

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН**

**Казахский национальный технический университет
имени К.И. Сатпаева**

З.М. Ярмухамедова

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ОБЪЕКТОВ АВТОМАТИЗАЦИИ**

**Рекомендовано Научно-методическим советом университета
в качестве учебного пособия**

Алматы 2013

УДК 519.7 (075.8)

ББК 22.18я73

Я-75

Я-75 Ярмухамедова З.М. Математическое моделирование объектов автоматизации: Учеб. пособие. – Алматы: КазНТУ, 2013. – 175 с. Ил. 17. Табл. 2. Библиогр. – 10 назв.

ISBN 978-601-228-505-5

Изложены классические методы и принципы построения математических моделей, их назначение и функции, математические модели сложных систем, вопросы применения экспертных систем, а также нейроинформационных технологий для моделирования. Рассмотрены основные понятия теории идентификации, методы идентификации линейных и нелинейных объектов, идентификация в адаптивных системах, статистические методы идентификации.

Для студентов специальности 050702 «Автоматизация и управление», может быть полезно студентам других технических специальностей.

УДК 519.7 (075.8)

ББК 22.18я73

Рецензенты:

Топоров В.И. – ген. дир. ТОО «Системотехника», д-р техн. наук;

Пальшин В.П. – вед. менеджер ТОО «Siemens»,

канд. техн. наук, доц.

Шоланов К.С. – зав. каф. «Робототехника и технические средства автоматики», д-р техн. наук, проф.

Печатается по плану издания Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2013 г.

ISBN 978--601-228-505-5

© Ярмухамедова З.М., 2013

© КазНТУ, 2013

1. ВВЕДЕНИЕ. ВИДЫ, НАЗНАЧЕНИЕ И ФУНКЦИИ МОДЕЛЕЙ

Создание моделей является отличительной чертой интеллектуальной деятельности человека. Благодаря постоянному расширению видов моделей, развиваются наши способности и увеличиваются сведения о сложных явлениях окружающего мира.

Термин «модель» пронизывает всю современную науку, всю практику человечества. В настоящее время имеется целый ряд определений модели, ни одно из которых полностью не исчерпывает сущности этого понятия из-за многообразия видов моделей и широкой области применения. П. Эйкхофф, известный специалист в области идентификации, связывает понятие модели с наблюдением и экспериментом. Он дает следующее определение: «Модель есть отражение существенных сторон реальной (или конструируемой) системы, в удобной форме представляющее информацию о ней».

Под системой понимается совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих между собой и с внешней средой частей (подсистем) и в определенном смысле представляющих собой замкнутое целое. Все, что не входит в систему, является частью среды. Система взаимодействует с внешней средой и характеризуется связями между входными и выходными переменными, вид которых зависит от выбора границы между системой и средой.

Производственная система представляет собой систему, состоящую из подсистем обработки вещества, энергии и информации и предназначенную для производства заданных продуктов или изделий. Примерами таких систем могут служить производственные объединения, предприятия, цехи. В различных отраслях промышленности производственные системы могут иметь похожие функции подсистем. Физически подсистемы реализуются с помощью разнообразных технологических установок, механизмов, роботов, людей, автоматических линий, транспортных систем и устройств обработки информации.

Производственные системы являются открытыми через посредство изменяющихся во времени потоков вещества, энергии и информации между средой и производственной системой.

Технологическая система – это специализированная часть производственной системы, реализующая только функции по непосредственному изготовлению выпускаемых изделий и состоящая из взаимодействующих функциональных подсистем.

Структуры производственной и технологической систем идентичны в смысле составляющих подсистем, однако функции, выполняемые этими подсистемами, разные. Содержание этих функций и определяет границу между технологической и производственной системами.

Для пояснения сформулированного определения модели рассмотрим основные свойства модели.

1. Для любой реальной системы модель всегда представляет собой новую систему, в той или иной степени отличающуюся от моделируемой. Это значит, что при формировании и использовании модели всегда должен решаться вопрос о степени ее адекватности (идентичности) объекту.

2. Каждый разработчик модели создает модель на основе экспериментальных данных или приемов, использующих собственные знания, либо с помощью решений других разработчиков. Современные технологии моделирования не только опираются на научные методы, но и являются искусством, т. е. моделирование – творческий процесс, а синтез любой модели носит субъективный характер.

3. Модель является упрощенным представлением действительности. Упрощения, которые делаются при составлении моделей, объясняются, во-первых, ограниченными возможностями познания, во-вторых, стремлением разработчика получить наиболее удобное математическое описание для практического использования. Как было установлено, для того чтобы модель могла использоваться на практике, ее сложность должна находиться в определенном соответствии со сложностью моделируемого объекта.

4. Для одного и того же объекта в зависимости от целей, используемого математического аппарата, субъективных факторов и принятых упрощений возможно построение нескольких различных моделей.

5. По мере получения новых знаний об объекте и разви-

тии методов исследования, модели претерпевают изменения. Происходит их уточнение, совершенствование или, наоборот, опровержение. Развитие науки в этом смысле можно рассматривать как эволюцию моделей явлений и процессов. Моделирование служит в качестве метода исследования различных систем и управления ими.

1.1. Виды моделей

Модели могут быть символические и физические (вещественные).

В символических моделях описание объекта или явления дается на том или ином условном языке.

Язык – система символов и правил, позволяющих формировать и передавать сообщения. Естественный язык, сформировавшийся в результате длительной эволюции, представляет собой сложную информационную систему, в которой действуют рациональные правила, процедуры и структуры обработки лингвистической информации. Он позволяет создавать различные по назначению и содержательному описанию модели. Отличительной особенностью естественного языка является многозначность и нечеткость понятий. Это, с одной стороны, дает уникальную возможность увеличить информационный ресурс модели и защитить содержащуюся в ней информацию, а с другой – затрудняет использование современных технических средств обработки информации при исследовании таких моделей.

В связи с этим при моделировании большое значение имеют искусственные языки, характеризующиеся формальными наборами символов и правил, исключающих неоднозначное толкование. Примерами формальных языков являются алгоритмические языки, машинные языки, языки программирования, языки электрических и структурных схем и др. Существует также деление символических моделей на гносеологические, кибернетические (информационные, функциональные) и сенсуальные (чувственные).

Гносеологические модели используются для установления физико-химических, механических и других закономерностей, т. е.

для более глубокого изучения и исследования изучаемого объекта, а также установления закономерностей, которые необходимы для управления.

В кибернетических моделях не рассматривается физическая сущность объекта, а лишь исследуется изменение входных и выходных переменных, поэтому для объектов с различной физической природой могут быть одинаковые кибернетические модели. Целью построения кибернетической модели является разработка систем управления.

К сенсуальным моделям относят модели, оказывающие чувственные воздействия на людей, например, произведения искусства, литературы, модели природы, общества и т. д.

В зависимости от формы представления информации об объекте символические модели делят на концептуальные и математические.

Концептуальные модели представляют собой описание системы преимущественно на качественном уровне. Необходимо отметить, что любое значимое утверждение о свойствах и состоянии сложных систем и недостаточно изученных объектах является качественным по своей природе. Использование концептуальных моделей во многих случаях позволяет получить необходимую информацию о свойствах системы, возможностях управления, оптимальных алгоритмах управления и расширяет творческие возможности исследователя.

Особенности концептуальных моделей состоят в том, что они могут носить характер гипотез и использовать естественные языки для описания.

Математическая модель представляет собой описание системы на языке математических формул.

Физическими или вещественными моделями называются натурные копии натуральных объектов, например, так называемые пилотные установки, которые специально строятся для изучения технологических объектов, макеты плотин, городов, кораблей, полигоны с соответствующими макетами для испытаний машин и т. д.

1.2. Назначение и функции различных моделей

Назначение и функции различных моделей чрезвычайно широки. Нужно еще раз подчеркнуть, что модель есть упрощенное представление действительности: относительная простота модели – одна из главных ее характеристик.

В зависимости от целевого назначения с помощью моделей можно более полно изучить объект в целом или отдельные его стороны, рассчитать оптимальный режим работы и конструктивные элементы оборудования, прогнозировать ход протекания процесса, решать задачи оптимального управления и регулирования. В настоящее время в связи с повышением уровня автоматизации роль человека и требования к его квалификации возрастают, и в связи с этим необходимы новые методы и технические средства, к числу которых относятся создаваемые на основе математических моделей тренажерные комплексы, подтвердившие свою эффективность в ряде отраслей: энергетике, металлургии и др.

Нужно особо отметить, что даже при интенсивном развитии моделирования и методов построения моделей для решения как общепознавательных, так и конкретных задач управления, прогнозирования и других основными понятиями в моделировании были и остаются изоморфизм и гомоморфизм, характеризующие соответствие между структурами систем.

Две системы считают изоморфными друг другу, если между ними существует взаимнооднозначное соответствие. Понятие такого соответствия является идеализацией. Полный изоморфизм может быть лишь между геометрической фигурой и ее аналитическим выражением в виде формулы.

Гомоморфизм отличается от изоморфизма тем, что между системами существует неполное соответствие. Реальной системе на разных этапах исследования можно поставить в соответствие несколько разных гомоморфных моделей. В некоторых случаях за счет выбора соответствующих структурных элементов можно получить близкие к изоморфным отношения и для реальных объектов.

1.3. Структура и компоненты моделирования

В процессе моделирования участвуют и взаимодействуют друг с другом исследователь, объект (система) исследования и модель. При этом необходимо отметить, что большинству моделей присущ определенный субъективизм, т. к. при проведении исследований приходится иметь дело не с самим объектом (системой), а с его моделью, т. е. с некоторым представлением о нем.

Основными целями моделирования являются:

- 1) получение новых сведений об объекте;
- 2) проверка различных идей, гипотез, научных выводов;
- 3) сокращение сроков исследований, а также затрат на их проведение;
- 4) сравнительный анализ различных вариантов управления и выбор оптимального;
- 5) исследование объектов и ситуаций, непосредственное изучение которых в реальных условиях затруднено или невозможно;
- 6) прогнозирование поведения объекта;
- 7) обучение специалистов.

В зависимости от вида используемой модели различают: натурное, физическое аналоговое, аналитическое и компьютерное моделирование.

Натурное моделирование представляет собой исследование реальной системы, имеющей общую физическую природу с изучаемым объектом, но в общем случае отличающуюся от него масштабом.

Общим критерием выбора натурального моделирования, т. е. исследования реальной системы, являются минимальные затраты и сроки на получение информации о ней. Подобный вид моделирования применяют в случае, если нужно получить очень точные и достоверные результаты, а упрощенные модели не позволяют этого сделать, либо исследование реальной системы оказывается более дешевым и быстрым, чем разработка и исследование аналитической модели.

Натурная модель отличается полной адекватностью изучаемому объекту. Благодаря этому обеспечиваются надежность

и достоверность получаемых результатов. Для получения подобных результатов обычно проводят группу экспериментов с последующей статистической обработкой данных.

При исследовании сложных объектов, для которых трудно или невозможно получить точное математическое описание, а реальные системы отсутствуют либо эксперименты с ними невозможны, используется физическое моделирование, т. е. изучается модель той же физической природы, что и изучаемый объект, но отличающаяся от натурального объекта масштабами.

Между моделью и объектом должно существовать известное подобие. Определением степени соответствия модели и объекта занимается теория подобия (аналогии) физических процессов и явлений, которая оперирует с критериями (числами) подобия. Понятие подобия объектов было заимствовано из геометрии и перенесено в физику.

Два физических процесса или явления считаются подобными или аналогичными, если все характеризующие их величины в любой точке пространства аппарата в любой момент времени отличаются в определенное число раз, называемое масштабом подобия. Тогда подобие называется *полным*. Если оно выполняется лишь для некоторых величин, то называется *частичным*.

Один из двух подобных процессов, обычно изучаемый, называется *объектом моделирования или оригиналом*, а другой – *его моделью*. Теория подобия оперирует с критериями подобия. Критерии можно найти, если известно уравнение оригинала. Если такие уравнения отсутствуют, то при нахождении критериев обычно используют тот факт, что они безразмерны, хотя составлены из размерных величин. Любой физический процесс можно описать уравнениями, составленными из критериев подобия, точно так же, как и любыми другими уравнениями.

Некоторые критерии названы именами выдающихся ученых: критерий Рейнольдса, критерий Архимеда и др.

Основным в теории подобия является следующее: правильные результаты при моделировании можно получить, обеспечив физическое подобие модели изучаемому объекту, при этом

должна выполняться тройная аналогия процессов переноса: распространение тепла, переноса массы, перемещение электрического заряда. Эти процессы описаны в физике как закон теплопроводности Фурье, закон диффузии Фика, закон Ома, закон фильтрации Дарси- Вейсбаха и др.

Кратко рассмотрим основные теоремы подобия:

Первая теорема: подобные явления имеют одинаковые критерии подобия.

Следствие: любые функции, составленные для подобных явлений из их критериев подобия, равны.

Вторая теорема: количества критериев подобия и их выражения можно найти из анализа размерностей.

Третья теорема: подобны те явления, условия однозначности которых подобны, критерии, составленные из условий однозначности, численно одинаковы.

Условиями однозначности являются:

1. Геометрическое подобие – координаты любых сходственных точек аппарата, в котором протекают подобные процессы, пропорциональны;

2. Временное подобие – в синхронные моменты времени физические величины подобных явлений отличаются только постоянными критериями подобия;

3. Подобие физических величин объекта моделирования и модели – численные значения физических величин подобных явлений отвечают постоянным критериям подобия;

4. Подобие начальных условий – отношение физических величин подобных явлений в начальный момент времени отвечает тем же критериям подобия, что и в любые другие моменты времени;

5. Подобие граничных условий.

При моделировании на основе метода подобия критерии подобия играют двоякую роль. Во–первых, на основе этих критериев определяют, какой должна быть модель, чтобы обеспечить условия моделирования. Во–вторых, значения этих критериев и есть количественная мера, которая переносится с модели на оригинал.

Аналоговое моделирование отличается от натурального тем, что объект изучается с помощью модели-аналога другой физической природы. Обязательным условием такого моделирования является выполнение физического подобия, под которым понимается однозначное соответствие между параметрами объекта и его модели.

Для проведения аналогового моделирования необходимо математическое описание системы, т. е. математическая модель.

В качестве процессов-аналогов используются механические, гидравлические, пневматические, а чаще всего электрические аналоговые модели. Аналоговые модели отличаются гибкостью и относительно простой адаптацией к изменению значений параметров моделируемого объекта. Основные достоинства аналогового моделирования – простота, дешевизна применяемых технических средств, возможность решения задач как в реальном, так и масштабном времени. К недостаткам относится сравнительно низкая точность.

Аналитическое моделирование – исследование математической модели объекта с помощью формализованных процедур. Важнейшей особенностью такого метода является возможность получения зависимостей для искомых величин в общем виде. Однако в большинстве случаев сложность математической модели не позволяет получить аналитического решения. В таких случаях используются два основных подхода:

- упрощение моделей и применение приближенных аналитических методов;
- использование вычислительных методов для получения решений.

Возможности аналитического моделирования определяются наличием адекватной математической модели исследуемой системы.

Компьютерное (имитационное) моделирование представляет собой вычислительный метод проведения на компьютере экспериментов с математическими моделями, которые описывают поведение объекта в течении заданного или формируемого периода времени.

Для компьютерного моделирования систем разработаны и широко используются различные программные средства. Наибольшее распространение при решении задач моделирования и управления в настоящее время получила программная система MATLAB (матричная лаборатория) – интерактивная система для выполнения различных научных расчетов и ориентированная на работу с массивами данных. Построенная по единым принципам для разных предметных областей, MATLAB одновременно является и операционной средой, и языком программирования.

Simulink – система для имитационного моделирования объектов, представленных в виде композиции фундаментальных блоков, источников сигналов, приемников и измерительных средств; MATLAB EXTANTIONS – набор программных средств, позволяющих упростить и ускорить реализацию разработок, выполненных с использованием MATLAB (это компилятор, библиотека функций на языке C и C++ и др.);

GUI – графический интерфейс пользователя – средство, позволяющее в предметной области для наиболее часто встречающихся задач одного плана создать инструмент анализа, расчета, проектирования, который максимально приближен к практической деятельности инженера и который требует для освоения минимальных интеллектуальных и временных затрат.

Прототипом инструментария Simulink являются аналоговые вычислительные машины. Поэтому моделирование с помощью Simulink наглядно показывает отношения между структурой математической модели объекта и структурой схемы, реализующей данную модель.

Структура процесса аналитического и компьютерного моделирования может быть представлена в виде следующих взаимосвязанных этапов:

1. Постановка задачи.
2. Формализация изучаемого объекта, т. е. составление его математического описания.
3. Исследование модели.
4. Экспериментальная проверка модели.

На этапе постановки задачи необходимо определить цели, учесть априорную информацию и, если окажется необходимым, провести эксперимент. Очень важно на этом этапе выделить те стороны объекта (системы), которые необходимо исследовать и описать.

На этапе синтеза модели, т. е. выбора и построения модели, большую роль играет знание исследователем конкретных особенностей объекта (системы).

Синтез любой математической модели начинают с формализованного описания моделируемого объекта, т. е. содержательное описание объекта должно быть переведено на язык математики в виде некоторой системы уравнений и функциональных соотношений между отдельными параметрами модели.

Нужно отметить, что математическая модель, построенная с учетом основных физических и физико-химических закономерностей объекта, качественно более правильно характеризует его даже при недостаточно точных параметрах модели.

На третьем этапе, если модель достаточно приближена к оригиналу, могут быть получены новые интересные результаты, которые ранее не наблюдались на объекте.

Этап экспериментальной проверки тесно связан с двумя предыдущими этапами. Причем в процессе моделирования приходится довольно часто переходить от одного этапа к другому и даже возвращаться от последнего этапа, например, ко второму или третьему.

Процесс управления объектом с помощью модели можно рассматривать как процесс обучения модели (рис. 1).

Исследователь, имеющий априорные сведения об объекте (системе), синтезирует первый вариант модели, который, используя экспериментальные данные, проверяет на соответствие исследуемому объекту (системе). На основе сравнения реальных характеристик объекта $y(t)$ и аналогичных характеристик $\hat{y}(t)$, рассчитанных с помощью модели, корректируются параметры или структура модели.

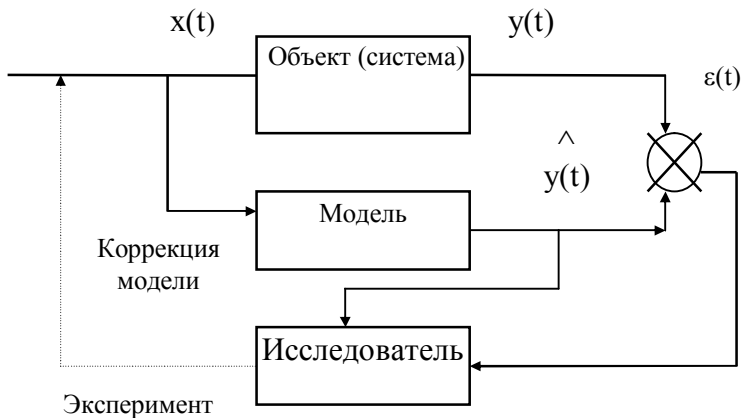


Рис. 1. Процесс обучения модели

Такой процесс обучения модели продолжается до тех пор, пока характеристики $y(t)$ и $\hat{y}(t)$ не совпадут с некоторой заданной точностью.

Таким образом, моделирование можно рассматривать как развернутый во времени процесс экспериментального исследования, корректировки или смены модели.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

2.1. Понятие математической модели

По Кафарову В.В. математической моделью системы называется система уравнений и логических соотношений, которая отражает сущность явлений, протекающих в системе, и поведение системы при изменении входных переменных.

Конкретный вид математической модели определяется теми задачами, которые ставятся перед исследованием процесса.

Математическая модель всегда идеализирована и описывает взаимосвязь переменных лишь приближенно и условно. Понятие «математическое моделирование» начали употреблять относительно недавно: в 40–50-х гг. XX века. Однако это не означает, что математические модели появились только с тех пор. Математическое моделирование берет начало в работах математиков и физиков прошлых столетий.

Математические модели относят к так называемым символическим, и они представляют собой совокупности разнообразных математических структур: формул, систем алгебраических и дифференциальных уравнений, логических переходов, интегральных соотношений и т. д.

Основным математическим аппаратом для моделирования различных динамических объектов являются дифференциальные уравнения.

Дифференциальные уравнения являются математическим отображением законов сохранения вещества и энергии, массо- и теплопереноса, процессов протекания химических реакций, законов движения сплошной среды и записываются для элементарных объемов. Для всего объема они записываются в интегральной форме.

Законы сохранения служат основой для составления детерминированных или аналитических моделей.

2.2. Деление математических моделей на группы

Рассматриваемая ниже классификация математических моделей носит в целом формальный характер и определяется видом конкретных уравнений, входящих в математическое описание. Математические модели объектов автоматизации можно разделить на следующие группы:

1. Математические модели с сосредоточенными параметрами – это математические модели объектов, в которых основные переменные изменяются только во времени. Такие модели описываются алгебраическими или обыкновенными дифференциальными уравнениями.

2. Если основные переменные объекта изменяются как во времени, так и в пространстве или, если указанные изменения происходят только в пространстве, но с размерностью больше единицы, то модели, описывающие такие системы, называются моделями с распределенными параметрами и представляют их в виде дифференциальных уравнений в частных производных.

Часто, особенно при использовании математических моделей в задачах автоматического управления или регулирования используется другая классификация математических моделей:

1. В зависимости от учета временной координаты различают статические и динамические модели. Модель называется *статической*, если значение ее выходной переменной $y(t)$ зависит от значения входа $x(t)$ только в тот же момент времени. Для построения таких моделей используют булеву алгебру, таблицы соответствий, графы, искусственные нейроны, функции вещественных переменных. В *динамических* моделях значение $y(t)$ может зависеть от всего прошлого (предыстории) процесса. Математическим аппаратом динамических моделей служат дифференциальные, интегральные, стохастические, разностные уравнения и т. д.

2. В зависимости от типа множеств входных X , выходных Y переменных и времени τ различают дискретные, непрерывные, фрактальные и нечеткие модели. Понятие множества представляет собой абстрактное математическое понятие, означающее совокупность. Множество однозначно и полностью

определяется его элементами. Числовые множества адекватно формализуют реальные отношения между объектами.

Под *дискретным* понимается конечное, или счетное, множество. *Непрерывным* называется множество объектов, образующих связное числовое множество. Для непрерывного множества адекватной моделью служит отрезок, луч или прямая линия.

Фрактал – это объект, размерность которого больше топологической. Топологическая размерность множества всегда выражается целым числом, фрактальное множество имеет дробную размерность. Фрактал состоит из бесконечного числа повторяющихся элементов, поэтому невозможно точно измерить его длину. Фрактальная линия выходит за пределы одномерного пространства, тогда как евклидова линия полностью входит в одномерное пространство. Надо отметить, что многие объекты обладают дробной размерностью, например, объекты, возникшие в результате долгой диффузии и абсорбции, похожи на фрактальные множества. Примером может служить кровеносная система человека или, например, протяженность побережья.

Понятие нечетких множеств впервые было введено в 60-е гг. XX века Л.Заде как расширение классического канторовского понятия множества на основе допущения, что функция принадлежности элемента множеству может принимать любые значения в интервале $(0... 1)$, а не только значения 0 либо 1. Такие множества были названы им *нечеткими*. Л. Заде определил ряд операций над нечеткими множествами, предложил обобщение известных методов логического вывода, а также ввел понятие *лингвистической переменной*, в качестве значений (термов) которой выступают нечеткие множества.

В конкретных случаях множества X , Y и t могут быть различными. В этих случаях используют соответствующие математические объекты. Например, при непрерывном времени и дискретных X и Y математическим аппаратом моделирования служат асинхронные автоматы, сети Петри, теория расписаний. Разностные уравнения используются для построения моделей, дискретных по времени и непрерывных по X и Y .

В зависимости от фактора случайности различают: детерминированные или аналитические модели, аналитико-статистические или экспериментально-аналитические и экспериментальные (статистические) или вероятностные математические модели. Такая классификация математических моделей связана с природой объекта, степенью его изученности и целями, для которых будет использоваться модель.

Детерминированные модели обладают однозначной предсказуемостью, в числе значимых переменных нет случайных величин, что дает возможность на основании имеющихся априорных сведений о системе определить структуру модели и численные значения ее коэффициентов.

Экспериментально-аналитическими называются модели, у которых на основании априорных сведений о системе можно оценить структуру, но нельзя определить оценки численных значений коэффициентов модели.

Экспериментальными или вероятностными моделями называются такие модели, когда априорной информации о системе очень мало, и она не позволяет оценить ни структуру, ни численные значения коэффициентов.

Вероятностные модели используют понятия теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов.

В теории автоматического управления исторически сложились два подхода к построению математических моделей динамических систем.

Первый предполагает использование уравнений, связывающих только входы и выходы системы. Этот метод получил название *операторного*. Операторные модели называют также моделями в переменных «вход-выход». Понятие оператора можно связывать с физическим понятием отклика, реакции динамической системы на внешние воздействия. Система при этом находится в определенных начальных условиях.

Второй подход реализуется в виде моделей в переменных состояния. Поведение системы в этом случае характеризуется изменением некоторых промежуточных в цепочке элементов переменных состояния, образующих n -мерный вектор состоя-

ния, множество значений которого принадлежит векторному пространству состояний системы.

Существует также деление математических моделей на параметрические и непараметрические.

Модели, содержащие параметры, называют *параметрическими*.

К параметрическим моделям можно отнести также уравнения в частных производных (уравнение теплопроводности, диффузионные уравнения), которыми можно описать большинство технологических объектов.

Непараметрические модели (типа свертки и рядов Вольтерра) путем параметризации могут быть сведены к параметрической модели. Для этого осуществляется аппроксимация импульсных характеристик (ядер) путем разложения в ряд по системе ортогональных функций.

Математические модели делятся также на линейные и нелинейные.

Если математическую модель объекта управления представить системой уравнений:

$$f(y,x,a)=0, \quad (2.1)$$

где y – вектор выходных переменных; x – вектор входных переменных (возмущающих и управляющих); a – вектор параметров, то вышеназванное деление производится по структуре оператора f .

Решение $y(x,a)$ системы, линейной по y , удовлетворяет условиям аддитивности и однородности

$$y(x_1+x_2,a) = y(x_1,a) + y(x_2,a),$$

$$y(cx,a) = c y(x,a),$$

где x_1, x_2 – произвольные сигналы (функции времени, пространственной переменной или некоторые числа); c – любое вещественное число.

Решение $y(x,a)$ называется линейным по a , если

$$y(x,a_1+a_2) = y(x,a_1) + y(x,a_2),$$

$$y(x, ca) = c y(x,a),$$

где a_1 и a_2 – произвольные параметры математической модели.

Если для некоторой математической модели не выполняется хотя бы одно из условий принципа суперпозиции, то она относится к классу нелинейных.

Линейные модели играют значительную роль в теории управления, так как для получения аналитического решения используется несложный математический аппарат. Но область применения линейных моделей является ограниченной.

Если при классификации исходить из способа дальнейшего использования математической модели для изучения сложной системы, то такие модели можно разделить на аналитические и имитационные. В аналитических моделях процессы функционирования элементов системы записываются в виде алгебраических, интегро-дифференциальных, конечно-разностных уравнений или логических соотношений. Для получения аналитического решения различных типов уравнений существует мощный математический аппарат (алгебра, теория дифференциальных, интегральных, разностных уравнений, функциональный анализ и т. д.).

В имитационных моделях на компьютере воспроизводится процесс функционирования системы, т. е. имитируются элементарные явления, составляющие этот процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени. При этом составляется моделирующий алгоритм, позволяющий по исходным данным о начальном состоянии процесса и его переменных получать сведения о состоянии объекта в любые произвольные моменты времени.

Основным преимуществом имитационных моделей по сравнению с аналитическими является возможность моделирования систем большой сложности.

3. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

3.1. Основные подходы к построению математических моделей

Построение моделей основывается на использовании данных различного вида, включая точные количественные оценки и неточные, полученные интуитивно, на основе экспертных заключений и суждений. Для одной системы возможно создание множества моделей, эффективных для решения конкретных задач и различающихся как способами построения, так и формами представления.

Построение математической модели основано на формализации описания системы, которое может быть выполнено различными способами. Эти способы можно разделить на четыре основные группы: аналитические (детерминированные), феноменологические, алгоритмические и экспериментальные.

Первый подход основан на исследовании механизма процесса, в результате которого создается модель, основанная на использовании известных законов природы.

Построение любой математической модели начинается с формализованного описания объекта моделирования в виде линейных и нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений. При этом при детерминированном подходе моделируемый процесс условно разбивается на ряд отдельных элементарных актов и принимается ряд упрощающих предположений.

Таковыми элементарными актами для технологического объекта, например, обычно являются:

- 1) движение потоков реагирующих веществ в аппарате (потоков фаз, если процесс является гетерогенным и гетерофазным) без учета физико-химических превращений;

- 2) кинетика химических реакций, т. е. химические превращения одних материальных потоков в другие, при этом рассматриваются превращения каждого реагента в ходе протекания химических реакций;

- 3) процессы массопередачи, т. е. массообмен между различными фазами реагирующих веществ в аппарате;

4) процессы теплопередачи;

5) изменения агрегатного состояния веществ, если они имеют место в процессе;

6) процессы массо- и теплопередачи от аппарата, в котором протекает моделируемый процесс, к другим аппаратам технологической схемы.

Такой прием построения аналитических моделей носит название блочного принципа. Согласно этому принципу, после того как определен набор элементарных процессов, каждый из них исследуется отдельно (по блокам) и записываются уравнения протекания указанных элементарных актов процесса.

Затем все полученные уравнения объединяются в единую систему и дополненные в некоторых случаях существующими ограничениями на диапазон изменения ряда переменных и составляют математическое описание процесса.

Аналитический подход имеет то преимущество, что при его использовании не производится чрезмерного упрощения механизма протекания процесса, поэтому аналитические (детерминированные) модели качественно более правильно характеризуют объект исследования и не сужается область эффективного применения математической модели. Зная достаточно полно механизм какого-либо процесса, можно с большой степенью достоверности предсказывать поведение процесса в самых разнообразных условиях.

По мере усложнения решаемых задач и расширения классов исследуемых объектов возникает необходимость дальнейшего развития и совершенствования методов построения математических моделей.

Феноменологический метод заключается в том, что модели разрабатываются на основе концептуальных описаний конкретных явлений и процессов и представляют собой модели, использующие различный математический аппарат. Такие модели являются основным инструментом формального описания различных сложных систем, для которых построение математических моделей на основе анализа физико-химических явлений представляет трудности. При этом используются традиционные математические понятия (дифференциальные уравнения, стати-

стические модели, геометрические образы и др.), предлагаются новые способы математического описания, например, использующие нечеткую логику.

Особенностью феноменологических моделей является определенная степень подобия по отношению к реальному объекту. Они могут иметь самостоятельное развитие в зависимости от результатов научных исследований или субъективных представлений об объекте. В результате чего подобные модели могут совершенствоваться и даже принимать форму законов, которые объясняют физическую сущность явлений, или, наоборот, отвергают.

Алгоритмический способ моделирования связан с широким использованием в практике моделирования компьютеров. В основе построения таких моделей лежат методы формализации динамики объектов, которая представляется в виде последовательности происходящих событий. Принято различать два типа алгоритмических моделей: событийные, в которых сущность функционирования системы составляет последовательность реальных событий, и пошаговые, в которых моменты наступления событий определяются шагом интегрирования. Наибольшее распространение в настоящее время имеют следующие типы алгоритмических моделей:

1) агрегативные модели. Наиболее важным элементом таких моделей служит преобразователь, который функционирует во времени и воспринимает входные сигналы из некоторого множества X , выдает выходные сигналы со значениями из множества Y и находится в каждый момент времени в некотором состоянии из множества Z ;

2) сетевые модели, в которых в качестве основной базовой информации используются данные о логической взаимосвязи наблюдаемых в системе событий и условий, которые и определяют наступление этих событий. Формальный аппарат такого моделирования наибольшее применение получил в теории сетей Петри;

3) графовые модели. В таких моделях функционирование системы задается в виде направленных графов или специальных логических правил и условий;

- 4) модели, основанные на использовании марковских процессов;
- 5) модели, которые используют теорию массового обслуживания;
- 6) лингвистические модели;
- 7) модели, использующие нейроинформационные технологии;
- 8) модели теории игр.

Основной характеристикой следующей группы методов построения математических моделей является высокая степень математического формализма и практически полное исключение из рассмотрения физической сущности объекта. Это происходит в тех случаях, когда информации о рассматриваемом объекте недостаточно или процесс настолько сложен, что невозможно составить его аналитическую модель. Объект при этом рассматривают как «черный ящик». Этот термин широко распространен в кибернетике и означает, что интересующий нас процесс происходит в непрозрачном ящике, в который мы не можем заглянуть. Однако мы видим то, что снаружи ящика, те контакты, которые связывают его с окружающим миром. Таковыми контактами будут входы «черного ящика» – это воздействия на процесс, и выходы – результаты работы процесса.

Входные и выходные переменные регистрируются на реальном объекте, т. е. проводится эксперимент и по полученной таким образом информации устанавливаются уравнения зависимости выходных переменных от входных.

Эти уравнения и представляют собой экспериментальную (стохастическую) математическую модель рассматриваемой системы. В дальнейшем ими пользуются для нахождения оптимальных режимов и для поддержания этих режимов.

Основным преимуществом экспериментальных методов является их простота.

Другие достоинства экспериментальных методов – это возможность их применения при случайном характере изменения переменных и неполной информации о факторах, влияющих на целевую функцию, комплексность исследования, так как кроме получения математической модели можно решить и другие за-

дачи, например, отсеять те входные переменные, которые несущественно влияют на выходные показатели.

Основным недостатком экспериментальных методов является малая надежность предсказания поведения процесса вне исследованных пределов изменения переменных, что сужает область и эффективность применения таких моделей.

Экспериментальные методы можно разбить на две группы:

1. Пассивные, эти методы не связаны с выводом объекта из режима нормального функционирования. Естественные, случайные колебания переменных объекта регистрируются в окрестности некоторого номинального установившегося режима. Поскольку нормальный режим работы объекта не нарушается, при применении пассивных методов нет риска создать аварийную ситуацию или получить брак. Однако возможно, что естественные колебания переменных процесса находятся в пределах ошибок измерения, тогда доля полезной информации является не очень значительной.

2. При использовании активных экспериментальных методов на входные переменные наносятся заранее спланированные возмущения и, как следствие, регистрируется изменение выходных переменных.

Обычно используются возмущения (отклонения одного или нескольких входных переменных от их значений в режиме нормальной работы объекта) следующих типов:

– ступенчатое, т. е. в момент времени значение входной переменной X_i скачкообразно изменяется на величину ΔX_i в большую или меньшую сторону (ступенька вверх или вниз) и далее поддерживается на этом уровне;

– импульсное, т. е.

$$X_i = \begin{cases} X_{1i} & \text{при } \tau < 0 \text{ и } \tau > 0 \\ X_{2i} & \text{при } 0 \leq \tau \leq \theta \end{cases} ;$$

– гармоническое, обычно это последовательность импульсов.

Для технологических объектов возмущения наносят обычно в виде ступеньки одновременно по нескольким входным переменным, причем знак возмущения по каждой переменной выбирается случайным образом.

Изменение выходных переменных объекта вследствие нанесенных возмущений называется динамической характеристикой, если регистрируется изменение переменных во времени; статической характеристикой, если данные о выходных переменных объекта получают после достижения нового установившегося состояния или частотной характеристикой, если измеряется максимальная амплитуда и сдвиг по времени выходных переменных по сравнению с входными при гармонических возмущениях.

3.2. Требования, предъявляемые к математическим моделям и методам их построения

Математические модели, описывающие объекты автоматизации, должны удовлетворять определенным требованиям, которые к ним предъявляются.

Исходя из целей исследования, для которого предназначена модель, она должна быть относительно простой и реализуемой на имеющихся технических средствах, т. к. необязательно сложная система требует сложной модели. Увеличивать сложность модели следует лишь в том случае, если более простая модель неадекватна процессу.

Другими требованиями, предъявляемыми к моделям, являются адекватность (идентичность), экономичность, точность, способность к обобщению, степень универсальности.

Математическая модель считается адекватной (идентичной) моделируемому процессу, если рассчитанные с ее помощью характеристики процесса совпадают с заранее заданной точностью с аналогичными экспериментальными характеристиками, полученными на реальном объекте.

Экономичность модели определяется прежде всего затратами машинного времени. Показателем экономичности может также служить число переменных, входящих в модель. Чем больше переменных используется в модели, тем больше затраты машинного времени. Точность модели показывает степень совпадения рассчитанных с ее помощью значений показателей процесса с истинными значениями этих показателей.

Способность к обобщению связана с прогнозирующими свойствами модели и означает способность модели на новом массиве экспериментальных данных обеспечить те же свойства, что и на первоначальном массиве. Под степенью универсальности понимается возможность применения модели к однотипным объектам.

Все вышеперечисленные требования в той или иной степени связаны с понятием адекватности математической модели. В зависимости от того, для чего строится модель, можно по разному оценивать степень адекватности (идентичности). Обычно различают глобальную и локальную адекватность. Глобальная адекватность должна обеспечиваться на всем интервале наблюдения за системой. Но в условиях априорной неопределенности такое требование обеспечить не всегда удастся. Поэтому обычно довольствуются условием локальной адекватности. Но и это условие лучше всего реализуется в адаптивных системах идентификации. Если модель строится для исследования какой-либо системы, то должно обеспечиваться свойство глобальной адекватности.

На свойства модели существенно влияют свойства информационного множества и методы реализации модели.

Требования к методам построения математических моделей зависят от целей, для которых эта модель строится, от стремления наиболее полно отразить всю информацию о процессе. Требования к методам построения во многом пересекаются с требованиями, предъявляемыми к математическим моделям. Исходя из этого, выбранный метод построения математической модели не должен приводить к аварийным ситуациям, но должен обеспечивать построение модели с достаточной точностью, должен быть простым в реализации, обладать достаточным быстродействием, помехозащищенностью. Также требования к методам построения моделей могут быть сформулированы исходя из способов реализации, средств измерения и т. д.

4. АНАЛИЗ ОБЪЕКТА И СТРУКТУРЫ ЕГО ПОТОКОВ

4.1. Производственный объект как система

Любые процессы, осуществляемые на производстве, можно представить в виде управляемых кибернетических систем. Под системой понимается совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих между собой и с внешней средой элементов (подсистем), которые объединяются в единое целое по некоторым общим признакам. Вообще «система» – это по-гречески «целое, составленное из частей». Основным отличительным признаком систем различной природы является иерархичность структуры.

Сущность системы можно понять только, если рассматривать отдельные ее элементы во взаимодействии друг с другом и с внешней средой.

Технологические системы, под которыми понимается совокупность разнообразных физико-химических процессов, происходящих в системе и средств для их реализации, относятся к числу наиболее сложных систем.

Системный подход к исследованию и описанию технологических систем основан на декомпозиции, т. е. расчленении сложной системы на составляющие элементы, или подсистемы, взаимодействующие между собой и с окружающей средой, изучении связей, образующих структуру системы.

Составляющие технологическую систему элементарные явления протекают в областях, масштабы которых различаются от микроуровня (уровень атомов и молекул) до макроуровня (уровень технологического аппарата). Эта особенность находит отражение в иерархической структуре модели сложного объекта, когда при описании процесса последовательно переходят от низшего (атомарного или молекулярного) уровня к другому, более высокому. Например, на микроуровне рассматриваются процессы химической кинетики, характер же движения потоков веществ или потоков фаз, если процесс является гетерогенным и гетерофазным, уже учитывается на уровне рабочей зоны агрегата, т. е. на макроуровне.

Модели каждого уровня должны содержать модели более низких уровней и соотношения, описывающие переход с одного уровня на другой.

При использовании системного подхода процесс представляется в виде системы отдельных блоков, что существенно облегчает и упрощает описание сложных объектов.

Для систем с сосредоточенными параметрами блоки модели соответствуют отдельным зонам агрегатов. При этом выходные переменные, описываемые уравнениями модели одного блока, являются входными для уравнений последующих блоков. В технологических системах, описываемых моделями с сосредоточенными параметрами, обычно выделяют следующие типовые блоки: вначале исследуют гидро-(аэро)динамику процесса и описывают движение потоков в агрегате, далее изучают тепло- и массообмен веществ, рассматривают химическую кинетику и затем составляют уравнения материальных и тепловых балансов.

В системах с распределенными параметрами совместное протекание в одной области системы процессов различной природы (теплообмен, конвекция, диффузия и т. д.) отображается сложной системой блоков, соответствующих набору уравнений с «перекрестными» переменными и связанными параметрами.

4.2. Анализ объекта и структуры его материальных и энергетических потоков

Технологические системы носят весьма сложный характер. Они могут быть непрерывными, но состоять из отдельных, в т. ч. периодических процессов. Обычно технологические процессы осуществляются в одном агрегате, но они могут осуществляться и в нескольких последовательных реакторах. Бывают случаи, когда в одном агрегате протекает по существу несколько процессов. Но, несмотря на различную природу и ряд существенных отличительных особенностей, технологические системы имеют ряд общих свойств, позволяющих для их описания применять одни и те же математические модели. Поэтому отметим некоторые их особенности.

Прежде всего нужно отметить, что во всякой технологической системе происходит изменение физических или физико-химических свойств некоторого материального потока, которое сопровождается затратами или выделением энергии. Следовательно, для любой технологической системы можно указать

входной и выходной материальные потоки и соответственно входной и выходной энергетические потоки. Состояние входных материальных и энергетических потоков характеризуется большим количеством входных воздействий, влияющих на выходные переменные. Общим свойством всех входных переменных является их независимость от физико-химической и физической сущности процесса.

Входные переменные принято делить на контролируемые, неконтролируемые (возмущения) и управляющие. Контролируемые или измеряемые переменные – это такие входные переменные, о численных значениях которых в любой момент времени может быть получена информация с помощью тех или иных приборов или методов.

Неконтролируемыми переменными (или возмущениями) называются входные переменные, численные значения которых не контролируются. К ним относятся также те переменные, измерить которые в принципе можно, но этого не делают, потому что считают данную переменную несущественной для процесса, или ее влиянием пренебрегают как очень малым.

Управляющие воздействия – это такие контролируемые переменные, численные значения которых могут быть установлены на заданном уровне. Состояние выходных материальных и энергетических потоков можно охарактеризовать выходными переменными, зависящими как от входных переменных, так и от режима процесса.

4.3. Пример обобщенной структурной модели технологического объекта

Управление технологическим объектом представляет собой по существу управление режимом работы аппарата, а не процессом как таковым. Режим же работы аппарата – это определенное распределение температур, давлений, концентраций реагентов, скоростей потока и т. д. В технологический аппарат поступают потоки материалов (руды, концентраты, реагенты), а из него отводятся выходные потоки конечных продуктов, причем соблюдается определенный, непрерывный или дискретный, режим потоков. Потоки могут быть непрерывными на входе и выходе; непрерывными на выходе и дискретными на входе; непрерыв-

30

ными на входе и дискретными на выходе; дискретными на входе и выходе. Поддержание соответствующего режима работы аппарата должно обеспечить необходимые физико-химические превращения во входных материальных потоках. Совокупность этих превращений можно назвать технологическим процессом.

Можно выделить и другие процессы, обеспечивающие нужный для протекания технологического процесса режим, а именно: энергетический, физико-механический, теплообменный, гидродинамический. Энергетический процесс заключается в доставке в технологический аппарат тепловой, электрической или другой энергии. Физико-механический процесс – это процесс плавления, разделения суспензий, фазовые превращения, перемещение твердых материалов и др. Процессы передачи тепла к перерабатываемым в аппарате материалам являются теплообменными. Гидродинамические процессы – это процессы движения потоков жидкостей (расплавов) и газов.

Д.А. Диомидовским была предложена обобщенная структурная схема металлургического процесса, приведенная на рис. 2.

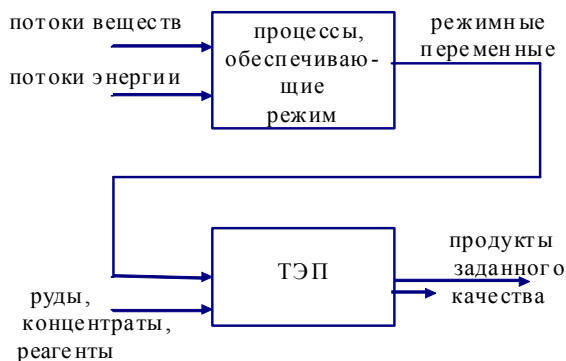


Рис. 2. Обобщенная структурная схема технологического процесса

Эта схема может быть применена и для любых технологических объектов, т. к. в ее основе лежат общие принципы и такие науки, как физическая химия, химическая кинетика, гидро- и аэродинамика, теплофизика. На основе этой схемы можно также проанализировать, как управлять технологическим объ-

ектом, исходя из того, что управляемым должен быть технологический процесс (как мы сейчас определили), а другие процессы, обеспечивающие его осуществление должны быть «управляющими».

4.4. Выбор наиболее существенных переменных объекта

4.4.1. Метод априорного ранжирования

Математическому описанию процесса предшествует решение таких важных задач, как выбор и ранжировка существенных переменных объекта, который проводится на основании анализа моделируемой системы.

Задачами этого этапа являются:

а) выбор переменных, т. е. составление полного списка переменных, существенно влияющих на протекание процесса. При этом полнота списка является главным требованием, т. к. лучше включить несколько «лишних» переменных, слабо влияющих на выходные показатели, чем пропустить хотя бы одну существенную переменную, поскольку это приведет к неэффективности математического описания процесса;

б) ранжировка, т. е. расположение переменных в порядке убывания степени их влияния на выходные переменные и отсеивание переменных или случайно включенных в список или очень мало влияющих на процесс. При отборе переменных принимается во внимание, что переменные должны быть измеримыми с необходимой точностью, взаимно некоррелированы и однозначно связаны с выходными переменными.

Для выбора существенных переменных используются метод априорного ранжирования (метод экспертных оценок) и метод случайного баланса.

Метод экспертных оценок или априорное (доопытное) ранжирование выполняется в форме опроса группы экспертов, которым предлагается расположить рассматриваемые переменные по степени их значимости, при этом каждому порядковому месту в ряду значимости присваивают ранг (например, равный номеру места).

Разновидностью этого метода можно считать анализ литературных данных по оценке степени влияния входных перемен-

ных на выходные. В этом случае экспертами выступают различные исследователи, изучавшие ранее моделируемый объект. Однако при анализе данных из научно-технической литературы часто не удастся собрать всех нужных сведений, так как нет возможности задавать экспертам вопросы. Основным методом ранжировки по методу экспертных оценок является опрос мнений специалистов с помощью специальных анкет. Экспертов преимущественно используют как источник информации, необходимой для принятия решения о том, какие переменные считать существенными, а само решение принимается разработчиком модели. Перед опросом мнений специалистов проводится оценка квалификации самих экспертов и их отбор с помощью коэффициента компетентности.

Всем отобранным экспертам предлагается составить списки входных и выходных переменных системы. Из списков, полученных от каждого эксперта, составляется общий список, который включает в себя все упомянутые переменные. Далее экспертам предлагается расположить в анкете все включенные в нее переменные в порядке убывания степени их влияния на выходные показатели, а выходные переменные – по степени их важности, т. е. провести ранжировку. Если специалист не может отдать предпочтение ни одной из переменных, вводятся дробные ранги: сумма мест, занятая этими переменными, делится на их число, и каждой переменной из этой группы присваивается одно и то же место.

Переменные с оценкой ниже k -го порогового значения отбрасываются. Последним этапом формализации мнений экспертов и обработки результатов их опроса является оценка согласованности мнений специалистов по формуле дисперсии.

С помощью метода экспертных оценок (априорного ранжирования) субъективная оценка каждого из экспертов становится объективной. Кроме метода экспертных оценок для отсеивания несущественных переменных по данным небольшой серии опытов используется также метод случайного баланса.

Для отбора наиболее важных переменных может быть использован также анализ взаимной корреляции между переменными.

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

5.1. Этапы построения аналитических моделей

На первом этапе проводится анализ технологической системы как объекта управления и на основании этого анализа выбираются основные, наиболее существенные входные и выходные переменные. Выбор входных и выходных величин определяется целью или задачей исследования, которая для данной системы формулируется «извне», т. е. определяется внешними для данной системы факторами.

На втором этапе изучается технологическая структура объекта, и выделяются идеализированные зоны однородности (решение задачи декомпозиции).

Третий этап – это выделение и описание элементарных явлений, происходящих в зонах однородности. Каждому из выделенных явлений ставится в соответствие определенный физический закон, и устанавливаются начальные и граничные условия его протекания.

На следующем этапе проводится описание процессов массо- и теплообмена между зонами, и далее все полученные уравнения объединяют в единую систему уравнений, которая представляет искомую структуру математической модели. Первый этап был рассмотрен в предыдущей главе.

Второй этап выделения зон однородности основывается на идее декомпозиции при описании сложных систем. Сложную систему условно разбивают на ряд подсистем, получают модели подсистем и, используя уравнения связи между ними, получают модель системы в целом. Вводится понятие «степень сложности описания объекта или системы». Считается, что степень сложности монотонно зависит от количества входных и выходных переменных и, кроме того, входные переменные оказывают более существенное влияние на сложность математической модели. Сложность декомпозируемой системы будет равна сумме сложности отдельных подсистем. Основанием для выделения

идеализированных зон однородности (подсистем сложной системы) являются:

- 1) исследование объекта на физических моделях;
- 2) исследование объекта в промышленных условиях.

Изучение третьего этапа, т. е. выделение и математическое описание элементарных явлений, происходящих в зонах однородности, начнем с рассмотрения химических превращений материальных потоков.

Во многих технологических системах осуществляются химические превращения веществ входного материального потока в другие вещества (выходного материального потока).

Химизм технологических объектов описывается стехиометрическими уравнениями, описывающими материальный баланс реакции и показывающими, в каких соотношениях компоненты участвуют в химической реакции. Эти уравнения связывают исходные вещества и конечные продукты и представляют собой уравнения материального баланса реакции.

В общем виде стехиометрические уравнения химических реакций можно записать следующим образом:

$$a_1A_1+a_2A_2+\dots+a_mA_m=a_{m+1}A_{m+1}+\dots+a_nA_n, \quad (5.1)$$

где $a_i(i=1,\dots,n)$ – стехиометрические коэффициенты; $A_i(i=m+1,\dots,n)$ – продукты реакции; $A_i(i=1,\dots,m)$ – исходные вещества.

Часто стехиометрические уравнения записывают в матричном виде:

$$a^T A=0. \quad (5.2)$$

При этом продукты реакции записываются с положительными стехиометрическими коэффициентами, а исходные вещества – с отрицательными. Стехиометрический коэффициент a_i показывает, сколько молекул вещества A_i участвует в реакции. Существует бесконечное число наборов a_i , удовлетворяющих (5.1), поэтому в качестве стехиометрических коэффициентов принято рассматривать наименьшие целочисленные значения a_i .

Стехиометрические уравнения реакций обычно не включаются в математическое описание процесса, а присутствуют как своеобразное ограничение.

5.2. Математические модели химической кинетики (гомогенные системы)

При гомогенных реакциях исходные вещества и продукты реакции находятся в одном и том же агрегатном состоянии (одной и той же фазе, газовой или жидкой), при этом взаимодействие молекул, атомов или ионов может происходить по всему занятому объему.

Согласно закону действующих масс, кинетика гомогенной реакции описывается выражением следующего вида:

$$V_i = \frac{dC_j}{d\tau} = k_i \cdot \prod_j C_j^{\alpha_j}, \quad (5.3)$$

где C_j – концентрация реагирующих веществ (для газов) или активности веществ, т. е. концентрации ионов (для растворов); k_i – коэффициент пропорциональности или константа скорости реакции; α_j – порядок реакции по j -му веществу.

Концентрации веществ обычно записывают в молях на единицу объема.

Константа скорости химической реакции характеризует процесс взаимодействия молекул, протекающий на микроуровне, и зависит от вида молекул, вступающих в реакцию и от температуры. Для молекул данного вида при данной температуре $k = \text{const}$. Зависимость константы скорости от температуры выражается уравнением Аррениуса

$$k_i = k_{io} \exp \left(- \frac{E}{R T} \right) \quad (5.4)$$

где k_{io} – предэкспоненциальный множитель, который зависит от числа столкновений реагирующих молекул ($k_i = \text{const}$); E – энергия активации, равная избытку энергии относительно

средней энергии молекул при данной температуре, которым должны обладать молекулы веществ для осуществления химического взаимодействия; R – универсальная газовая постоянная; T – температура процесса в градусах Кельвина; $\frac{E}{RT}$ – безразмерный параметр.

Порядок реакции α_j – это сумма показателей степени при концентрациях реагирующих веществ. Он зависит от молекулярности реакции, т. е. от числа одновременно вступающих в реакцию молекул и от числа стадий реакции.

5.3. Математические модели химической кинетики (гетерогенные системы)

Гетерогенная реакция может протекать в пять стадий, образуя промежуточные, чаще всего поверхностные вещества:

- 1) диффузия, т. е. перенос реагирующих веществ к активной поверхности реакции (поверхности раздела фаз);
- 2) адсорбция исходных веществ на активной поверхности с образованием промежуточного состояния и частичная десорбция;
- 3) поверхностная химическая реакция с образованием конечных продуктов в адсорбированном состоянии;
- 4) десорбция продуктов реакции с активной поверхности;
- 5) обратная диффузия продуктов реакции в объем аппарата.

Как правило, химические превращения осуществляются на поверхностях раздела фаз, т. е. не происходят в любой точке пространства, как в гомогенной системе.

Иногда гетерогенные реакции протекают, не образуя единого фронта реакции.

Основным моментом при описании кинетики гетерогенных реакций является разделение механизма реакции на ее отдельные стадии.

*Математическое описание стадии диффузии веществ
(процесса внешней массоотдачи)*

Во многих гетерогенных процессах поток газов омывает твердую поверхность и взаимодействует с ней. Диффузионный поток газа или жидкости к активной поверхности описывается уравнением в частных производных, основанном на втором законе Фика

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \operatorname{div} D \operatorname{grad} C, \quad (5.5)$$

где D – коэффициент диффузии; C – концентрация вещества; $\operatorname{div} D$ – скалярная производная коэффициента диффузии по пространственной координате ξ , направленной перпендикулярно активной поверхности; $\operatorname{grad} C$ – векторная производная концентрации диффундирующего реагента по пространственной координате ξ .

Конкретный вид уравнения (5.5) зависит от того, изменяется ли коэффициент диффузии D по пространственной координате ξ и от формы активной поверхности. Для технологических систем зачастую принимается допущение, что $D = D(\xi) \equiv \operatorname{const}$.

Выделяют следующие формы активной поверхности:

а) линейной активной поверхностью называется в том случае, если она является поверхностью разделения самостоятельных агрегатных фаз, которые образуют реагирующие вещества. В этом случае уравнение принимает вид

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \right); \quad (5.6)$$

б) шарообразная активная поверхность, т. е. принимается допущение, что дискретные частицы одного агрегатного состояния, распределенные в веществе другого типа, например, твердые частицы в жидкости или газе; пузыри газа в жидкости; капли жидкости в другой жидкости или газе, имеют шарообразную форму, и диффузия симметрична относительно центра частиц.

Уравнение (5.5) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \cdot \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi} \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi} \right); \quad (5.7)$$

в) цилиндрической активной поверхность называется в том случае, если частицы твердых реагентов перед процессом подвергались специальной механической обработке, например, брикетированию. В этом случае принимают допущение, что частицы цилиндрической формы имеют длину, намного больше радиуса, и уравнение (5.5) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \cdot \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi} \right). \quad (5.8)$$

К уравнениям, описывающим процесс диффузии, обязательно должны быть записаны граничные условия.

Математическое описание стадии адсорбции исходных реагентов на активной поверхности

При действии газа на твердое тело в качестве первого этапа рассматривают адсорбцию, вызванную относительно слабыми силами межмолекулярного притяжения типа вандерваальсовых. Особенностью адсорбционных взаимодействий, отличающей их от взаимодействия в газах, является весьма тесное сближение молекул адсорбата с атомами, которые образуют поверхность твердого тела.

При математическом описании процесса активированной адсорбции обычно принимают следующие допущения:

1) адсорбция молекул газообразных (жидких) реагентов на активной поверхности происходит на определенных участках, называемых адсорбционными центрами;

2) адсорбированная молекула занимает один адсорбционный центр. Последнее предположение говорит о том, что при

адсорбции образуется мономолекулярный слой, т. е. при полном заполнении активной поверхности молекулами адсорбата в среднем на один адсорбционный центр приходится одна адсорбированная молекула. При этом имеется в виду активированная адсорбция (хемосорбция), когда молекулы реагентов в газообразном (жидком) состоянии образуют с адсорбционным центром активированный комплекс.

Вероятность преодоления энергетического барьера зависит не только от энергии газообразных (жидких) молекул, но и от энергии самих адсорбционных центров, которая распределена случайным образом. Вследствие этого энергию активации адсорбции также считают распределенной случайным образом и вводят индекс k , который относится к k -му энергетическому типу.

Скорость адсорбции молекул адсорбата (изменение концентрации молекул газа или жидкости за счет адсорбции) V_{ak} можно записать следующим образом:

$$V_{ak} = \frac{dC_{jk}^n}{d\tau} = k_{ak}^o \cdot Q_k \cdot C_{jk}^n \cdot \exp\left(-\frac{E_{ak}}{RT}\right) \quad (5.9)$$

где C_{jk} – концентрация j -го реагента на активной поверхности; k_{ak} – предэкспоненциальный множитель; Q_k – число свободных адсорбционных центров k -го типа на единице активной поверхности; E_{ak} – энергия активации адсорбции; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура процесса.

Описанное уравнение допустимо при следующем допущении: адсорбирующиеся молекулы не взаимодействуют друг с другом, и их концентрация не влияет на скорость адсорбции.

Если же адсорбирующиеся молекулы все-таки взаимодействуют, например, отталкивают друг друга от пор активной поверхности, то этот процесс можно учесть как увеличение «энергетического барьера» при возрастании концентрации адсорбирующихся молекул.

Этот процесс можно записать, воспользовавшись линейной составляющей ряда Тейлора

$$E_{ak} = E_{ak}^o + \sum_{i=1}^e a_i C_{jk}^n, \quad (5.10)$$

где E_{ak} – энергия активации адсорбции, когда учитывается взаимодействие адсорбирующихся молекул между собой; E_{ak}^o – энергия активации адсорбции при отсутствии взаимодействия молекул адсорбата между собой; e – общее число адсорбирующихся реагентов; a_i – коэффициент пропорциональности.

Для этого случая скорость адсорбции записывается следующим образом:

$$V_{ak} = k_{ak}^o \cdot C_{jk}^n \cdot Q_k \cdot \exp \left(- \frac{E_{ak}^o + \sum_{i=1}^e a_i \cdot C_{jk}^n}{RT} \right) \quad (5.11)$$

Математическое описание десорбции исходных веществ с активной поверхности

Скорость десорбции с адсорбционных центров k -го энергетического типа (изменение во времени концентрации j -го реагента на активной поверхности за счет десорбции) можно записать в виде следующего уравнения:

$$V_{\partial k} = \frac{dC_{jk}^n}{d\tau} = k_{\partial k}^o \cdot C_{jk}^n \exp \left(- \frac{E_{\partial k}}{RT} \right) \quad (5.12)$$

Это уравнение справедливо для случая, когда можно не учитывать взаимодействие адсорбирующихся молекул между собой. Если же это взаимодействие существует, то «энергетический барьер» уменьшается, т. е. энергия активации

$$E_{\partial k} = E_{\partial k}^o - \sum_{i=1}^e a_i C_{jk}^n, \quad (5.13)$$

где $E_{\text{дк}}$ – энергия активации с учетом взаимодействия адсорбирующихся молекул между собой; $E_{\text{дк}}^0$ – энергия активации без учета этого взаимодействия.

Математическое описание поверхностной химической реакции

При описании этой стадии принимают следующие предположения:

1. В химическую реакцию вступают только те молекулы, которые активированно адсорбировались на активной поверхности.

В общем случае в реакцию вступают и молекулы непосредственно из газовой (жидкой) фазы.

2. В химической реакции участвуют только те молекулы твердого вещества, которые входят в заполненные адсорбированным веществом адсорбционные центры.

Скорость поверхностной химической реакции – это изменение во времени концентрации j -го реагента на активной поверхности (на адсорбционных центрах k -го энергетического типа) и записывается в виде следующего уравнения:

$$V_{pk} = \frac{dC_{jk}^{\Pi}}{d\tau} = K_{pk}^o C_{jk}^{\Pi} \exp\left(-\frac{E_{pk}}{RT}\right). \quad (5.14)$$

На энергию активации поверхностной химической реакции взаимодействие адсорбирующихся молекул между собой не влияет.

Математическое описание десорбции газообразных (жидких) продуктов реакции

Десорбция продуктов реакции описывается уравнением, аналогичным уравнению десорбции исходных реагентов.

Математическое описание обратной диффузии продуктов реакции в объем аппарата

Процесс диффузии продуктов реакции в объем аппарата описывается уравнениями, аналогичными уравнениям диффузии исходных реагентов. Но в этом случае градиент концентрации продуктов реакции имеет направление от активной поверхности.

Математическое описание массообмена веществ на активной поверхности

Массообмен веществ на активной поверхности описывается следующим уравнением:

$$\frac{dC_{jk}^n}{d\tau} = V_{ak} - V_{\partial k} - V_{pk} . \quad (5.15)$$

Это уравнение справедливо в том случае, если выполняется предположение о том, что адсорбированные молекулы образуют мономолекулярный слой.

6. МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИКИ ПОТОКОВ

6.1. Математическое описание массообмена материальных потоков в пространстве аппарата

Массообмен материальных потоков в реакционном пространстве аппарата определяется двумя самостоятельными процессами:

1) массообмен между различными фазами реагирующих веществ, т. е. между активной поверхностью химической реакции и диффузионным слоем. Сюда же можно отнести условия массообмена между внешней границей диффузионного слоя и окружающей средой. Эти условия задаются граничными условиями к уравнениям диффузии;

2) массообмен в реакционном пространстве аппарата, т. е. движение потоков веществ.

Первая группа процессов была рассмотрена ранее. В этом разделе мы будем рассматривать вторую группу процессов. Материальные потоки можно рассматривать как перемещение сплошных сред. В механике сплошных сред материальные потоки связывают с процессами переноса массы. Физический механизм переноса массы может быть двояким:

1) путем молекулярного перемешивания, т. е. диффузионного или кондуктивного движения частиц сплошной среды;

2) за счет видимого перемещения масс, т. е. массового или конвективного движения.

Одним из фундаментальных уравнений переноса массы является уравнение неразрывности (сплошности), которое связывает плотность движущейся сплошной среды ρ с ее скоростью v

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad (6.1)$$

где τ – время, $\operatorname{div}(\rho v)$ – дивергенция (расходимость) вектора:

$$\operatorname{div}(\rho v) = \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z},$$

где ρv_x , ρv_y , ρv_z – проекции вектора на декартовы оси координат. Это уравнение было получено с некоторыми упрощениями

ми. Здесь не учтено, что в контрольном объеме, выделенном в пространстве, могут находиться, и источники, и стоки массы, связанные, например, с химическими и фазовыми превращениями. Не учтена также кондуктивная составляющая вектора переноса. С учетом источников и стоков уравнение сплошности записывается следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \operatorname{div}(pV) = J, \quad (6.2)$$

где J – объемный источник изменения массы вследствие химических и фазовых превращений.

Для того чтобы учесть кондуктивную составляющую переноса, нужно заменить $\operatorname{div}(pV)$ на $\operatorname{div}(pV - D \operatorname{grad} C)$:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \operatorname{div}(pV - D \operatorname{grad} C) = J, \quad (6.3)$$

где $D \operatorname{grad} C$ – диффузионная составляющая вектора потока; D – коэффициент диффузии переносимых частиц в сплошной среде; C – концентрация переносимых частиц; $\operatorname{grad} C$ – градиент концентрации:

$$\operatorname{grad} C = \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right) \bar{k}, \quad (6.4)$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные векторы-орты, их длины равны единице, вводятся для ориентации направления вектора градиента.

Структура уравнения (6.3) является типовой для большинства уравнений переноса. Так, например, уравнение диффузии (второй закон Фика), описывающее кондуктивный перенос массы в движущемся потоке, записывается аналогичным образом.

В уравнении (6.3) использовано допущение, что коэффициент диффузии D не зависит от концентрации C . Если D – функция C , то слагаемое $D(\cdot)$ нужно заменить более общим $D \operatorname{grad} C$.

В систему уравнений, описывающих движение однофазного потока (жидкость, газ), кроме уравнения неразрывности потока входят уравнения движения (уравнения Навье-Стокса). Уравнения Навье-Стокса выводятся из второго закона Ньютона и имеют следующий вид:

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial \tau} + v_{\Delta} V = F - \frac{1}{p} \text{grad} p + \frac{v}{3} \text{grad} \text{div} V + v \nabla^2 V, \quad (6.5)$$

где V – вектор скорости; v – кинематическая вязкость жидкости; F – внешняя объемная сила; P – давление в жидкости; Δ – оператор Лапласа; ∇^2 – также обозначение оператора Лапласа.

Левая часть уравнения (6.5) содержит сумму локального и конвективного ускорения, в правой части суммируется объемная сила, давление и силы сопротивления, вызванные вязкостью.

Как видно, с уравнениями (6.5) вводится новая величина – давление. Поэтому для замыкания нужны уравнения связи плотности и давления.

Составив замкнутую систему, состоящую из уравнения материального баланса в контрольном объеме (уравнение неразрывности потока) и уравнений движения (уравнения Навье-Стокса) и назначив условия однозначности, отражающие особенности режима технологического объекта (начальные и граничные условия), можно считать, что модель, описывающая движение материальных потоков в аппарате, построена. Однако решение подобной системы уравнений в частных производных требует весьма сложного математического аппарата и приводит к значительным вычислительным трудностям. Поэтому в практических случаях предпочитают использовать упрощенные модели потоков, составленные не на основе уравнений переноса как таковых, а путем комбинирования элементарных моделей динамики переноса – типовых математических моделей структуры потоков в аппарате (гидродинамических моделей).

6.2. Типовые модели структуры потоков

В большинстве технологических объектов происходит перемещение разнообразных материальных потоков жидкости, газа или твердых частиц. В силу сложности вышеприведенных уравнений, описывающих структуру потоков, часто предпочи-

тают пользоваться упрощенными моделями массообмена веществ в реакционном пространстве аппарата. К таким моделям относятся в первую очередь модели идеального вытеснения и идеального перемешивания. Если построенная модель неудовлетворительно описывает движение потоков веществ в аппарате, то используют модели неидеальных потоков (диффузионные одно- и двухпараметрические модели, ячеечные или комбинированные).

Общее уравнение массообмена представляет собой математическое выражение закона сохранения масс и может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial C_j}{\partial \tau} = \Phi_{np} - \Phi_p, \quad (6.6)$$

где C_j – массовая концентрация j -го вещества (если оно образует самостоятельную фазу); τ – время; Φ_{np} – входной поток вещества; Φ_p – выходной поток, расход вещества.

Уравнение (6.6) предполагается составленным для некоторого контрольного, выделенного в реакционном пространстве аппарата, объема.

Выражение (6.6) принимает конкретный вид в зависимости от режима движения фаз.

Модель идеального вытеснения

Режим идеального вытеснения соответствует полному отсутствию перемешивания реагирующих фаз (для газообразных и жидких веществ – ламинарному потоку), т. е. принимается поршневое течение без перемешивания вдоль потока при равномерном распределении вещества в направлении, перпендикулярном движению. Уравнение, описывающее такой режим движения, принимает вид

$$\frac{\partial C_j}{\partial \tau} = -v \left(\frac{\partial C_j}{\partial x} \right) \pm W^*(x), \quad (6.7)$$

где C_j – массовая концентрация j -го вещества в потоке; v – линейная скорость движения потока, содержащего j -й реагент, знак минус соответствует тому факту, что скорость движения и градиент концентраций имеют обычно противоположные направления; x – пространственная координата аппарата; $W^*(x)$ – слагаемое, которое описывает кинетику химических превращений, например, потребление j -ого реагента за счет химических реакций. Знак «минус» относится к исходным веществам, а «плюс» – к конечным.

Нужно отметить, что уравнение (6.7) описывает разность прихода и расхода реагентов, т. е. массообмен веществ с помощью первого слагаемого

$$\Phi_{np} - \Phi_p = -v \frac{\partial C_j}{\partial x}.$$

Второе слагаемое $W^*(x)$, описывающее химическую кинетику, записывают в составе уравнения (6.7), а не самостоятельно, с целью сокращения числа уравнений математической модели процесса, если модель получается громоздкой.

Модели идеального вытеснения соответствует звено чистого запаздывания (звено транспортного запаздывания), характеризующим тем самым время транспорта вещества по длине аппарата. Для данного звена выходной сигнал при ступенчатом, а также импульсном возмущениях повторяет по форме входной сигнал со сдвигом по времени на величину $\tau_{зап.}$

$$y(\tau) = x(\tau - \tau_{зап.}).$$

Модель идеального перемешивания

Модель идеального перемешивания описывает режим, когда происходит мгновенное выравнивание концентраций веществ по всему объему реакционного слоя, т. е. принимается равномерное распределение вещества во всем потоке.

Концентрации веществ в аппарате не зависят от его пространственных координат, поэтому уравнение массообмена в режиме идеального перемешивания имеет вид

$$\frac{dC_j}{d\tau} = \Phi_{npj} - k(\tau)C_j \pm W^*, \quad (6.8)$$

где C_j – концентрация j -го реагента; $k(\tau)$ – коэффициент, определяющий режим отвода вещества из аппарата; W^* – слагаемое, описывающее кинетику химических превращений; Φ_{npj} – входной поток j -го вещества.

Для случая свободного отвода веществ $k(\tau) = \text{const}$.

Формула (6.8) может быть записана в другом виде:

$$\frac{dC_j}{d\tau} = \frac{v_c}{V} \cdot \frac{C_{j\text{вх}}}{C_{j\text{вых}}} \pm W^*. \quad (6.9)$$

Модели идеального перемешивания соответствует аperiodическое (инерционное) звено первого порядка, описываемое следующим выражением:

$$Y = kx \left(1 - E^{-\frac{\tau}{T}} \right),$$

т. е. выходная переменная аperiodически (по закону экспоненты) стремится к новому установившемуся значению.

Режимы идеального вытеснения и идеального перемешивания являются, конечно, приближениями реальной картины; однако, такие приближения весьма распространены. Например, гидродинамика процессов, протекающих в печах кипящего слоя, описывается моделями идеального перемешивания.

Диффузионная модель перемешивания

Различают одно- и двухпараметрическую диффузионные модели.

Однопараметрическая диффузионная модель соответствует промежуточному положению между идеальным перемешиванием

и идеальным вытеснением. Это такой режим движения, когда в направлении движения потока имеется сравнительно небольшое перемешивание. Обычно его описывают уравнением, аналогичным уравнению молекулярной диффузии. Параметром, характеризующим такую модель, является коэффициент продольного перемешивания, учитывающий турбулентную диффузию.

При составлении такой модели принимают допущения:

- 1) концентрация вещества в данном сечении постоянна;
- 2) изменение концентрации вещества является непрерывной функцией расстояния;
- 3) объемная скорость потока и коэффициент продольного перемешивания не изменяются по длине и сечению потока.

Уравнение, описывающее однопараметрическую диффузионную модель, имеет вид

$$\frac{\partial C_j}{\partial \tau} = D_{\text{пер}} \left(\frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} \right) - v \frac{\partial C_j}{\partial x} \pm W^*(x), \quad (6.10)$$

где $D_{\text{пер}}$ – коэффициент продольного перемешивания.

Как видно из формулы (6.10), основой рассматриваемой модели является модель идеального вытеснения, осложненная обратным перемешиванием, которое учитывается членом

$D_{\text{пер}} \left(\frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} \right)$. Коэффициент $D_{\text{пер}}$ определяется эксперименталь-

ным путем.

В двухпараметрической диффузионной модели учитывается перемешивание потока в продольном и радиальном направлениях, и модель характеризуется коэффициентом продольного и радиального перемешивания. При этом принимаются следующие допущения:

- 1) скорость движения потока постоянна по длине и сечению аппарата;
- 2) коэффициенты диффузии, продольный и радиальный, не изменяются по длине и сечению аппарата.

Двухпараметрическая диффузионная модель описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial C_j}{\partial \tau} = -v \frac{\partial C_j}{\partial x} + D_{\text{пер}} \left(\frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} \right) + \frac{D_R}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \cdot \left(R \frac{\partial C_j}{\partial R} \right), \quad (6.11)$$

где R – радиус трубы; $D_{\text{пер}}$ и D_R – соответственно коэффициенты продольного и радиального перемешивания.

Диффузионные модели получили широкое распространение при оценке реальных потоков в аппаратах, в которых происходит продольное и радиальное перемешивание в результате молекулярной и конвективной диффузии.

Ячеечная модель

Ячеечные модели описывают абсорбционные и экстракционные колонны, аппараты с КС и т. д. При этом условно пространство аппарата делится на ряд ячеек, расположенных последовательно, и принимается предположение, что внутри каждой из ячеек имеется идеальное перемешивание, а между самими ячейками оно отсутствует. Параметром, характеризующим такую модель, служит число ячеек m .

Ячеечная модель описывается системой из m линейных дифференциальных уравнений, при этом выход одной ячейки является входом последующей:

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{dC_i}{d\tau} = \frac{1}{\tau_n} (C_{i-1} - C_i), \quad (6.12)$$

где $i = 1, 2, \dots, m$.

При $m = 1$ ячейчная модель переходит в модель идеального смешения, а при $m = \infty$ – в модель идеального вытеснения.

Одной из разновидностей ячейчной модели является модель с обратным потоком, в которой необходимо учитывать обратный поток между ячейками. Параметрами, характеризующими такую модель, являются число ячеек m и доля обратного потока L . Подобные модели можно применять для описания структуры потоков в тарельчатых и насадочных аппаратах, в

которых наблюдается обратный поток вещества в сторону, обратную направлению основного потока.

Комбинированные модели

В тех случаях, когда процесс не удается описать при помощи рассмотренных выше моделей, применяют комбинированные модели.

При построении таких моделей условно разбивают технологический аппарат на ряд отдельных зон или участков, соединенных последовательно или параллельно. Структуры потоков в этих зонах различны: зона идеального вытеснения, зона с режимом идеального перемешивания, зона с конечной скоростью перемешивания и т. д.

С учетом сведений о последовательном, параллельном или ином соединении зон получают общую передаточную функцию всей системы.

Часто при аппроксимации математического описания структуры движения потоков в аппарате применяется простейшая комбинация аperiodического звена первого порядка и звена запаздывания,

$$W(S) = \left(\frac{K}{TS} + 1 \right) \cdot E^{-\tau_{зан}} . \quad (6.13)$$

В этом случае материальные потоки в технологическом аппарате имитируются последовательными зонами идеального вытеснения и идеального перемешивания (например, ленточный питатель на загрузке и идеальный смеситель – гидродинамическая модель с передаточной функцией (6.13).

Анализ любого самого сложного технологического объекта и конкретных условий его протекания всегда позволяет построить математическую модель, описывающую движение потоков веществ в аппарате.

7. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

7.1. Основные группы процессов теплообмена

Протекание большинства процессов связано со значительными затратами или выделением тепловой или другой энергии, например, электрической. При составлении математической модели объекта процессы теплообмена необходимо обязательно учитывать, т. к. интенсивность тепла определяет один из важнейших факторов, наиболее сильно воздействующий на ход процесса, более других на ход химических реакций – температуру процесса.

Обычно выделяют следующие группы тепловых потоков:

1) энтальпии (теплосодержание, физическое тепло) подаваемых в аппарат материалов и энергоносителей (топливо, окислитель для него) и энтальпии продуктов, покидающих аппарат;

2) тепловыделение в экзотермических химических реакциях и его теплоотдача к внешней границе частиц или поглощение тепла в эндотермических химических превращениях.

Если в процессе протекают гомогенные реакции, то такой теплоотдачи нет;

3) теплопередача от реагирующих частиц к потоку сплошной среды;

4) передача тепла внутри реакционной ванны аппарата;

5) теплообмен между реакционной ванной аппарата и поверхностями стенок аппарата или теплообменными устройствами, погруженными в реакционную ванну.

Все группы процессов теплообмена, происходящих в технологических агрегатах, описываются с помощью известных законов термодинамики.

Первый закон термодинамики является законом сохранения энергии и говорит о том, что энергия при взаимных превращениях не теряется и не создается вновь, а переходит из одного вида в другой.

На основании этого закона описывают энергетические (тепловые) балансы.

Из первого закона термодинамики вытекает ряд важных следствий, одним из которых является закон Гесса, позволяющий определять теплоту данной реакции (тепловой эффект) по теплотам образования участвующих в ней веществ.

Тепловая энергия (теплота) – энергия хаотического движения атомов или молекул вещества. Обмен теплотой между различными участками среды или материала называется теплопередачей. Процессы передачи теплоты обычно рассматриваются в условиях локального термодинамического равновесия. Такое состояние, например, для газов, имеет место в том случае, когда длина свободного пробега молекул λ_n намного меньше размеров рассматриваемого объекта L , т. е. $\lambda_n \ll L$. При этом предполагается, что тепловые процессы рассматриваются при временах, значительно превышающих время движения частиц между столкновениями, и в областях, геометрические размеры которых превышают λ_n . В этом случае в локальных областях объекта устанавливаются равновесные состояния, которые характеризуются средними значениями плотности, скорости движения частиц и т. д. Температура T определяет среднюю кинетическую энергию частиц

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{2}{3} kT ,$$

где m – масса частицы; v – средняя скорость хаотического движения; k – постоянная Больцмана, $k = 1,380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Внутренняя энергия вещества определяется через температуру с помощью величины удельной теплоемкости

$$c(\rho, T) = \frac{\partial \varepsilon(\rho, T)}{\partial T}, c(\rho T) > 0,$$

где $\varepsilon(\rho, T)$ – внутренняя энергия единицы массы.

Математическая модель теплопередачи получается на основе молекулярно-кинетической теории. Потоком теплоты (или тепловой энергии) q в данной точке называется количество

теплоты, переносимое в единицу времени через единичную поверхность, помещенную в данную точку вещества. Поток теплоты – векторная величина, поскольку она в общем случае зависит от ориентации единичной поверхности в пространстве.

7.2. Математическое описание различных групп тепловых потоков

Тепловыделение в экзотермических химических превращениях и его теплоотдача от активной поверхности реакции к среде, внутри которой она протекает (внешней границе реагирующих частиц), описывается известным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = c \operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T, \quad (7.1)$$

где c – коэффициент, учитывающий теплоемкость среды; λ – коэффициент теплопроводности; $\operatorname{div} \lambda$ – скалярная производная коэффициента теплопроводности по пространственной координате ξ , направленной перпендикулярно к активной поверхности; $\operatorname{grad} T$ – векторная производная температуры материала по аналогичной пространственной координате. Это уравнение, описывающее распространение теплоты, справедливо при допущении, что внутренняя энергия вещества изменяется лишь благодаря механизму теплопроводности, т. е. все другие виды энергии несущественны (например, отсутствует изменение внутренней энергии за счет химических реакций или за счет работы сил давления, сжимающих некоторый фактор и т. д.).

Уравнение (7.1) – нестационарное, уравнение параболического типа. Оно неоднородное, т. к. теплоемкость, коэффициент теплопроводности различаются в разных точках вещества, и нелинейное, поскольку функции c и λ в общем случае зависят от температуры T .

При дополнительных предположениях о характере процесса теплопередачи уравнение может упрощаться. Так, если процесс стационарный, т. е. температура не зависит от време-

ни, оно преобразуется в уравнение эллиптического типа, а если функции c , λ не зависят от температуры, то становится линейным параболическим уравнением.

Если коэффициент теплопроводности не зависит от пространственной координаты ξ , то конкретный вид уравнения (7.1) зависит от формы активной поверхности. Как отмечалось ранее, при рассмотрении процессов диффузии выделяют три вида активной поверхности: плоская (линейная), шарообразная, цилиндрическая. Тогда уравнение (7.1) принимает следующий вид:

1) для плоской активной поверхности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = c\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}; \quad (7.2)$$

2) для шарообразной активной поверхности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = c\lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \xi} \right); \quad (7.3)$$

3) для цилиндрической формы активной поверхности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = c\lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \xi} \right). \quad (7.4)$$

Следующая группа процессов теплообмена – это теплопередача от реагирующих частиц к потоку среды или наоборот, например, при эндотермических реакциях. Для математического описания подобных тепловых потоков часто пользуются эмпирическим законом теплопереноса

$$q = \alpha \Delta T,$$

где α – коэффициент теплоотдачи; ΔT – разность температур.

Если ввести границы, где $\xi = 0$ – внутренняя граница (активная поверхность частицы), а $\xi = \delta_1$ – внешняя поверхность частицы, то уравнения теплопереноса можно записать как граничное условие уравнений (7.1)–(7.4) на границе $\xi = \delta_1$:

$$q_{\xi=\delta_1} = \alpha S \left(T_{\xi=\delta_1} - T_{cp} \right), \quad (7.5)$$

где q – тепловой поток на границе $\xi = \delta_1$; α – коэффициент теплоотдачи;

S – внешняя поверхность частицы; $T_{\xi=\delta_1}$ – температура частицы на границе $\xi = \delta_1$;

T_{cp} – температура среды.

Математическое описание передачи тепла внутри аппарата

Связь между потоком теплоты и температурой T выражается законом Фурье

$$q = -\lambda \text{grad} T.$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, зависящий в общем случае от плотности и температуры вещества:

$$\lambda = \frac{1}{3} p c \lambda_n,$$

где c – удельная теплоемкость вещества

Удельная теплоемкость c и длина свободного пробега молекул λ_n зависят от давления p и температуры T . В частности, в газе, находящемся в обычных условиях, теплота переносится молекулами, т. е. имеет место молекулярная теплопроводность. В этом случае теплоемкость считается постоянной.

Таким образом, согласно закону Фурье, поток теплоты пропорционален градиенту температуры. Поэтому «поток» температуры пропорционален градиенту самой температуры. Аналогичным свойством обладает процесс диффузии вещества.

Математическое описание теплообмена между реакционной ванной аппарата в целом и стенками аппарата или другими поверхностями, погруженными в реакционную ванну

Теплопередача к стенкам и поверхностям, погруженным в реакционную ванну, описывается уравнением

$$q = \alpha S_{cm} (T - T_{cm}), \quad (7.6)$$

где q – тепловой поток; α – коэффициент теплопередачи; S – величина поверхности стенок аппарата; T – температура реакционной ванны аппарата;

T_{cm} – температура стенок.

Коэффициент α зависит от скорости движения потоков веществ вдоль стенок, причем в случае многофазных гетерогенных систем α в зависимости от скорости потоков имеет максимум.

Зависимость коэффициента теплопередачи от режимных переменных технологических процессов довольно хорошо изучена и обширно представлена в технической литературе, в основном в критериальной форме.

Математическое описание теплообмена аппарата, в котором протекает моделируемый процесс с внешней средой (другими аппаратами технологической схемы)

Этот вид теплообмена описывается уравнением теплового баланса аппарата

$$mC \frac{dT}{d\tau} = \sum Q_{np}^m - \sum Q_p^m \pm \sum_{i=1}^r q^{(i)}, \quad (7.7)$$

где m – масса реакционной ванны аппарата; C – удельная теплоемкость;

$\sum Q_{np}^m$ – приход тепла в аппарат; $\sum Q_p^m$ – отвод тепла из аппарата.

В уравнении (7.7) несколько по-другому можно записать левую часть:

$$G_g \frac{d(CT)}{d\tau} = \sum Q_{np}^m - \sum Q_p^m \pm \sum_{i=1}^r q^{(i)}, \quad (7.8)$$

где G_g – вес реакционной ванны аппарата; CT – удельное теплосодержание.

В правой части уравнения первое слагаемое включает в себя все статьи прихода, кроме тепла химических реакций: теплосодержание и физическое тепло подаваемых в аппарат материа-

лов и энергоносителей (топливо и окислители для него), выделение тепла в энергетическом процессе.

Расход тепла из аппарата $\sum Q_p^m$ состоит из следующих основных частей:

1) энтальпии (теплосодержание, физическое тепло) продуктов технологического и энергетического процессов, покидающих аппарат; 2) потери тепла через стенки аппарата в среду; 3) потери тепла, связанные с осуществлением самого энергетического процесса; 4) тепло, отводимое специальными теплообменами устройствами (если они есть).

Последний член уравнения (7.8) – это экзо- и эндотермические тепловые эффекты, сюда же входят и затраты тепла на изменение агрегатного состояния веществ (испарение, кристаллизация, конденсация и т. п.).

8. МОДЕЛИРОВАНИЕ МАССООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

8.1. Блочный принцип описания процессов массопередачи

К процессам массопередачи относятся такие широко распространенные в промышленности процессы разделения, как абсорбция, ректификация, адсорбция, экстракция и др., т. е. процессы с так называемой свободной поверхностью, существенно изменяющейся от взаимодействия двухфазных потоков. Наиболее важной характеристикой процессов массопередачи или, как их еще называют, процессов массообмена, является распределение концентраций веществ во взаимодействующих потоках по длине зоны контакта.

Для получения математического описания таких процессов широко используется блочный принцип, когда структура математической модели получается путем объединения математических описаний отдельных сторон изучаемого процесса. Основой математического описания является гидродинамическая модель процесса. Поэтому, имея информацию о равновесных данных и граничных условиях, составив материальный и тепловой балансы процесса, исследуют кинетику процесса. Затем математические описания всех выделенных блоков объединяют в полную математическую модель. Для получения замкнутой системы уравнений математической модели необходимо, чтобы входные и выходные переменные всех блоков находились во взаимном соответствии.

Как уже отмечалось, особенностью процессов массопередачи является осуществление физико-химических процессов в нескольких, в частности, в двух сосуществующих фазах. Нужно заметить, что уравнения балансов должны быть составлены отдельно для каждой из фаз. Кроме того, скорость массообмена определяется скоростью переноса вещества из одной фазы в другую, а условия периодического равновесия приводят к равенству химических потенциалов вещества во взаимодействующих фазах. Внутри фазы перенос вещества осуществляется за счет диффузионного и конвективного потоков.

Если две фазы, например, жидкая и газовая, находятся в равновесии, то концентрации веществ в них постоянны. Если концентрация вещества в газовой фазе равна C_{ir} , она обычно определяет равновесную концентрацию этого вещества в жидкой фазе, т. е.

$$C_{i\text{ж}}^* = f(C_{ir}).$$

Вид уравнения равновесия меняется при изменении температуры, и по нему можно судить о направлении переноса вещества. Если $C_{i\text{ж}} < C_{ir}^*$, то вещество уйдет из газовой фазы в жидкую, если $C_{i\text{ж}} > C_{ir}^*$, то наоборот. Разность концентраций $C_{i\text{ж}} - C_{ir}^*$ называется движущей силой процесса и определяет скорость массопереноса из одной фазы в другую.

Тепловое равновесие устанавливается в процессах массопередачи быстро, поэтому принимают допущение о том, что температуры фазы одинаковы. Это дает возможность исключить из математического описания уравнение теплового баланса. Рассмотрим математическое описание некоторых характерных процессов массообмена, причем разделим эти процессы по фазовому состоянию компонентов: газ – жидкость (абсорбция, ректификация), газ – твердое, жидкость – жидкость (экстракция), жидкость – твердое (кристаллизация).

8.2. Математическое описание процесса адсорбции в неподвижном слое сорбента

Данный процесс в целом нестационарен, т. к. свойства сорбента постоянно меняются из-за накопления сорбата на его поверхности. Уравнения баланса записываются для элементарного объема за элементарное время для неподвижной и подвижной фаз.

Можно принять, что движение подвижной фазы описывается моделью с продольным перемешиванием, уравнения которой приведены ранее. Уравнения материального и теплового балансов необходимо дополнить выражением, описывающим

скорость расходования компонента при физико-химическом процессе

$$v = \frac{S}{V} \beta_c (C - C^*).$$

Величина C^* находится из уравнения равновесия. Для описания процесса адсорбции наиболее часто пользуются уравнением изотермы адсорбции Лангмюра.

В уравнение материального баланса для сорбируемого вещества в подвижной фазе войдут только члены, учитывающие его накопление на сорбенте и подвод за счет процесса адсорбции. В уравнение теплового баланса для сорбента войдут члены, учитывающие накопление тепла в объеме, количество тепла, поступающее за элементарное рассматриваемое время в элементарный объем через стенку от внешнего теплоносителя и количество тепла, уходящее из рассматриваемого объема в рассматриваемое время при поглощении физико-химическим процессом. Граничные и начальные условия могут задаваться различным образом. Наиболее подробно исследованы математические описания изотермического процесса.

8.3. Математическое описание экстракции в насадочной колонне

Экстракция относится к массообменным процессам, в которых происходит перераспределение компонентов между двумя взаимонерастворимыми или частично смешиваемыми фазами. Исходный раствор, из которого с той или иной степенью полноты извлекается целевой компонент, называется *рафинатом*, а фаза, в которую компонент попадает, — *экстрактом*. Получившиеся жидкие фазы отделяют друг от друга отстаиванием или другими способами. Затем производят извлечение целевого компонента из экстракта и регенерацию экстрагента из рафината.

Достоинством процесса экстракции является низкая рабочая температура процесса (15–20 °С), вследствие чего нет необходимости тратить энергию на испарение раствора. Однако нужно отметить при этом, что использование в рассматриваемом

мых процессах экстрагента и его регенерация в последующем приводят к усложнению аппаратуры и удорожанию процесса.

Математическое описание процесса экстракции состоит из уравнений материальных балансов, дополненных уравнениями скорости массопереноса и уравнениями для расчета коэффициентов массопереноса.

Рассмотрим процесс экстракции в противоточной вертикальной колонне, причем растворитель и рафинат взаимно нерастворимы. Примем предположение, что коэффициент массопередачи β постоянен по всей высоте экстракционной колонны.

Так как характер потоков по высоте колонны меняется, запишем уравнение баланса для участка колонны высотой H . На этом участке линию равновесия считаем прямой, а скорость массопередачи пропорциональной разности средних для выбранного участка реальной (C) и равновесной (C^*) концентраций. Таким образом, экстракционная колонна обычно рассматривается как каскад участков идеального перемешивания, причем число участков $N = L/H$, где L – общая высота колонны; H – высота участка колонны. Для оценки H предложены различные соотношения, например, следующее выражение:

$$H = (1,5 - 2)24 \frac{v_L^2}{gd_H} - 0,2d,$$

где v_L – скорость движения легкой фазы; g – ускорение силы тяжести; d_H – диаметр насадки; d – диаметр сечения колонны.

Если обозначить индексом L – легкую фазу, а индексом T – тяжелую фазу, то получим следующие уравнение:

$$\begin{aligned} G_T(C_{Tj} - C_{T,j+1}) - \beta H(C_T - C_T^*) &= 0 \\ G_L(C_{L,j+1} - C_{Lj}) + \beta H(C_T - C_T^*) &= 0 \end{aligned}$$

Начальные условия для входных потоков будут следующими:

$$C_L(0) = C_{\text{до}}, \quad C_T(L) = C_{\text{то}}.$$

*Математическое описание процесса роста твердых
частиц в растворе*

Расчет таких процессов основан на использовании уравнений балансов, а также функции распределения частиц по размерам. Если определить параметры, характеризующие функцию распределения, и изучить влияние на нее условий проведения процесса, то можно рассчитать количество твердых частиц и их распределение.

В ряде работ сведения о функции распределения используются для оценки устойчивости таких процессов.

Нужно отметить, что существует большое разнообразие процессов массообмена, причем общий подход к получению математических описаний подобных процессов одинаков и возможные виды математических моделей приведены в литературе.

9. СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

9.1. Особенности синтеза математических моделей с сосредоточенными параметрами

При построении математических моделей с сосредоточенными параметрами обычно принимаются следующие предположения:

1. Режим движения потоков веществ в аппарате описывается моделью идеального перемешивания. Это означает, что массовые концентрации реагентов (парциальные давления) одинаковы в любой точке технологического объекта. Поэтому часто среднюю концентрацию любого реагента внутри объекта считают равной концентрации этого вещества в выходном материальном потоке.

2. В аппарате, в котором протекает процесс, температуры в любой точке аппарата и в любом его сечении одинаковы.

3. Количества (концентрации) веществ, которые отводятся из аппарата с выходными продуктами, пропорциональны их количествам (концентрациям) в реакционном пространстве аппарата.

Если процесс – периодический, т. е. нет отвода продуктов из аппарата в ходе его протекания, то третье допущение не вводится. Кроме того, это допущение справедливо в тех случаях, когда выходные продукты самотеком выводятся из аппарата. Во всех остальных случаях количества веществ, покидающих аппарат, определяются режимом откачки или отсоса с помощью специальных устройств.

Рассмотрим учет закономерностей отдельных взаимосвязанных элементарных процессов в технологических объектах при построении общей математической модели с сосредоточенными параметрами.

При математическом описании технологических объектов большое место занимают уравнения материального баланса, причем баланс может быть записан для потоков исходных материалов, загружаемых в аппарат и выводимых из него; для пото-

ков отдельных химических соединений, поступающих в агрегат; для потоков отдельных химических элементов (как находящихся в «свободном» состоянии, так и в составе химических соединений).

Баланс входных и выходных материальных потоков обычно записывают в статике, для аппарата в целом можно записать только одно такое уравнение.

Так как модель, описывающая структуру движения потоков, у нас выбрана, – это идеальное перемешивание, то, используя уравнение этой модели, опишем массообмен веществ в аппарате

$$\frac{dm}{d\tau} = \sum Q_{np} - \sum Q_p \pm Q^*, \quad (9.1)$$

где m – масса (вес, концентрация, парциальное давление) материала в реакционной ванне аппарата; $\sum Q_{np}$ – входной поток материала (вещества) в аппарат, т. е. его количество, поступающее в единицу времени в аппарат; $\sum Q_p$ – выходной поток этого же вещества, отводимого из аппарата с выходными продуктами; Q^* – количество вещества, возникающего в аппарате в результате химических реакций или же расходуемого на химические превращения.

Уравнение (9.1) представляет собой уравнение мгновенного материального баланса для бесконечно малого объема.

Для раскрытия функции Q^* необходимо рассмотреть кинетику химического взаимодействия. При этом должны быть учтены, по крайней мере, лимитирующие стадии и влияние температуры.

Для всех веществ, участвующих в рассматриваемой химической реакции, уравнение химической кинетики будет одинаковым, и член Q^* для различных веществ будет отличаться лишь стехиометрическими коэффициентами.

Уравнения мгновенного теплового баланса в общем виде можно записать следующим образом:

$$m C \left(\frac{dT}{d\tau} \right) = \sum Q_{np}^T - \sum Q_p^T \pm \sum_{i=1}^p q^{(i)}, \quad (9.2)$$

где m – масса реакционной ванны аппарата; C – удельная теплоемкость ванны;

T – температура процесса; $\sum Q_{np}^T$ – количество тепла, подводимое в ванну аппарата извне (физическое тепло поступающих материалов, тепло от выносных топок, подогрева и т. п.); $\sum Q_p^T$ – отвод тепла из аппарата (тепло, уносимое с выходными материалами, потери тепла через стенки и т. д.); $\sum_{i=1}^p q^{(i)}$ – суммарный тепловой эффект p химических реакций, он берется со знаком «плюс», если реакции экзотермические и со знаком «минус», если химические реакции, протекающие в аппарате – эндотермические.

Таким образом, математическая модель технологического объекта с сосредоточенными параметрами состоит из уравнений мгновенного материального баланса по каждому реагенту с учетом явных зависимостей $\sum Q_{np}$, $\sum Q_p$ и Q^* и уравнения мгновенного теплового баланса, также учитывающего в явном виде $\sum Q_{np}$, $\sum Q_p$ и суммарный тепловой эффект.

Система уравнений (9.1)–(9.2) является математической моделью процесса, в котором количества (концентрации, парциальные давления) веществ в ванне аппарата, температуры и гидродинамические условия протекания процесса одинаковы для любой точки аппарата в любой момент времени, а изменяются только во времени.

В реальных технологических объектах имеется существенное различие температур, концентраций реагентов и т. д. в различных точках пространства аппарата и даже для частиц различных размеров. Поэтому вышеприведенная система уравнений, вообще говоря, справедлива только для бесконечно малого объема аппарата. Чтобы иметь математическое описание реального процесса, необходимо уравнения этой системы проинтег-

рировать по объему участка реакционного пространства или по всему объему аппарата.

Особенности учета кинетики гетерогенных реакций в математических моделях с сосредоточенными параметрами

В этом случае для учета диффузионных стадий гетерогенной химической реакции используется первый закон Фика

$$Q = \frac{dM}{d\tau} = \beta S_1 (c^V - c), \quad (9.3)$$

где Q – диффузионный поток вещества; M – масса продиффундировавшего через внешние границы диффузионного слоя внутрь его газа или жидкости; β – коэффициент скорости диффузии, который равен отношению коэффициента диффузии к средней толщине диффузионного слоя,

$$\beta = \frac{D}{\delta};$$

S_1 – поверхность диффузионного слоя вокруг одной частицы концентрата;

c^V – концентрация диффундирующего к активной поверхности реагента в реакционном пространстве аппарата; C – средняя концентрация этого же вещества в диффузионном слое.

Величину диффузионного потока часто определяют в единице объема аппарата. Тогда

$$S = S_1 \cdot \rho, \quad (9.4)$$

где S – общая поверхность диффузии твердой реагирующей фазы; ρ – число реагирующих частиц в единице объема аппарата.

С учетом (9.4) уравнение для общего диффузионного потока диффундирующего вещества в реакционном пространстве аппарата будет иметь вид

$$Q = \frac{dc}{d\tau} = \rho \cdot \frac{dM}{d\tau} = \beta \cdot S_1 \cdot \rho (c^V - c). \quad (9.5)$$

Аналогично можно учесть диффузию продуктов реакции.

9.2. Математическая модель с сосредоточенными параметрами для автоклавного выщелачивания глинозема

Выщелачивание – главный процесс в гидрометаллургии. Процесс основан на способности извлекаемого компонента твердой фазы растворяться в жидком реагенте лучше, чем другие. Реагенты могут быть: нейтральными (вода, растворы солей KCN , CuCl_2 , FeCl_3), кислыми (H_2SO_4 , HCl), щелочными (NaOH). Примерами процессов являются: выщелачивание золота в цианистых растворах (KCN), выщелачивание глинозема из бокситов в растворах едкого натра.

В ходе процесса вследствие взаимодействия твердого вещества и жидкого реагента, на поверхности твердых частиц образуется слой насыщенного (растворимым веществом) раствора. Поэтому для непрерывного удаления этого насыщенного слоя необходимо механическое перемешивание пульпы в чанах и автоклавах (либо просасывание жидкости через слой твердого).

Физико-химические основы выщелачивания

Процесс выщелачивания является гетерогенным процессом, который условно рассматривают как двухстадийный. Первой стадией является диффузия молекул растворителя к поверхности твердых частиц, а жидких продуктов реакции – от поверхности в массу жидкости; второй стадией – химическая реакция. Обе стадии во времени протекают параллельно, но с разной скоростью.

В пленке раствора у поверхности твердой частицы концентрация растворителя уменьшается, а концентрация растворенного вещества растет до насыщения. Недостаток растворителя в пленке восполняется притоком из объема жидкой фазы. Этот приток имеет две составляющие; движение жидкости, вызываемое перемешиванием или градиентом температур в пульпе (конвекцию) и диффузию, вызываемую градиентом концентрации на пленке.

В диффузионной области скорость выщелачивания определяется первым законом Фика

$$\frac{dm}{d\tau} = S \cdot D \cdot \frac{(C - C_{\text{нас}})}{\delta_{\text{пл}}},$$

где $\frac{dm}{d\tau}$ – количество прореагировавшего реагента за 1с;

S – площадь границы "твёрдое – жидкое"; D – коэффициент диффузии; C – концентрация реагента в объёме; $C_{\text{нас}}$ – равновесная концентрация реагента на поверхности твёрдого; $\delta_{\text{пл}}$ – толщина плёнки.

Коэффициент диффузии можно вычислить, пользуясь уравнением Эйнштейна

$$\frac{b^2}{2 \cdot \tau} = \frac{RT}{fN},$$

где b – средний пробег частицы (молекулы) за время τ ; R – газовая постоянная; T – абсолютная температура; N – число Авогадро; f – сопротивление среды движению сферы; по закону Стокса $f = 3 \cdot \pi \cdot \mu \cdot d$; d – диаметр частицы; μ – вязкость растворителя.

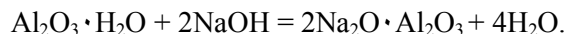
Считая $D = \frac{b^2}{2\tau}$, получим

$$D = \left(R \frac{T}{N} \right) \cdot \frac{1}{3 \cdot \pi \cdot m \cdot d}.$$

В кинетической области скорость выщелачивания определяется химической кинетикой.

Модель процесса автоклавного выщелачивания глинозёма

При выщелачивании пульпа, содержащая боксит (твёрдая фаза) и раствор щёлочи и алюмината натрия (жидкая фаза), протекает через обогреваемые автоклавы непрерывного действия. При этом глинозём, содержащийся в боксите, переходит в жидкую фазу, взаимодействуя со щелочью по реакции



твёрдое раство- продукт в
 ритель растворе

Баланс по растворённому выщелачиваемому материалу для автоклава в целом:

$$V = \frac{dC}{d\tau} = Q_1 \cdot C_1 - Q_2 \cdot C_2 + V \cdot f_{\text{хим}},$$

$$\frac{dV}{d\tau} = Q_1 - Q_2,$$

где V – объём пульпы в автоклаве; Q_1, Q_2 – производительность по подводимому и отводимому потокам; C, C_1, C_2 – концентрация алюмината натрия соответственно в рабочей зоне автоклава, подводимом и отводимом потоках; $f_{\text{хим}}$ – скорость выщелачивания.

В частном случае $Q_1 = Q_2 = Q$.

Можно принять, что скорость выщелачивания (в диффузионной области) будет равняться

$$f_{\text{хим}} = f(T, S_{\text{уд}}) [C_{\text{насAl}}(T) - C(\tau)],$$

где $S_{\text{уд}}$ – удельная поверхность твёрдой фазы (в 1т твёрдой фазы).

При идеальном перемешивании, т. е. при $C_2(\tau) = C(\tau)$ и при $Q_1 = Q_2 = Q$, модель выщелачивания получается линейной, если входом считать $C_1(\tau)$

$$V \frac{dC}{d\tau} = QC_1 - QC + Vk[C_{\text{насAl}} - C],$$

или

$$\left[\frac{V}{(Q + k \cdot V)} \right] \cdot \frac{dC}{d\tau} + C = \left[\frac{Q}{(Q + k \cdot V)} \right] \cdot C_1 + (V \cdot k \cdot C_{\text{насAl}}) / (Q + k \cdot V);$$

$$k = \frac{n \cdot D \cdot m_{\text{мг}}}{\delta_{\text{пл}}} \int_0^{l_{\text{max}}} \frac{6 \cdot \gamma(l) dl}{\rho \cdot l}$$

Если измерить экспериментально C_1 и C для равновесного режима, то можно вычислить k по формуле

$$k = \frac{Q \cdot (C - C_1)}{V \cdot (C_{\text{нас}} - C)}. \quad (9.6)$$

Уравнение (9.6) позволяет рассмотреть батарею автоклавов как последовательную цепь апериодических звеньев 1-го порядка:

$$T \cdot \frac{dC_2}{d\tau} + C_2 = k \cdot C_1 + C_0 = T \cdot \frac{dC_{n+1}}{d\tau} + C_{n+1} = k \cdot C_n + C_0,$$

где

$$T = V / (Q + k \cdot V); K = Q / (Q + k \cdot V); C_0 = [k \cdot V / (Q + k \cdot V)] C_{\text{yfc}}.$$

Распределение концентраций вдоль батареи подчиняется экспоненциальному закону.

Уравнение теплового баланса для одного автоклава записывается следующим образом:

$$V \cdot C \cdot (dT / d\tau) = C \cdot Q \cdot (T_1 - T_2) + Q^T,$$

где C – удельная теплоемкость пульпы; T_1 , T_2 , T – температура пульпы в питании, разгрузке и в зоне автоклава; Q^T – поток внешнего тепла.

При идеальном смешении $T_2 = T$, тогда

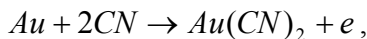
$$[V \cdot C / (Q \cdot C)] \cdot dT / d\tau + T = [1 / C \cdot Q] \cdot Q^T + T_1.$$

Для батареи автоклавов имеет место система таких уравнений, причем поток внешнего тепла для каждого автоклава может быть различным (т. к. является входным воздействием). Температура пульпы является выходной величиной, с увеличением температуры пульпы T значения $C_{\text{нас}}$ и k растут.

Моделировать ход процесса выщелачивания глинозема имеет смысл, если концентрация растворителя NaOH не является лимитирующим фактором.

Вообще, если в химических реакциях выщелачивания имеется несколько стадий или участвует несколько компонентов, то

скорость определяется совокупностью стадий и концентраций компонентов. Например, при выщелачивании золота цианидами большое значение имеет наличие кислорода, растворенного в пульпе, который уносит электроны, выделенные реакцией вида



что приводит к ускорению реакции выщелачивания.

На скорость выщелачивания влияет также гранулометрическая характеристика γ .

Обозначим линейную скорость уменьшения размеров отдельных твердых частиц $V_{\text{лин}} = dI / d\tau$. С учетом, что

$$\frac{dm}{d\tau} = d(\pi I^3 / 6) d\tau, \quad S = \pi I^2 \quad \text{для частицы любого размера равенств}$$

во примет вид

$$\frac{d\left(\pi \cdot \frac{I^3}{6}\right)}{d} = \pi \cdot I^2 \cdot D \cdot \frac{C - C_{\text{нас}}}{\delta},$$

причем

$$V_{\text{лин}} = dI / d\tau = (3 \cdot D / \delta) \cdot (C - C_{\text{нас}}).$$

Скорость $V_{\text{лин}}$ зависит от концентрации, но при просасывании жидкости растворителя через слой твердого $C = \text{const}$, $V_{\text{лин}} = \text{const}$. Тогда, если просасывается свежий растворитель, то $C = 0$, $V_{\text{лин}} = 3 \cdot D \cdot C_{\text{нас}} / \rho \cdot \delta$, если обратный с концентрацией $C_{\text{об}}$, то $V_{\text{лин}} = 3 \cdot D \cdot (C_{\text{об}} - C_{\text{нас}}) \cdot \rho \cdot \delta$.

10. СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

10.1. Основные методы синтеза моделей с распределенными параметрами

Методы описания объектов с распределенными параметрами можно разделить на следующие группы:

1. Методы, основанные на том предположении, что выходные переменные объекта определяются физическими и физико-химическими закономерностями элементарных явлений процесса не в равной степени, а в основном определяются только некоторыми из них. Принимается также допущение, что уравнения, описывающие отдельные элементарные явления технологического объекта, могут решаться независимо друг от друга. При этом значения выходных переменных, рассчитанные по математической модели, могут существенно отличаться от реальных, но в целом соответствовать физическому смыслу. Такой метод позволяет выбрать в качестве независимых координат математической модели в целом координаты основных закономерностей или координаты отдельных элементарных закономерностей суммируют.

Так, например, если основной закономерностью, которая влияет на выходные показатели, является массообмен в реакционной зоне аппарата, описываемый дифференциальным уравнением в частных производных по двум пространственным координатам аппарата, то в качестве независимых координат математической модели в целом принимают эти две пространственные координаты.

Другим подходом к решению задачи построения математической модели с распределенными параметрами является метод многомерного фазового пространства. Основным допущением, принимаемым в этом методе, является выбор в качестве независимых координат моделируемого процесса пространственных координат аппарата и внутренних координат реагирующих дисперсных частиц. Выходные переменные процесса считаются зависящими только от этих координат и времени.

Физические и химические превращения веществ моделируются движением условной изображающей точки $M(x_l, y_l, z_l, R_l, r_l)$, под которой понимаются значения переменных технологического объекта в элементарном объеме аппарата на расстоянии x_l по длине от точки, принятой за начало отсчета, y_l – по ширине, z_l – по высоте, для частиц с внешним радиусом R_l и радиусом активной поверхности r_l . Многомерное фазовое пространство аппарата при этом разбивают на ряд зон однородности. В пределах каждой зоны получают усредненные значения переменных путем интегрирования по элементарному объему каждой зоны.

Обычно при построении математических моделей с распределенными параметрами выбирают тот из методов, который является наиболее удобным и менее трудоемким.

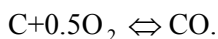
10.2. Математическая модель с распределенными параметрами, описывающая процесс обезуглероживания

В литературе приведена модель процесса обезуглероживания в тигле, при построении которой были приняты следующие предположения:

1. Процесс протекает в изотермических условиях в системе $Fe - C - O$.

2. Реакция окисления углерода протекает в условиях повышенных скоростей подвода кислорода к поверхности расплава.

При подобных предположениях считается, что процесс обезуглероживания определяется в основном реакцией



Распределение компонентов в расплаве можно описать дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа:

$$\frac{\partial c_{O_2}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_1 * \frac{\partial c_{O_2}}{\partial \xi} \right) + f_1,$$

$$\frac{\partial c_c}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} (D_2 * \frac{\partial c_c}{\partial \xi}) + f_2,$$

где $C_{O_2} = C_{O_2}(\xi, \tau)$, $C_c = C_c(\xi, \tau)$ – распределение концентраций, соответственно кислорода и углерода; D_1 и D_2 – коэффициенты диффузии компонентов в расплаве; f_1 и f_2 – источниковые члены, определяющие изменение общего количества реагирующих веществ.

Начальные распределения задаются следующим образом:

$$C_{O_2}(\xi, 0) = C_{O_2}^0(\xi); C_c(\xi, 0) = C_c^0(\xi).$$

Из условия равновесия сил на границе раздела фаз газ – металл следует, что необходимым и достаточным условием образования и роста пузырька газовой фазы является выполнение неравенства

$$P_{CO} \geq P_o + \gamma_p(l - \xi) + \frac{2\sigma}{R},$$

где P_{CO} – парциальное давление продуктов реакции;

P_o – атмосферное давление; $\gamma_p(l - \xi)$ – ферростатическое давление столба металла; ξ – расстояние от начала координат, находящегося на дне тигля; l – расстояние от дна тигля до поверхности металла; σ – межфазное поверхностное натяжение; R – радиус кривизны поверхности.

Реакция окисления углерода протекает при условии

$$C_{O_2} * C_c > \frac{P_{CO}}{k_p}.$$

где k_p – константа равновесия реакции обезуглероживания.

Затем, делая подстановку, можно получить неравенство

$$k_p * C_{O_2} * C_c > P_o + \gamma_p(l - \xi) + \frac{2\sigma}{R}. \quad (10.1)$$

При выполнении этого неравенства продукты реакции должны выделяться в газовую фазу.

Скорость процесса определяется следующим уравнением:

$$V = k * S f(C_{O_2}, C_C),$$

где k – константа скорости реакции; S – площадь поверхности в реакционной зоне

$$S = \begin{cases} 0, \text{если } C_{CO} = 0, k_p C_{CO}^2 \cdot C_C < A \\ 4\pi N \left(\frac{3C_{CO} \cdot \gamma_p}{4\pi \cdot N \cdot \gamma_p} + R_H^3 \right), \text{если } C_{CO} > 0, k_p C_{CO}^2 \cdot C_C \geq A, \end{cases}$$

где A – правая часть неравенства (10.1); γ_{CO}, γ_p – плотности оксида углерода и расплава; N – объемная концентрация пузырьков начального радиуса;

$C_{CO} = C_{CO}(\xi, \tau)$, – распределение концентрации оксида углерода.

Скорость подъема пузырька, на поверхности которого происходит взаимодействие углерода и кислорода, определяется из уравнения для сферических частиц

$$W = \frac{g}{9\nu} \frac{R^3 - R_H^3}{\nu},$$

где R – радиус пузырька; g – ускорение силы тяжести; ν – кинематическая вязкость.

Эта формула используется в предположении об отсутствии взаимодействия между отдельными пузырями, что справедливо для малых размеров пузырей.

Концентрация оксида углерода C_{CO} представляется в следующем виде:

$$C_{CO} = \frac{4}{3} \pi N \frac{\gamma_{CO}}{\gamma_p} (R^3 - R_H^3).$$

Для описания газовой фазы было использовано уравнение переноса

$$\frac{\partial c_o}{\partial \tau} = -W \frac{\partial c_o}{\partial \xi} + f_3$$

с начальными условиями $C_{co}(\xi, 0) = C_{co}^0(\xi)$.

Источниковые члены для единичного объема определяются с использованием стехиометрических коэффициентов.

Далее были определены граничные условия. На нижней границе ($\xi = 0$):

$$\left. \frac{\partial C_{o_2}}{\partial \tau} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial C_c}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial C_{co}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0.$$

На верхней границе ($\xi = l$), где проходит реакция обезуглероживания в поверхностном слое, граничные условия следующие:

$$D_1 * \left. \frac{\partial C_{o_2}}{\partial \tau} \right|_{\xi=l} = \frac{U - a_2 V}{F \gamma_p}; D_2 * \left. \frac{\partial C_c}{\partial \xi} \right|_{\xi=l} = 0,$$

где U – интенсивность поступления кислорода; a_2 – стехиометрический коэффициент; F – площадь контакта струи окислителя с поверхностью расплава. Тогда получается система дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{o_2}}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \xi} (D_1 * \frac{\partial c_{o_2}}{\partial \xi}) + f_1; \\ \frac{\partial c_c}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \xi} (D_2 * \frac{\partial c_c}{\partial \xi}) + f_2; \\ \frac{\partial c_o}{\partial \tau} &= -W \frac{\partial c_o}{\partial \xi} + f_3, \end{aligned}$$

которая вместе с полученными ранее соотношениями будет являться моделью процесса обезуглероживания металлической ванны. Эта модель, как уже говорилось ранее, была получена с учетом ряда допущений.

11. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИДЕНТИФИКАЦИИ

11.1. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость

Эти понятия впервые были введены Р. Калманом. Система называется полностью управляемой, если из любого начального состояния $x_0(t_0)$ она может быть переведена в любое наперед заданное состояние $x_d(t)$ с помощью некоторого управления $u(t)$ за конечное время $t - t_0 \geq 0$. Возможен случай частично управляемой системы, имеющей подмножества начальных состояний, из которых достижение произвольного желаемого состояния за конечное время невозможно. Приведенное определение характеризует принципиальную возможность перехода системы из одного состояния в другое за конечное время и не учитывает вид траектории движения. Поэтому во многих практических приложениях при оценке управляемости конкретизируются характер управляющих воздействий и траектории движения.

Управление системой осуществляется на основе результатов измерений переменных состояния. Под наблюдаемостью системы понимают свойство восстанавливать вектор ее состояния по наблюдаемым координатам.

Система называется *идентифицируемой*, если по измерениям координат состояния объекта можно определить матрицу коэффициентов системы A . При известном векторе начального состояния $x_0(t_0)$ система является идентифицируемой, если матрица $[x_0(t_0) : Ax_0(t_0) : \dots : A^{n-1}x_0(t_0)]$ имеет ранг n .

Основной задачей системного анализа процессов, протекающих в рассматриваемом объекте, является определение выходного сигнала по известному входному сигналу и характеристикам объекта. Основной целью идентификации является решение обратной задачи системного анализа – по заданным входному и выходному сигналам определить структуру, т. е. уравнения, описывающие поведение объекта.

11.2. Постановка задачи идентификации

Постановка задачи идентификации имеет множество определений, что нашло отражение в литературе. Эта задача базируется на современной теории управления и для ее решения используются современные компьютеры.

Согласно Эйкхоффу, постановка задачи идентификации формулируется следующим образом: по результатам экспериментальных наблюдений над входными и выходными переменными системы необходимо построить оптимальную в некотором смысле математическую модель.

Заде дает следующее определение задачи идентификации: это процедура определения по входным и выходным сигналам системы из определенного класса систем, которой испытываемая система эквивалентна.

Различают два этапа построения математической модели. Первый этап – структурная идентификация (структурный синтез) или решение задачи идентификации в широком смысле. На этом этапе определяется структура математической модели, т. е. уравнения, которые входят в состав математической модели (число, конкретный вид этих уравнений), оценивается степень стационарности и линейности объекта и действующих переменных, также оценивается степень и форма влияния входных переменных на входные и др.

На выбор класса моделей, класса входных сигналов и критерия сильно влияет априорная информация об объекте и цель идентификации.

Второй этап – это этап параметрической идентификации или решение задачи идентификации в узком смысле. Задача идентификации в узком смысле состоит в оценивании параметров (коэффициентов) и состояния системы по результатам наблюдений над входными и выходными переменными, полученными в условиях нормального функционирования объекта. При этом известна структура модели, априорная информация об объекте достаточно велика.

11.3. Классификация задач идентификации и оценивания

Задача определения некоторого набора параметров (коэффициентов) математической модели носит название параметрической идентификации. Задачи же определения некоторой непрерывной функции времени (переходной характеристики) или частоты (частотной характеристики) носит название непараметрической идентификации. Чаще всего после получения этой характеристики ее аппроксимируют некоторым аналитическим выражением, решая на этой стадии задачу подбора его параметров и в некоторых случаях структуры.

Задачи оценивания переменных состояния делятся на три группы:

а) задача фильтрации или собственно оценивания, т. е. определение случайного ненаблюдаемого сигнала y в текущий момент времени, где y оценивается косвенно по наблюдаемому выходному сигналу, получаемому в результате преобразования в объекте или системе входного наблюдаемого сигнала оператором системы;

б) задача оценивания y в будущий момент времени, сдвинутый на Δt относительно текущего момента – задача прогнозирования, предсказания или экстраполяции;

в) задача сглаживания (интерполяции), т. е. оценивание y в прошлый момент времени.

Возможна постановка задачи, при которой одновременно проводится параметрическая идентификация и оценивание y .

Рассмотрим основные разновидности задач идентификации.

В промышленных условиях наблюдаемые выходные сигналы изменяются не только под влиянием наблюдаемых входных сигналов, но и из-за многочисленных ненаблюдаемых помех.

В этом случае, когда эти помехи малы или вообще отсутствуют, выходной сигнал полностью определяется только наблюдаемым входным сигналом. Такая система называется детерминированной, в отличие от стохастической системы, в которой помехи оказывают влияние на выходные сигналы.

Помехи при идентификации приводят к необходимости сбора большего числа данных, чем это необходимо в детерминированной системе.

Обычно выделяют два подхода к построению алгоритмов идентификации.

Первый подход называют неадаптивным, используя его, обычно вначале собирают массив данных, и оценки параметров получают после обработки этого массива.

Другой подход предусматривает уточнение оценок параметров по мере поступления новых измерений, т. е. по ходу процесса. Подобные алгоритмы носят название адаптивных (рекуррентных или пошаговых).

Рекуррентные алгоритмы характерны для адаптивных систем управления, когда вследствие дрейфа параметров или недостаточной исходной точности необходимо уточнение параметров по ходу процесса.

Методы идентификации могут быть построены как по адаптивному, так и неадаптивному алгоритму.

Однако некоторые методы, например, метод стохастической аппроксимации и байесовские оценки, наиболее приспособлены к рекуррентной форме.

11.4. Информационное множество, используемое для решения задачи идентификации

Исходные данные (информационное множество), которые используются в процессе идентификации, разделяются на два класса:

1. Априорная информация, которая формируется до проведения экспериментальных исследований на объекте, обычно включает в себя различные сведения о структуре рассматриваемого объекта и среде, в которой он функционирует. Обычно в литературе рассматриваются следующие признаки, характеризующие объект:

а) признак динамичности (инерционности);

б) признак стохастичности. Объект считается стохастическим, если поведение его выходных переменных зависит от не-

контролируемых входов объекта, или объект содержит неконтролируемый источник случайных возмущений;

в) признак нелинейности. Объект считается нелинейным, если для него не выполняется признак суперпозиции;

г) признак дискретности. Объект называется дискретным, если он содержит дискретные элементы или состояние его входных и выходных переменных измеряется лишь в дискретные моменты времени. Наоборот, если входные и выходные переменные измеряются непрерывно, то объект называется непрерывным. Таким образом, способ измерения может изменять этот признак объекта.

Часть из этих признаков может быть получена на основе анализа физико-химических, физических закономерностей процесса. Другие признаки могут определяться на основе предварительной обработки экспериментальных данных.

2. Апостериорная информация, которая представляет собой наблюдения за входными и выходными переменными объекта. Эта экспериментальная информация включает в себя сведения о входах и выходах, помехах, доступных областях функционирования объекта.

В отличие от априорной информации, которая играет роль внешнего дополнения, экспериментальная информация в компактном виде отражает те или иные стороны функционирования объекта, его характерные особенности.

Поэтому экспериментальная информация является основным источником данных об объекте, а априорная позволяет уточнить результаты идентификации и, если надо, привести их в соответствие с содержащимися в ней данными.

Системный подход к проблеме идентификации

При системном подходе к проблеме идентификации рассматривают систему "объект плюс среда". Идентификация объекта в этом случае рассматривается как идентификация в широком смысле. Для решения задачи идентификации в этом случае необходимо определить структуру модели, оценить степень нелинейности объекта, определить оценки параметров объекта,

оценить интервал стационарности рассматриваемой системы как объекта управления. Сюда же относится формулировка требований к математическому описанию, исходя из задач исследования; результаты предварительных экспериментальных исследований и выбор переменных состояния; исследование и анализ полученной математической модели; проверку её адекватности моделируемому объекту (в смысле выбранного критерия); выяснение необходимости уточнения модели; определение необходимых технических средств для построения системы идентификации.

Системный подход к проблеме идентификации должен включать формирование общей задачи идентификации объекта и обеспечение требований к математическому обеспечению, исходя из целей и доступного для наблюдения информационного множества.

12. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

12.1. Идентификация линейных детерминированных объектов

Связь между входными и выходными переменными объекта описывается линейным уравнением, при этом выходная переменная изменяется только под воздействием наблюдаемых входных сигналов, а ненаблюдаемые помехи отсутствуют или их влиянием можно пренебречь.

Уравнение связи между входными и выходными переменными можно записать в различной форме. Наиболее универсальной формой является дифференциальное уравнение объекта. Если отсчет времени производится в дискретные равностоящие моменты, то дифференциальные уравнения преобразуются в разностные уравнения.

Передаточные функции, временные и частотные характеристики линейных систем

Математический аппарат передаточных функций и связанных с ними частотных характеристик является в настоящее время наиболее эффективным инструментом анализа и синтеза линейных систем. Рассмотрим основные динамические характеристики линейных систем.

Импульсная характеристика системы – временная характеристика линейной системы, представляющая собой выходной сигнал системы при входном сигнале, имеющем вид дельта-функции $\delta(t)$.

Переходная функция системы – временная характеристика линейной системы, представляющая собой выходной сигнал системы при входном сигнале, имеющем вид единичной функции $I(t)$. Иными словами, если на входе системы (рис. 3) действует сигнал $x(t) = x_0 \cdot I(t)$,

где x_0 – коэффициент пропорциональности, имеющий размерность входной величины;

$$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ 1, & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$$

то выходной сигнал $y(t)$ пропорционален переходной характеристике:

$$g(t) = \frac{1}{x_0} y(t)$$



Рис. 3. К определению переходной функции системы

Размерность переходной функции системы равна отношению размерностей выходной и входной величин, т. е.

$$[g(t)] = \frac{[y(t)]}{[x(t)]}.$$

Если входная и выходная переменные системы имеют одинаковые размерности, например электрического напряжения, то переходная функция безразмерная.

Импульсная и переходная функции системы связаны соотношениями

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}; g(t) = \int_0^t h(t) dt.$$

Передаточная функция системы – характеристика линейной системы, представляющая собой преобразование Лапласа импульсной характеристики системы

$$H(s) = L\{h(t)\} = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt ,$$

где $s = j\omega + \alpha$.

Существует другое определение передаточной функции системы. Передаточная функция линейной системы есть отношение преобразованных по Лапласу значений (зависящих от времени) выходной и входной переменных системы при нулевых начальных условиях:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} .$$

Комплексная частотная характеристика {КЧХ} – характеристика линейной системы, представляющая собой преобразование Фурье импульсной характеристики системы

$$K(j\omega) = F\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt .$$

У КЧХ имеются некоторые особенности:

1. КЧХ – комплексная функция частоты, при этом $\omega \in (-\infty, \infty)$. Следовательно, определение импульсной характеристики по известной КЧХ осуществляется по формуле

$$h(t) = F^{-1}\{K(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} K(j\omega) d\omega .$$

2. Импульсная характеристика является вещественной, а с помощью известной формулы она преобразуется в комплексную функцию частоты $K(j\omega)$. Это означает, что функция времени представляется в виде бесконечной суммы бесконечно малых по амплитуде векторов, вращающихся на комплексной плоскости с различными угловыми скоростями (частотами) ω .

Комплексная частотная характеристика, построенная на комплексной плоскости, состоит из двух ветвей, одна из которых соответствует положительным частотам, а другая – отрицатель-

ным. При этом ветвь КЧХ, соответствующая отрицательным частотам, является зеркальным отображением ветви для положительных частот относительно вещественной оси. Поэтому часто при графическом представлении КЧХ ветвь для отрицательных частот не изображают.

Комплексная частотная характеристика системы может быть представлена в следующем виде:

$$K(j\omega) = \operatorname{Re} K(j\omega) + j \operatorname{Im} K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{-\arg K(j\omega)},$$

где $\operatorname{Re} K(j\omega)$ – действительная часть КЧХ; $\operatorname{Im} K(j\omega)$ – мнимая часть КЧХ;

$|K(j\omega)|$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) системы, представляющая собой модуль КЧХ,

$|K(j\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re} K(j\omega)]^2 + [\operatorname{Im} K(j\omega)]^2}$; $\arg K(j\omega) = \varphi(\omega)$ – фазо-частотная характеристика системы, представляющая собой аргумент КЧХ

$$\arg K(j\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} K(j\omega)}{\operatorname{Re} K(j\omega)}.$$

Размерности $\operatorname{Re} K(j\omega)$, $\operatorname{Im} K(j\omega)$, $|K(j\omega)|$ равны отношению размерностей выходной и входной переменных системы. Размерность ФЧХ – радиан (или градус).

Формально КЧХ системы можно определить по выражению передаточной функции $H(s)$ подстановкой $j\omega$ вместо s . Для аналитического определения передаточных функций и комплексных частотных характеристик простейших систем по их временным характеристикам используются таблицы преобразования Лапласа. Для вычисления КЧХ системы по импульсной характеристике используется также дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

$$K(jk\Delta\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m\Delta t) W^{mk}.$$

Идентификация с помощью переходных функций

Дифференциальное уравнение и передаточная функция являются наиболее общей формой уравнения связи между переменными состояния на входе и выходе линейной системы. Экспериментатор наблюдает входные и выходные переменные, по которым затем получает уравнение связи. При эксперименте используются различные формы входных сигналов. Выбирая некоторые из них, можно повысить точность исследования в смысле заданного критерия идентификации

Основными недостатками методов идентификации с помощью переходных функций является то, что приведенные виды входных воздействий несут очень мало энергии на высоких частотах. Кроме того, реальные промышленные объекты обычно являются фильтрами нижних частот, т. е. значительно уменьшают амплитуды на высоких частотах. Поэтому точность определения характеристик объектов в области высоких частот с помощью переходных функций весьма низка.

На качестве идентификации с помощью переходных функций весьма неблагоприятно сказываются также случайные помехи, искажающие реакцию объекта, и неточность аппроксимации объекта линейной моделью.

Частично перечисленные недостатки можно устранить при идентификации объекта частотными методами.

Идентификация объекта частотными методами

Частотные характеристики описывают динамические свойства объекта. Заданные аналитически или графически частотные характеристики объекта позволяют рассчитать контур стабилизации со стандартным регулятором.

Нужно отметить при этом, что эксперимент, с помощью которого исследуются частотные характеристики, значительно более трудоемок по аппаратуре и времени проведения по сравнению с переходными характеристиками.

Более универсальным для различного использования является аналитическое представление.

12.2. Математическое описание детерминированной системы в пространстве состояний

Состояние математической модели системы или процесса может быть представлено в виде элемента x множества возможных состояний X .

Метрическим пространством называется множество X , в котором задано расстояние между каждыми двумя элементами $x \in X$, $y \in X$ в виде действительной функции $p(x, y) = 0$, удовлетворяющей трем аксиомам:

$p(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

$p(x, y) = p(y, x)$ (аксиома симметрии);

$p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$ (аксиома треугольника).

Пространство состояний – метрическое пространство, каждый элемент которого полностью определяет состояние рассматриваемой системы (процесса) в текущий или заданный момент времени, т. е. мгновенное состояние. Процесс, протекающий во времени, изображается как движение элемента в пространстве состояний. Понятие метрического пространства является частным видом общего понятия топологического пространства. Пространство состояний используется для исследования устойчивости, оптимизации и др. Во всех этих случаях необходимо введение метрики (определение расстояния) в этом пространстве.

Пространство состояний применяется при описании как автономных систем и процессов, так и систем и процессов, взаимодействующих с другими системами и процессами. В этом случае необходимо введение дополнительных множеств, таких как множество управлений с элементами $u \in U$, множеств возмущающих воздействий с элементами $w \in W$. Эти множества также могут представлять собой метрические пространства с различными метриками.

Элементами пространства состояний могут быть конечные упорядоченные совокупности действительных чисел (конечномерные векторы). Элементами пространства состояний могут быть бесконечные совокупности действительных чисел (счетные множества) – бесконечномерные векторы.

Это обычно встречается при описании дискретных математических моделей непрерывных в физическом пространстве систем (систем с распределенными параметрами).

При рассмотрении движения системы (процесса) в пространстве состояний вектор состояния является функцией непрерывного или дискретного времени.

В наиболее типичном случае интервал повторения постоянен ($t_k - t_{k-1} = \tau = \text{const}$) и одинаков для всех компонентов вектора состояния. В этом случае при $t_0 = 0$ величина t_k равна $k\tau$. Однако компьютеры работают с различными интервалами повторения для различных групп переменных (быстроменяющихся, медленноменяющихся). В этом случае структура пространства состояний с дискретным временем усложняется (пространство делится на субпространства). Помимо дискретности по времени может иметь место дискретность (квантование) по уровню. Это характерно для микроконтроллерных систем автоматизации с небольшим числом разрядов. Это определяет большое число вариантов пространств состояний и процессов в них. Наибольший интерес при исследовании систем управления представляют следующие пространства состояний.

Евклидово пространство состояний R^n непрерывной конечномерной системы. Непрерывность системы или процесса понимается в смысле непрерывности множества возможных состояний. Элементами пространства состояний R^n служат векторы, а расстояние p определяется как евклидова норма разности векторов. Для векторов $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ расстояние выражается формулой $p(x', x'') = [(x' - x'')^m (x' - x'')^m]^{1/2}$.

Абстрактное евклидово пространство наиболее естественное, при $n = 3$ оно аналогично реальному трехмерному пространству (в евклидовом приближении).

Евклидово пространство состояний конечномерной системы с дискретным временем не отличается от предыдущего. Однако перемещение изображающей точки происходит скачками, и вектор состояния $x[k] - x(t_k)$ определен только в дискретные моменты времени. Для непрерывной конечномерной системы может быть введено пространство состояний с другими метриками.

Метрики используются для формирования минимизируемых функционалов и ограничений.

Пространство состояний дискретных по уровню и времени конечномерных систем представляет собой дискретное множество элементов (точек, векторов) с заданной метрикой. Во многих случаях имеют место сочетания непрерывных и дискретных подсистем. Описание процессов в таких системах осуществляется в пространствах состояний, составленных из непрерывных и дискретных подпространств. Для упрощения решений часто используется приведение подпространств к одинаковой категории (непрерывных с непрерывным временем, непрерывных с дискретным временем, дискретных с непрерывным временем, дискретных с дискретным временем).

Пространство состояний R^∞ бесконечномерной системы используется при исследовании дискретных моделей распределенных систем.

Математическое описание детерминированной системы в виде n обыкновенных дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши, можно представить в векторной форме

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (12.1)$$

где $x \in R^n$; $u \in R^r$.

Векторная функция f векторных аргументов x , u и скалярного аргумента t считается заданной и принадлежащей некоторому классу функций, допускающих существование решения уравнения при заданных $x(t_0)$, $u(t)$ или $u(x, t)$ во всем пространстве состояний. Во многих практически важных случаях представляет интерес рассмотрение не всех компонентов вектора состояний, а только части из них, например выходных переменных. Вектор выходных переменных связан с $x(t_0)$ и $u(t)$ функциональной зависимостью

$$y = g(x, u, t).$$

Решением уравнения при начальном условии $x(t_0)$ и заданном управлении $u(x, t)$ является совокупность функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ которые удовлетворяют условиям уравнения. Решение в векторной форме имеет вид

$$\varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)].$$

В целях упрощения предполагается, что решение определено для всех $t \in R$, а функции в правой части уравнения достаточно гладкие.

Уравнения $x_1 = \varphi_1(t), x_2(t) = \varphi_2(t), \dots, x_n(t) = \varphi_n(t), t \in R$ представляют собой параметрические уравнения линии в R^n . Эта линия есть траектория решения системы уравнений. Множество всех траекторий системы образует в R^n портрет системы в пространстве состояний, или пространственный портрет системы. Если в каждой точке области $G \in R^n$ задан n -мерный вектор $f(x)$, $x \in G \subset R^n$ то говорят, что в области G задано *векторное поле*. В каждой точке векторное поле $f(x)$ задает направление касательной к фазовой кривой системы, проходящей через эту точку. Точки векторного поля, в которых вектор $f(x)$ – нулевой, называют *особыми точками векторного поля*.

Геометрический метод решения дифференциальных уравнений является одним из основных методов качественной теории динамических систем. Если элементами вектора состояний являются обобщенные координата q и импульс p , то плоскость состояний есть *фазовая плоскость*.

В случае представления системы при $n = 2$ геометрически на плоскости в прямоугольных декартовых координатах каждому состоянию динамической системы однозначно соответствует точка на плоскости с координатами x, y и, наоборот, каждой точке плоскости соответствует одно и только одно состояние исследуемой динамической системы. Изменение состояния системы отображается на плоскости движением изображающей точки. Через каждую точку фазовой плоскости проходит только одна фазовая траектория. Совокупность траекторий, называемая фазовым портретом системы, отображает совокупность всех возможных сочетаний системы и типы возможных движений в ней.

Число, типы и характер особых точек, изолированных замкнутых траекторий и сепаратрис дают возможность по виду траекторий наглядно представить всю совокупность движений, возникающих в динамической системе при всевозможных начальных условиях.

Особые точки и циклы представляют собой стационарные решения. Это означает, что если начальные условия совпадают с особой точкой или расположены на предельном цикле, то система теоретически будет там оставаться сколь угодно долго. Практически так будет лишь в случае устойчивости, когда при начальных условиях из малой окрестности решений система возвращается к исходному стационарному режиму.

12.3. Идентификация линейных стохастических объектов

В подавляющем большинстве случаев выходные переменные определяются не только наблюдаемыми входными переменными, но и ненаблюдаемыми и неуправляемыми воздействиями (шумами).

Чтобы получить действительные характеристики объекта, нужно исключить из выходного сигнала составляющие, определяемые шумом, оставив только реакцию на входное воздействие, – отфильтровать выходной сигнал. С другой стороны, в условиях нормальной эксплуатации шумы вызывают отклонение выходных переменных от заданных значений.

Чтобы получить уравнение связи между характеристиками входа и выхода для случайных стационарных эргодических сигналов, пользуются их корреляционными функциями или спектральными плотностями. Взаимная корреляционная функция сигналов $x(t)$, $y(t)$ записывается в следующем виде:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t + \tau) dt.$$

В выражении для расчета корреляционной функции участвует одна переменная, т. е. в подынтегральном выражении присутствует произведение

$$x(t)x(t + \tau)d\tau.$$

Обычно все ненаблюдаемые помехи, воздействующие на различные части объекта, приводятся к выходу объекта и представляют в виде аддитивного шума.

Для математического описания линейных стохастических объектов пользуются уравнением Винера-Хопфа

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} \omega(t) R_{xx}(t - \tau) dt,$$

где $\omega(t)$ – импульсная переходная функция объекта; $R_{xx}(t)$ – корреляционная функция сигнала $x(t)$.

12.4. Идентификация нелинейных объектов

На практике для описания реальных объектов нельзя ограничиться классом линейных моделей, так как эти модели не будут адекватны производственным объектам и не смогут быть использованы для решения задач прогнозирования, управления и т. д.

Имеется ряд методов идентификации нелинейных объектов, которые нашли применение на практике. К таким методам относятся методы статистической линеаризации, ряды Вольтерра, дисперсионные и др.

12.4.1. Идентификация методом статистической линеаризации

Сущность метода статистической линеаризации состоит в замене действительной связи между входными и выходными переменными нелинейного объекта приближенной линейной относительно центрированной входной случайной переменной, т. е.

$$y^* = \varphi_0 + k_l x$$

где φ_0 – статистическая характеристика нелинейного объекта,

$$\varphi_0 = m_y = k_0 m_x$$

k_0 – статистический коэффициент усиления нелинейного объекта по математическому ожиданию; k_l – то же по случайной составляющей; x – центрированный входной сигнал.

В соответствии с двумя способами статистической линеаризации величин φ_0 , k_0 , k_l определяются следующим образом:

$$\varphi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \psi(x) dx; \quad (12.2)$$

$$k_0 = \frac{1}{m_x} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \psi(x) dx ; \quad (12.3)$$

$$k_1^{(1)} = \pm \frac{1}{\sigma_x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) \psi(x) dx - \varphi_0^2 \right]^{1/2} \quad (12.4)$$

$$k_1^{(2)} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) \varphi(x) \psi(x) dx , \quad (12.5)$$

где $\psi(x)$ – одномерная плотность вероятности входной переменной x ;

σ_x – среднее квадратическое отклонение переменной x . Знак “плюс” в формуле берут в случае, когда функция $\varphi(x)$ около точки $x - m_x$ возрастает, и знак “минус” в противном случае.

Таким образом, применение метода статистической линеаризации в задаче идентификации нелинейного объекта сводится к определению оценок следующих характеристик по реализации входной и выходной переменных: математических ожиданий m_x, m_y и дисперсий D_x, D_y .

В качестве оценки функции $\varphi(x)$ принимают условное математическое ожидание Y относительно X : $\varphi(x) = m_{y/x}$.

Оценка результатов статистической линеаризации может быть осуществлена при идентификации путем проверки выполнения основных соотношений, полученных путем прямого вычисления характеристик и определения их по линеаризованным представлениям.

12.4.2. Идентификация с использованием рядов Вольтерра

Ряд Вольтерра описывает связь между входной и выходной переменными и часто используется в качестве модели нелинейного объекта.

Для стационарного объекта ряд Вольтерра выглядит следующим образом:

$$y(t) = v_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} v_I(t_1, \dots, t_i) x(t-t_1) \dots x(t-t_i) dt_1 \dots dt_i \quad (12.6)$$

На практике обычно ограничиваются отрезком ряда, содержащим члены первых двух порядков. Тогда ряд Вольтерра на конечном интервале наблюдения записывается в виде следующей формулы:

$$y(t) = v_0 + \int_0^T v_I(\tau) x(t-\tau) d\tau + \int_0^T \int_0^T v_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (12.7)$$

Из этого уравнения видно, что первый член разложения в ряд Вольтерра дает линейную модель объекта. Для получения нелинейной модели нужно решить систему интегральных уравнений, размерность которой определяется количеством принятых членов ряда. Например, если ограничиться представлением (12.7), то по критерию минимума среднего квадрата ошибки

$$\min m \left\{ \left[y(t) - v_0 - \int_0^T v_I(\tau) x(t-\tau) d\tau - \int_0^T \int_0^T v_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right]^2 \right\} \quad (12.8)$$

можно получить следующую систему уравнений для определения функций веса $v_0, v_I(\tau), v_2(\tau_1, \tau_2)$:

$$\int_0^T v_I(t) R_{xx}(\tau-t) d\tau = R_{yx}(\tau), \tau \in [0, T]; \quad (12.9)$$

$$v_0 R_{xx}(\tau_1 - \tau_2) + \int_0^T \int_0^T v_2(t_1, t_2) R_{xx}(\tau_1, \tau_2, t_1, t_2) dt_1 dt_2 = R_{yxx}(\tau_1, \tau_2), \tau_1, \tau_2 \in [0, T]; \quad (12.10)$$

$$v_0 + \int_0^T \int_0^T v_2(t_1, t_2) R_{xx}(t_1, t_2) = m_y(t); \quad (12.11)$$

где

$$R_{yx}(\tau) = m[y(t)x(t-\tau)];$$

$$R_{yxx}(\tau_1, \tau_2) = m[y(t)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)];$$

$$R_{xx}(\tau_1, \tau_2, t_1, t_2) = m[x(t-t_1)x(t-t_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)].$$

Сначала определяется функция веса линейной системы по уравнению (12.9), затем совместно решаются уравнение (12.10) и (12.11), при этом получают $v_0, v_2(\tau_1, \tau_2)$. При решении задач на компьютере интервал наблюдения $[0, T]$ разбивается на n частей, и для определения весовой функции $v_I(\tau)$ необходимо решить систему n линейных алгебраических уравнений.

12.4.3. Дисперсионные методы идентификации

Для решения задачи идентификации нелинейных динамических объектов вместо корреляционных функций вводятся другие характеристики случайных функций, которые основываются на условных моментных функциях второго порядка. Такие числовые характеристики случайных функций называются дисперсионными функциями и характеризуют связи между значениями случайной функции при фиксированных значениях аргументов и для нелинейной зависимости, в отличие от корреляционных функций, характеризующих связи только для линейных зависимостей.

Дисперсионный подход является дальнейшим развитием корреляционной теории и поэтому ряд методов корреляционного подхода может быть непосредственно использован при синтезе нелинейных моделей.

Дисперсионной (автодисперсионной) функцией $D_{xx}(t, \theta)$ называется следующая функция двух аргументов:

$$D_{xx}(t, \theta) = m \left\{ \left[m_{x_t / x_\theta} - m_{x_t} \right]^2 \right\}, \quad (12.12)$$

где m – символ математического ожидания; m_{x_t / x_θ} – условное математическое ожидание значения случайной функции x_t при произвольном значении аргумента t ($t \neq \theta$) относительно значения $x(t)$ при другом произвольном значении аргумента θ ($t \neq \theta$). Дисперсионные функции можно записать через плотности вероятности:

$$D_{xx}(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_t \varphi(x_t / x_\theta) dx_t - \int_{-\infty}^{\infty} x_t \varphi(x_t) dx_t \right]^2 dx_\theta, \quad (12.13)$$

где $\varphi(x_t)$ – одномерная плотность вероятности случайной функции $x(t)$; $\varphi(x_t / x_\theta)$ – условная плотность вероятности значения $x(t)$ при значении аргумента t относительно значения $x(t)$ при значении аргумента θ .

Дисперсионная функция (автодисперсионная) функция $D_{xx}(t, \theta)$ аналогична автокорреляционной функции $R_{xx}(t, \theta)$ и характеризует тесноту связи случайных величин x в произвольные моменты времени t и θ , однако дисперсионная функция в отличие от корреляционной является характеристикой связи и в случае нелинейной зависимости между значениями x в различные моменты времени. Абсолютные значения корреляционной и дисперсионной функций совпадают только в случае линейной структуры случайного процесса $x(t)$.

Взаимная дисперсионная функция рассчитывается по следующей формуле:

$$D_{yx}(t, \theta) = m \left\{ \left[m(y_t / x_\theta) - m_{y_t} \right]^2 \right\}, \quad (12.14)$$

или через соответствующие плотности вероятности:

$$D_{yx}(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y_t \varphi(y_t / x_\theta) dy_t - \int_{-\infty}^{\infty} y_t \varphi(y_t) dy_t \right]^2 \varphi(x_\theta) dx_\theta, \quad (12.15)$$

где $m(y_t / x_\theta)$ – условное математическое ожидание значения случайной функции y при произвольном значении t относительно значения случайной функции $x(\theta)$ при произвольном значении аргумента θ ; $\varphi(y_t)$ и $\varphi(x_\theta)$ – одномерные плотности вероятности случайных функций $y(t)$ и $x(\theta)$; $\varphi(y_t / x_\theta)$ – условная плотность вероятности $y(t)$ относительно $x(\theta)$.

Взаимная дисперсионная функция $D_{yx}(t, \theta)$ характеризует связь между двумя случайными функциями $y(t)$ и $x(t)$ и в том случае, если эта связь нелинейна.

В некоторых случаях пользуются нормированными дисперсионными функциями:

$$D_{yx}^H(t, \theta) = \sqrt{\frac{D_{yx}(t, \theta)}{D_{y_t}}}, \quad (12.16)$$

где D_{y_t} – дисперсия случайной функции $y(t)$.

Нормированная автодисперсионная функция рассчитывается по следующей формуле:

$$D_{xx}^H(t, \theta) = \sqrt{\frac{D_{xx}(t, \theta)}{D_{x_t}}}, \quad (12.17)$$

где D_{x_t} – дисперсия случайной функции $x(t)$.

Если случайные функции $y(t)$ и $x(\theta)$ независимы, то взаимная дисперсионная функция равна нулю.

Если случайные функции $y(t)$ и $x(\theta)$ связаны точной функциональной зависимостью $y_t = f(x_\theta)$, то взаимная дисперсионная функция равна дисперсии случайной функции, а ее нормированное значение равно единице.

Нормированная взаимная дисперсионная функция может принимать значения $0 \leq D_{yx}^H(t, \theta) \leq 1$.

Если для двух случайных функций $y(t)$ и $x(\theta)$ при любых значениях аргументов t и θ получено, что

$$\begin{aligned} D_{yx}(t, \theta) = 0, D_{xy}(\theta, t) = 0 \quad \text{или} \\ D_{yx}^H(t, \theta) = 0, D_{xy}^H(\theta, t) = 0, \end{aligned}$$

то случайные функции называют недисперсированными.

Обобщенной взаимной дисперсионной функцией случайных функций $y(t)$ и $z(t)$ относительно случайной функции $x(t)$ называется функция трех аргументов

$$D_{yzx}(t, \theta, \tau) = m \left\{ \left[m(y_t / x_\tau) - m_{y_t} \right] \left[m(z_\theta / x_\tau) - m_{z_\theta} \right] \right\}, \quad (12.18)$$

где $m(y_t / x_\tau)$ – условное математическое ожидание случайной функции $y(t)$ при значении аргумента t относительно случайной функции $x(t)$ при значении τ аргумента t ; $m(z_\theta / x_\tau)$ – условное математическое ожидание случайной функции $z(t)$ при значении аргумента t относительно $x(t)$ при значении аргумента $t = \tau$.

Обобщенная взаимная дисперсионная функция может характеризовать линейную связь между двумя нелинейными функциями регрессии.

Нормированная обобщенная взаимная дисперсионная функция случайных функций $y(t), z(t)$ относительно $x(t)$ определяется формулой

$$D_{yzx}^H(t, \theta, \tau) = \sqrt{\frac{D_{yzx}(t, \theta, \tau)}{D_{y_t} D_{z_\theta}}} \quad (12.19)$$

$$0 \leq D_{yzx}^H(t, \theta, \tau) \leq 1$$

Случайная функция $x(t)$ называется стационарной в дисперсионном смысле, если ее функция распределения $x(t)$ постоянна, а функция регрессии зависит только от разности аргументов t и θ . Для стационарной, в дисперсионном смысле, случайной функции математическое ожидание и дисперсия постоянны, а дисперсия условного математического ожидания является функцией только одного аргумента $\tau = t - \theta$.

Случайная функция, стационарная в дисперсионном смысле, является также стационарной в широком смысле, но обратное утверждение неверно.

Рассмотрим один из подходов по оценке степени нелинейности объекта, использующий понятия дисперсионных функций. При решении задачи идентификации по реализациям входной и выходной переменных оптимальный оператор дает уравнение условного математического ожидания $m(y_t / x_\theta)$, которое в общем случае является нелинейной функцией x_θ .

Пусть t и θ являются произвольными, но фиксированными аргументами случайных функций $y(t)$ и $x(t)$. В линейном случае уравнение условного математического ожидания:

$$m(y_t / x_\theta) = a(t, \theta) + b(t, \theta)x_\theta \quad (12.20)$$

Величиной, характеризующей степень нелинейности, обычно считают минимальное среднеквадратическое отклонение функции условного математического ожидания $m(y_t / x_\theta)$ от прямой (12.20):

$$\eta_{yx}(t, \theta) = \left[\min_{a, b} \left\{ \frac{m \left\{ \left[m(y_t / x_\theta) - a(t, \theta) - b(t, \theta)x_\theta \right]^2 \right\}}{D_{y_t}} \right\} \right]^{1/2} \quad (12.21)$$

Минимум величины, которая стоит под символом математического ожидания, достигается в том случае, когда

$$a(t, \theta) = m_{y_t} - R_{yx}(t, \theta) \frac{\sqrt{D_{y_t}}}{\sqrt{D_{x_\theta}}} m_{x_\theta}; \quad (12.22)$$

$$b(t, \theta) = R_{yx}(t, \theta) \frac{\sqrt{D_{y_t}}}{\sqrt{D_{x_\theta}}},$$

Тогда по определению взаимной дисперсионной функции и нормированной корреляционной функции получаем

$$\eta_{yx}^2(t, \theta) D_{y_t} = D_{yx}(t, \theta) - R_{yx}^2(t, \theta) D_{y_t} \quad (12.23)$$

Из этого уравнения можно определить, что квадрат степени нелинейности y_t относительно x_θ равен разности квадратов взаимных нормированных дисперсионной и корреляционной функций, т. е.

$$\eta_{yx}^2(t, \theta) = D_{yx}^{2H}(t, \theta) - R_{yx}^2(t, \theta), \quad (12.24)$$

Относительная степень нелинейности y_t относительно x_θ определяется следующей формулой:

$$E_{yx}^2(t, \theta) = \frac{D_{yx}^{2H}(t, \theta) - R_{yx}^2(t, \theta)}{D_{yx}^{2H}(t, \theta)} \quad (12.25)$$

В линейном случае между дисперсией $y(t)$ и математическим ожиданием условной дисперсии $m\{D_{y/x_\theta}\}$ существует следующая зависимость:

$$m\left\{D_{y_t / x_\theta}\right\} = D_{y_t} \left[1 - R_{yx}^2(t, \theta)\right] \quad (12.26)$$

Подобная зависимость существует и для нелинейных объектов, но только через нормированную взаимную дисперсионную функцию:

$$m'\left\{D_{y_t / x_\theta}\right\} = D_{y_t} \left[1 - D_{yx}^{2H}(t, \theta)\right], \quad (12.27)$$

$$D_{y_t / x_\theta} = m\left\{\left[y_t - m_{y_t / x_\theta}\right]^2\right\}$$

Средняя степень нелинейности за интервал времени от t_0 до t_0+T :

$$N_{yx}(t_0, t_0 + T) = \frac{1}{T^2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} \eta_{yx}(t, \theta) d\theta dt \quad (12.28)$$

По оценке степени нелинейности по реализациям вход – выход и заданной дисперсии выходной переменной принимается решение о синтезе линейной или нелинейной модели.

Рассмотрим синтез нелинейной модели, который базируется на введенных выше понятиях дисперсионных функций случайных функций.

Будем рассматривать одномерный объект и связь между сглаженными характеристиками случайных функций $x(t)$ и $y(t)$. В качестве таких характеристик можно принять условное математическое ожидание $y(t)$ относительно $x(t)$ и условное математическое ожидание $x(t)$ относительно $x(\theta)$.

В этом случае уравнение модели нелинейного объекта записывается следующим образом:

$$m(y_t / x_{t-\tau}) = \int_{-\infty}^t v(t, \theta) m(x_\theta / x_{t-\tau}) d\theta, \quad (12.29)$$

где $m(y_t / x_{t-\tau})$ – условное математическое ожидание значения выходной переменной y при заданном значении аргумента t относительно значения входной переменной x при значении аргумента $t - \tau$, где τ может принимать одно произвольное значение в интервале наблюдения $[\theta, T]$; $m(x_\theta / x_{t-\tau})$ – условное математическое ожидание значения входной переменной x при значении аргумента θ относительно x при значении аргумента $t - \tau$.

Для реальных стохастических объектов представление модели в виде (12.29) является вполне правомерным.

Если умножить обе части уравнения (12.29) для централизованного случая на центрированное условное математическое ожидание входного сигнала и воспользоваться определениями обобщенных дисперсионных функций, то можно получить следующее уравнение:

$$Dyx(t, \sigma) = \int_{-\infty}^t v(t, \theta) D_{xx}(\theta, \sigma, t) d\theta, \quad (12.30)$$

где верхний предел интегрирования t представляет собой момент наблюдения. Из уравнения (12.30) можно определить оптимальную по критерию минимума среднего квадрата ошибки весовую функцию. Так как нелинейные нестационарные модели весьма трудно реализуемы, необходимо создавать стационарные модели, дающие значительное упрощение. Тогда в уравнении (12.30) весовая функция будет зависеть только от разности аргументов:

$$D_{yx}(\theta) = \int_0^{\infty} v(s) D_{xx}(\theta, s) ds \quad (12.31)$$

где $D_{yx}(\theta) = D_{yx}(t, t - \theta)$ – обобщенная взаимная дисперсионная функция стационарных и стационарно связанных в дисперсионном смысле случайных функций $y(t)$ и $x(t)$.

Если сравнить уравнение (12.31) с уравнением Винера-Хопфа, то видно их формальное совпадение, только вместо корреляционных функций в уравнении (12.31) используются обобщенные дисперсионные функции. То есть при идентификации нелинейных объектов применяются алгоритмы, аналогичные корреляционным методам, используемым для идентификации линейных объектов.

Порядок построения дисперсионной модели будет следующим. По реализациям $x(t)$ определяют оценку условного математического ожидания $m(x_t / x_{t-\tau})$ и затем определяют оценки обобщенных авто – и взаимной дисперсионных функций.

Далее решают уравнение (12.30), в котором по сглаженным характеристикам дисперсионных функций определяют весовую функцию.

13. АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ

13.1. Методы идентификации объектов в адаптивных системах

В подавляющем большинстве случаев технологические объекты, являющиеся весьма сложными системами, работают в условиях неполной информации о возмущениях и помехах, действующих на них, когда полностью или частично отсутствуют данные о переменных состояния, о структуре системы. Кроме того, подобные объекты являются еще и нестационарными, т. е. их параметры меняются с течением времени, а следовательно, и оценки этих параметров необходимо непрерывно уточнять. Если же этого не делать, то модель будет неадекватна объекту и по ней невозможно предсказывать поведение объекта и управлять им. В таких случаях для решения задачи параметрической идентификации затруднительно использование неадаптивных алгоритмов идентификации, а используют адаптивные алгоритмы или адаптивные модели. Адаптивные алгоритмы достаточно просты, имеют большую помехозащищенность и позволяют учитывать дополнительные факторы. Единственным их недостатком является неоптимальность при построении моделей стационарных объектов в реальном режиме времени, но для технологических объектов такой недостаток неактуален.

Принцип адаптации впервые был применен в теории автоматического управления, где вскоре было сформировано новое направление – теория адаптивных систем.

Под адаптацией в сложных системах понимается процесс изменения параметров и структуры системы, а в некоторых случаях и управляющих воздействий на основе текущей информации с целью достижения определенного, обычно оптимального, состояния системы при начальной неопределенности и изменяющихся условиях работы, т. е. адаптация характеризуется использованием текущей информации для устранения неопределенности из-за недостаточной априорной информации с целью оптимизации выбранного показателя качества.

Систему идентификации можно рассматривать как один из видов адаптивных систем при том условии, что в каждый момент времени формируется экспериментальная информация о состоянии процесса.

Большинство адаптивных систем являются системами адаптации с эталонной моделью. Обобщенная схема адаптивной системы с эталонной моделью приведена на рис. 4.

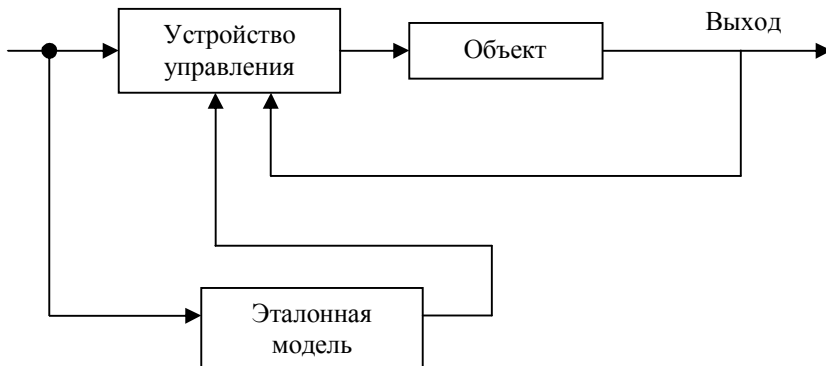


Рис. 4. Обобщенная схема адаптивной системы с эталонной моделью

Эталонная модель задает желаемое поведение объекта во времени, а устройство управления изменяет параметры или структуру объекта так, чтобы поведение объекта как можно более соответствовало поведению эталонной модели. Это является общим принципом построения адаптивных систем. В системах идентификации, где используются адаптивные алгоритмы, объект и эталонная модель меняются местами, т. е. объект управления будет являться эталоном, под который с помощью устройства адаптации (управления) подстраивается математическая модель таким образом, чтобы выходы объекта и модели были достаточно близки. Для оценки совпадения этих выходов используется критерий идентификации или, по-другому, критерий качества, критерий оценки точности модели. При этом, если выбранный или заданный критерий идентификации достигает экстремального значения, то это говорит о совпаде-

нии выходов объекта и модели. Основным в такой системе идентификации является устройство адаптации, которое по мере поступления текущей информации изменяет параметры модели для того, чтобы обеспечить экстремальное значение критерия идентификации.

Методы адаптации и оптимизации в системах идентификации дополняют друг друга, обеспечивая оптимальное поведение системы в условиях априорной неопределенности и изменяющихся режимах работы объекта.

Адаптивные системы, реализующие аналитические методы, по принципу действия делятся на две основные группы. Первая группа – это системы с адаптивной компенсацией возмущений. Они основываются на известной функциональной зависимости между изменяющимися параметрами процесса и оптимальными характеристиками регулятора. Эта зависимость реализуется с помощью адаптивного устройства. Условием успешного применения таких систем является априорная информация о характеристиках процесса, благодаря чему обеспечивается высокая скорость адаптации. Важным преимуществом таких систем являются простота и наглядность проектирования.

Вторую группу составляют системы с идентификацией объекта управления. Общая функциональная схема такой системы приведена на рис. 5.

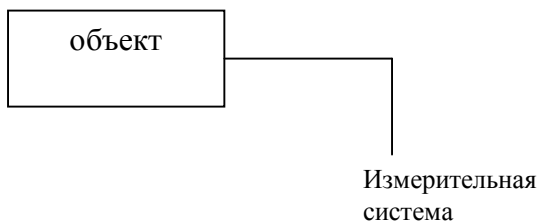


Рис. 5. Функциональная схема адаптивной системы

На ней показаны основные этапы адаптивного управления. Первый этап – определение текущего состояния объекта на основе измерений контролируемых переменных. Эта информация используется для идентификации объекта, включающей в себя

определение структуры модели и оценивание ее параметров. Второй этап самонастраивающейся системы – определение параметров регулятора. Решение этого этапа базируется на оптимизации функционала, характеризующего качество управления.

Обычно объект управления описывается сложными нелинейными дифференциальными уравнениями, в связи с чем соответствующий алгоритм адаптации также оказывается сложным. Поэтому при проектировании адаптивных систем принимают следующие упрощающие предположения:

- объект и регулятор основного контура адаптивной системы описываются линейными уравнениями;
- процесс в адаптивной системе является квазистационарным.

При приведенных допущениях основной задачей идентификации является идентификация параметров модели. При этом могут использоваться самые различные методы. Критерии выбора алгоритмов идентификации для адаптивных систем могут быть сформулированы следующим образом:

- идентификация должна осуществляться в условиях функционирования замкнутой системы;
- время идентификации должно быть достаточно малым для эффективного изменения параметров управляющего устройства;
- в качестве исходной информации для идентификации должны преимущественно использоваться рабочие сигналы автоматической системы автоматизации.

Наибольшее применение получили следующие методы идентификации объектов в адаптивных системах:

1. Прямое измерение параметров объектов.
2. Косвенное измерение параметров объектов. Неизвестные параметры определяются путем преобразований измеренных физических величин.
3. Определение коэффициентов дифференциальных уравнений (параметров передаточных функций) по входным и выходным сигналам объектов. Если идентифицируемое дифференциальное уравнение линейное и стационарное, то его неизвестные параметры могут быть определены на основе обработки информации о входных и выходных сигналах (рис. 6).

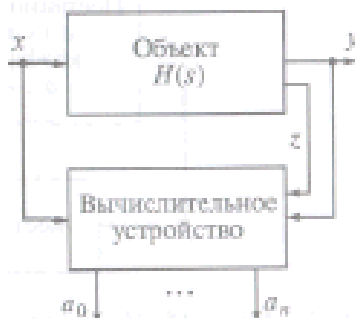


Рис. 6. Оценивание параметров объекта с помощью вычислительного устройства

4. Определение параметров объекта с помощью эталонных моделей. Сущность этого метода параметрической идентификации состоит в определении параметров объекта на основе обработки выходных сигналов объекта и модели. На рис. 7 показана схема идентификации с помощью ненастраиваемой модели. Для решения задачи может быть использована схема, содержащая несколько параллельно включенных эталонных моделей и устройство выбора варианта по условиям максимальной адекватности модели идентифицируемому процессу (рис. 8).



Рис. 7. Идентификация объекта с помощью жесткой модели

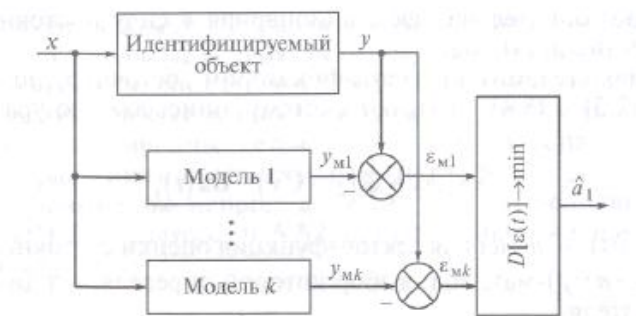


Рис. 8. Идентификация объекта с помощью нескольких эталонных моделей

В случае нестационарного объекта используются самонастраивающиеся модели (рис. 9). Процесс настройки модели заключается в коррекции ее параметров a_i , $i = 1, \dots, n$, например, по минимуму дисперсии ошибки $D[\varepsilon(t)]$.



Рис. 9. Идентификация с помощью самонастраивающейся модели

5. Применение наблюдателей. Например, имеется нестационарный объект:

$$x = Ax + Bu(t); \quad (13.1)$$

$$y = Cx, \quad (13.2)$$

где $x - n$ – мерный вектор состояния; $y - l$ – мерный вектор наблюдений;

A и B – матрицы коэффициентов размерностями соответственно $n \times n$; $m \times m$.

Выражение (13.2) представляет собой уравнение выходов или измерений с помощью датчиков, в которому $y(t)$, $y \in R^p$, $p < n$.

Матрица C обычно определена как стационарная в силу постоянства характеристик датчиков.

Наблюдателем, или идентификатором состояния, по отношению к (13.1) и (13.2) называют систему, описываемую уравнением вида

$$\dot{\hat{x}} = Ax + G(y - C\hat{x}) + Bu(t), \quad (13.3)$$

где $\hat{x} = \hat{x}(t)$ – n -мерная вектор-функция оценки состояния объекта;

$G - (n \times p)$ – матрица, выбор которой определяется динамикой наблюдателя.

Ошибка наблюдения определяется по формуле $\varepsilon = x - \hat{x}$.

Если $(A - GC)$ – устойчивая (гурвицева) матрица, которая при условии наблюдаемости пары (A, C) всегда может быть сделана таковой соответствующим выбором матрицы G , то $\varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. Следовательно, $\hat{x} \rightarrow x$.

В детерминированной постановке задачи наблюдения у матрицы G и, следовательно, динамики наблюдателя имеется свобода в выборе. Неконкретность выбора динамики можно устранить, применив, например, методы оптимизации. В результате может быть построен наблюдатель с минимальными потерями на идентификацию.

Для стационарного и детерминированного объекта вида (13.1) наблюдатель (13.3) может быть легко осуществлен, поскольку синтез его связан с выбором матрицы G . В нестациона-

нарном случае и тогда, когда матрицы A и B функционально не определены, применяются адаптивные идентификаторы.

Адаптивные идентификаторы применяются в нестационарных системах с неполной информацией о параметрах объекта.

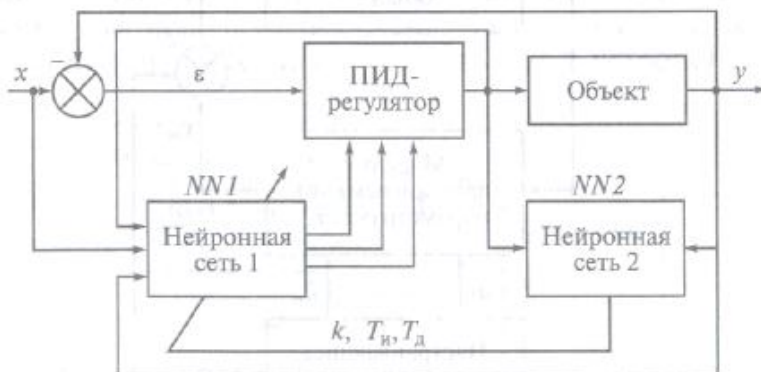


Рис. 10. Адаптивная система с настройкой ПИД-регулятора с помощью нейронной сети

Возможности современных микроконтроллеров позволяют реализовывать адаптивные системы с использованием методов искусственного интеллекта, например на основе искусственных нейронных сетей. На рис. 10 показана адаптивная система управления с настраиваемым ПИД-регулятором. В системе использованы две нейронные сети: $NN1$, выполняющая настройку ПИД-регулятора, и $NN2$, осуществляющая идентификацию объекта.

13.2. Итерационные (адаптивные) алгоритмы построения математических моделей

Важной составляющей частью теории адаптивных систем является разработка и исследование алгоритмов адаптации.

Итерационные или адаптивные алгоритмы делят на стационарные и нестационарные. Стационарным алгоритмом называют такой алгоритм, когда оценки параметров объекта, по-

лучаемые с помощью его, являются функциями входных и выходных переменных объекта, но явно не зависят от времени. Алгоритм же, в который явно входит время, называется нестационарным.

Кроме того, алгоритмы адаптации различаются по глубине памяти на одношаговые и многошаговые. В одношаговых процедурах для уточнения оценок параметров используют результаты только одного эксперимента. Многошаговые алгоритмы используют для уточнения оценок параметров результаты нескольких экспериментов. Применение того или иного алгоритма зависит от критерия идентификации, искомым характеристик объекта, методов реализации на компьютере.

Оптимальный одношаговый алгоритм

Рассмотрение адаптивных алгоритмов начнем с оптимального одношагового алгоритма. Этот алгоритм прост в вычислительном отношении и хорошо следит за переменными параметрами объекта, вследствие таких своих качеств находит широкое применение на практике.

Допустим, объект описывается следующим уравнением в дискретные моменты времени:

$$y[n] = \sum_{i=1}^k b_i[n] x_i[n], \quad (13.4)$$

где $y[n]$ – выход объекта на n -м шаге; $x_i[n]$ – значение i -го входа на n -м шаге;

$b_i[n]$ – неизвестные параметры объекта ; k – число входов.

Модель объекта представим следующим образом:

$$\hat{y}[n] = \sum_{i=1}^k a_i[n-1] x_i[n], \quad (13.5)$$

где $\hat{y}[n]$ – оценка выхода объекта, полученная по модели;
 $a_i[n-1]$ – оценка i -го параметра объекта для $[n-1]$ -го шага.

Уточнение оценок параметров объекта проводится по следующей итерационной формуле, при этом начальные значения оценок выбираются произвольно:

$$a_i[n] = a_i[n-1] + \frac{y[n] - \sum_{i=1}^k a_i[n-1] x_i[n]}{\gamma + \sum_{i=1}^k x_i^2[n]} x_i[n]. \quad (13.6)$$

($i=1, 2, \dots, k$).

Входные и выходную переменные, входящие в эту формулу, можно измерить. Величина, на которую меняются параметры модели, пропорциональна ошибке предсказания

$$\Delta y[n] = y[n] - \hat{y}[n].$$

В то же время каждый параметр $a_i[n-1]$ меняется пропорционально изменению переменной на его входе $x_i[n]$. Тогда итерационный алгоритм можно записать по-другому:

$$a_i[n] = a_i[n-1] + \frac{\Delta y[n]}{\gamma + \sum_{i=1}^k x_i^2[n]} x_i[n]; \quad (13.7)$$

($i=1, 2, \dots, k$)

или ещё более простая запись:

$$a_i[n] = a_i[n-1] + \alpha[n] x_i[n], \quad (i=1, 2, \dots, k), \quad (13.8)$$

где $\alpha[n]$ – величина, общая для всех входов и вычисляемая однажды на каждом шаге.

В векторной форме приведённая формула будет иметь вид

$$\bar{a}[n] = \bar{a}[n-1] + \alpha[n] x[n], \quad (13.9)$$

где $\alpha[n]$ – скалярная переменная.

Рассмотренный алгоритм обеспечивает сходимость в среднеквадратическом смысле при случайных входных векторах.

Существует также понятие монотонной сходимости, которое состоит в том, что сумма квадратов ошибок определения всех коэффициентов на каждом следующем шаге не увеличивается при любых изменениях входных переменных. При рассмотрении этого условия адаптивный алгоритм

$$a_i[n] = a_i[n-1] + \gamma_i \frac{y[n] - \sum_{i=1}^k a_i[n-1]x_i[n]}{\sum_{i=1}^k x_i^2[n]}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (13.10)$$

где $a_i[n]$ – оценки параметров объекта на n -ом шаге; γ_i – весовые коэффициенты (константы), был записан в векторной форме следующим образом:

$$\bar{a}[n] = \bar{a}[n-1] + \bar{\Gamma} \frac{y[n] - \bar{a}^T[n-1] \bar{x}[n]}{\bar{x}^T[n] \bar{x}[n]} \bar{x}[n], \quad (13.11)$$

где $"T"$ – знак транспонирования.

Матрица Γ имеет следующий вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_k \end{pmatrix}, \text{ т. е. это диагональная матрица.}$$

Для обеспечения монотонной сходимости адаптивного алгоритма идентификации (13.10) и (13.11) матрица Γ должна быть диагональной и иметь одинаковые элементы. Скорость сходимости рассматриваемого алгоритма будет наиболее высокой, если компоненты входного вектора независимы, т. е. чем сильнее коррелированы входы, тем меньше скорость сходимости

сти. В формулу (13.6) для уменьшения влияния помех введён параметр γ_0 . Его следует увеличивать при увеличении уровня помех, но так как уровень помех заранее обычно неизвестен, то возникает необходимость в вычислении оптимального γ_0 . С помощью оптимального γ можно также уменьшить влияние ошибок измерения входных и выходных переменных объекта.

Рассмотренный одношаговый алгоритм идентификации является цифровым фильтром со случайными параметрами, который преобразует неизвестные параметры объекта в их оценки a .

Как уже отмечалось ранее, наиболее высокая скорость сходимости приведённого алгоритма идентификации при случайных входах будет в том случае, если векторы входных воздействий статистически независимы между собой и имеют независимые одинаково распределённые компоненты. Тогда одношаговый оптимальный алгоритм идентификации аналогичен инерционному звену с постоянной времени $\Delta t \ll k$, где k – размерность объекта, Δt – период квантования, на вход которого подаются "действительные" параметры объекта, а на выходе получаются их оценки.

Кроме рассмотренного оптимального одношагового алгоритма существуют более простые одношаговые алгоритмы идентификации.

Упрощение алгоритмов достигается за счёт отбрасывания некоторых членов в алгоритме (13.6).

Примером более простого алгоритма может служить следующий:

$$\bar{a}[n] = \bar{a}[n-1] + \alpha(y[n] - \hat{y}[n])\bar{x}[n], \quad (13.12)$$

где $a[n]$ – оценка вектора параметров; $x[n]$ – вход; $y[n]$ – выход объекта;

α – константа.

При этом

$$y[n] = \bar{x}^T[n] \bar{b}[n]; \quad \hat{y}[n] = \bar{x}^T[n] \bar{a}[n-1] \quad (13.13)$$

Нужно отметить, что простейшие алгоритмы сходятся не монотонно даже для суммы квадратов ошибок определения параметров, кроме того, сходимость таких алгоритмов может быть нарушена, если значения входов станут большими по абсолютной величине.

Технологический объект можно описать следующим уравнением:

$$y[n] = \bar{b}^T [n] \bar{x}[n] + E^0 [n], \quad (13.14)$$

где $y[n]$ – скалярный выход объекта; $\bar{b}[n]$ – вектор неизвестных параметров, принадлежащий некоторой ограниченной, но априори неизвестной области,

$\bar{x}[n]$ – обобщенный вход объекта, зависящий как от наблюдаемого вектора входа, так и выхода объекта (13.14) на предыдущих шагах; $E^0 [n]$ – ненаблюдаемая центрированная помеха на выходе с конечной дисперсией; n – дискретное время.

Вектор параметров $\bar{b}[n]$ может изменяться с течением времени n .

Для решения задачи идентификации технологических объектов наиболее часто применяются итеративные градиентные процедуры типа стохастической аппроксимации, описываемые следующей формулой:

$$\bar{a}[n] = \bar{a}[n-1] - \gamma[n] * \Delta_a - Q(\bar{x}[n], \bar{a}[n-1]), \quad (13.15)$$

где $\bar{a}[n]$ – оценка вектора b на n -м шаге; $\gamma[n] > 0$ – скалярный множитель;

$\Delta_a - Q(\bar{x}[n], \bar{a}[n-1])$ – градиент функции Q по оценкам параметров.

Процедуру (13.15) называют процедурой Роббинса-Монро.

В том случае, когда значения $\Delta_a - Q(\bar{x}[n], \bar{a}[n-1])$ неизвестны, но имеется возможность наблюдать в точках $\bar{x}[n]$ саму функцию $Q(x, a)$ вместо алгоритма (13.15) используют процедуру, называемую процедурой Кифера-Вольфовица.

Процедуры Роббинса-Монро и Кифера-Вольфовица являются основными процедурами метода стохастической аппроксимации.

Выбирая различные функционалы качества Q и вычисляя их градиент, можно получить различные частные случаи алгоритма (13.15).

Был предложен единый подход к обоснованию эвристически полученных адаптивных алгоритмов на основе понятия псевдоградиента.

Псевдоградиентные алгоритмы в общем случае записываются следующим образом:

$$\bar{a}[n] = \bar{a}[n-1] - \gamma[n] * S[n] . \quad (13.16)$$

Величину $S(n)$ называют псевдоградиентом функции $F(\bar{a})$ в точке $\bar{a}[n-1]$, если будет выполняться условие:

$$\nabla F^T(\bar{a}[n]) * M\{S[n]\} \geq 0 , \quad (13.17)$$

т. е. вектор $S[n]$ в среднем должен быть направлен под острым углом к градиенту.

Обычно в качестве критерия идентификации объекта типа (13.14) применяют функционал $F(\bar{a}) = M_{x,y}\{(y - \bar{a}^T x)^2\}$

Тогда градиентный алгоритм идентификации объекта, описываемого (13.14), может быть записан следующим образом:

$$\bar{a}[n] = \bar{a}[n-1] + \gamma[n] * (y[n] - \bar{a}^T[n-1] * x[n]) * x[n] \quad (13.18)$$

Свойства адаптивных алгоритмов существенно зависят от величины $\gamma(n)$, т. е. выбор параметра $\gamma(n)$ должен быть таким, чтобы алгоритм идентификации являлся оптимальным в каком-либо смысле.

Для ускорения процесса идентификации применяются многошаговые адаптивные алгоритмы, использующие для уточнения оценок параметров результаты нескольких экспериментов. Вследствие этого можно ожидать, что дополнительная инфор-

мация, которая содержится в этих опытах, позволит увеличить скорость сходимости. Однако многошаговые алгоритмы сложнее, требуют большего количества вычислений на каждой итерации и занимают больший объем памяти.

Многошаговые адаптивные алгоритмы не нашли широкого применения в теории идентификации. Это объясняется тем, что кроме перечисленных выше недостатков многошаговые алгоритмы более чувствительны к действию помех и требуют обеспечения устойчивости системы идентификации. В основном такие алгоритмы применяются на начальном этапе параметрического оценивания для того, чтобы определить область, в которой находятся искомые параметры.

Правила остановки поиска оценок параметров

При практическом использовании адаптивных алгоритмов возникает вопрос, при каком числе шагов n можно считать, что с достаточной степенью точности найдены оптимальные значения вектора оценок параметров $\bar{a}^*$. Для регулярных итеративных методов существуют специальные правила остановки, связанные со сравнением двух последующих значений $\bar{a}[n-1]$ и $\bar{a}[n]$. Такие правила остановки можно было бы применить при достаточно больших n и к вероятностным итеративным методам, если обеспечивается сходимость с вероятностью единица. Нужно отметить, что это правило потребует чрезвычайно большого числа шагов.

Исследования показали, что правило остановки определяет то значение n_0 , при превышении которого последовательность $\{a[n]\}$ приобретает стационарный характер.

Для надежного определения n_0 необходимо каким-либо образом "сгладить" последовательность $\bar{a}[n]$. Одна из таких возможностей состоит в использовании скользящего среднего

$$m_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=n}^{n+N} C[k] \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (13.19)$$

Если начиная с какого-то номера n_0 для всех $k \geq k_0$

$$|m_N[n] - m_{N+1}[n]| < \epsilon, \quad (13.20)$$

то можно прекращать настройку параметров.

13.3. Метод текущего регрессионного анализа

Рассматриваемый метод относится к итеративным алгоритмам построения математического описания нестационарных объектов и заключается в следующем.

Пусть по некоторому числу наблюдений N над входом и выходом объекта в моменты времени $i = 1, 2, \dots, N$ осуществляется оценка параметров математической модели в момент времени $(N + n)$, где $N = 1, 2, \dots, m$, $m \ll N$. Нужно отметить, что влияние информации, полученной в моменты времени N , $N-1$ и т. д. на точность оценки коэффициентов неодинаково. Для того, чтобы учесть это влияние вводится функция веса $v(N, j, \gamma)$, где N – число наблюдений в выборке; j – номер текущего наблюдения; γ – параметры функции веса, которые подбираются в ходе подстройки алгоритма.

Структура алгоритма вычислений определяется при помощи критерия наименьших квадратов, причем взвешивание квадратов ошибок при различных экспериментах осуществляется при помощи весовой функции $v(N, j, \gamma)$:

$$\Phi = \sum_{j=1}^N [y_j - a^T(N+n)\bar{x}_j]^2 v(N, j, \gamma). \quad (13.21)$$

Вычисление $a(N+n)$ из условия минимума Φ по $a(N+n)$ приводит к методу текущего регрессионного анализа.

Вычислительный алгоритм (13.21) будет давать различные оценки $a(N+n)$ в зависимости от выбора функции веса $v(N, j, \gamma)$. Для того, чтобы средний квадрат ошибки прогнозирования выхода объекта в момент времени $(N+n)$ был минимальным, необходимо наилучшим образом выбрать функцию веса $v(N, j, \gamma)$.

Допустим, весовая функция уменьшается с ростом $(N-j)$, т. е. чем дальше отстоят наблюдения от момента оценки параметров, тем их вес меньше. Это предположение накладывает определенные ограничения на вид процессов, для которых можно применить рассматриваемый метод. Как было установлено, к такому типу процессов относятся процессы с монотонно убывающими корреляционными функциями, например, по экспоненте.

В методе «скользящего интервала», функция веса выбирается в виде

$$v(N, j, \gamma) = \begin{cases} 1 & \text{при } N - j \geq \gamma \\ 0 & \text{при } N - j < \gamma \end{cases}.$$

С вычислительной точки зрения весовую функцию удобнее выбрать $v(N, j, \gamma) = v^{N-j}$, где $0 < \gamma < 1$.

В этом методе наилучший выбор функции веса сводится к определению оптимального значения параметра γ , обеспечивающего минимум суммы квадратов ошибок прогнозирования.

Как уже отмечалось, метод текущего регрессионного анализа является рекуррентным алгоритмом построения математических моделей, поэтому запишем такой алгоритм для рассматриваемого метода:

$$\Phi = [\bar{Y}_i - \bar{X}_i a(i+n)]^T \bar{V}_i [\bar{Y}_i - \bar{X}_i a(i+n)] \quad (13.22)$$

где

$$\bar{Y}_i = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(i) \end{pmatrix}; \quad \bar{X}_i = \begin{pmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \dots & x_k(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1(i) & x_2(i) & \dots & x_k(i) \end{pmatrix}; \quad \bar{V}_i = \begin{pmatrix} v(i,1,\gamma) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & v(i,i,\gamma) \end{pmatrix};$$

$$a(i+n) = \begin{pmatrix} \alpha_1(i+n) \\ \alpha_2(i+n) \\ \dots \\ \alpha_k(i+n) \end{pmatrix}$$

Минимизация функции Φ по $a(i+n)$ приводит к системе нормальных уравнений, откуда определяются оценки параметров $a(i+n)$:

$$a(i+n) = (\bar{X}_i^T \bar{V}_i \bar{X}_i)^{-1} \bar{X}_i^T \bar{V}_i \bar{Y}_i \quad (13.23)$$

Если после определения оценок параметров появилась новая информация $\bar{X}(i+1)$, $\bar{Y}(i+1)$, то необходимо заново подсчитать оценки $a(i+n+1)$.

После некоторых преобразований формулы (13.22) окончательный вид рекуррентной формулы будет следующим:

$$a(i+n+1) = a(i+n) + \frac{\bar{L}_i \bar{X}(i+1)}{\bar{X}^T(i+1) \bar{L}_i \bar{X}(i+1) + \gamma} \left[\bar{Y}(i+1) - \bar{X}^T(i+1) a(i+1) \right],$$

$$\text{где } \bar{L}_i = \left(\bar{X}_i^T \bar{V}_i \bar{X}_i \right)^{-1} \quad (13.24)$$

Параметр γ определяет скорость изменения весовой функции и его величину выбирают в пределах от ϵ до 1, где ϵ -допустимо малая положительная величина.

14. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ

14.1. Статистический подход к синтезу математических моделей

Статистический подход к получению работоспособного математического описания получил интенсивное развитие, поскольку позволяет извлекать нужные результаты при неполной информации о механизме процесса, т. е., как уже отмечалось, процесс рассматривается как "черный" или "серый" ящик. Статистический подход основан на обработке экспериментальной информации, собранной непосредственно на действующем объекте. Для обработки экспериментальных данных используются методы теории вероятностей и математической статистики. Разнообразие методов решения обусловлено разнообразием объектов исследования, а также различиями в постановке задачи. Использование того или иного метода определяется такими особенностями объектов, как линейность или нелинейность характеристик, уровень помех, нестационарность, возможность нанесения искусственных возмущений и т. д.

По способу сбора экспериментальной информации статистические методы делят на активные и пассивные.

Активный эксперимент основан на искусственных возмущениях, наносимых на объект по заранее составленному плану. Разработана теория планирования экспериментов, позволяющая строить математическое описание процесса, адекватное результатам эксперимента. Однако в промышленных условиях активный метод имеет ряд существенных ограничений, т. к. подобное проведение эксперимента может привести к аварийной ситуации, кроме того, имеются неуправляемые переменные, которые нужно включить в математическую модель (например, примеси в реагентах, качественный состав сырья и т. д.).

Пассивный эксперимент предполагает сбор данных о технологических переменных процесса в режиме нормального функционирования объекта без нанесения возмущений. Этот способ может удлинить время эксперимента, но часто является экономически оправданным, а иногда и единственно возмож-

ным. Достоинством этого метода является также возможность использования архивных данных по процессу.

Основными методами статистической идентификации являются методы регрессионного и корреляционного анализа. Важнейшей составной частью этих методов является метод наименьших квадратов (МНК).

Мы будем рассматривать метод множественного регрессионного анализа, в котором математическая модель, описывающая неизвестную зависимость выходной переменной y от входных $\bar{X}$, $y = F(x_1, x_2, \dots)$ записывается в виде полинома, являющегося отрезком ряда Тейлора

$$y = B_0 + \sum_{j=1}^k B_j x_j + \sum_{u,j=1}^k B_{uj} x_u x_j + \sum_{j=1}^k B_{jj} x_j^2 + \dots, \quad (14.1)$$

$$\text{где } B_j = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)_{|\bar{x}=0}, \quad B_{uj} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_u \partial x_j} \right)_{|\bar{x}=0}, \quad B_{jj} = \left(\frac{\partial^2 F}{2 \partial x_j^2} \right)_{|\bar{x}=0}.$$

Так как в промышленных условиях всегда существуют неуправляемые и неконтролируемые переменные, то результат эксперимента является случайной величиной.

Форма связи между случайными величинами определяется линией регрессии, которая показывает, как в среднем изменяется величина y при изменении x , что характеризует условное математическое ожидание y при условии, что величина x приняла определенное значение.

Процесс определения уравнения регрессии состоит из двух этапов: выбора вида уравнения регрессии, т. е. задания функции F и расчета параметров (коэффициентов) уравнения регрессии.

Выбор вида уравнения регрессии осуществляется исходя из особенностей исследуемого объекта и используя, как уже отмечалось, отрезок ряда Тейлора. Одним из методов подбора типа уравнения регрессии является получение эмпирической линии регрессии y по x по виду полученного корреляционного поля между ними. Но более распространенным методом является це-

ленаправленный перебор структур уравнений регрессии и оценка каждой структуры по какому-либо критерию адекватности.

При выборе структуры уравнения регрессии используется априорная информация о процессе, содержащаяся в практическом опыте специалистов, знающих исследуемый объект. Обычно в модель вводят не все члены полинома выбранной степени, а только те, которые были выбраны как наиболее существенные в результате обсуждения со специалистами. Для выбора наиболее значимых переменных используют различные методы, например, метод экспертных оценок.

После подбора уравнения регрессии, описывающего зависимость $y = F(x)$, производят расчет его параметров (коэффициентов) модели.

При обработке экспериментальной информации получают коэффициенты уравнения регрессии a_0, a_j, a_{ij}, a_{jj} , являющиеся оценками теоретических коэффициентов B_0, B_j, B_{ij}, B_{jj} . Уравнение статистической модели записывается следующим образом:

$$\hat{y} = a_0 + \sum_{j=1}^k a_j x_j + \sum_{u, j=1}^k a_{uj} x_u x_j + \sum_{j=1}^k a_{jj} x_j^2 + \dots, \quad (14.2)$$

Коэффициент a_0 называется свободным членом уравнения регрессии; коэффициенты a_j – линейными эффектами; коэффициенты a_{ij} – эффектами взаимодействия; a_{jj} – квадратичными эффектами.

Для определения коэффициентов уравнения (14.2) используют метод наименьших квадратов:

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 - \min, \quad (14.3)$$

где N – объем выборки (число экспериментальных данных). Разность между N и числом связей, накладываемых на эту выборку l , называется числом степеней свободы выборки f , т. е.

$$f = N - l.$$

В случае поиска коэффициентов уравнения регрессии число связей равно числу определяемых коэффициентов.

14.2. Метод множественного регрессионного анализа

Постановка задачи регрессионного анализа сводится к следующему.

По измеренным во время опытов значениям входных переменных $x_1, x_2, \dots, x_l$ и выходной переменной y необходимо определить оценки коэффициентов уравнения регрессии $a_0, a_1, \dots$.

Для определения этих коэффициентов используется метод наименьших квадратов (МНК), являющийся важнейшей составной частью регрессионного анализа. Основная идея МНК заключается в определении минимума функции многих переменных.

Допустим, минимизируемая функция $\hat{y} = F(x, a_0, a_1, a_2, \dots)$ является дифференцируемой функцией. Необходимо выбрать коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ таким образом, чтобы

$$S = \sum_{i=1}^N [y_i - \hat{y}_i]^2 = \min.$$

Подставив в эту формулу выражение, определяющее y , получим:

$$S = \sum_{i=1}^N [y_i - F(x_i, a_0, a_1, a_2, \dots)]^2 = \min. \quad (14.4)$$

То есть МНК сводится к нахождению таких коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots$, при которых существовала бы минимальная разница между рассчитанными по модели и измеренными в ходе эксперимента значениями выходной переменной y .

Необходимым условием минимума $S(a_0, a_1, a_2, \dots)$ является равенство нулю частных производных функции S , описываемой выражением (14.4), по каждому из коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots$.

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0; \dots \quad (14.5)$$

После дифференцирования система уравнений (14.5) превращается в систему нормальных уравнений (так она называется в математической статистике):

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^N \left[y_i - F(x_i, a_0, a_1, a_2, \dots) \right] \left(\frac{\partial F(x_i)}{\partial a_0} \right) &= 0; \\ 2 \sum_{i=1}^N \left[y_i - F(x_i, a_0, a_1, a_2, \dots) \right] \left(\frac{\partial F(x_i)}{\partial a_1} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (14.6)$$

После преобразований получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N y_i \left(\frac{\partial F(x_i)}{\partial a_0} \right) - \sum_{i=1}^N F(x_i, a_0, a_1, a_2, \dots) \left(\frac{\partial F(x_i)}{\partial a_0} \right) &= 0, \\ \sum_{i=1}^N y_i \left(\frac{\partial F(x_i)}{\partial a_1} \right) - \sum_{i=1}^N F(x_i, a_0, a_1, a_2, \dots) \left(\frac{\partial F(x_i)}{\partial a_1} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (14.7)$$

Искомые коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$, получаются в результате совместного решения системы уравнений (14.7).

Так как $S \geq 0$ для любых $a_0, a_1, a_2, \dots$, то у S обязательно должен существовать хотя бы один минимум. Поэтому, если система нормальных уравнений имеет единственное решение, то оно и является минимумом для функции S . Решать систему (14.7) в общем виде невозможно, поэтому нужно задаться конкретным видом функции F .

Рассмотрим для примера уравнение линейной регрессии, зависящей от одного параметра:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x. \quad (14.8)$$

Имеется выборка экспериментальных данных объемом N . Необходимо МНК определить коэффициенты a_0 и a_1 . Сначала составляем функцию S :

$$S = \sum_{i=1}^N [y - \hat{y}_i]^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2 - \min \quad (14.9)$$

Затем проверяем необходимое условие минимума S , т. е. берем частные производные функции S по каждому из коэффициентов a_0 и a_1 и приравниваем полученные производные нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad (14.10)$$

После дифференцирования получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^N [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] &= 0, \\ 2 \sum_{i=1}^N [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] x_i &= 0, \end{aligned} \quad (14.11)$$

После преобразования система нормальных уравнений приобретает вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N (a_0 + a_1 x_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^N y_i x_i - \sum_{i=1}^N (a_0 + a_1 x_i) x_i &= 0. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Или, приведя эту систему к стандартному виду, т. е. члены уравнения, не содержащие неизвестных коэффициентов, переносят в правую часть, а члены с неизвестными коэффициентами оставляют в левой части:

$$\begin{aligned} Na_0 + a_1 \sum_{i=1}^N x_i &= \sum_{i=1}^N y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 &= \sum_{i=1}^N x_i y_i \end{aligned} \quad (14.13)$$

Коэффициенты a_0 и a_1 можно найти с помощью определителей:

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \text{где}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N y_i & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i y_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i y_i \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N y_i & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i y_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i y_i \sum_{i=1}^N x_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2},$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}.$$

Коэффициент a_0 в данном случае можно найти по известному коэффициенту a_1 из первого уравнения системы (14.13):

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x},$$

где $\bar{y}, \bar{x}$ – средние значения y и x .

После того, как определены параметры уравнения регрессии, необходимо провести статистический анализ результатов или, как еще говорят, статистическую оценку параметров. Статистический анализ результатов состоит в проверке значимости полученных коэффициентов в сравнении с ошибкой воспроиз-

водимости и установлении адекватности уравнения регрессии. Подобный анализ носит еще название регрессионного анализа.

При проведении регрессионного анализа принимают обычно определенные предпосылки, наиболее важными из которых являются следующие:

1. Входные величины $x_1, x_2, \dots, x_k$ должны измеряться с высокой точностью. Появление ошибки в определении y связано с наличием в процессе невыявленных переменных, не вошедших в уравнение регрессии;

2. Входные величины $x_1, x_2, \dots, x_k$ должны быть коррелированы, т.е. статистически связаны между собой;

3. Выходная переменная y представляет собой независимую случайную величину, подчиняющуюся нормальному закону распределения;

4. Дисперсия выходной переменной y не зависит от ее абсолютной величины;

5. Если проводится эксперимент с объемом экспериментальных данных, равным N , и каждый опыт повторяется m раз, то в этом случае выборочные дисперсии $D_1, D_2, \dots, D_N$ должны быть однородны.

Проверка однородности выборочных дисперсий, т. е. дисперсий, вычисленных по данным выборки, при одинаковом числе параллельных опытов осуществляется следующим образом:

1. Вычисляется среднее из результатов параллельных опытов

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{e=1}^m y_{ie}}{m} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (14.14)$$

2. Вычисляются выборочные дисперсии

$$D_i = \frac{\sum_{e=1}^m (y_{ie} - \bar{y}_i)^2}{m - 1} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (14.15)$$

3. Ищется сумма дисперсий

$$\sum_{i=1}^N D_i . \quad (14.16)$$

4. Составляется отношение

$$\sigma_{\max} = \frac{D_{\max}}{\sum_{i=1}^N D_i} , \quad (14.17)$$

где $D_{\max}$ – максимальное значение выборочной дисперсии.

Если $\sigma_{\max} < \sigma_p(N, m-1)$, где $\sigma_p(N, m-1)$ – табулированное значение критерия Кохрена при выбранном уровне значимости p , то выборочные дисперсии однородны. Выбранный уровень значимости – это вероятность совершения ошибки I рода, т. е. отказ от истинной статистической гипотезы.

Если выборочные дисперсии однородны, то рассчитывается дисперсия воспроизводимости:

$$D_{\text{воспр.}} = \frac{\sum_{i=1}^N D_i}{N} . \quad (14.18)$$

Дисперсия воспроизводимости – это дисперсия, характеризующая воспроизводимость эксперимента при дублировании опытов.

Число степеней свободы этой дисперсии равно

$$f = N(m-1) . \quad (14.19)$$

Дисперсию воспроизводимости используют для оценки значимости коэффициентов уравнения регрессии, которая проводится по критерию Стьюдента

$$t_j = \frac{|a_j|}{Ea_j} , \quad (14.20)$$

где a_j – j -й коэффициент уравнения регрессии; E_{aj} – среднее квадратичное отклонение j -го коэффициента.

Коэффициент a_j будет считаться значимым, если рассчитанное значение критерия Стьюдента t_j больше табулированного $t_p(f)$ для выбранного уровня значимости и числа степеней свободы f .

Для линейной регрессии от одного параметра среднее квадратическое отклонение E_{a_j} можно определить по закону накопления ошибок:

$$E_{a_j} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial a_j}{\partial y_i} \right)^2} D_i \quad (14.21)$$

Если $D_1 = D_2 = \dots = D_N = D_{воспр.}$, то для расчета среднего квадратического отклонения получим следующие формулы,

$$E_{a_0} = \sqrt{\frac{D_{воспр.} \sum_{i=1}^N x_i^2}{\left(N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right)}} \quad (14.22)$$

$$E_{a_1} = \sqrt{\frac{D_{воспр.} N}{\left(N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right)}} \quad (14.23)$$

Незначимые коэффициенты из уравнения регрессии исключаются. Вследствие взаимной коррелированности коэффициентов между собой, все оставшиеся коэффициенты пересчитываются заново.

Адекватность уравнения регрессии проверяется по критерию Фишера

$$F = \frac{D_{адекв.}}{D_{воспр.}}, \quad (14.24)$$

где $D_{адекв}$ – дисперсия адекватности; $D_{воспр}$ – дисперсия воспроизводимости.

Дисперсия адекватности рассчитывается по следующей формуле:

$$D_{адекв.} = \frac{m \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{N - \ell} . \quad (14.25)$$

Если рассчитанное значение критерия Фишера меньше табулированного $F_p(f_1, f_2)$, то уравнение регрессии адекватно объекту.

Если параллельные опыты отсутствуют, то адекватность рассчитывается по следующему отношению (критерию Фишера):

$$F = \frac{D_y}{D_{ост.}} , \quad (14.26)$$

где D_y – дисперсия относительно среднего, рассчитываемая по следующей формуле:

$$D_y = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N - 1} \quad (14.27)$$

$D_{ост}$ – остаточная дисперсия, рассчитываемая по формуле

$$D_{ост.} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{N - \ell} . \quad (14.28)$$

Остаточная дисперсия характеризует рассеяние опытных данных относительно уравнения регрессии.

Уравнение регрессии считается адекватным, если рассчитанное значение критерия Фишера больше табулированного $F_p(f_1, f_2)$ для выбранного уровня значимости p и чисел степеней свободы $f_1 = N - 1$ и $f_2 = N - \ell$.

Если уравнение регрессии представляет собой полином некоторой степени, то коэффициенты этого полинома находят решением системы линейных уравнений. Например, уравнение

регрессии задано в виде квадратичной функции, т. е. задана параболическая регрессия

$$\hat{y} = a_0 + a_1x + a_{11}x^2 \quad (14.29)$$

Тогда

$$\frac{\partial F(x)}{\partial a_0} = 1, \quad \frac{\partial F(x)}{\partial a_1} = x, \quad \frac{\partial F(x)}{\partial a_{11}} = x^2.$$

В этом случае система нормальных уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} a_0N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i + a_{11} \sum_{i=1}^N x_i^2 &= \sum_{i=1}^N y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 + a_{11} \sum_{i=1}^N x_i^2 &= \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 + a_{11} \sum_{i=1}^N x_i^2 &= \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i \end{aligned} \quad (14.30)$$

Коэффициенты парабол любого порядка будут определяться аналогичными уравнениями.

Если уравнение регрессии найдено с достаточной точностью, то проводят оценку тесноты нелинейной связи по формуле

$$n = \frac{(N - \ell)D_{ocm}}{(N - 1)D_y}. \quad (14.31)$$

Чем меньше n , тем сильнее связь. Тесноту связи определяют с помощью корреляционного отношения, равного

$$M = \sqrt{1 - \eta}. \quad (14.32)$$

Чем больше M , тем сильнее связь, M меняется в пределах от 0 до 1, т. е.

$$0 \leq M \leq 1.$$

Корреляционное отношение оценивает тесноту связи между случайными величинами в нелинейном случае, так же как коэффициент корреляции оценивает связь в линейном случае.

14.3. Метод множественного корреляционного анализа

Если необходимо исследовать корреляционную связь между многими величинами, то пользуются уравнениями множественной регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n.$$

Для более точного определения оценок значений коэффициентов модели производится переход от натурального масштаба переменных к нормированному по формулам

$$x_{ji}^0 = \frac{x_{ji} - \overline{x_j}}{S_{xj}}, \quad y_i^0 = \frac{y_i - \overline{y}}{S_y} \quad (14.33)$$

($i = \overline{1, N}$, N – объем выборки; $j = \overline{1, n}$, n – число входных переменных), где x_{ji}^0, y_i^0 – нормированные значения соответствующих переменных; $\overline{x_j}, \overline{y}$ – средние значения соответствующих переменных; S_{xj}, S_y – среднеквадратические отклонения, рассчитываемые по формулам

$$S_{xj} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_{ij} - \overline{x_j})^2}{N - 1}}, \quad S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \overline{y})^2}{N - 1}} \quad (14.34)$$

Тогда исходный статистический материал записывается в новом масштабе (табл. 1).

Таблица 1

N	x_1^0	x_2^0	x_3^0	...	y^0
1	x_{11}^0	x_{21}^0	x_{31}^0	...	y_1^0
2	x_{12}^0	x_{22}^0	x_{32}^0	...	y_2^0
.	.	.	.	.	.
N	x_{1N}^0	x_{2N}^0	x_{3N}^0	...	y_N^0

В новом масштабе имеем

$$\overline{x_j^0} = 0 \quad \text{и} \quad S_{x_j^0} = 1,$$

а также

$$\overline{y^0} = 0 \quad \text{и} \quad S_{y^0} = 1.$$

Уравнение регрессии между нормированными переменными не имеет свободного члена и принимает, например, вид

$$\hat{y}_i^0 = a_1 x_{1i}^0 + a_2 x_{2i}^0 + \dots + a_n x_{ni}^0 \quad (14.35)$$

Коэффициенты уравнения (14.35) находятся из условия

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i^0 - \hat{y}_i^0)^2 \rightarrow \min, \quad (14.36)$$

где y_i^0 – экспериментальное значение выходной переменной;

$\hat{y}_i^0$ – рассчитанное по модели значение этой же переменной.

Необходимым условием минимума функции S является выполнение равенств:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \dots, \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0. \quad (14.37)$$

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \sum_{i=1}^N (x_{1i}^0)^2 + a_2 \sum_{i=1}^N x_{1i}^0 x_{2i}^0 + \dots + a_n \sum_{i=1}^N x_{1i}^0 x_{ni}^0 = \sum_{i=1}^N x_{1i}^0 y_i^0 \\ \dots \\ a_1 \sum_{i=1}^N x_{ni}^0 x_{1i}^0 + a_2 \sum_{i=1}^N x_{ni}^0 x_{2i}^0 + \dots + a_n \sum_{i=1}^N (x_{ni}^0)^2 = \sum_{i=1}^N x_{ni}^0 y_i^0 \end{array} \right. \quad (14.38)$$

Умножим левую и правую части уравнений на $\frac{1}{N-1}$.

В результате при каждом коэффициенте a получается выбо-

рочный коэффициент парной корреляции r^* , рассчитываемый по следующим формулам:

$$r_{y^0 x_j^0}^* = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N y_i^0 x_{ji}^0 ; \quad (14.39)$$

$$r_{x_e^0 x_m^0}^* = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_{ei}^0 x_{mi}^0, \quad e \rangle m, \quad e, m=1, 2, \dots, n.$$

Выборочные коэффициенты парной корреляции лучше рассчитать предварительно, сразу после нормирования исходных статистических данных. Они являются мерой тесноты линейной связи между двумя случайными величинами. В общем случае величина коэффициента парной корреляции может меняться от 0 до ± 1 . Если коэффициент корреляции равен 0, связь, либо вообще отсутствует, либо отлична от линейной. Если он равен ± 1 , связь является линейной – функциональной.

Знак коэффициента корреляции указывает на направление связи: увеличение одной из переменных при положительной корреляции влечет за собой увеличение, а при отрицательной корреляции – уменьшение другой.

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_{ji}^0)^2 = S_{x_j^0} = 1,$$

получаем систему нормальных уравнений

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 r_{x_1 x_2}^* + \dots + a_n r_{x_1 x_n}^* &= r_{y x_1}^* \\ a_1 r_{x_2 x_1}^* + a_2 + a_3 r_{x_2 x_3}^* + \dots + a_n r_{x_2 x_n}^* &= r_{y x_2}^* \\ a_1 r_{x_n x_1}^* + a_2 r_{x_n x_2}^* + a_3 r_{x_n x_3}^* + a_n &= r_{y x_n}^* \end{aligned} \quad (14.40)$$

Следует иметь в виду, что вычисленный по формуле (14.39) выборочный коэффициент корреляции равен коэффициенту корреляции между переменными, выраженными в натуральном масштабе

r_{yx}^* , а также, что $r_{x_e x_m}^* = r_{x_m x_e}^*$.

Решив систему (14.40), определяют значения $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Затем рассчитывают коэффициент множественной корреляции R :

$$R = \sqrt{a_1 r_{yx_1}^* + a_3 r_{yx_2}^* + \dots + a_n r_{yx_n}^*}, \quad (14.41)$$

служащий показателем силы связи в случае множественной регрессии. Коэффициент множественной корреляции изменяется в пределах $0 \leq R \leq 1$ и может быть использован для обобщенного анализа качества статистической математической модели. В случае выборок небольшого объема в величину R необходимо ввести коррекцию на систематическую ошибку. Чем меньше число степеней свободы выборки $f=N-l$, тем сильнее увеличивается сила связи, оцениваемая коэффициентом множественной корреляции

$$R^1 = \sqrt{1 - (1 - R^2) \frac{N-1}{N-l}}, \quad (14.42)$$

где R^1 – скорректированное значение коэффициента множественной корреляции; l – число коэффициентов уравнения регрессии.

Для практического использования математической модели необходимо перейти к натуральному масштабу по формулам

$$b_j = a_j \frac{S_y}{S_{x_j}}, j = 1, 2, \dots, n$$

$$j \neq 0$$

$$b_0 = \bar{y} - \sum_{j=1}^N b_j \bar{x}_j. \quad (14.43)$$

При наличии параллельных опытов можно рассчитать дисперсию воспроизводимости и провести статистический анализ уравнения регрессии.

14.4. Статистическая проверка адекватности математической модели реальному объекту

Нужно отметить, что в зависимости от закона распределения генеральных совокупностей, из которых взяты выборки с выхода математической модели и выхода реального объекта, различают два вида критериев: параметрические и порядковые.

Параметрические критерии применяют для оценки расхождения двух выборок, взятых из генеральной совокупности с нормальным законом распределения вероятностей.

Применение параметрических критериев основано на сопоставлении таких статистических характеристик как среднее $\bar{u}$ и дисперсия D .

Порядковые (непараметрические) критерии оценки расхождения двух выборок применяются, когда исследователю не известна форма распределения выходных данных для генеральной совокупности или известно, что распределение, из которого взята выборка, значительно отклоняется от нормального.

Для малых выборок проверку гипотезы о соответствии эмпирического и гипотетического (нормального) распределения чаще всего производят по критерию W . Для больших выборок данная задача решается одним из следующих способов:

- путем вычисления показателей асимметрии и эксцесса и сопоставления их со своими квадратическими ошибками;
- путем применения критерия χ^2 .

Проверка на нормальность выборок малого и большого объема

Небольшими считаются выборки объемом $N \leq 50$.

Пусть имеем случайную величину с наблюдаемыми значениями $x_1, x_2, \dots, x_N$. При использовании критерия W для проверки на нормальность небольших выборок

поступают следующим образом:

1. Строят вариационный ряд таким образом, чтобы получить упорядоченную выборку значений $x_1, x_2, \dots, x_N$, где $x_1 < x_2 < \dots < x_N$;
2. Вычисляют

$$D = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \quad (14.44)$$

где $\bar{x}$ – эмпирическое среднее;

3. если N – четное число, принимают $K = \frac{N}{2}$; если N – не-

четное число, принимают $K = \frac{N-1}{2}$. Далее вычисляют

$$\begin{aligned} d = & a_N(x_N - x_1) + a_{N-1}(x_{N-1} - x_2) + \dots \\ & + a_{N-K+1}(x_{N-K+1} - x_K) = \sum_{i=1}^K a_{K-i+1}(x_{N-i+1} - x_i), \end{aligned} \quad (14.45)$$

где a_i для $i = 1, 2, \dots, K$ выбирается из таблиц (математическая статистика). Когда N – нечетное число, x_{K+1} не используется при вычислении;

4. Вычисляют критерий

$$W = \frac{d^2}{D}. \quad (14.46)$$

5. Сравнивают вычисленное значение W с табличным значением.

Если вычисленное значение W больше табличного, то имеют нормальный закон распределения; если же рассчитанное значение W меньше табличного, то гипотеза о нормальности отвергается.

Выборки большого объема проверяют на нормальность следующим образом:

1. Вычисляют показатель асимметрии как отношение центрального момента третьего порядка к кубу стандартного эмпирического отклонения:

$$\partial_1 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^3}{NS_x^3}, \quad (14.47)$$

где S_x – стандартное эмпирическое отклонение; $\bar{x}$ – эмпирическое среднее арифметическое значение; N – объем выборки.

Если рассчитанное значение ∂ получится отрицательным, то кривая смещена вправо, если же ∂ получится положительным, то кривая смещена влево;

2. Вычисляют показатель эксцесса:

$$\partial_2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^4}{NS_x^4} - 3. \quad (14.48)$$

Слагаемое 3 берется для того, чтобы значение ∂ для нормального закона распределения было равно нулю;

3. Вычисляют квадратическую ошибку показателя асимметрии:

$$\hat{S}_{\partial_1} = \sqrt{\frac{6N}{(N+1)(N+3)}}. \quad (14.49)$$

4. Вычисляют квадратическую ошибку показателя эксцесса:

$$\bar{S}_{\partial_2} = \sqrt{\frac{24N(N-2)(N-3)}{(N-1)^2(N+3)(N+5)}}. \quad (14.50)$$

5. Вычисляют критерий t (критерий Стьюдента):

$$t_{\partial_2} = \frac{\partial_1}{\hat{S}_{\partial_1}} \quad t_{\partial_2} = \frac{\partial_2}{\hat{S}_{\partial_2}}. \quad (14.51)$$

6. Сравнивают рассчитанные значения критерия Стьюдента t_{∂_1} и t_{∂_2} с табличным значением критерия t .

Гипотеза о нормальности подтверждается, если

$$t_{\partial_1} < t_{\text{табл}};$$

$$t_{\partial_2} < t_{\text{табл}}$$

и отвергается, если

$$t_{\partial_1} > t_{\text{табл}};$$

$$t_{\partial_2} > t_{\text{табл.}}$$

Если N велико ($N > 100$), то вместо (14.49) можно пользоваться приближенной оценкой

$$\hat{S}_{\partial_1} = \sqrt{\frac{6}{N}}, \quad (14.52)$$

а вместо (14.50)

$$\hat{S}_{\partial_2} = 2\sqrt{\frac{6}{N}} = 2\hat{S}_{\partial_1} \quad (14.53)$$

В этом случае мерой согласованности эмпирического и нормального теоретического распределения служат отношения:

$$\frac{\partial_1}{\sqrt{\frac{6}{N}}} = \alpha \qquad \frac{\partial_2}{2\sqrt{\frac{6}{N}}} = \beta. \quad (14.54)$$

При $\alpha < 3$ и $\beta < 3$ гипотеза о нормальности распределения подтверждается.

Параметрические и порядковые критерии адекватности математической модели

К параметрическим критериям относятся критерий Стьюдента и критерий Фишера.

По критерию Фишера F проверку адекватности математической модели реальному объекту мы уже рассматривали ранее (при рассмотрении метода множественного регрессионного анализа).

Рассмотрим проверку адекватности по критерию t (Стьюдента). Она осуществляется следующим образом:

1. Вычисляют значение

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\hat{S}_d}, \quad (14.55)$$

где $\hat{S}_d$ – стандартная ошибка разности между средними;

2. Сравнивают вычисленное значение t с табличным.

Нулевая гипотеза не отвергается, т. е. адекватность математической модели объекту считается доказанной, если рассчитанное значение критерия t меньше табличного значения критерия Стьюдента.

К порядковым (непараметрическим) критериям оценки расхождения выборок, взятых с выхода математической модели и выхода реального объекта, относятся критерий χ^2 , Вилькоксона, X -критерий, а также критерий, предложенный Колмогоровым и Смирновым. Эти критерии достаточно подробно рассмотрены в литературе по математической статистике, и мы на них останавливаться не будем.

15. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

15.1. Математические модели управляемых систем

Математические модели сложных систем складываются из моделей звеньев – элементов системы и уравнений связи, описывающих взаимодействие звеньев. Структуры управляемых систем весьма разнообразны, но имеют общие черты, присущие любой кибернетической системе. Учитывая эти общие черты, можно представить общую модель системы, состоящей из отдельных моделей:

- а) модели объекта управления;
- б) модели управляющего устройства;
- в) уравнения, описывающие связи между объектом и управляющим устройством;
- г) модели цели управления;
- д) модели возмущений.

Типовыми системами регулирования являются:

- 1) по возмущению;
- 2) по отклонению от задания.

Кроме того, существуют системы комбинированного управления по возмущению и отклонению.

Рассмотрим общую модель одной из простейших систем управления – одномерной линейной системы регулирования по отклонению.

Такая модель будет включать:

- 1) уравнения объекта управления, например в переменных "вход-выход" или в переменных состояния, причем $x_{вых}(t)=y$; $x_{возмущ.}(t)=f$; $x_{управл.}(t)=U$;
- 2) уравнение регулятора, например, непрерывного линейного

$$U(t) = k_p E(t) + \frac{k_p}{T_{II}} \int_0^{\infty} E(t) dt + k_p T_D \dot{E}(t), \quad (15.1)$$

где k_p , T_{II} , T_D – параметры настройки регулятора;

3) уравнение ошибки, описывающее действие объекта на регулятор через обратную связь ОС и устройство сравнения УС (сумматор):

$$E(t) = y_{зад}(t) - y(t); \quad (15.2)$$

4) целевую функцию F , например, в виде квадратичного интегрального критерия

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T E^2(t) dt = \min; \quad (15.3)$$

5) модель возмущений, пусть, например, возмущения имеют характер случайного процесса $f(t)$ со следующей автокорреляционной функцией:

$$R_f(\tau) = a^2 \exp\left(-\frac{\lambda}{\tau}\right) \quad (15.4)$$

и спектральной плотностью мощности сигнала

$$S_f(\omega) = \frac{2a^2\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}, \quad (15.5)$$

где $\tau = t_1 - t_2$ – "вспомогательное" время, т. е. время сдвига реализации случайного процесса $f(t)$ при нахождении $R_f(\tau)$;

a^2 – дисперсия случайного сигнала;

λ – параметр затухания $R_f(\tau)$;

ω – круговая частота сигнала;

6) уравнение сумматора СУ

$$y(t) = y_{кв}(t) + y_{кв}(t), \quad (15.6)$$

где $y_{кв}(t)$ – реакция объекта управления на возмущение;

$y_{кв}(t)$ – реакция объекта управления на регулирующее воздействие.

Математическое описание перечисленных частей общей модели управляемой системы получают, используя различный подход.

Уравнения объекта управления составляются первоначально, например, в форме детерминированной математической мо-

дели, а затем подвергаются линеаризации и идентификации. Параметры регулятора находят при синтезе управления, а потом уточняют при настройке. Модель возмущений всегда является аппроксимирующей. Если ее включают в общую модель в аналитической форме (как это было сделано в примере), то обязательной является ее идентификация по параметрам a^2 , λ . В других случаях случайный процесс имитируют численно с помощью специальных генераторов случайных чисел. В общую математическую модель системы управления необходимо также включать математические описания преобразователей, которые согласуют сигналы по физической природе: датчиков, согласующих выходной сигнал $y(t)$ с входом устройства сравнения; исполнительных механизмов и регулирующих органов, согласующих выход регулятора с входом объекта $U(t)$.

Поскольку управляемая система по условию линейна, ее математическую модель можно представить через передаточные функции. Каждому звену системы можно поставить в соответствие передаточную функцию $W_i(P)$, а затем, пользуясь известными правилами структурных преобразований, получить общую передаточную функцию системы.

Рассмотрим опять одномерную линейную систему регулирования по отклонению, составив для нее общую модель через передаточные функции:

1) для разомкнутой системы (линия ОС разорвана)

$$W_{раз}(P) = \frac{Y(P)}{f(P)} = W_{кв}(P); \quad y_{ку}(t) = 0; \quad (15.7)$$

$$W_{раз}^{зад}(P) = \frac{Y(P)}{Y_{зад}(P)} = W_{ро}(P)W_{ку}(P); \quad y_{ку}(t) = 0;$$

2) для замкнутой системы (линия отрицательной ОС замкнута)

$$W_{зам}(P) = \frac{Y(P)}{f(P)} = \frac{W_{кг}(P)}{1 + W_{по}(P)W_{ку}(P)} = \frac{W_{раз}(P)}{1 + W_{раз}^{зад}(P)}, \quad (15.8)$$

$$W_{зам}^{зад}(P) = \frac{Y(P)}{Y_{зад}(P)} = \frac{W_{по}(P)W_{ку}(P)}{1 + W_{по}(P)W_{ку}(P)} = \frac{W_{раз}^{зад}(P)}{1 + W_{раз}^{зад}(P)}$$

3) для замкнутой системы при ошибке

$$W_f(P) = \frac{E(P)}{f(P)} = \frac{W_{раз}(P)}{1 + W_{раз}^{зад}(P)}, \quad (15.9)$$

$$W_E(P) = \frac{E(P)}{Y_{зад}(P)} = \frac{1}{1 + W_{раз}^{зад}(P)}; \quad f(t) = 0$$

Выходной сигнал управляемой системы в этом случае можно выразить через передаточные функции следующим образом:

$$\begin{aligned} Y(P) &= W_{зам}^{зад}(P)Y_{зад}(P) = W_{зам}(P)f(P) \\ E(P) &= W_E(P)Y_{зад}(P) = Wf(P)f(P) \end{aligned} \quad (15.10)$$

Нужно отметить, что компьютерные системы управления, отличаются от непрерывных управляемых систем тем, что в них используют различные по форме сигналы: непрерывные аналоговые, дискретные аналоговые, цифровые двоичные и соответствующие преобразователи. При математическом моделировании таких систем применяется иной математический аппарат теории решетчатых функций и Z-преобразование.

15.2. Имитационные модели

Когда явления в исследуемой системе настолько сложны и многообразны, что классические виды моделей (аналитико-статистические, статистические и др.) становятся слишком грубым приближением к действительности, то необходимо использовать имитационные модели. В таких моделях поведение слож-

ной системы описывается набором алгоритмов, которые затем реализуют ситуации, возникающие в реальной системе. Моделирующие алгоритмы позволяют по исходным данным, содержащим сведения о начальном состоянии системы, и фактическим значениям ее параметров отобразить реальные явления в системе и получить сведения о возможном поведении сложной системы для данной конкретной ситуации. На основании этой информации возможно принятие соответствующего решения.

Из анализа литературных источников видно, что имитационные модели используются в следующих случаях:

1. Если не существует законченной постановки задачи исследования и идет процесс познания объекта моделирования, при этом имитационная модель служит средством изучения явления.

2. Если классические математические модели имеются, но они очень сложны и громоздки, а имитационная модель дает более простой способ решения задачи.

3. Когда кроме оценки влияния параметров системы необходимо осуществить наблюдение за поведением компонент сложной системы в течение определенного периода.

4. Когда имитационное моделирование оказывается единственным способом исследования сложной системы из-за невозможности наблюдения явлений в реальных условиях.

5. Когда необходимо контролировать протекание процессов в системе путем замедления или ускорения явлений в ходе имитации.

6. При подготовке специалистов и освоении новой техники, когда на имитационной модели обеспечивается возможность приобретения необходимых навыков в эксплуатации новой техники.

7. Когда изучаются новые ситуации в сложной системе, о которых мало что известно или неизвестно ничего.

8. Когда особое значение имеет последовательность событий в проектируемой системе, и модель используется для предсказания узких мест в функционировании системы и других трудностей, появляющихся в поведении системы при введении в нее новых компонент.

Термин "имитационное моделирование" означает, что мы имеем дело с такими математическими моделями, с помощью которых результат нельзя заранее вычислить или предсказать,

поэтому для предсказания поведения реальной системы необходим эксперимент (имитация) на модели при заданных исходных данных.

Имитация представляет собой численный метод проведения на компьютере экспериментов с математическими моделями, описывающими поведение сложной системы в течение заданного или формируемого периода времени. Поведение компонент сложной системы и их взаимодействие в имитационной модели чаще всего описывается, как уже отмечалось ранее, набором алгоритмов, реализуемых на некотором языке моделирования. Все эти описания представляют собой программную имитационную модель, которую необходимо вначале отладить и испытать, а затем использовать для постановки компьютерного моделирования. Поэтому под процессом имитации на компьютере понимаются и конструирование модели, и ее испытание, и применение модели для изучения некоторого явления или проблемы.

В процессе имитационного моделирования при многократном воспроизведении последовательных операций моделируемой системы используются случайные элементы ("датчики" случайных величин). Полученные статистические результаты при последующей обработке дают возможность оценить искомые показатели системы как статистические характеристики по данным большого количества реализаций.

Пошаговое моделирование поведения системы с помощью компьютера означает, что фиксируются определенные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_N$ и состояние модели вычисляется последовательно в каждый из этих моментов времени. Для этого задается алгоритм перехода модели из одного состояния в другое, т.е. преобразование $Y[n] \rightarrow Y[n+1]$, где $Y[n]$ – состояние модели в n -й момент времени.

Если состояние модели определяется вектором $\bar{Y} = (y_1, \dots, y_m)$, состояние входных переменных $\bar{X} = (x_1, \dots, x_n)$, состояние управления $\bar{U} = (u_1, \dots, u_k)$, то имитационная модель определяется заданием оператора Q , с помощью которого можно определить состояние модели в следующий момент времени $Y[n+1]$, зная состояние в предыдущий момент $Y[n]$ и значения $x[n+1]$ и $U[n+1]$:

$$(Y[n], x[n+1], U[n+1]) \xrightarrow{Q} Y[n+1]. \quad (15.11)$$

Специфика имитационного моделирования состоит в том, что состояние объекта определяется рекуррентно на каждом шаге, исходя только из предыдущего шага. Подобное преобразование можно записать в виде рекуррентной формулы:

$$Y[n+1] = Q(Y[n], x[n+1], U[n+1]), \quad (15.12)$$

где Q – оператор имитаций изменения состояния модели. Этот оператор и определяет имитационную модель системы со своей структурой St и параметрами $\bar{a}$.

На стадии структурного синтеза имитационной модели Q определяется ее структура St и содержательный смысл параметров $\bar{a} = (a_1, \dots, a_q)$, численное значение которых определяется на этапе параметрической идентификации.

Имитационные модели позволяют также учесть неконтролируемые факторы системы ξ , т. е. ее стохастичность:

$$Y[n+1] = Q(Y[n], x[n+1], U[n+1], \xi[n+1]), \\ n = 1, \dots, N \quad (15.13)$$

При этом необходимо знать, каким образом фактор ξ влияет на состояние Y системы, т. е. необходимо знать конкретные значения фактора ξ , который не наблюдаем. Это противоречие позволяет разрешить метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). При применении этого метода необходимо знать некоторые статистические свойства фактора ξ (например, закон его распределения, корреляционные свойства и т.д.). Тогда можно моделировать ненаблюдаемый фактор в виде случайных рядов:

$$\xi_1^i, \xi_2^j, \xi_3^j, \dots, \xi_N^j, \quad j = 1, \dots, N \quad (15.14)$$

где верхний индекс соответствует номеру моделируемого ряда (всего моделируется N' таких статистически эквивалентных рядов), а нижний индекс соответствует моменту дискретных рядов,

ного времени. Поскольку каждый из этих рядов имеет такие же статистические свойства, что и реальный фактор ξ , это позволяет исследовать свойства модели (15.13).

15.3. Семиотические модели

Синтез любой модели является процессом формализации описания объекта или системы, т. е. переходом от естественного языка к формализованному (аналитическим уравнениям, имитационной модели, графу и т. д.). Это всегда представляется затруднительным, особенно при описании сложных систем. С этой трудностью можно справиться, если заранее оговорить смысл употребляемых понятий. Тогда описание на естественном языке можно формализовать, т. е. записать в символической форме с помощью определенных знаков, связанных с понятиями естественного языка. Подобная модель называется семиотической (от слова семиотика-наука о знаковых системах) и очень близка к естественному языку. Круг систем, которые можно описать с помощью семиотических моделей, очень широк, это практически все объекты, которые могут быть описаны на естественном языке.

Чтобы построить семиотическую модель, необходимо знать язык описания этих моделей. Очень распространенным языком является достаточно простой язык бинарных отношений. Вначале рассмотрим словарь этого языка. В него входят:

1) базовые понятия, их принято обозначать символами a_i , $i = 1, 2, \dots$. Базовые понятия порождаются объектом и вводятся по мере его описания, т. е. это элементы, из которых состоит рассматриваемый объект. Например, a_1 – "печь", a_2 – "шихта" и т. д.;

2) базовые отношения, их обозначают символами r_j , $j = 1, 2, \dots$. Базовые отношения указывают на отношения, существующие между базовыми понятиями. Эти отношения универсальны, для естественного языка выделено примерно 200 отношений, например, r_1 – "загружается в", "находиться в" и т. д. Базовые отношения обуславливают понятие бинарности в этом языке, т. е. данное отношение между двумя понятиями или есть или его нет, третьего не дано;

3) имена. К именам относятся различные названия предметов, которые используются и в естественном языке. Имена принято обозначать b_k , $k = 1, 2, \dots$. Для введения имен имеется специальное базовое отношение r_0 – "иметь имя". К именам относятся не только имена собственные, как в естественном языке, но и имена, которые конкретизируют понятия или отражают их специфику. Например, b_1 – "металлургический", b_2 – "гранулированная", $b_3 = 3$, где число "3" – это имя и т. д.

Мы рассмотрели словарь языка бинарных отношений. Каждое слово в этом языке связано с описываемым объектом и имеет конкретное содержание, т. е. в каждом индивидуальном случае будет свой словарь базовых понятий, отношений и имен, связанный с объектом.

Рассмотрим также синтаксис этого языка, который указывает, как строить синтаксически правильные фразы.

Существуют следующие виды синтаксически правильных фраз A :

а) $A = a_i$, т. е. любое базовое понятие является синтаксически правильной фразой;

б) $A = (a_i r_j a_k)$, где a_i , a_k – любые базовые понятия; r_j – любое базовое отношение, кроме r_0 – "иметь имя". Это выражение означает, что два базовых понятия, объединенных базовым отношением, являются синтаксически правильной фразой;

в) $A = (A_i r_j A_k)$, где A_i , A_k – синтаксически правильные фразы, r_j – любое базовое отношение, кроме r_0 . Это выражение означает, что две синтаксически правильные фразы, связанные базовым отношением, являются синтаксически правильной фразой;

г) $A = (A_j r_0 b_k)$, где A_j – синтаксически правильная фраза; b_k – любое имя, т. е. синтаксически правильная фраза, имеющая любое имя, является синтаксически правильной фразой.

Других видов синтаксически правильных фраз нет.

Рассмотрим для примера ситуацию, описанную следующей фразой естественного языка "медный концентрат загружается в рудно-термическую печь". Опишем эту ситуацию на языке бинарных отношений.

Вводим базовые понятия:

a_1 – "концентрат", a – "печь", затем базовые отношения;

r_0 – "иметь имя";

r_1 – "загружается в", далее вводим имена;

b_1 – "медный";

b_2 – "рудно-термическая".

Составим фразы, с помощью которых будем описывать ситуацию:

$A_1 = (a_1 r_0 b_1)$ – "концентрат медный";

$A_2 = (a_2 r_0 b_2)$ – "печь рудно-термическая";

$A_3 = (A_1 r_1 A_2)$ – "концентрат медный, загружается в печь рудно-термическую".

Это очень простой пример применения языка бинарных отношений для описания производственной ситуации. Вообще, этот язык позволяет описывать символически весьма сложные ситуации в сложных системах и выявлять новые важные свойства. Для этого используются различные формальные преобразования, позволяющие изменять в нужную сторону исходное описание объекта.

Семиотические модели являются наиболее перспективными моделями описания сложных объектов, на них основано ситуационное управление большими системами, для которых точная математическая модель либо отсутствует, либо ее использование из-за громоздкости практически нецелесообразно.

Ситуационное управление вытекает из модельной теории мышления, ряд положений которой разработан Пospelовым Д.А. и Пушкиным В.Н.

15.4. Экспертные системы и их применение для моделирования

В задачу этого направления входят исследования и разработка программ, использующих знания и процедуры вывода для решения задач, являющихся трудными для людей-экспертов.

Огромный интерес к экспертным системам со стороны пользователей вызван, по крайней мере, тремя причинами. Во-первых, они ориентированы на решение широкого круга задач в неформализованных областях, на приложения, которые до недавнего времени считались малодоступными для вычислитель-

ной техники. Во-вторых, с помощью экспертных систем специалисты, не знающие программирования, могут самостоятельно разрабатывать интересные их приложения, что позволяет резко расширить сферу использования вычислительной техники. В-третьих, экспертные системы при решении практических задач достигают результатов, не уступающих, а иногда и превосходящих возможности людей-экспертов.

Основным преимуществом инструментальных методов экспертных систем является возможность использования знаний, опыта и интуиции человека для оценки статических и динамических характеристик вновь создаваемых систем.

15.4.1. Производственные системы с искусственным интеллектом (ПСИИ)

Сложность, существенная нелинейность, неопределенный характер исходной информации и другие подобные факторы часто снижают эффективность существующих систем управления и, в первую очередь, это происходит из-за неполной адекватности используемых в этих системах управления моделей и алгоритмов, не позволяющих в достаточной мере формализовать профессиональные знания лица, принимающего решения. Эту проблему позволяют успешно решить методы и модели искусственного интеллекта, в частности производственные системы, базирующиеся на знаниях, или, как их еще называют, производственные системы с искусственным интеллектом (ПСИИ). Важное место в теории искусственного интеллекта занимает проблема представления знаний. Рассмотрим, что мы будем понимать под знаниями, и чем они отличаются от данных.

Знания – это совокупность сведений о мире, включающих в себя информацию о свойствах объектов, закономерностях процессов и явлений, правилах использования этой информации для принятия решений. Существенным отличием знаний от данных является их интерпретируемость. Знания всегда содержательны в отличие от данных, для интерпретации которых необходимы соответствующие программы, не несущие содержательной информации. Знания характеризуются наличием ситуатив-

ных связей, определяющих ситуативную совместимость отдельных событий и фактов, и в знаниях обязательно присутствуют отношения, например, вида «тип-подтип», «элемент-множество» и т. д.

В общем виде модели представления знаний могут быть условно разделены на концептуальные и эмпирические. Концептуальная модель дает эвристический метод для решения выбранной проблемы, но это описание не дает гарантии того, что может применяться во всех практических ситуациях. Такая модель позволяет распознать проблему, уменьшает время для ее предварительного анализа.

Для практического использования концептуальной модели ее необходимо преобразовать в эмпирическую. Эмпирические модели, как правило, описательного характера и могут варьироваться от простого набора правил до полного описания того, как лицо, принимающее решение, решает поставленную задачу.

Модели представления знаний можно также условно разделить на декларативные и процедуральные.

Декларативная модель представления знаний основывается на предположении, что проблема представления некоторого объекта, совокупности объектов, какой-то предметной области решается независимо от того, как эти знания потом будут использоваться. Такая модель как бы состоит из двух частей: статистических описательных структур знаний и механизма вывода, оперирующего этими структурами и независимого от их содержания.

В декларативных моделях не содержатся в явном виде описания выполняемых процедур, а в них включается множество утверждений.

В процедуральных моделях знания содержатся в процедурах, представляющих собой небольшие программы, которые определяют, как выполнять различные действия или как поступать в различных ситуациях. Для повышения эффективности процедуральных моделей в них можно вводить дополнительные знания о применении, т. е. знания о том, как использовать уже накопленные знания для решения поставленной задачи.

Рассмотрим различные формы моделей представления знаний.

Широко используются продукционные модели, которые представляют собой набор правил вида «условия – действие», где условиями являются утверждения о содержимом некой базы данных, а действия представляют собой процедуры, которые могут изменять содержание базы данных.

База данных таких моделей представляет собой переменную часть системы, в то время, как правило, и интерпретатор чаще всего не меняются. Продукционные модели обладают свойством модульности, поэтому правила могут быть добавлены или удалены без возникновения неожиданных побочных эффектов.

В базе данных системы хранятся известные факты о некоторой предметной области, объекте или совокупности объектов. Продукционные правила (продукции) содержат специфические для данной области (объекта) знания о том, какие дополнительные факты могут быть допущены, если специфические данные найдены в базе данных.

Продукционные модели из-за модульного представления знаний, легкого расширения и модификации нашли широкое применение в экспертных системах.

Перспективной формой представления знаний являются фреймы. Понятия «фреймы» были введены М. Минским для описания стереотипных объектов, событий или ситуаций. Согласно его определению, фреймы – это минимальные структуры информации, необходимые для представления класса объектов, явлений или процессов.

С каждым фреймом связана информация: как использовать фрейм; что делать, если происходит что-то непредвиденное. Для организации связи между объектами предметной области строится сеть фреймов.

Как уже неоднократно отмечалось, при разработке систем управления важным вопросом является построение адекватной модели объекта. При этом необходимо учитывать большое число переменных, что делает неэффективным формирование модели вручную. Конкретным примером использования фреймовых моделей, например, в нефтеперерабатывающем производстве является автоматизация процесса построения моделей плани-

рования нефтеперерабатывающего предприятия. Еще одной важной схемой представления знаний являются семантические сети, под которыми понимают направленный граф с помеченными вершинами и дугами, где вершины соответствуют конкретным объектам, а дуги, их соединяющие, отражают имеющиеся между ними отношения.

Семантические сети нашли применение в основном в системах обработки естественного языка, частично в вопросно-ответных системах, а также в системах искусственного зрения.

Для логического представления знаний используется логика предикатов первого порядка. При таком подходе знания о некотором объекте или предметной области представляются в виде совокупности логических формул. Логические представления легки для понимания, однако недостатком этих представлений является потребление больших объемов памяти компьютера.

Многие понятия человеческих знаний являются слишком сложными для того, чтобы использовать для их представления только традиционные детерминированные или стохастические методы. Трудности возникают из-за того, что многие понятия вследствие субъективности человеческого мышления, приблизительного характера умозаключений и лингвистической неопределенности оказываются нечеткими по своей природе. Для формализации знаний такого типа используется теория нечетких множеств, созданная американским ученым Л. Заде. Особый интерес теория нечетких множеств вызывает в связи с моделированием объектов при разработке экспертных систем.

Рассмотрим, как с помощью теории нечетких множеств можно моделировать процесс управления технологической установкой.

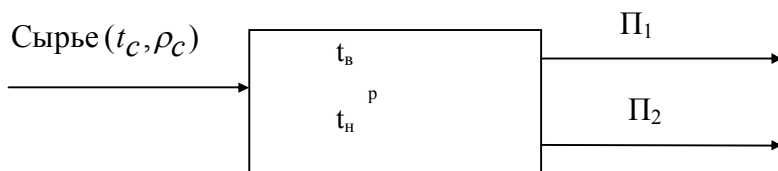


Рис. 11

На вход установки (рис. 11) поступает сырье, характеризующееся температурой t_c и плотностью ρ_c . Основными управляемыми переменными установки являются давление P , температура верха t_g и температура низа t_n колонны. На выходе установки получают продукты Π_1 и Π_2 . Переменные t_c, ρ_c, P, t_g, t_n будем рассматривать как лингвистические переменные.

Как известно, лингвистической называют переменную, если значениями являются слова или фразы естественного языка. Лингвистическая переменная описывается набором (X, T, U, G, M) , где X – название переменной, T – терм-множество переменной X , т. е. множество всех названий лингвистических значений переменной X , причем каждое из этих значений является нечеткой переменной X со значениями из универсального множества U с базовой переменной u ; G – синтаксическое правило, порождающее название X значения переменной X ; M – семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечеткой переменной X смысл $M(X)$. Конкретное значение X , порожденное синтаксическим правилом G , называется термом.

Нечеткое подмножество M определяется как некоторое множество в X с функцией принадлежности $\mu_M(X)$, принимающей значения из интервала $[0, 1]$:

$$M = \int_{x_0} \mu_M(X) / X,$$

где $\mu_M : X \rightarrow [0, 1]$ – функция принадлежности.

Будем считать, что на основе изучения технологического объекта было установлено, что наиболее существенными для управления являются следующие переменные: температура верха колонны (t_g), температура низа колонны (t_n) и давление P . Область изменения каждой из этих переменных также известна, так, область изменения $t_g - [200-400 \text{ } ^\circ\text{C}]$; $t_n - [90-300 \text{ } ^\circ\text{C}]$; $P - [40 \div 70 \text{ атм}]$.

Допустим, на основании опроса экспертов для рассматриваемых лингвистических переменных были определены следующие терм множества:

$T(\text{температура } t_{\theta}) = \text{низкая} + \text{средняя} + \text{высокая};$

$T(\text{температура } t_H) = \text{низкая} + \text{средняя} + \text{высокая};$

$T(\text{давление } P) = \text{ниже нормы} + \text{норма} + \text{выше нормы}.$

Области изменения продуктов Π_1 и Π_2 находятся соответственно в интервале $[90, 300]$ и $[120, 250]$. Соответствующие терм-множества запишутся в виде:

$T(\text{выход продукта } \Pi_1) = \text{малый} + \text{средний} + \text{большой};$

$T(\text{выход продукта } \Pi_2) = \text{малый} + \text{средний} + \text{большой}.$

Для каждого терма из терм-множеств, определенных для лингвистических переменных, строится соответствующее нечеткое множество M со своим носителем, определяемым на основе опроса экспертов. При этом под носителем нечеткого множества понимают множество X' такое, что

$$X' = \{x / \mu_{\alpha}(\alpha) > 0, x \in X^1\}.$$

Результаты этого этапа моделирования приводятся в табл. 2.

Таблица 2

Наименование лингвистической переменной	Термы	Носитель нечеткого множества
Температура верха колонны t_{θ}	Низкая Средняя Высокая	200–250 240–330 321–400
Температура низа колонны t_H	Низкая Средняя Высокая	90–220 190–250 245–300

Продолжение табл. 2

Наименование лингвистической переменной	Термы	Носитель нечеткого множества
Давление Р	Выше нормы Норма Ниже нормы	321–400 50–63 40–51
Выход продукта Π_1	Малый Средний Большой	90–158 147–236 230–300
Выход продукта Π_2	Малый Средний Большой	120–156 151–210 208–250

На следующем этапе строится набор правил, описывающих технологический процесс. Правила имеют вид:

ЕСЛИ $A = N$, то $B = M$,

где A, B – лингвистические переменные; N, M – термы соответствующих лингвистических переменных. Например, одно из правил имеет вид:

ЕСЛИ температура низа колонны = < низкая > ,

то выход продукта Π_1 = < большой > .

Затем на основе набора правил строится матрица нечетких отношений. Если их несколько, то далее все построенные матрицы объединяются.

Для организации логического вывода (в нашем случае – это определение выхода продукта) используется композиционное правило вывода.

Рассмотренный метод моделирования сложных объектов, использующий правила нечеткого условного вывода общей структуры вида: ЕСЛИ... ТО...ИНАЧЕ..., достаточно эффективен. Это подтверждает опыт использования полученных таким образом моделей при управлении различными непрерывными и дискретными технологическими объектами. Подобные модели являются продуктом экспертного опроса технологов-операторов, владеющих информацией качественного характера,

что позволяет в полученной модели учесть сложные внутренние взаимосвязи моделируемого объекта. Такой подход может быть с успехом использован при моделировании систем, для которых сбор статистической информации затруднен или полностью исключен.

15.5. Применение нейроинформационных технологий

В настоящее время значительно расширились исследования в области использования нейронных сетей в различных сферах, в т. ч. в автоматизации различных объектов.

Актуальность исследований искусственных нейронных сетей подтверждается многообразием их возможных применений. Теория нейронных сетей является алгоритмическим базисом развития нейрокомпьютеров, подобно тому, как булева алгебра более 50 лет являлась алгоритмическим базисом однопроцессорных и многопроцессорных ЭВМ.

Нейронная сеть – это сеть с конечным числом слоев из однотипных элементов – аналогов нейронов с различными типами связей между слоями. При этом число нейронов в слоях выбирается исходя из необходимости обеспечения заданного качества решения задачи, а число слоев нейронов – как можно меньшее для сокращения времени решения задачи.

Развитие искусственных нейронных сетей вдохновлялось и вдохновляется биологией. Однако наши знания о работе мозга ограничены, и разработчикам искусственных нейронных сетей приходится выходить за пределы современных биологических знаний в поисках структур, позволяющих выполнять полезные функции. Так часто создаются сети, невозможные в живой материи или требующие неправдоподобно больших допущений об анатомии и функционировании мозга.

Нервная система человека, построенная из элементов, называемых нейронами, очень сложна. Около 10^{11} нейронов участвуют в примерно 10^{15} передающих связях. Уникальными способностями нейронов являются прием, обработка и передача электрохимических сигналов по нервным путям, которые образуют коммуникационную систему мозга.

Несмотря на огромное количество нейронов, их тела занимают всего несколько процентов общего объема мозга. Почти все остальное пространство занято межнейронными связями. Число связей каждого нейрона не имеет аналогов в современной технике. Понимание того, что межнейронные связи относятся к основным структурным компонентам мозга, в первую очередь, определяющим его функциональные характеристики, является одним из наиболее существенных выводов, сделанных нейрофизиологами.

Искусственный нейрон имитирует в первом приближении свойства биологического нейрона. Он обладает группой синапсов – однонаправленных входных связей, соединенных с выходами других нейронов, а также имеет аксон – выходную связь данного нейрона, с которой сигнал (возбуждения или торможения) поступает на синапсы следующих нейронов. Каждый вход умножается на соответствующий вес, аналогичный синаптической силе, и все произведения суммируются, определяя уровень активации нейрона. Общий вид нейрона, реализующего эти свойства, приведен на рис. 12. Здесь множество входных сигналов обозначены вектором X . Каждый вес w_i соответствует «силе» одной биологической синаптической связи. Множество весов в совокупности обозначается вектором W .

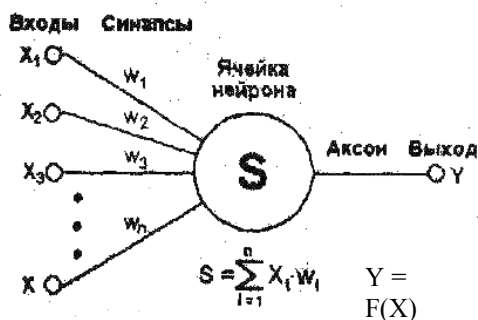


Рис. 12. Искусственный нейрон

Суммирующий блок, соответствующий телу биологического элемента, складывает взвешенные входы алгебраически

$$S = \sum_{i=1}^n x_i \bullet w_i . \quad (15.15)$$

Выход нейрона является функцией его состояния

$$Y = F(x) \quad (15.16)$$

Нелинейная функция F называется активационной и может иметь различный вид, в частности, как показано на рис.12.

В случае, когда функция активации одна и та же для всех нейронов в сети, сеть называют однородной (гомогенной). Если же активационная функция зависит еще от одного или нескольких параметров, значения которых меняются от нейрона к нейрону, то сеть называют неоднородной (гетерогенной).

Говоря о возможности классификации нейронных сетей, важно отметить существование бинарных и аналоговых сетей. Первые из них оперируют с двоичными сигналами, и выход каждого нейрона может принимать только два значения: логический ноль («заторможенное» состояние) и логическая единица («возбужденное» состояние). В аналоговых сетях выходные значения нейронов способны принимать непрерывные значения. Еще одна классификация делит нейронные сети на синхронные и асинхронные. В первом случае в каждый момент времени свое состояние меняет лишь один нейрон. Во втором – состояние меняется сразу у целой группы нейронов, как правило, у всего слоя. Для программных имитаторов нейронных сетей на цифровых ЭВМ, вопросы, связанные с синхронизацией, решаются компьютером, на котором реализуются нейронные сети.

Рассмотренная простая модель искусственного нейрона существенно упрощает ряд свойств своего биологического двойника. Например, она не принимает во внимание задержки во времени, которые воздействуют на динамику системы. Входные сигналы сразу же порождают выходной сигнал. И, что более важно, она не учитывает воздействие синхронизирующей функции биологического нейрона, которую ряд исследователей считают решающей. Несмотря на эти ограничения, сети,

построенные из этих нейронов, обнаруживают свойства, сильно напоминающие биологическую систему.

Применение искусственных нейронных сетей в системах управления
Особенности использования искусственных нейронных сетей в
системах управления

В историческом плане можно утверждать, что разработка систем управления (СУ) всегда происходит поэтапно. В качестве таких этапов можно выделить:

- этап разработки концепции построения СУ;
- этап моделирования СУ, в соответствии с предлагаемой концепцией построения;
- этап анализа получаемых результатов;
- этап доработки (модернизации) концепции построения СУ.

На протяжении всех этих этапов не прекращаются теоретические исследования, которые позволяют выбирать основные направления совершенствования первоначально сформулированной концепции построения СУ и распространять ее основные идеи на ряд смежных областей.

По аналогичной схеме происходит развитие систем управления (СУ), использующих искусственные нейронные сети. Однако следует заметить, что большое количество разработанных аппаратных и программных моделей нейросетевых СУ часто опережают теоретическое понимание происходящих при этом процессов и имеющихся проблем.

Необходимым этапом решения задач управления нелинейными динамическими системами является получение их адекватных математических моделей, базирующихся, как правило, на теоретическом и экспериментальном анализе свойств этих систем. Теоретический анализ процессов, происходящих в системе, позволяет получить математическое описание в виде, например, дифференциальных уравнений. При экспериментальном анализе на основе наблюдений входных и выходных сигналов системы получают либо ее параметрическую, либо непараметрическую модель. Наиболее широкое распространение получили параметрические модели, требующие решения задач струк-

турной и параметрической идентификации и использующие ограниченное число параметров. Несмотря на огромное количество работ, многообразие видов нелинейностей не позволяет создать единую теорию идентификации нелинейных систем. Применяемый чаще всего классический подход основан на аппроксимации нелинейностей, например рядами Вольтерра, Винера и др. Однако область применения таких моделей ограничена. Кроме того, дополнительные трудности получения адекватного математического описания обусловлены наличием в реальных сигналах помех.

Одной из классических моделей систем управления является модель с обратной связью с регулируемым в реальном масштабе времени коэффициентами, например самонастраивающийся регулятор Астрома. Коэффициенты такого контроллера регулируются в течение каждого цикла управления в соответствии с оценкой параметров системы. Блок-схема управления с обратной связью и регулируемым в реальном масштабе времени коэффициентами приведена на рис. 13.

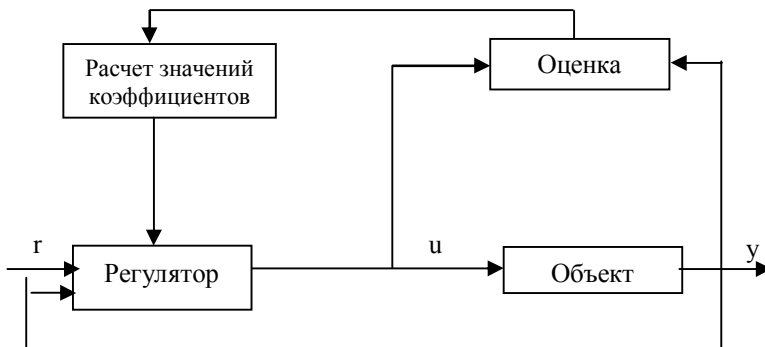


Рис. 13. Блок-схема управления обратной связью с регулируемым коэффициентом

Другой хорошо известной моделью систем управления является модель Ляпунова. Системы адаптивного управления, использующие эталонную модель Ляпунова, проектируются таким образом, чтобы выходной сигнал управляемой модели в конце концов соответствовал выходному сигналу предвари-

тельно определенной модели, которая имеет желаемые характеристики. Такая система должна быть асимптотически устойчивой, то есть управляемая система в итоге отслеживает эталонную модель с нулевой ошибкой. Более того, переходные процессы на этапе адаптивного управления или обучающего управления имеют гарантированные пределы. Блок-схема адаптивного управления с эталонной моделью представлена на рис.14.

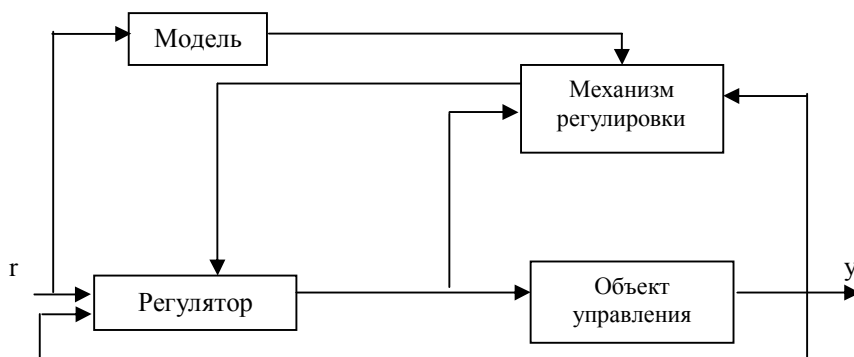


Рис.14. Блок-схема адаптивного управления с эталонной моделью

Системы управления, так или иначе использующие искусственные нейронные сети, являются одной из возможных альтернатив классическим методам управления. Возможность использования нейронных сетей для решения задач управления во многом основывается на том, что нейронная сеть, состоящая из двух слоев и имеющая в скрытом слое произвольное большое количество узлов, может аппроксимировать любую функцию действительных чисел с заданной степенью точности. Доказательство этого положения, основано на известной теореме Вейерштрасса. Таким образом, для решения задач идентификации и управления могут быть использованы нейронные сети даже с одним скрытым слоем.

Одним из первых используемых методов построения нейросетевых систем управления был метод, основанный на «копировании» существующего контроллера. Применив этот метод

в 1964 г. Уидроу назвал его методом построения экспертной системы за счет получения знаний от уже существующего эксперта. Архитектура такой системы управления представлена на рис. 15.

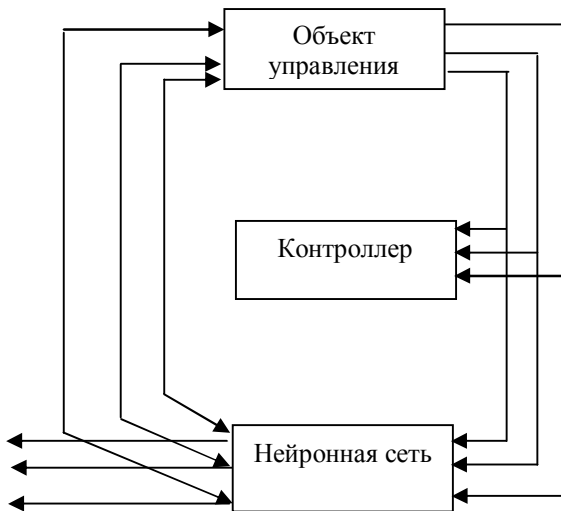


Рис. 15. Нейросетевая СУ, основанная на «копировании» существующего контроллера

Глядя на этот рисунок можно усомниться в полезности этого метода. Зачем нужно использовать еще один управляющий контроллер (в виде НС), если один уже существует? Однако, во-первых, существующий контроллер может быть неудобен при использовании (например, в роли такого контроллера может выступать человек), а во-вторых, для выработки эффективного управления НС может использовать отличную, от существующего контроллера, по способу представления (легче измерить, формализовать и т. д.) информацию о состоянии объекта управления.

В настоящее время достаточно хорошо разработан и широко используется целый ряд других возможных архитектур построения нейросетевых систем управления. Во всех из них, назначением нейросетевого контроллера является выработка адек-

ватного управляющего сигнала для управления динамикой состояний объекта управления от начального состояния до желаемого итогового состояния. Причем смена состояний должна происходить по оптимальной траектории. Организация контроля за состоянием объекта управления и реализация нейросетевого контроллера в значительной степени зависят от выбранного алгоритма обучения и используемой структуры управления. Наиболее широко используемыми являются схема прямого (непосредственного) управления и схема косвенного управления. При этом чаще всего в качестве алгоритма обучения используется алгоритм обратного распространения ошибки.

В схеме косвенного управления параметры объекта управления определяются в каждый момент времени и затем используются для оценки параметров контроллера (рис. 16). Таким образом, имеет место явно выраженный процесс идентификации.

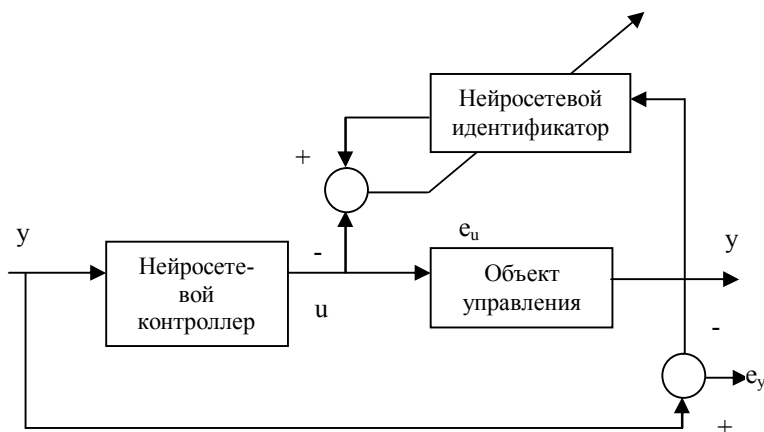


Рис. 16 Схема косвенного управления

Недостатком такой схемы является то, что идентификация и управление основываются исключительно на ошибке e_u , и, следовательно, минимизацию ошибки на выходе системы e_y гарантировать нельзя.

В схеме прямого управления параметры нейросетевого контроллера регулируются таким образом, чтобы уменьшить непосредственно ошибку выхода e_y (рис. 17).

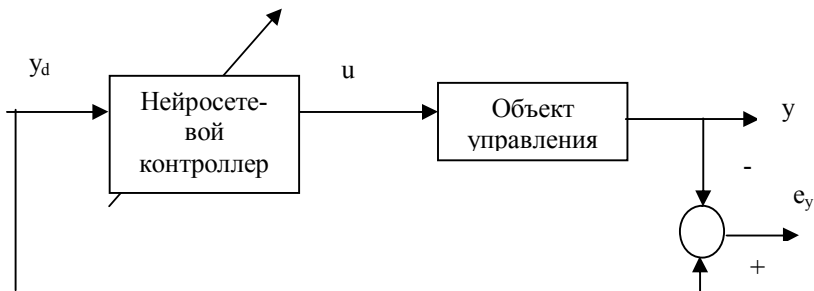


Рис. 17. Схема прямого управления

В качестве целевой функции, которая должна быть минимизирована контроллером, используется среднеквадратическая ошибка на выходе объекта управления

$$E_y = \frac{1}{2}(y_d - y)^2. \quad (15.17)$$

Одной из областей теоретических исследований, рассматривающих проблемы использования нейронных сетей в системах управления, является сравнение таких методов управления с другими известными типами систем управления, выявление присущих нейросетевым методам особенностей и их анализ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кафаров В.В., Глебов М.Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств. – М.: Высшая школа, 1991. – 400 с.
2. Введение в математическое моделирование / [В.Н. Ашихмин, М.Г. Бояришинов, М.Б. Гитман и др.]; под ред. П.В. Трусова. – М.: Интернет инжиниринг, 2000. – 336 с.
3. Ярмухамедова З.М. Физико-химические основы и математические модели типовых технологических процессов. – Алматы: КазНТУ, 1999. – 166 с.
4. Ярмухамедова З.М. Моделирование химико-технологических объектов. – Алматы: КазНТУ, 2005. – 82 с.
5. Олссон Г., Пиани Д. Цифровые системы автоматизации и управления; пер. с англ. – СПб.: Невский диалект, 2001. – 557 с.
6. Малафеев С.Н., Малафеева А.А. Моделирование и расчет автоматических систем. – Владимир: Посад, 2003. – 200 с.
7. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления; пер.с англ. – М.Мир. 1975. – 685 с.
8. Ярмухамедова З.М. Идентификация и моделирование объектов и систем. –Алматы: КазНТУ, 1999. – 95 с.
9. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 255 с.
10. Дьяконов В.П. Vissim + Mathcad + MATLAB. Визуальное математическое моделирование. – М.: СОЛОН+Пресс, 2004. – 383 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ. ВИДЫ, НАЗНАЧЕНИЕ И ФУНКЦИИ МОДЕЛЕЙ.....	3
1.1. Виды моделей.....	5
1.2. Назначение и функции различных моделей.....	7
1.3. Структура и компоненты моделирования	8
2. КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ	15
2.1. Понятие математической модели.....	15
2.2. Деление математических моделей на группы.....	16
3. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.....	21
3.1. Основные подходы к построению математических моделей.....	21
3.2. Требования, предъявляемые к математическим моделям и методам их построения.....	26
4. АНАЛИЗ ОБЪЕКТА И СТРУКТУРА ЕГО ПОТОКОВ.....	28
4.1. Производственный объект как система.....	28
4.2. Анализ объекта и структуры его материальных и энергетических потоков.....	29
4.3. Пример обобщенной структурной модели технологического объекта.....	30
4.4. Выбор наиболее существенных переменных объекта.....	32
4.4.1. Метод априорного ранжирования.....	32
5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ.....	34
5.1. Этапы построения аналитических моделей.....	34
5.2. Математические модели химической кинетики (гомогенные системы).....	36
5.3. Математические модели химической кинетики (гетерогенные системы).....	37
6. МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИКИ ПОТОКОВ.....	44
6.1. Математическое описание массообмена материальных потоков в пространстве аппарата.....	44
6.2. Типовые модели структуры потоков.....	46

7. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ.....	53
7.1. Основные группы процессов теплообмена.....	53
7.2. Математическое описание различных групп тепловых потоков.....	55
8. МОДЕЛИРОВАНИЕ МАССООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ....	60
8.1. Блочный принцип описания процессов массопередачи	60
8.2. Математическое описание процесса адсорбции в непод- вижном слое сорбента.....	61
8.3. Математическое описание экстракции в насадочной колонне.....	62
9. СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	65
9.1. Особенности синтеза математических моделей с сосредоточенными параметрами.....	65
9.2. Математическая модель с сосредоточенными параметрами для автоклавного выщелачивания глинозема....	69
10. СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	74
10.1. Основные методы синтеза моделей с распределенными параметрами.....	74
10.2. Математическая модель с распределенными парамет- рами, описывающая процесс обезуглероживания.....	75
11. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИДЕНТИФИКАЦИИ	79
11.1. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость	79
11.2. Постановка задачи идентификации	80
11.3. Классификация задач идентификации и оценивания....	81
11.4. Информационное множество, используемое для решения задачи идентификации.....	82
12. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ.....	85
12.1. Идентификация линейных детерминированных объектов.....	85
12.2. Математическое описание детерминированной систе- мы в пространстве состояний.....	90
12.3. Идентификация линейных стохастических объектов....	94
12.4. Идентификация нелинейных объектов.....	95

12.4.1. Идентификация методом статистической линейаризации...	95
12.4.2. Идентификация с использованием рядов Вольтерра...	96
12.4.3. Дисперсионные методы идентификации.....	98
13. АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ.....	106
13.1. Методы идентификации объектов в адаптивных системах.....	106
13.2. Итерационные (адаптивные) алгоритмы построения математических моделей.....	113
13.3. Метод текущего регрессионного анализа.....	121
14. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ....	124
14.1. Статистический подход к синтезу математических моделей.....	124
14.2. Метод множественного регрессионного анализа.....	127
14.3. Метод множественного корреляционного анализа.....	136
14.4. Статистическая проверка адекватности математической модели реальному объекту.....	140
15. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ	145
15.1. Математические модели управляемых систем.....	145
15.2. Имитационные модели.....	148
15.3. Семиотические модели.....	152
15.4. Экспертные системы и их применение для моделирования.....	154
15.4.1. Производственные системы с искусственным интеллектом (ПСИИ).....	155
15.5. Применение нейроинформационных технологий	162
Библиографический список.....	171

Учебное издание

Ярмухамедова Зауреш Мукашевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ
АВТОМАТИЗАЦИИ**

Учебное пособие

Нач. РО	<i>З. Губайдулина</i>
Редактор	<i>З. Губайдулина</i>
Компьютерная верстка	<i>Л. Касжанова</i>

Подписано в печать 24.04.2013 г.

Тираж 300 экз. Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 1.

Уч.-изд.л. 11,0. Усл.п.л. 10,2. Заказ №66. Цена договорная

Издание Казахского национального технического университета

имени К.И. Сатпаева

Информационно-издательский центр КазНТУ

г. Алматы, ул. Сатпаева, 22

ISBN 978-601-228-505-5

