

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный технический университет
имени К.И. Сатпаева

М.Ш. Байбатшаев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Рекомендовано Научно-методическим советом Университета
в качестве учебного пособия

Алматы 2013

УДК 510 (075.8)

ББК 22.12 я 73

Б 18

- Б 18** Байбатшаев М.Ш. Математические основы теории систем: Учебное пособие. – Алматы: КазНТУ, 2013 – 178 с.
Ил. 36. Табл. 5. Библиогр. – 30 названий.
ISBN 978–601–228–510–9

В учебном пособии рассмотрены математические основы теории систем, в котором рассматриваются математические методы применяемые при построении автоматических систем управления.

В первой главе определено понятие множества, приведены операции выполняемые с множествами, вводятся в рассмотрение понятие соответствие, отображение, функция.

Во второй главе вводится понятие графа, рассмотрены виды графов, основы выполнения операций пересечения и объединения графов

В третьей главе определено понятие логическая переменная, логическая функция, рассмотрены элементарные логические функции, основные законы алгебры логики, нормальные и совершенные нормальные формы логических функций.

В четвертой главе вводится понятие матрицы, рассмотрены виды матриц, операции с матрицами, методы вычисления обратной матрицы. Рассмотрены вопросы применения теоремы Кели-Гамильтона, построения функции от матрицы, определения нормы матрицы.

В пятой главе рассмотрены основы теории систем, введены понятия входное воздействие, состояние, выходной сигнал системы. На основе этих понятий вводится понятие динамической системы, ставится задача управления динамической системой..

В приложении приведен план проведения практических занятий по дисциплине математические основы теории систем с решением задач. Задачи для самостоятельного решения по разделам этой дисциплины.

Учебное пособие предназначено для обучения бакалавров по специальности 5В0702 – Автоматизация и управление.

УДК 510 (075.8)

ББК 22.12 я 73

Рецензенты:

А.А.Куандыков, профессор кафедры «Компьютерная инженерия»

Университета им. Сулеймана Демиреля, доктор техн. наук, профессор

С.С. Табултаев, декан факультета «Информационные технологии»

Алматинского университета энергетики и связи, канд. техн. наук, доцент

А.С.Ермаков, профессор кафедры «Вычислительная техника» КазНТУ

имени К.И. Сатпаева, канд.техн.наук, профессор

Печатается по плану издания Научно-методического совета университета на 2013 г.

ISBN 978–601–228–510–9

© Байбатшаев М.Ш., 2013

© КазНТУ, 2013

ВВЕДЕНИЕ

При автоматизации технологических процессов одной из важных задач является задача построения математической модели процесса. Для решения этой задачи обучающиеся по специальности 5В0702 «Автоматизация и управление» изучают дисциплину «Математические основы теории систем». Основная цель изучения этой дисциплины – повышение математической подготовки обучающихся студентов. Поэтому предусмотрено изучение различных математических аппаратов. Учебное пособие написано на основе более чем пятнадцатилетнего опыта преподавания этой дисциплины.

В первой главе приведены основы теории множеств. Вводится понятие множества, рассматриваются свойства множеств, операции с множествами. Рассматриваются отношения между элементами множества, отображение и соответствие множеств, на основе которых вводится понятие «функция». Введенные понятия закреплены множеством практических примеров.

Во второй главе рассматриваются основы теории графов. Приведены виды графов, показано матричное описание графов, которое иллюстрируется практическими примерами. Далее рассматриваются операции пересечения и объединения графов, которые закрепляются практическими примерами.

В третьей главе описываются элементы алгебры логики. Вводится понятие логической переменной, логической функции, рассматриваются основные логические операции, основные законы и тождества алгебры логики, элементарные логические функции. Далее рассматриваются нормальные и совершенные нормальные формы логических функций, приводится способ получения этих форм по таблице истинности логической функции. Все введенные понятия, методы закрепляются множеством практических примеров.

В четвертой главе приведены основы теории матриц. Вводится понятие матрицы, обратной матрицы, рассматриваются различные операции с матрицами, подкрепленные решением практических задач. Приведены различные виды матриц их особенности. Основной теоретический материал иллюстрируется решением практических задач.

В пятой главе излагаются основы теории систем. Вводятся понятия «система», «состояние системы». Даются определения динамической системы, линейной динамической системы, управления системой. Рассматриваются вопросы управления системой, определения переходной матрицы и матрицы импульсных переходных функций линейной системы.

В приложении приведен план проведения практических занятий, их содержание, решаются практические задачи, а также приведены задачи для самостоятельного решения для закрепления изученного материала.

Данное учебное пособие может быть использовано студентами, магистрантами и докторантами для изучения дисциплины «Математические основы теории систем» и для решения практических задач, возникающих в ходе построения автоматизированных систем управления.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Введение в теорию множеств

Множеством называют совокупность объектов (элементов множества), объединенную на основе общего для них признака. Например, множество букв казахского алфавита состоит из 42 букв – элементов множества.

Обычно множества обозначают прописными буквами латинского алфавита $A, B, \dots, X, Y, Z$, а их конкретные элементы – строчными буквами с индексами или без индексов $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, x, y, z$. Множество A , состоящее из элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$, обозначаемое $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, изображают графически в виде некоторой замкнутой области, а его элементы – точками внутри этой области (рис. 1.1). Принадлежность элемента множеству обозначается символом $\in$, например: $a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A ; $b \notin A$ – элемент b не является элементом множества A .

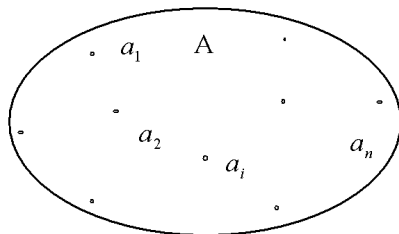


Рис. 1.1

Самый простой способ задания множества – перечисление его элементов. Так, множество цифр десятичной системы можно записать в виде $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Но этот способ применим только к конечным множествам, для которых существует натуральное число N , определяющее общее число элементов множества. Бесконечное множество, содержащее

бесконечное число элементов, определяется (задается) обычно свойствами его элементов: множество равносходных треугольников, множество точек плоскости и т. п. Для краткой записи понятий и определений теории множеств используют ряд символов. Так, для описательного задания множества отрицательных чисел можно записать

$$X = \{x : x < 0\}.$$

Это означает: множество состоит из элементов x , обладающих тем свойством, что x – отрицательное число.

Другие логические символы будут поясняться по мере их появления.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\emptyset$. Пустое множество является аналогом нуля (но не нулем) и условно относится к конечным множествам. Например множество отличников студенческой группы может оказаться пустым ($S = \emptyset$, отличников нет), но мы можем формально оперировать этим множеством.

Для сравнения множеств используют критерий «*мощность*» множества, строгого определения которого пока не существует. Понятие мощности множества связывают, прежде всего, с числом элементов, но при сравнении бесконечных множеств это теряет смысл. Поэтому критерий «*мощность*» множества должен трактоваться несколько шире.

Предположим, что между элементами множеств A и B можно установить *взаимно однозначное* соответствие, т. е. каждому элементу $a_i \in A$ поставить в соответствие один определенный элемент $b_i \in B$ и, наоборот, с каждым $b_j \in B$ сопоставить только один определенный элемент $a_j \in A$. В этом случае множества называются *эквивалентными*, что обозначается $A \sim B$. Такие множества обладают следующими свойствами:

– *рефлексивности* – каждое множество эквивалентно самому себе, т. е. $A \sim A$;

– *симметрии* – если множество A эквивалентно множеству B , то и множество B эквивалентно множеству A , т. е. если $A \sim B$, то $B \sim A$;

– *транзитивности (переходности)* – если $A \sim B$, а $B \sim C$, то и $A \sim C$.

Рассмотрим несколько множеств: множество сторон квадрата, множество оценок знаний в вузе (отлично, хорошо, удовлетворительно, неудовлетворительно), множество основных действий математики (сложение, вычитание, умножение, деление), множество сторон света (север, юг, восток, запад). Каждому элементу одного из множеств может быть сопоставлен один из элементов другого множества, т. е. все множества попарно эквивалентны. И единственно общим у этих разнородных множеств будет число их элементов – четыре. Рассмотренные эквивалентные множества равноможны. Поэтому можно определить мощность произвольного множества как то общее, что имеется у всех множеств, эквивалентных данному.

Понятие «*мощность*» множества позволяет сравнивать бесконечные множества без подсчета числа их элементов. Возьмем два бесконечных множества: множество целых положительных чисел

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}, \quad (1.1)$$

и множество квадратов этих же чисел:

$$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}. \quad (1.2)$$

Взаимно однозначное соответствие между элементами обоих бесконечных множеств налицо. Поэтому множества (1.1) и (1.2) эквивалентны и равноможны.

Если все элементы бесконечного множества могут быть перечислены и занумерованы в виде бесконечной последовательности, например $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, то такое множество называется *счетным*. Например, множество четных чисел, множество нечетных чисел, множество дробей вида $1/n$ и тому подобные

множества. Бесконечное счетное множество равномощно множеству положительных целых чисел. В соответствии со свойствами транзитивности все бесконечные счетные множества эквивалентны между собой.

Бесконечные множества, элементы которых нельзя перечислить и пронумеровать, называются *несчетными*. Примером такого множества может служить *линейное точечное множество*. Простейшие разновидности линейных точечных множеств – отрезок и интервал.

Отрезком (сегментом) называют множество точек числовой оси, удовлетворяющих неравенству

$$a \leq x \leq b.$$

Граничные точки $x = a$ и $x = b$ включены в отрезок. Отрезок обозначают символом $[a, b]$.

Интервал (промежуток) – множество точек числовой оси удовлетворяющих неравенству

$$a < x < b.$$

Граничные точки в интервал, обозначенный (a, b) , не входят.

Бесконечные несчетные множества содержат непрерывную последовательность элементов и имеют мощность *континуума* (от латинского слова *continuum* – непрерывный).

Множество называют *упорядоченным*, если любые два его элемента являются сравнимыми, что определяет какой-то порядок в размещении элементов. Примером упорядоченного множества может служить множество моментов времени T . Его элементы t сравниваются на основе понятий раньше и позже. Свойство направленности времени выражается в том, что любой элемент $t_i \in T$ предшествует элементу $t_{i+1} \in T$. Элементы упорядоченных множеств могут сравниваться на основе понятий меньше и больше. Пример – множество натуральных чисел.

Если множество представляется в виде последовательности элементов, причем каждому элементу этой последовательности

отведено строго определенное место, то мы также имеем упорядоченное множество, называемое *кортежем*. Запись $\langle a, b, c \rangle$ означает, что кортеж состоит из трех элементов или компонент: a расположенном на первом месте, b – на втором месте и c – на третьем месте. В отличие от неупорядоченных множеств, в кортеже могут иметься одинаковые компоненты, например $\langle a, b, c, c \rangle$. Число компонент кортежа называют его *размерностью*, или *длиной*. В зависимости от длины n кортежи называют n -ками (двойками, тройками, четверками и т. д.). Кортежи длиной два называют также *упорядоченной парой*. Кортеж, не содержащий ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается Λ .

Если компонентами кортежа являются вещественные числа, то его можно представить точкой в пространстве соответствующей размерности или вектором, проведенным из начала координат в точку, для которой компоненты вектора являются координатами. Так, кортеж $\langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ представляют вектором в трехмерном пространстве (рис. 1.2).

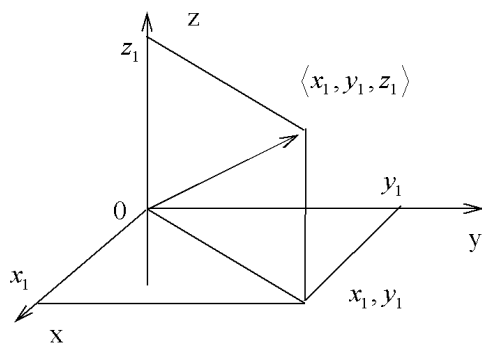


Рис. 1.2

Проекции вектора на оси координат соответствуют его компонентам:

$$Pr_x \langle x_1, y_1, z_1 \rangle = x_1.$$

Проекции вектора на две оси

$$Pr_{x,y} \langle x_1, y_1, z_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle$$

представляют собой проекцию вектора на плоскость OXY .

1.1.1. Множества и подмножества

Если все элементы множества B содержатся в множестве A и, наоборот, все элементы множества A содержатся в множестве B , то множества A и B называют *совпадающими*, или *равными* и обозначают $A=B$. Например, если A – множество треугольников с двумя равными сторонами, а B – множество треугольников с двумя равными углами, то $A=B$.

Если каждый элемент множества B является одновременно элементом множества A , причем B не совпадает с A , то множество B называется *подмножеством* множества A (рис. 1.3). В этом случае множество B объединяет часть элементов множества A на основе как общих, так и частных признаков, которыми обладают не все элементы $a \in A$. Такое соотношение между множествами называется *включением* и обозначается символом $\subseteq$:

$B \subseteq A$ – B содержится, включается в A ,

$A \supseteq B$ – A содержит, включает B .

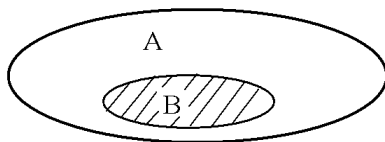


Рис. 1.3

Пример 1.1. Если A – множество студентов группы, а B – множество отличников группы, то $B \subseteq A$.

Пример 1.2. Если A – множество электроизмерительных приборов на складе, а B – множество амперметров среди них, то $A \supseteq B$.

Символы $\subseteq$ и $\supseteq$ не исключают того, что множество В может оказаться совпадающим со множеством А. Если же множество В содержит не все элементы множества А, то соотношение между ними записывается с помощью символов строгого включения $\subset$ или $\supset$. Так если А – множество пар перчаток, а В – множество правых перчаток, то $B \subset A$ и $A \supset B$.

Используя логические символы $\rightarrow$ импликация и $\forall$ квантор общности, определение подмножества можно записать в виде

$$\text{если } B \subseteq A, \text{ то } \forall b[b \in B \rightarrow b \in A],$$

что означает: если В является подмножеством А, то для любого b (для всех b) утверждение b принадлежит В влечет за собой утверждение b принадлежит А.

Подмножества обладают следующими свойствами:

– рефлексивности – $A \subseteq A$, каждое множество является подмножеством самого себя;

– транзитивности – $C \subseteq B$ и $B \subseteq A \rightarrow C \subseteq A$.

Пустое множество является подмножеством любого множества, например, возьмем произвольное множество М, то $\emptyset \subset M$.

Если А и В – конечные множества, то при $B \subset A$ мощность подмножества В меньше мощности множества А. Если же А – бесконечное множество, то подмножество $B \subset A$ может оказаться равномощным основному множеству А. Например, элементы множества (1.2) принадлежат и множеству (1.1), следовательно, (1.2) является подмножеством (1.1), и в то же время оба множества как эквивалентные равномощны.

Контрольные вопросы

1. Как вводится понятие множества?
2. Какие множества называются эквивалентными?
3. Как вводится понятие «мощность» множества?

4. Какие множества называются счетными, несчетными, упорядоченными и неупорядоченными?

5. Как вводится понятие «подмножество заданного множества»?

1.2. Алгебра множеств

Современная математика определяет алгебру как совокупность объектов, над которыми можно производить действия (операции). Рассматривая множества как объекты, некоторым образом соответствующие действия сложения и умножения в алгебре чисел. При этом сохраняют силу основные законы алгебры чисел:

– *переместительный* (коммутативный):

$$a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a;$$

– *сочетательный* (ассоциативный):

$$(a + b) + c = a + (b + c), (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

– *распределительный* (дистрибутивный):

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Рассмотрим основные операции алгебры множеств.

Пересечение множеств А и В есть множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству А, и множеству В (рис. 1.4). Обозначается пересечение $A \cap B$.

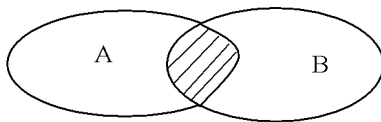


Рис. 1.4

Пример 1.3. Если А – множество четных чисел, а В множество целых положительных чисел, меньших 10, то

$$A \cap B = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Пример 1.4. Пусть A – множество вольтметров в лаборатории B – множество цифровых приборов в лаборатории, тогда $A \cap B$ – множество цифровых вольтметров.

Пересечение нескольких множеств обозначается: $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

Пересечение множеств подчиняется:

- переместительному закону – $A \cap B = B \cap A$,
- сочетательному закону – $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Если множества A и B не имеют общих элементов, то они называются *непересекающимися*, и для них справедливо соотношение $A \cap B = \emptyset$.

Так, в примере 1.4 множество цифровых вольтметров может оказаться пустым.

Операция пересечения имеет некоторую аналогию с умножением, поскольку элементы результирующего множества обладают свойствами множеств-сомножителей. Это подтверждается и соотношением $A \cap \emptyset = \emptyset$ аналогично $a \cdot 0 = 0$.

Прямое (декартово) произведение множеств A и B есть множество всех упорядоченных пар или кортежей $\langle a, b \rangle$, у которых $a \in A$ и $b \in B$. Обозначается $A \times B$.

Пример 1.5. Пусть $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Тогда $A \times B = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \dots, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \dots, \langle h, 7 \rangle, \langle h, 8 \rangle\}$.

Множество $A \times B$ состоит из 64 кортежей и содержит обозначения всех 64 клеток шахматной доски.

Пример 1.6. Если X и Y представляют собой отрезки вещественных осей (то есть линейные точечные множества), то прямое произведение $X \times Y$ определяется совокупностью всех точек заштрихованного прямоугольника на рис. 1.5.

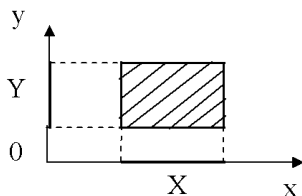


Рис. 1.5

Аналогично прямым произведением множеств $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ будет множество кортежей длины n вида

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{ \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n \}.$$

Очевидно, что вследствие упорядоченности своих элементов прямое произведение не обладает переместительным свойством, т. е. $A \times B \neq B \times A$.

Прямое произведение одинаковых множеств называется *степенью* множества. Если $A_1 = A_2 = \dots = A_s = A$, то

$$A_1 \times A_2 \rightarrow A \times A = A^2,$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \rightarrow A \times A \times A = A^3,$$

.....

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_s \rightarrow A^s.$$

При этом считается, что $A^1 = A$ и $A^0 = \{ \lambda \}$.

Если в примере 1.6 принять $X = Y = R$, где R – множество всех вещественных чисел, то $X \times Y = R \times R = R^2$ является множеством всех точек вещественной плоскости. Аналогично $R^3 = R \times R \times R$ представляет собой трехмерное пространство, а $R^n = R \times R \times \dots \times R$ – n – мерное пространство, называемое также *гиперпространством*.

По аналогии с нахождением проекций кортежей векторов можно осуществить операцию построения любого множества, состоящего из кортежей одинаковой длины. *Проекцией* такого

множества является множество проекций входящих в него кортежей.

Если V – множество v , то проекцией множества будет множество проекций кортежей, то есть $Pr_i V = \{Pr_i v : v \in V\}$.

Пример 1.7. Для множества кортежей $V = \{\langle a, b, d \rangle, \langle c, b, d \rangle, \langle d, b, c \rangle\}$ определим проекции $Pr_1 V = \{a, c, d\}$; $Pr_2 V = \{b\}$; $Pr_{2,3} V = \{\langle b, d \rangle, \langle b, c \rangle\}$.

Пример 1.8. Пусть $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 3\}$; $C = \{2, 5\}$. Тогда для

$$A \times B = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\};$$

$$V = A \times B \times C = \{\langle 1, 1, 2 \rangle, \langle 2, 1, 2 \rangle, \langle 1, 3, 2 \rangle, \langle 2, 3, 2 \rangle, \langle 1, 1, 5 \rangle, \langle 2, 1, 5 \rangle, \langle 1, 3, 5 \rangle, \langle 2, 3, 5 \rangle\};$$

$$Pr_1 V = \{1, 2\}; \quad Pr_2 V = \{1, 3\}; \quad Pr_3 V = \{2, 5\}; \quad Pr_{2,3} V = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 3, 5 \rangle\}.$$

Из примера 1.8 видно, что

$Pr_1 V = A$, $Pr_2 V = B$, $Pr_3 V = C$. Можно показать, что для $z \subseteq A \times B \times C$, получим $Pr_1 z \subseteq A$, $Pr_2 z \subseteq B$, $Pr_3 z \subseteq C$.

Объединение множеств A и B есть множество, состоящее из элементов, которые принадлежат или множеству A , или множеству B (рис. 1.6).

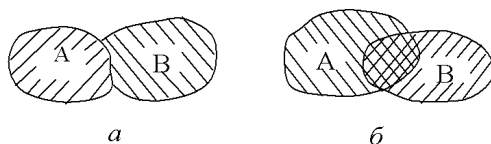


Рис. 1.6

Обозначается объединение $A \cup B$. Имеется аналогия с операцией суммирования, но неполная, т. к. объединение может сопровождаться пересечением (рис. 1.6, б).

Пример 1.9. Если A – множество студентов группы, занимающихся спортом во время каникул, а B – множество студентов группы, регулярно тренирующихся в спортивных

секциях, то $A \cup B$ – множество студентов-спортсменов. Часть из них может относиться и к тем, и к другим.

Объединение нескольких множеств записывается как $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

Операция объединения множеств подчиняется:

- переместительному закону – $A \cup B = B \cup A$,
- сочетательному закону – $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Для пустого множества имеем $A \cup \emptyset = A$ (аналогия $a + 0 = a$).

Систему подмножеств, объединение которых дает некоторое множество M , называют *разбиением* множества M , если все подмножества – непересекающиеся, т. е. попарные пересечения подмножеств пусты.

Пример 1.10. В высшей лиге футбола играют n команд, $F_1, F_2, \dots, F_n$ – множества футболистов, объединенных в команды. Система $V = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ является разбиением множества всех футболистов высшей лиги. Каждый футболист из множества $\bigcup_{i=1}^n F_i$ может играть только в одной команде.

Разность множеств A и B есть множество всех тех и только тех элементов множества A , которые не содержатся в множестве B (рис. 1.7). Обозначается операция $A \setminus B$ и возможна только для двух множеств (строго двухместная операция).

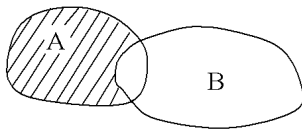


Рис. 1.7

Пример 1.11. Если A – множество амперметров, а B – множество измерительных приборов постоянного тока, то $A \setminus B$ – множество амперметров переменного тока.

Некоторое фиксированное множество, полностью содержащее все возможные для него подмножества, называется *полным*, или *универсальным*. Если пустое множество в алгебре множеств исполняет роль нуля, то универсальное множество выполняет роль единицы и обозначается I . Графически оно представляется в виде прямоугольника. Изображения множеств в виде областей внутри прямоугольника I называют *диаграммами Эйлера-Венна* (рис. 1.8).

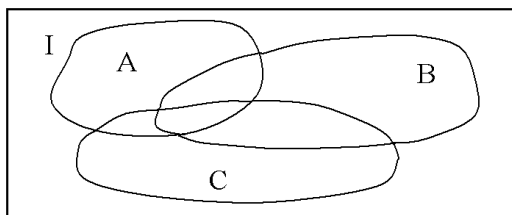


Рис. 1.8

Свойства универсального множества:

- 1) $A \cap I = A$ (аналогично $a \times 1 = a$),
- 2) $A \cup I = I$, (в алгебре чисел аналогично выражению $a + 1 = 1$ не имеет смысла).

Множество $\bar{A}$, определяемое как разность универсального множества и множества A , называется *дополнением* множества A , $\bar{A} = I \setminus A$.

На рис. 1.9 дополнение заштриховано.

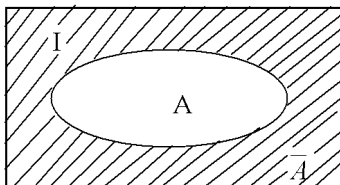


Рис. 1.9

Пример 1.12. Во всех предыдущих примерах со студентами множество студентов группы может рассматриваться как универсальное множество I . Если A – множество стипендиатов в группе, то $\bar{A} = I \setminus A$ будет множество студентов не получающих стипендию.

Свойства дополнения:

- 1) $A \cap \bar{A} = \emptyset$, т. к. A и $\bar{A}$ не имеют общих элементов,
- 2) $A \cup \bar{A} = I$, т. к. все элементы I принадлежат либо A , либо $\bar{A}$,

3) если $\bar{A}$ является дополнением A , то можно считать и A дополнением множества $\bar{A}$, с другой стороны, дополнение множества $\bar{A}$ есть $\bar{\bar{A}}$, откуда $\bar{\bar{A}} = A$.

Выше отмечалось, что в алгебре множеств действуют переместительный и сочетательный законы. Рассмотрим диаграммы Эйлера-Венна для *распределительного* закона (рис. 1.10).

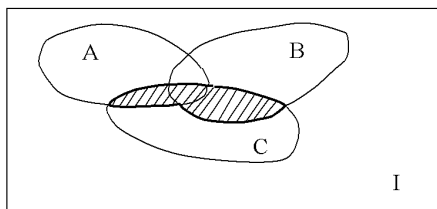


Рис. 1.10

Выделенная жирной линией область соответствует правой и левой стороне записи формулы распределительного закона

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

что в алгебре чисел соответствует соотношению $(a + b)c = ac + bc$. В обычной алгебре распределительный закон, в отличие от переместительного и сочетательного, не симметричен относительно умножения и сложения. Действительно, замена

знаков плюс на умножение и наоборот приводит к абсурду: $ab + c = (a + c)(b + c)$. Применительно к множествам взаимная замена знаков $\cap$ и $\cup$ дает в обоих случаях одинаковые множества. На диаграмме 1.11 эти множества выделены жирной линией. Из этого следует, что

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Таким образом, в алгебре множеств все три закона оказываются симметричными по отношению к действиям объединения и пересечения.

На рис. 1.12 изображены множества A и B , содержащиеся в универсальном множестве I . Из этого рисунка можно вывести, что

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

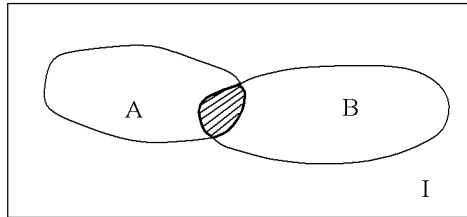


Рис. 1.12

Теперь рассмотрим объединение $A \cup B$ и его дополнение, отсюда следует, что

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Полученные два выражения называются *тождествами* или *правилами де Моргана*.

Контрольные вопросы

1. Как выполняется операция пересечения множеств?
2. Как выполняется операция прямого произведения множеств?
3. Как выполняется операция объединения множеств?

4. Как выполняется операция вычитания множеств?
5. Как формируется диаграмма Эйлера-Венна?
6. Как определяется универсальное множество и дополнение множества?
7. Как доказываются при помощи диаграмм Эйлера-Венна основные законы алгебры множеств?

1.3. Соответствия между множествами и их элементами

Если элементы $a \in A$ попарно сопоставляются с элементами $b \in B$ и способ сопоставления определен, то между множествами A и B установлено *соответствие*. Множество $Q \subseteq A \times B$ определяет закон, по которому установлено соответствие, и называется *графиком соответствия*. В соответствии, определяемом тройкой множеств (A, B, Q) , кортежи $\langle a, b \rangle \in Q$ указывают пары сопоставляемых элементов.

Пример 1.13. При выдаче студентам заданий на курсовое проектирование имеем: A – множество студентов, B – множество составленных заданий. График $Q \subseteq A \times B$ определяет, какое задание необходимо выполнить каждому студенту (установлено соответствие).

Пример 1.14. Ведомость с результатами сдачи экзамена группой студентов представляет график соответствия $Q \subseteq A \times B$, где A – обозначает множество студентов группы, а B – множество оценок.

В общем случае соответствие может устанавливаться не для всех элементов A и B .

Множество A называется *областью отправления* соответствия, а множество B – *областью прибытия*. Проекцию $Pr_1 Q$, состоящую из элементов $a \in A$, называют *областью определения* соответствия, а проекцию $Pr_2 Q$ состоящую из элементов $b \in B$ – *областью значений* соответствия. Если $Pr_1 Q = A$, то соответствие называют *всюду определенным* (в

противном случае – частичным). В случае $Pr_2 Q = B$ соответствие называют *сюръективным*.

Всюду определенное соответствие (X, Y, Q) , при котором область определения соответствия совпадает с областью отправления, называется *отображением* X в Y и обозначается

$$Q : X \rightarrow Y \text{ (для } \forall x \in X \text{)}.$$

В общем случае элементу $x \in X$ может ставиться в соответствие некоторое подмножество $Qx \subseteq Y$, называемое *образом* элемента x . Такое отображение называется *многозначным*. Так, например, англо-русский словарь дает многозначное отображение множества X включенных в него английских слов в множество Y русских слов. При *однозначном* отображении образом элемента $x \in X$ является один определенный элемент $y \in Y$.

В случае однозначного отображения график соответствия, обозначаемый f , не имеет кортежей с одинаковыми первыми и различными вторыми компонентами. Такое отображение

$$f : X \rightarrow Y$$

называют *функцией*. Элемент x из области определения $Pr_1 f = X$ называют *аргументом*, а образ элемента x в области значений – значением функции. При этом соответствие (X, Y, f) записывают в виде

$$y = f(x).$$

Если область отправления X является конечным множеством, то функция может быть представлена конечным списком пар $\langle x, y \rangle$ в виде таблицы. Функция может быть задана формулой, выражающей вычислительную процедуру, которая по любому заданному значению аргумента x выдает соответствующее значение y . Если X и Y являются множествами вещественных чисел, то график функции $y = f(x)$ можно изобразить

совокупностью точек на вещественной плоскости R^2 . Каждая точка соответствует определенному кортежу $\langle x, y \rangle \in f$. Графическое представление множества f называется также графиком функции.

Областью отправления соответствия может быть упорядоченное множество T моментов времени t . Тогда отображение f множества T на множество вещественных чисел R

$$f : T \rightarrow R,$$

будет состоять из пар $\langle t, x \rangle$, где $t \in T$ и $x \in R$, называемых мгновенными значениями функции. Совокупность мгновенных значений $\langle t, x \rangle$ для всех $t \in T$ называется *функцией времени* $x(t)$. Если t принимает любое значение в интервале $(-\infty, +\infty)$, то $x(t)$ называют функцией с непрерывным временем.

Иногда время можно рассматривать как бесконечное множество натуральных чисел $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Тогда $x(t)$ будет функцией с дискретным временем, и график соответствия ее будет представлять совокупность отсчетов $\langle n, x \rangle$ в моменты времени n .

Частным случаем отображения является отображение множества самого в себя:

$$\Gamma : X \rightarrow Y.$$

Отображение, заданное на одном множестве и определяемое парой (X, Γ) , называется *отношениями*. Множество X является областью задания отношения, а график отношения имеет вид

$$\Gamma \subseteq [X \times X = X^2]$$

Поскольку каждое отдельно взятое отношение – упорядоченная пара – сопоставляет два элемента множества X^2 , такое отношение называют *бинарным*. Символически бинарные отношения между элементами x и y записывают в виде $x\Gamma y$.

Отношения могут обладать следующими свойствами:

- рефлексивностью – $(\forall x \in X), [x\Gamma x]$;
- симметричностью – $(\forall x, y \in X), [x\Gamma y \rightarrow y\Gamma x]$;
- транзитивностью – $(\forall x, y, z \in X), [x\Gamma y, y\Gamma z \rightarrow x\Gamma z]$;
- тождественностью – $(\forall x, y \in X), [x\Gamma y, y\Gamma x \rightarrow x=y]$.

Бинарные отношения на конечном множестве могут быть записаны в виде матрицы размерностью $|X| \times |X|$, строки и столбцы которой соответствуют элементам множества X . При наличии между элементами отношения на пересечении соответствующих строк и столбцов ставят 1, при отсутствии – 0.

Пример 1.15. Для множества групп крови $\{I, 2, 3, 4\}$ отношение совместимости при переливании определяется графиком

$$\Gamma = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,4 \rangle\}$$

Матрица отношения имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.16. На множестве натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ задано отношение $x\Gamma y$ вида x имеет с y общий делитель отличный от единицы. Очевидно, что отношение между элементами будут обладать свойствами рефлексивности и симметричности. Матрицей отношений будет

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отношение называется *полным*, если высказывание

$$(\forall x, y \in X)[x \Gamma y]$$

всегда истинно (т. е. $\Gamma = X^2$) и *пустым*, если всегда ложно ($\Gamma = \emptyset$). Полное отношение задается матрицей из одних единиц, а пустое – нулевой матрицей. Высказывание

$$(\forall x, y \in X), [x \Gamma y \rightarrow x = y],$$

определяет отношение *равенства*. Если отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, то оно называется отношением *эквивалентности*.

Отношение неравенства могут определять порядок расположения элементов множества. Различают отношения *нестрогого порядка* $x \leq y$, обладающие свойствами:

- рефлексивности – $x \leq x$;
- тождественности – $(x \leq y, y \leq x) \rightarrow x = y$;
- транзитивности – $(x \leq y, y \leq z) \rightarrow x \leq z$.

Отношение *строгого порядка* $x < y$ характеризуется свойствами:

- антирефлексивности – $x < x$ ложно;
- несимметричности – $(x < y \text{ и } y < x)$ ложно;
- транзитивности – $(x < y \text{ и } y < z) \rightarrow x < z$.

Отметим, что на отношения переносятся операции над множествами – объединение, пересечения, разность.

Контрольные вопросы

1. Как вводится понятие функции при помощи множеств?
2. Как определяются области аргумента и значений функции?
3. Какое отображение называется отношением?
4. Как задаются бинарные отношения при помощи матриц?
5. Какие отношения называются эквивалентными?

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

2.1. Введение в теорию графов

Под абстрактным *графом* $G = (X, U)$ подразумевают математический объект в виде совокупности множества точек X и множества линий U между ними. Граф можно рассматривать как один из способов представления бинарных отношений. Множество линий, попарно соединяющих точки $x \in X$, представляют отображение множества X самого в себя. Соответственно график отношения $\Gamma: X \rightarrow X$ есть множество пар или кортежей вида $\langle x_i, x_j \rangle$. Следовательно, граф может быть задан парой множеств X и Γ :

$$G = (X, \Gamma).$$

Геометрически граф изображается в виде множества точек или кружков на плоскости называемых *вершинами*, и линий со стрелками (дуг), соединяющих пары вершин, между которыми установлено отношение $x_i \Gamma x_j$. Если x_i находится в отношении Γ к x_j , то стрелка дуги направлена от x_i к x_j . При этом в общем случае $x_j \in \Gamma x_i$ (Γx_i - образ элемента x_i). На рис. 2.1 приведены графы, изображающие отношения, рассмотренные в примерах 1.15 и 1.16.

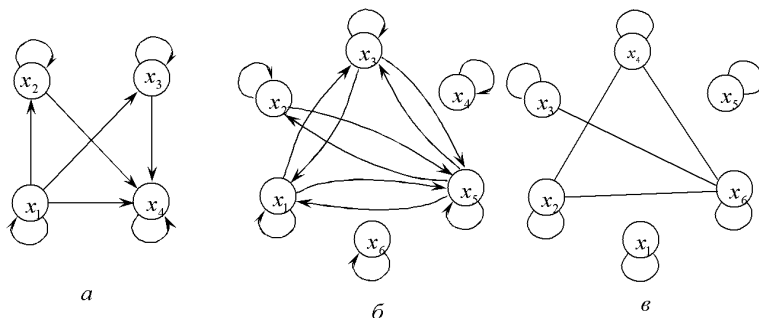


Рис. 2.1

С помощью графов наглядно представляются отношения между элементами множеств. В качестве примера рассмотрим отношения между кодовыми комбинациями множества $X = \{00, 01, 10, 11\}$ с точки зрения свойства, называемого пересечением. Считается, что n -разрядная кодовая комбинация пересекается с другой, если $(n-1)$ последних ее элементов совпадают с $(n-1)$ первыми элементами другой. Следовательно, график должен задавать отображение каждой кодовой комбинации, с которыми она пересекается. Обозначив элементы множества через x с порядковыми номерами, устанавливаем, что комбинация x_1 пересекается сама с собой и с комбинацией x_2 , т. е. $Gx_1 = \{x_1, x_2\}$. Аналогично для x_2 находим $Gx_2 = \{x_3, x_4\}$, для комбинации x_3 - $Gx_3 = \{x_1, x_2\}$ и, наконец, для x_4 - $Gx_4 = \{x_3, x_4\}$. Граф, отображающий свойство пересечения для двухразрядных двоичных кодовых комбинаций, представлен на рис. 2.2.

Такой граф, в котором вершины соединены направляющими дугами называют *направленным*, или *ориентированным графом* (сокращенно *орграфом*).

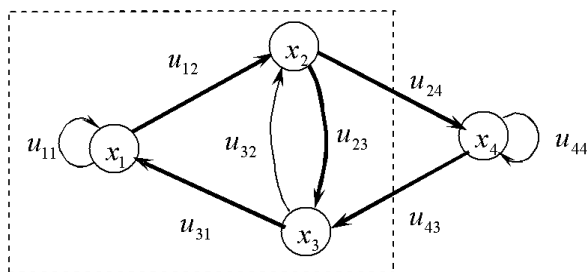


Рис. 2.2

Дуги, заходящие в какую-либо вершину и исходящие из нее, называют *инцидентными* этой вершине. Так, на рис. 2.2 дуга u_{12} инцидентна вершинам x_1 и x_2 . Аналогично x_1 и x_2 считаются инцидентными u_{12} . Дуга, инцидентная только одной

вершине (например u_{44}), называется *петлей*. Вершину, не инцидентную никакой дуге, называют *изолированной* (вершина 1 на рис. 2.1, в).

Две вершины, соединенные дугой, называются *смежными* (например, x_1 и x_2 на рис. 2.1). Соответственно смежными будут дуги, имеющие общую вершину (u_{12} , u_{32} , u_{23} и u_{24}).

Последовательность дуг $S^* = (u_{12}, u_{24}, u_{43})$, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом последующей, называется маршрутом, или путем в графе. Принимая длину каждой дуги за единицу, длину пути можно определить по числу дуг последовательности как $d(S^*) = 3$. Если длину каждой дуги принять равной некоторому числу $l(u)$, то длина пути будет определена как сумма длин дуг, входящих в путь. Рассмотренный путь может быть записан и через последовательно пройденные вершины:

$$S^* = (x_1, x_2, x_4, x_3).$$

Путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной, называется *контуром*. Если все промежуточные вершины в контуре различны, а начальная и конечная совпадают, то контур считается *элементарным*. Очевидно, что петлю можно рассматривать как контур длиной 1.

Если отношение пары сопоставляемых вершин симметрично $(x_i G x_j \rightarrow x_j G x_i)$, то вершины соединены двумя встречно направленными дугами (рис. 2.1, б). В этом случае связь между вершинами может быть показана одной линией без стрелки. Граф, в котором отношение для любых двух вершин обладает свойством симметрии, представляет симметричное бинарное отношение и называется ненаправленным, или *неориентированным* графом (сокращенно неорграф). В таком графе линии между вершинами называются *ребрами*, а понятие пути и контура заменяются понятиями *цепь* и *цикл*.

На рис. 2.1, в изображен неорграф, представляющий отношения в примере 1.16 и аналогичный графу на рис. 2.1, б.

Если в графе $G=(X,U)$ отбросить часть вершин с инцидентными им дугами (ребрами), то получим *подграф* $G'=(X',U')$, имеющий множества $X' \subseteq X$ и $U' \subseteq U$. На рис. 2.2 подграф, полученный отбрасыванием вершины x_4 и дуг u_{24} , u_{43} и u_{44} , обведен пунктиром. Если отбросить только часть дуг (ребер), оставив все вершины, то получим *частичный граф*, или *суграф* $G''=(X,U'')$, обозначенный на рис. 2.2 жирными дугами.

Рисунок графа зависит от расположения вершин и формы ребер (дуг). Иногда нелегко установить, одинаковы ли графы, изображенные разными рисунками, как, например, на рис. 2.3, а и б. Задача усложняется, если вершины имеют разное обозначение или нумерацию (рис. 2.3, в).

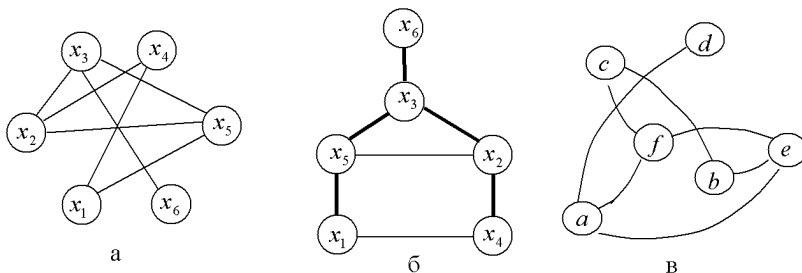


Рис. 2.3

Тожественные преобразования графов путем переобозначения вершин или ребер дают *изоморфные* графы. Используя логический символ эквивалентности $\leftrightarrow$, можно записать, что графы $G=(X,U)$ и $G'=(X',U')$ будут изоморфными при взаимно-однозначном соответствии $X \leftrightarrow X'$ и $U \leftrightarrow U'$. Это означает, что если $(x_i, x_j) \in X \leftrightarrow (x'_i, x'_j) \in X'$, то ребро $u_{ij} \in U \leftrightarrow u'_{ij} \in U'$.

Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности на графах.

2.1.1. Матричное представление графов

Любой граф, заданный множествами X и Γ или в виде рисунка, может быть также представлен с помощью матриц смежности и инцидентности.

В квадратной матрице смежности $R = [r_{ij}]$ строки и столбцы соответствуют вершинам графа. Для орграфа на пересечении i -ой строки и j -ого столбца матрицы значения элементов образуются по правилу

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если есть дуга из вершины } x_i \text{ в вершину } x_j, \\ 0, & \text{если дуги нет.} \end{cases}$$

Для графа на рис. 2.2 матрица смежности имеет вид

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}.$$

Единицы в главной диагонали матрицы свидетельствуют о наличии петель в графе.

Для неорграфа в матрице смежности на пересечении строк и столбцов стоят единицы, если вершины соединены ребрами. Матрица, построенная по этому правилу для графа на рис. 2.3, имеет вид

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

или соответствует ранее построенной матрице отношений в примере 1.16, поскольку отношения в неорграфе обладают свойством симметрии $r_{ij} = r_{ji}$. Следовательно, все ребра определяются верхним правым треугольником матрицы, включающим диагональ. Поэтому для задания неорграфа можно использовать треугольную матрицу.

Существуют разновидности матриц смежности. В матрице весовых соотношений элемент r_{ij} вместо 1 принимает значения веса связи (x_i, x_j) , в матрице длин – длины ребра или дуги (x_i, x_j) .

В прямоугольной матрице инцидентности $E = [e_{ij}]$ строки соответствуют вершинам графа, а столбцы – ребрам (дугам). Для неорграфа на пересечении i -той строки и j -того столбца элементы матрицы образуются по следующему правилу:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро инцидентно вершине } x_i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для графа, изображенного на рис. 2.1, в, матрица инцидентности имеет вид

$$E = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \left| \begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{matrix}.$$

В каждом столбце матрицы E не более двух единиц, поскольку каждое ребро соединяет две вершины. Столбцы, соответствующие петлям, содержат по одной единице.

Для оргграфа в матрицу инцидентности заносится

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга исходит из вершины } x_i; \\ -1, & \text{если дуга заходит в вершину } x_i; \\ 0, & \text{если } x_i \text{ не инцидентно дуге;} \\ 2, & \text{если } x_i \text{ инцидентна петле.} \end{cases}$$

Для графа на рис. 2.2 матрица инцидентности записывается в виде

$$E = \begin{array}{c|cccccccc} & u_{11} & u_{12} & u_{23} & u_{24} & u_{31} & u_{32} & u_{43} & u_{44} \\ \hline x_1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Матрица инцидентности, как и матрица смежности, однозначно определяет граф. Существуют приемы перехода от одной матрицы к другой.

С помощью матриц смежности можно установить изоморфизм графов. Для этого необходимо в матрице смежности одного графа проделать перестановки строк и столбцов. Если после очередной перестановки получим матрицу, тождественно совпадающую с матрицей другого графа, то графы изоморфны.

Помимо рассмотренных матриц, для описания графов используются матрицы контуров, расстояний и др.

Контрольные вопросы

1. Из каких элементов состоит граф?
2. Какие различия имеются между ориентированным и неориентированным графами?
3. Как формируются матрицы смежности ориентированных и неориентированных графов?
4. Как формируются матрицы инцидентности ориентированных и неориентированных графов?

2.2. Разновидности графов и выполнение операций с графами

Граф, у которого хотя бы одна пара вершин соединена несколькими ребрами (дугами в одном направлении), называют *мультиграфом*. Ребра (дуги), связывающие одну и ту же пару вершин, называют *кратными*.

Граф, не имеющий ребер и состоящий из изолированных вершин, называется *нуль-графом*.

Число ребер, инцидентных одной вершине неорграфа, называют локальной степенью вершины $p(x)$. Неорграф, у которого

$$\forall x \in X [p(x) = m],$$

т. е. все вершины имеют одинаковую степень m , называется *однородным степени m* . В орграфе число исходящих дуг определяет полустепень исхода $p^+(x)$, а число заходящих дуг – полустепень захода вершины $p^-(x)$. Если

$$\forall x \in X [p^+(x) = p^-(x) = m],$$

то оргграф также считается однородным степени m . Петля при определении степени вершины считается дважды: как исходящая дуга и как заходящая. Граф на рис. 2.2 является примером однородного графа степени два.

Граф, все вершины которого попарно смежны, т. е. между любой парой вершин имеется ребро, называется *полным*. Полный граф с m вершинами является одновременно и однородным степени $m-1$, поскольку каждая вершина соединена с $m-1$ остальными.

Если любые две вершины связаны цепью, граф называют *связным*. При определении связности орграфа можно не принимать во внимание направленность дуг. Если же для любой пары вершин найдется соединяющий их путь (с учетом направленности дуг), то оргграф считается *связным*. Графы, не

отвечающие условию связности, состоят из связных подграфов, которые называются *компонентами связности*. На рис. 2.4 приведен граф, состоящий из трех компонент связности.

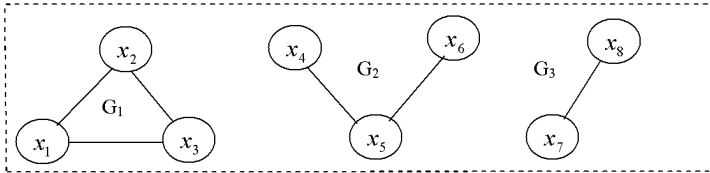


Рис. 2.4

Разновидностями связных графов являются *эйлеровы* и *гамильтоновы* графы. В первом имеется элементарный цикл, который включает все ребра, проходя через каждое ребро только один раз, и называется *эйлеровым циклом*. Во втором имеется *гамильтонов цикл*, проходящий через каждую вершину графа один раз.

К связным графам относятся также деревья. *Деревом* называют конечный связный неорграф, не содержащий циклов (рис. 2.5, а). Вершина x_1 является корнем дерева, а другие вершины с локальной степенью 1 называются концевыми ($x_4, \dots, x_8$). Связный орграф без петель с корнем x_1 и остальными вершинами, в каждую из которых заходит только одна дуга, называется *прадеревом* (рис. 2.5, б).

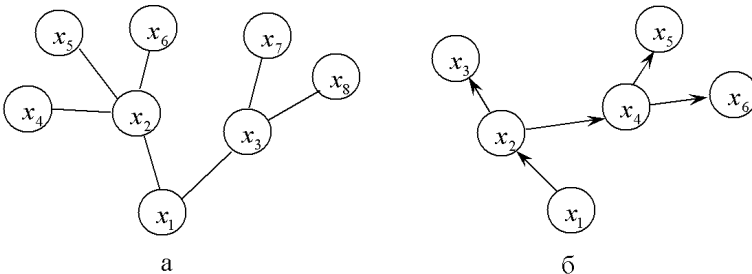


Рис. 2.5

Несвязный граф без циклов называется *лесом*. Компонентами связности леса могут быть деревья, а также отдельные ребра и изолированные вершины, являющиеся частным случаем деревьев. На рис. 2.6 показан пример такого графа.

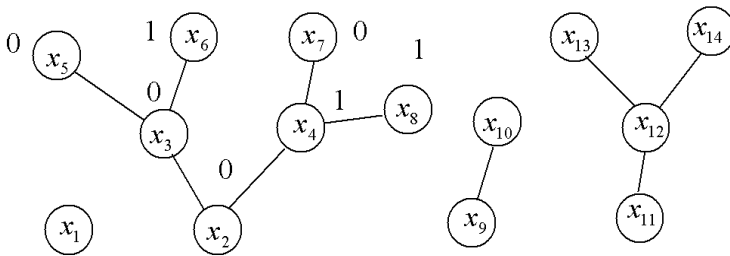


Рис. 2.6

Если пометить вершины одного из деревьев нулями и единицами, как показано на рисунке 2.6, то записав пути от корня до концевых вершин, получим комбинации 000, 001, 010, 011.

Дерево, являющееся частичным графом графа $G = (X, U)$, называется деревом покрывающим граф G . На рис. 2.3, б жирными линиями выделено такое дерево. Наименьшее число ребер, которые надо удалить из графа, чтобы он стал ациклическим (т. е. не содержащим циклов), определяется *цикломатическим числом* графа. Если граф имеет n вершин, m ребер и k компонент связности, то его цикломатическое число равно

$$\nu(G) = m - n + k.$$

Для графа на рис. 2.3, б для получения покрывающего дерева необходимо удалить $\nu(G) = 7 - 6 + 1 = 2$ ребра.

2.2.1. Действия над графами

Над графами, представляющими бинарные отношения на множестве, можно выполнять операции объединения, пересечения,

произведения (композиции), декартово произведения и др. Рассмотрим некоторые операции.

Объединение графов $G_1 = (X_1, U_1)$ и $G_2 = (X_2, U_2)$ называют граф $G(X, \Gamma) = G_1(X_1, \Gamma_1) \cup G_2(X_2, \Gamma_2)$, у которого множество вершин определяется объединением вершин $X = X_1 \cup X_2$, а отображения каждой вершины – объединением отображений соответствующих вершин, т. е. $\forall x_i \in X [\Gamma x_i = \Gamma_1 x_i \cup \Gamma_2 x_i]$.

Пример 2.1. Рассмотрим выполнение операции объединения графов изображенных на рис. 2.7, а и 2.7, б.

Для выполнения объединения графов необходимо вначале выполнить операцию объединения вершин графов:

$$\begin{aligned} X = X_1 \cup X_2 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} \cup \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_8\} = \\ &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\} \end{aligned}$$

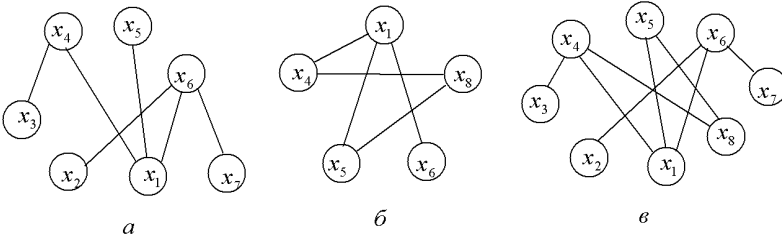


Рис. 2.7

Теперь определим отображения каждой вершины объединенного графа:

$$\begin{aligned} \Gamma x_1 &= \Gamma_1 x_1 \cup \Gamma_2 x_1 = \{x_4, x_5, x_6\} \cup \{x_4, x_5, x_6\} = \{x_4, x_5, x_6\}, \\ \Gamma x_2 &= \Gamma_1 x_2 = \{x_6\}; \quad \Gamma x_3 = \Gamma_1 x_3 = \{x_4\}, \\ \Gamma x_4 &= \Gamma_1 x_4 \cup \Gamma_2 x_4 = \{x_1, x_3\} \cup \{x_1, x_8\} = \{x_1, x_3, x_8\}; \\ \Gamma x_5 &= \Gamma_1 x_5 \cup \Gamma_2 x_5 = \{x_1\} \cup \{x_1, x_8\} = \{x_1, x_8\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma x_6 &= \Gamma_1 x_6 \cup \Gamma_2 x_6 = \{x_1, x_2, x_7\} \cup \{x_1\} = \{x_1, x_2, x_7\}, \\ \Gamma x_7 &= \Gamma_1 x_7 = \{x_6\}; \quad \Gamma x_8 = \Gamma_2 x_8 = \{x_4, x_5\}. \end{aligned}$$

В результате по этим данным получим граф, изображенный на рис. 2.7, в. Аналогично определяется объединение нескольких графов:

$$G(X, \Gamma) = \bigcup_{i=1}^n G_i(X_i, \Gamma_i).$$

В результате пересечения двух графов получим граф вида

$$G(X, \Gamma) = G_1(X_1, \Gamma_1) \cap G_2(X_2, \Gamma_2).$$

Результирующий граф имеет вершины, которые получаются в результате пересечения вершин исходных графов:

$$X = X_1 \cap X_2,$$

а отображение каждой вершины, полученной в результате пересечения графа, определяется следующим образом:

$$\forall x_i \in X, [\Gamma x_i = \Gamma_1 x_i \cap \Gamma_2 x_i].$$

Пример 2.2. В результате пересечения графов, изображенных на рис. 2.7, а и 2.7, б, получим граф, вершины которого определяются как результат пересечения вершин исходных графов:

$$\begin{aligned} X = X_1 \cap X_2 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} \cap \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_8\} = \\ &= \{x_1, x_4, x_5, x_6\}. \end{aligned}$$

Отображение каждой вершины результирующего графа определяются из выражения вида

$$\begin{aligned} \Gamma x_1 &= \Gamma_1 x_1 \cap \Gamma_2 x_1 = \{x_4, x_5, x_6\} \cap \{x_4, x_5, x_6\} = \{x_4, x_5, x_6\}; \\ \Gamma x_4 &= \Gamma_1 x_4 \cap \Gamma_2 x_4 = \{x_1, x_3\} \cap \{x_1, x_8\} = \{x_1\}; \end{aligned}$$

$$\Gamma x_5 = \Gamma_1 x_5 \cap \Gamma_2 x_5 = \{x_1\} \cap \{x_1, x_8\} = \{x_1\};$$

$$\Gamma x_6 = \Gamma_1 x_6 \cap \Gamma_2 x_6 = \{x_1, x_2, x_7\} \cap \{x_1\} = \{x_1\}.$$

По этим данным построим результирующий граф, который представлен на рис. 2.8. Подобным образом можно выполнить операцию пересечения нескольких графов: $G(X, \Gamma) = \bigcap_{i=1}^n G_i(X_i, \Gamma_i)$.

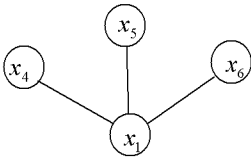


Рис. 2.8

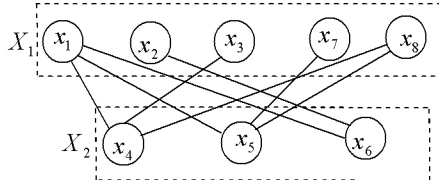


Рис. 2.9

Раскраской вершин графа $G(X, \Gamma)$ называют разбиение вершин на k подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_k$, при котором никакие две вершины одного и того же подмножества не являются смежными. Если вершины каждого подмножества окрасить в один цвет, то никакое ребро графа не будет инцидентно вершинам, окрашенным в одинаковый цвет. Такой граф называют k -хроматическим графом, а наименьшее число подмножеств, на которое разбивается граф – хроматическим числом графа $\gamma(G)$.

Важное практическое применение имеют двудольные, или бихроматические графы с $\gamma(G) = 2$. Такой граф обозначают $G(X_1, X_2, U)$, где U – ребра, соединяющие подмножества вершин X_1 и X_2 . Граф $G(X, \Gamma)$, изображенный на рис. 2.7, в, относится к двудольным и может быть представлен, как показано на рис. 2.9. Условие бихроматичности графа – отсутствие элементарных циклов нечетной длины. Если для произвольного неорграфа условие бихроматичности не

выполняется, из него можно выделить удалением некоторых ребер суграф, являющийся двудольной частью. При этом суграф с наибольшим числом ребер будет называться максимальной двудольной частью неорграфа.

Контрольные вопросы

1. В каком случае граф называется связным?
2. Какие графы называются деревом, лесом?
3. Как выполняется операция объединения графов?
4. Как выполняется операция пересечения графов?
5. Какие графы называются бихроматическими?

3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Формализованный аппарат математической логики со строгими правилами и законами имеет прикладное значение, облегчает анализ сложных устройств автоматики, позволяет синтезировать новые совершенные устройства с заданными свойствами. Применение этого математического аппарата очень важно для понимания работы логических устройств, которые являются одними из основных устройств микропроцессорных систем автоматики.

3.1. Логические функции и способы их представления

Составной частью математической логики является учение о высказываниях. Примем множество электроизмерительных приборов за некоторое универсальное множество I . Элементы I могут быть сгруппированы по различным частным признакам в подмножества: A – подмножество амперметров; B – вольтметры; C – магнитоэлектрические приборы; D – цифровые приборы и т. п. Сообщение типа «этот прибор является вольтметром» оказывается истинным, если данный прибор относится к подмножеству B , и ложным, если не относится. Каждое подобное утверждение, которое может быть либо истинным, либо ложным, называют *высказыванием*. А множество, для элементов которого высказывание оказывается истинным, называется *множеством истинности* данного высказывания.

Высказывания, которым соответствуют простые множества истинности (например, A , B , ...), называются *простыми высказываниями*. Но множество истинности может оказаться и сложным, например $B \cap D$. В этом случае имеем *составное высказывание*, в котором два простых высказывания объединены логической связкой «и» («этот прибор цифровой и является вольтметром»).

Можно отвлечься от смыслового содержания и рассматривать простые высказывания как величины, принимающие значения «истинно» или «ложно». Тогда с помощью определенных

действий, называемых логическими операциями, можно получать из исходных высказываний новые простые или составные высказывания.

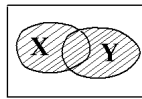
Совокупность множества элементов (высказываний), логических операций, ряда определенных правил и законов получила название *алгебра логики*, являющейся одной из разновидностей *булевой алгебры* (по имени английского математика Джорджа Буля).

Высказывания, которые могут принимать только два значения «истинно» или «ложно», в алгебре логики называются *логическими переменными*. Обозначаются они строчными буквами латинского алфавита $a, b, c, \dots, x, y, z$ с индексами или без индексов. Значения «истинно» и «ложно» обозначают 1 и 0.

Операции над логическими переменными приводят к появлению нового высказывания, которое также будет принимать одно из двух значений – 0 или 1. Предположим, что имеется некоторое множество переменных $\{x, y, z, \dots\}$. Результат логической операции может оказаться равным при различных значениях переменных. Если назовем комбинацию значений переменных набором, то налицо однозначное отображение множества наборов в множество результатов $\{0, 1\}$, что характеризует функциональную зависимость. Функция $f(x, y, z)$, которая, как и ее аргументы (логические переменные), может принимать только два значения – 0 или 1, называется *логической или булевой функцией*. По числу переменных различают *логические функции одной, двух и многих переменных*.

Как указывалось ранее, функция может быть представлена таблицей, формулой или графиком. Чтобы задать логическую функцию, достаточно указать ее значения для всех наборов переменных, составив *таблицу истинности*. Функция может быть задана формулой, указывающей последовательности логических операций над переменными. Что касается графика, то для логической функции он не строится, т. к. наборы значений аргументов, изображаемые в виде вершин n -мерного куба, неудобны для графического моделирования

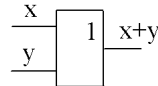
Логическое сложение обозначается знаком $+$ или логическим символом $\vee$. Функция $f(x) = x + y = x \vee y$, имеет множество истинности $x \cup y$ и получила название функции ИЛИ (дизъюнкции). Диаграмма, соответствующая функции $x+y$, и таблица истинности приведены на рис. 3.2, а, б.



а

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

б



в

Рис. 3.2

С помощью диаграммы можно убедиться в справедливости следующих тождеств:

- 1) $x+1=1$; $(x \cup I=I)$;
- 2) $x+0=x$; $(x \cup 0=x)$;
- 3) $x+\bar{x}=1$; $(x \cup \bar{x}=I)$;
- 4) $x+x=x$; $(x \cup x=x)$.

Из последнего тождества следует, что в функциях логического сложения отсутствуют коэффициенты.

Логический элемент (рис. 3.2, в) называют *элементом ИЛИ* (дизъюнктом).

Логическое умножение соответствует операция пересечения множеств. Функция

$$f(x, y) = xy = xAy.$$

Следующий $\wedge$ – символ логического умножения, называется *функцией И, или конъюнкцией*. Множество истинности $X \cap Y$ и таблица истинности показаны на рис. 3.3 а, б.

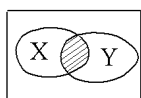
Для функции $xу$ определены тождества:

- 1) $x1 = x$ ($x \cap 1 = x$);
- 2) $x0 = 0$, ($x \cap 0 = 0$);
- 3) $x\bar{x} = 0$, ($x \cap x = 0$);
- 4) $xx = x$ ($x \cap x = x$).

Последнее тождество показывает, что в алгебре логики отсутствует возведение в степень.

Соответствующий логический элемент (рис. 3.3, в) называется *элементом И (конъюнктом)*, а также *схемой совпадения*.

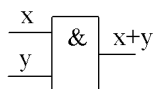
Операции логического сложения и логического умножения возможны для трех и более переменных.



а

x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

б



в

Рис. 3.3.

3.1.2. Законы и тождества алгебры логики

В алгебре логики действуют законы, называемые *системой равносильных преобразований* (равносильностями). Равносильность двух выражений подтверждается совпадением соответствующих таблиц истинности для всех наборов переменных или совпадением множеств истинности.

Приведем основные законы и тождества алгебры логики.

1. П е р е м е с т и т е л ь н ы й (коммутативный) закон:

$$xy = yx; \quad x + y = y + x.$$

2. С о ч е т а т е л ь н ы й (ассоциативный) закон:

$$xyz = x(yz) = (xy)z;$$

$$x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z.$$

3. Р а с п р е д е л и т е л ь н ы й (дистрибутивный) закон:
конъюнкции относительно дизъюнкции –

$$x (y + z) = xy + xz;$$

дизъюнкции относительно конъюнкции –

$$x + yz = (x+y)(x+z).$$

4. Законы ин в е р с и и (законы де Моргана):

а) инверсия конъюнкций есть дизъюнкция инверсий –

$$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\overline{abc...xy} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + ... + \overline{x} + \overline{y};$$

б) инверсия дизъюнкций есть конъюнкция инверсий –

$$\overline{x + y} = \overline{x} \overline{y};$$

$$\overline{a + b + c + ... + x + y} = \overline{a} \overline{b} \overline{c} ... \overline{x} \overline{y};$$

в) обобщение законов де Моргана, предложенное Шенноном –

$$\overline{f(a, b, c, ..., x, y, .., +)} = f(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, ..., \overline{x}, \overline{y}, +, ..),$$

т. е. инверсия любой функции получается заменой каждой переменной на инверсную с одновременной взаимной заменой символов конъюнкции.

5. Формула (двойную инверсию можно снять).

6. При конъюнкции a и некоторой функции соответствующие переменные в функции заменяются на 1, а инверсные – на 0, а при дизъюнкции – наоборот:

$$\begin{aligned}a * f(a, \bar{a}, b, c, \dots z) &= a * f(1, 0, b, c, \dots z); \\ \bar{a} * f(a, \bar{a}, b, c, \dots z) &= \bar{a} * f(0, 1, b, c, \dots z); \\ a + f(a, \bar{a}, b, c, \dots z) &= a + f(0, 1, b, c, \dots z); \\ \bar{a} + f(a, \bar{a}, b, c, \dots z) &= \bar{a} + f(1, 0, b, c, \dots z).\end{aligned}$$

Из этих тождеств вытекают следующие равносильности, называемые законом поглощения:

$$\begin{aligned}A + ab &= a; & a + ab + ac + \dots + az &= a; \\ a(a + b) &= a; & a(a + b)(a + c) \dots (a + z) &= a.\end{aligned}$$

7. Законы склеивания:

а) полного склеивания

$$\begin{aligned}ab + \bar{a}\bar{b} &= a \leftrightarrow a = a \cdot 1 = a(b + \bar{b}) = ab + a\bar{b}; \\ (a + b)(a + \bar{b}) &= a \leftrightarrow a = a + 0 = a + b\bar{b} = (a + b)(a + \bar{b});\end{aligned}$$

б) неполного склеивания

$$\begin{aligned}ab &= \bar{a}\bar{b} = a + ab + a\bar{b}; \\ (a + b)(a + \bar{b}) &= a(a + b)(a + \bar{b});\end{aligned}$$

в) обобщенного склеивания

$$\begin{aligned}ab + bc + c\bar{a} &= ab + \bar{a}c; \\ (a + b)(b + c)(c + \bar{a}) &= (a + b)(\bar{a} + c).\end{aligned}$$

$$8. (a + b)(\bar{a} + c) = ac + \bar{a}b.$$

Использование рассмотренных законов и тождеств позволяет упрощать сложные логические функции путем равносильных преобразований.

Пример 3.1 Преобразование логической функции:

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= (\bar{a}\bar{b} + cd)(a + bc)(\bar{a}d + bc) + (a + c)(a + b\bar{d})(a + cd) = \\ &= (\bar{a}\bar{b} + cd)(a + bc)(\bar{a}d + bc) + (a + c)[(a + \bar{b})(a + d)][(a + c)(a + d)] = \\ &= (\bar{a}\bar{b} + cd)(a + bc)(\bar{a}d + bc) + (a + c)(a + \bar{b})(a + d) = \\ &= (\bar{a}\bar{b} + cd)(a + bc)(\bar{a}d + bc) + (a + \bar{b}c)(a + d) = \\ &= (\bar{1}b + cd)(0 + bc)(1d + bc) + a + \bar{b}cd = (0 + 1d)bc(d + 1) + a + \bar{b}cd = \\ &= bcd + a + \bar{b}cd = a + cd(b + \bar{b}) = a + cd. \end{aligned}$$

Таким образом, логическая переменная b оказалась в исходной функции фиктивной (значение функции от нее не зависит).

В логических преобразованиях установлен следующий порядок выполнения операций:

- 1) инверсия;
- 2) конъюнкция;
- 3) дизъюнкция;
- 4) другие операции, соответствующие логическим функциям, которые будут рассмотрены ниже.

Скобки в логических выражениях проставляются для выделения отдельных сочетаний или изменения установленного порядка преобразований.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение логической функции, логической переменной.
2. Как выполняется операция инверсии?
3. Как выполняется операция логического умножения или конъюнкция?
4. Как выполняется операция логического сложения или дизъюнкция?
5. Дайте определение основных законов алгебры логики.

3.2. Элементарные логические функции

Поскольку каждая логическая переменная может принимать только два значения, то при числе переменных n полное число возможных наборов конечно и равно $m = 2^n$.

Пример 3.2. При числе переменных $n = 2$ получим число наборов $m = 2^2 = 4$.

Множеством наборов будет $\{00, 01, 10, 11\}$. Множество всех наборов задает *область определения логической функции*.

Каждому набору может соответствовать одно из двух значений логической функции – 0 или 1. Поэтому максимально возможное число различных функций от n аргументов также конечно и равно

$$N = 2^m = 2^{2^n}.$$

При $n = 2$ число различных функций $N = 2^{2 \times 2} = 16$. В табл. 3.1 приведены все возможные функции двух переменных $f(x, y)$, их значения для разных наборов (x, y) и их формулы.

Если разделить табл. 3.1 по линии между функциями f_7 и f_8 , то функции в каждой части оказываются инверсными по отношению к симметричным им функциям из другой части. Например, $f_8 = \overline{f_7}$, $f_9 = \overline{f_6}$ и т. д. Помимо этого, из таблицы видно, что все функции можно еще разбить на несколько разновидностей.

Значения функций f_0 и f_{15} не зависят от значений переменных, т. е. переменные и x являются фиктивными аргументами. Число таких функций, называемых *функциями-константами*, определяется отсутствием действительных аргументов ($n=0$) и равно $N_0 = 2^{2^0} = 2$.

Функция f_0 называется *нулевой*, соответствующий ей логический элемент – *генератор нуля* – показан на рис. 3.4, а. Функция f_{15} называется *единичной*, ей соответствует логический элемент – *генератор единиц* (рис. 3.4, б).

У функции f_3, f_5, f_{10}, f_{12} одна из переменных оказывается фиктивным аргументом. Фактически это функция одной переменной ($n=1$), и число их $N_1 = 2^{2^1} = 4$. Но разновидностей функций одной переменной, существенно зависящих от своего аргумента, всего две, функции f_3, f_5 называется *повторением*, *тавтологией*, а соответствующий логический элемент – *повторитель* (рис. 3.4, в). Функции f_{10}, f_{12} являются рассмотренными ранее функциями инверсии.

Таблица 3.1

X	0	0	1	1	Функция
Y	0	1	0	1	
f_0	0	0	0	0	0
f_1	0	0	0	1	xy
f_2	0	0	1	0	$\overline{xy}$
f_3	0	0	1	1	x
f_4	0	1	0	0	$\overline{xy}$
f_5	0	1	0	1	y
f_6	0	1	1	0	$x \oplus y$
f_7	0	1	1	1	$x + y$
f_8	1	0	0	0	$\overline{x + y}$
f_9	1	0	0	1	$\overline{x \oplus y}$
f_{10}	1	0	1	0	$\overline{y}$
f_{11}	1	0	1	1	$y \rightarrow x$
f_{12}	1	1	0	0	$\overline{x}$
f_{13}	1	1	0	1	$x \rightarrow y$
f_{14}	1	1	1	0	$\overline{xy}$
f_{15}	1	1	1	1	1

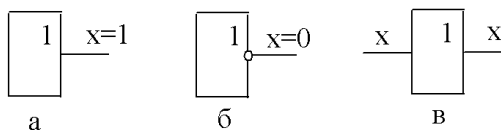


Рис. 3.4

Функции $f_7 = x + y$, $f_1 = xy$ являются также рассмотренным ранее дизъюнкцией и конъюнкцией. С помощью функции инверсии f_{10} (f_{12}) дизъюнкции f_7 и конъюнкции f_1 может быть выражена любая другая логическая функция.

Функция $f_8 = \overline{x + y} = \overline{x} \vee \overline{y} = x \downarrow y$ называется *функцией ИЛИ–НЕ*, а также *функцией Пирса*, или *стрелкой Пирса*. Для нее справедливы соотношения

$$\overline{x + 0} = \overline{x}; \overline{x + 1} = 0; \overline{x + x} = \overline{x}; \overline{x + \overline{x}} = 0.$$

Логический элемент показан на рис. 3.5, а и называется *ИЛИ–НЕ, элемент Пирса*.

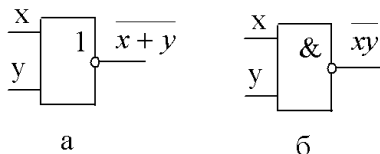


Рис. 3.5

Функция $f_{14} = \overline{xy} = \overline{x \wedge y} = x / y$ называется *функцией И–НЕ*, *функцией Шеффера*, или *штрихом Шеффера*. Имеют место соотношения:

$$\overline{x0} = 1; \overline{x1} = x; \overline{xx} = \overline{x}; \overline{x\overline{x}} = 1.$$

Логический элемент *И–НЕ, элемент Шеффера* приведен на рис. 3.5, б.

Функция $f_6 = x \oplus y$ обозначает сложение по модулю 2. Через основные логические операции может быть выражена в виде

$$f_6 = x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y = (x + y)(\bar{x} + \bar{y}).$$

Как видно из табл. 3.1, $f_6 = 1$ только при противоположных значениях переменных. Поэтому ее называют также *неравнозначностью*. Справедливы соотношения:

$$x \oplus 0 = x; x \oplus x = 0; x \oplus 1 = \bar{x}; x \oplus \bar{x} = 1.$$

Стандартный логический элемент сложения по модулю 2 приведен на рис. 3.6, а. Функция

$$f_9 = \overline{x \oplus y} = \overline{x\bar{y} + \bar{x}y} = (\bar{x} + y)(x + \bar{y}) = xy + \bar{x}\bar{y},$$

принимает значение 1 только при одинаковых значениях x и y . Поэтому ее называют функцией *равнозначности* или *эквивалентности* и обозначают также $\overline{f_9} = x \sim y$.

Справедливы соотношения $x \sim 0 = \bar{x}$; $x \sim 1 = \bar{x}$; $x \sim x = 1$; $x \sim \bar{x} = 0$.

Функции f_9 соответствуют два стандартных логических элемента: сложение по модулю 2 с отрицанием (рис. 3.6, б) и эквивалентность (рис. 3.6, в).

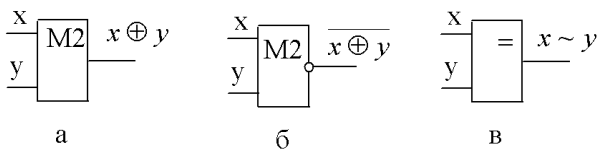


Рис. 3.6

Функция $f_{13} = x \rightarrow y$ (читается «если x , то y ») называется *импликацией*. Как видно из табл. 3.1, $f_{13} = 1$, если $x = 0$ или $y = 1$,

и $f_{13} = 0$ только при $x = 1$ и $y = 0$. Поэтому она может быть представлена в виде $f_{13} = x \rightarrow y = \bar{x} + y$.

Стандартный логический элемент – импликация (рис. 3.7, а).

Инверсная импликации функция

$$f_2 = \overline{x \rightarrow y} = \overline{\bar{x} + y} = x \bar{y}.$$

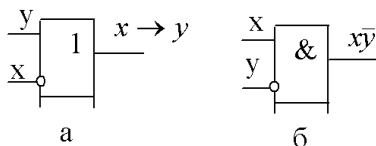


Рис. 3.7

Называется *запретом*, т. к. при $y = 1$ ее значение равно 0 при любых значениях x .

Логический элемент *запрет* показан на рис. 3.7, б.

Функция $f_{11} = y \rightarrow x, f_4 = y \rightarrow x = \bar{x}y$ отличается от функций f_{13}, f_2 лишь порядком размещения входных переменных и не является оригинальным.

Рассмотренные функции одной и двух переменных называются *элементарными логическими функциями*. С их помощью, используя принцип суперпозиции (возможно, многократно), можно построить все логические функции от любого числа переменных.

Принцип суперпозиции заключается в функции, например:

$$f_1(a, b, c, d) = f_1[f_2(a, b), f_3(c, d)].$$

Набор логических функций (операций) считается *полным набором*, если он позволяет представить любую логическую функцию. Таким набором является совокупность функций инверсии, конъюнкции и дизъюнкции. Полный набор может состоять и из одной функции, если он позволяет получить три

основные логические функции. Примером может служить функция И–НЕ (штрих Шеффера).

Действительно,

$$\overline{x} = \overline{xx} = x / x;$$

$$xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{\overline{x/y}} = \overline{(x/y)(x/y)} = (x/y)/(x/y);$$

$$x + y = \overline{\overline{x+y}} = \overline{\overline{xy}} = \overline{\overline{xx}yy} = (x/x)/(y/y).$$

Другим примером полного набора является функция ИЛИ–НЕ (стрелка Пирса), с помощью которой также можно представить

$$\overline{x} = \overline{x+x} = x \downarrow x;$$

$$xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{\overline{x+y}} = \overline{\overline{x+x+y+y}} = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y);$$

$$x + y = \overline{\overline{x+y}} = \overline{\overline{x+y+x+y}} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y).$$

Следовательно, полный набор из функций НЕ, И и ИЛИ обладает некоторой избыточностью. Но он применяется особенно часто, т. к. проще всего позволяет перейти от словесного выражения к логической функции. Вместе с тем элементы И–НЕ и ИЛИ–НЕ являются базовыми элементами серий интегральных микросхем.

Поэтому при проектировании логических устройств приходится переводить логические выражения в базис ИЛИ–НЕ или И–НЕ. При этом используют, как было показано выше, законы де Моргана и свойство двойного отрицания.

Пример 3.3. Представить функцию

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(\overline{x_4 + x_2x_3}) + \overline{\overline{x_3x_4}}(x_1 + x_2).$$

в базисе И–НЕ. Заменив выражения в скобках по закону де Моргана и применив двойную инверсию, получим

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_4 x_2 x_3 + x_3 x_4 x_1 x_2 = x_1 x_4 x_2 x_3 x_3 x_4 x_1 x_2 = \\ &= x_1 x_4 x_4 x_2 x_2 x_3 x_3 x_3 x_4 x_4 x_1 x_1 x_2 x_2. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы

1. Как формируются элементарные логические функции двух переменных?
2. Назовите основные логические функции и соответствующие им логические элементы.
3. Какие логические функции образуют полные наборы?

3.3. Нормальные и совершенные нормальные формы логических функций

Конъюнкция (дизъюнкция), в которой каждая переменная с инверсией или без встречается не более одного раза, называется *элементарной*. Число входящих в нее переменных определяет *ранг* конъюнкции (дизъюнкции).

Дизъюнкция любого числа элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ), например:

$$f = x + \bar{x}yz + xy + \bar{x}\bar{y}z.$$

Конъюнкция любого числа элементарных дизъюнкций называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ). Например:

$$f = a(a + b)(b + c)(\bar{a} + b + \bar{c}).$$

Для каждой функции может существовать несколько равносильных ДНФ (или КНФ), например:

$$f = a + \bar{a}b = a + b = a + \bar{a}b + ab.$$

ДНФ (КНФ), содержащая наименьшее число переменных по сравнению с другими равносильными ДНФ (КНФ), называется *минимальной*.

ДНФ логической функции, состоящая из элементарных конъюнкций одинакового ранга, называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ). В СДНФ каждая элементарная конъюнкция включает все переменные с инверсиями или без, причем одинаковых конъюнкций нет, например:

$$f = \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}.$$

От любой ДНФ можно перейти к СДНФ. Для этого необходимо:

- вести недостающие переменные в конъюнкции младших рангов умножением их на равносильность вида формула $(x - \text{недостающая переменная})$;

- раскрыть скобки и избавиться от повторяющихся конъюнкций в соответствии с правилом $x + x = x$.

Пример 3.4. Для функции $f = x\bar{y}x + xz$ составить СДНФ

$$f = x\bar{y}x + xz(y + \bar{y}) = x\bar{y}z + xyz + x\bar{y}\bar{z} = x\bar{y}z + xyz.$$

СДНФ обладает следующими свойствами:

- если при каком-то наборе $f = 1$, то СДНФ только одна из элементарных конъюнкций принимает значение единицы;

- если для данного набора $f = 0$, то в СДНФ ни один из членов не будет равен единице.

Элементарные конъюнкции, входящие в СДНФ, называют *минтермами*, или *конституентами единицы*, поскольку каждая из них соответствует одному из наборов, при котором $f = 1$. Таким образом, СДНФ есть дизъюнкция конституентов единицы тех наборов переменных, на которых данная функция равна единице. Из этого следует, что по заданной таблице истинности может быть составлена СДНФ функции, содержащая столько членов, сколько единичных значений принимает функция.

Таблица 3.2

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Правило построения конституент единицы формируется следующим образом: если значение переменной в наборе равно 1, то она входит в конституент без инверсии, если 0 - то с инверсией.

Пример 3.5. Построить СДНФ функции, таблица истинности которой имеет вид (табл. 3.2):

$$f = \overline{\overline{x}}\overline{y}z + \overline{\overline{x}}\overline{y}z + \overline{x}\overline{y}z + \overline{x}yz + xyz.$$

По аналогии с дизъюнктивными формами КНФ логической функции, состоящая из элементарных дизъюнкций одинакового ранга, называется совершенной конъюнктивной нормальной формой. (СКНФ).

Свойства СКНФ:

- если для данного набора $f = 0$, то в СКНФ только одна из элементарных конъюнкций принимает нулевое значение;
- если для данного набора $f = 1$, то в СКНФ ни один из членов не принимает нулевого значения.

СКНФ является конъюнкцией *макстермов*, или *конституентов нуля* тех наборов, на которых данная равна нулю. Правило построения конституентов нуля: каждая переменная входит в конституент без инверсии, если значение ее в данном наборе равно 0, или с инверсией, если значение ее равно 1.

Пример 3.6. Составить СКНФ функции, заданной в примере 3.5. Функция принимает нулевое значение на трех наборах. Следовательно, в СКНФ входят три конституенты нуля, т. е.

$$f = (x + y + z)(x + \overline{y} + z)(x + \overline{y} + \overline{z}).$$

СДНФ и СКНФ, представляющие собой суперпозицию минтермов или макстермов, называют *каноническими формами логических функций*. Для равносильных функций их СДНФ (СКНФ) совпадают. Проверка такого совпадения является одним из методов доказательства равносильности функций.

3.3.1. Минимизация логических функций

Достаточно простой метод составления формулы по таблице истинности функции приводит к громоздким выражениям. Процесс упрощения в целях получения минимальной нормальной формы, называемой *минимизацией*, основан на использовании законов распределительного, склеивания, поглощения и др. Из множеств существующих методов минимизации рассмотрим два.

Процедура упрощения функции, заданной в виде СДНФ, сводится к следующему.

1. Для каждой из возможных пар соседних конъюнкций (отличающихся только значением одной переменной, например $xyz, x\bar{y}z$) применяют операцию полного склеивания (например $xyz + x\bar{y}z = xy$). Полученные в результате склеивания конъюнкции называются *импликантами*. При составлении пар соседних конъюнкций каждая из них может учитываться неоднократно. Операции полного склеивания с промежуточным приведением подобных членов повторяются до тех пор, пока не останется соседних конъюнкций. Полученное таким образом выражение называется сокращенной нормальной формой (НФ), а входящие в нее конъюнкции – *простыми импликантами*. Каждая простая импликанта является частью нескольких конституентов единицы, т.е «покрывает» их.

2. Применяя к сокращенной НФ операцию обобщенного склеивания (например, $xy + yz + xz = xy + xz$), исключают из нее данные импликанты. Полученная в результате таких последовательных преобразований формула, не допускающая дальнейших склеиваний, называется *тупиковой формой*. У одной логической функции может быть несколько тупиковых форм. Тупиковая форма наименьшей длины *минимальной формой функции*.

Пример 3.7. Минимизировать функцию, полученную в примере 3.5.

$$\begin{aligned}
 f &= \overline{x}yz + x\overline{y}z + x\overline{y}\overline{z} + x\overline{y}z + xyz = \\
 &= (\overline{x}yz + x\overline{y}z) + (x\overline{y}\overline{z} + x\overline{y}z) + (x\overline{y}z + xyz) + \\
 &+ (x\overline{y}z + x\overline{y}\overline{z}) + (x\overline{y}z + xyz) = \overline{y}z + (x\overline{z} + xz) + \\
 &+ (x\overline{y} + xy) = \overline{y}z + x + x = x + \overline{y}z.
 \end{aligned}$$

Для исходной формулы функции в виде СКНФ после выполнения операций полного склеивания вида $(x+y)(x+\overline{y})$ раскрывают скобки, пользуясь распределительным законом, приводят подобные члены и применяют операцию поглощения. Полученную ДНФ, если требуется, минимизирует, как было указано выше,

Пример 3.8. Минимизировать функцию из примера 3.6.

$$\begin{aligned}
 f &= (x + y + z)(x + \overline{y} + z)(x + \overline{y} + \overline{z}) = \\
 &= [(x + y + z)(x + \overline{y} + z)][(x + \overline{y} + \overline{z})(x + \overline{y} + z)] = \\
 &= (x + z)(x + \overline{y}) = x + \overline{y}z.
 \end{aligned}$$

Другой пример минимизации:

$$\begin{aligned}
 f &= (x + y + z)[(x + \overline{y} + z)(x + \overline{y} + \overline{z})] = \\
 &= [x + (y + z)](x + \overline{y}) = x + (y + z)\overline{y} = x + \overline{y}z.
 \end{aligned}$$

В аналогичном методе Квайна сокращенная НФ функции получается последовательным применением операций неполного склеивания вида $x\overline{y} + x\overline{y} = x\overline{y} + x\overline{y} + y$ поглощения $y + x\overline{y} = y + x\overline{y} = y$. Лишние простые импликанты отбрасываются после составления импликантной матрицы по результатам анализа покрытия импликантами конститuentов исходной СДНФ. Метод Квайна был усовершенствован Мак-Класки, предложившим заменить исходные конъюнкции двоичными числами наборов и вести сравнение для отыскания соседних конъюнкций с помощью ранжированных таблиц.

Контрольные вопросы

1. Как формируются нормальные дизъюнктивные и конъюнктивные формы?
2. Как формируются совершенные нормальные дизъюнктивные и конъюнктивные формы?
3. Как минимизируются логические функции?

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЦ

4.1. Введение в теорию матриц

Прямоугольной матрицей называется упорядоченная совокупность вещественных или комплексных чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей n строк и m столбцов

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

В этом определении важно подчеркнуть, что матрица – это не просто таблица. При определенном заданном расположении ее элементов она является математическим объектом и понимается как единое целое, т. к. установлены определенные математические операции над ее элементами (сложение, умножение и другие действия).

Элементы матрицы всегда имеют двойной индекс a_{ij} (i -строка, j -столбец). Если число строк n равно числу столбцов, матрица является *квадратной*. Число n определяет порядок матрицы. Матрица, содержащая n строк и m столбцов, имеет размерность $(n \times m)$. Квадратная матрица имеет размерность $(n \times n)$.

Элементы, имеющие одинаковые индексы, $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, расположены на главной диагонали.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *строкой* или *вектор-строкой*; матрица, состоящая из одного столбца – *столбцом* или *вектор-столбцом*. Вектор-строка имеет размерность $1 \times m$; вектор-столбец – $n \times 1$.

Матрица называется *диагональной*, если на главной диагонали стоят элементы, отличные от нуля:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Диагональная матрица, у которой все числа, расположенные на главной диагонали, равны между собой, называется *скалярной*.

Матрица называется *единичной*, если все числа, стоящие на главной диагонали, равны 1.

Матрица называется *треугольной*, если все ее элементы под главной диагональю или над ней равны нулю. Верхняя и нижняя треугольные формы имеет вид соответственно

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается через 0.

Матрицы равны друг другу, если имеют одну и ту же размерность и их соответствующие элементы равны между собой.

Если повернуть матрицу вокруг главной диагонали, это приведет к тому, что строки и столбцы поменяются местами. Эта операция «зеркального» отражения называется *транспонированием* и обозначается A^T . При транспонировании неквадратных матриц их следует преобразовать в квадратные.

При транспонировании имеют место свойства:

$$(A^T)^T = A; (A+B)^T = A^T + B^T; (AB)^T = B^T A^T; \\ \det A^T = \det A.$$

Если матрица не меняет своего значения при транспонировании $A = A^T$, она симметрична относительно главной диагонали и называется *симметрической*.

Произведение $AA^T = C$ представляет собой симметрическую матрицу, так как

$$C^T = (AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T = C.$$

Если матрица A при транспонировании меняет знак

$$A = -A^T,$$

она называется *кососимметрической*. У кососимметрической матрицы главная диагональ состоит из нулевых элементов.

Матрица A^* называется *эрмитовой*, если она получается транспонированием и элементы ее комплексно сопряжены к элементам матрицы A :

$$A = [A^*]^T.$$

Заметим, что симметрическая матрица с вещественными элементами является эрмитовой. Матрица A , для которой

$$A = -[A^*]^T,$$

называется *косоэрмитовой*. Симметрическими и эрмитовыми матрицами могут быть только квадратные матрицы.

С понятием матрицы тесно связано понятие *определителя*. Разница состоит в том, что матрица – это упорядоченная система чисел, над которыми можно выполнять математические операции, а ее определитель – это одно число, которое находится по известным правилам. Определитель обозначается $\det A$ или $|A|$.

Любой определитель, строки и столбцы которого «укладываются» в строки и столбцы матрицы, называется минором этой матрицы. Например, минор порядка k матрицы A есть определитель k -го порядка, составленный из элементов,

находящихся на пересечении некоторых k -строк и k -столбцов матрицы A в их естественном расположении.

Рангом матрицы A называется максимальный порядок отличных от нуля миноров матрицы. Ранг отражает максимальное число линейно независимых строк или столбцов матрицы.

Если матрица имеет определитель, равный нулю, она называется *особенной* или *вырожденной*.

Всякая неособенная квадратная матрица A имеет свою *обратную* A^{-1} . Матрица является обратной, если

$$AA^{-1} = E,$$

где E – единичная матрица.

Обратная матрица является единственной для заданной матрицы. Из этого следует, что $(A^{-1})^{-1} = A$. Очевидно также, что $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Матрица называется *ортогональной*, если $A^T A = E$. Ортогональная матрица всегда неособенная, т. к. $A = \pm 1$.

Для ортогональной матрицы имеют место соотношения:

$$A^{-1} = A^T; AA^T = E.$$

Матрица A называется *унитарной*, если $A^* A = E$, где A^* - транспонированная комплексно-сопряженная матрица. Унитарная матрица всегда неособенная. Для нее справедливы соотношения $A^* = A^{-1}$, $AA^* = E$. Заметим, что вещественная ортогональная матрица унитарна.

Обратная матрица может быть получена, если каждый элемент транспонированной матрицы алгебраических дополнений разделить на свой определитель Δ :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{bmatrix}.$$

Вычисление алгебраических дополнений при высоких порядках связано с большим объемом вычислений и нецелесообразно даже при постановке задачи на ЦВМ. При решении задач на цифровых вычислительных машинах применяются иные способы обращения, излагаемые в специальных курсах по вычислительной математике.

Существуют, однако, классы матриц, которые легко обращаются. К такому классу, например, относятся диагональные матрицы.

Когда матрицы складываются, вычитаются или умножаются на скаляр они подчиняются обычным законам элементарной алгебры. Исключение составляет перемножение матриц, которое осуществляется по специальным правилам линейных алгебраических преобразований.

4.1.1. Произведение матриц

Под произведением двух матриц A и B понимается матрица $C = AB$, элементы которой определяются путем умножения i -й строки первой матрицы на j -й столбец второй матрицы и полученные произведения складываются. Таким образом,

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Процесс формирования произведения для быстрого запоминания можно облечь в следующую схему. Для иллюстрации рассмотрим перемножение двух матриц размерности 3×3 .

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix},$$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}.$$

Первая строка умножается на первый столбец. Результат перемножения складывается. Образуется элемент матрицы c_{11} .

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}.$$

Вторая строка умножается на первый столбец. Результат перемножения складывается. Образуется второй элемент первого столбца c_{21} .

$$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}.$$

Третья строка умножается на первый столбец. Результат умножения складывается, образуя последний элемент c_{31} первого столбца.

Операции по формированию элементов второго и третьего столбцов выполняются аналогично.

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}, \quad c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32};$$

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}, \quad c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33};$$

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}, \quad c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}.$$

Произведение матриц A и B имеет смысл только в предположении, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . По этой причине произведение прямоугольной матрицы на вектор-столбец есть вектор-столбец, произведение вектор-строки на вектор-столбец есть матрица, состоящая из одного элемента.

Обычная скалярная алгебра подчиняется шести законам:

1. Закон коммутативности сложения:

$$a + b = b + a .$$

2. Закон ассоциативности сложения:

$$(a + b) + c = a + (b + c) .$$

3. Закон коммутативности умножения:

$$ab = ba .$$

4) Закон ассоциативности умножения:

$$(ab)c = a(bc) .$$

5. Закон дистрибутивности умножения:

$$(a + b)c = ac + bc , c(a + b) = ca + cb ;$$

6. Неразложимость нуля на множители, отличные от нуля: если $ab = 0$, то либо $a = 0$, либо $b = 0$, либо $a = b = 0$.

В операциях с матрицами законы 1, 2, 4 и 5 выполняются всегда. Однако законы 3 и 6 не соблюдаются. Закон 3 нарушается в силу того, что при перемножении матриц строки первой матрицы комбинируются со столбцами второй матрицы по изложенному выше правилу несимметрично. Такое несимметричное «перемешивание» элементов перемножаемых матриц между собой приводит к тому, что в общем случае

$$AB \neq BA .$$

В тех случаях, когда операция умножения коммутативна, т. е. $AB = BA$, матрицы называются *коммутативными* (иногда *коммутирующими*) или *перестановочными*. Например, диагональные матрицы при умножении всегда коммутируют между собой, причем произведение диагональных матриц, в свою очередь, также является диагональной матрицей.

Скалярная матрица коммутирует с любой квадратной матрицей одинакового порядка. Это же свойство относится и к единичной матрице E . Она выполняет такую же роль, как единица среди обычных скалярных величин:

$$AE = EA = A, E^k = E.$$

Кроме того, всегда соблюдается равенство

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Каждая матрица коммутирует сама с собой и со своей произвольной целой положительной степенью.

Если производится умножение матрицы A слева на некоторую диагональную матрицу D , это соответствует операциям со строками, если умножение выполняется справа – со столбцами.

Пример 4.1. Умножение матрицы A слева на диагональную матрицу D эквивалентно умножению каждой строки матрицы A на соответствующий диагональный элемент:

$$DA = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -6 & 2 & -4 \\ -12 & -15 & 18 \end{bmatrix}.$$

Пример 4.2. Умножение справа на D сводится к умножению элементов каждого столбца на соответствующий элемент диагонали:

$$AD = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -9 \\ 3 & 2 & 6 \\ -4 & 10 & 18 \end{bmatrix}.$$

Пример 4.3. Коммутируемость диагональных матриц:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}.$$

Скалярная матрица (матрица, у которой диагональные элементы равны между собой) равна произведению единичной матрицы на скалярную величину. В качестве примера перемножим две скалярные матрицы:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -6E$$

Справедливо следующее правило транспонирования произведения. Транспонированное произведение матриц $(AB)^T$ равно произведению двух транспонированных матриц B^T и A^T , перемноженных в обратной последовательности:

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Произведение любой матрицы на свою транспонированную является симметрической матрицей. Например,

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 15 \\ 15 & 59 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, если A – симметрическая матрица, то матрица $C^T A C$ – также симметрическая.

Произведение обратных матриц подчиняется тому же свойству перестановки сомножителей, что и произведение транспонированных матриц, а именно

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей перемножаемых матриц:

$$|AB| = |A||B|.$$

При умножении матрицы ранга r на неособенную справа или слева ранг произведения остается равным r .

Система n алгебраических уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned} \tag{4.1}$$

отражает зависимость между переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$. Эта зависимость определяется линейным преобразованием переменных x в переменные y с помощью элементов матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Система (4.1) может быть записана в виде одного матричного уравнения

$$Ax = y, \quad (4.2)$$

где x – вектор-столбец, элементами которого являются значения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$; y – вектор-столбец свободных членов.

Уравнение (4.2) можно рассматривать как преобразование заданного вектора x в новый вектор y посредством матрицы A . Иначе говоря, матрица A ставит в соответствие данному вектору x новый вектор y .

Если матрица A неособенная, то решение системы сразу получается путем умножения (4.2) слева на A^{-1} :

$$x = A^{-1} \cdot y \quad (4.3)$$

Формула (4.3) представляет собой матричный вариант известных формул Крамера.

Контрольные вопросы

1. Какая таблица называется матрицей?
2. Какие виды матриц существуют?
3. Как вычисляется обратная матрица?
4. Как перемножаются матрицы?
5. Как при помощи матриц записывается система алгебраических уравнений?

4.2. Треугольные матрицы и характеристическое уравнение

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные ниже или выше главной диагонали, равны нулю, называется треугольной. Треугольная матрица может быть верхнего и нижнего строения. Верхняя и нижняя формы имеют соответственно вид

$$A^{\Delta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A_{\Delta} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Треугольные матрицы обладают рядом важных в практическом отношении свойств:

1. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов:

$$|A_{\Delta}| = \det A_{\Delta} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Следовательно, треугольная матрица является неособенной только тогда, когда все элементы ее главной диагонали отличны от нуля.

2. Сумма и произведение треугольных матриц одинакового строения есть также треугольная матрица того же строения.

3. Неособенная треугольная матрица легко обращается, и ее обратная матрица снова имеет треугольную структуру того же строения.

4. Всякая неособенная матрица при помощи элементарных преобразований только над строками или только над столбцами может быть приведена к треугольной матрице. В качестве примера рассмотрим известную в теории устойчивости матрицу Гурвица

$$G_{n-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Для перехода к верхнему треугольному виду сделаем следующие элементарные преобразования. Из каждого элемента второй строки вычтем стоящий над ним элемент первой строки, предварительно умноженный на $c_1 = a_0/a_1$. Вместо строки с элементами $a_0, a_2, a_4, \dots$, получим строку с элементами $0, b_2, b_4, \dots$, где $b_2 = a_2 - c_1 a_3$, $b_4 = a_4 - c_1 a_5$, $b_6 = a_6 - c_1 a_7$, ... и т. д.

Выполним аналогичные операции в остальных ниже-лежащих строках. Затем вычтем из каждого элемента третьей строки преобразованной матрицы стоящие над ней элементы строки, умноженные на $c_2 = a_1/a_2$, и повторим аналогичные операции в остальных строках. Продолжим процесс по этой процедуре до тех пор, пока на m -м шаге не получим верхнюю треугольную матрицу

$$\tilde{G}_{n-1} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} & \tilde{a}_{15} & \cdots \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} & \tilde{a}_{25} & \cdots \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} & \tilde{a}_{35} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{a}_{44} & \tilde{a}_{45} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{n-1,n-1} \end{bmatrix}.$$

Такие преобразования по существу эквивалентны умножению матрицы справа (или слева) на некоторую другую вспомогательную матрицу.

Определитель матрицы Гурвица

$$|\tilde{G}_{n-1}| = \tilde{a}_{11} \cdot \tilde{a}_{22} \cdot \dots \cdot \tilde{a}_{n-1,n-1}.$$

Существует теорема о разложении любой квадратной матрицы в произведение двух треугольных. Согласно этой теореме, всякая квадратная матрица может быть представлена в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

при условии, что ее диагональные миноры отличны от нуля:

$$a_{11} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, |A| \neq 0.$$

Это разложение является единственным, если зафиксировать диагональные элементы одной из треугольных матриц (например, положить их равными единице). Разложение любой квадратной матрицы в произведение двух треугольных с предписанными диагональными элементами широко используется в вычислительных методах при решении задач с помощью ЭВМ.

Однозначное представление матрицы в виде произведения двух треугольных может быть обобщено на клеточные матрицы. В таких матрицах сами элементы являются матрицами. При этом матрица может быть разложена в произведение нижней и верхней квазитреугольных матриц.

Определитель квазитреугольной матрицы равен произведению ее диагональных клеток.

В отличие от диагональных матриц операция умножения треугольных матриц в общем случае не коммутативна.

В вычислительных методах теории управления существенную роль играют не только треугольные, но и так называемые почти треугольные матрицы. Многие методы используют разложение матрицы в виде произведения двух матриц, одна из которых имеет треугольное строение. Матрица A называется правой (левой) почти треугольной или матрицей Хессенберга, если для ее элементов a_{ij} выполняются соотношения

$$a_{ij} = 0; i > j + 1; (j > i + 1).$$

Например, матрица Хессенберга правой почти треугольной формы размерности (4×4) имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}.$$

Отметим полезные особенности рассматриваемых матриц, которые используются в вычислительных методах:

а) сумма почти треугольных матриц одинакового строения будет треугольной матрицей того же строения, а произведение – нет;

б) построение характеристического полинома почти треугольных матриц экономично, т. к. требует гораздо меньшего объема вычислений, чем при произвольной форме матрицы. Число операций умножений составляет $1/3(n^3 + 3n^2 - n)$, сложений – $1/2(n^2 + n)$;

в) почти треугольная матрица может быть разложена в произведение двух треугольных, причем в разложении одна из матриц будет иметь более простую структуру, а именно, будет двухдиагональной.

В современных инженерных методах, заложенных в системы автоматизированного проектирования, широко используется мультипликативное представление матриц, например, QR-представление. Его сущность состоит в том, что любую квадратную матрицу A можно представить в виде произведения ортогональной и почти треугольной форм

$$A = QR, \text{ или } A = QL, \quad (4.4)$$

где Q – ортогональная матрица; R – правая (верхняя) треугольная форма; L – левая (нижняя) треугольная форма матрицы.

Представление (4.4) называется QR-разложением (в случае нижней треугольной матрицы QL-разложением) и для матрицы A является единственным.

QR- и QL-алгоритмы принципиально мало различаются. Их использование зависит от того, как расположены элементы матрицы. Если они сосредоточены в нижнем правом углу, эффективнее использовать QL-алгоритм. Если элементы матрицы сосредоточены в левой верхней части, то целесообразнее использовать QR-алгоритм. При правильной реализации на ЭВМ ошибки округления во многих случаях не оказывают большого влияния на точность вычисления.

$$y \equiv Ax,$$

может рассматриваться как порождение нового вектора y путем умножения матрицы A на вектор x . Если полученный таким образом вектор y совпадает в векторном пространстве по направлению с первоначальным вектором x , то составляющие вектора должны быть пропорциональны составляющим вектора x , т. е.

$$y = Ax = \lambda x. \quad (4.5)$$

Число λ в этом случае является коэффициентом пропорциональности.

Запишем систему (4.5) в развернутой форме

[illegible]

Перейдем к однородной системе, объединяя члены, расположенные в правой и левой частях уравнения (4.6):

[illegible]

В матричном виде

$$(A - \lambda E)x = 0. \quad (4.8)$$

Матрица $(A - \lambda E)$ отличается от A тем, что по диагонали вычитается число λ .

Система (4.7) имеет нетривиальное, или ненулевое, решение (т. е. такое решение, в котором хотя бы одно из чисел x_i , отличается от нуля) лишь при условии, что определитель равен нулю, а именно

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.9)$$

Перепишем уравнение (4.9) сокращенно в матричном виде

$$|A - \lambda E| = 0. \quad (4.10)$$

Определитель $|A - \lambda E|$ называется характеристическим.

Разворачивая определитель $|A - \lambda E|$ по известным правилам, получим полином n -й степени относительно числа λ . Приравняв его к нулю, получим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (4.11)$$

Корни характеристического уравнения (4.11) называются *собственными* или *характеристическими* числами матрицы. Совокупность всех собственных чисел называется *спектром* матрицы A .

4.2.2. Связь между собственными числами и элементами матрицы. След матрицы

Рассмотрим две простые закономерности, связывающие собственные числа и элементы матрицы A . Они вытекают из известной теоремы Виета. Положив в уравнении (4.11) $\lambda = 0$, получим

$$a_n = |A|. \quad (4.12)$$

Следовательно, свободный член характеристического уравнения равен определителю матрицы A .

Запишем характеристический полином в виде произведения сомножителей, полагая все собственные числа λ_i различными:

$$|A - \lambda E| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n). \quad (4.13)$$

При $\lambda = 0$ получим

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

Следовательно, определитель матрицы A равен произведению всех собственных чисел λ_i . Из этого свойства следует, что если хотя бы одно из λ_i равно нулю, матрица A – особенная.

Уравнение в форме (4.13) дает возможность выразить коэффициенты при различных степенях λ через собственные числа. Например, коэффициент при λ^{n-1} равен

$$a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n. \quad (4.14)$$

С другой стороны, раскрывая определитель $|A - \lambda E|$, найдем, что коэффициент при λ^{n-1} равен сумме диагональных элементов:

$$a_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}. \quad (4.15)$$

Таким образом, сумма диагональных элементов матрицы равна сумме ее собственных чисел.

Ввиду важности этих свойств сумме диагональных элементов присвоено особое название «*след матрицы*». След матрицы A обозначается $Sp A$ или $tr A$. Таким образом,

$$Sp A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (4.16)$$

Справедливы следующие соотношения:

$$SpA = SpA^T, \quad Sp(\bar{b}A) = \bar{b}SpA, \quad Sp(A+B) = SpA + SpB, \\ Sp(AB) = Sp(BA).$$

4.2.3. Собственные векторы

Уравнение (4.5) имеет своим решением ненулевой вектор λx только в том случае, если множитель пропорциональности λ равен хотя бы одному из собственных чисел матрицы A .

Каждая матрица размерности $(n \times n)$ всегда имеет ровно n собственных чисел. Некоторые из этих собственных чисел могут быть кратными (совпадающими). Для каждого возможного значения $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ может быть найдено решение однородной системы (4.8). Подставляя значение $\lambda = \lambda_1$ в уравнение (4.8), получим вектор решения

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Если подставить $\lambda = \lambda_2$ получим второй вектор решения

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix},$$

и т. д., вплоть до $\lambda = \lambda_n$. Последний вектор решения имеет вид

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_n^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Полученные $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ векторов называются собственными векторами матрицы A . Таким образом, каждое собственное число порождает свой собственный вектор. Если собственные числа вещественной матрицы комплексны, координаты собственного вектора также будут комплексны.

Так как собственные векторы являются решениями однородной системы, то каждое решение определено лишь с точностью до произвольного ненулевого множителя, т. е. умножив решение на скалярный множитель, опять получим решение.

При умножении собственного вектора на любое произвольное, не равное нулю число, изменяется лишь его длина, но направление в пространстве остается тем же. Таким образом, собственные векторы, образующие систему n -решений в n -мерном пространстве, однозначно определены лишь по направлению, но их длины (модули) могут быть произвольны.

Если собственные числа матрицы различны, то собственные векторы, порождаемые ими, линейно независимы. Система линейно независимых векторов образует базис пространства R^n .

Примером базиса является совокупность векторов

$$\begin{aligned} l_1 &= [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]; \\ l_2 &= [0 \quad 1 \quad \dots \quad 0]; \\ &\dots\dots\dots \\ l_n &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]. \end{aligned}$$

Любой вектор $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ может быть представлен в базисе из собственных векторов. В частности,

$$x = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_n x_n.$$

Число векторов, образующих базис, совпадает с размерностью пространства.

Если имеются кратные собственные числа, то вопрос о существовании линейно независимых векторов остается открытым. Им могут соответствовать линейно независимые собственные векторы, но могут и не соответствовать.

Отметим некоторые свойства симметрических матриц.

1. Собственные числа симметрической матрицы вещественны. Это относится также к тому случаю, когда элементы матрицы комплексно-сопряженные.

2. Собственные векторы симметрической матрицы ортогональны. Это значит, что их скалярное произведение равно нулю.

Если симметрическая матрица A имеет n различных собственных чисел $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ то соответствующие собственные векторы $k_i x_i$ образуют в n -мерном пространстве ортогональный базис.

Пример 4.4. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Собственные числа матрицы $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$.

Найдем собственный вектор, порождаемый $\lambda_1 = -1$:

$$(A - \lambda_1 E)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 - (-1) & -2 \\ 1 & -(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Одно из решений уравнения $-2x_1 + (-2)x_2 = 0$,

$$x_1 = 2, x_2 = -2.$$

Следовательно, собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = -1$,

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Однако он не единственный. Решению уравнения $x_1 + x_2 = 0$ удовлетворяет $x_1 = 1, x_2 = -1$. Поэтому собственный вектор

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

также способствует собственному числу $\lambda_1 = -1$.

Найдем собственный вектор, порождаемый $\lambda_1 = -2$;

$$(A - \lambda_2 E)x = 0;$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для решения уравнения $x_1 + 2x_2 = 0$ положим $x_{11} = 2$, $x_{21} = -1$. Собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = -2$, будет

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Убедимся, что вектор $x^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ также удовлетворяет $\lambda_1 = -2$. Эти векторы линейно независимы, следовательно, образуют базис пространства.

Пример 4.5. Рассмотрим симметрическую матрицу

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, |A - \lambda E| = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4.$$

Собственные векторы

$$(A - \lambda E)x = 0, \begin{bmatrix} -3 - \lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{При } \lambda_1 = 1, \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{При } \lambda_2 = -4, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Собственные векторы образуют ортогональный базис. Действительно, их скалярное произведение равно нулю:

$$\langle x^{(1)} \cdot x^{(2)} \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 2 - 2 = 0.$$

Контрольные вопросы

1. Какая матрица называется треугольной?
2. Приведите примеры треугольных матриц.
3. Как определяется характеристическое уравнение матрицы?
4. Как определяются собственные вектора матрицы?

4.3. Теорема Кели-Гамильтона и ее применение

Эта теорема имеет важное теоретическое значение и широко применяется в прикладных методах теории управления.

Теорема Кели-Гамильтона утверждает, что каждая матрица тождественно удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Пусть характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$f(\lambda) = |A - \lambda E| = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (4.17)$$

Тогда, по определению, справедливо тождество

$$f(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n E = O, \quad (4.18)$$

где O – нулевая матрица.

Соотношения (4.17) и (4.18) имеют простой смысл; любая квадратная матрица A , подставленная вместо собственных чисел λ_i в (4.17) «аннулирует» свое характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$, т. е. тождественно его удовлетворяет, аналогично тому, как каждый корень λ_i удовлетворяет уравнению (4.17). В этом смысле можно сказать, что каждая матрица является корнем своего характеристического уравнения.

В более полных руководствах приводятся различные варианты доказательств этого принципиального результата. Следует отметить, что теорема Кели-Гамильтона распространяется на любые квадратные матрицы и не накладывает никаких ограничений на природу собственных чисел. Следовательно, теорема справедлива и для матриц с кратными собственными числами.

Можно показать, что полином, который «аннулируется» подстановкой матрицы A , не единственный, ибо если $f(\lambda)$ обладает этим свойством, то им обладает и всякий полином, делящийся на $f(\lambda)$. Полином наименьшей степени, обладающий тем свойством, что матрица A является его «корнем», называется минимальным полиномом матрицы.

Можно установить, что характеристический полином всегда делится на минимальный полином. Более того, любой полином, обладающий «аннулирующим» свойством, т. е. удовлетворяющий требованию $f(\lambda) = 0$, делится на минимальный.

Кратное собственное число соответствует вырожденной матрице и ее характеристический полином является минимальным полиномом. Для любой матрицы ее минимальный многочлен единственен. Если все собственные числа λ_i матрицы A различны, то ее характеристический и минимальный многочлены совпадают.

Рассмотрим пример.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 15\lambda - 61 = 0.$$

Согласно теореме Кели-Гамильтона,

$$A^3 + 5A^2 + 15A - 61E = 0.$$

Подставив в матричное уравнение квадрат и куб матрицы, получим

$$\begin{bmatrix} 31 & -35 & -15 \\ -40 & 61 & 150 \\ 30 & -65 & 191 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 5 & 60 \\ -20 & 75 & -240 \\ -60 & 100 & -115 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 30 & -45 \\ 60 & -75 & 90 \\ 30 & -45 & -15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 61 & 0 & 0 \\ 0 & 61 & 0 \\ 0 & 0 & 61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим некоторые полезные применения тождества Кели-Гамильтона:

1. Вычисление целых положительных степеней матрицы.

Из равенства $f(A) = O$ следуют равенства $Af(A) = O$, и $A^2 f(A) = O$. Это дает возможность любую положительную степень матрицы A размерности $(n \times n)$ линейно выразить через $n-1$ степеней и матрицу E .

Пример 4.6. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

имеет характеристическое уравнение $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

В силу соотношения Кели-Гамильтона

$$A^3 - 2A^2 - 5A + 6E = 0,$$

Откуда

$$A^3 = 2A^2 + 5A - 6E = 0;$$

$$\begin{aligned} A^4 &= 2A^3 + 5A^2 - 6A = 2(2A^2 + 5A - 6E) + 5A^2 - 6A = \\ &= 9A^2 + 4A - 12E \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} A^5 &= 2A^4 + 5A^3 - 6A^2 = 2(9A^2 + 4A - 12E) + 5A^3 - 6A^2 = \\ &= 22A^2 + 33A - 54E \end{aligned}.$$

2. Вычисление отрицательных степеней матрицы.

Если матрица A неособенная, то аналогично вышеизложенному можно получить отрицательные степени матрицы A и, в частности, построить обратную матрицу A^{-1} .

Пример 4.7. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В силу соотношения Кели - Гамильтона имеем

$$f(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

$$f(A) = A^2 + 3A + 2E = 0.$$

Из последнего уравнения можно написать

$$A + 3E + 2A^{-1} = 0,$$

откуда следует

$$A^{-1} = -1/2 A - 3/2 E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Пример 4.8. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение ее имеет вид

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

В силу тождества Кели-Гамильтона можно написать

$$f(A) = A^3 - 2A^2 - 5A + 6E = 0.$$

Из этого соотношения легко получить отрицательные степени:

$$A^{-1}A^3 - 2A^{-1}A^2 - 5A^{-1}A + 6A^{-1} = 0;$$

$$6A^{-1} = -A^2 + 2A + 5E;$$

$$36A^{-2} = -6A + 12E + 30A^{-1} = -5A^2 + 4A + 37E.$$

3. Любой матричный полином n -го порядка можно выразить через $n-1$ степеней матрицы A и единичную матрицу E . Это означает, что любой полином или сходящийся степенной ряд от матрицы A может быть представлен в виде линейной комбинации $E, A, A^2, \dots, A^{n-1}$. Например, если A – квадратная матрица размерности $n \times n$, то

$$e^{At} = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3, \quad (4.19)$$

где $a_i, (i = 1, 2, 3)$ – скалярные числа.

Заметим, что любые полиномы от одной и той же матрицы перестановочны между собой и коммутируют по отношению не только к операции сложения, но и умножения. Поэтому над матричными многочленами от одной и той же матрицы можно осуществлять алгебраические операции подобно тому, как это выполняется над скалярными многочленами.

4.3.1. Преобразование подобия

Говорят, что матрица B подобна матрице A , если они связаны соотношением

$$B = S^{-1} A S, \quad (4.20)$$

где S – неособенная матрица $|A| \neq 0$.

Соотношение (4.20) носит название преобразования подобия. Из него следует, что

$$A = S^{-1} B S.$$

Преобразование подобия обладает следующими свойствами:

1. Преобразование суммы равно сумме преобразований

$$S^{-1} (A + B) S = S^{-1} A S + S^{-1} B S.$$

2. Преобразование произведения равно произведению преобразований сомножителей

$$S^{-1}(AB)S = S^{-1}AS \cdot S^{-1}BS.$$

3. Преобразование обратной матрицы равно обратной матрице от преобразованной

$$S^{-1}A^{-1}S = (S^{-1}AS)^{-1}.$$

4. Преобразование целой степени (положительной или отрицательной) равно той же степени преобразования

$$S^{-1}A^nS = (S^{-1}AS)^n.$$

Покажем, что подобные матрицы имеют одинаковые характеристические полиномы. Действительно,

$$\begin{aligned} |B - \lambda E| &= |S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda S^{-1}ES| = \\ &= |S|^{-1} |A - \lambda E| |S| = |A - \lambda E|. \end{aligned}$$

Из этого свойства следует, что подобные матрицы имеют одинаковые собственные числа (в т. ч. кратные) и одинаковые следы. Можно показать, что свойство вектора быть собственным не зависит от выбора базиса. Поэтому собственные векторы подобных матриц связаны соотношением

$$x = S^{-1}x,$$

где S – матрица преобразования координат.

Действительно, если

$$Ax = \lambda x,$$

то

$$(S^{-1}AS)(S^{-1}x) = \lambda(S^{-1}x).$$

Если матрица ортогональна и, следовательно, $S^T = S^{-1}$, то имеет место ортогональное преобразование

$$B = S^TAS.$$

Контрольные вопросы

1. Раскройте смысл теоремы Кели-Гамильтона.
2. Как доказывается на примерах то, что матрица является решением своего характеристического уравнения?
3. Как определяется на основе теоремы Кели-Гамильтона обратная матрица?
4. Какие матрицы называются подобными?

4.4. Диагонализация матриц и функции от матриц

Операции с диагональными матрицами выполняются гораздо проще, чем операции с произвольными матрицами, поэтому приведение к диагональной форме всегда желательно. Диагональные матрицы при умножении коммутируют между собой, произведение диагональных матриц всегда приводит к диагональной матрице, уравнения разделяются по переменным и разрешаются непосредственно. Однако приведение матрицы к диагональному виду выполнить совсем не просто, т. к. неизвестно, каким образом выбрать преобразующую матрицу S в преобразовании подобия.

Пусть все собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A различны и им соответствует n линейно независимых собственных векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$. Если принять их за новый базис пространства, то получим диагональную матрицу, подобную исходной.

Таким образом, базис из собственных векторов замечателен тем, что преобразование подобия в нем имеет диагональную форму.

Построим матрицу, столбцы которой состоят из элементов собственных векторов, умноженных на произвольное, не равное нулю число $k_1, k_2, \dots, k_l$:

$$M = \begin{bmatrix} k_1 x_{11} & k_2 x_{12} & \cdots & k_l x_{1n} \\ k_1 x_{21} & k_2 x_{22} & \cdots & k_l x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_1 x_{n1} & k_2 x_{n2} & \cdots & k_l x_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Матрица вида (4.21) называется *модальной*. Преобразование подобия с помощью модальной матрицы M

$$L = M^{-1} A M,$$

приводит к диагональному виду. Здесь L – диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Использование модальной матрицы в качестве преобразующей связано с вычислением всех собственных чисел и принадлежащих этим собственным числам собственных векторов. В вычислительной математике эта проблема известна под названием полной проблемы собственных значений. Эта проблема является достаточно сложной при больших порядках матрицы.

Если имеется какой-либо способ грубого определения собственных векторов, то операция преобразования подобия выделит по абсолютной величине диагональные элементы над остальными, т. е. сделает их доминирующими. Такая псевдодиагонализация является полезной в том отношении, что позволяет ускорить сходимость многих вычислительных процессов при решении задач на цифровых вычислительных машинах.

При различных собственных числах столбцы модальной матрицы могут выбираться равными или пропорциональными произвольному ненулевому столбцу $Adj[A - \lambda_i E]$. Здесь под $Adj[A - \lambda_i E]$ понимается транспонированная матрица алгебраических дополнений, называемая иногда *присоединенной* или *союзной*.

Так как столбцы $Adj[A - \lambda_i E]$ линейно зависимы для данного λ_i , то каждое λ_i определяет лишь один столбец модальной матрицы.

Особого рассмотрения заслуживает случай кратных собственных чисел. Это имеет большое значение в машинных вычислениях, когда элементы матриц задаются неточно и резкая грань между простыми и кратными собственными числами стирается. При малых деформациях элементов матрицы возможен переход от матрицы с кратными собственными числами к матрице с простыми собственными числами, и наоборот. Поэтому исследование случая кратных собственных чисел имеет большое значение.

Если матрица имеет кратные собственные числа, то она может быть приведена к канонической форме Жордана. Каноническая форма Жордана является клеточно-диагональной матрицей, в которой на главной диагонали расположены канонические ящики, или клетки Жордана. Канонический ящик имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

На главной диагонали расположено собственное число, повторяющееся столько раз, какова его кратность, над диагональю расположены элементы, равные единице, а все остальные элементы равны нулю. Канонический ящик не может быть упрощен за счет преобразования подобия. Типичная Жорданова форма матрицы имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Канонический ящик имеет только один собственный вектор. Минимальный полином ящика совпадает с характеристическим; он равен $(\lambda - \lambda_i)^k$, где k – порядок ящика.

Пример 4.8. Привести матрицу

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

к диагональной форме. В качестве преобразующей матрицы в преобразовании подобия выбрать модальную матрицу.

Корни характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$ равны

$$|A - \lambda E| = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Собственные векторы, соответствующие

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Модальная матрица

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$L = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

4.4.1. Функции от матриц

Пусть задана функция $f(\lambda)$ скалярного аргумента λ и некоторая квадратная матрица A . Требуется распространить функцию $f(\lambda)$ на матричные значения аргумента. Теорема Кели-Гамильтона дает решение этой задачи, если $f(\lambda)$ – полином. Тогда матричная функция $f(A)$ является суммой с такими же коэффициентами, как у полинома, при соответствующих степенях матрицы A . Исходя из свойств теоремы Кели-Гамильтона, функция $f(A)$ определяется и в более общем случае. В случае полиномов некоммутативный характер матриц не играет роли. Каждая матрица коммутирует сама с собой и со своей произвольной степенью.

Будем считать, что функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A , если под λ подразумевать собственные числа матрицы A . Тогда все функции $f(\lambda)$, имеющие одни и те же значения на спектре матрицы A , должны иметь одно и то же матричное значение $f(A)$. Значения функции $f(\lambda)$, определенные на спектре матрицы A , полностью определяют $f(A)$. Функция $f(\lambda)$ называется *функцией от матрицы*.

Имеет место следующее важное свойство, основанное на преобразовании подобия. Если матрицы A и B подобны и матрица S преобразует A в B :

$$B = S^{-1}AS,$$

то $f(A)$ и $f(B)$ также подобны, и матрица S преобразует $f(A)$ в $f(B)$:

$$f(B) = S^{-1}f(A)S.$$

Доказательство этого результата вытекает из того свойства, что подобные матрицы имеют одинаковые характеристические (и минимальные) полиномы и, следовательно, функция $f(\lambda)$ принимает одни и те же значения как на спектре матрицы A , так и на спектре матрицы B .

4.4.2. Матричные степенные ряды

Пусть имеется последовательность матриц A_k ($k = 1, 2, \dots$) размерности $(n \times n)$. Под пределом последовательности матриц A_k понимается матрица

$$\hat{A} = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \left[\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} \right].$$

Если предел последовательности матриц существует, то матричный ряд является сходящимся. Если предела не существует, матричный ряд расходится.

Пользуясь понятием предела матрицы, можно ввести в рассмотрение матричный степенной ряд

$$F(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k. \quad (4.22)$$

Ряд (4.22) сходится, если все собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A расположены в замкнутом круге радиуса R $|\lambda| \leq R$ скалярного степенного ряда:

$$F(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k, \quad (\lambda = \alpha \pm j\beta), \quad (4.23)$$

причем собственные числа, лежащие на окружности, являются простыми.

Матричный степенной ряд расходится, если хотя бы одно собственное число матрицы A находится вне круга сходимости скалярного степенного ряда (4.23) или имеется собственное число матрицы A , лежащее на окружности круга сходимости, для которого ряд (4.23) расходится.

Таким образом, для того чтобы матричный степенной ряд (4.22) сходил к некоторой матрице, необходимо и достаточно, чтобы скалярный ряд (4.23) сходил на спектре матрицы A . Так как степенной ряд можно по частям дифференцировать любое число раз внутри круга сходимости, то ряд (4.22) сходится на

спектре любой матрицы, собственные числа которой попадают внутрь круга сходимости. Следовательно, разложение функции $f(\lambda)$ в степенной ряд в круге $|\lambda - \lambda_0| \leq R$ сохраняет силу, если скалярный элемент λ заменить любой матрицей A , все собственные числа которой лежат внутри круга сходимости радиуса R .

Подробный анализ сходимости матричных степенных рядов приводится в более полных руководствах. Укажем некоторые наиболее важные тождества, связывающие функции от скалярного аргумента с матричными значениями аргумента.

Из тождества

$$\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda = 1,$$

для любой матрицы A следует

$$\sin^2 A + \cos^2 A = E.$$

Точно так же для любой матрицы A

$$e^A e^{-A} = E, \text{ тогда } e^{-A} = (e^A)^{-1}.$$

Далее для любой матрицы A

$$e^{iA} = \cos A + i \sin A.$$

Экспоненциальная функция может быть представлена в виде

$$e^A = \exp A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^m}{m!} + \dots,$$

$$e^{-A} = \exp(-A) = E - A + \frac{A^2}{2!} - \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^m A^m}{m!} + \dots$$

Этот ряд сходится равномерно и абсолютно. Умножение скалярных величин $e^{\lambda_1} e^{\lambda_2}$ коммутативно, однако соответствующее произведение экспоненциальных матриц нельзя представить в виде $e^B e^A$, если матрицы A и B не коммутируют.

Тригонометрические функции имеют вид:

$$\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \dots = \frac{\exp(jA) - \exp(-jA)}{2j},$$

$$\cos A = E - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \dots = \frac{\exp(jA) + \exp(-jA)}{2},$$

$$\operatorname{sh} A = A + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \dots = \frac{\exp A - \exp(-A)}{2},$$

$$\operatorname{ch} A = E + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \dots = \frac{\exp A + \exp(-A)}{2},$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A.$$

4.4.3. Теорема Сильвестра

Соотношение Сильвестра представляет собой способ эффективного выражения функций от матрицы, если только эта функция может выражаться в виде матричного полинома.

Пусть матрица A имеет n различных собственных чисел. Тогда для произвольного матричного полинома $f(A)$ справедливо разложение

$$f(A) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) Z_0(\lambda_i),$$

где

$$Z_0(\lambda_i) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j E)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

В качестве примера вычислим функцию e^{At} для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2.$$

Функция e^{At} может быть представлена в виде сходящегося степенного ряда. Следовательно, теорема Сильвестра может быть применена. Соотношение Сильвестра позволяет непосредственно получить e^{At} вместо того, чтобы суммировать бесконечный ряд по степеням матрицы A .

В силу соотношения Сильвестра для данной матрицы имеем

$$e^{At} = \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i t} Z_0(\lambda_i), Z_0(\lambda_1) = \frac{A - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2}, Z_0(\lambda_2) = \frac{A - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Вычислим матрицы $Z_0(\lambda_1)$ и $Z_0(\lambda_2)$, соответствующие собственным числам $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$:

$$Z_0(\lambda_1) = \frac{\begin{bmatrix} -3 - (-2) & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$Z_0(\lambda_2) = \frac{\begin{bmatrix} -3 - (-1) & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Функция от матрицы $f(A) = e^{At}$ определяется следующим образом:

$$e^{At} = \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i t} Z_0(\lambda_i) = e^{-t} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} & -2e^{-t} \\ e^{-t} & 2e^{-t} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - 2e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

4.4.4. Норма матрицы

Нормирование векторов и матриц широко применяется в вычислительной математике для оценки быстроты сходимости числовых последовательностей и рядов.

Под нормой матрицы A понимается действительное число $\|A\|$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $\|A\| \geq 0$, причем $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$;
- 2) $\|cA\| = |c| \|A\|$ (c – число) и, в частности, $\|-A\| = \|A\|$;
- 3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- 4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Норма матрицы может быть введена многочисленными способами. Отметим три наиболее распространенных способа задания нормы:

$$1) \|A\|_I = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|;$$

$$2) \|A\|_{II} = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|;$$

$$3) \|A\|_{III} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Пример 4.9. Вычислим нормы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{bmatrix};$$

$$\|A\|_I = \max_i [1 + 2 + 3; 4 + 5 + 6; 7 + 8 + 9] = \max[6, 15, 24] = 24;$$

$$\|A\|_{II} = \max_j [1 + 4 + 7; 2 + 5 + 8; 3 + 6 + 9] = \max[12, 15, 18] = 18;$$

$$\begin{aligned} \|A\|_{III} &= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + (-4)^2 + 5^2 + (-6)^2 + (-7)^2 + 8^2 + 9^2} = \\ &= \sqrt{285} = 16.88 \end{aligned}$$

Контрольные вопросы

1. Зачем производится диагонализация матриц?
2. Как составляется каноническая форма Жордана?
3. Как определяется функция от матрицы?
- 4) Как записываются основные функции от матриц?
5. Как на основе соотношений Сильвестра формируется функция от матрицы?
6. Как вычисляется норма матрицы?

5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

5.1. Динамическая система

Обычно, когда что-либо называют системой, то имеют в виду совокупность взаимосвязанных элементов или частей, взаимодействующих с окружающей средой по определенным закономерностям. Более конкретно, система – это устройство, комплекс, объединение, характерное наличием *входов*, т. е. некоторых физических величин или явлений, характеризующих результат воздействия внешней среды на движение самого устройства, комплекса, объединения. В этом довольно общем описании понятия системы специально не предусматривается конкретизация физических параметров системы, поскольку мы хотим сформулировать строгое определение понятия системы в самом общем виде, пригодном для широкого класса задач.

Для изучения процессов, протекающих в системах, необходимо уметь определять по текущим значениям входных воздействий выходные величины системы. Для этого необходимо, очевидно, тем или иным образом описать саму систему на языке математики, или, как принято говорить, создать математическую модель системы. В теоретическом плане описание системы предполагает лишь знание ее *состояния* в данный и последующий моменты времени. Это состояние должно полностью определяться математическими соотношениями, однозначно установленными для данной системы.

Таким образом, изложенные физические и логические представления приводят нас к общей схеме системы, показанной на рис. 5.1.

Рассмотрим теперь входные воздействия, состояние системы и выходные величины подробнее с целью получения более точных формулировок.

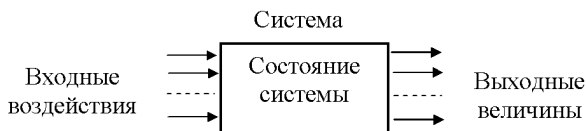


Рис. 5.1

Входные воздействия естественно в общем случае можно отнести к некоторому определенному множеству их мгновенных значений, которое обозначим через U , и к множеству моментов времени, которое обозначим через T . Это будет означать, что конкретное входное воздействие $u(t)$ принадлежит в данный момент времени t множеству U . Очевидные физические соображения требуют, чтобы множество моментов времени T было упорядоченным, иными словами, в нем должно быть определено направление времени. Очевидно, это направление должно быть выбрано так, чтобы прошлое предшествовало будущему.

В общем случае нельзя считать, что входное воздействие $u(t)$ является любой произвольной функцией времени. Обычно необходимо в каждом конкретном случае вводить определенные ограничения. Они диктуются, главным образом, условиями решаемой задачи, свойствами воздействующей окружающей среды и тому подобное, но всегда должны иметь место. Если обозначить абстрактное правило построения допустимых функций $u(t)$ через ω , то множество Ω допустимых значений функций $u(t)$ можно определить следующим образом:

$$\Omega = \{\omega; T \rightarrow U\}.$$

Напомним, что это выражение читается так: на множествах T и U задано соответствие (правило) ω , такое, что множество T отображается в множество U , образуя множество отображений Ω . Очевидно, Ω есть подмножество множества $T \times U$. Для конкретных значений величину приведенного выше выражения можно было бы записать так:

$$u(t) = \omega(t).$$

В дальнейшем, применяя запись $u(t)$, мы всегда будем подразумевать, что эта функция принадлежит допустимому множеству.

Поскольку в реальных системах мы имеем дело только с отрезками входных воздействий (так протяженность времени всегда ограничена), класс функций на множестве Ω должен быть таким, чтобы две различные функции ω_1 и ω_2 на соседних отрезках времени $[t_1, t_2]$ и $[t_2, t_3]$ могли быть заменены одной функцией ω_3 на суммарном отрезке $[t_1, t_3]$ (рис. 5.2).

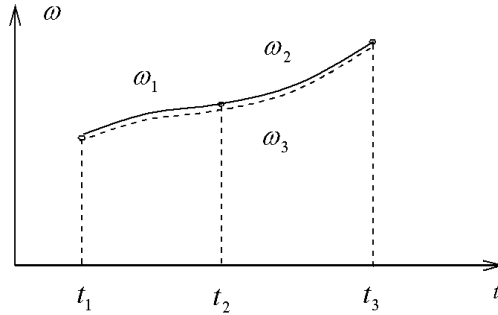


Рис. 5.2

Это условие запишем следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned}\omega_1, \omega_2, \omega_3 &\in \Omega, \\ t_1 < t_2 < t_3 &\in T,\end{aligned}$$

тогда должно иметь место условие

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \omega_1 \text{ при } t_1 < t \leq t_2, \\ \omega_3 &= \omega_2 \text{ при } t_2 < t \leq t_3.\end{aligned}$$

Описание входных воздействий, приведенных выше выражениями, оказывается вполне достаточным для их использования в дальнейшем.

Рассмотрим теперь понятие «состояние» системы. Пока, не имея более строгих формулировок, можно говорить о состоянии системы как о таких данных о ее настоящем и прошлом, которые необходимы для определения текущего и будущего

значений выходных величин системы. Говоря более конкретно, мы должны предположить, что существуют некоторые величины (обозначим их через x), характеризующие состояние системы в данный момент времени, которые зависят от предыдущего состояния, текущего времени и входных воздействий. Запишем эту закономерность в общем виде так:

$$x(t_1) = \varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega],$$

где t_1 – данный момент времени; t_0 – некоторый предшествующий момент времени $t_0 < t_1$; $x(t_0)$ – состояние системы предшествующее данному; ω – входное воздействие, причем $\omega \in \Omega$.

Если рассматривать величины x как элементы некоторого множества X , а все моменты времени (в том числе t_0 и t_1) принадлежащими множеству T , то формулу для состояний x можно записать в более общей форме:

$$\Phi = \{\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X\}.$$

Множество $T \times T \times X \times \Omega$ содержит в качестве своих элементов упорядоченные четверки в виде $t_1, t_0, x(t_0), \omega$, следовательно, соответствие (правило) φ устанавливает отображение (функциональную связь) этих четверок на множестве X , содержащие элементы x . Полученное отображение φ принадлежит некоторому множеству Φ и имеет специальное наименование – «*переходная функция*» системы.

Переходная функция состояния должна удовлетворять ряду требований, определяющих однозначность введенного определения.

Во-первых, естественно потребовать, чтобы переходная функция состояния была определена для всех $t \geq t_0$, а при $t = t_0$ имело место равенство

$$\varphi[t_0; t_0, x(t_0), \omega] = x(t_0)$$

для всех $t \in T, x \in X$ и $\omega \in \Omega$. Это равенство определяет согласованность функции φ с ее начальным значением и независимость начального значения $x(t_0)$ от данного значения входного сигнала ω (рис. 5.3). Далее, знание состояния системы $x(t_0)$ в момент $t = t_0$ и отрезка входного воздействия ω на отрезке времени $[t_0, t_1]$ (обозначим $\omega[t_0, t_1]$) должно быть необходимым и достаточным условием, позволяющим определить состояние системы $x(t_1)$ в момент $t = t_1$. Поэтому должно иметь место соотношение

$$x(t_1) = \varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega(t_0, t_1)].$$

Система, удовлетворяющая этому соотношению, называется *динамической*.

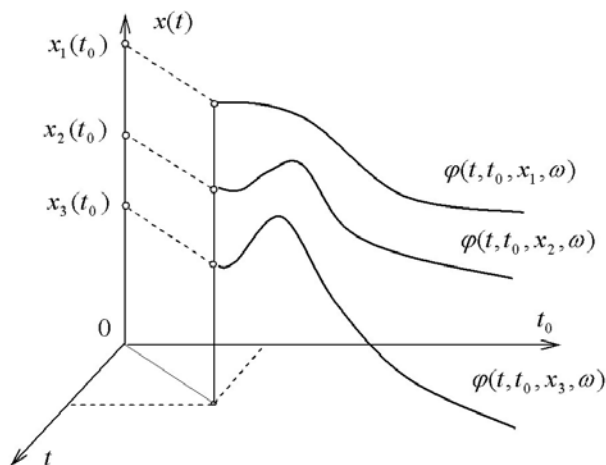


Рис. 5.3

При этом два одинаковых входных воздействия на заданном отрезке времени и при заданном начальном состоянии системы $x(t_0)$ должны давать один и тот же результат, иными словами, должно выполняться равенство

$$\varphi[t_1, t_0, x(t_0), \omega_1] = \varphi[t_1, t_0, x(t_0), \omega_2],$$

если $\omega_1 = \omega_2$ при $t_0 < t \leq t_1$.

Наконец, одно и то же входное воздействие ω должно определять состояние системы на конце заданного промежутка времени $[t_1, t_3]$ независимо от того, действовало ли оно отдельно на промежутках времени $[t_1, t_2]$ и $[t_2, t_3]$ или сразу на всем промежутке $[t_1, t_3]$ (рис. 5.4). Это условие определяется равенством

$$\varphi[t_3, t_1, x(t_1), \omega] = \varphi\{t_3, t_2, \varphi[t_2, t_1, x(t_1), \omega], \omega\},$$

для всех $x \in X$, и $\omega \in \Omega$ и любых $t_1 < t_2 < t_3 \in T$.

Свойства переходной функции состояния системы, устанавливаемые рассмотренными соотношениями, полностью определяют ее как основную характеристику системы.

Выходные величины системы могут быть определены, если заданы входные воздействия и известна переходная функция состояния системы. Поскольку последняя уже включает в себя эффект входного воздействия, выходная величина (обозначим ее $y(t)$) может быть представлена в виде

$$y(t) = \eta[t; x(t)].$$

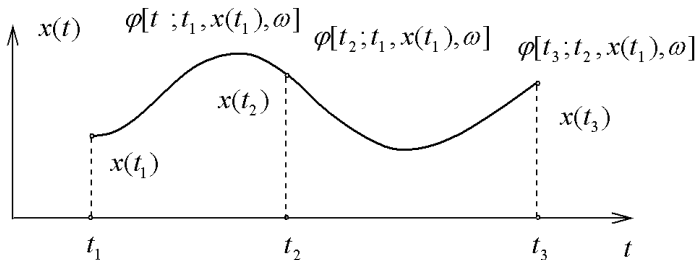


Рис. 5.4

Обычно на множестве выходных величин не накладывается особых ограничений, однако в случае необходимости они должны принадлежать некоторому множеству Γ . Поскольку моменты времени t принадлежат множеству T , а значения x – множеству X , множество выходных величин можно представить в более общей форме так:

$$\Gamma = \{\eta : T \times X \rightarrow Y\}.$$

Теперь приведем полную формулировку определения динамической системы, принадлежащую Р. Калману, П. Фалбу и М. Арбибу.

Определение 5.1. *Динамической системой* называется математическая модель совокупности взаимосвязанных элементов, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. Заданы множество моментов времени T , множество состояний системы X , множество мгновенных значений входных воздействий U , множество их допустимых значений:

$$\Omega = \{\omega : T \rightarrow U\},$$

множество мгновенных значений выходных величин Y и множество их допустимых значений

$$\Gamma = \{\eta : T \times X \rightarrow Y\}.$$

2. Множество T есть некоторое упорядоченное подмножество множества вещественных чисел (направление времени): $T \subseteq R$.

3. Множество входных воздействий удовлетворяет условиям:

а) множество Ω непусто;

б) отрезок входного воздействия ω на промежутке времени $(t_1, t_3]$ обладает следующим свойством (свойство сочленения):

$$\begin{aligned} \text{если } \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega \text{ и } t_1 < t_2 < t_3 \in T, \\ \text{то } \omega_3 = \omega_1 \text{ при } t_1 < t \leq t_2, \\ \omega_3 = \omega_2 \text{ при } t_2 < t \leq t_3. \end{aligned} \quad (5.1)$$

4. Существует *переходная функция состояния*

$$\Phi = \{\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X\}, \quad (5.2)$$

значениями которой являются состояния системы

$$x(t) = \varphi[t, t_0, x(t_0), \omega] \in, \quad (5.3)$$

в котором она оказывается в момент $t \in T$, если в начальный момент времени t_0 она была в начальном состоянии $x(t_0) \in X$ и если на нее действовало входное воздействие $\omega \in \Omega$.

Переходная функция состояния обладает следующими свойствами:

а) функция определена для всех $t \geq t_0$ и не обязательно для всех $t < t_0$ (направление времени);

б) функция согласована со своим начальным значением, т. е. равенство

$$x(t_0) = \varphi[t_0; t_0, x(t_0), \omega], \quad (5.4)$$

выполняется для любых $t \in T, x \in X, \omega \in \Omega$;

в) для всех отрезков входных воздействий $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, таких, что $\omega_1 = \omega_2$ для всех $t_0 < t \leq t_1$, имеет место равенство

$$\varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega_1] = \varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega_2]; \quad (5.5)$$

г) функция обладает *полугрупповым свойством*, т. е. для любых $t_1 < t_2 < t_3, x \in X, \omega \in \Omega$ имеет место равенство

$$\varphi[t_3; t_1, x(t_1), \omega] = \varphi\{t_3; t_2, \varphi[t_2; t_1, x(t_1), \omega], \omega\}.$$

5. Задано выходное отображение

$$\Gamma = \{\eta : T \times X \rightarrow Y\}, \quad (5.7)$$

определяющее значения выходных величин системы

$$y(t) = \eta[t; x(t)]. \quad (5.8)$$

Приведенное определение в наиболее общем виде описывает математическую модель динамической системы. Схематически ее можно представить в виде структурной схемы, изображенной на рис. 5.5. Эта математическая модель применима к различным классам физических систем, что с теоретической точки зрения весьма важно, т. к. при этом большое количество частных приложений объединяется общей терминологией, основными понятиями и фундаментальными результатами теории.

Отдельные дополнительные термины конкретизируют математическую модель динамической системы. Так, состояние системы x в момент t_0 , или пара элементов множества $T \times X$, называется *событием* или *фазовой системой*. Само множество $T \times X$ называется *пространством событий* или *фазовым пространством*.

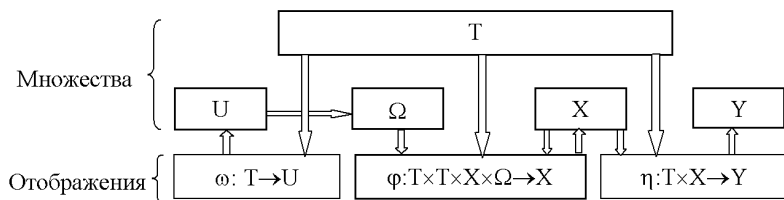


Рис. 5.5

В том случае, когда некоторое множество входных воздействий Ω_1 используется для управления системой, оно называется *управлением*. Управление переводит (или преобразует) состояние системы $x(t_0)$ в состояние $\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$. При этом система находится в движении, описывая в пространстве траекторию.

Динамическая система называется *свободной* или *автономной*, если множество допустимых входных воздействий

Ω содержит только один элемент. Практически это означает, что входные воздействия отсутствуют и система совершает движение лишь из-за наличия начальных отклонений.

Важным классом динамических систем являются системы, переходная функция состояния которых удовлетворяет дифференциальному уравнению. Построим определение такой системы на основе общего определения 5.1.

Введем метрики на множествах моментов времени T , входных воздействий Ω и состояний системы X . Тогда перечисленные множества будут метрическими пространствами. Примем в качестве элементов этих пространств действительные числа R . При этом получим $T = R$, $\Omega = R^m$, $X = R^n$, где m и n – размерности пространств, а сами пространства будут нормированными или векторными.

Потребуем, чтобы переходная функция состояния $\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$ была непрерывным отображением в любой точке $x \in X$ для каждого $t \in T$.

Если теперь состояние системы в момент времени t определяется соответствующим значением переходной функции состояния

$$x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega],$$

То приращение x при бесконечно малом изменении t в силу непрерывности функции φ может быть записано следующим образом:

$$dx = \frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega] dt.$$

Положим, далее, что функция $\frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ однозначно соответствует некоторая непрерывная функция $f(t; x, \omega)$. Тогда состояние системы определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = f[t; x, u(t)],$$

где $u(t) = \omega(t)$. Назовем систему, удовлетворяющую перечисленным выше условиям: *обыкновенной динамической системой* и дадим полное ее определение.

Определение 5.2. *Обыкновенной динамической системой* называется математическая модель совокупности взаимосвязанных элементов, удовлетворяющая аксиомам определение 5.1, у которой:

1) Множество моментов времени T есть числовая ось вещественных чисел, а множества мгновенных значений входных воздействий U , допустимых значений входных воздействий Ω и состояний системы X есть векторные пространства.

2) Функция $f(t, x, \omega)$, называемая *производящей* и задаваемая функцией $\frac{\partial}{\partial t} \phi[t; t_0, x(t_0), \omega]$, непрерывна для каждого значения $t \in T$.

3) Переходная функция состояния системы является решением дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f[t; x, u(t)], \quad (5.9)$$

с начальными условиями $x(t_0) = x_0$ для всех $t \in T$, $x \in X$ и $u \in \Omega$, где x – вектор состояния системы, u – вектор входных воздействий.

В ряде случаев в динамической системе имеют место условия, при которых физические элементы и их взаимосвязи не меняются с течением времени. При этом состояние системы, определяемое переходной функцией состояния, не зависит от начала отсчета времени.

Если например, задано входное воздействие $\omega(t)$ из класса воздействий Ω и система имеет значение переходной функции состояния $f(t; t_0, x, \omega)$, то сдвиг по времени на величину τ этого воздействия повлечет за собой сдвиг на такую же величину переходной функции состояния без изменения ее формы (Рисунок 5.6).

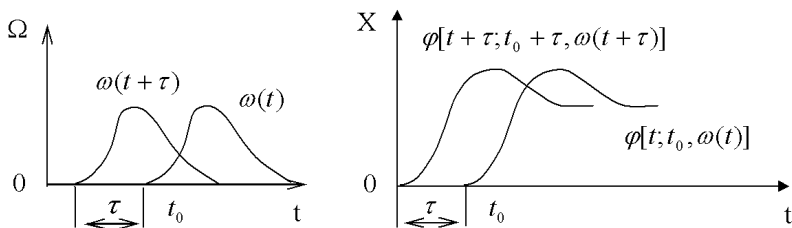


Рис. 5.6

Более точно такие системы определяются следующим образом.

Определение 5.3. Динамическая система называется *стационарной* (или с независимыми от времени параметрами), если выполняются следующие условия:

1) Пространство допустимых входных воздействий Ω содержит все функции $\omega_1(t) = \omega(t + \tau)$ для любых $t, \tau \in T$.

2) Справедливо равенство

$$\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega] = \varphi[t + \tau; t_0 + \tau, x, \omega(t + \tau)], \quad (5.10)$$

для всех $\tau \in T$.

3) Отображение $\eta: T \times X \rightarrow Y$, определяющее выходные величины $y(t) = \eta[t; x(t)]$, не зависит от t , то есть выполняется равенство:

$$y(t) = \eta(x). \quad (5.11)$$

Динамическая система будет системой с *непрерывным временем*, когда T есть множество всех вещественных чисел. Когда T есть множество целых чисел, система будет с *дискретным временем*.

Контрольные вопросы

- 1) Дайте определение понятия системы?
- 2) Как определяются входные и выходные воздействия системы?
- 3) Как определяется состояние системы?
- 4) Как определяется динамическая система?

5.2. Управление системой

В определении динамической системы, которое было сформулировано в предыдущем параграфе, уже в некоторой степени нашел отражение тот факт, что динамическая система может рассматриваться как *объект управления*. В частности, входные воздействия, предназначенные для изменения состояния системы некоторым предписанным образом, были названы *управлением*.

Теперь нам необходимо конкретизировать понятие управления и дать ряд достаточно строгих определений. Предварительно заметим, что система управления создается для осуществления целенаправленных действий, в результате которых объект управления совершает движение в соответствии с установленными критериями. Это приводит к задаче нахождения входных воздействий, приводящих выходные величины к некоторому заданному виду и установленному критерию эффективности действия системы. Такая задача называется задачей оптимального управления, или просто *задачей управления*.

Пусть объектом управления является динамическая система в соответствии с определением 5.1. Объект управления будет иметь переходную функцию состояния

$$\varphi: T \times T \times X \times O \rightarrow X.$$

Со значениями $x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ и выходную функцию

$$\eta: T \times X \rightarrow Y,$$

имеющей значения $y(t) = \eta[t; x(t)]$.

При изменении состояния объекта $x(t)$ его выходная величина также будет изменяться, следовательно, на множестве $T \times X \times Y$ можно определить пары (x, y) для данного момента времени t . На этом множестве некоторое подмножество $S_0 \subset T \times X \times Y$, элементами которого являются заданные значения (x, y, t) . Назовем подмножество S_0 *целевым множеством*. На множестве Ω выделим подмножество Ω_0 , которое назовем *множеством допустимых управлений*.

Если теперь найдется такое входное воздействие $u(t) = \omega(t)$ (из множества допустимых управлений), которое преобразует событие (x_0, t_0) , а следовательно, и выходную величину $y(t_0)$, таким образом, что множество значений величин

$$\varphi[t; t_0, x(t_0), u], \quad \eta[t; x(t)],$$

пересекается со множеством S_0 то время t_1 , за которое совершается этот процесс, назовем *временем достижения* (рисунок 5.7). Подчеркнем, что совсем необязательно на множестве Ω_0 будет иметься входное воздействие, обеспечивающее такое преобразование.

Образует некоторую вещественную функцию, зависящую от значений входных и выходных величин u и y , состояние объекта X и его свойств, определяемых функциями φ и η

$$I = I(u, y, x, \varphi, \eta, t).$$

Очевидно, при наличии управления $u(t)$, переводящего объект из состояния (x_0, t_0) в состояние $[x(t_1), t_1]$, функция I примет конкретное численное значение, равное

$$I_1 = I_1 \{ u, y(t_1), x(t_1), \varphi[t_1; t_0, x(t_0), u], \eta[t_1; x(t_1)], t_1 \}.$$

Назовем функцию I *функцией потерь качества управления* и надлежащим выбором ее вида обеспечим уменьшение числа I_1 при повышении качества управления. В общей постановке задачи нет необходимости дальнейшей конкретизации этого понятия.

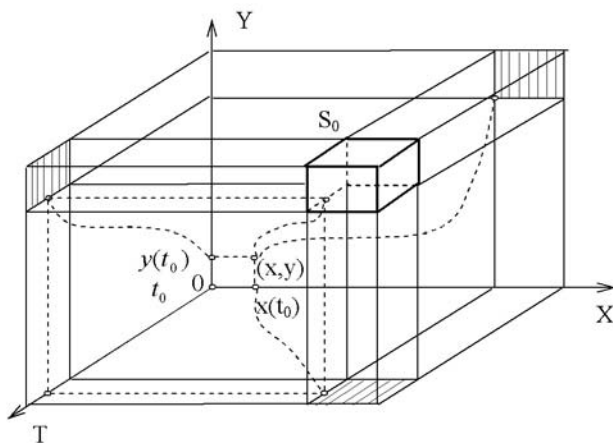


Рис. 5.7

Определение 5.4. *Общей задачей управления* называется математическое понятие, образованное следующими условиями:

1) *Объектом управления* является динамическая система в соответствии с определением 5.1, имеющая переходную функцию состояния $\varphi[t; t_0, x(t_0), u]$ и выходную функцию $\eta[t; x(t)]$. Для объекта управления указано *целевое множество* $S_0 \subset T \times X \times Y$ и множество допустимых управлений $\Omega_0 \subset \Omega$.

2) *Задана функция потерь качества управления*

$$I = I(u, y, x, \varphi, \eta, t),$$

и получен функционал потерь качества управления

$$I_1 = I_1\{u, y(t_1), x(t_1), \varphi[t; t_0, x(t_0), u], \eta[t; x(t_1)], t_1\}, \quad (5.12)$$

для данного момента времени достижения t_1 , начального момента времени t_0 , начального состояния $x(t_0)$.

3) Необходимо для каждого данного события (t_0, x_0) определить допустимое управление $u(t) \in \Omega_0$, которое преобразует событие (t_0, x_0) таким образом, что множество значений $\varphi[t; t_0, x(t_0), u], \eta[t; x(t)]$ пересекается с целевым множеством S_0 :

$$\{\varphi[t; t_0, x(t_0), u], \eta[t; x(t)]\} \cap S_0, \quad (5.13)$$

и которое минимизирует функционал потерь качества управления.

Данное определение задачи управления является наибольшее общим и пригодно для любого объекта, описываемого аксиомами определения 5.1.

Как уже отмечалось, важным классом динамических систем являются обыкновенные динамические системы, у которых переходная функция состояний удовлетворяет дифференциальному уравнению. В этом случае функционал потерь качества управления можно описать более конкретно.

Пусть L_k есть некоторая вещественная функция вида

$$L_k = L_k\{t_1; \varphi[t; t_0, x(t_0), u]\},$$

зависящая от управления $u(t)$, времени достижения t_1 и вида переходной функции состояний φ . Функция L_k должна выбираться таким образом, чтобы уменьшение ее значения определяло повышение качества управления. Определим, далее, непрерывную

вещественную функцию $L_n = L_n\{t; \varphi[t; t_0, x(t_0), u], u(t)\}$, зависящую от управления $u(t)$, текущего времени t и вида переходной функции состояния φ , интегрируемую на промежутке $[t_0, t_1]$.

Запишем функционал потерь качества управления в следующем виде:

$$I_l = L_K\{t_1; [t_1; t_0, x(t_0), u]\} + \int_{t_0}^{t_1} L_n\{t; [t; t_0, x(t_0), u], u(t)\} dt \quad (5.14)$$

Первое слагаемое этого выражения, функция L_k , характеризует качество управления в конечный момент времени t_1 и поэтому называется терминальной составляющей функционала. Второе слагаемое характеризует качество процесса перехода из состояния в момент t_0 в состояние в момент t_1 и называется переходной (или нестационарной) составляющей функционала.

В случае, когда обыкновенная динамическая система линейна, производящая функция примет вид

$$f[t; x, u(t) = F(t)x + G(t)u,$$

а выходная функция

$$\eta(t; x) = H(t)x.$$

При этом одним из распространенных критериев качества управления является квадратичный критерий. Функционал потерь качества управления формируется следующим образом.

Пусть задано отображение $z: T \rightarrow Y$, значениями которого являются величины $y = z(t)$. Будем называть это отображение желаемым выходным сигналом. Тогда разность между

желаемым выходным сигналам и текущим значением выходной величины будет характеризовать ошибку управления

$$\varepsilon(t) = z(t) - y(t) = z'(t) - H(t)x'(t),$$

и функционал потерь качества управления примет простой вид:

$$I_1 = -|\varepsilon(t_1)|^2 = \int_{t_0}^{t_1} [|\varepsilon(t)|^2 + |u(t)|^2] dt.$$

В этом случае задача управления сводится к выбору такого управления $u(t)$, которое бы минимизировало ошибку управления и расход энергии управляющих органов.

Перейдем к формулированию понятия закона управления. Предварительно заметим, что принцип обратной связи в теории автоматического регулирования составляет ее основу и широко и всесторонне используется в технических приложениях. Однако методическая основа этого принципа долгое время оставалась неясной. Подтверждением этого обстоятельство является хотя бы то, что и до сих пор во многих руководствах по автоматическому регулированию приводится классификация систем управления из системы замкнутого и разомкнутого циклов регулирования. Именно здесь техническая сторона вопроса заслонила собой методологическую сторону.

Введенные определения динамической системы и задачи управления естественным образом приводят к формулировке понятия закона управления. В самом деле, переходная функция состояния $\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ определяет состояние системы в момент t , если известно состояние системы в момент t_0 и отрезок входного воздействия ω на промежутке $[t_0, t)$. Таким образом, вся информация, необходимая для определения требуемого управляющего воздействия $u(t) = \omega(t)$, заключена в текущем состоянии системы.

Законам управления будет называться отображение

$$k : T \times X \rightarrow U,$$

значениями которой будут величины $u(t) = k[t; x(t)]$ управлений.

В общем случае определение k затруднено тем обстоятельством, что соотношение

$$u(t) = k\{t; \varphi[t; t_0, x(t_0), u]\},$$

не указывает область существования функции k при условиях, накладываемых на множество допустимых управлений Ω .

Помимо этого, знание переменных состояние $x(t)$ возможно лишь по данным о выходных величинах, что требует операции определения обратного отображения

$$\eta^{-1} : Y \rightarrow X,$$

значениями которой и будут искомые величины

$$x(t) = \eta^{-1}[y(t)].$$

Сверх того, если такая операция осуществима. Необходимо иметь возможность оценить точность определения $x(t)$, т.е. получать оценку состояния $x(t_0)$.

Дадим строгое, определение понятия автоматического управления.

Определение 5.5. Автоматическим управлением динамической системой называется протекающий во времени процесс, удовлетворяющий следующим условиям:

1) Для объекта управления, удовлетворяющего определению 5.1, указаны целевое множество $S_0 \subset T \times X \times Y$ и множество допустимых управлений $\Omega_0 \subset \Omega$.

2) Определено отображение, называемое законом управления

$$k : T \times X \rightarrow U, \quad (5.15)$$

значениями которого являются величины управлений

$$u(t) = k\{t; \varphi[t; t_0, x(t_0), u]\}. \quad (5.16)$$

3) Управление $u(t) \in \Omega_0$ переводит объект управления из состояния $x(t_0) \in T \times X$ в состояние $x(t) \in S_0$ за отрезок времени $t_1 - t_0$ называемый временем перехода, и минимизирует функционал потерь качества управления

$$I_1 = I_1\{u, y(t_1), x(t_1), \varphi[t; t_0, x(t_0), u], \eta[t; x(t_1)], t_1\}.$$

4) Выходная функция $z(t, x)$ определяет попадание выходной величины y в целевое множество S_0 всякий раз, когда $x(t) \in S_0$, и допускает обратное отображение

$$\eta^{-1} : Y \rightarrow X, \quad (5.17)$$

со значениями

$$x(t) = \eta^{-1}[y(t)]. \quad (5.18)$$

5) Существует оценка $x_0(t)$ состояния системы по значениям выходной величины $y(t_0) : t_0 \leq t$.

Из приведенного определения мы видим, что часть условий относится к некоторой системе, решающей задачу автоматического управления.

Назовем регулятором математическую модель системы, состоящую из элемента, обеспечивающего оценку состояния объекта управления и элемента, формирующего закон управления.

Структурно-логическая схема управления объектом показано на рисунке 5.8. Принадлежащее множеству Ω_0 управление u воздействует на объект управления, обуславливая конкретные значения состояний $x \in X$ и выходных величин $y \in Y$. По значениям выходных величин определяются состояния x или

(при необходимости) их оценки x_0 из множества X , и формируется закон управления k . Он и обеспечивает выбор из множества Ω_0 нужной величины управления u . Качество управления контролируется I_1 , а возможность управления - принадлежностью значений x и y целевому множеству S_0 .

Сформулированные выше основные определения позволяют перечислить ряд задач общей теории систем, относящихся к проблеме управления.

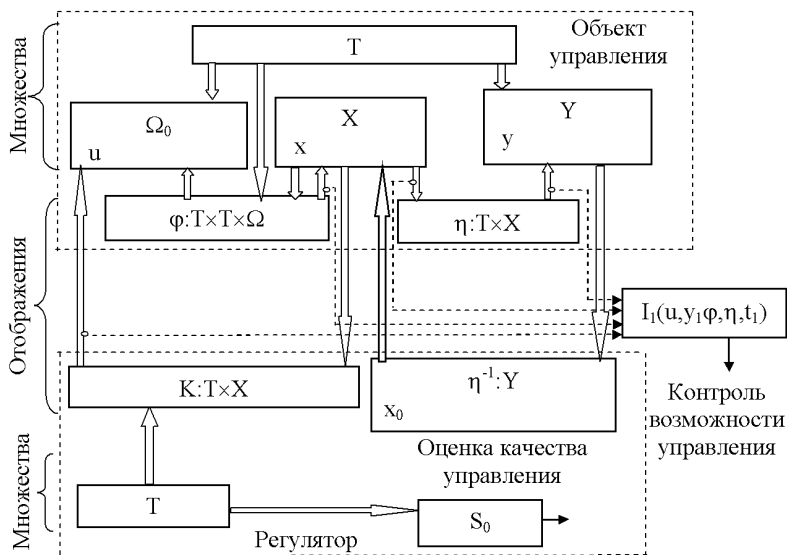


Рис. 5.8

а) *Задача идентификации (реализации) системы.*

В том случае, когда множеству управлений $u(t) \in \Omega_0$ однозначно соответствует множество выходных величин $y(t) \in Y$, можно указать семейство функций, определяемых отображением

$$f_r : T \times \Omega \rightarrow Y.$$

Каждая из которых ставит в соответствие управлению $u(t)$ выходную величину $y(t)$:

$$y(t) = f_{ri}[u(t)], \quad (5.19)$$

где i -номер данной зависимости.

В более сложном случае соответствие между $u(t)$ и $y(t)$ устанавливается, в свою очередь, через некоторые функции F и M этих величин

$$F[y(t)] = f_{ri}[M(u(t))]. \quad (5.20)$$

Построение математической модели динамической системы по этим данным и является задачей идентификации.

Чаще всего задача идентификации возникает тогда, когда по набору i -го количества экспериментальных данных, определяемых соотношениями (5.19) (5.20), необходимо определить внутренние свойства системы, например, переходную функцию состояний $\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$.

б) *Задача управляемости и наблюдаемости системы.*

Решение общей задачи управления требует выполнения условия, при котором необходимо найти такое управление $u(t)$, которое переводило бы систему из состояния $x(t_0)$ в состояние $x(t_1)$. Однако выполнить это условие далеко не просто. В действительности мы не можем заранее знать, найдется ли такое множество управлений $u(t) \in \Omega_0$, которое обеспечило бы пересечение множества $\{x(t), y(t)\}$ с целевым множеством S_0 за конечное время t_1 . Возможно, что лишь некоторое подмножество Ω_0 будет обеспечивать пересечение подмножеств из множеств $\{x(t), y(t)\}$ и S_0 т.е. часть управлений $u(t)$ будет не полностью решать задачу управления. Может оказаться, что вообще не

найдется непустого множества Ω_0 , удовлетворяющего условию общей задачи управления, то есть система будет неуправляема.

Таким образом ставится задача определения управляемости динамической системы, заключающаяся в нахождении условий, при которых переходная функция состояния $\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$ со значениями $x(t) = \varphi: [t; t_0, x(t_0), \omega$ существовала бы и была отлична от нуля всех управлений $u(t) \in \Omega_0$. Выполнение одного из условий управления объектом требует знания текущего состояния системы $x(t)$ по значениям выходной величины $y(t)$, т. е. существования отображения $\eta: Y \rightarrow X$. Задачей определения наблюдаемости динамической системы и является установление условий, при которых это отображение существует и отлично от нуля для всех $y(t) \in Y$ и $x(t) \in X$.

в) *Задача оптимального управления.*

Одной из основных задач теории систем является нахождение способов построения закона управления $k: T \times X \rightarrow U$ при заданных множествах X, Y, Ω_0 , обеспечивающего минимизацию функционала потерь качества управления

$$I_1 = I_1(u, y, x, \varphi, \eta, t_1).$$

Это – задача оптимального управления.

Контрольные вопросы

- 1) Как определяется понятие управление системой?
- 2) Как определяется понятие автоматического управления динамической системой?
- 3) Какие системы называются разомкнутыми какие замкнутыми?
- 4) Какие функции выполняет регулятор?

5.3. Линейная динамическая система

Понятие линейной динамической системы на уровне физических представлений обычно опирается на так называемый принцип суперпозиции, заключающийся в том, что общий выходной эффект от совокупности входных воздействий на систему может быть получен суммированием выходных величин от каждого воздействия в отдельности. Существует даже мнемоническая формула суперпозиции: «Следствие от суммы причин является суммой следствий от каждой из причин в отдельности». Однако с точки зрения общих определений, сформулированных в предыдущих параграфах, нам нет необходимости прибегать к столь неточным и туманным, с точки зрения математики, исходным данным. Сформулируем понятие линейной динамической системы, опираясь на определения 5.1 и 5.2.

Определение 5.6. *Линейной динамической системой* называется математическая модель совокупности взаимосвязанных элементов, удовлетворяющая аксиомам определения 5.1 и следующим условиям:

1) Заданы линейные (векторные) пространства состояний системы X , мгновенных входных воздействий U , их допустимых значений Ω , мгновенных значений выходных величин Y и их допустимых значений Γ .

2) Переходная функция состояния $\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$ со значениями

$$X(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega],$$

является линейной на множестве $X \times \Omega$, то есть имеет место соотношение

$$\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega] = \varphi(t; t_0, x, 0) + \varphi(t; t_0, 0, \omega), \quad (5.21)$$

и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = f[t; x, u(t)]. \quad (5.22)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

и запись координатных функций в виде матриц

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}, \quad G(t) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Матрица $F(t)$ имеет n строк и n столбцов, матрица $G(t)$ имеет n строк и m столбцов. Используя правило умножения матриц, уравнения (5.24) можно записать в виде

$$\frac{dX}{dt} = F(t)X + G(t)U. \quad (5.27)$$

Пусть пространство выходных величин F имеет размерность p . Тогда, в силу условия 3 определения 5.6, формула (5.23) может быть представлена в виде линейной комбинации составляющих вектора X и проекций вектора Y :

[illegible]

Записывая вектор Y в виде матрицы-столбца

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

и вводя матрицу координатных функций h_{ij}

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{p1} & h_{p2} & \cdots & h_{pn} \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

получим соотношения (5.28) в виде

$$Y(t) = H(t)X. \quad (5.31)$$

Определение 5.7. Линейная динамическая система (конечномерная и с непрерывным временем) описывается следующей системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= F(t)X + G(t)U, \\ Y(t) &= H(t)X. \end{aligned} \right\}. \quad (5.32)$$

Если матрицы F , G и H не зависят от времени, линейная динамическая система будет *стационарной*.

Первое уравнение (5.28) называется *уравнением состояний* системы, второе – *уравнением выходных величин*.

5.3.1. Переходная матрица и матрица импульсных переходных функций линейной системы

Определения линейной динамической системы, приведенные в предыдущем параграфе, устанавливают принципиальную основу исследования линейных систем.

Для получения ряда конструктивных результатов необходимо иметь такую характеристику системы, которая бы однозначно ей соответствовала и наиболее полно раскрывала свойства системы. К получению этой характеристики мы и приступим.

Рассмотрим дифференциальное уравнение линейной системы

$$\frac{dX}{dt} = F(t)X, \quad (5.33)$$

полученное из уравнения состояния системы

$$\frac{dX}{dt} = F(t)X + G(t)U \quad (5.34)$$

путем приравнивания нулю вектора входных воздействий $U(t)$.

Уравнение (5.33) будет описывать движение системы, возникающее только из-за начальных отклонений, которые определяются вектором начальных условий $X(t_0)$ в момент $t = t_0$.

Введем для этого вектора специальное обозначение

$$X(t_0) = \Lambda. \quad (5.35)$$

Всякий вектор $X(t)$, удовлетворяющий уравнению (5.33) при любом заданном векторе начальных условий Λ , называется решением уравнения $X(t) = X(t, \Lambda)$, причем для $t = t_0$ должно быть $X(t, \Lambda) = \Lambda$.

Обычно рассмотрение уравнений (5.34) и (5.35) начинается с доказательства теорем существования и единственности решения. Поскольку основной задачей дальнейшего рассмотрения является, главным образом, изучение свойств решения, мы ограничимся лишь формулировкой основной теоремы без доказательства.

Если матрица $F(t)$ непрерывна по t , для каждого значения t_0 и $t \in T$ и начальных условий Λ , $\|\Lambda\| < \infty$, существует единственное решение уравнения (5.33) $X(t_0, \Lambda)$.

Таким образом, для определенного значения t_0 существует множество векторов (функций) $X(t_0, \Lambda)$, зависящих от вектора начальных условий Λ . Это множество образует линейное пространство решений, т. к. в соответствии с определением 5.6 пространство состояний системы является линейным (векторным).

Теперь возникает вопрос, какова размерность этого пространства? Покажем, что *пространство решений* $X(t, \Lambda)$ уравнения (5.33) является n -мерным, где n – число строк матрицы $F(t)$.

Поскольку вектор Λ начальных условий является произвольным, выберем в линейном пространстве n линейно независимых постоянных векторов λ_i , каждый из которых является начальным вектором уравнения (5.33) и входит в числовое пространство R^n , т. к. начальные условия являются числами.

Эти векторы образуют базис n -мерного линейного пространства R^n . Таким образом, любой вектор начальных условий может быть разложен по этому базису:

$$\Lambda = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – координаты разложения.

В соответствии с теоремой о существовании и единственности решения для каждого вектора начальных условий в пространстве решений всегда найдется n однозначно определенных решений $X_i(t, \lambda_i)$ для n различных начальных условий λ_i уравнения (5.33), причем

$$X_i(t_0, \lambda_i) = \lambda_i.$$

Составим из них линейную комбинацию

$$X(t) = \alpha_1 X_1(t, \lambda_1) + \alpha_2 X_2(t, \lambda_2) + \dots + \alpha_n X_n(t, \lambda_n), \quad (5.36)$$

которая также будет решением уравнения (5.33).

Покажем, что эта комбинация линейно независима. Предположим обратное. Тогда при некоторых α_1 , отличных от нуля, функция $X(t)$, по крайней мере, при одном произвольном значении $t=\tau$ будет равна нулю:

$$X(\tau) = \alpha_1 X_1(\tau, \lambda_1) + \alpha_2 X_2(\tau, \lambda_2) + \dots + \alpha_n X_n(\tau, \lambda_n),$$

но в силу теоремы об единственном решении при заданных λ_i функция $X(\tau)$ должна быть равна нулю для всех $\tau \in T$, следовательно, и для $\tau = t_0$. При этом мы получим (учитывая, что $X_i(t, \lambda_i) = \lambda_i$)

$$X(t_0) = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n = 0.$$

Однако это противоречит условию линейной независимости векторов λ_i , следовательно, комбинация (5.36) является *линейно независимой*.

Так как координаты разложения (5.36) взяты теми же, что и в разложении (5.35), то при $t = t_0$ получим

$$\alpha_1 X_1(t_0, \lambda_1) + \alpha_2 X_2(t_0, \lambda_2) + \dots + \alpha_n X_n(t_0, \lambda_n) = \Lambda.$$

Следовательно, $X(t)$ действительно является решением при любом векторе начальных условий Λ . Таким образом, функции $X_i(t_0, \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ являются линейно независимыми векторами в n -мерном пространстве и образуют его базис.

Рассмотрим понятие фундаментальной матрицы решений. Для большей наглядности проведем необходимые рассуждения на примере системы уравнений 2-го порядка.

Введем в рассмотрение матрицу

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (5.37)$$

и матрицу-столбец

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

получим уравнение (5.33) в следующем развернутом виде (для простоты записи аргумент t опустим):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_{11}x_1 + f_{12}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_{21}x_1 + f_{22}x_2. \end{aligned} \right\}. \quad (5.39)$$

Если задать пару начальных условий в виде $x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = 0$, то уравнениям (5.39) должны удовлетворять некоторые частные решения $x_1(t, x_{10}, 0)$, $x_2(t, x_{10}, 0)$, которые обозначим $\gamma_{11}(t, t_0)$ и $\gamma_{21}(t, t_0)$. Первый индекс у этих решений обозначает номер функции $x(t)$ в уравнениях (5.39), а второй – номер отличного от нуля начального условия.

Меня теперь местами значения начальных условий, т. е. задавая $x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = x_{20}$, аналогично предыдущему запишем соответствующие частные решения в виде $\gamma_{11}(t, t_0)$ и $\gamma_{21}(t, t_0)$. Очевидно, функции $\gamma_{ij}(t, t_0)$ являются составляющими соответствующих векторов-решений, а значения начальных условий – составляющими начальных векторов:

$$\left. \begin{aligned} X_1(t, \lambda_1) &= \begin{bmatrix} \gamma_{11}(t, t_0) \\ \gamma_{21}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ X_2(t, \lambda_2) &= \begin{bmatrix} \gamma_{12}(t, t_0) \\ \gamma_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{20} \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\}. \quad (5.40)$$

При $t = t_0$ мы должны получить $X_1(t_0, \lambda_1) = \lambda_1$, $X_2(t_0, \lambda_2) = \lambda_2$. Обобщая эти соотношения на уравнения n -го порядка, можем записать

$$X_i(t, \lambda_i) = \begin{bmatrix} \gamma_{1i}(t, t_0) \\ \gamma_{2i}(t, t_0) \\ \vdots \\ \gamma_{ni}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

где первый индекс у функции γ обозначает номер строки матрицы $F(t)$, а второй – номер начального вектора λ_i .

Положим в нашем примере системы 2-го порядка начальные условия единичными, т. е. $x_{10}=1$, $x_{20} = 1$. Соответствующие частные решения обозначим через $\varphi_{ij}(t, t_0)$.

Тогда будут иметь место соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(t, t_0) &= \lambda_1 \varphi_{11}(t, t_0), \quad \gamma_{12}(t, t_0) = \lambda_2 \varphi_{12}(t, t_0), \\ \gamma_{21}(t, t_0) &= \lambda_1 \varphi_{21}(t, t_0), \quad \gamma_{22}(t, t_0) = \lambda_2 \varphi_{22}(t, t_0), \end{aligned}$$

или, в матричной форме

$$X_1(t, \lambda_1) = \lambda_1 \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t, t_0) \\ \varphi_{21}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad X_2(t, \lambda_2) = \lambda_2 \begin{bmatrix} \varphi_{12}(t, t_0) \\ \varphi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}.$$

Обобщая эти соотношения на уравнения n -го порядка, можем записать

$$X_i(t, \lambda_i) = \begin{bmatrix} \varphi_{1i}(t, t_0) \\ \varphi_{2i}(t, t_0) \\ \vdots \\ \varphi_{ni}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

и при $t = t_0$ $X_i(t, \lambda_i) = \lambda_i$, т. к.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ij}(t_0, t_0) &= 0 \text{ при } i \neq j, \\ \varphi_{ij}(t_0, t_0) &= 1 \text{ при } i = j \end{aligned} \right\}. \quad (5.43)$$

Вернемся к уравнениям (5.39). Полученные частные решения (5.40) приводят при их подстановке в уравнения (5.39) к следующим тождествам:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{11}}{dt} &= f_{11}\gamma_{11} + f_{12}\gamma_{21}, & \frac{d\gamma_{12}}{dt} &= f_{11}\gamma_{12} + f_{12}\gamma_{22}, \\ \frac{d\gamma_{21}}{dt} &= f_{21}\gamma_{11} + f_{22}\gamma_{21}, & \frac{d\gamma_{22}}{dt} &= f_{21}\gamma_{12} + f_{22}\gamma_{22}. \end{aligned}$$

Эти соотношения можно записать в виде элементов матриц

$$\begin{bmatrix} \frac{d\gamma_{11}}{dt} & \frac{d\gamma_{12}}{dt} \\ \frac{d\gamma_{21}}{dt} & \frac{d\gamma_{22}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}\gamma_{11} + f_{12}\gamma_{21} & f_{11}\gamma_{12} + f_{12}\gamma_{22} \\ f_{21}\gamma_{11} + f_{22}\gamma_{21} & f_{21}\gamma_{12} + f_{22}\gamma_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.44)$$

где каждый элемент правой матрицы равен соответствующему элементу левой матрицы. Применяя формулу умножения двух матриц, можно установить, что правая матрица является произведением двух матриц

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} f_{11}\gamma_1 + f_{12}\gamma_2 & f_{11}\gamma_2 + f_{12}\gamma_2 \\ f_{21}\gamma_1 + f_{22}\gamma_2 & f_{21}\gamma_2 + f_{22}\gamma_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Введем обозначение

$$\Gamma(t, t_0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix},$$

и, используя выражение (5.37), запишем соотношение (5.44) в виде

$$\frac{d\Gamma(t, t_0)}{dt} = F(t)\Gamma(t, t_0). \quad (5.46)$$

Для системы n -го порядка матрица $\Gamma(t, t_0)$ будет иметь вид

$$\Gamma(t, t_0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

Матрица $\Gamma(t, t_0)$ называется *фундаментальной матрицей решений*. Столбцы этой матрицы линейно независимы, следовательно, определитель матрицы отличен от нуля. В самом деле, используя формулу (5.41), матрицу (5.47) можно записать в виде

$$\Gamma(t, t_0) = [X_1(t, \lambda_1), X_2(t, \lambda_2), \dots, X_n(t, \lambda_n)],$$

где функции (векторы) $X_i(t, \lambda_i)$, играющие здесь роль столбцов, линейно независимы. Подставляя в последнее выражение значения $X_i(t, \lambda_i)$, определяемые формулой (5.42), получим

$$\Gamma(t, t_0) = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Введем обозначения

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (5.48)$$

Тогда

$$\Gamma(t, t_0) = \Phi(t, t_0) \Lambda_0.$$

Матрица $\Phi(t, t_0)$ называется *переходной матрицей системы*. Смысл этого наименования установим ниже.

Заметим, что вектор Λ_0 — это начальный вектор, построенный на составляющих λ_i с координатами разложения α_i , равными единице. Если все составляющие начального вектора Λ_0 сделать единичными, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$, то фундаментальная матрица решений совпадет с переходной матрицей. Последняя при $t = t_0$ становится единичной, т. к. имеют место значения φ_{ij} , определяемые (5.43):

$$\Phi(t_0, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I. \quad (5.49)$$

На основании соотношения (5.46) можно заключить, что переходная матрица удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = F(t)\Phi(t, t_0). \quad (5.50)$$

Сравнивая это выражение с уравнением (5.33), видим, что $\Phi(t, t_0)$ можно трактовать как вектор в n -мерном пространстве с линейно независимыми составляющими в виде строк матрицы (5.48).

Введение понятия переходной матрицы позволяет поставить задачу отыскания непосредственной связи между вектором состояний системы и вектором входных воздействий.

Будем искать решение уравнения (5.34) в виде

$$X(t) = \Phi(t, t_0)K(t, t_0), \quad (5.51)$$

где $K(t, t_0)$ – некоторая матрица, зависящая от вектора входного сигнала $U(t)$.

Дифференцируя соотношение (5.51) по времени, получим

$$\frac{dX}{dt} = \Phi(t, t_0) \frac{dK}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} K(t, t_0).$$

Подставляя значения $X(t)$ из (5.51) и полученное выражение для dX/dt в уравнение (5.34), будем иметь

$$\Phi(t, t_0) \frac{dK}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} K(t, t_0) = F(t)\Phi(t, t_0)K(t, t_0) + G(t)U,$$

или

$$\Phi(t, t_0) \frac{dK}{dt} = G(t)U, \quad (5.52)$$

т. к. на основании (5.50) имеет место тождество

$$\frac{d\Phi}{dt} K(t, t_0) = F(t)\Phi(t, t_0)K(t, t_0).$$

Поскольку столбцы переходной матрицы $\Phi(t, t_0)$ линейно независимы, матрица является невырожденной и имеет обратную матрицу $\Phi^{-1}(t, t_0)$. Умножая соотношение (5.52) слева на $\Phi^{-1}(t, t_0)$ и учитывая свойство обратной матрицы

$$\Phi^{-1}(t, t_0) \Phi(t, t_0) = I,$$

получим

$$\frac{dK}{dt} = \Phi^{-1}(t, t_0) G(t) U.$$

Интегрируя это выражение в пределах от t до t_0 , будем иметь

$$K(t, t_0) = C + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s, t_0) G(s) U(s) ds,$$

причем, когда $t = t_0$, $C = K(t_0, t_0)$. Умножая соотношение (5.51) слева на $\Phi^{-1}(t, t_0)$ положив затем $t = t_0$ и учитывая на основании (5.49), что $\Phi^{-1}(t, t_0) = I$, получим $C = X(t_0)$.

Подставляя значения $K(t, t_0)$ и C в формулу (5.51), окончательно будем иметь

$$X(t) = \Phi(t, t_0) X(t_0) + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s, t_0) G(s) U(s) ds. \quad (5.53)$$

Формула (5.53) устанавливает связь между вектором состояния системы $X(t)$, вектором начальных условий $X(t_0)$ и вектором входных воздействий $U(t)$ через переходную матрицу системы $\Phi(t, t_0)$. Таким образом, переходная матрица является характеристикой линейной системы, полностью определяющей ее динамические свойства. Если входное воздействие отсутствует, $U(t) = 0$, вектор состояния системы определяет так называемое *свободное* движение системы. На основании формулы (5.53) он будет равен

$$X(t) = \Phi(t, t_0) X(t_0), \quad U(t) = 0. \quad (5.54)$$

Полученное соотношение показывает, что матрица $\Phi(t, t_0)$ определяет переход системы из начального состояния в момент t_0 в состояние $X(t)$, соответствующее моменту времени t . По этой причине $\Phi(t, t_0)$ и называется *переходной матрицей системы*.

Если до подачи входного воздействия система находилась в покое $X(t_0) = 0$, вектор состояния системы после подачи входного воздействия будет определять *вынужденное* движение. При этом формула (5.53) примет вид

$$X(t) = \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s, t_0) G(s) U(s) ds, \quad X(t_0) = 0.$$

Установим теперь некоторые свойства переходной матрицы.

Используя формулу (5.54), можем записать

$$\begin{aligned} X(t_1) &= \Phi(t_1, t_0) X(t_0), \\ X(t_2) &= \Phi(t_2, t_1) X(t_1), \end{aligned}$$

откуда

$$X(t_2) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) X(t_0),$$

С другой стороны, имеем

$$X(t_2) = \Phi(t_2, t_0) X(t_0),$$

следовательно,

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0). \quad (5.55)$$

Полученная формула является конкретной реализацией полугруппового свойства переходной функции состояний, данного в общем определении 5.1.

Положив в формуле (5.55) $t_2 = t_0$, $t_1 = t$, получим

$$\Phi(t_0, t_0) = \Phi(t_0, t) \Phi(t, t_0) = I,$$

откуда

$$\Phi^{-1}(t_0, t) = \Phi(t, t_0). \quad (5.56)$$

Формулы (5.55) и (5.56) можно применить для преобразования соотношения (5.53) к более удобной форме. Заменим в нем обратную матрицу $\Phi^{-1}(s, t_0)$ по формуле (5.56) на $\Phi^{-1}(t_0, s)$, введем под знак интеграла матрицу $\Phi(t, t_0)$, т. к. она не зависит от переменной интегрирования s , и заменим полученное произведение $\Phi(t, t_0)\Phi(t_0, s)$ по формуле (5.55) на $\Phi(t, s)$. Окончательно получим

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)G(s)U(s)ds. \quad (5.57)$$

Эта формула более удобна для расчетов, чем (5.53), т. к. не содержит обратной матрицы.

Рассмотрим линейную систему, состояние которой для моментов времени $t \leq \xi$ характеризуется нулевым начальным вектором $X(\xi) = 0$. В момент $t = \xi$ на систему подается входное воздействие

$$U(t) = N\delta(t - \xi), \quad (5.58)$$

где N матрица – столбец чисел

$$N = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{bmatrix}. \quad (5.59)$$

Рассматриваемое входное воздействие представляет собой набор импульсных входных сигналов в виде дельта-функции с «площадями» $n_1, n_2, \dots, n_m$. Последние определяются как предел выражения

$$n_i = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\alpha}(t - \xi)dt,$$

где $\delta_\alpha(t - \xi)$ – любая непрерывная четная функция с параметром α такая, что при $\alpha \rightarrow 0$ будет $\delta_\alpha(t - \xi) \rightarrow \delta(t - \xi)$. Сама дельта-функция определяется соотношениями

$$\begin{aligned} a) \quad \delta(t - \xi) &= \begin{cases} 0, & t \neq \xi, \\ \infty, & t = \xi, \end{cases} \\ б) \quad f(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \xi) dt. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Подставим в формулу (5.57) выражение (5.58) и положим $X(t_0) = 0$. Будем иметь

$$X(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, s) G(s) N \delta(s - \xi) ds.$$

Интегрирование матрицы есть интегрирование каждого из ее элементов. Поэтому к полученному выражению применима формула (5.60), определяющая основное свойство дельта-функции. В результате получим

$$X(t) = \Phi(t, \xi) G(\xi) N. \quad (5.61)$$

Положим теперь «площади» всех действующих на входе дельта-функции равными единице. При этом

$$N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Получаемое при таком воздействии множество выходных сигналов есть не что иное, как множество импульсных переходных функций. Поэтому получаемой матрице целесообразно дать

специальное обозначение и наименование *матрицы импульсных переходных функций*

$$W(t, \xi) = \Phi(t, \xi)G(\xi). \quad (5.62)$$

Так как матрица $\Phi(t, \xi)$ квадратная (содержит n строк и n столбцов), а матрица $G(\xi)$ имеет n строк и m столбцов, их произведение будет иметь n строк и m столбцов. Запишем матрицу $W(t, \xi)$ в развернутом виде

$$W(t, \xi) = \begin{bmatrix} w_{11}(t, \xi) & w_{12}(t, \xi) & \cdots & w_{1m}(t, \xi) \\ w_{21}(t, \xi) & w_{22}(t, \xi) & \cdots & w_{2m}(t, \xi) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n1}(t, \xi) & w_{n2}(t, \xi) & \cdots & w_{nm}(t, \xi) \end{bmatrix}, \quad (5.63)$$

где функции $w_{ij}(t, \xi)$ являются реакцией i -го выхода системы на j -й вход (рис. 5.9). Тогда, очевидно, реакция i -го выхода на все m входов будет равна сумме элементов i -й строки матрицы (5.63). Формулу (5.61) с учетом соотношения (5.62) можно записать в виде

$$X(t) = W(t, \xi)N,$$

или, заменяя ξ на t_0

$$X(t) = W(t, t_0)N. \quad (5.64)$$

Сравнивая эту формулу с соотношением (5.54) для определения вектора состояний при свободном движении системы, видим, что матрица импульсных переходных функций отображает вектор «энергий» дельта-функции в текущее состояние системы. Это обстоятельство позволяет осуществить пересчет вектора начальных условий $X(t_0)$ в эквивалентный вектор входных сигналов $U_{\text{в}}(t) = N\delta(t - t_0)$. Тем самым во

всех случаях вектор состояний системы можно определять как результат входных воздействий на систему, находившуюся до этого в покое. При этом формула (5.57) может быть заменена следующей формулой с учетом соотношения (5.62):

$$X(t) = \int_{t_0}^t W(t, s)[U_s + U_{\text{с}}(s)]ds, \quad (5.65)$$

где

$$U_{\text{с}}(t) = N\delta(t - t_0). \quad (5.66)$$

Подставляя (5.66) в формулу (5.65), легко убедиться в справедливости такой замены.

Для определения значений матрицы-столбца N , соответствующих значениям вектора начальных условий $X(t_0)$, воспользуемся выражениями (5.62) (заменив ξ на t_0) и (5.54):

$$\begin{aligned} X(t) &= \Phi(t, t_0)G(t_0)N, \\ X(t) &= \Phi(t, t_0)X(t_0). \end{aligned}$$

Приравнявая правые части этих соотношений и определяя N , получим

$$N = G^{-1}(t_0)X(t_0). \quad (5.67)$$

Контрольные вопросы

1. Какая система называется динамической?
2. Как определяется переходная характеристика линейной системы?
3. Как определяется импульсная переходная характеристика линейной системы?
4. Какая матрица называется фундаментальной матрицей решений?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При построении автоматизированных систем управления используются различные математические методы. Поэтому для подготовки бакалавров по специальности 5В0702 «Автоматизация и управление» для повышения их математической подготовки изучается дисциплина «Математические основы теории систем».

По этой дисциплине студенты изучают основы теории множеств, графов, математической логики, матриц, теории систем.

При рассмотрении основ теории множеств вводится понятие «*множество*», рассматриваются различные операции со множествами на основе понятий «*отображение*», «*соответствие*» вводится понятие функции. В разделе «Основы теории графов» рассмотрено понятие графа, различные виды графов, выполнение операций пересечения и объединения графов. При рассмотрении алгебры логики вводятся понятия «*логическая переменная*», «*логическая функция*», приведены основные логические операции. Далее рассмотрены элементарные логические функции, нормальные и совершенные нормальные формы логических функций. Приведены методы минимизации записи логических функций. Далее рассматриваются основы теории матриц, приведено понятие матрицы, виды матриц, операции с матрицами, вводится понятие «*обратная матрица*», «*методы определения обратной матрицы*». Рассмотрены вопросы применения теоремы Кели-Гамильтона для вычисления степеней матрицы, приведены функции от матриц. Далее рассмотрены основы теории систем. Вводятся понятия «*входное воздействие*», «*состояние системы*», «*выходной сигнал*», на основе этих понятий формируется описание системы в пространстве состояний. Приведены понятия «*динамическая система*», «*управление системой*». Все рассмотренные разделы подкрепляются решенными задачами.

В приложении приведен план проведения практических занятий и задачи для самостоятельного решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Коришунов Ю.М.* Математические основы кибернетики. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 496 б.
2. *Кузин Л.Т.* Основы кибернетики. – Т. 1. Математические основы кибернетики. – М.: Энергия, 1973. – 504 б.
3. *Кузин Л.Т.* Основы кибернетики. – Т. 2. Основы кибернетических моделей. – М.: Энергия, 1979. – 584 б.
4. Математические основы теории автоматического регулирования. – Т. 1/ Под ред. *Б.К. Чемоданова*. – М.: Высшая школа, 1977. – 366 б.
5. Математические основы теории автоматического регулирования. – Т. 2 / Под ред. *Б.К. Чемоданова*. – М.: Высшая школа, 1977. – 455 б.
6. *Бейсембаев А.А.* Жүйелер теориясының негіздері. – Алматы: КазҰТУ, 2003. – 120 б.
7. *Хасеинов К.А.* Математика канондары: Оқулық. – Алматы, 2004. – 691 б.
8. *Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И.* Математика 1: Оқу құралы. – Алматы, 2010. – 336 б.
9. *Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И.* Математика 2. Оқу құралы. – Алматы. 2010 – 349 б.
10. *Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И.* Математика 3: Оқу құралы. – Алматы, 2010 – 185 б.
11. *Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И.* Математика 4. Оқу құралы. – Алматы, 2010. – 259 б.
12. *Сақабеков А.* Техникадағы математика: Оқу құралы. – Алматы: ҚБТУ, 2010. – 294 б.
13. *Хасеинов К.А.* Инженерлік математиканың есептері мен жаттығулары. – Алматы: Ақбар, 2004. – 691 б.
14. *Хайруллин Е.М., Бектасова Т., Кныкова А.У., т.б.* Жоғары математика есептер жинағы: Оқу құралы. – 1 – білім. – Алматы: КазҰТУ, 2004. – 254 б.
15. *Хайруллин Е.М., Бектасова Т., Кныкова А.У., т.б.* Жоғары математика есептер жинағы: Оқу құралы. – 2 – бөлім. – Алматы: КазҰТУ, 2004. – 236 б.

16. Хайруллин Е.М., Бектасова Т., Кныкова А.У., т.б. Жоғары математика есептер жинағы: Оқу құралы. – 3 білім. – Алматы: ҚазҰТУ, 2004. – 362 б.

17. Акимов О.Е. Дискретная математика, логика, группы, графы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 352 б.

18. Квакернак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 650 б.

19. Дидук Г.А. Методы теории матриц и их применение для исследования и проектирования систем управления. – Л.: СЗПИ. – 83 б.

20. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971. – 340 б.

21. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. Метод пространства состояний. – М.: Наука, 1970. – 703 б.

22. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика. – М.: Энергия, 1980. – 344 б.

23. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука. 1969. – 367 б.

24. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука. 1966. – 576 б.

25. Берталанфи Л. фон. Общая теория систем – критический обзор. – В кн.: Исследования по общей теории систем: Сб. переводов. – М.: Прогресс, 1969. – С. 23–82.

26. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы / Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 311 с.

27. Bertalanffy L. von. General System Theory: foundations, development, applications. Re-vised edition. – New York: George Braziller, 1968.

28. Laszlo Ervin. The Systems View of the World: a Holistic Vision for Our Time. Hampton press, Inc., 1996.

29. Klir, George Jiri. Methodology in Systems Modelling and Simulation, with B. P. Zeigler, M. S. Elzas, and T.I. Oren (ed.), North-Holland, Amsterdam. 1979.

30. Laszlo, Ervin. The Systems View of the World. The natural philosophy of the new developments in the sciences. New York: George Brazillier. 1972.

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение.....	3
1.	Основы теории множеств.....	5
1.1.	Введение в теорию множеств.....	5
1.1.1.	Множества и подмножества.....	10
1.2.	Алгебра множеств.....	12
1.3.	Соответствия между множествами и их элементами.....	20
2.	Основы теории графов.....	25
2.1.	Введение в теорию графов.....	25
2.1.1.	Матричное представление графов.....	29
2.2.	Разновидности графов и выполнение операций с графами.....	32
2.2.1.	Действия над графами.....	34
3.	Элементы математической логики.....	39
3.1.	Логические функции и способы их представления.....	39
3.1.1.	Основные логические операции.....	41
3.1.2.	Законы и тождества алгебры логики.....	43
3.2.	Элементарные логические функции.....	47
3.3.	Нормальные и совершенные нормальные формы логических функций.....	53
3.3.1.	Минимизация логических функций.....	56
4.	Элементы теории матриц.....	59
4.1.	Введение в теорию матриц.....	59
4.1.1.	Произведение матриц.....	63
4.1.2.	Матричная запись системы линейных алгебраических уравнений.....	68
4.2.	Треугольные матрицы и характеристическое уравнение.....	69
4.2.1.	Характеристическое уравнение. Собственные числа и собственные векторы.....	74
4.2.2.	Связь между собственными числами и элементами матрицы. След матрицы.....	75
4.2.3.	Собственные векторы.....	77

4.3.	Теорема Кели-Гамильтона и ее применение.....	82
4.3.1.	Преобразование подобия.....	86
4.4.	Диагонализация матриц и функции от матриц...	88
4.4.1.	Функции от матриц.....	92
4.4.2.	Матричные степенные ряды.....	93
4.4.3.	Теорема Сильвестра.....	95
4.4.4.	Норма матрицы.....	97
5.	Основы теории систем.....	99
5.1.	Динамическая система.....	99
5.2.	Управление системой.....	111
5.3.	Линейная динамическая система.....	122
5.3.1.	Переходная матрица и матрица импульсных переходных функций линейной системы.....	125
	Заклучение.....	141
	Библиографический список.....	142
	Содержание.....	144
	Приложение 1. План проведения практических занятий.....	146
П1.1.	Выполнение различных операций с множествами.....	146
П1.2.	Произведение множеств, проекции, диаграммы Эйлера-Венна.....	151
П1.3.	Решение задач по теории графов.....	156
П1.4.	Решение задач по математической логике.....	161
П1.5.	Выполнение элементарных операций с матрицами.....	164
П1.6.	Выполнение операций с треугольными матрицами и вычисление собственных значений матрицы.....	168
П1.7.	Решение задач по теории систем.....	172

Приложение 1

План проведения практических занятий

П1.1. Выполнение различных операций с множествами

Над множествами можно выполнять различные операции. С ними можно производить объединение, пересечение, вычитание. Рассмотрим эти операции подробнее.

Пусть заданы следующие множества: $A = \{a, b, f, g, h\}$, $B = \{f, g, h, m, n, o, p\}$ и $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Рассмотрим операцию пересечения множеств А и В. В результате получится множество, состоящее из общих элементов, являющихся элементами обеих множеств А и В:

$$A \cap B = \{a, b, f, g, h\} \cap \{f, g, h, m, n, o, p\} = \{f, g, h\}.$$

Операцию пересечения можно производить и с несколькими множествами, например, можно выполнить пересечение множеств А, В и С:

$$\begin{aligned} & A \cap B \cap C = \\ & = \{a, b, f, g, h\} \cap \{f, g, h, m, n, o, p\} \cap \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{f, g\} \end{aligned}$$

Рассмотрим операцию объединения множеств. Выполним операцию объединения множеств А и В. В результате получится множество, элементы которого состоят из всех элементов множеств А и В:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{a, b, f, g, h\} \cup \{f, g, h, m, n, o, p\} = \\ &= \{a, b, f, g, h, m, n, o, p\} \end{aligned}$$

Операцию объединения можно производить и с несколькими множествами, например, можно объединить множества А, В и С, в результате получится множество, состоящее из всех элементов трех рассматриваемых множеств:

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C &= \\ &= \{a, b, f, g, h\} \cup \{f, g, h, m, n, o, p\} \cup \{a, b, c, d, e, f, g\} = \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\}. \end{aligned}$$

Следующей операцией является операция вычитания множеств. В результате вычитания из первого множества второго получится множество, состоящее из элементов первого множества, не являющихся элементами второго множества. Пусть заданы множества А и В, выполним операцию вычитания

$$A \setminus B = \{a, b, f, g, h\} \setminus \{f, g, h, m, n, o, p\} = \{a, b\}.$$

Выполним эту операцию в различных вариациях со множествами А, В и С:

$$\begin{aligned} B \setminus A &= \{f, g, h, m, n, o, p\} \setminus \{a, b, f, g, h\} = \{m, n, o, p\}; \\ A \setminus C &= \{a, b, f, g, h\} \setminus \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{h\}; \\ C \setminus A &= \{a, b, c, d, e, f, g\} \setminus \{a, b, f, g, h\} = \{c, d, e\}; \\ C \setminus B &= \{a, b, c, d, e, f, g\} \setminus \{f, g, h, m, n, o, p\} = \{a, b, c, d, e\}. \end{aligned}$$

Множество, которое объединяет все возможные рассматриваемые множества, называют универсальным множеством и обозначают I. Пусть заданы множества А, В и С, сформируем универсальное множество

$$\begin{aligned} I &= A \cup B \cup C = \\ &= \{a, b, f, g, h\} \cup \{f, g, h, m, n, o, p\} \cup \{a, b, c, d, e, f, g\} = \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\}. \end{aligned}$$

На основе этого понятия вводится понятие «дополнение множества». Если I универсальное множество, то дополнение множества А записывается в виде $\overline{A}$ и определяется как вычитание из универсального множества, заданного множества А:

$$\begin{aligned}\bar{A} = I \setminus A &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\} \setminus \{a, b, f, g, h\} = \\ &= \{c, d, e, m, n, o, p\}\end{aligned}$$

На основе этого определения можно получить дополнения множеств В и С:

$$\begin{aligned}\bar{B} &= I \setminus B = \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\} \setminus \{f, g, h, m, n, o, p\} = \{a, b, c, d, e\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{C} &= I \setminus C = \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\} \setminus \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{h, m, n, o, p\}.\end{aligned}$$

Если известно множество А и его дополнение $\bar{A}$, то в результате объединения этих множеств можно определить универсальное множество I

$$\begin{aligned}I = A \cup \bar{A} &= \{a, b, f, g, h\} \cup \{c, d, e, m, n, o, p\} = \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\}\end{aligned}$$

Рассмотренные выше операции объединения, пересечения и вычитания множеств можно производить совместно. Приведем некоторые примеры с определенными выше множествами А, В и С. Необходимо определить множество, полученное в результате выполнения следующих операций:

$$((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{C})) \cap ((A \setminus \bar{C}) \cup (\bar{B} \setminus \bar{A})) = .$$

Для решения данной задачи вначале необходимо определить порядок выполнения операций. В этом случае порядок выполнения операций задается скобками.

Определим множества, полученные в результате выполнения операций внутри скобок:

$$\begin{aligned}A \cap \bar{B} &= \{a, b, f, g, h\} \cap \{a, b, c, d, e\} = \{a, b\}, \\ B \cap \bar{C} &= \{f, g, h, m, n, o, p\} \cap \{h, m, n, o, p\} = \{h, m, n, o, p\}.\end{aligned}$$

Далее можно выполнить операции с множествами внутри первой большой скобки:

$$(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap C) = \\ = \{a, b\} \cup \{h, m, n, o, p\} = \{a, b, h, m, n, o, p\}.$$

Рассмотрим вторую скобку:

$$A \setminus \bar{C} = \{a, b, f, g, h\} \setminus \{h, m, n, o, p\} = \{a, b, f, g\}, \\ \bar{B} \setminus \bar{A} = \{a, b, c, d, e\} \setminus \{c, d, e, m, n, o, p\} = \{a, b\}.$$

Определим результат выполнения операций внутри второй скобки:

$$(A \setminus \bar{C}) \cup (\bar{B} \setminus \bar{A}) = \{a, b, f, g\} \cup \{a, b\} = \{a, b, f, g\}.$$

На основе полученных результирующих множеств определим множество, полученное в результате выполнения всех операций:

$$((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{C})) \cap ((A \setminus \bar{C}) \cup (\bar{B} \setminus \bar{A})) = \\ = \{a, b, h, m, n, o, p\} \cap \{a, b, f, g\} = \{a, b\}.$$

Подобным образом можно выполнять различные операции со множествами.

Задачи

Пусть заданы множества А,В,С и универсальное множество I согласно приведенной таблице

№	A	B	C	I
0	{a,b,c,d}	{c,d,e,f}	{e,f,g,h}	{a,b,c,d,e,f,g,h,m,n}
1	{a,b,e,f}	{e,f,g,h}	{g,h,m,n}	{a,b,c,d,e,f,g,h,m,n,o}
2	{c,d,e,f}	{e,f,m,n}	{m,n,o,p}	{c,d,e,f,g,h,m,n,o,p}
3	{b,e,f,g}	{f,g,h,m}	{h,m,n,o}	{b,c,d,e,f,g,h,m,n,o}
4	{e,f,g,h}	{g,h,m,n}	{m,n,o,p}	{c,d,e,f,g,h,m,n,o,p}
5	{f,g,h,m}	{h,m,n,o}	{a,n,o,p}	{a,d,e,f,g,h,m,n,o,p}
6	{g,h,m,n}	{m,n,o,p}	{a,b,o,p}	{a,b,e,f,g,h,m,n,o,p}
7	{a,b,g,h}	{g,h,m,n}	{m,n,o,p}	{a,b,c,d,g,h,m,n,o,p}
8	{c,d,g,h}	{g,h,o,p}	{a,b,o,p}	{a,b,c,d,g,h,m,n,o,p}
9	{e,f,o,p}	{a,b,e,f}	{a,b,g,h}	{a,b,e,f,g,h,m,n,o,p}

необходимо выполнить следующие операции:

- 1) $(A \cap B) \cup (B \cap C) = ?$
- 2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) = ?$
- 3) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = ?$
- 4) $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) = ?$
- 5) $(\overline{A} \setminus \overline{C}) \cup (\overline{B} \setminus \overline{C}) = ?$

Контрольные вопросы.

1. Как выполняется операция объединения множеств?
2. Как выполняется операция пересечения множеств?
3. Как выполняется операция вычитания множеств?
4. Какое множество называется универсальным?
5. Как определяется дополнение множества?

П1.2. Произведение множеств, проекции, диаграммы Эйлера-Венна

В результате прямого произведения множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ получится множество различных кортежей длиной равной n (упорядоченных n -нок), вида

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n \}.$$

Проекция такого множества представляет собой множество проекций кортежей данного множества. Пусть V – множество кортежей v , тогда множество проекций кортежей будет следующего вида: $Pr_i V = \{ Pr_i v : v \in V \}$. Рассмотрим практические задачи на прямое произведение множеств. Пусть заданы следующие множества $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \{c, d\}$ и $D = \{d, e\}$. Необходимо выполнить операцию прямого произведения множеств $V = A \times B \times C \times D$. Для этого необходимо сперва перемножить множества A и B , в результате получится множество кортежей длиной равной двум:

$$A \times B = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle \}.$$

Далее полученный результат умножим на множество C , в результате получится множество кортежей длиной равной трем:

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \\ = \{ \langle a, b, c \rangle, \langle a, c, c \rangle, \langle b, b, c \rangle, \langle b, c, c \rangle, \langle a, b, d \rangle, \langle a, c, d \rangle, \langle b, b, d \rangle, \langle b, c, d \rangle \}. \end{aligned}$$

После этого можно выполнить операцию прямого произведения результирующего множества на множество D , получим множество кортежей длиной равной четырем:

$$\begin{aligned}
 V &= A \times B \times C \times D = \\
 &= \{ \langle a, b, c, d \rangle, \langle a, c, c, d \rangle, \langle b, b, c, d \rangle, \langle b, c, c, d \rangle, \\
 &\quad \langle a, b, d, d \rangle, \langle a, c, d, d \rangle, \langle b, b, d, d \rangle, \langle b, c, d, d \rangle, \\
 &\quad \langle a, b, c, e \rangle, \langle a, c, c, e \rangle, \langle b, b, c, e \rangle, \langle b, c, c, e \rangle, \langle a, b, d, e \rangle, \\
 &\quad \langle a, c, d, e \rangle, \langle b, b, d, e \rangle, \langle b, c, d, e \rangle \}
 \end{aligned}$$

Далее определим различные проекции полученного множества кортежей:

$$Pr_{1,2}V = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle \},$$

$$Pr_{1,3}V = \{ \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle \},$$

$$\begin{aligned}
 Pr_{1,2,3}V &= \\
 &= \{ \langle a, b, c \rangle, \langle a, c, c \rangle, \langle b, b, c \rangle, \langle b, c, c \rangle, \langle a, b, d \rangle, \langle a, c, d \rangle, \langle b, b, d \rangle, \langle b, c, d \rangle \},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Pr_{1,2,4}V &= \\
 &= \{ \langle a, b, d \rangle, \langle a, c, d \rangle, \langle b, b, d \rangle, \langle b, c, d \rangle, \langle a, b, e \rangle, \langle a, c, e \rangle, \langle b, b, e \rangle, \langle b, c, e \rangle \}.
 \end{aligned}$$

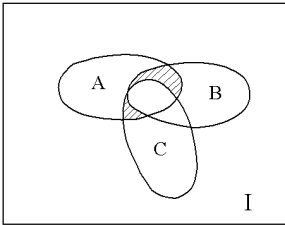


Рис. П.1

По заданной диаграмме Эйлера-Венна необходимо определить выражение описывающее заштрихованную область (рисунок П.1). Для этого разобъем исходную область на две части. Первая часть представляет собой множество находящееся внутри множеств А и В и снаружи множества С, поэтому результирующее множество можно описать в виде следующего выражения:

$$(A \cap B) \setminus C.$$

Далее опишем вторую часть являющуюся внутренней частью множеств А и С и наружной частью множества В, которая описывается выражением вида:

$$(A \cap C) \setminus B.$$

Далее объединим полученные множества и опишем заштрихованную область в виде

$$((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B).$$

Пусть заданы следующие множества $A = \{a, b, f, g, h\}$, $B = \{f, g, h, m, n, o, p\}$ и $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Докажем на примере этих множеств правильность законов теории множеств. Сперва рассмотрим сочетательный закон:

$$\begin{aligned} (A \cap C) \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap C. \\ A \cap C &= \{a, b, f, g, h\} \cap \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{a, b, f, g\}; \\ B \cap C &= \{f, g, h, m, n, o, p\} \cap \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{f, g\}; \\ (A \cap C) \cup (B \cap C) &= \{a, b, f, g\} \cup \{f, g\} = \{a, b, f, g\}. \\ A \cup B &= \{a, b, f, g, h\} \cup \{f, g, h, m, n, o, p\} = \\ &= \{a, b, f, g, h, m, n, o, p\}, \\ (A \cup B) \cap C &= \\ &= \{a, b, f, g, h, m, n, o, p\} \cap \{a, b, c, d, e, f, g\} = \{a, b, f, g\}. \end{aligned}$$

Последнее выражение доказывает правильность сочетательного закона.

Теперь докажем законы де Моргана, используя вышеприведенные множества. Первый закон имеет следующий вид:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Вычислим левую часть данного выражения, для этого необходимо вначале определить универсальное множество I:

$$\begin{aligned} I &= A \cup B \cup C = \\ &= \{a, b, f, g, h\} \cup \{f, g, h, m, n, o, p\} \cup \{a, b, c, d, e, f, g\} = \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p\}, \end{aligned}$$

отсюда

$$\overline{A \cap B} = \{a, b, c, d, e, m, n, o, p\}.$$

Вычислим правую часть выражения:

$$\begin{aligned} \overline{A} \cup \overline{B} &= \{c, d, e, m, n, o, p\} \cup \{a, b, c, d, e\} = \\ &= \{a, b, c, d, e, m, n, o, p\}. \end{aligned}$$

Полученные результаты совпали, что говорит о правильности первого закона де Моргана.

Докажем следующий закон де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Вычислим правую часть этого выражения:

$$\overline{A \cup B} = \{c, d, e\}.$$

Вычислим левую часть исходного выражения:

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{c, d, e, m, n, o, p\} \cap \{a, b, c, d, e\} = \{c, d, e\}.$$

Последнее выражение подтверждает правильность закона де Моргана.

Задачи.

Пусть заданы множества A, B, C и D согласно приведенной таблице

№	A	B	C	D
0	{a,b,c}	{b,c,d}	{1,2}	{2,4}
1	{a,b}	{b,c,d}	{1,2,3}	{3,4}
2	{a,b,c}	{c,d}	{1,2}	{2,3,4}
3	{b,c}	{b,c,d}	{1,2,3}	{3,4}
4	{c,d}	{a,b,c}	{1,2}	{2,3,4}
5	{a,c}	{b,c,d}	{2,3}	{1,3,4}
6	{a,d}	{a,b,d}	{3,4}	{1,2,3}
7	{b,c}	{a,c,d}	{1,2,4}	{2,4}
8	{a,c}	{a,b,d}	{1,2,3}	{2,3}
9	{a,b}	{a,c,d}	{1,2,}	{2,3,4}

Выполните следующие операции:

- 1) $V = A \times B \times C \times D$,
- 2) $Pr_{1,2}V = ?$
- 3) $Pr_{23}V = ?$
- 4) $Pr_{1,2,4}V = ?$
- 5) $Pr_{1,3}V \cap Pr_{2,4}V = ?$
- 6) $Pr_{1,3}V \cup Pr_{2,4}V = ?$

Контрольные вопросы

1. Какое множество называют кортежем?
2. Какое множество получится в результате прямого произведения множеств?
3. Для чего применяются диаграммы Эйлера-Венна?
4. При помощи диаграмм Эйлера-Венна докажите законы де Моргана.

П1.3. Решение задач по теории графов

Графы по своему виду делятся на ориентированные и неориентированные. Вид ориентированного графа показан на рис. П.2, а вид неориентированного графа приведен на рис. П.3.

Ориентированный граф как математический объект можно представить в следующем виде: сформируем множество вершин $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, определим отображения вершин, т. е. дуги, соединяющие вершины: $Gx_1 = \{x_3, x_5\}$, $Gx_2 = \{x_2\}$, $Gx_3 = \{x_5\}$, $Gx_4 = \{x_3, x_4, x_5\}$, $Gx_5 = \{x_1, x_2, x_5\}$.

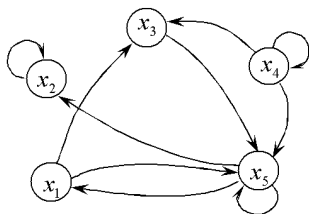


Рис. П.2

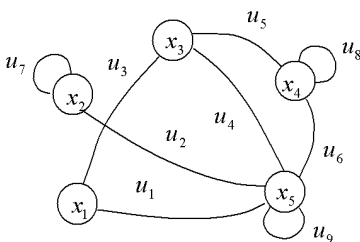


Рис. П.3

В неориентированных графах отображения вершин определяются следующим образом: $Gx_1 = \{x_3, x_5\}$, $Gx_2 = \{x_2, x_5\}$; $Gx_3 = \{x_1, x_4, x_5\}$; $Gx_4 = \{x_3, x_4, x_5\}$, $Gx_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

В ориентированном графе матрица смежности имеет следующий вид:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Матрица смежности неориентированного графа имеет вид

$$R = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Определим матрицу инцидентности ориентированного графа:

$$E = \begin{matrix} & u_{13} & u_{15} & u_{22} & u_{35} & u_{43} & u_{44} & u_{45} & u_{51} & u_{52} & u_{55} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Матрица смежности неориентированного графа имеет вид

$$E = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Пусть заданы следующие графы: $G_1(X_1, \Gamma_1)$ и $G_2(X_2, \Gamma_2)$.

Множество вершин первого графа имеет вид $X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, отображение вершин $\Gamma_1 x_1 = \{x_3, x_4\}$, $\Gamma_1 x_2 = \{x_1, x_3\}$, $\Gamma_1 x_3 = \{x_3, x_4\}$, $\Gamma_1 x_4 = \{x_2, x_4\}$, множество вершин второго графа задано в виде $X_2 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$, а

отображения вершин этого графа имеют вид $\Gamma_2 x_1 = \{x_1, x_4, x_5\}$,
 $\Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_5\}$, $\Gamma_2 x_4 = \{x_2, x_4\}$, $\Gamma_2 x_5 = \{x_4\}$.

Выполним с этими графами следующую операцию:

$$G(X, \Gamma) = G_1(X_1, \Gamma_1) \cap G_2(X_2, \Gamma_2).$$

Определим пересечение множеств вершин заданных графов

$$X_1 \cap X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_2, x_4, x_5\} = \{x_1, x_2, x_4\}.$$

Определим отображения всех общих вершин, множества пересечения вершин

$$\Gamma x_1 = \Gamma_1 x_1 \cap \Gamma_2 x_1 = \{x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_4, x_5\} = \{x_4\};$$

$$\Gamma x_2 = \Gamma_1 x_2 \cap \Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_3\} \cap \{x_1, x_5\} = \{x_1\};$$

$$\Gamma x_4 = \Gamma_1 x_4 \cap \Gamma_2 x_4 = \{x_2, x_4\} \cap \{x_2, x_4\} = \{x_2, x_4\}.$$

Выполним с этими же графами следующую операцию:

$$G(X, \Gamma) = G_1(X_1, \Gamma_1) \cup G_2(X_2, \Gamma_2).$$

Определим объединение множеств вершин этих графов

$$X_1 \cup X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_1, x_2, x_4, x_5\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

Определим отображение всех вершин обоих графов

$$\Gamma x_1 = \Gamma_1 x_1 \cup \Gamma_2 x_1 = \{x_3, x_4\} \cup \{x_1, x_4, x_5\} = \{x_1, x_3, x_4, x_5\};$$

$$\Gamma x_2 = \Gamma_1 x_2 \cup \Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_3\} \cup \{x_1, x_5\} = \{x_1, x_3, x_5\};$$

$$\Gamma x_3 = \Gamma_1 x_3 \cup \Gamma_2 x_3 = \{x_3, x_4\} \cup \emptyset = \{x_3, x_4\};$$

$$\Gamma x_4 = \Gamma_1 x_4 \cup \Gamma_2 x_4 = \{x_2, x_4\} \cup \{x_2, x_4\} = \{x_2, x_4\};$$

$$\Gamma x_5 = \Gamma_1 x_5 \cup \Gamma_2 x_5 = \emptyset \cup \{x_4\} = \{x_4\}.$$

В результате пересечения графов получится граф, изображенный на рис. П.4, а в результате объединения этих двух графов получится граф, изображенный на рис. П.5.

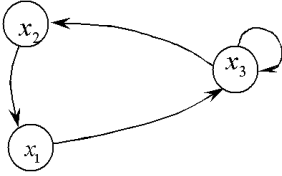


Рис. П.4

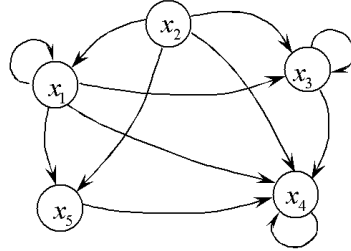


Рис. П.5

Задачи

Определим графы по заданному варианту:

$$G_1(X_1, \Gamma_1): \Gamma_1 x_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \Gamma_1 x_2 = \{x_3\}, \Gamma_1 x_3 = \{x_2, x_3, x_4\}, \Gamma_1 x_4 = \{x_1\};$$

$$G_2(X_2, \Gamma_2): \Gamma_2 x_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, \Gamma_2 x_2 = \{x_3\}, \Gamma_2 x_3 = \{x_2, x_3, x_5\}, \Gamma_2 x_5 = \{x_1\};$$

$$G_3(X_3, \Gamma_3): \Gamma_3 x_1 = \{x_2\}, \Gamma_3 x_2 = \{x_1, x_2, x_4, x_6\}, \Gamma_3 x_4 = \{x_6\}, \Gamma_3 x_6 = \{x_1, x_4, x_6\};$$

$$G_4(X_4, \Gamma_4): \Gamma_4 x_1 = \{x_2\}, \Gamma_4 x_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_6\}, \Gamma_4 x_3 = \{x_2\}, \Gamma_4 x_6 = \{x_1, x_3, x_6\}.$$

$$2) G_1(X_1, \Gamma_1): \Gamma_1 x_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$\Gamma_1 x_2 = \{x_1, x_4\}, \Gamma_1 x_3 = \{x_1, x_4\},$$

$$\Gamma_1 x_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\};$$

$$\begin{aligned}
 G_2(X_2, \Gamma_2) : \Gamma_2 x_1 &= \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \\
 \Gamma_2 x_2 &= \{x_1, x_3\}, \Gamma_2 x_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \\
 \Gamma_2 x_5 &= \{x_1, x_3\}; \\
 G_3(X_3, \Gamma_3) : \Gamma_3 x_1 &= \{x_1, x_2, x_6\}, \\
 \Gamma_3 x_2 &= \{x_1, x_4, x_6\}, \Gamma_3 x_4 = \{x_2, x_4, x_6\}, \\
 \Gamma_3 x_6 &= \{x_1, x_2, x_4\}; \\
 G_4(X_4, \Gamma_4) : \Gamma_4 x_1 &= \{x_1, x_2, x_6\}, \\
 \Gamma_4 x_2 &= \{x_1, x_3, x_6\}, \Gamma_4 x_3 = \{x_2, x_3, x_6\}, \\
 \Gamma_4 x_6 &= \{x_1, x_2, x_3\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad G_1(X_1, \Gamma_1) : \Gamma_1 x_1 &= \{x_2, x_3\}, \\
 \Gamma_1 x_2 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \\
 \Gamma_1 x_3 &= \{x_2\}, \Gamma_1 x_4 = \{x_1, x_3, x_4\}; \\
 G_2(X_2, \Gamma_2) : \Gamma_2 x_1 &= \{x_2\}, \Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_2, x_3\}, \\
 \Gamma_2 x_3 &= \{x_1, x_2, x_5\}, \Gamma_2 x_5 = \{x_1, x_5\}; \\
 G_3(X_3, \Gamma_3) : \Gamma_3 x_1 &= \{x_2, x_6\}, \Gamma_3 x_2 = \{x_2, x_6\}, \\
 \Gamma_3 x_4 &= \{x_2, x_6\}, \Gamma_3 x_6 = \{x_2\}; \\
 G_4(X_4, \Gamma_4) : \Gamma_4 x_1 &= \{x_2, x_6\}, \Gamma_4 x_2 = \{x_2, x_6\}, \\
 \Gamma_4 x_3 &= \{x_2, x_6\}, \Gamma_4 x_6 = \{x_2, x_6\}. \\
 4) \quad G_1(X_1, \Gamma_1) : \Gamma_1 x_1 &= \{x_2, x_4\}, \Gamma_1 x_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \\
 \Gamma_1 x_3 &= \{x_2, x_4\}, \Gamma_1 x_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}; \\
 G_2(X_2, \Gamma_2) : \Gamma_2 x_1 &= \{x_2, x_5\}, \Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \\
 \Gamma_2 x_3 &= \{x_2, x_5\}, \Gamma_2 x_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}; \\
 G_3(X_3, \Gamma_3) : \Gamma_3 x_1 &= \{x_2, x_6\}, \Gamma_3 x_2 = \{x_1, x_2, x_4\}, \\
 \Gamma_3 x_4 &= \{x_1, x_2, x_6\}, \Gamma_3 x_6 = \{x_1, x_4, x_6\};
 \end{aligned}$$

$$G_4(X_4, \Gamma_4) : \Gamma_4 x_1 = \{x_2, x_3, x_6\}, \Gamma_4 x_2 = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$\Gamma_4 x_3 = \{x_1, x_2, x_6\}, \Gamma_4 x_6 = \{x_1, x_3, x_6\}.$$

С этими графами необходимо выполнить следующие операции:

1. Нарисуйте заданные четыре графа.
2. Определите матрицы смежности и инцидентности всех четырех графов.

3. Выполните с графами следующие операции:

$$G(X, \Gamma) = (G_1(X_1, \Gamma_1) \cap G_2(X_2, \Gamma_2)) \cup (G_3(X_3, \Gamma_3) \cap G_4(X_4, \Gamma_4)).$$

4. Нарисуйте результирующий граф $G(X, \Gamma)$.

5. Определите матрицы смежности и инцидентности результирующего графа $G(X, \Gamma)$.

Контрольные вопросы

1. Как определяется матрица смежности графа?
2. Как определяется матрица инцидентности графа?
3. Как производится операция пересечения графов?
4. Как производится операция объединения графов?

П1.4. Решение задач по математической логике

Сократите запись следующего логического выражения:

$$\begin{aligned} & (a + b\bar{c})(\bar{b} + cd)(\bar{b} + c)(a + b) = \\ & = (a + b)(a + \bar{c})(\bar{b} + c)(\bar{b} + d)(\bar{b} + c)(a + b) = \\ & = (a + b)(a + \bar{c})(\bar{b} + c)(\bar{b} + d) = \\ & = (a + b\bar{c})(\bar{b} + cd) = a\bar{b} + acd + \bar{b}b\bar{c} + b\bar{c}cd = a(\bar{b} + cd). \end{aligned}$$

Рассмотрим решение задач с нормальными и совершенно нормальными формами логических функций.

Рассмотрим задачу на переход от дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) к совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ) логических функций. Например, пусть ДНФ логической функции имеет вид

$$f(x, y, z) = x\bar{y} + xyz + \bar{x}z.$$

СДНФ заданной ДНФ имеет вид

$$f(x, y, z) = x\bar{y}(z + \bar{z}) + xyz + \bar{x}z(y + \bar{y}) = x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + xyz + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}.$$

Далее рассмотрим задачу на переход от конъюнктивной нормальной формы (КНФ) к совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СКНФ) логических функций. Например, пусть КНФ логической функции имеет вид

$$f(x, y, z) = (x + \bar{y})(x + y + z)(\bar{x} + z).$$

Тогда СКНФ заданной КНФ имеет вид

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + \bar{y})(z + \bar{z})(x + y + z)(\bar{x} + z)(y + \bar{y}) = \\ &= (x + \bar{y} + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(x + y + z)(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + \bar{y} + z). \end{aligned}$$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

По заданной таблице истинности постройте СДНФ логической функции, далее произведите ее сокращение. Вид СДНФ, в данном случае после сокращения будет следующим

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz = \\ &= (\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz) + (xy\bar{z} + xyz) = \bar{x}y + xy = y. \end{aligned}$$

Вид СКНФ будет следующий:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + y + z)(x + y + \bar{z})(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z}) = \\ &= [(x + y + z)(x + y + \bar{z})][(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})] = \\ &= (x + y)(\bar{x} + y) = x\bar{x} + y + y\bar{x} + yx = y. \end{aligned}$$

Задачи

1) Пусть задана таблица истинности логической функции

а)

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

б)

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

в)

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

г)

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

– по таблице истинности логической функции постройте ее СДНФ, произведите сокращение полученной записи СДНФ;

– по таблице истинности логической функции постройте ее СКНФ, произведите сокращение полученной записи СКНФ;

2. Следующую запись ДНФ переведите в запись СДНФ

а) $f(x, y, z) = x\bar{y} + xyz + \bar{x}z + xy$,

б) $f(x, y, z) = xy + xyz + \bar{x}z + x + y$.

3. Следующую запись КНФ переведите в запись СКНФ

а) $f(x, y, z) = (\bar{x} + y)(x + \bar{y} + z)(x + z)x$,

б) $f(x, y, z) = (\bar{x} + \bar{y})(x + \bar{y} + z)(x + \bar{z})\bar{x}y$.

Контрольные вопросы

1. Как формируется запись СДНФ по таблице истинности?
2. Как формируется запись СКНФ по таблице истинности?
3. Как производится перевод записи логической функции ДНФ в СДНФ?
4. Как производится перевод записи логической функции КНФ в СКНФ?

П1.5. Выполнение элементарных операций с матрицами

Пусть заданы две матрицы A и B

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 21 \\ 7 & 0 & -40 \end{bmatrix},$$

выполним операцию суммирования матриц $A + B$:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2-6 & 1+3 & 3+21 \\ -1+7 & 3+0 & 8-40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 24 \\ 6 & 3 & -32 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим пример умножения матрицы на скаляр $5 \times A$, тогда

$$5 \times A = 5 \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 \\ -5 & 15 & 40 \end{bmatrix}.$$

Пусть заданы две матрицы C и D , выполните операцию перемножения этих матриц $C \times D$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C \times D = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 11 & 10 \\ -3 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

С заданными матрицами А и В докажем тождество $A \times B \neq B \times A$:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix},$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

из полученного результата видно, что тождество истинно.

С этими матрицами докажем следующее тождество $(A \times B)^T = B^T \times A^T$

$$(A \times B)^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, B^T \times A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix},$$

из последнего выражения следует истинность тождества.

Вычислим определитель матрицы А:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot (-4) + (-4) \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \cdot 3 - 3 \cdot 0 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) \cdot (-4) =$$

$$= 0 + 0 + 30 - 0 - 5 - 32 = -7.$$

Если размерность матрицы большая, то вычисление ее определителя достаточно сложно. В этом случае определитель можно определить на основе разложения алгебраических дополнений по строке или столбцу матрицы. Например, вычислим определитель матрицы A на основе разложения алгебраических дополнений по первому столбцу:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + 2(1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ = 1(0 - 5) - 2(16 - 15) = -7$$

Вычислим обратную матрицу A^{-1} , заданной матрицы A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, |A| = 2.$$

Отсюда следует, что матрица неособенная, поэтому ее обратную матрицу можно вычислить. Для этого необходимо вычислить все алгебраические дополнения:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, D_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4; \\ D_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6, D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5; \\ D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1, D_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4, D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Из последних выражений алгебраических дополнений D $A^d = D^T$ вычислим дополнительную матрицу:

$$D = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 3 & 6 & 5 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}, A^d = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Отсюда можно определить обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Задачи

1) Выполните операцию умножения следующих матриц

а) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$

в) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [1 \ 2 \ 3],$ г) $[1 \ 2 \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix};$

д) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$ е) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix};$

ж) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

2. Вычислите степени следующих матриц:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^2, \text{ б) } \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3, \text{ в) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2.$$

3. Выполните следующую операцию $AB - BA$ с заданными матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислите обратную матрицу следующих матриц:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ б) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Контрольные вопросы

1. Как производится суммирование матриц?
2. Как производится умножение матриц?
3. Как вычисляется определитель матрицы?
4. Как вычисляются алгебраические дополнения матрицы?
5. Как вычисляется обратная матрица?

П1.6. Выполнение операций с треугольными матрицами и вычисление собственных значений матрицы

Если все определители главной диагонали не равны нулю, тогда эту матрицу можно представить в виде произведения двух треугольных матриц. Например, возьмем квадратную матрицу вида

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{bmatrix},$$

представим ее в виде произведения двух треугольных матриц T_1, T_2 . Эти треугольные матрицы имеют следующий вид:

$$T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 1 & v_{12} & v_{13} \\ 0 & 1 & v_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{bmatrix} = T_1 T_2 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{11}v_{12} & t_{11}v_{13} \\ t_{21} & t_{21}v_{12} + t_{22} & t_{21}v_{13} + t_{22}v_{23} \\ t_{31} & t_{31}v_{12} + t_{32} & t_{31}v_{13} + t_{32}v_{23} + t_{33} \end{bmatrix}.$$

Из этого равенства следует:

$$t_{11} = 1, t_{21} = -1; t_{31} = 2, t_{11}v_{12} = -1; t_{11}v_{13} = 2, t_{21}v_{12} + t_{22} = 5; \\ t_{31}v_{12} + t_{32} = 4; t_{21}v_{13} + t_{22}v_{23} = 4; t_{31}v_{13} + t_{32}v_{23} + t_{33} = 14.$$

Решая эти уравнения, определим:

$$t_{11} = 1; t_{21} = -1; t_{31} = 2, t_{22} = 4; t_{32} = 6; t_{33} = 1; v_{12} = -1; \\ v_{13} = 2; v_{23} = \frac{3}{2}.$$

Тогда вычисленные треугольные матрицы имеют следующий вид:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу следующей треугольной матрицы;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что определитель вычислен

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{11} + 2t_{31} & 2t_{22} & 0 \\ t_{11} + 2t_{21} + 3t_{31} & 2t_{22} + 3t_{32} & 3t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} t_{11} &= 1, \quad t_{11} + 2t_{31} = 0, \quad t_{11} + 2t_{21} + 3t_{31} = 0, \\ 2t_{22} &= 1, \quad 2t_{22} + 3t_{32} = 0, \quad 3t_{33} = 1. \end{aligned}$$

Решая данные уравнения, находим

$$t_{11} = 1, \quad t_{21} = -\frac{1}{2}; \quad t_{31} = 0; \quad t_{22} = \frac{1}{2}; \quad t_{32} = -\frac{1}{3}; \quad t_{33} = \frac{1}{3}.$$

Обратная матрица имеет следующий вид:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Определим характеристический полином и его корни заданной матрицы A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином этой матрицы имеет следующий вид:

$$A = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 2 & 3-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0.$$

Определим корни характеристического полинома

$$\lambda_1 = 3; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = 4.$$

Задачи

1. Вычислите определители следующих треугольных матриц:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ б) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Вычислите обратные матрицы следующих треугольных матриц:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \text{ б) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Следующие квадратные матрицы представьте в виде произведения двух треугольных матриц:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \text{ б) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Контрольные вопросы

1. Какие матрицы называются треугольными?
2. Как вычисляется определитель треугольной матрицы?
3. Как представляется квадратная матрица в виде произведения двух треугольных матриц?
4. Как вычисляется обратная матрица треугольной матрицы?

III.7. Решение задач по теории систем

В линейной системе заданы следующие матрицы:

$$F(t) = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad G(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad U(t) = \begin{bmatrix} e^{-\alpha t} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad X(t_0) = 0.$$

Требуется найти переходную матрицу и матрицу-столбец вектора состояния системы.

Подставляя в уравнение состояний (в данном примере – стационарной системы)

$$\frac{dX}{dt} = FX + GU$$

исходные данные, получим

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e^{-at} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

После выполнения операций умножения будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -6x_1 + 5x_2 + e^{-at}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1. \end{aligned} \right\}.$$

Для нахождения переходной матрицы положим $U(t) = 0$ ($e^{-at} = 0$) и запишем уравнения в операторной форме

$$\begin{aligned} px_1 &= -6x_1 + 5x_2, \\ px_2 &= -x_1. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} (p^2 + 6p + 5)x_1 &= 0, \\ (p^2 + 6p + 5)x_2 &= 0, \end{aligned}$$

следовательно, x_1 и x_2 имеют одинаковые корни характеристического уравнения. Они равны $p_1 = -1$, $p_2 = -5$.

Общее решение имеет вид

$$x_{1,2}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}.$$

Дифференцируя его по t , получим

$$\frac{dx_{1,2}}{dt} = -C_1 e^{-t} - 5C_2 e^{5t}.$$

Переходная матрица для рассматриваемой системы имеет следующий общий вид:

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t, t_0) & \varphi_{12}(t, t_0) \\ \varphi_{21}(t, t_0) & \varphi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}.$$

Для определения элементов матрицы $\Phi(t, t_0)$ необходимо задать начальные условия согласно следующей таблице:

Элементы матрицы		φ_{11}	φ_{21}	φ_{12}	φ_{22}
Начальные условия	$x_1(t_0)$	1	1	0	0
	$x_2(t_0)$	0	0	1	1

Подставляя эти значения в уравнения, и положив $t = t_0$, найдем начальные значения производных. Они определяются следующей таблицей:

$x_1(t_0)$	$x_2(t_0)$	$\dot{x}_1(t_0)$	$\dot{x}_2(t_0)$
1	0	-6	-1
0	1	5	0

Все значения φ определяются одной формулой, однако для каждого φ необходимо найти свою пару постоянных C_1 и C_2 . Они находятся совместным решением уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_{1,2}(t_0) &= C_1 e^{-t_0} + C_2 e^{-5t_0}, \\ \dot{x}_{1,2}(t_0) &= -C_1 e^{-t_0} - 5C_2 e^{-5t_0}. \end{aligned} \right\}$$

полученных из этих уравнений подстановкой $t = t_0$. Подстановка начальных условий из приведенных выше таблиц в уравнения осуществляется по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &\rightarrow x_1(t_0), \dot{x}_1(t_0); \\ \varphi_{21} &\rightarrow x_2(t_0), \dot{x}_2(t_0); \\ \varphi_{12} &\rightarrow x_1(t_0), \dot{x}_1(t_0); \\ \varphi_{22} &\rightarrow x_2(t_0), \dot{x}_2(t_0). \end{aligned}$$

В результате вычислений получим следующую таблицу постоянных C_1 и C_2 .

Элементы матрицы	φ_{11}	φ_{21}	φ_{12}	φ_{22}
C_1	-1/4	-1/4	5/4	5/4
C_2	5/4	1/4	-5/4	-1/4

Подставляя эти значения в соотношение, найдем элементы переходной матрицы. Она будет иметь вид

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -e^{-(t-t_0)} + 5e^{-5(t-t_0)} & 5e^{-(t-t_0)} - 5e^{-5(t-t_0)} \\ -e^{-(t-t_0)} + e^{-5(t-t_0)} & 5e^{-(t-t_0)} - e^{-5(t-t_0)} \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что при $t = t_0$, $\Phi(t, t_0) = I$.

Для нахождения вектора состояний $X(t)$ воспользуемся следующей формулой, учитывая, что $X(t_0) = 0$, получим

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} -e^{-(t-s)} + 5e^{-5(t-s)} & 5e^{-(t-s)} - 5e^{-5(t-s)} \\ -e^{-(t-s)} + e^{-5(t-s)} & 5e^{-(t-s)} - e^{-5(t-s)} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e^{-\alpha s} \\ 0 \end{bmatrix} ds.$$

Выполняя умножение матриц, будем иметь:

$$x_1(t) = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \left[-e^{-(t-s)} + 5e^{-5(t-s)} \right] e^{-\alpha s} ds,$$

$$x_2(t) = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \left[-e^{-(t-s)} + e^{-5(t-s)} \right] e^{-\alpha s} ds.$$

Выполняя интегрирование, получим искомый вектор состояния:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4(\alpha-1)}(e^{-\alpha t} - e^{-t}) - \frac{5}{4(\alpha-5)}(e^{-\alpha t} - e^{-5t}) \\ \frac{1}{4(\alpha-1)}(e^{-\alpha t} - e^{-t}) - \frac{1}{4(\alpha-5)}(e^{-\alpha t} - e^{-5t}) \end{bmatrix}.$$

Задачи

1. Пусть линейная система задана следующими матрицами:

$$F(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad G(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{-\alpha t} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad X(t_0) = 0.$$

Необходимо определить переходную матрицу и вектор-столбец переменных состояния системы.

Контрольные вопросы

1. Как определяются переменные состояния системы?
2. Как описывается в матричном виде динамическая система?
3. Как определяется переходная матрица системы?
4. Как определяется матрица состояний системы?

Учебное издание

Байбатшаев Мухит Шабданович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Учебное пособие

Нач. РО ИИЦ

З.А. Губайдулина

Редактор

З.А. Губайдулина

Компьютерная верстка

Л.П. Умирбекова

Подписано в печать 22. 04. 2013 г.

Тираж 300 экз. Формат 60х84 1/16. Бумага типогр. №1.

Уч. изд. л. 11,1. Усл. п. л. 10,6. Заказ № 77. Цена договорная

Издание Казахского национального технического
университета им. К.И. Сатпаева

Информационно-издательский центр КазНТУ

г. Алматы, Сатпаева, 22.

ISBN 978-601-228-510-9



9 786012 285109