. Қисығы бойынша есептеңіз.

(Жауабы: $-\frac{58}{3}$).

20 – нұска

1. $\int_0^{\cdot} dx \int_0^{\sqrt{2\cdot - \cdot^2}} f(x,y)dy$ қайталамалы интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D\int xydxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: 1 \le y \le 2;$ $y+3 \le x \le y+5$.

(Жауабы: $-\frac{17}{3}$).

3. $x = 4 - y^2$ параболасымен және $2y = 4 - x$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{4}{3}$).

4. $x + 2y - z = 0,\ x - 2y + 5 = 0,\ 2x + 3y - 18 = 0,\ z = 0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. Интегралдау облысын сызып көрсетіңіз.

5. $y = 5 - x^2$ параболасымен және $y = 1,\ x \ge 0$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз $(\delta = 1)$.

(Жауабы: $\frac{3}{4}; \frac{13}{5}$).

6. $x + y + z = 3,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ беттерімен қоршалған дененің Oy өсіне қарата инерция моментін табыңыз.

7. $\int_L ydx + xdy$ қисық сызықты интегралын $L: \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ эллипсі бойынша есептеңіз.

(Жауабы: 0).

21 – нұска

1. $\int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x} f(x,y)dy$ қайталамалы интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D\int xydxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: 0 \le 0 \le 1, x \le y \le 3x$

(Жауабы: 1).

3. $x^2 + y^2 = 2$ шеңберімен $y = 3$ және $y = 3x$ түзулерімен мен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{9(2\sqrt{10}-1)}{10\sqrt{10}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$).

4. $y = x^2, x = y^2, z = 12 + y - x$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. Интегралдау облысын сызып көрсетіңіз.

5. $y^2 = 2px$ параболасымен және $x = 2p$ түзуімен қоршалған жазық

фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз $(y \geq 0)$.

(Жауабы: $\left(\frac{6p}{5};\frac{3p}{4}\right)$).

6. $3x+2y+z=6, x=0,\ y=0, z=0$ беттерімен қоршалған дененің Oy өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

7. $\int_L \frac{y^2dx+x^2dy}{x^2+y^2}$ қисық сызықты интегралды $L:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t.\end{cases}$ $(0\leq t\leq \pi)$ қисығы бойынша есептеңіз.

(Жауабы: $-\frac{4}{3}a$).

22 – нұсқа

1. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x,y)dy$ қайталамалы интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\iint_D xydxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы $D: x^2+y^2=4$ шеңберімен және $x+y=2$ түзуімен қоршалған облыс $(x\geq 0)$.

(Жауабы: $\frac{4}{3}$).

3. $y=8-x^2$ параболасымен және $y=8-3x$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{9}{2}$).

4. $z=2x^2+y^2+1,\ x+y=1, x=0,\ y=0,\ z=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. Интегралдау облысын сызып көрсетіңіз.

5. $y=\sqrt{2x-x^2}$ шеңберімен және $y=0$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз $(y\geq 0)$.

(Жауабы: $1;\frac{4}{3\pi}$).

6. $x+3y+2z=6, x=0,\ y=0, z=0$ беттерімен қоршалған дененің Ox осіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

7. $\int_L y^2dx-2xydx$ қисық сызықты интегралын $L:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t.\end{cases}$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ шеңбер бойынша есептеңіз.

(Жауабы: 0).

23 – нұска

1. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2x} f(x,y)dy$ қайталамалы интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D \frac{y}{x} dxdy$ екі есселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D: $y=\sqrt{x}$ параболасымен және $y=\frac{1}{3}x$, $x=1$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{17}{36}$).

3. $y=4\sqrt{x}$, $y=\frac{x^2}{2}$ параболаларымен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: $\frac{32}{3}$).

4. $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $z+x=6$, $z=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. Интегралдау облысын сызып көрсетіңіз.

5. $2y=x^2$ параболасымен және $y=2$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

(Жауабы: $\left(0;\frac{6}{5}\right)$).

6. $x-2y+3z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ беттерімен қоршалған дененің Oy осіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

7. $\int_l xdy+ydx$ қисық сызықты интегралын $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t). \end{cases}$ қисығымен және Ox өсімен қоршалған тұйық сызық бойынша есептеңіз.

(Жауабы: 0).

24 – нұска

1. $\int_{-2}^{1} dx \int_{3x^2}^{6-3x} f(x,y)dy$ қайталамалы интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\int_D (x^2+y^2)dxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұндағы D: $y=\frac{1}{3}x$, $y=x$, $x=4$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{5120}{81}$).

3. $y=\frac{(x-1)^2}{6}$ параболасымен және $y=x-1$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: 6).

4. $z=x^2+y^2, y=6-x,\ y=2x,\ y=1,\ y=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. Интегралдау облысын сызып көрсетіңіз.

5. $y=\sqrt{2x}$ параболасымен және $y=\frac{x}{2}, x=2$ түзулерімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз $(\delta=1)$.

(Жауабы: $\left(\frac{28}{25};1\right)$).

6. $x+2y-3z=6, x=0,\ y=0, z=0$ беттерімен қоршалған дененің Oz өсіне қарата инерция моментін табыңыз.

7. $\int_l x^2ydx-xdy$ кисық сызықты интегралын $\begin{cases}x=\cos t.\\ y=\sin t.\end{cases}$ шеңбердің $\frac{\pi}{2}\le t\le\pi$ аралығындағы доғасы бойынша есептеңіз.

(Жауабы: $-\frac{5\pi}{16}$).

25 – нұсқа

1. $\int_0^1 dx\int_{2x+1}^{1+x^2} f(x,y)dy$ қайталамалы интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз, интегралдау облысын сызыңыз.

2. $\iint_D(\cos 2x+\sin y)dxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз. Мұнда D: $x=0,\ y=0,\ 4x+4y-8=0$ түзулерімен қоршалған облыс.

(Жауабы: $\frac{9-\cos 4}{4}+\sin 2$).

3. $y=\frac{x^2}{3}-4$ параболасымен және $y=2x-4$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауданын табыңыз.

(Жауабы: 12).

4. $z=3x, y=\sqrt{9-x^2}, y=0, z=0$ беттерімен қоршалған дененің көлемін табыңыз. Интегралдау облысын сызып көрсетіңіз.

5. $x=2\sqrt{y}, x=\sqrt{8-4y}$ параболаларымен және $x=0$ түзуімен қоршалған жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

(Жауабы: $\left(\frac{3}{4};1\right)$).

6. $y-3x+z=6, x=0, y=0, z=0$ беттермен қоршалған дененің Ox өсіне қарағандағы инерция моментін табыңыз.

7. $\int_L (x+y)dx+2xydy$ қисық сызықты интегралын $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t. \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ шеңбер бойынша есептеңіз.

(Жауабы: -4π).

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Ермекұлы Олімхан. Үлы математика курсы. Алматы: РБК,1995.

2. Жәутіков О.А. Математикалық анализ. Алматы: Ғылым, 1961.

3.Ибрашев Х.И., Еркегулов Ш.Т. Математикалық анализ курсы, 1-2 т., Алматы: Мектеп, 1963-1970.

4. Бектаев Қ.Б. Орысша-қазақша математикалық сөздік. Алматы: Мектеп, 1989.

5. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика, ч.1. Минск: Высшэйшая школа, 1984.

6. Шипачев В.С. Основы высшей математики. М: Высшая школа. 1989.

7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М: Наука, 1971.

8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М: Наука, 1984.

9.Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М: Наука. 1980.

10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. 1, 2 ч., под ред. Рябушко А.П. Минск: Выпэйшая школа, 1991.

11. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М: Наука, 1972.

12. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. 1,2-бөлімдер. – Алматы: ҚазҰТУ, 2000

13. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М: 1971.

14.Темірғалиев Н. Математикалық анализ. – Алматы: Мектеп, 1,2,3-бөлімдер, 1985-1991.

15. Қазақша-орысша (орысша-қазақша) терминологиялық сөздік. Математика. – Алматы: Рауан, 1999.

16. Аяпбергенов С.А. Аналитикалық геометрия. Алматы: Мектеп, 1971.

17. Өмірбаев М.О. Аналитикалық геометрия. Бірінші бөлім. Алматы: Мектеп, 1963.

18. Әмірбаев М.О. Аналитикалық геометрия. Екінші бөлім. Алматы: Мектеп, 1966.

19. Қасымов Е.А., Қасымов Қ.А. Жоғарғы математика курсы. Алматы. «Санат», 1997, 257 бет.

20. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғарғы математика оқу құралы. Алматы, ҚБТУ, 2004, 440 бет.

21. Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И. Жоғары математика I, Алматы. С. Бегалин атындағы «мбкб». 2008. 118 бет.

22. Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И. Жоғары математика II, Алматы, С. Бегалин атындағы «мбкб», 2008, 105 бет.

23. Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И. Жоғары математика III, Алматы, «ҮҒТАО» АҚ баспақанасы, 2009, 185 бет.

23. Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И. Жоғары математика IV, Алматы, «ҮҒТАО» АҚ баспақанасы, 2010, 259 бет.

МАЗМҰНЫ

§10-тарау. Анықталмаған интегралдар
§10.1 Алғашқы функция және анықталмаған интеграл 5
§10.2 Анықталмаған интегралдың қасиеттері 6
§10.3 Интегралдау кестесі 7
§10.4 Негізгі интегралдау әдістері 10
§10.4.1 Айнымалыларды алмастыру әдісі 10
§10.4.2 Бөлшектеп интегралдау әдісі 11
§10.5 Рационал функцияларды интегралдау 17
§10.6 Иррационал функцияларды интегралдау 23
10.7 Тригонометриялық функцияларды интегралдау 24
11-тарау. Анықталған интеграл 28
§11.1 Анықталған интеграл түсінігі, оның геометриялық мағынасы 28
§11.2 Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері 30
§11.3 Анықталған интегралдарды есептеу. Ньютон-Лейбниц формуласы ..31
§11.4 Анықталған интегралдарды есептеу әдістері 32
§11.4.1 Анықталған интегралдарда айнымалыны алмастыру 32
§11.4.2 Бөлшектеп интегралдау 33
§11.5 Меншіксіз интегралдар 39
§11.5.1 Бірінші текті меншіксіз интегралдар 39
§11.5.2 Екінші текті меншіксіз интегралдар 43
§11.6 Анықталған интегралды жуықтап есептеу 43
§11.6.1 Төгтөртбұрыштар формуласы 44
§11.6.2 Трапеция формуласы 44
§11.6.3 Парабола немесе Симпсон формуласы 45
12-тарау Анықталған интегралдың қолданулары 50
§12.1 Анықталған интегралдың қолдануларының жалпы схемасы 50
§12.2 Жазық фигуралардың аудандарын есептеу 50
§12.3 Қисық доғасының ұзындығын есептеу 54
§12.4 Айналу денесінің көлемі 55
§12.5 Доғаның статикалық моментін және ауырлық центрінің координаталарын табу 56
§12.6 Жазық фигураның статикалық моментін және ауырлық центрінің координаталарын табу 58
§12.7. Инерция моменттері 59
§12.8 Анықталған интегралдың экономикада қолданылуы 64
Анықталмаған, анықталған интегралдар және оларды геометрия, механика есептерін шешуге қолдану тақырыптары бойынша әдістемелік нұсқау мен студенттерге берілетін өзіндік жұмыс тапсырмалары 69
13-тарау: Көп айнымалының функциялары 92
§13.1 Екі айнымалының функциясы, оның анықталу облысы және графигі .92
§13.2 Екі айнымалы функцияның шегі және үзіліссіздігі 96
§13.3 Екі айнымалы функцияның дербес және толық өсімшесі 98
§13.4 Екі айнымалы функцияның дербес туындылары 100

§13.5 Екі айнымалы функцияның толық дифференциалы 101
§13.6 Күрделі және айқындалмаған функцияларды дифференциалдау 106
§13.7 Жоғары ретті туындылар 109
§13.8 Екі айнымалының функциясы үшін Тейлор формуласы 110
§13.9 Бағыт бойынша алынған туынды. Градиент 114
§13.10 Екі айнымалы функцияның экстремумы 118
§13.11 Шартты экстремум 120
§13.12 Ең кіші квадрат әдісі 120
§13.13 Екі айнымалы функцияның экономикалық зерттеулерде қолданылу 125
«Көп айнымалының функциялары» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар 133
14-тарау. Дифференциалдық теңдеулер 151
§14.1 Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Негізгі ұғымдар 151
§14.2 Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеулер 155
§14.3 Біртекті теңдеулерге келтірілетін дифференциалдық теңдеулер 156
§14.4 Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер 158
§14.5 Толық дифференциалдық теңдеулер 162
§14.6 Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер 167
§14.7 Реті төмендетілетін екінші ретті дифференциалдық теңдеулер 168
§14.8 Сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер 172
§14.9 Коэффициенттері тұрақты екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер 178
§14.10 Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі 185
§14.11 Коэффициенттері тұрақты сызықты дифференциалдық 187
§14.12 Дифференциалдық теңдеудің экономикада қолданылуы 193
«Дифференциалдық теңдеулер» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар 195
15-тарау. 15.1 Сан қатары 214
§15.2 Оң қатарлар 217
§15.3 Таңбалары айнымалы қатарлар 220
§15.4 Дәрежелі қатарлар 226
§15.5 Функциялардың дәрежелі қатарларға жіктелінуі. Маклорен қатары . 230
§15.6 Дәрежелі қатардың жуық есептеулерге қолданылуы 234
§15.7 Фурье қатары 239
§15.7.1 Жұп және тақ функциялар үшін Фурье қатары 242
§15.7.2 2l периодты функцияны Фурье қатарына жіктеу 243
Ұсынылатын тапсырмалардан бір нұсқасын шешу үлгісі 247
«Сан қатары» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар 250
16-тарау. Еселі интегралдар 270
§16.1 Екі еселі интеграл және оның негізгі қасиеттері 270
§16.2 Екі еселі интегралды есептеу 272
§16.3 Екі еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру 280

§16.4 Екі еселі интегралда полярлық координаталар жүйесіне көшу 282
§16.5. Екі еселі интегралдардың геометрияда және физикада қолданулары 287
§16.6 Екі еселі интегралдардың физикада қолданылулары 289
§16.7 Үш еселі интеграл 295
§16.8 Үш еселі интегралда айнымалыларды алмастыру 299
§16.9 Үш еселі интегралдардың қолданылулары 305
§16.10 Қисық сызықты интегралдар. 16.10.1 Бірінші текті қисық сызықты интегралдар 310
§16.10.2 Екінші текті қисық сызықты интегралдар 311
§16.10.3 Екінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасы 312
§16.10.4 Екінші текті қисық сызықты интегралдардың интегралдау қисығының түрінен тәуелсіздік шарты 313
§16.10.5 Потенциалдық күштің жұмысы 314
Ұсынылған нұсқаларда берілген есептерді шешу үлгісі 319
«Екі еселі интеграл» бөлімі бойынша студенттердің өзіндік жұмыстары үшін әдістемелік нұсқаулар және тапсырмалар. 324
Пайдаланылған әдебиеттер 347
Мазмұны 348

Басуға 08.11.2010 ж. берілді.
Пішімі 60/84. Көлемі 16,5 баспа табақ.
Таралымы 500 дана.
Тапсырыс № 52.
С. Бегалин атындағы МБК-ның баспасы.
Алматы қаласы, Төле би көшесі, 27-үй.